Universidad
de La Laguna

Medida de Lebesgue y la Transformación de Fourier

*Lebesgue Measure
and the Fourier Transform*

Raquel González Fariña

Trabajo de Fin de Grado

Departamento de Análisis Matemático

Facultad de Ciencias. Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 17 de junio de 2015

Dr. Dña. **Lourdes Rodríguez Mesa**, con N.I.F. 45.444.211.-Y y Dr. D. **Juan Carlos Fariña Gil**, con N.I.F. 43.615.207.-P profesores Titulares de Universidad adscritos al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*Medida de Lebesgue y la Transformación de Fourier*"

ha sido realizada bajo su dirección por Dña. **Raquel González Fariña** , con N.I.F. 54.114.444-K.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 17 de junio de 2015

Agradecimientos

A mi familia por su constante apoyo y confianza en cada reto que me propongo.

A mis tutores, Lourdes y Juan Carlos, por todas las horas de orientación, seguimiento y supervisión dedicadas a la realización de este trabajo, pero sobre todo por la motivación y el apoyo que me han prestado.

A mis compañeros, en especial a Tanausú y a David, por su amistad y colaboración.

Resumen

El presente trabajo se divide principalmente en dos partes. En la primera, abordamos en profundidad el Teorema de representación de Riesz y ciertas propiedades de regularidad de medidas de Borel positivas. Este teorema asegura la existencia de una medida que permite obtener una representación integral para un funcional lineal positivo definido sobre funciones de soporte compacto en espacios de Haudorff localmente compacto. A partir de este teorema es posible dar una construcción diferente, no constructiva, de la medida de Lebesgue.

En la segunda parte del trabajo nos centramos en el análisis de la transformación de Fourier, primero en los espacios de Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ *y* $L^2(\mathbb{R})$ *y luego en la clase de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Estudiamos las principales propiedades de la convolución y probamos el Teorema de inversión y el Teorema de Plancherel. Asimismo, se analiza el comportamiento de la transformación de Fourier sobre el espacio de funciones de Schwartz en* $\mathbb{R}$, *destacando el hecho de que es una biyección en* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Se concluye este trabajo dando dos aplicaciones de la transformación de Fourier en el campo de la física: la resolución de la ecuación del calor y una formulación matemática del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Palabras clave: Medida de Borel, teorema de Riesz, funcional lineal, transformada de Fourier, medida de Lebesgue, espacio L^p, espacio de Schwartz.

Abstract

The present work is mainly divided in two parts. In the first we deal in great detail with the Riesz's representation Theorem and certain properties enjoyed by positive Borel measures. The latter theorem asserts the existence of a measure representing a given positive linear functional defined in the space of compactly supported functions on locally compact Hausdorff spaces via integration. This allows us to present a non constructive proof of the existence of Lebesgue measure.

In the second we focus on Fourier Analysis. First we introduce the Lebesgue spaces $L^1(\mathbb{R})$ *and* $L^2(\mathbb{R})$ *and the Schwartz space* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*. After introducing the convolution and studying its main properties we give the inversion Theorem for the Fourier transform as well as Plancherel's Theorem. Moreover, we analyze the behavior of the Fourier transform on the Schwartz space highlighting the fact that it is a bijection on it.*

We conclude this memoir by giving some applications of the Fourier transform to Physics: the solution to the heat equation and a mathematical formulation of Heisenberg uncertainty principle.

Keywords: *Borel measure, Riesz's Theorem, Linear functional, Fourier transform, Lebesgue measure,* L^p *spaces, Schwartz space.*

Índice general

Prólogo

Distintos factores han motivado la realización de este trabajo, pero quizás el más destacado sea la gran relevancia que tienen la medida de Lebesgue y la Transformación de Fourier en distintos ámbitos de las matemáticas y esta última en el campo de las aplicaciones. Los alumnos del grado en matemáticas tienen su primer contacto con la teoría de la medida en la asignatura de Análisis IV, que se imparte en el sexto cuatrimestre y cuyo contenido desarrolla la integración en varias variables siempre desde el punto de vista de la integral de Riemann. Luego se continúa en la asignatura optativa "Análisis Real y Funcional" donde ya se hace un estudio más amplio y se introduce la medida de Lebesgue desde un punto de vista constructivo.

Por otro lado, la transformación de Fourier es quizás una de las herramientas más utilizadas en las aplicaciones. En la asignatura optativa "Análisis espectral de datos" solo se aborda desde un punto de vista práctico, y no existe ninguna otra donde se haga un mínimo estudio teórico.

En este trabajo titulado "Medida de Lebesgue y Transformación de Fourier" pretendemos completar y cubrir aquellos tópicos relativos a estos dos temas que no fueron abordados en las asignaturas del grado.

Aunque las cuestiones novedosas se encuentran en la segunda parte de cada uno de los dos capítulos que conforman la memoria, hemos dedicado la primera parte de ambos a recordar los conceptos de Teoría de la medida, espacios L^p y espacios de Hilbert que se necesitan para probar los resultados fundamentales del trabajo, tales como el Teorema de representación de Riesz, su utilización para dar un nuevo método de construcción de la medida de Lebesgue y la extensión de la Transformación de Fourier, inicialmente definida para funciones en $L^1(\mathbb{R})$ a funciones de $L^2(\mathbb{R})$.

Por último señalar que con el fin de facilitar la lectura del trabajo, haciéndolo lo más autosuficiente posible, en el sentido de que requiriese la menor información externa para su comprensión, hemos incluido la prueba de aquellos resultados "básicos", que no fueron vistos en el grado, o que solo fueron enunciados sin demostración. Es por ello que el número de páginas es superior al recomendado para la elaboración de estos trabajos. No obstante, creemos que la parte "novedosa" se ciñe a las recomendaciones establecidas, por lo que esperamos que no suponga ningún perjuicio.

Capítulo 1

Medida de Lebesgue

1.1. Introducción

En esta primera sección mostramos un breve repaso de algunos conceptos topológicos y de Teoría de la medida que están presentes a lo largo del trabajo y que hemos extraído de [2], [3] y [4], principalmente. A fin de conseguir que este resumen no se convierta en una mera enumeración de definiciones, proposiciones y teoremas, desarrollaremos algunas demostraciones que no se han visto a lo largo de los estudios del Grado.

El problema de la medida surge de la necesidad de calcular longitudes, áreas y volúmenes. Desde El Papiro de Moscú (1800 a.C.), uno de los documentos egipcios más antiguos conocidos, se encuentran problemas de cálculo de volúmenes y áreas. Sin embargo, es en el libro de Euclides (300 a.C.) "Los elementos", donde se encuentran las primeras demostraciones de dichos cálculos.

Durante 2000 años no hubo importantes avances, hasta que en 1883 G. Cantor (1845-1918) diera la primera definición de medida $m(A)$ de un conjunto arbitrario acotado $A \subset \mathbb{R}^n$. Más tarde, en 1887, G. Peano (1858-1932) estudió qué conjuntos eran medibles y definió la medida exterior de un conjunto.

Sin embargo, estas definiciones no eran muy rigurosas pues, por ejemplo con ellas, el conjunto de los racionales no era medible. Fue entonces cuando E. Borel (1871-1956) consideró la aditividad numerable para sus medidas, dando también una definición razonable de conjuntos de medida nula.

Finalmente, la relación entre la aditividad numerable y la integración, fue lo que permitió a Lebesgue (1875-1941) obtener resultados importantes en la teoría de la integración abstracta, tal como el teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral.

1.2. Conceptos fundamentales

σ-álgebras

Sea Ω un conjunto arbitrario. Denotamos por $\mathcal{P}(\Omega)$ al conjunto de partes de Ω.

Definición 1.2.1. *Una colección $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra en Ω, si verifica las siguientes* *propiedades:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.

2. *Es cerrada por paso al complementario:* $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

3. *Es cerrada para uniones numerables:* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Definición 1.2.2. *El par* $(\Omega,\mathcal{A})$*, donde* Ω *es un conjunto y* $\mathcal{A}$ *una* σ*-álgebra de* Ω*, se denomina espacio medible y los elementos de* $\mathcal{A}$ *conjuntos medibles.*

Pasamos ahora a la definición de σ-álgebra de Borel. Observamos que existen similitudes entre las definiciones de σ-álgebra y topología.

Recordamos que $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una *topología* si:

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$.

2. Dados $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T}$, entonces $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

3. Dada una familia arbitraria $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$, se tiene que $\underset{i\in I}{\cup} A_i \in \mathcal{T}$.

A $(\Omega, \mathcal{T})$ se le denomina *espacio topológico*, y a sus elementos *conjuntos abiertos*.

Definición 1.2.3. *Llamamos* $\sigma-$*álgebra de Borel a la generada por los abiertos de un espacio topológico* $(\Omega, \mathcal{T})$*. La denotaremos por* $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\Omega)$ *y a sus elementos los llamamos borelianos.*

Ejemplo 1.2.4. *Los abiertos y cerrados son borelianos y si el espacio es Hausdorff, entonces los compactos, al ser cerrados, también lo son.*

Proposición 1.2.5. *Las siguientes familias generan la* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*:*

(a) $\mathcal{C}_1 = \{(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n),\ \text{con } a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$,

(b) $\mathcal{C}_2 = \{(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n],\ \text{con } a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$,

(c) $\mathcal{C}_3 = \{H_b = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \leq b,\ \text{para algún } 1 \leq i \leq n\},\ b \in \mathbb{R}\}$.

1.2.1. El concepto de medida

Definición 1.2.6. *Una medida positiva* μ *en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A})$*, es una función no negativa*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

verificando:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) μ *es numerablemente aditiva, es decir, dada una sucesión de conjuntos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ *disjuntos dos a dos y tal que* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(inmediato si* $\mathcal{A}$ *es* σ*-álgebra) se cumple que*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si la condición (b) solo se da en el caso de sucesiones finitas, diremos que la medida es *aditiva.*

Definición 1.2.7. *Una medida es* σ*-finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$*, tal que* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ *y* $\mu(A_n) < \infty$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definición 1.2.8. *La terna* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, donde* μ *es una medida positiva sobre la* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *de* Ω*, se llamará espacio de medida.*

Definición 1.2.9. *Un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *se dirá completo si para cada* $B \subset A$*, con* $A \in \mathcal{A}$ *y* $\mu(A) = 0$*, se tiene que* $B \in \mathcal{A}$*.*

Definición 1.2.10. *Sean* μ *una medida sobre una* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *y* $E \in \mathcal{A}$*. Cuando decimos que cierta propiedad* P *se verifica en casi todo punto de* E *(abreviadamente, c.t.p. de* E*) significa que existe un conjunto* $N \in \mathcal{A}$ *tal que* $N \subset E$*,* $\mu(N) = 0$ *y* P *se verifica para todos los puntos de* $E \setminus N$*.*

A continuación mostraremos algunas propiedades que verifican las medidas.

Proposición 1.2.11. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Se tiene que:*

1. $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$*,* $A, B \in \mathcal{A}$*.*
2. *Si* $A \subset B$*, entonces* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*,* $A, B \in \mathcal{A}$*.*
3. *Si* $A \subset B$*, entonces* $\mu(A) \leq \mu(B)$*,* $A, B \in \mathcal{A}$*.*
4. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$*,* $A, B \in \mathcal{A}$*.*
5. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*
$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$
6. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{A}$*. Entonces* $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$*, cuando* $n \to \infty$*.*
7. *Si* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente en* $\mathcal{A}$ *y* $\mu(A_1) < \infty$*, entonces* $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$*, cuando* $n \to \infty$*.*

Definición 1.2.12. *Sean* $(X, \mathcal{M})$ *y* $(Y, \mathcal{N})$ *espacios medibles, diremos que la función* $f : X \to Y$ *es* $(\mathcal{M}, \mathcal{N})-$*medible si para todo* $E \in \mathcal{N}$*, se tiene que* $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$*.*

Salvo que se mencione otra cosa, si $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{C}$, se dice que f es medible si es $(\mathcal{M}, Borel)$-medible.

1.2.2. Funciones simples e integración de funciones no negativas

Recordemos que, dado un conjunto X, la función característica de un subconjunto $A \subset X$ se define como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Definición 1.2.13. *Toda función s compleja en un espacio de medida X cuyo rango es finito se denomina función simple. Entre ellas encontramos las funciones simples no negativas, cuyo rango es un subconjunto finito de $[0, \infty)$.*
Si s es una función simple y $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ son los distintos valores que toma, para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces es fácil ver que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde $A_i = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\}$, $i = 1, ..., n$.

Teorema 1.2.14. *Sean X un espacio medible y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible en X. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sobre X que cumplen:*

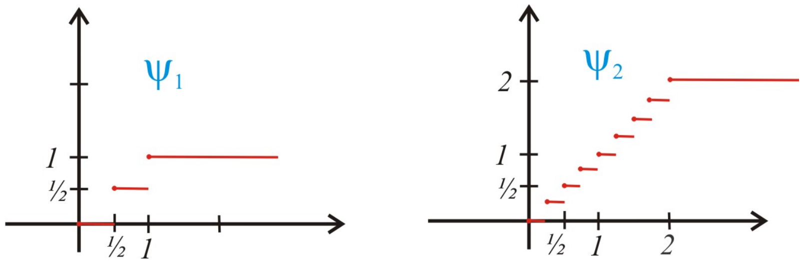
(a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$.

(b) $s_n(x) \longrightarrow f(x)$, *cuando* $n \to \infty$, *para todo* $x \in X$.

Demostración. Sea $\delta_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$, existe un único entero $k = k_n(t)$ verificando $k\delta_n \leq t < (k+1)\delta_n$. Definimos las siguientes funciones:

$$\psi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)\delta_n, & \text{si } 0 \leq t < n, \\ n, & \text{si } n \leq t < \infty. \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En la figura siguiente presentamos la gráfica de las funciones ψ_n, para $n = 1, 2$.



Para cada $n \in \mathbb{N}$, ψ_n es una función de Borel creciente en $[0, \infty)$. Además, de la definición de ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, y la elección de $k_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

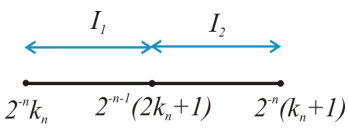
$$\psi_n \leq t, \quad t \in [0, \infty) \qquad \text{y } t - \delta_n \leq \psi_n, \quad t \in [0, n].$$

Por otro lado, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones, es decir, $0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq ....$ En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$. Distinguimos tres casos.

En el primero, suponemos que $t \geq n+1$. En este caso $\psi_n(t) = n$ y $\psi_{n+1}(t) = n+1$, con lo que $\psi_n(t) \leq \psi_{n+1}(t)$. En segundo lugar, si $n \leq t < n+1$ entonces, $\psi_n(t) = n$ y como ψ_{n+1} es creciente en $[0, \infty)$

$$\psi_{n+1}(t) \geq \psi_{n+1}(n) = n = \psi_n(t).$$

Por último, consideramos $0 < t < n$ y $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n\delta_n \leq t < (k_n+1)\delta_n$. Ahora bien, el intervalo $[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n})$ podemos subdividirlo en dos intervalos $I_1 = [\frac{2k_n}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+1}{2^{n+1}})$ e $I_2 = [\frac{2k_n+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n+2}{2^{n+1}})$, de modo que $t \in I_1$ o bien $t \in I_2$ (ver dibujo).



Si $t \in I_1$, entonces $\psi_n(t) = \psi_{n+1}(t) = \frac{k_n}{2^n}$, y si $t \in I_2$, $\psi_n(t) = \frac{k_n}{2^n}$ y $\psi_{n+1}(t) = \frac{2k_n+1}{2^{n+1}}$ y por tanto, $\psi_n(t) \leq \psi_{n+1}(t)$.

Por otro lado, $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, converge puntualmente a t, para todo $t \in [0, \infty)$. Fijamos $t > 0$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $2^{-n_0} < \varepsilon$ y $t < n_0$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [\frac{k_0}{2^{n_0}}, \frac{k_0+1}{2^{n_0}})$. Por tanto, ya que $\psi_{n_0}(t) \leq \psi_n(t) \leq t$, cuando $n \geq n_0$, podemos escribir

$$|\psi_n(t) - t| = t - \psi_n(t) \leq t - \psi_{n_0}(t) = t - \frac{k_0}{2^{n_0}} \leq \frac{k_0+1}{2^{n_0}} - \frac{k_0}{2^{n_0}} = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Consideramos las funciones $s_n = \psi_n \circ f$, $n \in \mathbb{N}$, que son medibles en X pues ψ_n y f lo son. Además, por lo que hemos establecido antes, satisfacen (a) y (b).

Observamos que se trata de funciones simples. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Si $f(x) \geq n$, entonces $x \in A^n = f^{-1}[n, \infty)$ y $s_n(x) = n$, y si $f(x) \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})$, para algún $i = 0, ..., 2^n n - 1$, entonces $x \in A_i = f^{-1}[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})$ y $s_n(x) = 2^{-n}i$. Luego,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{2^n n-1} \frac{i}{2^n}\chi_{A_i} + n\chi_{A^n}, \quad x \in X.$$

□

Definición 1.2.15. *Consideramos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $s : X \to [0, \infty)$ una función simple medible. Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\chi_{A_i}$, $\alpha_i \in [0, \infty)$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, definimos la integral de s como*

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Si $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ es una función medible, se define la integral $\int_X f d\mu$ mediante

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X s d\mu, \tag{1.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples s tales que $0 \leq s \leq f$.

En los resultados siguinetes X representa un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposición 1.2.16. *Sean $f, g : X \to [0, \infty]$ funciones medibles en X. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$, $c \geq 0$.

(b) $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

(c) Si $f \leq g$, *entonces* $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Los siguientes resultados son de gran utilidad en el estudio de la teoría de la medida, a la hora de intercambiar el límite con la integral.

Teorema 1.2.17 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles sobre X y supongamos que:*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$, *para todo* $x \in X$,

(b) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $n \to \infty$, *para todo* $x \in X$.

Entonces, se verifica que f es medible y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Como consecuencia de este teorema se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 1.2.18. *Sea $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$, una función medible para cada $n \in \mathbb{N}$, y*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Entonces,

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Proposición 1.2.19. *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles en X, tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Entonces, casi todos los puntos $x \in X$ están a lo sumo en una cantidad finita de los conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lema 1.2.20 (Lema de Fatou). *Sea $f_n : X \to [0, \infty]$ una función medible en X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

1.2.3. Integración de funciones complejas

El concepto de integración puede extenderse a funciones complejas. Para ello consideramos el siguiente espacio de funciones. A lo largo de este apartado, al igual que antes, consideramos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

Definición 1.2.21. *Se define $L^1(\mu)$ como la colección de todas las funciones complejas f medibles en X tales que*

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Nótese que al ser f medible, lo es $|f|$, y la anterior integral está bien definida. A los elementos de $L^1(\mu)$ los llamamos *funciones integrables Lebesgue* (con respecto a μ).

Definición 1.2.22. *Sea $f = u + iv$, donde u y v son funciones medibles reales. Si $f \in L^1(\mu)$, se define*

$$\int_X f d\mu := \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu := \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i \int_X v^+ d\mu - i \int_X v^- d\mu, \quad (1.2)$$

donde h^+ y h^- representan la parte positiva y negativa de la función h, respectivamente, esto es, $u^+(x) = \text{máx}\{u, 0\}$ y $u^-(x) = -\text{mín}\{u, 0\}$.

Nótese que u^+, u^-, v^+ y v^- son funciones medibles reales no negativas y, en consecuencia, las integrales a la derecha en (1.2) se definen según (1.1).

Teorema 1.2.23. *Supongamos que $f, g \in L^1(\mu)$, y α y $\beta \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ y*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu. \quad (1.3)$$

Demostración. Debido a la medibilidad de f y g, se tiene que $\alpha f + \beta g$ también es medible. Además,

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty,$$

por lo que $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$.

Sea ahora $h = f + g$, donde suponemos que f y g son funciones reales en $L^1(\mu)$. Entonces,

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

esto es,

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-.$$

Por la Proposición 1.2.16 (b), se tiene que

$$\int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu,$$

y como estas integrales son finitas,

$$\int h d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

En el caso de que f y g sean funciones complejas, de la definición (1.2) y lo que hemos establecido se obtiene que

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Para terminar de probar (1.3) veamos que $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Pongamos $f = u + iv$, para u, v funciones medibles reales.

Si $\alpha \geq 0$, la propiedad se sigue por la Proposición 1.1 (a). Lo demostramos para $\alpha = -1$. Para ello escribimos

$$\int -f d\mu = \int (-f)^+ d\mu - \int (-f)^- d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu = -\int f d\mu.$$

Y si $\alpha = i$, entonces $if = -v + iu$ y

$$\int (if) d\mu = \int (-v) d\mu + i \int u d\mu = -\int v d\mu + i \int u d\mu = i \int f d\mu.$$

Teniendo en cuenta estos casos y la linealidad de la suma se obtiene (1.3). □

Otro resultado de gran interés que permite intercambiar el límite y la integral es el siguiente.

Teorema 1.2.24 (Teorema de la Convergencia Dominada). *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas medibles sobre X tal que existe*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

para todo $x \in X$. Supongamos además que para cierta función $g \in L^1(\mu)$ se verifica

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $f \in L^1(\mu)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

1.2.4. Integración como funcional lineal y preliminares topológicos

En esta sección abordaremos algunos conceptos más específicos como el de espacio vectorial complejo o funcional lineal, para posteriormente introducir algunas nociones topológicas y así dar paso a la demostración del Teorema de Riesz. La importancia de este teorema radica en que constituye la base de una forma de construcción de la medida de Lebesgue.

Espacio vectorial complejo y funcional lineal

Definición 1.2.25. *Un espacio vectorial complejo es un conjunto V a cuyos elementos llamamos vectores, y en el cual hay definidas dos operaciones, la adición y la multiplicación por escalar, cumpliendo las siguientes propiedades:*

- *A cada $x, y \in V$ le corresponde un vector $x + y \in V$ tal que*
  1. $x + y = y + x$, $x, y \in V$.
  2. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x, y, z \in V$.
  3. *Existe un único vector* 0 *tal que* $x + 0 = x$, *para todo* $x \in V$.
  4. *Para cada* $x \in V$, *existe un único vector* $-x$ *tal que,* $x + (-x) = 0$.
- *A cada $x \in V$ y α escalar complejo, se le asocia el vector $\alpha x \in V$ de forma que*
  1. $1x = x$, $x \in V$.
  2. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $x \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
  3. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
  4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $x \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Una transformación lineal de un espacio vectorial V en otro V_1, es una aplicación de V en V_1 que cumple

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda x + \beta\Lambda y, \quad x, y \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

Definición 1.2.26. *Un funcional lineal Λ es una función compleja $\Lambda : V \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface (1.4).*

En el Teorema 1.2.23 vimos que $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial, para cualquier medida positiva μ, y además

$$f \to \Lambda(f) = \int_X f d\mu$$

es un funcional lineal.

