UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Problemas de convergencia en un contexto de software educativo

Autor: Afonso Gutiérrez, Rosa María

Director: José Ángel Dorta Díaz

Departamento de Análisis Matemático

La presente Memoria, para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas, ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, bajo la dirección del Dr. D. José Ángel Dorta Díaz.

A mis padres, que me han dado vida después de la vida.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido posible gracias a la colaboración de mi familia, profesores y amigos que, a lo largo de cinco años, han prestado su apoyo, sus conocimientos y ayuda.

Especialmente, deseo expresar mi gratitud:

A Don José Ángel Dorta Díaz, director de esta Memoria, en testimonio de mi admiración por sus conocimientos y tenacidad ante el trabajo. Sus palabras de entusiasmo han calado en mi memoria dejando un mensaje de fe y respeto por uno mismo:

''*Es importante que, en todo momento, tú creas en lo que estás haciendo*''

A Don Pablo González Vera, Exdecano de la Facultad de Matemáticas, que colaboró desinteresadamente facilitándonos el contacto con los alumnos de 1º de Matemáticas.

A Lourdes Rodríguez Mesa, entrañable amiga y compañera de estudios que siempre ha estado cerca, tanto en los momentos difíciles como en aquellos que han sido dignos de celebración y alegría. A ella y a su infinita energía y vitalidad se deben muchos de los arreglos y detalles que fue necesario realizar en TEX.

A Don Angel Montesdeoca Delgado, profesor de la Facultad de Matemáticas y amigo, por su disponibilidad y asesoramiento en lo que se refiere a las dudas que también sobre el TEX podíamos tener.

A todos los profesores del Departamento de Análisis Matemático que de una u otra forma han colaborado, y en particular, a aquellos que contestaron generosamente a nuestras encuestas.

A Leonor García Socas, profesora de Lengua Española y compañera del I. E. S. Santa Úrsula, no sólo por la corrección literaria de esta memoria, sino también por sus palabras de ánimo y su capacidad para escuchar en todo momento.

A los alumnos que participaron en nuestras experiencias de campo y que, sin otro interés que el de colaborar, pusieron a nuestra disposición parte de su tiempo y su conocimiento.

Desearía expresar, una vez más, mi gratitud a mis padres Domingo y Mª Antonia. Siempre me impulsaron al estudio, apoyándome y compartiendo conmigo la ilusión por aquellas cosas que una consideraba importantes. A ellos les brindo este trabajo y el reto que para mí ha supuesto.

Deseo también dar las gracias a mi marido Miguel Ángel. Él me animó a lanzarme en esta aventura y sin su colaboración y apoyo este trabajo no hubiera sido posible.

No puedo olvidar agradecer a mis hijos su presencia: a Domingo Miguel porque con él he compartido muchas de sus tardes de juegos mientras trabajaba en la redacción de este trabajo y al que llevo dentro porque, de alguna forma, me ha dado el empuje y la fuerza para llevarlo a término.

Por último, deseo agradecer a todos los miembros de mi familia su interés y constante apoyo. Siempre he sentido la fuerza y el calor de saber que puedo contar con cualquiera de ellos.

Septiembre de 2002

Índice general

"Todos los conceptos humanos empiezan con las intuiciones, prosiguen con los conceptos y finalizan con las ideas".

Emmanuel Kant, filósofo alemán del siglo XIX.

Introducción

En nuestros días, el proceso de enseñanza-aprendizaje de La Matemática se encuentra en una fase de cambio que afecta tanto a los métodos como a los contenidos de dicha disciplina. Esta transformación de nuestro entorno educativo se debe, por un lado, a las reacciones y ajustes naturales que han tenido lugar tras la influencia de la corriente denominada Matemática Moderna, y en parte también a las oportunidades que ofrecen las actuales herramientas informáticas y de comunicación.

La dicotomía entre Matemáticas y Nuevas Tecnologías ha ido desapareciendo a lo largo de las últimas décadas, de forma que en ciertos campos de la Matemática es imprescindible el uso de herramientas de origen informático. Esta conexión, cada vez más estrecha y natural, debería cubrir los diversos ámbitos de la Educación Matemática en todos los niveles académicos. En este proceso de desarrollo y auge, desempeña un papel importante la amplia disponibilidad de software de gran alcance, que permite a los profesores fijar nuevos principios de base para la enseñanza de esta materia.

Así, la incorporación del ordenador como recurso didáctico implica importantes cambios que no se pueden llevar a cabo de una manera sencilla e inmediata. Es necesario un estudio profundo de las posibilidades que la tecnología ofrece y como consecuencia, una reestructuración del curriculum del área en todas las etapas y niveles educativos. En este proceso de adaptación se percibe cierta tendencia natural hacia el anclaje en los métodos tradicionales; algunos enseñantes se muestran reacios al uso de la tecnología, potenciando la enseñanza que ellos mismos recibieron y que se apoya, fundamentalmente, en la utilización de lápiz y papel.

En particular, en la enseñanza superior existe un convencimiento implícito de que los cambios no son imprescindibles; en determinados sectores se supone que el alumno es suficientemente maduro para afrontar, por sí solo, las dificultades propias del aprendizaje y, en cualquier caso, se piensa que *"ese es su problema"*.

Además, año tras año solemos enseñar lo mismo y de la misma forma. En este sentido, los procesos de enseñanza de la matemática se mantienen prácticamente sin cambios, como si de un *ritual* se tratara. En muchos casos el profesor enseña, intuye que el alumno no le entiende y éste se limita a estudiar y resolver principalmente cuestiones de tipo algorítmico.

Los párrafos anteriores nos pueden hacer pensar en una posible crisis del papel del profesor. No obstante y como hemos comentado, la introducción de nuevas tecnologías da lugar a cambios naturales que requieren de un esfuerzo considerable. Sin duda, en este proceso de adaptación debe implicarse la comunidad educativa, pero también es necesaria la intervención de las autoridades académicas, que deben contemplar, como principal problema a resolver, la falta de inversión tanto en recursos materiales y humanos como en la formación del profesorado.

Es obvio decir que la situación no debe continuar con el *ritual*, no podemos mantenernos insensibles sin buscar otras formas alternativas y/o complementarias a la enseñanza tradicional.

Desde esta perspectiva, la nueva dinámica que se impone no descarta ningún nivel educativo y por tanto, tampoco el universitario. La enseñanza a nivel superior conlleva, en ocasiones, importantes dificultades que requieren de la iniciativa y el esfuerzo de los docentes para, de alguna manera, favorecer la comprensión de los conceptos y su tratamiento. Al fin y al cabo, piénsese que la matemática, en las diferentes épocas, no fue "inventada" para ser enseñada, sino más bien como una herramienta al servicio de otras ciencias y/o parcelas de la sociedad. Ante ello, ¿por qué íbamos a tener éxito en su enseñanza? Es fundamental pues la revisión de los contenidos y la puesta en práctica de métodos más adecuados; en otras palabras, habrá que rediseñarla para que pueda ser transmitida satisfactoriamente.

Artigue, en una reciente conferencia a la que asistimos, impartida en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, informó de una investigación, Praslon [81], de la que ella fue directora y en la que se constató un notable fracaso en la etapa de transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. La misma apunta hacia la necesidad de sensibilizar a los profesores para mejorar los métodos de su práctica docente y educativa, por dos razones:

- Razones externas: existe una necesidad social para ayudar a que el sistema prospere y para ello es preciso la inclusión de la tecnología que la sociedad demanda.

- Razones internas: es necesario entender mejor los fenómenos de transición en el sistema educativo.

Partiendo de la hipótesis de que existe una insensibilidad de los sistemas educativos respecto al reconocimiento de este fracaso, se han observado importantes diferencias entre las formas de enseñanza del Bachillerato y la Universidad; podríamos decir que no existe un puente natural por el que transiten los alumnos cómodamente desde un ámbito hasta el otro. Fundamentalmente, dicha transición está centrada en los contenidos y la metodología, puesto que se ve como un salto desde una matemática intuitiva y algorítmica hacia una matemática teórica y formal.

Los resultados de la investigación de Praslon [81] muestran que más que una ruptura global entre ambas instituciones educativas, se trata de una acumulación de microrupturas y de cambios motivados por el paso del método inductivo al deductivo. Por otro lado, en la Universidad, la diversidad creciente de tareas y técnicas hace que la "rutinización" sea cada vez más difícil.

Así pues, el cambio es inevitable: el desarrollo de la Educación Matemática no puede desaprovechar los continuos avances de la tecnología y la informática para el suyo propio con los cambios curriculares que la comunidad educativa considere necesarios. Además, el uso del ordenador en el aula favorece el aprendizaje constructivo como forma de enseñanza alternativa y/o complemetaria a los métodos tradicionales y fomenta el interés y la motivación del alumnado. Desde esta perspectiva, los profesores incitados a cambiar su forma de acercamiento a los alumnos, propondrán nuevos objetivos, métodos y formas de evaluar. La nueva situación debe permitir que sea el alumno, partiendo de sus conocimientos previos, quien construya, modifique y coordine sus esquemas conceptuales para posteriormente progresar en su conocimiento.

Nuestra investigación se fue gestando en el transcurso de varios años de contacto con la docencia universitaria, durante los cuales observamos importantes dificultades de comprension y asimilación de conceptos relacionados con ciertos problemas de convergencia. Iniciamos nuestro trabajo con una encuesta que propusimos a algunos profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad La Laguna (Véase anexo III). Por medio de ella, tratamos de analizar lo que estos profesores piensan, examinar cómo explican, indagar en los aspectos visuales que utilizan cuando explican y sondear el estado en que se encuentra la enseñanza y las perspectivas de futuro de algunos temas relacionados con la *completitud de* $\mathbb{R}$, *sucesiones de números reales y la operación de "paso al límite".*

Algunos de estos temas están ubicados, precisamente, en la frontera que existe entre la enseñanza secundaria y universitaria; el resto se manifiestan extensamente en los primeros cursos de cualquier carrera de Ciencias en la Universidad. Los profesores, en general, opinaron que, a estos niveles, el concepto de límite y en particular, la transmisión de la definición (ε, ν) resulta una tarea ardua y engorrosa.

Pensamos que la introducción del concepto de límite en el Análisis Matemático Clásico del siglo XIX, da validez al tratamiento de los procesos infinitos a través de procedimientos finitos. La definición formal permite justificar que el límite de una sucesión es un número sin necesidad de proseguir infinitamente calculando valores. Nótese que se usan inferencias lógicas y argumentos de naturaleza finita para conseguirlo.

La formalización de la definición no es sencilla de entender y esta forma de concebir la idea de límite originó un cambio en la epistemología de las matemáticas, el cual propició el desarrollo de nuevas materias en el ámbito universitario.

Después de revisar la literatura relacionada con las dificultades epistemolgícas y cognitivas que este concepto implica y a pesar de los obstáculos a los que los profesores hacen alusión, nos aventuramos en una investigación que abre un camino diferente respecto a la enseñanza de conceptos como éste o similares. Sus aportaciones nos incitaron a indagar en una nueva forma de hacer llegar a los alumnos estas ideas. Partíamos de la base de que, lejos de sustituir a los métodos tradicionales, la nueva alternativa debía complementarlos.

Por esta razón comenzamos nuestro estudio elaborando un *esquema* para la adquisición de conceptos nuevos. El mismo lo estructuramos en cuatro fases de enseñanza: verbal, simbólica, visual y manipulativa. Este *esquema conceptual* lo explicamos y justificamos en la sección 1.6 de esta memoria. Para su desarrollo el uso de software desempeña un papel fundamental, dado que nos permite utilizar, de una forma natural, el método inductivo en numerables situaciones matemáticas para que posteriormente, puedan ser generalizadas. Con ello nos proponemos salvar, en lo posible, algunas de las dificultades básicas del aprendizaje del cálculo: epistemológicas, cognitivas y curriculares. Pensemos que uno de los obstáculos, propio de la etapa de transición y apuntado por Praslon [81], es consecuencia del desequilibrio a que da lugar el paso de objetos particulares a objetos generales o de métodos locales a métodos generales, desde el Bachillerato a la Universidad.

Por tanto, dada la dificultad que entrañan algunas cuestiones relacionadas con los temas señalados y haciendo uso:

- de entrevistas estructuradas realizadas a alumnos que terminan las carreras de Matemáticas o Física
- de la experiencia de profesores cualificados
- de trabajo de campo con alumnos del Centro Superior de Educación
- de encuestas realizadas a alumnos de primer curso de Matemáticas sin y con instrucción en Maple

orientamos nuestra investigación a partir de una perspectiva visual que aporte suficientes estímulos ambientales para que a los alumnos les resulte más asequible y atractivo el progreso en la concepción y manipulación de las ideas que queremos transmitir, sin dejar nunca a un lado las cuestiones formales y simbólicas. El uso del software nos permitirá verificar la utilidad de aquella perspectiva en relación a ideas básicas del Análisis Matemático como “orden”, “distancia”, “completitud”, “sucesión”, “límite”, “continuidad” y otros conceptos que presentan gran riqueza de contenidos visuales.

En este sentido, uno de nuestros objetivos es evaluar si el complemento entre los métodos tradicionales y el uso de Programas de Cálculo Simbólico como Maple, permite mejorar la comprensión de los procesos de convergencia relacionados con *sucesiones numéricas* y *sucesiones y series funcionales,* los cuales presentan una variedad de contenidos representables intuitiva y/o geométricamente y cuyo desarrollo permite dar a conocer los procesos dinámicos naturales propios de los mismos.

Se entenderá que si tuviéramos que elegir dos "palabras claves" que definan nuestro trabajo éstas serían, sin duda:

"visualización" y *"convergencia"*

En nuestro contexto, visualizar será algo más que "ver", será "ver" más "interiorizar" para posteriormente procesar la información y "captar" las ideas matemáticas (véase sección 1.4).

Previamente, en el apartado 1.3 analizamos algunos obstáculos cognitivos y epistemológicos relacionados con los procesos de convergencia. El estudio de estos obstáculos nos ha permitido fijar como objetivo el aportar ciertas estrategias que ayuden a superarlos y basamos nuestro diseño curricular en la creencia de que para nosotros *"aprender es construir significado ante el obstáculo".* El título de esta memoria, *"Problemas de convergencia en un contexto de software educativo",* nos legitima en esta introducción para examinar y poner de manifiesto ya, desde un principio, ciertas formas primarias de convergencia, lo cual facilitará la labor de proponer fórmulas para, si es posible, dar significado a alguno de los obstáculos allí apuntados.

Desde un punto de vista intuitivo, la idea matemática de *convergencia* se asocia a la de *aproximación*, pero si aplicamos literalmente el significado de *aproximar* no estamos siendo precisos al establecer tal analogía.

Con más rigor, podríamos argumentar que la idea de *converger* hacia un determinado objeto matemático camina paralela a la idea de "*estar cada vez más próximo al objeto, pero de tal forma que cada vez se esté mas cerca del mismo"* (nótese que nos podemos aproximar a un determinado lugar pero seguir estando lejos del mismo) y esa "*cercanía*" puede materializarse "*tanto como queramos",* es decir, *menor* que cualquier cantidad prefijada por pequeña que esta sea.

Así pues, es importante insistir en que en todos los procesos de convergencia, el hecho de estar "*aproximándose"* debe darse simultáneamente al hecho de "*estar muy cerca de".*

Por señalar algunos ejemplos sencillos, los objetos matemáticos a los cuales se aplican procesos de convergencia pueden ser números (es el caso de una función real de variable real y el de una sucesión numérica, caso particular de aquel), funciones, figuras geométricas, etc. El objeto matemático al cual se converge o *límite* del proceso puede ser igualmente un número, una función, una figura geométrica, etc. En la investigación que nos ocupa exponemos una propuesta curricular para la enseñanza de sucesiones numéricas y sucesiones funcionales; además analizamos los resultados de su puesta en práctica.

Conectando con los párrafos anteriores, si tomamos por ejemplo una sucesión de numeros reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge hacia un determinado número real L, límite de la sucesión, su gráfica bidimensional es el *"camino"* que deben seguir sus elementos para aproximarse hacia L y estar tan cerca de él como queramos; en términos más precisos, a partir de un cierto subíndice, la distancia entre a_n y L, $\mid a_n - L \mid$, es "muy pequeña", tanto como nuestra voluntad lo desee (menor que ε, ε número real positivo y elegido arbitrariamente pequeño).

Las sucesiones numéricas que convergen tienen diversas formas de "aproximarse y acercarse" a L; en el apéndice A describimos los *"caminos"* más habituales que siguen en ese progresivo acercamiento.

Existen otros modelos de convergencia que están relacionados con los elementos de un determinado conjunto. Aunque estos modelos serán analizados con detalle en el Capítulo 2, adelantamos que pueden presentarse desde dos puntos de vista: las perspectivas puntual y global.

Para aclarar, en una primera instancia, el significado de estos dos tipos de convergencia, sin gran rigor matemático, digamos que la perspectiva puntual se presenta cuando los elementos de un cierto conjunto llevan asociadas una sucesiones numéricas que convergen, pero cada una de ellas "a su propio ritmo"; son los denominados *procesos de convergencia puntual.*

En contraposición, la perspectiva global se presenta cuando las sucesiones numéricas asociadas a los elementos de un cierto conjunto convergen todas ellas "al mismo tiempo", al mismo ritmo. En este caso hablamos de *procesos de convergencia uniforme* (metafóricamente piénsese en esos ejércitos ingleses que avanzan en largas filas paralelas al ritmo uniforme que marcan los tambores).

Para estos tipos de convergencia se presentan, como se ha dicho, dos cuestiones claves:

"a través de qué objetos matemáticos convergen"
y
"el cómo convergen"

los elementos de ese hipotético conjunto; de todo ello, nos ocuparemos en el Capítulo 2.

En la literatura consultada hemos encontrado que, en general, existen textos de Matemáticas (Abell y Braselton [1], Amillo, Ballesteros y otros [7], Guzmán y Rubio [49], Monteagudo y Paz [74], Soto y Vicente [96], Vizmanos y Anzola [110], etc.) en los que se recomienda el uso de software (Mathematica, Derive, Maple, Mathcad, Cabri, Calculadoras gráficas, etc.). Concretamente, en ciertos libros de Bachillerato, al final de cada unidad se propone el uso de alguno de ellos; así, al terminar el temario de Análisis se plantean a resolver problemas con Derive, al concluir la unidad de Geometría Analítica se proponen determinados ejercicios para solucionar con Cabri, etc. De la misma forma, en la Universidad se propone el uso del software para, algorítmicamente, resolver límites, calcular derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, programar procedimientos, etc. En estos casos, la mayoría de los autores parten del convencimiento de que los estudiantes ya conocen los conceptos y se limitan a plantear cuestiones y ejercicios de tipo algorítmico que deben resolverse mediante el software.

Nosotros, por el contrario, proponemos su uso con el objeto de introducir clásicamente los conceptos matemáticos, 1^a y 2^a fase de nuestro *esquema*, visualizarlos y posteriormente, en la fase manipulativa, a través de ejemplos y contraejemplos intentar consolidar las ideas propuestas; pensamos que todo ello complementaría el proceso de transmisión favoreciendo, al mismo tiempo, la comprensión de los conceptos. Éste constituye el eje principal a partir del cual se desarrolla nuestro trabajo.

Esquemáticamente y sintetizando, exponemos nuestro problema de investigación planteando que:

"Existen conceptos del Análisis Matemático relacionados con procesos de convergencia, cuya comprensión y asimilación presenta a los estudiantes de los primeros cursos universitarios importantes dificultades cognitivas y epistemológicas. Estas dificultades se manifiestan incluso en alumnos que finalizan sus estudios universitarios, constatándose importantes lagunas conceptuales en torno a estos temas, los cuales se desvanecen en su memoria incluso después de un corto periodo de tiempo".

Las argumentaciones y reflexiones anteriores nos condujeron a una investigación con dos líneas de trabajo bien diferenciadas:

- Por un lado, realizar estudios cualitativos con profesores y alumnos involucrados en los temas señalados.
- Por otra parte, diseñar una propuesta curricular donde el software Maple desempeña un papel importante.

Así pues, con este trabajo pretendemos poner de manifiesto que:

"La aplicación en la enseñanza de técnicas complementarias de visualización y manipulación y el uso de nuevas tecnologías (Computer Algebra System: Maple, Mathematica, Derive, Mathlab, etc.) facilitan la transmisión, construcción y reconstrucción del conocimiento".

Desarrollamos nuestra exposición estructurando la presente memoria en cinco capítulos:

Capítulo 1: *Principios teóricos*
Capítulo 2: *Objetivos, hipótesis y metodología*
Capítulo 3: *Estudios preliminares*

Capítulo 4: *Análisis y discusión de los resultados*
Capítulo 5: *Conclusiones y perspectivas de futuro*

En el primer capítulo describimos los principios teóricos en los que hemos basado su desarrollo. Comenzamos haciendo un estudio acerca de los *Antecedentes Epistemológicos y Cognitivos* relacionados con el concepto de límite e incluyendo una relación de algunos de los proyectos y experiencias que se están llevando a cabo en otras universidades. Posteriormente nos centramos en el marco teórico propiamente dicho, haciendo una revisión de la literatura referente a la *Visualización* y las *Nuevas Tecnologías*. Por último, presentamos el mencionado *Esquema para la introducción de conceptos* y dedicamos, antes de concluir el capítulo, un apartado a *la Reconstrucción del Conocimiento*.

En el segundo capítulo exponemos detalladamente los objetivos de la investigación y presentamos nuestra *Propuesta Curricular*. A partir del esquema conceptual desarrollamos una forma de instrucción, la cual se apoya en la visualización y el uso del software. Para terminar, describimos la puesta en práctica de la citada propuesta a partir de las experiencias llevadas a cabo con alumnos de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas y los instrumentos utilizados para el análisis de los resultados.

Iniciamos el tercer capítulo analizando los resultados de las encuestas que propusimos a alumnos recién licenciados: alumnos de doctorado y alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica. Seguidamente realizamos un análisis de la encuesta propuesta a los profesores universitarios. Ambas experiencias forman parte de la fase preliminar y constituyen el punto de partida de la investigación que nos ocupa.

En el capítulo cuatro presentamos el análisis y discusión de resultados de las experiencias llevadas a cabo según nuestra propuesta. En este caso describimos cuatro trabajos de campo que corresponden a distintos tipos de alumnos:

- Alumnos del Centro Superior de Educación: Alumna María
- Alumnos de 1^o de Matemáticas sin instrucción en Maple
- Alumnos de 1^o de Matemáticas con instrucción en Maple
- Alumnos de doctorado

En el último capítulo exponemos nuestras Conclusiones y las Perspectivas de futuro en torno a temas relacionados con esta investigación.

Por otra parte, en el Apéndice incluimos:

- Formas de convergencia para una sucesión numérica (apéndice A)
- Ecuación diferencial en derivadas parciales del calor (apéndice B)
- La solución de Fourier a la ecuación del calor y el Fenómeno de Gibbs (apéndice C)
- Ecuación diferencial en derivadas parciales de la cuerda vibrante (apéndice D)

Como ya mencionamos, en el apéndice A describimos los *caminos* más habituales que siguen las sucesiones numéricas convergentes en su progresivo acercamiento al valor del límite. Los apéndices B, C y D constituyen una forma novedosa de hacer ver a los alumnos algunas cuestiones relacionadas con los procesos de convergencia, tal es el caso de la obtención de la ecuación del calor, el fenómeno de Gibbs y la obtención de la ecuación de la cuerda vibrante; en la sección 1.3.1 de esta memoria observaremos como a lo largo de la historia estas cuestiones han provocado controversia y discusión entre los matemáticos. El uso del software nos permitirá visualizar y corroborar fenómenos y resultados que de otro modo es complicado comprender.

En los anexos presentamos el material en el que nos hemos basado para diseñar este proyecto, es decir, las encuestas correspondientes a las diferentes experiencias así como las respuestas de los alumnos y profesores implicados en cada caso.

"... Incluso el vocabulario para las ideas que se comunican es visual... El computador se ha sumado a este entorno mientras que los matemáticos han comenzado a utilizar gráficas de ordenador para explorar o para presentar sus ideas".

Cunningham, S. [18].

Capítulo 1

Principios teóricos

1.1. Introducción

La actividad matemática de todos los tiempos se ha desarrollado a partir de la observación y posterior enfrentamiento de la inteligencia humana con ciertos fenómenos y estructuras más o menos complejas de la realidad, las cuales son susceptibles de un tipo de estudio particular y característico. El éxito de esta labor se hace posible a través de la búsqueda de una simbología adecuada que facilite simultáneamente la asimilación y manipulación racional de sus elementos, para luego adquirir un cierto dominio de aquella realidad.

En este sentido, nuestra capacidad para percibir e interactuar adecuadamente cuando nos enfrentamos a un nuevo ambiente, nuevas situaciones, nuevos conceptos, depende de nuestra habilidad para detectar, interpretar y/o responder a la información que nos llega a través de los sentidos. No obstante, la percepción no es un resultado inmediato, y por tanto, aquella habilidad está en función de la existencia de estímulos ambientales que permitan adaptarnos a las nuevas situaciones y donde la información almacenada puede ser filtrada o seleccionada. En la profundización de esta problemática sobre el desarrollo de habilidades, surge la necesidad de dar respuesta a cómo se construye un concepto y su ubicación desde un punto de vista holístico con respecto a la matemática que está en juego.

La búsqueda de respuestas y el desarrollo tecnológico de las últimas décadas, nos obliga a pensar en nuevas formas de enseñanza de la matemática; pero el uso de la tecnología genera cambios importantes en cómo los profesores deben enseñar, cómo los estudiantes aprenden y cómo deben ser evaluados.

Desde esta perspectiva, cuando el profesor enseña debe crear las condiciones adecuadas para atraer la atención del estudiante, de forma que éste se sienta estimulado, motivado ante el tema que se le plantea. Si dicho profesor es capaz de "atrapar al alumno", llevándolo a su propio campo y haciéndole sentir la necesidad de aprender para solucionar una situación problemática que ha sido planteada como tal, este profesor

ha creado las condiciones que producen el "enganche" al conocimiento. El estudiante debe encontrarse en un ambiente atractivo para comprender las ideas, retener y más tarde reconstruirlas.

Como ya comentamos, nuestra investigación parte del análisis de una encuesta que fue contestada por algunos profesores del Departamento de Análisis Matemático de La Universidad de La Laguna, la mayoría de los cuales han estado relacionados, de una u otra forma, con la Enseñanza Secundaria. El objetivo de dicha encuesta era conocer y profundizar en las concepciones que tienen estos enseñantes sobre aspectos pedagógicos correspondientes a algunos tópicos del análisis matemático como son la completitud de $\mathbb{R}$ y el concepto (ε, ν) de límite de una suceción de números reales.

Así y como consecuencia de:

- las dificultades epistemológicas expresadas por los profesores a la hora de transmitir estas ideas,
- las "herramientas" que utilizan para "llegar mejor" a los estudiantes y
- las conclusiones de algunos trabajos y proyectos relacionados con el tema,

nos propusimos realizar esta investigación cuyo principal objetivo fue expuesto en la Introducción de esta memoria.

En este capítulo pretendemos describir los principios o fundamentos teóricos en los que nos basaremos para desarrollar nuestro trabajo.

En primer lugar, explicamos cómo surgió el problema que nos ocupa, definiéndolo y planteando cuáles fueron las principales preguntas que nos hicimos a la hora de diseñar nuestra línea de trabajo. Estas preguntas constituyen el punto de partida para alcanzar los objetivos que perseguimos y que hemos expresado en el apartado 2.2.

A continuación desarrollamos un sección dedicada a los antecedentes epistemológicos y cognitivos; en particular, analizaremos ciertos aspectos históricos de algunos de los conceptos matemáticos relacionados con nuestro trabajo, haciendo énfasis y reflexión en la necesidad de un tratamiento diferente de los mismos. Además describiremos algunos proyectos que han sido aplicados en los primeros cursos universitarios y que promueven el uso del ordendor en el aula de matemáticas.

Seguidamente nos centramos en el marco teórico propiamente dicho e indagamos sobre las distintas concepciones y virtudes de la visualización como herramienta fundamental en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, la cual facilita la adquisición del conocimiento. Desde este punto de vista, el interés que suscita este tema queda justificado con la necesidad de buscar nuevos procesos y para ello, el uso del software y la pantalla del ordenador proporcionan ciertas ventajas que sólo se hacen posible mediante el desarrollo de procesos visuales.

Posteriormente y con el objetivo de incidir en la construcción de las ideas matemáticas, proponemos el uso del software como complemento a la enseñanza tradicional y la utilización de estrategias de visualización, las cuales se sustentan en las teorías de autores como Guzmán, Hitt, Zimmermann, Cunningham, Dreyfus, Tall y Eisenberg, principalmente.

Por último, dentro de este marco presentamos un esquema que consideramos adecuado para la introducción de conceptos matemáticos novedosos y que resultará fundamental en el desarrollo de la propuesta curricular que presentamos en el Capítulo 2. La aplicación de nuestro *esquema conceptual* y en particular, el uso del software Maple permitirán al profesor crear las condiciones adecuadas para atraer al alumno y motivarle en el sentido que hemos comentado anteriormente.

1.2. Génesis del problema a investigar

Existen conceptos matemáticos que presentan importantes dificultades, tanto para los profesores a la hora de transmitirlos como para los alumnos asimilarlos. Desde este punto de vista, nuestra investigación comenzó a gestarse en el transcurso de varios años de contacto con la docencia universitaria. Durante los mismos, observábamos que alumnos, incluso ya licenciados, manifestaban auténticas dificultades para asimilar, recordar y manipular diversos conceptos relacionados con problemas de convergencia en general.

Para constatar nuestras observaciones, decidimos encuestar a alumnos recién licenciados, concretamente alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica y de doctorado (cursos 97-98 y 98-99). Consideramos que las aportaciones de los mismos podían resultar significativas, pues su experiencia, como estudiantes ya profesores, nos dotaría de una visión más amplia y enriquecedora.

Los ítems correspondientes a las encuestas propuestas trataban de hacerles recordar diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje que ellos mismos habían experimentado: metodología usada por su profesor, actitud que ellos manifestaron en su momento, dificultades para la asimilación y comprensión de los mismos, etc. También solicitamos su colaboración para reflexionar y responder algunas cuestiones referentes a los conceptos de límite de una sucesión de números reales y de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales. Por último y como futuros profesores, les pedimos una opinión en la que reflejaran aquellos cambios curriculares y metodológicos que consideraban necesarios para mejorar la enseñanza de conceptos como éstos y facilitar su comprensión.

El lector puede observar las encuestas contestadas en los anexos I y II que se adjuntan a esta memoria. En el Capítulo 3, en particular en el apartado 3.2, hacemos un análisis de sus respuestas.

Los resultados de estas experiencias despejaron nuestras dudas al comprobar, una vez más, que los conceptos involucrados en estos temas dan lugar a importantes obstáculos. Ellos constituirían el punto de partida para elaborar nuestra línea de trabajo y fijar algunos de los objetivos de esta investigación.

En este sentido resulta importante definir y delimitar el problema a estudiar; aunque en la introducción a esta memoria lo expusimos, ahora volvemos sobre él y lo explicitamos con detalle a partir de las preguntas a que da lugar:

"Existen conceptos del Análisis Matemático relacionados con procesos de convergencia, cuya comprensión y asimilación presenta a los estudiantes de los primeros cursos universitarios importantes dificultades cognitivas y epistemológicas. Estas dificultades se manifiestan incluso en alumnos que finalizan sus estudios universitarios, constatándose importantes lagunas conceptuales en torno a estos temas, los cuales se desvanecen en su memoria incluso después de un corto periodo de tiempo".

A partir de la revisión bibliográfica relacionada con este tema, encontramos que existen diversos trabajos acerca de las concepciones y dificultades que presentan los alumnos para asimilar los conceptos de límite de funciones reales de variable real y de sucesiones y series numéricas (Artigue [9], Hitt [54], Sierpinska [92], etc.); sin embargo, la bibliografía referente a los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales era muy escasa.

Por otra parte, a principios de 1998, encuestamos a varios profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna (sus respuestas están recogidas y analizadas en el Capítulo 3). Uno de nuestros objetivos era conocer aquellos aspectos pedagógicos que ellos utilizan en su práctica docente para transmitir algunos tópicos del Análisis Matemático como son la completitud de $\mathbb{R}$ y el concepto (ε, ν) de límite de una suceción de números reales. Aunque manifestaban ciertas dificultades epistemológicas en la transmisión de estos conocimientos, aportaron algunas ideas que reultarían de gran interés para nuestro trabajo.

Toda la información recogida y disponible nos incitó al planteamiento de algunas cuestiones que sólo tendrían respuesta tras realizar un estudio de investigación que debíamos organizar; así, nos preguntábamos:

- ¿Cuáles son las principales dificultades asociadas a los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales?
- ¿Qué cambios curriculares y metodológicos es importante introducir para mejorar la enseñanza de estos conceptos y facilitar su comprensión a los estudiantes?
- ¿Qué recursos didácticos debemos utilizar los profesores para mejorar nuestra práctica en el aula?

- El uso de las nuevas herramientas informáticas, ¿pueden ayudar a profesores y alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los mismos? ¿de qué forma?

- ¿Podemos aportar técnicas y métodos complementarios que faciliten el "enganche"del alumno y que por tanto favorezcan la motivación?

- ¿Podemos de alguna forma acortar el periodo de tiempo necesario para la adquisición de estos conceptos, al tiempo que reforzamos los procesos de almacenamiento y reconstrucción del conocimiento a corto y largo plazo?

Estas y otras cuestiones constituyeron el punto de partida para marcar objetivos concretos y organizar la línea de trabajo a seguir en el desarrollo de esta investigación.

1.3. Antecedentes de la investigación

En esta sección desarrollamos dos grandes apartados. El primero, dedicado a los antecedentes epitemológicos, hace referencia a los fundamentos, métodos y lenguaje del conocimiento matemático relacionado con la completitud de la recta real y problemas de convergencia de sucesiones y series funcionales. En particular, haremos un análisis histórico de las circunstancias en que surge el concepto de convergencia uniforme y por qué. Al analizar los antecedentes cognitivos, incluimos un apartado dedicado al estudio de algunos de los proyectos y experiencias que se están llevando a cabo en otras universidades con el objeto de mejorar la enseñanza-aprendizaje de los conceptos que nos ocupan. Además hacemos un estudio sobre diversas investigaciones que hacen referencia al concepto de límite y sobre todo a las dificultades epistemológicas y cognitivas que este concepto ofrece.

1.3.1. Antecedentes epistemológicos

Teniendo en cuenta la naturaleza epistemológica del concepto de completitud de $\mathbb{R}$ y consecuentemente de límite de una sucesión de números reales, es importante hacer análisis y reflexión sobre la necesidad de estos conceptos y sobre las dificultades para introducirlos dentro del marco científico de la Matemática. De igual forma, consideramos importante hacer un estudio de las dificultades que históricamente encontraron los miembros de la comunidad matemática para llegar a lo que actualmente conocemos como convergencia uniforme.

Reflexiones sobre la completud de la recta real

En el Capítulo 3 comprobaremos cómo los profesores universitarios encuestados realizan verdaderos esfuerzos para transmitir a sus alumnos la idea de continuidad de $\mathbb{R}$ y discontinuidad en $\mathbb{Q}$.. Entre otros recursos utilizan metáforas estructurales y extramatemáticas para intentar que los estudiantes las comprendan; en este apartado las conectamos con algunas reflexiones entresacadas de la literatura.

En Moreno y Waldegg [73], se le dedica una sección a la Continuidad Numérica. Dicha sección comienza con la siguiente cita de Dedekind:

En el otoño de 1858, como profesor del Politécnico de Zürich me encontré obligado, por primera vez, a dar un curso sobre los elementos del cálculo diferencial y sentí más profundamente que antes la carencia de un fundamento realmente científico para la aritmética (...) En la discusión sobre la aproximación de una magnitud variable y especialmente al probar el teorema, según el cual toda magnitud que crece continuamente pero no fuera de todo límite, se aproxima a un valor límite. He recurrido a evidencias geométricas (...) aunque esta presentación es muy útil desde un punto de vista didáctico, no proporciona un fundamento científico (al cálculo).

Respecto a estas palabras de Dedekind, estos autores comentan dos aspectos:

1) Se destaca la proposición:

"toda magnitud que crece continua y acotadamente tiene límite"

y se toma como punto de partida, como un organizador conceptual del cuerpo de teoremas del cálculo.

2) Se descubre que tal proposición no ha sido demostrada científicamente, sino sólo ha sido objeto de un tratamiento intuitivo, geométrico.

El problema de la continuidad de los números reales desde un punto de vista numérico (que es el adoptado por Dedekind) ha sido fuente de profundas meditaciones.

En [73] los autores añaden:

La densidad es una propiedad de los cuerpos materiales muy parecida a la continuidad. Es probable que al concepto abstracto de continuidad (geométrica) se haya llegado mediante la observación activa de los medios densos, tales como líquidos y metales. En realidad, los medios físicos, todos, están formados por la acumulación de un número muy grande de partículas cuyas interdistancias son tan pequeñas comparadas con las dimensiones de los objetos estudiados, que los podemos suponer carentes de intersticios. Al hacer esto, estamos realizando un acto, en extremo importante, de abstracción. La continuidad de los cuerpos es el resultado de nuestras formas de percepción. Quizás por esto, durante el desarrollo de una teoría de los números reales haya sido tan difícil distinguir las categorías de lo denso y lo continuo, cuya manifestación matemática queda plasmada en la afirmación:

"Los racionales son densos en el universo de los reales"

Todo concepto por precisa que sea su definición evoluciona y adquiere aún más precisión con el desarrollo de la matemática. Antes de los diferentes programas de reconstrucción de los números reales, el de Dedekind incluído, el concepto de número real ya había surgido en forma definida (aunque no definitiva).

Fue éste un concepto investigado y tratado por diferentes matemáticos en épocas distntas; los modelos fueron ganando en rigor y precisión, al tiempo que se resolvían los problemas que mostraban las limitaciones y bondades de las formas específicas que, en determinado momento, tenía este concepto.

En la época clásica, para los matemáticos griegos, la aceptación del concepto de longitud en la geometría dio lugar al descubrimiento de que había más números reales que racionales, o lo que es lo mismo, se llegó a que los racionales positivos no podrían ponerse en correspondencia biunívoca con las longitudes. Todo esto ocurrió como consecuencia del problema de medición de la longitud de la diagonal de un cuadrado.

Este hecho es, sin lugar a dudas, el punto de partida de las reflexiones acerca de "lo continuo". Así pues, la forma más natural de presentar los números reales consiste en partir de los procesos de medición, lo cual evidentemente conduce a procesos de aproximación que, de acabar en un número finito de pasos, produce un decimal finito. Si no acaba, produce un decimal infinito.

El decimal finito es racional. El decimal infinito puede ser racional, lo cual se refleja en la periodicidad. Pero, precisamente porque el decimal infinito puede ser no periódico, sabemos que los números racionales presentan una insuficiencia teórica para ser considerados como un instrumento idóneo para el proceso de medición. Vemos entonces la necesidad de tratar con expresiones decimales no periódicas, para medir, por ejemplo, la diagonal del cuadrado unitario.

De esta manera, al "completar" las expresiones decimales infinitas y periódicas con las infinitas no periódicas establecemos una correspondencia entre los segmentos (sus longitudes) y los números reales. Pero, desde el punto de vista numérico aparece un nuevo problema:

¿Cómo sabemos que una expresión no periódica como por ejemplo 1.4142136... representa un verdadero número?

Caben aquí varias reflexiones. Empecemos con algunas de carácter físico. Ningún objeto concreto puede medirse con exactitud absoluta. La longitud de un segmento no tiene sentido si tratáramos de medirla con una precisión que vaya más allá de los límites de las dimensiones atómicas. Cuando se superan ciertos límites de precisión ocurre un cambio cualitativo en el proceso de medición. Así, la afirmación de que el cociente de la diagonal al lado es $\sqrt{2}$ *no puede deducirse con exactitud a partir de mediciones concretas y aún más, carece de significado preciso en el caso de un cuadrado físico.*

Por ello, la afirmación de que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmesurables es una conclusión teórica basada en el desarrollo de la geometría; basada en las premisas originales de la geometría, que fueron tomadas de la experiencia.

Por todo esto, podemos afirmar que el concepto de número real (irracional) no es un reflejo mecánico, ni inmediato de los hechos de la experiencia. El número real es un concepto abstracto que refleja lo que es común a las magnitudes concretas. Y esto que es común es la posibilidad de que el valor de la magnitud pueda ser determinado con una precisión ilimitada (siempre podemos añadir otra cifra decimal). Entonces, volviendo a la pregunta: ¿Cómo sabemos que 1.4142136... representa un verdadero número?, contestamos así:

Al detenernos en una determinada cifra decimal, por ejemplo 1.4142 obtenemos un número que representa una aproximación. Si continuamos añadiendo cifras decimales: 1.4142, 1.414213, 1.4142136, etc. vamos obteniendo mejores aproximaciones al valor de la magnitud que pudiésemos estar midiendo. El expresar el número con todas sus cifras decimales representa algo nuevo, desde el punto de vista cualitativo: representa la posibilidad de precisión absoluta en el proceso de medición. Esta idea de precisión absoluta es la que queremos "capturar" mediante la posibilidad de aproximación indefinida. Esta "captura" consiste en darle al número con todas sus cifras decimales carta de ciudadanía en el mundo de los números.

Observando que las aproximaciones sucesivas:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &a_2 = 1{,}4 \\ &a_3 = 1{,}41 \\ &a_4 = 1{,}414 \\ &a_5 = 1{,}4142 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

constituyen una sucesión creciente y acotada, y que el número con todas sus cifras decimales es el límite de tal sucesión, extendemos la carta de ciudadanía a

$$1{,}4142136...$$

mediante el siguiente postulado que refleja la completitud (en el grado de precisión de la medida) de los números reales:

POSTULADO DE CONTINUIDAD

Dada cualquier sucesión creciente:

$$\begin{aligned} &b_0 = a_0 \\ &b_1 = a_0 \cdot a_1 \\ &b_2 = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

tal que existe k *para el cual* $b_n \leq k$ *para todo* n*, postulamos la existencia de un número* $\alpha \leq k$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Así, este postulado asegura que los procesos de medición pueden realizarse con tanto grado de precisión como deseemos. Podemos afirmar que si traspasamos un determinado límite de precisión, estamos introduciendo un cambio cualitativo que corresponde al mundo conceptual de los números reales.

Es importante destacar que en esta idea de mejorar indefinidamente la precisión del proceso de medir, está latente la idea de límite, concepto central del análisis matemático.

Hemos de destacar igualmente que en estos procesos no hacemos una única aproximación, sino una sucesión de ellas, cada una más precisa que la anterior. De la observación de esta sucesión de aproximaciones determinamos el valor exacto de la magnitud y ese valor es el límite requerido.

"...esta forma aritmética que hemos dado a la continuidad, en forma de axioma, fue la utilizada implícitamente por Cauchy".

Consideraciones históricas sobre los problemas de convergencia de sucesiones y series funcionales

Para entender la necesidad del concepto de convergencia de una sucesión funcional y posteriormente el de convergencia uniforme, es necesario investigar las circunstancias y el momento histórico en que dicho concepto surge y por qué. Así, es importante analizar desde un punto de vista heurístico, el trabajo de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), *"Théorie Analytique de la Chaleur",* donde presenta modelos matemáticos de fenómenos físicos no estudiados hasta ese momento.

Fourier, ayudante de Lagrange y de Laplace, desempeñó algunos cargos públicos entre los que cabe destacar el de miembro civil en la campaña egipcia de 1798 a 1801, y el de Prefecto del Departamento de Iseré, situado en la frontera con Italia, desde 1802 hasta 1815. Es en esta etapa de su vida, cuando realizó la obra antes señalada y en la que estuvo involucrado unos quince años.

Aunque la historia se gesta en el transcurso del siglo XVIII, lo que atañe para nuestro estudio comienza en 1807, cuando Fourier presenta al *Institut de France* sus resultados sobre el problema de la transmisión del calor. Como consecuencia de ello, se produce una controversia que gira en torno a la representación de una función en serie trigonométrica, hecho que analizaremos a continuación.

El principal oponente de Fourier era precisamente Lagrange, presidente del *Institut de France*, quien junto a Euler y D'Alembert, no admitía la solución que años antes había encontrado Daniel Bernoullí a la ecuación diferencial de la cuerda vibrante. Bernoullí, en 1753, propuso como solución de la también conocida como *ecuación de ondas unidimensional* (Simons [93], pág. 311-320):

$$a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$ [1]

la función:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx) \cos(nat)$$

solución que, al considerar el valor de contorno $y(x,0) = f(x)$, se transforma en

$$f(x) = b_1 sen(x) + b_2 sen(2x) + b_3 sen(3x) + ...$$

Tanto D'Alembert como Euler rechazaban la idea de Bernoullí referente a la posibilidad de que una función tan general como la de la forma de una cuerda deformada arbitrariamente, pudiera ser desarrollada en una serie trigonométrica.

Previamente, en los años 1747 y 1748 respectivamente, estos dos matemáticos habían encontrado y publicado, por separado, una solución del problema que nos ocupa, la cual adopta la forma:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]$$

(véase Carslaw [16], Farfán [37] y Simons [93]).

Lagrange estuvo un tiempo (1752-1759) a favor de los razonamientos de Euler y posteriormente defendió también las argumentaciones de D'Alembert, pero no aceptó el resultado de Bernoullí y, en consecuencia, rechazó el trabajo de Fourier, en el cual éste descubría la forma más general de una serie trigonométrica de senos y cosenos para la solución $f(x)$ de otro problema físico, el de *la conducción del calor*:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)]$$

Es precisamente en 1806 cuando Fourier anunció, aunque nadie le creyó, que una función arbitraria $f(x)$ puede ser representada en la forma de la serie anterior donde los coeficientes a_n y b_n adoptan la forma

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ y } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)dx$$

El Institut convocó en 1811 el *"grand prix de mathématiques"* para quien solucionara el problema de la transmisión del calor; el tribunal estaba formado por Lagrange, Laplace y Legendre. Fourier ganó este gran premio con una versión ampliada de sus obras iniciales, pero ésta no se publicó en ese momento[2] y fue en 1822, después de la muerte de Lagrange, cuando apareció una tercera versión, en forma de texto, con el título ya mencionado:

[1] Una versión, en lenguaje Maple, de la obtención de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la cuerda vibrante y de la conducción del calor, puede verse en los Apéndices C y D de esta memoria.

[2] El retraso en la publicación de la obra de Fourier hasta 1822 se debió a las "discusiones" de los miembros del Institut. Estas se centraban en que si los trabajos de Fourier carecían o no del rigor matemático exigido.

"Théorie Analytique de la Chaleur".

Fourier [41] estudió la determinación de las leyes matemáticas que gobiernan los fenómenos de propagación del calor en la naturaleza, bajo la hipótesis de que el calor penetra en todas las sustancias del universo de la misma manera que la gravedad actúa sobre todo aquello que pesa. Afirma que las teorías mecánicas no se aplican a los procesos donde interviene el calor, ya que éste posee sus propias especificidades, y por tanto, estos procesos no actúan en base a los principios del movimiento y del equilibrio.

En la introducción del capítulo primero expone con claridad el objetivo de su obra y éste consiste en reducir, con la ayuda del análisis matemático, la investigación física del fenómeno de propagación del calor en cuerpos sólidos a los problemas del cálculo integral, teniendo en cuenta los datos suministrados por el experimento. Este fenómeno de propagación del calor en cuerpos sólidos se origina por la desigual distribución del calor en diferentes puntos de la masa sólida considerada, o lo que es lo mismo, por la diferencia no nula de temperatura entre dos puntos vecinos $(x+h,\ y+k,\ z+l)$ y $(x,\ y,\ z)$, en el tiempo t :

$$T\,(x+h,\ y+k,\ z+l,\ t) - T\,(x,\ y,\ z,\ t)$$

donde T representa la temperatura como función de la posición en el espacio y en el tiempo.

Tras diversos razonamientos y cálculos descritos con detalle, Fourier [41] obtuvo la ecuación de conducción del calor:

$$k^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

donde k^2 se denomina coeficiente de transmisión del calor.

Para el caso particular bidimensional, la ecuación general queda reducida a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Y dado que se trata de determinar la temperatura estacionaria, constante respecto a la variable tiempo, deberá considerarse $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Por tanto la ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$ [3]

Fourier [41] en el capítulo II de su obra original, pág. 190, presenta una solución de la ecuación anterior dada por:

$$\frac{\pi}{4}T = e^{-x}cos(y) - \frac{1}{3}e^{-3x}cos(3y) + \frac{1}{5}e^{-5x}cos(5y) - \frac{1}{7}e^{-7x}cos(7y) + ...$$

[3] Véase Fourier [41], pág. 162 y Farfán y Solís [39], pág. 51.

afirmando que este valor de T satisface dicha ecuación y realizando un estudio exhaustivo de la misma.

Por otra parte, la sección VI del capítulo III la dedica a *"Développen d'eune fonction arbitraire en séries trigonometriques"* y calcula los coeficientes a, b, c,...de la serie

$$acosx + bsen(3x) + ccos(5x) + ...$$

A partir de experiencias concretas y tomando como base un fuerte manejo algebraico característico del siglo XVIII, Fourier no sólo calcula los coeficientes de la serie trigonométrica (artículos n^o 172,...,176 de [41]), sino que además afirma que la constante $\pi/4$ admite el desarrollo en serie de cosenos que presentamos más abajo (artículo 177 de [41]). Piénsese que esto, para el gran matemático Euler, era sencillamente imposible y fue su principal argumento en contra de la solución dada por Bernoullí al problema de la cuerda vibrante.

Para obtener los coeficientes de su serie trigonométrica, Fourier jugó en el mismo terreno que Euler, utilizando la manipulación formal. Quizás por esta razón, Euler dudara de la deducción de Fourier.

Es interesante destacar que cuando Bernoullí presentó su solución al problema de la ecuación de ondas, ni él, ni Euler investigaron el problema de la convergencia de la serie en cuestión; sin embargo en el capítulo III, sección 177, de su Teoría Analítica del Calor, Fourier fue aún más lejos e hizo un minucioso estudio de la *convergencia* de la serie trigonométrica obtenida[4].

$$\tfrac{\pi}{4} = \cos y - \tfrac{1}{3}\cos 3y + \tfrac{1}{5}\cos 5y - \tfrac{1}{7}\cos 7y + \tfrac{1}{9}\cos 9y - \tfrac{1}{11}\cos 11y + ...$$

Respecto a ella Fourier [41] en el artículo 177, afirma:

"Sería fácil de probar que esta serie es siempre convergente; es decir, que poniendo en lugar de y un número cualquiera y prosiguiendo el cálculo de los coeficientes, nos aproximamos cada vez más a un valor fijo; de suerte que la diferencia de este valor a la suma de los términos calculados llega a ser menor que toda cantidad asignable. Haremos notar que el valor fijo al cual nos aproximamos continuamente es $\pi/4$ *si el valor atribuído a* y *está comprendido entre* 0 *y* $\pi/2$, *pero que él es* $-\pi/4$ *si* y *está comprendido entre* $\pi/2$ *y* $3\pi/2$*; ya que en este segundo intervalo cada término de la serie cambia de signo.*

En general el límite de la serie es alternadamente positivo y negativo; sin embargo,

la convergencia no es lo suficientemente rápida para procurar una aproximación fácil,

pero es suficiente para la verdad de la ecuación

$$y = \cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x - \tfrac{1}{7}\cos 7x + \tfrac{1}{9}\cos 9x - \tfrac{1}{11}\cos 11x + ...$$

[4]En los trabajos originales de Fourier, las abcisas la denota por Y y las ordenadas por X.

perteneciendo a una línea que, teniendo a x por abscisa y ordenada y, está compuesta de rectas separadas las cuales son paralelas al eje horizontal (aquí el papel de la x e y es estándar).

Estas paralelas están colocadas alternativamente por arriba y debajo del eje, a la distancia $\frac{\pi}{4}$, y unidas por perpendiculares que son ellas mismas parte de la línea. Para formarse una idea exacta de la naturaleza de esta línea, es necesario suponer que el número de términos de la función

$$\cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x\text{-}\tfrac{1}{7}\cos 7x + \tfrac{1}{9}\cos 9x - \tfrac{1}{11}\cos 11x + ...$$

recibe, en principio un valor determinado. En este último caso la ecuación

$$y = \cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x\text{-}\tfrac{1}{7}\cos 7x + \tfrac{1}{9}\cos 9x - \tfrac{1}{11}\cos 11x + ... \qquad (1)$$

pertenece a una línea curva que pasa alternativamente por arriba y por abajo del eje, cortándolo todas las veces que la abscisa x llega a ser igual a una de las cantidades

$$\pm\tfrac{\pi}{2}, \pm\tfrac{3\pi}{2}, \pm\tfrac{5\pi}{2}, ...$$

A medida que el número de términos de la ecuación aumenta, la curva tratada tiende más y más a confundirse con la línea precedente, compuesta de rectas paralelas y de rectas perpendiculares, de suerte que esta línea es el límite de diferentes curvas que se obtendrían al aumentar sucesivamente el número de términos"

Véanse Figuras 1.9 y 1.10

Si ponemos atención a estas gráficas, desde un punto de vista geométrico, observaremos que para los valores del interior del intervalo $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, las diferentes funciones tienden a "allanarse" en el centro del mismo y su valor se aproxima cada vez más y más hacia $\frac{\pi}{4}$; sin embargo el conjunto de máximos y mínimos relativos se desplazan hacia los extremos, es decir, hacia las cercanías de $-\frac{\pi}{2}$ y de $+\frac{\pi}{2}$[5].

Conceptualmente, desde el punto de vista actual, la curva descrita por Fourier asociada a la función límite, no es correcta, ya que para que dicha curva sea función es necesario que a un punto del dominio le corresponda uno y sólo un punto del conjunto imagen. Para él la función límite era continua pues consideraba con toda certeza que algo era una función continua si su gráfica se podía trazar con un lápiz sin levantarlo del papel.

¿Por qué Fourier ve como necesario un estudio de la convergencia de la serie?

Argumentemos que analizar esta convergencia es el resultado implícito de evaluar la serie (la función) en un conjunto de números en donde está definida. Fourier estaba

[5]Es bien conocido que esta "anomalía" se conoce como "fenómeno de Gibbs" en honor a este matemàtico. En el apéndice B puede verse un estudio del mismo realizado con Maple en el que se destacan las acotaciones de los máxinos y mímimos de todas las funciones "sumas parciales".

pensando en una función como el resultado de la sustitución de un número cualquiera independientemente de la fórmula que la define. Su concepto de función es numérico y no formal como el de Euler.

Téngase en cuenta que Fourier define función así:

"... En general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas en donde cada una de ellas es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x existe un número igual de ordenadas $f(x)$. Y todas ellas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero.

No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas, se suceden unas a otras de manera arbitraria y cada una viene dada como si fuera una cantidad aislada..."

Si hacemos uso al pie de la letra de esta definición, podemos afirmar que la idea actual de correspondencia $x \to f(x)$, es utilizada por Fourier; sin embargo el listado de funciones que usa demuestra que no estaba pensando en la definición de función tal como hoy la entendemos[6]; ésta habría de esperar todavía un siglo para consolidarse. Piénsese que Lebesgue y Borel en 1905 aún discutían sobre la definición adecuada de función.

La prueba más clara de que la definición de Fourier no es en absoluto la actual se desprende de sus explicaciones verbales en su *"Théorie Analytique de la Chaleur"* y de los dibujos presentados en su monografía de 1807, cuando presenta sus resultados al Institut de France. Él une, como ya hemos dicho, los saltos con líneas perpendiculares probablemente para proporcionar una visión continua de la función límite. Cada suma parcial es una función continua, y Fourier piensa, en consecuencia, que aquel límite igualmente debe serlo.

Sería mucho exigir a Fourier que notara la *convergencia uniforme* de su serie trigonométrica tal como hoy día la entendemos, hacia su función límite, en cualquier intervalo incluido en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; pensemos que este tipo de convergencia era un concepto que aún no existía; sin embargo es él quien introduce por vez primera el problema de la convergencia al referirse en los párrafos precedentes a la lentitud de la misma.

No obstante sus argumentaciones van a proporcionar pistas a matemáticos como Cauchy y Seidel, para que poco a poco se fuera gestando la idea de la *convergencia uniforme*.

Agustín Louis Cauchy (1800-1885) enunció y demostró la conocida *conjetura o principio de continuidad* en el que se postula que las propiedades que se verifican en los procesos finitos pueden extenderse, sin más, a lo infinito, teorema "erróneo" para los

[6]Definición de función dada por Dirichlet en 1837: "*If a variable y is so related to a variable x that whenever a numarical value assigned to x, there is a rule accordening to which a unique value of y is determined, then y is said to be a function of the independent variable x*".

historiadores clásicos[7]. Con más precisión, Cauchy fue quien, por primera vez, dio una prueba de la conjetura primitiva que dice:

"el límite de una serie convergente de funciones continuas es a su vez continuo"

verdad que se había dado por supuesta durante el siglo XVIII y, como ya comentamos, se conocía como "*principio de Leibniz*". Éste se consideraba como un *axioma,* no precisándose por tanto demostración alguna.

¿Porqué sintió Cauchy la necesidad de probarla?

Hitt [58] analiza la frase de Fourier ya mencionada:

"la convergencia no es lo suficientemente rápida para procurar una aproximación fácil, pero es suficiente para la verdad de la ecuación (1)"

Con este comentario, Fourier, sin saberlo, estaba proporcionando contraejemplos al teorema de continuidad de Cauchy y además, una pista para el descubrimiento de la *convergencia uniforme* de series de funciones continuas.

Además Hitt realiza un análisis gráfico, con el software Mathematica, que le permite visualizar el proceso de la convergencia de la serie de Fourier y afirma:

"...es impresionante que Fourier haya tenido esta visión sin contar con la tecnología actual"

Cuando Cauchy, en 1821, un año antes de la publicación del libro de Fourier, publica su libro "Curso de Análisis" ya conocía el trabajo de éste y aunque el comentario anterior pasó desapercibido a sus ojos, en él enuncia un teorema evidentemente consecuencia de los ejemplos de Fourier; dicho teorema es enunciado así:

"Cuando los diferentes términos de la serie

$$u_0,\, u_1,\, u_2,\, ...,\, u_n,\, u_{n+1},\, ... \qquad (2)$$

son funciones de una misma variable x, continuas con respecto a esta variable en la vecindad de un valor particular para el cual la serie es convergente, la suma s de la serie es también, en la vecindad de este valor particular, función continua de x".

Reproducimos la demostración de Cauchy dado su interés histórico:

"Cuando los términos de la serie (2) *dependen de una misma variable x, esta serie es convergente, y sus diferentes términos funciones continuas de x, en la vecindad de un valor particular atribuido a esta variable.*

[7] No obstante como consecuencia de los trabajos del análisis no standar, Lakatos [65] muestra que Cauchy no se equivocó, simplemente enunció y demostró otro teorema, que ya el propio Cauchy se ocupó de corregir más tarde.

$$s_n,\ r_n \text{ y } s$$

son también tres funciones de la variable x, donde la primera evidentemente es continua con relación a x en la vecindad de un valor particular el cual se requiere. Supuesto eso, considérense los incrementos que reciben estas tres funciones, cuando se hace crecer x en una cantidad infinitamente pequeña. El incremento de s_n será para todos los posibles valores de n, una cantidad infinitamente pequeña; y el de r_n se volverá imperceptible al mismo tiempo que r_n si se atribuye a n un valor muy grande. Por consiguiente, el incremento de la función s no podrá ser sino una cantidad infinitamente pequeña".

La prueba de Cauchy puede transcribirse de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}|s\,(x+\Delta x)-s\,(x)|=\\ =|[s_n\,(x+\Delta x)+r_n\,(x+\Delta x)]-[s_n\,(x)+r_n\,(x)]|=\\ =|s_n\,(x+\Delta x)-s_n\,(x)+r_n\,(x+\Delta x)-r_n\,(x)]|\leq\\ \leq|s_n\,(x+\Delta x)-s_n\,(x)|+|r_n\,(x+\Delta x)|+|r_n\,(x)|\end{gathered}$$

Cauchy concluye su demostración mencionando que las tres expresiones se hacen infinitamente pequeñas.

La Historia nos dice que fue Niels Henrik Abel (1802-1829) en 1826 quien postula que dicho teorema tiene excepciones; dice textualmente:

"*Me parece que hay algunas excepciones al teorema de Cauchy*"

y como contraejemplo presenta la serie:

$$sen(\phi)-\tfrac{1}{2}sen(2\phi)+\tfrac{1}{3}sen(3\phi)\text{-}\tfrac{1}{4}sen(4\phi)+\tfrac{1}{5}sen(5\phi)-...$$

no aclarando que Fourier ya había utilizado este mismo ejemplo en un contexto similar; Abel añade:

"*como se sabe hay muchos más ejemplos como éste*"

y expresa:

"*El dominio de validez de los teoremas del análisis en general y de los teoremas acerca de la continuidad de la función límite en particular está restringido a series de potencias.*

Todas las excepciones conocidas de este principio de continuidad básico eran series trigonométricas..." (Lakatos [65], pág. 156).

Abel incluso propuso dejar a un lado el estudio de las series trigonométricas de Fourier:

"*como si fuesen una jungla incontrolable en las que las excepciones son la norma y los éxitos un milagro*"

Como se ha dicho, Hitt se pregunta cómo se las ingenió Fourier para esbozar, en aquella época, las gráficas de las figura 1.9 y entonces provoca el proceso para representarlas con ayuda de Mathematica.

¿Habría pensado lo mismo Abel, sobre lo de la "*jungla incontrolable*" si hubiera tenido a su disposición la tecnología contemporánea?

Nosotros, paralelamente a Hitt y con ayuda de Maple, podemos definir la sucesión de "sumas parciales" de la serie presentada por Abel, graficar algunas de ellas e intuir, por consiguiente, cuál va a ser la función límite:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} s(x,n)$$

Para ello utilizamos el siguiente programa[8]:

```
>s:=(x,n)->sum((-1)^(k+1)/k*sin(k*x),k=1..n);
```

$$s := (x,n)- > \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

```
>'s(x,1)'=s(x,1);'s(x,2)'=s(x,2);'s(x,3)'=s(x,3);
```

$$s(x,1) = \sin(x)$$
$$s(x,2) = \sin(x) - \tfrac{1}{2}\sin(2x)$$
$$s(x,3) = \sin(x) - \tfrac{1}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{3}\sin(3x)$$

```
>plot({seq(s(x,n),n=1..3)},x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,thickness=2,color=black);
```

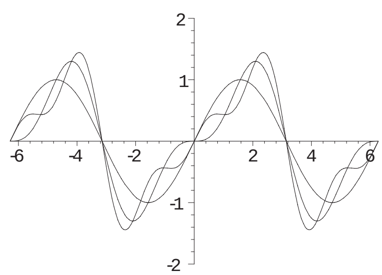


FIGURA 1.1

[8]En este caso exponemos el programa con las instrucciones pero no aportamos explicaciones acerca de las mismas. En el desarrollo de la Propuesta Curricular que presentamos en el Capítulo 2 presentamos los programas y los explicamos.

>plot({seq(s(x,n),n=45..45)},x=-2*Pi..2*Pi,y=-2..2,thickness=2,color=black);

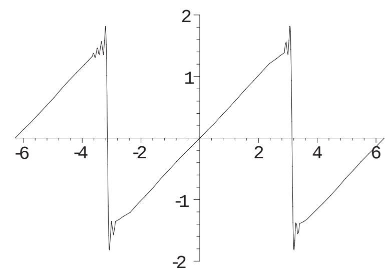


FIGURA 1.2

Por tanto, la función límite en $[-2\pi, 2\pi]$ es:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } x \neq -\pi,\ \pi \\ 0 \text{ si } x = -\pi,\ \pi \end{cases}$$

Gráficamente:

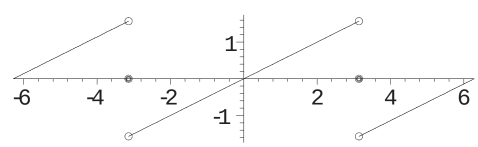


FIGURA 1.3

Seidel en 1847, unos veinticinco años después de la publicación de la obra de Fourier, encuentra el error que comete Cauchy en la demostración anteriormente expuesta, y señala la propiedad o *"lema oculto"* que debiera añadirse para que el teorema fuera cierto. Evidentemente la cuestión no era baladí y por ello llevó tanto tiempo. El descubrimiento de Seidel, según Lakatos [65], lo presentamos seguidamente:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *una serie convergente de funciones continuas y, para cualquier* n,

$$\textit{defínase } S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_m(x) \quad \text{y} \quad r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_n(x)\,.$$

Lo importante en la prueba de Cauchy es la deducción siguiente:

Para todo $\varepsilon > 0$*:*

(1) Existe un δ *tal que, para cualquier* Δx*, si* $|\Delta x| < \delta$*, entonces* $|S_n(x+\Delta x) - S_n(x)| < \varepsilon$ *(existe tal* δ*, debido a la continuidad de* $S_n(x)$*);*

(2) Existe un N *, natural, tal que* $|r_n(x)| < \varepsilon$*, para todo* $n \geq N$ *(existe tal* N*, debido a la convergencia de* $\sum f_n(x)$ *);*

(3) Existe un N', natural, tal que $|r_n(x+\Delta x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq N'$, (debido a la convergencia de $\sum f_n(x+\Delta x)$);

Por todo ello:

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| = |S_n(x+\Delta x) + r_n(x+\Delta x) - S_n(x) - r_n(x)| \leq$$
$$|S_n(x+\Delta x) - S_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x+\Delta x)| < 3\varepsilon, \textit{ para todo } \Delta x < \delta.$$

Por otra parte los contraejemplos conocidos ponían de manifiesto que algo no funcionaba.

¿Dónde estaba el error en la demostración de Cauchy?

Lakatos [65] afirma que si se realiza un análisis más cuidadoso de la prueba, dejando bien claras las dependencias funcionales de algunas de las cantidades podemos realizar la siguiente deducción:

(1)* $|S_n(x+\Delta x) - S_n(x)| < \varepsilon$, si $\Delta x < \delta(\varepsilon, x, n)$
(2)* $|r_n(x)| < \varepsilon$, si $n > N(\varepsilon, x)$
(3)* $|r_n(x+\Delta x)| < \varepsilon$, si $n > N(\varepsilon, x+\Delta x)$

Por todo ello:

$$|S_n(x+\Delta x) + r_n(x+\Delta x) - S_n(x) - r_n(x)| = |f(x+\Delta x) - f(x)| < 3\varepsilon,$$
$$\text{si } n > \textit{máx}_{\mathcal{Z}} N(\varepsilon, \mathcal{Z}) \text{ y } \Delta x < \delta(\varepsilon, x, n)$$

Así pues para Seidel el *"lema oculto"* o "*fallo en la demostración*" que no descubrió Cauchy es que este máximo, $\textit{máx}_{\mathcal{Z}} N(\varepsilon, \mathcal{Z})$, deba existir para cualquier ε fijado. Este *lema oculto* fue lo que se llegó a denominar el requisito de la *convergencia uniforme* (Lakatos [65]) y que con el transcurso de los años ha derivado, después de un largo proceso de transposición didáctica, en lo que hoy llamamos *convergencia uniforme de una serie de funciones* donde las series son tratadas como *sucesiones funcionales* pues se trabaja con las *sucesiones de sumas parciales* $S_n(x)$.

Nótese que Seidel deja entrever la idea de que debe existir un subíndice natural que sólo depende de ε pero no de x, a partir del cual se verifican simultámeamente las tres acotaciones y de ahí la conclusión de la prueba. Seidel está dando carta de naturaleza a la globalidad de la convergencia al exigir la existencia de un subíndice N que valga para todos los x del intervalo (o para todos los "elementos de las vecindades", según las propias palabras de Cauchy) y está poniendo las bases, inequívocamente, para el concepto actual de convergencia uniforme de sucesiones y series funcionales[9].

[9] Conviene destacar que Karl Weierstrass, en su obra de 1841 "Zur Theorie der Potenzreihen", manuscript 1841 publicado en 1894 en Werke, 1, pág. 67-74, como consecuencia de su estudio sobre convergencia había definido el concepto de convergencia uniforme como sigue:

"The sequence $f_n : A \to \mathbb{R}$ converges uniformly on A to $f : A \to \mathbb{R}$ if $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ $\forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$".

En todo caso Hairer y Wanner [50], pág. 214, afirman que fue Seidel, en 1848 el descubridor de la convergencia no uniforme presentando el conocido ejemplo de la sucesión funcional:

$$f_n : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \to f_n(x) = x^n$$

Algunos matemáticos importamtes como Pringsheim, Hardy y Bourbaki le condeden a Abel el mérito de haber descubierto *"la convergencia uniforme"* y se basan en su famoso teorema que en forma restrigida dice así:

Si la serie

$$f\ \alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + v_3\alpha^3 + ...$$

es convergente para un valor dado δ de α, *también convergerá para todo valor menor que* δ *y, para valores tendentes a cero de* β*, la función* $f(\alpha+\beta)$ *se aproximará indefinidamente al límite* $f\ \alpha$ *supuesto que* α *sea menor o igual a* δ.

Lakatos [65] comenta que Abel no descubrió el error de Cauchy y que *"ni siquiera se dio cuenta de que no es el dominio de las funciones aceptables lo que ha de restringirse"*, sino más bien la forma o el modo en que convergen dichas funciones: "*De hecho para Abel no hay más que un tipo de convergencia, el más simple".* Pensemos además que hoy día sabemos que para el caso de las series de potencias, que es el campo donde Abel investiga la cuestión, las convergencias simple y uniforme coinciden. Incluso Lakatos confiesa que fue Jourdain el que se dio cuenta de que el primer contraejemplo del teorema de Cauchy lo presenta Fourier y no Abel a quien generalmente se le atribuye.

A continuación presentamos un esquema que, a grandes rasgos, sintetiza el desarrollo histórico que condujo al concepto de la convergencia uniforme:

<u>Problema de la cuerda vibrante</u>

$$\boxed{a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$\boxed{1747}$ Jean le Rond **D'Alembert** (1717-1783)

$\boxed{1748}$ Leonhard **Euler** (1707-1783)
D'Alembert y Euler proponen como solución: $y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]$

$\boxed{1753}$ Daniel **Bernoullí** (1700-1782)
Propone como solución: $f(x) = b_1 sen(x) + b_2 sen(2x) + b_3 sen(3x) + ...$

$\boxed{1752\text{-}1759}$ Joseph Louis **Lagrange** (1736-1813)

Defiende los razonamientos de Euler y D'Alembert, pero no los de Bernoullí.

$\boxed{1806}$ Jean Baptiste Joseph **Fourier** (1768-1830)

Anuncia que una función arbitraria $f(x)$ puede ser representada en la forma de una serie trigonométrica (nadie le creyó).

<u>Problema de la conducción del calor</u>

$$\boxed{k^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}}\ ,\ k^2 = coef.\ de\ transmisión.$$

$\boxed{1811}$ Fourier se presenta al *"grand prix de mathématiques"* convocado por el *Institut de France.* Presenta una versión ampliada de sus obras iniciales con el título *"Théorie Analytique de la Chaleur"* . El tribunal estuvo formado por Lagrange, Laplace y Legendre.

$\boxed{1812}$ Fourier gana el premio del *Institut de France*, pero no se publica la obra.

$\boxed{1813}$ Muere Lagrange

$\boxed{1821}$ Agustín Louis **Cauchy** (1800-1885)

Enunció y demostró su conocida *conjetura o principio de continuidad.*

"*Cuando los diferentes términos de la serie* u_0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ..., *son funciones de una misma variable* x, *continuas con respecto a esta variable en la vecindad de un valor particular para el cual la serie es convergente, la suma* s *de la serie es también, en la vecindad de este valor particular, función continua de* x".

Igualmente Cauchy enunció el criterio que lleva su nombre para sucesiones de números reales (Hairer y Wanner [50], pág. 176):

<u>Definition</u>:

"A sequence $\{s_n\}$ *is a Cauchy sequence if* $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \geq 1\ \ \forall n \geq N\ \ \forall k \geq 1$

$$|s_n - s_{n+k}| < \varepsilon\text{"}$$

<u>Theorem</u>

"A sequence $\{s_n\}$ *of real numbers is convergent (with a real number of limit) if and only if it is a Cauchy sequence".*

$\boxed{1822}$ Aparece una versión en forma de texto de la *"Théorie Analytique de la Chaleur"* de Fourier.

$\boxed{1826}$ Niels Henrik **Abel** (1802-1829)

Abel dice:

"*Me parece que hay algunas excepciones al teorema de Cauchy*"

y propuso que no se estudiaran las series trigonométricas de Fourier:

"como si fueran una jungla incontrolable en las que las excepciones son la norma y los éxitos un milagro".

$\boxed{1828}$ Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet** (1805-1859)

Dirichlet a los 23 años publica en *Crelles's Journal* sus bien conocidos trabajos sobre las condiciones para la convergencia de las series trigonométricas de Fourier y su uso para representar funciones arbitrarias.

$\boxed{1838}$ Christoph **Gudermann** (1798-1852)

A Gudermann se le deben los primeros intentos para esbozar el concepto de convergencia uniforme de una serie de funciones que definirá con cierto rigor Cauchy en 1853 y que finalmente perfeccionará Weierstrass (alumno de Gudermann) en 1861. (IREM).

$\boxed{1841}$ Wilhem Theodor Karl **Weierstrass** (1815-1897).

Primera definición de Weierstrass de convergencia uniforme (ver la nota al pie de la página 29).

$\boxed{1847}$ Philipp Ludwing von **Seidel** (1821-1896)

Seidel encuentra el *lema oculto* o fallo en la desmostración que hace Cauchy de su principio de continuidad y pone las bases para el concepto de convergencia uniforme tal como hoy lo conocemos. Hairer y Wanner afirman que Seidel fue el descubridor de la convergencia no uniforme en 1848, presentando el conocido ejemplo de la sucesión funcional:

$$\begin{array}{c} f_n : [0,1] \to [0,1] \\ x \to f_n(x) = x^n \end{array}$$

$\boxed{1853}$ Agustín Louis Cauchy

$\boxed{1861}$ Wilhem Theodor Karl Weierstrass

En estos años, 1853 y 1861 respectivamente, Cauchy y Weierstrass perfeccionaron el concepto de convergencia uniforme. En [111] puede leerse:

Cas d'une suite: notons fn(x) une suite de fonctions numériques. Dire que la suite est convergente pour x donné dans un intervalle [a,b] vers un nombre L(x), c'est dire que pour tout e > 0 (aussi petit que l'on voudra), il existe un entier N, dépendant de x et de e, pour lequel:

$$n > N \mid fn(x) \text{ - } L(x) \mid < e$$

On conçoit que la vitesse de convergence dépend de x: on dit que la convergence de la suite est uniforme si l'entier N ne dépend pas de x.

Cas d'une série: notons Sn(x) la somme des n+1 premiers termes d'une série de fonctions fn (sommes partielles):

$$Sn(x) = fo(x) + f1(x) + f2(x) + ... + fn(x)$$

Dire que la série est convergente pour x donné dans un intervalle [a,b], c'est dire que la suite de terme général Sn(x) est convergente. Notons S(x) la limite de cette suite. C'est la somme de la série. On appelle reste de la série, le nombre:

$$Rn(x) = S(x) - Sn(x)$$

Avec cette notation, dire que la série est convergente pour x donné dans [a,b], c'est dire que la suite Rn(x) converge vers 0.

On dit, là encore, que la convergence de la série est uniforme, ou que la série converge uniformément si l'entier N ne dépend pas de x:

Quel que soit e > 0 , il existe un entier N, indépendant de x, pour lequel: n > N $|Rn(x)| < e$

La suite de fonctions définie sur [0,1] par fn(x) = nx/(1 + nx) converge vers 0 si x = 0 et vers 1 pour tout x non nul. Cette convergence n'est pas uniforme: pour x non nul, le reste est Rn(x) = 1/(1 + nx). Il est clair que Rn(x) tend vers 0 mais pour toute valeur de n aussi grande que l'on voudra, on peut choisir un x suffisamment petit de sorte que nx soit encore très petit: Rn(x) serait alors proche de 1 et il faudra donc choisir pour ce x là, un N vraiment grand pour arranger les choses...

Aunque en el segundo capítulo de esta memoria desarrollaremos exhaustivamente los diferentes tipos de convergencia, digamos ahora, para completar el esquema anterior y dando un salto histórico, que en la época actual la convergencia uniforme de una serie funcional, matemáticos como Carslaw [16] o Rudin [90] la definen en estos términos:

Supongamos que la serie

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ...$$

converge para todos los valores de x en el intervalo $a \leq x \leq b$ y que esta suma es $f(x)$. Se dice que la serie converge uniformemente en ese intervalo si, para cualquier número positivo ε, habiendo sido elegido tan pequeño como queramos, existe un entero positivo ν tal que, para todos los valores x del intervalo

$$| \ f(x) - s_n(x) \ | < \varepsilon, \text{ cuando } n \geq \nu$$

La **condición adicional** en la definición de la **convergencia uniforme** es que *"para cualquier número positivo ε, por pequeño que lo hayamos elegido,*

el <u>mismo valor de ν</u> sirve <u>para todos los valores x del intervalo"</u>

Esta es la idea principal del concepto de convergencia uniforme y en ella incidiremos a lo largo del desarrollo de nuestra propuesta curricular. Los procesos visuales se llevarán a cabo a través del uso del software y éstos van a constituir una pieza fundamental para que los alumnos universitarios asimilen más fácilmente estos conceptos.

Por último, veamos cómo Carslaw en [16], pág.152, enuncia y demuestra "el principio de continuidad de Cauchy" haciendo uso de la condición suficiente que es la convergencia uniforme:

Enunciado:

"La convergencia uniforme implica la continuidad en la suma"

en otras palabras:

"Si los términos de la serie

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ...$$

son continuos en (a, b) y la serie converge uniformemente hacia $f(x)$ en este intervalo, entonces $f(x)$ es una función continua de x en (a, b)".

Demostración:

Como la serie converge uniformemente en (a, b)" sabemos que, por pequeño que elijamos el número positivo ε existe un entero positivo ν tal que:

$$| f(x) - s_n(x) | < \tfrac{\varepsilon}{3}, \text{ cuando } n \geq \nu$$

sirviendo el mismo ν para todos los valores x de dicho intervalo.

Eligiendo tal valor de n tenemos que:

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x)$$

donde $| R_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$, para todos los valores de x en (a, b).

Por otro lado, $s_n(x)$ es suma de n funciones continuas en (a, b) y, por tanto, es también continua en (a, b). Sabemos entonces que existe un número positivo η tal que:

$$| s_n(x') - s_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

donde x, x' son dos valores arbitrarios de x en (a, b) para los cuales $| x' - x | < \eta$[10]. Como

[10]Theorem I (pág. 76 de Carslaw [16]).

$$f(x') = s_n(x') + R_n(x'),\text{ donde } \mid R_n(x') \mid < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

también tenemos:

$$f(x') - f(x) = [s_n(x') - s_n(x)] + R_n(x') - R_n(x)$$

y entonces:

$$\mid f(x') - f(x) \mid \leq \mid s_n(x') - s_n(x) \mid + \mid R_n(x') \mid + \mid R_n(x) \mid < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ cuando } \mid x' - x \mid < \eta$$

En consecuencia $f(x)$ es continua en (a, b).

1.3.2. Proyectos y experiencias relacionadas con nuestro trabajo

En primer lugar, describimos con detalle dos experiencias que consideramos importantes para nuestra investigación por dos motivos diferentes: la primera, por el trabajo de campo llevado a cabo con profesores acerca de sus concepciones sobre el concepto de convergencia en general; y la segunda, porque se trata de una investigación relacionada con el aprendizaje de series de potencias mediante el uso de software.

A) Farfán, R. M. y Solís, M. [39], en 1987, desarrollaron una experiencia con cuarenta y nueve profesores de las áreas de ciencias físico-matemáticas de escuelas de ingeniería, sobre las distintas concepciones del concepto de convergencia. Para llevar a cabo esta investigación fue necesario proveer a estos profesores de un manejo eficiente en lo referente a la concepción geométrica y numérica de los temas básicos del cálculo, comenzando el estudio en una variable real para posteriormente ampliarlo a dos y más variables, e incluso a variable compleja. Una característica importante de este proyecto fue la presentación de la matemática mediante problemas de contexto tales como la mecánica de suelos, la cinemática y dinámica de cuerpos rígidos, el estudio de la mecánica de fluidos, la transferencia de calor y la hidrodinámica.

Todo ello permitió que los profesores compararan y enriquecieran su gama de conocimientos construyendo sus propias estrategias didácticas y sometiéndolas a prueba experimental.

La experiencia constó de tres etapas con una duración de seis meses cada una:

- En la primera etapa, denominada propedéutica, se trabajaron temas como la representación gráfica de funciones, sucesiones y series numéricas infinitas, Cálculo Diferencial e Integral de una y varias variables reales y la Teoría de aproximación.

- En la etapa básica, las líneas curriculares sobre las que se trabajó fueron Análisis Vectorial, Cálculo Avanzado, Variable Compleja y ciertos temas de la Física Matemática de los siglos XVIII y XIX.

- Por último, en la etapa de Especialidad, se trató de que el profesor-alumno fuese parte importante de las investigaciones educativas para conformar el programa de investigación encaminado a la interpretación y transformación de su problemática educativa.

En lo que se refiere a cuestiones relacionadas con las sucesiones y series numéricas infinitas, los profesores encuestados presentaron importantes lagunas conceptuales entre las que destacamos la asociación de la noción de convergencia a la de límite de una función o la identificación entre encontrar la suma de una serie y hacer un estudio de la convergencia. Además se observó poca familiaridad con la notación, las estrategias que recurren a casos particulares para el cómputo de sumas y el desconocimiento casi generalizado de los criterios de convergencia.

A partir de estos resultados previos se elaboró una secuencia didáctica de diez horas de exposición encaminada a la revisión de los conceptos y algoritmos propios de estas cuestiones. Quince días después se les pasó un nuevo cuestionario del que se concluye que la labor para generar un ambiente académico, en donde el esclarecimiento de dudas y reflexiones en torno a estos temas comunes se mantenga, es ardua y difícil de lograr.

B) Por otro lado, D'Apice, Manzo y Zappale [19] han llevado a cabo una experiencia para el aprendizaje de series de potencias mendiante el uso de herramientas informáticas, concretamente eligieron para ello Mathematica 4.0. El objetivo de dicho trabajo era describir un nuevo paquete para la mejora de la enseñanza tradicional de series de potencias. Con él los estudiantes dejaron de ser observadores pasivos en un proceso cognitivo, el cual los forzaba a seguirlo sin ninguna posibilidad de interacción. En particular, la representación visual se tornó una herramienta útil para lograr la comprensión de conceptos abstractos que no tienen una interpretación geométrica inmediata.

Mediante el uso de Mathematica fue posible elaborar rutinas que permitían a los estudiantes visualizar "una guía de desarrollo" para el cálculo del radio de convergencia y la suma de una serie de potencias dada.

La experiencia se llevó a cabo en la Universidad de Salerno, en el Departamento de Ingenieros de la Información y Matemáticas Aplicadas. El programa se desarrolló en dos fases: Una parte teórica y una guía de laboratorio. En la primera fueron descritas las propiedades de las series de potencias y se introdujeron los principales teoremas. Posteriormente los alumnos fueron divididos en grupos de unas veinte personas para participar en una práctica de laboratorio semanal de una hora.

La estructura de la segunda parte fue organizada de forma que los alumnos se fueran familiarizando con el interface directamente, sin previo conocimiento de la sintaxis. Los estudiantes podían elegir entre diferentes tipos de ejercicios, consultar la teoría que necesitaban en cualquier momento y llevar a cabo los ejercicios a mano como apoyo al sistema.

La elección del Mathematica como ambiente de desarrollo se debió a que éste ofrece una combinación de sostificación computacional y programabilidad ideal como prototipo para el desarrollo de aplicaciones complejas. El software de hecho permite ejecutar cálculos numéricos y simbólicos, así como manipular imágenes y gráficos en dos y tres dimensiones.

Desde un punto de vista educacional, las posibilidades ofrecidas por el programa resultaron útiles ya que permitió la instrucción de grupos de alumnos en conceptos de alto contenido didáctico y cognitivo. No obstante, las conclusiones de la experiencia muestran que el uso del programa no es suficiente. Es necesario complementar los efectos del uso de la tecnología con los métodos tradicionales para estimar los cambios y las mejorías que se producen en el nivel de conocimiento de los estudiantes. Este es uno de los objetivos que perseguimos en nuestra investigación y para ello, como se ha indicado, haremos uso de un software paralelo al utilizado en esta experiencia.