De manera similar, si g es una función medible acotada, la aplicación

$$f \to \Lambda_g(f) = \int_X fg d\mu$$

es también un funcional lineal en $L^1(\mu)$.

Otro ejemplo de funcional lineal es el siguiente: Sea $C(I)$ el conjunto de todas las funciones complejas continuas en $I = [0, 1]$. Como la suma de dos funciones continuas es continua y también lo es todo múltiplo escalar de una función continua, $C(I)$ es un espacio vectorial. Si definimos Λ como

$$\Lambda f = \int_0^1 f(x)dx, \quad f \in C(I),$$

donde la integral se considera en el sentido ordinario de Riemann, entonces Λ es un funcional lineal en $C(I)$. Además, es positivo pues, $\Lambda f \geq 0$ cuando $f \geq 0$.

Como veremos, una forma de construir la medida de Lebesgue se basa en el funcional lineal anterior de acuerdo a la siguinete observación. Consideramos un intervalo $(a,b) \subset I$, y la clase $\mathcal{C}$ de funciones $f \in C(I)$, tales que $0 \leq f \leq 1$ en I y $f(x) = 0$, para todo $x \notin (a,b)$. Tenemos pues que, $\Lambda f \leq b - a$ para cada $f \in \mathcal{C}$, pero podemos elegir f de forma que Λf se acerque a $b - a$ cuanto queramos. De esta manera, la longitud del intervalo (a,b) está íntimamente relacionada con los valores del funcional Λ.

Este procedimiento, considerado desde un punto de vista más general, nos lleva al Teorema de Riesz, que veremos más adelante y que establece que

> *A todo funcional lineal positivo Λ en $C(I)$, le corresponde una medida de Borel positiva y finita μ tal que*
>
> $$\Lambda f = \int_I f d\mu, \quad f \in C(I).$$

Preliminares topológicos

El Teorema de Riesz se estudiará en un marco muy general, y la existencia de la medida de Lebesgue se deducirá como un caso particular. Para ello, son esenciales ciertas propiedades topológicas en $\mathbb{R}^n$ como la compacidad local y algunos resultados previos.

Definición 1.2.27. *Sea X un espacio topológico. Diremos que es localmente compacto si todo punto de X tiene un entorno cuya clausura es compacta.*

Un ejemplo de espacio localmente compacto es $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.28. *Sean X un espacio de Hausdorff, $K \subset X$ compacto y $p \in K^c$. Entonces existen conjuntos abiertos U y W tales que $p \in U$, $K \subset W$ y $U \cap W = \emptyset$.*

Demostración. Sea $q \in K \subset X$. Como X es Hausdorff, se tiene que existen conjuntos abiertos U_q y V_q tales que $p \in U_q$, $q \in V_q$ y $U_q \cap V_q = \emptyset$.

Además, $K \subset \cup_{q \in K} V_q$. Ya que K es compacto podemos encontrar $q_1, q_2, ..., q_n \in K$, tales que $K \subset V_{q_1} \cup ... \cup V_{q_n}$.

Tomando $U = U_{q_1} \cap ... \cap U_{q_n}$ y $W = V_{q_1} \cup ... \cup V_{q_n}$, obtenemos el resultado. □

Teorema 1.2.29. *Sea $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff X tal que $\cap_{\alpha \in A} K_\alpha = \emptyset$. Entonces, alguna subcolección finita de $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tiene también intersección vacía.*

Demostración. Sea $V_\alpha = K_\alpha^c$, $\alpha \in A$. Ya que K_α, $\alpha \in A$, es cerrado, V_α es un conjunto abierto en X. Consideramos K_1 un elemento cualquiera de $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Como $\cap_{\alpha \in A} K_\alpha = \emptyset$, se tiene que

$$(\cap_{\alpha \in A} K_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in A} K_\alpha^c = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha = X.$$

Luego, $K_1 \subset \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Además, como K_1 es un subconjunto compacto, existe una colección finita $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ de forma que $K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup ... \cup V_{\alpha_n} = (\cap_{i=1}^n K_{\alpha_i})^c$.

Entonces, $\cap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \subset K_1^c$ y, por tanto,

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap ... \cap K_{\alpha_n} = \emptyset.$$

$\square$

Teorema 1.2.30. *Supongamos que* U *es un abierto en un espacio de Hausdorff localmente compacto* X, *y* $K \subset U$, *con* K *compacto. Entonces, existe un abierto* V *con clausura compacta tal que*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

Demostración. Por hipótesis, X es localmente compacto. Por tanto, para cada $p \in K$ existe un entorno B_p tal que su clausura, $\overline{B_p}$, es compacta. Luego, $K \subset \cup_{p \in K} B_p$, y como K es compacto, podemos encontrar un subrecubrimiento finito de K, es decir, $K \subset B_{p_1} \cap ... \cap B_{p_n} = G$, para ciertos $p_1, ...p_n \in K$. Ya que $\overline{G} \subset \overline{B_{p_1}}$ y $\overline{B_{p_1}}$ es compacto, $\overline{G}$ también lo es.

Si $U = X$, consideramos $V = G$. Es claro que V es abierto y al ser $\overline{V} \subset \overline{B_{p_1}} \cap ... \cap \overline{B_{p_n}} \subset \overline{B_{p_1}}$, entonces $\overline{V}$ es compacto.

Supongamos ahora que $U \neq X$. Denotamos por C al complementario de U. Por el Teorema 1.2.28, para cada punto $p \in C = U^c \subset K^c$, existe un abierto W_p tal que $K \subset W_p$ y $p \notin \overline{W}_p$.

Consideramos la familia de conjuntos $\{K_p = C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p\}_{p \in C}$. Observamos que K_p, $p \in C$, es compacto pues $K_p \subset \overline{G}$, K_p es cerrado y $\overline{G}$ es compacto. Además, $\cap_{p \in C} K_p = \emptyset$, esto es,

$$\underset{p \in C}{K}{}_p^{\ c} = \underset{p \in C}{\cup} \{C^c \cup \overline{G}^c \cup \overline{W}_p^c\} = X.$$

En efecto, sea $x \in X$. Entonces, o bien $x \in U$ y, entonces $x \in C^c = U$, o bien $x \notin U$, y, en tal caso, $x \in C \subset K^c$ y $x \notin \overline{W_x}$, esto es, $x \in \overline{W_x}^c$.

Aplicando el Teorema 1.2.29, existe un número finito de puntos $p_1, .., p_n \in C$ tales que $\cap_{i=1}^{n} K_{p_i} = \emptyset$, Luego,

$$C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap ... \cap \overline{W}_{p_n} = \emptyset. \tag{1.5}$$

El conjunto $V = G \cap W_{p_1} \cap ... \cap W_{p_n}$ tiene las propiedades deseadas. En efecto, en primer lugar V es abierto pues es intersección finita de conjuntos abiertos. Además, $K \subset V$ ya que $K \subset G$ y $K \subset W_{p_i}$, $i = 1, ..., n$. P, Por último, ya que

$$\overline{V} = \overline{G \cap W_{p_1} \cap ... \cap W_{p_n}} \subset \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap ... \cap \overline{W}_{p_n} \subset \overline{G},$$

y $\overline{G}$ es compacto, también $\overline{V}$ lo es. Además, se tiene por (1.5) que

$$\overline{V} \subset C^c = U.$$

$\square$

Recordamos a continuación el concepto de función semicontinua superior e inferiormente y damos algunos ejemplos.

Definición 1.2.31. *Sea f una función real (o real extendida) definida en un espacio topológico X. Diremos que:*

- f es semicontinua inferiormente si $f^{-1}(\alpha,\infty]$ es abierto en X.

- f es semicontinua superiormente si $f^{-1}[-\infty,\alpha)$ es abierto en X.

Una función real es continua si y solo si es semicontinua inferior y superiormente.

Los ejemplos más sencillos de funciones semicontinuas superior e inferiormente vienen dados por las funciones características.

Proposición 1.2.32. *(a) Las funciones características de conjuntos abiertos son semicontinuas inferiormente.*

(b) Las funciones características de conjuntos cerrados son semicontinuas superiormente.

(c) El supremo de una colección de funciones semicontinuas inferiormente es semicontinuo superiormente. El ínfimo de una colección de funciones semicontinuas superiormente es semicontinuo superiormente.

Demostración. Las propiedades (a) y (b) son consecuencia inmediata de la definición. Así, si $f=\chi_A$, con $A\subset X$ abierto, y $g=\chi_F$, con $F\subset X$ cerrado, se tiene que

$$f^{-1}(\alpha,\infty]=\begin{cases} X, & \text{si } \alpha<0,\\ A, & \text{si } 0\le\alpha<1,\\ \emptyset, & \text{si } \alpha\ge 1,\end{cases}\qquad g^{-1}(-\infty,\alpha)=\begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha\le 0,\\ F^c, & \text{si } 0<\alpha\le 1,\\ X, & \text{si } \alpha>1.\end{cases}$$

Establecemos ahora la primera afirmación de (c). La segunda se sigue análogamente. Sea $\{f_\sigma\}_{\sigma\in A}$ una colección arbitraria de funciones semicontinuas inferiormente y $f(x)=\sup_n f_{\sigma\in A}(x)$, $x\in X$. De la igualdad

$$f^{-1}(\alpha,\infty]=\{x:\ f(x)>\alpha\}=\bigcup_{\sigma\in A}\{x:\ f_\sigma(x)>\alpha\},\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

ya que $f_\sigma^{-1}(\alpha,\infty]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, es abierto para todo $\sigma\in A$, se deduce que $\{x: f(x)>\alpha\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, es abierto. Luego, f es semicontinua inferiormente. □

Definición 1.2.33. *El soporte de una función compleja f definida en un espacio topológico X es la clausura del conjunto $\{x\in X:\ f(x)\neq 0\}$.*

Denotamos por $C_c(X)$ al conjunto de todas las funciones complejas definidas en X, que son continuas y con soporte compacto. Nótese que $C_c(X)$ es un espacio vectorial pues la suma de funciones complejas continuas es continua, así como el producto por escalares de funciones continuas. Además, el soporte de $f+g$ está en la unión del soporte de f y el soporte de g, y la unión finita de compactos es compacta.

Teorema 1.2.34. *Sean X e Y espacios topológicos y $f: X\to Y$ una función continua. Si K es un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es compacto en Y.*

Demostración. Consideramos un compacto $K \subset X$. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$, entonces, $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de K pues f es continua. Como K es compacto, podemos encontrar un subrecubrimiento finito tal que $K \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap ... \cap f^{-1}(V_{\alpha_n})$, para ciertos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$, y por tanto

$$f(K) \subset V_{\alpha_1} \cap ... \cap V_{\alpha_n},$$

y obtenemos que $f(K)$ es compacto. □

Corolario 1.2.35. *El recorrido de toda función $f \in C_c(X)$ es un subconjunto compacto del plano complejo.*

Demostración. Basta observar que si $f \in C_c(X)$ y K es el soporte de f, entonces $f(X) \subset f(K) \cup \{0\}$. □

Introducimos la siguiente notación que facilitará la escritura del Lema de Urysohn que utilizaremos principalmente en la prueba del Teorema de Riesz.

- Escribimos $K \prec f$ para indicar que K es compacto, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ y $f(x) = 1$, $x \in K$.
- Usamos $f \prec V$ para indicar que V es abierto, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$, y el soporte de f está en V.

La expresión $K \prec f \prec V$ significa que se verifican las dos propiedades anteriores a la vez, lo que en términos de funciones características, quiere decir que f es continua y $\chi_K \leq f \leq \chi_V$.

El siguiente resultado será fundamental en lo que sigue.

Proposición 1.2.36 (Lema de Urysohn). *Supongamos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, V abierto en X y $K \subset V$, siendo K compacto. Entonces, existe una función $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f \prec V$.*

Demostración. Tenemos que probar que $K \prec f \prec V$ para cierta función f.

Sea $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales en $(0, 1)$, de modo que $r_1 = 0$ y $r_2 = 1$.

Por el Teorema 1.2.30, podemos encontrar un conjunto abierto V_{r_1} tal que $K \subset V_{r_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset V$, y otro conjunto abierto V_{r_2} de forma que $K \subset V_{r_2} \subset \overline{V}_{r_2} \subset V_{r_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset V$.

Aplicamos de nuevo el Teorema 1.2.30 a $\overline{V_{r_2}}$ y V_{r_1}, y encontramos V_{r_3} abierto tal que

$$\overline{V_{r_2}} \subset V_{r_3} \subset \overline{V_{r_3}} \subset V_{r_1}.$$

Procedemos ahora inductivamente. de la siguiente forma: supongamos que hemos elegido $V_{r_1}, V_{r_2}, ...V_{r_n}$ de modo que

$$\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_i}, \quad \text{cuando } r_i < r_j.$$

Para construir $V_{r_{n+1}}$, primero elegimos en el conjunto $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ los valores r_i y r_j verificando: $r_i < r_{n+1} < r_j$ y tde modo que r_i y r_j, son los valores máximo y mínimo, respectivamente, que satisfacen esta propiedad. Entonces usando de nuevo el Teorema 1.2.30 para $\overline{V_{r_j}}$ y V_{r_i}, llegamos a que existe un abierto $V_{r_{n+1}}$, tal que

$$\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V_{r_{n+1}}} \subset V_{r_i}.$$

De esta forma hemos obtenido una sucesión de abiertos $\{V_r\}_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ verificando:
(Pa) $K \subset V_1$ y $\overline{V_0} \subset V$,
(Pb) $\overline{V_r}$ es compacto, para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$,
(Pc) Si $r < s$, entonces $\overline{V_s} \subset V_r$, $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Para cada $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ definimos las siguientes funciones:

$$f_r(x) = \begin{cases} r, & \text{si } x \in V_r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{y} \quad g_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \overline{V}_s, \\ s, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y consideramos

$$f = \sup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_r \quad \text{y} \quad g = \inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} g_s.$$

En virtud de la Proposición 1.2.32 se puede ver que f es semicontinua inferiormente y g semicontinua superiormente. Asimismo, es claro que $0 \le f \le 1$ y que $f(x) = 1$, x de K, pues $K \subset V_r$ para todo $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, en particular $r = 1$, con lo que

$$f(x) = \sup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_r(x) = 1, \quad x \in K.$$

También se cumple que el soporte de f está en $\overline{V}_0$, pues fuera de este conjunto toma el valor cero, y por tanto el soporte está en V.

Por último, para ver que f es continua, es suficiente establecer que $f = g$, pues toda función semicontinua superior e inferiormente es continua.
Prueba de que $f \le g$: Para demostrar esto, basta ver que $f_r \le g_s$, para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sean $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Si $r \le s$, entonces es claro, por la definición de f_r y g_s que

$$f_r(x) \le r \le s \le g_s(x), \quad x \in X.$$

Por otro lado, en el caso de que $s < r$, si $x \notin V$, $f_r(x) = 0 \le g_s(x)$ y, si $x \in V_r$, aplicando (Pc) se llega a que $\overline{V_r} \subset V_s$ y, entonces $f_r(x) = r \le 1 = g_s(x)$.
Supongamos que para algún $x \in X$ se tiene que $f(x) < g(x)$. Entonces, podemos encontrar dos racionales r_0, s_0 en $[0,1]$ de manera que

$$f(x) < r_0 < s_0 < g(x).$$

Ahora bien, como $f(x) < r_0$, se tiene que $f_{r_0}(x) < r_0$, por lo que $x \notin V_{r_0}$. De manera análoga, $g_{s_0}(x) > s_0$ y entonces, $g_{s_0}(x) > s_0$, y de la definición de g_{s_0}, se sigue que $g_{s_0}(x) = 1$, con lo que $x \in \overline{V_{s_0}}$. Llegamos así a un absurdo pues $\overline{V_{s_0}} \subset V_{r_0}$, al ser $r_0 < s_0$.

Se concluye, por tanto, que $f = g$ y, entonces f es continua. $\square$

Teorema 1.2.37. *Supongamos que $V_1, ..., V_n$ son subconjuntos abiertos de un espacio Hausdorff X localmente compacto, K es compacto y $K \subset V_1 \cup ... \cup V_n$. Entonces, existen funciones $h_i \prec V_i$, para $i = 1, ..., n$, tales que $h_1(x) + ... + h_n(x) = 1$, para todo $x \in K$.*

Al conjunto $\{h_1, ..., h_n\}$ se le denomina *partición de la unidad* sobre K subordinada al recubrimiento $\{V_1, ..., V_n\}$.

Demostración. Sea $x \in K$ y V_{i_x} un abierto de la familia $\{V_i\}_{i=1}^n$, tal que $x \in V_{i_x}$. Aplicando el Teorema 1.2.30 al compacto $\{x\}$ y al abierto V_{i_x}, podemos encontrar un entorno abierto de x, W_x, con clausura compacta y tal que $\overline{W}_x \subset V_{i_x}$. Luego, $K \subset \cup_{x\in K} W_x$, y, por la compacidad de K, existen $x_1, ..., x_m \in K$ tales que $K \subset W_{x_1} \cup ... \cup W_{x_m}$.

Para cada $1 \leq i \leq n$, denotamos por H_i al conjunto

$$H_i = \{\cup_j \overline{W_{x_j}} : W_{x_j} \subset V_i\}.$$

Nótese que H_i, $i = 1, ..., n$, es compacto por ser unión finita de conjuntos compactos. Teniendo en cuenta el lema de Urysohn (Proposición 1.2.36), para cada $i = 1, ..., n$, podemos encontrar una función g_i tal que

$$H_i \prec g_i \prec V_i.$$

Definamos ahora,

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1, \\ h_2 &= (1 - g_1)g_2, \\ &... \\ h_n &= (1 - g_1)(1 - g_2)...(1 - g_{n-1})g_n. \end{aligned}$$

Veamos que $\{h_i\}_{i=1}^n$ es la familia de funciones que cumple las condiciones del teorema. Primero observamos que $h_i \prec V_i$, $i = 1, ..., n$. En efecto, sea $i = 1, ..., n$. Como $0 \leq g_i \leq 1$, es claro que $0 \leq h_i \leq 1$. Además, como el soporte de h_i está contenido en el soporte de g_i, entonces sop $h_i \in V_i$.

Y, por último probamos que $h_1 + h_2 + ... + h_n = 1$, en K. Procediendo por inducción se puede demostrar que

$$h_1 + \cdots + h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n). \tag{1.6}$$

En efecto, para $k = 1$, $h_1 = 1-(1-g_1)$. Si suponemos que se tiene para $k \in \{1, ..., n-1\}$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} h_1 + \cdots + h_{k+1} &= 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{k-1}) + (1 - g_1)(1 - g_2)...(1 - g_{k-1})g_k \\ &= 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_k). \end{aligned}$$

Sea $x \in K \subset \cup_{i=1}^n H_i$. Entonces existe $i \in 1, ..., n$ de manera que $x \in H_i$ y, entonces $g_i(x) = 1$. Por tanto, de (1.6) se deduce que $h_1(x) + h_2(x) + ... + h_n(x) = 1$.

□

1.3. Teorema de representación de Riesz

1.3.1. Teorema de Riesz

En el apartado 1.2.4 vimos que dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, sobre el conjunto de las funciones medibles complejas en X siempre se puede definir, usando la integral, un funcional lineal y positivo. El Teorema de representación de Riesz nos muestra que en ciertos espacios topológicos existe una reciprocidad de la situación anterior, es decir, todo funcional lineal positivo definido sobre $L^1(\mu)$ admite una representación integral referida a la medida de Borel asociada al espacio topológico.

Teorema 1.3.1 (Teorema de representación de Riesz). *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea Λ un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$. Entonces, existe una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en X que contiene a todos los borelianos de X, y una única medida positiva μ en $\mathcal{M}$ que representa a Λ en el siguiente sentido:*

(a) $\Lambda f = \int_X f d\mu$ *para cada* $f \in C_c(X)$, *y que además verifica las siguientes propiedades:*

(b) $\mu(K) < \infty$, *para cada conjunto compacto* K *de* X.

(c) $\mu(E) = \text{ínf}\,\{\mu\,(V) : E \subset V,\, V\, \textit{abierto}\}$, *para cada* $E \in \mathcal{M}$.

(d) $\mu(E) = \sup\,\{\mu\,(K) : K \subset E,\, K\, \textit{compacto}\}$, *cuando* E *es un abierto o bien* $E \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(E) < \infty$.

(e) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *es un espacio de medida completo, esto es, si* $E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$ *y* $\mu(E) = 0$, *entonces* $A \in \mathcal{M}$.

Demostración. Empezaremos probando la unicidad de μ. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas positivas sobre $\mathcal{M}$ verificando las propiedades (a), (b), (c), (d) y (e) del teorema.
A la vista de las propiedades (c) y (d), se tiene que μ queda determinada en $\mathcal{M}$ por sus valores sobre los conjuntos compactos de X. Por tanto, basta probar que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$, para todo compacto $K \subset X$.

Sean $K \subset X$ compacto y $\varepsilon > 0$. De (b) se obtiene que $\mu_2(K) < \infty$. Además, de (c),

$$\mu_2(K) = \text{ínf}\{\mu_2(V) :\ K \subset V,\ \text{V abierto}\}$$

y entonces, por definición de ínfimo, existe un conjunto abierto V de X con $K \subset V$ tal que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$.

Por el lema de Urysohn (Proposición 1.2.36), existe una función $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f \prec V$. Si χ_A representa la función característica sobre el conjunto A, entonces se tiene $\chi_K \leq f \leq \chi_V$, y, teniendo en cuenta que μ_1 y μ_2 cumplen (a), podemos escribir

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V).$$

Luego, $\mu_1(K) \leq \mu_2(K) + \varepsilon$. La arbitrariedad de ε conduce a que $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$, e intercambiando los papeles de μ_1 y μ_2 se obtiene también que $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$. Se concluye entonces que $\mu_1 = \mu_2$ sobre los compactos de X.

Construimos ahora la σ-álgebra $\mathcal{M}$ y la medida μ. Para cada conjunto abierto V de X, definimos

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f \; : \; f \prec V\}.$$

Si V_1 y V_2 son abiertos tales que $V_1 \subseteq V_2$, entonces, ya que

$$\{f : \; f \prec V_1\} \subseteq \{f : \; f \prec V_2\}$$

se sigue que $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Luego, se cumple que, cuando E es abierto,

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : \; E \subseteq V, \; \text{V abierto}\}.$$

Esto permite extender la definición de μ sobre cualquier subconjunto $E \subseteq X$ de la siguiente manera:

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : \; E \subseteq V, \; \text{V abierto}\}.$$

Denotamos por $\mathcal{M}_F$ la clase constituida por los conjuntos $E \subset X$ que verifican:

$$\mu(E) < \infty \quad \text{y} \quad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, \; K \; \text{ compacto}\}.$$

y definimos la clase $\mathcal{M}$ como :

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X : \; E \cap K \in \mathcal{M}_F, \; \text{para todo compacto } K\}$$

Probamos ahora que μ y $\mathcal{M}$ tienen las propiedades requeridas en el teorema.

Observamos, en primer lugar que $\mu \geq 0$, por ser Λ un funcional lineal positivo. Además, μ es monótona. Basta observar que si $A \subseteq B \subseteq X$, se tiene que

$$\{\text{V abierto } : \; B \subseteq V\} \subseteq \{\text{V abierto } : \; A \subseteq V\}$$

y entonces,

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(V) : \; A \subseteq V, \; \text{V abierto }\} \leq \text{ínf}\{\mu(V) : \; B \subseteq V, \text{V abierto }\} = \mu(B).$$

Como consecuencia, si $E \subseteq X$ y $\mu(E) = 0$, se tiene que $\mu(K) = 0$, $K \subseteq E$ compacto, por lo que $E \in \mathcal{M}_F$. También se deduce que $E \in \mathcal{M}$, pues $\mu(E \cap K) = 0$, K compacto y por tanto, $E \cap K \in \mathcal{M}_F$.

Queda demostrado así, que la medida μ verifica la propiedad (e) y también la (c) por definición.

Dividimos el resto de la prueba en varios pasos.

PASO 1. *Sean E_1, E_2, $E_3, \ldots$ subconjuntos arbitrarios de X. Se cumple que*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E_i\right). \tag{1.7}$$

Demostración. En primer lugar probamos que $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$, cuando V_1 y V_2 son conjuntos abiertos de X.

Elegimos una función $g \in C_c(X)$ tal que $g \prec V_1 \cup V_2$. Sea K el soporte de g, por el Teorema 1.2.37, existen funciones $h_1,\ h_2 \in C_c(X)$ tales que $h_i \prec V_i, i = 1,2$ y $h_1(x) + h_2(x) = 1,\ x \in K$.

Nótese que $h_i g \in C_c(X)$, $0 \leq h_i g \leq 1$ y $sop(h_i g) \subseteq V_i,\ i = 1, 2$, esto es, $h_i g \prec V_i,\ i = 1, 2$. Además, $g = h_1 g + h_2 g$.
Por tanto, ya que $\mu(V_i) = \sup\{\Lambda f\ :\ f \prec V_i\}$, $i = 1, 2$, se tiene

$$\Lambda g = \Lambda\left(h_1 g\right) + \Lambda\left(h_2 g\right) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Hemos probado que

$$\mu(V_1 \cup V_2) = \sup\left\{\Lambda g\ :\ g \prec V_1 \cup V_2\right\} \leq \mu(V_1) + \mu(V_2). \tag{1.8}$$

A continuación establecemos la desigualdad (1.7). Observamos que basta probarla cuando $\mu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$.
Sea $\varepsilon > 0$, ya que $\mu(E_i) = \inf\{\mu(V) : E_i \subseteq V,\ \text{V abierto}\}$, $i \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto V_i tal que $E_i \subseteq V_i$ y

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Consideramos $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, y elegimos una función $f \prec V$. Como el soporte de f es compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $sop(f) \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$, y por tanto, $f \prec V_1 \cup \ldots \cup V_n$.

Aplicando inducción a lo demostrado al comienzo de la prueba y teniendo en cuenta que $\mu(V_1 \cup \ldots \cup V_n) = \sup\left\{\Lambda g\ :\ g \prec V_1 \cup \ldots \cup V_n\right\}$ y la propiedad (1.8), podemos escribir

$$\begin{aligned} \Lambda f &\leq \mu(V_1 \cup \ldots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \ldots + \mu(V_n) \leq \sum_{i=1}^{n}(\mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon.s \end{aligned}$$

La arbitrariedad de f conduce a que $\mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$, y ya que $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \subset V$, por la monotonía de μ se sigue que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Como ε puede ser elegido arbitrariamente pequeño, obtenemos así la propiedad (1.7). $\square$

PASO 2. *Si K es compacto, entonces $K \in \mathcal{M}_F$ y $\mu(K) = \text{ínf}\,\{\Lambda f : K \prec f\}$. Esto implica la afirmación (b) del teorema.*

Demostración. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Veamos en primer lugar que $K \in \mathcal{M}_F$. Es claro, al ser K compacto, que

$$\mu(K) = \sup\{\mu(K'), K' \subseteq K, K' \text{compacto}\}$$

pues el supremo se alcanza cuando $K' = K$.

Mostramos ahora que $\mu(K) < \infty$. Sean $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f$ y $\alpha \in (0,1)$. Definimos el conjunto

$$V_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

Nótese que V_α es un conjunto abierto por ser la antiimagen de un intervalo abierto por una función continua. Además, como $f(x) = 1 > \alpha$, para todo x de K, se tiene que $K \subset V_\alpha$.

Sea $g \prec V_\alpha$,se tiene que $\alpha g(x) \leq f(x)$, para todo x de X. En efecto, si $x \in V_\alpha$, $g(x) \leq 1$ y, por tanto, $\alpha g(x) \leq \alpha < f(x)$. Cuando $x \notin V_\alpha$, entonces $g(x) = 0$ y, se tiene que $\alpha g(x) = 0 \leq f(x)$. Luego $\alpha g \leq f$, para cualquier función $g \prec V_\alpha$.

Ya que Λ es lineal y positivo, se obtiene que

$$\mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1}\Lambda f$$

Como μ es monótona podemos entonces escribir

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) \leq \alpha^{-1}\Lambda f$$

y, haciendo tender α a 1, concluimos que $\mu(K) \leq \Lambda f < \infty$.

Por último, veamos que

$$\mu(K) = \text{ínf}\,\{\Lambda f : K \prec f\} \tag{1.9}$$

Ya hemos probado que $\mu(K) \leq \Lambda f$, cuando $K \prec f$.
Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $\mu(K) = \text{ínf}\{\mu(V) : K \subseteq V, V \text{abierto}\}$, podemos encontrar V abierto tal que $K \subseteq V$ y

$$\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

Por el lema de Urysohn (Proposición 1.2.36), existe $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f \prec V$. Se tiene entonces que

$$\Lambda f \leq \mu(V) = \sup\{\Lambda g : g \prec V\} < \mu(K) + \varepsilon$$

y se concluye (1.9). □

PASO 3. *Para cada conjunto abierto V, $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V, K \text{compacto}\}$. Por tanto, $\mathcal{M}_F$ contiene a todo conjunto abierto con $\mu(V) < \infty$.*

Demostración. Sea V un abierto de X. Basta establecer la siguiente propiedad:

> Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\mu(V) > \alpha$. Entonces, existe $K \subseteq V$ compacto tal que $\mu(K) > \alpha$

De esta propiedad, si $\mu(V) = \infty$, también se tiene que $\sup\{\mu(K) : K \subseteq V, K\text{compacto}\} = \infty$ y, en el caso $\mu(V) < \infty$, podemos, fijado $\varepsilon > 0$, tomar $\alpha = \mu(V) - \varepsilon$ para llegar a que $\mu(K) > \mu(V)$, para algún compacto $K \subseteq V$. Luego, se concluye que

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq V, K \text{ compacto}\}$$

Veamos entonces que se cumple la propiedad. Como $\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\} > \alpha$, podemos encontrar $f \prec V$ tal que $\Lambda f > \alpha$. Sea K el soporte de f. Se tiene que K es un compacto y $K \subseteq V$.
Observamos que si W es un abierto tal que $K \subseteq W$, entonces $f \prec W$ y, entonces

$$\mu(W) = \sup\{\Lambda g : g \prec W\} \geq \Lambda f$$

Ya que $\mu(K) = \text{ínf}\{\mu(W) : K \subseteq W, W\text{abierto}\}$, se obtiene que $\mu(K) \geq \Lambda f$ y, por tanto, $\mu(K) > \alpha$. La propiedad queda así establecida. □

PASO 4. *Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{M}_F$, $i \in \mathbb{N}$, y $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Entonces,*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Además, si $\mu(E) < \infty$, entonces también $E \in \mathcal{M}_F$.

Demostración. Primero probamos que $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$, para cualesquiera dos conjuntos compactos, K_1 y K_2, disjuntos.

Fijamos un $\varepsilon > 0$. Ya que X es un espacio de Hausdorff y $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, existe un abierto V tal que $K_1 \subseteq V$ y $K_2 \cap V = \emptyset$. Por el lema de Urysohn (Proposición 1.2.36), podemos encontrar una función f tal que $K_1 \prec f \prec V$. Nótese que, entonces, $f = 0$ en K_2.

Por otro lado, $K_1 \cup K_2$ es un conjunto compacto, por ser unión finita de conjuntos compactos. Entonces, por el Paso 2,

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \text{ínf}\{\Lambda g : K_1 \cup K_2 \prec g\}$$

y podemos elegir una función g tal que $K_1 \cup K_2 \prec g$ y $\Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$.

Observamos que $K_1 \prec fg$ y $K_2 \prec (1 - f)g$. Luego, de nuevo por el Paso 2 y por la linealidad de Λ, podemos escribir

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda((1 - f)g) = \Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$$

Como ε puede tomarse arbitrariamente pequeño, se tiene que

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$$

lo que, junto con el Paso 1, muestra la propiedad enunciada. Se sigue, por inducción, que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) \tag{1.10}$$

cuando $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de compactos disjunta.

Para el caso en que $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{M}_F$, observamos primero que si $\mu(E) = \infty$, entonces, por el Paso 1

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \geq \mu(E) = \infty$$

y se satisface, por tanto, la igualdad del Paso 4.

Supongamos que $\mu(E) < \infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, como $E_i \in \mathcal{M}_F$, existe un subconjunto compacto $H_i \subset E_i$ tal que

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon. \tag{1.11}$$

Además, $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$, pues $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos disjuntos.
Denotamos por K_n, $n \in \mathbb{N}$, el compacto $K_n = H_1 \cup ... \cup H_n$. Entonces, teniendo en cuenta la monotonía de μ y las propiedades (1.10) y (1.11) se sigue que

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Haciendo $n \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, se obtiene que

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

y teniendo en cuenta el Paso 1, concluimos que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Para terminar, supongamos que $\mu(E) < \infty$, queremos ver que entonces $E \in \mathcal{M}_F$. Para ello, fijamos $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo es encontrar un compacto $K \subseteq E$ de modo que

$$\mu(E) - \varepsilon < \mu(K).$$

Ya que, como hemos visto, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E) < \infty$, se tiene que

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon$$

para algún $N \in \mathbb{N}$. Luego, teniendo en cuenta (1.12) (con $\frac{\varepsilon}{2}$ en lugar de ε), se concluye que

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu(K_N) + \varepsilon$$

para cierto compacto K_N. □

PASO 5. *Si $E \in \mathcal{M}_F$ y $\varepsilon > 0$, existe un compacto K y un abierto V tales que $K \subset E \subset V$ y $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$.*

Demostración. Como $E \in \mathcal{M}_F$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K), K \subseteq E, K \,\text{compacto}\} < \infty$ y, por otro lado, $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subseteq V, V \,\text{abierto}\}$. Por tanto, existen K compacto y V abierto, $K \subseteq E \subseteq V$ tales que

$$\mu(V) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, ya que $V \setminus K = V \cap K^C$ es abierto y $\mu(V \setminus K) \leq \mu(V) \leq \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty$, aplicando el Paso 3, se sigue que $V \setminus K \in \mathcal{M}_F$.

Finalmente, por los Pasos 4 y 2

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(K) + \varepsilon.$$

Luego, $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. □

PASO 6. *Si A, $B \in \mathcal{M}_F$, entonces $A \setminus B$, $A \cup B$, y $A \cap B$ pertenecen a $\mathcal{M}_F$.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{M}_F$. Veamos primero que $A \setminus B \in \mathcal{M}_F$. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $A, B \in \mathcal{M}_F$, existen K_1 y K_2 compactos y V_1 y V_2 abiertos tales que $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset B \subset V_2$, y $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$, $i = 1$, 2.

Se observa que, $\mu(A \setminus B) \leq \mu(A) < \infty$. Además,

$$K_1 \setminus V_2 \subseteq A \setminus B \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2)$$

y entonces, por el Paso 1,

$$\mu(A \setminus B) \leq \mu(V_1 \setminus K_1) + \mu(K_1 \setminus V_2) + \mu(V_2 \setminus K_2) < \mu(K_1 \setminus V_2) + 2\varepsilon. \tag{1.13}$$

Ahora bien, $K_1 \setminus V_2$ es un subconjunto compacto de $A \setminus B$ pues, $K_1 \setminus V_2 \subset K_1$, siendo K_1 compacto y $K_1 \setminus V_2$ cerrado. Entonces (1.13) nos dice que

$$\mu(A \setminus B) = \sup\{\mu(K) : K \subset (A \setminus B), K \,\text{compacto}\}$$

y concluimos que $A \setminus B \in \mathcal{M}_F$.

Por otro lado, como $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, el Paso 4 conduce a que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B),$$

y, puesto que $A \setminus B$ y $B \in \mathcal{M}_F$, se tiene que $\mu(A \cup B) < \infty$. De nuevo el Paso 4 permite concluir que $A \cup B \in \mathcal{M}_F$.

Por último, escribiendo $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ y teniendo en cuenta que A, $A \setminus B \in \mathcal{M}_F$, se obtiene que $A \cap B \in \mathcal{M}_F$. □

PASO 7. *$\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X que contiene a todos los borelianos.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra: (1) $X \in \mathcal{M}$ pues $X \cap K = K$, para cualquier compacto K y por el Paso 2 sabemos que $K \in \mathcal{M}_F$.

(2) Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \in \mathcal{M}$. En efecto, sean $A \in \mathcal{M}$ y K un compacto. Sabemos por el Paso 2 que $K \in \mathcal{M}_F$ y además $A \cap K \in \mathcal{M}_F$ pues $A \in \mathcal{M}$.
Teniendo en cuenta que

$$A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$$

se concluye, usando el Paso 4, que $A^c \in \mathcal{M}$.

(3) Sea $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $A \in \mathcal{M}$. En efecto, consideramos un compacto K y definimos la familia de conjuntos disjuntos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ siguiente:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap K \\ B_2 &= A_2 \cap K \setminus B_1 \\ &\dots \\ B_n &= A_n \cap K \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}),\ n \geq 2 \end{aligned}$$

Observamos que $A_n \cap K \in \mathcal{M}_F, n \in \mathbb{N}$, por ser $A_n \in \mathcal{M}_F$.
Además, aplicando el Paso 6, se obtiene que $B_n \in \mathcal{M}_F$, $n \in \mathbb{N}$.

Podemos escribir,

$$A \cup K = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

y por el Paso 4, teniendo en cuenta que $\mu(A \cap K) \leq \mu(K) < \infty$, se concluye que $A \cap K \in \mathcal{M}_F$, y por tanto, $A \in \mathcal{M}$.

Para establecer que $\mathcal{M}$ contiene a los borelianos, basta ver que contiene a los subconjuntos cerrados de X. Sean $C \subseteq X$ cerrado y $K \subseteq X$ compacto. Ya que $C \cap K \subseteq K$ y $C \cap K$ es cerrado, se tiene que $C \cap K$ es compacto y de esta forma, por el Paso 2, $C \cap K \in \mathcal{M}_F$. □

PASO 8. *$\mathcal{M}_F$ consiste precisamente en los conjuntos $E \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(E) < \infty$. Esto implica la afirmación d) del teorema.*

Demostración. Sean $E \in \mathcal{M}_F$ y K compacto. Usando los Pasos 2 y 6 se obtiene que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ y, por tanto, $E \in \mathcal{M}$.

Para demostrar la otra inclusión, supongamos que $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) < \infty$. Tomemos $\varepsilon > 0$, por definición de $\mu(E)$, existe un conjunto abierto $V \supset E$ tal que $\mu(V) < \mu(E) + \varepsilon$. Por tanto, $\mu(V) < \infty$, y por el Paso 3, $V \in \mathcal{M}_F$.
Teniendo en cuenta el Paso 5, existe un conjunto compacto K y un abierto V' tales que $K \subset V \subset V'$ y $\mu(V \setminus K) \leq \mu(V' \setminus K) < \varepsilon$.

Por otro lado, como $E \cap K \in \mathcal{M}_F$, existe un conjunto compacto $H \subset E \cap K$ con $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon$.
Además, $E = (E \cap K) \cup (E \setminus K) \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, luego

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Luego, $\mu(E) = \sup\{\mu(H') : H' \subset E, H' \text{compacto}\}$ y, por tanto, $E \in \mathcal{M}_F$.

□

PASO 9. *μ es una medida en $\mathcal{M}$.*

Demostración. Sean $E_1, E_2, ... \in \mathcal{M}$ conjuntos disjuntos dos a dos tales que $\mu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Entonces, aplicando el Paso 8, $E_i \in \mathcal{M}_F$, $i \in \mathbb{N}$ y el Paso 4 conduce a que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

con lo que queda probada la aditividad numerable.
Supongamos ahora que existe un i_0 tal que $\mu(E_{i_0}) = \infty$. Se tiene entonces que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \infty$. Además, como $E_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \infty$ y se sigue que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

□

PASO 10. *Para toda $f \in C_c(X)$, $\Lambda f = \int_X f d\mu$. Esto prueba el apartado (a) y completa la demostración.*

Demostración. Por la linealidad del funcional, es suficiente probarlo para funciones reales pues, si f es compleja y escribimos $f = u + iv$, para ciertas funciones reales u y v, entonces

$$\Lambda f = \Lambda u + i\Lambda v = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu = \int_X (u + iv) d\mu = \int_X f d\mu.$$

Además, basta demostrar la desigualdad

$$\Lambda f \quad \leq \quad \int_X f d\mu, \qquad \text{para cada } f \in C_c(X),$$

pues una vez probada, $-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_X (-f) d\mu = -\int_X f d\mu$ y se llega a que $\Lambda f \geq \int_X f d\mu$.

Sea K el soporte de una función real $f \in C_c(X)$. Como f es continua, por el Corolario 1.2.35, su rango $f(K)$ va a estar contenido en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$.

Elegimos $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\{y_i\}_{i=0}^n$ de manera que $y_0 < a < y_1 < ... < y_n = b$, y $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$.

Pongamos

$$E_i = \{x \in X : \, y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K, \quad i = 1, 2, ...n.$$

Como f es continua, es medible Borel, pues la imagen inversa de un abierto es abierto. Entonces $\{E_i\}_{i=1}^n$ es una familia de conjuntos Borel disjuntos dos a dos y cuya unión es K. Basta observar que $E_i = f^{-1}((y_{i-1}, y_i]) \cap K$, $i = 1, ..., n$, y que

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \subset f^{-1}((y_0, b]) \cap K = K.$$

Para cada $i = 1, ..., n$, existe un conjunto abierto $W_i \supset E_i$ tal que

$$\mu(W_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Sea $V_i = W_i \cap f^{-1}((-\infty, y_i + \varepsilon))$, $i = 1, ..., n$. Observamos que, para cada $i = 1, ..., n$, V_i es abierto, por ser W_i abierto y f continua. Además, $\mu(V_i) < \mu(W_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ y $f(x) < y_i + \varepsilon$, para todo $x \in V_i$.

Como $K = \cup_{i=1}^n E_i \subset \cup_{i=1}^n V_i$, por el Teorema 1.2.37, existen funciones $h_i \prec V_i$, $i = 1, ..., n$, tales que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ en K. Por tanto, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$, y como $K \prec 1$, por el Paso 2,

$$\mu(K) \leq \Lambda \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i.$$

Ya que para cada $i = 1, ..., n$, $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ y se tiene que $y_i - \varepsilon < y_{i-1} < f(x)$, $x \in E_i$, entonces

$$\begin{aligned}\Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \Lambda h_i &= \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \mu(V_i) - |a| \mu(K),\end{aligned}$$

pues $\mu(V_i) = \sup\{\Lambda f : f \prec V_i\}$ y por el Paso 2, $-\mu(K) \geq -\sum_{i=1}^n \Lambda h_i$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\Lambda f \leq \sum_{i=1}^n \Big(|a| + y_i + \varepsilon)(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) - |a|\mu(K) = \sum_{i=1}^n ((|a| + 2\varepsilon) + y_i - \varepsilon)\mu(E_i) \\ - |a|\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) \\ + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon),\end{aligned}$$

pues $K = \bigcup_{i=1}^n E_i$ y $\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$.

Finalmente, como sabemos que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i - \varepsilon)d\mu \leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f d\mu$$

se concluye

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu + \varepsilon[2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon],$$

ya que $\sum_{i=1}^n y_i \leq n y_i = nb$, y como ε es arbitrario se tiene la desigualdad.

□

1.3.2. Propiedades de regularidad de medidas de Borel

En la demostración del Teorema de Riesz se prueba que μ es regular exterior, sin embargo, la regularidad interior sólo fue demostrada para aquellos $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$ y para los subconjuntos abiertos. Los teoremas siguientes refuerzan las hipótesis del de Riesz para hacer que éste nos proporcione una medida regular. Comenzamos recordando el concepto de medida regular.

Definición 1.3.2. *Llamamos medida de Borel sobre X a toda medida μ definida sobre la $\sigma-$álgebra de Borel de un espacio Hausdorff X localmente compacto.*

- *Si la media μ es positiva, se dice que un boreliano $E \subset X$ es regular exterior o regular interior si verifica las propiedades (c) o (d) del teorema 1.3.1 respectivamente.*

- *Si todo boreliano de X es regular interior y exterior, decimos que μ es regular.*

Definición 1.3.3. *Diremos que un conjunto E es $\sigma-$compacto si es unión numerable de conjuntos compactos. Un conjunto E en un espacio de medida, con medida μ, tiene medida $\sigma-$finita si es unión numerable de conjuntos E_i con $\mu(E_i) < \infty$.*

Por ejemplo en el teorema de Riesz (Teorema 1.3.1), cada $\sigma-$compacto tiene medida $\sigma-$finita. Además, si $E \in \mathfrak{M}$ y E tiene medida $\sigma-$finita, entonces E es regular interior.