A continuación, destacamos de nuestra bibliografía la literatura relacionada con el uso de la tecnología en el estudio de sucesiones y series infinitas; más en concreto nos llamó la atención por la calidad de la experiencia realizada el trabajo *"El impacto de la tecnología en el estudio de series infinitas"* de Hortensia Soto Johnson [97], profesora asistente en University of Southern Colorado. En dicha experiencia se aplican tres métodos de enseñanza de cálculo diferentes para la comprensión del concepto de series infinitas; así mismo se hace un estudio sobre la actitud de los estudiantes hacia el uso de la tecnología en la clase de cálculo.

Dos de estos métodos, el *Proyecto CALC* (El cálculo como un curso de laboratorio) y el *Proyecto revisado de Illinois*, forman parte de la llamada Reforma del Cálculo, la cual promueve un cambio en los cursos sobre esta materia. Dicho cambio enfoca su interés en mejorar la *comprensión conceptual* y para ello enfatiza la importancia de alternar los modos de instrucción y el uso de la tecnología que compromete a los estudiantes como aprendices activos y promociona la importancia de la cooperación (Leitzel y Tucker, [67]).

Por tanto, ambos proyectos son el producto de un esfuerzo por modificar la dinámica magistral de los cursos tradicionales de cálculo, en los que se ha constatado mediante investigaciones relativamente recientes, que la mayoría de los alumnos que terminan satisfactoriamente un curso de cálculo tradicional no entienden realmente lo que hacen:

"*Son incapaces de explicar conceptos, de argumentar el por qué del procedimiento mecánico que usan para resolver determinadas cuestiones y por lo general, se sienten impotentes a la hora de enfrentarse a problemas no rutinarios"* (Mason, Selden, y Selden, [69]).

Desde esta perspectiva, la investigación llevada a cabo revela que los estudiantes, por lo general, muestran una actitud positiva hacia el uso de software por considerarlo ventajoso en el estudio y la comprensión del cálculo (Bookman y Friedman, [13]; Heid, [53]).

Por otro lado, la mayoría de los trabajos en los que se ha verificado el éxito del uso de la tecnología en la enseñanza, se han realizado referente a temas relacionados con cálculo diferencial e integral, omitiendo el concepto fundamental de serie infinita; esta omisión tiene lugar incluso en estudios importantes en los que se examina el impacto de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas (Bookman y Friedman, [13]; Penn, [78]).

Los resultados obtenidos en la experiencia descrita por Hortensia Soto Johnson no pusieron en evidencia una diferencia importante en lo que se refiere a la comprensión conceptual de series numéricas infinitas, ni en lo referido a la actitud de los estudiantes hacia el cálculo con el uso de la tecnología. Los tres métodos de enseñanza puestos en práctica, el *Proyecto CALC*, el *Proyecto revisado de Illinois* y el *método tradicional*, dieron en las encuestas y pruebas propuestas con posterioridad a la instrucción recibida, resultados similares, mostrando incluso puntuaciones superiores para los alumnos del método tradicional.

No obstante, y considerando algunas circunstancias (tiempo, dedicación y prácticas distintas, diferentes instructores, etc.) y explicaciones plausibles que la autora menciona en su trabajo, se considera como positiva la reforma del cálculo por apoyar el uso de la tecnología como un instrumento complementario al estudio tradicional de series infinitas.

Adelantamos que la experiencia realizada por la doctora Soto nos incita a investigar en este campo y es en esta línea en la que nos proponemos desarrollar nuestro estudio, ampliando el campo iniciado por ella para series numéricas infinitas, al de las sucesiones y series funcionales donde los aspectos conceptuales primen sobre los algorítmicos.

Por otro lado, en numerosas universidades españolas y extranjeras existe una amplia gama de proyectos y experiencias sobre la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos donde las nuevas tecnologías desempeñan un papel destacado. Nosotros hemos elegido, para presentar en esta memoria, algunas que consideramos están relacionadas con nuestro trabajo.

A) El *Proyecto CALC* es una inciativa que se ha llevado a cabo en la Universidad de Yale y que desarrolla un curriculum para la enseñanza del cálculo, el cual fue premiado por La Fundación Nacional de La Ciencia. Dicho curriculum fomenta los experimentos de laboratorio, el aprendizaje por descubrimiento, las aplicaciones y problemas del mundo real, escritura y revisión de escritura, el trabajo en equipo, el uso inteligente de herramientas disponibles y las altas expectativas de los estudiantes. Actualmente, los profesores David A. Smith[11] y Lawrence Moore, directamente conectados a este Proyecto Curricular, lo consolidan mediante la financiación de la organización antes mencionada. Se está desarrollando una biblioteca de Web la cual dispone de material de aprendizaje interactivo para los dos primeros cursos.

Los textos y el material de laboratorio han estado en desarrollo y prueba desde 1989 y ha sido usado por miles de estudiantes en más de cien escuelas del todo el país, tanto en colegios, como en universidades y escuelas superiores.

La aplicación del proyecto permite la formación de alumnos con la finalidad de que a su término éstos sean:

- Capaces de usar las matemáticas para estructurar su comprensión e investigar cuestiones del mundo que les rodea.
- Capaces de usar el cálculo para formular problemas, resolverlos y comunicar resultados.
- Capaces de usar la tecnología como una parte integral del proceso de resolución de problemas.
- Aprender a trabajar y aprender cooperativamente.

El trabajo de los estudiantes, en equipo y con ayuda del ordenador o la calculadora, ha consistido en:

- Explorar problemas del mundo real con datos reales.
- Conjeturar y probar sus conjeturas.
- Discutir sobre su trabajo con los compañeros.
- Recoger por escrito sus resultados y conclusiones.

La filosofía del proyecto se centra en el aprendizaje más que en la enseñanza. Para ello los profesores proporcionan una extensa lista de problemas y actividades de laboratorio que ayudarán a los alumnos a construir su propio conocimiento. Estas actividades incluyen:

- recogida de datos experimentales
- modelo de formulación y prueba
- desarrollo de los métodos de resolución y
- comparación de resultados con el problema original.

El curso formativo se lleva a cabo durante tres períodos de cincuenta minutos por semana, en una clase con proyector demostrativo para ordenador y calculadora, más dos horas periódicas de laboratorio en las cuales cada equipo dispone de su propio ordenador o calculadora gráfica individual. Hay diversas maneras para usar este material. En Duke,

[11] Email: das@math.duke.edu
http://2.math.duke.edu/faculty/smith

el número máximo de alumnos por sesión es treinta y dos (ocho grupos de cuatro personas cada uno). Cada equipo debe entregar un informe por escrito semanalmente.

B_1) En Illinois un grupo de cinco miembros del Departamento de Matemáticas, Estadística y Ciencia Computacional desarrollan un proyecto, conocido como *Cálculo y Matemática*, para incorporar el uso de las nuevas tecnologías a los métodos de la enseñanza tradicional en sus departamentos. Los profesores responsables de dicho proyecto son Neil Berger, Steve Hurder, Jeremy Teitelbaum, Charles Tier y John Wood.

Cálculo y Matemática es una forma revolucionaria de acercamiento a la enseñanza del cálculo. En él se hace un nuevo planteamiento de los siguientes aspectos:

- Las Matemáticas del Cálculo
- El Cálculo como un primer curso de medición científica
- Las Matemáticas como una ciencia empírica
- Cómo presentar visualmente las ideas del Cálculo
- Qué alumnos estudian Cálculo
- Qué perspectivas tienen los alumnos del Cálculo
- Cómo motivar a los alumnos a estudiar Cálculo
- Cómo se debería usar la tecnología en Educación Matemática

Los cursos tradicionales de Matemáticas enfatizan la enseñanza de las mismas a través del trabajo rutinario, la memorización y los métodos manuales para el dominio de resolución de problemas. Aunque esto puede resultar creativo para un ser humano calculador, ello no conduce a una comprensión sustancial de los conceptos matemáticos.

Cálculo y Matemática va más allá. Con el uso del software Mathematica los monótonos y rutinarios algoritmos de la enseñanza tradicional son superados y los estudiantes avanzan alcanzando una mejor comprensión conceptual, al tiempo que adquieren un buen conocimiento de los métodos de resolución de problemas.

Afirman los profesores de este proyecto que entre sus estudiantes resulta común pensar que "*El ordenador puede hacer todo el trabajo para ellos*". Afortunadamente no es tan simple. Los estudiantes no pueden presentar un problema al Mathematica para que éste lo resuelva desde el principio hasta el final. Ellos deben entender bien el problema para proporcionar las instrucciones correctas al software y que éste las resuelva. Por tanto, el hecho de usar el software significa sólo que el alumno dispone de una herramienta más, en la que se requiere pensar con cautela para su uso efectivo.

B_2) Existe además en la Universidad de Illinois otro proyecto para la enseñanza de las matemáticas a través de internet. Dicho proyecto surgió a partir del anterior, Cálculo y Matemáticas, y sus promotores son Bill Davis, Horacio Porta y Jerry Uhl[12]. Los autores

[12] Jerry Uhl. Professor of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign. juhl@cm.math.uiuc.edu

decidieron que este curso electrónico debía cambiar frecuentemente y lo publicaron a modo de lecciones electrónicas fácilmente actualizables. Hasta ahora se han publicado algunas lecciones sobre Cálculo, ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial y teoría de matrices.

B_3) Por otro lado en la Universidad de Champaign y en el "Central Hight School" de Illinois existe desde hace algunos años un proyecto relacionado con la enseñanza del Cálculo. Ambos surgen como respuesta a la búsqueda de otros métodos altenativos a la enseñanza tradicional. Dichos métodos deben favorecer la motivación de los alumnos y el acercamiento de las matemáticas a problemas del mundo real. Para cubrir estos dos objetivos se facilita la introducción de la tecnología a la clase de matemáticas y la incorporación de las mismas en otras asignaturas.

La inclusión de la tecnología en el curriculum de las matemáticas de la escuela superior no sólo favorece los intereses de los estudiantes, sino que además permite prepararlos para desempeñar su trabajo en el siglo XXI. Con todo ello los estudiantes se implican en su propio proceso de aprendizaje y dejan de ser meros receptores de la información, siendo capaces de controlar la velocidad y dominio de lo que aprenden.

Semanalmente y durante un año se les pasa un test de diagnóstico, cuyos resultados han indicado que el uso del ordenador en el aula favorece notablemente la motivación de los estudiantes, la seguridad en sí mismos y reduce los problemas de disciplina.

C) En Playmouth, sur de Inglaterra, existen una facultad de Tecnología y una escuela de Computación donde la enseñanza de los distintos tópicos del Análisis Matemático se imparte en los primeros cursos con ayuda de Derive como software educativo. Por ejemplo en la asignatura de Cálculo I el objetivo es la consolidación de los conceptos, habilidades y aplicaciones propios del cálculo diferencial e integral y una introducción al cálculo de varias variables. Los alumnos al finalizar el curso deben ser capaces de aplicar correctamente las reglas de la diferenciación a funciones básicas y a sus funciones inversas, aplicar sus habilidades a problemas de cinemática, investigar las propiedades de curvas y resolver problemas de optimización, encontrar los desarrollos en serie de potencias de Taylor y Maclaurin, aplicar el método de Newton Raphson para resolver ecuaciones no lineales, demostrar una apreciación de la integración como el límite de un proceso de sumación, resolver integrales utilizando los diferentes métodos (sustitución, integración por partes) y aplicar las reglas de integración a problemas de cinemática, encontrando áreas y volúmenes de revolución. Aparte de la ayuda proporcionada por el software, los profesores recomiendan el uso de "Essential Texts" como Berry JS, Graham E. y Watkins AJP. Learning Mathematics through Derive. Chartwell-Bratt, Bromley, UK.

D) En la Universidad española son pocos los intentos que se hacen para impartir todo un curso de Análisis Matemático en los primeros años de cualquier carrera de Ciencias, exclusivamente con software; las dificultades son enormes: masificación, inseguridad, tiempo, preparación, etc.

Concretamente, el Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información de la Universidad Politécnica de Madrid ofrece a sus alumnos del Primer Ciclo del Plan 94 de la Escuela Superior de Ingenieros de Telecomunicación, un Seminario sobre Aplicación de los Sistemas de Computación Matemática a la Ingeniería.

Con este Seminario se pretende presentar algunas posibilidades de los Sistemas de Computación Matemática entendidos como herramienta de cálculo en la resolución de problemas con los que un ingeniero puede encontrarse en el desarrollo de su profesión.

Del mismo modo que en su día, las calculadoras y hoy, los ordenadores se han incorporado a la mesa de trabajo de la mayoría de los profesionales, se pretende que los Sistemas de Computación Matemática también pasen a ocupar un lugar importante en la actividad diaria de quienes necesitan realizar cálculos frecuentes y de cualquier tipo.

El profesorado que imparte este Seminario está formado por Francisco Ballesteros, Raúl Cabanes y Lorenzo Martín. Durante cuarenta horas se trabaja un programa con los siguientes puntos:

- Los Sistemas de Computación Matemática como herramienta de propósito general
- Maple: Presentación, interface, gráficos y colores
- Formulación, sintaxis y resolución de problemas con Maple
- Aplicación de los Sistemas de Computación Matemática a las comunicaciones (informática, mecánica, electricidad, etc.).

No cabe duda de que, hoy día, en numerosas universidades españolas y extranjeras se hacen esfuerzos notables para incorporar software variados (Mathematica, Maple, Derive, Mathcad, Mathlab, ...) en las actividades correpondientes. Citaremos a título orientativo algunas Universidades españolas que usan Maple desde un punto de vista Educacional:

- En la Universidad Politécnica de Madrid, Amillo-Ballesteros y otros han editado [7]
- En la Universidad de Sevilla, Soto y Vicente han editado el texto [96] de Maple.
- En la Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Roanés Macías y Roanés Lozano investigan aspectos didácticos del Álgebra y de la Geometría con uso de Maple.
- En la Universidad de La Laguna se imparte docencia con Maple en los Departamentos de Matemática Fundamental y de Análisis Matemático.

Análisis a priori: Obstáculos cognitivos y epistemológicos

Son diversas las investigaciones que hacen referencia al concepto de límite y sobre todo a las dificultades epistemológicas y cognitivas que este concepto ofrece a los estudiantes cuando intentan asimilarlo. Murphy [75] hace una síntesis de algunos de los trabajos relacionados con las distintas concepciones de los estudiantes sobre este concepto. Orientativamente, podemos citar algunos de ellos:

- Tall, D. y Vinner, S., en sus trabajos [101] y [106], hacen un estudio empírico sobre el concepto con grupos de estudiantes.

- Davis, R. y Vinner, S. [20] trabajaron con profesores de la Escuela Superior Universitaria de Urbana para investigar el desarrollo cognitivo de los estudiantes acerca de la idea de límite.

- Monaghan, J. [72] estudió los efectos del lenguaje usado en la enseñanza-aprendizaje del concepto.

- Williams, S. [113] examinó las concepciones de los estudiantes sobre la idea de límite sometiéndolos a ejemplos no rutinarios.

- Lauten, A. D.; Graham, K. y Ferrini-Mundi, J. [66] desarrollaron una investigación para examinar las concepciones e imágenes conceptuales de los estudiantes respecto de las ideas de función y límite, explorando además la forma en que la comprensión de esos conceptos se puede relacionar con otros.

- Hitt [54] muestra un claro interés por los procesos matemáticos finitos y el paso al límite, haciendo especial énfasis en la visualización como herramienta fundamental para su comprensión.

- Artigue [9] hace igualmente un estudio en el que analiza, desde una perspectiva histórica, la enseñanza de los principales objetos del Cálculo y, en particular, del concepto de límite. Posteriormente presenta las principales dificultades y obstáculos que estos conceptos ofrecen a los alumnos, así como la descripción de algunas realizaciones didácticas llevadas a cabo a nivel de secundaria y enseñanza superior.

Nos centraremos en esta última investigación como punto de partida para el análisis de los obstáculos epistemológicos y cognitivos que el concepto de límite ofrece a los alumnos de los primeros cursos universitarios.

En el desarrollo cognitivo de un estudiante cuyo objetivo es ingresar en la Universidad para estudiar una carrera de ciencias, Artigue [9] constata que existen dos etapas bien diferenciadas, etapas en las que se rompen las formas de pensar y de actuar que se habían mantenido hasta entonces.

En la primera de ellas tiene lugar el paso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, el cual puede identificarse con una *"ruptura Numérico-Algebraico"*. Esta ruptura está perfectamente identificada en las investigaciones sobre la enseñanza del álgebra y tiene lugar en torno a los 12 ó 13 años.

La segunda etapa se localiza alrededor de los 18 años, cuando el alumno ingresa en la Universidad; se trata del paso del Álgebra al Cálculo o "*ruptura Álgebra-Cálculo*". Las formas de razonamiento, pensamiento, demostración, vocabulario, etc. que utiliza el Cálculo, constituyen una manera radicalmente diferente a los modelos que utiliza el Álgebra, donde la resolución de ecuaciones, inecuaciones y otras operaciones (algoritmos) están perfectamente delimitadas; así en esta nueva etapa el manejo puramente algebraico no tiene lugar, entrando en juego los problemas relativos a las desigualdades y vecindades (aspectos topológicos) que caracterizan la forma de trabajar en Cálculo. Esta segunda ruptura ha sido poco trabajada en las investigaciones sobre la enseñanza del mismo.

La formalización propia del Cálculo se traslada a la enseñanza y como consecuencia, crea problemas, obstáculos y dificultades que no pueden superarse por sí mismos, es decir, de una forma natural. Para transmitir ese rigor a los alumnos debemos buscar nuevas fórmulas alternativas: verbales, simbólicas, visuales y manipulativas, que permitan al alumno alcanzar cierto éxito en su aprendizaje. En este proceso de acceso al Cálculo existen tres tipos de dificultades que Artigue [9] clasifica de la siguiente manera:

- Las dificultades asociadas a la naturaleza compleja de los objetos fundamentales del Cálculo (números reales, sucesiones, funciones, ...) y a su conceptualización, la cual constituye el comienzo en la enseñanza de esta materia.

- Las asociadas a la conceptualización y a la formalización de la idea de límite que es el núcleo del ámbito del Cálculo.

- Aquellas relacionadas con la ruptura del pensamiento algebraico, muy familiar a los estudiantes, y las propias del trabajo específico del Cálculo.

Cuando los alumnos se inician en el aprendizaje del Cálculo, los números reales y las funciones son conceptos de los que ya tienen cierto conocimiento. Antes de ingresar en la Secundaria No Obligatoria ya han trabajado los números irracionales y las funciones lineales y afines; además el estudio de funciones ocupa un lugar importante en las Matemáticas de Bachillerato. No obstante, estos conceptos continúan "en construcción" ya que se profundiza cada vez más a medida que se avanza en el aprendizaje del Cálculo y, por tanto, en su conceptualización.

En cuanto a la formalización de la idea de límite, un primer obstáculo epistemológico[13] estará relacionado con el "sentido común", el cual relaciona la expresión lingüística "límite" con una barrera inalcanzable e intraspasable, como si fuera el último elemento de un proceso. Por otra parte, términos como "tiende a", "aproximación", "convergencia", "límite", etc. deben quedar bien precisados pues los estudiantes pueden interpretarlos de

[13] Los obstáculos epistemológicos hacen referencia a las dificultades vinculadas directamente con las formas de considerar el conocimiento, donde se tiene en cuenta el hecho de que el conocimiento científico no es el resultado de un proceso continuo, sino que necesita de algunos momentos de ruptura con concepciones anteriores.

muy diversas maneras.

Este segundo obstáculo, conecta con la tendencia que tenemos las personas, en general, a asociar un concepto con una idea gráfica del mismo, es decir, se trata de una dependencia a la denominada "geometría de la forma". En cuanto a la idea de sucesiones numéricas, las dificultades se centran en percibir el doble juego entre el ámbito numérico y el gráfico[14] que subyace en el proceso del mismo, lo cual puede reforzar convicciones erróneas como la creencia en el principio de continuidad, postulado por Cauchy, es decir, en que si geométricamente un objeto tiende hacia otro, todas las características asociadas al mismo se trasladarán al objeto límite.

Por otra parte, Sierpinska [92] ha clasificado las dificultades u obstáculos en torno al concepto de límite en cinco categorías:

- Horror Infinitorum: Agrupa el rechazo al estatus operacional que permite el paso al límite. También se incluye en esta categoría lo concerniente a obstáculos sobre el Principio de continuidad.
- Obstáculos asociados a la noción de función.
- Obstáculos geométricos.
- Obstáculos lógicos.
- Obstáculos simbólicos.

Pensemos que en el ámbito numérico este tipo de dificultades tienen menos repercusiones pedagógicas que en el método gráfico. Para ilustrar este hecho consideremos los siguientes ejemplos:

1.1) En el ámbito numérico consideremos la sucesión 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ... que puede reescribirse $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$, $\frac{1414}{1000}$, ..., $\frac{E[\sqrt{2}\cdot 10^n]}{10^n}$, ...

En este caso todos los términos son números racionales, sin embargo el límite es irracional:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[\sqrt{2}\cdot 10^n]}{10^n} = \sqrt{2}$$

1.2) Igualmente si analizamos la sucesión 0,9, 0,99, 0,999, ..., $\frac{10^n-1}{10^n}$, ..., puede justificarse, por varios caminos, que el límite es 1:

a) Método puramente algebraico: dividiendo el término general por 10^n y pasando posteriormente al límite.

b) Sumando 0,9+0,09+0,009+0,0009+..., como una progresión geométrica ilimitada de razón $\frac{1}{10}$.

c) Aplicando la definición (ε, ν) de límite.

[14] Obsérvese que en el caso de las sucesiones numéricas podemos utilizar dos tipos de representación gráfica: unidimensional y bidimensional.

En los dos primeros casos el alumno aplica el algoritmo correspondiente, sin tener en cuenta el proceso del límite que queda en sí relegado a último término. Sin embargo, cuando pedimos al alumno que compare los números $0.\widehat{9}$ y 1, ya no los identifica tan fácilmente. En este caso, existe un doble juego relacionado con el principio de continuidad: En primer lugar, este principio hace evidente que el valor del límite ha de ser un número con infinitos nueves y por tanto existe una dificultad importante para percibir la notación 0.999... como algo diferente a un proceso dinámico que no se detiene jamás ("horror infinitorum" en la clasificación de Sierpinska); en segundo lugar, existe una ruptura con el principio de continuidad cuando ese proceso infinito y dinámico se identifica con el número 1.

Por tanto, la dificultad radica en disociar con claridad el objeto límite con el proceso que ha permitido construirlo, dificultad que se ha relacionado con el primer obstáculo epistemológico definido por Sierspinska.

2.1) En el ámbito geométrico, consideremos la sucesión de pentágonos cóncavos de la figura 1.4 construida a partir de un trapecio articulado:

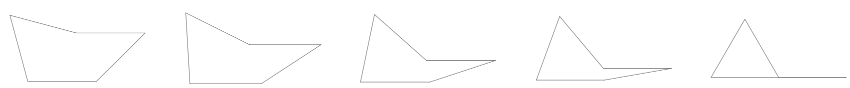
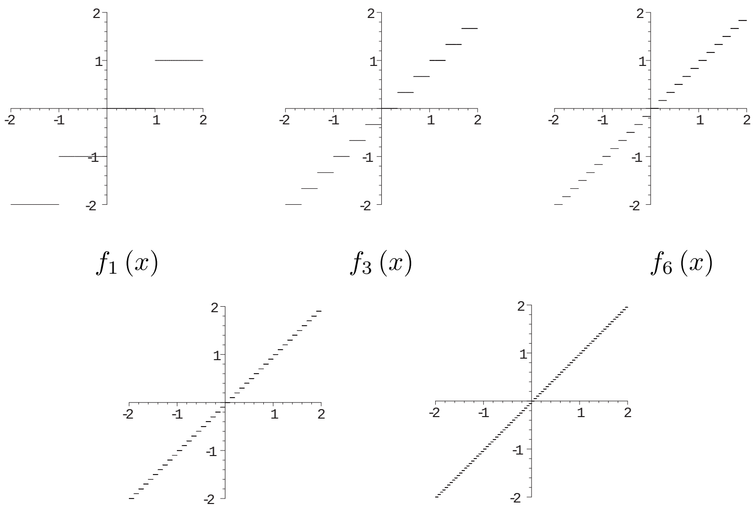


FIGURA 1.4

Se observa que todos los elementos de dicha sucesión son pentágonos cóncavos y sin embargo el *límite* no es un pentágono. Tanto en este ejemplo (*modelo geométrico*) como en los que presentamos seguidamente (*modelos analíticos*), encontramos muestras, una vez más, de cómo se rompe el principio de continuidad de Cauchy.

2.2) La sucesión de funciones discontinuas $f_n(x) = \frac{E[nx]}{n}$ converge, y además lo hace uniformemente, hacia la función continua $f(x) = x$.



$f_1(x)$ $f_3(x)$ $f_6(x)$

$f_{10}(x)$ $f_{20}(x)$

FIGURA 1.5

2.3) Las sucesiones de funciones continuas definidas en $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$f_n(x) = \cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x - \tfrac{1}{7}\cos 7x + \tfrac{1}{9}\cos 9x - ... \pm \tfrac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x$$
$$g_n(x) = senx - \tfrac{1}{3}sen3x + \tfrac{1}{5}sen5x - \tfrac{1}{7}sen7x + \tfrac{1}{9}sen9x - ... \pm \tfrac{1}{2n+1}sen(2n+1)x$$

convergen respectivamente hacia las funciones discontinuas (véanse figuras 1.11 y 1.1):

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{si } -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \neq \pm\pi \\ 0 & \text{si } x = \pm\pi \end{cases}$$

2.4) Fenómeno de Gibbs.

En el apéndice B de esta memoria comprobamos que los infinitos términos de la sucesión funcional

$$f_n(x) = \cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x - \tfrac{1}{7}\cos 7x + \tfrac{1}{9}\cos 9x - ... \pm \tfrac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x$$

tienen máximos en los extremos del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y sin embargo la función límite es un segmento rectilíneo.

Respecto a la tercera dificultad apuntada por Artigue [9], existe un salto histórico entre la noción intuitiva de límite (como aproximación, acercamiento) y la definición estándar (ε, ν) del cocepto:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x_0 \Longleftrightarrow [\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists\nu \in \mathbb{N} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N},\ n\geq \nu \Longrightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon]$$ [15]

Nótese que, por un lado, entran en juego simultáneamente cuatro variables: ε, ν, n y x_n. El alumno procedente del Bachillerato ha estudiado sólo el cálculo algorítmico de lìmites y al ingresar en la Universidad debe conjugar y/o asimilar estas cuatro variables para poder aplicar la definición con éxito; por otra parte, ha de hacer uso de una nueva simbología que le es extraña: cuantificadores ($\forall$, $\exists$), conectores lógicos ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$), valor absoluto para la noción de distancia, etc.

Por otra parte, además del uso y manejo de definiciones abstractas, el alumno debe liberarse de concepciones estáticas aprendidas en la escuela o en el bachillerato (pensamiento algebraico), que pueden transformarse en auténticos obstáculos cuando los profesores introducimos nuevos objetos y situaciones matemáticas diferentes. Por ejemplo, estos alumnos no están acostumbrados a que el cuadrado de un cierto número sea menor que el propio número, o a que al dividir una cantidad por otra adecuada, el resultado sea mayor que el cociente, situaciones éstas que se le van a presentar con relativa frecuencia.

Abundando en esto, los modos de demostrar que usa el Cálculo no tienen nada que ver con las demostraciones que usa el Álgebra. Así, para justificar que en un entorno de un punto x_0, $f(x) < g(x)$ no es estrictamente necesario resolver exactamente la inecuación, proceso puramente algebraico, sino que el alumno puede localizar un intervalo al que pertenezca x_0 donde se pueda garantizar la desigualdad por medio de sobrestimaciones y subestimaciones. En términos simbólicos, se trataría de encontrar δ_1, $\delta_2 > 0$ tales que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$.

Obsérvese que al resolver la inecuación, sin más, la solución sería un subconjunto propio o impropio de $\mathbb{R}$; sin embargo en el ejemplo aquí expuesto, se trata de estudiar el comportamiento de las dos funciones en las vecindades de x_0.

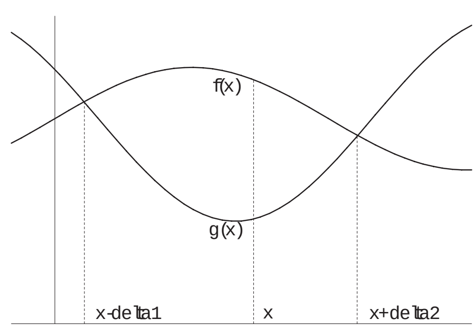


FIGURA 1.6

[15] Esta definición es debida a D' Alembert (1765) y Cauchy (1821). Hairer y Wanner, [50], pág. 172.

Estos cambios tan "drásticos" no son naturales y la enseñanza tradicional no ayuda a los alumnos a percibirlos. La enseñanza tradicional no contribuye a suavizar y superar esta ruptura entre el Álgebra (donde las situaciones son estáticas) y el Cálculo (donde los procesos son dinámicos).

La adaptación de los estudiantes a estas nuevas formas no es fácil; deben familiarizarse primero con expresiones y métodos novedosos y sus diferentes órdenes de dificultad, todo lo cual no puede "aprenderse" sino a largo plazo.

Todas estas reflexiones nos llevan a preguntarnos qué se está haciendo en este campo para minimizar ese "largo plazo" y para introducir nuevos modelos o técnicas de enseñanza y de aprendizaje, para que un mayor número de estudiantes puedan adaptarse a las nuevas formas de actuación que exige el Cálculo, de tal forma que consigan dar un mayor significado a los conceptos que van a manejar.

En este sentido, la enseñanza en Francia ha evolucionado progresivamente y se ha ido introduciendo en el bachillerato, de forma práctica e intuitiva, el estudio de algunas cuestiones del Cálculo. No obstante, esta evolución no es exclusiva de la educación francesa, puesto que en las actas del grupo de trabajo WG17 del ICME7 [46] se expresa cierta necesidad por dar una primera aproximación al Cálculo, menos algebraica y algoritmizada, pero también menos formal.

Este nuevo enfoque de la enseñanza de las matemáticas en bachillerato, hace uso de las nuevas tecnologías y parte de las intuiciones y concepciones de los estudiantes, para posteriormente trabajarlas y manipularlas por medio de situaciones concretas, sin llegar a la formalización propia del Cálculo. Las actividades que se proponen para iniciar y estructurar poco a poco el Cálculo surgen de estas situaciones cotidianas y de los interrogantes a que ellas dan lugar.

Así, sobre los conceptos de límite y de sucesión, en 1985, Hauchart y Rouche [52] presentaron un trabajo en el que se estudió la génesis de tales conceptos a partir de una serie de veinticinco problemas de diferente tipo que fueron propuestos a estudiantes entre 12 y 20 años. En este estudio los autores analizaron cómo, a partir de los mismos, puede lograrse la maduración del pensamiento teórico. En un principio se presentan al estudiante situaciones que el alumno es capaz de percibir intuitivamente; posteriormente, mediante situaciones paradójicas, se le muestran las limitaciones de la intuición y la percepción, con lo que surge la duda y por tanto la necesidad de definiciones más precisas y de demostraciones.

Desde la misma perpectiva, en 1988, la tesis de Schneider [91] estudia la conceptualización de las derivadas y primitivas a partir de objetos mentales como el área o el volumen. Por objeto mental podemos entender la acepción que le dio Freudenthal [42], es decir: *"toda noción como longitud, número, paralelas, recurrencia, etc. que, sin* *haber alcanzado el estado de formalización de un concepto matemático y sin inscribirse en una teoría axiomática, no obstante está dotada de propiedades que la convierten en instrumento de organización de un conjunto de fenómenos"*. Los problemas utilizados tienen cierto interés histórico por la controversia que generaron en su momento, y a través de la adaptación a los mismos se abordan distintos obstáculos.

La utilización de estos enfoques intuitivos del cálculo da lugar a una controversia sobre el lugar que debe ocupar la noción de límite. En los trabajos mencionados, así como en los programas de secundaria en Francia, el concepto de límite no se formaliza aunque sí está presente.

Existen otras investigaciones más radicales en las que se promueve una aproximación al cálculo sin la intervención explícita del concepto de límite. En este sentido, el primer paso lo da Tall [100], el cual se basa en la noción de organizador genérico (definido en el apartado 1.6) a partir del uso del ordenador. Por ejemplo, el alumno asimila el concepto de derivabilidad de una función en un punto por medio de acercamientos sucesivos a la imagen gráfica de la misma, hasta confundirla con una recta. El concepto de tangente se identificaba con el de la recta que pasa por dos puntos muy próximos de la curva. De esta forma, el concepto de límite permanece implícito.

Asimismo, las investigaciones de Kaput [63] promueven la introducción al cálculo sin la noción de límite, considerándose que el aprendizaje de éste puede llevarse a cabo en sistemas de representación muy diferentes y, como consecuencia, en los aspectos numérico y gráfico puede comenzarse desde muy pronto, de 9 a 11 años, incluso antes de que el cálculo algebraico haya sido consolidado. La investigación se llevó a cabo con "MathCars", software en el que el usuario puede controlar la velocidad de un vehículo simulado y puede hacer muestreos en tiempo real de diferentes representaciones gráficas y de datos numéricos, todo lo cual permite una primera aproximación gráfica y numérica, dinámica e interactiva al cálculo, para posteriormente aportar el enfoque algebraico.

Por otro lado, la mayoría de las investigaciones didácticas, a nivel universitario, se centran en los aspectos formales y/u operacionales de los conceptos clave del Cálculo. No obstante, Hitt [54] hace un estudio de los obstáculos en el aprendizaje del concepto de límite en estudiantes de nivel medio superior y primer año del superior, así como de los problemas de enseñanza con profesores de los mismos niveles.

La primera parte de esta investigación nos muestra que las ideas intuitivas de los alumnos de enseñanza media y primer año universitario tienen que ver con la noción de que el límite no es alcanzado. Así por ejemplo al representar $0,999...$ la mayoría de los alumnos piensan que este número es menor que 1; su concepción de límite les lleva a pensar en un proceso que no acaba jamás (infinito potencial) en lugar de un proceso terminado, donde 1 es la culminación del mismo (infinito actual). En la segunda parte, se presentan algunos de los problemas que tienen ciertos profesores de matemáticas respecto a este concepto y sus repercusiones en la enseñanza. Por esta razón Hitt plantea una doble problemática: a la complejidad del concepto que se quiere que los alumnos construyan, hay que añadir los obstáculos promovidos por la forma en que se aborda dicho concepto en el aula de matemáticas. Desde este punto de vista, en este trabajo el autor plantea *"la posibilidad de introducir los procesos algebraicos de cálculo de límites, acompañados de un acercamiento que promueva tareas de conversión entre las representaciones numérica, gráfica y algebraica de un problema de cálculo de límites"*.

Robert [88], citado en Artigue [9], investigó las distintas concepciones de los estudiantes de enseñanza superior sobre la convergencia de sucesiones numéricas. Asimismo trató de estudiar las relaciones que podrían existir entre estas concepciones y los procedimientos de resolución correcta o incorrecta llevados a cabo por ellos después de someterlos a una serie de ejercicios que les fueron propuestos. Según Artigue [9], este trabajo le permitió distinguir cinco tipos de concepciones o modelos distintos:

- Los modelos "primitivos", que correspondían a descripciones monótonas o puntos estacionarios de la convergencia.
- Los modelos "dinámicos", donde la convergencia se asocia con la idea de aproximación dinámica.
- Los modelos "preestáticos" y "estáticos" hacían una traducción al lenguaje natural de la formalización usual de la definición (ε, ν).
- Los modelos "mixtos" corresponden a alumnos capaces de conjugar expresiones dinámicas y estáticas.

Esta última tipología se presentaba en el 18 % de los alumnos de la muestra, estando éstos en la mitad de su carrera profesional o al final de los estudios universitarios. Así la investigación muestra una relación directa entre los modelos primitivos y los procedimientos erróneos, según si los ejercicios requieren o no el uso de la definición formal. Por otra parte, los resultados corroboraron una correspondencia entre los modelos estáticos o mixtos y los procedimientos correctos.

En una segunda fase, Robert elaboró un proyecto didáctico para los estudiantes de ciclo básico universitario. En él se pretende que el alumno rechace las concepciones primitivas para dar paso a la formalización usual a través de la integración de representaciones estáticas con representaciones dinámicas. Para obtener más detalles sobre esta investigación, véase la tesis de Robert [88].

Antes de concluir, deseamos reflexionar sobre los obstáculos asociados al concepto de convergencia uniforme de una sucesión funcional.

Pensamos que nuestro modelo de enseñanza basado en la aplicación del esquema conceptual que describiremos en la sección 1.6 y el uso de Maple como software educativo, permite que los alumnos adquieran una concepción equivalente al modelo mixto señalado en el trabajo de Artigue [9] y referido a los modelos de Robert; en nuestro trabajo no seguimos fielmente esta clasificación, aunque podría resultar interesante para futuras investigaciones. Dicho modelo podría extrapolarse al concepto de convergencia de sucesiones funcionales y así, al analizar los obstáculos epistemológicos relacionados con el mismo, encontramos que además de los obstáculos propios del concepto de límite relacionados con el lenguaje, el principio de continuidad, la simbología, "horror infinitorum", etc., los alumnos se enfrentan a otras dificultades cuando tratan de asimilar los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones funcionales. Estos obstáculos son:

1.- Aquellos relacionados con el concepto de sucesión funcional y por tanto, con el doble tratamiento, fruto de la identificación de dicho concepto con una función de dos variables: n y x.

2.- Obtener una representación gráfica (unidimensional o bidimensional) de una sucesión numérica resulta sencillo cuando los alumnos disponen de una calculadora; teniendo en cuenta que los alumnos de los primeros cursos universitarios prácticamente desconocen el Cálculo diferencial, resulta un proceso tedioso y complejo representar una sucesión funcional, aún disponiendo de la calculadora.

3.- La propia naturaleza epistemológica de las definiciones de convergencia puntual y uniforme con sus aspectos respectivos puntuales y globales y donde la operación "paso al límite" involucra a funciones como elementos fundamentales.

Por todo ello, en el modelo que proponemos en cuatro fases de enseñanza, tratamos de superar, desde una perspectiva natural, estos obstáculos utilizando, simultánemente, el "esquema conceptual" y programas de fácil diseño y uso, que permitan trabajar con varios registros de representacion para reforzar los procesos de memoria a largo plazo y para facilitar la reconstrucción del conocimiento.

1.4. La visualización

Al indagar sobre el significado de la palabra "visualización"encontramos numerosas definiciones, las cuales contemplan distintos puntos de vista de este término. En cualquier diccionario y en particular, en La Gran Enciclopedia Larousse de la Editorial Planeta, el significado expuesto es el más generalizado y común:

Visualización: Acción y efecto de visualizar.
Visualizar: Visibilizar. Representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter. Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista.

Guzmán [48], en su obra "El rincón de la pizarra", establece que la visualización en Matemáticas no es lo mismo que lo que algunas corrientes de psicólogos quieren expresar con dicho término. Para ellos la visualización es una técnica mediante la cual un individuo, en particular, puede reestructurar ciertas concepciones de la realidad ubicadas en su subconsciente, modificándolas y, en su caso, sustituyéndolas por otras que le permitan, por ejemplo, superar determinadas fobias, pensamientos depresivos, etc., que afectan negativamente a su calidad de vida. En este caso la visualización tiene un sentido de índole más afectivo que propiamente cognitivo.

Con la visualización en matemáticas se persiguen otros objetivos más concretos que quedan clarificados al profundizar en la siguiente cita de Zimmermann y Cunningham [115]:

"... En la visualización matemática lo que interesa es precisamente la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos con computadora) para representar un concepto matemático o problema y para usar el diagrama para el logro del entendimiento, y como una ayuda a la resolución de problemas".

En este sentido, Guzmán [48] añade:

"*Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva y/o geométricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo.*

Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría y a través de tales redes significativas son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con los que se enfrentan".

Pero, ¿cuál sería una definición adecuada para expresar lo que es visualizar en matemáticas? La bibliografía de la que disponemos actualmente referente a este tema es muy amplia y como ya comentamos, podríamos dar cita de numerosas definiciones, pero todas ellas coinciden en ciertos aspectos fundamentales.

Así Guzmán [48] parte de que las ideas básicas del Análisis Elemental como orden, distancia, operaciones entre números, etc., nacen de situaciones bien concretas y visuales por lo que define:

"La visualización en matemáticas es una forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan".

Entendemos que Guzmán al hablar de visualización en el párrafo anterior, se refiere a la construcción externa (representación gráfica, dibujo o diagrama) de las ideas matemáticas. No obstante, para él la visualización humana no es un proceso que sólo haga relación a nuestra capacidad para ver, sino que además la define como un proceso mucho más complejo que implica, fundamentalmente, a la mente humana. Como veremos más adelante, muchas formas de visualización las identificaremos con un proceso de codificación y descodificación que sólo es posible, en gran parte, cuando se lleva a cabo todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, algunos de los cuales se han establecido a lo largo del desarrollo del quehacer matemático de todos los tiempos.

Por tanto:

"La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta" (Guzmán, [48]).

Siguiendo en esta misma línea, Hitt [58] expresa:

"La visualización de conceptos matemáticos no es una actividad cognitiva trivial, con ello queremos decir que visualizar no es lo mismo que ver. Visualizar en nuestro contexto tiene que ver con la capacidad de crear imágenes mentales ricas que el individuo puede manipular mentalmente, puede transitar por diferentes representaciones del concepto y si es necesario, proporcionar en papel o pantalla la idea matemática que está en juego".

Desde esta perspectiva, la visualización constituye un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática, un proceso totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática. En su intento por explicar la esencia del quehacer matemático, Guzmán [48] expresa:

"La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación especial que llamamos matematización, que se podría describir como sigue: Se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de estas percepciones lo que es común, abstraíble, y someterlo a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones".

Añade:

"La aritmética, por ejemplo, surge del intento de dominar la multiplicidad presente en la realidad; con la geometría se trata de explorar racionalmente la forma y la extensión; el álgebra se ocupa de explorar, en una abstracción de segundo orden, las estructuras subyacentes a los números y a las operaciones entre ellos, es una especie de símbolo del símbolo; el análisis matemático nació con la intención de explorar las estructuras del cambio y de las transformaciones de las cosas en el tiempo y en el espacio..."

"Incluso en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen

de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndoles adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita extraordinariamente algo así como una visión unitaria y descansada de las relaciones entre objetos, un apercibimiento directo de la situación relativa de las partes de su objeto de estudio".

De las reflexiones que Zimmermann y Cunningham [115] hacen en su trabajo podemos extraer una nueva definición de visualización que sintetiza las anteriores de una manera sencilla y clara:

"La visualización es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes de forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento".

Por otro lado Hershkowitz (citado en [8]) generaliza aún más diciendo:

"La visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual".

A la observación anterior Arcavi y Nurit [8], añaden:

"La visualización no sólo organiza datos a la mano en estructuras con sentido, sino que también es un factor importante para guiar el desarrollo analítico de una solución... Los entornos dinámicos no sólo habilitan a los estudiantes a construir figuras con ciertas propiedades y luego visualizarlas, sino que permiten al usario transformar en tiempo real estas construcciones. Este dinamismo puede contribuir a la formación del hábito de transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una circunstancia particular, con el fin de estudiar variaciones, sugerir visualmente invariantes y probablemente proporcionar las bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones".

Nosotros pensamos que la visualización como proceso implica algo más:

"La visualización, en su más profundo significado, constituye un "proceso interior" que se manifiesta en una acción en la que las personas establecen una relación entre una construcción interna y "algo" a lo que se tiene acceso mediante los sentidos ("algo"=dibujo, construcción externa, diagrama, gráfica, ...). Por lo tanto la visualización será una herramienta extraordinariamente útil para mejorar en lo posible la transmisión del conocimiento" (Afonso Gutiérrez y Dorta Díaz, [2]).

Así, pensamos que la visualización como herramienta, permite a los docentes presentar los conceptos de una manera diferente, más accesible y quizás más duradera, en el sentido de que transcurrido un periodo de tiempo más o menos largo, las imágenes se mantienen en la memoria del estudiante y el propio alumno es capaz de reconstruir posteriormente su conocimiento haciendo uso de tal herramienta. Desde este punto de vista, nuestro trabajo da un voto de confianza al uso de la visualización como complemento en la enseñanza de conceptos matemáticos.

Además, la visualización, con ese doble aspecto que la caracteriza como proceso interior y con apoyo de elementos externos, es a su vez y tal como lo han expresado Arcavi y Nurit, un proceso dinámico que implica la aparición progresiva de elementos diversos; Guzmán [48] refuerza estas ideas expresando:

"... en la presentación oral de una visualización los elementos van apareciendo poco a poco completando una imagen que empieza siendo simple y termina tal vez extraordinariamente complicada... La visualización es, por tanto, un proceso dinámico".

Otros autores como Zimmermann [114] y Dreyfus [29] consideran a la visualización como un proceso dinámico de comprensión, expresión y relación de ideas e imágenes mentales.

"Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil de imaginar un curso exitoso que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de tratar un entendimiento conceptual..." (Zimmermann, [114]).

Por otro lado, Mejía Velasco [70], en su tesis doctoral, hace una síntesis del concepto de visualización que unifica las ideas anteriores añadiendo un nuevo aspecto:

"Visualizar un concepto o un problema significa entender el problema o el concepto en términos de un diagrama o imagen. En este sentido, un diagrama o una gráfica puede estar presente a nuestra visión, pero deben darse procesos de significación, descomposición y posiblemente integración de conceptos e ideas involucrados en esa imagen para que tales procesos los consideremos como una visualización efectiva; o bien, en nuestra mente, el papel o la computadora, debemos construir una imagen que refleje nuestra percepción de un problema o un concepto y aquellos elementos significativos del tema".

En esta memoria, cuyo objetivo es investigar desde una perspectiva educacional las sucesiones numéricas y sucesiones y series funcionales, los aspectos dinámicos de la visualización adquieren toda su fuerza. Concretamente, la representación material de cualquier sucesión funcional convergente y las posibles imágenes mentales que de ella se derivan, permiten la obtención de la función límite, todo lo cual es en sí un proceso dinámico en el que de forma progresiva, van apareciendo los elementos de la sucesión y en consecuencia, se puede obtener información acerca del límite. Adelantamos que con el uso del ordenador y de un software educativo de la naturaleza de Maple, estos aspectos dinámicos y de movimiento quedan claramente reflejados; el desarrollo de los distintos ejemplos que presentamos en el Capítulo 2, serán una muestra adecuada para ello. Así mismo este software nos permitirá dar a conocer el dinamismo implícito en los conceptos de convergencia puntual y uniforme, que de otro modo, es decir, desde una perspectiva exclusivamente tradicional, constituiría una tarea laboriosa para el docente.

Por otro lado, el uso del software facilitará aquellos procesos de significación, descomposición e integración de conceptos e ideas a los cuales Mejía Velasco hacía mención anteriormente.

Dependiendo del grado de correspondencia entre la situación matemática que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo, Guzmán [48] distingue cuatro formas de visualización diferentes. No obstante, él expresa que la distinción entre todas estas formas no es exhaustiva ni tan nítida como para permitir encasillar con exactitud los muy diferentes tipos de procesos semejantes que se pueden presentar. Al profundizar en las mismas, encontramos ciertas dificultades que hacen inevitable el solapamiento de unas formas de visualización sobre otras y es éste el motivo por el que nosotros sólo diferenciamos tres tipos.

Visualización isomórfica: Consiste en establecer una correspondencia entre ciertos aspectos de la representación visual, que son los que vamos a utilizar, y los significados matemáticos que representan. Su utilidad es enorme, ya que la manipulación de objetos percibidos por nuestros sentidos o por nuestra imaginación se nos hace más sencilla que el tratamiento de conceptos abstractos y complejos.

La mayor parte de las visualizaciones en análisis tienen naturaleza isomórfica ya que son las más aceptadas por los matemáticos de forma natural. Así fue aceptada sin gran resistencia la representación gráfica de los números reales mediante los puntos de la recta y la de los números complejos por los puntos del plano. Concretamente, en este último caso, esta visualización fue la que hizo posible vencer la fuerte oposición de los miembros de la comunidad matemática a la existencia del nuevo conjunto numérico.

Visualización analógica: En este caso sustituimos mentalmente los objetos con los que trabajamos por otros que se relacionan entre sí de forma análoga y cuyo comportamiento resulta más conocido por haber sido mejor explorado.

Arquímedes admite, en su tratado *Sobre el Método* dedicado a Eratóstenes, que usaba habitualmente la visualización o modelización analógica como método de descubrimiento. De esta forma son muchos los resultados que se le atribuyen; por ejemplo, el cálculo del volumen de la esfera mediante analogías y experimentos de naturaleza mecánica son fruto de la labor de este científico griego.

El siguiente ejemplo, propuesto en un taller sobre resolución de problemas a un grupo de estudiantes de la Universidad Complutense, ilustra este tipo de visualización: Dado un cuadrilátero cuyos lados tienen longitudes prefijadas a, b, c, d, se pide determinar el de área máxima. Se supone que las longitudes dadas son tales que existe un cuadrilátero con esta propiedad.

La solución se puede obtener a partir de este otro problema físico: Considérese un cuadrilátero plano formado por cuatro varillas articuladas en los extremos. Al formar una película de jabón en su interior, la posición de equilibrio es tal que la superficie de la misma, es decir, el área del cuadrilátero, es máxima. Dicha posiccón proporciona, por tanto, la solución a nuestro problema.

Visualización diagramática: Se basa en la simbolización de nuestros objetos mentales y sus relaciones, de manera que los diagramas así obtenidos nos ayuden en nuestros procesos de pensamiento en torno a ellos.

Guzmán señala como claros ejemplos de este tipo de visualización los diagramas en árbol que usamos en combinatoria o probabilidad, así como otros mucho más personales que cada uno se construye. Incluso, en ocasiones, estos procesos vienen a asemejarse a reglas nemotécnicas.

Además afirma que estas simbolizaciones y diagramas pueden resultar de aceptación muy extendida y convertirse en una herramienta de uso generalizado, aunque a veces son de uso más personal, individual, subjetivo e intransferible:

"me es útil a mí pero a nadie más"

A menudo se tiene también la convicción de que tales procesos de visualización

"son andaderas que deben desterrarse, ya que lo que verdaderamente vale es la formalización a la cual hay que aspirar en matemáticas"

1.4.1. El papel de la visualización a través de la Historia

El trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos ha tenido como principal fuente de inspiración a la visualización y ésta ha jugado un papel relevante en el desarrollo de las ideas y conceptos. Incluso las especulaciones más abstractas han ido acompañadas por uno u otro tipo de imagen de forma que la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que podemos pensar.

En el quehacer de los pitagóricos la visualización constituía una herramienta específica de la actividad matemática. Concebían y manipulaban los números y sus relaciones a través de estructuras realizadas con piedrecillas a las que ellos llamaban cálculos.

Para Platón "*la sombra evoca la realidad*", de igual forma que *"la imagen evoca la idea"*. En geometría, la gráfica de una circunferencia pintada en la arena, no es la realidad de la misma; la verdad está en el concepto como conjunto de puntos equidistantes de otro fijo. Así, la imagen juega un papel importante de evocación, de recuerdo y esta idea o concepto queda claramente almacenada en la memoria: Platón se acerca al conocimiento a través de los sentidos.

Los *Elementos* de Euclides contienen continuas referencias a imágenes, que no se pueden desligar del texto para su comprensión. Se cree que posiblemente fue en el libro de las *Aporías* de Euclides, hoy perdido, donde la referencia a imágenes geométricas tendría un papel todavía más relevante. Guzmán aventura que éste podría ser una especie de libro de texto que serviría a Euclides para instruir a sus alumnos en su ejercicio de aprendizaje.

Posteriormente, Descartes, en su obra *Reglas para la dirección del espíritu,* señala algunas pautas que se relacionan directamente con la visualización, por ejemplo:

"... es preciso servirse de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria: ya para intuir distintamente las proposiciones simples; ya para comparar debidamente lo que se busca con lo que se conoce, a fin de reconocerlo..."
"Es útil también en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente".

Descartes, en estos pensamientos, explica y da importancia al papel de las imágenes y figuras en lo que respecta al pensamiento matemático. Por otro lado, con él surge la concepción original de la geometría analítica como un esfuerzo por aunar la imagen, la geometría sintética de los antiguos, con el álgebra, ya bastante avanzada de su tiempo.

En el siglo XVII, el cálculo infinitesimal surge con un componente primordialmente intuitivo y visual que se mantiene en desarrollo a lo largo de los siglos siguientes, en interacción constante con problemas geométricos y físicos.

En el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis. Veamos, esquemáticamente, algunas de las circunstancias que han contribuido a tal rechazo:

- Desde el siglo XVII y hasta finales del siglo XIX la justificación del cálculo estuvo inmersa en cierto caos del que se libró mediante la aritmetización del análisis por parte de Weierstrass.
- A mediados del siglo XIX se desconfía de la intuición y de lo visual debido a algunos resultados de la geometría de Riemann no compatibles con los de la geometría euclídea.
- La Teoría de Conjuntos de Cantor y las paradojas en torno a los fundamentos de la matemática condujeron a hacer que los matemáticos de la época hicieran hincapié en los aspectos formales.
- Algunas demostraciones incompletas y basadas en hipótesis inmersas en una confianza ingenua en ciertos elementos intuitivos, como por ejemplo la del teorema de los cuatro colores, contribuyeron a desechar argumentos visuales.

Todo ello condujo a un ambiente de desconfianza respecto a la visualización en el que algunos exigieron que se prescindiera totalmente de ella. De esta forma, la influencia del formalismo en la presentación de los resultados de investigación se hizo la norma indiscutible, extendiéndose además dicha norma a la estructura de los libros de texto en todos los niveles de la enseñanza.

Renovación del papel de la visualización

Al observar la bibliografía correspondiente a investigaciones en educación matemática, podemos percibir una cierta tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático (Guzmán [48], Hitt [59], Zimmermann y Cunningham [115] entre otros). En esta nueva corriente destacamos quienes se ocupan de explorar las posibilidades y ventajas que ofrece el uso del ordenador y los distintos software, como complemento a la enseñanza tradicional (Amillo y otros [7], Blachman [12], Hitt [60], etc.).

Durante las últimas dos décadas del siglo XX la enseñanza de las matemáticas ha experimentado un cambio espectacular y paralelo a la evolución y desarrollo de esta ciencia a lo largo del siglo. Desde la aparición del primer ordenador, el ENIAC en 1946, éstos han tenido un papel fundamental en especialidades como estadística, teoría de números, fractales, geometría diferencial, etc.

Un ejemplo claro de cómo el uso de los ordenadores puede cambiar la forma de enseñanza y las posibilidades que ofrece, lo tenemos en Bachillerato. A estos niveles, en algunos centros de secundaria, los profesores tienen a su disposición programas como Derive o Maple que ayudan a usar con facilidad distintos sistemas de representación de funciones (textual, simbólico, gráfico y numérico) y a pasar de uno a otro.

En este sentido, la tecnología ofrece al alumno la posibilidad de visualizar los conceptos de la matemática mediante representaciones gráficas de forma que sin ella supondría una tarea espinosa. No cabe duda de que el uso del ordenador proporciona ciertas ventajas que favorecen los procesos visuales y entre otros aspectos, cambia la percepción del estudiante sobre las matemáticas, revitalizando el énfasis geométrico-visual (Amillo, Ballesteros y otros, [7]).

Desde esta perspectiva, nuestro objetivo es claro: Contribuir de alguna manera a mejorar la enseñanza de algunos tópicos del análisis matemático donde los procesos dinámicos adquieren toda su fuerza e incitar a los docentes a transmitir, de forma habitual, el conocimiento matemático a través de los procesos formales "reforzados con técnicas visuales".

"Se dice que Einstein pensó en términos pictóricos. Parece que sería útil para nuestros estudiantes que piensen de esta manera" (Eisenberg y Dreyfus, [35]).

1.4.2. Obstáculos a la visualización

Son muchos los matemáticos que reconocen el importante papel que ha jugado su capacidad de visualización e intuición en el desarrollo de nuevas ideas. Entre ellos podemos nombrar a Hilbert, Riemann, Poincaré, etc. Sin embargo, es frecuente considerar la visualización como una herramienta ajena a los procesos formales, a pesar de que muchas de las demostraciones matemáticas resultarían engorrosas sin construir una serie de imágenes.

No obstante, nuestro objetivo es, desde un punto de vista pedagógico, investigar el papel de la visualización como un elemento útil de comprensión, desarrollo y demostración. En este sentido, Eisenberg y Dreyfus [35] han mostrado que:

"la mayoría de los estudiantes se resisten a aceptar los beneficios de la visualización de los conceptos matemáticos".

También señalan que:

"...pensar visualmente demanda procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica"

y además:

"las presentaciones no visuales son utilizadas para comunicar ideas matemáticas. Esta tendencia se fundamenta en la creencia de matemáticos, maestros y estudiantes de que las matemáticas no son visuales".

Estos autores hacen un estudio para averiguar por qué los estudiantes rehúyen el uso de las demostraciones visuales, incluso cuando en el aula se hubiera recurrido a diagramas y gráficas al resolver problemas o al tratar aspectos teóricos. Esquemáticamente, las razones por las que se tiende a evitar el uso de imágenes las agrupan en:

* Cognitivas: Lo visual es más difícil.
* Sociológicas: Lo visual es más difícil de enseñar.
* Concepciones formalistas de la matemática: Lo visual no es matemática.

Como consecuencia de ello, Mejía Velasco [70] propone que las estrategias que se deben elaborar para cambiar esta actitud de los alumnos respecto al uso de diagramas y gráficas, debe tomar en cuenta estas tres razones. Además, el cambio de opinión respecto a la concepción formalista de la matemática depende de lo que se haga para modificar la influencia de las dos primeras razones, puesto que tanto los libros de texto, como la manera en la que se comunican los resultados matemáticos y como algunos profesores se expresan en sus explicaciones, favorecen la creencia de que las gráficas, esquemas o imágenes cumplen un papel secundario en la generación de las ideas matemáticas.

Por otro lado, Eisenberg y Dreyfus [35] describen las dificultades cognitivas refiriéndose a la gran cantidad de información que una imagen puede contener, ya que esa información puede irse acumulando durante un proceso de desarrollo. Barwise y Etchemendy [11] expresan:

"Una característica del razonamiento diagramático es su carácter dinámico, el razo-

namiento a menudo, toma la forma de agregar elementos a un diagrama o modificarlo sucesivamente".

Con ello el estudiante no sólo debe entender el significado de la gráfica sino también tratar de recordar el orden en el que se agregaron elementos. Más aún, si la gráfica contiene partes correpondientes a conceptos que el alumno está comenzando a asimilar, la imagen puede confundirle. En este sentido, Barwise y Etchemendy piensan que los libros y en particular, los artículos de investigación carecen del dinamismo que requiere la visualización. Esto refuerza la idea de que la visualización en matemáticas requiere, como complemento, del uso del ordenador.

Con un software como Maple muchas de estas dificultades quedarían resueltas, pues permite la construcción, por parte del estudiante, de diagramas o gráficos que al principio pueden ser simples o básicos y progresivamente ir añadiendo otros elementos para finalmente obtener visiones más globales o sofisticadas.

En el desarrollo del Capítulo 2, al tratar el concepto de límite de una sucesión numérica usando Maple, observaremos este fenómeno de acumulación progresiva de elementos en una sola imagen. La definición rigurosa de dicho concepto en una gráfica bidimensional implica la creación, en primer lugar, de una banda centrada en el límite l y de semianchura ε. A partir de un subíndice ν en adelante, los infinitos términos restantes de la sucesión penetran en la banda. Posteriormente, con la instrucción animate, sofisticamos el proceso añadiendo movimiento de diversas características en la misma imagen. De forma similar se tratarán los conceptos de convergencia puntual y uniforme.

Existen otro tipo de dificultades que son las que dan lugar a una visualización incorrecta, la cual puede, a su vez, conducir a errores por diversos motivos.

- Unas veces porque la figura nos puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar. Este es el caso de algunas paradojas de tipo geométrico como la que vamos a describir a continuación y que ha sido entresacada del artículo "Visualización y creatividad" (Dorta Díaz, Espinel Febles y Plasencia Cruz, [25]).

Del cálculo infinitesimal conocemos un resultado que dice:

Si f es una función real de variable real definida en un intervalo $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$ entonces:

$$\text{“}f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0\text{”}$$

La proposición contrarrecíproca, equivalente a la anterior, es:

$$\text{“}f \text{ no continua en } x_0 \Rightarrow f \text{ no derivable en } x_0\text{”}$$

Teniendo en cuenta esta segunda proposición se definen en el intervalo $[1, 3]$ tres funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

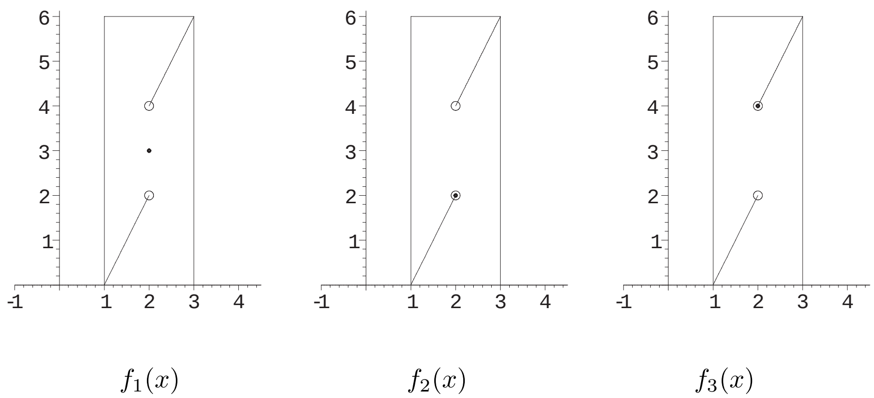


Figura 1.7

Se puede observar que las tres funciones son no continuas en $x_0 = 2$. Sin embargo, muchos estudiantes aseguran que las tres son derivables en dicho punto y lo justifican diciendo que, tal como se ve en la imagen gráfica, las pendientes de las semirrectas tangentes a ambos lados de $x_0 = 2$ son iguales.

En este caso la representación gráfica lleva a confusión, por lo que es necesario hacerles ver que al utilizar las definiciones de las derivadas laterales como límite del cociente incremental, el valor de la función f en el punto $x_0 = 2$ juega un papel determinante.

$$f_1'(x_0) = \begin{cases} f_1'(2+0) = +\infty \\ f_1'(2-0) = +\infty \end{cases} \qquad f_2'(x_0) = \begin{cases} f_2'(2+0) = +\infty \\ f_2'(2-0) = 2 \end{cases}$$

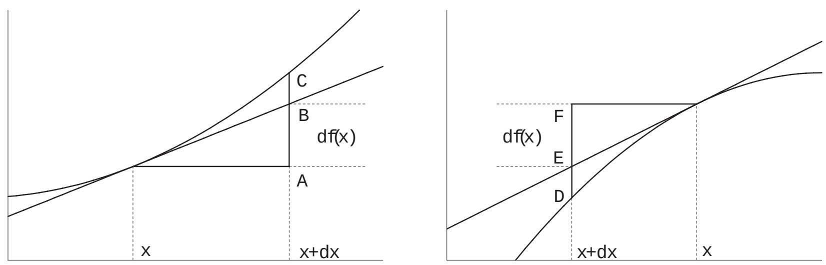
$$f_3'(x_0) = \begin{cases} f_3'(2+0) = 2 \\ f_3'(2-0) = +\infty \end{cases}$$

- Otras veces la situación visual nos induce a aceptar relaciones que son engañosamente transparentes y ni siquiera se nos ocurre pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas. Por ejemplo, algunos conceptos del cálculo diferencial llevan implícitamente asociados ciertas representaciones gráficas que podríamos llamar "imágenes conceptuales" (Dorta Díaz, Espinel Febles y Plasencia Cruz, [25]).

Uno de estos conceptos es el de diferencial de una función real de variable real en un punto x de su dominio. En la Figura 1.8 proporcionamos una "imagen conceptual" de la diferencial de una función $f(x)$ en un punto x, respecto de un incremento de x, y se puede observar tanto el valor del incremento de la función en el punto, $\Delta f(x) = AC$, como el valor de la diferencial en el mismo, $df(x) = AB$, constatándose sin dificultad aparente que el incremento de f en el punto x es mayor que la diferencial de f.

$$AB = df(x) < \Delta f(x) = AC$$

Cuando explicamos esto a nuestros alumnos y les mostramos la Figura 1.8 (a), ellos lo asimilan perfectamente. Nótese que la función elegida es creciente en un entorno de x y que Δx es positivo.



(a) (b)

FIGURA 1.8

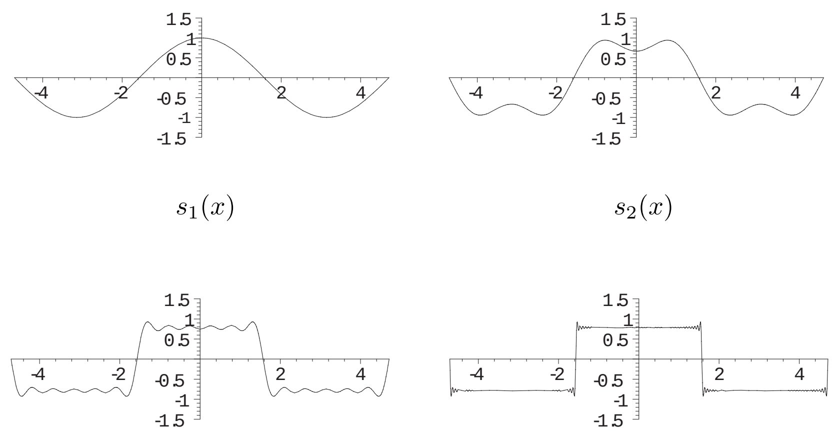
Por el contrario, cuando la función elegida es igualmente creciente en un entorno de x, pero su concavidad está orientada en sentido contrario y tomamos Δx negativo, Figura 1.8 (b), muchos alumnos de los primeros cursos universitarios de Ciencias contestaban que les parecía mayor el valor del incremento de la función f en x, DF, que el de la diferencial, EF, cometiendo así un grave error inspirado precisamente en la observación directa de la gráfica. Los autores del artículo mencionado afirman que en este caso el apoyo del profesor es imprescindible y determinante para consolidar el concepto estudiado.

Pero quizás, el caso más significativo lo encontramos cuando Fourier, al estudiar la ecuación del calor en su "Théorie Analytique de la Chaleur", consideró la idea de que una propiedad que se verificaba en los procesos finitos podía trasladarse, sin más, al objeto límite, cuestión ésta que en el siglo XVIII se consideraba como un postulado que no necesitaba demostración[16]. Gráficamente, Fourier representó algunos términos de la

[16] Durante el siglo XVIII este postulado se conocía como "El principio de Leibniz" cuyo enunciado es como sigue: *"Si une quantité variable suceptible de limite jouit d'une propriété, sa limite jouit de la même propriété"* (entresacado de *"L'exposition élémentaires des principes de calculs supérieurs"* de L'Huilier, 1786).

sucesión de sumas parciales de la serie:

$$\cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x - \tfrac{1}{7}\cos 7x + \tfrac{1}{9}\cos 9x - \dots$$



$s_1(x)$ $s_2(x)$

$s_6(x)$ $s_{45}(x)$

Figura 1.9

A continuación, esbozó la que debía ser, según él, la función límite:

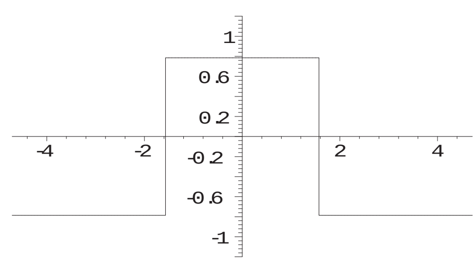


Figura 1.10

Pensamos que tal vez Fourier se dejó llevar, por una parte, por el referido postulado, y por otra, confió fielmente en las gráficas de cada uno de los términos de la serie, observando que en las vecindades de $x = \pm\frac{\pi}{2}$ la verticalidad de las funciones era cada vez mayor y concluyendo que en ese punto la gráfica de la función límite debía ser completamente vertical. Fourier interpreta que la función límite es como aparece en la Figura 1.10, pero en realidad la suma de la serie anterior en el intervalo $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ viene representada por la función, tal como hoy es entendida, Figura 1.11.

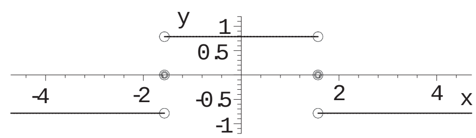


FIGURA 1.11

Siguiendo con otros ejemplos, pensemos que varios matemáticos desarrollaron demostraciones del teorema de la curva de Jordan (1893), las cuales se basaban en relaciones intuitivas sin justificar. Dicho teorema afirma:

"*Una curva plana cerrada y simple separa el plano en dos partes, el interior y el exterior*"

C. Jordan, al inicio de la década de 1890, observó que a pesar de que este resultado parece intuitivamente evidente, necesita una demostración rigurosa. La primera demostración de este teorema fue dada a principios del siglo XX por O. Veblen; no obstante Helge Tverberg ha descubierto recientemente una demostración "elemental" que es la que se incluye en la mayoría de los libros de texto.

A pesar de todo y aunque en algunos casos la visualización pueda llevar a cometer algún error de tipo conceptual, las ventajas que ésta ofrece, bajo un buen asesoramiento, están muy por encima de estos inconvenientes, y su eficacia en los procesos de pensamiento es evidente.

De esta forma, incluso las técnicas más formales conducen a veces a errores y razonamientos incompletos ya que:

"*El lenguaje matemático es un cruce entre el lenguaje natural y el lenguaje formalizado, una jerga extraña compuesta por elementos del lenguaje natural, palabras más o menos esotéricas y símbolos lógicos y matemáticos. Y en este idioma curioso se está haciendo alusión, explícita o velada a convenciones de la comunidad matemática del tiempo cargadas de connotaciones intuitivas, visuales, sobreentendidos, etc. No es de extrañar que en el trabajo matemático con tal herramienta así como en la comunicación con él se produzcan equívocos, confusiones y oscuridades que puedan conducir a error*" (Guzmán, [48]).

1.5. Nuevas tecnologías

1.5.1. El ordenador en el aula

Partiendo del hecho de que nos encontramos en el umbral de una revolución en el aprendizaje de las Matemáticas, la mayoría de los miembros de la comunidad educativa reconocen la posibilidad de acción conjunta de dos grandes tendencias de nuestro tiempo: La revolución tecnológica por un lado y la tendencia epistemológica por otro.

Según Urrea, Gastaldi y Fernández [107], la primera de ellas es la responsable, en gran parte, de la necesidad de un aprendizaje mejor. La tendencia epistemológica está relacionada con una revolución en la filosofía del conocimiento. En este contexto defienden que la mayor contribución de las nuevas tecnologías a la mejora del aprendizaje se centra en la creación de medios personalizados capaces de dar cabida a una amplia gama de estilos intelectuales.

No obstante, el desarrollo que ha tenido la tecnología en las tres últimas décadas no ha sido completamente asimilado por el sistema educativo. Hitt [60] piensa que ello posiblemente se deba a la carencia de estudios serios sobre maneras eficientes para utilizar la tecnología en la educación, estudios que nos muestren sus aciertos así como sus desventajas, para así crear una infraestructura de apoyo al profesor de matemáticas.

Los autores Urrea y otros [107] desarrollan su trabajo describiendo la experiencia personal de Seymurt Papert, doctor en Matemáticas y creador del lenguaje informático "LOGO". Él mismo contó cómo los ordenadores llegaron a alterar los fundamentos de su propio trabajo. Pero lo que más le impresionó fue descubrir que ciertos problemas que eran abstractos y difíciles de comprender, se tornaron, gracias al manejo del ordenador, concretos y transparentes, y al mismo tiempo, ciertos proyectos que le habían parecido interesantes pero demasiado complejos a nivel de ejecución, se hicieron manejables. Con todo, lo más importante es que se dio cuenta de que los estudiantes podían disfrutar de estas mismas ventajas. Este pensamiento le hizo cambiar su vida y a partir de ese momento se fijó el objetivo de luchar para crear un entorno en el cual los alumnos, cualquiera que fuese su cultura, género y personalidad, pudieran aprender álgebra y geometría. Así se interesó por explorar si los estudiantes excepcionales aprenden de modo diferente porque son excepcionales, o si son excepcionales porque las circunstancias les han permitido aprender de un modo diferente.

Frente a los métodos de la enseñanza tradicional, Papert señala:

"Estoy convencido de que el mejor aprendizaje se produce cuando el que aprende es el responsable".

Esta es la razón por la cual el autor confiesa mantenerse alerta en busca de iniciativas capaces de facilitar que el aprendizaje coexista con una cultura en la que se alimente el sentido de la responsabilidad personal. De esta forma, es el sentimiento de estar haciendo algo importante lo que impulsa a la toma real de iniciativas en un alumno; al mismo tiempo es importante que se sientan involucrados en una actividad que resulte significativa e importante y por la que ellos sientan verdadero interés.

En consecuencia, la escuela en sus diferentes niveles, la enseñanza secundaria, y por supuesto, la universidad deben potenciar el trabajo autónomo. Este fin puede conseguirse gracias a los ordenadores, ya que éstos son instrumentos que conceden la oportunidad de desarrollar el sentimiento de que están haciendo un trabajo serio.

"Mi propósito no es explicar cómo hacer bien las cosas, sino el de provocar y alimentar su imaginación".

Las instituciones educativas han ofrecido resistencia a la introducción del ordenador como "*instrumento de enseñanza*". Pensamos que los ordenadores sólo se llegarán a utilizar "correctamente" cuando éstos formen parte integral de un proceso de desarrollo coherente, y no porque los investigadores digan cómo debe llevarse a cabo este proceso.

Los modernos programas de cálculo simbólico actuales admiten papeles muy variados en las interacciones entre los tres elementos fundamentales que constituyen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática: alumnos - profesor - instrumentos didácticos. Obviamente el uso de la tecnología en el aula implica un cambio en el curiculum y en los métodos de transmisión, ya que la dinámica de la nueva situación didáctica hará cambiar necesaria y profundamente tanto los contenidos (tipo de problemas a proponer, nuevas maneras de evaluar, etc.) como los procesos de interacción dentro y fuera de clase.

Es indiscutible que el uso del ordenador ofrece ciertas ventajas que favorecen no sólo la adquisición de conceptos e ideas, sino también el gusto de los estudiantes por la actividad matemática. Amillo, Ballesteros y otros [7] señalan:

- Cambia la percepción del estudiante sobre las matemáticas.
- Permite la concentración en la resolución de problemas.
- Invita a experimentar.
- Revitaliza el énfasis geométrico-visual.
- Motiva.
- Proporciona madurez.

Hitt [60] invita al uso reflexivo de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas y defiende su utilización como una herramienta, no como un fin; en este sentido pensamos que a pesar de las numerosas ventajas no debemos caer en el error de basar nuestras clases de manera exclusiva en los ordenadores porque evidentemente no son la panacea del acto de aprendizaje. No obstante, distintos tipos de software pueden ayudar a los profesores a enseñar conceptos nuevos aportando problemas que de otro modo no sería posible plantear. Asimismo, la potencia y versatilidad de los programas de cálculo simbólico actuales hacen posible el acercamiento de nuestra enseñanza de la matemática al mundo de las aplicaciones reales.

El uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico disponible tanto para el profesor transmitir como para los alumnos investigar y manipular, puede ser un medio para coordinar los distintos registros de representación de un concepto. Para ello es necesario que el software que se elija, permita el paso o acceso rápido de un registro a otro en ambas direcciones, dando así al alumno la posibilidad de observar correspondencias entre los tratamientos en los diferentes sistemas e identificando aquellos que son particulares de un registro y que le dan al mismo su razón de existencia.

Desde esta perspectiva el software hay que elegirlo en función de:

- Los conceptos que se van a explicar.
- Del tipo de alumno al que se pretende enseñar.
- De las tareas que se van a exigir.

Al disponer de un programa que sea capaz de realizar con gran comodidad y seguridad todas las rutinas de cálculo numérico y simbólico, no existen razones para exigir al estudiante alcanzar una práctica de las mismas de forma rápida y segura; Guzmán [48] señala que el énfasis ahora podrá situarse en el fomento y estímulo por parte del profesor para:

- Introducir al estudiante en el ejercicio continuado de la experimentación matemática, hecha ahora mucho más fácil a través de los medios de los que dispone, explorando cómodamente regularidades y pautas de comportamiento de los objetos matemáticos que permitan adivinar y conjeturar sobre su propia naturaleza más escondida y hacerla patente a través del ejercicio de la demostración.

- Ayudar al estudiante a entender profundamente los problemas básicos de la teoría, su origen, su motivación, las ideas que los resuelven, su evolución posterior, las estrategias y rutinas que estas ideas han originado hasta convertirse en los instrumentos ágiles y eficaces que hoy son.

- Iniciar al estudiante en el ejercicio de la modelización matemática de situaciones reales, más o menos complejas, en las que se pueda percibir la enorme potencia y eficacia de las herramientas intelectuales de que va disponiendo, magnificadas ahora a través del apoyo en los útiles de que dispone.

- Proceder con paz en la resolución de verdaderos problemas, no ya meros ejercicios, que permitan al estudiante ir construyendo sus propias constelaciones de esquemas de pensamientos eficaces para la resolución de los problemas de cada uno de los campos en los que se introduce.

Por todo ello, las actividades que proponga el profesor deberían seleccionarse con el fin de cubrir los siguientes objetivos:

- Sean capaces de ayudar al estudiante en la exploración de situaciones a que conducen los conceptos fundamentales de la porción de teoría en la que se introduce.

- Estimulen el reconocimiento de estructuras y patrones.

- Ayuden a relacionar los diversos modos de representación (gráfica, algebraica, numérica,...).

- Animen al estudiante a atreverse a explorar incluso situaciones que sin el apoyo del sistema serían demasiado difíciles o llevarían demasiado tiempo.

- Inicien al estudiante en la utilización de la matemática y de los sistemas de apoyo emulando las formas como el experto usario de la matemática los utiliza en su quehacer cotidiano para la resolución de sus problemas reales.

Gutiérrez [47] explica cómo el uso de los ordenadores puede cambiar la forma de enseñanza que se ha experimentado ya en el análisis matemático de secundaria. En muchos Institutos los profesores disponen en sus aulas de ordenadores con programas como Derive, Mathematica o Maple. Estos programas ayudan a usar con cierta facilidad los diferentes sistemas de representación de funciones (textual, simbólico, gráfico y numérico) y a pasar de uno a otro. La enseñanza tradicional ha dirigido, preferentemente, la atención de sus clases hacia aspectos algorítmicos de transformación y simplificación de expresiones algebraicas, representación gráfica, métodos para cálcular límites, derivadas e integrales. Sin embargo, la facilidad con que los ordenadores resuelven todo este tipo de cálculos, hace que los profesores nos planteemos un nuevo objetivo en la enseñanza de las matemáticas. Dicho objetivo está orientado a aspectos más conceptuales, reduciendo el tiempo empleado en cálculos rutinarios y aprovechando las posibilidades que el ordenador ofrece para relacionar unas formas de representación con otras y para profundizar en la comprensión de los conceptos en cuestión.

Por otro lado y en contraposición a las dificultades de la enseñanza tradicional, el uso del ordenador permite resolver problemas de matemáticas que sean significativos para los estudiantes por su aplicabilidad a situaciones de la vida real. Al liberarnos de la complejidad de los cálculos mediante el uso del ordenador, los profesores disponen de una gama muy amplia de problemas a elegir, de forma que no tiene que descartar un problema de interés sólo porque haya que resolver una integral que está fuera de las posibilidades de sus alumnos.

Paralelamente al cambio de objetivos y a las nuevas formas de trabajo en el aula, como hemos comentado, debe producirse también un cambio en las formas de evaluación, de tal manera que los estudiantes dispongan de las mismas herramientas en clase que en los exámenes.

A pesar de los reconocidos beneficios del uso de los ordenadores en las clases de matemáticas, en España todavía no se ha producido una modificación sustancial de los hábitos de enseñanza que favorezca su uso generalizado. Por el contrario la mayoría de las clases de matemáticas siguen ancladas en las metodologías de pizarra y libro de texto, diferenciándose poco de las de hace algunas décadas.

1.5.2. El software Maple

En primer lugar diremos que Maple es un sistema de cálculo científico potente, rápido y un instrumento auxiliar en las tareas de cálculo simbólico, así como en la representación y exploración gráfica de funciones complejas, permitiendo el desarrollo de cualquiera de los conceptos que nos proponemos trabajar, en cada uno de los ámbitos siguientes:

- Simbólico
- Numérico
- Gráfico

Maple viene siendo desarrollado desde 1980 en la Universidad de Waterloo en Canadá. De hecho, la palabra inglesa *maple* significa *arce*, el árbol cuya hoja aparece en la bandera canadiense. La primera versión oficial apareció en 1985 (Maple V Release 3.0) y la más reciente (Maple V Release 7) data de Noviembre de 2001.

Es importante destacar que Maple puede usarse en todo tipo de máquinas: MS-DOS, Windows, Macintosh, UNIX y se utiliza para múltiples aplicaciones: científicas, técnicas, investigadoras, docentes, etc.

Si tuviéramos que elegir una definición simplificada de Maple, coincidiríamos con Soto y Vicente [96] al expresar que se trata de

"un lenguaje de programación dotado de un intérprete"

Esto significa que con Maple podemos realizar programas tipo BASIC o FORTRAN, pero con la ventaja de que este software tiene incorporado una gran biblioteca de funciones básicas y por tanto, no hay que perder tiempo programando funciones elementales.

Así por ejemplo, si estamos trabajando en BASIC y queremos hallar el m.c.d. de dos números enteros, en primer lugar habrá que construir el "programa", guardarlo en un archivo de texto, invocar al intérprete de BASIC y finalmente ejecutarlo. En contraposición, Maple y la totalidad de los paquetes informáticos como Mathematica, Derive, Mathcad, Matlab, etc., llevan incorporada la función m.c.d.(x,y), labor que ya han realizado los diseñadores del sistema. La orden igcd nos proporciona directamente el m.c.d. de dos enteros: [>igcd(20,15);].

La gran biblioteca que tiene incorporada Maple consta de numerosas librerías o paquetes en constante ampliación que se van incorporando a las nuevas versiones; señalamos a continuación y a título de ejemplo alguna de ellas:

- combinat: funciones combinatorias
- linalg: álgebra lineal
- plots: paquete para gráficas
- powseries: series de potencias
- student: calculo diferencial e integral

Por otra parte, hemos elegido para nuestra investigación este software porque presenta importantes ventajas que hacen de él un medio de gran utilidad práctica:

Maple es una gran computadora
Maple es como un "laboratorio"
Maple es un programador dotado de un intérprete
Maple es una herramienta con gran poder simbólico
Maple es una herramienta con suficiente poder gráfico
Maple es una "gran ayuda" para la investigación

En esta línea, quizás lo más importante, desde nuestra óptica como educadores, es que con Maple podemos conjugar y/o combinar las capacidades "computacionales", "gráficas" y "simbólicas" de manera que puedan ser usadas para comprender mejor los conceptos fundamentales del álgebra, de la geometría y del análisis matemático. Así, consideramos que es importante trabajar con un software de estas características y animamos a los educadores a que lo usen:

- Maple es un gran "complemento" para ayudar a comprender los conceptos matemáticos.

- Maple es un gran "aliado"para que muchos alumnos con sus capacidades y su propio ritmo "construyan"el conocimiento matemático partiendo de situaciones particulares, manipulando y explorando, para que posteriormente puedan ser generalizadas.

Por otra parte, es sorprendente el profundo "impacto" que las computadoras han tenido no sólo en la vida cotidiana, sino sobre todo en torno al Cálculo Científico. Su potencial, como ya se ha dicho, nos simplifica manipulaciones, rutinas y cálculos tediosos.

No obstante, estamos ante una herramienta que debe ser usada prudentemente y así sus beneficios serán tales que desarrollarán la imaginación y el pensamiento crítico.

Existen textos como [7], [22], [61], [96], etc. entre otros, en los que se usa Maple fundamentalmente como resolutor de ejercicios. En nuestra investigación lo emplearemos, además, como vehículo para iniciar a los estudiantes en la construcción de conceptos nuevos y para facilitar la comprensión de algunas demostraciones; haremos hincapié en las ventajas que este tipo de software proporciona en la vertiente "visual" de las ideas matemáticas. De la literatura consultada sobre sucesiones y series funcionales encontramos que existen textos en los que se utilizan otros softwares como Mathematica, Matlab, Derive, etc., pero en los que, igualmente, se proponen ejercicios de tipo algorítmico sin tratamiento conceptual alguno.

1.6. Fases de enseñanza: Un esquema para introducir conceptos

Se sabe que a través de la historia, la génesis y evolución de los conceptos matemáticos han sido muy diversas y que éstos han tenido puntos de partida diferentes; por ejemplo, en el siglo XVIII los matemáticos, a partir de situaciones intuitivas, lograron formalizar ideas o conceptos que más tarde conducirían a importantes resultados del cálculo infinitesimal.