Para ver esto, observemos que la primera parte del ejemplo se demuestra fácilmente pues, sea $E \in \mathfrak{M}$ un conjunto $\sigma-$compacto, $E = K_1 \cup ... \cup K_n \cup ...$, con K_i compactos, como se tiene que $\mu(K_i) < \infty$ por teorema 1.3.1 (b), E tiene medida $\sigma-$finita.

Para la segunda parte, sabemos por el teorema de Riesz que si $\mu(E) < \infty$, E es regular interior. Supongamos pues, que $\mu(E) = \infty$. Como E es $\sigma - finito$, podemos escribirlo como unión numerable de conjuntos E_i tales que $\mu(E_i) < \infty$. Reescribiéndolo a $E = \cup D_i$, donde

$$\begin{aligned} D_1 &= E_1 \\ D_2 &= E_2 \backslash D_1 \\ D_3 &= E_3 \backslash (D_1 \cup D_2) \\ &... \\ D_n &= E_n \backslash (D_1 \cup ... \cup D_{n-1}) \end{aligned}$$

con $\mu(D_i) < \infty$ y $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se tiene entonces que $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i)$.

Queremos ver que $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K\text{compacto}\} = \infty$. Para ello, sea $M > 0$, debemos encontrar un compacto $K \subset E$ tal que $\mu(K) > M$. Como $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i) = \infty$, dado M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \mu(D_i) = \mu\left(\cup_{i=1}^{n} D_i\right) > M$. Ya que $\cup_{i=1}^{n} D_i$ es de medida finita, es regular interior y esto implica que dado $\varepsilon > 0$ con $0 < \varepsilon < \mu\left(\cup_{i=1}^{n} D_i\right) - M$, existe un compacto $K \subset \cup_{i=1}^{n} D_i \subset E$ tal que

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} D_i) - \varepsilon < \mu(K).$$

Por tanto,

$$\mu(K) > \mu(\cup_{i=1}^{n} D_i) - \varepsilon \geq \mu(\cup_{i=1}^{n} D_i) - \mu(\cup_{i=1}^{n} D_i) + M.$$

Esto quiere decir que,

$$sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \text{ K compacto}\} = \infty$$

coincidiendo con $\mu(E) = \infty$, y por tanto E es regular interior.

Teorema 1.3.4. *Supongamos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $\sigma-$compacto. Si $\mathfrak{M}$ y μ son como las descritas en el teorema 1.3.1, entonces tienen las siguientes propiedades:*

a) Si $E \in \mathfrak{M}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto cerrado F y un conjunto abierto V tales que $F \subset E \subset V$ y $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.

b) μ es una medida de Borel regular sobre X.

c) Si $E \in \mathfrak{M}$, existen conjuntos A y B tales que $A = F_\sigma$ (unión numerable de cerrados) y $B = G_\delta$ (intersección numerable de abiertos) y $A \subset E \subset B$ con $\mu(B \setminus A) = 0$.

Demostración. Para la demostración del apartado (a), partimos de que X es $\sigma-compacto$, por lo que lo podemos escribir como $X = K_1 \cup K_2 \cup ...$, donde cada K_n es compacto. Sean $E \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$, por el teorema 1.3.1 b), se tiene que $\mu(K_n \cap E) \leq \mu(K_n) < \infty$, y además existen conjuntos abiertos $V_n \supset K_n \cap E$ tales que por la propia definición de μ

$$\mu(V_n) < \mu(K_n \cap E) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Por tanto,

$$\mu(V_n) - \mu(K_n \cap E) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

y

$$\mu(V_n \backslash (K_n \cap E)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3...$$

Sea ahora $V = \cup V_n$, entonces $V \setminus E \subset \cup(V_n \setminus (K_n \cap E))$, con lo que

$$\mu(V \setminus E) \leq \sum \mu(V_n \backslash (K_n \cap E)) < \sum \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Hacemos lo mismo ahora para $E^c \in \mathcal{M}$. Existirán conjuntos abiertos W_n tales que $W_n \supset K_n \cap E^c$ y verificando

$$\mu(W_n \setminus (K_n \cap E^c)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Llamando $W = \cup W_n$, obtenemos al igual que antes, que $\mu(W \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si denotamos $F = W^c$ conjunto cerrado, se tiene que $F \subset E$ y $E \setminus F = W \setminus E^c$, con lo cual

$$\mu(V \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando ambas expresiones, concluimos que

$$\mu(V \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$$

Y finalmente, por la aditividad numerable de μ,

$$\mu((V \backslash E) \cup (E \backslash F)) = \mu(V \backslash F) < \varepsilon.$$

Para probar (b), por el teorema de representación de Riesz (Teorema 1.3.1 c) y d)), tenemos que todo boreliano $E \subset X$ es regular exterior, y todo abierto E y todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$ es regular interior. Para que la medida μ sea Borel regular, todo boreliano E con $\mu(E) = \infty$ tiene que ser regular interior. Consideremos pues, un conjunto $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = \infty$. Por el apartado a), dado $\varepsilon > 0$, existe un cerrado F y un abierto V tales que $F \subset E \subset V$ y $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.

Por otro lado, todo conjunto cerrado F es $\sigma - compacto$ pues, $F = \cup_{i=1}^{\infty}(F \cap K_i)$ y $F \cap K_i \subset K_i$, siendo K_i compacto y $F \cap K_i$ cerrado, con lo que $F \cap K_i$ es compacto. Por tanto, F tiene medida $\sigma - finita$, con lo que es regular interior. Además, podemos escribir E de la siguiente manera

$$E = F \cup (E \backslash F),$$

y obtenemos que $\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \backslash F)$. Pero $E \backslash F \subset V \backslash F$ y por tanto

$$\mu(E) < \mu(F) + \varepsilon,$$

siendo entonces $\mu(F) = \infty$.

Finalmente, como F es regular interior $\mu(F) = sup\{\mu(K),\ \text{K compacto},\ K \subset F\} = \infty$ y ya que $K \subset F \subset E$

$$sup\{\mu(K),\ \text{K compacto},\ K \subset E\} = \infty$$

que coincide con $\mu(E) = \infty$, siendo entonces E regular interior.

Por último, para demostrar (c), basta aplicar a) con $\varepsilon = \frac{1}{j}$, $j = 1, 2, 3, ...$ y así obtenemos conjuntos cerrados F_j y abiertos V_j cumpliendo que $F_j \subset E \subset V_j$, con $\mu(V_j - F_j) < \frac{1}{j}$. Llamemos $A = \cup F_j$ y $B = \cap V_j$. Entonces, $A \subset E \subset B$, siendo A un F_σ y B un G_δ, que verifican

$$\mu(B \setminus A) \leq \mu(V_j \setminus F_j)$$

para todo $j = 1, 2, ...$, pues $B \setminus A \subset V_j \setminus F_j$. Haciendo $j \to \infty$, $\mu(B \setminus A) = 0$. □

Una consecuencia directa de c) es que cada $E \in \mathfrak{M}$ es la unión de un F_σ y un conjunto de medida nula, ya que si $A \subset E \subset B$, se tiene que $E = A \cup (E \backslash A)$, $A = F_\sigma$ y $\mu(E \backslash A) \leq \mu(B \backslash A) = 0$.

Teorema 1.3.5. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, donde cada abierto es $\sigma-$compacto. Sea λ cualquier medida de Borel positiva sobre X tal que $\lambda(K) < \infty$ para todo compacto K. Entonces λ es regular.*

Demostración. Pongamos $\Lambda f = \int_X f d\lambda$, con $f \in C_c(X)$. Como

$$\left| \int_X f d\lambda \right| \leq \int_K |f| d\lambda \leq C\lambda(K),$$

siendo K el soporte de f, que es compacto, y $\lambda(K) < \infty$ para todo compacto, se tiene que Λ es un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$. Además, existe una medida regular μ satisfaciendo las conclusiones del teorema 1.3.4 de manera que

$$\Lambda f = \int_X f d\lambda = \int_X f d\mu, \quad f \in C_c(X).$$

Probaremos que $\lambda = \mu$, y así λ es una medida regular.

Sea V un abierto de X, como cada abierto es $\sigma - compacto$, podemos expresar V como $V = \cup K_i$, para $i = 1, 2, ..$, siendo los conjuntos K_i compactos. Para cada $K_i \subset V$, aplicando el lema de Urysohn (1.2.36), podemos elegir funciones f_i tales que $K_i \prec f_i \prec V$.

Sea entonces, $g_n = max(f_1, f_2, ..., f_n)$, sabemos que $g_n \in C_c(X)$ pues $f_i \in C_c(X)$ para todo i, además, como el soporte de cada f_i está en V, $f_i(x) = 1$ para $x \in K_i$ y $0 \leq f_i(x) \leq 1$ para $x \in V$, tendremos que la sucesión de funciones g_n tiende a la función característica de V, $\chi_V(x)$, para todo $x \in X$ y $g_n \leq g_{n+1}$. Podemos aplicar entonces el Teorema de la Convergencia Monótona, y de esta forma

$$\begin{aligned} \lambda(V) &= \int_X \chi_V d\lambda = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \chi_V d\mu = \mu(V) \end{aligned} \tag{1.14}$$

con lo que probaríamos que para todo abierto V, λ y μ coinciden.

Sea entonces E un boreliano de X (pues ambas medidas están definidas en $\sigma-$álgebras de Borel), y tomemos $\varepsilon > 0$. Como μ satisface las condiciones del teorema 1.3.4, existe un conjunto cerrado F y un conjunto abierto V, tales que $F \subset E \subset V$, y $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$. Por tanto, $\mu(V) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(E) + \varepsilon$, pues $F \subset E$.

Por otro lado, como $V \setminus F = V \cap F^c$, V y F^c son abiertos y la intersección finita de abiertos es abierta, $V \setminus F$ es abierto, y por (1.14)

$$\lambda(V \setminus F) = \mu(V \setminus F) < \varepsilon,$$

con lo que

$$\lambda(V) \leq \lambda(F) + \varepsilon \leq \lambda(E) + \varepsilon.$$

Tenemos pues las condiciones siguientes

$$\lambda(E) \leq \lambda(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon$$

$$\mu(E) \leq \mu(V) = \lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$$

Se concluye que $|\lambda(E) - \mu(E)| < \varepsilon$ y al ser ε arbitrario, $\mu(E) = \lambda(E)$. □

1.3.3. Otra forma de definir la medida de Lebesgue

En este apartado veremos cómo la existencia de la medida de Lebesgue sigue como un caso particular del Teorema de Representación de Riesz y aunque la prueba no es constructiva (ver [1]) resulta muy interesante.

Sea $\mathbb{R}^k$ el espacio euclídeo k-dimensional formado por todos los puntos $x = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_k)$, donde ζ_i son números reales, que presentan las siguientes propiedades:

Si $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)$, y α es un número real, $x + y$ y αx están definidos por

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, ..., \xi_k + \eta_k),\ \alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, ..., \alpha\xi_k)$$

A un conjunto definido de la siguiente forma

$$W = \{x :\ \alpha_i < \xi_i < \beta_i,\ 1 \leq i \leq k\} \tag{1.15}$$

y a los conjuntos obtenidos de reemplazar $<$ por $\leq$, se les denomina $k - celdas$, y su volumen viene definido por

$$vol(W) = \prod_{i=1}^{k}(\beta_i - \alpha_i) \tag{1.16}$$

Sea $a \in \mathbb{R}^k$ y $\delta > 0$, al conjunto

$$Q(a;\delta) = \{x : \ \alpha_i \leq \xi_i < \alpha_i + \delta, \ 1 \leq i \leq k\} \tag{1.17}$$

se le denomina $\delta - caja$ con esquina en a, donde a es un vector de la forma $a = (\alpha_1, ...\alpha_k)$

Teorema 1.3.6. *Para todo $n = 1, 2, 3, ...$ definimos P_n como el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}_k$ cuyas coordenadas son múltiplos enteros de 2^{-n}. Y llamamos Ω_n a la colección de todas las $2^{-n} - cajas$ con esquinas en P_n definidas como en (1.17). Ω_n cumple las siguientes propiedades:*

a) Dado n fijo, cada $x \in \mathbb{R}^k$ pertenece a una y sólo una caja de Ω_n.

b) Sean $Q \in \Omega_r$, $Q' \in \Omega_n$ y $r < n$, se tiene que $Q' \subset Q$ ó $Q' \cap Q = \emptyset$.

c) Si $Q \in \Omega_r$, entonces su volumen es $vol(Q) = 2^{-rk}$; y si $n > r$, el conjunto P_n tiene exactamente $2^{(n-r)k}$ puntos en Q.

d) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^k$ es unión disjunta de cajas pertenecientes a $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup ....$

Demostración. Comenzaremos probando el apartado (a) en $\mathbb{R}$ pues, sabemos que todo elemento Q_i de Ω_n se puede expresar como

$$Q_i = [k_1^i 2^{-n}, (k_1^i + 1)2^{-n}) \times ... \times [k_k^i 2^{-n}, (k_k^i + 1)2^{-n})$$

y dado $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, bastaría probar que x_i pertenece a una y sólo una caja de Ω_n en $\mathbb{R}$.

Es claro que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$$

y queremos probar que dado un $x \in \mathbb{R}$, x pertenece solamente a una caja, es decir, que existe una $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m2^{-n} \leq x < (m+1)2^{-n}.$$

Pero como $x2^n \in \mathbb{R}$ y sabemos que todo real se encuentra entre dos enteros consecutivos, nuestra m será la que cumpla

$$m \leq x2^n < m + 1.$$

y como las cajas son disjuntas tendríamos a) para $k = 1$. El caso general sigue fácilmente.

(b) Supongamos que $Q' \cap Q \neq \emptyset$, donde en $\mathbb{R}$, $Q' = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ y $Q = [m2^{-r}, (m+1)2^{-r})$. El intervalo mayor, de longitud 2^{-r}, lo podemos subdividir en intervalos de longitud 2^{-n}. Además, los extremos de Q pertenecen a P_n pues $m2^{-r} = m2^{n-r}2^{-n}$ y $(m+1)2^{-r} = (m+1)2^{n-r}2^{-n}$, donde $m2^{n-r}$ y $(m+1)2^{n-r}$ son números enteros. Con lo cual, se tiene que dar que $Q' \subset Q$.

(c) Por la definición de Ω_r y del volumen de una $k-celda$ (1.16), $vol(Q) = (2^{-r})^k$. Para la segunda parte, como $n > r$, $2^{-n} < 2^{-r}$, y por tanto, pensando en $\mathbb{R}$, podemos dividir el intervalo mayor de longitud 2^{-r}, en subintervalos de longitud 2^{-n}. Así, obtenemos $\dfrac{2^{-r}}{2^{-n}} = 2^{n-r}$ puntos de P_n en Q, y por tanto, en $\mathbb{R}^k$ tendremos $2^{(n-r)k}$ puntos.

(d) Sea V un abierto, entonces para cada $x \in V$ existe una bola abierta contenida en V, por tanto $x \in Q \subset V$ para algún Q en Ω_n para un cierto n. Con esto se tiene que V es la unión de todas las cajas contenidas totalmente en V y que pertenecen a algún Ω_n.

Ahora partiendo de esta colección de cajas, seleccionamos las que pertenecen a Ω_1 y están contenidas totalmente en V, eliminando las de $\Omega_2, \Omega_3, ...$ que caigan en alguna de las cajas ya seleccionadas. De la colección resultante, elegimos ahora las cajas de Ω_2 contenidas en V, y eliminamos las de $\Omega_3, \Omega_4, ..$ que caigan en alguna de las seleccionadas. Procediendo de esta manera, y teniendo en cuenta los apartados (a) y (b), tenemos lo que queríamos demostrar. □

A continuación probamos el Teorema que nos da la existencia de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

Teorema 1.3.7. *Existe una medida positiva completa m definida sobre una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ en $\mathbb{R}^k$, que cumple las siguientes propiedades:*

a) $m(W) = vol(W)$, para toda $k-celda\, W$.

b) $\mathfrak{M}$ contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}^k$, de forma más precisa, $E \in \mathfrak{M}$ si y sólo si existen conjuntos A y B de $\mathbb{R}^k$ tales que $A \subset E \subset B$, siendo A unión numerable de cerrados F_σ y B intersección numerable de abiertos G_σ, con $m(A \setminus B) = 0$. Además, m es regular.

c) m es invariante por traslaciones, esto es,

$$m(E + x) = m(E)$$

para todo $E \in \mathfrak{M}$ y todo $x \in \mathbb{R}^k$.

d) Si μ es una medida de Borel positiva e invariante por traslaciones sobre $\mathbb{R}^k$ tal que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K, entonces existe una constante c tal que $\mu(E) = cm(E)$, para todo boreliano E de $\mathbb{R}^k$.

e) Para cada transformación lineal T de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^k$, encontramos un número real $\Delta(T)$ tal que

$$m(T(E)) = \Delta(T)m(E)$$

para cada $E \in \mathfrak{M}$. Además particularizando, si T es una rotación se tiene que $m(T(E)) = m(E)$.

Los elementos de $\mathfrak{M}$ son los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^k$, y m es la medida de Lebesgue.

Demostración. Sea f una función compleja sobre $\mathbb{R}^k$ con soporte compacto, definimos

$$\Lambda_n f = 2^{-nk} \sum_{x \in P_n} f(x), \quad n = 1,\ 2,\ 3, ...$$

donde P_n está definido como en el Teorema 1.3.6.

Ahora supongamos que $f \in C_c(X)$ siendo f real, y W es una $k - celda$ abierta tal que contiene al soporte de f que es compacto por definición. Entonces, se tiene que f es uniformemente continua por ser una función continua definida en un compacto, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Podemos tomar un entero N tal que $diag(Q) = \sqrt{2}2^{-N} < \dfrac{\delta}{2}$, donde Q es una $2^{-N}-caja$, y $2^{-N} < dist(sop(f), \partial W)$, y existen funciones, con soportes en W, $g(x) = \min\limits_{y \in \overline{Q}_i} f(y)$ y $h(x) = \max\limits_{y \in \overline{Q}_i} f(y)$, siendo $x \in Q_i \in \Omega_N$, y con soporte en W, que verifican:

I) Son constantes en cada caja Q_i de Ω_N,

II) $g \leq f \leq h$,

III) $h - g < \varepsilon$ (continuidad uniforme de f).

Sea $n > N$, por la propiedad 1.3.6(c) y teniendo en cuenta I)

$$\Lambda_N g = 2^{-Nk} \sum_{x \in P_N} g(x) = 2^{-Nk}(g(x_1) + ... + g(x_J)), \tag{1.18}$$

donde $P_N = \{x_1, ..., x_J\}$, y por otro lado

$$\Lambda_n g = 2^{-nk} \sum_{y \in P_n} g(y) = 2^{-nk} 2^{(n-N)k} \sum_{j=1}^{J} g(x_j) = \Lambda_N g \tag{1.19}$$

Por tanto, haciendo lo mismo con la función h, podemos escribir

$$\Lambda_N g = \Lambda_n g \leq \Lambda_n f \leq \Lambda_n h = \Lambda_N h$$

Los límites superior e inferior de $\Lambda_n f$ difieren a lo sumo en $\varepsilon vol(W)$, pues

$$\overline{\lim}\, \Lambda_n f - \underline{\lim}\, \Lambda_n f \leq \Lambda_N(h - g) \tag{1.20}$$

$$\Lambda_N(h - g) \leq 2^{-Nk} \sum_{x \in P_N \cap W} \varepsilon = \varepsilon 2^{-Nk} \sum_{x \in P_N \cap W} 1 \leq \varepsilon vol(W) \tag{1.21}$$

y como ε es arbitrario, ambos límites coinciden con lo que existe el límite

$$\Lambda f = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n f, \quad f \in C_c(\mathbb{R}^k) \tag{1.22}$$

Claramente Λ es un funcional lineal positivo sobre $C_c(\mathbb{R}^k)$. De hecho, como se ha visto en la asignatura de Análisis IV del grado, Λf es la integral de Riemann de f en $\mathbb{R}^k$ y se ha llevado a cabo la construcción anterior para no tener que recurrir a ningún teorema sobre integales de Riemann en varias variables.

Definimos entonces m y $\mathfrak{M}$ como la medida y σ-álgebra asociada a dicho funcional dadas por el Teorema de Representación de Riesz y ya que, por dicho teorema m es completa al ser $\mathbb{R}^k$ un espacio σ-compacto, podemos aplicar el Teorema 1.3.4 y la propiedad b) queda probada.

Sea W una celda abierta definida como en el teorema 1.3.6 y E_r la unión de todas las cajas de Ω_r cuyas clausuras están en W. Por el lema de Urysohn, podemos elegir funciones f_r tales que $\overline{E}_r \prec f_r \prec W$, y pongamos $g_r = max\{f_1, ..., f_r\}$.

Por un lado tenemos que, si $\overline{Q}_1^r \cup \overline{Q}_2^r \cup \cdots \cup \overline{Q}_1^r = \overline{E}_r$, para todo $n > r$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\Lambda_n f_r &= 2^{-nk} \sum_{x\in P_n} f_r(x) \geq 2^{-nk} \sum_{x\in P_n\cap \overline{E}_r} 1 \\
&= 2^{-nk} \left(\sum_{x\in P_n\cap Q_1^r} 1 + ... + \sum_{x\in P_n\cap Q_j^r} 1 \right) \\
&= 2^{-nk} j 2^{(n-r)k} = j2^{-rk} = vol(\overline{E}_r)
\end{aligned}$$

y haciendo $n \to \infty$, $\Lambda f_r \geq vol(E_r)$.

Por otro lado, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $sop(g_r) \subseteq \bigcup_{\substack{Q\in\Omega_{n_0} \\ \overline{Q}\subseteq W}} Q$, y para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_n g_r &= 2^{-n_0 k} 2^{(n_0-n)k} \sum_{x\in P_n} g_r(x) = 2^{-n_0 k} \sum_{x\in P_n\cap sop(g_r)} 2^{(n_0-n)k} g_r(x) \\
&\underset{(1)}{=} 2^{n_0 k} \sum_{x\in P_{n_0}\cap sop(g_r)} 1 \leq \sum_{\substack{Q\in\Omega_{n_0} \\ \overline{Q}\subseteq W \\ Q\cap sop(g_r)\neq\emptyset}} vol(Q) \underset{(2)}{\leq} vol(W)
\end{aligned}$$

(1) se tiene pues P_n tiene $2^{(n-n_0)k}$ puntos en cada caja de Ω_{n_0}. La última desigualdad (2) es cierta ya que las cajas Q son disjuntas por el teorema 1.3.6 (a). Haciendo ahora $n \to \infty$, $\Lambda g_r \leq vol(W)$. Además, $\Lambda f_r \leq \Lambda g_r$ por la monotonía del funcional ya que $f_r \leq g_r$ y así hemos obtenido que

$$vol(E_r) \leq \Lambda f_r \leq \Lambda g_r \leq vol(W)$$

y tomando $r \to \infty$, tenemos que $vol(E_r) \to vol(W)$.