En la literatura sobre Educación Matemática está bien extendida la idea de que es importante utilizar esta génesis y evolución de los conceptos para el proceso de enseñanza (Hitt [58]); por otra parte, cuando tratamos de iniciar a los alumnos en el estudio de nuevos objetos, desde nuestro punto de vista, pensamos que los profesores, consciente o inconscientemente, seguimos un esquema natural, similar al que exponemos y justificamos a continuación. Este esquema se apoya en cuatro fases básicas que, por orden de aparición, irán ayudando a consolidar y estructurar las ideas y conceptos matemáticos de nuestros estudiantes:

* **Fase verbal**
* **Fase de representación simbólica**
* **Fase de representación visual**
* **Fase de manipulación**

Cuando un profesor inicia a sus alumnos en el estudio de un nuevo concepto, como puede ser el de sucesión, función, límite, derivada, etc., el primer paso consiste, en general, en dar una definición o explicación oral, obviamente se trata del enunciado; con ello, en la mente de cada individuo se creará una primera aproximación o imagen mental de lo que el profesor desea transmitir.

Posteriormente, el docente introducirá la simbología que permitirá formalizarlo y aclarar, en muchos casos, la definición.

Con la representación gráfica o diagrama correspondiente, tercera fase, la idea comienza a ser asimilada por el alumno que hace de la misma "algo" propio e interior. La imagen que el alumno ha captado se identifica con esta forma material.

Por tanto, el estudiante está en condiciones de comenzar a trabajar y manipular la realidad matemática, explorándola e investigándola para así obtener conclusiones.

Tradicionalmente, la enseñanza de las Matemáticas ha participado de las dos primeras etapas de nuestro esquema conceptual. Como ya se comentó en el apartado anterior, la fase de representación visual ha sido una herramienta poco explotada durante mucho tiempo; unas veces, por rechazo por parte de las corrientes puramente formalistas y otras, porque no se le ha dado importancia como elemento de trabajo que facilita y clarifica la adquisición de contenidos:

"Las tendencias formalistas imperantes durante buena parte del siglo XX, han relegado a segundo término la visualización, tratándola con desconfianza y con sospecha, sin embargo parece que se puede percibir una cierta tendencia hacia la renovación de la visualización en el quehacer matemático, con decisión y seguridad entre quienes se ocupan de la investigación en educación matemática" (Guzmán, [48]).

Muchos autores están de acuerdo en la utilidad de las representaciones visuales a la hora de construir el conocimiento; no obstante esto no es suficiente, la comprensión de un concepto matemático requiere del manejo del mismo a partir de representaciones de distinto tipo, formadas por signos y símbolos, pero con la misma estructura. A estas representaciones Duval ([33] y [34]) las denomina "representaciones semióticas". Concretamente, a las representaciones específicas correspondientes a un concepto y sus tratamientos internos las denomina "registros de representación".

"La comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación..."

En particular, Mejía Velasco [70] sugiere que los conceptos matemáticos no pueden ser tratados sino a través de sus diferentes representaciones, y éstas, a diferencia de las representaciones mentales[17], están formadas por signos y símbolos y es por esta razón por la que Duval las denomina representaciones semióticas:

"...el desarrollo de las representaciones mentales no se puede separar de una interiorización de las representaciones semióticas... Además las representaciones semióticas no cumplen únicamente una función de expresión, cumplen una función de objetivación y

[17] En la tesis doctoral de Plasencia [80], páginas 20 y 21, para evitar confusiones sobre el significado del término representación, se realiza un estudio detallado acerca de las diferentes acepciones de esta palabra. En castellano e inglés es el contexto en el que se utiliza el que determina la acepción de la misma en cada momento; sin embargo, el idioma alemán mantiene diferenciados sus significados y utiliza diferentes palabras para las distintas estructuras conceptuales que están implícitas en el término representar. Glaserlfeld en su trabajo "Preliminaries to Any Theory of Representation" (citado en Janvier, [62]) describe al menos cuatro palabras que en el idioma alemán delimitan, sin confusión, el significado de representar; tres de ellas están relacionadas con los aspectos que nos interesan en nuestra investigación: "*Vorstellen*" (que se corresponde en castellano a la representación en la que una imagen mental sustituye a algo real o imaginario), "*Bedeuten*" (que se corresponde en nuestro idioma a hacer símbolo de un concepto o una idea) y "*Darstellen*" (que se corresponde a la representación como figuración o exposición de un objeto real o de un concepto, siendo siempre el resultado de una actividad humana).

también una función de tratamiento que no pueden cumplir las representaciones mentales".

Por otro lado, las investigaciones llevadas a cabo por Duval señalan que para aprender y dominar una idea matemática no es suficiente con sólo adquirir destreza en sus diferentes registros de representación, ni siquiera con conocer las reglas de codificación de un registro a otro, y puntualiza:

"La conceptualización implica una coordinación de varios registros de representación".

Desde esta perspectiva, consideramos importante el trabajo de Mason, Selden y Selden [69] en el que aseguran que sus alumnos de ingeniería, después de llevar un curso de cálculo, no pueden, aun siendo buenos alumnos, resolver problemas no rutinarios en los que se precisa el uso de la visualización matemática, con la articulación coherente de varios registros de representación ligados al contexto de los problemas. Así, afirman:

"Esto sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo creativamente".

Pero además, Hitt [59], al indagar en esta investigación, constata que:

"El fracaso de estos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre representaciones, provocando que el alumno "camine a ciegas" en el sistema algebraico y desarrolle algoritmos sin una idea clara del objetivo final perseguido".

Por otra parte, Janvier [62] da un ejemplo acerca de la adquisición del concepto de función usando una figura en forma de estrella, en cada una de cuyas esquinas se exhibe un registro de representación de la función: tablas, gráficos, fórmula, descripción verbal, objeto, etc. Así, es importante no sólo centrarnos en uno de esos registros, una esquina de la estrella, en el proceso de construcción del concepto, sino que también es necesario considerar todos los *"aspectos"* del ente matemático de una forma global.

Pensamos que un no especialista en la materia relativa a representaciones semióticas y con el objeto de aclarar sus ideas, puede denominarlas *"aspectos del concepto matemático",* en el sentido de clasificar las categorías que distingan formalmente las diferentes clases de acción que se pueden llevar a cabo. En el ejemplo de Janvier estos *aspectos* serían:

-aspecto verbal,
-aspecto simbólico,
-aspecto gráfico,
-aspecto tabulador, etc.

Éstos, a su vez, sirven al profesor para poner énfasis en características singulares del objeto como crecimiento y decrecimiento de la función, máximos y mímimos, puntos de corte con los ejes, etc.

En el Capítulo 2, tras explicar el concepto de convergencia puntual y una vez desarrolladas las tres primeras fases de nuestro esquema, el alumno manipula el concepto a partir de una sucesión funcional determinada de la que se conoce su expresión algebraica, para luego obtener la gráfica de algunos de sus términos, la gráfica de algunas de las *sucesiones numéricas asociadas* con sus correspondientes expresiones algorítmicas, tabulaciones de algunos de sus términos, incluyendo la *banda* en la que se observa el índice de penetración puntual en cada caso, y la comprobación algorítmica de la obtención del mismo mediante la resolución de la inecuación correspondiente. Todo ello nos permite obtener una *esquematización visual* de la idea de convergencia puntual que proporcionará al alumno una visión holística de este concepto a partir de diferentes registros de representación, o como hemos dicho, de los diferentes *aspectos* del concepto.

Así, entendemos por *esquematización visual* de un concepto la acción de disponer, con cierto orden, sus diferentes registros de representación para dar una visión completa y esquematizada en la que los aspectos visuales queden precisados.

Por tanto, la compresión de una idea matemática sólo tiene lugar cuando el alumno es capaz de integrar las diferentes representaciones de la misma y establecer las transferencias, conexiones y coordinaciones necesarias entre ellas, de forma que dicho alumno pueda pensar en el concepto como si se tratara de un único referente mental.

Desde este punto de vista Hitt [55] afirma:

"... las consideraciones visuales son importantes en la resolución de problemas. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas..."

Por esta razón añade:

"... los profesores de matemáticas utilizan diversos ejemplos para "facilitar" el aprendizaje de conceptos; pero para tener una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas es absolutamente necesario utilizar lo que Tall ha denominado organizador genérico"

Tall [100] define *organizador genérico* como:

"Un entorno que provee al usuario con las facilidades de manipular ejemplos (y, cuando es posible contraejemplos) de un concepto... La palabra genérico significa que la atención de quien aprende se dirige a algunos aspectos de los ejemplos que encarnan el concepto más abstracto".

En este punto podemos adelantar que el uso del ordenador y en concreto, de un software de las características de Maple puede ser considerado como un organizador genérico de la naturaleza descrita, el cual nos proporcionará las herramientas necesarias para completar e integrar la enseñanza de conceptos matemáticos como los que vamos a tratar y ofrecer así esa visión global. Desde nuestro punto de vista como educadores, creemos que este software nos permite unificar y/o combinar sus capacidades computacionales, gráficas y simbólicas en cada uno de los "ejemplos-tipo", cuidadosamente elegidos, para lograr un mejor entendimiento de aspectos fundamentales relacionados con el Álgebra, Geometría y Análisis Matemático. De esta forma, Maple es como un laboratorio que permite al estudiante investigar y, con sus propias capacidades y su ritmo de trabajo, manipular esos ejemplos, o en su caso, contraejemplos, al tiempo que consolida el concepto.

Todo ello hace indispensable la realización de un análisis curricular que promueva el uso del ordenador como elemento fundamental para la articulación de los diferentes registros de representación.

Por otro lado, la tecnología compromete activamente a los estudiantes de matemáticas, invitándolos a la exploración y manipulación de problemas. En este sentido, las investigaciones más recientes (Soto Johnson [97] y otros) no han dado una respuesta uniforme con respecto a si los estudiantes mejoran o no sus habilidades de asimilación e interpretación con el uso de software.

En nuestra propuesta curricular, la cuarta y última fase, de manipulación y/o aplicación, se lleva a cabo mediante el uso del ordenador como instrumento complementario de trabajo, lo que facilita el desarrollo de la formación matemática del estudiante:

"La presencia del ordenador en el aula, con sus amplias perspectivas de futuro, está cambiando la dinámica de la situación didáctica (profesor-alumno-instrumentos didácticos). El profesor comienza a tener un papel secundario, ya que su labor debe ser sólo orientadora y ésta consistirá en introducir al alumno en un proceso de aprendizaje basado en la experimentación y la práctica de los métodos de ensayo-error. De esta forma, a partir de los conocimientos previos y de ciertas observaciones del docente, el alumno poco a poco, se sentirá capaz de construir su conocimiento. Sus pequeños pero propios descubrimientos le harán sentir la satisfacción de un auténtico investigador y le motivarán a continuar profundizando en el campo de la matemática..." (Afonso Gutiérrez y Dorta Díaz, [2]).

Así pues:

- cuando el alumno por sí mismo, utilizando la técnica de autoaprendizaje, en la que él es el centro de la actividad educativa, cubre los contenidos propuestos, experimentando (equivocándose y autocorrigiéndose) y llegando a conclusiones correctas, ...
- cuando el alumno ha "visualizado" la tarea a desarrollar, ...
- cuando el alumno ha "salvado" (grabado) y protegido su propio trabajo, ...

- cuando lo ha impreso para llevarlo como un documento de su propia creación, ...

"la situación didáctica" es bien diferente a la tradicional o estándar, en la que el profesor imparte su clase magistral y el alumno permanece pasivo tomando nota (desde luego no es lo mismo que un alumno obtenga, por ejemplo, un listado de integrales en el aula o de un libro de texto, a que ese mismo alumno construya el listado y "lo haga suyo").

Por tanto, en esta fase, el estudiante comienza a dar sus primeros pasos en el manejo del concepto en cuestión. A partir de los ejemplos y ejercicios que el profesor plantea, el alumno, con cierta autonomía, investiga y explora la realidad matemática para obtener sus propias conclusiones. El docente que propone los ejercicios y pautas a seguir, ha de secuenciar las actividades propuestas, de forma que el grado de dificultad aumente progresivamente. En este sentido, recordemos que el papel que juega la motivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje es fundamental; insistimos, por ello, en que los ejemplos elegidos deben ser los adecuados.

Como consecuencia de todas las reflexiones anteriores pensamos que nuestro esquema conceptual queda plenamente justificado en el sentido de que en él intervienen los diferentes *aspectos* de los conceptos a tratar.

Por otra parte, este esquema constituye una síntesis en cuatro fases del proceso a seguir para la adquisición y asimilación de conceptos nuevos para nuestros alumnos. No es, por tanto, un esquema conceptual de la naturaleza de los presentados por Dubinsky o Glaserlfeld (citados en García Cruz [45]), en los cuales se parte de unos conocimientos adquiridos por el individuo, que ha tenido oportunidad de interiorizarlos y manipularlos mentalmente para posteriormente, dar sentido y resolver una situación problemática que es percibida como tal.

Dubinsky [30] define esquema conceptual como

"una colección más o menos coherente de objetos cognitivos y procesos mentales internos para manipular dichos objetos".

Por otro lado:

"La descomposición genética de un esquema conceptual particular, parte de los esquemas conceptuales previos, sobre los cuales se apoya y mediante la coordinación de todos o algunos de ellos, el alumno avanza en la construcción del conocimiento que constituirá el esquema conceptual particular" (García Cruz [45]).

Este esquema conceptual es posterior al que nosotros presentamos y es fruto del esfuerzo y la actividad mental que el sujeto realiza para "avanzar" en su conocimiento. Nuestro objetivo, en cambio, es presentar una metodología que permita al profesor obtener más y mejores resultados cuando "comienza" su labor docente e introduce conceptos nuevos.

Es importante destacar que si utilizamos un software adecuado, como pudiera ser Maple, las tres últimas fases del esquema podrían desarrollarse notablemente, dado que el núcleo de cálculo simbólico de este software es muy potente y sus capacidades gráficas suficientes.

Como ya se ha dicho, en el Capítulo 2, siguiendo estas cuatro fases de nuestro esquema, desarrollamos una propuesta curricular para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos que hacen referencia a procesos de convergencia. Estos conceptos son:

- Límite de una sucesión numérica.
- Límite puntual de una sucesión funcional.
- Límite uniforme de sucesiones funcionales.
- Convergencia puntual y uniforme de series funcionales.

En las etapas de visualización y manipulación haremos uso del software Maple. Es importante tener en cuenta que la enseñanza con uso del ordenador exige un esfuerzo al que la mayoría de los profesores no estamos habituados, pues implica ciertas limitaciones con las que es imprescindible contar, tales son: el aprendizaje del software, el aprendizaje de los propios contenidos a estudiar, el diseño de actividades o ejercicios a proponer y de nuevas formas de evaluación. Todo ello además de la falta de tiempo y de medios, dificultades éstas que siempre suelen estar presentes.

En cuanto al aprendizaje del software lo hemos organizado de forma que los alumnos se fueran familiarizando con las instrucciones más usuales directamente, es decir, sin previo conocimiento de la sintaxis y al mismo tiempo que introducíamos los conceptos. Al diseñar los ejercicios, hemos puesto especial interés tanto en la elección como en la secuenciación de los mismos; desde este punto de vista, hemos procurado que el grado de complejidad y profundización aumente progresivamente. En cuanto a las actividades de evaluación, hemos propuesto a los alumnos cuestiones y ejercicios que nos permitieran analizar los resultados de las experiencias llevadas a cabo; pero no es nuestro objetivo investigar, ni proponer nuevas formas de evaluación como consecuencia del uso de la tecnología en el aula. Pensamos que ello constituye un objetivo interesante para futuras investigaciones.

1.6.1. La metáfora, la metonimia y las representaciones en nuestro contexto

Uno de los objetivos de este trabajo tiene carácter inequívocamente curricular, por tanto, los aspectos pedagógicos de transmisión de ideas matemáticas deben ser tenidos en consideración. Por otra parte, los profesores conscientes de su responsabilidad, aquellos que se involucran en el proceso “formador”, saben que en su trabajo cotidiano no pueden limitarse al uso exclusivo del lenguaje matemático donde el formalismo y el rigor conviven, además de las dificultades epistemológicas que muchos conceptos conllevan. Así lo han entendido los profesores universitarios que hemos entrevistado para esta investigación, ya que utilizan en sus respuestas y explicaciones gran número de comparaciones o analogías. Son conscientes de que para dar forma, para forjar, estructurar y consolidar todo conocimiento, y el conocimiento matemático no es ajeno a ello, es indispensable relacionar ideas y en la búsqueda de analogías y en la comparación de conceptos está el camino para que los alumnos lleguen a él. Por tanto, las metáforas estructuran en buena parte lo que hacemos y cómo lo entendemos y ayudan a establecer estrategias para complementar el aprendizaje de los procesos matemáticos.

En Plasencia Cruz [80] se recoge textualmente:

Algunos conceptos matemáticos aparentemente simples están sujetos a definiciones que son, en general, complejas; pensemos en los conceptos de recta, dirección, derivada, gradiente, superficie, grafo, etc.

En el libro I de los Elementos de Euclides [36] se lee que una recta es:

"Longitud sin anchura".

¿Es ésta una definición clarificadora de lo que es una recta? En los Elementos, Euclides define recta haciendo uso de conceptos más complicados que aquél que deseaba exponer.

En la siguiente definición:

"una dirección es una clase de equivalencia de rectas del plano relacionadas entre sí mediante una relación de paralelismo" (Roanes, [87])
aparecen otros conceptos nada clarificadores, en principio, de lo que es una dirección. Por ello en Matemáticas, para dar una primera idea del concepto, muchas veces, recurrimos a la metáfora; algunos ejemplos serían:

recta $\cong$ *horizonte, líneas de luz*
dirección $\cong$ *autopista recta con varios carriles*
derivada $\cong$ *cambio, variación*
superficie $\cong$ *montaña, valle*
gradiente $\cong$ *brújula (dirección de máxima variación)*
grafo $\cong$ *red de carreteras*

Quizás muchos profesores consideren irrelevante el uso de metáforas en el aula, pero consciente o inconscientemente realizan comparaciones con situaciones más simples y familiares para ayudar a comprender ideas no sencillas y abstractas.

De igual forma y continuando con el mismo trabajo antes citado, podemos ver un caso en el que el uso de la metáfora está justificado de una forma "natural".

En los primeros cursos de Universidad (Facultades, Centros Superiores, etc.), cuando *queremos introducir el concepto de gradiente de una función escalar de dos variables* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y) = z$, *y su interpretación física, algunos profesores suelen recurrir al símil siguiente:*

Imaginemos que $f(x, y) = z$ *representa una montaña; el vector gradiente de* f *en cada punto* (a, b) *del plano* OXY,

$$\nabla f(a, b) = grad(f)(a, b) = (\partial f/\partial x)\overrightarrow{i} + (\partial f/\partial y)\overrightarrow{j}$$

señala la dirección en la que la inclinación de la montaña es máxima.

Así pues, el gradiente de f en cada punto nos señala, a modo de brújula que nos guía, el camino que tendríamos que seguir para subir una montaña haciendo el recorrido más corto.

De igual forma, si nos situamos en la cima de una montaña un día muy lluvioso, el agua se desplazará montaña abajo siguiendo el sentido opuesto del vector gradiente. Por tanto, la naturaleza, con su "lógica sabiduría", ha formado los cauces de los ríos y los "barrancos", siguiendo el camino que señala el opuesto al vector gradiente de f en cada punto.

Obsérvese que en estas ideas matemáticas hay implicadas tres metáforas: montaña o barranco (superficie), inclinaciones de sus laderas (derivadas direccionales), brújula (vector gradiente).

Estos ejemplos explicitan claramente cómo los profesores nos comunicamos con los estudiantes, no sólo a través de una simbología formal y rigurosa, sino sobre todo con la palabra. Las personas en general, y los docentes en particular, "somos" lo que logramos trasmitir por medio del verbo, y en este sentido la comunicación y la metáfora siguen caminos paralelos.

"*Los profesores de matemáticas somos como un fragor de símbolos, gráficos, y sobre todo de palabras compartidas*". (Dorta Díaz, Espinel Febles y Plasencia Cruz [27]).

Sin salirnos del contexto matemático, Pimm [79] clasifica las metáforas en dos tipos bien diferenciados: *las estructurales*, que comparan dos ámbitos matemáticos, y las *extramatemáticas*, que compara un ámbito matemático con otro que no lo es. Como analizaremos en el Capítulo 3, gran parte de las metáforas que utilizan los profesores universitarios con los que hemos realizado esta investigación son del segundo tipo.

Por otra parte, en el Capítulo 2 presentamos la definición (ε, ν) de límite de una sucesión de números reales haciendo uso de una metáfora estructural; desde un punto de vista estrictamente visual, vamos traduciendo, o si se quiere, poniendo en correspondencia, los elementos de tal definición simbólica con elementos geométricos (bandas, gráficas de puntos en el plano, etc.). En este caso, nosotros utilizaremos el término *metáfora visual* para referirnos a este tipo de analogía. Todo ello proporciona a los alumnos una visión más natural y sencilla, no desprovista de globalidad y consistencia, donde aparecen y se conjugan todos los elementos de la misma. Si además, a la hora de transmitir el concepto lo complementamos con la ayuda de algún software con el que el alumno pueda "construir" el proceso, éste se encontrará en una situación más ventajosa para comprender, manipular y reconstruir la idea posteriormente, que aquellos que sólo han visto la definición formal.

En este sentido, en el Capítulo 4 presentamos una experiencia que realizamos con la ficticiamente llamada "Alumna María". En la misma, la definición (ε, ν) de límite, la metáfora reseñada y nuestro esquema conceptual desempeñan un papel determinante.

Algunas ventajas cognitivas del uso de la metáfora como herramienta pedagógica son:

- Ayudan a esquematizar o geometrizar el conocimiento facilitando la compresión.
- Aportan caminos alternativos para cambiar situaciones que pueden parecer complicadas en otras más simples y manejables.
- Permiten reconstruir el conocimiento a largo plazo y por tanto facilitan el recuerdo.

Conviene resaltar que, en ocasiones, el uso de la metáfora hay que realizarlo con *exquisita cautela*, puesto que el rigor matemático puede quedar en entredicho; en este sentido en [80] se afirma:

"El emisor que emplea la metáfora espera que el receptor traslade unas características, y no otras, desde uno de los ámbitos en el que ésta actúa al otro. La metáfora funciona como una especie de "isomorfismo" entre dos ámbitos mediante el cual no todas las propiedades son transmisibles; el papel del profesor será delimitar y clarificar qué características pueden ser trasladadas".

La segunda fase de nuestro esquema conceptual trata de suministrar al estudiante, dentro de un ambiente adecuado, el soporte simbólico de los conceptos tratados y ahí desempeña un papel destacado la metonimia.

Una metonimia es una figura literaria que designa una cosa con el nombre de otra tomando el efecto por la causa o viceversa, *el signo por la cosa significada* (el laurel por la gloria, las canas por la vejez, el autor por sus obras, etc.)

En el ámbito matemático esta figura está presente allí donde un símbolo represente una clase de objetos, o un conjunto de símbolos representen un concepto o un principio.

Plasencia [80], pág. 92, señala, basándose en las ideas de Jakobson, la existencia de dos ejes básicos que caracterizan el lenguaje: el eje metonímico que comprende los procesos de contextualización y simbología, entre otros, y el eje metafórico que incluye procesos de selección, sustitución y semejanza.

Estos ejes son esenciales para profundizar en la estructura y contexto de la matemática; usamos el eje metafórico cuando tratamos de dar significado a conceptos o ideas y el eje metonímico para darles forma simbólica dentro de un entorno que facilite su divulgación.

Las fases del esquema conceptual que hemos presentado en esta sección 1.6 se pueden relacionar respectivamente:

Fase verbal ≅ Eje metafórico (selección y semejanza) ≅ *"Vorstellen"* (representación en la que una imagen mental sustituye a algo real o imaginario).
Fase simbólica ≅ Eje metonímico (crear un ambiente con simbología) ≅ *"Bedeuten"* (hacer símbolo de un concepto o una idea).
Fase visual ≅ Eje gráfico (diagramas o pantalla del ordenador) ≅ *"Darstellen"* (figuración o exposición de un objeto real o de un concepto) ≅ Metáfora visual.
Fase manipulativa ≅ Visión global (interrelación de las tres fases anteriores).

Finalmente, reflejamos en un esquema las ideas de Duval, Janvier, Glaserfeld, Pimm, Jakobson y otros. En la última columna figuran las cuatro fases de enseñanza de nuestro esquema conceptual, que sintetizan todas estas teorías, permitiéndonos utilizarlas en la praxis diaria del aula.

Esquema de relaciones entre diversas teorías

Duval	Janvier	Glaserfeld	Pimm y otros	Afonso Dorta
Registros de representación	Sistema semiótico Holísticamente	La palabra "representar"	Figuras literarias	Esquema conceptual
Registro verbal	Descripción verbal	Vorstellen	Metáforas Eje metafórico	Fase verbal
Registro simbólico	Fórmula	Bedeuten	Metonimias Eje metonímico	Fase simbólica
Registro gráfico	Gráfico	Darstellen	Metáfora visual	Fase visual

Finalmente, destacamos los trabajos de Tall [103] y [104], en los que considera los tres modos de representación mental propuestos por Bruner en 1966, *Enactive, Iconic and Symbolic*, para elaborar su *Teoría de visualización y simbolización matemática*. Estas categorías o modos de representación mental de Bruner están estrechamente relacionadas con las fases de nuestro esquema conceptual y por tanto con las distintas teorías expuestas en el esquema anterior. En 1999, Tall presenta en Israel un nuevo trabajo [105] en el que redefine las citadas categorías de Bruner y hace una síntesis acerca de las principales cuestiones cognitivas en el desarrollo de las matemáticas: Partiendo de un ambiente o entorno inicial y mediante la percepción y la acción, invita al estudiante a reflexionar para, en definitiva, conducirlo a la simbolización, configuración y axiomatización propia de nuestra ciencia.

1.6.2. La memoria y la reconstrucción del conocimiento

En el desarrollo de esta memoria nos interesa profundizar en aquellos aspectos que nos pueden ayudar a transmitir con eficacia conceptos matemáticos de cierta complejidad y que resultan complicados de retener en la memoria de nuestros alumnos. Así pensamos que nuestra propuesta curricular debe facilitar no sólo la comprensión de estos conceptos, sino que además debe proporcionar estrategias que permitan retener este conocimiento para posteriormente reconstruirlo.

En este apartado, nos centramos en el análisis de los cambios cognitivos a que da lugar el paso del tiempo a partir del momento en que un individuo, en particular, adquiere el conocimiento. Los autores Vega, Bueno y Buz [108] consideran que el ser humano toma la información del ambiente de forma parecida a como un ordenador recibe y trabaja con la información. Así, los procesos básicos de la cognición, tales como el reconocimiento, la exploración del entorno, la información proporcionada por diversos sentidos, corresponderían al *hardware* del ordenador, a aquello con lo que la máquina viene cuando no le han metido información concreta alguna. El conocimiento que se acumula a través del tiempo y todo lo relacionado con el aprendizaje se corresponde con la base de datos del ordenador y con las estrategias que utiliza para procesar la información, elementos que estarían más relacionados con el *software* del ordenador.

Las explicaciones que se refieren al declive en la habilidad para procesar información se relacionan con la atención, el aprendizaje y la memoria. Aparte del declive natural debido al paso del tiempo y que se basa en el *hardware* del sistema, existen otras teorías que atribuyen los problemas de pérdida del conocimiento al *software*, es decir, en este caso el deterioro depende en gran medida de cuestiones metodológicas que no fomentan el desarrollo de habilidades cognitivas para facilitar el recuerdo y la reconstrucción del conocimiento.

Está claro que nuestra capacidad para percibir e interactuar adecuadamente cuando nos enfrentamos a un nuevo ambiente (nuevas situaciones, nuevos conceptos) depende en gran medida, de nuestra habilidad para detectar, interpretar y responder de forma apropiada a la información que llega a nuestros sentidos. Así Vega y otros [108] afirman:

"Desde la perspectiva del procesamiento de la información, la percepción no es un resultado inmediato de la estimulación o sensación, sino que es consecuencia de la actuación de una serie de procesos implicados, mediatizados neurofisiológicamente, que desarrollan y transforman activamente los estímulos ambientales, y que condicionan la interpretación más o menos automática que la persona efectúa de la información que recibe".

Pasos a dar en el procesamiento de la información

Estímulos ambientales

$\Downarrow$

Almacenamiento sensorial

$\Downarrow$

Codificación a análisis perceptivo

$\Downarrow$

Decisión y selección de respuesta

$\Downarrow$

Ejecución de la respuesta

Por tanto, cuando el profesor comienza su labor en el aula introduciendo un concepto nuevo, ha de aportar los estímulos ambientales que sitúen al alumno y lo motiven al estudio y profundización en dicho conocimiento. Nuestro esquema conceptual parte de la fase verbal y es en ella y en la fase de representación simbólica donde podemos incitar y animar al alumno para que partiendo de sus conocimientos previos, conecte, relacione conceptos y se motive en el aprendizaje de un nuevo campo. El profesor continúa aportando estímulos ambientales cuando en la fase de representación visual y con el uso del ordenador, invita al alumno a hacer cálculos, comprobar resultados, graficar, usar el método de "ensayo-error", etc., como si de un trabajo de laboratorio se tratara. Con todo ello el profesor fomenta aquella habilidad de visualización de la que hablábamos en los apartados anteriores y además establece estrategias que permitan al alumno reconstruir su conocimiento después de un periodo de tiempo más o menos largo. Consideramos como estrategias importantes los esquemas, diagramas, reglas mnemotécnicas, esquematizaciones visuales, etc. Todos ellos basados en la evocación de una imagen que permita al alumno reproducir los aspectos y características relevantes asociadas al concepto que deseamos recordar.

Superada la fase sensoperceptiva, los individuos damos un segundo paso en el procesamiento de la información. Se trata de los procesos de filtro y almacenamiento, los cuales tienen que ver con la atención y la memoria.

La atención es la energía o capacidad necesaria para apoyar el procesamiento cognitivo, siendo un recurso tan eficaz como limitado. Podemos distinguir tres tipos de atención: sostenida, dividida y selectiva. Mantener la atención que se está realizando a lo largo de un tiempo requiere atención sostenida; cuando se realizan dos tareas a la vez estamos ante un problema de atención dividida; si se seleccionan señales de todo un conjunto de estímulos, se habla de atención selectiva. Esta última cumple una función de filtro que se encuentra entre las más básicas de la atención, por lo que resulta esencial para el aprendizaje (Plude, Enns y Brodeur, 1994, citado en [108]).

Posteriormente los individuos retienen en su memoria gran cantidad de contenidos semánticos, habilidades y destrezas. Esta cantidad de información permanece en estado latente hasta que se activa y recupera desde la memoria que según Vega y otros [108] puede ser clasificada en memoria sensorial, memoria a corto plazo y memoria a largo plazo. Dentro del proceso de adquisición de la información, la memoria sensorial tiene que ver con el proceso de codificación que tiene lugar cuando el individuo capta la información proporcionada por medio de estímulos ambientales; posteriormente la memoria a corto plazo se relaciona con el proceso de almacenamiento y por último, la memoria a largo plazo es la que hace posible la recuperación o reconstrucción del conocimiento.

Podemos adelantar, que en el caso que nos ocupa, el uso de nuestro esquema conceptual como complemento de los métodos tradicionales, junto al uso del ordenador, van a facilitar la reconstrucción tanto a corto como a largo plazo.

En decidida lucha, sus nobles enseñanzas
tenían la raigambre de un encinar maduro,
y artífice de métodos y cultor de esperanzas
entregaba, creyente, su labor al futuro.
Tomás Morales, 1884-1921.

Capítulo 2

Objetivos, hipótesis y metodología

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos una propuesta curricular para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de convergencia de sucesiones numéricas y sucesiones y series funcionales, así como de sus teoremas más significativos. Será desarrollada siguiendo las cuatro fases del esquema conceptual expuesto en la sección 1.6 del Capítulo 1.

Teniendo en cuenta la literatura consultada y a pesar de las dificultades epistemológicas a las que los profesores hacen alusión en las encuestas que exponemos y analizamos en el Capítulo 3, nos aventuramos en una investigación que abre un camino diferente en torno al aprendizaje de las ideas de convergencia y temas afines. Así, las aportaciones de los profesores en este campo nos incitaron a indagar en esas nuevas formas de hacer llegar a los estudiantes estos conceptos donde las nuevas tecnologías pueden desempeñar un papel destacado.

Partimos de la base de que, lejos de sustituir a los métodos tradicionales, la nueva alternativa debe complementar la enseñanza clásica; además, basándonos en los procesos propios de la misma, donde las fases verbal y simbólica tienen un significado importante, en las fases de representación visual y manipulativa de nuestra propuesta, trataremos de integrar otros aspectos del aprendizaje, profundizando en los conceptos a través de ejemplos y contraejemplos para completar la instrucción-formación. De este modo, haremos uso del ordenador y de Maple, software que consideramos, por las razones descritas en el primer capítulo, un *organizador genérico* de la naturaleza descrita por Tall [100].

Dicha propuesta promueve el aprendizaje autónomo y la *pedagogía de la creatividad*, entendiendo por ésta, aquel conocimiento que parte de las propias experiencias del alumno y que progresa a través de su descubrimiento de la realidad matemática guiado por las indicaciones del profesor. Desde esta perspectiva y mediante la construcción de pequeños programas, de fácil manejo, los estudiantes investigan los distintos aspectos de un concepto o *registros de representación*: enunciado, simbología, tablas, gráficas, etc. Abundando en ello, la utilización de Maple, en su vertiente educativa, permite a los alumnos profundizar en los conceptos y proposiciones para desarrollarlos en cada uno de los ámbitos simbólico, gráfico y numérico (tabulaciones, cálculo de límites, resolución de ecuaciones e inecuaciones, predicciones, tanteos, etc.). El software facilita considerablemente esta labor, pues al tratarse de un sistema científico de cálculo potente y rápido, los cálculos complicados y la obtención de gráficas engorrosas no suponen un problema.

Por otra parte, pensamos que nuestra propuesta curricular no sólo ayuda a la comprensión de los conceptos, sino que además aporta estrategias que facilitan el recuerdo y la reconstrucción del conocimiento. En este proceso el papel del profesor es fundamental, ya que al iniciar su labor en el aula debe aportar los estímulos ambientales suficientes que sitúen al estudiante en el entorno de lo que va a aprender, motivándole y por tanto, incitándole a profundizar en dicho conocimiento. Así, frente a la enseñanza tradicional, el uso del software, de técnicas de visualización atractivas y de procesos manipulativos variados, dan lugar a un nuevo panorama que habilita al alumno para complementar aquella, al tiempo que refuerza sus procesos de almacenamiento tanto a corto como a largo plazo.

En este sentido y con el objetivo de proporcionar una visión holística o global de los conceptos, presentamos tres *esquematizaciones o simplificaciones visuales* en las que a título de resumen o compendio, se exponen conjuntamente varios registros de representación: algebraico, visual, numérico (tabulaciones), etc. Las esquematizaciones visuales a las que nos referimos corresponden a los siguientes conceptos:

- Definición formal de límite de sucesiones numéricas.
- Definición de la convergencia puntual de sucesiones funcionales.
- Definición de la convergencia uniforme de sucesiones funcionales.

Además, en el desarrollo de esta propuesta, proporcionamos interpretaciones visuales de algunas definiciones y teoremas; a partir de ellas tratamos de establecer un paralelismo o "metáfora visual" entre la definición formal y la idea intuitiva que queremos transmitir; en el caso particular de la definición (ε, ν) de límite de sucesiones numéricas, a través de una representación bidimensional, establecemos este paralelismo y cada elemento de la definición formal tiene en la gráfica su imagen correspondiente, de forma que cualquier cambio en cualquiera de los parámetros de la definición se corresponde a un determinado cambio en la gráfica.

En cuanto a la visualización de los aspectos dinámicos implícitos en estos conceptos, ésta se lleva a cabo, en las fases de representación visual y/o manipulativa, mediante programas que permiten observar la idea de convergencia a través de un proceso en movimiento. Concretamente, la representación de cualquier sucesión numérica convergente y la comprobación visual del valor límite se presenta como un proceso dinámico, en el que de forma progresiva van apareciendo los elementos de la sucesión. Además, en este proceso el alumno puede observar directamente la dependencia funcional de los parámetros (ε, ν) de dicha definición.

Entre las interpretaciones visuales de algunos teoremas, presentamos:

- Teorema que postula que toda sucesión numérica convergente está acotada.
- Teorema fundamental de las sucesiones numéricas.
- Teorema de caracterización de la convergencia uniforme de sucesiones funcionales.
- Criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series funcionales.

Aplicaremos estos resultados a ejemplos particulares y por medio del software obtendremos una interpretación visual de los mismos.

Téngase en cuenta que, sin embargo, no haremos alusión a otros teoremas relacionados con la derivación o integración de las sucesiones y series funcionales. Nuestro objetivo no consiste en realizar un tratado exhaustivo de estas cuestiones, sino en aportar unas ideas generales para que los profesores interesados en la transmisión de conceptos y sus aspectos educacionales, usando las nuevas tecnologías, tengan un modelo en el cual apoyarse.

Antes de continuar con la exposición de los objetivos que pretendemos alcanzar y con el desarrollo de nuestra propuesta en sí, presentamos, de forma esquemática, aquellos aspectos que consideramos más novedosos y de los cuales hemos hecho mención a lo largo de esta introducción:

- Presentación y exposición de conceptos a partir de las cuatro fases de enseñanza del *esquema conceptual* propuesto en el Capítulo 1.

- Uso de distintos *registros de representación* estableciendo conexiones entre ellos y facilitando el paso de unos a otros.

- Utilización de *Maple* como software educativo que permite la visualización y manipulación de los conceptos, mediante la realización de pequeños programas de fácil manejo y a partir de ejemplos y contraejemplos (*organizador genérico*).

- Presentación global de los distintos registros de representación de un concepto por medio de *esquematizaciones o simplificaciones visuales.*

- Visualización de los conceptos fundamentales de convergencia por medio de *procesos dinámicos* a los cuales se accede mediante el uso del software.

- Tratamiento específico del concepto de convergencia puntual y uniforme a partir de las *sucesiones numéricas asociadas a un punto* del dominio de definición.

Finalizamos el capítulo haciendo una síntesis de dos experiencias llevadas a cabo con alumnos de primer curso de la licenciatura en Matemáticas. Se trata de un estudio comparativo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales, entre alumnos únicamente instruidos con métodos tradicionales y aquellos que además de esta enseñanza clásica recibieron una formación complementaria con uso de tecnología. El análisis detallado de los resultados obtenidos lo llevamos a cabo en el Capítulo 4; no obstante en este capítulo incluimos una sección dedicada a la descripción de los instrumentos utilizados para la obtención de los resultados a analizar.

2.2. Objetivos e hipótesis de investigación

En la sección 1.2 dedicada a la génesis del problema a investigar, expusimos con detalle cuáles fueron los motivos que nos incitaron a esta investigación y planteamos algunas de las preguntas a las que la misma tendría que dar respuesta.

Por otra parte y aunque en el Capítulo 3 analizaremos con detalle estas experiencias previas, recuerde el lector que esta investigación comenzó a gestarse durante varios años de contacto con la enseñanza universitaria. En ese tiempo observamos que alumnos, incluso ya licenciados, manifestaban importantes dificultades para asimilar, manipular y recordar diversos conceptos relacionados con problemas de convergencia en general. A principios de 1998, encuestamos a varios profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna. Sus respuestas expresaban cierta preocupación en torno a estos conceptos, pues su experiencia docente les permitía afirmar que los alumnos de los primeros cursos universitarios presentan auténticas dificultades para asimilarlos.

Posteriormente, tuvimos conocimiento del trabajo de Praslon [81]. En él se constata un notable fracaso en la etapa de transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria; además, se pone de manifiesto cierta insensibilidad por parte de los sistemas educativos respecto al reconocimiento de este fracaso. Coincidimos con el autor en la necesidad de sensibilizar a los profesores para mejorar los métodos de su práctica docente y es por ello por lo que, como educadores, intentaremos:

"Esforzarnos para conseguir que el conocimiento y la asimilación de conceptos difíciles llegue al mayor número posible de estudiantes".

Estas y otras experiencias constituyen el punto de partida para plantear un problema de investigación (véase sección 1.2) al que la literatura de la que disponemos no da respuesta. No obstante, las aportaciones de los profesores encuestados y el marco teórico al que ha dado lugar la revisión bibliográfica nos permite disponer, con cierto orden, los objetivos a alcanzar. Aunque a lo largo del desarrollo de esta memoria, hemos hecho mención de algunos de ellos, en esta sección los explicitamos conjuntamente. Concretamente, las aportaciones novedosas de nuestra propuesta persiguen una serie de objetivos que procedemos a señalar a continuación.

- En primer lugar, la aplicación de nuestra propuesta curricular, basada en las cuatro fases de enseñanza expuestas en la sección 1.6, debe aportar las estrategias para mejorar, en lo posible, el proceso de transmisión de los conceptos relacionados con la convergencia de sucesiones numéricas y sucesiones y series funcionales. En este sentido y como decíamos en la introducción a este trabajo, basamos nuestro diseño curricular en la creencia de que para nosotros *aprender es construir significado ante el obstáculo.*

Así, proponemos el uso del esquema conceptual y, en particular, del software Maple, con el objeto de introducir clásicamente los conceptos matemáticos, 1^a y 2^a fase de nuestro esquema, visualizarlos y seguidamente, en la fase manipulativa, a través de ejemplos y contraejemplos adecuadamente elegidos, consolidar las ideas. Pensamos que con todo ello, los profesores podemos mejorar nuestras técnicas de transmisión en el aula y favorecer el proceso de adquisición del conocimiento. Desde esta perspectiva, nuestra propuesta complementa los procedimientos habituales de la enseñanza tradicional.

- La utilización de Maple como software educativo debe facilitar al estudiante el uso de técnicas de visualización adecuadas para la comprensión de los conceptos, al tiempo que le permite la manipulación de los mismos a través de pequeños programas. Además, al liberarnos de la complejidad en los cálculos, reducimos el tiempo empleado en ellos y los profesores podemos plantear nuevos objetivos orientados a aspectos más conceptuales, en el sentido de relacionar unas formas de representación con otras y profundizar en la comprensión de los conceptos.

- Otro de nuestros objetivos consiste en fomentar el uso de los distintos registros de representación de un concepto partiendo de casos particulares. El uso del software Maple constituye un medio para coordinarlos, permitiendo además al alumno el paso o acceso rápido de un registro a otro en ambas direcciones; en este sentido lo hemos considerado como un organizador genérico de la naturaleza descrita por Tall [100].

Por otra parte, la comprensión de un concepto se pretende consolidar por medio de esquematizaciones o simplificaciones visuales en las que a modo de síntesis se estructura la información recibida y manipulada, exponiendo los distintos registros de representación del mismo. Ello da una visión global, holística de los distintos aspectos desde los que se puede contemplar ese concepto al tiempo que se establecen relaciones entre ellos. El uso de estas esquematizaciones persigue asimismo el refuerzo de los procesos de almacenamiento a corto y largo plazo, facilitando el recuerdo y la reconstrucción del conocimiento.

- El uso del esquema conceptual, con todas sus fases, da lugar a un proceso educativo en el que el estudiante es protagonista de su propio aprendizaje. En este sentido, es importante favorecer la motivación del alumnado, eligiendo ejemplos adecuadamente secuenciados y que faciliten su adaptación al entorno de trabajo.

Pensamos que si el alumno se siente motivado para el estudio e incitado a la reflexión de cuestiones profundas relacionadas con los temas tratados, además lograremos acortar el tiempo necesario para la adquisición de los conceptos.

Asimismo, teniendo en cuenta las investigaciones a las que hicimos referencia en la sección 1.3.1 sobre los antecedentes epistemológicos de los conceptos relacionados con los procesos de convergencia, proponemos también como objetivos los siguientes:

- Trataremos de superar el obstáculo simbólico estableciendo un"paralelismo" entre la definición formal de los conceptos y las representaciones gráficas obtenidas con el uso del software.

- Para superar el obstáculo lingüístico y geométrico derivado de la utilización de expresiones como *"tender, aproximarnos hacia, estar muy cerca de, etc."* introduciremos la idea de *"aproximación cercana"* así como el cálculo y la tabulación de distancias en la fase manipulativa.

- El obstáculo relacionado con el principio de continuidad pretendemos que el alumno lo supere a partir de ciertos ejemplos en los que pueda comprobar que el límite no siempre reproduce las propiedades de los términos de la sucesión.

- Para superar algunos de los obstáculos asociados a la propia naturaleza epistemológica de los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales, pensamos que resultará útil y ventajoso el tratamiento específico de los mismos a partir del estudio de las sucesiones numéricas asociadas a un punto del dominio de definición.

Es en el Capítulo 4 donde analizaremos las respuestas de los alumnos involucrados en las distintas experiencias en las que hemos aplicado nuestra propuesta. A partir de este análisis podremos comprobar si estos objetivos han sido alcanzados o si al menos hemos dado un paso más para la superación de los mismos.

2.3. Propuesta curricular

2.3.1. Sucesiones numéricas

Fase verbal

En los Institutos de Bachillerato, cuando comenzamos a explicar a nuestros alumnos el concepto de sucesión, en general lo solemos hacer de una forma natural, expresando con palabras sencillas que se trata de asignar o adjudicar, a cada número natural, elementos de un cierto conjunto, el cual no necesariamente tiene que ser numérico ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), puede ser cualquier conjunto de objetos de origen matemático o no (figuras geométricas, funciones de variable real, conjuntos finitos del tipo $\{5, 13, 16, 17, 28, 48\}$, $\{1, i, -1, -i\}$, etc.).

Por otra parte, el concepto que tratamos de exponer lo solemos expresar inicialmente, y sin recurrir a grandes alardes simbólicos, de la siguiente forma:

"Una sucesión es un proceso infinito: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..."

Los puntos suspensivos indican que los elementos continúan "indefinidamente"; el subíndice n sirve para indicar el lugar que ocupa cada término en la sucesión. Por tanto, hay tantos términos como números naturales, es decir, infinitos.

Técnicamente, la definición más extendida de sucesión de elementos de un conjunto genérico A (A distinto del conjunto vacío) es la de una aplicación de $\mathbb{N}$ en A.

$$f : \mathbb{N} \to A$$

A puede ser cualquier conjunto del Universo. En caso de que A sea un conjunto numérico la sucesión se denomina *sucesión numérica*. En particular, si $A = \mathbb{R}$, el campo de trabajo corresponde al de las sucesiones de números reales.

Fase de representación simbólica

Introducimos la simbología correspondiente, que puede ser de distinto tipo dependiendo de nuestros objetivos y de los medios de los que dispongamos. Además podemos proporcionar al alumno diferentes formas de representar simbólicamente una misma idea presentando enfoques que le permitan estudiar el concepto desde otras perspectivas.

Así, inicialmente ampliaremos la definición técnica de sucesión numérica escribiendo la "expresión simbólica" para que el concepto adquiera todo su significado:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow A \\ 1 &\rightarrow f(1) = a_1 \in A \\ 2 &\rightarrow f(2) = a_2 \in A \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n &\rightarrow f(n) = a_n \in A \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es importante insistir, apoyándonos en algunos ejemplos, en que la "variable n" tiende hacia infinito, lo que viene impuesto por el hecho de que f sea una aplicación y por tanto, todos los elementos de $\mathbb{N}$, deben tener una y sólo una imagen en el conjunto A, la cual puede repetirse o no. Así, debe quedar muy claro que:

- Una sucesión siempre tiene un número infinito de elementos y, por tanto, en los procesos de convergencia y divergencia de sucesiones de cualquier tipo, la variable n siempre tiende hacia *infinito*.

- El término que ocupa el lugar *n-ésimo*, $f(n) = a_n$, se denomima término general de la sucesión y viene expresado mediante una expresión algeraica en n.

- En el caso particular $A = \mathbb{R}$, diremos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, donde $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ representa el conjunto de todas las aplicaciones posibles de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

En los ejemplos que presentamos a lo largo del desarrollo de este capítulo las sucesiones consideradas serán sucesiones de números reales.

Fase de representación visual

Introducimos los primeros ejemplos de sucesiones con su correspondiente representación gráfica e insistimos en la existencia de dos tipos de representación: unidimensional y bidimensional. Nosotros hemos centrado la atención en esta última, porque estimamos que presenta ciertas ventajas (véase apartado 3.3.3 de esta memoria). No obstante, se ha comprobado mediante las encuestas analizadas en el capítulo siguiente, que los profesores en sus explicaciones hacen uso, en general, de la representación unidimensional.

Ejemplo 1

En los *programas 1 y 2*[1] presentamos las gráficas, bidimensional y unidimensional, respectivamente, de la sucesión que tiene por término general $a_n = \frac{(-1)^n}{n} - 3$. En primer lugar, mediante la instrucción "restart", borramos de la memoria todo lo que pueda existir

[1]Nuestros programas no son convencionales, tipo FORTRAN o BASIC. Dado el gran número de ellos, les hemos dado esta denominación para facilitar la lectura del trabajo. La mayoría están concebidos con unas pocas instrucciones sencillas para facilitar la manipulación del estudiante.

debido a aplicaciones anteriores. Seguidamente, definimos la sucesión desde un punto de vista "funcional" y mediante las instrucciones "plot" y "seq" obtenemos la gráfica deseada.

Programa 1

```
>restart:
>f:=n->((-1)^n/n)-3;
```

$$f := n \to \frac{(-1)^n}{n} - 3$$

```
>plot([seq([k,f(k)],k=1..40)],style=point);
```

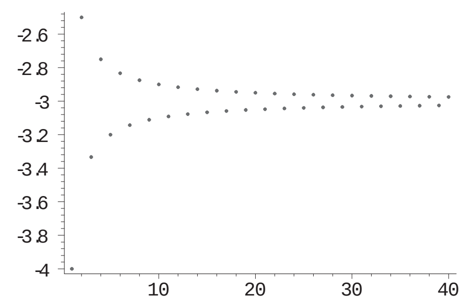


FIGURA 2.1

Por medio de un programa algo más sofisticado, pero no necesario para el desarrollo de esta instrucción, podemos obtener la representación unidimensional. Se comienza el programa reiniciando el sistema, "restart", y cargando el paquete o librería "with(plots)", imprescindible para asignar una variable a una gráfica y así obtener simultáneamente varias representaciones.

Programa 2

```
>restart:with(plots):
>d1:=plot([seq([(-1)^n/n-3,0],n=1..25)],x=-4.5..-2,y=-1..1,style=point,color=black,axes=
none,thickness=3,symbol=circle):
>d2:=plot(0,x=-4.2..-2.3):
>d3:=textplot({[-3,-0.1,`-3`],[-3,0.1,`L`],[-4,0.1,`1º`],[-4,-0.1,`-4`],[-2.5,0.1,`2º`],[-2.5,-0.1,`-2.5`],
[-3.3,0.1,`3º`],[-3.4,-0.1,`-3.33`],[-2.75,0.1,`4º`],[-2.77,-0.1,`-2.75`]}):
>display({d1,d2,d3});
```

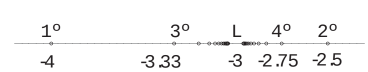


FIGURA 2.2

Fase de manipulación

El alumno comienza a dar sus primeros pasos en el manejo del concepto. A partir de este momento, bajo las indicaciones del profesor que guiará el proceso, investiga y trata de explorar la realidad matemática para así obtener sus propias conclusiones. Las actividades deberán estar estructuradas de forma que el grado de dificultad aumente progresivamente y no hemos de perder de vista la importancia de la motivación; así insistimos en que los ejemplos elegidos deben ser adecuados para que el estudio resulte accesible y a la vez atractivo. El alumno juega un papel activo y dinámico: sus investigaciones y logros le permitirán ir conformando su propio conocimiento matemático con cierta autonomía.

Maple invita a "manipular" el ejemplo de la fase anterior, haciendo un listado y visualizando los resultados. Para obtener los primeros quince términos de la sucesión, en el *programa 1*, usamos la sentencia de iteración "for-from-do-od" y le exigimos que nos devuelva cada término con veinte cifras de precisión.

```
>for k from 1 to 15 do a(k)=evalf(f(k),20) od;
```

$a(1) = -4$

$a(2) = -2{,}5000000000000000000$	$a(9) = -3{,}1111111111111111111$
$a(3) = -3{,}3333333333333333333$	$a(10) = -2{,}9000000000000000000$
$a(4) = -2{,}7500000000000000000$	$a(11) = -3{,}0909090909090909091$
$a(5) = -3{,}2000000000000000000$	$a(12) = -2{,}9166666666666666667$
$a(6) = -2{,}8333333333333333333$	$a(13) = -3{,}0769230769230769231$
$a(7) = -3{,}1428571428571428571$	$a(14) = -2{,}9285714285714285714$
$a(8) = -2{,}8750000000000000000$	$a(15) = -3{,}0666666666666666667$

Ejemplo 2

Este ejemplo resulta adecuado sobre todo para el desarrollo posterior del concepto de límite. No es el ejemplo típico de una función racional o irracional con la que podamos operar fácilmente; se trata de una sucesión numérica definida por una función trascendente.

En el programa que sigue, igual que en el precedente, definimos por medio del comando "seq" los puntos $(n, f(n))$ que dan lugar a la sucesión representada en su gráfica bidimensional. Ello nos permitirá visualizar algunas propiedades.

Programa 3

```
>restart:with(plots):
>f:=n->n*sin(1/n);
```

$$f := n \to n \cdot sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

```
>S:= seq([n,f(n)],n=10..60):
```

>plot([S],x=10..60,style=point);

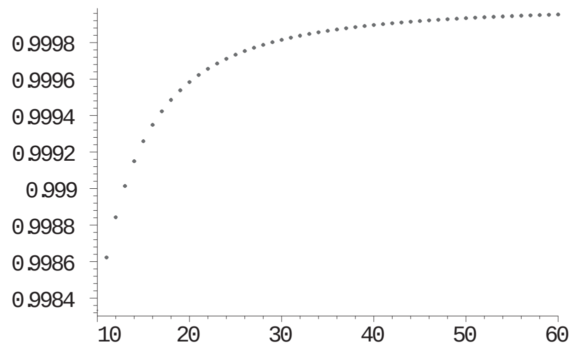


FIGURA 2.3

La observación de la gráfica nos permite predecir que la sucesión “tiende” o se “va acercando” hacia 1 a medida que n aumenta, y ese acercamiento tiene lugar monótonamente; comprobemos que al evaluar un término avanzado de la misma, concretamente $n = 1000000$, Maple redondea el resultado:

>evalf(f(1 000 000);

$$1{,}000000000$$

Este hecho suele generar confusión entre los estudiantes y es por ello, por lo que el profesor debe dejar claro que el resultado obtenido es una aproximación; en este caso, el valor del límite no se alcanza nunca.

Nuestro estudio continúa, tras proporcionar a los estudiantes algunas clasificaciones de las sucesiones de números reales[2], con el desarrollo del concepto de sucesión convergente. Utilizaremos los mismos ejemplos con el fin de completar su estudio. Algunos de los programas que vamos a utilizar son continuación de los ya expuestos, *programas 1 y 2*, y aludiremos en cada caso a los mismos.

[2]En este punto convendría que, complementariamente, se presentaran los tipos más habituales de sucesiones numéricas: a) Aquellas cuyos términos están en progresión aritmética de 1^{o}orden, 2^{o}orden, 3^{o}orden, etc.; b) Aquellas cuyos términos están en progresión geométrica; c) Las sucesiones cuyos términos son cuadrados perfectos, cubos perfectos, etc.; d) Sucesiones alternativamente positivas y negativas; e) Las que tengan infinitos términos iguales (constantes), o que tomen sólo dos valores, tres valores, etc.; f) Las expresadas a partir de algunos términos generales de especial interés; g) Sucesiones definidas por recurrencia, etc. Por otra parte, es conveniente insistir en que la clasificación que vamos a presentar en esta memoria se corresponde con: Sucesiones convergentes (que admiten límite finito), divergentes (que se “disparan” hacia $+\infty, -\infty$, ó ∞) y sucesiones oscilantes, que son las restantes.

2.3.2. Sucesiones convergentes

Fase verbal

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente hacia un determinado valor* cuando sus términos se aproximan progresivamente a él, es decir, a medida que n crece, "n se hace grande", los infinitos términos de la sucesión están cada vez más cerca de ese número que denotaremos por L, de tal forma que la distancia entre éstos y L es cada vez más pequeña.

De forma más rigurosa, dada una sucesión a_1, a_2, a_3, ..., $a_n, ...$ se dice que es convergente y su límite es L cuando a medida que n toma valores muy grandes, $n \to \infty$, los términos de la sucesión "tienden" a L, $a_n \to L$, en el sentido de que cada vez están más próximos y más cerca del mismo. Se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

En los primeros cursos de Universidad, esto último lo solemos expresar diciendo: "Para todo número real positivo, por pequeño que sea (este número se denota por ε), podremos encontrar un subíndice de la sucesión (ν) a partir del cual la diferencia $a_n - L$, en valor absoluto, es tan pequeña como queramos".

Por tanto, si en una representación bidimensional de una sucesión tomamos una "banda" centrada en L y de anchura 2ε (véase la figura 2.5), por muy estrecha que ésta sea, siempre podemos encontrar un valor de n, ν, a partir del cual todos los términos de la sucesión penetran en la misma (la diferencia $a_n - L$, en valor absoluto, es menor que ε); fuera de ella sólo queda un número finito de términos.

Fase de representación simbólica

De forma más precisa, pero equivalente, las argumentaciones anteriores quedan sintetizadas en la siguiente definición standard:

$$\{a_n\}_{n\in N} \text{ es } \textit{convergente hacia } L \text{ si y sólo si}$$
$$[\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\nu\,(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\wedge\; \forall n \geq \nu \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon]$$

Desde una perspectiva bidimensional, la noción de "banda" es fundamental para asimilar el concepto de límite. Nótese que decir *"para todo ε por pequeño que sea"* es equivalente a expresar *"para toda banda por estrecha que sea"*. El paralelismo entre ambas expresiones resulta claro al observar la gráfica y al contemplar la definición simbólica de límite.

Desde el punto de vista educacional:

- El número positivo ε es un valor que elegimos nosotros arbitrariamente y controla el ancho de la banda.

- El subíndice ν es un número natural que depende de ε, es decir, varía de forma inversa a ε (cuando ε disminuye, ν aumenta; y viceversa). A ν lo denominamos *índice de penetración.*

- A partir de ν, $\forall n \geq \nu$, los términos de la sucesión "penetran" en dicha banda: $|a_n - L| < \varepsilon$, (esta diferencia "es tan pequeña como queramos" puesto que ε lo elegimos arbitrariamente pequeño).

Fase de representación visual

Como paso previo a la construcción de la gráfica donde puedan visualizarse todos los elementos descritos anteriormente y con el objeto de consolidar el concepto formal de convergencia, pensamos que resultaría adecuado realizar algunos cálculos y comprobaciones que faciliten al alumno su comprensión.

Volviendo al *programa 1* y haciendo uso de la sentencia "limit", obtenemos el valor exacto del límite, que en este caso es -3.

>Limit(f(n),n=infinity)=limit(f(n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} - 3 = -3$$

Para comprobarlo podemos seguir varias vías:

A) Con lápiz y papel: Al aplicar la definición (ε, ν) de límite y una vez fijado ε, a través de cálculos algebraicos, podemos encontrar el subíndice ν a partir del cual se verifica la desigualdad:

$$|a_n - L| = \left|\tfrac{(-1)^n}{n} - 3 - (-3)\right| = \left|\tfrac{(-1)^n}{n}\right| = \tfrac{1}{n} < \varepsilon$$

En este caso elegimos $\varepsilon = 0{,}1$ y por tanto, es necesario resolver la inecuación:

$$\tfrac{1}{n} < 0{,}1 \Rightarrow n > 10$$

Es decir, a partir de $\nu = 11$ la desigualdad anterior es cierta, con lo cual, todos los términos a partir de $\nu = 11$ penetran en la banda.

B) Numéricamente: Observando que los términos de la sucesión se aproximan a -3 a medida que el valor de n se "hace grande". En este caso, remitimos al lector al listado de los quince primeros términos de la página 96.

Podemos comprobar que la sucesión se acerca progresivamente a -3 como si estuviera saltando alternativamente "por arriba" y "por abajo" del mismo. Los términos impares toman siempre valores superiores a -3, mientras que los pares toman valores inferiores al mismo.

C) Con gráficas en dos dimensiones: Remitiéndonos a la figura 2.1 predecimos, de forma inmediata, que efectivamente el valor del límite es -3.

Para profundizar en ello aplicamos la definición formal de límite. Tomemos un valor de ε y comprobemos que por pequeño que éste sea, siempre podemos encontrar un subíndice ν a partir del cual todos los términos de la sucesión caen dentro de la banda de centro -3 y ancho 2ε. Ello es equivalente a comprobar que a partir de ese subíndice "la distancia de cualquier término de la sucesión a -3 es menor que ε".

Calculemos, en primer lugar, la distancia de los quince primeros términos de la sucesión al valor -3 mediante la instrucción "for-from-to-do-od" y estimemos a partir de qué término esa distancia es menor que $\varepsilon = 0{,}1$:

```
>for k from 1 to 15 do 'k'=k,abs('f(k)'-(-3))=evalf(abs(f(k)-(-3))) od;
```

$$k = 1,\ |f(k) - (-3)| = 1$$
$$k = 2,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}5000000000$$
$$k = 3,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}3333333333$$
$$k = 4,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}2500000000$$
$$k = 5,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}2000000000$$
$$k = 6,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}1666666667$$
$$k = 7,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}1428571429$$
$$k = 8,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}1250000000$$
$$k = 9,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}1111111111$$
$$k = 10,\ |f(k) - (-3)| = 0{,}1000000000$$
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{k = 11},\ |f(k) - (-3)| = \mathbf{0{,}0909090909} \\ \mathbf{k = 12},\ |f(k) - (-3)| = \mathbf{0{,}0833333333} \\ \mathbf{k = 13},\ |f(k) - (-3)| = \mathbf{0{,}0769230769} \\ \mathbf{k = 14},\ |f(k) - (-3)| = \mathbf{0{,}0714285714} \\ \mathbf{k = 15},\ |f(k) - (-3)| = \mathbf{0{,}0666666666} \end{array}\right.$$

Efectivamente, a partir del término $k = 11$ esa distancia es menor que $\varepsilon = 0{,}1$, lo que nos indica que a partir de ese término, él incluido, todos los demás se introducen en la banda (para todos ellos se tiene: $|a_n - L| < \varepsilon$) y fuera de ella deben quedar los diez primeros términos.

Gráficamente podemos corroborar los resultados obtenidos. Para un estudiante es muy sencillo elaborar un programa para obtener la banda; ha de tener en cuenta la desigualdad:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

Así, si L es el valor límite de la sucesión considerada, ε un valor positivo arbitrario que corresponde a la semianchura de la banda y a y b los extremos del intervalo donde va a graficar, basta una sola instrucción:

>plot({L-epsilon,L+epsilon},x=a..b);

Posteriormente, podemos sofisticarlo añadiendo elementos que den lugar a una visión estéticamente más atractiva.

Continuando con la sucesión del **ejemplo 1** y mediante el *programa 4*, dibujamos la banda centrada en -3 y de ancho 0,2; utilizamos para ello la siguiente secuencia de instrucciones:

Programa 4

>restart:with(plots):

>d1:=plot({-3,-2.9,-3.1},x=0..40,color=black):

>d2:=plots[polygonplot]({[[0,-2.9],[40,-2.9],[42,-3.1],[0,-3.1]]}):

>t1:=textplot({[10,-2.6,“],[10,-3.8,“],[10,-2.85,‘-3+0.1‘],[10,-3.15,‘-3-0.1‘],[20,-3.4 ,‘Banda de anchura “2 epsilon”, centrada en -3,epsilon=0.1‘]}):

>display({d1,d2,t1});

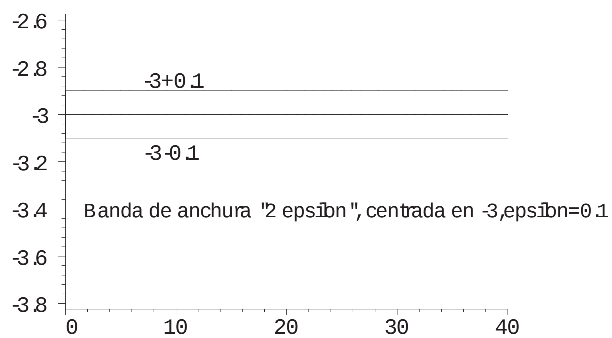


FIGURA 2.4

Añadiendo las instrucciones siguientes obtenemos la figura 2.5:

>d4:=display({d1,d2}):

>d5:=plot([seq([k,(-1)^k/k-3],k=1..40)],style=point,color=black):

>display({d4,d5});

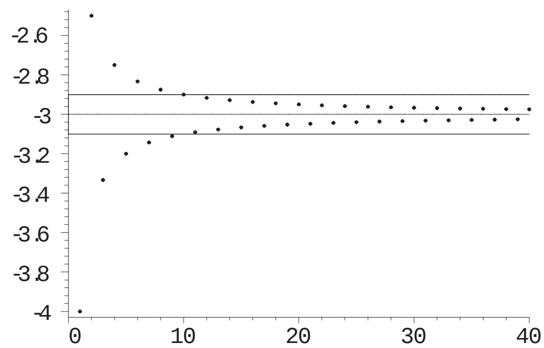


FIGURA 2.5

Como hemos visto, podemos comprobar con cálculos algebraicos estos resultados. Para ello resolvimos la inecuación:

$$\left|\left(\frac{(-1)^n}{n}-3\right)-(-3)\right|<\frac{1}{10} \text{ si y sólo si } \left|\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{10}$$

Maple dispone del comando "solve" para obtener la solución o soluciones de ecuaciones o inecuaciones de este tipo:

>solve({(1/n)<1/10},n);

$$\{n<0\}\,,\,\{10<n\}$$

Como n es positivo, tomamos la parte entera de la segunda solución más una unidad, es decir, $\nu = 11$.

Ejemplo 3

Utilizamos este ejemplo por varias razones:

1^o) El alumno puede calcular y obtener resultados cómodamente con lápiz y papel.

2^o) Al mismo tiempo puede manipular y comprobar sus resultados por medio del software.

3^o) A partir de él presentamos una *esquematización visual* de la definición formal de límite, dando una visión global de los distintos registros de representación del concepto.

La sucesión es $a_n = \frac{12}{5}\frac{n}{n+3}$ y para justificar, mediante la definición formal, que el valor del límite es 2,4 tomamos $\varepsilon = 0{,}4$.

Con lápiz y papel el alumno realiza los cálculos necesarios, es decir, en primer lugar calcula el valor del límite y a continuación resuelve la inecuación correspondiente para obtener el valor del índice de penetración ν:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{5} \cdot \frac{n}{n+3} = \frac{12}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}} = \frac{12}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n}}$$

A continuación pasamos al límite, es decir, sustituimos n por ∞:

$$\tfrac{12}{5} \cdot \tfrac{1}{1+\frac{3}{\infty}} = \tfrac{12}{5} \cdot \tfrac{1}{1+0} = \tfrac{12}{5} = 2{,}4$$

Dado $\varepsilon = 0{,}4$, $\exists \nu \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n \geq \nu$ se verifica que $\left|\frac{12}{5}\frac{n}{n+3} - \frac{12}{5}\right| < 0{,}4$

$$\left|\tfrac{12}{5}\tfrac{n}{n+3} - \tfrac{12}{5}\right| < 0{,}4 \Rightarrow |12n - 12n - 36| < 0{,}4 \cdot |5n+15| \Rightarrow 36 < 2n + 6 \Rightarrow 30 < 2n \Rightarrow$$
$$15 < n \Rightarrow \nu = E\,[15] + 1 = 16$$

En la primera parte del *programa 5* el alumno comprueba sus resultados; la segunda proporciona una representación gráfica bidimensional y otra unidimensional, donde se observa cómo los elementos de la sucesión se aproximan cada vez más al valor límite. El desarrollo del programa lo presentamos sin comentarios:

Programa 5

```
>restart:with(plots):
>f:=n->(12/5)*n/(n+3):
>Limit(f(n),n=infinity)=evalf(limit(f(n),n=infinity),2);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12}{5}\frac{n}{n+3} = 2{,}4$$

```
>plot([seq([n,f(n)],n=1..40)],x=0..40,style=point,symbol=circle,xtickmarks=16,color=black);
```

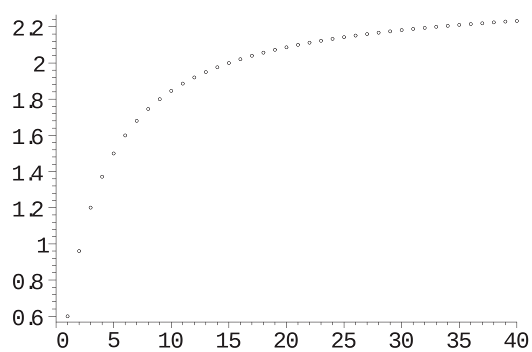


FIGURA 2.6

```
>abs(f(n)-2.4)<0.4;
```

$$\left|\tfrac{12}{5}\tfrac{n}{n+3} - 2{,}4\right| < ,4$$

```
>solve({ %},n);
```

$$\{n < -21\}, \{15 < n\}$$

>nu:=floor(15)+1;

$$\nu := 16$$

>for n from 13 to 19 do 'n'=n,abs('f(n)-2.4')=evalf(abs(f(n)-2.4),5) od;

$$n = 13,\ |f(n) - 2{,}4| = {,}4500$$
$$n = 14,\ |f(n) - 2{,}4| = {,}4235$$
$$n = 15,\ |f(n) - 2{,}4| = {,}4$$
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{n = 16}, |\mathbf{f(n)} - \mathbf{2{,}4}| = \mathbf{{,}3789} \\ \mathbf{n = 17}, |\mathbf{f(n)} - \mathbf{2{,}4}| = \mathbf{{,}3600} \\ \mathbf{n = 18}, |\mathbf{f(n)} - \mathbf{2{,}4}| = \mathbf{{,}3429} \\ \mathbf{n = 19}, |\mathbf{f(n)} - \mathbf{2{,}4}| = \mathbf{{,}3273} \end{array}\right.$$

>d1:=plot([seq([n,f(n)],n=1..40)],x=0..40,style=point,symbol=circle,xtickmarks=16,color=black):

>d2:=plot({12/5,12/5+.4,12/5-.4,[[16,0],[16,2]]},x=0..40,y=0.5..2.9,color=black,thickness=3):

>display({d1,d2});

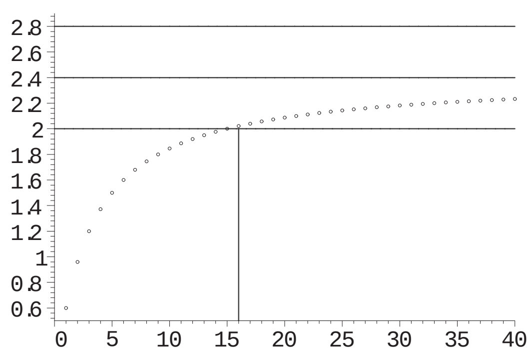


FIGURA 2.7

Por último, observamos el comportamiento de la sucesión en una representación gráfica unidimensional:

>restart:with(plots):

>f:=n->(12/5)*n/(n+3):

>d1:=plot([seq([f(n),0],n=1..40)],x=f(1)-.05..f(40)+0.6,y=-1..1,style=point,color=black, axes=none,thickness=3,symbol=circle):

>d2:=plot({0,[[f(40)-0.2,-0.1],[f(40)-0.2,0.1]],[[f(40)+0.2,-0.1],[f(40)+0.2,0.1]]}, x=f(1)-.05..f(40)+0.4,y=-1..1,color=black):

>t1:=textplot({[f(40)-0.2,-0.3,'L-0.4'],[f(40)+0.2,-0.3,'L+0.4'],[f(40),0.3,'L=2.4']}):

>display({d1,d2,t1});

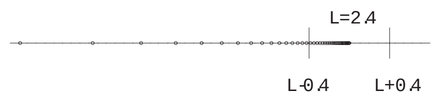


FIGURA 2.8

A partir de este ejemplo presentamos, en la figura 2.9, una *esquematización visual* del proceso de convergencia. En ella, el alumno comprueba que la sucesión $a_n = \frac{12}{5}\frac{n}{n+3}$ "tiende" hacia 2,4 y le proporcionamos una visión global de la situación, permitiéndole apreciar, simultáneamente, varios aspectos del concepto. Para hacer más factible su comprensión, esta simplificación visual incluye:

- La expresión algorítmica de la sucesión.

- Las gráficas unidimensional y bidimensional con los cuarenta primeros términos de la sucesión.

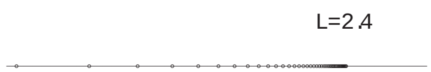
- La correspondiente inecuación a resolver para obtener el índice de penetración.

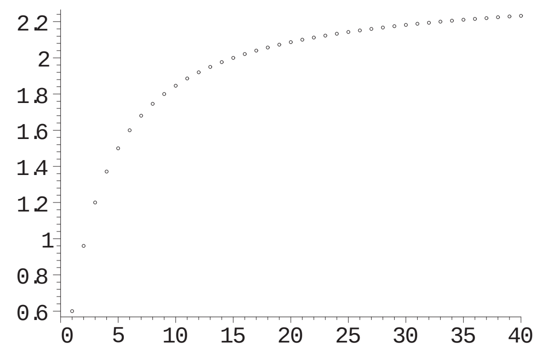
- Tabulaciones de las diferencias de los términos 13^o, 14^o, 15^o, 16^o, 17^o, 18^oy 19^oy el límite.

- Gráfica bidimensional incluyendo la banda de semianchura 0,4, en la que se observa que el índice de penetración es $\nu = 16$.

ESQUEMATIZACIÓN VISUAL

$$a_n = \frac{12}{5}\frac{n}{n+3}$$





$$\left|\frac{12}{5}\frac{n}{n+3} - 2{,}4\right| < 0{,}4 \Rightarrow \nu = 16$$

$$n = 13, |f(n) - 2{,}4| = {,}4500$$
$$n = 14, |f(n) - 2{,}4| = {,}4235$$
$$n = 15, |f(n) - 2{,}4| = {,}4$$

$$\forall n \geq \nu = 16 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{n = 16, |f(n) - 2{,}4| = {,}3789} \\ \mathbf{n = 17, |f(n) - 2{,}4| = {,}3600} \\ \mathbf{n = 18, |f(n) - 2{,}4| = {,}3429} \\ \mathbf{n = 19, |f(n) - 2{,}4| = {,}3273} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

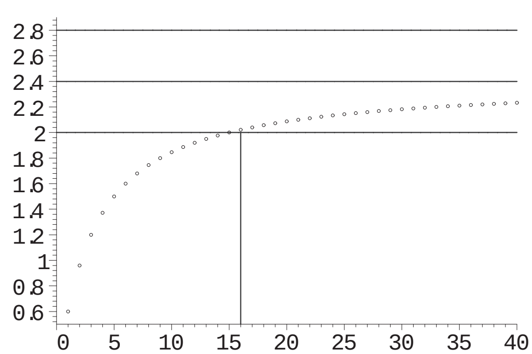


Figura 2.9

Fase de manipulación

Retomamos de nuevo la sucesión $a_n = n \cdot sen\left(\frac{1}{n}\right)$ para investigar su límite. Recordemos que el *programa 3* es el correspondiente a este ejemplo. Las instrucciones que siguen pueden añadirse directamente al mismo.

En primer lugar, corroboramos la predicción que se hizo sobre el valor del límite.

>Limit(f(n),n=infinity)=limit(f(n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot sen\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Nótese que, en este caso, el alumno no puede manipular con lápiz y papel para aplicar la definición formal, pues no podría despejar n en una expresión del tipo:

$$\left|n \cdot sen\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right| < \varepsilon$$

Maple facilita la tarea. Se le propone que tome $\varepsilon = 0{,}0003$ y que resuelva la inecuación correspondiente para encontrar el índice de penetración:

>epsilon:=0.0003;

$$\varepsilon := ,0003$$

Como ya hemos visto en los ejemplos anteriores, este índice lo podrá averiguar de tres maneras:

a) Resolviendo la inecuación y despejando n.

b) Haciendo un listado de los valores correspondientes y observando "justo el momento" en el que la diferencia, en valor absoluto, es menor que 0,0003.

c) Visualizando en una gráfica adecuada los resultados.

El alumno deberá justificar tal búsqueda a partir de las tres vías propuestas:

a)

>eq:=(abs(n*sin(1/n)-1)=0.0003);

$$eq := \left|n \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right| = ,0003$$

Con el propósito de anticipar resultados y para saber cuántas soluciones tiene la ecuación anterior en $\mathbf{R}$, representamos gráficamente la función $f(x) = n \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) - 1$.

>plot(abs(x*sin(1/x)-1),x=-1..1,y=0..1.3);

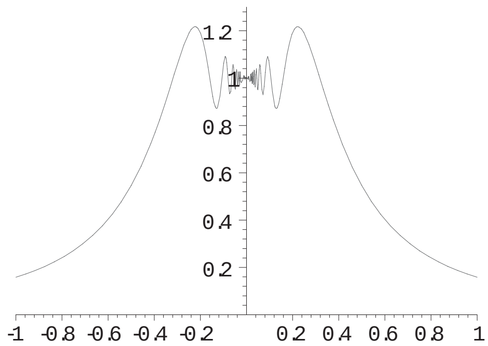


FIGURA 2.10

La figura 2.11 nos permite observar los puntos de corte, para ello basta modificar los rangos de x e y en la instrucción anterior:

>plot(abs((x*sin(1/x))-1)-.0003,x=-40..40,y=-0.001...0.003);

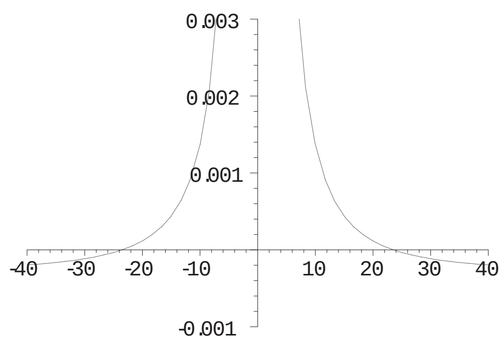


FIGURA 2.11

A partir de esta figura sabemos que la ecuación a resolver tiene dos soluciones, pero sólo nos interesa la positiva. Por tanto le exigimos que nos devuelva la solución comprendida entre $n = 0$ y $n = 40$:

>fsolve(abs(n*sin(1/n)-1)=0.0003,n=0..40);

23,56916531

El índice de penetración es el número natural 24, es decir, la parte entera de la solución obtenida más 1:

>nu:=floor(%)+1;

$$\nu = 24$$

La veracidad de este resultado se comprueba resolviendo el apartado b).

b)

```
>for n from 18 to 28 do 'n'=n,abs('f(n)'-1)=evalf(abs(f(n)-1)) od;
```

$$n = 18,\ |f(n) - 1| = ,0005143238$$
$$n = 19,\ |f(n) - 1| = ,0004616165$$
$$n = 20,\ |f(n) - 1| = ,0004166146$$
$$n = 21,\ |f(n) - 1| = ,0003778862$$
$$n = 22,\ |f(n) - 1| = ,0003443170$$
$$n = 23,\ |f(n) - 1| = ,0003150301$$
$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{n = 24},\ |f(n) - 1| = \mathbf{,0002893266}\\ \mathbf{n = 25},\ |f(n) - 1| = \mathbf{,0002666452}\\ \mathbf{n = 26},\ |f(n) - 1| = \mathbf{,0002465302}\\ \mathbf{n = 27},\ |f(n) - 1| = \mathbf{,0002286078}\\ \mathbf{n = 28},\ |f(n) - 1| = \mathbf{,0002125716}\end{array}\right.$$

Se observa que, efectivamente, a partir de $\nu = 24$, las diferencias son menores que 3 diezmilésimas.

c) Por último, se pueden "visualizar" todas estas cuestiones en una representación gráfica:

```
>d1:=plot([S],x=10..60,y=.9983..1.001,style=point,symbol=diamond):
>d2:=plot({[[0,1.0003],[60,1.0003]],[[0,0.9997],[60,0.9997]],[[10,1],[60,1]]}):
>d3:=plot([[24,0.9983],[24,0.9997]]):
>t1:=textplot({[23,0.99835,‘24‘],[15,1.00043,‘1+0.0003‘],[15,0.99958,‘1-0.0003‘],[32,1..00075,
‘Limite de una sucesión‘]}):
>display({d1,d2,d3,t1});
```

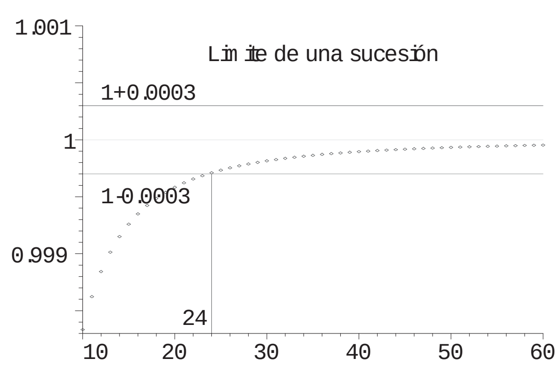


FIGURA 2.12

Ejemplo 4. Banda animada

Nuestro objetivo, al elegir este ejemplo, es hacer notar al alumno la dependencia funcional de ν respecto de ε; pero además lo haremos de tal forma que el proceso se vea en movimiento. Presentamos pues lo que hemos denominado “banda animada” utilizando para ello la sucesión de término general $a_n = \frac{3n}{n+5}$. Es interesante el efecto óptico que se obtiene al observar cómo a medida que hacemos variar ε, el valor de ν conlleva una variación, en el sentido de que si ε disminuye, ν aumenta (y viceversa).

En este caso, evidentemente, no se exige al alumno que construya el programa, el cual requiere un mayor manejo del software, sino que debe ser el profesor, mediante el uso del cañón de proyección, quien lo presente para que se observe la dependencia aludida.

Programa 6

```
>restart:with(plots):
>f:=n->(3*n)/(n+5);
```

$$a_n = \frac{3n}{n+5}$$

```
>l:=limit(f(n),n=infinity);
```

$$l := 3$$

```
>for k from 1 to 5 do epsilon[k]:=evalf(1/k,2) od;
```

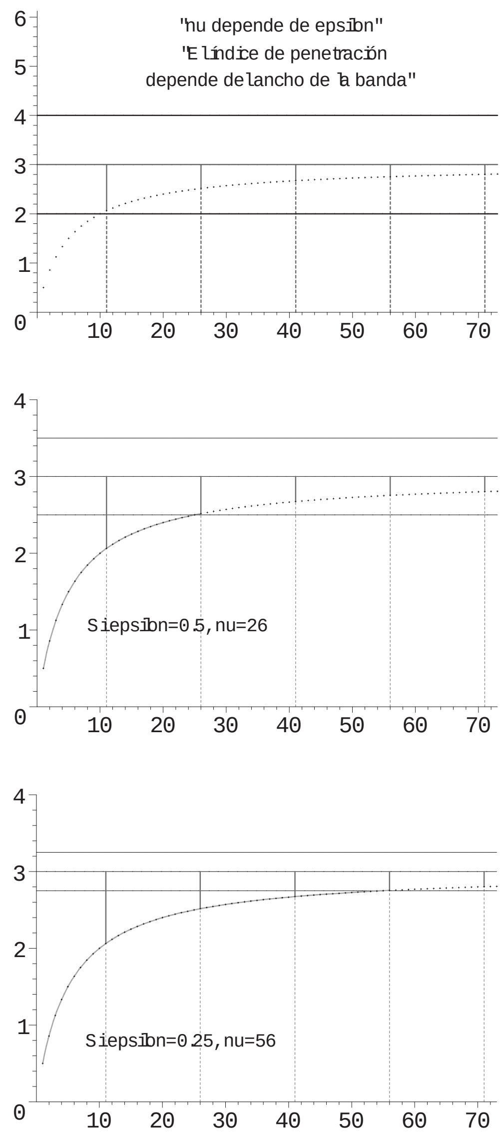
$$\varepsilon_1 := 1.$$
$$\varepsilon_2 := ,50$$
$$\varepsilon_3 := ,33$$
$$\varepsilon_4 := ,25$$
$$\varepsilon_5 := ,20$$

```
>for k from 1 to 5 do nu[k]:=max(solve(abs(f(n)-l)=1/k,n))+1 od;
```

$$\nu_1 := 11$$
$$\nu_2 := 26$$
$$\nu_3 := 41$$
$$\nu_4 := 56$$
$$\nu_5 := 71$$