Ahora bien, como g_r es una sucesión monótona creciente, podemos aplicar el teorema de la Convergencia Monótona y de este modo

$$\lim_{r\to\infty} \Lambda g_r = \lim_{r\to\infty} \int g_r dm = \int \lim g_r dm = \int \chi_W dm = m(W), \quad para\, todo\, x \in \mathbb{R}^k.$$

Por tanto, al tener que $\Lambda g_r \to vol(W)$ y $\Lambda g_r \to m(W)$, $m(W) = vol(W)$ para toda celda abierta W. Además, toda $k-$celda se puede expresar como intersección de una sucesión decreciente de $k-$celdas abiertas, por ejemplo en $\mathbb{R}$, tenemos que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n})$ y esto demuestra el apartado (a) para $\mathbb{R}$, ya que

$$vol([a,b]) = \lim_{n\to\infty} vol(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} m(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}) = m([a,b]).$$

Esto se generaliza, de modo natural, para dimensiones superiores.

Para demostrar los restantes apartados se usará la siguiente propiedad:

Si λ es una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}^k$ y $\lambda(E) = m(E)$ para toda caja E, lo mismo se tiene para cualquier conjunto abierto E, pues por el teorema 1.3.6 (d) todo conjunto abierto es unión numerable disjunta de cajas. Además, como las medidas λ y m son regulares (Teorema 1.3.5), para todo conjunto boreliano E, también se da que $\lambda(E) = m(E)$, pues en particular E es regular interior.

Para probar que m es invariante por traslaciones, fijamos un $x \in \mathbb{R}^k$ y definimos $\lambda(E) = m(E+x)$. λ es una medida pues verifica que $\lambda(\emptyset) = m(\emptyset + x) = 0$ y es numerablemente aditiva ya que si $E_i \in \mathfrak{M}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n + x) = m(\cup_{n=1}^{\infty}(E_n + x)) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Por el apartado (a), $\lambda(E) = m(E+x) = vol(E+x) = vol(E) = m(E)$ para todas las cajas, luego $m(E) = m(E+x)$ para todo boreliano E.

Para el caso general, $E \in \mathfrak{M}$, por el apartado (b) existen conjuntos A y B en $\mathbb{R}^k$ tales que $A \subset E \subset B$ y $m(B\backslash A) = 0$, esto implica que $m(A) = m(B)$. Queremos ver que para todo $E \in \mathfrak{M}$ se verifica que $m(E+x) = m(E)$. En efecto, como $A \subset E \subset B$ y $m(A) = m(B)$, entonces $\lambda(A) = \lambda(B) = m(A) = m(B) = m(E)$. Además, como $A + x \subset E + x \subset B + x$ y $m((B+x)\backslash(A+x)) = m((B\backslash A)+x) = m(B \setminus A) = 0$, obtenemos

$$\lambda(E) = m(E+x) = m(A+x) = \lambda(A) = \lambda(B) = m(E)$$

Supongamos ahora que μ es una medida de Borel invariante por traslaciones tal que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K. Sea Q_0 una caja de lado 1 y pongamos $c = \mu(Q_0)$. Como por el teorema 1.3.6 (a) y (c), Q_0 es unión disjunta de 2^{nk} $2^{-n}-$cajas que son trasladadas unas de otras se tiene,

$$2^{nk}\mu(Q) = \mu(Q_0) = cm(Q_0) = c2^{nk}m(Q), \; para\, toda\; 2^{-n} - caja\; Q.$$

Comotodo abierto es unión disjunta de cajas de $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ...$ (teorema 1.3.6 (d)), $\mu(E) = cm(E)$ para todo abierto $E \subset \mathbb{R}^k$. Con esto (d) queda probado.

Pasemos ahora a demostrar el apartado (e). Sea $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una aplicación lineal. Si el rango de T es un subespacio Y de $\mathbb{R}^k$ de dimensión inferior, entonces $m(Y) = 0$, y como $T(E) \subset Y$ se tiene que $m(T(E)) = 0$ y el $\Delta(T)$ buscado es $\Delta(T) = 0$.

Por otro lado, si las dimensiones fueran iguales, tendríamos que T es una aplicación uno a uno de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^k$, y por tanto es invertible, siendo su inversa también lineal. Como estamos en dimensión finita, lineal implica continua, con lo que se tiene que T es biyectiva y continua, con inversa continua. En definitiva, T es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^k$, con lo que se cumple que para cada boreliano E, $T(E)$ es boreliano, y podemos definir una medida positiva de Borel μ sobre $\mathbb{R}^k$ como

$$\mu(E) = m(T(E)).$$

Ahora bien, por la linealidad de T y ya que m es invariante por traslaciones,

$$\mu(E + x) = m(T(E + x)) = m(T(E) + Tx) = m(T(E)) = \mu(E)$$

y μ es también invariante por traslaciones. Además, $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K pues, $\mu(K) = m(T(K)) < \infty$ por ser $T(K)$ compacto al ser T un homeomorfismo, y por estar m definida como en el Teorema 1.3.1 (Teorema de Riesz). Podemos ahora aplicar la propiedad (d) a μ, obteniendo que $\mu(E) = cm(E)$, y por tanto

$$m(T(E)) = cm(E)$$

siendo entonces $c = \Delta(T)$.

Se ha demostrado la primera parte de (e) para todo boreliano E, faltaría probarla para todo $E \in \mathfrak{M}$. Sea $E \in \mathfrak{M}$, por el apartado (b) existen $A,\ B$ borelianos tales que $A \subset B \subset C$ y $m(A) = m(B) = m(E)$. Por un lado, es fácil ver que $m(T(A)) = m(T(B)) = cm(E)$ pues, por el apartado (e) para los conjuntos borelianos A y B,

$$cm(E) = cm(A) = m(T(A))$$
$$cm(E) = cm(B) = m(T(B))$$

Además, $T(A) \subset T(E) \subset T(B)$, con lo que $m(T(A)) = m(T(E)) = m(T(B))$. Concluyendo finalmente que $m(T(E)) = cm(E)$.

Por último, para determinar $\Delta(T)$ debemos conocer $m(T(E))/m(E)$ para algún conjunto E tal que $0 < m(E) < \infty$. Para el caso de una rotación, si E es la bola unidad en $\mathbb{R}^k$, $T(E) = E$, luego $\Delta(T) = 1$ y $m(T(E)) = m(E)$. □

1.3.4. Propiedades de continuidad de funciones medibles

A la hora de construir las medidas de Borel y en particular, la medida de Lebesgue, las funciones continuas han jugado un papel fundamental. Podemos entonces pensar en una posible conexión entre funciones continuas y funciones medibles.

Asumiremos que μ es una medida definida en un espacio Hausdorff X localmente compacto, con las mismas propiedades que establece el Teorema 1.3.1.

Recordemos en primer lugar el concepto de función simple.

Definición 1.3.8. *Toda función s compleja en un espacio de medida X cuyo rango es finito se denomina función simple. Además, si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son los distintos valores que toma una función simple s, definiendo los conjuntos $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$, se cumple que*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

Teorema 1.3.9 (Teorema de Lusin). *Sea f una función compleja medible sobre X tal que $f(x) = 0$ si $x \notin A$, donde $\mu(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$. Existe entonces una función $g \in C_c(X)$ tal que*

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{1.23}$$

Es más, podemos tomarla de forma que

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{1.24}$$

Demostración. En primer lugar asumiremos que $0 \leq f(x) < 1$ y que A es un conjunto compacto. Asociamos a f, por ser medible, una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ definidas como en la prueba del Teorema 1.2.14, y tomamos $t_1 = s_1$ y $t_n = s_n - s_{n-1}$ para $n = 2, 3, 4, ...$

Observamos que $2^n t_n$ es la función característica de un conjunto $T_n \subset A$ que es medible y cuya medida es finita. Esto se ve fácilmente pues, $0 \leq f < 1$, y tomando $f(x) \in [\frac{i}{2^{(n-1)}}, \frac{i+1}{2^{n-1}})$, al dividir este intervalo en dos, cada uno de longitud 2^{-n}, obtenemos que la función $t_n = s_n - s_{n-1}$ toma el valor $\frac{1}{2^n}$ en $[\frac{2i+1}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^n})$, y cero en el otro subintervalo. De esta manera, el conjunto T_n es el formado por la imagen inversa de f, evaluada en los intervalos donde $2^n t_n$ es uno.

Además, se cumple

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x), \quad x \in X.$$

Fijamos un abierto V tal que $A \subset V$, siendo $\overline{V}$ compacto. Existen entonces conjuntos compactos K_n y abiertos V_n tales que $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ y $\mu(V_n - K_n) < 2^{-n}\varepsilon$, y tenemos que, por el lema de Urysohn, existen funciones h_n tales que $K_n \prec h_n \prec V_n$. Definimos la función g como sigue

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x), \quad x \in X.$$

Como esta serie converge uniformemente y las funciones $h_n(x)$ son continuas, se tiene que g es continua. Además, debido a que el soporte de todas las h_n está contenido en V, el soporte de g está contenido en V, y en particular en $\overline{V}$.

Ya que $h_n(x) = 1$, para todo $x \in K_n$, $0 \leq h_n(x) \leq 1$, para todo $x \in V_n$, h_n es cero fuera de V_n, y además, $2^n t_n(x) = 1$ en T_n, se verifica que $2^{-n} h_n(x) = t_n(x)$ en K_n y fuera de V_n. Con lo cual, se tiene que $g(x) = f(x)$, excepto en $\cup(V_n \setminus K_n)$ siendo

$$\mu\left(\cup(V_n \setminus K_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(V_n \setminus K_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Por consiguiente, se ha demostrado el teorema para conjuntos A compactos y para funciones medibles accotadas. En el caso de que A no sea compacto, basta considerar que si $\mu(A) < \infty$, entonces A contiene un conjunto compacto K tal que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado.

En el caso general, est es, si f es una función medible compleja consideramos $B_n = \{x : \quad |f(x)| > n\}$. Observamos que $B_{n+1} \subset B_n$ y $\cap B_n = \emptyset$, además $\mu(B_1) < \infty$ y por consiguiente $\mu(B_n) \to 0$ (ver proposición 1.2.11 7)). Se tiene entonces que, f coincide con la función acotada $(1 - \chi_{B_n})f$, salvo en B_n. Llamando a la anterior función g, es decir, $g = (1 - \chi_{B_n})f$, como B_n es un conjunto cuya medida tiende a cero, aplicando el razonamiento anterior tenemos probada la primera parte del teorema.

Para la segunda parte, consideremos $R = sup\{|f(x)| : \quad x \in X\}$, y definamos ψ como sigue

$$\psi(z) = \begin{cases} z, & \text{si } |z| \leq R, \\ \frac{Rz}{|z|}, & \text{si } |z| > R. \end{cases}$$

Entonces, ψ es una aplicación continua que lleva todo el plano complejo en el disco de radio R. Sea ahora g una función verificando (1.23), entonces $g_1 = \psi \circ g$, verifica (1.23) y (1.24). $\square$

Corolario 1.3.10. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del teorema de Lusin y que* $-1 \leq f \leq 1$. *Entonces, existe una sucesión de funciones* $\{g_n\}$ *tal que* $g_n \in C_c(X)$, $-1 \leq g_n \leq 1$ *y*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \ c.t.p. \tag{1.25}$$

Demostración. Por el Teorema 1.3.9 (Teorema de Lusin), a cada natural n le corresponde una función $g_n(x) \in C_c(X)$ con $\sup_{x\in X}|g_n| \leq \sup_{x\in X}|f| \leq 1$, y por tanto $|g_n| \leq 1$. Cumpliendo además que $\mu(E_n) \leq 2^{-n}$, donde E_n es el conjunto de todos los puntos x tales que $f(x) \neq g(x)$.

Ahora bien, como $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, por teorema 1.2.19, casi todo x pertenece a lo sumo a un número finito de conjuntos E_n, obtenemos que para estos x, $f(x) = g_n(x)$ para n suficientemente grande, con lo que (1.25) queda probado. $\square$

Teorema 1.3.11. ***(Teorema de Vitali-Carathéodory)*** *Supongamos que* $f \in L^1(\mu)$ *real y* $\varepsilon > 0$. *Existen funciones* u *y* v *sobre* X *tales que,* $u \leq f \leq v$, *siendo* u *semicontinua superiormente y acotada superiormente, y* v *semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Además, verifican*

$$\int_X (v - u) d\mu < \varepsilon.$$

Demostración. Asumimos que $f \geq 0$ y no idénticamente nula. Como f es el límite puntual de una sucesión de funciones simples s_n, f es la suma de las funciones simples $t_n = s_n - s_{n-1}$

(tomando $s_0 = 0$), y además, t_n es una combinación lineal de funciones características, existen conjuntos E_i (no necesariamente disjuntos) y constantes $c_i > 0$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X.$$

Integrando f resulta

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i).$$

Esta serie converge pues $f \in L^1(\mu)$, con lo que $\int_X f d\mu < \infty$. Además, existen conjuntos compactos K_i y abiertos V_i verificando que $K_i \subset E_i \subset V_i$ y

$$c_i \mu(V_i \setminus K_i) < 2^{-i-1}\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, ... \tag{1.26}$$

Definamos las funciones v y u de la siguiente manera

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i}, \qquad u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i}$$

con N elegido de forma que

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.27}$$

Obsérvese que v es semicontinua inferior pues el conjunto $\{x : \ v(x) > \alpha\}$ es abierto al ser v combinación lineal de funciones caraterísticas de conjuntos abiertos. Sin embargo, u es continua superiormente pues es combinación lineal de funciones características de conjuntos compactos y al considerar el conjunto $\{x : \ u(x) < \alpha\}$ se tiene que es abierto. Además, $u \leq f \leq v$ pues $K_i \subset E_i \subset V_i$ y se cumple que

$$\begin{aligned} v - u &= \sum_{i=1}^{N} c_i(\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

entonces tomando integrales y aplicando (1.26) y (1.27) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X (v-u) d\mu &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(V_i - K_i) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Con lo que hemos probado el teorema para toda función real $f \geq 0$. Para probar el caso general consideramos $f = f^+ - f^-$. Como f^+ y f^- son positivas, se ha probado que existen funciones u_i semicontinuas superiormente y v_i semicontinuas inferiormente para $i = 1, 2$, tales que $u_1 \leq f^+ \leq v_1$, $u_2 \leq f^- \leq v_2$, y verificando

$$\int_X (v_i - u_i) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}; \quad i = 1, 2.$$

Definimos $u = u_1 - v_2$ y $v = v_1 - u_2$, siendo u semicontinua superior por serlo u_1 y $-v_2$, y v semicontinua inferior por serlo v_1 y $-u_2$. Además se cumple que $u \leq f \leq v$. Concluimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_X (v - u) d\mu &= \int_X (v_1 - u_2) d\mu - \int_X (u_1 - v_2) d\mu \\ &= \int_X (v_1 - u_1) d\mu + \int_X (v_2 - u_2) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.30}$$

□

Capítulo 2

La transformación de Fourier

2.1. Introducción

En el capítulo anterior se definió el espacio $L^1(\mu)$, como el espacio de aquellas funciones que verifican

$$\int_X |f|d\mu < \infty.$$

El hecho de que ciertas funciones que no están en $L^1(\mu)d\mu$, verifiquen que una potencia positiva si lo esté, motiva la introducción de los llamados espacios $L^p(\mu)$. Además como para $p = 2$, $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert y es este espacio con el que más vamos a trabajar, en este capítulo empezaremos recordando algunas de las propiedades básicas de los espacios L^p y de los espacios de Hilbert y al igual que en el primer capítulo probaremos aquellos resultados que no se han visto en los estudios del grado.

2.2. Breve introducción a espacios L^p y Hilbert

2.2.1. Espacios L^p

Antes de dar una definición precisa de espacio L^p, enunciamos algunas propiedades de funciones convexas.

Definición 2.2.1. *Sea $\varphi : (a, b) \to \infty$, con $-\infty \leq a < b \leq \infty$. φ es convexa si cumple que*

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

siempre que $a < x < b$, $a < y < b$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Esta definición es equivalente a decir que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \tag{2.1}$$

siempre que $a < s < t < u < b$.

En efecto, si $a < s < t < u < b$, tenemos que $t = (1-\lambda)s + \lambda u$, y despejando, $\lambda = \frac{t-s}{u-s}$. Como φ es convexa, $\varphi(t) \leq (1-\lambda)\varphi(s) + \lambda\varphi(u)$. Por tanto,

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(s)}{u-s}$$

Desarrollando la última expresión obtenemos el resultado.

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} &\leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-s} + \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{u-s} \\
(\varphi(t)-\varphi(s))\left[\frac{1}{t-s} - \frac{1}{u-s}\right] &\leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-s} \\
(\varphi(t)-\varphi(s)\frac{u-t}{(u-s)(t-s)} &\leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-s}
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Jensen). *Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Si f es una función real en $L^1(\mu)$, $a < f(x) < b$, para todo x de Ω y si φ es convexa en (a,b), entonces*

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu$$

Demostración. En primer lugar, nótese que la segunda integral tiene sentido pues, al ser φ convexa, es continua y la composición de una función continua con una función medible es medible.

Sea $t = \int_\Omega f d\mu \in \mathbb{R}$. Se tiene que $a < t < b$ por monotonía de la integral pues, sabemos que $a < f(x) < b$ e integrando,

$$\int_\Omega a d\mu < \int_\Omega f(x) d\mu < \int_\Omega b d\mu$$

Es decir, $a\mu(\Omega) < t < \mu(\Omega)$, siendo $b\mu(\Omega) = 1$.

Si $\beta = \sup\limits_{a<s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$, entonces β no es mayor que ninguno de los cocientes de la parte derecha de (2.1) con lo que el supremo está definido. Se sigue que,

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

Despejando llegamos a que $\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t)$ y $\varphi(u) \geq \varphi(t) + \beta(u-t)$. Llamando $u = s$, se da la desigualdad para $a < s < b$. En particular, haciendo $s = f(x)$

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta(f(x) - t)$$

para todo $x \in \Omega$. Es decir, $\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x)-t) \geq 0$, donde todos los elementos son integrables. Integrando la anterior expresión en Ω, tenemos

$$\int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu - \int_\Omega \varphi(t) d\mu - \beta\left(\int_\Omega f d\mu - \int_\Omega t d\mu\right) \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu \geq \varphi(t) \int_\Omega d\mu = \varphi(t)\mu(\Omega) = \varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \tag{2.3}$$

□

Definición 2.2.3. *Decimos que p y q números reales positivos son un par de exponentes conjugados si $p + q = pq$, o equivalentemente $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Teorema 2.2.4. *Sea X un espacio de medida, con medida μ y sean p y q exponentes conjugados con $1 < p < \infty$. Si f y g son funciones medibles sobre X, con rango en $[0, \infty]$, se verifica*

$$\int_X fg d\mu \leq \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X g^q d\mu \right\}^{\frac{1}{q}}$$

conocida como desigualdad de Hölder, y

$$\left\{ \int_X (f+g)^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_X g^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$$

conocida como desigualdad de Minkowski.

La desigualdad de Schwarz se obtiene al hacer $p = q = 2$.

Pasemos a la definición de espacio L^p.

Definición 2.2.5. *Sea $0 < p < \infty$. Si f es una función compleja medible sobre X, definimos la L^p-norma de f como*

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dm(x) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Y llamamos $L^p(\mu)$ al conjunto de todas las funciones f verificando que $\|f\|_p < \infty$.

Si μ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^k$, escribimos $L^p(\mathbb{R}^k)$, en lugar de $L^p(\mu)$.

Definición 2.2.6. *Supongamos que $g : X \to [0, \infty]$ es una función medible. Denotamos por S al conjunto de todos los reales α tales que*

$$\mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0.$$

Si $S = \emptyset$, hacemos $\beta = \infty$. Si $S \neq \emptyset$, hacemos $\beta = \inf S$. Además, como

$$g^{-1}((\beta, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1} \left(\left(\beta + \frac{1}{n}, \infty \right] \right)$$

y la unión contable de conjuntos de medida nula tiene medida nula, observamos que $\beta \in S$. Llamamos β al supremo esencial de g, y si f es una función compleja medible sobre X, definimos la norma infinito de f, $\|f\|_\infty$, como el supremo esencial de $|f|$. El conjunto $L^\infty(\mu)$ denotará la colección de funciones f para las cuales se verifica que $\|f\|_\infty < \infty$.

Incluimos también la siguiente desigualdad, conocida como *desigualdad integral de Minkowski*, que será de gran utilidad en el estudio de la transformación de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$.

Proposición 2.2.7. *Sean (X, μ) y (Y, η) dos espacios de medida σ-finita y f una función medible en $X \times Y$. Para cada $p \in [1, \infty)$, se tiene que*

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\eta(y) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)} d\eta(y).$$

Teorema 2.2.8. *Sea el espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, con μ medida positiva. $L^p(\mu)$ es un espacio métrico completo, para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. Comenzaremos probándolo para $1 \leq p < \infty$. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que para todo $n, m \geq N_0$, se tiene que $||f_n - f_m||_p < \varepsilon$. Existe entonces una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que

$$||f_{n_{i+1}} - f_{n_i}||_p \leq \frac{1}{2^i}, \; i = 1, 2, ...,$$

en efecto, sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe un N_1 tal que si $n, m > N_1$, entonces $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$. Elegimos $n_1 > N_1$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, existe un N_2, que podemos elegir mayor que n_1, tal que si $n, m > N_2$, entonces $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^2}$. Tomamos entonces $n_2 > N_2$ y en general para $\varepsilon = \frac{1}{2^{i+1}}$, existirá un N_{i+1}, que podemos tomar mayor que n_i, tal que si $n, m > N_{i+1}$, entonces $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^{i+1}}$. Tomamos entonces $n_{i+1} > N_{i+1}$, tenemos así que,

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$$

ya que $n_{i+1} > n_i > N_i$. Hagamos

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

Como $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$, tenemos que, por la desigualdad de Minkowski,

$$\|g_k\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \leq 1$$

y aplicando el lema de Fatou, se sigue que

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \liminf_{k \to \infty} g_k^p \leq \liminf_{k \to \infty} \int_X g_k^p \leq 1$$

esto es, $\|g\|_p \leq 1$ y esto implica que $|g(x)| < \infty$ c.t.p., es decir, tenemos dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = X$, $\mu(B) = 0$ y $g(x) < \infty$ en A. Considerando

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_i+1} - f_{n_i}),$$

para $k \to \infty$, la serie converge absolutamente para todo x de A. Denotemos por $f(x)$ a la suma de dicha serie. En B tomamos $f(x) = 0$, y veamos que $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ en $L^p(\mu)$.