```
>g:=(x,n)->(l+1)-n:
>p:=animate(g(x,n),x=0..nu[5]+2,n=0..1,frames=25,color=black,thickness=3):
>s:=(x,n)->n-(1-l):
>q:=animate(s(x,n),x=0..nu[5]+2,n=0..1,frames=25,color=black,thickness=3):
>r:=animatecurve(f(n),n=0..71,color=green,thickness=3):
>d1:=plot([seq([n,f(n)],n=1..nu[5]+2)],style=point,color=blue):
>d2:=plot(l,x=0..nu[5]+2):
>d3:=plot({[[nu[1],0],[nu[1],l-epsilon[1]]],[[nu[2],0],[nu[2],l-epsilon[2]]],[[nu[3],0],[nu[3],
l-epsilon[3]]],[[nu[4],0],[nu[4],l-epsilon[4]]],[[nu[5],0],[nu[5],l-epsilon[5]]]},linestyle=2,
color=red):
>d4:=plot({[[nu[1],f(nu[1])],[nu[1],l]],[[nu[2],f(nu[2])],[nu[2],l]],[[nu[3],f(nu[3])],[nu[3],l]],
[[nu[4],f(nu[4])],[nu[4],l]],[[nu[5],f(nu[5])],[nu[5],l]]},linestyle=1,color=red,thickness=3):
```

```
>t1:=textplot([nu[5]/2,l+3,‘“nu depende de epsilon”‘]):
>t2:=textplot([nu[5]/2,l+2.5,‘“El índice de penetración‘]):
>t3:=textplot([nu[5]/2,l+2,‘depende del ancho de la banda”‘]):
>display({p,q,r,d1,d2,d3,d4,t1,t2,t3});
```



$$\varepsilon = [1, ,5, ,33, ,25, ,2]$$
$$\nu = [11, 26, 41, 56, 71]$$

FIGURA 2.13

2.3.3. Sucesiones divergentes

Fase verbal

Diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *divergente hacia* $+\infty$ si crece de modo que sus términos acaban superando a cualquier número por grande que éste sea. Con más precisión, por muy grande que sea el valor de una constante positiva M considerada, siempre podemos encontrar términos de la sucesión que superen a M.

Así pues, para toda "banda" centrada en el origen, por ancha que ésta sea, de semiamplitud M, arbitraria, podemos encontrar un subíndice a partir del cual todos los términos de la sucesión "se salen fuera" de la misma (véase la parte superior de la figura 2.14 donde está representada f).

Del mismo modo, una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *divergente hacia* $-\infty$ si tomando un valor positivo M, por grande que éste sea, siempre podremos encontrar términos de la sucesión menores que $-M$ (véase la parte inferior de la figura 2.14).

Por último, diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *divergente hacia* ∞, sin precisar el signo, si dada una constante positiva M, por grande que ésta sea, siempre podemos encontrar términos de la sucesión con valor absoluto superior a M. En este caso, obsérvese que una sucesión tiende a ∞ si a partir de un cierto subíndice, todos sus términos se salen "fuera" de la banda.

Fase de representación simbólica

Simbólicamente las tres definiciones anteriores quedan reflejadas de la manera siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ si y sólo si } [\forall M > 0 \Rightarrow \exists\nu\,(M) \in \mathbf{N} \ \wedge \ \forall n \geq \nu : a_n > M]$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ si y sólo si } [\forall M > 0 \Rightarrow \exists\nu\,(M) \in \mathbf{N} \ \wedge \ \forall n \geq \nu : a_n < -M]$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ si y sólo si } [\forall M > 0 \Rightarrow \exists\nu\,(M) \in \mathbf{N} \ \wedge \ \forall n \geq \nu : |a_n| > M]$$

Fase de representación visual

Para visualizar estas definiciones presentamos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 5

Dada la sucesión $a_n = 3^{\frac{n-2}{5}} - 3$, en el *programa 7* incluimos las gráficas de a_n y de su opuesta $-a_n$, para realizar un estudio conjunto y comparativo de la divergencia hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$ respectivamente.

Programa 7

```
>restart:with(plots):
```

```
>f:=n->3^((n-2)/5)-3:
>L:=seq([n,f(n)],n=1..30):
>d1:=plot([L],x=1..30,y=-20..400,style=point):
>R:=seq([n,-f(n)],n=1..30):
>d2:=plot([R],x=1..30,y=-400..20,style=point):
>d3:=plot([[0,200],[30,200]]):
>d4:=plots[polygonplot]({[[0,200],[32,200],[32,-200],[0,- 200]]}):
>d5:=plot([[0,-200],[30,-200]]):
>t1:=textplot([[2,250,`+M`],[2,-250,`-M`]]):
>display({d1,d2,d3,d4,d5,t1});
```

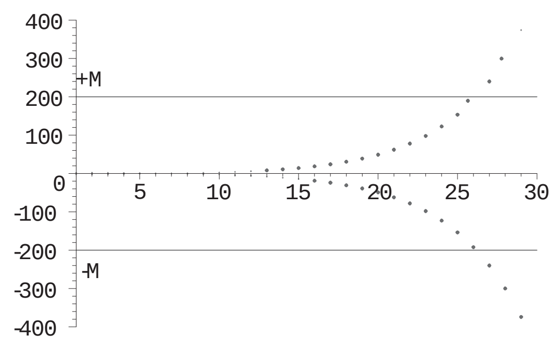


Figura 2.14

Se observa que, en el ejemplo, hemos tomado $M = 200$ y el subíndice a partir del cual los términos se salen fuera de la banda es 27. Para comprobarlo podemos utilizar la definición formal, siendo el cálculo de $\nu = \nu(M)$ similar a los expuestos en el apartado anterior. Si se reitera el proceso con otros valores de M, mayores que 200, el comportamiento de la sucesión es similar. Así pues, predecimos, de la observación de la figura 2.14 y otras análogas, que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty$$

Estos dos límites se pueden calcular directamente:

```
>Limit(f(n),n=infinity)=limit(f(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\left(\frac{1}{5}n-\frac{2}{5}\right)} - 3 = \infty$$

```
>Limt(-f(n),n=infinity)=limit(-f(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \text{lím} -3^{\left(\frac{1}{5}n-\frac{2}{5}\right)} + 3 = -\infty$$

Fase de manipulación

En este momento sería adecuado realizar algunos ejercicios, convenientemente elegidos, para que el alumno ejercite las cuestiones anteriores. Posteriormente, en el apartado correspondiente a sucesiones acotadas, presentamos otros ejemplos de sucesiones divergentes.

2.3.4. Sucesiones monótonas

Fase verbal

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se dice que es *monótona creciente o simplemente creciente*, cuando sus términos crecen, de forma que cada uno de ellos es mayor o igual que el anterior. En el caso de que cada término sea mayor que el anterior, pero no igual, la sucesión se denomina *estrictamente creciente.*

Del mismo modo, una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *monótona decreciente o simplemente decreciente*, cuando sus términos decrecen, de forma que cada uno de ellos es mayor o igual que su siguiente. En el caso de que cada término sea mayor que el siguiente, pero no igual, la sucesión se denomina *estrictamente decreciente.*

Una sucesión, en general, es *monótona* cuando es creciente o decreciente.

Cuando una sucesión es simultáneamente monótona creciente y monótona decreciente, se denomina *sucesión constante.*

Fase de representación simbólica

$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *monótona creciente* si y sólo si $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq .... \Rightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *estrictamente creciente* si y sólo si $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ... \Rightarrow a_{n-1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *monótona decreciente* si y sólo si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq .... \Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \in \mathbf{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es *estrictamente decreciente* si, y sólo si $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ... \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbf{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una *sucesión constante* si y sólo si $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = ... \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}$

Fase de representación visual

La representación gráfica de la figura 2.3, así como la parte superior de la figura 2.14, son ejemplos de sucesiones crecientes. En cambio, la sucesión $-a_n$ de esta última figura es un ejemplo de sucesión decreciente.

Fase de manipulación

El profesor puede plantear ejercicios variados, como los expuestos, en los que se requiera un estudio de la monotonía. Por otra parte, en el ejercicio final número 1 (apartado 2.3.11) se proponen dos ejemplos de los cuales estudiamos su monotonía.

2.3.5. Límites de oscilación

Fase verbal

Consideremos la siguiente definición entresacada de nuestra bibliografía (Burgos [14], pág. 71; Ríos [86], pág. 58):

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de números reales. Un número a_0, tal que en todo intervalo $]a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ existen infinitos términos de la sucesión, se llama *límite de oscilación* de la misma. Si entre esos límites hay un máximo, éste se llama *límite superior* de la sucesión y lo denotamos por a. Análogamente se define el *límite inferior* y lo denotamos b.

En una interpretación bidimensional de la definición diríamos que un número a_0 es un límite de oscilación de la sucesión a_n si en toda banda centrada en a_0 penetran infinitos términos de la sucesión.

Fase de representación simbólica

Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de números reales y sea $a_0 \in \mathbf{R}$.

$$a_0 \text{ es } \textit{límite de oscilación} \text{ si y sólo si } \forall\varepsilon > 0,\ \exists\{a_k^*\}_{k\in\mathbf{N}} \subseteq \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ tal que } \{a_k^*\}_{k\in\mathbf{N}} \subseteq]a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon[$$

Se escribe $a = \text{lím sup}\, a_n$ y $b = \text{lím inf}\, a_n$. Considérese que un límite de oscilación puede ser $+\infty$ ó $-\infty$.

Fase de representación visual y manipulativa

Presentamos tres ejemplos correspondientes a tres situaciones distintas. En cada uno de los casos, visualizamos los límites de oscilación y utilizamos para ello programas que nos proporcionan la gráfica bidimensional y unidimensional.

Ejemplo 6

Sucesión oscilante con un límite superior de oscilación $+\infty$ y un límite inferior de oscilación igual a -3.

Programa 8

```
>restart:with(plots):
>x:=n->-3+(1-(-1)^n)/2*n;
```

$$x := n \to -3 + \frac{1}{2}(1-(-1)^n)n$$

a) La representación bidimensional sería:

```
>plot([seq([n,x(n)],n=1..30)],x=0..30,y=-6..32,style=point,symbol=circle,thickness=3,
xtickmarks=0,ytickmarks=4,color=black);
```

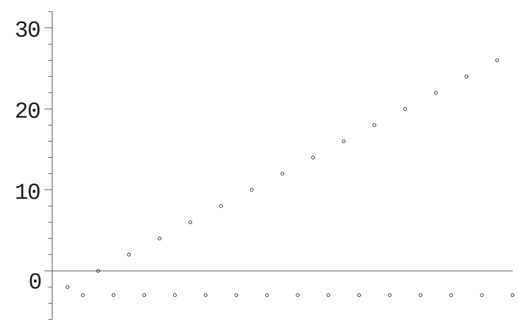


Figura 2.15

b) La representación unidimensional sería:

```
>d1:=plot([seq([-3+(1-(-1)^n)/2*n,0],n=1..45)],x=-5..40,y=-0.5..0.5,style=point,color=black,
axes=none,thickness=3,color=black,symbol=circle):
>d2:=plot(0,x=-10..45):
>t1:=textplot({[-3.2,-0.1,`-3`],[-3.2,0.3,`Lim Inf de oscilación = -3`],[35,0.3,`Lim Sup de os-
cilación = + infinito`],[0,-0.1,`0`]}):
>display({d1,d2,t1});
```

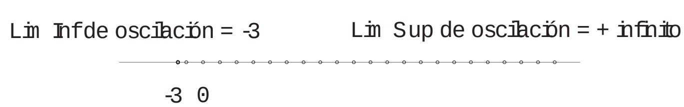


Figura 2.16

Ejemplo 7

Sucesión oscilante con límite superior de oscilación 2 y límite inferior de oscilación igual a -2.

Programa 9

>restart:with(plots):

>y:=n->(-1)ˆn*(2*n+15)/n;

$$y := \frac{(-1)^n(2n+15)}{n}$$

a) Representación bidimensional:

>d1:=plot([seq([n,y(n)],n=1..30)],x=0..30,y=-10..10,style=point,symbol=circle, xtickmarks=0,color=black):

>t1:=textplot({[14,8,'Límte Sup.de oscilación=2'],[14,-8,'Límte Inf.de oscilación=-2']}, color=black):

>d2:=plot({2,-2},x=0..30,color=black,linestyle=4,thickness=3):

>display({d1,d2,t1});

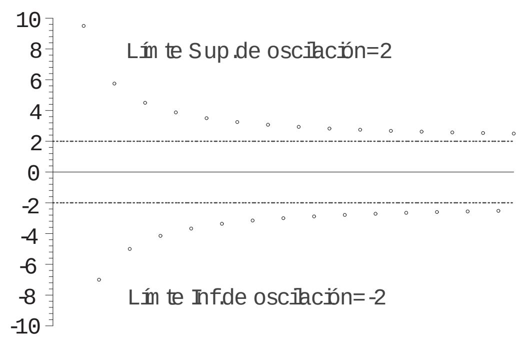


FIGURA 2.17

b) La representación unidimensional sería:

>d3:=plot([seq([(-1)ˆn*(2*n+15)/n,0],n=4..35)],x=-5..5,y=-1..1,style=point,color=black, axes=none,thickness=3,symbol=circle):

>d4:=plot(0,x=-5..5):

>t2:=textplot({[-2.2,-0.1,'-2'],[2.2,-0.1,'2'],[0,-0.1,'0']}):

>display({d3,d4,t2});

FIGURA 2.18

Ejemplo 8

Sucesión oscilante con tres límites de oscilación: -1, 0 y 1.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n = 3k,\ k \in \mathbf{N} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{si } n = 3k+1,\ k \in \mathbf{N} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n = 3k+2,\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Programa 10

```
>restart:with(plots):
>x:=n->1/n;y:=n->-1-1/n;z:=n->1+1/n:
```

a) Representación bidimensional:

```
>d1:=plot([seq([3*n,x(3*n)],n=1..40)],x=0..40,y=-2..2,style=point,symbol=circle,
xtickmarks=0,color=black):
>d2:=plot([seq([3*n+1,y(3*n+1)],n=1..40)],x=0..40,y=-2..2,style=point,symbol=circle,
xtickmarks=0,color=black):
>d3:=plot([seq([3*n+2,z(3*n+2)],n=1..40)],x=0..40,y=-2..2,style=point,symbol=circle,
xtickmarks=0,color=black):
>d4:=plot({1,-1,0},x=0..40,color=black):
>t1:=textplot({[30,1.4,`1 es Lim de oscilación y Lim Sup`],[30,-1.4,`- 1 es Lim de oscilación
y Lim Inf`],[30,.4,`0 es Lim de oscilación`]},color=black):
>display({d1,d2,d3,d4,t1});
```

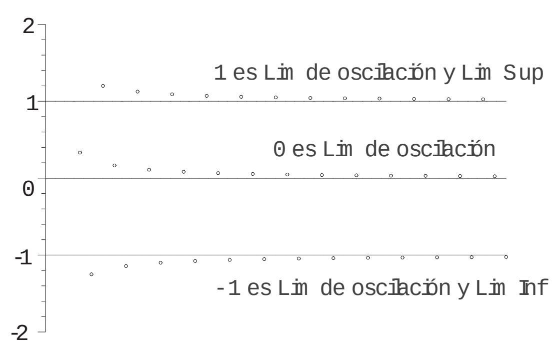


FIGURA 2.19

b) Representación unidimensional:

```
>d5:=plot({[seq([1/(3*n),0],n=1..15)],[seq([-1-1/(3*n+1),0],n=1..15)],[seq([1+1/(3*n+2),0],
n=1..15)]},x=-1.3..1.2,y=-.2..0.2,style=point,color=black,axes=none,thickness=3,
color=black,symbol=circle):
>d6:=plot(0,x=-1.4..1.4,color=black):
```

```
>t2:=textplot({[-1,-0.05,‘-1‘],[1,-0.05,‘1‘],[0,-0.05,‘0‘]}):
>display({d5,d6,t2});
```

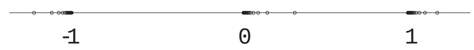


FIGURA 2.20

2.3.6. Sucesiones acotadas

Fase verbal

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ está *acotada superiormente* si sus términos se mantienen menores que un cierto número k_1; este valor k_1 es una *cota superior* del conjunto formado por los elementos de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ está *acotada inferiormente* si sus términos se mantienen siempre mayores que un cierto valor k_2, el cual es una *cota inferior* del conjunto formado por los elementos de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ está *acotada* cuando lo está superior e inferiormente. En otras palabras, una sucesión está acotada cuando existe una banda centrada en el origen, de semiamplitud $K = \text{máx}\,\{|k_1|\,,|k_2|\}$, de tal forma que todos los términos de la misma están contenidos en ella.

Fase de representación simbólica

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ es } \textit{acotada superiormente} \text{ si y sólo si } [\exists k_1 \in \mathbf{R} \ \wedge \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n \leq k_1]$$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ es } \textit{acotada inferiormente} \text{ si y sólo si } [\exists k_2 \in \mathbf{R} \ \wedge \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n \geq k_2]$$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ es } \textit{acotada} \text{ si y sólo si } [\exists K \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \ \wedge \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \ |a_n| \leq K]$$

Fase de representación visual

Dado un ejemplo concreto, en particular el propuesto como **ejemplo 1**, desde una perspectiva visual, puede comprobarse cuáles son las cotas superior e inferior. A partir de la figura 2.1, predecimos que:

$$Sup\,\{a_n\} = -2{,}5 = k_1$$
$$Inf\,\{a_n\} = -4 = k_2$$
$$K = \text{máx}\,\{|k_1|\,,|k_2|\} = 4$$

Además en dicha gráfica se constata que la sucesión “no se dispara” hacia $+\infty$ ni hacia $-\infty$.

Programa 11

```
>restart: with(plots):
>f:=n->((-1)^n/n)-3:
>d1:=plot([seq([k,f(k)],k=1..40)],style=point):
>d2:=plot([[0,4],[40,4]]):
>d3:=plot([[0,-4],[40,-4]]):
>display({d1,d2,d3});
```

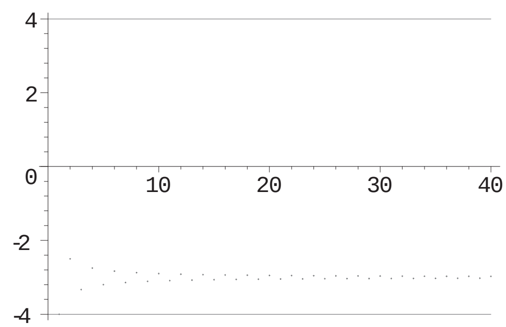


FIGURA 2.21

Fase de manipulación

Proponemos algunos ejemplos sencillos que los estudiantes pueden manipular cambiando signos, exponentes, etc., de forma que encuentren una relación entre la expresión algorítmica y la acotación correspondiente.

Ejemplo 9

La sucesión $a_n = \frac{-n^3}{5n+100} + 70$ es acotada superiormente, pero no inferiormente. Obsérvese que $k_1 = a_1 = 69{,}99$.

Programa 12

```
>restart:with(plots):
>d1:=plot([seq([n,-n^3/(5*n+100)+70],n=1..40)],style=point):
>d2:=plot(70,x=1..40,thickness=2):
```

>display({d1,d2});

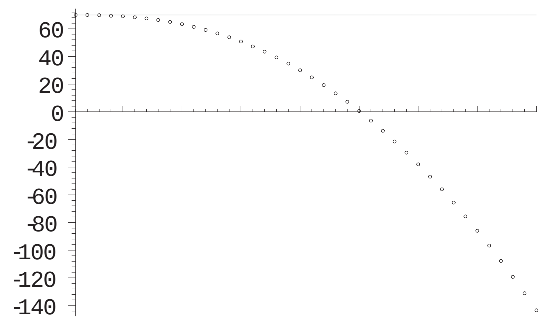


FIGURA 2.22

Ejemplo 10

La sucesión $b_n = \frac{n^3}{5n+100} - 70$ es acotada inferiormente, pero no superiormente. Obsérvese que $k_2 = b_1 = -69{,}99$.

<u>*Programa 13*</u>

>restart:with(plots):

>d1:=plot([seq([n,n^3/(5*n+100)-70],n=1..40)],style=point):

>d2:=plot(-70,x=1..40,thickness=2):

>display({d1,d2});

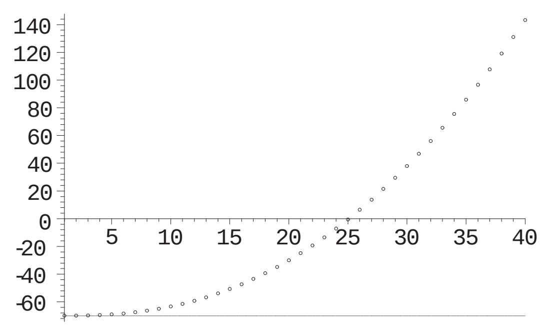


FIGURA 2.23

Por último, obsérvese que la sucesión $a_n = 3^{\frac{n-2}{5}} - 3$ correspondiente al **ejemplo 5** de esta memoria no es acotada inferiormente ni superiormente. En la figura 2.14 vemos cómo a_n se dispara hacia $+\infty$, mientras que $-a_n$ lo hace hacia $-\infty$.

A continuación presentamos dos teoremas relevantes y que normalmente se explican a los alumnos después de los conceptos anteriores. La demostración clásica de estos teoremas la complementamos con apoyo del software, a partir de la elección de un ejemplo particular. En estos casos haremos hincapié en ciertas consideraciones visuales de estas proposiciones, sin desarrollar el esquema conceptual, que como el propio término indica, lo utilizamos en la introducción de conceptos.

2.3.7. Teorema 1

"Toda sucesión convergente está acotada"

La **demostración** es la siguiente:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de números reales convergente, es decir:

$\exists x_0 \in \mathbf{R}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ si y sólo si $(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu \in\ \mathbf{N}\ \wedge \forall n \geq \nu \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon)$

- Si tomamos $\varepsilon = 1$, en función de él, podemos encontrar un subíndice natural ν_1 a partir del cual se verifica $|x_n - x_0| < 1$. Simbólicamente:

$$\text{Si } \varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\nu_1 \in \mathbf{N}\ \ \wedge\ \ \forall n \geq \nu_1 \Rightarrow |x_n - x_0| < 1$$
$$\forall n \geq \nu_1 \Rightarrow |x_n| - |x_0| \leq |x_n - x_0| < 1$$
$$\forall n \geq \nu_1 \Rightarrow |x_n| < 1 + |x_0|$$

Como vemos, los términos correspondientes a subíndices superiores o igual a ν_1 están acotados por $1 + |x_0|$. Nótese que no disponemos de información sobre los términos de subíndice 1 hasta $\nu_1 - 1$; así pues, falta establecer una acotación para esos $\nu_1 - 1$ primeros términos.

Consideremos entonces el número $K = máx\,\{|x_1|, |x_2|, ... |x_{\nu_1-1}|, 1 + |x_0|\}$. En consecuencia podemos afirmar que:

$$\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow |x_n| \leq K \Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ es una sucesión acotada.} \qquad \text{c.q.d.}$$

Es importante destacar que la proposición recíproca de este teorema no es cierta, es decir, podemos encontrar sucesiones de números reales acotadas que, sin embargo, no convergen en $\mathbf{R}$. Al final de este apartado puede verse un contraejemplo.

Ejemplo 11

Elegimos este ejemplo para aplicar el teorema anterior y su demostración paso a paso. La sucesión convergente es:

$$x_n = 30\tfrac{(-1)^n}{n+1} + 3$$

Programa 14

```
>restart:with(plots):
>x:=n->30*(-1)^n/(n+1)+3:
>Limit(x(n),n=infinity)=limit(x(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} 30\frac{(-1)^n}{n+1}+3=3$$

>plot([seq([n,x(n)],n=1..50)],style=point);

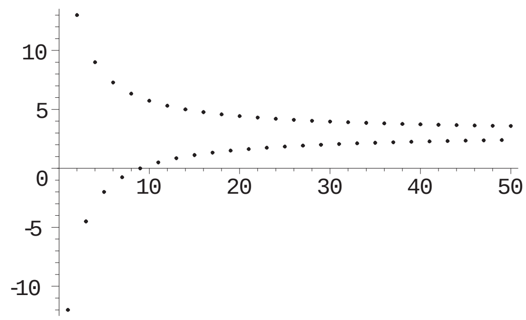


Figura 2.24

>epsilon:=1;

$$\varepsilon := 1$$

Hemos tomado $\varepsilon = 1$. Por tanto, en virtud de la definición formal de límite, debe existir un subíndice ν_1 a partir del cual $|x_n - 3| < 1$.

>solve({abs(x(n)-3)<1},n);

$$\{29 < n\}, \{n < -31\}$$

>nu[1]:=floor(29)+1;

$$\nu_1 := 30$$

A partir del témino 30, éste incluido, los términos de la sucesión penetran en la banda centrada en 3 y de semianchura 1, lo cual implica que todos ellos están acotados por $\varepsilon + |L| = 1 + |x_0|$, es decir, por $1 + |3| = 4$; ello nos indica que a partir del término 30 todos los términos están "dentro" de una banda centrada en 0 y semianchura 4; fuera de la banda existen 29 términos de los que carecemos de información. La cota buscada será el máximo entre esos 29 primeros términos, en valor absoluto, y $\varepsilon + |L| = 1 + |x_0| = 1 + |3| = 4$.

Evaluemos cada uno de estos términos en valor absoluto:

>for k from 1 to 10 do 'k'=k,'x(k)'=evalf(abs(x(k))) od;

$k = 1$	$x(k) = 12.$
$k = 2$	$x(k) = 13.$
$k = 3$	$x(k) = 4{,}500000000$
$k = 4$	$x(k) = 9.$
$k = 5$	$x(k) = 2.$
$k = 6$	$x(k) = 7{,}285714286$
$k = 7$	$x(k) = {,}7500000000$
$k = 8$	$x(k) = 6{,}333333333$
$k = 9$	$x(k) = 0$
$k = 10$	$x(k) = 5{,}727272727$

Nótese que, por razones de espacio, en la tabla anterior sólo hemos cuantificado los 10 primeros términos y no los 29 primeros como cabría esperar; no obstante, en la gráfica se observa que los términos van decreciendo en valor absoluto y, por consiguiente, no es necesario evaluarlos todos.

El máximo de los 29 términos anteriores, en valor absoluto, corresponde a $x_2 = 13$, por tanto, el número real positivo que acota a todos los términos de la sucesión es $K = máx\{13, 4\} = 13$. Visualmente:

```
>d1:=plot([seq([n,f(n)],n=1..40)],style=point):
>d2:=plot({[[0,4],[40,4]],[[0,2],[40,2]],[[0,13],[40,13]],[[0,-13],[40,-13]]},color=black):
>d3:=plot({[[0,3],[40,3]],[[29,0],[29,2]]},color=black,thickness=2):
>display({d1,d2,d3});
```

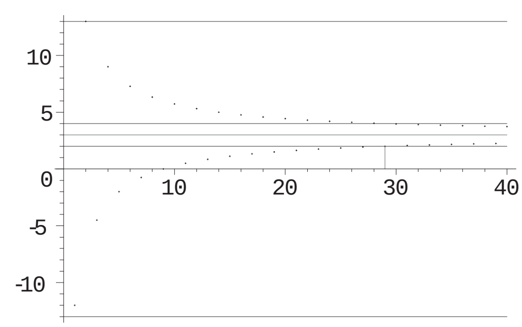


Figura 2.25

El recíproco de este teorema no es cierto. Para comprobarlo presentamos, como contraejemplo, la sucesión $y_n = 7\frac{(-1)^n n}{n+2}$ que está acotada y sin embargo no converge.

```
>y:=n->(-1)^n*7*n/(n+2):
>d4:=plot([seq([n,y(n)],n=0..50)],style=point):
>d5:=plot({[[0,8],[50,8]],[[0,-8],[50,-8]]}):
```

>display({d4,d5});

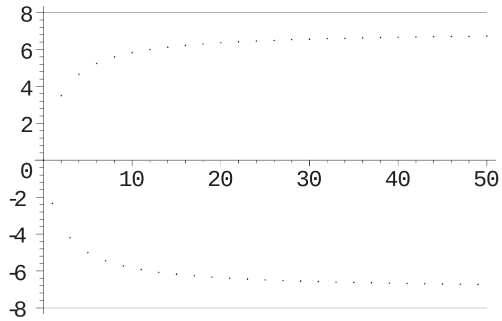


FIGURA 2.26

2.3.8. Teorema 2 : Teorema fundamental

"Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite"

La **demostración** de este teorema es como sigue:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión monótona creciente y acotada superiormente. Consideremos el conjunto A formado por todos sus elementos:

$$A = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

Por ser $\mathbf{R}$ completo, $\exists \sup A = \alpha$. Nuestro objetivo es demostrar que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y que este límite es α (α número real perfectamente determinado).

Como $\alpha = \sup A$ se tiene que $\forall\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, siempre podemos encontrar $\nu \in\ \mathbf{N}$ tal que:

$$\alpha - x_\nu < \varepsilon$$

Por el hecho de ser $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ monótona creciente $\Rightarrow \forall n \geq \nu$ se verifica que $x_\nu \leq x_n$

Por tanto:

$$\alpha - x_n < \alpha - x_\nu < \varepsilon$$

La desigualdad anterior es clara a partir del esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccc} x_\nu & x_n & \alpha \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hline \end{array}$$

Es decir, para todo $n \geq \nu$ se tiene

$$|x_n - \alpha| \leq |x_\nu - \alpha| < \varepsilon$$

y en consecuencia podemos afirmar:

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbf{N} \text{ y } \forall n \geq \nu \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon] \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo 12

Apliquemos el teorema anterior a la sucesión que tiene por término general $a_n = \frac{12}{5}\frac{n}{n+3}$.

Programa 15

>restart:with(plots):

>x:=n->(12/5)*n/(n+3):

- En primer lugar veamos que x_n es monótona creciente:

>assume(n>0):

>simplify(x(n+1)-x(n));

$$\frac{36}{5}\,\frac{1}{(n+4)(n+3)}$$

>is(%>0);

$$true$$

- Comprobemos que x_n está acotada superiormente. Basta cuantificar términos avanzados de la misma y predecir cual es la cota superior. En la siguiente instrucción pedimos al programa que nos proporcione los valores $x(n)$ y $x(n + 10000000)$ para los términos que van del 1000 al 2000, pero de 100 en 100 y con trece cifras de precisión decimal.

>for n from 1000 to 2000 by 100 do evalf(x(n)),evalf(x(n+10000000),13) od;

2,392821535, 2,399999280072
2,393472348, 2,399999280079
2,394014963, 2,399999280087
2,394474290, 2,399999280094
2,394868140, 2,399999280101
2,395209581, 2,399999280108
2,395508422, 2,399999280115
2,395772167, 2,399999280123
2,396006656, 2,399999280130
2,396216500, 2,399999280137
2,396405392, 2,399999280144

Parece ser que $\alpha = 2{,}4$ es el supremo del conjunto $A = \left\{ \frac{12}{5} \frac{n}{n+3} \ / \ n \in \mathbf{N} \right\}$; pero ¿qué podemos hacer para garantizarlo?

A) Está claro que 2,4 es mayor o igual que todos los elementos de la sucesión x_n, lo cual puede comprobarse de la siguiente forma:

>assume(n>0):

>simplify(2.4-12*n/(5*(n+3)));

$$7{,}200000000 \frac{1}{n+3}$$

>is(%>0);

$$true$$

B) Por otra parte, podría pensarse en la existencia de un extremo superior menor que 2,4. Supongamos que μ_0 es otro supremo: esta posibilidad queda desechada, pues siempre podremos encontrar un subíndice natural n tal que x_n es mayor que μ_0. Por tanto, podemos concluir que:

>alpha:=2.4;

$$\alpha := 2{,}4$$

Veamos qué ocurre gráficamente. Para ello representamos los cuarenta primeros términos de la sucesión, conjuntamente con la recta $y = 2{,}4$.

>d1:=plot([seq([k,x(k)],k=1..40)],style=point):

>d2:=plot(2.4,x=1..40,y=0..3):

>display({d1,d2});

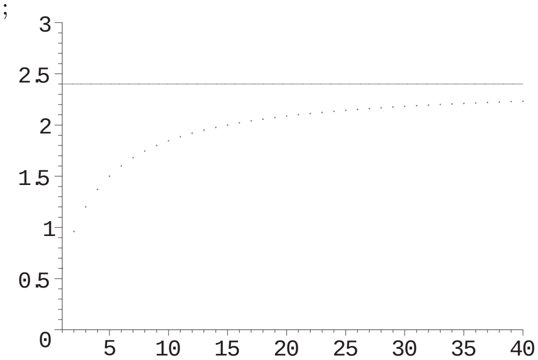


FIGURA 2.27

Si realizamos un zoom suficientemente "grande", obtenemos la figura 2.28, donde comprobamos que, en efecto, $\alpha := 2{,}4$.

>d3:=plot([seq([k,x(k)],k=1960..2000)],style=point):

>d4:=plot(2.4,x=1960..2000,y=2.396..2.4001):

>display({d3,d4});

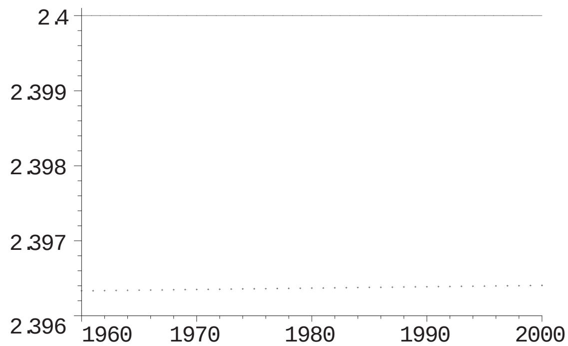


Figura 2.28

Si tomamos un ε arbitrario, siempre podremos encontrar un subíndice ν de tal forma que:

>alpha-x[nu] < epsilon;

$$\alpha - x_\nu < \varepsilon$$

y esto para todo n mayor o igual que ν. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 4/10$. Bastaría despejar ν de la inecuación anterior:

>solve({2.4-x(nu)<0.4},nu);

$$\{\nu < -3.\}, \{15. < \nu\}$$

>nu:=floor(15)+1;

$$\nu := 16$$

Luego para todo n mayor o igual que 16 se verificará que $x_{16} \leq x_\nu$:

>for k from 16 to 25 do evalf(x(16)), evalf(x(k)) od;

2,021052632, 2,021052632
2,021052632, 2,040000000
2,021052632, 2,057142857
2,021052632, 2,072727273
2,021052632, 2,086956522
2,021052632, 2,100000000
2,021052632, 2,112000000
2,021052632, 2,123076923
2,021052632, 2,133333333
2,021052632, 2,142857143

por tanto, $\alpha - x_n < \alpha - x_{16}$ y esta cantidad es menor que ε, en efecto:

>for k from 16 to 25 do evalf(alpha-x(k)), evalf(alpha-x(16)) od;

,378947368, ,378947368
,360000000, ,378947368
,342857143, ,378947368
,327272727, ,378947368
,313043478, ,378947368
,300000000, ,378947368
,288000000, ,378947368
,276923077, ,378947368
,266666667, ,378947368
,257142857, ,378947368

De la observación de la tabla anterior se desprende que:

$$|x_n - \alpha| < |x_{16} - \alpha| < \varepsilon = 0{,}4$$

Como esta desigualdad se verifica para todo n mayor o igual que $\nu = 16$, podemos inferir que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{12}{5}$$

>d5:=plot([seq([k,x(k)],k=1..40)],style=point,color=black):
>d6:=plot(2.4,x=1..40,y=0..3):
>d7:=plot({[[0,12/5-0.4],[40,12/5-0.4]],[[0,12/5+0.4],[40,12/5+0.4]],[[16,0],[16,2]]}, color=black,thickness=3):
>display({d5,d6,d7});

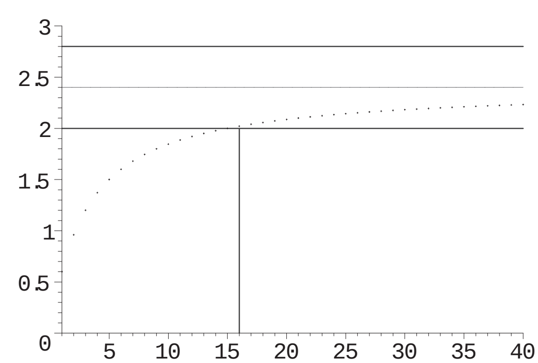


FIGURA 2.29

Visualicemos la figura anterior, pero usando una gráfica unidimensional:

```
>restart:with(plots):
>d1:=plot([seq([(12/5)*n/(n+3),0],n=10..40)],style=point,color=black,axes=none,
thickness=3,color=black,symbol=circle,xtickmarks=0):
>d2:=plot(0,x=1.8..2.24,y=-0.2..0.2):
>t1:=textplot({[2.13,0.03,'x(16)'],[2.22,0.03,'L=2.4']}):
>display({d1,d2,t1});
```

Figura 2.30

2.3.9. Series numéricas

Se sabe que en **R** la "suma" de un número finito de términos está perfectamente definida; sin embargo, cuando tratamos de sumar los infinitos términos de una sucesión de números reales, esa "suma" es una cuestión que, en principio, no está clara. La idea de serie numérica viene a justificar, cuando sea posible, la suma de "infinitos términos o sumandos" mediante la operación "paso al límite".

En términos no muy rigurosos, diremos que una *serie numérica*[3] asociada a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es la suma de los infinitos términos de la misma y se denota por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Técnicamente, una serie numérica es un par ordenado

$$\{x_n,\ s_n\}$$

donde x_n es una sucesión numérica arbitraria y s_n es la denominada "sucesión de sumas parciales" asociada a la misma, es decir:

$$\begin{aligned} &s_1 = x_1 \\ &s_2 = x_1 + x_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y por tanto, las componentes del par ordenado $\{x_n,\ s_n\}$ están relacionadas entre sí mediante la relación:

[3]En este punto, aclaramos que no es nuestro objetivo hacer un estudio exhaustivo de las series numéricas, con sus teoremas, clasificaciones, criterios, etc. Únicamente presentamos la definición de serie numérica más el cálculo de la suma en algunos ejemplos significativos (véase Ejemplo 13), con el objeto de hacer uso de ella en el desarrollo de algunos ejercicios sobre sucesiones, así como para su extensión posterior para series funcionales.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Según que la sucesión s_n converja, diverja u oscile, se dirá que la serie correspondiente es convegente, divergente u oscilante, respectivamente. En el caso de que este límite exista, el valor o "suma" de la serie será:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Manipular series con Maple es muy simple. A continuación, en un mismo programa, presentamos algunos ejemplos de series, calculando en cada caso el valor de la suma, si existe.

Ejemplo 13

13.1) En primer lugar, consideremos la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. El término general de la sucesión de sumas parciales, así como la suma de la serie, se obtiene a partir de las siguientes instrucciones:

Programa 16

```
>restart:
>s[n]=Sum(1/k, k=1..n);
```

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Calcular la suma de la serie anterior es equivalente a calcular el límite de la sucesión de sumas parciales:

```
>Limit(Sum(1/k, k=1..n),n=infinity)=limit(sum(1/k, k=1..n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$$

Esta serie se denomina *serie armónica simple* y como puede verse es divergente.

13.2) Consideremos ahora la sucesión $b_n = \frac{1}{n^2}$ y comprobemos que la serie asociada a la misma es un caso particular de una serie de Riemann, es convergente.

```
>Limit(Sum(1/k^2, k=1..n),n=infinity)=limit(sum(1/k^2, k=1..n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$

13.3) Del mismo modo, la serie asociada a la sucesión $c_n = \frac{1}{k^2+1}$ es convergente:

```
>f:=k->1/(k^2+1):
>Limit(Sum(f(k), k=1..n),n=infinity)=evalf(limit(sum(f(k), k=1..n),n=infinity));
```

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} = 1{,}076674048$$

13. 4) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2}+1\right)$ es divergente:

>f:=k->1/k^2+1:

>Limit([(Sum(1/k^2, k=1..n))+(Sum(1, k=1..n))],n=infinity)=limit(sum(1/k^2, k=1..n), n=infinity)+limit(sum(1, k=1..n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\right] = \frac{1}{6}\pi^2 + \infty$$

en definitiva:

>Limit(Sum(f(k), k=1..n),n=infinity)=limit(sum(1/k^2+1, k=1..n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + 1 = \infty$$

2.3.10. Sucesiones de Cauchy

Fase verbal

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de *Cauchy* si para toda banda de anchura 2ε centrada en 0, podemos encontrar un índice de penetración ν a partir del cual, para toda pareja de subíndices p, q $(q < p)$ se tiene que la distancia entre x_p y x_q es menor que ε (o lo que es lo mismo, esa distancia tiende hacia cero). Así pues, desde un punto de vista intuitivo y tal como constataremos en la fase visual, una sucesión de números reales es de Cauchy si a partir de un cierto subíndice los términos de la sucesión se van "pegando" entre sí.

Es importante destacar que en el campo de las sucesiones de números reales, decir que una sucesión es convergente es equivalente a decir que tal sucesión es de Cauchy. Esto se suele expresar diciendo que **R** es completo y constituye otra visión de la completitud equivalente a la comentada en el Capítulo 1. En cambio, para las sucesiones de números racionales, el aserto "Ser convergente equivale a ser de Cauchy" no se da en general, hecho por el cual se dice que **Q** no es completo y como se sabe, existe una gran variedad de sucesiones de Cauchy de números racionales que no convergen hacia un número racional[4].

[4] Recordemos que al estudiar, en el Capítulo 1, las dificultades epistemológicas del concepto de límite, consideramos la sucesión 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ... que puede reescribirse $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$, $\frac{1414}{1000}$, ..., $\frac{E[\sqrt{2}\cdot 10^n]}{10^n}$, ... En este caso todos los términos son números racionales y la sucesión es de Cauchy (la diferencia entre dos términos no muy avanzados es ya infinitesimal). Sin embargo el límite es irracional:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[\sqrt{2}\cdot 10^n]}{10^n} = \sqrt{2}$$

Fase simbólica

$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de *Cauchy* si y sólo si $[\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\nu(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \wedge \ \forall p, q \in \mathbf{N}, \ p > q \geq \nu \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon]$

Fase de representación visual

Ejemplo 14

La sucesión $x_n = 20\frac{n}{n+1}$ es una sucesión convergente en $\mathbf{R}$; comprobemos que cumple la condición de Cauchy.

Programa 17

```
>restart:with(plots):
>x:=n->20*n/(n+1):
>plot([seq([n,x(n)],n=1..35)],style=point,color=black);
```

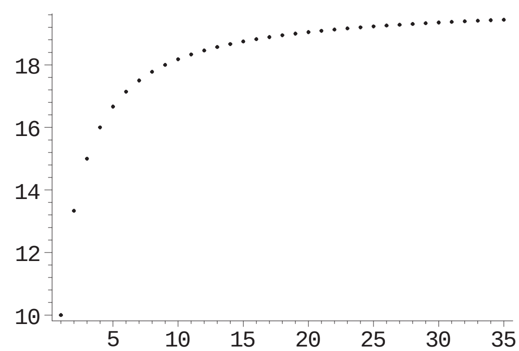


FIGURA 2.31

```
>abs(x(p)-x(q));
```

$$\left|20\frac{p}{p+1} - 20\frac{q}{q+1}\right|$$

Teniendo en cuenta que $p > q$, la diferencia en valor absoluto $|x_p - x_q|$ podemos acotarla superiormente de la siguiente forma:

```
>simplify( %)<=20*abs((p+q)/(p*q));
```

$$20\left|\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\right| \leq \left|\frac{p+q}{pq}\right|$$

y esto, a su vez es menor que:

```
>(40*p)/(p*q);
```

$$40\frac{1}{q}$$

>solve({40*1/q<0.2},q);

$$\{q < 0\}, \{200. < q\}$$

Como q es un número natural, la solución elegida ha de ser positiva:

>nu:=floor(200)+1;

$$\nu := 201$$

A partir del término $\nu = 201$ garantizamos la desigualdad, es decir:

$$|x_p - x_q| < 0{,}2$$

para todo p y q mayores o iguales a 201 y elegidos arbitrariamente. Esto no significa que para otros términos de subíndice menor no se verifique la desigualdad anterior; sin embargo a partir de $\nu = 201$, está garantizada. Visualmente:

>d1:=plot([seq([n,x(201)-x(n)],n=1..210)],style=point,color=black):
>d2:=plot({0.2,-0.2},x=1..210,y=-1.2..1.2,color=black):
>display({d1,d2});

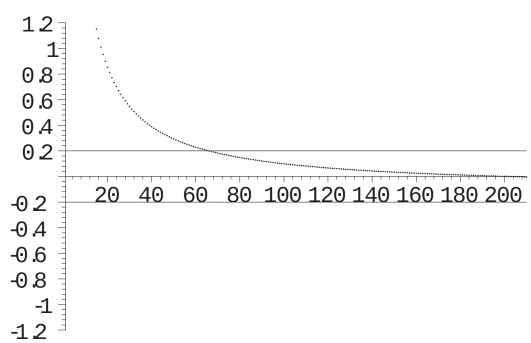


FIGURA 2.32

En la gráfica anterior hemos fijado x_{201} y se ha variado n desde 1 hasta 210.

Otra forma de ver que los términos se van pegando entre sí consiste en representar dos subsucesiones cualesquiera de la sucesión de partida; en la figura 2.33 hemos graficado las sucesiones x_n y x_{2n+1}. Podemos observar que ambas, a partir de un determinado término se van "pegando la una a la otra".

>d3:=plot([seq([n,x(n)],n=1..42)],style=point,color=black):
>d4:=plot([seq([n,x(2*n)],n=1..42)],style=point,color=black):
>d5:=plot({[[25,x(25)],[25,x(50)]],[[10,x(10)],[10,x(20)]],[[40,x(40)],[40,x(80)]]},x=1..42,
y=9.5..21,color=balck):

>display({d3,d4,d5});

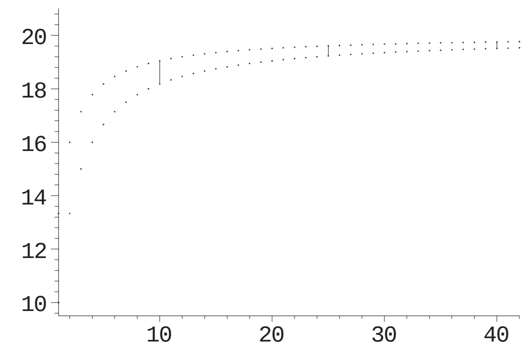


FIGURA 2.33

Realizando un zoom obtenemos un efecto similar al que da lugar la visualización de cualquier fenómeno mediante un "microscopio":

>d6:=plot([seq([n,x(n)],n=15..35)],style=point,color=black):

>d7:=plot([seq([n,x(2*n)],n=15..35)],style=point,color=black):

>d8:=plot({[[17,x(17)],[17,x(2*17)]],[[22,x(22)],[22,x(44)]],[[31,x(31)],[31,x(62)]]},color=balck):

>display({d6,d7,d8});

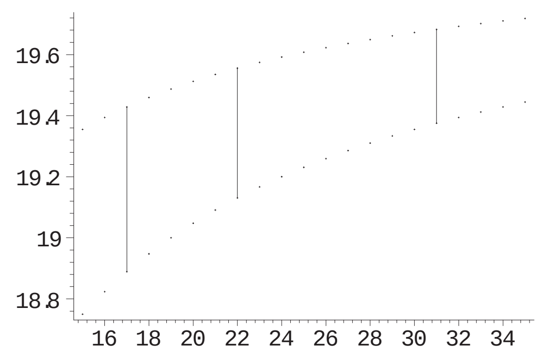


FIGURA 2.34

A partir de cualquier otro par de subsucesiones de la sucesión de partida, podemos observar igualmente el acercamiento de sus términos:

>d9:=plot([seq([n,x(2*n+3)],n=1..80)],style=point,color=black):

>d10:=plot([seq([n,x(5*n+3)],n=1..80)],style=point,color=black):

>display({d9,d10});

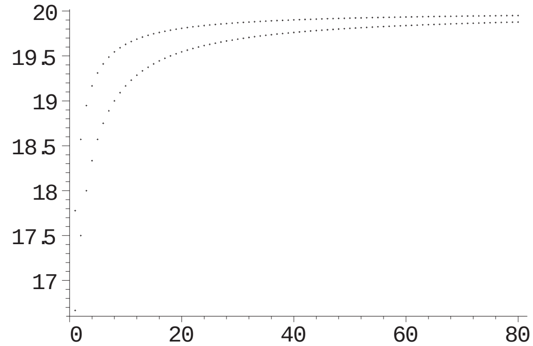


FIGURA 2.35

Fase de manipulación

Ejemplo 15

En este caso, presentamos la sucesión $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ que no verifica la condición de Cauchy.

<u>*Programa 18*</u>

>restart:with(plots):

>x:=n->sum(1/k,k=1..n):

>Limit(Sum(1/k,k=1..n),n=infinity)=limit(x(n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$$

La sucesión no es convergente en **R** y por tanto, no es de Cauchy. Podemos ver que la diferencia entre dos términos adecuadamente avanzados no tiende a cero:

>Limit((Sum(1/(2*k),k=1..n)-Sum(1/k,k=1..n)),n=infinity)=limit(x(2*n)-x(n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k}\right)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \ln(2)$$

>evalf(ln(2));

$$,6931471806$$

Si representamos la sucesión $x_{2n} - x_n$ se observa que, en efecto, el límite de la misma es $\ln(2) = 0{,}693$.

>d1:=plot([seq([n,x(2*n)-x(n)],n=1..70)],color=black,style=point):

>d2:=plot(0.693,x=1..70,y=0.48..0.75):

>display({d1,d2});

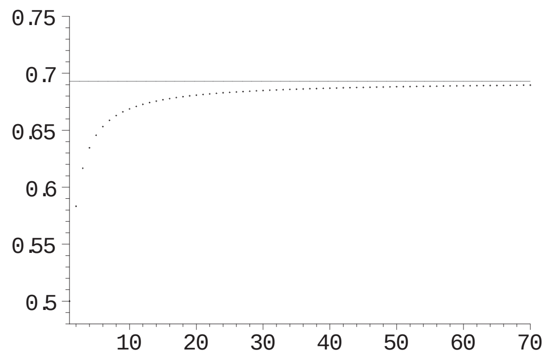


FIGURA 2.36

Otra forma de observar que la sucesión inicial no es de Cauchy, consiste en representar, en una misma gráfica, las sucesiones x_n y x_{2n} y comprobar que la diferencia entre sus términos es siempre superior a $\frac{1}{2}$.

>d3:=plot([seq([n,x(n)],n=1..42)],style=point,color=black):

>d4:=plot([seq([n,x(2*n)],n=1..42)],style=point,color=black):

>d5:=plot({[[25,x(25)],[25,x(50)]],[[10,x(10)],[10,x(20)]],[[40,x(40)],[40,x(80)]]},color=black):

>display({d3,d4,d5});

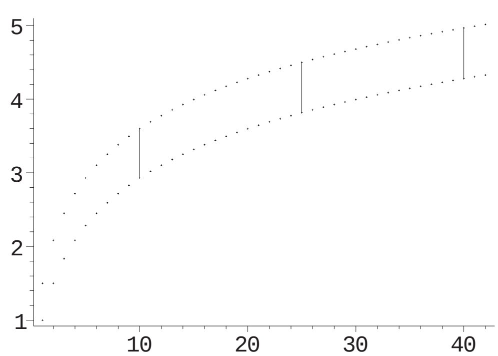


FIGURA 2.37

En esta fase manipulativa pueden realizarse ejercicios en los que intervengan procesos visuales y tabulares complementariamente. En el **ejemplo 14**, si fijamos $p = 210$, podemos proponer que se encuentre el valor mínimo de q tal que $|x_{210} - x_q| < 0{,}2$. Al observar la figura 2.32, podemos intuir que este valor está comprendido entre 60 y 80; por esta razón, probemos, en primer lugar, entre 60 y 70.

Programa 19

```
>restart:with(plots):
>x:=n->20*n/(n+1):
>for n from 60 to 70 do x[210]-x[n]=evalf(abs(x(210)-x(n)),5) od;
```

$$\begin{array}{ll} x_{210} - x_{60} = ,23308 & x_{210} - x_{66} = ,20372 \\ x_{210} - x_{61} = ,22779 & x_{210} - x_{67} = ,19933 \\ x_{210} - x_{62} = ,22267 & x_{210} - x_{68} = ,19507 \\ x_{210} - x_{63} = ,21771 & x_{210} - x_{69} = ,19093 \\ x_{210} - x_{64} = ,21291 & x_{210} - x_{70} = ,18690 \\ x_{210} - x_{65} = ,20824 & \end{array}$$

De la tabla anterior se deduce que el subíndice buscado es 67, lo cual puede constatarse en las figuras 2.38 y 2.39.

```
>d1:=plot([seq([n,x(210)-x(n)],n=55..80)],style=point,color=black):
>d2:=plot({0.2,-0.2,[[67,0],[67,0.2]]},x=55..80,y=-0.5..0.5,color=black):
>display({d1,d2});
```

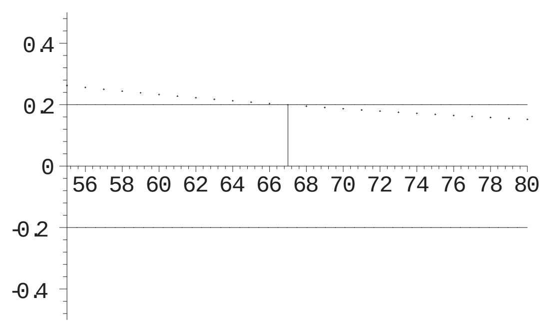


FIGURA 2.38

```
>d3:=plot([seq([n,x(210)-x(n)],n=1..100)],style=point,color=black):
>d4:=plot({0.2,-0.2},x=20..100,y=-0.8..0.8,color=black):
```

>display({d3,d4});

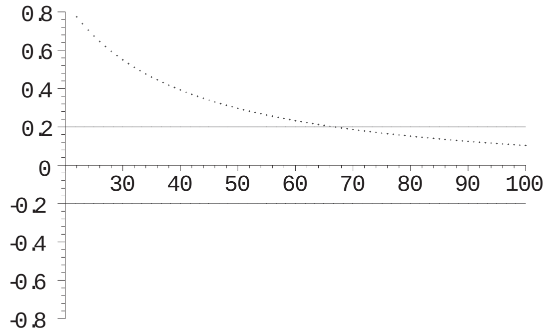


FIGURA 2.39

2.3.11. Ejercicios finales I

Antes de finalizar el apartado de sucesiones de números reales, proponemos dos ejercicios en los que el alumno va a tener la oportunidad de aplicar los contenidos presentados. Nos parece interesante que el estudiante manipule con estos ejemplos, de manera que pueda interrelacionar conceptos y obtener conclusiones por sí mismo. Para ello puede hacer uso tanto de la herramienta tecnológica como complementar sus razonamientos mediante lápiz y papel .

Ejercicio 1: Consideremos las sucesiones x_n e y_n definidas de la forma siguiente:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$y_n = \tfrac{1}{n!} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

Comprobar que convergen y que el límite es el número e en ambos casos. A partir de este resultado justificar la irracionalidad de dicho número.

El estudiante puede resolver el ejercicio aplicando el teorema fundamental (teorema 2). Usando el software, debe justificar que ambas sucesiones son monótonas (x_n creciente e y_n decreciente) y que están acotadas (x_n superiormente e y_n inferiormente).

Programa 20

>restart:with(plots):

>x:=n->sum(1/k!,k=0..n);>y:=n->1/n!+sum(1/k!,k=0..n);

$$x := n \to \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad\qquad y := n \to \tfrac{1}{n!} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

Tabulando y representando gráficamente se comprueban monotonías y acotaciones.

>for n from 1 to 7 do x[n]=evalf(x(n),20),y[n]= evalf(y(n),20) od;

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 2. & y_1 = 3. \\
x_2 = 2{,}500000000 & y_2 = 3. \\
x_3 = 2{,}666666667 & y_3 = 2{,}833333333 \\
x_4 = 2{,}708333333 & y_4 = 2{,}750000000 \\
x_5 = 2{,}716666667 & y_5 = 2{,}725000000 \\
x_6 = 2{,}718055556 & y_6 = 2{,}719444444 \\
x_7 = 2{,}718253968 & y_7 = 2{,}718452381
\end{array}$$

Efectivamente, al observar estos primeros términos vemos que posiblemente x_n sea creciente e y_n decreciente; además, ambas parecen converger hacia e. No obstante, la monotonía puede justificarse viendo el signo de la diferencia de cada término con el siguiente, a partir de un cierto subíndice.

>for n from 10 to 15 do evalf(x(n)-x(n+1)) od;

$$\begin{array}{c}
-{,}2505210839 \cdot 10^{-7} \\
-{,}2087675699 \cdot 10^{-8} \\
-{,}1605904384 \cdot 10^{-9} \\
-{,}1147074560 \cdot 10^{-10} \\
-{,}7647163732 \cdot 10^{-12} \\
-{,}4779477332 \cdot 10^{-13}
\end{array}$$

>for n from 10 to 15 do evalf(y(n)-y(n+1)) od;

$$\begin{array}{c}
{,}2254689755 \cdot 10^{-6} \\
{,}2087675699 \cdot 10^{-7} \\
{,}1766494822 \cdot 10^{-8} \\
{,}1376489472 \cdot 10^{-9} \\
{,}9941312851 \cdot 10^{-11} \\
{,}6691268265 \cdot 10^{-12}
\end{array}$$

El alumno con lápiz y papel puede comprobar que efectivamente:

$$x(n) - x(n+1) = -\tfrac{1}{(n+1)!} \leq 0,\ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow x_n \text{ es una sucesión creciente.}$$
$$y(n) - y(n+1) = \tfrac{n-1}{(n+1)!} \geq 0,\ \forall n > 1 \Rightarrow y_n \text{ es una sucesión decreciente.}$$

A continuación se justifica, desde una óptica visual, que e es una cota superior de x_n (y además, la menor) y una cota inferior de y_n (y además, la mayor). Para ello programamos y esbozamos las gráficas que nos permitan obtener conclusiones. Con objeto de observar con más precisión el comportamiento monótono de ambas sucesiones, presentamos, en primer lugar, sus gráficas considerando n como variable real y visualizamos las funciones por medio de style=point[5]. Seguidamente las representamos considerando n natural. Nótese que en las gráficas aparece la recta correspondiente a $y = e$.

>d1:=plot(sum(1/k!,k=0..n),n=1..7,style=point):

>d2:=plot(1/n!+sum(1/k!,k=0..n),n=1..7,style=point):

>d3:=plot(exp(1),x=1..7):

>display({d1,d2,d3});

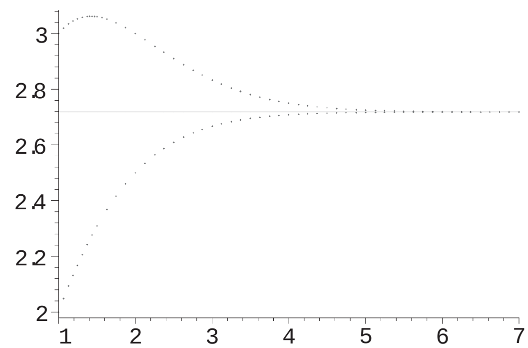


FIGURA 2.40

En una misma gráfica representamos los primeros términos de las sucesiones x_n e y_n así como la recta correspondiente a $y = e$.

>d4:=plot([seq([n,x(n)],n=1..15)],style=point):

>d5:=plot([seq([n,y(n)],n=1..15)],style=point):

>d6:=plot(exp(1),x=1..15):

>display({d4,d5,d6});

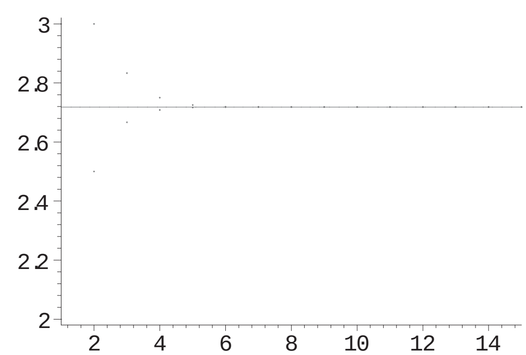


FIGURA 2.41

[5]Por razones técnicas, en las variables d1 y d2, que definen las gráficas funcionales de la figura 2.40, hemos redefinido las funciones en lugar de poner directamente las sucesiones $x(n)$ e $y(n)$.

Visualmente corroboramos los razonamientos anteriores y predecimos que el valor del límite es e, lo cual se confirma al calcular directamente, con el software, dicho valor; en cada caso, exigiremos doce cifras de precisión decimal.

```
>Limit(Sum(1/k!,k=0..n),n=infinity)=evalf(limit(x(n),n=infinity),12);
```

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2{,}71828182846$$

```
>Limit(1/n!+Sum(1/k!,k=0..n),n=infinity)=evalf((limit(1/n!,n=infinity)
+limit(x(n),n=infinity),12));
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = 2{,}71828182846$$

y este valor coincide, efectivamente, con el número e, ya que:

```
>evalf(exp(1),15);
```

$$2{,}71828182845905$$

Irracionalidad de e.

Nos permitimos presentar la conocida demostración de que e es un número irracional, para posteriormente transcribirla a casos particulares, de forma paralela con Maple. Utilizamos el método de reducción al absurdo, suponiendo que e es un número racional, $e = p/q$, siendo p y q dos números enteros positivos, primos entre sí, $q \neq 0$.

Por tanto, para todo $q \in \mathbf{Z}^+$ se cumplirá:

$$x_q < e < y_q \qquad \equiv \qquad x_q < \tfrac{p}{q} < y_q.$$

donde x_q e y_q son los términos *q-ésimos* de las sucesiones definidas en el enunciado del ejercicio.

$$\left[1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + ... + \tfrac{1}{q!}\right] < \tfrac{p}{q} < \left[1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + ... + \tfrac{1}{q!} + \tfrac{1}{q!}\right]$$

Multiplicamos los tres miembros de esta desigualdad por $q!$ y definimos

$$m = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right] \cdot q!$$

Obsérvese que m es un número entero y por consiguiente, $m < \frac{pq!}{q} < m+1$. Ello equivale a

$$m < p\,(q-1)! < m+1$$

Como $p\,(q-1)!$ es igualmente entero, concluimos que entre dos enteros consecutivos existe otro entero, lo cual es una contradicción; ésta surge de haber supuesto que e es racional. Luego, e es un número irracional.

Usando el software, podemos aplicar, como se ha dicho, la demostración anterior para casos particulares. Supongamos que $e = \frac{p}{q}$, $q = 8$.

>s1:=evalf(x(8),20);s2:=evalf(y(8),20);

$$s1 := 2{,}7182787698412698413$$
$$s2 := 2{,}7183035714285714286$$

Obviamente se tiene que $s_1 < e = p/8 < s_2$

Multiplicando los tres miembros de la desigualdad anterior por 8! y haciendo cálculos se obtiene:

$$\begin{array}{ccccc} 8!\cdot s_1 & < & 8!\cdot e = 7!\cdot p & < & 8!\cdot s_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a \in \mathbf{Z}^+ & & s \in \mathbf{Z}^+ & & b \in \mathbf{Z}^+ \end{array}$$

>a:=evalf(8!*s1);

$$a := 109601{,}0000$$

>b:=evalf(8!*s2);

$$b := 109602{,}0000$$

>s:=(p/8)*8!;

$$s := 5040p$$

En definitiva, s es un entero comprendido entre dos enteros consecutivos a y b . ¡Absurdo!

Lo mismo sucederá si tomamos cualquier otro valor entero para q. Así pues, e es un número irracional.

Ejercicio 2: Justificar que el número de cifras de 1000! es 2568. Usar para ello la fórmula de Stirling.

Recordemos que la *Formula de Stirling*:

$$n! \sim n^n \cdot e^{(-n)} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

nos permite aproximar esas dos cantidades para valores de n suficientemente grandes. Maple nos permite confirmarlo.

<u>*Programa 21*</u>

>restart:

>Limit((n^n*exp(-n)*sqrt(2*Pi*n))/n!,n=infinity)=limit((n^n*exp(-n)*sqrt(2*Pi*n))/n!, n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot e^{(-n)} \cdot \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

Si tomamos $n = 1000$, podemos escribir:

$$1000! \sim 1000^{1000} \cdot e^{(-1000)} \cdot \sqrt{2\pi 1000}$$

A continuación aplicamos a la expresión anterior, el logaritmo en base 10, de forma que los cálculos dan lugar a:

$$\log_{10}(1000!) \sim \log_{10}\left(1000^{1000} \cdot e^{(-1000)} \cdot \sqrt{2\pi 1000}\right)$$
$$\log_{10}(1000!) \sim \log_{10}\left(1000^{1000}\right) + \log_{10}\left(e^{(-1000)}\right) + \log_{10}\left(\sqrt{2\pi 1000}\right)$$
$$\log_{10}(1000!) \sim 1000 \cdot \log_{10}(1000) - 1000\log_{10}(e) + \frac{1}{2}\log_{10}(2\pi 1000)$$

Llamamos a, b y c a cada uno de los sumandos anteriores y d a su suma:

>a:=evalf(1000*log10(1000));

$$a := 3000{,}000000$$

>b:=evalf(1000*log10(exp(1)));

$$b := 434{,}2944818$$

>c:=evalf((1/2)*log10(2*Pi*1000));

$$c := 1{,}899089934$$

>d:=a-b+c;

$$d := 2567{,}604608$$

Por tanto $f = 1000! = 10^d$ y se tiene que:

>f:=evalf(10^%);

$$f := {,}4023537006 \cdot 10^{2568}$$

Es decir:

$$1000! \sim ,4023537006 \cdot 10^{2568}$$

de donde se deduce que efectivamente 1000! tiene 2568 cifras.

Para justificar que la aproximación $f \sim 1000!$ es válida basta evaluar los cocientes siguientes y comprobar que se aproximan a 1:

$$\frac{f}{1000!} \sim 1 \quad \text{y} \quad \frac{1000!}{f} \sim 1$$

>evalf(f/1000!);

$$,9999165991$$

>evalf(1000!/f);

$$1,000083408$$

2.3.12. Sucesiones de funciones. Sucesiones numéricas asociadas

Fase verbal

Cuando comenzamos a explicar el concepto de sucesión de funciones, lo solemos hacer de una forma natural, diciendo que se trata de asignar o adjudicar a cada número natural una función real o compleja de variable real, definida en un intervalo común I.

Por otra parte, el concepto que tratamos de exponer lo solemos expresar inicialmente y sin recurrir a grandes alardes simbólicos, de la siguiente forma:

"Una sucesión de funciones es un proceso infinito: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x), ...$"

Los puntos suspensivos indican que los elementos $f_n(x)$ continúan "indefinidamente"; el subíndice n sirve para indicar el lugar que ocupa cada término en la sucesión, por tanto, hay tantos términos como números naturales, es decir, infinitos.

Consideramos importante insistir en que el dominio de definición es el mismo para todas las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, ...$ de la sucesión y éste es un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ o subconjunto de $\mathbf{R}$.

Además, conviene hacer notar que una sucesión de funciones es en realidad una función de dos variables: la n, que varía en el conjunto de los números naturales y la x, que toma valores en el intervalo I, donde cada elemento de la sucesión está definido. Si mantenemos constante el valor de n obtenemos una función real (o compleja) de variable real x, la cual tomará valores en el intervalo I; si por el contrario fijamos x, pongamos por caso $x = x_0$, la sucesión de funciones da lugar a una sucesión numérica que denominamos *sucesión numérica asociada a* x_0 (por ejemplo, si asignamos a x el valor 1, entonces $f_n(1)$ es la sucesión numérica asociada a $x_0 = 1$).

Fase de representación simbólica

Técnicamente, la definición más extendida de sucesión de funciones es la de una aplicación de $\mathbf{N}$ en $\mathfrak{F}$, siendo $\mathfrak{F}$ el conjunto de todas las funciones reales (o complejas) de variable real definidas en I, es decir:

$$\mathfrak{F} = \{f_i \ / \ f_i : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ ó } f_i : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{C}\}.$$

Todo ello podemos expresarlo simbólicamente de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} f : \mathbf{N} \to \mathfrak{F} \\ \quad 1 \to f_1(x) \in \mathfrak{F} \\ \quad 2 \to f_2(x) \in \mathfrak{F} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad n \to f_n(x) \in \mathfrak{F} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

De forma simplificada, una sucesión funcional suele expresarse: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

Insistimos en que la "variable n" tiende hacia infinito, lo que viene impuesto por el hecho de que f sea una aplicación y por tanto, todos los elementos de $\mathbf{N}$, todos los naturales, deben tener una y sólo una imagen (la cual puede repetirse o no) en el conjunto $\mathfrak{F}$.

Fase de representación visual

Comenzamos con un ejemplo clásico e idóneo para introducir visualmente la idea de sucesión funcional (y su posterior convergencia puntual y no uniforme); de hecho, aparece en la mayoría de los libros de texto y muchos profesores lo utilizan.

Ejemplo 16

Consideremos la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \leq 1{,}5 \end{cases}$$

Mediante Maple y con sólo dos instrucciones obtenemos la representación gráfica de esta sucesión funcional; además el alumno puede construir las gráficas de las sucesiones numéricas asociadas a cualquier x_0 sin dificultad. La secuencia de instrucciones siguiente (con breves comentarios) constituye un programa que esquematiza en general el proceso a seguir con cualquier otro ejemplo del que se desee extraer la misma información.

Programa 22

```
>restart:with(plots):f:=(x,n)->x^n:
```

Las instrucciones d1 y d2 definen, gráficamente, la sucesión de funciones anterior:

```
>d1:=plot({seq(f(x,n),n=1..8)},x=0..1.5,y=0..1,color=black):
```

>d2:=plot([[1,1],[1.5,1]],color=black):

Las sucesiones numéricas asociadas a los puntos $x_1 = 0{,}6$ y $x_2 = 0{,}8$ se introducen respectivamente de la siguiente forma :

>d3:=plot([[0.6,f(0.6,1)],[0.6,f(0.6,2)],[0.6,f(0.6,3)],[0.6,f(0.6,4)],[0.6,f(0.6,5)],
[0.6,f(0.6,6)],[0.6,f(0.6,7)],[0.6,f(0.6,8)]],style=point,symbol=circle,color=black):
>d4:=plot([[0.8,f(0.8,1)],[0.8,f(0.8,2)],[0.8,f(0.8,3)],[0.8,f(0.8,4)],[0.8,f(0.8,5)],
[0.8,f(0.8,6)],[0.8,f(0.8,7)],[0.8,f(0.8,8)]],style=point,symbol=circle,color=black):

Finalmente, la orden que sigue nos permite obtener conjuntamente la sucesión de funciones y las sucesiones numéricas asociadas:

>display({d1,d2,d3,d4},thickness=2);

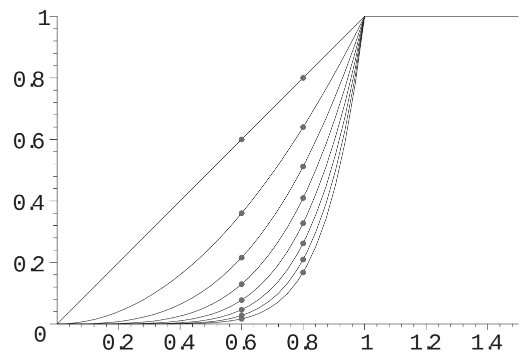


FIGURA 2.42

La observación de una gráfica de este tipo permite al alumno establecer una conexión visual entre los conceptos de sucesión funcional y sucesión numérica asociada a un punto x_0. Desde este punto de vista, Maple facilita la tarea del profesor que puede dar al alumno una visión integradora del concepto tratado.

La representación de esta sucesión de funciones igualmente puede obtenerse a partir de la instrucción "piecewise" como se mostrará en el ejemplo 24.

Ejemplo 17

En este caso presentamos la sucesión funcional $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ y siguiendo el mismo esquema anterior, obtenemos la representación gráfica y las sucesiones numéricas asociadas a los puntos $x_1 = -0{,}6$ y $x_2 = 0{,}6$.

Programa 23

>restart:with(plots):f:=(x,n)->x/(1+(n*x)^2);

$$f := (x, n) \rightarrow \frac{x}{1+n^2x^2}$$

```
>d1:=plot({seq(x/(1+(n*x)^2),n=1..5)},x=-3..3,y=-0.6..0.6,style=line,resolution=300,
color=black):
>d2:=plot([[0.6,f(0.6,1)],[0.6,f(0.6,2)],[0.6,f(0.6,3)],[0.6,f(0.6,4)],[0.6,f(0.6,5)]],style=point,
symbol=circle,color=black):
>d3:=plot([[-0.6,f(-0.6,1)],[-0.6,f(-0.6,2)],[-0.6,f(-0.6,3)],[-0.6,f(-0..6,4)],[-0.6,f(-0.6,5)]],
style=point,symbol=circle,color=black):
>display({d1,d2,d3},thickness=2);
```

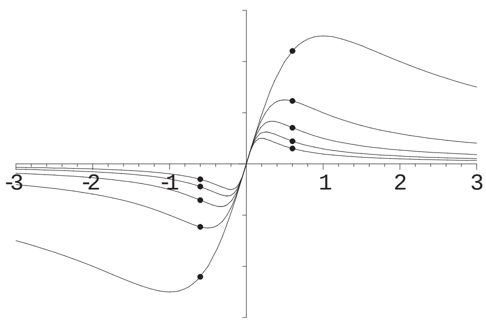


FIGURA 2.43

A partir de estos ejemplos pueden apreciarse algunas de las ventajas que ofrece un software de las características de Maple. Sería una labor engorrosa para el alumno obtener el esbozo de una sucesión de funciones de este tipo mediante los métodos tradicionales; Maple permite al estudiante obtenerla fácil y directamente a partir de una serie de instrucciones que él mismo puede aprender. Además la visualización de la gráfica permite ya intuir algunas de las propiedades que posteriormente vamos a estudiar.

Fase de manipulación

Dada la sucesión funcional definida en $[-2,2]$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, el alumno indagará sobre la forma algebraica y visual de sus primeros términos. La imagen proporcionada por el software le aproximará a su conocimiento y al de otras sucesiones funcionales semejantes (nótese que es muy fácil para un estudiante, por limitada que sea su formación, manipular estos programas cambiando coeficientes, exponentes, signos, etc. en las variable x y n para obtener otros ejemplos y otras representaciones). Dejamos abierto al profesor el planteamiento de otras cuestiones que pueden resultar útiles para alcanzar determinados objetivos que se propongan[6].

[6]Por ejemplo: **1**. Analizar desde un punto de vista gráfico sucesiones funcionales de tipo: a) Algebraico: Polinómicas, racionales, irracionales, etc. b) Trascendente: Trigonométricas, potenciales, exponenciales, hiperbólicas, etc. **2.** Estudiar su comportamiento en el dominio de definición: Estudio local, máximos, mínimos, etc. **3.** Calcular límites desde un punto de vista intuitivo, etc.

Ejemplo 18

<u>*Programa 24*</u>

```
>restart:
>f[n](x)=(x^2+(1/n^2))^(1/2):
```

La instrucción que sigue nos proporciona los cinco primeros términos de la sucesión funcional; posteriormente se visualizará:

```
>for k from 1 to 5 do f[k](x)=(x^2+(1/k^2))^(1/2) od;
```

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+1}$$
$$f_2(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$$
$$f_3(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{9}}$$
$$f_4(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{16}}$$
$$f_5(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{25}}$$

```
>plot({seq((x^2+(1/n^2))^(1/2),n=1..5)},x=-2..2,y=0..2,style=line,resolution=300,
color=black,thickness=2);
```

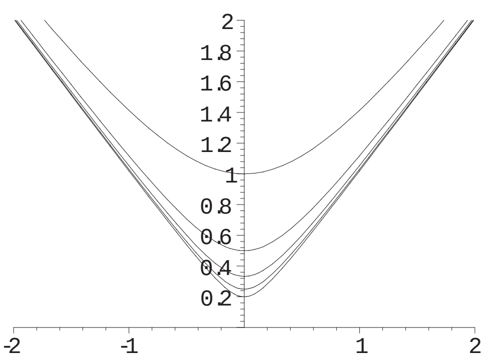


Figura 2.44

2.3.13. Convergencia puntual de una sucesión de funciones

Fase verbal

Una sucesión de funciones se dice que *converge puntualmente* a otra función, si en cada punto $x = x_0$ del dominio I, la sucesión numérica asociada a x_0 es convergente. Por tanto, para cada valor x_0 del dominio, la sucesión numérica asociada a ese punto, es una sucesión cuyo límite existe.

El concepto de "límite puntual" es equiparable, en otros términos no tan precisos, al de

"aproximación no al mismo ritmo".

Desde este punto de vista, decir que una sucesión funcional $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función determinada $f(x)$**,** es lo mismo que afirmar que si fijamos un x_0, cuando n se hace "muy grande", los términos de la sucesión numérica asociada a ese punto, $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, se aproximan cada vez más "y a su propio ritmo" a $f(x_0)$.

Nótese que si elegimos otro punto $x_0^{'}$ del dominio de definición sucederá algo similar. Así pues:

"Cada sucesión numérica asociada converge a su propio ritmo"

Observando la figura 2.42 se puede comprobar que la sucesión funcional

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \leq 1{,}5 \end{cases}$$

converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por otro lado, se puede concluir que el ritmo de convergencia hacia la función $f(x) = 0$, para la sucesión asociada al punto $x_1 = 0{,}6$, es distinto (más rápido) al ritmo correspondiente a la sucesión numérica asociada a $x_2 = 0{,}8$.

Esto último lo podemos expresar añadiendo: "Para todo punto x_0 del dominio y para todo número positivo, por pequeño que sea (este número se denota ε), podremos encontrar un subíndice de la sucesión (ν), natural, a partir del cual la diferencia $f_n(x_0) - f(x_0)$, en valor absoluto, es tan pequeña como queramos".

Fase de representación simbólica

Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones cuyo dominio de definición es un intervalo I.

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge puntualmente hacia* $f(x)$ en I si para cada $x_0 \in I$ existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Con más rigor simbólico:

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*converge puntualmente hacia* $f(x)$ en I si y sólo si fijado un $x_0 \in I$, arbitrario:

$$[\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu \in \mathbf{N},\, \nu = \nu(\varepsilon, x_0) \ \ \wedge \ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Desde una perspectiva educacional, nótese que:

- El subíndice ν depende tanto del ε elegido como del punto $x = x_0$.

- Este subíndice es el parámetro que controla, desde un punto de vista visual o intuitivo, la "velocidad o ritmo de convergencia" de la sucesión numérica asociada correspondiente y varía de forma inversa a ν (cuando ε disminuye, ν aumenta, y vicevesa). A este subíndice lo hemos llamado "*índice de penetración puntual*".

- La definición lleva implícito un *proceso visual dinámico* que podemos clasificar como "*dinamismo puntual*".

Estas consideraciones las examinaremos con más detalle en las fases siguientes donde se desarrollarán ejemplos elegidos a tal efecto. Concretamente, en el ejemplo que proponemos en el apartado siguiente, las sucesiones numéricas asociadas tienden a cero y usamos el valor de ν para chequear el ritmo de convergencia, dado que su relación con el error absoluto es evidente. Sin embargo, en situaciones más generales, para ser más rigurosos y que las distinciones sean más útiles, sería conveniente usar el criterio del error relativo (dividiendo por el valor del límite), lo cual técnicamente proporciona mayor precisión[7].

Fase de representación visual

Para visualizar la "idea" de convergencia puntual de una sucesión de funciones, utilizaremos el ejemplo 19.

Ejemplo 19

Consideremos: $f_n(x) = n^2 x e^{(-nx)}$. Su representación gráfica se obtiene a partir de la siguiente secuencia de instrucciones.

Programa 25

```
>restart:with(plots):
>f:=(n,x)->n^2*x*exp(-n*x):
>plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..5,y=0..2,color=black,thickness=2);
```

[7] En la actualidad estamos investigando tipos de sucesiones numéricas en relación con la velocidad de la convergencia, realizando estudios comparativos con el software, donde se consideran errores absolutos y relativos. Esto será motivo de futuros trabajos.

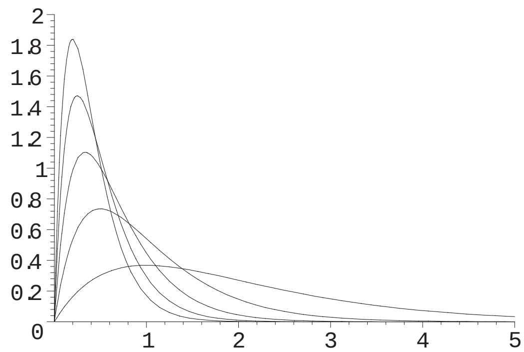


FIGURA 2.45

Sabemos que para cada número real x_0 obtenemos una sucesión de números reales $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ que hemos denominado sucesión numérica asociada a x_0. Para aclarar estas ideas elijamos, por ejemplo, tres números reales: 0,1, 0,3 y 0,5, y en un mismo gráfico, figura 2.46, representemos la sucesión funcional y los cinco primeros elementos de las correspondientes sucesiones numéricas asociadas:

$$f_n\left(\frac{1}{10}\right), f_n\left(\frac{3}{10}\right), f_n\left(\frac{5}{10}\right)$$

Programa 26

```
>restart:with(plots):
>f:=(n,x)->n^2*x*exp(-n*x):
>d1:=plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..0.8,y=0..2,color=black):
>d2:=plot([[0.1,f(1,0.1)],[0.1,f(2,0.1)],[0.1,f(3,0.1)],[0.1,f(4,0.1)],[0.1,f(5,0.1)]],style=point,
symbol=circle,color=black):
>d3:=plot([[0.3,f(1,0.3)],[0.3,f(2,0.3)],[0.3,f(3,0.3)],[0.3,f(4,0.3)],[0.3,f(5,0.3)]],style=point,
symbol=circle,color=black):
>d4:=plot([[0.5,f(1,0.5)],[0.5,f(2,0.5)],[0.5,f(3,0.5)],[0.5,f(4,0.5)],[0.5,f(5,0.5)]],style=point,
symbol=circle,color=black):
>display({d1,d2,d3,d4},thickness=2);
```

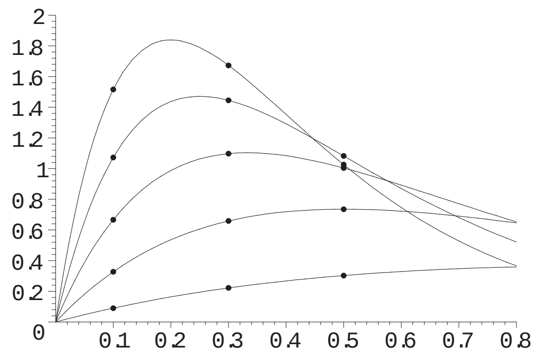


FIGURA 2.46

Maple, como se ha dejado constancia, es una herramienta con un importante poder gráfico, pero además es una potente calculadora. Así, podemos cuantificar los diferentes valores de los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones asociadas por medio de la instrución "evalf":

>for n from 1 to 5 do evalf(f(n,0.1)), evalf(f(n,0.3)), evalf(f(n,0.5)) od;

$f_n(\frac{1}{10})$	$f_n(\frac{3}{10})$	$f_n(\frac{5}{10})$
..09048374180	.2222454662	.3032653299
..3274923012	.6585739633	.7357588824
..6667363986	1.097738081	1.004085720
1.072512074	1.445732217	1.082682266
1.516326649	1.673476201	1.026062483

De igual forma, podemos representar, figura 2.47, la sucesión funcional, así como los términos de las sucesiones asociadas comprendidos entre el 6^o y 10^o lugar (la secuencia de instrucciones sería idéntica a la anterior salvo cambios puntuales; la reproducimos para constatar el efecto que producen estos cambios):

>d5:=plot({seq(f(n,x),n=6..10)},x=0..0.6,y=0..4,color=black):

>d6:=plot([[0.1,f(6,0.1)],[0.1,f(7,0.1)],[0.1,f(8,0.1)],[0.1,f(9,0.1)],[0.1,f(10,0.1)]],style=point, symbol=circle,color=black):

>d7:=plot([[0.3,f(6,0.3)],[0.3,f(7,0.3)],[0.3,f(8,0.3)],[0.3,f(9,0.3)],[0.3,f(10,0.3)]],style=point, symbol=circle,color=black):

>d8:=plot([[0.5,f(6,0.5)],[0.5,f(7,0.5)],[0.5,f(8,0.5)],[0.5,f(9,0.5)],[0.5,f(10,0.5)]],style=point, symbol=circle,color=black):

>display({d5,d6,d7,d8},thickness=2);

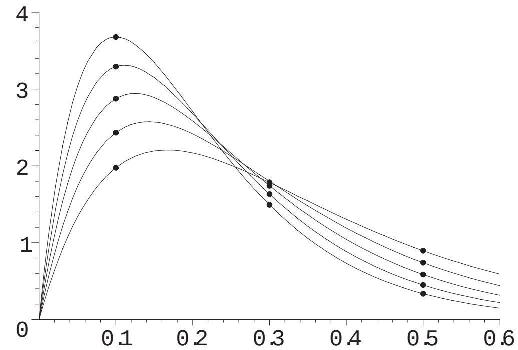


FIGURA 2.47

Por otra parte, podemos cuantificar términos avanzados y obtener conclusiones a partir de su análisis:

>for n from 31 to 35 do evalf(f(n,0.1)), evalf(f(n,0.3)), evalf(f(n,0.5)) od;

$f_n\left(\frac{1}{10}\right)$	$f_n\left(\frac{3}{10}\right)$	$f_n\left(\frac{5}{10}\right)$
4.329228350	.02635760594	.00008915155499
4.174049688	.02080626785	.00005761800945
4.016576930	.01639206863	.00003716541038
3.857950007	.01289066652	.00002392884002
3.699179469	.01011964514	.00001537986983

De la observación directa de las gráficas, de las tablas anteriores y otras que pueden listarse, intuimos que las sucesiones numéricas asociadas convergen, cada una a su propio ritmo, hacia 0, y en consecuencia, la sucesión funcional "converge puntualmente" hacia la *función cero* en el intervalo $(0, +\infty)$. Maple nos proporciona el valor exacto del límite funcional:

>restart:with(plots):f:=(n,x)->n^2*x*exp(-n*x):

>assume(x>0):

>Limit(f(n,x),n=infinity)=limit(f(n,x),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} n^2 x e^{-nx} = 0$$

En principio, es suficiente la obtención de la gráfica para comprobar que el ritmo de convergencia es diferente en cada $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$: En nuestro ejemplo se obseva que en

$x_1 = \frac{1}{10}$ la convergencia es mucho más lenta que en $x_3 = \frac{3}{10}$, y en ésta, más que en $x_5 = \frac{5}{10}$.

Si estuviéramos trabajando en el aula, éste sería el momento de insistir en las siguientes cuestiones:

-¿Cómo cuantificamos de "forma más precisa" la velocidad de convergencia de la sucesión funcional en cualquier punto de su dominio?

-¿De qué manera analizaríamos el parámetro que nos va a servir para comparar ese ritmo de convergencia en varios puntos?

Para ello haremos uso de la definición formal de convergencia puntual: En primer lugar fijamos, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}3$ y estudiamos por separado el comportamiento de las tres sucesiones numéricas asociadas.

En cada caso se resuelve la inecuación:

$$|f_n(x_0) - 0| < 0{,}3$$

Ésta nos permitirá obtener el valor del subíndice ν a partir del cual los términos de las sucesiones asociadas correspondientes son menores que 0,3; gráficamente esto es equivalente a decir que en la representación bidimensional, de la que hemos hablado en apartados anteriores, los términos de $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ (con $n \geq \nu$) penetran dentro de una banda centrada en el valor de la función límite en x_0 (que en este caso es 0) y de anchura 2ε.

En los *programas 27, 28 y 29*[8], correspondientes a cada una de las tres sucesiones numéricas asociadas, Maple nos proporciona:

1. El valor numérico del subíndice $\nu = \nu(0{,}3, x_0)$
2. La gráfica de la sucesión numérica
3. La gráfica de la banda de semianchura 0,3, que nos permite confirmar que a partir del subíndice obtenido los términos de la sucesión penetran en la misma.

- Para la sucesión numérica asociada al punto $x_1 = \frac{1}{10}$, $\left\{f_n\left(\frac{1}{10}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, el programa puede ser:

Programa 27

```
>restart:with(plots):
>f[1/10]:=n->n^2*(1/10)*exp(-n*(1/10));
```

$$f_{1/10} := n \to \frac{1}{10}\, n^2\, e^{(-1/10\, n)}$$

[8]Sabemos que estos tres programas podrían unificarse; aun así, los presentamos uno a uno, con los cambios correspondientes y con el objeto de representar las figuras y el cálculo del índice de penetración puntual por separado.

>eq:=abs(f[1/10](n))=0.3:nu[1]:=floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;

$$\nu_1 = 76$$

>d1:=plot([seq([n,f[1/10](n)],n=1..80)],x=0..80,y=-0.5..6,style=point,color=black):

>d2:=plots[polygonplot]({[[0,0.3],[80.01,0.3],[80.01,-0.3],[0,-0.3]]}):

>display({d1,d2},thickness=2);

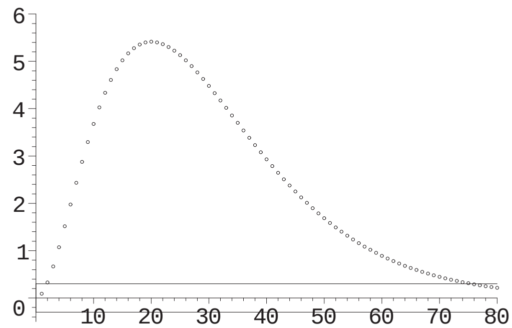


FIGURA 2.48

- Para la sucesión numérica asociada a $x_3 = \frac{3}{10}$, el valor ν y la gráfica de la sucesión numérica con la banda se obtiene de igual forma:

Programa 28

>restart:with(plots):

>f[3/10]:=n->nˆ2*(3/10)*exp(-n*(3/10));

$$f_{3/10} := n \to \frac{3}{10} n^2 e^{(-3/10n)}$$

>eq:=abs(f[3/10](n))=0.3:nu[3]:=floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;

$$\nu_3 = 20$$

>d1:=plot([seq([n,f[3/10](n)],n=1..80)],x=0..80,y=-0.5..6,style=point,color=black):

>d2:=plots[polygonplot]({[[0,0.3],[80.01,0.3],[80.01,-0.3],[0,-0.3]]}):

>display({d1,d2},thickness=2)

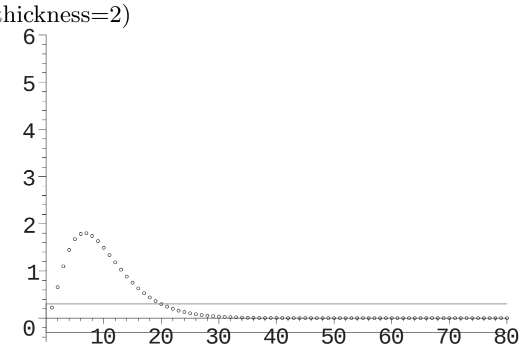


FIGURA 2.49

- Por último, presentamos el programa correspondiente a la sucesión numérica asociada a $x_5 = \frac{5}{10}$:

<u>*Programa 29*</u>

```
>restart:with(plots):
>f[5/10]:=n->nˆ2*(5/10)*exp(-n*(5/10));
```

$$f_{1/2} := n \to \frac{1}{2} n^2 e^{(-1/2n)}$$

```
>eq:=abs(f[5/10](n))=0.3:nu[5]:=floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;
```

$$\nu_5 = 11$$

```
>d1:=plot([seq([n,f[5/10](n)],n=1..80)],x=0..80,y=-0.5..6,style=point,color=black):
>d2:=plots[polygonplot]({[[0,0.3],[80.01,0.3],[80.01,-0.3],[0,-0.3]]}):
>display({d1,d2},thickness=2)
```

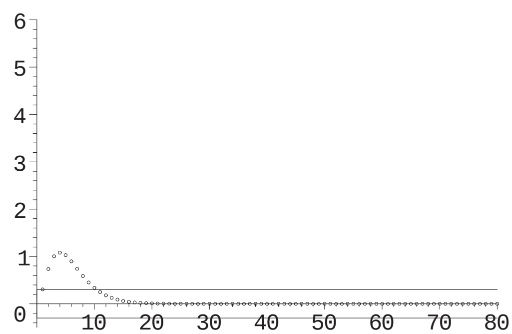


FIGURA 2.50

Es importante insistir en que cada punto de estas gráficas corresponde a un elemento de las sucesiones numéricas asociadas, y debe hacerse hincapié para dejar muy clara la diferencia entre estas gráficas y la de la sucesión funcional.

Además observamos que:

- Para $\left\{f_n\left(\frac{1}{10}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ el primer término que penetra en la banda es el correspondiente a $\nu = 76$ y en este caso diremos que la convergencia es “lenta” en comparación con las otras dos sucesiones asociadas.

- Para $\left\{f_n\left(\frac{3}{10}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ obtenemos $\nu = 20$, lo cual nos informa de que la convergencia en este punto es más rápida que en el caso anterior.

- Para $\left\{f_n\left(\frac{5}{10}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ a partir de $\nu = 11$, todos los términos de la sucesión numérica caen dentro de la banda. La convergencia en este caso es “muy rápida”.

Como consecuencia del análisis de estos ejemplos, el alumno comprueba formal y visualmente que el parámetro que mide la velocidad de convergencia es ν, y que éste depende tanto del valor x_0 elegido como de la semianchura de la banda, ε.

A continuación, presentamos una *esquematización visual* del concepto de convergencia puntual, con el objetivo de proporcionar a los estudiantes una visión holística de este tipo de convergencia, usando simultáneamente:

- La expresión algebraica de la sucesión funcional y la gráfica de algunos de sus términos con los correspondientes elementos de las sucesiones numéricas asociadas.

- Las expresiones algorítmicas de las sucesiones numéricas asociadas elegidas.

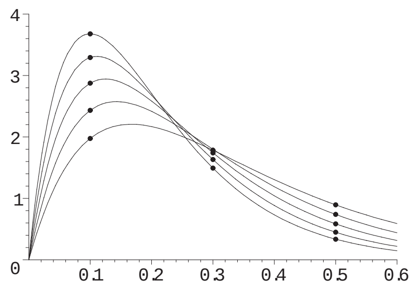
- Tabulaciones de los términos 31 al 35, de cada una de las sucesiones numéricas asociadas.

- Gráficas, incluyendo la banda, en las cuales se observa el subíndice de penetración puntual.

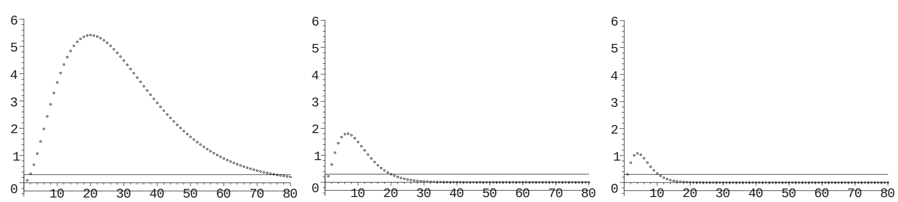
- Verificación algorítmica mediante la resolución de la ecuación correspondiente.

ESQUEMATIZACIÓN VISUAL

$$f_n\left(x\right) = n^2 x e^{-nx}$$



	$f_n\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}n^2 e^{\left(-\frac{1}{10}n\right)}$	$f_n\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3}{10}n^2 e^{\left(-\frac{3}{10}n\right)}$	$f_n\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{5}{10}n^2 e^{\left(-\frac{5}{10}n\right)}$
$n = 31$	4,329228350	,02635760594	,00008915155499
$n = 32$	4,174049688	,02080626785	,00005761800945
$n = 33$	4,016576930	,01639206863	,00003716541038
$n = 34$	3,857950007	,01289066652	,00002392884002
$n = 35$	3,699179469	,01011964514	,00001537986983



$|f_n\left(0{,}1\right) - 0| < 0{,}3$ $\quad$ $|f_n\left(0{,}3\right) - 0| < 0{,}3$ $\quad$ $|f_n\left(0{,}5\right) - 0| < 0{,}3$

$\nu_1 = 76$ $\quad$ $\nu_3 = 20$ $\quad$ $\nu_5 = 11$

FIGURA 2.51

Fase de manipulación

Sin desarrollar con detalle, utilizaremos el **ejemplo 16**, figura 2.42, para poner de manifiesto que dicha sucesión funcional converge puntualmente hacia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

En esta fase el alumno puede investigar minuciosamente el proceso seguido para las dos sucesiones numéricas asociadas allí estudiadas. En primer lugar, proponemos que verifique que la velocidad de la convergencia es diferente en $x_1 = 0{,}6$ y $x_2 = 0{,}8$.

Así pues, debe plantear el problema que quedará reducido a la resolución de las dos inecuaciones siguientes:

- Si $\varepsilon = 0{,}2 \Rightarrow \exists \nu_1 \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n \geq \nu_1$ se verifica que $(0{,}6)^n < 0{,}2$
- Si $\varepsilon = 0{,}2 \Rightarrow \exists \nu_2 \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n \geq \nu_2$ se verifica que $(0{,}8)^n < 0{,}2$

Su desarrollo le permitirá verificar mediante cálculos realizados con lápiz y papel (y con calculadora y/o Maple) lo que ya habría comprobado visualmente a partir de la gráfica (nótese que previamente el alumno tendría que haber dibujado a partir de la Figura 2.42, por el mismo procedimiento que en la figuras 2.48, 2.49 y 2.50 las sucesiones numéricas asociadas en los puntos considerados y una banda de semianchura 2ε).

Debería quedar muy claro que en el intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ todos los elementos de la sucesión funcional son iguales: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = 1$, ..., y en consecuencia, todas las sucesiones asociadas son constantes: $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}$, $\forall x_0 \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Concluyendo, la convergencia en ese intervalo es puntual y la función límite es $f(x) = 1$.

Por otro lado, en esta fase manipulativa, el profesor propondrá ejercicios análogos a los descritos anteriormente, con el objeto de que alterne simultáneamente varios registros de representación del concepto de convergencia puntual.

2.3.14. Convergencia uniforme

Fase verbal

Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$una sucesión funcional definida en un intervalo I.

Diremos que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente hacia* una determinada función $f(x)$ en un cierto intervalo $A \subseteq I$, si el conjunto de todas las sucesiones numéricas asociadas $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $f(x_0)$ con la misma velocidad, siendo $x_0 \in A$.

A partir de la definición anterior y para continuar en el mismo contexto en el que hemos trabajado, podemos afirmar que "*convergencia uniforme*" equivale a

"*convergencia puntual al mismo ritmo*" o *"acercamiento global"*

Desde esta perspectiva, fijado ε, todos los elementos de la sucesión funcional, todas las funciones, se "acercan globalmente" y al mismo ritmo hacia $f(x)$.

Al asimilar el hecho de que todas las sucesiones numéricas asociadas convergen al mismo ritmo, el alumno puede comprender que la idea de convergencia uniforme es independiente del x_0 elegido, es decir, este tipo de convergencia es independiente de la variable x. Como consecuencia, las sucesiones numéricas asociadas desempeñan un papel poco significativo y de ahí que, a partir de ahora, prescindamos de ellas para hablar de convergencia de forma global respecto del intervalo A.

Fase de representación simbólica

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*converge uniformemente hacia* $f(x)$ en un conjunto $A \subseteq I$ significa que para todo ε positivo por pequeño que éste sea, existe algún número natural ν, a partir del cual la distancia en vertical desde $f_n(x)$ hasta $f(x)$ es menor que ε (y en consecuencia, tan pequeña como nosotros queramos), y esto para todo x de A. Simbólicamente:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para cada } n \geq \nu, \text{ para todo } \varepsilon \text{ y para todo } x \in A$$

El número $|f_n(x) - f(x)|$ expresa la separación de los puntos en que la vertical por x corta a las gráficas de $f_n(x)$ y $f(x)$.

Si la gráfica de $f(x)$ la desplazamos una cantidad igual a ε "hacia arriba" e igualmente ε "hacia abajo", es decir, si consideramos las gráficas de $f(x)+\varepsilon$ y $f(x)-\varepsilon$, entre ambos queda definida una banda. Pues bien, las funciones f_n que verifican

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in A$, son las que tienen su gráfica totalmente contenida en la banda.

Así, si en la representación de una sucesión funcional tomamos una banda centrada en $f(x)$ y de anchura 2ε, por muy estrecha que ésta sea, siempre podemos encontrar un valor de n, ν, a partir del cual todos los términos de la sucesión funcional quedan dentro de la misma (ello equivale a decir que la diferencia $f_n(x) - f(x)$, en valor absoluto, es menor que ε); fuera de la banda sólo queda un número finito de funciones.

Esta definición simbólica se expresa:

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente hacia* $f(x)$ en un conjunto $A \subseteq I$ si y sólo si

$$\left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu \in \mathbf{N},\ \nu = \nu(\varepsilon) \text{ y } \begin{cases} \forall n \in \mathbf{N} \\ \forall x \in A \end{cases},\ n \geq \nu\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right)$$

o lo que es lo mismo:

$$\left(\forall\varepsilon > 0, \exists\nu \in \mathbf{N},\ \nu = \nu(\varepsilon)\quad y\quad \begin{cases} \forall n \in \mathbf{N} \\ \forall x \in A \end{cases},\ n \geq \nu \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon\right)$$

Desde una perspectiva educacional, obsérvese que:

- Decir *"para todo ε positivo, por pequeño que sea"*, es equivalente a decir "*para toda banda por estrecha que ésta sea".* El paralelismo entre ambas expresiones resulta claro al observar la gráfica y analizar la definición simbólica de este tipo de convergencia.

- El número positivo ε es un valor que nosotros elegimos arbitrariamente y que controla el ancho de la banda.

- El subíndice ν controla, desde un punto de vista intuitivo, la velocidad a la que "globalmente" todas las funciones de la sucesión penetran completamente en la banda; a ese subíndice podemos llamarlo *"índice de penetración global"* y actúa de forma inversa a la "velocidad de convergencia".

Nótese que ahora ν depende sólo de ε y no del x_0 elegido; de ahí el nombre de convergencia uniforme. Simbólicamente, la definición lo expresa de la siguiente forma: $(\forall\ n \geq \nu)$ y $(\forall x \in A)$, los términos de la sucesión funcional caen dentro de la banda: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. De todo ello se deduce el papel poco relevante que desempeñan las sucesiones numéricas asociadas en este tipo de convergencia.

- Esta definición, igual que la de convergencia puntual, lleva implícito un "*proceso visual dinámico*": si allí el dinamismo era "punto a punto", aquí, en la convergencia uniforme, ese dinamismo es "global".

Todas estas consideraciones las examinaremos con detalle en la fase visual y manipulativa donde se desarrollarán con software ejemplos elegidos adecuadamente.

Fase de representación visual

Ejemplo 20

Desde un punto de vista estrictamente visual, comprobaremos, haciendo uso de la definición de convergencia uniforme, que la sucesión funcional:

$$f_n\left(x\right)=\frac{\frac{1}{2}n\left(x-3\right)+\sin\left(n\left(x-3\right)\right)^3}{n}$$

converge uniformemente hacia una cierta función $f\left(x\right)$ en el intervalo $\left[-1,7\right]$.

Nótese que la sucesión indicada resulta de modificar esta otra:

$$f_n\left(x\right)=\frac{nx+\sin(nx)^3}{n}$$

la cual, si se observa con atención, se concluye que converge hacia $f\left(x\right)=x$ (basta dividir numerador y denominador por n, tener presente que la función $\sin\left(nx\right)^3$ está acotada en nuestro intervalo y pasar al límite cuando $n\to\infty$). Nosotros, por razones estéticas, hemos trasladado tal sucesión funcional, tres unidades de longitud hacia la derecha e incluido el factor $\frac{1}{2}$ en uno de los sumandos.

A continuación presentamos el *programa 30*, que nos permitirá afirmar desde una perspectiva "visual" que nuestra sucesión funcional converge uniformemente en $[-1,7]$ hacia $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Programa 30

```
>restart:with(plots):
>f:=(x,n)->((1/2)*n*(x-3)+sin(n*(x-3))^3)/n:
```

Para tener una primera idea de las gráficas de las funciones que intervienen en la sucesión, dibujamos algunos elementos de la misma:

```
>plot({seq(f(x,n),n=1..5)},x=-1..7,y=-2..3,color=black,thickness=2);
```

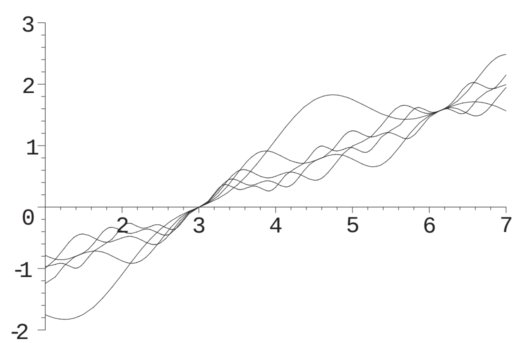


Figura 2.52

Calculamos el límite de la sucesión funcional:

```
>Limit(((1/2)*n*(x-3)+sin(n*(x-3))^3)/n,n=infinity)=limit(((1/2)*n*(x-3)+sin(n*(x-3))^3)
/n,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n\left(x-3\right)+\sin\left(n\left(x-3\right)\right)^{3}}{n} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

El límite es la función $f\left(x\right) = \frac{x-3}{2}$ (recta de pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $\frac{-3}{2}$).

Estamos en condiciones de proceder a la representación de la sucesión funcional y de la banda en un mismo gráfico. Para ello fijamos, en primer lugar, el dominio y el rango en los ejes de coordenadas:

```
>x[1]:=-1:x[2]:=10:y[1]:=-2:y[2]:=3:
```

A continuación, tomamos un valor de ε, por ejemplo $\varepsilon = 0{,}3$, que será la semianchura de la banda en la que van a penetrar a partir de un cierto subíndice ν todas las funciones de la sucesión funcional (obviamente a este valor de ε le podemos ir dando valores arbitrariamente pequeños para obtener distintas representaciones):

```
>epsilon:=a:a:=0.3:
```

Definimos la función límite:

```
>f:=x->(x-3)/2:
```

programamos para obtener la banda:

```
>d1:=plot({f(x)+a,f(x)-a},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],color=black):
```

y representamos un cierto número de funciones de la sucesión funcional para poder así obtener el índice de penetración ν:

```
>d2:=plot({seq(((1/2)*n*(x-3)+sin(n*(x-3))^3)/n,n=1..6)},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],
style=line,resolution=300,color=black):
```

Finalmente lo dibujamos todo en una misma gráfica:

```
>display({d1,d2},thickness=2);
```

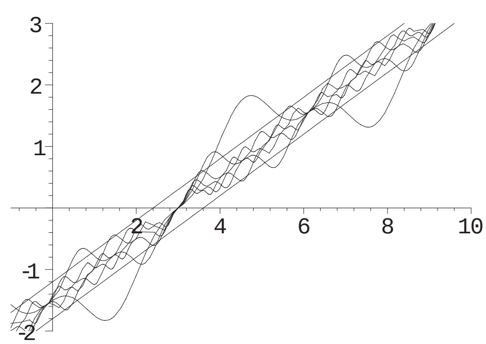


FIGURA 2.53

Así pues, se observa que a partir del término 4^o, éste incluido, todas las funciones quedan en el interior de la banda de anchura 2ε. En este caso hemos graficado las seis primeras funciones; puede comprobarse que si se representan las tres primeras, éstas quedan en parte fuera, y que a partir de la cuarta, todas penetran completamente. Esto es equivalente a afirmar, simbólicamente:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \equiv \tfrac{x-3}{2} - 0{,}3 < f_n(x) < \tfrac{x+3}{2} + 0{,}3, \;\; \forall n \geq 4$$

Fase de manipulación

En esta fase, y para cubrir algunas de las múltiples situaciones que se pueden presentar, desarrollaremos varios ejemplos, cada uno con su interés específico.

Así pues, cabe destacar el **Ejemplo 21** en el que el alumno manipulará la sucesión del **ejemplo 20**, una vez modificada de la siguiente forma:

- desplazada seis unidades desde el origen "hacia la derecha" y cuatro unidades "hacia arriba";

- elevando al cuadrado la expresión (x-6) con el objeto de que la función límite sea una parábola;

- elevando al cubo el argumento del seno para añadir mayor carácter sinusoidal.

Todo ello con la finalidad de hacerla más atractiva desde el punto de vista gráfico.

En el **Ejemplo 22** presentamos el proceso anterior "en movimiento". Aprovechamos los ejemplos 21 y 22 para presentar una *esquematización visual* del carácter uniforme de la convergencia de esta sucesión funcional.

El **Ejemplo 23** trata de una sucesión que converge uniformemente en un cierto intervalo, de forma que la sucesión de sus derivadas sólo converge puntualmente.

En el **Ejemplo 24** se constata el carácter no uniforme de la convergencia de la sucesión del **Ejemplo 16** y se presenta el proceso en movimiento.

El **Ejemplo 25** trata de una sucesión de funciones discontinuas que converge uniformemente hacia una función continua.

Finalmente, en el **Ejemplo 26** facilitamos al alumno una técnica manipulativa donde juegan simultáneamente ε, ν y la banda.

Ejemplo 21

Programa 31

```
>restart:with(plots):
>f:=(x,n)->(((1/2)*n*(x-6)^2+sin((n*(x-6))^3))/n)+4;
```

$$f := (x, n) \rightarrow \frac{\frac{1}{2} n (x-6)^2 + \sin\left(n^3 (x-6)^3\right)}{n} + 4$$

>Limit(f(x,n),n=infinity)=limit(f(x,n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n\,(x-6)^2 + \sin\left(n^3\,(x-6)^3\right)}{n} + 4 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 22$$

>plot({seq(f(x,n),n=1..2)},x=4..9,y=2..9,color=black,thickness=2);

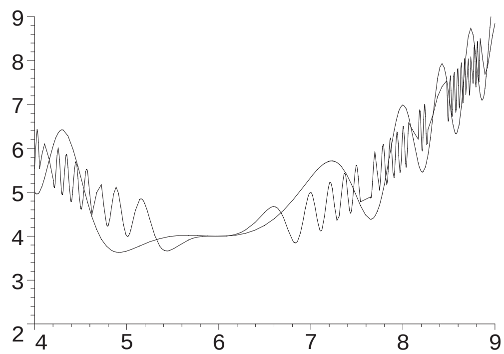


Figura 2.54

>plot({seq(f(x,n),n=1..4)},x=4..9,y=2..9,color=black);

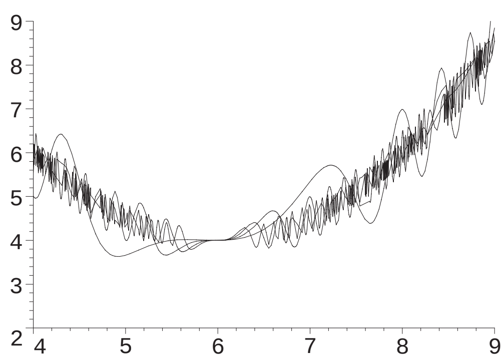


Figura 2.55

En el siguiente gráfico incluimos la sucesión funcional y la banda cuyos límites son $s\,(x) - 0{,}3$ y $s\,(x) + 0{,}3$, donde $s\,(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 22$ es la función límite..

>s:=x->(1/2)*x^2-6*x+22:

>x[1]:=4:x[2]:=9:y[1]:=2:y[2]:=9:

>epsilon:=a:a:=0.3:

>d1:=plot({s(x)+a,s(x)-a},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],color=black):

```
>d2:=plot({seq(f(x,n),n=1..2)},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],style=line,resolution=300,
color=black):
>t1:=textplot([[6,4.6,‘f+a‘],[6,3.4,‘f-a‘]]):
>display({d1,d2,t1},thickness=2);
```

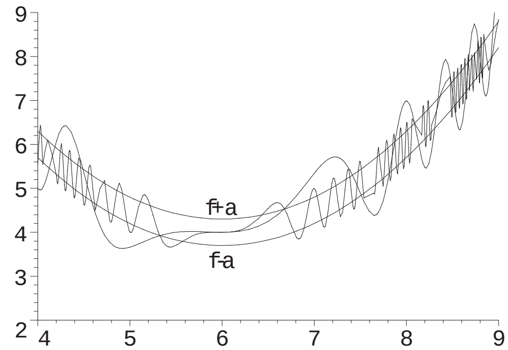


Figura 2.56

Ejemplo 22

En una segunda instancia, utilizamos el programa anterior y presentamos el proceso en movimiento. En dicho programa incluimos un modelo novedoso al graficar, simultáneamente y haciendo uso de la instrucción “display”:

- la sucesión funcional
- la función límite
- la banda
- el movimiento.

El efecto en movimiento puede apreciarse al observar las tres últimas figuras de la esquematización visual.

Programa 32

```
>restart:with(plots):f:=(x,n)->(((1/2)*n*(x-6)^2+sin((n*(x-6))^3))/n)+4;
>x[1]:=4:x[2]:=9:y[1]:=2:y[2]:=9:
>epsilon:=a:a:=0.3:
>s:=x->(1/2)*x^2-6*x+22:
>d1:=plot({s(x)+a,s(x)-a,s(x)},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],color=black):
>t1:=textplot([[6,4.6,‘f+a‘],[6,3.4,‘f-a‘]]):
>p:=animate(f(x,n),x=4..9,n=1..20,frames=25,color=black):
```

```
>display({d1,t1,p},thickness=2);
```

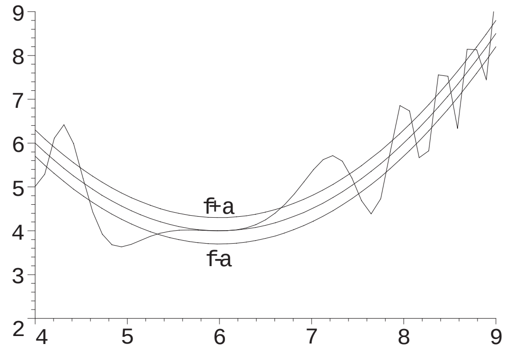


Figura 2.57

Para hacer más factible la consolidación del concepto, desde una perspectiva global, presentamos la *esquematización visual*, figura 2.58, donde se comprueba que la sucesión $f_n(x)$ converge hacia la parábola $s(x)$ anterior, de forma uniforme en el intervalo $[4,9]$. Esta simplificación visual incluye:

- La expresión algebraica de la sucesión funcional.

- La gráfica con los tres primeros términos de la sucesión.

- Las expresiones algorítmicas de las sucesiones numéricas asociadas a cuatro números reales ($x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$ y $x_4 = 9$), esto es, $f_n(4)$, $f_n(5)$, $f_n(6)$ y $f_n(9)$.

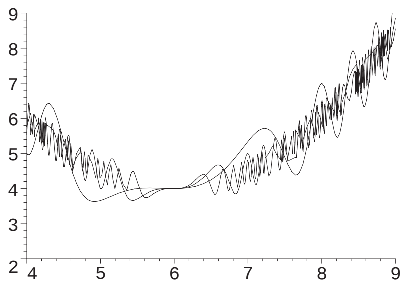
- Las tabulaciones de las diferencias de sus cinco primeros términos con el límite correspondiente de cada una ($l_4 = 6$, $l_5 = 4{,}5$, $l_6 = 4$ y $l_9 = 8{,}5$).

- Las gráficas de las cuatro sucesiones numéricas asociadas con los treinta primeros términos; se apreciará así el papel poco relevante de éstas, pues todas convergen al mismo ritmo. Hemos fijado $\varepsilon = 0{,}3$ y en las tablas se observa la uniformidad de la convergencia.

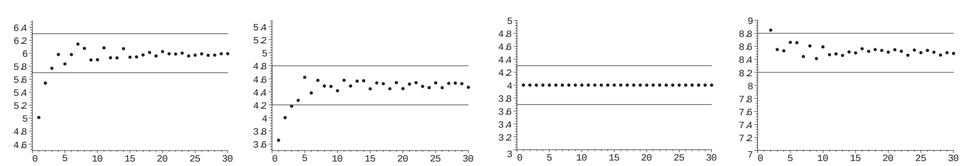
- Las gráficas de $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_6(x)$ incluyendo la banda en la que se observa el subíndice de penetración global es $\nu = 4$.

ESQUEMATIZACIÓN VISUAL

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{2}n(x-6)^2 + \sin\left(n^3(x-6)^3\right)}{n} + 4$$



n	$f_n(4)$ $\frac{2n+sen\left(-8n^3\right)}{n}+4$ $f_n(4)-l_4$	$f_n(5)$ $\frac{\frac{1}{2}n+sen\left(-n^3\right)}{n}+4$ $f_n(5)-l_5$	$f_n(6)$ 4 $f_n(6)-l_6$	$f_n(9)$ $\frac{\frac{9}{2}n+sen\left(27n^3\right)}{n}+4$ $f_n(9)-l_9$
1	$-,98935824660$	$-,8414709848$	0	$,9563759284$
2	$-,46001301910$	$-,4946791233$	0	$,3480292442$
3	$-,23201949610$	$-,3187919761$	0	$,04997893903$
4	$-,01987962350$	$-,2300065096$	0	$,03093067198$
5	$-,16537590810$	$,1232080918$	0	$,1602629936$



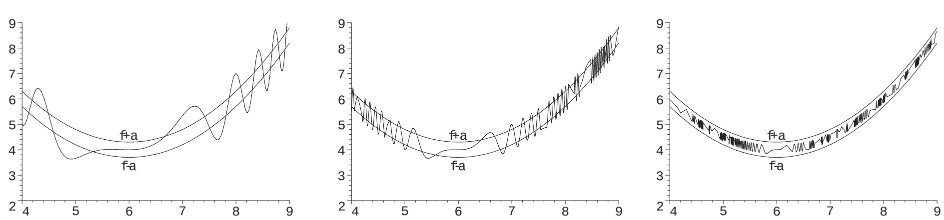


FIGURA 2.58

Ejemplo 23

Estudiaremos en este caso la sucesión de funciones del **ejemplo 18**, $f_n(x) = \sqrt[2]{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, la cual hemos modificado por razones estéticas.

<u>*Programa 33*</u>

>restart:with(plots):

>f:=(n,x)->((x-3)ˆ2+1/(nˆ2))ˆ(1/2)+2;

$$f := (n,x) \to \sqrt[2]{(x-3)^2 + \frac{1}{n^2}} + 2$$

>Limit(f(n,x),n=infinity)=limit(f(n,x),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2]{(x-3)^2 + \frac{1}{n^2}} + 2 = \sqrt{(x-3)^2} + 2$$

>d1:=plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=1..5,y=1.5..4,color=black):

>d2:=plot(((x-3)ˆ2)ˆ(1/2)+2,x=1..5,y=1.5..4,color=black):

>display({d1,d2},axes=boxed,thickness=2,resolution=500);

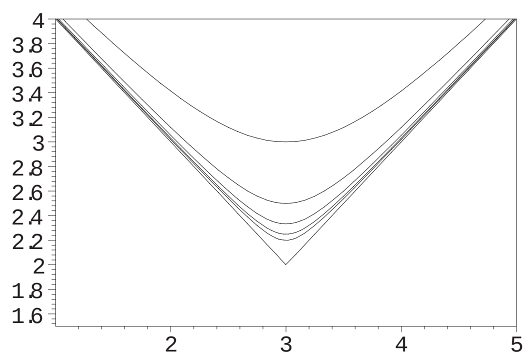


FIGURA 2.59

>f:=x->((x-3)ˆ2)ˆ(1/2)+2;

$$f := x \to \sqrt{(x-3)^2} + 2$$

El lector puede observar que la función límite coincide con $f(x) = |x-3| + 2$

>x[1]:=2.5:x[2]:=3.5:y[1]:=-0.5:y[2]:=1.2:

A continuación fijamos ε, dibujamos la función límite y la banda correspondiente; introducimos texto en el lugar adecuado e incluimos las ocho primeras funciones:

>epsilon:=a:a:=0.2:

>d3:=plot(f(x),x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2]):

>d4:=plots[polygonplot]({[[3,2+a],[x[1],f(x[1])+a],[x[1],f(x[1])-a],[3,2-a],[x[2],f(x[2])-a],[x[2], f(x[2])+a]]}):

>t1:=textplot([[3,3.12,'f1(x),'],[3,2.6,'f2(x),'],[3,2.4,'f3(x)'],[3,2-0..05,'f(x)']]):

>d5:=plot({seq(((x-3)^2+1/(n^2))^(1/2)+2,n=1..8)},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],style=line, resolution=300,color=black):

>display({d3,d4,d5,t1},axes=boxed,thickness=2);

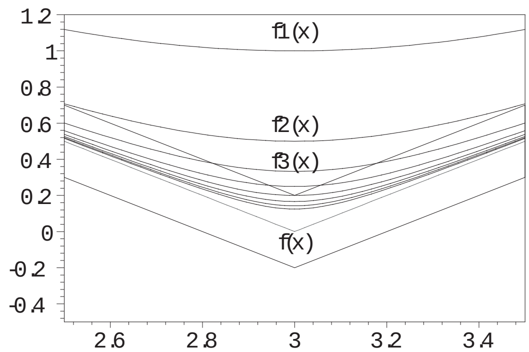


FIGURA 2.60

En esta figura se constata visualmente que la convergencia de la sucesión de funciones hacia f es uniforme. Estudiemos igualmente la sucesión de las derivadas.

Programa 34

>restart:with(plots):f:=(n,x)->((x-3)^2+1/(n^2))^(1/2)+2:

La siguiente instrucción nos permite obtener la expresión de la sucesión de las derivadas:

>diff(f(n,x),x);

$$\frac{1}{2}\frac{2x-6}{\sqrt{(x-3)^2+\frac{1}{n^2}}}$$

Calculamos el límite funcional de la sucesión de las derivadas:

>Limit(%,n=infinity)=limit(%,n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2x-6}{\sqrt{(x-3)^2+\frac{1}{n^2}}}=\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$$

En una misma gráfica representamos los cinco primeros términos de esta sucesión y su función límite:

>d1:=plot({seq((x-3)/((x-3)^2+1/(n^2))^(1/2),n=1..5)},x=1..5,y=-2..2,color=black):

>d2:=plot((x-3)/((x-3)^2)^(1/2),x=1..5,y=-2..2,discont=true,color=black):

>d3:=plot([[3,1],[3,-1]],style=point,symbol=circle):

>display({d1,d2,d3},thickness=2);

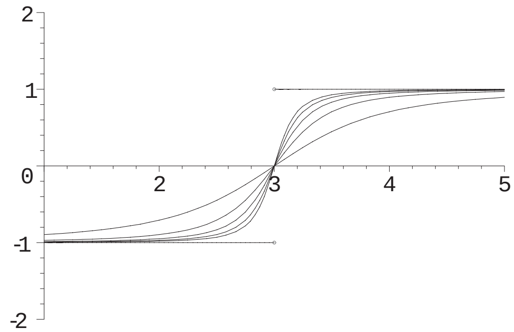


Figura 2.61

Es fácil deducir, desde una óptica visual, que la sucesión de las derivadas no converge uniformemente hacia la función límite, dado que no podemos construir una banda de anchura, por ejemplo 0,6, en la que penetren todas las funciones a partir de un cierto subíndice.

Ejemplo 24

En este ejemplo presentamos el *programa 35*, en el que tomamos como referencia la sucesión de funciones del **ejemplo 16** para definirla en este caso con la instrucción "piecewise" y comprobar que la convergencia es sólo puntual en el intervalo $[0, 1{,}5]$. Además se presenta el proceso en movimiento.

Programa 35

>restart:with(plots):

>f:=(x,n)->piecewise(x>=0 and x<1,x^n,x>=1 and x<=1.5,1);

$$f := (x, n) \to piecewise(0 \leq x \text{ } and \text{ } x < 1, x^n, 1 \leq x \text{ } and \text{ } x \leq 1{,}5, 1)$$

>plot({seq(f(x,n),n=1..10)},x=0..1.5,y=0..1,thickness=2,color=black):

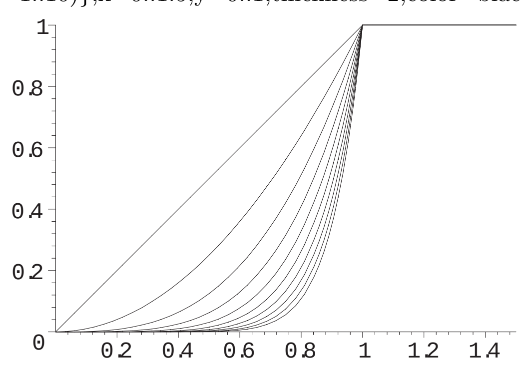


Figura 2.62

```
>assume(x>=0,x<1):Limit(x^n,n=infinity)=limit(x^n,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} x \sim^{n} = 0$$

```
>d1:=plot(0,x=0..1,color=black):
>d2:=plot(1,x=1..1.5,color=black):
>display({d1,d2},thickness=3,xtickmarks=2);
```

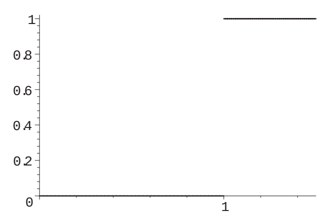


Figura 2.63

```
>epsilon:=a:a:=0.1:
>d3:=plot({a,-a},x=0..1,y=-0.3..1.3,color=black):
>d4:=plot({1+a,1-a},x=1..1.5,color=black):
>t1:=textplot([[0.5,0.17,`0+0.1`]]):
>t2:=textplot([[1.25,1.17,`1+0.1`]]):
>p:=animate(f(x,n),x=0..1.5,n=1..30,frames=25,color=black):
>display({d3,d4,t1,t2,p},color=black,resolution=600,thickness=2);
```

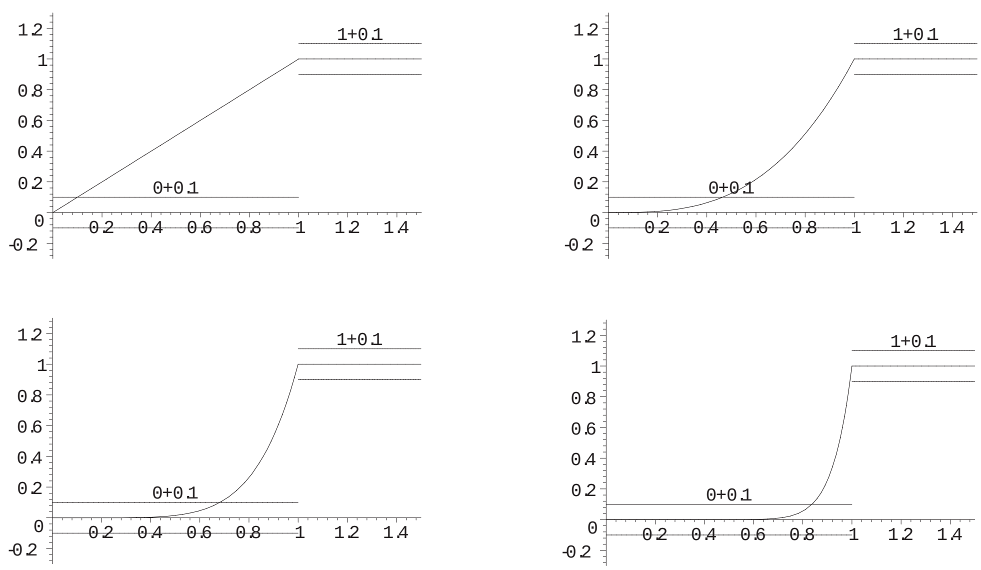


Figura 2.64

Ejemplo 25

Entre los muchos casos que podemos estudiar, presentamos este ejemplo por tratarse de una sucesión de funciones discontinuas, la cual converge uniformemente hacia una función continua. Igualmente, presentamos el proceso en movimiento y dibujamos una banda de anchura 0,6.

<u>*Programa 36*</u>

>restart:with(plots):f:=(x,n)->(floor(n*x))/n;

$$f := (x, n) \to \frac{floor(nx)}{n}$$

>plot({seq(f(x,n),n=1..5)},x=-2..2,y=-2..2,discont=true,scaling=constrained,color=black, thickness=2);

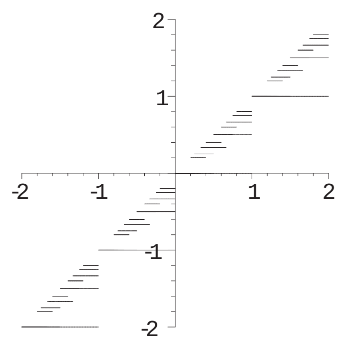


Figura 2.65

>d1:=plot({x,x-0.3,x+0.3},x=-2..2,y=-2..2,color=black):
>p:=animate(f(x,n),x=-2..2,n=1..20,frames=25,color=black):
>display({d1,p},thickness=2);

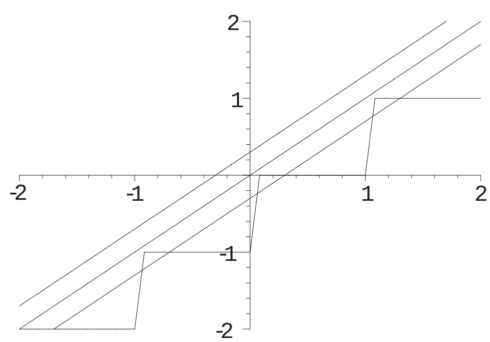


Figura 2.66

Ejemplo 26

Este ejemplo lo consideramos idóneo, ya que el estudiante debe representar, en el intervalo $[-0{,}5, 2]$, las diez primeras funciones de la sucesión funcional $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$ y una banda centrada en su función límite, la función $f(x) = x$, y de semianchura $\varepsilon = 0{,}2$. Al realizar el proceso en movimiento, se observa que parte de algunas funciones quedan fuera de la banda; el ejercicio consiste en encontrar, en el intervalo dado, el término de la sucesión a partir del cual las funciones están totalmente incluidas en la misma. La solución aparece en la figura 2.69, donde se presentan los términos desde el 18 hasta el 30.

Programa 37

```
>restart:with(plots):
>f:=(n,x)->n*x/(n+x):
>plot({seq(f(n,x),n=1..10)},x=-0.5..2,color=black);
```

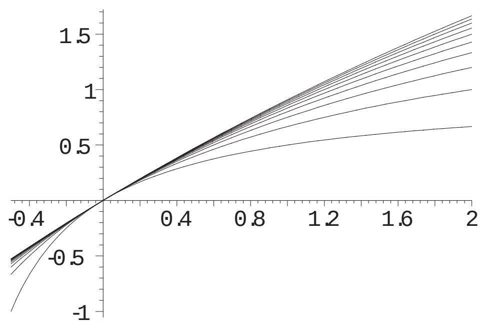


FIGURA 2.67

```
>x[1]:=-0.5:x[2]:=2:y[1]:=-10:y[2]:=10:
>epsilon:=a:a:=0.2:
>d1:=plot({x,x+a,x-a},x=x[1]..x[2],scaling=constrained,thickness=2):
>p:=animate(f(n,x),x=-0.5..2,n=1..10,color=black,thickness=2):
>display({d1,p},color=black,xtickmarks=4,scaling=constrained);
```

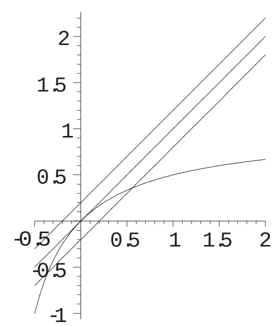


FIGURA 2.68

```
>fsolve (abs(f(n,2)-2)=0.2,n);
```

18,00000000

```
>d2:=plot({seq(f(n,x),n=18..30)},x=-0.5..2,color=black,scaling=constrained):
>display({d1,d2});
```

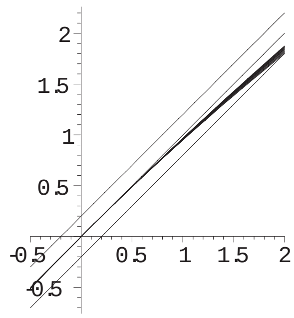


Figura 2.69

2.3.15. Teorema de caracterización de la convergencia uniforme de sucesiones funcionales

En nuestra exposición presentamos al alumno el siguiente teorema (Burgos [14], pág. 360):

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A hacia $f(x)$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ donde

$$a_n = Sup\left(|f_n(x) - f(x)|\right),\ x \in A.$$

Seguidamente planteamos al alumno que estudie, utilizando las prestaciones visuales del software, si la sucesión $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ converge uniformemente en $[0, +\infty)$, haciendo uso de la proposición anterior. Para ello debe construir un programa similar al que presentamos, donde comprueba "intuitiva y visualmente" el teorema de caracterización.

Ejemplo 27

<u>*Programa 38*</u>

```
>restart:with(plots):
>f:=(n,x)->exp(-n*x)/(n^2+1):
```

>plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..3,y=0..0.6,color=black,thickness=2);

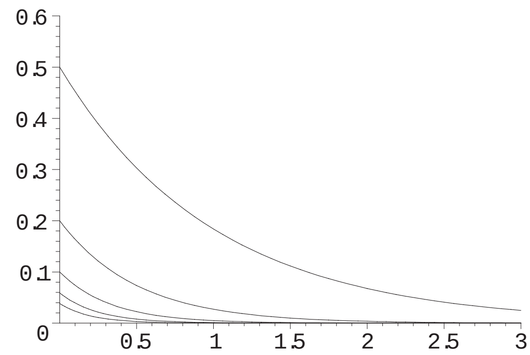


FIGURA 2.70

>assume(x>0):

>Limit(f(n,x),n=infinity)= limit(f(n,x),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}=0$$

Por tanto, la sucesión numérica a la que alude el teorema de caracterización se encuentra partiendo de:

$$a_{n=}Sup\left(|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|\right)=Sup\left(|f_n\left(x\right)-0|\right)=Sup\left(|f_n\left(x\right)|\right),\ x\in(0,+\infty)$$

La variable x puede eliminarse teniendo en cuenta que $e^{-nx}<1$, para $x>0$. Así:

$$\left|\tfrac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|=\tfrac{e^{-nx}}{n^2+1}<\tfrac{1}{n^2+1}$$

El último miembro de la inecuación anterior será la sucesión numérica a_n, la cual verifica:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0.$$

Visualmente, podemos graficar de forma simultánea la sucesión funcional dada y la sucesión funcional de funciones constantes, para de esa manera clarificar e interpretar el teorema; utilizamos las siguientes instrucciones:

>d1:=plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..3,y=0..0.6,color=black,thickness=2,xtickmarks=3):

>d2:=plot({seq(1/(n^2+1),n=1..5)},x=0..3,y=0..0.6,color=black,thickness=2):

>display({d1,d2});

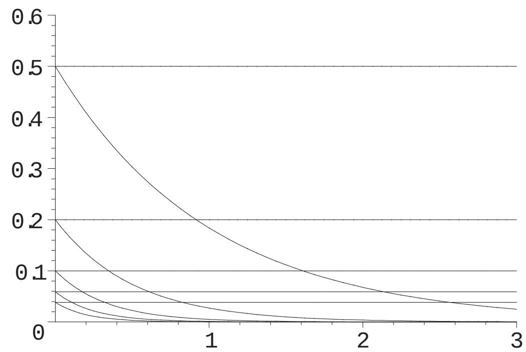


FIGURA 2.71

Así pues, la interpretación del teorema de caracterización es la siguiente: Al representar la sucesión numérica como una sucesión de funciones constantes, Figura 2.71, observamos que ésta acota superiormente a cada término de la sucesión funcional de partida. Visualmente, podemos corroborar que, como la sucesión numérica tiene límite 0, la sucesión funcional ha de converger igualmente hacia la función $f(x) = 0$, y además lo hace uniformemente. Podríamos decir, desde un punto de vista metafórico, que la sucesión numérica considerada "aplasta" a $f_n(x)$ en toda la semirrecta.

Téngase presente que $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ puede ser considerada como una sucesión funcional, donde cada uno de sus elementos es una función constante en el intervalo $[0, +\infty)$, es decir:

$$
\begin{array}{c}
f_1(x) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \\
f_2(x) = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \\
f_3(x) = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(x) = \frac{1}{n^2+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

2.3.16. Series funcionales. Criterio de Weierstrass

Una serie de funciones no es más que la suma de los infinitos términos de una sucesión funcional definida en un cierto intervalo I de $\mathbf{R}$. Fijado un $x \in I$, obtendremos una serie numérica. El conjunto de puntos de I para los que estas series convergen, será el dominio de convergencia de la serie funcional.

Por tanto, si $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones definidas en I, su serie asociada será: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Si consideramos la sucesión de sumas parciales, su término *n-ésimo* será:

$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$. Diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente si existe una función f de I en $\mathbf{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \{s_n(x)\} = f(x)$. En dicho caso, la función $f(x)$ se llama *suma de la serie* y diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en I hacia $f(x)$.

La serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente (o uniformemente) en I cuando la sucesión de sumas parciales converge puntualmente (o uniformemente) hacia $f(x)$ en I.

El *criterio de Weierstrass* nos permite averiguar directamente cuándo una serie funcional converge uniformemente en un determinado intervalo; el enunciado del mismo es como sigue:

Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en I y a_n una sucesión de números reales positivos que verifica para cada n: $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $x \in I$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ convergen uniformemente en I.

Ejemplo 28

Para interpretar visualmente la proposición anterior presentamos la serie siguiente: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4x^2+1}$ y tratamos de justificar, formal e intuitivamente, que la convergencia es uniforme en $[0, +\infty)$. Para ello definimos y graficamos la sucesión funcional de término general $\frac{x}{n^4x^2+1}$ e intentamos acotar su valor absoluto con una sucesión numérica tal y como indica el teorema.

Programa 39

```
>restart:with(plots):
>f:=(n,x)->x/(n^4*x^2+1):
>plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..3,y=0..0.6,color=black,thickness=2,xtickmarks=3);
```

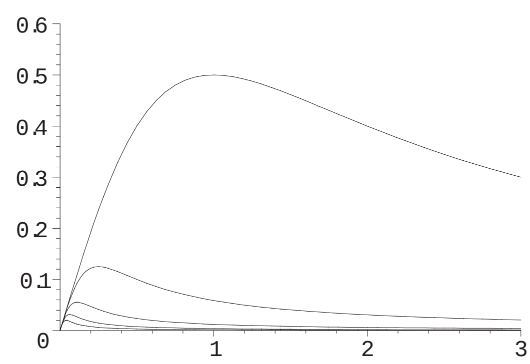


FIGURA 2.72

>Sum(f(n,x),n=1..infinity);

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4x^2+1}$$

A continuación, hallamos los máximos (y mímimos) de los elementos de la sucesión funcional inicial:

>diff(f(n,x),x);

$$\frac{1}{n^4x^2+1} - 2\frac{x^2n^4}{(n^4x^2+1)^2}$$

>x[n]:=solve(%,x); diff(f(n,x),x$2); subs(x=1/n^2, %);

$$x_n := \frac{1}{n^2}, -\frac{1}{n^2}$$
$$-6\ \frac{xn^4}{(n^4x^2+1)^2} + 8\frac{x^3n^8}{(n^4x^2+1)^3}$$
$$-\frac{1}{2}n^2$$

Las tres instrucciones de la última línea de entrada y sus correspondientes salidas nos permiten afirmar que en todos los valores de x de la forma $1/n^2$ las funciones presentan máximos:

- f_1 presenta un máximo en $1/1$
- f_2 presenta un máximo en $\frac{1}{4}$
- f_3 presenta un máximo en $1/9$

Los valores de las funciones en los puntos $\frac{1}{n^2}$ serán:

>f(n,1/n^2);

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

Por tanto, como $\frac{x}{n^4x^2+1} < \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ y la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$ es una serie armónica convergente, en virtud del criterio de Weierstrass, la serie funcional dada es uniformemente convergente en $[0, +\infty)$.

En este punto, observamos que la interpretación geométrica de este teorema sigue un camino paralelo a la del teorema de caracterización anterior, pero sólo desde un punto de vista visual, no formal. Para ello representamos en un mismo gráfico la sucesión de partida y la sucesión numérica encontrada.

>a:=(n,x)->1/(2*n^2);

$$a_n := (n, x) \to \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

```
>d1:=plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..3,y=0..0.6,color=black,thickness=2,xtickmarks=3):
>d2:=plot({seq(a(n,x),n=1..5)},x=0..3,y=0..0.6,color=black,,thickness=2):
>display({d1,d2});
```

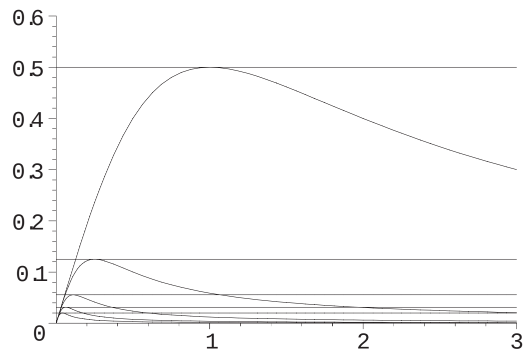


FIGURA 2.73

Una vez más observamos la representación de la sucesión numérica como una sucesión de funciones constantes en x, la cual acota superiormente, en cada término, a la sucesión funcional de la que partimos. Visualmente, podemos corroborar que, como la sucesión numérica converge, la sucesión funcional también ha de converger y además lo hace uniformemente.

Para evitar posibles confusiones, es importante aclarar que el criterio de Weierstrass no es un teorema de caracterización, no es una condición necesaria y suficiente, y en este sentido, no es un teorema paralelo al estudiado en la sección anterior. Debemos hacer hincapié, en nuestras explicaciones, en que este criterio es una condición suficiente para la convergencia uniforme, pero no necesaria. En otras palabras, podemos aportar contraejemplos para los que la convergencia es uniforme y sin embargo, el criterio de Weierstrass no se verifica. Concretamante, la serie siguiente converge uniformemente hacia la función cero en $\mathbf{R}$ y no satisface el citado criterio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{senx}{n}$$

Para visualizarlo, utilizamos el *programa 40*, en cuyas figuras se observa esta convergencia uniforme hacia cero, pero no puede ser acotada por una sucesión numérica a_n de términos positivos, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja. Podría pensarse:

$$\left|(-1)^n \tfrac{senx}{n}\right| < \tfrac{1}{n}$$

La desigualdad anterior es cierta, pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la conocida serie armónica simple que diverge.

<u>*Programa 40*</u>

```
>restart:with(plots):f:=(n,x)->(-1)^n*sin(x)/n:
>plot({seq(f(n,x),n=1..10)},x=0..4*Pi,y=-1..1,color=black,thickness=2,xtickmarks=3);
```

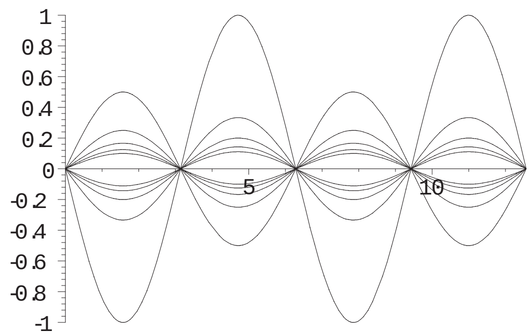


Figura 2.74

```
>d1:=plot({seq(f(n,x),n=10..16)},x=0..4*Pi,y=-0.4..0.4,color=black,thickness=2,
xtickmarks=3):
>d2:=plot({0,-0.1,0.1},x=0..4*Pi,color=black,thickness=2):
>display({d1,d2});
```

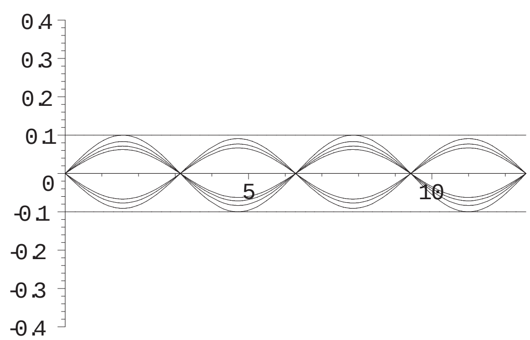


Figura 2.75

```
>d3:=plot({seq(abs(f(n,x)),n=1..6)},x=0..4*Pi,y=0..1.2,color=black,thickness=2,
xtickmarks=3):
>d4:=plot({seq(1/n,n=1..6)},x=0..4*Pi,y=0..1.2,color=black,thickness=2,xtickmarks=3):
```

>display({d3,d4});

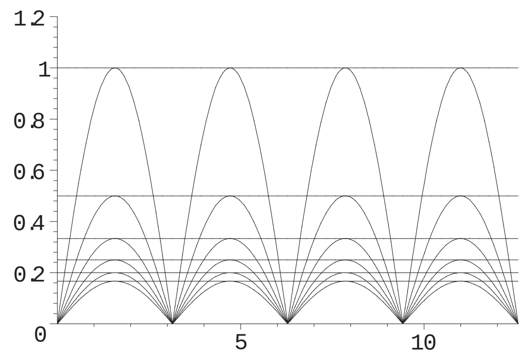


FIGURA 2.76

Es interesante poner de manifiesto, una vez más, que la visualización puede llevar a confusiones. En la figura 2.76 se observa cómo la sucesión de funciones constantes $g_n(x) = \frac{1}{n}$ va "aplastando" a las correspondientes sucesiones $\left|(-1)^n \frac{senx}{n}\right|$. Como hemos dicho, la convergencia de ésta hacia la función cero es uniforme y sin embargo, la serie de términos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge. Esto no invalida la interpretación geométrica que hemos dado del criterio de Weierstrass, ya que cuando se verifica el criterio, existe a_n tal que la sucesión de funciones constantes correspondiente "aplasta" a la sucesión de partida, pero puede suceder que a_n "aplaste" sin que se verifique el criterio, es decir, sin que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente.

Nótese que esta última argumentación mantiene cierto paralelismo con la condición necesaria para la convergencia de series numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

El recíproco no es cierto. En este caso:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sin embargo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ (Ejemplo 13, apartado 13.1)}$$

2.3.17. Ejercicios finales II

Dadas las sucesiones

$$f_n(x) = x^n \text{ y } \; g_n(x) = n^2 \cdot x \cdot e^{(-nx)}$$

Justificar que:

a) $f_n(x)$ no es uniformemente convergente en $[0,1]$ y sin embargo sí lo es en $[0,1-a]$, a positivo y arbitrariamente pequeño.

b) $g_n(x)$ no es uniformemente convergente en $[0,+\infty)$ y sí lo es en $[0+a,\infty)$, a positivo y arbitrariamente pequeño.

a) La sucesión $f_n(x)$ no converge uniformemente en $[0,1]$[9]. Como estudiamos en el **ejemplo 24**, podemos elegir bandas para las cuales "todas" las funciones de la sucesión no penetran totalmente en ellas, ya que existen x del intervalo $[0,1]$ para los cuales la cantidad $|f_n(x) - f(x)|$ es mayor que la semianchura ε de la banda.

Si tomamos $\varepsilon = 0{,}3$, para todas las funciones de la sucesión sucederá que podremos encontrar $x \in [0,1]$ para los cuales la cantidad $|f_n(x) - 0|$ es mayor que 0,3, lo que nos indica que parte de las funciones están fuera de esa banda; metafóricamente, podríamos decir que las funciones están "enganchadas" al punto $(1,1)$ y, por muy avanzado que tomemos un término de la sucesión, siempre habrá parte de la misma que quede fuera. La figura 2.77 en movimiento constata este hecho.

Programa 41

```
>restart:with(plots):f:=(x,n)->x^n:
>d1:=plots[polygonplot]({[[0,0.3],[1.1,0.3],[1.1,-0.3],[0,-0.3]]}):
> p:=animate(f(x,n),x=0..1,n=1..50,frames=25,color=black,thickness=2):
>display({d1,p});
```

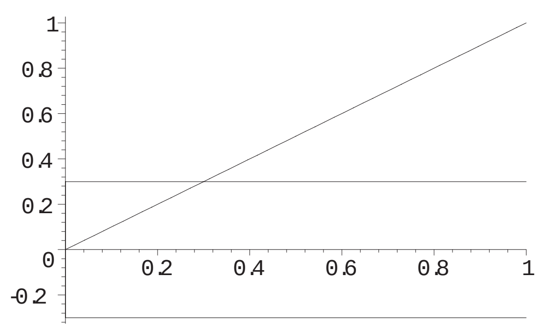


FIGURA 2.77

[9]Estudiado por Seidel en 1848 (véase pág. 32).

En contraposición, la convergencia sí es uniforme en $[0, 1 - a)$, para todo $a > 0$, arbitrariamente pequeño. Si elegimos, por ejemplo, el intervalo $[0, 0{,}95]$, o sea $a = 0{,}05$, la convergencia de $f_n(x)$ hacia la función cero, en ese intervalo, es uniforme. Para aclarar esta situación tomamos tres valores arbitrarios de ε, 0,2, 0,1 y 0,05 y hallamos el valor correspondiente del subíndice ν a partir del cual todas las funciones penetran en la banda. Seguidamente, representamos las gráficas correspondientes.

```
>nu[1]:=floor(solve(abs(0.95^n)=0.2,n))+1;
>nu[2]:=floor(solve(abs(0.95^n)=0.1,n))+1;
>nu[3]:=floor(solve(abs(0.95^n)=0.05,n))+1;
```

$$\nu_1 = 32$$
$$\nu_2 = 45$$
$$\nu_3 = 59$$

Para cada ε obtendremos dos representaciones, una fija y otra en movimento, en las que comprobamos la dependencia (ε, ν) anterior.

- Si $\varepsilon = 0{,}2$, las gráficas buscadas se obtienen a partir de la siguiente secuencia de instrucciones:

```
>d2:=plot({seq(f(x,n),n=32..32)},x=0..0.95,y=-0.25..1,thickness=2,color=black):
>d3:=plots[polygonplot]({[[0,0.2],[1.1,0.2],[1.1,-0.2],[0,-0.2]]}):
>display({d2,d3});
```

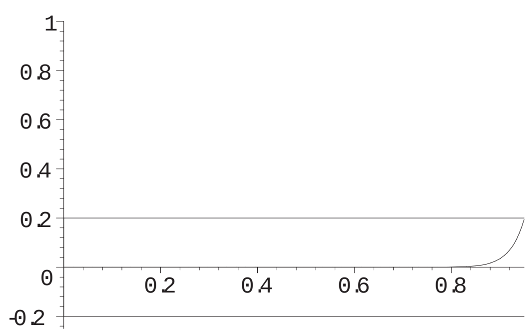


Figura 2.78

```
>d4:=plots[polygonplot]({[[0,0.2],[1,0.2],[1,-0.2],[0,-0.2]]},thickness=2):
>q:=animate(f(x,n),x=0..0.95,n=1..32,frames=25,color=black,thickness=2):
```

```
>display({d4,q});
```

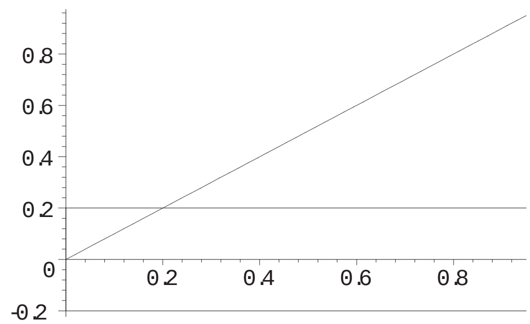


FIGURA 2.79

En las figuras 2.78 y 2.79 vemos cómo, a partir del término 32, todas las funciones entran en la banda.

- Para $\varepsilon = 0{,}1$, obtenemos igualmente las gráficas que nos permiten comprobar que el índice de penetración uniforme es 45:

```
>d5:=plot({seq(f(x,n),n=45..45)},x=0..0.95,y=-0.25..1,thickness=2,color=black):
>d6:=plots[polygonplot]({[[0,0.1],[1.1,0.1],[1.1,-0.1],[0,-0.1]]}):
>display({d5,d6});
```

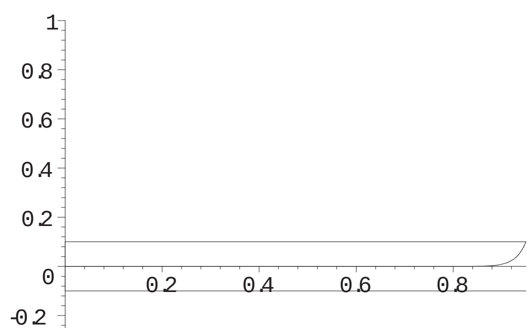


FIGURA 2.80

```
>d7:=plots[polygonplot]({[[0,0.1],[1,0.1],[1,-0.1],[0,-0.1]]},thickness=2):
>r:=animate(f(x,n),x=0..0.95,n=1..45,frames=25,color=black,thickness=2):
```

>display({d7,r},xtickmarks=0);

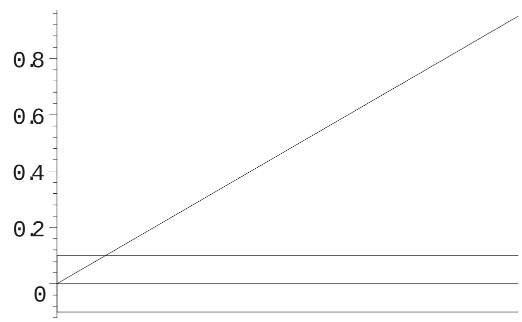


FIGURA 2.81

- En el caso particular $\varepsilon = 0{,}05$, las gráficas nos permiten comprobar que a partir de $\nu_3 = 59$ todas las funciones penetran dentro de la banda:

>d8:=plot({seq(f(x,n),n=59..59)},x=0..0.95,y=-0.25..1,thickness=2,color=black):

>d9:=plots[polygonplot]({[[0,0.05],[1.1,0.05],[1.1,-0.05],[0,-0.05]]}):

>display({d8,d9});

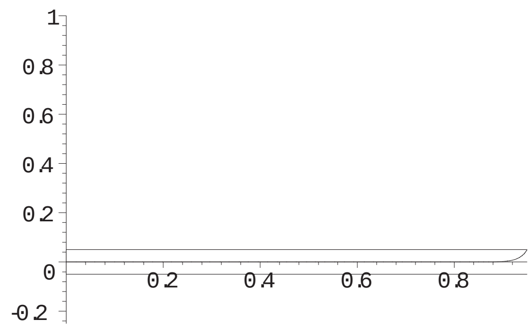


FIGURA 2.82

>d10:=plots[polygonplot]({[[0,0.05],[1,0.05],[1,-0.05],[0,-0.05]]},thickness=2):

>s:=animate(f(x,n),x=0..0.95,n=1..59,frames=25,color=black,thickness=2):

>display({d10,s},xtickmarks=0);

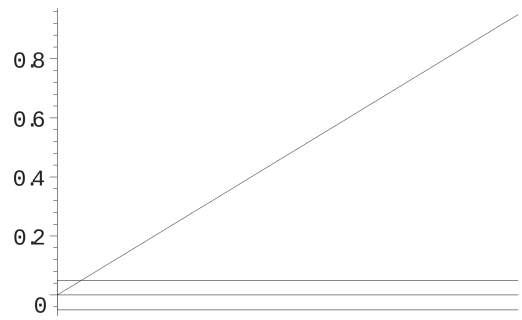


FIGURA 2.83

b) De igual forma, la convergencia de $g_n(x) = n^2 \cdot x \cdot e^{(-nx)}$, de la cual se estudió su convergencia puntual, no es uniforme hacia la función cero en $[0, +\infty)$ y sin embargo, sí lo es en $[0 + a, +\infty)$, para todo a positivo por pequeño que sea.

Programa 42

>restart:with(plots):

>g:=(x,n)->n^2*x*exp(-n*x):

>assume(x>0):

La sucesión funcional tiende hacia cero:

>Limit(g(x,n),n=infinity)=limit(g(x,n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} n^2 x \sim e^{(-nx\sim)} = 0$$

La convergencia hacia cero no es uniforme en $[0, +\infty)$ por dos razones:

1) La sucesión de las imágenes en los puntos donde las funciones presentan máximos se dispara hacia $+\infty$.

2) Además podemos encontrar bandas para las cuales todas las funciones tienen parte fuera de ellas.

1)

>máximos-en-los-x=solve(diff(g(x,n),x),x);

$$máximos - en - los - x = \frac{1}{n}$$

El límite, cuando n tiende a infinito en las imágenes de esos puntos máximos será:

>Limit(g(1/n,n),n=infinity)=limit(g(1/n,n),n=infinity);

$$\lim_{n\to\infty} ne^{(-1)} = \infty$$

Esto indica que las funciones $g_n(x)$, en las vecindades de cero, por la derecha, se hacen arbitrariamente grandes, tanto como queramos, y en consecuencia, no existe convergencia uniforme hacia la función cero. La figura 2.84 ilustra esta idea:

```
>d1:=plot({seq(g(x,n),n=1..7)},x=0..2,y=0..2.7,thickness=1,color=black):
>d2:=plot([[1,g(1,1)],[1/2,g(1/2,2)],[1/3,g(1/3,3)],[1/4,g(1/4,4)],[(1/5,g(1/5,5)], [1/6,g(1/6,6)],
[1/7,g(1/7,7)]],style=point,symbol=circle,color=black):
>display({d1,d2},xtickmarks=3,ytickmarks=3);
```

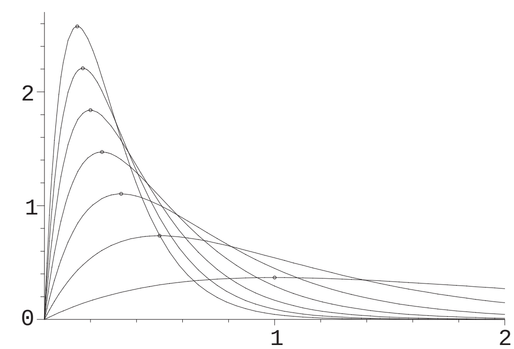


FIGURA 2.84

Además puede observarse en movimiento a partir de la figura 2.85:

```
>d3:=plots[polygonplot]({[[0,0.05],[5,0.05],[5,-0.05],[0,-0.05]]}):
>p:=animate(g(x,n),x=0..4,n=1..7,frames=25,color=black,thickness=2):
>display({d3,p},xtickmarks=0);
```

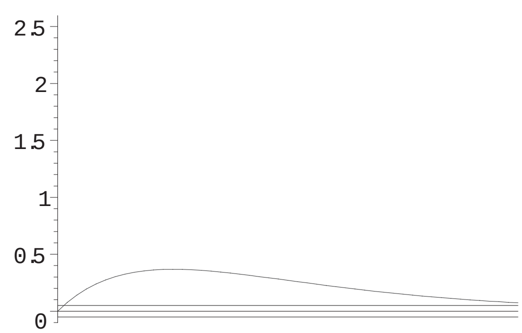


FIGURA 2.85

2) Veamos que la convergencia sí es uniforme hacia cero en $[a, +\infty)$. Por ejemplo, si $a = 0{,}3$, para toda banda por estrecha que sea, supongamos $\varepsilon = 0{,}2$, podenos encontrar

un subíndice ν a partir del cual todas las funciones penetran dentro de la misma. En primer lugar, realizamos una estimación y dibujamos ocho elementos de la sucesión con y sin movimiento.

Sin movimiento:

>d4:=plots[polygonplot]({[[0.3,0.2],[4.1,0.2],[4.1,-0.2],[0,-0.2]]},thickness=2):
>d5:=plot({seq(g(x,n),n=1..8)},x=0.3..4,y=-0.50..1.9,color=black,thickness=2):
>display({d4,d5});

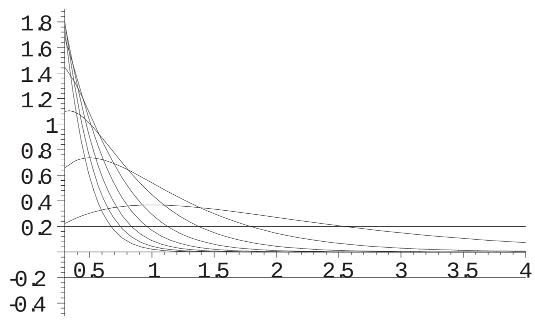


FIGURA 2.86

Con movimiento:

>d6:=plots[polygonplot]({[[0.3,0.2],[4.1,0.2],[4.1,-0.2],[0,-0.2]]}):
>q:=animate(g(x,n),x=0.3..4,n=1..8,frames=25,color=black,thickness=2):
>display({d6,q},xtickmarks=0);

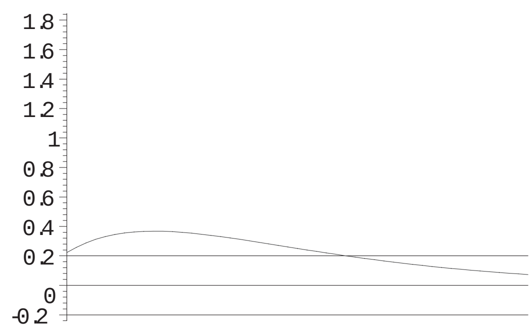


FIGURA 2.87

En esta estimación se observa que parte de las funciones no penetran en la banda. Para encontrar el índice de penetración resolvemos: $f_n(0{,}3) = n^2 \cdot 0{,}3 \cdot e^{(-n \cdot 0{,}3)} = 0{,}2$

>solve(nˆ2*0.3*exp(-n*0.3)=0.2,n);

$$-,7316321778, ,9401563349, 21,94042145$$

El valor de ν ha de ser 22. Gráficamente lo comprobamos representando los 22 primeros términos de la sucesión:

```
>d7:=plots[polygonplot]({[[0.3,0.2],[4.1,0.2],[4.1,-0.2],[0,-0.2]]}):
>r:=animate(g(x,n),x=0.3..4,n=1..22,frames=25,color=black,thickness=2):
>display({d7,r},xtickmarks=0);
```

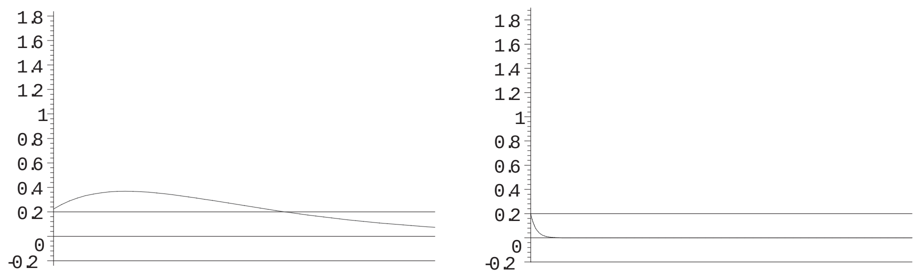


Figura 2.88

Esta experiencia puede repetirse para todo ε y para todo $a > 0$ por pequeños que sean, todo lo cual nos indica que la convergencia de $g_n(x)$ es uniforme hacia cero en $[a, +\infty)$.

2.4. Síntesis de un estudio de campo con alumnos de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas. Cursos 98-99 y 99-00

Una vez elaborada la propuesta curricular, debíamos comprobar si sería efectiva, es decir, si el hecho de llevarla a cabo facilitaba la comprensión de los conceptos y permitía la reconstrucción de los mismos con el paso del tiempo. La fase experimental de su puesta en práctica, nos permitirá presentar un estudio cualitativo de casos particulares y significativos para la investigación.

En esta sección hacemos una síntesis de dos de las experiencias llevadas a cabo; es en el Capítulo 4 donde describimos y analizamos con detalle los resultados de las mismas.

Concretamente, para investigar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales, desarrollamos dos experiencias con alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

La idea central consistía en realizar un análisis comparativo entre alumnos instruidos únicamente por medios tradicionales y aquellos que además de esta enseñanza clásica hubieran recibido una formación complementaria con uso de tecnología:

1- Alumnos sin instrucción en Maple (curso 1998-1999)
2- Alumnos con instrucción en Maple (curso 1999-2000)

Nuestro propósito estuvo centrado en obtener conclusiones comparando los resultados de los cuestionarios que debían contestar ambos grupos.

La primera de las experiencias se llevó a cabo con alumnos de 1^o de Matemáticas del curso 1998-1999, instruidos exclusivamente por métodos tradicionales. Se seleccionaron seis alumnos con el único criterio de haber superado el examen de la convocatoria de Febrero de 1999. Se les pasó una encuesta (apartado 4.3.1) cuatro meses después de superar el mismo y en ella se les interrogaba sobre sus conocimientos sobre el tema.

Es importante tener en cuenta que las cuestiones correspondientes hacían mención a diversos aspectos que contemplamos en nuestra investigación y que constituyen el eje de la misma. Es decir, los diferentes ítems planteados debían recorrer facetas importantes del proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Metodología usada.
- Dificultades cognitivas y conceptuales tanto para responder cuestiones concretas como para la manipulación de los conceptos.
- Uso de distintos registros de representación.
- Conocimentos técnicos de la materia.
- Técnicas de reconstrucción del conocimiento.
- Opiniones personales de los estudiantes, etc.

Los resultados no nos sorprendieron; las respuestas de los alumnos no fueron satisfactorias como puede comprobarse en el apartado 4.3.2. Se corroboraba así lo que por entonces presentíamos y aquello que algunos investigadores habían detectado (Manson, Selden y Selden, [69]).

Resumiendo, los resultados de la encuesta reflejaron que existían dificultades para asimilar estos conceptos, que con relativa facilidad se les borraban de la memoria y que los alumnos demandaban "*un cierto cambio*".

En segundo lugar, la experiencia descrita por Soto Johnson [97] nos incitó a realizar otra similar, pero esta vez procurando respetar las condiciones en que la llevamos a cabo, para así evidenciar de forma más clara las diferencias entre dos métodos de enseñanza: el tradicional y el mismo apoyado con el uso de software. En este sentido, Soto Johnson invita a la realización de una extensa investigación que ponga de manifiesto los beneficios que aportan estos modos de instrucción al aprendizaje del cálculo, y en particular, a la comprensión de series infinitas. Es en esta línea en la que nos hemos propuesto desarrollar nuestro estudio ampliando el campo iniciado por ella para series numéricas infinitas, al campo de las sucesiones y series funcionales donde los aspectos conceptuales primen, en principio, sobre los algorímicos.

Esta segunda experiencia se realizó en el transcurso del siguiente curso (1999-2000) con cuatro alumnos seleccionados de entre los estudiantes de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas por tener los mejores expedientes en el Curso de Orientación Universitaria (COU). Una vez finalizado el cuatrimestre (Febrero-Marzo de 2000) donde recibieron la enseñanza de tipo clásico y durante seis horas repartidas en tres días consecutivos, instruimos a estos alumnos siguiendo nuestra propuesta para transmitir los conceptos de convergencia puntual y uniforme, y utilizando las ventajas del software Maple como elemento complementario a la enseñanza tradicional recibida.

Consecuentemente, utilizamos el esquema conceptual en cuatro fases: *Verbal, simbólica, visual y manipulativa*. Con la instrución perseguíamos que captaran los conceptos o ideas desde una *perspectiva global* haciendo uso de *esquematizaciones visuales* en las que intervinieran al mismo tiempo diferentes *registros de representación:* expresiones algebraicas, gráficas, tabulaciones, desigualdades, etc.

En la primera sesión presentamos las instrucciones básicas del software a partir del tema de sucesiones numéricas. En poco tiempo y mediante ejemplos, los alumnos fueron capaces de, a partir de una sucesión numérica concreta, obtener su gráfica en una representación bidimensional, tabular, calcular límites y comprobar mediante la definición (ε, ν) el valor del mismo.

En la segunda tratamos el concepto de sucesión funcional y se introdujo la definición de sucesión numérica asociada; como consecuencia, explicamos el concepto de convergencia puntual e hicimos hincapié en la velocidad de convergencia desde un punto de vista intuitivo.

La tercera sesión versó sobre la convergencia uniforme; además presentamos una versión gráfica del teorema de caracterización de la convergencia uniforme para sucesiones funcionales y del teorema de Weierstrass para series funcionales.

Posteriormente a la instrucción, elaboramos un primer cuestionario que pasamos a estos alumnos cuatro meses después (Julio de 2000); en él abordamos cuestiones conceptuales sobre el tema tratado que debían ser contestadas como en el método clásico, es decir, con el uso exclusivo de lápiz y papel.

Tres meses más tarde, es decir, siete meses después de la instrucción (Octubre de 2000) citamos, una vez más, a estos alumnos para que contestaran un cuestionario diferente de forma que, en esta ocasión, debían contestar haciendo uso del ordenador y del software.

Previamente, repasamos con ellos las instrucciones básicas que les permitieran poder contestar el cuestionario.

Esquemáticamente, esta segunda experiencia se desarrolló como sigue:

Instrucción: Seis horas, según nuestra propuesta.

Primer cuestionario: Se les pasó a los cuatro meses de la instrucción. Contestaron con lápiz y papel.

Segundo cuestionario: Se pasó a los siete meses de la instrucción, previo repaso de las instrucciones básicas. Contestaron con uso de Maple V.

2.5. Instrumentos

En esta investigación distinguimos dos líneas de trabajo bien diferenciadas:

- En primer lugar, el diseño de una propuesta curricular para la enseñanza de conceptos relacionados con la convergencia de sucesiones numéricas y sucesiones y series funcionales, donde el software Maple desempeña un papel importante.

- Por otra parte, la realización de estudios cualitativos con profesores y alumnos involucrados en los temas señalados.

En este segundo punto, destacamos la importancia de las encuestas como principal instrumento de análisis. Téngase en cuenta que todas las experiencias llevadas a cabo han culminado con encuestas estructuradas, previamente diseñadas. Así, los diferentes ítems planteados persiguen la obtención del tipo particular de información que nos interesa en cada caso.

En los Capítulos 3 y 4, dedicados a la descripción de dichas experiencias, presentamos con detalle las encuestas utilizadas y el análisis posterior a la obtención de resultados.

Pregunta: *¿Qué es en realidad una integral?*
Respuesta: *Un límite*
Pregunta: *¿Qué es en realidad una serie infinita:*
$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$*?*
Respuesta: *Un límite*
Pregunta: *¿Qué es en realidad un límite?*
Respuesta: *Un número*
Pregunta: *¿Qué es en realidad un número?*
... y entonces Karl Weierstrass se puso a investigar
la construcción de los números reales.

Adaptado de Hairer y Wanner [50].

Capítulo 3

Estudios preliminares

3.1. Introducción

Las investigaciones en Educación Matemática tratan de profundizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y asimismo de estudiar la construcción de materiales y métodos novedosos que a la luz de nuevas teorías, brinden a los maestros y/o profesores nuevos enfoques que ayuden al alumno a construir mejor los conceptos matemáticos.

Desde esta perspectiva y como ya hemos explicado, nuestra investigación se fue gestando en el transcurso de varios años de contacto con la docencia universitaria, durante los cuales observábamos importantes dificultades por parte de los alumnos, incluso ya licenciados, para asimilar, manipular y recordar diversos conceptos relacionados con problemas de convergencia a un nivel elemental. Muestra de ello son las respuestas a algunas de las encuestas que propusimos en su momento a estudiantes de tercer ciclo y a alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica. Nos sorprendíamos al leer las contestaciones de los futuros profesores, ya matemáticos o físicos, reconociendo que se sentían incapaces de recordar conceptos fundamentales como los de la convergencia puntual o uniforme de una sucesión funcional. Además, en sus pobres respuestas (véanse anexos I y II), estos alumnos no utilizaban técnica alguna que les permitiera la reconstrucción de su conocimiento en lo que a estos conceptos se refiere.

Para corroborar nuestras sospechas y justificar lo que comenzaba ya a ser una investigación en el ámbito de la Educación Matemática, realizamos un estudio en el que solicitamos información a algunos profesores de la Universidad de la Laguna. Mediante una encuesta (sección 3.3.1) tratamos de indagar en sus propias concepciones, métodos de enseñanza y perspectivas de futuro de algunos tópicos como son la completitud de $\mathbf{R}$ y la definición (ε, ν) de límite de sucesiones de números reales.

Sus respuestas dejaban patente cierta preocupación en torno a estos temas. Su experiencia de muchos años de docencia les ha mostrado que tanto la idea de completitud de

R, como los conceptos de convergencia resultan en algunos casos complicados para los estudiantes, sobre todo en lo relativo a su comprensión y posterior manipulación.

Esta situación nos hacía entender que en el campo de la Educación Matemática, podría existir una importante laguna metodológica relacionada con problemas de convergencia en general. Es en este momento cuando nos reafirmamos en lo que ya intuíamos, e iniciamos la labor investigadora, partiendo de la revisión de la bibliografía relacionada con el tema (véase Capítulo 1). Así comprobamos que en la literatura relativa al estudio de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de límites de funciones reales de una variable real y de la convergencia de sucesiones y series numéricas, existen trabajos acerca de las concepciones y dificultades que presentan los alumnos; sin embargo en lo que se refiere a los conceptos de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales, esta bibliografía era escasa o prácticamente inexistente.

Nuestras reflexiones nos condujeron a plantear las causas por las que no existen investigaciones de tipo educacional en el campo de las sucesiones y series funcionales; éstas pueden explicarse desde dos puntos vista: la primera, radica en la insuficiente praxis y ediciones de trabajos de tipo pedagógico o didáctico relacionados con conceptos matemáticos de cierta dificultad en la Universidad (acomodación al currículum estándarmente establecido); la segunda causa, parte de que si los temas relacionados con las definiciones (ε, ν) ó (ε, δ) de límites de sucesiones numéricas o funciones, respectivamente, resultaban poco accesibles en los primeros niveles universitarios tal y como los profesores encuestados apuntan, los relacionados con la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales resultarían con un mayor grado de dificultad.

Así, como consecuencia de las respuestas de los alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica y de Doctorado, de las reflexiones de los profesores universitarios, de los artículos consultados sobre las dificultades cognitivas y epistemológicas que los conceptos de convergencia numérica presentan a los alumnos, y como respuesta a la necesidad de un cambio cualitativo apuntado por ellos, pensamos que, aprovechando las prestaciones que las nuevas tecnologías ofrecen y el uso del ordenador en particular, podíamos investigar y proponer un modelo de enseñanza-aprendizaje que facilitara la comprensión de los conceptos de convergencia que se imparten en los primeros cursos universitarios, favoreciendo además la reconstrucción de los mismos después de un periodo de tiempo más o menos largo.

Este nuevo modelo debía apoyarse en técnicas de visualización que permitieran un aprendizaje autónomo del alumno, el cual guiado por las indicaciones del profesor, fuera capaz de construir su propio conocimiento, operando a partir de la construcción de sencillos programas en software.

Pensamos que la aplicación de las cuatro fases de enseñanza para la introducción de conceptos nuevos expuestas en la sección 1.6 y el seguimiento de la propuesta curricular que hemos presentado en el Capítulo 2, permitirá superar algunos de los obstáculos relacionados con estos conceptos y apuntados por los alumnos en las encuestas, al tiempo que se estimula la motivación y el interés de los estudiantes involucrados en el estudio de estos temas.

Dedicamos este capítulo a la descripción y análisis de los resultados obtenidos a partir de estas experiencias previas, las cuales, constituyen el punto de partida de la investigación que presentamos.

3.2. Alumnos del CCP y de Doctorado. Cursos 97-98 y 98-99

Como ya comentamos en la introducción a este capítulo y en la sección 1.2 de esta memoria, nuestra investigación es el resultado de varios años de contacto con la docencia universitaria. Durante los mismos, observábamos importantes dificultades por parte de los alumnos para asimilar, recordar y manipular diversos conceptos relacionados con problemas de convergencia a un nivel elemental. Para constatar nuestras observaciones encuestamos a varios estudiantes recién licenciados, concretamente alumnos del curso de Capacitación Pedagógica y de doctorado (cursos 97-98 y 98-99). Sus aportaciones resultaron significativas para nuestro estudio, pues se trataba de estudiantes ya profesores, que manifestaban en sus respuestas, cuáles habían sido las dificultades fruto de su experiencia, dando además una visión amplia y madura de la situación didáctica que ellos pensaban sería más adecuada.

Los ítems de las encuestas trataban de hacerles recordar diversos aspectos relacionados con su actitud y su comprensión, así como la metodología usada por su profesor, en la época en que recibieron las clases correspondientes a los conceptos de límite de una sucesión de números reales y, principalmente, de convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales. Además debían contestar algunas preguntas referentes a su posterior utilización y aplicación en otros campos. Finalmente, y como futuros profesores, se les pidió una opinión en la que reflejaran aquellos cambios curriculares y metodológicos que ellos consideraran necesarios para mejorar la enseñanza de conceptos como éstos y para facilitar su comprensión.

A continuación exponemos una de las encuestas que propusimos a estos alumnos. Posteriormente, hacemos una breve descripción y análisis donde explicitamos las opiniones más generales que sus respuestas reflejan. El lector puede ver las encuestas contestadas en los anexos I y II que se adjuntan a esta memoria.

3.2.1. Encuesta

0.- Al iniciar tus estudios de matemáticas, ¿asimilaste desde un punto de vista global (simbólicamente, visualmente, prácticamente, ...) la definición (ε, ν) de límite de sucesiones de números reales? Razona.

1.- Intenta recodar en qué curso de la carrera estudiaste las sucesiones y series funcionales. ¿En qué asignatura concretamente te explicaron este tema?

2.- ¿Cómo recuerdas estas clases en general, y sobre todo, aquellas en las que el profesor/a explicó la convergencia uniforme de sucesiones funcionales?

- Con agrado
- Te parecían muy interesantes
- Aburridas por la metodología seguida
- Agobiantes porque no entendías
- Sentías indiferencia
- Sentías miedo
- Tenías muchas dudas
- No llegué a enterderlo nunca
- Otros

Comenta tus respuestas

3.- En tu opinión, la expresión

$$n \to f_n(x) = \frac{1}{n}$$

¿Se puede considerar como una sucesión de funciones definidas en el intervalo [0,1]? En caso afirmativo, ¿podrías visualizarlas gráficamente?

4.- Trata de recordar las explicaciones de tu profesor cuando expuso los conceptos de convergencia puntual y uniforme e intenta describir con tus palabras "la esencia" (lo fundamental, lo que te ha quedado) de los mismos. Apóyate en la herramienta que consideres necesaria: Gráficos, expresiones algebraicas, tablas, etc.

5.- De forma intuitiva y/o gráfica, ¿ podrías explicar en qué consiste la convergencia puntual de una sucesión funcional? Expresa tu respuesta con algún ejemplo.

6.- De forma intuitiva y/o gráfica, ¿ podrías explicar en qué consiste la convergencia uniforme de una sucesión funcional? Expresa tu respuesta con algún ejemplo.

7.- ¿Tiene sentido afirmar que una sucesión funcional converge uniformemente en un punto x_o del interior del intervalo donde están definidas las funciones? Razona la respuesta.

8.- ¿Tienes clara la diferencia entre convergencia puntual y uniforme de sucesiones funcionales? Argumenta tu contestación.

9.- ¿Qué dificultades encontrabas para asimilar el concepto de convergencia uniforme?

10.- ¿Sabes o intuyes lo que significa converger "rápidamente" o "lentamente" en los puntos del intervalo donde las funciones están definidas?

11.- ¿Podrías explicar la diferencia entre la convergencia uniforme de una sucesión funcional y la convergencia uniforme de la serie funcional asociada a la misma?

12.- ¿Recuerdas, aunque sea de una forma imprecisa, el criterio de Weierstrass, para la convergencia uniforme de una serie de funciones? ¿Podrías explicar a nivel visual (geométrica y/o gráficamente) lo que significa el criterio anterior?

13.- ¿Qué crees que faltaba en la actuación de tu profesor, ahora que ya has acabado la carrera, para que estos conceptos te hubieran resultado más fáciles de asimilar? Es decir, ¿qué hubieras agradecido que hiciera y sin embargo no hizo?

14.- A lo largo de la carrera, ¿has necesitado estos conceptos y los has aplicado alguna vez en otros campos? Comenta tu respuesta en caso afirmativo.

15.- En estos momentos has acabado tus estudios para obtener la licenciatura y deseas ser profesor de matemáticas. ¿Qué harías con tus alumnos que no hicieron contigo y que sin embargo tu piensas que es fundamental para la enseñanza de las matemáticas a niveles universitarios? ¿Qué no harías por no considerarlo pedagógico?

16.- Para facilitar a los alumnos la asimilación de conceptos matemáticos y en general para mejorar la enseñanza de los mismos, ¿qué cambios piensas que son fundamentales?

- Métodos de trabajo
- Utilización de medios informáticos y de experimentación
- Reducción de las programaciones
- Otros...

Comenta tu respuesta.

17.- ¿Cómo crees que influye el uso del ordenador como herramienta de trabajo en la enseñanza de las matemáticas a niveles universitarios?

¿Piensas que es necesaria su utilización si queremos "llegar" a que un mayor número de estudiantes comprendan más y mejor los conceptos? Argumenta tus respuestas.

3.2.2. Análisis de los resultados

Siguiendo el orden establecido en las encuestas y al analizar las respuestas de los estudiantes, obtenemos las siguientes conclusiones:

- Inicialmente piensan que aunque la comprensión y asimilación global de la definición (ε, ν) de límite de una sucesión de números reales es complicada, ésta se logró progresivamente. Algunos afirman que aunque durante el primer curso de la carrera se insistió bastante en ello, la consolidación del concepto desde el punto de vista simbólico y visual tuvo lugar a largo plazo.

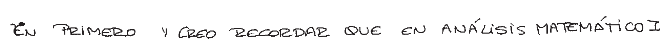


FIGURA 3.1

- Tal y como ilustra la figura anterior, el tema de sucesiones y series funcionales fue estudiado en primero de carrera, concretamente en la asignatura Análisis Matemático I. Las clases en las que el profesor les explicó el concepto de convergencia uniforme resultaron en general aburridas por la metodología seguida y agobiantes por la dificultad que les suponía tratar de entender la simbología.

2. En verdad me parecían en primero un poco aburridas porque no las entendía muy bien ya que estas definiciones son un punto difícil ya que como se trabaja con los Epsilon tienen un grado de dificultad. Esto también pudo ser debido a que a lo mejor de antemano no explican correctamente la definición

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

mediante ejemplos gráficos, con lo que uno cuando vuelve a ver definiciones en las que esté involucrado el Epsilon va con mucho miedo.

Figura 3.2

- Cuatro de ellos contestan afirmativamente cuando se les plantea si la expresión $f_n(x) = \frac{1}{n}$ puede ser considerada como una sucesión de funciones definidas en $[0, 1]$. Además hacen la representación gráfica bidimensional de forma correcta y explican que dicha sucesión es una sucesión de funciones constantes en x.

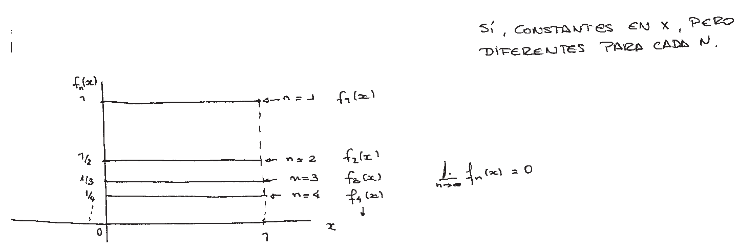


Figura 3.3

- Sólo dos de los alumnos encuestados muestran en sus respuestas que intuitivamente tienen clara la diferencia entre convergencia puntual y uniforme; para ello dan definiciones poco precisas mediante palabras e introducen algún ejemplo que ilustra lo que desean describir. Sin embargo, los restantes no parecen recordar estos conceptos.

3. Recuerdo que puse expresiones del tipo:
$|\ldots\ldots| \leq \ldots$
pero nada más

Figura 3.4

- Las dificultades encontradas para la asimilación de la convergencia uniforme son diversas aunque todos coinciden en la necesidad de conectar lo estudiado en clase con un aporte visual que permita clarificar los conceptos y comprender la simbología utilizada. Coinciden en que fue un tema que se explicó de forma rápida y uno de ellos piensa que "*este concepto necesita cierta reflexión y reposo*".

Me resultaba difícil ver (mejor dicho imaginarme la imagen) cómo se modificaban las funciones al variar n y x al mismo tiempo.

Figura 3.5

- Todos tienen una idea intuitiva y aproximada sobre lo que significa converger "rápidamente" o "lentamente" pero sólo un alumno explica que el parámetro que controla la velocidad de convergencia es ν.

Supongo que será que la aproximación de la ~~función~~ sucesión funcional a la función es buena tomando un valor de n relativamente pequeño (convergencia rápida), mientras que necesitamos un n mayor si la convergencia es lenta.

Figura 3.6

- Sólo un alumno sabe explicar la diferencia entre la convergencia uniforme de una sucesión funcional y la de la serie funcional asociada a la misma. Este mismo alumno describe con sus palabras el criterio de Weierstrass, pero no da un aporte visual.

$f_n \rightrightarrows f$ significa que las f_n están "enteramente" próximas a f, para n suficientemente grande. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows g$ significa que la sucesión de sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ converge uniformemente a g, en el sentido que indicamos inicialmente.

"Si tenemos una sucesión funcional que converge puntualmente a una función, y podemos controlar cada término de la sucesión funcional por una expresión numérica (que sólo dependa de n) que defina una sucesión numérica convergente, entonces la sucesión de partida converge uniformemente (y además, converge a lo que convergía puntualmente)."

Figura 3.7

- Todos señalan como necesidad importante en la transmisión de estos conceptos, el aporte de diversos ejemplos con contenido visual.

Las explicaciones generalmente son muy teóricas y poco visuales. Habrían hecho falta más ejemplos desde un punto de vista de representarlos gráficamente.

Figura 3.8

- Los alumnos afirman haber utilizado los conceptos de los que nos ocupamos en diversos campos del Análisis Real y para estimar la convergencia de la serie de Fourier a una función.

Por supuesto que sí. A la hora de estudiar cuestiones de Análisis Real, para estimar convergencias de la serie de Fourier a una función, cuestiones que tienen que ver con la diferenciabilidad y continuidad de la función límite, a partir de las propiedades que poseen las funciones de la sucesión funcional.

Figura 3.9

- Como futuros profesores de matemáticas piensan que es importante mostrar a los alumnos la utilidad de la materia en otros campos y para ello, creen conveniente trabajar con aplicaciones prácticas y reales de los conocimientos teóricos. Por otro lado, ven fundamental un cambio en la metodología, la cual debe perseguir la participación de los alumnos y el fomento del aprendizaje constructivo. No obstante, afirman que la sustitución del método magistral por otro más participativo y práctico, hace necesaria la reducción de los grupos y la utilización de las nuevas tecnologías que, como el uso del ordenador, permiten un aprendizaje menos memorístico en favor de la comprensión y la motivación del alumnado.

11º Creo que hay que dinamizar las clases y olvidar las clases magistrales que consistían en repetir lo que se encontraba escrito en los libros.
No haría esto, sino todo lo contrario, haría que el alumno construyera su conocimiento no para aprobar un examen sino para obtener un ~~conoc~~ entendimiento pleno de la asignatura.
Los tres cambios son importantes, ya que una utilización de los medios informáticos y de experimentación conllevan un cambio en el método de trabajo. Pero además para conseguir que estos cambios funcionen es necesario una reducción del temario, en muchos casos excesivo.

12º El ordenador motiva al alumnado, y en muchas ocasiones aclara las ideas del alumno, siempre que el profesor esté preparado para trabajar con ellos, de forma que puedan ir construyendo su conocimiento, ya que el ordenador puede convertirse ~~[illegible]~~ en una pizarra de cristal.
Pienso que es necesaria la utilización, pero sin llegar al exceso, tambien es necesario dar clases magistrales para avanzar, pero sin duda el ordenador facilita mucho el trabajo al profesor y el aprendizaje al alumno.

Figura 3.10

3.3. Modelos conceptuales y metodología: Profesores Universitarios

Dadas las dificultades de "*aprendizaje*" respecto a la conceptualización de la convergencia de sucesiones funcionales, que presentaban los recién licenciados en Matemáticas o Físicas, sin experiencia docente y puesto que no habíamos ahondado lo suficiente en torno a sus concepciones últimas y/o más profundas sobre la idea de límite y su formalización (ε, ν), quisimos indagar más sobre ésta y otras cuestiones (completitud de $\mathbf{R}$ o la no completitud de $\mathbf{Q}$), pero ahora con profesionales de reconocida experiencia en la "*enseñanza*" universitaria. Nos propusimos averiguar tanto sus modelos conceptuales como las dificultades que encontraban al transmitirlos.

Así pues, pensamos que podía resultar útil solicitar información a docentes de nuestra universidad. Para ello elaboramos una encuesta, anónima y confidencial, que se pasó a doce profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna. Se analizaron al azar siete de ellas, las que en orden cronológico nos fueron entregadas.

Como ya hemos dicho los objetivos perseguidos fueron:

a) Analizar sus modelos conceptuales.

b) Profundizar en cómo los profesores piensan.

c) Examinar la metodología que usan para presentar esta materia:

- herramientas verbales y simbólicas
- aspectos algebraicos y algorítmicos
- aspectos visuales
- analogías-comparaciones-metáforas
- material complementario:
    - retropoyector (transparencias)
    - ordenador (software)
    - calculadoras, etc.

d) Obtener información sobre los obstáculos epistemológicos de estos conceptos.

e) Conocer sus dificultades a la hora de transmitirlos.

f) Sondear el estado en que se encuentra la enseñanza-aprendizaje y las perspectivas de futuro sobre diferentes aspectos relacionados con los tópicos:

Completitud de $\mathbf{R}$

Sucesiones de números reales

Operación de "paso al límite".

3.3.1. Encuesta y recogida de datos

Encuesta

1.- Cuando reflexionas sobre la completitud de R:

1.1 ¿Qué imagen mental te sugiere?

1.2 ¿Cuál sería una representación visual de esa imagen?

1.3 ¿A qué objeto o cosa de la vida real se asemejaría dicha representación?

1.4 ¿Se corresponde esa idea intuitiva con los aspectos teóricos del Axioma de Completitud? ¿Cuál sería la dificultad o el obstáculo?

2.- Reflexiona sobre la no completitud de Q y responde a las cuestiones siguientes:

2.1 ¿Qué imagen mental te sugiere el hecho de que **Q** no sea completo?

2.2 ¿Cuál sería una representación visual de esa imagen?

2.3 ¿A qué objeto o cosa de la vida real se asemejaría dicha representación?

2.4 ¿Podrías dibujar un "zoom" de un subintervalo cualquiera del intervalo $[0, 1]$ de la recta racional? ¿Y un zoom del zoom anterior?

2.5 ¿Crees que es importante que un alumno de Bachillerato conozca "al menos intuitivamente" estas y otras cuestiones relacionadas con **Q** y con **R**?

3.- Cuando reflexionas sobre la definición (ε, ν) **de límite de una sucesión de números reales:**

3.1 ¿Qué imagen intuitiva te sugiere?

3.2 Cuando intentas visualizar esa definición, ¿la imagen es estática o dinámica?

3.3 ¿Qué tipo de diagrama o representación usas para explicar el concepto?

3.4 ¿Conoces otras alternativas de representación?

3.5 Cuando explicas las sucesiones acotadas de números reales, ¿utilizas algún tipo de representación visual? ¿Podrías dibujarlas?

3.6 Al hacer la demostración de "Toda sucesión convergente está acotada", ¿utilizas algún tipo de diagrama visual?

3.7 Cuando explicas el teorema fundamental: "Toda sucesión de números reales monótona creciente y acotada superiormente es convergente" en el que es necesario aplicar el axioma de "completitud" de **R**, ¿introduces algún tipo de representación visual? ¿Podrías dibujarla?

3.8 ¿Crees que un alumno de Bachillerato-Logse podría asimilar con garantías la definición de límite (ε, ν)? ¿Por qué?

3.9 ¿Piensas que se debería explicar a estos niveles?

3.10 Si crees que no, ¿en qué aspectos (conceptos) se debería "insistir" en el Bachillerato para que la formación del alumno mejorara a la hora de ingresar en la Universidad?

Cálculo proposicional.

Valor absoluto (distancia entre los números reales o entre dos puntos del plano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$).

Relación del valor absoluto en $\mathbf{R}$ con los intervalos.

Relación de la aplicación "módulo" en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con los discos.

Otros que propongas.

3.11 ¿Conoces algún software (paquete informático para la enseñanza de las matemáticas) con el que hacer más asequible y más atractiva esta parte de la matemática? ¿Lo utilizas con tus alumnos, al menos en grupos reducidos, en tu despacho o sala de informática?

4.- Reflexiona sobre la operación "paso al límite".

4.1 ¿ Según tu opinión, cuando un alumno llega a la Universidad tiene asimilada esta operación?

4.2 ¿Piensas que los alumnos de Bachillerato han sentido la necesidad de utilizar dicha operación en algún ambiente matemático, o el estudio ha quedado restringido solamente al cálculo algorítmico de límites de sucesiones?

4.3 ¿En qué momento de su formación universitaria un alumno "siente la necesidad" de utilizar la operación "paso al límite"? Señala los tres tópicos más significativos (según tu punto de vista).

Recogida de datos. Respuestas textuales

1.1

Profesor A: *Algo continuo, completamente "lleno".*

Profesor B: *Continuo.*

Profesor C: *Un conjunto compacto, sin "agujeros" ni fisuras.*

Profesor D: *La idea de continuidad.*

Profesor E: *Un continuo, sin principio ni fin, ni agujeros.*

Profesor F: *Algo compacto, sólido, formando un todo que no tiene fin.*

Profesor G: *Una recta sin "huecos" (sin faltar ningún punto).*

1.2

Profesor A: *La recta, la línea continua.*

Profesor B: *Recta, curva continua.*

Profesor C: *Una recta continua.*

Profesor D: *La de una recta. La del "discurrir del tiempo".*

Profesor E: *Una recta, un alambre infinito.*

Profesor F: *Una recta ilimitada.*

Profesor G: *Una recta dibujada con un solo trazo, que se supone ilimitado.*

1.3

Profesor A: *Las líneas continuas en una carretera; o un hilo continuo de agua saliendo de un grifo.*

Profesor B: *Idea de continuidad, recta ideal.*

Profesor C: *No hay nada en la vida real tan absolutamente compacto, ya que la materia está formada por átomos que no son compactos y dejan vacíos entre sí.*

Profesor D: *El tiempo. El espacio.*

Profesor E: *Al tiempo.*

Profesor F: *Una calle muy larga tal que si miramos a la izquierda o a la derecha no podemos imaginarnos donde acaba.*

Profesor G: *A cualquier cosa "compacta" o "maciza" (aquí "compacto" no es en sentido topológivo).*

1.4

Profesor A: *Creo que es sólo una idea intuitiva, porque teóricamente hemos de introducir una relación de orden para la explicación del Axioma de Completitud.*

Profesor B: *No se corresponde en absoluto. La dificultad es manifiesta, pasaron 2500 años hasta que se formuló el Axioma de Completitud.*

Profesor C: *Sí, La dificultad surge a partir del hecho de que los números racionales no "llenan" por completo la recta numérica. Por ejemplo* $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ *y aunque se pueden dar sucesiones racionales de aproximaciones a* $\sqrt{2}$ *el conjunto de las cotas superiores de* $P = \left\{x \in \mathbf{Q}/\ x^2 < 2\right\}$ *no posee mínimo en* $\mathbf{Q}$ *pero si en* $\mathbf{R}$*. Por esta razón se dice que* $\mathbf{R}$ *es completo, mientras que* $\mathbf{Q}$ *no lo es.*

Profesor D: *La medida del tiempo se efectúa habitualmente de modo discreto. La medida del espacio se suele presentar con medidas aproximadas.*

Profesor E: *No creo, en la vida cotidiana los números reales no se usan.*

Profesor F: *La interpretación intuitiva del apartado último no se corresponde con los aspectos teóricos del axioma de completitud ya que este axioma es creado por la mente humana a efectos de elaborar una teoría. La dificultad sería que tendríamos que recorrer e incluso visualizar muy detalladamente los pasos necesarios para llegar al axioma de completitud.*

Profesor G: *No es evidente la correspondencia de la idea intuitiva anterior con el axioma de que "todo subconjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo". La dificultad está en que cuesta entender que "una sucesión de infinitos números reales, cuyos términos consecutivos o no consecutivos llegan a estar arbitrariamente próximos entre sí cuando avanzamos en la sucesión, posee como límite un único número real" (o sea que todo posible "agujero" de* $\mathbf{R}$ *está lleno). O bien, en la formulación equivalente de Dedekind, que "todo corte de* $\mathbf{R}$*, suficientemente fino como el que define una cortadura, determina un único número real (por fina que sea la navaja, no hay forma de que pase entre dos números reales)". Al ser la realidad "discreta", cuesta mucho entender esta idea abstracta que es "el continuo".*

2.1

Profesor A: *Una colección de infinitos puntos, que pueden esta tan "próximos" como uno quiera y a pesar de eso podemos separar siempre en dos conjuntos disjuntos* *y cerrados. Al hablar de cerrados, la imagen mental que tengo de* **Q** *es la colección de puntos ordenados en la recta* **R**.

Profesor B: *Nube de puntos.*

Profesor C: *Un conjunto totalmente discontinuo debido a los números irracionales.*

Profesor D: *La de discontinuidad.*

Profesor E: *Un discontinuo.*

Profesor F: *Algún conjunto en que sus elementos estén distanciados unos de otros.*

Profesor G: *Una recta llena de "huecos" (con infinitos puntos, pero con otros infinitos puntos faltantes, distribuidos por toda ella).*

2.2

Profesor A: *La representación visual de la imagen mental de la no completitud de* **Q** *son los puntos de* **Q** *sobre la recta* **R** *tan próximos como uno quiera.*

Profesor B: *Un collar de cuentas sin hilo.*

Profesor C: *Una recta discontinua en todos sus puntos.*

Profesor D: *La de una recta con huecos.*

Profesor E: *Un conjunto de infinitos puntos seguidos pero con huecos entre ellos.*

Profesor F: *Una recta con agujeros.*

Profesor G: *Una recta dibujada con puntos, que se supone ilimitada.*

2.3

Profesor A: P*ensaría en el cielo lleno de millones de estrellas.*

Profesor B: *La vida real no es tan retorcida.*

Profesor C: *Creo que no es representable qráficamente. Pertenece al mundo de los conceptos o ideas y no al mundo real.*

Profesor D: *Una imagen tridimensional sería la de un queso tipo gruyére.*

Profesor E: No contesta

Profesor F: *Una avenida muy larga tal que en uno de sus bordes hay plantados árboles a lo largo de ella.*

Profesor G: *Una criba ultrafina o un queso con infinitos agujeros.*

2.4

Profesor A:

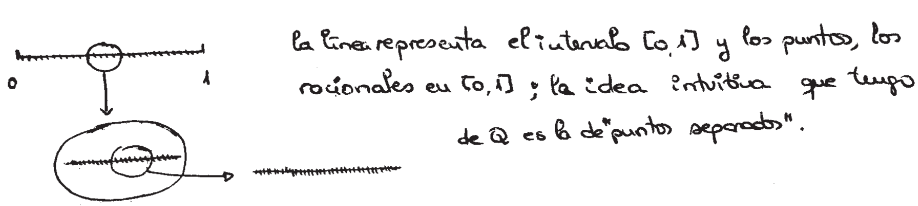


FIGURA 3.11

Profesor B:

FIGURA 3.12

Profesor C: *Un zoom de un subintervalo* $[0,1] \subset \mathbf{Q}$ *representaría la estructura de todo* $[0,1]$. *Recuerda a los fractales, en los que una parte representa el todo. Por otra parte, creo que las representaciones visuales son peligrosas en muchas ocasiones ya que en lugar de aclarar un concepto, conducen a una interpretación equivocada del mismo.*

Profesor D: *Se hace algo complicado.*

Profesor E:

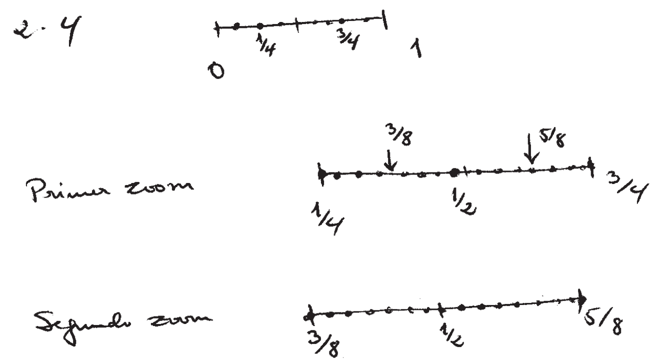


FIGURA 3.13

Profesor F: No contesta.

Profesor G: *Todos los "zoom" tendrían la misma imagen de un segmento de la recta dibujada con puntos.*

2.5

Profesor A: *Sí, creo que las ideas intuitivas permiten al alumno un mejor aprendizaje de los conceptos, así como una ayuda en razonamientos relacionados con ellos; sin embargo, también pueden llegar a resultados erróneos en algunas ocasiones.*

Profesor B: *Francamente no. Hay cosas que me parecen más importantes: cuestiones básicas de física, geometría,... Sobre todo saber escribir y leer (muchos libros de literatura).*

Profesor C: *Es fundamental, ya que el conocimiento de la recta numérica es la base para el posterior estudio del Cálculo y el Análisis.*

Profesor D: *Considero importante que un alumno de Bachillerato conozca el hecho de que hay números que no se puedan expresar como fracciones.*

Profesor E: *Sí, pero sin grandes alardes teóricos, sólo intuitivamente.*

Profesor F: *No lo considero oportuno ya que solamente los matemáticos pueden llegar a entenderlos después de haberlos meditado mucho. Y en Bachillerato lo menos que hay es tiempo para la meditación.*

Profesor G: *Sí, creo que es importante tener una idea intuitiva de esta cuestión al terminar el Bachillerato, aunque no sea capaz de formalizarla (en caso contrario, no se entendería el concepto de continuidad en un intervalo, para funciones reales de una variable real, ni el concepto de trayectoria de un móvil en el plano o en el espacio).*

3.1

Profesor A: *Me sugiere el acercamiento a un cierto valor (el límite) tanto como uno quiera; acumulación de números reales al límite.*

Profesor B: *Ninguna. Es una definición sumamente elaborada tras siglos de trabajo. No me parece ni obvia ni intuitiva.*

Profesor C: *La de una sucesión de números de* $\mathbf{R}$ *cuya distancia* ε *a uno fijo decrece a medida que aumenta* ν.

Profesor D: *La imagen que me sugiere es la de un rectángulo en el que al acortar la base, también se acorta la altura.*

Profesor E: *Aproximación de los elementos hacia un número.*

Profesor F: *Algo difícil de alcanzar tanto si está fijo, como si se está moviendo.*

Profesor G: *Para cada intervalo de la forma* $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ *imagino que todos los términos de la sucesión, desde* a_ν *en adelante, caen en dicho intervalo, por pequeño que sea* ε *(*ν *de pende de* ε*).*

3.2

Profesor A: *La imagen es desde luego dinámica, porque vamos tomando intervalos con centro en el límite cada vez más pequeños y esto implica que los elementos de la sucesión en ese intervalo van cambiando también.*

Profesor B: *Me resulta siempre dinámica.*

Profesor C: *Al ser* ν *función de* ε, $\nu = f(\varepsilon)$, *cuanto menor es el valor de* ε *mayor ha de ser el de* ν, *lo que hace que la visualización de la definición sea totalmente dinámica.*

Profesor D: *Esta imagen es dinámica.*

Profesor E: *Dinámica.*

Profesor F: *Ambas imágenes ya que al ser muy difícil el concepto cualquier cosa es buena para aclarar su comprensión.*

Profesor G: *Aunque el concepto es estático (el tiempo no interviene), conviene darle una imagen dinámica (como si recorriéramos la sucesión, situándonos en los diferentes términos al discurrir el tiempo, con lo cual el límite se vería como "el fin del camino que recorremos", aunque no lleguemos nunca a él). Lo anterior correspondería a una idea intuitiva de la convergencia, pero no corresponde a la propia definición* ε, ν, *donde la sucesión está quieta y el límite también, pero ocurre lo que dijimos en 3.1 (esto es importante comentarlo a los alumnos).*

3.3

Profesor A: *Creo que lo explicaría sobre la recta real.*

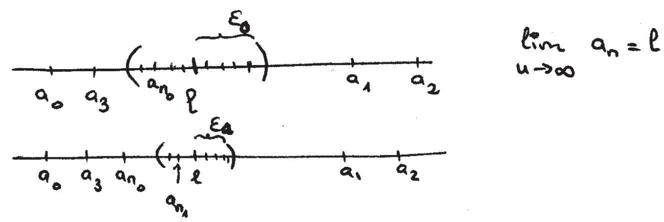


FIGURA 3.14

Profesor B: *El de una función continua.*

Profesor C: *Para explicar el concepto suelo representar los primeros términos de la sucesión en la recta real y le doy un valor arbitrario a ε, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}1$, hallando a continuación por tanteo el correspondiente valor de ν que verifica la definición. Luego tomo $\varepsilon = 0{,}01$ y vuelvo a hallar el correspondiente ν. De este modo intento que los alumnos comprendan la definición.*

Profesor D: *No suelo explicar este concepto con esta definición rigurosa.*

Profesor E: *Representarlo en una recta*

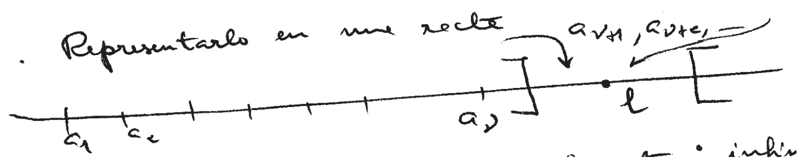


FIGURA 3.15

Fuera, sólo un número finito de elementos; infinitos caen en el pozo (intervalo).

Profesor F: *Por un lado una representación unidimensional, y por otro una representación bidimensional.*

Profesor G: *Lo mejor es representar el límite en la recta real, e ir representando como puntos los diferentes términos iniciales de la sucesión, por orden de índices, para mostrar que éstos caen cada vez más cerca del punto que representa el límite (esta representación se corresponde con la imagen dinámica de la situación de límite, debido a que no pueden representarse todos los términos de la sucesión a la vez). Luego dibujaría un entorno $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, para un cierto ε, y diría que caen en él infinitos puntos representativos de terminos de la sucesión (todos, desde alguno en adelante), recalcando que igual sucedería con cualquier otro entorno, por pequeño que fuese ε.*

3.4

Profesor A: *Hacerlo en el plano; con la representación de la función*

$$\begin{array}{l} f : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \\ \quad 1 \to a_1 \\ \quad 2 \to a_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad n \to a_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

y estudiarlo análogamente a como se hace para $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *siendo f una función definida para* **R**.

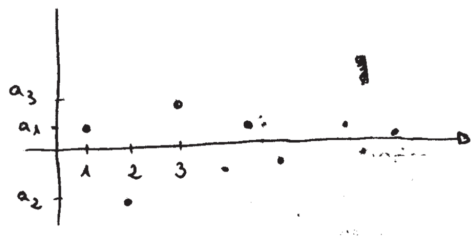


FIGURA 3.16

Profesor B: *Con la definición en la mano: hay muchas posibles.*

Profesor C: *Sí, análogas a la anterior, aunque creo que ésta es la más intuitiva para los alumnos y, por tanto, la mejor.*

Profesor D: *No.*

Profesor E: *Sí, la funcional*

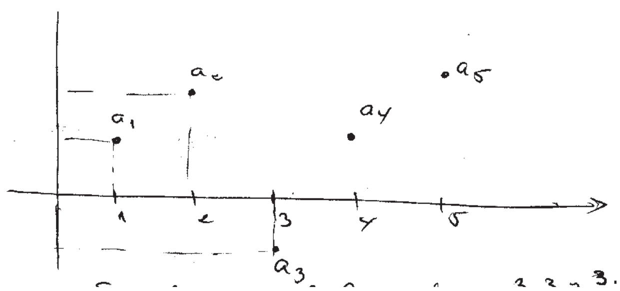


FIGURA 3.17

Profesor F: *Alguna representación continua tal que en ella se pueda visualizar la definición* $(\varepsilon,\ \nu)$.

Profesor G: *Representar los términos de la sucesión en el plano, como gráfica de una función de variable entera positiva, y mostrar cómo los puntos de la gráfica se aproximan al valor del límite, representado por la recta* $y = l$, *(considero esta representación* *bastante más complicada, y por tanto menos clara para un alumno, ya que involucra nuevos conceptos: función real de una variable real y su representación gráfica, así como la idea de asíntota horizontal).*

3.5

Profesor A: L*a imagen visual de una sucesión acotada en* **R** *es la de una serie de puntos en un intervalo acotado de* **R***(número finito o infinito de puntos).*

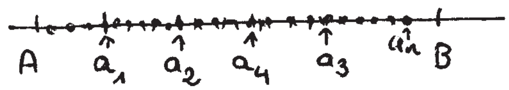


FIGURA 3.18

Profesor B: *Siempre utilizo gráficas para todas las explicaciones (otra gente no y esto creo, es un tema de organización mental).*

Profesor C: *Utilizo la representación clásica sobre la recta real, tomando* a_1, a_2 *,etc., y una cota superior* K*, suponiendo que la sucesión es creciente.*

Profesor D: *La imagen dinámica de ir situando sobre la recta real, los términos de la sucesión, todos ellos entre dos puntos destacados que son las cotas.*

Profesor E: *Los diagramas de las cuestiones 3.3 y 3.4.*

Profesor F: No contesta.

Profesor G: *Si, digo que son las que quedan contenidas en un cierto intervalo* $[a, b]$*, donde "*a*" es una cota inferior y "*b*" una cota superior. Digo entonces que si la sucesión se sale de cualquier intervalo* $[a, b]$ *por grande que éste sea, se llama "no acotada".*

3.6

Profesor A: *Lo explicaría usando la recta real para ayudar a las explicaciones matemáticas teóricas.*

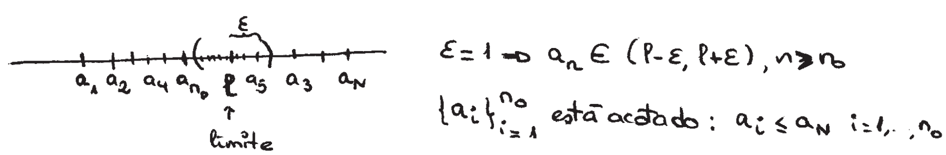


FIGURA 3.19

Profesor B: *Preferiblemente: en general los alumnos no son capaces; después de completar los detalles analíticos.*

Profesor C: *Referente a "Toda sucesión convergente está acotada" es mejor y más claro para los estudiantes utilizar el contrarecíproco: "Una sucesión no acotada no puede converger". Visualmente es fácil de captar.*

Profesor D: *La imagen visual de situar el límite sobre la recta real. Un intervalo centrado en el límite en el que se destaca que están todos los términos posteriores a uno concreto. Otro intervalo cuyos extremos serán las cotas, en cuyo interior estén, además del intervalo antes señalado, todos los términos anteriores al citado anteriormente.*

Profesor E: *Sí, el mismo diagrama que en la pregunta 3.3.*

Profesor F: *Por un lado se debe dar la demostración rigurosa ya que no es muy complicada (siempre que se haya digerido bien el concepto de límite), y además debe utilizarse al menos una representación unidimensional que clarifique en la medida de lo posible los pasos seguidos en la demostración.*

Profesor G: *Desde luego, más que hacer la demostración formal (de interés sólo para estudiantes de Matemáticas) explico que si la sucesión converge, todos sus términos, desde* a_ν *en adelante, estarán en el intervalo* $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. *Por tanto habrán quedado fuera del intervalo* $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ *un número finito de ellos* ($\nu - 1$ *a lo más). Tomando entonces un intervalo* $[a, b]$ *suficientemente grande, que contenga al* $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, *podremos "encerrar" en él a todos los términos de la sucesión. Entonces "a" será una cota inferior y "b" será una cota superior.*

3.7

Profesor A: *En dicho teorema hacemos uso del axioma de "completitud" para ver que si la sucesión está acotada superiormente entonces existe el supremo del conjunto, es decir, la mínima cota superior.*

Para explicar la existencia de una cota se podría utilizar de nuevo la recta.

$$X = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$$
$$Y = \{\textit{cotas superiores de } X\} = \{y \in \mathbf{R}\text{: } y \geq a_i,\ i = 1, 2, ...\}$$

Como $\mathbf{R}$ *es completo encontramos* $c \in \mathbf{R} : \forall i = 1, 2, ..., \forall y \in Y,\ a_i \leq c \leq y$

Además $c = minY$, *es decir,* $c \in Y$: *si* $c \notin Y \Rightarrow \exists a_j \in \dot{X}\text{: } c < a_j$

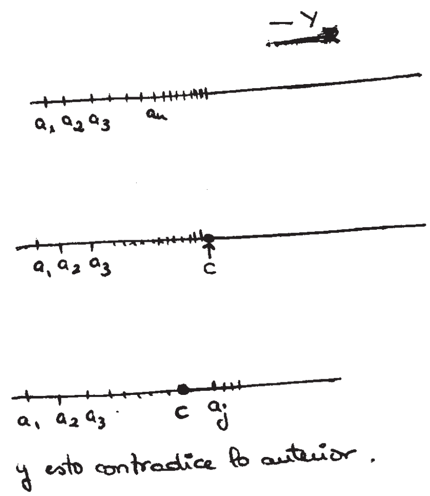


Figura 3.20

Ahora veríamos que:

$$\lim_{i\to\infty} a_i = c$$

Dado $\varepsilon > 0$, $c - \varepsilon/2$ *no está en* $Y \Rightarrow \exists a_N \in X$: $c - \varepsilon/2 < a_N \leq c$ *y como es creciente,*

$$n \geq N \colon c - \varepsilon/2 < a_N \leq a_n \leq c$$

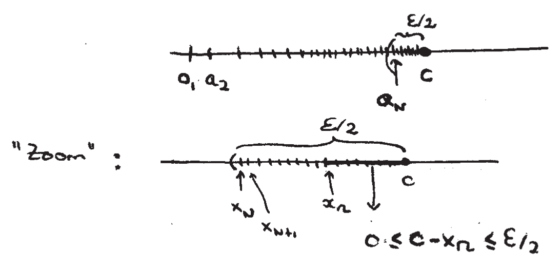


Figura 3.21

$$0 \leq c - a_n \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon,\ n \geq N$$

Profesor B: *La representación gráfica, creo es imprescindible.*

Profesor C: *Si a_n es creciente y K es el extremo superior, $a_n < K$, $\forall n$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario $K - \varepsilon < a_p$, para algún p dependiendo de ε, etc.*

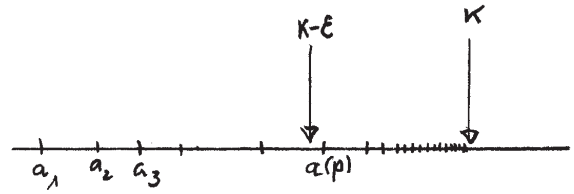


FIGURA 3.22

Profesor D: *La representación visual es también dinámica. Situar sobre la recta real una cota superior. Ir situando los términos de la sucesión, destacando que, al haber una cota superior y tratándose de una sucesión creciente, los términos se irán aproximando entre sí.*

Profesor E: *Sí, el mismo diagrama que en las cuestiones 3.3 y 3.5.*

Si $\alpha = \sup\{a_n;\, n \in \mathbf{N}\}$ *intuitivamente se ve que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$

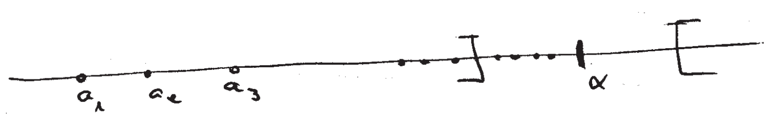


FIGURA 3.23

Profesor F: *Al explicar ese teorema, debido a que necesitamos utilizar el axioma de completitud, toda ayuda es poca. Por eso no está de sobra toda imagen gráfica que nos ayude a comprender el teorema.*

Profesor G: *Represento en la recta una cota superior de la sucesión y represento los primeros términos mostrando cómo crecen (avanzando hacia la derecha) sin superar la "barrera" que representa la cota superior, lo cual los obliga a "comprimirse" cada vez más, aproximándose, por completitud, a algún límite, anterior a la cota o coincidiendo con ella.*

3.8

Profesor A: *Aunque no conozco exactamente cuáles son los conocimientos previos que un alumno de Bachillerato-Logse puede tener a la hora de la introducción de las sucesiones de números reales pienso que no es un concepto demasiado difícil para asimilar teniendo siempre la idea de acumulación de puntos a un valor. (Quizás tenga más dificultad la comprensión de la no existencia de límite, no tanto intuitivamente como en la teoría).*

Profesor B: *Ni en el Bachillerato-Logse ni en los anteriores. Sólo una ínfima minoría tiene la madurez para valorar* $\varepsilon - \nu$ *con toda su potencia.*

Profesor C: *No. Les falta madurez para asimilar dicha definición.*

Profesor D: *No, considero que una mayoría de los alumnos de Bachillerato pueda asimilar tal definición. Los motivos: Poco hábito en demostraciones teóricas. Poca capacidad de abstracción.*

Profesor E: *Sí, pienso que sí, pero a un excesivo coste de tiempo y no sé para qué.*

Profesor F: *No lo creo debido a lo siguiente: 1) Es un concepto muy difícil de asimilar; 2) Se necesitaría mucho tiempo para entender algo dicho concepto; y 3) No merece la pena invertir tantas horas en aprender lo que significa este concepto, teniendo en cuenta que hay otras cosas prioritarias que estudiar.*

Profesor G: *Alguno podría, pero la mayoría no. Por la dificultad lógica y formal que esta definición conlleva (la madurez de estos alumnos, en su mayoría es netamente insuficiente). En cambio la idea intuitiva de límite, aunque esté impregnada de aspectos dinámicos no esenciales, sí pueden y deben adquirirla estos alumnos.*

3.9

Profesor A: *No veo por qué no; supongo que todo dependerá del grupo de alumnos en el curso y de sus conocimientos previos.*

Profesor B: *¡Claramente, no!*

Profesor C: *Sí, pero creo que sería mejor emplear una definición más intuitiva. Por ejemplo: "El número real "a" es límite de la sucesión* a_n *sii dado un entorno de "a", los infinitos términos de* a_n *están dentro de dicho entorno a partir de uno de ellos en adelante". Y apoyarlo con ejemplos y gráficamente.*

Profesor D: *No lo considero necesario. Bastaría con que conociera la idea intuitiva de convergencia.*

Profesor E: *No.*

Profesor F: *Rotundamente no.*

Profesor G: *Decididamente no.*

3.10

Profesor A: *Creo que la introducción del valor absoluto y su relación con los intervalos en* $\mathbf{R}$ *así como el concepto de módulo en* $\mathbf{R}^2$ *y su relación con los discos deben estar perfectamente asimilados por un alumno cuando entra en la Universidad. Y al explicar el concepto de límite, estas ideas quedan de manifiesto.*

Profesor B: *Esto es largo de explicar y probablemente (¡seguro!) no soy la persona idónea para marcar pautas o dar directrices.*

¡Todo esto me parece bastante banal en Bachillerato! Estoy seguro de que no aporta formación alguna a la gente.

Profesor C: No contesta.

Profesor D: *Todos los temas señalados los considero necesarios para poder continuar con éxito las explicaciones en las asignaturas de matemáticas de los estudios universita-*

rios. Pero más que proponer que se insista en el Bachillerato en estos temas, yo propongo que dichos temas sean tratados al inicio de los estudios universitarios.

Profesor E: *Fundamentalmente, con la inclusión de la geometría euclídea (en los primeros cursos) y de la geometría analítica (en los últimos).*

Profesor F: *1) Operatoria, 2) Valor absoluto, 3) Representación de curvas, 4) Problemas de enunciado, 5) Aclaración de ciertos conceptos físicos que utilizan las matemáticas de acuerdo con su edad, 6) Problemas de matemáticas comerciales, 7) Probabilidades, 8) Problemas de teorías de juegos unidimensionales, bidimensionales y de mayor número de jugadores, 8) Teoría de números y 9) Idea de programación y estadística.*

Profesor G: *En aspectos de geometría analítica básica (con trigonometría plana), geometría analítica del plano y del espacio, Álgebra y Aritmética básicas (operatoria con quebrados, potencias, raíces y logaritmos en el campo real; números complejos y operaciones básicas (hasta raíces); ecuaciones algebraicas (no sólo polinómicas) y trascendentes; divisibilidad y factorización de polinomios en el campo real (raíces reales y complejas, multiplicidad de raíces); inecuaciones racionales; vectores en el plano y en el espacio; combinaciones, variaciones y permutaciones (simples); números combinatorios y binomio de Newton; matrices y determinantes; sistemas de ecuaciones lineales y no lineales), algo de Álgebra moderna (conjuntos, relaciones de equivalencia y de orden; leyes de composición interna y posibles propiedades; ejemplos de todo con los conjuntos* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$ *y con conjuntos de la geometría del plano y del espacio; idea de cuerpo conmutativo y ejemplos importantes (*$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$*); idea de espacio vectorial y ejemplos importantes (vectores del plano, vectores del espacio,* $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, *polinomios de grado* $\leq n$, *matrices reales* mn*)) y Cálculo diferencial e integral con funciones de una variable (sin formalizaciones, sin demostraciones de los teoremas, con explicaciones gráficas siempre que sea posible, con conocimiento práctico y gráfico de todas las funciones básicas; con distinción entre imágenes y contraimágenes, dominios y recorridos, inyectividad y no inyectividad; existencias de inversas y su cálculo; existencia de compuestas y su cálculo; inecuaciones funcionales; cálculo de dominios de funciones elementales; límites de funciones (sin definiciones formales, en forma intuitiva, apoyándose en consideraciones gráficas); propiedades de los límites (las básicas, sin demostrar); continuidad en un punto y en un intervalo; continuidad y límites con* $x \to \infty$ *y* $x \to -\infty$ *de las funciones básicas; continuidad de sumas, diferencias, productos, cocientes y compuestas; continuidad de funciones elementales; continuidad de funciones definidas a trozos; clasificación de discontinuidades; teorema de Bolzano y método de bisección; teorema de Darboux o de los valores intermedios; derivada en un punto (derivadas laterales) como límite, como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente; derivable implica continua pero no recíprocamente; derivadas de todas las funciones básicas (sin demostraciones); derivadas de sumas, diferencias, productos, cocientes y compuestas; intervalos de crecimiento y decrecimiento; extremos relativos (condiciones necesarias y criterio de la derivada primera); derivadas de orden superior; intervalos de concavidad y convexidad; puntos de* *inflexión; criterio de la derivada segunda para extremos relativos; problemas de optimización sencillos (directos o con una ecuación de enlace); cálculo de límites por la Regla de L'Hopital; concepto de integral indefinida y propiedades básicas; integrales inmediatas; integración de funciones racionales (sin raíces complejas múltiples en el denominador); integración por partes; integración por cambio de variable (racionalizaciones sencillas, sin exagerar en casos); concepto de integral definida de una función continua en [a,b] (en el sentido de Cauchy); la integral definida como límite de una sucesión de sumas de Riemann (particiones de puntos equidistanciados), para que se vea la integral como el límite de una suma de un número cada vez mayor de sumandos, los cuales son cada vez más pequeños, lo cual es de utilidad para entender aplicaciones de la integral a la Geometría y a la Física; propiedades básicas de las integrales definidas; regla de Barrow; cálculo de áreas planas, longitudes de arcos, volúmenes de resolución y volúmenes de cuerpos con secciones paralelas de áreas conocidas.*

3.11

Profesor A: *Nunca he dado este tema en las asignaturas que he impartido y tampoco conozco ningún paquete informático para ello.*

Profesor B: *Esto me parece interesantísimo. Incluso a nivel de Bachillerato los programas "Derive" y "Mathematica" creo que estimularían el interés del alumno.*

Profesor C: *Creo que mejor que paquetes informáticos, ya que muchos centros de secundaria no disponen de ellos, es la calculadora. Dado el término general* a_n *de una sucesión, el alumno puede darle valores y descubrir si es convergente o divergente, antes de utilizar las técnicas de cálculo de límites.*

Profesor D: *No*

Profesor E: *No.*

Profesor F: *No*

Profesor G: *Hay varios. No los uso, pero me gustaría hacerlo si las circunstamcias fueran favorables.*

4.1

Profesor A: *Realmente no lo sé, porque no he hecho uso de una "definición matemática" para la operación "paso al límite"; sin embargo, la explicación intuitiva es asimilada fácilmente.*

Profesor B: *El alumno medio (no de la carrera), ¡Nunca!*

Profesor C: *No. Conoce los algoritmos para el cálculo de límites y los aplica de un modo rutinario sin llegar a comprender lo que subyace. Volviendo a 3.11, si quiere calcular el límite de la sucesión*

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

multiplica y divide por el conjugado, etc., y, suponiendo que se equivoque en los cálculos, obtiene un límite falso. Si ha trabajado con la calculadora (3.11) se dará cuenta del error ya que valores de n elevados se ve que el límite es cero:

$$a_{1000} = \sqrt{1001} - \sqrt{1000} \approx 0$$

Profesor D: *No en muchos casos. Sería deseable que tuviera asimilada la idea intuitiva de límite.*

Profesor E: *No*

Profesor F: *No*

Profesor G: *La tienen asimilada parcialmente, con errores.*

4.2

Profesor A: *Quizá todo esté en función de cómo se lo plantee el profesor al alumno, pues además del cálculo propio de límites de sucesiones el concepto también aparece a la hora de la continuidad y la derivabilidad de funciones, por ejemplo.*

Profesor B: *Claramente no.*

Profesor C: *La ha utilizado en la definición de derivada, en la aplicación del número e al cálculo del interés continuo o desintegración radiactiva de una substancia, crecimiento de un cultivo de bacterias, demografía, etc., pero no creo que haya sentido la "necesidad" de ello.*

Profesor D: *La operación "paso al límite", los alumnos de Bachillerato han observado la necesidad de utilizarla en alguna demostración, en ejercicios de estudio de continuidad y derivabilidad así como en conceptos de Física.*

Profesor E: *Aunque predomina el cálculo algorítmico de límites, puede que inconscientemente el alumno haya utilizado esa operación en otros ambientes. Por ejemplo, al calcular la tangente a una curva (interpretación geométrica de la derivada).*

Profesor F: *La gran mayoría no ha utilizado para nada el concepto, solamente han practicado un cálculo algorítmico de límites de sucesiones.*

Profesor G: *No creo que hayan "sentido la necesidad" de su uso, pero han visto, dentro de las Matemáticas que han dado, el uso de límites (no sólo de sucesiones, sino de funciones de una variable real): Por ejemplo, en la definición de derivada y en la definición de integral.*

4.3

Profesor A: *Con respecto a las asignaturas que he impartido, el concepto de "paso al límite" aparece al tratar la derivada en un punto como el límite de los cocientes incrementales, también en la introducción de la integral de Riemann como límite de sumas superiores e inferiores y por último, la aproximación de integrales definidas haciendo uso de la regla trapezoidal o la regla de Simpson.*

Profesor B: *a) El alumno no siente la necesidad de nada. b) Si el alumno sintiera la necesidad del límite se debería dar cuenta por ejemplo, de que los irracionales sólo existen como "límites".*

Profesor C: Respuesta anterior.

Profesor D: *Considero que un alumno universitario sentirá la necesidad del paso al límite en conceptos tales como: Integral definida, velocidad, aceleración, etc.*

Profesor E: *Más bien, somos nosotros - los profesores- los que hacemos sentir a los alumnos la necesidad de esa operación en la Universidad.*

- Concepto de derivada y su interpretación geométrica

- Sumación de series (las sumas parciales $\{s_n\}$ *aproximan el valor s de la suma de la serie convergente* $\lim s_n = s$*).*

- Área o integración.

Profesor F: *Series, integrales y probabilidades.*

Profesor G: *Depende de esa formación universitaria (de la carrera que estudie). En muchos casos, aunque en su carrera haya contenidos matemáticos (de tipo instrumental), esa necesidad no la sentirá nunca. Ahora, en una carrera donde se estudien procesos iterativos, de aproximaciones sucesivas a determinadas soluciones (como los usados en métodos numéricos o similares), está claro que esa necesidad se hará patente en algún momento, aunque quizá la operación "PASO AL LÍMITE" sea más general en esos casos.*

3.3.2. Análisis de las contestaciones a los apartados 1 y 2: Axioma de Completitud de R y el uso de metáforas

Al reflexionar a cerca de la completitud de **R**, la imagen mental que tienen los profesores encuestados es en general la misma; todos coinciden en señalar que el axioma se refiere a algo continuo, completamente "lleno", sin "agujeros". El conjunto de los números reales es identificado como:

"un continuo, sin principio ni fin, ni agujeros" (profesor E)

La representación gráfica o visual de esa imagen es del mismo modo similar, pues la mayoría representamos gráficamente **R** mediante una recta, línea o curva continua.

Por otra parte, los profesores hacen uso de analogías de muy distinta naturaleza (metáforas extramatemáticas, Pimm [79]) para que el alumno comprenda y asimile diferentes conceptos matemáticos; en este caso la idea intuitiva de completitud de **R** es análoga o se compara con:

- la línea del horizonte,

- las líneas continuas de una carretera,

- un hilo continuo de agua saliendo de un grifo,

- los cables del tendido eléctrico, etc.,

pero es obvio que no existe nada en la vida real tan absolutamente compacto, ya que como justifica el profesor C:

"...la materia está formada por átomos que no son compactos y dejan vacíos entre sí".

La magnitud más utilizada en la vida diaria y que mejor se puede comparar con **R**, es el tiempo (Profesores D y E), pero éste sigue siendo "algo inalcanzable" desde el punto de vista material.

"No es evidente la correspondencia de la idea intuitiva anterior con el axioma de que "todo subconjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo". La dificultad está en que cuesta entender que "una sucesión de infinitos números reales, cuyos términos consecutivos o no consecutivos llegan a estar arbitrariamente próximos entre sí cuando avanzamos en la sucesión, posee como límite un único número real" (o sea que todo posible "agujero" de **R** *está lleno). O bien, en la formulación equivalente de Dedekind, que "todo corte de* **R***, suficientemente fino como el que define una cortadura, determina un único número real (por fina que sea la navaja, no hay forma de que pase entre dos números reales)". Al ser la realidad "discreta", cuesta mucho entender esta idea abstracta que es "el continuo"* (Profesor G).

No obstante, la idea intuitiva que se tiene del conjunto de los números reales y de su completitud es bastante asequible y en consecuencia alcanzable para los alumnos que se inician en la Universidad.

Ahora bien, como se constata en nuestro análisis, la idea intuitiva y la idea conceptual caminan separadamente:

"...pasaron 2500 años hasta que se formuló el Axioma de Completitud" (Profesor B).

Hasta mediados del siglo XIX se aceptaba el concepto de "Número" como **una expresión decimal indefinida** *pudiéndose considerar la expresión decimal como caso particular de expresión periódica que acaba en ceros o nueves; así pues los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las aperiódicas. En este período, la revisión crítica de los fundamentos y principios de la Matemática, y el desarrollo de la Geometría analítica y del Cálculo infinitesimal exigieron un análisis más preciso del concepto anterior realizado por Méray y Weierstrass (1869), Dedekind (1872), Cantor (1872) , etc.* (Rey Pastor, Callejo y Trejo [84]).

De esta profunda revisión de la Matemática surge el Axioma de Completitud (o de continuidad) de **R**, el cual puede ser enunciado de diferentes formas, aunque todas ellas aluden de algún modo a la continuidad del conjunto de los números reales.

- En términos de las secciones de números reales:

"Toda sección de números reales se define por cierto número" (Axioma de Dedekind).

- En términos de los segmentos encajados:

"Toda familia de segmentos encajados tiene una intersección no vacía" (Axioma de Cantor).

- En términos de lo sucesiones de Cauchy:

"Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente en **R**".

- En términos de la cota superior e inferior de los conjuntos:

"Todo conjunto no vacío de **R***, acotado superiormente, tiene extremo superior y todo conjunto no vacío de* **R***, acotado inferiormente, tiene extremo inferior".* (Axioma de Weierstrass. Enciclopedia de las Matemáticas, [109]).

Esta última versión es a la que nosotros nos referiremos (quizás sea la más utilizada), pero en todo caso no es una verdad evidente por sí misma que la continuidad de **R** se desprenda de esos enunciados:

"La interpretación intuitiva del apartado último no se corresponde con los aspectos teóricos del axioma de completitud ya que este axioma es creado por la mente humana a efectos de crear una teoría. La dificultad sería que tendríamos que recorrer e incluso visualizar muy detalladamente los pasos necesarios para llegar al axioma de completitud" (Profesor E).

"Sí, la dificultad surge a partir del hecho de que los racionales "no llenan" por completo la recta numérica..." (Profesor C).

No es, por tanto, sencillo llegar a un resultado como éste y es lógico que el alumno tenga verdaderas dificultades para entenderlo. Nótese que dentro de la tercera versión del axioma hay implicados varios conceptos que tiene que relacionar simultáneamente:

- el de conjunto,

- el de conjunto ordenado (y las propiedades que conlleva),

- elementos notables de un subconjunto de un conjunto ordenado (máximo, cota superior, mínima cota superior o supremo, ...).

Por consiguiente se hace necesario indagar más profundamente en la propiedad y compararla con otras situaciones para aclarar las ideas.

De la misma forma que en la vida real para poder apreciar en toda su dimensión la libertad es necesario no haberla disfrutado, o para valorar la felicidad es necesario haber sido previamente infeliz, para acercarnos a la idea de *la completitud* es fundamental saber que significado de *la no completitud*. Por esta razón se han formulado las cuestiones del apartado dos de la encuesta.

Al analizar estas respuestas, observamos que la imagen mental asociada a la no completitud de **Q** se compara con "algo discontinuo".

Q es identificado como:

"Una colección de infinitos puntos, que pueden estar "tan próximos" como se quiera y a pesar de ello siempre podemos separar dos de los puntos en dos conjuntos disjuntos y cerrados, entendiendo por cerrados una colección de puntos ordenados en la recta **R***"* (Profesor A)

La imagen visual que algunos profesores tienen de **Q** se asemeja a:

- un collar de cuentas sin hilo,

- una recta con agujeros,

- *una avenida muy larga tal que en uno de sus bordes hay árboles plantados, ...*

Estas tres metáforas extramatemáticas hacen referencia a objetos o imágenes de una sola dimensión, mientras que las siguientes a entes de tres dimensiones:

- *una nube de puntos*
- *un queso tipo gruyére*
- *una criba ultrafina*
- *el cielo lleno de millones de estrellas*

haciendo todos ellos clara alusión a la idea de "discontinuidad".

En cuanto a su representación gráfica, el profesor que más precisa, afirma:

"Creo que no es representable gráficamente. Pertenece al mundo de los conceptos o ideas y no al mundo real" (Profesor C).

Evidentemente, es cierto dado que **Q**, igual que **R**, pertenece al mundo conceptual; pero no por ello podemos evitar dar una presentación intuitiva y en consecuencia una representación gráfica. En cualquier caso, la imagen mental y su representación visual "aproximada" se hacen necesarias para los alumnos que comienzan a manipular estos conjuntos.

A pesar de que las reflexiones que hacen los profesores parecen sencillas, en el fondo conllevan un fuerte aparato formal, y la mayoría de los alumnos ingresan en la Universidad sin tener las ideas claras sobre el conjunto de los números reales y de sus subconjuntos; desconocen o confunden aspectos fundamentales como:

- *la diferencia entre entero y natural,*
- *no identifican los enteros como racionales,*
- *la diferencia entre números decimales y números decimales exactos,*
- *la diferencia entre racional e irracional,...*

Por ello y aunque las respuestas del apartado 2.5 han resultado variadas, consideramos importante que el alumno conozca estas cuestiones al inicio de la carrera universitaria, no obstante:

"sin recurrir a grandes alardes teóricos" (Profesor E)

Como consecuencia de ello creemos que es importante que los profesores de Bachillerato y primero de carrera comiencen el curso con una primera lección introductora en la que se incluya un esquema similar al siguiente:

$$\text{Reales}(\mathbf{R})\begin{cases}\text{Racionales }(\mathbf{Q})\begin{cases}\text{Enteros }(\mathbf{Z})\begin{cases}\text{Positivos }(\mathbf{Z}^+)\\ \text{Cero}^{(2)}\\ \text{Negativos }(\mathbf{Z}^-)\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}^{(1)}(\mathbf{Q}-\mathbf{Z})\begin{cases}\text{Decimales exactos}\\ \text{Decimales periódicos}\begin{cases}\text{puros}\\ \text{mixtos}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \text{Irracionales }(\mathbf{R}-\mathbf{Q})\end{cases}$$

(1) Fraccionarios propiamente dichos.

(2) Los números naturales ($\mathbf{N}$) están constituidos por los enteros positivos ($\mathbf{Z}^+$) y el cero.

La estructura puntual de $\mathbf{R}$, igual que muchas de sus propiedades, queda perfectamente definida cuando el profesor, con ayuda del esquema anterior, hace un recorrido que permita a los alumnos conocer la naturaleza y las principales diferencias entre los conjuntos de números. Debe hacerse hincapié en el hecho de que $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ son dos subconjuntos disjuntos de $\mathbf{R}$; para justificarlo se prueba que cualquier irracional no puede expresarse como cociente de dos enteros primos entre sí (denominador no nulo). Es en este momento, si se cree conveniente, cuando el profesor introduce la conocida demostración por reducción al absurdo de que $\sqrt{2}$ no es racional, o lo que es lo mismo, que el cuadrado de un racional no puede ser 2.

Este esquema, junto a la representación gráfica sobre una recta de los números reales, constituye un soporte intuitivo vital en la aplicación de la matemática a la Ciencia y a la Tecnología.

Volviendo a nuestra encuesta, el profesor C, refiriéndose a $\mathbf{Q}$ señala:

"Un conjunto totalmente discontinuo debido a los números irracionales"

Por tanto, la existencia de los números irracionales se justifica de forma gráfica diciendo que si se marcaran en la recta todos los racionales quedarían "huecos". En esos huecos están los irracionales: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$, ..., π, e, ... Sería por tanto conveniente que los alumnos "asignaran" a los irracionales más sencillos, puntos sobre la recta real, utilizando como punto de partida $\sqrt{2}$, (diagonal de un cuadrado de lado uno), y a partir de ahí, rectángulos de altura 1 y base adecuada (por ejemplo, para "rellenar el hueco" en el que estaría $\sqrt{3}$, se tomaría un rectángulo de altura 1 y base $\sqrt{2}$).

Aspectos pedagógicos para el estudio de la completitud.

En este punto es necesario añadir, como aspecto pedagógico, que cualquier concepción normal de los números irracionales, sólo se comprende realmente a partir de los números racionales: la imposibilidad real de manejar la representación decimal de un número cuando tiene infinitas cifras decimales obliga a introducir valores aproximados; por ejemplo, los números racionales 2,71828 y 2,71829 son dos valores aproximados del número irracional e en menos de 10^{-5} por defecto y por exceso respectivamente.

Un segundo aspecto pedagógico sería aprovechar el esquema anterior para hacer notar a nuestros alumnos cuestiones tan elementales como:

- La "insuficiencia" del conjunto de los números naturales $\mathbf{N}$:

En este conjunto las ecuaciones de la forma $x + a = b$, $(a, b \in \mathbf{N})$, no tienen solución natural cuando $a > b$, y por esa razón se hace necesario "construir" un conjunto más amplio, que llamaremos conjunto de los números enteros, simbolizado por $\mathbf{Z}$, en el que $\mathbf{N}$ quede sumergido y en el que el problema anterior quede resuelto.

- La "insuficiencia" de $\mathbf{Z}$:

En el conjunto $\mathbf{Z}$ las ecuaciones de la forma $x.a = b$, $(a, b \in \mathbf{Z},\ a \neq 0)$ no siempre tienen solución entera: sólo existirá solución si a es un divisor de b, y por esa razón se hace necesario disponer de un nuevo conjunto, que se denominará conjunto de los números racionales, $\mathbf{Q}$, en el que $\mathbf{Z}$ quede incluido, y en el cual todas las ecuaciones anteriores admitan solución.

- La "insuficiencia" de $\mathbf{Q}$:

En este conjunto las ecuaciones de la forma $x^2 = a$, $(a \in \mathbf{Z}^+)$, no siempre tienen solución racional: sólo existirá tal solución en $\mathbf{Q}$, y no única, si a es un cuadrado perfecto; por ello se hace necesario construir un conjunto más amplio, el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$, que contenga a $\mathbf{Q}$, y en el que el problema anterior quede resuelto.

- La "insuficiencia" de $\mathbf{R}$:

En $\mathbf{R}$ las ecuaciones de la forma $x^2 + a = 0$, $a > 0$, no tienen solución real, por lo que se hace necesario construir el conjunto de los números complejo $\mathbf{C}$, tal que $\mathbf{R}$ esté contenido en $\mathbf{C}$ y en el que todas las ecuaciones del tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$ admitan solución. Esto se conoce como "Teorema Fundamental del Álgebra".

Estas ideas pueden visualizarse o geometrizarse globalmente en el siguiente diagrama:

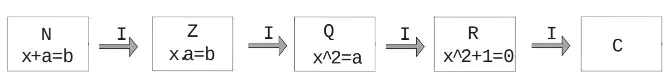


FIGURA 3.24

Hemos dejado para el final de este análisis las reflexiones que hacen los profesores encuestados al apartado 2.4 para conectarlas con ciertos aspectos teóricos y visuales sobre la no completitud de **Q**.

Como ya hemos dicho el axioma de completitud de **R** se enuncia:

"Todo subconjunto no vacío de **R***, acotado superiormente, tiene cota superior mínima"*

su negación aplicada a **Q** dirá:

"Existen subconjuntos no vacíos de **Q,** acotados superiormente, sin cota superior mínima"

El profesor C señala en su respuesta a 1.4:

"...el conjunto de las cotas superiores de $P = \left\{x \in \mathbf{Q} / \ x^2 < 2\right\}$ *no posee mínimo en* **Q***...."*

¿Cómo visualizar este aserto?

La figura 3.25 nos muestra un diagrama en el que aparece el conjunto S de los racionales positivos o nulos cuyo cuadrado es menor que 2:

$$S = \left\{x \in \mathbf{Q} \cup \{0\} \ / \ x^2 < 2\right\} \subset \mathbf{Q}$$

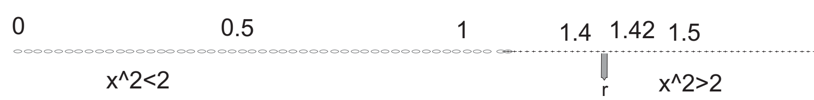


FIGURA 3.25

En él aparecen varios elementos de S: el 0, el 0,5, el 1 y el 1,4, dado que los cuadrados de todos ellos son menores que 2. Además podemos ver los racionales 1,42 y 1,5 que no pertenecen a S (pues su cuadrado es mayor que 2), pero son cotas superiores del mismo lo que nos permite afirmar que este subconjunto está acotado superiormente. Por último, aparece un elemento r que "separa" (o se encuentra en la frontera) a los elementos que pertenecen a S de los que no pertenecen.

¿Tendrá S extremo superior? Es decir, de entre todas las infinitas cotas superiores

$$\mu_i, \ i = 1, 2, 3, ...n... \text{ de } S,$$

¿existirá una $\mu \in \mathbf{Q}$ que sea la menor de todas ellas?

Supongamos que tal μ exista, o lo que es lo mismo, supongamos que $\mu = Sup(S)$; ¿dónde se encontraría ese extremo superior? Existen dos alternativas:

1) Lo más probable es pensar que a la derecha de r, y muy próximo a r, con lo que $\mu^2 > 2$ (μ^2 no puede ser 2 pues el cuadrado de un racional nunca puede serlo).

2) No podemos rechazar la posibilidad de que μ se encuentre a la izquierda de r (aunque no parezca una posibilidad natural) y, en este caso, se tendría: $\mu^2 < 2$.

Pues bien, para la opción (1) siempre podemos encontrar un $k \in \mathbf{Q}^+$ tal que $(\mu - k)^2$ sea mayor que 2 y en consecuencia μ no sería la cota superior más pequeña.

De igual forma, para la opción (2) siempre podemos encontrar un $h \in \mathbf{Q}^+$ tal que $(\mu + h)^2$ sea menor que 2, lo que nos dice que $(\mu + h) \in S$, y como $\mu < \mu + h$ por ser $h > 0$, μ no sería extremo superior de S, en contra de lo supuesto. (Véase Fernández Viña [40] y Dorta Díaz, Espinel Febles y Plasencia Cruz [25]).

Estas ideas pueden visualizarse en la figura 3.26:

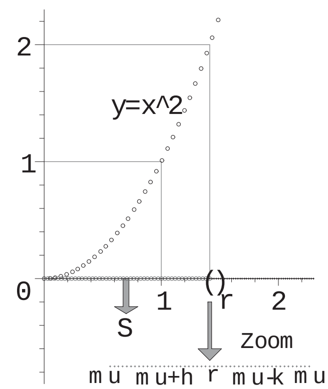


FIGURA 3.26

Es ahora cuando el lector puede conectar estas reflexiones con las representaciones que hacen los profesores A, B y D de un "zoom" de un subintervalo del intervalo $[0, 1]$ de $\mathbf{Q}$.

Cada uno de estos profesores hace una representación gráfica del zoom distinta, no obstante sus interpretaciones nos conducen a una conclusión similar: La estructura de cualquier subintervalo del intervalo $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$ es idéntica. Al intentar analizar un subintervalo sumamente pequeño, entre sus extremos encontramos infinitos racionales que, aunque separados entre sí por diminutos huecos, ofrecen una visión global de ellos completamente igual a la del intervalo racional $[0, 1]$, sólo que a una escala menor. Mediante el zoom, aumentamos esa imagen y lo que observamos es una visualización idéntica a la de $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$.

Quizás la representación gráfica del zoom más visual y nítida para entender esto último es la aportada por el profesor E que toma en los dos casos subintervalos cada vez más pequeños del intervalo unidad, ambos centrados en $\frac{1}{2}$ y de radio primero $\frac{1}{4}$ y luego 1/8. Así trata de indagar en la estructura de cualquier subintervalo racional de $[0, 1]$ en las proximidades a 1/2.

3.3.3. Análisis de las contestaciones a los apartados 3 y 4

Ateniéndonos a las respuestas de los profesores encuestados, el límite de una sucesión sugiere acercamiento, aproximación de los valores de la sucesión a una cantidad fija que llamamos límite. Ese acercamiento progresivo implica, sin lugar a dudas, la acumulación de los puntos de la sucesión que cada vez más próximos entre sí, llegan a confundirse en las cercanías de dicho límite.

Aunque no todos están de acuerdo en que la idea intuitiva se corresponde, a priori, con la definición rigurosa de límite (la formalización de este concepto resultó ser el resultado de muchos siglos de trabajo y reflexión por parte de los matemáticos), sí parece haber consenso en que su complejidad se manifiesta al observar las dificultades con las que los alumnos se encuentran, en general.

Es interesante destacar la respuesta del profesor B a 3.1:

"Ninguna. Es una definición sumamente elaborada tras siglos de trabajo. No me parece ni obvia ni intuitiva"

Sin lugar a dudas estas palabras son fruto de una profunda reflexión, sin embargo, en cuanto a la observación de que tal definición no es intuitiva pensamos que se podría:

- realizar un análisis gráfico de la misma en $\mathbf{R}$ y en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ simultáneamente.

- encontrar un paralelismo en lenguaje literario a la definición (ε, ν) que la haga más accesible; todo ello permitirá manipularla correctamente y así lograr que los aspectos intuitivos adquieran toda su importancia. Estas cuestiones serán desarrolladas con detalle en párrafos posteriores.

El profesor D expresa su visión de límite en forma geométrica, al relacionar la variación de ν a partir del valor de ε con la imagen de un rectángulo variable en la que al acortar la base (ν) también se acorta la altura (ε). Obviamente esa imagen sugiere movimiento y por ello es dinámica.

Para los profesores encuestados "es discutible" cuál es la forma más idónea para explicar el concepto de límite (ε, ν) en el aula.

Es ilustrativo el recurso empleado por el profesor E que usa como soporte la recta real; hace ver con su representación, la idea de acumulación de puntos de una forma natural. Elegido un valor arbitrario de ε, en el entorno de l, $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, quedan infinitos términos de la sucesión, mientras que fuera, sólo un número finito de ellos. Para dar más énfasis a esta idea utiliza una analogía en la que se refleja una vez más el carácter dinámico que subyace en la definición de límite:

"Identifica el intervalo o entorno de "l" con un pozo en el que caen los infinitos puntos de la sucesión, como si de una especie de abismo se tratara"

Además de esta representación unidimensional, podemos representar la misma idea anterior sobre el plano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, es decir, los infinitos puntos de la sucesión que antes, hipotéticamente, "caían en un pozo", ahora van penetrando en una "banda" centrada en l y de ancho 2ε. Esta concepción, que analizamos con más detenimiento en el Capítulo 2, la consideramos más apropiada, no sólo para introducir el concepto de límite, sino también para iniciar a nuestros alumnos en las ideas básicas de sucesión, de sucesión acotada, etc., incluso para tratar "visual e intuitivamente" algunos teoremas relacionados con las mismas. Pensamos que la idoneidad de esta versión bidimensional se justifica por varias razones:

a) *es más natural*

b) *es más rigurosa*

c) *se capta mejor a través de los sentidos*

lo que puede comprobarse observando los gráficos obtenidos a partir del programa siguiente:

```
>with(plots):
> f:=n->3*(-1)^(n+1);
```

$$f := n \to 3 \cdot (-1)^{n+1}$$

```
> h1:=plot([[-5,0],[5,0]]):
> h2:=plot([seq([f(k),0.05],k=1..10)],x=-5..5,y=-6..6,style=point):
> h3:=textplot({[-3,-0.75,‘a(2)=a(4)=...=-3‘],[0,0,‘+‘],[0,-0.75,‘0‘],[3,-0.75,‘a(1)=a(3)=...=+3‘]}):
> display({h1,h2,h3});
```

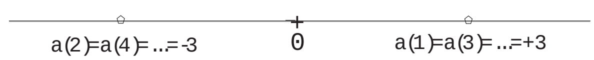


FIGURA 3.27