Tomamos $\varepsilon > 0$, por ser f_n una sucesión de Cauchy, existe un N tal que si $n, m > N$, entonces $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Luego, para todo $m > N$, el lema de Fatou prueba que

$$\begin{aligned} \int_X \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu &= \int_X |f - f_m|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k} - f_m|^p d\mu = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_m\|_p^p < \varepsilon^p \quad (2.4) \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que

(I) $f - f_m \in L^p$

(II) $f \in L^p$, ya que $f = (f - f_m) + f_m$, y $(f - f_m), f_m \in L^p$

(III) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^p(\mu)$

Para el caso $p = \infty$, el procedimiento es más sencillo. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mu)$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mu)$. Denotemos por $A_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$ y $B_{m,n} = \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$. Como $\mu(A_k) = 0$ y $\mu(B_{m,n}) = 0$, para todo $k, m, n = 1, 2, ...$, si

$$E = \bigcup_{k,m,n=1}^{\infty} (A_k \cup B_{m,n}),$$

entonces $\mu(E) = 0$ por ser un conjunto numerable.

En $X \setminus E$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$. Como $\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^\infty(\mu)$, tenemos que si $x \in X \setminus E$, $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Faltaría probar que $f \in L^\infty(\mu)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^\infty(\mu)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que si $m, n > N$, entonces $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Para todo $m > N$ y tomando n tal que $n > N$ y $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, se sigue que

$$|f(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (2.5)$$

para todo $x \in X \setminus E$. Así, si definimos $f(x) = 0$ en E, tenemos que $f - f_m \in L^\infty(\mu)$, por tanto $f \in L^\infty(\mu)$ y por (2.5), $f_n \to f$ en $L^\infty(\mu)$. □

Si analizamos cuidadosamente la demostración del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado que relaciona la convergencia en norma de una sucesión en L^p con la convergencia puntual de cierta subsucesión.

Teorema 2.2.9. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ con límite f. Entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente a $f(x)$ en casi todo punto.*

Demostración. Basta considerar en el teorema anterior la subsucesión dada por

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_i+1} - f_{n_i})$$

ya que $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$ en casi todo punto. □

Teorema 2.2.10. *Sea S la clase constituida por las funciones f medibles complejas y simples tales que*

$$\mu\left(\{x \in X : s(x) \neq 0\}\right) < \infty.$$

Se tiene que S es denso en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Veamos primero que $S \subseteq L^p(\mu)$. Sea $s \in S$, entonces

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

para ciertos $\alpha_i \in \mathbb{C}$, A_i medibles, $i = 1, 2, ..., n$. Se tiene que

$$\|s\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|\chi_{A_i}\|_p = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \left(\mu(A_i)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $\alpha_i = 0$ para todo i, entonces $\|s\|_p = 0$ y si $\alpha_i \neq 0$ para algún i, entonces $A_i \subseteq \{x : s(x) \neq 0\}$ y por tanto $\mu(A_i) \leq \mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. En ambos casos se tiene que $||s||_p < \infty$, luego $S \subseteq L^p(\mu)$.

Sean $f \in L^p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Queremos ver que existe $s \in S$ tal que $\|s - f\|_p < \varepsilon$. En primer lugar, suponemos que $f \geq 0$. Por el Teorema 1.2.14, existen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones simples tales que

(I) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$

(II) $f(x) = \underset{n\to\infty}{s_n}(x)$, $x \in X$

Veamos que $s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $s_n \in L^p(\mu)$, en efecto, ya que $0 \leq s_n \leq f$, entonces $\|s_n\|_p \leq \|f\|_p < \infty$.

Además, si $s_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$,

$$\|s_n\|_p = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \left(\mu(A_i)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.6}$$

pues $\|s_n\|_p < \infty$. Por tanto,

$$\mu\left(\{x : s_n(x) \neq 0\}\right) = \mu\left(\bigcup_{\substack{i\in I\\ \alpha_i\neq 0}} A_i : \alpha_i \neq 0, i \in I\right) \leq \sum_{\substack{i\in I\\ \alpha_i\neq 0}} \mu(A_i) < \infty \tag{2.7}$$

por (2.6).

Hemos visto que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$. Mostramos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$ en $L^p(\mu)$. Escribimos, usando el Teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_X |s_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0.$$

Estamos en condiciones de aplicar dicho teorema pues si $G_n(x) = |s_n(x) - f(x)|^p$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = 0$ por (II). Además, $|G_n(x)| \leq (2|f(x)|)^p \in L^1(\mu)$, ya que $f \in L^p(\mu)$.

Supongamos ahora que f es real. Podemos escribir f como $f = f^+ - f^-$, siendo $f^+ = \max\{f, 0\} \geq 0$ y $f^- = -\min\{f, 0\} \geq 0$, con $f^+, f^- \in L^p(\mu)$, pues $f \in L^p(\mu)$.

Aplicando lo visto anteriormente, existen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}, \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$, tales que $\lim_{n\to\infty} s_n = f^+$ y $\lim_{n\to\infty} r_n = f^-$ en $L^p(\mu)$. Tomando $t_n = s_n - r_n$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} t_n = f$ en $L^p(\mu)$ y $t_n \in S$ pues

$$\{x : s_n(x) - r_n(x) \neq 0\} \subseteq \{x : s_n(x) \neq 0\} \cup \{x : r_n(x) \neq 0\}$$

con lo cual

$$\mu(\{x : s_n(x) - r_n(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x : s_n(x) \neq 0\}) + \mu(\{x : r_n(x) \neq 0\}) < \infty$$

Por último, si f es compleja, escribimos $f = u + iv$ y aplicamos el resultado para funciones reales a u y v. Existen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de S tales que

$$\|u_n - u\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \|v_n - v\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Tomando, $f_n = u_n + iv_n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^p(\mu)$. Además, $f_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, ya que

$$\mu(\{x : f_n(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x : u_n(x) \neq 0\}) + \mu(\{x : v_n(x) \neq 0\}) < \infty$$

□

Teorema 2.2.11. *Sean X un espacio Hausdorff localmente compacto y μ una medida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$, verificando las propiedades del teorema de representación de Riesz (Teorema 1.3.1). Entonces, para $p \in [1, \infty)$, $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$.*

Demostración. Sea S la clase del teorema anterior, y consideramos $f \in L^p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema 2.2.10, existe $s \in S$ tal que $||s - f||_p < \varepsilon$. Tenemos que s es una función compleja medible que cumple que

$$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$$

Por el teorema de Lusin (1.3.9), existe una función $g \in C_c(X)$ de modo que

$$\mu(\{x : g(x) \neq s(x)\}) < \varepsilon$$

y además

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_{x\in X} |s(x)| = ||s||_\infty$$

Llamando $\Omega = \{x \in X : g(x) = s(x)\}$, se tiene que $\mu(X \setminus \Omega) < \varepsilon$ y $g(x) = s(x),\ x \in \Omega$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \| - s\|_p^p &= \int_X |g(x) - s(x)|^p d\mu(x) = \int_{X\setminus\Omega} |g(x) - s(x)|^p d\mu(x) && (2.8) \\ &\leq (2||s||_\infty)^p \mu(X \setminus \Omega) < (2||s||_\infty)^p \varepsilon && (2.9) \end{aligned}$$

Esto es,

$$\|g - s\|_p < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} ||s||_\infty$$

Luego,

$$\|f - g\|_p \leq \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < \varepsilon + 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \|s\|_\infty$$

La arbitrariedad de ε permite concluir la prueba. □

2.2.2. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son una generalización, incluso infinito-dimensional, de los espacios euclídeos. Esto les permite disponer de propiedades tales como ortogonalidad, unido a su característica fundamental de completitud. Sea H un espacio vectorial complejo, definimos a continuación un producto interior en él.

Definición 2.2.12. *Un producto interior es una aplicación tal que a cada par* $(x, y) \in H \times H$ *le asocia un número complejo* $\langle x, y\rangle$ *de manera que*

1. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$, $x, y \in H$,
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $x, y, z \in H$,
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in H$,
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$, *para todo* $x \in H$,
5. $\langle x, x\rangle = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

En H asociado a un producto interior podemos definir

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ x \in H$$

que es una norma ya que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

para todo $x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Luego si en H definimos la métrica, d, asociada a esta norma,

$$\begin{aligned} d : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

tenemos un espacio métrico que si además es completo respecto a la topología inducida por la métrica, lo llamaremos Hilbert.

Definición 2.2.13. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interior, completo en la topología definida por la métrica asociada a la norma definida a partir del producto interior.*

Algunos ejemplos de espacios de Hilbert reales son $\mathbb{R}$ con el producto interior $\langle x, y\rangle = xy$ y $\mathbb{R}^n$ con $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$, siendo $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$. En cuanto a espacios de Hilbert complejos, encontramos $\mathbb{C}$ con el producto interior $\langle z, w\rangle = z\overline{w}$ y $\mathbb{C}^n$ con $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta}_i$, con x e y definidos como antes. Otro ejemplo es el espacio $L^2(\mu)$. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ con μ medida positiva. $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert con producto interior definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g} d\mu, \; f, g \in L^2(\mu)$$

y cuya norma viene dada por

$$\left\{ \int_X |f|^2 d\mu \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_X f\overline{f} d\mu \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición 2.2.14 (Desigualdad de Schwarz)**.** *Sean $x, y \in H$, se tiene que*

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$$

Teorema 2.2.15. *Para $y \in H$ fijo, las aplicaciones*

$$x \to \langle x, y\rangle, \;\; x \to \langle y, x\rangle, \;\; x \to \|x^o|$$

son continuas en H.

Teorema 2.2.16. *Si M es un subespacio de H, entonces $\overline{M}$ también es subespacio*

Demostración. Tenemos que ver que si $x, y \in \overline{M}$, entonces $x + y \in \overline{M}$ y que si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in \overline{M}$, entonces $\alpha x \in \overline{M}$. Supongamos que $x, y \in \overline{M}$, luego existen sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenidas en M tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ en H. Por tanto, si consideramos $x_n + y_n \in M$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$$

y $x + y \in \overline{M}$. De manera análoga se demuestra para αx. □

Ortogonalidad

Si $\langle x, y\rangle = 0$, para $x, y \in H$, diremos que x es ortogonal a y y lo denotamos $x \perp y$. Además, como $\langle x, y\rangle = 0$, implica $\langle y, x\rangle = 0$, la relación $\perp$ es simétrica.

Definición 2.2.17. *Sea $x \in H$, definimos el ortogonal de x en H como*

$$x^\perp = \{y \in H : x \perp y\}$$

Definición 2.2.18. *Sea M subespacio de H, definimos el espacio ortogonal de M por*

$$M^\perp = \{y \in H : x \perp y, \text{ para todo } x \in M\}$$

Proposición 2.2.19. *Sea $x \in H$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *$x^{\perp}$ es subespacio cerrado de H,*

2. *Si M es un subespacio de H, entonces $M^{\perp}$ también es un subespacio de H.*

Demostración. (1) Claramente $0 \in x^{\perp}$. Sean $y, z \in x^{\perp}$, tenemos que

$$\langle y+z, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = 0$$

y por tanto $x + y \in x^{\perp}$. Además, sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $y \in x^{\perp}$,

$$\langle \alpha y, x\rangle = \alpha\langle y, x\rangle = 0$$

con lo que $\alpha y \in x^{\perp}$.

Por otro lado, la aplicación $\varphi(\cdot) = \langle x, \cdot\rangle$ es continua de H en $\mathbb{C}$ y $x^{\perp} = \varphi^{-1}(\{0\})$, y como $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$, $x^{\perp}$ es cerrado en H.

Para probar (2), tenemos que

$$M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}$$

y la intersección de subespacios es subespacio. □

Proposición 2.2.20. *Si S es un subespacio cerrado de H, entonces $H = S \oplus S^{\perp}$.*

Teorema 2.2.21. *Si S es un subespacio de H, entonces $S^{\perp} = \{0\}$ si y sólo si S es denso en H.*

Demostración. Supongamos que S es denso en H, es decir, $\overline{S} = H$ y veamos que $S^{\perp} = \{0\}$.

Sean $x \in S^{\perp}$ e $y \in H$. Como S es denso en H, existe una sucesión $\{y_n\} \subset S$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ en H. Luego,

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, y_n\rangle = 0$$

y entonces $x = 0$. Observemos que en la última igualdad utilizamos la continuidad de $\langle x, \cdot\rangle$.

Para probar la otra inclusión, queremos ver que $\overline{S} = H$. Ya que $\overline{S}$ es un subespacio cerrado de H, podemos escribir

$$H = \overline{S} \oplus \overline{S}^{\perp}$$

Además, como $S \subset \overline{S}$, esto implica que $\overline{S}^{\perp} \subset S^{\perp} = \{0\}$, con lo cual $\overline{S}^{\perp} = \{0\}$ y $H = \overline{S}$. □

Definición 2.2.22. *Un subconjunto numerable $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de H se llama ortonormal si*

$$\langle e_k, e_l\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Proposición 2.2.23 (Pitágoras)**.** *Sean $f, g \in H$ tales que $f \perp g$, entonces $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.*

Demostración. Aplicando propiedades del producto interior tenemos que

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

pues $\langle f, g\rangle = 0 = \langle g, f\rangle$ por ser f y g ortogonales. □

Proposición 2.2.24. *Si $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es ortonormal en H y $f = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, entonces*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

Demostración. Si $f = \sum_{k=1}^{2} a_k e_k$, aplicando Pitágoras

$$\|f\|^2 = \|a_1 e_1\|^2 + \|a_2 e_2\|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

y aplicando sucesivamente Pitágoras se obtiene el resultado. □

Teorema 2.2.25. *Para un conjunto $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ ortonormal en H, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Combinaciones lineales finitas de elementos de $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ son densas en H,

(2) Si $f \in H$ y $\langle f, e_j\rangle = 0$ para todo j, entonces $f = 0$,

(3) Si $f \in H$ y $S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k$, donde $a_k = \langle f, e_k\rangle$, entonces $S_N(f) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$ en la norma de H,

(4) Si $a_k = \langle f, e_k\rangle$, entonces $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Demostración. Probaremos que (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) y finalmente (4) $\Rightarrow$ (1).

En primer lugar, asumimos (1) y veremos que se da (2). Sea $f \in H$ tal que $\langle f, e_j\rangle = 0$ para todo j. Por (1) existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada g_n es combinación lineal finita de elementos de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, $g_n = \sum_{j\in A} a_j e_j$ con A finito, tal que $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en H. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\|f\|^2 = |\langle f, f\rangle| = |\langle f, f-g_n\rangle + \langle f, g_n\rangle| = |\langle f, f-g_n\rangle| \leq \|f\|\|f-g_n\|$$

donde se ha usado que $\langle f, g_n\rangle = \langle f, \sum_{j\in A} a_j e_j\rangle = 0$.

Tomando límites para $n \to \infty$ en H, tenemos que $||f-g_n|| \to 0$, y llegamos a que $0 \leq ||f||^2 \leq 0$, por tanto $f = 0$.

Supongamos ahora que se verifica (2). Para $f \in H$, definimos $S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k$, donde $a_k = \langle f, e_k\rangle$. Primero probaremos que $S_N(f)$ converge a un elemento $g \in H$.

La definición de a_k implica que $(f - S_N(f)) \perp S_N(f)$ ya que

$$\begin{aligned}\langle f - S_N(f), S_N(f)\rangle &= \langle f, S_N(f)\rangle - \langle S_N(f), S_N(f)\rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle f, a_k e_k\rangle - ||S_N(f)||^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N} \overline{a_k}\langle f, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 = 0\end{aligned}$$

Luego, si consideramos $f = (f - S_N(f)) + S_N(f)$, por Pitágoras

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2,$$

esto implica que $\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leq \|f\|^2$, para todo N. Por tanto, haciendo N tender a infinito, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ converge y obtenemos la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ converge, $S_N = \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$ converge. Por tanto, S_N es de Cauchy es decir, para todo ε existe N_0 tal que para todo $M, N > N_0$, supongamos $M > N$, se verifica que $\sum_{k=N+1}^{M} |a_k|^2 < \varepsilon^2$. De aquí deducimos que $\{S_N(f)\}_{N=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en H ya que para todo ε, tomando M y N como antes se tiene que,

$$\|S_M(f) - S_N(f)\|^2 = \| \sum_{k=N+1}^{M} a_k e_k\|^2 = \sum_{k=N+1}^{M} |a_k|^2 < \varepsilon^2$$

Luego, como $\{S_N(f)\}_{N=1}^{\infty}$ es de Cauchy en H, espacio de Hilbert, se tiene que la sucesión converge a un elemento $g \in H$.

Veamos que $f = g$, para ello consideramos $f - g$. Observemos que

$$\langle f - g, e_j \rangle = 0, \text{ para todo j.}$$

En efecto, fijamos j y consideramos N suficientemente grande, tal que $j < N$, entonces

$$\begin{aligned} \langle f - S_N(f), e_j \rangle &= \langle f, e_j \rangle - \langle S_N(f), e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \langle \sum_{k=1}^{N} a_k e_k, e_j \rangle \\ &= \langle f, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{N} a_k \langle e_k, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - a_j = a_j - a_j = 0 \end{aligned}$$

Tenemos pues que $\langle f - S_N(f), e_j \rangle = 0$ y como la aplicación $\langle \cdot, e_j \rangle : H \to \mathbb{C}$ es continua

$$\lim_{N \to \infty} \langle f, S_N(f), e_j \rangle = 0$$

y

$$\langle f - g, e_j \rangle = \langle f - \lim_{N \to \infty} S_N(f), e_j \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle f - S_N(f), e_j \rangle = 0$$

para todo j. Finalmente por (2), $f - g = 0$.

Pasamos a probar (3) $\Rightarrow$ (4). Hemos visto que,

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$$

Tomando ahora límites a ambos lados cuando $N \to \infty$, y utilizando (3), es decir, $\|f - S_N(f)\| \to 0$ se obtiene (4)

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$$

Por último, falta ver que (4) implica (1). Debemos probar que si $f \in H$, entonces existen $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$, f_N combinación lineal finita de elementos de $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{N\to\infty} f_N = f$ en H.

Basta considerar (4) en

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$$

pues, tomando límite para $N \to \infty$ en ambos lados, tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 0.$$

□

Lema 2.2.26. *Supongamos que*

(a) X e Y son espacios métricos, siendo X completo,

(b) $f : X \to Y$ es continua,

(c) X tiene un subconjunto denso X_0 sobre el cual f es una isometría,

(d) $f(X_0)$ es denso en Y. Entonces, f es una isometría de X sobre Y.

Demostración. Sea $y_0 \in Y$ tal que $y_0 \notin f(X)$. Como $f(X_0)$ es denso en Y, existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(X_0)$, es decir, $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in X_0$, tal que $y_n \to y_0$. Esto es, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ en Y.

Luego, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y como f es isometría en X_0 y $\{x_n\} \subset X_0$, tenemos que

$$d_X(x_n, x_m) = d_Y(f(x_n), f(x_m))$$

y por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Además, como X es espacio métrico completo, existe un x_0 tal que $x_n \to x_0$ en X. Como f es continua

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

y por unicidad del límite en Y, $f(x_0) = y_0$ con lo que f es sobre.

Faltaría probar que f es isometría, es decir, si $a, b \in X$, entonces $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$. Si $a, b \in X_0$, por *c*) ya estaría probado. Supongamos que $a, b \in X \setminus X_0$, por densidad de X_0, existen sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_0$ tales que $a_n \to a$ y $b_n \to b$ en X y $f(a_n) \to f(a)$ y $f(b_n) \to f(b)$ en Y.

Fijado $\varepsilon > 0$, existen n_0 tal que para todo $n > n_0$ $d_X(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, n_1 tal que para todo $n > n_1$ $d_X(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$, n_2 tal que para todo $n > n_2$ $d_X(f(a_n), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y n_3 tal que para todo $n > n_3$ $d_X(f(b_n), f(b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $N_0 = \text{máx}\{n_0, n_1, n_2, n_3\}$ y sea $n > N_0$, obtenemos así que

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) + d(b_n, b) \leq d(a_n, b_n) + \varepsilon$$

y de manera análoga

$$d(f(a_n), f(b_n)) \leq d(f(a), f(b)) + \varepsilon$$

Por tanto, como f es isometría en X_0 y $a_n, b_n \in X_0$,

$$d(a, b) \leq d(a_n, b_n) + \varepsilon = d(f(a_n), f(b_n)) + \varepsilon \leq d(f(a), f(b)) + 2\varepsilon$$

Y de forma similar, se obtiene la desigualdad

$$d(f(a), f(b)) \leq d(a, b) + 2\varepsilon$$

Concluímos entonces que $d(a, b) = d(f(a), f(b))$. □

2.3. La transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección analizamos los principales aspectos relativos a la transformación de Fourier para funciones en los espacios de Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$, de los que destacamos el teorema de inversión y la igualdad de Plancherel.

Estos espacios de Lebesgue, definidos en la sección anterior, serán considerados a partir de ahora respecto a la medida m, la medida de Lebesgue dividida por $\sqrt{2\pi}$, principalmente para que los resultados tengan una apariencia más simplificada. Ya que esto no supone una diferencia esencial, seguiremos denotando por $\|f\|_p$ la norma-L_p de la función f respecto a la medida m. La mayor parte de los resultados que se presentan en esta sección fueron extraídos de [3] y [5].

2.3.1. La convolución

La operación de convolución, como veremos más adelante, juega un papel importante en la teoría de la transformación de Fourier y es por ello que recogemos algunos resultados sobre dicha operación.

Definición 2.3.1. *Sean f y g dos funciones medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$. Se define la convolución de $f * g$ mediante*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)dm(y), \quad x \in \mathbb{R},$$

siempre y cuando la integral sea convergente.

Nótese que la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue conduce a que $f * g = g * f$.

Para cada $y \in \mathbb{R}$ consideramos la *función trasladada* f_y como $f_y(x) = f(x-y)$, $x \in \mathbb{R}$. La siguiente propiedad resulta útil en lo que sigue.

Proposición 2.3.2. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $f \in L^p(\mathbb{R})$. *La aplicación* $y \to f_y$ *es una aplicación uniformemente continua de* $\mathbb{R}$ *en* $L^p(\mathbb{R})$.