```
> h4:=plot([seq([k,f(k)],k=1..20)],x=0..20,y=-6..6,style=point):
> display(h4);
```

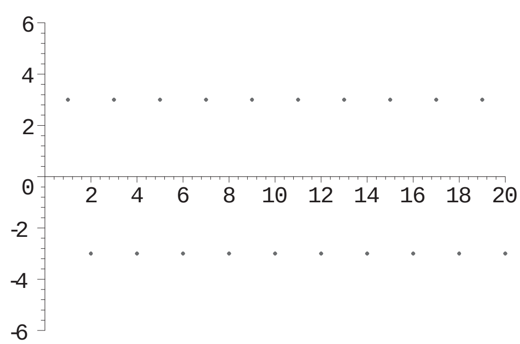


FIGURA 3.28

En la figura anterior (3.27) se observa que los elementos de la sucesión de índice impar coinciden:

$$a_1 = a_3 = a_5 = ... = 3$$

y en este gráfico representan el mismo punto (lo mismo sucede con los términos pares), hecho que puede llevar a confusión. En la Figura 3.28 esta dificultad queda superada (los profesores A y E del cuestionario utilizan este tipo de representación).

Por tanto, a pesar de la simplicidad de la representación sobre $\mathbf{R}$, en el plano resulta más natural y autoexplicativa ya que la sucesión queda perfectamente definida por la gráfica. Por otro lado, aunque la representación bidimensional parece alejarse de la visión topológica de entorno y punto de acumulación, conceptos importantes que el alumno debe conocer, la expresión $|a_n - L|$ adquiere todo su significado en el eje de ordenadas. No obstante, nuestro objetivo es aportar al alumno las dos visiones y por ello presentamos ambas representaciones en la propuesta curricular del Capítulo 2 y concretamente, en la esquematización visual correspondiente a la definición (ε, ν) de límite.

La acotación de una sucesión puede ser explicada también a partir de cualquiera de los tipos de representación anterior. Merece especial atención la observación realizada por el profesor C respecto a su forma de explicar la proposición "Toda sucesión convergente está acotada"; utiliza para ello la forma contrarrecíproca de la misma, que es más fácil de visualizar y por tanto puede resultar más asequible para los alumnos. Sin embargo, este método de demostración exige que los alumnos tengan un cierto dominio del cálculo proposicional, lo cual, suele ser poco habitual. Este profesor, en conversación privada, comentó que durante el presente curso algunos de sus alumnos de 3^o de Matemáticas tenían serias dificultades para distinguir la hipótesis y la tesis en un teorema o proposición.

Con respecto a la pregunta 3.7 nos parece acertada e ilustrativa la exposición del profesor A, que combina la demostración formal y rigurosa con el uso de representaciones de tipo unidimensional.

En cuanto a la introducción de estos contenidos en el Bachillerato, está muy extendida la opinión de que es preferible dedicar tiempo en estos cursos a otro tipo de cuestiones que permitan formar a los alumnos como individuos capaces de desenvolverse en la sociedad (geometría, matemáticas comerciales, etc.) (Profesores E y F). Ahora bien, en el caso de introducir el estudio del límite, debe ser de un modo intuitivo, sin recurrir a aspectos formales que en estos niveles resultan difíciles de asimilar y con poco contenido desde un punto de vista formativo. Así lo justifica el profesor G:

"... Por la dificultad lógica y formal que esta definición conlleva (la madurez de estos alumnos, en su mayoría es netamente insuficiente). En cambio la idea intuitiva de límite, aunque esté impregnada de aspectos dinámicos no esenciales, sí pueden y deben adquirirla estos alumnos".

Hemos comprobado nosotros mismos, en una encuesta realizada a alumnos de 1^o

Bachillerato-Logse, cómo son capaces, mediante el uso de representaciones gráficas, de adquirir cierta agilidad para encontrar el límite de una sucesión dada. Sin embargo, intentamos introducir la definición (ε, ν) de límite y se pierden ante términos como entorno, valor absoluto, distancia, etc. El alumno se siente enredado por la nueva simbología y ello supone la pérdida de la motivación inicial e incluso de la idea intuitiva que intentábamos transmitir.

El estudio riguroso del concepto de límite debe ser uno de los primeros objetivos al comenzar los estudios universitarios de cualquier especialidad científica o tecnológica y creemos que sería adecuado abordarlo utilizando, de forma complementaria, algún tipo de paquete informático; proponemos Maple, puesto que, como se indicó en el Capítulo 1, permite a los alumnos explorar el concepto desde distintos puntos de vista usando ejemplos y contraejemplos.

En la encuesta hemos comprobado que la herramienta informática es, en general, poco conocida y/o utilizada por los profesores que tienen que impartir todo un curso de Análisis Matemático y son bastante reticentes a disponer de ella, ya sea por la masificación en las aulas, el tiempo que se requiere o inexperiencia. Pensamos que el software variado que ofrece el mercado constituye una herramienta educativa y útil para la enseñanza, y no debemos desaprovecharla (en general, los centros de secundaria y prácticamente todas la Facultades Universitarias cuentan con aulas de informática y el uso de ordenadores y potentes calculadoras de bolsillo como la "Texas Instrument" está cada vez más extendido). Creemos que debe potenciarse su uso para la consecución de una formación más asequible.

La operación "paso al límite" y el análisis de su presencia en la formación matemática de los alumnos es el objetivo del último apartado de la encuesta.

En Bachillerato, el alumno conoce el cálculo algorítmico de límites aplicando de un modo rutinario las reglas que les han explicado. Por ello, si no se encuentra ante situaciones adecuadas, no llegará a percibir el significado profundo de esta operación; se hace pues necesario que el profesor le proporcione ejemplos variados, sencillos y oportunos para que el estudiante sienta la necesidad de aplicarla, lo cual le llevará a un acercamiento intuitivo de la idea convergencia. Por ello el papel del docente es fundamental. La presentación de los contenidos en el aula juega un papel decisivo en la motivación de los alumnos; somos los profesores los responsables de que deseen o no profundizar en los contenidos propuestos:

"... somos nosotros - los profesores- los que hacemos sentir a los alumnos la necesidad de la operación paso al límite ..." (Profesor E).

Es posible lograr que el estudiante sienta la necesidad de utilizar dicha operación; se puede conseguir en el desarrollo de algunos temas: aplicación del número e al cálculo del interés continuo bancario, derivada, integración, integración numérica, etc.

El interés por el estudio y la investigación de estos y otros contenidos matemáticos, adquiere fuerza cuando el alumno siente que dispone de algún medio que le ayude a conectar las cuestiones teóricas y sus concepciones mentales con la visualización material de las mismas. Es por todo ello por lo que en el Capítulo 2 hemos desarrollado una propuesta instruccional y formativa, en la que además intentamos demostrar la utilidad de un paquete informático como Maple.

¡Dios mío, profesor!, la idea de límite es como un mal sueño...
Alumna María

Capítulo 4

Análisis y discusión de los resultados

4.1. Introducción

Toda investigación tiene como objetivo principal aportar ciertas ideas o conocimientos novedosos que faciliten de alguna manera, la labor de los que están implicados en el campo en que se ha llevado a cabo la misma. En el ámbito de la Educación Matemática, una vez que se han detectado ciertas carencias o se ha planteado una situación problemática relacionada con el proceso de enseñanza-aprendizaje de ciertos conceptos, ideas, etc., es necesario hacer una propuesta que pueda servir para mejorar o progresar. Posteriormente, es imprescindible llevarla a la práctica y analizar los resultados obtenidos, ya que ellos darán lugar a gran parte de las conclusiones de la labor investigadora.

En este sentido y como ya se ha comentado, nuestro trabajo comenzó después de varios años de contacto con la enseñanza universitaria, a lo largo de los cuales observamos importantes dificultades en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos relacionados con la convergencia. Por otro lado, la encuesta que realizamos a los profesores universitarios nos da clara evidencia de que el concepto de límite es uno de los más costosos para alumnos de los primeros cursos universitarios.

Pensamos que estas dificultades se presentan de forma natural a cada una de las partes implicadas en el proceso: a los ensañantes porque, en general, puede no resultar sencillo transmitir estas ideas; y a los estudiantes que han de asimilarlas y superar cada uno de los obstáculos cognitivos y epistemológicos que ya analizamos en el Capítulo 1 de esta memoria.

Como hemos apuntado, después de revisar la literatura existente sobre este tema, elaboramos el esquema conceptual que presentamos en la sección 1.6 e hicimos un planteamiento de la situación que pudiera dar respuesta, al menos, a algunas de estas dificultades. Nuestra investigación culmina con la puesta en práctica de la propuesta curricular presentada en el Capítulo 2. Por tanto, en este capítulo vamos a exponer cómo se llevó a cabo la fase experimental y cuáles fueron los resultados de la misma.

En principio, en esta fase de la investigación distinguimos dos experiencias que responden, la primera, a la puesta en práctica de la propuesta para sucesiones numéricas y el concepto de límite y la segunda, correspondiente a los conceptos de sucesiones y series funcionales así como a su convergencia (puntual y/o uniforme). Se trata en ambos casos de estudios de índole cualitativo, con pocos alumnos, que persiguen ante todo la observación y verificación de algunos, si no todos, los objetivos que planteamos en la sección 2.2.

En el primer caso, la experiencia a analizar se llevó a cabo en el curso 2000-2001[1], con una alumna del Centro Superior de Educación de La Universidad de La Laguna, a la que, ficticiamente hemos llamado, "Alumna María". A esta alumna, que no había profundizado previamente en el concepto (ε, ν) de límite, se le instruyó siguiendo nuestro modelo.

En segundo lugar, desarrollamos una experiencia cuyo objetivo central consistía en realizar un análisis comparativo entre alumnos instruidos únicamente por métodos tradicionales y aquellos que además de esta enseñanza clásica hubieran recibido una formación complementaria con uso de la tecnología:

- Alumnos sin instrucción en Maple (curso 1998-1999)
- Alumnos con instrucción en Maple (curso 1999-2000)

Nuestro propósito estuvo centrado en obtener conclusiones comparando los resultados de los cuestionarios que debían contestar ambos grupos.

Inicialmente, la experiencia se llevó a cabo con alumnos de 1^o de Matemáticas, instruidos exclusivamente con métodos tradicionales. Se seleccionaron seis alumnos con el único criterio de haber superado el examen de la convocatoria de Febrero de 1999. Cuatro meses después de superar el mismo, se les pasó una encuesta en la que se les interrogaba sobre sus conocimientos sobre el tema. Es importante tener en cuenta que las cuestiones correspondientes hacían mención a diversos aspectos que contemplamos en nuestra investigación y que constituyen el eje de la misma.

En el segundo caso, la experiencia se realizó en el transcurso del siguiente curso con cuatro alumnos seleccionados de entre los estudiantes de primer año de la Licenciatura en Matemáticas por obtener las mejores puntuaciones en la Curso de Orientación Universitaria (COU). Una vez finalizado el cuatrimestre donde recibieron la enseñanza de tipo clásico y durante seis horas repartidas en tres días consecutivos, instruimos a estos alumnos siguiendo nuestra propuesta para transmitir los conceptos de convergencia puntual

[1] En este caso el orden en el que presentamos esta experiencia no coincide con el orden cronológico. En este sentido, el lector debe tener en cuenta que hemos dado prioridad al orden establecido en la propuesta curricular.

y uniforme, utilizando las ventajas del software Maple como elemento complementario a la enseñanza tradicional recibida.

Posteriormente a estas experiencias, llevamos a cabo un nuevo estudio con alumnos de doctorado. Les instruimos y seguidamente les invitamos a que desarrollaran algunos ejercicios; presentamos algunos de ellos con el objeto de analizar cómo un recién licenciado desarrolla algunas cuestiones mediante el uso de Maple.

Al estudiar los obstáculos cognitivos y epistemológicos del concepto de límite vimos que la adaptación a las nuevas formas del Cálculo (nuevo vocabulario y simbología, nuevas formas de demostración, nuevas formas de razonar, etc.) no es inmediata, sino que implica un esfuerzo que, en general, sólo da resultados a largo plazo. Por otra parte, según las encuestas realizadas a los profesores, la consolidación del concepto de límite tiene también lugar con el paso del tiempo; incluso algunos de los alumnos que habían finalizado sus estudios opinaban del mismo modo.

Pensamos que, desde nuestra óptica de educadores, podemos agilizar ese proceso presentando la materia a los estudiantes a través de otros métodos. Es evidente que si nos limitamos al lenguaje formal y riguroso, para a partir de ahí consolidar ideas matemáticas complejas como la de convergencia, la tarea no resultará sencilla. Sin embargo, utilizando aquellas técnicas atractivas donde se conjuguen varios elementos, complementarios unos de otros, quizás la complejidad de los contenidos se reduzca y los plazos para asimilarlos se acorten. Desde este punto de vista y como hemos señalado en capítulos anteriores, nuestra propuesta defiende, además del uso de software y la potenciación de técnicas visuales, la necesidad de introducir distintas formas de trabajar los conceptos, para que ante todo, los alumnos se entusiasmen al recibir una información compleja, siendo ellos mismos quienes controlen su aprendizaje a partir de procesos manipulativos variados.

Las distintas experiencias a las que hemos aludido constituyen un medio para valorar si la aplicación de nuestra propuesta es realmente efectiva, es decir, si facilita el progreso en lo que respecta a la comprensión de los conceptos de convergencia mencionados y si favorece la motivación y el interés del alumnado implicado. Así, en este capítulo describimos y analizamos con detalle cada una de dichas experiencias; a partir de este análisis de los resultados, obtendremos conclusiones que reflejaremos explítamente en el Capítulo 5 de esta memoria.

4.2. Experiencia con estudiantes del Centro Superior de Educación: La alumna María

Esta experiencia la llevamos a cabo en el curso 2000 - 2001 con un grupo de alumnos del Centro Superior de Educación, los cuales asistían a *"El ordenador en el aula"*, una asignatura oficial, optativa, de la especialidad de lengua extranjera. En ella se les instruía sobre Maple y su utilidad como herramienta para desarrollar su futura labor profesional. Uno de los temas tratados fue el correspondiente a sucesiones numéricas y su convergencia. Para ello se utilizó la propuesta curricular que hemos presentado en el Capítulo 2 referente a este tema.

Concretamente, para introducir el concepto de límite, expresamos, con palabras, la idea intuitiva; a continuación, sin más, se escribió en la pizarra la definición simbólica, es decir:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ es convergente hacia } L \text{ si y sólo si}$$
$$[\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\nu\,(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ \wedge \ \forall n \geq \nu \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon]$$

Los alumnos se sorprendieron ante tal conglomerado de símbolos que a su ojos resultaba tan complicado entender. Posteriormente, en la fase de representación visual y con la ayuda del software, propusimos la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n} - 3$, correspondiente al ejemplo 1 del Capítulo 2. A partir de ella:

- Obtuvieron la gráfica bidimensional e intuitivamente observaron que, para valores avanzados de n, los puntos de la sucesión se acercaban a -3.
- Tabularon los veinte primeros términos.
- Hallaron el valor exacto del límite confirmando que éste era -3.

La justificación formal tuvo lugar, en un primer momento, mediante el cálculo de las distancias de aquellos veinte primeros términos de la sucesión al valor -3. Con ello los alumnos comprendían que, efectivamente, a medida que n avanza, los puntos se "aproximan y se acercan", más y más al valor límite. En segundo lugar, les orientamos para construir un programa muy simple, en el que obtuvieron la gráfica de la sucesión junto con la banda de semianchura $\varepsilon = 0{,}1$. A medida que observaban la gráfica, toda la simbología anterior era "traducida" en la pizarra escribiendo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$$\Updownarrow$$

$\forall\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow$	$\exists\nu\,(\varepsilon) \in \mathbf{N}$	$\forall n \geq \nu \quad \Rightarrow$	$\lvert a_n - L\rvert < \varepsilon$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Para todo número por pequeño que sea	existe un término de la sucesión	a partir del cual	la distancia de a_n a L es tan pequeña como queramos
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Para toda banda por estrecha que sea	vamos a encontrar un término	a partir del cual	todos penetran en la banda

A la vista de dicha gráfica y con ayuda de la tabulación aludida, explicamos el concepto de índice de penetración y, para $\varepsilon = 0{,}1$ los estudiantes concluyeron que el valor de dicho índice es $\nu = 11$.

Cuando parecían haber captado la idea, propusimos otros ejemplos en los que debían hacer un estudio similar, es decir, dada una sucesión numérica, se les pedía que hallaran algunos términos de la misma, la graficaran, calcularan el límite, etc. También, fijado un ε, se les exigió que mediante la gráfica correspondiente (la sucesión numérica y la banda) determinaran el valor de ν a partir del cual todos los demás términos "quedaban dentro" de la misma. La mayoría de los alumnos respondieron correctamente y, en principio, parecían haber captado una idea de la convergencia, en el sentido de aproximación muy cercana.

Téngase en cuenta que todo esto se llevó a cabo en una sesión de dos horas y, durante la misma, fuimos introduciendo las instrucciones de Maple progresivamente, al tiempo que se avanzaba en la exposición. Seguidamente, los alumnos resolvieron los ejercicios propuestos, utilizando esas instrucciones de manera similar al modelo que explicamos.

Entre los alumnos de la asignatura, seleccionamos, al azar y con la finalidad de ganar en objetividad, a la que hemos llamado "alumna María". Con ella realizamos la investigación de carácter cualitativo en relación al concepto de límite. A continuación exponemos el cuestionario que le propusimos.

4.2.1. Cuestionario

1^o) ¿Cuál fue tu primera impresión cuando presentamos, sin más, en la pizarra, la definición (ε, ν) de límite de una sucesión?

2^o) Trata de recordar y escribe la definición de límite.

3^o) ¿Puedes traducir al lenguaje cotidiano la definición anterior?

4^o) A partir de la gráfica y la tabla siguiente, intenta contestar a las siguientes preguntas:

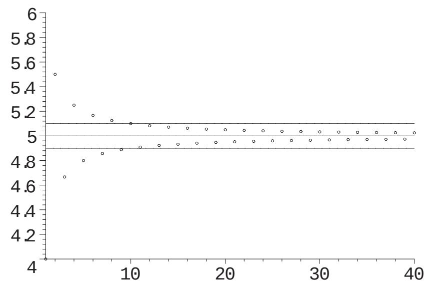


FIGURA 4.1

a[1] = 4.	a[9] = 4.888888889
a[2] = 5.500000000	a[10] = 5.100000000
a[3] = 4.666666667	a[11] = 4.909090909
a[4] = 5.250000000	a[12] = 5.083333333
a[5] = 4.800000000	a[13] = 4.923076923
a[6] = 5.166666667	a[14] = 5.071428571
a[7] = 4.857142857	a[15] = 4.933333333
a[8] = 5.125000000	a[16] = 5.062500000

a) ¿Cuál crees que es el valor del límite?

b) ¿Sabrías expresar la distancia aproximada del 2^{o}término de la sucesión al límite? ¿Y la distancia correspondiente al término número 15?

c) ¿Cuál es el valor del índice de penetración, ν, correspondiente a la banda de la gráfica?

d) Si aumentamos el ancho de la banda, ¿qué ocurre con el índice de penetración? ¿Y si reducimos el ancho de dicha banda?

e) ¿Algún término avanzado de la sucesión alcanzará el valor del límite?

4.2.2. Análisis de resultados

La alumna María contestó sin problema a las cuestiones planteadas. Téngase en cuenta que algunos años antes esta estudiante había comenzado la carrera de Farmacia, pero al no superar ninguna de las materias de las que se había matriculado, abandonó y posteriormente ingresó en Magisterio. Según nos confesó, había practicado en bachillerato el cálculo algorítmico de límites y al iniciar los estudios de Farmacia asistió a algunas clases de Cálculo en las que se trabajó su definición formal; este hecho se refleja, sobre todo, en su respuesta a la primera cuestión, ya que lo hace afirmando que recordaba vagamente algo de la terminología usada. Posteriomente, ante nuestra exposición y a la vista de las gráficas obtenidas, asoció ε, semianchura de la banda, con el eje de las ordenadas, y ν, índice de penetración, con las abscisas.

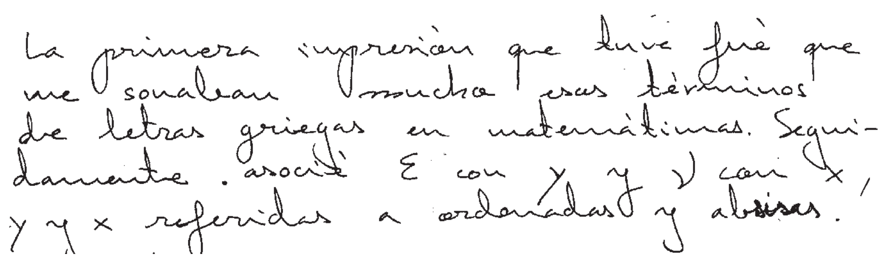
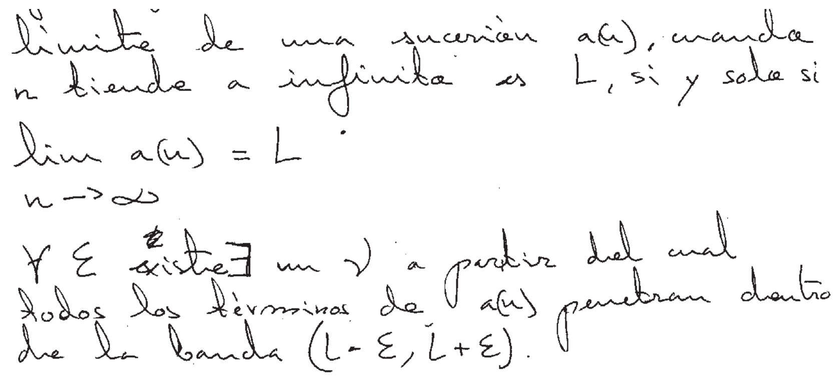

La primera impresión que tuve fuè que me sonaban mucho esos términos de letras griegas en matemáticas. Seguidamente. asocié ε con y y ν con x, y y x referidas a ordenadas y abscisas.

FIGURA 4.2

En el segundo apartado, reproduce la definición formal de límite, cojugando, simultánemente, la palabra con la simbología. La definición es correcta y por la forma en que la expresa, deja intuir que al tiempo que escribe, imagina gráficamente lo que sus palabras y la terminología indican. Pensamos que en su mente ha creado una metáfora visual entre la definición simbólica y la idea intuitiva. Ello nos augura que la alumna ha "salvado" el obstáculo cognitivo que la simbología conlleva y además, ha interiorizado la definición haciéndola suya.


límite de una sucesión a(n), cuando n tiende a infinito es L, si y solo si

lim a(n) = L
n→∞

∀ ε ~~existe~~ ∃ un ν a partir del cual todos los términos de a(n) penetran dentro de la banda (L-ε, L+ε).

Figura 4.3

Su respuesta a la tercera cuestión nos confirma que la alumna se ha aproximado al concepto.

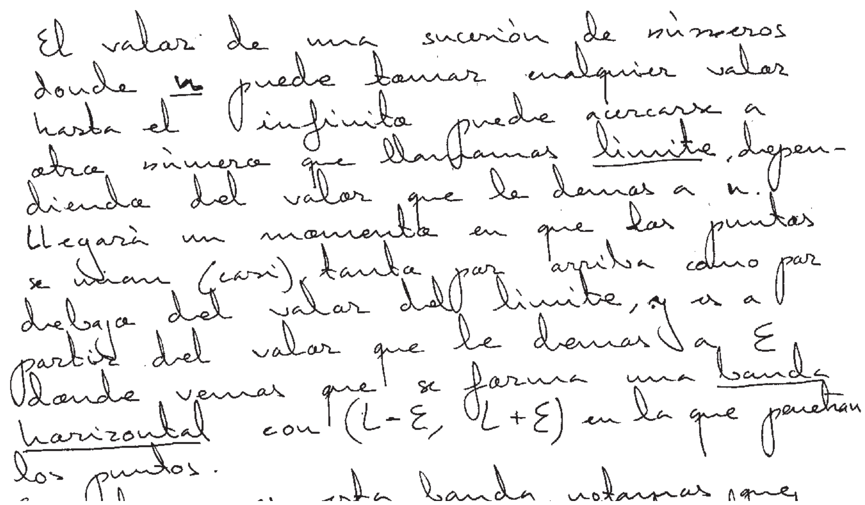

El valor de una sucesión de números donde n puede tomar cualquier valor hasta el infinito puede acercarse a otro número que llamamos límite, dependiendo del valor que le damos a n. Llegará un momento en que los puntos se unan (casi), tanto por arriba como por debajo del valor del límite, y es a partir del valor que le damos a ε donde vemos que se forma una banda horizontal con (L-ε, L+ε) en la que penetran los puntos.

Figura 4.4

Expresa la idea de "acercamiento" diciendo:

"... Llegará un momento en que los puntos se unan (casi), tanto por arriba como por debajo del valor del límite..."

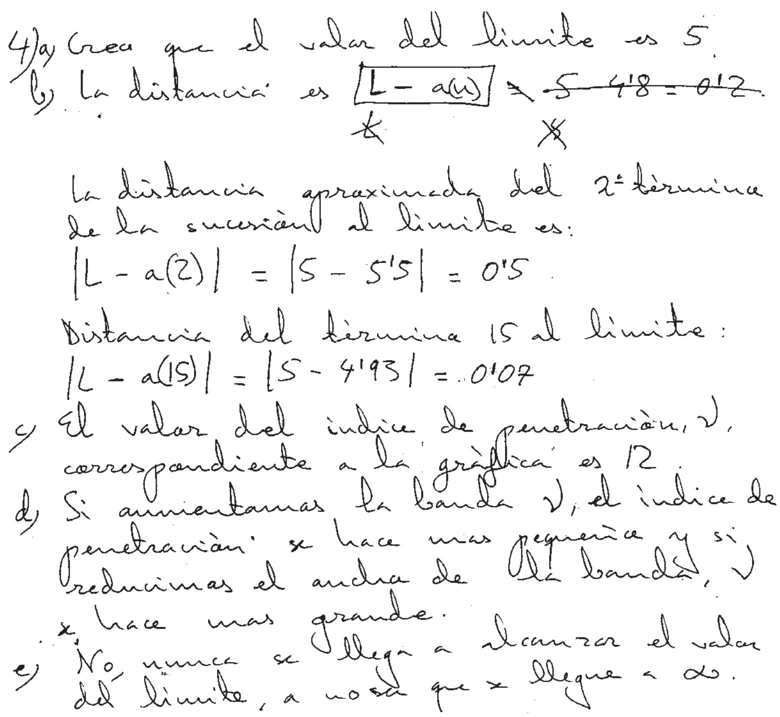
Cuando argumenta de esta forma, entendemos que su imagen mental está asociada al ejemplo que expusimos en la fase de representación visual o a la figura que se ha presentado en el cuestionario. En ambos casos, los términos impares toman siempre valores superiores al límite, mientras que los pares toman valores inferiores. Al utilizar, entre paréntesis, la palabra *"casi"*, refleja su idea o convencimiento de que los términos no van a tocar al límite.

Por otro lado, deja clara la relación inversa que existe entre el valor de ε y el del índice de penetración ν.

"... Observamos también que cuanto > (mayor) es ν, < (menor) es ε y nos acercamos al valor del límite.

Cuando $\nu \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ y nos acercamos al valor de L".

En el apartado cuatro, correspondiente a un caso práctico, se le plantean una serie de ítems tomando como referencia una gráfica y una tabla de la sucesión numérica $a_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$. Sus respuestas no son del todo precisas, pero se acercan bastante a la realidad.


4) a) Creo que el valor del límite es 5.
b) La distancia es $\boxed{|L - a(n)|}$ ≈ ~~5 - 4'8 = 0'2~~.

La distancia aproximada del 2º término de la sucesión al límite es:
$|L - a(2)| = |5 - 5'5| = 0'5$
Distancia del término 15 al límite:
$|L - a(15)| = |5 - 4'93| = 0'07$

c) El valor del índice de penetración, ν, correspondiente a la gráfica es 12
d) Si aumentamos la banda ν, el índice de penetración se hace más pequeño y si reducimos el ancho de la banda, ν se hace más grande.
e) No, nunca se llega a alcanzar el valor del límite, a no ser que se llegue a ∞.

FIGURA 4.5

La observación de la gráfica y la tabulación de los dieciséis primeros términos le han permitido afirmar que el valor del límite es 5, así como calcular las distancias del segundo y décimoquinto término a ese valor. De igual forma, decide que el índice de penetración es 12, lo cual es incorrecto. Si no se hubiera fiado de su intuición y hubiera calculado las distancias de los términos 11 y 12 al límite, su respuesta hubiera sido la correcta, $\nu = 11$.

Por otra parte, su contestación al apartado *d)* refleja, igual que en la 3^a pregunta, que tiene clara la relación entre la elección de ε y la obtención del parámetro ν.

Por último, nos resulta curiosa la respuesta al apartado *e)* ya que aunque afirma:

"No, nunca se llega a alcanzar el valor del límite"

Posteriormente añade:

"... a no ser que se llegue a ∞".

Nuestra duda es, ¿quizás piensa que el ∞ es alcanzable?

Sin embargo, sí podemos decir que con estas palabras y quizás sin saberlo, está realizando la operación paso al límite.

En cualquier caso, consideramos satisfactorio el resultado de esta experiencia. Las cuestiones formuladas y las respuestas de la alumna dejan claro que el uso de nuestro esquema conceptual y la visualización con ayuda de Maple, no sólo han provocado interés y reflexión, sino que ha interiorizado el concepto y de alguna forma, se han salvado varios de los obstáculos cognitivos, en el sentido de que ha construido significado ante los mismos. Entre ellos, la alumna:

1) Parece ser que ha "salvado" el obstáculo simbólico.

2) Ha establecido la relación (ε, ν).

3) Ha dejado patente las ideas de "aproximación y cercanía".

4) Ha mostrado interés al reflexionar sobre el infinito (sin embargo, no sabemos si ha superado el obstáculo al "horror infinitorum" apuntado por Sierpinska [72]).

Podría pensarse y estaríamos de acuerdo, que se puede fomentar el interés usando exclusivamente el método clásico. No obstante, defendemos que la situación es diferente, ya que en este caso el alumno, con ayuda de las nuevas tecnologías, construye y forma parte del proceso, interrogándose sobre la epistemología de esta materia.

Respecto al punto 4, comentamos una anécdota que tuvo lugar en una sesión de tutoría a la que asistió la misma alumna. Hablando del concepto de límite y resolviendo un ejercicio correspondiente a una sucesión estrictamente monótona creciente cuya convergencia era lenta con respecto a otras ya estudiadas, se le propuso encontrar los valores de ν para valores de $\varepsilon = 10^{-k}$, $k = 1$, 2, 3 y 4. Los cálculos se llevaron a cabo mediante el siguiente programa:

```
>restart:
>f:=n->8+32/3*(2*n-1)*(n^2-n)/(n^3);
```

$$f := n \to 8 + \frac{32}{3}\ \frac{(2n-1)\left(n^2-n\right)}{n^3}$$

```
>L:= Limit(f(n),n=infinity)=evalf(limit(f(n),n=infinity));
```

$$L := \lim_{n\to\infty} 8 + \frac{32}{3}\ \frac{(2n-1)\left(n^2-n\right)}{n^3} = 29{,}33333333$$

```
>for k from 1 to 4 do epsilon[k]:=evalf(1/10^k,2) od;
```

$$\varepsilon_1 := 0{,}10$$
$$\varepsilon_2 := 0{,}010$$
$$\varepsilon_3 := 0{,}0010$$
$$\varepsilon_4 := 0{,}00010$$

```
>for k from 1 to 4 do evalf(solve({abs(f(n)-88/3)=1/10^k},n)) od;
```

$$\{n = ,3329868\}, \{n = -320{,}3329868\}, \{n = 319{,}6663187\}, \{n = ,3336813\}$$
$$\{n = ,333299\}, \{n = -3200{,}333299\}, \{n = 3199{,}666632\}, \{n = ,333368\}$$
$$\{n = ,33333\}, \{n = -32000{,}33333\}, \{n = 31999{,}66667\}, \{n = ,33333\}$$
$$\{n = ,3333\}, \{n = -320000{,}3333\}, \{n = 319999{,}6666\}, \{n = ,3334\}$$

```
>nu[1] :=floor(max( .332,-320.332, 319.666,.333))+1;'f(320)'=evalf(f(320));
```

$$\nu_1 := 320$$
$$f(320) = 29{,}23343750$$

```
>nu[2] :=floor(max(.333,-3200.333,3199.666) )+1;'f(3200)'=evalf(f(3200));
```

$$\nu_2 := 3200$$
$$f(3200) = 29{,}32333438$$

```
>nu[3] :=floor(max(.333,-32000.333,31999.666) )+1;'f(32000)'=evalf(f(32000));
```

$$\nu_3 := 32000$$
$$f(32000) = 29{,}33233334$$

```
>nu[4] :=floor(max(.333,-320000.333,319999.666) )+1;'f(320000)'=evalf(f(320000));
```

$$\nu_4 := 320000$$
$$f(320000) = 29{,}33323333$$

En la figura 4.6 se muestra un zoom de los términos de la sucesión, desde el 31985 al 32015. En ella, dada la lentitud de la convergencia, se observa que el crecimiento de los términos de la sucesión es infinitesimal. Así, la gráfica se asemeja a la de una sucesión constante.

```
>d1:=plot({29.333333,29.333333-0.001,29.333333+0.001},x=31985..32015,y=29.328..29.336,
color=black,thickness=2):
>d2:=plot([seq([n,f(n)],n=31985..32015)],style=point,symbol=circle,color=blue):
>d3:=plot([[32000,29.328],[32000,29.33333-0.001]],thickness=1):
>display({d1,d2,d3});
```

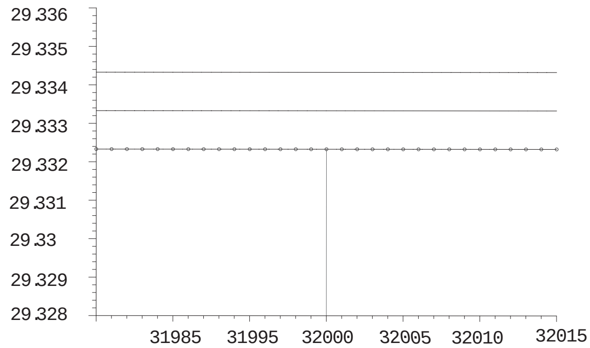


FIGURA 4.6

>for k from 31998 to 32003 do evalf(abs(f(k)-88/3)) od;

$$
\begin{gathered}
,001000052086 \\
,001000020834 \\
,0009999895833 \\
,0009999583350 \\
,0009999270885 \\
,0009998958441
\end{gathered}
$$

Cuando la alumna observó la imagen correspondiente a cada uno de los términos y comprobó en la pantalla que las distancias de los mismos al límite se mantenían prácticamente constantes, le hicimos ver que si elegía un ε aún más pequeño, $\varepsilon = 0{,}00001$, el ν correspondiente sería 3200000 y en la representación gráfica se repetiría la situación anterior. Se sintió tan impotente al "no alcanzar" el valor límite, $29.\widehat{3}$, que expresó ansiosamente:

"¡Dios mío, profesor!, la idea de límite es como un mal sueño"

4.3. Experiencia con alumnos de 1^{o} de Matemáticas sin instrucción en Maple. Curso 98-99

Como ya apuntamos, en nuestra investigación nos preocupa el tratamiento que damos a los conceptos relacionados con la convergencia puntual y uniforme, y queremos hacer hincapié en ello por varias razones:

1^{a}) No encontramos en la bibliografía revisada, documentos que los traten desde el punto de vista conceptual, es decir, dirigidos a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

2^{a}) Pensamos que las dificultades cognitivas y epistemológicas a las que hace referencia la literatura consultada (Artigue [9], Tall y Vinner [106], Monaghan [72], etc.) pueden reducirse si complementamos la enseñanza tradicional con el uso de algún software: su versatilidad permite mejorar los resultados.

Somos conscientes de que estos conceptos y sus teoremas afines, no son fácilmente asimilados por la mayoría de los alumnos de los primeros cursos universitarios; incluso, sobre el de la convergencia uniforme, en muchas Facultades y Escuelas Técnicas, se discute la conveniencia o no de presentarlo a los alumnos; además podemos afirmar que en las Facultades de Matemáticas, donde es obligatorio su estudio, los resultados que obtienen los alumnos podrían mejorarse notablemente.

En los estudios de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, durante el primer cuatrimestre del curso 1998-1999, en la instrucción-formación de los conceptos de Análisis Matemático relacionados con sucesiones y series funcionales y su convergencia, se utilizó un método clásico. Así se trabajaron aspectos fundamentales, de forma que partiendo de los conceptos de sucesión y serie funcional se pasó a la profundización en algunos teoremas relacionados con la convergencia puntual y uniforme. En los siguientes diez epígrafes esquematizamos los contenidos que se trataron:

1) Definición de sucesión funcional. Ejemplos.

2) Definición de convergencia puntual. Campo de convergencia. Ejemplos.

3) Definición de convergencia uniforme. Relación con la convergencia puntual. Ejemplos.

4) Algunos teoremas:

- Convergencia uniforme y continuidad
- Convergencia uniforme y derivabilidad
- Convergencia uniforme e integración

5) Proposición para caracterizar la convergencia uniforme a cero a partir de una sucesión numérica.

6) Definición de serie funcional. Campo de convergencia.

7) Convergencia puntual y uniforme de una serie funcional. Ejemplos.

8) Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de series funcionales.

9) Propiedades de la función suma de una serie funcional convergente uniformemente a partir de las propiedades de los elementos de la sucesión funcional correspondiente (continuidad, derivabilidad e integrabilidad).

10) Criterio de Weierstrass.

Tras la exposición teórica de los contenidos, se propuso una relación de ejercicios que se desarrollaron en clase haciendo uso de los algoritmos explicados. Unos quince días después y para evaluar los conocimientos que los alumnos habían adquirido durante el cuatrimestre, se realizaron dos exámenes, correspondientes a dos llamamientos diferentes (Febrero 99). En cada uno de ellos se debía desarrollar un ejercicio relacionado con la convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series funcionales.

Ejercicio correspondiente al primer llamamiento:

Sea $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$. Estudiar si f_n converge puntual y uniformemente en $(0, \infty)$. Estudiar si lo hace $\sum f_n$.

Resultados obtenidos:

Alumnos matriculados	Alumnos presentados	Resolución correcta	Resolución regular	Resolución incorrecta
100	21	4	5	12

Ejercicio correspondiente al segundo llamamiento:

Sea $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$. Estudiar si f_n converge puntual y uniformemente en $(0, \infty)$. Estudiar si $f(x) = \sum f_n$ es una función continua para $x \geq 0$.

Resultados obtenidos:

Alumnos matriculados	Alumnos presentados	Resolución correcta	Resolución regular	Resolución incorrecta
100	36	7	9	20

El análisis de las tablas anteriores nos hace pensar que los métodos tradicionales pueden resultar poco atractivos para alumnos que se inician en estos conceptos, cuya comprensión y asimilación requiere “un grado de esfuerzo significativo” y nos incita a la búsqueda de nuevos elementos que ayuden a mejorar estos resultados.

De alguna manera, la enseñanza en esta materia necesita “algo más” que promueva por un lado, la motivación de los alumnos y por otro, que les facilite la comprensión y asimilación de conceptos matemáticos tan arduos como éstos. Téngase en cuenta que, en general, los alumnos que eligen la carrera de Matemáticas o Físicas, tienen buenos expedientes en Bachillerato, con lo cual se constata un cierto fracaso al inicio de los estudios universitarios.

Al observar los ejercicios se interpreta que lo que el profesor pretendía evaluar era si el alumno, algorítmicamente, conocía y era capaz de aplicar los criterios de la convergencia uniforme.

Por otra parte y para esta investigación, analizamos los exámenes de los alumnos que resuelven satisfactoriamente o de forma regular los ejercicios planteados. Constatamos que todos utilizan los algoritmos que fueron explicados por el profesor y no presentan un soporte visual que les permita conocer más explícitamente la sucesión funcional para justificar sus respuestas, es decir, no tratan de apoyarse en alguna representación de la situacion que se plantea, ni siquiera de forma aproximada intentan hacer alguna gráfica o dibujo que les permita resolver la cuestión de una forma intuitiva, que no sea la puramente algorítmica. Ello se debe, posiblemente, a un déficit de representaciones gráficas en la transmisión de los contenidos y a cierta resistencia por parte de los estudiantes al uso de las mismas (Eisenberg y Dreyfus [35]).

Además recordemos la investigación llevada a cabo por Mason, Selden y Selden [69] en la que aseguran que sus estudiantes de ingeniería, después de llevar un curso de Cálculo, no pueden, aun siendo buenos alumnos, resolver problemas no rutinarios en los que se precisa el uso de la visualización matemática con la articulación coherente de varios registros de representación ligados al contexto de los problemas. En este sentido afirman:

"Esto sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del Cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo creativamente".

Ante lo expuesto, nos planteamos: Estos alumnos, cuando resuelven algorítmicamente, ¿comprenden el significado de lo que están haciendo o utilizan de forma mecánica unas técnicas aprendidas y memorizadas para aplicar en tales situaciones?

Para contestar esta pregunta y corroborar lo que de alguna manera presentíamos (y lo que en su investigación habían detectado Mason, Selden y Selden [69]) elaboramos una encuesta[2] anónima y confidencial que pasamos cuatro meses después del examen, finales de Junio de 1999, a seis alumnos que superaron el mismo.

Ésta aborda cuestiones relacionadas con la actitud de los estudiantes cuando recibieron la instrucción sobre la convergencia puntual y uniforme, así como algunos interrogantes sobre su comprensión. Con más detalle, los diferentes ítems planteados debían recorrer diversas facetas del proceso de enseñanza-aprendizaje: metodología, dificultades cognitivas y conceptuales, registros de representación utilizados, conocimentos técnicos, reconstrucción del conocimiento, etc.

4.3.1. Encuesta

1^o) ¿Cómo recuerdas esas clases y sobre todo aquellas en las que tu profesor/a introdujo los conceptos de sucesión funcional, convergencia puntual y convergencia uniforme?

- Con agrado
- Te parecían muy interesantes
- Aburridas por la metodología empleada.
- Sentías indiferencia
- Agobiantes porque tenías muchas dudas
- No llegaste a entenderlo
- Otros...

[2]Esta encuesta coincide en algunos ítems con la que pasamos a los alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica y a los alumnos de doctorado. Véase sección 3.2.1.

Comenta tu respuesta.

2^{o}) ¿Cuál era el ambiente que se respiraba entre los compañeros respecto a este tema y que actitud mostraban en general?

3^{o}) Hasta el momento has trabajado, en general, con funciones de una variable real. ¿Te diste cuenta cuando manipulabas las sucesiones funcionales de que en realidad estabas utilizando funciones de dos variables: la variable natural n y la variable real x?

¿Crees que esto supuso una dificultad añadida para ti y tus compañeros?

4^{o}) En tu opinión, la expresión:

$$n \rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n}$$

¿es una sucesión de funciones definidas en el intervalo [0,1]? En caso afirmativo, ¿podrías visualizarlas gráficamente?

5^{o}) Cuando intentabas asimilar y/o entender los conceptos de convergencia puntual y de convergencia uniforme, ¿qué dificultades encontrabas?

¿Cómo crees que te hubiera resultado más fácil el estudio de este tema?

- Cambio en la metodología
- Visualización más clara
- Más ejemplos
- El tema se explicó correctamente y no creo necesario ningún cambio.
- Otros...

Comenta tu respuesta.

6^{o}) Haz memoria e imagina que retrocediendo en el tiempo, estás de nuevo escuchando las explicaciones de tu profesor/a cuando expuso los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Describe con tus palabras “la esencia”, aquello que te ha quedado de los mismos. Apóyate en la herramienta que consideres necesaria: gráficos, expresiones algebraicas y/o simbólicas, tablas, etc.

7^{o}) De forma intuitiva y/o gráfica, ¿ podrías explicar en qué consiste la convergencia puntual de una sucesión funcional? Expresa tu respuesta con algún ejemplo.

8^{o}) De forma intuitiva y/o gráfica, ¿ podrías explicar en qué consiste la convergencia uniforme de una sucesión funcional? Expresa tu respuesta con algún ejemplo.

9^{o}) ¿Tienes clara la diferencia entre convergencia puntual y uniforme? Argumenta tu contestación mostrando los matices que distinguen a una de otra y para ello recurre a las herramientas que estimes adecuadas.

10^{o}) ¿Tiene sentido afirmar que una sucesión funcional converge uniformemente en un punto x_o del interior del intervalo donde éstas están definidas? Razona la respuesta.

11^{o}) ¿Sabes o intuyes lo que significa converger “rápidamente” o “lentamente” en los puntos del intervalo donde las funciones están definidas?

¿Cuál será el parámetro que controla esa rapidez o esa lentitud?

¿Tiene eso algo que ver con la convergencia uniforme?

12^o) Trata de explicar la diferencia entre convergencia uniforme de una sucesión funcional y de la serie funcional asociada a la misma.

13^o) Dada una serie funcional concreta, si te piden estudiar la convergencia uniforme de la misma, pongamos por caso la serie de término general $\frac{x}{1+n^4x^2}$, probablemente pienses en aplicar el criterio de Weierstrass, ¿sabes realmente lo que estás haciendo al aplicarlo o lo haces de forma mecánica como un algoritmo que aplicas y que has aprendido a usar en estos casos?

¿Podrías explicar a nivel visual (geométrica y/o gráficamente) lo que significa el criterio anterior?

Por último, reflexionemos un poco intentando buscar medios para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos como los que hemos venido analizando e incluso otros que aunque no tan complicados, podrían verse beneficiados por la utlización de otras técnicas y/o métodos de trabajo.

14^o) Para facilitar a los alumnos la asimilación de estas ideas matemáticas, ¿qué cambios piensas que son fundamentales?

- Métodos de trabajo
- Utilización de medios informáticos y de experimentación
- Revisión de las programaciones
- Otros...

Comenta tu respuesta.

15^o) ¿Cómo crees que influye el uso del ordenador como herramienta de trabajo en la enseñanza de conceptos matemáticos?

¿Piensas que su uso es necesario si queremos que un mayor número de estudiantes comprendan más y mejor? Argumenta tus respuestas.

4.3.2. Análisis de los resultados

La encuesta anterior fue contestada por seis alumnos que como comentamos anteriormente, fueron seleccionados por tratarse de aquellos que obtuvieron mejores puntuaciones en el examen de Febrero.

- Respecto a la actitud de los alumnos sobre el tema de sucesiones y series funcionales, todos coinciden en sus respuestas, al admitir que aunque les parecía un tema interesante, les costó bastante asimilar los conceptos y contenidos *"debido al grado de abstracción de los mismos"*. En general, *"tenían muchas dudas"*. Por otra parte, afirman que sentían cierto desconcierto al observar que las clases impartidas fueron básicamente teóricas y que no fueron muchas las ocasiones en las que se emplearon gráficas que pemitieran visualizar los conceptos. Todo ello condujo, según algunos, a un ambiente de indiferencia que quedó traducido en falta de motivación y desgana por parte de la mayoría.

(2) Bastante desconcierto, pues en mi opinión, lo explicaron más teóricamente que ~~por~~ de forma práctica (es decir, con gráficos, ejemplos, etc.) aunque sí que se entendía.

Figura 4.7

PESE AL INTERÉS DE ESTOS TEMAS, EN OCASIONES
→ SE DAN DE UN MODO MUY TEÓRICO Y NO SE ENTIENDEN CLARAMENTE LOS CONCEPTOS.

INDIFERENCIA (la mayoría), INCOMPRENSIÓN Y, FINALMENTE, SE ENTENDÍAN LOS CONCEPTOS AL HACER LOS EJERCICIOS.

Figura 4.8

- En cuánto a la tercera cuestión, constatamos que sólo uno de los alumnos encuestados, con una puntuación de aprobado en su examen, no se percató de que al trabajar con sucesiones funcionales, en realidad, lo que hacía era manipular funciones de dos variables. Los demás afirman haberse dado cuenta y que aunque al principio les supuso una dificultad añadida, poco a poco acabaron acostumbrándose a este doble tratamiento.

3:) LA VERDAD ES QUE NO ME DI CUENTA QUE ESTÁBAMOS TRABAJANDO CON DOS VARIABLES

AL PRINCIPIO ME COSTÓ PERO AL FINAL LO ENTENDÍ, SUPONGO QUE AL RESTO LES OCURRIERA LO MISMO

Figura 4.9

- Las respuestas al apartado cuarto contradicen las contestaciones a la pregunta anterior y reflejan que el concepto de sucesión funcional ha quedado insuficientemente consolidado. Esta cuestión es contestada incorrectamente por los seis alumnos. Todos piensan que la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{n}$ no se puede considerar como una sucesión funcional; en tal caso, afirman que el ejemplo expuesto *"es una sucesión numérica"*. No se percatan del hecho de que la sucesión puede ser interpretada como una sucesión funcional de funciones constantes y "ninguno intenta visualizarla gráficamente" lo que pone de manifiesto que en la enseñanza tradicional no se hace suficiente hincapié en la representación visual como soporte a estos conceptos.

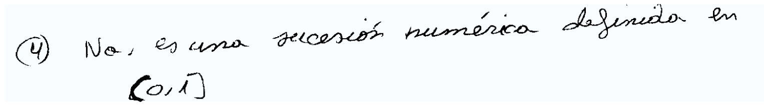


Figura 4.10

- Para asimilar el concepto de convergencia uniforme (cuestión 5) las dificultades encontradas fueron diversas: complejidad de los conceptos, escasez de tiempo y representaciones gráficas poco abundantes.

Ello dio lugar, según los encuestados, a importantes obstáculos cognitivos para aplicar lo aprendido en los ejercicios. Todos, salvo un alumno, coinciden en la necesidad de un cambio en la metodología que favorezca una visualización más clara con un cierto apoyo manipulativo; en este sentido uno de ellos expresa:

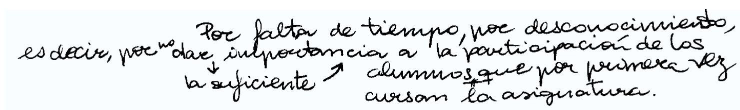


Figura 4.11

- Las respuestas referentes a los conocimientos de convergencia puntual y uniforme (preguntas 6, 7, 8 y 9) son, en general, pobres. Cuando se les solicita que describan con sus palabras, lo fundamental respecto de estos conceptos, algunos alumnos no contestan, otros comentan algunas cuestiones sueltas que no tienen sentido, pero que conectan en “algo” con lo que se les pide. Uno de ellos, con calificación de sobresaliente, precisa con palabras una buena definición de los dos tipos de convergencia y para ello hace uso de un ejemplo sencillo que su profesor explicó en clase. Finalmente sólo un estudiante, con puntuación en el examen de notable, contesta dando definiciones de convergencia puntual y uniforme completas: Verbalmente, usando simbología e introduciendo una representación gráfica.

6:) LA CONVERGENCIA PUNTUAL ME ACUERDO QUE DEPENDÍA DE LA X

EN LA CONVERGENCIA UNIFORME PARA ~~UN no~~ A PARTIR DE UN no EN ADELANTE TODAS LAS FUNCIONES ESTÁN MUY PRÓXIMAS.

7:) EN ESTE TEMA, LA CONVERGENCIA PUNTUAL NO ME QUEDÓ MUY CLARO Y DE LO QUE ENTENDÍ NO ME ACUERDO.

FIGURA 4.12

(6) Conv. puntual

depende de ε y de x

$$\forall \varepsilon>0,\ \forall x\in[a,b],\ \exists n_0(\varepsilon,x) : \forall n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

→ Aquí la convergencia depende de x, pues ~~para~~ cada $f_n(x)$ converge puntualmente a un sitio a medida que avanza la n.

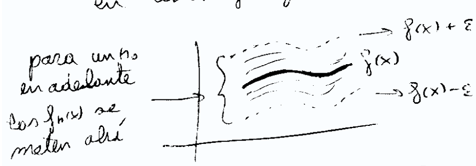
Conv. uniforme

sólo depende de ε

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon) / \forall n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b]$$

$$f(x)-\varepsilon < f_n(x) < f(x)+\varepsilon,\ \forall x\in[a,b]$$

- Aquí para todos los x los $f_n(x)$ se meten en una franja a partir de un n_0 en adelante



$$f(x)-\varepsilon < f_n(x) < f(x)+\varepsilon$$

$f_n(x)$ conv. unif. a $f(x)$

FIGURA 4.13

- En cuanto a la diferencia entre convergencia puntual y uniforme todos, excepto un estudiante, remiten a las afirmaciones anteriores o no contestan. El citado alumno, de sobresaliente, demuestra en sus exposiciones, tener bastante clara la diferencia entre ambos tipos de convergencia.

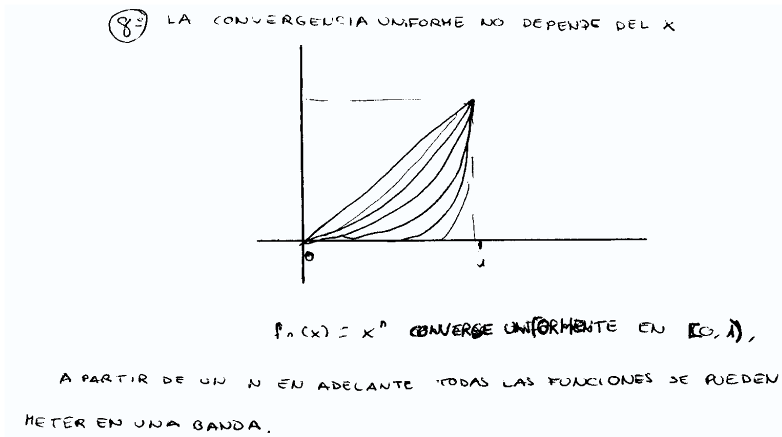


Figura 4.14

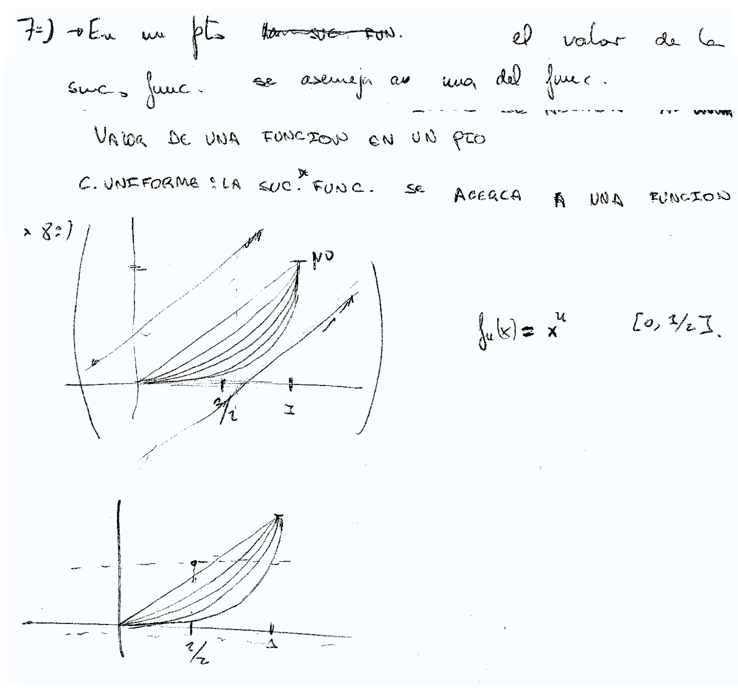
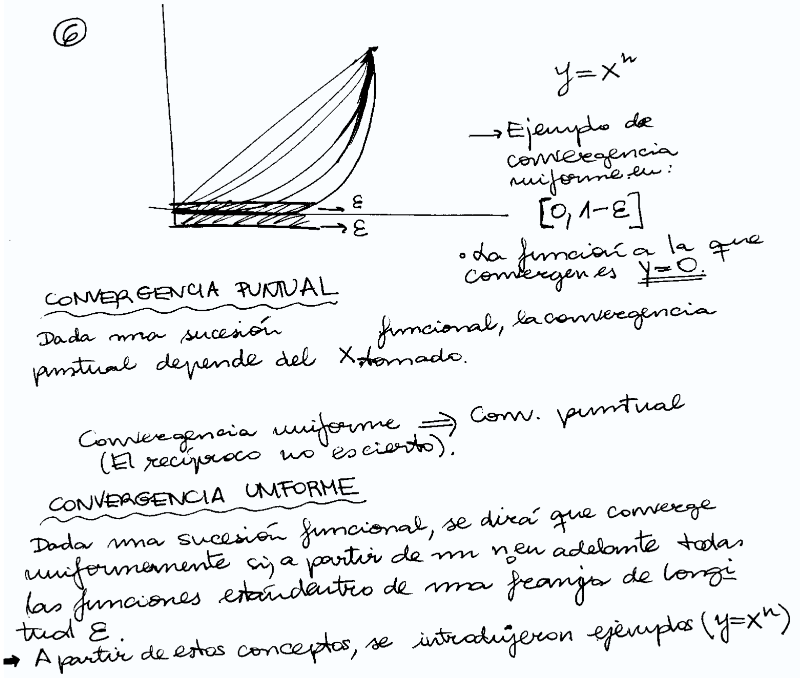


Figura 4.15



⑥

$y = x^n$

→ Ejemplo de convergencia uniforme en: $[0, 1-\varepsilon]$

ε

ε

• La función a la que convergen es $y=0$.

CONVERGENCIA PUNTUAL

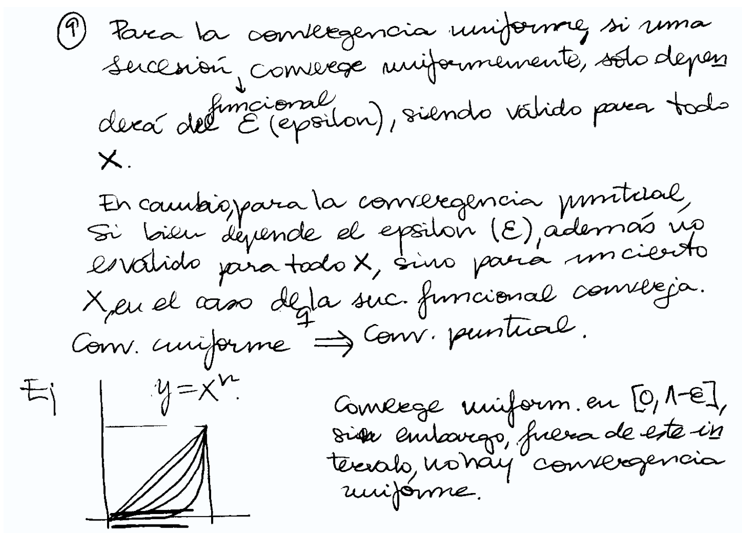
Dada una sucesión funcional, la convergencia puntual depende del X tomado.

Convergencia uniforme ⇒ Conv. puntual
(El recíproco no es cierto).

CONVERGENCIA UNIFORME

Dada una sucesión funcional, se dirá que converge uniformemente si a partir de un n_0 en adelante todas las funciones están dentro de una franja de longitud ε.

➡ A partir de estos conceptos, se introdujeron ejemplos ($y=x^n$)



⑨ Para la convergencia uniforme, si una sucesión funcional converge uniformemente, ~~sólo~~ dependerá del ε (epsilon), siendo válido para todo X.

En cambio, para la convergencia puntual, si bien depende el epsilon (ε), además no es válido para todo X, sino para un cierto X, en el caso de que la suc. funcional converja.

Conv. uniforme ⇒ Conv. puntual.

Ej $y = x^n$.

Converge uniform. en $[0, 1-\varepsilon]$, sin embargo, fuera de este intervalo, no hay convergencia uniforme.

Figura 4.16

- En general, tienen claro que no se puede hablar de convergencia uniforme en un punto x_0 de un intervalo; aunque algunos de ellos no razonan la respuesta (cuestión 10). En cuanto a la velocidad de convergencia (pregunta 11) los alumnos no saben lo que significa converger "rápidamente" o "lentamente". Se muestran inseguros a la hora de contestar y se justifican diciendo que fue una cuestión en la que se profundizó muy poco;

piensan que el parámetro que controla esa rapidez o lentitud es la x pero no dicen el por qué.

10-) CREO QUE NO PORQUE PARA QUE CONVERJA UNIFORNEMENTE
LO TIENE QUE HACER EN UN INTERVALO Y NO EN UN PUNTO CONCRETO

FIGURA 4.17

11) Los conceptos de convergencia rápida o lenta no
se explicaron con la debida rigurosidad, sim
plemente se nombró en algún ejemplo, de forma
muy intuitiva pero nada comprensible. Aún
así, creo que la conv. rápida o lenta vendrá
en función de la rapidez o lentitud con la
que converja ~~la función~~ la sucesión funcio
nal a una determinada función.
El parámetro que mide la rapidez o lentitud
será la X.
• Con respecto a la relación entre conv. uniforme
y rapidez o lentitud de la convergencia, insisto
en que estos conceptos nunca fueron explicados
de forma clara y concisa.

FIGURA 4.18

- En cuanto a la diferencia entre convergencia uniforme de una sucesión funcional y de la serie funcional asociada a la misma (cuestión 12), cinco alumnos no la recuerdan y uno de ellos contesta incorrectamente.

12-) La suc. func. converge unif a una función
y la serie funcional conv. a una serie numérica

FIGURA 4.19

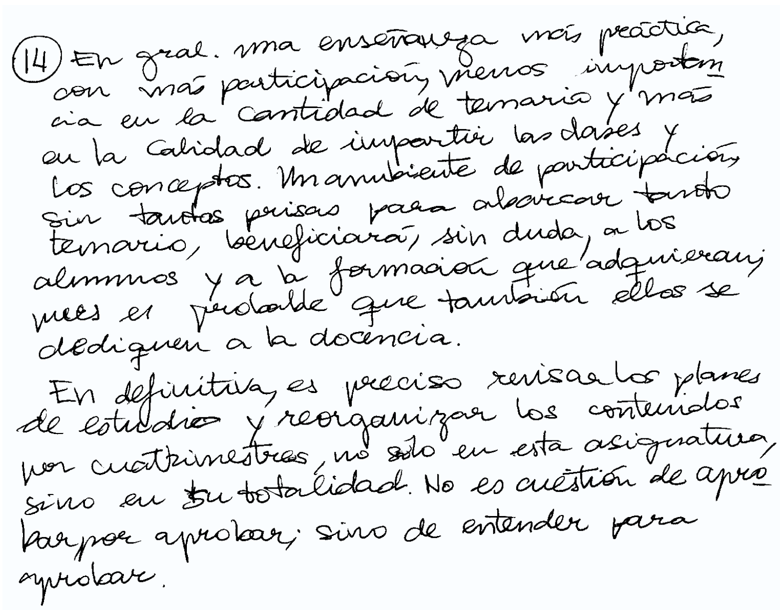
- El criterio de Weierstrass se admite, en general, como un procedimiento de tipo mecánico *"que nunca falla"* y que se aplica sin conocer una interpretación visual. En este sentido, son incapaces de dar una visión geométrica o gráfica que ponga de manifiesto el significado del mismo.

13-) CUANDO ME ENSEÑAN UN PROCEDIMIENTO MECÁNICO
PARA ALGO LO TRATO DE ENTENDER Y DESPUÉS LO APLICO
PORQUE NUNCA FALLA.
NO ME ACUERDO DEL CRITERIO

FIGURA 4.20

- Las respuestas a la pregunta 14 confirman que los elementos visuales son insuficientes cuando se instruye a los alumnos con métodos clásicos exclusivamente. Desde este punto de vista, los estudiantes muestran ser conscientes de la necesidad de un cambio en los métodos de trabajo que favorezca el uso de las nuevas tecnologías y, en particular, del ordenador como elemento complementario a la enseñanza tradicional:

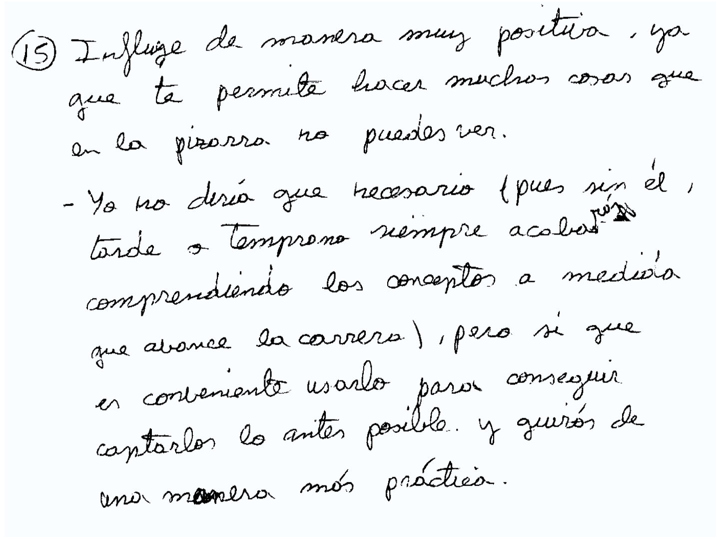
> "*...el ordenador influye de manera muy positiva, ya que te permite hacer cosas que en la pizarra no puedes ver...*"


14 En gral. una enseñanza más práctica, con más participación, menos importancia en la cantidad de temario y más en la calidad de impartir las clases y los conceptos. Un ambiente de participación, sin tantas prisas para abarcar tanto temario, beneficiará, sin duda, a los alumnos y a la formación que adquieran; pues es probable que también ellos se dediquen a la docencia.

En definitiva, es preciso revisar los planes de estudio y reorganizar los contenidos por cuatrimestres, no sólo en esta asignatura, sino en ~~su~~ totalidad. No es cuestión de aprobar por aprobar, sino de entender para aprobar.

Figura 4.21

- Admiten y reconocen la dificultad manifiesta de los profesores para llevar a cabo una reforma; señalan como causa principal "*la gran extensión del temario a impartir y la escasez de tiempo para ello*". Alguno piensa que existe cierta acomodación, por parte de la comunidad educativa, al sistema tradicional y ello ha dado lugar a un estancamiento metodológico que dificulta el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza.


(15) Influye de manera muy positiva, ya que te permite hacer muchas cosas que en la pizarra no puedes ver.

- Yo no diría que necesario (pues sin él, tarde o temprano siempre acabarás comprendiendo los conceptos a medida que avance la carrera), pero sí que es conveniente usarlo para conseguir captarlos lo antes posible. y quizás de una manera más práctica.

FIGURA 4.22

El análisis realizado, nos permitió comprobar que la asimilación y estudio de los conceptos en cuestión, no les había resultado fácil. Además el uso exclusivo del método clásico no lograba despertar el interés que les impulsara a aventurarse en la investigación de cuestiones más profundas relacionadas con el tema. Por otro lado y sabiendo que la muestra de alumnos elegida para la encuesta, estaba constituida por aquellos que habían obtenido las mejores calificaciones, observamos que éstos, después de cuatro meses, presentaban importantes lagunas conceptuales; ello manifiesta que los métodos puramente tradicionales no son suficientemente eficaces, incluso a corto plazo.

No obstante, pensamos que la situación no es tan negativa como dejan entrever los encuestados; téngase en cuenta que cuatro meses después del examen e ignorando sobre lo que se les iba a preguntar los alumnos exponen "sensaciones" grabadas en su memoria que a veces no reflejan exactamente la realidad. Seguramente el número de ejercicios realizados en el aula ni fue tan insuficiente ni las representaciones gráficas muy escasas. Además, en esos momentos, los estudiantes tenían otros objetivos y/o intereses en materias diferentes. En todo caso y a modo de síntesis, las respuestas de los estudiantes nos permiten percibir:

- una "sensación" de desconcierto y dificultad en torno a estos conceptos;
- que pocos alumnos, incluso los de buenos expedientes, los asimilan perfectamente;
- que con el paso de un corto espacio de tiempo se desvanecen en su memoria;
- que los alumnos demandan "*un cierto cambio*".

4.4. Experiencia con estudiantes de 1^{o} de Matemáticas con instrucción en Maple. Curso 99-00

Como ya comentamos en la sección 2.4, la experiencia descrita por Soto Johnson [97] nos incitó a la realización de otra similar que nos permitiera evidenciar de forma más clara las diferencias entre dos métodos de enseñanza: el tradicional y el mismo apoyado con el uso de software. Esta experiencia la llevamos a cabo con cuatro alumnos de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas, los cuales fueron seleccionados por tener los mejores expedientes en el Curso de Orientación Universitaria (COU). Durante el primer cuatrimestre del curso, los estudiantes habían recibido clases de tipo tradicional en las que habían trabajado el tema de sucesiones y series funcionales, así como la convergencia puntual y uniforme de las mismas. Cuando contactamos con los alumnos habían superado el examen correspondiente.

Una vez finalizado el período lectivo, los convocamos y durante tres sesiones de dos horas cada una, desarrollamos la instrucción. Los contenidos trabajados fueron los expuestos en la propuesta curricular del Capítulo 2, aunque por falta de tiempo algunos ejemplos no se trataron.

En la primera sesión, que se llevó a cabo el jueves 27 de Marzo de 2000, les recordamos el concepto de sucesión convergente. El uso de Maple les permitió descubrir pronto las ventajas del software para visualizar y manipular ejemplos diversos. Con esta sesión reafirmaron conceptualmente sus ideas y comprobaron, desde una perspectiva visual, todo aquello que habían estudiado de una manera más teórica; por otra parte, observamos que los alumnos mostraban interés y expectación por un programa que les permitía calcular, graficar, etc. No obstante, pensamos que el éxito de aquel primer contacto se debió a que ellos por sí mismos, de forma activa, comprobaban resultados y descubrían ciertos aspectos de los que quizás antes no se habían percatado y que de esta manera se volvían nítidos a su entendimiento.

Por ser ésta la primera sesión debíamos, paralelamente al desarrollo de la propuesta, presentar y explicar las instrucciones básicas del software. Los estudiantes seguían, paso a paso, el proceso que les indicábamos. Se dieron cuenta de que con unas pocas instrucciones básicas, sencillas de utilizar, eran capaces de resolver otros problemas, profundizando en ellos y obteniendo resultados en la fase de manipulación. Así, en dos horas y a partir de una sucesión numérica concreta, obtuvieron gráficas bidimensionales, tabularon, calcularon límites, comprobaron su valor, etc.

Durante la sesión, nos llamó la atención la expresión de satisfacción de los estudiantes cuando comprobaban la definición (ε, ν). Dado un ε, calculaban el índice de penetración ν resolviendo la inecuación correspondiente y observando las distancias de un conjunto de términos al valor límite; todo ello corroborado visualmente en la gráfica de la sucesión donde se adjuntaba la banda.

Al día siguiente, observamos que los alumnos “descubrían” algo nuevo. Aunque habían estudiado teóricamente el concepto de sucesión funcional, existían aspectos importantes que desconocían y que resultarían determinantes a la hora de trabajar los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Interpretaban correctamente una sucesión funcional como una aplicación de $\mathbf{N}$ en $\mathfrak{F}$, pero no eran conscientes de que una sucesión funcional es, en realidad, una función de dos variables: n y x. Afirmaron que nunca antes se habían planteado qué ocurría si mantenemos n constante y menos aún, si $x = x_0 = cte$.

Una alumna afirmó:

“No se me había ocurrido pensar así y dibujar en la gráfica de la sucesión funcional los puntos que me permiten visualizar la sucesión numérica resultante”.

Al despejar esta última cuestión, se introdujo la definición de *sucesión numérica asociada*. Pensamos que para obtener el éxito deseado en la tercera sesión fue fundamental el que descubrieran la existencia de estas sucesiones. Ello pudo constituir la clave para que captaran la diferencia entre convergencia puntual y uniforme. De hecho, al final de esta segunda sesión, hablamos de la convergencia puntual:

“Decir que una sucesión funcional, $f_n(x)$, *converge puntualmente* a una función determinada $f(x)$ en un cierto intervalo I, es lo mismo que afirmar que si fijamos un $x_0 \in I$, cuando n se hace muy grande, los términos de la sucesión numérica asociada a ese punto, $f_n(x_0)$, se aproximan cada vez más, y a su propio ritmo, a $f(x_0)$”.

Así dejamos patente que en el caso de la convergencia puntual, ν depende de x_0 y de ε y por ello tiene sentido hablar de la velocidad de convergencia desde un punto de vista intuitivo. Nuestra intención era marcar ya la diferencia fundamental de este tipo de convergencia con la convergencia uniforme, siendo ésta el objetivo de la siguiente sesión.

En esta tercera sesión intentamos que los alumnos “se acercaran” de una forma natural al concepto de convergencia uniforme y corroboraran la diferencia con la convergencia puntual. Pensemos que, anteriormente a todo esto, los alumnos afirmaban utilizar los criterios de convergencia de forma algorítmica. Aprovechamos esta sesión para presentar una visión gráfica del teorema de caracterización de la convergencia uniforme para sucesiones funcionales y del criterio de Weierstrass para series funcionales. La interpretación geométrica de estos teoremas, algo novedoso para ellos, les resultó útil para que entendieran su significado y por tanto, para que los aplicaran de una manera menos mecánica y más racional.

4.4.1. Primer cuestionario: Análisis de las respuestas

Como se apuntó en el Capítulo 2, cuatro meses después de esta instrucción, finales del mes de Julio, pasamos a estos alumnos un primer cuestionario en el que abordamos aspectos conceptuales sobre el tema tratado; las contestaciones debían realizarse, como en el método clásico, con el uso exclusivo de papel y lápiz. En esta ocasión sólo pudieron colaborar con nosotros tres de los alumnos instruidos.

El **cuestionario** es el siguiente:

1^o) Explica el concepto de sucesión funcional y sucesión numérica asociada apoyándote para ello en la herramienta que consideres necesaria: Simbología, gráficos, tablas, ...

2^o) En tu opinión, la expresión

$$n \rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n}$$

¿Se puede considerar como una sucesión de funciones definidas en el intervalo $[0,1]$? En caso afirmatvo, ¿podrías visualizarlas gráficamente?

3^o) De forma intuitiva y gráfica, ¿podrías explicar en qué consiste la convergencia puntual de una sucesión funcional? Expresa tu respuesta con algún ejemplo.

4^o) De forma intuitiva y gráfica, ¿podrías explicar en qué consiste la convergencia uniforme de una sucesión funcional? Expresa tu respuesta con algún ejemplo.

5^o) ¿Crees que has captado la diferencia entre convergencia puntual y uniforme de sucesiones funcionales? Argumenta tu respuesta.

6^o) ¿Tiene sentido afirmar que una sucesión funcional converge uniformemente en un punto x_0 del interior del intervalo donde están definidas las funciones? Razona.

7^o) ¿Sabes o intuyes lo que significa converger "rápida" o "lentamente" en los puntos del intervalo donde las funciones de la sucesión están definidas? ¿De qué parámetro depende la velocidad de convergencia?

8^o) ¿Podrías explicar la diferencia entre la convergencia uniforme de una sucesión funcional y la convergencia uniforme de la serie funcional asociada a la misma?

9^o) Recuerda el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de serie de funciones. ¿Podrías explicar a nivel visual (geométrica y/o gráficamente) lo que significa este criterio?

10^o) ¿Crees que la instrucción recibida facilita a los alumnos la asimilación de conceptos complejos como los de convergencia puntual y uniforme? Argumenta tu respuesta señalando las ventajas y desventajas del uso de software frente al método tradicional.

Las respuestas textuales (escaneadas) a este cuestionario, las presentamos en el anexo V de esta memoria.

Análisis de las respuestas

Los resultados aportaron datos significativos para nuestra investigación, ya que, en general, fueron similares a los obtenidos por los alumnos que sin haber recibido instrucción tecnológica contestaron al cuestionario descrito en la sección 4.3. Responden de forma imprecisa dando, verbalmente o mediante alguna representación gráfica, una idea aproximada.

Así, un alumno contesta a la primera pregunta exponiendo como ejemplo de sucesión funcional, la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$, de la cual presenta su gráfica. A continuación explica la definición de sucesión numérica asociada a un punto x_0, pero comete un error en la simbología:

"Para cada x_0 existirá una sucesión numérica asociada dada por $f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, $f_3(x_0)$, $f_4(x_0)$, ..., $f_n(x_0)$"

La segunda cuestión es contestada afirmativamente por los tres, pero sólo uno de ellos justifica su respuesta correctamente, aclarando además que la sucesión funcional dada converge hacia 0 y presentando una gráfica ilustrativa.

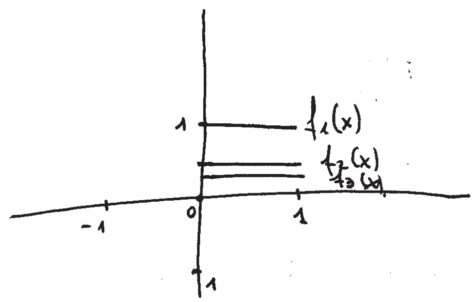


FIGURA 4.23

La tercera, cuarta y quinta cuestiones son contestadas por dos alumnos. Uno de ellos expone la siguiente definición de convergencia puntual:

"...es cuando diferentes funciones pertenecientes a una misma sucesión tienden a ir a un mismo punto del eje OY en un punto del eje OX ...."

A pesar de su expresión un tanto extraña e imprecisa, su interpretación de este tipo de convergencia parece correcta. Este mismo alumno marca la diferencia entre la convergencia puntual y uniforme, diciendo:

"La convergencia uniforme no viene dada en un solo punto sino en intervalos, es decir, las funciones deben converger a algo similar en los diferentes intervalos".

Del segundo alumno hemos escaneado su contestación acerca de la convergencia uniforme:

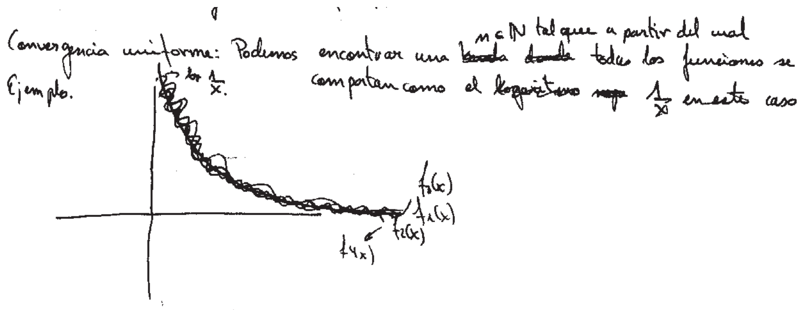


Figura 4.24

En relación a la pregunta cinco contesta:

"Quizás en su momento sí capté bien el concepto de convergencia puntual y uniforme de una sucesión funcional, puesto que, si no fuese porque tengo calor, dolor de cabeza y acabo de hacer un examen recordaría bien el significado de estos, aunque gráficamente tengo en mi mente unas imágenes de convergencia que quizás haya confundido entre sí"

A pesar del estado de ánimo del alumno, la imagen que tiene en su mente de la convergencia uniforme es precisa, sin embargo nótese que no expresa correctamente la cuestión simbólica. Así pues, no existe una coordinación entre la imagen concebida y la expresión simbólica de la misma. Interpretamos que la sucesión de funciones que considera, converge uniformemente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en un cierto intervalo.

Los tres estudiantes responden a la pregunta siete. En cada uno de los casos, aunque la expresión es imprecisa, sus explicaciones no dejan de ser significativas. Uno de ellos presenta la siguiente interpretación intuitiva de la velocidad de la convergencia:

"De forma intuitiva se puede decir que converger "rápidamente" quiere decir que la sucesión se acerca al límite en un número pequeño de términos es decir que desde los primeros términos se acerca al límite. Mientras que converge "lentamente" hace falta muchos términos de la sucesión para acercarse al límite".

Todos los alumnos dejan sin contestar los apartados ocho y nueve. No obstante, en la diez, los tres valoran positivamente el uso del software:

"En mi opinión el uso de Maple V ayuda mucho al estudio de conceptos relacionados con la convergencia ya que puedes ver en pantalla mediante gráficas y ejemplos conceptos definidos en clase y que al ser abstractos son difíciles de llegar a comprender con una simple definición".

Todo ello, una vez más, nos corroboró los resultados que había obtenido Soto Johnson [97] en su investigación, pues las contestaciones de los alumnos no nos permiten establecer ventajas respecto al método clásico, en lo que a la comprensión de estos conceptos se refiere. Nuestros alumnos, aunque demostraban tener algunas ideas sobre los conceptos por los que se les preguntaba, eran incapaces de presentar por escrito, respuestas precisas que reflejaran haber captado la diferencia, sobre todo, entre la convergencia puntual y uniforme.

Sí se observó, en cambio, una diferencia importante en cuanto a la actitud de los estudiantes que valoramos positiva. De hecho, en las seis horas de instrucción, observamos que asistían con buen ánimo, implicándose en el desarrollo de nuestra propuesta. Desde un primer momento se mostraron interesados por el software y pronto demandaron más sesiones y tiempo para trabajar estos conceptos y otros similares.

"La instrucción recibida durante esos 3 días sobre el Maple V y, sobre series, sucesiones de funciones, sucesiones numéricas, convergencia uniforme, convergencia puntual, etc., fue muy poca, duró muy poco, pero sin embargo pienso que a nivel general, y durante un período más largo, viendo gráficamente el significado de estos conceptos tan abstractos, se podría obtener buenos resultados, donde distinguiríamos las convergencias, podríamos aproximarnos visualmente al concepto en sí, e incluso podríamos interesarnos por el estudio de éstos".

Estimaban en sus comentarios que el desarrollo de las sesiones les resultaba ameno y apuntaban sentirse protagonistas de su propio aprendizaje en un ambiente motivador. En más de una ocasión, establecieron comparaciones con el método tradicional y consideraban que la visualización les había ayudado a captar mejor las ideas matemáticas.

Por otra parte, los alumnos son conscientes de que por su situación particular, a finales del mes de Julio de 2000, sus contestaciones no son todo lo ricas que ellos hubieran deseado; no obstante señalan la importancia del software como complemento a la enseñanza tradicional:

"Supongo que mi encuesta no será de mucha ayuda pero sí puedo darles mi opinión sobre este tema. Estas clases a las que algunos alumnos/as hemos asistido serían de bastante utilidad si se diesen en su debido momento como una ayuda a la asignatura ... Muy pocas veces somos capaces de alcanzar, el ver más allá de esta teoría, es decir, no sabemos interpretarla gráficamente, lo cual es vital para los alumnos, esencialmente para aquellos que vienen por primera vez a la carrera.

Lamento no serles de gran ayuda con este cuestionario pero quizás la situación en la que estoy en estos momentos me bloquea un poco todos los conocimientos adquiridos, es decir, necesito tiempo para asimilarlos, una vez asimilados los podría haber ayudado mucho más ...."

Los resultados de esta experiencia no nos desanimaron. Al contrario, nos sentíamos motivados para seguir en adelante con la investigación y seguros de que nuestra propuesta daría buenos resultados si cambiábamos, en algunos aspectos, la forma de abordar a los alumnos. Por esta razón, elaboramos un segundo cuestionario que presentamos a continuación.

4.4.2. Segundo cuestionario: Análisis de las respuestas

Tres meses más tarde, a mediados de Octubre, citamos nuevamente a estos estudiantes para pasarles otro cuestionario al que debían contestar haciendo uso del ordenador y del software. Previamente les recordamos las instrucciones básicas de Maple, necesarias para obtener la información numérica y visual que precisa el estudio de los tipos de convergencia tratados; piénsese que habían transcurrido siete meses desde el comienzo de esta segunda experiencia y no eran expertos en el uso del mismo.

Este segundo cuestionario constó de dos partes: la primera, contenía tres ejercicios prácticos y en cada uno, dada una sucesión funcional, los alumnos debían responder a cuestiones de tipo conceptual; en la segunda, tratamos de averiguar si los alumnos habían asimilado realmente estos conceptos.

El **cuestionario** es el siguiente:

Ejercicio 1. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = \cos^n x$ definida en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Construye un programa en el que obtengas: la función límite, la gráfica conjunta de las siete primeras funciones de la sucesión y la gráfica de las funciones comprendidas entre los términos 15 y 18. ¿Qué puedes deducir de ellas?

Ejercicio 2. Continuando con la sucesión de funciones anterior y utilizando otro programa, representa gráficamente los cinco primeros términos de la sucesión y las sucesiones numéricas asociadas a $x = 0{,}6$ y $x = 1$. Explica en qué punto la velocidad de convergencia es mayor y compruébalo numéricamente. ¿De qué parámetro depende la velocidad de convergencia?

Con un programa diferente representa, utilizando una gráfica bidimensional, cada una de las sucesiones numéricas asociadas a los puntos anteriores, así como la banda de semianchura 0,2. En cada caso resuelve la inecuación correspondiente y comprueba que efectivamente la velocidad de convergencia hacia 0 es diferente para ambos.

A partir de este ejemplo, ¿podrías explicar en qué consiste la convergencia puntual de una sucesión funcional?

¿Existe convergencia uniforme en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? ¿Por qué? ¿Y en el intervalo $\left[0{,}5, \frac{\pi}{2}\right]$? Para comprobarlo representa algunos términos de la sucesión. En este caso, si dibujas una banda, ¿penetran todas a partir de un cierto ν?

Ejercicio 3. Dada la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{\frac{1}{2}n(-x+3)+sen(n(x-3))^5}{n}$, estudia la convergencia uniforme de la misma en el intervalo $[1, 7]$.

Tomando $\varepsilon = 0{,}3$ representa gráficamente la banda e investiga a partir de qué término los elementos de la sucesión penetran en ella.

A partir de este ejercicio, ¿podrías explicar en qué consiste la convergencia uniforme de una sucesión funcional?

Algunas cuestiones.

1^o) ¿Crees que has captado la diferencia entre la convergencia puntual y uniforme? Argumenta tu respuesta.

2^o) ¿Tiene sentido afirmar que una sucesión funcional converge uniformemente en un punto x_0 del interior del intervalo donde están definidas las funciones? Razona la respuesta.

3^o) ¿Podrías explicar la diferencia entre la convergencia uniforme de una sucesión funcional y la convergencia uniforme de la serie funcional asociada a la misma?

4^o) ¿Crees que la instrucción recibida facilita a los alumnos la asimilación de los conceptos tratados? Argumenta tu respuesta señalando las ventajas y desventajas del uso de software frente al método tradicional.

A continuación, presentamos las contestaciones de sólo dos de los alumnos, por considerarlas significativas y representativas de los otros dos casos. En los anexos presentamos las respuestas textuales de todos ellos.

Respuestas del Alumno 1: Obtenidas directamente del disquete presentado.

Ejercicio 1

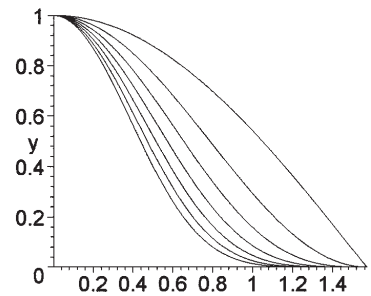
```
> restart:with(plots):
>
> f:=(n,x)-> (cos(x))^n;
```

$$f := (n, x) \to \cos(x)^n$$

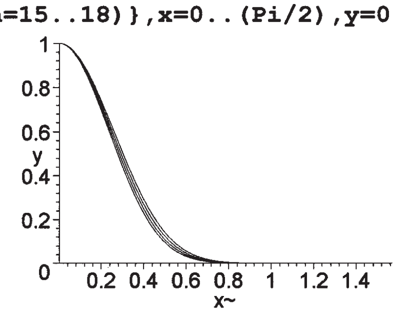
```
> assume(x>0):
> Limit(f(n,x),n=infinity)= limit(f(n,x),n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \cos(x\sim)^n = 0$$

```
>  plot({seq(f(n,x),n=1..7)},x=0..(Pi/2),y=0..1,color=black);
```




```
> plot({seq(f(n,x),n=15..18)},x=0..(Pi/2),y=0..1,color=black);
```

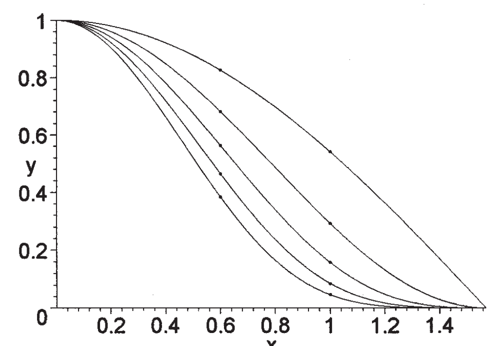



```
>
```

Del ejercicio anterior se puede deducir, que existe una convergencia puntual hacia la funcion f(x)=O.Vemos que a medida que la n se hace mas grande la sucesión de funciones se acerca al cero exepto en 0 que toma valor 1.Si fijamos un punto xo vemos que cuando n se hace grande la sucesión numerica asociada a ese punto tiende a cero.

EJERCICIO2

```
> restart:with(plots):
> f:=(n,x)->(cos(x)^n):
> a:=plot({seq(f(n,x),n=1..5)},x=0..(Pi/2),y=0..1,color=black):
> b:=plot([[0.6,f(1,0.6)],[0.6,f(2,0.6)],[0.6,f(3,0.6)],[0.6,f(4,0
  .6)],[0.6,f(5,0.6)]],style=point, symbol=circle, color=black):
> c:=plot([[1,f(1,1)],[1,f(2,1)],[1,f(3,1)],[1,f(4,1)],[1,f(5,1)]]
  ,style=point, symbol=circle, color=black):
```



Mirando la gráfica podemos decir que la velocidad de convergencia en 1 es mayor que en 0.6 pues con el mismo numero de terminos la sucesión numérica asociada al 1 se acerca mas al 0 que la asociada al 0.6.

```
> for n from 1 to 5 do evalf(f(n,0.6)),evalf(f(n,1)) od;
```

.8253356149, .5403023059

.6811788772, .2919265818

.5622011875, .1577286053

.4640046628, .08522112914

.3829595737, .04604517259

Numericamente podemos confirmar lo que apreciabamos en la gráfica pues los cinco primeros terminos de la sucesión asociada al uno estan mas cerca de cero que los de la asociada al 0.6, aunque estos también tienden a cero pero con menor velocidad, por tanto tambien confirmamos que la sucesion de funciones converge puntualmente a la función f(x)=0. La velocidad de convergencia depende del 'nu' apartir del cual la sucesión numerica asociada esta dentro de la franja que delimita el epsilon elegido. Por lo cual el 'nu' a su vez también depende del epsilon y del punto elegido.