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Como $f \in L^p(\mathbb{R})$, el Teorema 2.2.11 garantiza la existencia de una función continua g con soporte en un intervalo acotado $[-A, A]$, $(A > 0)$, tal que

$$\|f - g\|_p < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Ya que g es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, existe $\delta \in (0, A)$ de manera

$$|g(s) - g(t)| < \Big(\frac{\sqrt{2\pi}}{3A}\Big)^{1/p}\varepsilon, \quad |s-t| < \delta.$$

Luego, si $|s-t| < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-s) - g(x-t)|^p dm(x) &= \int_{-A+\text{mín}\{s,t\}}^{A+\text{máx}\{s,t\}} |g(x-s) - g(x-t)|^p dm(x)\\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{3A}\int_{-A+\text{mín}\{s,t\}}^{A+\text{máx}\{s,t\}} dx \leq \frac{\varepsilon^p}{3A}(2A+\delta) < \varepsilon^p, \end{aligned}\tag{2.11}$$

pues $(2A+\delta)/(3A) < 1$. Por tanto, $\|g_s - g_t\|_p < \varepsilon$, cuando $|s-t| < \delta$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones se tiene que $\|h\|_p = \|h_y\|_p$, $y \in \mathbb{R}$, cuando $h \in L^p(\mathbb{R})$. Por tanto, usando la desigualdad de Minkowski, se sigue de (2.10) y (2.11) que

$$\begin{aligned}\|f_s - f_t\|_p &\leq \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p\\ &= \|(f-g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(g-f)_t\|_p < 3\varepsilon, \quad |s-t| < \delta,\end{aligned}$$

lo que nos dice que la aplicación $y \to f_y$ es uniformemente continua de $\mathbb{R}$ en $L^p(\mathbb{R})$. □

Proposición 2.3.3. *Sean* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $g \in L^p(\mathbb{R})$, *para algún* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces* $f * g \in L^p(\mathbb{R})$. *Además,* $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Demostración. El caso $p = \infty$ se sigue trivialmente pues

$$|(f*g)(x)| = |(g*f)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||g(x-y)| dm(y) \leq \|g\|_\infty \|f\|_1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $p \in [1, \infty)$, usamos la desigualdad de Minkowski integral (ver Proposición 2.2.7) para obtener

$$\|f*g\|_p = \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dm(y)\right\|_p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \|g_y\|_p dm(y) = \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

Introducimos ahora unas funciones auxiliares que serán de gran utilidad en la prueba del teorema de inversión. Sea h la función dada por

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para cada $\lambda > 0$ definimos $h_\lambda(x) = \lambda^{-1} h(x/\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$. Nótese que entonces

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

y se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) = 1, \quad \lambda > 0. \tag{2.13}$$

En efecto, para cada $\lambda > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(x) dm(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2} dx = \frac{2}{\pi} \lim_{b \to +\infty} \arctan\left(\frac{b}{\lambda}\right) = 1.$$

Además $h \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^p} \leq 2 \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \pi, \ \ (1 \leq p < \infty) \quad \text{y} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} = 1.$$

Otra propiedad que verifican las funciones h_λ, $\lambda > 0$, es la siguiente:

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|\xi|} e^{ix\xi} dm(\xi), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

En efecto, sea $\lambda > 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|\xi|} e^{ix\xi} dm(\xi) = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) e^{-\lambda|\xi|} e^{ix\xi} dm(\xi) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} (e^{ix\xi} + e^{-ix\xi}) dm(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} \cos(x\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Resolvemos esta última integral por el método de integración por partes y llegamos a que

$$\begin{aligned} I(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{b \to +\infty} \left[e^{-\lambda\xi} \frac{\sin(x\xi)}{x} \right]_{\xi=0}^{\xi=b} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x} \int_0^\infty \sin(x\xi) e^{-\lambda\xi} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x} \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-\lambda\xi} \frac{\cos(x\xi)}{x} \right]_{\xi=0}^{\xi=b} - \frac{\lambda^2}{x^2} I(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x^2} - \frac{\lambda^2}{x^2} I(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De aquí, se obtiene que

$$I(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} = h_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

con lo que (2.14) queda establecido.

Un primer resultado de convergencia que involucra a las funciones $\{h_\lambda\}_{\lambda>0}$ es el siguiente.

Proposición 2.3.4. *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se tiene que*

$$\lim_{\lambda\to 0^+}(g * h_\lambda)(x) = g(x),$$

para aquellos $x \in \mathbb{R}$ donde g es continua.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que g es continua en x. En virtud de (2.13), podemos escribir

$$\begin{aligned}(g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}[g(x-y) - g(x)]h_\lambda(y)dm(y)\\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}[g(x-y) - g(x)]h\left(\frac{y}{\lambda}\right)dm(y)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}[g(x-\lambda s) - g(x)]h(s)dm(s), \quad \lambda > 0.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, para cada $\lambda > 0$,

$$|[g(x-\lambda s) - g(x)]h(s)| \le 2\|g\|_\infty h(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Además,

$$\lim_{\lambda\to 0^+}[g(x-\lambda s) - g(x)]h(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Luego, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada (nótese que $h \in L^1(\mathbb{R})$) para concluir que

$$\lim_{\lambda\to 0^+}(g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

□

Veamos que además se tiene convergencia en el espacio $L^p(\mathbb{R})$, cuando $p \in [1, \infty)$.

Proposición 2.3.5. *Sea $1 \le p < \infty$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$, se satisface que*

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$. Sabemos que h_λ, $\lambda > 0$, es una función en $L^q(\mathbb{R})$, para todo $1 \le q \le \infty$. Luego si tomamos $q = p'$ (el exponente conjugado de p), y aplicamos la desigualdad de Hölder se puede ver que $(f * h_\lambda)(x) < \infty$, $x \in \mathbb{R}$.

Al igual que antes, usando (2.13), escribimos

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}[f(x-y) - f(x)]h_\lambda(y)dm(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la desigualdad de Jensen (Teorema 2.2.2) a la función convexa $\varphi(x) = x^p$ obtenemos

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y) dm(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces por el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \|f * h_\lambda - f\|_p^p &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(y) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|^p dm(x) dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_y - f\|_p^p h_\lambda(y) dm(y). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sea $g(y) = \|f_y - f\|_p^p$, $y \in \mathbb{R}$. Esta función es claramente acotada y, en virtud de la Proposición 2.3.2, continua en $\mathbb{R}$. Entonces, ya que

$$\|f * h_\lambda - f\|_p^p \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) h_\lambda(y) dm(y) = (g * h_\lambda)(0),$$

la Proposición 2.3.4 nos permite concluir que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|f * h_\lambda - f\|_p^p \leq \lim_{\lambda \to 0^+} (g * h_\lambda)(0) = g(0) = 0,$$

y queda así establecido el resultado. □

2.3.2. La transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Definición 2.3.6. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define su transformada de Fourier mediante*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Recogemos en primer lugar algunas características básicas relativas a la transformación de Fourier. Estas propiedades se fundamentan por un lado, en que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones y, por otro, en el hecho de que la aplicación $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, es lo que se conoce como carácter del grupo aditivo $\mathbb{R}$, esto es, φ es un homeomorfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1 ($|\varphi(x)| = 1$ y $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$).

Proposición 2.3.7. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) Sea $g(x) = e^{i\alpha x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \alpha)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(b) Sea $g(x) = f(x - \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\widehat{g}(\xi) = e^{-i\alpha\xi} \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(c) Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, $x \in \mathbb{R}$, con $\lambda > 0$, entonces $\widehat{g}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(d) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(e) Sean $g \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $h = f * g$*, entonces* $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(f) Si $g(x) = -ixf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *y* $g \in L^1(\mathbb{R})$*, entonces* $\widehat{f}$ *es diferenciable y* $(\widehat{f})' = \widehat{g}$.

(g) Si f *es una función* C^1 *a trozos tal que* $f' \in L^1(\mathbb{R})$*, entonces* $\widehat{(f')}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración. (a) se sigue inmediatamente de la definición de la transformación de Fourier. Asimismo las propiedades (b) y (c) se prueban fácilmente usando que m es invariante por traslaciones y $dm(\lambda x) = \lambda dm(x)$, $\lambda > 0$.

(d) Escribimos $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales. Entonces,

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(-x) - iv(-x))e^{-i\xi x}dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x) - iv(x))e^{i\xi x}dm(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(u(x) + iv(x))e^{-i\xi x}}dm(x) = \overline{\widehat{f}(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(e) Observamos en primer lugar que, en virtud de la Proposición 2.3.3, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Luego,

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dm(y)dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Cambiando el orden de integración y usando que m es invariante por traslaciones tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\xi y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\xi(x-y)}dm(x)dm(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\xi y}dm(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi u}dm(u) = \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(f) Sea $g(x) = -ixf(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Podemos escribir

$$\frac{\widehat{f}(\eta) - \widehat{f}(\xi)}{\eta - \xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\left(\frac{e^{-i(\eta-\xi)x} - 1}{\eta - \xi}\right)dm(x), \quad \eta \neq \xi.$$

Nuestro objetivo es aplicar el Teorema de la convergencia dominada. Para ello consideramos la función $\varphi(x,u) = \frac{e^{-ixu}-1}{u}$, $x, u \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$. Se tiene que

$$\lim_{u \to 0} \varphi(x,u) = \frac{\partial}{\partial u}(e^{-ixu})_{|u=0} = -ix, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luego, podemos afirmar que, para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $\varphi(x,\cdot)$ está acotada en $\mathbb{R}$ y además se tiene que,

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |\varphi(x,u)| \leq \sup_{|u| \geq 1} \frac{2}{|u|} + \sup_{|u| \leq 1} \left|\frac{e^{-ixu} - 1}{u}\right| \leq C(1 + |x|).$$

Ya que f y xf son funciones en $L^1(\mathbb{R})$, aplicando el Teorema de la convergencia dominada se concluye que

$$\begin{aligned}(\widehat{f})'(\xi) &= \lim_{\eta\to\xi} \frac{\widehat{f}(\eta)-\widehat{f}(\xi)}{\eta-\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\eta\to\xi}[f(x)e^{-i\xi x}\varphi(x,\eta-\xi)]dm(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\xi x}dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\xi x}dm(x) = \widehat{g}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nota 2.3.8. *Realmente aplicamos el Teorema de la convergencia dominada considerando cualquier sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a ξ, $\xi\in\mathbb{R}$, para obtener que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{f}(\eta_n)-\widehat{f}(\xi)}{\eta_n-\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\xi x}dm(x).$$

Y dado que esto es cierto para toda sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tomemos, se obtiene que

$$\lim_{\eta\to\xi} \frac{\widehat{f}(\eta)-\widehat{f}(\xi)}{\eta-\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\xi x}dm(x).$$

(g) Teniendo en cuenta el Teorema fundamental del cálculo

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt, \quad x\in\mathbb{R},$$

y ya que $f'\in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)dt.$$

Luego, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y es finito. Además como $f\in L^1(\mathbb{R})$ este límite ha de ser cero.

Por tanto, integrando por partes, podemos escribir

$$\begin{aligned}\widehat{(f')}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\xi x}dm(x) = \lim_{a,b\to+\infty} f(x)e^{-i\xi x}\Big]_{x=-a}^{x=b} \\ &+ i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dm(x) = i\xi\widehat{f}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

$\square$

Analizamos a continuación el comportamiento de la transformación de Fourier sobre $L^1(\mathbb{R})$. Recordamos que el espacio $C_0(\mathbb{R})$ está constituido por aquellas funciones f continuas que se anulan en el infinito, esto es, para cada $\varepsilon>0$, existe un compacto $K\subset\mathbb{R}$, de manera que $|f(x)|<\varepsilon$, $x\notin K$.

Teorema 2.3.9. *Sea $f\in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $\widehat{f}\in C_0(\mathbb{R})$ y $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.*

Demostración. Probamos en primer lugar que $\widehat{f} \in C_0$. Sea $\xi \in \mathbb{R}$ y consideramos una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi_n \longrightarrow \xi$, cuando $n \to \infty$. Se tiene que

$$|\widehat{f}(\xi_n) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}|dm(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

De nuevo estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la convergencia dominada, pues

$$|f(x)||e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}| \leq 2|f(x)|, \quad x \in \mathbb{R},$$

y $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\widehat{f}(\xi_n) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \lim_{n\to\infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}|dm(x) = 0.$$

La arbitrariedad en la sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ conduce a que $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, añadiendo el término $e^{\pi i} = -1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}e^{-\pi i}dm(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})}dm(x)\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x - \frac{\pi}{\xi}\Big)e^{-i\xi x}dm(x),\end{aligned}$$

pues la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.

Podemos entonces escribir

$$2\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\xi}\Big)\right] e^{-i\xi x}dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

y, por tanto,

$$2|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\xi}\Big)\right| dm(x) = \|f - f_{\frac{\pi}{\xi}}\|_1, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Por la Proposición 2.3.2, la aplicación $y \to f_y$ es uniformemente continua de $\mathbb{R}$ en $L^1(\mathbb{R})$. Luego,

$$\lim_{\xi\to\infty} \|f - f_{\frac{\pi}{\xi}}\|_1 = 0,$$

y concluimos que $\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0$, cuando $\xi \to \infty$.

Por último es claro que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, pues

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-i\xi x}|dm(x) = \|f\|_1.$$

□

Abordamos ahora el resultado central de esta sección: el Teorema de inversión. Para ello haremos uso de las funciones $\{h_\lambda\}_{\lambda>0}$ introducidas anteriormente (ver (2.12)).

Teorema 2.3.10 (Teorema de inversión). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Consideramos la función*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $g \in C_0$ y $f = g$ salvo en un conjunto de medida nula.

Nota 2.3.11. *Nótese que si además f es continua en $\mathbb{R}$, entonces $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. En primer lugar observamos que $g(x) = (\widehat{f})\widehat{\ }(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Luego, ya que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ el Teorema 2.3.9 nos dice que $g \in C_0$.

Consideramos ahora las funciones h_λ, $\lambda > 0$, definidas por (2.12). La Proposición 2.3.5 nos dice que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|f * h_\lambda - f\|_1 = 0,$$

y entonces, el Teorema 2.2.9 asegura la existencia de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lambda_n \longrightarrow 0^+$, cuando $n \to \infty$, y

$$\lim_{n\to\infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Por otro lado, por (2.14) podemos escribir

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda_n|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

En este último cálculo hemos usado el Teorema de la convergencia dominada, lo cual es posible pues observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|e^{-\lambda_n|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}| \leq \widehat{f}(\xi)|$, $\xi \in \mathbb{R}$, y tenemos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda_n|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} = \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

De (2.17) y (2.18) se deduce que $f(x) = g(x)$, para c.t.p. $x \in \mathbb{R}$. □

Por último presentamos el siguiente teorema de unicidad para la transformación de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3.12 (Teorema de unicidad). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = 0$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Ya que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y, obviamente también $\widehat{f}$, el Teorema de inversión conduce a que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi) = 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}.$$

□

2.3.3. La transformación de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección veremos cómo se entiende la transformación de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Observamos que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ (basta considerar, por ejemplo, la función $f(x) = (1+|x|)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, que está en $L^2(\mathbb{R})$ pero no en $L^1(\mathbb{R})$). Luego, la Definición 2.3.6 no es válida, en general, para funciones de $L^2(\mathbb{R})$, pues no podemos asegurar que la integral sea convergente.

Para dar una definición adecuada haremos uso del hecho de que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ y que éste es un espacio de Hilbert con el producto interior dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dm(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.3.13. *(***Teorema de Plancherel***) A cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ podemos asociarle una función $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$, verificando las siguientes propiedades:*

(a) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$.

(b) Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple que $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

(c) La aplicación $f \to \mathcal{F}(f)$ es un isomorfismo (Hilbert) de L^2 en sí mismo.

(d) Para cada $A > 0$, sean φ_A y ψ_A las funciones dadas por

$$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}dm(x), \;\; \xi \in \mathbb{R}, \qquad y \qquad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que $\|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 \longrightarrow 0$ y $\|\psi_A - f\|_2 \longrightarrow 0$, cuando $A \to \infty$.

Demostración. Comenzamos probando la siguiente propiedad:

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2, \quad \text{cuando } f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}). \tag{2.19}$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Denotamos por $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$, y consideramos $g = f * \widetilde{f}$. Entonces,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}dm(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\overline{f(y)}dm(y) = \langle f_{-x}, f\rangle, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde f_z, $z \in \mathbb{R}$, representa la función trasladada $f_z(u) = f(u-z)$, $u \in \mathbb{R}$.

La función g es continua en $\mathbb{R}$. Basta tener en cuenta que $g(x) = T_f \circ f_{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, donde T_f es el funcional definido en $L^2(\mathbb{R})$ mediante $T_f(h) = \langle h, f\rangle$, $h \in L^2(\mathbb{R})$.

T_f es continua en $L^2(\mathbb{R})$ pues

$$|T_f(h)| \le |\langle h, f\rangle| \le \|h\|_2\|f\|_2, \quad h \in L^2(\mathbb{R}).$$

Asimismo, la Proposición 2.3.2, garantiza que f_{-x}, $x \in \mathbb{R}$, es una función continua de $\mathbb{R}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Luego g es continua en $\mathbb{R}$.

Además está acotada, pues en virtud de la desigualdad de Schwarz

$$|g(x)| \le \|f_{-x}\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, si h_λ, $\lambda > 0$, viene dada por (2.12), usando la Proposición 2.3.4 se llega a que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} (g * h_\lambda)(0) = g(0) = \|f\|_2^2. \tag{2.20}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (2.14) y la Proposición 2.3.7 (d) y (e),

$$\begin{aligned}(g * h_\lambda)(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x) h_\lambda(x) dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|\xi|} \widehat{g}(\xi) dm(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|\xi|} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} dm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|\xi|} |\widehat{f}(\xi)|^2 dm(\xi).\end{aligned}$$

Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y convergente a 0. Para cada $\xi \in \mathbb{R}$, la sucesión

$$\phi_n(\xi) = \left\{ e^{-\lambda_n|\xi|} |\widehat{f}(\xi)|^2 \right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

es creciente. Luego, aplicando el Teorema de la convergencia monótona se llega a que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n|\xi|} |\widehat{f}(\xi)|^2 dm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 dm(\xi) = \|\widehat{f}\|_2^2.$$

Como esta propiedad es válida para cualquier sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como la tomada se obtiene que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} (g * h_\lambda)(0) = \|\widehat{f}\|_2^2. \tag{2.21}$$

De (2.20) y (2.21) se deduce entonces (2.19).

Nuestro próximo objetivo es establecer la propiedad de densidad siguiente:

$$\text{el espacio } Y = \{\widehat{f} : f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\} \text{ es denso en } L^2(\mathbb{R}). \tag{2.22}$$

Nótese, en primer lugar, que $Y \subset L^2(\mathbb{R})$, pues como acabamos de probar, si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Ya que $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert, de acuerdo con el Teorema 2.2.21 basta ver que $Y^\perp = \{0\}$.

Sea $w \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $w \in Y^\perp$. Entonces $\langle g, w \rangle = 0$, $g \in Y$.

Fijamos $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Para cada $\lambda > 0$, consideramos la función $g_\lambda(\xi) = h_\lambda(\xi_0 - \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Veamos que $g_\lambda \in Y$, $\lambda > 0$. Por (2.14) podemos escribir

$$g_\lambda(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|x|} e^{i(\xi_0 - \xi)x} dm(x) = \widehat{H_\lambda}(\xi - \xi_0), \quad \xi \in \mathbb{R}\ (\lambda > 0),$$

siendo $H_\lambda(z) = e^{-\lambda|z|}$, $z \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Y en virtud de la Proposición 2.3.7 (a),

$$g_\lambda(\xi) = \widehat{e^{i\xi_0 x} H_\lambda}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, si vemos que $G_\lambda(x) = e^{i\xi_0 x} H_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, es una función en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, quedará probado que $g_\lambda \in Y$, $\lambda > 0$. Y, efectivamente, $G_\lambda \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$, pues

$$\|G_\lambda\|_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\lambda|x|} dm(x) < \infty, \quad p = 1, 2.$$

Consideremos el operador $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$, tal que

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Por el Teorema 2.3.12, $\mathcal{F}$ es una biyección entre $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e Y, verificando $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

Este operador se puede extender a todo $L^2(\mathbb{R})$, como una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo, como veremos a continuación (ver Lema 2.2.26).

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ya que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ (nótese que $C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y según vimos en el Teorema 2.2.11, $C_c(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$), podemos encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_n \longrightarrow f$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(\mathbb{R})$.

Sea $g_n = \mathcal{F}(f_n) = \widehat{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. En efecto, basta observar que,

$$\|g_m - g_n\|_2 = \|\mathcal{F}(f_m - f_n)\|_2 = \|f_m - f_n\|_2, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Luego, como $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio completo, existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $g_n \longrightarrow g$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(\mathbb{R})$. Definimos $\widetilde{\mathcal{F}}(f) = g$, obteniéndose una extensión de $\mathcal{F}$ a $L^2(\mathbb{R})$.

Veamos que esta extensión es sobre. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Ya que Y es denso en $L^2(\mathbb{R})$, encontramos una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $g_n \longrightarrow g$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(\mathbb{R})$. Ya que $g_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f_n} = g_n$, $n \in \mathbb{N}$. Razonando como antes se llega a que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$ y, por tanto, existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_n \longrightarrow f$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(\mathbb{R})$.

Entonces

$$\widetilde{\mathcal{F}}(f) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n} = \lim_{n\to\infty} g_n = g,$$

entendiendo los límites en $L^2(\mathbb{R})$.

Establecemos ahora que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$. Por (2.19) sabemos que $\|\widetilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$, cuando $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Por otro lado, supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

en $L^2(\mathbb{R})$. Se tiene que,

$$\|\widetilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{F}}(f_n)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\mathcal{F}}(f_n)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

En la segunda y quinta igualdad hemos usado la continuidad de la norma, y (2.19) en la cuarta.

A partir de ahora denotaremos por $\mathcal{F}$ a la extensión $\widetilde{\mathcal{F}}$. De esta forma hemos establecido (a) y (b).

Veamos la propiedad (c). Recordemos que un isomorfismo entre espacios de Hilbert es una aplicación lineal y sobre que conserva el producto interior. Es claro, por cómo se ha definido $\mathcal{F}$, que es un operador lineal. Para probar que conserva el producto interior, basta utilizar la identidad de polarización, dada por

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2), \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Ya que $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, se obtiene que $\langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle$, $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Por último, establecemos (d). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Para cada $A > 0$ denotamos por χ_A la función característica del intervalo $[-A, A]$.

Ya que f y $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\|\chi_A f - f\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|\chi_A \mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f)\|_2 \longrightarrow 0,$$

cuando $A \to +\infty$.

Por otro lado, $\chi_A f$ y $\chi_A \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $A > 0$. Luego,

$$\varphi_A(\xi) = (\chi_A f)\widehat{\ }(\xi) = \mathcal{F}(\chi_A f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},\ A > 0,$$

y

$$\psi_A(x) = (\chi_A \mathcal{F}(f))\widehat{\ }(-x) = \mathcal{F}(\chi_A \mathcal{F}(f))(-x), \quad x \in \mathbb{R},\ A > 0.$$

De (b) se sigue entonces que

$$\|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|\mathcal{F}(\chi_A f - f)\|_2 = \|\chi_A f - f\|_2.$$

y usando el Teorema de inversión (Teorema 2.3.10)

$$\|\psi_A - f\|_2 = \|\mathcal{F}(\psi_A) - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|\chi_A \mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f)\|_2, \quad A > 0.$$

Luego, $\varphi_A \longrightarrow \mathcal{F}(f)$ y $\psi_A \longrightarrow f$, cuando $A \to \infty$, en $L^2(\mathbb{R})$. □

Corolario 2.3.14. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\xi x} dm(\xi), \qquad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por el Teorema 2.3.13 (d) sabemos que $f = \lim_{A\to\infty} \psi_A$, entendiendo la igualdad en $L^2(\mathbb{R})$. Pero como $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{A\to\infty} \psi_A(x) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi).$$

Luego, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi)$, en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$. □

Hacemos una última observación. Mientras que la transformación de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R})$ está determinada en cada punto mediante la fórmula (2.16), la transformación de Fourier de una función en $L^2(\mathbb{R})$ se define de forma única como un elemento del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, pero como función puntual, $\widehat{f}(\xi)$ solamente está determinada en casi todo punto $\xi \in \mathbb{R}$.

2.4. La transformación de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

En esta sección analizamos el comportamiento de la transformación de Fourier sobre un espacio particular de funciones, el conocido como espacio de Schwartz.

2.4.1. La clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

El espacio de Schwartz en $\mathbb{R}$ está constituido por aquellas funciones $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que, para todo $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\gamma_{k,\ell}(\phi) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi(x) \right| < \infty.$$

Cuando se tiene esta propiedad se dice que ϕ y todas sus derivadas son funciones de *rápido decrecimiento.*

Es claro que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y que es cerrado bajo la derivación. También es cerrado para la multiplicación por polinomios. Basta observar que si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y P es un polinomio, entonces

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}[P(x)\phi(x)] = \sum_{r=0}^{\ell} \binom{\ell}{r} \frac{d^{\ell-r}}{dx^{\ell-r}} P(x) \frac{d^r}{dx^r}\phi(x) = \sum_{r=0}^{\ell} Q_r(x) \frac{d^r}{dx^r}\phi(x), \quad \ell \in \mathbb{N},$$

para ciertos polinomios Q_r, $r = 0, ..., \ell$.

Un primer ejemplo de función en la clase de Schwartz es la *función gaussiana*, que toma la forma $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$. Para ver que, efectivamente, es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, vamos a probar que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(e^{-ax^2}) = P_\ell(x)e^{-ax^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde P_ℓ es un polinomio de grado ℓ. Y para ello, procedemos por inducción. Para $\ell = 1$, es claro que $P_1(x) = -2ax$. Suponemos que la propiedad es cierta para un cierto $\ell \in \mathbb{N}$. Entonces, podemos escribir

$$\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}(e^{-ax^2}) = \frac{d}{dx}[P_\ell(x)e^{-ax^2}] = e^{-ax^2}\left[\frac{d}{dx}P_\ell(x) - 2axP_\ell(x)\right] = P_{\ell+1}(x)e^{-ax^2},$$

siendo $P_{\ell+1}$ un polinomio de grado $\ell + 1$.

Observamos que el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto está contenido en la clase de Schwartz. Las conocidas como *funciones bump* pertenecen a este grupo y son utilizadas en muchas aplicaciones.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se definen como

$$\phi_{a,b}(x) = e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)}\chi_{(a,b)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es claro que $\phi_{a,b}$ es una función de soporte compacto y de clase C^∞ en $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$. También es infinitamente diferenciable en a y b. Analizamos el caso $x = a$ (para $x = b$ el razonamiento es análogo).

En primer lugar establecemos que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}[e^{-1/(x-a)}] = e^{-1/(x-a)}P_\ell\Big(\frac{1}{x-a}\Big), \quad x \neq a, \tag{2.23}$$

para cierto polinomio P_ℓ.

Procedemos, como antes, por inducción. Tenemos que $P_1(x) = x^2$, pues

$$\frac{d}{dx}[e^{-1/(x-a)}] = e^{-1/(x-a)}\frac{1}{(x-a)^2}, \quad x \neq a.$$

Supongamos ahora que (2.23) se verifica para $\ell \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}[e^{-1/(x-a)}] &= \frac{d}{dx}\left[e^{-1/(x-a)}P_\ell\Big(\frac{1}{x-a}\Big)\right]\\ &= e^{-1/(x-a)}\left[\frac{1}{(x-a)^2}P_\ell\Big(\frac{1}{x-a}\Big) - \frac{1}{(x-a)^2}\Big(\frac{d}{dx}P_\ell\Big)\Big(\frac{1}{x-a}\Big)\right]\\ &= e^{-1/(x-a)}P_{\ell+1}\Big(\frac{1}{x-a}\Big), \quad x \neq a,\end{aligned}$$

donde $P_{\ell+1}(x) = x^2[P_\ell(x) - P'_\ell(x)]$.

De (2.23) se sigue que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{d^\ell}{dx^\ell}[e^{-1/(x-a)}] = \lim_{x\to a^+} e^{-1/(x-a)}P_\ell\Big(\frac{1}{x-a}\Big) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}P_\ell(t) = 0,$$

y esta propiedad permite establecer que

$$\lim_{x\to a^+}\frac{d^\ell}{dx^\ell}[\phi_{a,b}(x)] = 0,$$

lo que nos dice que $\phi_{a,b}$ es infinitamente diferenciable en $x = a$.

En muchos de los resultados que veremos en lo que sigue, utilizaremos el hecho de que la clase de Schwartz está contenida en el espacio $L^p(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, sean $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $p \in [1, \infty)$. Podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(1+x^2)|\phi(x)|]^p}{(1+x^2)^p}dx \leq [\gamma_{0,0}(\phi) + \gamma_{2,0}(\phi)]^p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p} < \infty.$$

El caso $p = \infty$ es trivial.

Se tiene además que la clase de Schwartz es densa en $L^p(\mathbb{R})$, cuando $p \in [1, \infty)$, hecho que establecemos en el siguiente apartado haciendo uso de la convolución (ver Proposición 2.4.3).

2.4.2. La convolución en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Sean $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ya que $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R})$, sabemos por la Proposición 2.3.3 que $\phi * \psi \in L^1(\mathbb{R})$. Realmente podemos establecer un resultado más preciso.

Proposición 2.4.1. *Para cada $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene que $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\ell \in \mathbb{N}$. Afirmamos que

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}[(\phi * \psi)(x)] = \left[\Big(\frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi\Big) * \psi\right](x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

En efecto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{d^\ell}{dx^\ell}[(\phi * \psi)(x)] &= \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y)\psi(y)dy\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^\ell}{dx^\ell}[\phi(x-y)]\psi(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi\Big)(x-y)\psi(y)dy = \Big(\frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi\Big) * \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

El intercambio de la derivada y la integral en la segunda igualdad se justifica pues, al ser $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Big(\frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi\Big)(x-y)\right| |\psi(y)|dy \le \gamma_{0,\ell}(\phi) \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(y)|dy < \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, si Φ y $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$\gamma_{k,0}(\Phi * \Psi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |\Phi * \Psi(x)| < \infty. \tag{2.25}$$

Para probar esto escribimos

$$\begin{aligned}|x|^k |\Phi * \Psi(x)| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} (|x-y| + |y|)^k |\Phi(x-y)||\Psi(y)|dy \\ &\le C \sum_{r=0}^{k} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^r |\Phi(x-y)||y|^{k-r}|\Psi(y)|dy < \infty,\end{aligned}$$

pues $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado por productos de polinomios y $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Luego por (2.24), (2.25) y el hecho de que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado por derivación se concluye que

$$\gamma_{k,\ell}(\phi * \psi) = \gamma_{k,0}\left(\Big(\frac{d^\ell}{dx^\ell}\phi\Big) * \psi\right) < \infty.$$

□

Nota 2.4.2. *Podemos seguir la misma prueba para establecer que $\phi * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ cuando $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y g es una función acotada con soporte en un conjunto acotado.*

Haciendo uso de la convolución vamos a probar, como habíamos mencionado, que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio denso en $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$.

Proposición 2.4.3. *Sea $p \in [1, \infty)$. La clase de Schwartz es densa en $L^p(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 2.2.11 existe $g \in C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, para probar el resultado basta encontrar $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de modo que $\|\phi - g\|_p < \varepsilon/2$.

Sea φ la función *bump* dada por

$$\varphi(x) = \alpha e^{-1/(1-x^2)} \chi_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde α es la constante para la cual $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$.

Para cada $\delta > 0$, denotamos por φ_δ a la función

$$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\varphi\Big(\frac{x}{\delta}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

y consideramos $\phi_\delta = g * \varphi_\delta$, $\delta > 0$.

Ya que $\varphi_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\delta > 0$, y g es una función en $C_c(\mathbb{R})$, por la Nota 2.4.2, se tiene que $\phi_\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\delta > 0$.

El argumento en la prueba de la Proposición 2.3.5 puede seguirse en este caso para obtener que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \|\phi_\delta - g\|_p = 0.$$

Luego, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que $\|\phi_\delta - g\|_p < \varepsilon/2$ y con ello, la prueba se termina. □

2.4.3. La transformación de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

En la segunda sección de este capítulo analizamos la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$. Ya que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ las propiedades allí vistas también se cumplen para $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sin embargo, las características de las funciones de la clase de Schwartz permiten mejorar el comportamiento de sus transformadas de Fourier, como veremos en este apartado.

La función gaussiana juega un papel importante en el análisis de Fourier. Una propiedad útil que verifica es que su transformada de Fourier es también una función gaussiana.

Proposición 2.4.4. *Sea $a > 0$. La transformada de Fourier de $f(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$, viene dada por $\widehat{f}(\xi) = (2a)^{-1/2} e^{-\xi^2/(4a)}$, $\xi \in \mathbb{R}$.*

Observamos que si $a = 1/2$, entonces $f = \widehat{f}$.

Demostración. Consideramos la función

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dm(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

En primer lugar observamos que $F(0) = (2a)^{-1/2}$. En efecto,

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} du = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta la Proposición 2.3.7 (f), (g), y que $f'(x) = -2axf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$F'(\xi) = -i\widehat{xf}(\xi) = \frac{i}{2a}\widehat{f'}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\widehat{f}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}F(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Entonces, F satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$y'(\xi) + \frac{\xi}{2a} y(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

cuya solución viene dada por $y(\xi) = y(0)e^{-\xi^2/(4a)}$. Luego, ya que $F(0) = 1/\sqrt{2a}$ se concluye que

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/(4a)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

□

Establecemos a continuación cómo se comporta la transformación de Fourier sobre la clase de Schwartz.

Teorema 2.4.5. *La transformación de Fourier es una aplicación biyectiva de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en sí mismo.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Veamos en primer lugar que $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usando las propiedades (f) y (g) en la Proposición 2.3.7, para cada $k, \ell \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$\xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\phi}(\xi) = (-i)^\ell \xi^k \widehat{x^\ell \phi}(\xi) = (-1)^\ell i^{\ell - k} \Big(\frac{d^k}{dx^k}[x^\ell \phi] \Big)^{\widehat{}}(\xi).$$

Ya que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio cerrado por derivación y multiplicación de polinomios, la función $\frac{d^k}{dx^k}[x^\ell \phi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Por tanto,

$$\gamma_{k,\ell}(\widehat{\phi}) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\phi}(\xi) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^k}{dx^k}[x^\ell \phi](x) \right| dx < \infty.$$

Por otro lado, ya que $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ el teorema de inversión (Teorema 2.3.10) conduce a que

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Consideramos los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ definidos en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mediante $\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$ y $\mathcal{F}^*(\phi)(\xi) = \widehat{\phi}(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La igualdad (2.26) nos dice que $\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = Id$ y ya que ambos operadores solo se diferencian en el signo de la exponencial, también se tiene que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = Id$. Como consecuencia se concluye que $\mathcal{F}$ es una aplicación biyectiva sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ cuya inversa es $\mathcal{F}^*$. □

2.4.4. Algunas aplicaciones

Una de las propiedades fundamentales que tiene la transformación de Fourier es que intercambia la derivación y la multiplicación por polinomios (ver Proposición 2.3.7 (f), (g)). Este hecho permite resolver múltiples ecuaciones en derivadas parciales. Entre ellas se encuentra la ecuación del calor, que analizamos a continuación.

Consideramos una vara infinita, que representamos por la recta real, en la que inicialmente la temperatura se distribuye según $f(x)$. Queremos conocer la temperatura $u(x,t)$ que hay en el punto $x \in \mathbb{R}$, en el instante $t > 0$.

La función u verifica entonces la ecuación en derivadas parciales conocida como *ecuación del calor* que viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty),$$

con la condición inicial $u(x,0) = f(x)$.

En el siguiente teorema se garantiza la existencia de una solución para la ecuación del calor cuando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.4.6. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Consideramos $u(x,t) = f * W_t(x)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, donde W_t es el núcleo del calor dado por*

$$W_t(x) = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{2t}}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Se tiene que:

(i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ *y satisface la ecuación del calor.*

(ii) $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x)$, *uniformemente en* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x)$, *en* $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Aplicando la transformación de Fourier y usando la Proposiciones 2.4.4 y 2.3.7 (c), tenemos que

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\widehat{W_t}(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-t\xi^2}, \quad (\xi,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

El teorema de inversión (Teorema 2.3.10) nos lleva a que

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-t\xi^2} e^{ix\xi} dm(\xi), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Ya que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, podemos derivar bajo el signo integral y obtenemos así que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\xi^2 e^{-t\xi^2} e^{ix\xi} dm(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)(i\xi)^2 e^{-t\xi^2} e^{ix\xi} dm(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty),\end{aligned}$$

que nos da (i). Nótese que realmente $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

Establecemos ahora (ii). Como vimos en la demostración de la Proposición 2.4.4,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_t(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/(4t)} dx = \sqrt{2\pi}, \quad t > 0.$$

Luego, podemos escribir

$$u(x,t) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(f(x-y) - f(x)] W_t(y) dm(y), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Por otro lado se tiene que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se verifica que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |xf(x)| = c_0.$$

Sea $R > 4c_0/\varepsilon$. Se tiene que

$$|f(x)| \leq \frac{c_0}{|x|} \leq \frac{c_0}{R} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |x| > R. \tag{2.27}$$

Por otro lado, como f es continua en $\mathbb{R}$, es uniformemente continua en $[-R,R]$, y podemos entonces encontrar $\eta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x,y \in [-R,R], |x-y| < \eta. \tag{2.28}$$

Teniendo en cuenta (2.27) y (2.28) podemos concluir que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad |x-y| < \eta.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\int_{\mathbb{R}} W_t(y)dy = \sqrt{2\pi}$, $t > 0$, y que la función $g(z) = ze^{-z^2}$, $z \in \mathbb{R}$, es acotada en $\mathbb{R}$, se llega a que

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(x)| &\leq \varepsilon \int_{|y|\leq\eta} W_t(y) dm(y) + 2\|f\|_\infty \int_{|y|>\eta} W_t(y) dm(y) \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_\eta^\infty \frac{e^{-y^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} dy \\ &\leq \varepsilon + C\sqrt{t} \int_\eta^\infty \frac{dy}{y^2} \leq \varepsilon + C\sqrt{t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty),\end{aligned}$$

y, por tanto, para t suficientemente pequeño,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Finalmente probamos (iii). Observamos que podemos aplicar la igualdad de Plancherel (ver Teorema 2.3.13(b)) para obtener que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t) - f\|_2^2 = \|\widehat{u}(\cdot,t) - \widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{W_t}(\xi) - 1|^2 dm(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 dm(\xi).\end{aligned}$$

Veamos que esta última integral tiende a 0 cuando $t \to 0^+$. Sea $\varepsilon > 0$.

Ya que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ y $|e^{-t\xi^2} - 1| \leq 2$, podemos encontrar $N > 0$ tal que

$$\int_{|\xi|>N} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 dm(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, usando el teorema del valor medio, se tiene que

$$\int_{|\xi|\leq N} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-t\xi^2} - 1|^2 dm(\xi) \leq \sup_{|\xi|\leq N} |\widehat{f}(\xi)|^2 \int_{|\xi|\leq N} (t\xi^2)^2 d\xi \leq C_N t^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t^2 < \frac{\varepsilon}{2C_N}.$$

Tomando $t < (\varepsilon/(2C_N))^{1/2}$, concluimos que $\|u(\cdot,t) - f\|_2 < \varepsilon$, y (iii) queda establecido. □

Terminamos este trabajo describiendo el fenómeno conocido como *principio de incertidumbre de Heisenberg* que puede ser formulado en términos de la relación de una función y su transformada de Fourier.

En la teoría de la mecánica cuántica este principio nos dice que es imposible determinar simultáneamente la posición y el momento de una partícula. La forma de abordarlo matemáticamente es la siguiente. Supongamos que un electrón viaja por la recta real.

A la hora de encontrar la posición de la partícula, ésta no se determina con un punto de $\mathbb{R}$ sino mediante la probabilidad de que se encuentre en un determinado intervalo (a,b). Para ello se considera una función ψ que asumimos en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y tal que $\|\psi\|_2 = 1$. De esta forma, la probabilidad de que la partícula se localice en el intervalo (a,b) viene dada por

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dm(x).$$

Además podemos hablar de la esperanza de la posición de la partícula, que es la mejor estimación para dicha posición y que viene dada por

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 dm(x).$$

El concepto de incertidumbre se determina con la varianza relativa a la esperanza y que toma la forma

$$\sigma_\psi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 |\psi(x)|^2 dm(x).$$

Observamos que si ψ está muy concentrada cerca de $\overline{x}$, entonces la varianza es pequeña, porque esencialmente la contribución a la integral se da para valores de x cerca de $\overline{x}$. Por el contrario, si ψ no está concentrada en torno a la esperanza, el valor de la varianza es grande y, en consecuencia, la incertidumbre sería también relativamente grande.

Estas nociones de esperanza e incertidumbre relativas a la posición, se tienen también para el momento de la partícula. La probabilidad de que el momento pertenezca al intervalo (a, b) es

$$\int_a^b |\widehat{\psi}(\xi)|^2 dm(\xi),$$

y la esperanza y varianza para el momento vienen dadas, respectivamente, por

$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 dm(\xi) \quad \text{y } \sigma^2_{\widehat{\psi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \overline{\xi})^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 dm(\xi).$$

El principio de incertidumbre de Heisenberg se puede enunciar entonces como sigue.

Teorema 2.4.7. *Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\|_2 = 1$. Para cada $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dm(x) \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 dm(\xi) \right) \geq \frac{1}{4}. \tag{2.29}$$

La igualdad es cierta si, y solo si, $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, con $B > 0$ y $A^2 = \sqrt{2B}$.

Demostración. Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dm(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx} [|\psi(x)|^2] dm(x).$$

Ahora, escribimos $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\overline{\psi(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, y usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la igualdad de Plancherel y la Proposición 2.3.7 (g) para llegar a que

$$\begin{aligned}
1 &= -\int_{-\infty}^{+\infty} [x\psi'(x)\overline{\psi}(x) + x\psi(x)\overline{\psi}'(x)] dm(x) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [x\psi'(x)\overline{\psi}(x) + x\psi(x)\overline{\psi}'(x)] dm(x) \right| \\
&\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi'(x)\psi(x)| dm(x) \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 |\psi(x)|^2 dm(x) \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi'(x)|^2 dm(x) \right)^{1/2} \\
&= 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 |\psi(x)|^2 dm(x) \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi'}(\xi)|^2 dm(\xi) \right)^{1/2} = 2\|x\psi\|_2 \|\xi\widehat{\psi}\|_2.
\end{aligned}$$

De esta forma queda establecido (2.29) para $x_0 = \xi_0 = 0$. Además, según las estimaciones vistas, si se tiene la igualdad, entonces debemos tener también una igualdad cuando aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esto es,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi(x)\psi'(x)| dm(x) \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi(x)|^2 dm(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi'(x)|^2 dm(x),$$

lo cual se cumple cuando $\psi'(x) = \beta x \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, para alguna constante β.

Entonces, ψ es una solución de la ecuación diferencial $y'(x) = \beta x y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, cuya solución es $y(x) = y(0)e^{\beta x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la función $\psi(x)$ toma la forma $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, para ciertas constantes $A \in \mathbb{C}$ y $B > 0$. La condición $\|\psi\|_2 = 1$ nos dice que $|A|^2 = \sqrt{2B}$, pues

$$\|\psi\|_2^2 = \frac{2|A|^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-Bx^2} dx = \frac{|A|^2}{\sqrt{2\pi B}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du = \frac{|A|^2}{\sqrt{2B}} = 1.$$

Por último cuando x_0 y $\xi_0 \in \mathbb{R}$, basta considerar $\phi(x) = e^{-i\xi_0 x}\psi(x + x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\widehat{\phi}(\xi) = e^{ix_0(\xi+\xi_0)}\widehat{\psi}(\xi + \xi_0), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

y, se obtiene que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\phi(x)|^2 dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi(x + x_0)|^2 dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dm(x),$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi\widehat{\phi}(\xi)|^2 dm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi\widehat{\psi}(\xi + \xi_0)|^2 dm(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 dm(\xi).$$

Aplicando la desigualdad que probamos para el caso $x_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, se consigue (2.29) para el caso general.

$\square$

Bibliografía

[1] M. de Guzmán and B. Rubio. *Integración: teoría y técnicas.* Alhambra, 1979.

[2] Ricardo Faro Rivas. *Apuntes de Teoría de la Medida.* Dpto. de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 2014. http://matematicas.unex.es/ ricarfr/Tmedida/librotmed.pdf.

[3] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Mathematics series. McGraw-Hill, 1987. https://books.google.es/books?id=NmW7QgAACAAJ.

[4] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces.* Princeton University Press, 2009. https://books.google.es/books?id=2Sg3Vug65AsC.

[5] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton lectures in analysis. Princeton University Press, 2011.