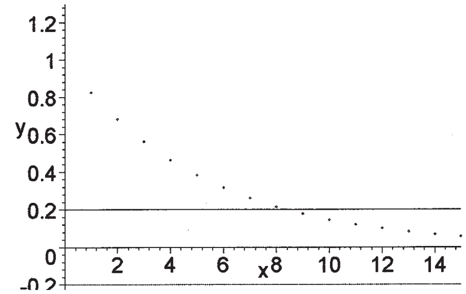
```
> restart:with(plots):
> s[6/10]:=n->(cos(6/10))^n;
```

$$s_{3/5} := n \to \cos\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

```
> eq:=abs(s[6/10](n))=0.2:
> nu[1]:= floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;
```

$$\nu_1 := 9$$

```
> g:=plot([seq([n,s[6/10](n)],n=1..15)],x=0..15,y=-0.3..1.3,style=
  point,color=black):
> h:= plot({[[0,0.2],[15,0.2]],[[15,-0.2],[0,-0.2]]},color=blue):
> display({g,h});
```



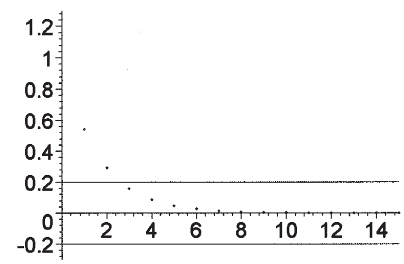

```
> restart:with(plots):
>
> t[1]:=n->(cos(1))^n;
```

$$t_1 := n \to \cos(1)^n$$

```
> eq:=abs(t[1](n))=0.2:
> nu[2]:=floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;
```

$$\nu_2 := 3$$

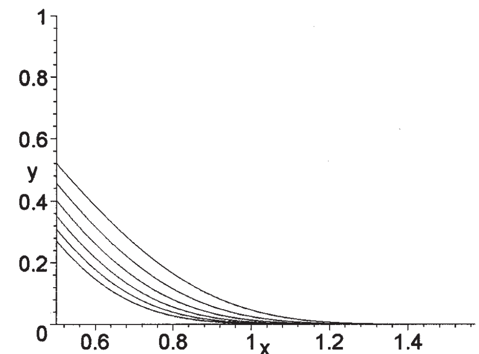
```
>
> a:=plot([seq([n,t[1](n)],n=1..15)],x=0..15,y=-0.3..1.3,style=poi
  nt,color=black):
> b:= plot({[[0,0.2],[15,0.2]],[[15,-0.2],[0,-0.2]]},color=blue):
>
> display({a,b});
```



Efectivamente hemos comprobado que nu,que es parametro que mide la velocidad de convergencia, para la sucesión numerica asociada al 0.6 es 9 y el correspondiente a al asociada al 1 es 3, por tanto esta última converge más rapidamente.
Luego podemos decir que la convergencia puntual de una sucesión funcional consiste en que cada sucesión numerica asociada a cada punto tiende o converge hacia la misma función.
No existe convergencia uniforme en el intervalo [0,pi/2] pues en el cero la imagen es 1 y aunque cojamos un epsilon cerca del uno siempre nos quedarín funciones fuera de la banda.

```
> restart:with(plots):
>
```

```
> )*nplot({seq(f(n,x),n=5..10)},x=0.5..(Pi/2),y=0..1,color=black);
```



En el intervalo [0.5, (pi/2)] si que existe convergencia uniforme pues apartir de un cierto n todas las funciones quedan dentro de la banda delimitada por un epsilon elegido.

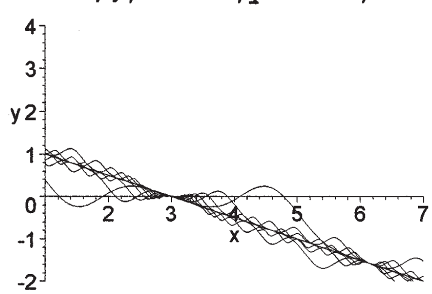
EJERCICIO 3

```
> restart: with(plots):
```

```
> f:=(x,n)->((1/2)*n*(-x+3)+sin(n*(x-3))^5)/n;
```

$$f := (x,n) \to \frac{\frac{1}{2}\,n\,(-x+3)+\sin(n\,(x-3))^5}{n}$$

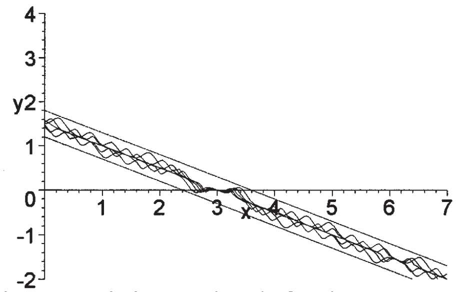
```
> plot({seq(f(x,n),n=1..8)},x=1..7,y=-2..4,color=black);
```




```
> Limit(f(x,n),n=infinity)= limit(f(x,n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\,n\,(-x+3)+\sin(n\,(x-3))^5}{n} = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

```
> s:=x->(-x+3)/2:
> t:= plot({s(x)+0.3,s(x)-0.3},x=0..7,y=-2..3,color=blue):
> u:=plot({seq(f(x,n),n=4..8)},x=0..7,y=-2..4,color=black):
> display({t,u});
```



A partir del n=4 todos los elementos de la sucesión de funciones penetran en en la banda. Podríamos decir que la convergencia uniforme consiste en que apartir de un cierto valor de n todas las funciones de la sucesión quedan comprendidas en una banda delimitada por el epsilon que elijamos que puede ser tan pequeño como queramos.Es decir que a medida que crece la n las funciones ,que son los terminos de la sucesión, tienden hacia otra función que es el limite de la sucesión.

Cuestiones

1- Creo que la diferencia entre convergencia puntual y uniforme consiste en que si existe convergencia puntual cada sucesión numerica asociada a cada punto tienden hacia la misma función,en cambio si hay convergencia uniforme , todos los terminos de la sucesión funcional tiende hacia una misma función (apartir de un cierto n).

2- No tiene sentido decir que una sucesión funcional converge uniformemente en un punto pues convergencia uniforme consiste en que todas las funciones tiende en general, para todos los puntos del intervalo, hacia una función y en cambio si tomamos un
solo punto tendríamos una sucesión numerica.

4- Desde luego yo creo que la utilización de programas de este tipo facilita mucho no solo el estudio de esta materia si no principalmente la capacidad de comprenderlo, porque por lo menos desde mi punto de vista estos conceptos son muy abstractos y el hecho de que lo puedas ver representado y jugar con los datos de manera que tu mismo te puedes dar cuenta a partir de que 'n' converge, añadir mas o menos terminos para poder comprender bien hacia donde converge,etc. , es toda una ventaja.

Lo único que quizá pueda ser algo costoso es el lenguaje propio del programa, pero que con un poco de práctica y algunas explicaciones se puede comprender rápidamente e incluso utiizarlo con soltura.

Respuestas del Alumno 2: Obtenidas directamente del disquete presentado.

EJERCICIO1

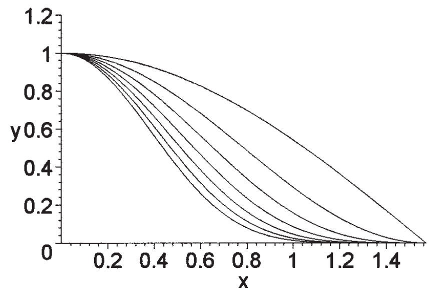
```
> restart:with(plots):
> f:=(x,n)->(cos(x))^n;
```

$$f := (x, n) \to \cos(x)^n$$

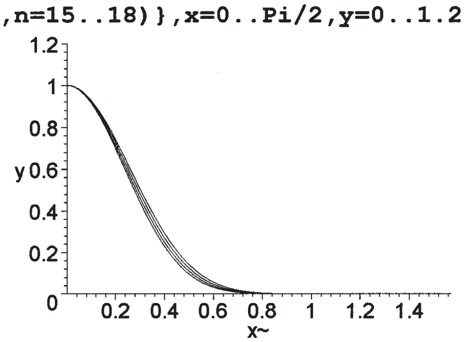
```
> assume(x>0);
> Limit(f(x,n),n=infinity)=limit(f(x,n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \cos(x\sim)^n = 0$$

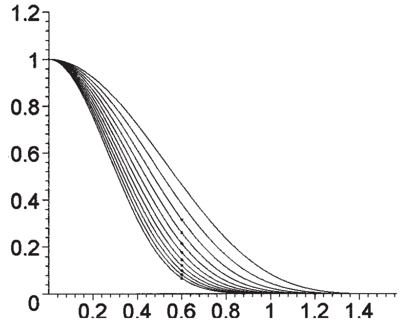
```
> plot({seq(f(x,n),n=1..7)},x=0..Pi/2,y=0..1.2,color=black);
```




```
> plot({seq(f(x,n),n=15..18)},x=0..Pi/2,y=0..1.2,color=black);
```




```
> a:=plot({seq(f(x,n),n=6..14)},x=0..Pi/2,y=0..1.2,color=black):
> b:=plot([[0.6,f(0.6,6)],[0.6,f(0.6,7)],[0.6,f(0.6,8)],[0.6,f(0.6
  ,9)],[0.6,f(0.6,10)],[0.6,f(0.6,11)],[0.6,f(0.6,12)],[0.6,f(0.6,
  13)],[0.6,f(0.6,14)]],style=point,symbol=circle,color=red):
> c:=plot([[1.2,f(1.2,6)],[1.2,f(1.2,7)],[1.2,f(1.2,8)],[1.2,f(1.2
  ,9)],[1.2,f(1.2,10)],[1.2,f(1.2,11)],[1.2,f(1.2,12)],[1.2,f(1.2,
  13)],[1.2,f(1.2,14)]],style=point,symbol=circle,color=red):
> display({a,b,c});
```



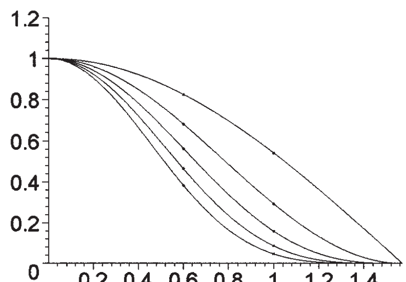
Si observamos la gráfica asociada a los siete primeros términos de la sucesión, y luego la comparamos con la segunda gráfica representada, podemos pensar, (si miramos la segunda), que la convergencia puntual en 0.6 es más rápida que en la primera la asociada a 1.2. Sin embargo, cuando hemos representado conjuntamente las dos sucesiones asociadas a los dos puntos anteriormente mencionados y tomando los términos de la sucesión funcional del cuarto al décimocuarto, podemos apreciar que es en 1.2 donde la convergencia a f(x)=0, (función límite) es mucho más rápida. Por otro lado, no podría haber convergencia uniforme pues en cero siempre vale uno y no podríamos encontrar una banda en la que a partir de un determinado término se metiesen todos en ella.

EJERCICIO2

```
> restart:with(plots):
> f:=(x,n)->(cos(x))^n;
```

$$f := (x, n) \to \cos(x)^n$$

```
> a:=plot({seq(f(x,n),n=1..5)},x=0..Pi/2,y=0..1.2,color=black):
>
> b:=plot([[0.6,f(0.6,1)],[0.6,f(0.6,2)],[0.6,f(0.6,3)],[0.6,f(0.6
  ,4)],[0.6,f(0.6,5)]],style=point,symbol=circle,color=red):
> c:=plot([[1,f(1,1)],[1,f(1,2)],[1,f(1,3)],[1,f(1,4)],[1,f(1,5)]]
  ,style=point,symbol=circle,color=red):
> display({a,b,c});
```



A pesar de que ya en el primer ejercicio haya estudiado lo que pasaba con las sucesiones numéricas asociadas a 0.6 y 1.2, en esta ocasión si observamos la gráfica que hemos obtenido nos damos cuenta que la convergencia en x=1 a f(x)=0, es mucho más rápida que en x=0.6. Vamos a continuación a comprobarlo numéricamente:

```
> for n from 1 to 5 do evalf(f(0.6,n)),evalf(f(1,n)) od;
```

.8253356149, .5403023059

.6811788772, .2919265818

.5622011875, .1577286053

.4640046628, .08522112914

.3829595737, .04604517259

Vamos ahora a graficar la sucesión numérica asociada a 0.6 y1 para determinar el parámetro nu, que sabemos es inversamente proporcional al epsilon tomado y que tambien depende del x con el que estemos trabajando.(estamos estudiando la convergencia puntual).

PARTE2

```
> restart:with(plots):
> s[0.6]:=n->(cos(0.6))^n;
>
```

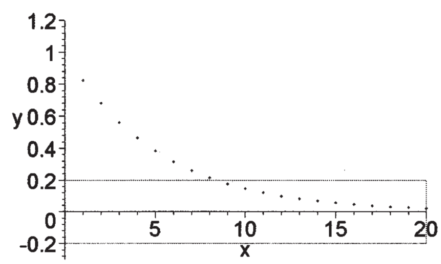
$$s_{.6} := n \rightarrow \cos(.6)^n$$

fijemos epsilon en 0.2

```
> eq:=abs(s[0.6](n))=0.2:nu[1]:=floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;
```

$$\nu_1 := 9$$

```
> d:=plot([seq([n,s[0.6](n)],n=1..20)],x=0..20,y=-0.3..1.2,style=p
  oint,color=black):
> e:=plot({[[0,0.2],[20,0.2],[20,-0.2],[0,-0.2]]},color=green):
> display({d,e});
```



Representemos lo mismo para x=1

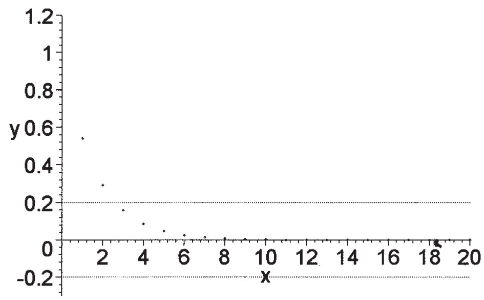
```
> restart:with(plots):
> s[1]:=n->(cos(1))^n;
```

$$s_1 := n \rightarrow \cos(1)^n$$

```
> eq:=abs(s[1](n))=0.2:nu[2]:=floor(fsolve(eq,n,n=1..100))+1;
```

$$\nu_2 := 3$$

```
> d:=plot([seq([n,s[1](n)],n=1..20)],x=0..20,y=-0.3..1.2,style=poi
  nt,color=black):
> e:=plot({[[0,0.2],[20,0.2]],[[20,-0.2],[0,-0.2]]},color=green):
>
> display({d,e});
```



```
>
```

Anteriormente, ya habíamos comprobado numéricamente que la sucesión converge puntualmente más rápido en 1 que en 0.6. En esta ocasión, lo que hemos hecho es representar cada una de las sucesiones numéricas asociadas a 1 y 0.6, considerando un epsilon fijo, en este caso 0.2. Sabemos que el parámetro nu que nos va a medir la velocidad de convergencia en cada punto nos va a depender del epsilon tomado y del punto en cuestión. Al representar la banda con anchura 0.2 y representar cada sucesión numérica, volvemos a ratificar lo que ya habíamos comprobado, es decir, que la velocidad de convergencia es mucho más rápida en x=1 que en x=0.6.¿Cómo lo vemos atendiendo a la banda? Es evidente, que si consideramos la primera gráfica, vemos que es a partir del término 9 cuando los términos de la sucesión quedan todos dentro de la banda, sin embargo, si atendemos a la segunda es a partir del término 3 cuando todos los demás términos se quedan metidos en la banda, con lo cual se vuelve a confirmar que la velocidad de convergencia en x=1 es mucho más rápida que en x=0.6. De esta manera, y con todos los datos con los que hemos trabajado ya podemos tener una idea bastante clara de lo que sería la convergencia puntual de una sucesión funcional. Partiendo de una sucesión fucional dada y considerando un punto cualquiera del rando de definición, obtenemos una nueva sucesión, es este caso numérica, asosiada a dicho punto. Sabemos que cada una de estas sucesiones numéricas asociadas va a converger al mismo punto, sin embargo, cada una de ellas lo hará a su ritmo y dicha velocidad nos viene determinada por el parámetro nu, que ya hemos dicho que depende del punto en cuestión y del epsilon tomado. Por tanto, la convergencia puntual no es siempre la misma sino que depende del punto que estemos considerando.

PARTE3

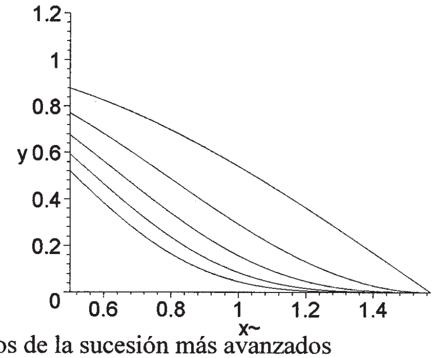
```
> restart:with(plots):
> f:=(x,n)->(cos(x))^n;
```

$$f := (x, n) \to \cos(x)^n$$

```
> assume(x>0);
> Limit(f(x,n),n=infinity)=limit(f(x,n),n=infinity);
```

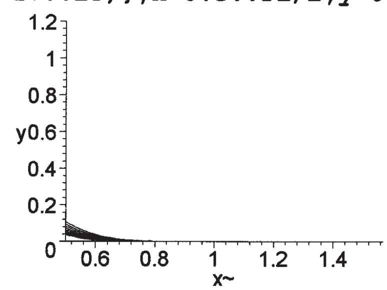
$$\lim_{n \to \infty} \cos(x\sim)^n = 0$$

```
>
> plot({seq(f(x,n),n=1..5)},x=0.5..Pi/2,y=0..1.2,color=black);
```



Consideremos ahora términos de la sucesión más avanzados

```
> plot({seq(f(x,n),n=17..25)},x=0.5..Pi/2,y=0..1.2,color=black);
```




```
>
```

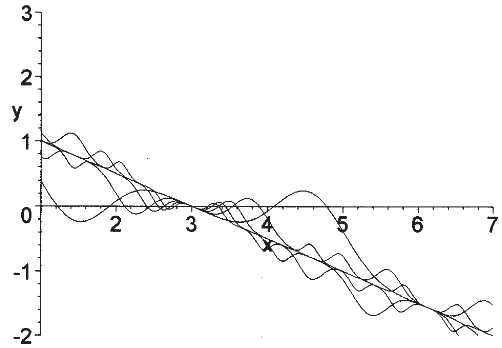
Ya en el primer ejercicio había comentado que en el intervalo [0,pi/2] no podría haber convergencia uniforme. Si ahora consideramos el intervalo [0.5,pi/2] y representamos términos avanzados de la sucesión podemos observar que llega un momento en que se quedan van pegando más a la horizontal, por tanto, en esta ocasión si representásemos una banda observaríamos que llega un momento en el que a partir de un cierto término todos los demás se quedan metidos en dicha banda. Por tanto, en este intervalo sí existe convergencia uniforme.

EJERCICIO3

```
> restart:with(plots):
> f:=(x,n)->((1/2)*n*(-x+3)+sin((n*(x-3)))^5)/n;
```

$$f := (x, n) \to \frac{\frac{1}{2}\, n\,(-x+3) + \sin(n\,(x-3))^5}{n}$$

```
> plot({seq(f(x,n),n=1..5)},x=1..7,y=-2..3,color=black);
```

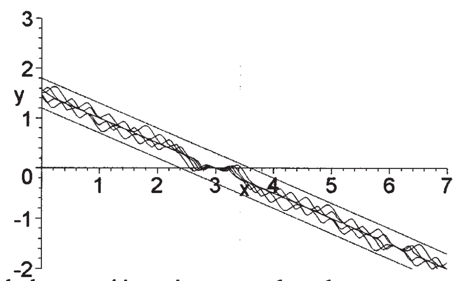



```
> Limit(f(x,n),n=infinity)=limit(f(x,n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(-x+3)+\sin(n(x-3))^5}{n} = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

```
>

> s:=x->(-1/2)*x+(3/2):
> t:=plot({s(x)+0.3,s(x)-0.3},x=0..7,y=-2..3,color=blue):
> u:=plot({seq(f(x,n),n=4..8)},x=0..7,y=-2..3,color=black):
> display({t,u});
```



Si representamos términos de la sucesión más avanzados observamos que llega un momento en el que los términos de la sucesión se confunden con la recta función límite. Si ahora consideramos una banda de anchura 0.3 y volvemos a manipular los términos de la sucesión vemos que a partir del cuarto todos los demás quedan dentro de la banda. Si ahora repasamos todo lo que hemos trabajado con convergencia uniforme, igual que antes podemos tener una visión clara de lo qué es. Si consideramos una sucesión funcional y observamos que existe un término a partir del cual todos los demás quedan dentro de una banda con una anchura determinada, estamos ante una caso de convergencia uniforme. En esta ocasión, todos los términos de la sucesión convergen a la misma velocidad a la función límite, es el mismo paramétro nu para todos, y no como en el caso de convergencia puntual que el nu iba a depender del x considerado.

>

CUESTIONES

1-) Sí. Creo que más o menos con el material proporcionado he sido capaz de captar la idea de cada una de las dos cuestiones con más claridad e igualmente podría diferenciar una convergencia de la otra. Cuando sólo nos facilitan teoría y ejercicios puedes entender sin problema lo que significa cada concepto, sin embargo, cuando se te facilita un material visual y con el que puedes manipular, los conceptos quedan mejor asimilados; pues en esta ocasión has sido tú el que por tus propios medios y con tus propios razonamientos has trabajado con el material hasta entender en sí de lo se trataba.

2-) No, la convergencia uniforme hace referencia a todo un intervalo. Cuando nos referimos a la convergencia de una sucesión funcional en un punto hemos de pensar ya en convergencia puntual.

3-) Ya hemos visto a lo largo de todo el trabajo en lo que consiste la convergencia uniforme de una sucesión funcional, luego vamos a centrarnos ahora en la convergencia uniforme de una serie funcional. Si partimos de una serie funcional, para estudiar su convergencia uniforme, lo que hacemos es considerar la sucesión funcional correspondiente y estudiar si podemos encontrar una sucesión numérica que la acote superiormente, por decirle de alguna manera, es decir, que se encuentre por encima de ella de tal manera que la sucesión numérica obtenida converja a cero. En este caso, se dirá que la serie funcional inicial converge uniformemente en el intervalo dado. Por tanto, vemos que cuando estudiamos la conv uniforme de una sucesión funcional intentamos ver si existe un término de la misma a partir del cual todos los demás queden dentro de una banda; sin embargo, en el caso de las series funcionales, lo que hacemos es ver si podemos acotar la sucesión funcional en cuestión por una sucesión numérica convergente a cero.

4-) Considero que la evaluación de un trabajo como éste sólo la puedo expresar basándome en mi propia experiencia. Como ya comenté en la primera cuestión es una labor que me ha gratificado a nivel general. De esta manera, se aprende a asimilar conceptos que son muy teóricos y abstractos de una forma mucho más natural y práctica; le permite al alumno manipular y trabajar desde su propia iniciativa dejando que sea él por el mismo el que logre ver de una manera mucho más clara lo que no llega a asimilar con sólo el material teórico; y por último le permite al alumno manejar un programa nuevo que no sólo podrá manejar para entender cuestiones de convergencia, sino que le permitirá visualizar todo aquello que le produzcan lagunas en su entender. En los tiempos que corren todo se basa en el software, y cuando le dices a un alumno que va trabajar con un ordenador parece que se le enciende el chip de querer conocer algo más sobre lo que le vas a decir, así que creo que el hecho de introducir el software como complemento en la enseñanza es una gran ayuda pues lo más importante es que permite al alumno VISUALIZAR Y TRABAJAR POR EL MISMO todo el material teórico con el que cuenta. Por otro lado, también considero que se podría realizar un trabajo mucho más rápido y eficaz si conociécemos con claridad el programa con el que vamos a trabajar ya que podríamos ahorrar tiempo e investigar de una manera mucho amplia, libre y eficaz.

Análisis de las respuestas

En esta ocasión, los resultados los consideramos altamente significativos para la investigación, pues los alumnos, en cada caso, fueron capaces de resolver lo planteado construyendo "pequeños programas", manipulando y justificando resultados por diversas vías:

- representando gráficamente,

- hallando límites,

- comprobando el valor del límite mediante: tabulaciones, definición simbólica, resolviendo las inecuaciones correspondientes, etc.

Mejía Velasco [70] sugiere que los conceptos, en matemáticas, no existen sino a través de sus representaciones y por tanto, la aprehensión de un concepto sólo se da si el alumno es capaz de integrar las diferentes manifestaciones del mismo estableciendo las transferencias y coordinaciones entre ellas. Por otro lado, la tecnología del software ofrece la posibilidad de visualizar los conceptos de la matemática mediante representaciones gráficas, lo cual de otro modo, es decir, sin uso del ordenador, supondría una tarea ardua y engorrosa. Desde esta perspectiva y concretando en nuestra experiencia, la utilización del software, permitió a los cuatro alumnos el acceso rápido a varios registros de representación de un mismo concepto y les facilitó la coordinación entre ellos, de modo que pudieron pasar de un registro a otro, en ambas direcciones, para posteriormente obtener conclusiones.

Así, el análisis de las contestaciones de los alumnos, cuando responden mediante el uso del software, nos permite establecer una diferencia sustancial con respecto a los resultados obtenidos a partir del primer cuestionario y por tanto, con respecto a las investigaciones realizadas por Soto Johnson [97]. Abundando en lo anterior, el uso de la tecnología ofrece al estudiante la posibilidad de investigar manipulando y visualizando aquellos aspectos de los conceptos que le interesan para contestar, y al tiempo que busca y obtiene la información requerida, va reconstruyendo su conocimiento. En este sentido, pensamos que nuestros alumnos a medida que "programaban", reorganizaban en su mente los conocimientos que habían adquirido hacía algunos meses; esto es "algo"que, de otro modo, es decir, sin la disponibilidad del software, les resultó complicado hacer. Ello nos muestra que el uso del ordenador como herramienta complementaria a la enseñanza tradicional, no solo ayuda a agilizar considerablemente el proceso de aprendizaje de conceptos arduos como los tratados, sino que además facilita el recuerdo de los mismos a corto y a largo plazo.

Para valorar los resultados, vamos a analizar el desarrollo que hacen los dos alumnos anteriores.

En el primer ejercicio del cuestionario, aunque actúan de forma similar, programando para obtener las gráficas de algunos términos de la sucesión funcional $f_n(x) = \cos^n x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, destacamos parte de las conclusiones correspondientes a ambos:

Alumno 1:

"Existe una convergencia puntual hacia la función $f(x) = 0$*. Vemos que a medida que la* n *se hace más grande la sucesión de funciones se acerca al cero excepto en* 0 *que toma el valor* 1*. Si fijamos un punto* x_0 *vemos que cuando* n *se hace grande, la sucesión numérica asociada a ese punto tiende a cero".*

Este alumno se limita a contestar que la convergencia es puntual y hace distinción entre el punto 0 y el resto del intervalo. Por otra parte, en su respuesta, el alumno 2 va más allá, se adelanta, eligiendo por su cuenta el punto 1,2, haciendo la correspondiente representación gráfica y comparando las velocidades de convergencia en dos puntos: $x = 0{,}6$ y $x = 1{,}2$. Nótese que, a pesar de que la sucesión asociada al punto 1,2 no se aprecia en la gráfica por su cercanía a 0, el alumno ha programado correctamente. Además, manifiesta de antemano su convencimiento de que no existe convergencia uniforme en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

"Por otro lado, no podría haber convergencia uniforme pues en cero siempre vale uno y no podríamos encontrar una banda en la que a partir de un determinado término se metiesen todos en ella".

Todo ello nos indica que este alumno, a priori y haciendo uso de la visualización, ha captado las ideas que le habíamos transmitido.

Para contestar al segundo ejercicio, los alumnos a partir de sus gráficas deducen correctamente que la velocidad de convergencia en el punto 0,6 es menor que en 1. Asimismo, corroboran la dependencia de ν respecto de ε y de x; en este sentido, destacamos la frase del alumno 1:

" ... La velocidad de convergencia depende del 'nu' a partir del cual la sucesión numérica asociada está dentro de la franja que delimita el épsilon elegido, por lo cual el 'nu' depende del épsilon y del punto elegido".

El alumno 2 se remite a lo contestado en el ejercicio anterior, pero ahora representa las sucesiones numéricas asociadas a $x = 0{,}6$ y $x = 1$, y compara la velocidad en ambos puntos, gráfica y numéricamente.

Al observar el desarrollo que estos estudiantes hacen en la segunda parte del ejercicio, valoramos positivamente el tratamiento llevado a cabo, pues representan la banda y las sucesiones numéricas asociadas a aquellos puntos, resuelven las ecuaciones correspondientes y encuentran que, para un mismo ancho de la banda, si $x = 0{,}6$, $\nu = 9$ y si $x = 1$, $\nu = 3$. El alumno 1 concluye:

"Efectivamente hemos comprobado que nu, que es el parámetro que mide la velocidad de convergencia, para la sucesión numérica asociada al $0{,}6$ *es* 9 *y la correspondiente a la*

asociada a 1 *es* 3*, por tanto esta última converge más rápidamente".*

Respecto a la convergencia uniforme en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[0{,}5, \frac{\pi}{2}\right]$, los alumnos argumentaron sus respuestas desde una perspectiva visual. Ambos contestaron correctamente y parecen tener muy clara la idea de "no acercamiento global" hacia la función $f(x) = 0$. Destacamos la respuesta del alumno 1:

"No existe convergencia uniforme en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *pues en el cero la imagen es* 1 *y aunque cojamos un épsilon cerca del uno siempre nos quedarían funciones cerca de la banda. En el intervalo* $\left[0{,}5, \frac{\pi}{2}\right]$ *sí que existe convergencia uniforme puesto que a partir de un cierto* n *todas las funciones quedan dentro de la banda delimitada por un épsilon elegido".*

En el ejercicio 3, dada la sucesión funcional $f_n(x) = \frac{\frac{1}{2}n(-x+3)+sen(n(x-3))^5}{n}$, los alumnos, cada uno de forma diferente y por propia iniciativa, comienzan su estudio representando gráficamente algunos términos de la sucesión y hallando su límite. Al graficar la banda con algunos términos de la sucesión y manipular los valores de n, ambos alumnos concluyen que a partir de $n = 4$ todas las sucesiones "penetran" en la banda; en particular, el alumno 2 responde:

"Si representamos términos de la sucesión más avanzados observamos que llega un momento en el que los términos de la sucesión se confunden con la recta función límite. Si ahora consideramos una banda de anchura 0,3 *y volvemos a manipular los términos de la sucesión vemos que a partir del cuarto todos los demás quedan dentro de la banda".*

Por otro lado, ambos alumnos expresan, con sus palabras, la idea conceptual de la convergencia uniforme; destacamos, nuevamente, la respuesta del alumno 2:

"Si consideramos una sucesión funcional y observamos que existe un término a partir del cual todos los demás quedan dentro de la banda con una anchura determinada, estamos ante un caso de convergencia uniforme. En esta ocasión, todos los términos de la sucesión convergen a la misma velocidad a la función límite, es el mismo parámetro nu para todos, y no como en la convergencia puntual que el nu iba a depender del parámetro considerado".

Respecto a la segunda parte denominada "Algunas cuestiones", analizamos conjuntamente las respuestas de los cuatro estudiantes.

En cuanto a la primera cuestión, todos los alumnos señalan que aunque estos conceptos son difíciles de entender, las ideas las han captado notablemente, ya que las diversas representaciones gráficas permiten evidenciar fácilmente la diferencia entre ambos conceptos. Por otro lado, piensan que además del aporte visual proporcionado por el software, es importante la posibilidad que ofrece de manipular y utilizar varias manifestaciones de estas y otras nociones matemáticas:

"En esta ocasión has sido tú el que por tus propios medios y con tus propios razonamientos has trabajado con el material hasta entender en sí de lo que se trataba".

En la segunda pregunta, todos los alumnos responden que no tiene sentido afirmar que una sucesión funcional converge uniformemente en un punto del intervalo pues:

"la convergencia uniforme consiste en estudiar si la sucesión de funciones se mete dentro de una banda, independientemente del punto en que estemos..."

o también:

"No porque la convergencia uniforme se trata de un intervalo en el que todas las funciones se acercan a la misma recta, parábola, ..."

Respecto a la tercera cuestión, nuestro propósito no era otro que el que los alumnos se percataran de que estudiar la convergencia uniforme de una serie funcional es equivalente a estudiar la convergencia uniforme de la sucesión de sumas parciales correspondiente. Sin embargo, sólo dos alumnos contestan y para ello aluden, confundidos, al teorema de caracterización diciendo que, para asegurar la convergencia uniforme de una serie funcional, es necesario acotar la sucesión funcional de partida por una sucesión numérica que sea convergente a cero. Así se refleja en la respuesta de uno de ellos, el cual por su forma de expresarse, podríamos asegurar que ha recordado la interpretación geométrica que le proporcionamos sobre este criterio:

"... Si partimos de una serie funcional, para estudiar su convergencia uniforme, lo que hacemos es considerar la sucesión funcional correspondiente y estudiar si podemos encontrar una sucesión numérica que la acote superiormente, por decirlo de alguna manera, es decir, que se encuentre por encima de ella de tal manera que la sucesión numérica obtenida converja a cero. En este caso, se dirá que la serie funcional inicial converge uniformemente en el intervalo dado ...."

Finalmente, presentamos parte de las reflexiones que este estudiante realiza sobre la última cuestión:

"... De esta manera, se aprende a asimilar conceptos que son muy teóricos y abstractos de una forma mucho más natural y práctica; le permite al alumno manipular y trabajar desde su propia iniciativa ...."

4.5. Experiencia con alumnos de doctorado

A lo largo de este capítulo hemos descrito y analizado los resultados de dos experiencias en las que se ha puesto en práctica la propuesta curricular presentada en el Capítulo 2. La primera de ellas la llevamos a cabo gracias a la colaboración de la alumna María.

Ésta estudiaba en el Centro Superior de Educación, y su formación matemática en torno al concepto de límite de sucesiones numéricas era prácticamente inexistente. La realización de la segunda experiencia, la desarrollamos con la intervención de cuatro alumnos de primero de Matemáticas, los cuales comenzaban su formación y por tanto, conocían ya diversos aspectos relacionados con los procesos de convergencia.

Por último y complementariamente a nuestra investigación, sentimos la necesidad de verificar cómo un alumno recién licenciado en Matemáticas y por tanto, con una formación más consolidada, resuelve, utilizando el software, cuestiones de cierto interés referentes a problemas de convergencia.

Así, en el curso 1999-2000 y durante algunas de las sesiones correspondientes al curso de doctorado *"Metodología de investigación en Educación Matemática y software educativo"* se les instruyó en aspectos de convergencia relacionados con este trabajo[3]. Al finalizar el curso, solicitamos a los alumnos matriculados que resolvieran diversos ejercicios. Su elección fue pensada con el propósito de comprobar cómo, una vez recibida la instrucción, se enfrentaban y qué herramientas utilizaban para su resolución. Los dos ejercicios seleccionados, uno de nivel básico y el segundo con un cierto grado de dificultad, los exponemos seguidamente.

4.5.1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Comprobar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^2}{n+3} = -\infty$ haciendo uso de la siguiente definición:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow [\forall M > 0 \text{ (real)},\ \exists \nu \in \mathbf{N}, \text{ tal que } \forall n, n \geq \nu, \text{ se cumple } x_n < -M]$$

Hallar ν tomando $M = 1000$. Resolverlo con lápiz y papel, numérica y gráficamente.

Ejercicio 2: Utilizar Maple para "justificar" aplicando el Teorema de Caracterización que la sucesión funcional:

$$f_n(x) = \frac{\frac{n(x-6)^2}{2} + sen(n(x-6))^3}{n} + 4$$

converge uniformemente en todo $\mathbf{R}$ a la función $f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 22$.

[3] Esta experiencia fue pactada y preparada conjuntamente con el director de esta memoria de doctorado.

Ejercicios resueltos por un alumno de doctorado

INTRODUCCIÓN

Por la definición que aparece en el Enunciado del *EJERCICIO*, llegamos a que - ∞ es el límite de la sucesión, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, si para todo número real $M > 0$, por grande que sea, hay términos $a_n < - M$. En otras palabras, si en la sucesión hay términos negativos arbitrariamente grandes en módulo.

Comencemos intentándolo con lápiz y papel, a la manera tradicional:

Si $M = 1000$. Tenemos que encontrar un número natural ν tal que para todo natural n, $\nu \le n$ se verifique que $x_n < -1000$.

Así que, en definitiva, se trata de resolver la inecuación: $x_n < -1000$. (En principio, tomaremos n real).

$$\frac{-n^2}{n+3} < -1000 \quad (\text{ n \# -3, si consideramos } n \text{ real}).$$

Establecemos la igualdad: $\dfrac{-n^2}{n+3} = -1000$

$$-n^2 = -1000(n+3)$$
$$-n^2 = -1000\,n - 3000$$
$$-n^2 + 1000\,n + 3000 = 0$$

Veamos las soluciones de la ecuación de segundo grado: $-n^2 + 1000\,n + 3000 = 0$

$$-n^2 + 1000\,n + 3000 = 0$$
$$n = \frac{-1000}{-2} \pm \frac{\sqrt{1000^2 + 12000}}{-2}$$
$$n = \frac{-1000}{-2} \pm \frac{1005.982107}{-2}$$

Esto es: $n_1 = -2.9910535$ y $n_2 = 1002.991054$

Estudiemos los intervalos:

$] -\infty, -3 [$, $n = -4$, $-\dfrac{(-4)^2}{-4+3} = 16 > -1000$ *No*

$]-3, -2.9910535 [$, $n = -2.9999$, $-\dfrac{(-2.9999)^2}{-2.9999+3} = -89994.0001 < -1000$ *Sí*

$] -2.9910535, 1002.991054 [$, $n = 2$, $-\dfrac{2^2}{2+3} = -\dfrac{4}{5} > -1000$ *No*

$] 1002.991054, +\infty [$, $n = 1004$, $-\dfrac{(-1004)^2}{1004+3} = -1001.008937 < -1000$ *Sí*

$n = -2.9910535$, *No*
$n = 1002.991054$, *No*
$n = -3$, *No*

Así que la solución de la inecuación (considerando n real) es:

$$] -3, -2.9910535 [\; \mathrm{U} \;] 1002.991054, +\infty [$$

Pero como n es un número natural sólo son válidos los naturales del intervalo:

$$] 1002.991054, +\infty [.$$

Luego, $\nu = [1002.991054] + 1$, donde $[1002.991054]$ es la parte entera por defecto de 1002.991054.

En definitiva, para todo número natural n, $1003 \le n$ se cumple que $x_n < -1000$. Por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-n^2}{n+3} = -\infty$$

Comprobémoslo usando Maple, primero numéricamente y después de forma visual:

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO EN FORMA NUMÉRICA

Reiniciamos el Sistema y cargamos el paquete `plots`.

```
> restart:
> with(plots):
```

Definimos la sucesión $x_n = \frac{-n^2}{n+3}$ como función, y la llamamos f:

```
> f:=n->(-n^2)/(n+3);
```

$$f := n \to -\frac{n^2}{n+3}$$

Tomando $M = 1000$, debemos encontrar un número natural ν tal que, para todo n (natural), $\nu \le n$ se verifique que:

$$\frac{-n^2}{n+3} < -1000$$

Hacemos que Maple resuelva la inecuación anterior:

```
> solve(f(n)<-1000,n);
```

$$\text{RealRange}(\text{Open}(-3), \text{Open}(500 - 10\sqrt{2530})), \text{RealRange}(\text{Open}(500 + 10\sqrt{2530}), \infty)$$

Mejoramos el resultado que aparece en pantalla poniendo llaves ({ }) en la expresión de la inecuación.

```
> solve({f(n)<-1000});
```

$$\{-3 < n, n < 500 - 10\sqrt{2530}\}, \{500 + 10\sqrt{2530} < n\}$$

Evaluamos los intervalos anteriores, a fin de que sus extremos aparezcan expresados en coma flotante.

```
> evalf(%);
```

$$\{-3. < n, n < -2.9910536\}, \{1002.991054 < n\}$$

Luego, la solución real de la inecuación son los intervalos:

$$]-1, -2.9910536\,[\ \text{U}\ ]\,1002.991054,\ +\infty\,[$$

Pero como n es un número natural, sólo se podrá mover en el intervalo $]\,1002.991054,\ +\infty\,[$.

Consecuentemente, para determinar ν consideramos la parte entera de 1002.991054 y le sumamos 1 (asegurando de este modo que ν sea natural). Es decir, aplicando el comando `floor` nos queda:

```
> nu:=floor(1002.991054)+1;
```

$$\nu := 1003$$

Veamos como, en efecto, cuando n toma valores mayores o iguales que 1003, se tiene que $x_n <$ -1000.

En primer lugar, vamos a comprobarlo numéricamente:

Empleamos la siguiente *sentencia de iteración* para evaluar los términos del 990 al 1004, verificando así que $x_n <$ -1000, para todo número natural n, $1003 \le n$.

```
> for k from 990 to 1004 do
  Para_,'k'=k,_obtenemos,_,x[k]=evalf(f(k)) od;
```

$$Para\_,\ k = 990,\ \_obtenemos,\ \_,\ x_{990} = -987.0090634$$
$$Para\_,\ k = 991,\ \_obtenemos,\ \_,\ x_{991} = -988.0090543$$
$$Para\_,\ k = 992,\ \_obtenemos,\ \_,\ x_{992} = -989.0090452$$
$$Para\_,\ k = 993,\ \_obtenemos,\ \_,\ x_{993} = -990.0090361$$
$$Para\_,\ k = 994,\ \_obtenemos,\ \_,\ x_{994} = -991.0090271$$

$Para\_, k = 995, \_obtenemos, \_, x_{995} = -992.0090180$
$Para\_, k = 996, \_obtenemos, \_, x_{996} = -993.0090090$
$Para\_, k = 997, \_obtenemos, \_, x_{997} = -994.0090000$
$Para\_, k = 998, \_obtenemos, \_, x_{998} = -995.0089910$
$Para\_, k = 999, \_obtenemos, \_, x_{999} = -996.0089820$
$Para\_, k = 1000, \_obtenemos, \_, x_{1000} = -997.0089731$
$Para\_, k = 1001, \_obtenemos, \_, x_{1001} = -998.0089641$
$Para\_, k = 1002, \_obtenemos, \_, x_{1002} = -999.0089552$
$Para\_, k = 1003, \_obtenemos, \_, x_{1003} = -1000.008946$
$Para\_, k = 1004, \_obtenemos, \_, x_{1004} = -1001.008937$

Ciertamente, a partir del término 1003 (éste inclusive), la sucesión se hace menor que 1000.

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO EN FORMA GRÁFICA

Para probar gráficamente que para todo n (natural), $1001 \leq n$ se verifica que $x_n < 1000$, vamos a representar la sucesión entre los términos 990 y 1010. Así como el trozo de recta de expresión analítica $y = -1000$ que se halla entre ambos valores, y el segmento vertical de extremos en los puntos (1003, 990), (1003, -1000) que viene determinado por ν.

Comenzamos trazando la gráfica de la sucesión, y como ésta se ha definido en forma de función, aplicamos la instrucción `seq` y la opción `style = point`, con el propósito de que Maple la interprete como sucesión, es decir, discretamente (Además aparecerá en color verde).

```
> ### WARNING: the definition of the type `symbol` has changed';
  see help page for details
  a:=plot([seq([n,f(n)],n=990..1010)],x=990..1010,y=-1007..-989,la
  bels=[n,y],style=point,symbol=circle,thickness=2,color=green):
```

Representamos los segmentos con extremos en los puntos (990, -1000), (1003, -1000) (horizontal) y (1003, -990), (1003, -1000) (vertical), los cuales aparecerán con trazo discontinuo y en color `magenta` (fucsia).

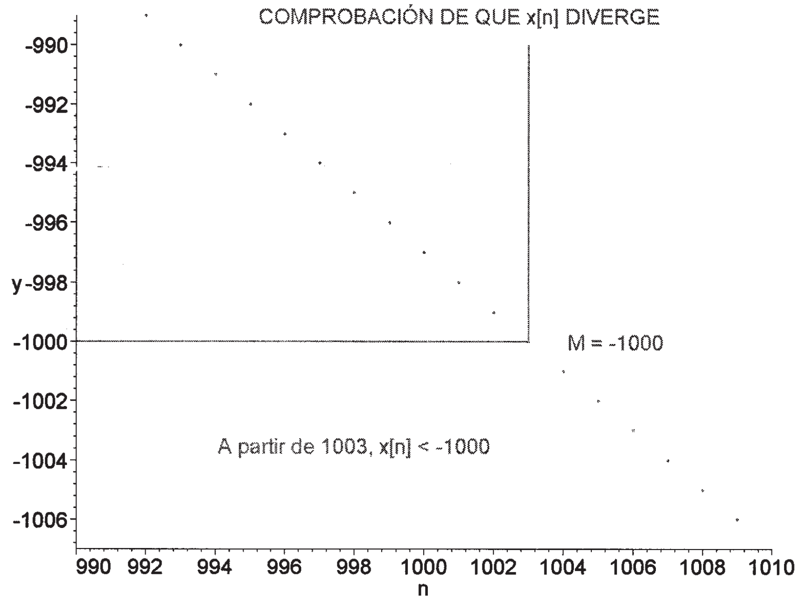
```
> b:=plot({[[990,-1000],[1003,-1000]],[[1003,-990],[1003,-1000]]},
  linestyle=2,color=magenta):
```

Insertamos comentarios relacionados con la representación gráfica, mediante la función `textplot`:

```
> c:=textplot({[998,-1003.5,`A partir de 1003, x[n] < -1000`],
  [1005.5,-1000, `M = -1000`], [1001,-989,`COMPROBACIÓN DE QUE
  x[n] DIVERGE`]},color=cyan):
```

Graficamos todo conjuntamente:

```
> display({a,b,c});
```



: Hemos de advertir que debido a los rangos que se han tomado, Maple hace la representación gráfica colocando el origen del sistema de coordenadas en el punto (990, -1010), de ahí que parezca que la gráfica se encuentra en el primer cuadrante, en vez de en el cuarto, que es donde realmente está.

Se ve perfectamente que del término 1003 en adelante (éste inclusive), la sucesión se sitúa por debajo de la recta $y = -1000$. Así que, por la definición dada al comienzo del *EJERCICIO*, concluimos que $\{x_n\}$, diverge a - ∞ , donde $x_n = \frac{-n^2}{n+3}$.

Ejercicio 2

En primer lugar recordemos el enunciado del TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE LA CONVERGENCIA UNIFORME:

TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones reales.

Tenemos que $f_n(x)$ *CONVERGE UNIFORMEMENTE* en el intervalo **I** de **R** hacia la función f(x), si y sólo si:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \text{ siendo } a_n = sup_{x\ en\ I}(|f_n(x) - \mathrm{f}(x)|)$$

Consideremos la sucesión funcional $f_n(x) = \frac{\frac{n(x-6)^2}{2} + \sin(n(x-6))^3}{n} + 4.$

En la *SESIÓN 5* ya nos habíamos ocupado de estudiar su convergencia uniforme a partir de la propia defnición. Ahora de lo que se trata es de interpretar gráficamente dicha convergencia de acuerdo al *TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN*.

Comencemos, sin más dilación, reiniciando el Sistema y cargando el paquete `plots`:

```
> restart:
> with(plots):
```

Definimos la sucesión funcional $f_n(x)$ como una función de dos variables, quedando del modo:

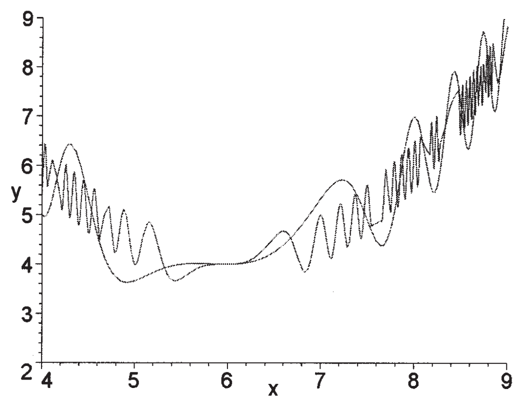
```
> f:=(n,x)->((1/2)*n*(x-6)^2+sin((n*(x-6))^3))/n+4;
```

$$f := (n, x) \to \frac{\frac{1}{2} n (x-6)^2 + \sin(n^3 (x-6)^3)}{n} + 4$$

Representamos los dos primeros términos de la sucesión, y seguidamente comprobamos como van adquiriendo forma de parábola. Asimismo, tomamos los rangos [4, 9] y [2, 9] para los respectivos ejes de abscisas y ordenadas.

Optando, a su vez, por el color de trazado verde, y un grosor 2.

```
> plot({seq(f(n,x),n=1..2)},x=4..9,y=2..9,color=green,thickness=2)
;
```



Podemos apreciar que las funciones van presentando un aspecto similar al de una parábola. Lo cual constataremos mediante el cálculo de su límite.

```
> Limit(f(n,x),n=infinity)=limit(f(n,x),n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2} n (x-6)^2 + \sin(n^3 (x-6)^3)}{n} + 4 = \frac{1}{2} x^2 - 6x + 22$$

Luego la sucesión funcional $f_n(x) = \dfrac{\frac{n (x-6)^2}{2} + \sin(n (x-6))^3}{n} + 4$ tiende a la función cuadrática g(x) = $\dfrac{x^2}{2} - 6x + 22$.

Comprobemos mediante el *TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN* que $f_n(x)$ converge uniformemente a dicha función en todo **R**.

En primer lugar probamos numéricamente que:

$$sup_{x\ en\ R}\left(\left|\frac{\frac{n (x-6)^2}{2} + \sin(n (x-6))^3}{n} + 4 - \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 22\right)\right|\right)$$ tiende a 0, cuando $n \to \infty$

Consideremos los puntos $x = 4, 5, 6, 7; 8$ y evaluemos las diferencias anteriores, para los términos:

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ de la sucesión funcional. Esto es:

$$|f_1(x) - g(x)|, \text{ con } x = 4, 5, 6, 7, 8$$
$$|f_2(x) - g(x)|, \text{ con } x = 4, 5, 6, 7, 8$$
$$|f_3(x) - g(x)|, \text{ con } x = 4, 5, 6, 7, 8$$
$$|f_4(x) - g(x)|, \text{ con } x = 4, 5, 6, 7, 8$$
$$|f_5(x) - g(x)|, \text{ con } x = 4, 5, 6, 7, 8$$

Veamos como el supremo de esas cantidades va tendiendo a cero a medida que *n* aumenta.

Definimos su función límite llamándola `g`:

```
> g:=x->x^2/2-6*x+22;
```

$$g := x \to \frac{1}{2}x^2 - 6\,x + 22$$

Aplicamos la siguiente *secuencia de iteración* (tomamos paso 1 (`by` 1), aunque esto último se podría omitir):

```
> for x from 4 to 8 by 1 do evalf(abs(f(1,x)-g(x))) od;
```

.9893582466
.8414709848
0
.8414709848
.9893582466

Análogamente para $f_2(x)$:

```
> for x from 4 to 8 by 1 do evalf(abs(f(2,x)-g(x))) od;
```

.4600130191
.4946791233
0
.4946791233
.4600130191

Del mismo modo:

```
> for x from 4 to 8 by 1 do evalf(abs(f(3,x)-g(x))) od;
```

.2320194961
.3187919761
0
.3187919761
.2320194961

En el caso de $f_4(x)$ nos queda:

```
> for x from 4 to 8 by 1 do evalf(abs(f(4,x)-g(x))) od;
```

.01987962350
.2300065096
0
.2300065096
.01987962350

Y por último para $f_5(x)$ tenemos:

```
> for x from 4 to 8 by 1 do evalf(abs(f(5,x)-g(x))) od;
```

$$.1653759081$$
$$.1232080918$$
$$0$$
$$.1232080918$$
$$.1653759081$$

En resumen, los máximos son:

```
> for k from 1 to 5 do
El_máximo_de_,abs((f[k]-g)),_para_x=4,5,6,7,8,_es_,max(evalf(abs
(f(k,4)-g(4))),evalf(abs(f(k,5)-g(5))),evalf(abs(f(k,6)-g(6))),e
valf(abs(f(k,7)-g(7))),evalf(abs(f(k,8)-g(8)))) od;
```

$$El\_máximo\_de\_, |f_1 - g|, \_para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_es\_, .9893582466$$
$$El\_máximo\_de\_, |f_2 - g|, \_para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_es\_, .4946791233$$
$$El\_máximo\_de\_, |f_3 - g|, \_para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_es\_, .3187919761$$
$$El\_máximo\_de\_, |f_4 - g|, \_para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_es\_, .2300065096$$
$$El\_máximo\_de\_, |f_5 - g|, \_para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_es\_, .1653759081$$

Observamos que el máximo (supremo si no lo llega a alcanzar) se va aproximando a cero a medida que n aumenta.

Hallemos, por tanto, la sucesión numérica que acota a las diferencias $|f_n(x) - g(x)|$.

$$|f_n(x) - g(x)| = \left| \frac{\frac{n\,(x-6)^2}{2} + \sin(n\,(x-6))^3}{n} + 4 - \left(\frac{x^2}{2} - 6\,x + 22\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{n\,(x-6)^2}{2\,n} + \frac{\sin(n\,(x-6))^3}{n} + 4 - \frac{x^2}{2} + 6\,x - 22 \right| =$$

$$\left| \frac{x^2}{2} - 6\,x + 18 + \frac{\sin(n\,(x-6))^3}{n} + 4 - \frac{x^2}{2} + 6\,x - 22 \right| = \left| \frac{\sin(n\,(x-6))^3}{n} \right|$$

Pero sabemos además que $|\sin(n\,(x-6))^3| \le 1$, para todo x de **R**, para todo n de **N**.

Por consiguiente: $\left| \frac{\sin(n\,(x-6))^3}{n} \right| = \frac{|\sin(n\,(x-6))^3|}{n} \le \frac{1}{n}$

Así que:

$$sup_{x\ en\ R}(|f_n(x) - g(x)|) = \frac{1}{n}$$

En efecto, volviendo a la comprobación numérica anterior:

```
> for k from 1 to 5 do
Para_x=4,5,6,7,8,_máximo_,abs((f[k]-g))=max(evalf(abs(f(k,4)-g(4
))),evalf(abs(f(k,5)-g(5))),evalf(abs(f(k,6)-g(6))),evalf(abs(f(
k,7)-g(7))),evalf(abs(f(k,8)-g(8)))),_es_menor_que_,a[k]=evalf(1
/k) od;
```

$$Para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_máximo\_, |f_1 - g| = .9893582466, \_es\_menor\_que\_, a_1 = 1.$$
$$Para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_máximo\_, |f_2 - g| = .4946791233, \_es\_menor\_que\_, a_2 = .5000000000$$
$$Para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_máximo\_, |f_3 - g| = .3187919761, \_es\_menor\_que\_, a_3 = .3333333333$$
$$Para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_máximo\_, |f_4 - g| = .2300065096, \_es\_menor\_que\_, a_4 = .2500000000$$
$$Para\_x = 4, 5, 6, 7, 8, \_máximo\_, |f_5 - g| = .1653759081, \_es\_menor\_que\_, a_5 = .2000000000$$

En realidad es un máximo pues se alcanza en los valores de x donde $|\sin(n\,(x-6))^3| = 1$. Esto es:

$$(n\,(x-6))^3 = \frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ \ k \text{ de } \mathbf{Z}$$

$$n\,(x-6) = \left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$x = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{n} + 6,\ \ k \text{ de } \mathbf{Z},\ n \text{ de } \mathbf{N}.$$

Luego, hay infinitos valores de x donde las diferencias $|f_n(x) - g(x)|$ coinciden con la sucesión numérica $a_n = \dfrac{1}{n}$ que las acota.

Y como además, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, se sigue por el *TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN* que, $f_n(x)$ converge uniformemente a $g(x)$ en todo $\mathbf{R}$.

Demostrémoslo gráficamente por medio de Maple:

Iniciamos de nuevo Maple y cargamos el paquete `plots`:

```
> restart:
> with(plots):
```

Almacenamos en memoria la sucesión $f_n(x)$ y la función límite $g(x)$:

```
> f:=(n,x)->((1/2)*n*(x-6)^2+sin((n*(x-6))^3))/n+4:
> g:=x->x^2/2-6*x+22:
```

Definimos las diferencias $|f_n(x) - g(x)|$ como una función de dos variables a la que denominamos `h`.

```
> h:=(n,x)->abs(f(n,x)-g(x));
```

$$h := (n, x) \to |\mathrm{f}(n, x) - \mathrm{g}(x)|$$

Guardemos en la variable `d` la representación gráfica los términos del segundo al sexto de la sucesión funcional anterior:

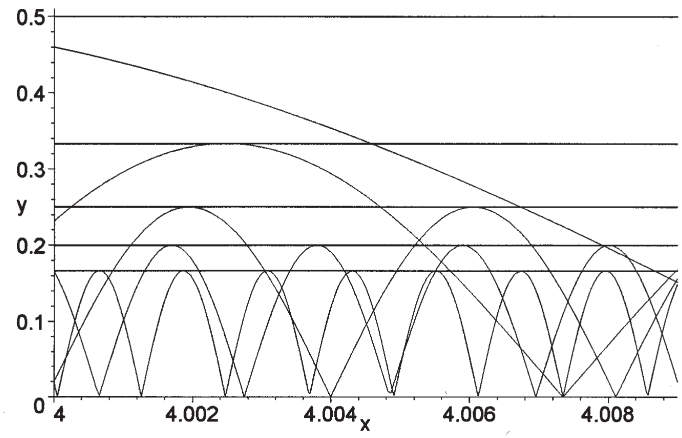
```
> d:=plot({seq(h(n,x),n=2..6)},x=4..4.009,y=0..0.51,color=black):
```

A continuación trazamos (con grosor 2) las rectas que representan cada valor constante (pues no depende de x) de la sucesión numérica. (Graficaremos sus términos del segundo al sexto, entre los rangos [4 ,4.009] y [0, 0.51] de los ejes horizontal y vertical, respectivamente. Esta gráfica la almacenamos como variable `t`:

```
> s:=plot({seq(1/n,n=2..6)},x=4..4.009,y=0..0.51,color=black,thick
  ness=2):
```

Hacemos la representación conjunta:

```
> display({d,s});
```




```
>
```

Podemos observar como cada término de la sucesión numérica acota a su correspondiente término de la sucesión funcional (se mantienen por debajo de ella, coincidiendo en infinitos puntos). Además, la sucesión numérica, esto es, las rectas van aproximándose a cero, a medida quer n crece.

Luego, efectivamente, por el *Teorema de Caracterización* la sucesión funcional:

$$f_n(x) = \frac{\frac{n(x-6)^2}{2} + \sin(n(x-6))^3}{n} + 4$$

Converge uniformemente a $g(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 22$ en **R**.

4.5.2. Análisis de los resultados

Somos conscientes de que no sería justo realizar un análisis comparativo de estos resultados con aquellos que se obtuvieron a partir de las encuestas previas a esta investigación, presentadas en el Capítulo 3. En el caso que nos ocupa, los alumnos recibieron nuestra instrucción y en un corto periodo de tiempo solicitamos la resolución de los ejercicios. Por esta razón, nuestro objetivo es comprobar cómo estos alumnos de doctorado, con pocas instrucciones, resuelven de una forma rica y variada en recursos.

Sería redundante detallar lo que, directamente, puede observarse a partir de la resolución presentada. El software les ha permitido soltura y versatilidad a la hora de manipular y resolver lo planteado.

Es pertinente destacar la conclusión del teorema de caracterización mediante una gráfica, en la que se conjugan la sucesión funcional constante y la sucesión funcional $|f_n(x) - g(x)|$, la cual queda acotada por aquella.

¡Ah! Desde entonces he aprendido que es una ingrata locura querer interponer prematuramente lo futuro en el presente, si para tal lucha contra los arraigados intereses de hoy, sólo se posee un delgadísimo rocín, una mohosa armadura y un achacoso cuerpo.

Heinrith Heine, 1837.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas de futuro

5.1. Conclusiones

La gran mayoría de los profesores estamos de acuerdo en que los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones funcionales son de gran importancia para un matemático, para un físico, para un ingeniero... Por otra parte se admite que iniciar a los alumnos que llegan del bachillerato en la definición (ε, ν) de límite de una sucesión numérica resulta una tarea de cierto grado de dificultad, tanto a la hora de transmitirla como para los alumnos asimilarla (Afonso Gutiérrez y Dorta Díaz, [2]). Ciertamente los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones funcionales conllevan un doble grado de complejidad impuesto por el hecho de combinar simultánemante dos variables (la n, que varía en $\mathbf{N}$, y la x que varía en $\mathbf{R}$), hecho al que los alumnos que ingresan en la Universidad no están acostumbrados.

Por otra parte, el análisis de las contestaciones de los estudiantes a la encuesta presentada en la sección 4.3, nos permitió comprobar que la asimilación y estudio de dichas cuestiones, no les había resultado fácil. Además el uso exclusivo del método clásico no lograba despertar el interés que les impulsara a aventurarse en la investigación de cuestiones más profundas relacionadas con el tema. Por otro lado, sabiendo que la muestra elegida para la encuesta estaba constituida por aquellos que habían obtenido las mejores calificaciones, observamos que estos, después de cuatro meses, presentaban ciertas lagunas conceptuales; ello manifiesta que los métodos puramente tradicionales no son suficientemente eficaces, incluso a corto plazo.

Las argumentaciones anteriores nos han llevado a hacer una serie de reflexiones:

- ¿Preparamos los profesores a nuestros alumnos con ejercicios adecuados y variados, antes de introducir estos conceptos?

- ¿Exponemos los profesores universitarios estos temas con suficiente claridad? ¿Le dedicamos el tiempo suficiente o los explicamos “de pasada” justo antes de finalizar el curso?

- ¿Se ha avanzado significamente en los últimos años respecto a la docencia de las sucesiones y series funcionales y en la forma de abordar el concepto de la convergencia uniforme?

- ¿Continuamos usando para su exposición los mismos métodos de hace veinte años? ¿Usamos herramienta complementaria para su transmisión?

En nuestro afán por recabar información y conocer la forma de pensar de otros enseñantes, hemos aprovechado algunas conversaciones “de pasillo”; concretamente, en una ocasión preguntamos a un profesor universitario de Matemática Aplicada y reconocida experiencia docente e investigadora, lo siguiente:

¿Cómo crees que se debe explicar la convergencia uniforme de funciones para que el alumno llegue a entenderla?

a lo cual, él contestó:

El alumno debe estudiar, reflexionar, “comerse el coco” y dedicarle todo el tiempo que sea preciso hasta que logre entenderlo.

Debemos respetar estas y otras opiniones parecidas, pero como profesores e investigadores de la enseñanza no creemos adecuado acomodarnos en posturas que hagan recaer todo el esfuerzo sobre el alumno (más aún cuando se trata de conceptos difíciles) y que mantengan el estado actual de la cuestión inalterable.

Realmente el grado de asimilación de un concepto concreto depende del tiempo que el alumno dedique a su estudio; además ese tiempo y esfuerzo que esté dispuesto a invetir estará en función de un factor importante en el desarrollo del aprendizaje: la motivación. Pero, ¿qué parte asume el profesor como suya para agilizar o facilitar este proceso?

En otra ocasión, un profesor, en tono coloquial, utilizó expresiones y frases como las que siguen: *“...de este dulce no pueden comer todos...”*, *“...lo importante es formar sólo a los buenos...”*.

En este sentido, nuestra declaración de intenciones, claramente opuesta a la filosofía de las últimas frases, es la siguiente:

“Esforzarnos para conseguir que el conocimiento y la asimilación de conceptos difíciles llegue al mayor número posible de estudiantes de Ciencias”

Ello sólo se hace posible mediante un esfuerzo, por parte de la comunidad educativa universitaria, encaminado a la búsqueda de nuevos métodos y técnicas que faciliten la enseñanza de estos conceptos; desde este punto de vista, aquella motivación necesaria resultará favorecida por el uso de técnicas atractivas de aprendizaje donde el alumno se vea involucrado y tenga oportunidad para visualizar y manipular. En este sentido, Tall [100] establece las ventajas del uso del ordenador, el cual permite:

1) Procesar cantidad de información y producir movimiento gráfico para ayudar a visualizar conceptos complejos.

2) Exteriorizar los conocimientos en la pantalla, en lugar de tenerlos almacenados en la mente.

3) Establecer un ambiente democrático, en el sentido de que una entrada de información dada dará siempre la misma salida, sin importar quién teclea. Así, responde de la misma manera al profesor que al alumno, pudiendo animar al estudiante a emular y sobrepasar al profesor en su uso.

4) Ser programado para responder de una manera fiable y ordenada. Esto puede proporcionar un entorno para construir y comprobar los conceptos matemáticos conjeturando el resultado de cierta entrada de información y después pulsando la entrada de información para comprobar si la conjetura es correcta.

Retomamos una alusión al papel del profesor, cuya labor docente resulta modificada debido a la introducción de la tecnología como instrumento fundamental de trabajo. Consideramos que, en este caso, el profesor desempeña un papel exclusivo en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, pues es él quien inicia, guía, aconseja al alumno y finalmente, hace el papel de moderador. Éste sentirá interés por el tema tratado cuando el docente le presente la materia de una manera adecuada y atractiva, que le anime al estudio y a la investigación del concepto y en la que además él pueda intervenir de forma activa, manipulando y creando sus propios ejemplos.

Desde este punto de vista, consideramos importante, cuando se trabaja con software, que el propio alumno construya el proceso, con lo que al mismo tiempo irá construyendo su conocimiento, y aunque en las primeras etapas será necesaria la ayuda del profesor (para programar los ejercicios planteados son suficientes unas pocas instrucciones), la fase manipulativa pemitirá que se vaya adaptando al entorno de trabajo y con ello el proceso de enseñanza-aprendizaje llegará a culminar.

El alumno se convertirá así en "una especie de autodidacta" que mediante el uso del ordenador y la técnica de ensayo-error logre construir su propio conocimiento. Ello es lo que se denomina "aprendizaje por descubrimiento" o *"pedagogía de la creatividad"*, siendo esta última denominación la que consideramos más acertada por su connotación referida a la capacidad de imaginación y construcción. Creemos que en un método de este tipo, cuyo eje principal sea la motivación del alumno, reside el éxito de la labor del profesor.

Es evidente pues, que existen ciertas relaciones entre el estudiante, el profesor, el ordenador y las ideas matemáticas. La enseñanza tradicional, en cada uno de sus apartados, repite un mismo ciclo: el profesor explica nuevas ideas, el estudiante resuelve ejercicios rutinarios y a continuación extiende esos problemas a otros más profundos. Esto puede conducir, en muchas ocasiones, a una visión estrecha y bastante lineal de una planificación de los estudios, en la cual el éxito se mide por la capacidad de resolver problemas específicos relacionados con el contexto en el cual fueron aprendidos. Ante ello, nos preguntamos:

Actuando de la forma señalada, ¿el estudiante está suficientemente motivado? ¿es creativo, imaginativo? ¿es protagonista de su aprendizaje? ¿ utiliza y coordina diversos aspectos de las ideas estudiadas? ¿se plantea cuestiones variadas relacionadas con los mismos? ...

Puede que muchos enseñantes respondan a las cuestiones anteriores afirmativamente. Sin embargo, nosotros nos permitimos poner en duda esa visión.

El ordenador con la tecnología que hoy nos ofrece puede ser una excelente ayuda para ensanchar el horizonte conceptual. Skemp [94] propone tres modelos diferentes para construir y comprobar los conceptos matemáticos.

Un modelo de comunicación y discusión, establecido entre profesor y estudiante, que se correspondería en nuestro esquema conceptual con la fase verbal y simbólica; un modelo de experiencia y experimentos entre el estudiante y el ordenador que se correspondería con la fase visual y manipulativa; finalmente, un tercer modelo de formación y consolidación de ideas de mayor grado de dificultad por extrapolación, imaginación, intuición y creatividad.

El software permite complementar estos modelos de la mente humana; en terminología de Skemp: *"es un entorno para construir y dar validez a las ideas matemáticas"*. Una forma de construir estos modelos consiste en considerar un número de ejemplos y contraejemplos en un proceso en movimiento para observar regularidades y abstraer generalidades, al tiempo que complementariamente se dan validez a esas ideas. Es lo que Tall ha denominado *organizador genérico.*

Por otra parte, pensamos que no sólo es importante el uso del ordenador, sino la interacción simultánea del ordenador, el profesor y las ideas matemáticas, siendo el alumno el núcleo de esta interacción. Así pues, en un hipotético esquema triangular regular, en su baricentro estaría el estudiante y en cada uno de sus vértices A, B y C el profesor, el ordenador y las ideas matemáticas respectivamente.

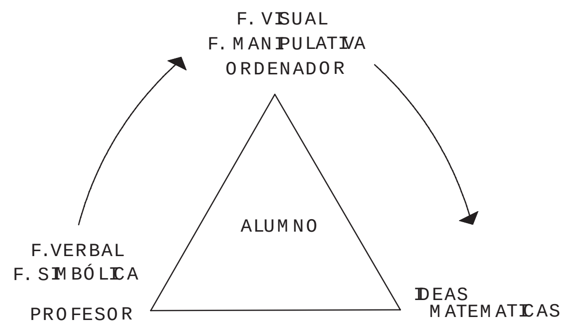


Figura 5.1: Triángulo de Skemp [94] complementado con el esquema conceptual Afonso Gutiérrez y Dorta Díaz [2]

El profesor, mediante la comunicación verbal, transmite ideas y provoca discusión. Seguidamente, el estudiante interactuaría con el ordenador mediante una serie de ejercicios o experimentos que le permiten adquirir cierta destreza y experiencia. En el tercer vértice residen los conceptos, las ideas, etc. a las que el alumno accede mediante la reflexión y la interiorización de los procesos estudiados y experimentados. A partir de este último vértice, se consolidan y adquieren consistencia interna las ideas matemáticas. Es importante destacar que el uso de un posible software y la pantalla del ordenador es un complemento a lo que el profesor comunica en una enseñanza tradicional. En este triple juego, donde el alumno es el centro y la coordinación de los tres vértices anteriores fundamental, pensamos que estaría el camino del éxito.

Con nuestra propuesta curricular tratamos de conjugar los tres elementos del triángulo de Skemp con nuestro esquema conceptual y así facilitar la formación del estudiante, centro del mismo. Como ya comentamos en el Capítulo 2, las aportaciones novedosas de dicha propuesta son las siguientes:

- Presentación y exposición de conceptos a partir del *esquema conceptual* en cuatro fases.

- Utilización de *Maple* como software educativo que permite la visualización y manipulación de los conceptos, mediante la realización de pequeños programas de fácil manejo y a partir de ejemplos y contraejemplos (*organizador genérico).*

- Uso de distintos *registros de representación*, estableciendo conexiones entre ellos y facilitando el paso de unos a otros.

- Presentación global de los distintos registros de representación de un concepto por medio de *esquematizaciones o simplificaciones visuales.*

- Visualización de los conceptos fundamentales de convergencia por medio de *procesos* *dinámicos* a los cuales se accede mediante el uso del software.

- Tratamiento específico del concepto de convergencia puntual y uniforme a partir de las *sucesiones numéricas asociadas a un punto* del dominio de definición.

- *Interpretación geométrica* de los teoremas relacionados con procesos de convergencia de sucesiones numéricas y sucesiones y series funcionales.

A partir de estas aportaciones y de los comentarios y reflexiones anteriores, valoremos en qué medida nuestra propuesta da lugar a cambios significativos para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, al tiempo que permite superar ciertos obstáculos relacionados con el mismo. Desde este punto de vista, volvemos a preguntarnos:

- Con nuestra propuesta, ¿hemos salvado los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de límite a los que hacíamos referencia en el Capítulo 1?

- ¿Los alumnos han usado muchas facetas de una misma idea?

- ¿Han visualizado en la pantalla y por tanto, obtenido imágenes mentales de los mismos?

- ¿Han sido creativos en su forma de expresarse relacionada con las ideas?

- ¿Han utilizado un lenguaje fluido cuando se expresan en el dominio en el que se ha trabajado?

En definitiva, ¿se ha adaptado el alumno al nuevo entorno que ofrece este triple juego del triángulo de Skemp?

- El obstáculo simbólico tratamos de superarlo al establecer un "paralelismo" entre los elementos de la definición formal y las representaciones gráficas obtenidas. Cualquier cambio en uno de los parámetros de la definición formal se corresponde con un cambio en la gráfica. Pensemos que los alumnos con los que hemos realizado esta investigación superaron este obstáculo una vez que trabajaron los ejemplos propuestos y observaron el dinamismo implícito que reflejamos en alguno de ellos (banda animada y otros). Así, relacionaron los cuantificadores universales y existenciales con el ancho de la banda y el índice de penetración, respectivamente; además, asociaron distancia con valor absoluto. En definitiva, pensemos que han construido un significado ante el obstáculo.

- Los estudiantes parecen salvar los obstáculos geométricos derivados de la utilización de expresiones como "*tender, aproximarnos hacia, estar muy cerca de, etc.*" mediante la introducción de la idea de "*aproximación cercana*" y el cálculo y tabulación de distancias en la fase manipulativa.

- El obstáculo relacionado con el principio de continuidad creemos que se ha superado a partir de los ejemplos 16 y 25, donde se comprueba que el límite no siempre reproduce las propiedades de los términos de la sucesión.

- Pensamos que el obstáculo que Sierpinska denomina "horror infinitorum" es una cuestión profunda, filosófica o epistemológica y representa un obstáculo no medible que prácticamente todos los enseñantes y estudiantes poseemos. En particular, la alumna María lo pone de manifiesto con la frase que encabeza el Capítulo 4.

Por otra parte, nuestra propuesta da respuesta a otro tipo de inconvenientes que normalmente se presentan en cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje y que limitan, en gran parte, el éxito de la labor educativa. Las experiencias llevadas a cabo y descritas en esta memoria nos han revelado que:

- Los alumnos se muestran pronto interesados, motivados para el estudio y la reflexión de cuestiones profundas relacionadas con los temas tratados. Sus propias palabras expresan satisfacción y entusiasmo en cuanto logran adaptarse al entorno de trabajo y son capaces de controlar su propio aprendizaje. En este sentido, queremos destacar las manifestaciones de los estudiantes una vez instruidos, especialmente las que hacen los alumnos de doctorado en una encuesta posterior a dicha instrucción (véase con detalle las respuestas a la encuesta final del anexo II).

- El uso de técnicas de visualización apropiadas (incluyendo dinamismo cuando la situación lo requiera) y de simplificaciones o esquematizaciones visuales, en las que sintetizamos todas las manifestaciones de un concepto, permite estructurar la información recibida y manipulada, al tiempo que se refuerzan los procesos de almacenamiento a corto y largo plazo.

- El periodo de tiempo necesario para la adquisición de los conceptos se acorta, obteniendo resultados satisfactorios y significativos al trabajar y exigir pruebas de madurez con el uso del software y de los medios de los que se ha dispuesto durante la instrucción. Piénsese que estos resultados son fruto de recibir, en muy pocas sesiones, la instrucción descrita.

- Ante las pruebas con software propuestas a los alumnos después de la instrucción, se observa que esta manera de actuar, donde ellos son los protagonistas del quehacer matemático, no sólo provoca reflexión, sino que además sus respuestas, expresadas con soltura y fluidez, proporcionan datos importantes y precisos que permiten afirmar que el alumno en cuestión se ha adaptado al entorno de este nuevo marco o modelo de transmitir los conceptos.

5.2. El futuro

Desde un punto de vista conceptual, el futuro del software como complemento a la enseñanza tradicional está por hacer. El diseño curricular tradicional está cambiando y lo va a seguir haciendo, sin lugar a dudas, en el transcurso de los próximos años. Es obvio decir que la tecnología se impone con apoyo y exigencia de instituciones, de la industria y de la sociedad en general.

En los cambios venideros será necesario desarrollar nuevos modelos de enseñanza más personalizados, donde el alumno sea el verdadero protagonista (cursos a distancia, internet, etc.) y donde la tecnología desempeñe un papel fundamental. En ese futuro inmediato, debe definirse la función del profesor, así como modificarse y establecerse los contenidos que se van a transmitir, la metodología que se va a seguir, los métodos de evaluación que se van a utilizar, los libros de texto que se van a proponer, etc.

Con esto queremos expresar que algunos aspectos del currículo y la metodología tradicional van a perder parte de la validez que hasta aquí le han dado las instituciones docentes. El enfoque va a estar centrado en la vertiente gráfica y numérica, para posteriormente obtener conclusiones y generalizar.

Pensemos los docentes que debemos involucrarnos en estos cambios, y que todo ello no puede llevarse a cabo de un día para otro. Se impone pues investigar en todos los ámbitos de la enseñanza y no sólo en el de la Matemática. En este orden, debemos intentar diseñar nuevos modelos en los que contenidos, métodos e instrumentos de evaluación se vean involucrados con la incorporación de la tecnología que el mercado ofrece.

En este sentido, nosotros vamos a continuar trabajando en la línea descrita, es decir, haciendo hincapié en aquellas cuestiones que conllevan mayor grado de dificultad. Así, sería interesante hacer un estudio más profundo sobre la velocidad de la convergencia tanto para sucesiones numéricas como funcionales, desarrollar una investigación de tipo conceptual en torno a series numéricas y funcionales y, por otra parte, estudiar cómo introducir conceptos analíticos para funciones de varias variables usando paquetes análogos al que hemos trabajado. También tenemos en proyecto la realización de una experiencia similar a las expuestas en el Capítulo 4, pero con alumnos de segundo curso de Bachillerato. En este caso se trataría, igualmente, de instruirlos en lo que respecta a los conceptos tratados en este trabajo para, posteriormente, analizar los resultados.

Pensamos que puede resultar útil y ventajosa la realización de un estudio acerca de distintas formas de evaluación, ya que el uso de software en la enseñanza implica no sólo la revisión de los contenidos y la metodología a seguir, sino también de los métodos para valorar el progreso de nuestros alumnos.

En definitiva, cualquier investigación que se realice a nivel universitario en el campo de la Educación Matemática, será recibida con interés por parte de esta institución.

Conclusión final

Deseamos concluir este trabajo, en el que conjugamos aspectos conceptuales del Análisis Matemático y aspectos educacionales y tecnológicos, con "*palabras*" de aquéllos a quienes, en definitiva, va dirigida la investigación: Los estudiantes. Así, reproducimos las reflexiones que una alumna realiza y que reflejan el sentimiento del resto de sus compañeros sobre esta forma de trabajar:

"Considero que la evaluación de un trabajo como éste sólo la puedo expresar basándome en mi propia experiencia. Como ya comenté en la primera cuestión es una labor que me ha gratificado a nivel general. De esta manera, se aprende a asimilar conceptos que son muy teóricos y abstractos de una forma mucho más natural y práctica; le permite al alumno manipular y trabajar desde su propia iniciativa dejando que sea él, por él mismo, el que logre ver de una manera mucho más clara lo que no llega a asimilar con sólo el material teórico; y por último, le permite al alumno manejar un programa nuevo que no sólo sirve para cuestiones de convergencia sino que le permitirá visualizar todo aquello que le produzcan lagunas en su entender. En los tiempos que corren todo se basa en el software, y cuando le dices a un alumno que va a trabajar con un ordenador parece que "se le enciende el chip" de querer conocer algo más sobre lo que le vas a decir. Así creo que el hecho de introducir el software como complemento en la enseñanza es de gran ayuda por permitir al alumno VISUALIZAR Y TRABAJAR POR SÍ MISMO todo el material teórico con el que cuenta. Considero que se podría realizar un trabajo mucho más rápido y eficaz si conociésemos con claridad el programa ya que ahorraríamos tiempo y podríamos investigar de una manera mucho más amplia, libre y eficaz".

Bibliografía

[1] ABELL, M. L. y BRASELTON, J. P. (1993). *Differential Equations with Mathematica*. AP Professional. Cambridge.

[2] AFONSO GUTIÉRREZ, R. M. y DORTA DÍAZ, J. A. (2000). Representación visual y aprendizaje en un contexto de software educativo (I). *Revista Cubo Matemática Educacional*, 2, 39-71.

[3] AFONSO GUTIÉRREZ, R. M. y DORTA DÍAZ, J. A. (2001). Representación visual y aprendizaje en un contexto de software educativo (II). *Revista Cubo Matemática Educacional*, 3, 37-55.

[4] AFONSO GUTIÉRREZ, R. M. y DORTA DÍAZ, J. A. (2001). Convergencia puntual y uniforme: Una perspectiva docente con software. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4, 1, 261-272.

[5] AFONSO GUTIÉRREZ, R. M. y DORTA DÍAZ, J. A. (2002). Problems of convergence with the use of software: Qualitative study with students of Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8, 4, 271-293.

[6] AFONSO GUTIÉRREZ, R. M. y DORTA DÍAZ, J. A. (2002). Pointwise and uniform convergence: A perspective with software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33, 3, 319-347.

[7] AMILLO, BALLESTEROS, GUADALUPE y MARTÍN. (1996). *Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática, MapleV*. McGrawHill. Madrid.

[8] ARCAVI, A. y NURIT, H. (2000). Aprendizaje mediado por la computadora: Ejemplo de una aproximación. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 5, 25-45.

[9] ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (ed.), *Ingeniería didáctica en*

educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 97-140. Grupo Editorial Iberoamérica. Colombia.

[10] BARBOLLA GARCÍA, R. M.; GARCÍA MARRERO, M.; MARGALEF ROIG, J. y otros. (1981). *Introducción al Análisis Real*. Alhambra. Madrid.

[11] BARWISE, J. y ETCHEMENDY, J. (1991). Visual information and valid reasoning. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 9-24. MAA Notes 19. USA.

[12] BLACHMAN, N. (1993). *Mathematica: Un enfoque práctico*. Ariel Informática. Barcelona.

[13] BOOKMAN, J. y FRIEDMAN, C. P. (1994). A Comparison of the Problem Solving Performance of Students in Lab Based and Traditional Calculus. *CBSM Issues in Mathematics Education*, 4, 101-115.

[14] BURGOS, J. DE (1984). *Cálculo Infinitesimal*. Alhambra. Madrid.

[15] CARRILLO, A. y LLAMAS, I. (1995). *Maple V. Aplicaciones matemáticas para P. C.* Ra-ma. Madrid.

[16] CARSLAW, H. S. (1930). *Introduction to the Theory of Fourier's series and integrals*. Dover Publications, INC. Cambridge.

[17] CHÁVEZ, H. y HITT, F. (1992). Visualización relacionada a conceptos de Cálculo con Microcomputadora. *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores en Matemática Educativa*. México.

[18] CUNNINGHAM, S. (1991). The Visualization Environment for Mathematics Education. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 67-76. MAA Notes 19. USA.

[19] D'APICE, C.; MANZO, R. y ZAPPALE, E. (2000). Learning Power Series with Computer Tools. *Electronic Proceedings for the Fourth International Derive TI-89/92 Conference*. Liverpool John Moores University.

[20] DAVIS, R. B. y VINNER, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

[21] DELGADO PINEDA, M. (1998). Maple en la enseñanza secundaria. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 1, 1, 114-120.

[22] DODSON, C. T. J. y GONZÁLEZ, E. A. (1995). *Experiments in Mathematics using Maple*. Springer Verlag. New York.

[23] DORTA DÍAZ, J. A. (1994). Programas para representar funciones trigonométricas generalizadas y funciones especiales. En Dorta Díaz, J. A.; González Dávila, C.; González Vera, P. y Moreno Pérez, J. A. (eds.), *25 años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna*, 265-285. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna. Tenerife.

[24] DORTA DÍAZ, J. A. (1996). Algunos tópicos del Análisis Matemático y su enseñanza con Maple V. En Vicente, J. L. (ed.), *Actas II congreso español de usuarios de Maple V*, 1-16. Sevilla.

[25] DORTA DÍAZ, J. A.; ESPINEL FEBLES, C. y PLASENCIA CRUZ, I. (1998). Visualización y creatividad. *Revista Educación Matemática*, 10, 2, 102-120.

[26] DORTA DÍAZ, J. A.; ESPINEL FEBLES, C. y PLASENCIA CRUZ, I. (2000). Kevin, a visualiser pupil. *For the Learning of Mathematics (An International Journal of Mathematics Educations)*, 20, 2, 30-36.

[27] DORTA DÍAZ, J. A.; ESPINEL FEBLES, C. y PLASENCIA CRUZ, I. (2000). Metáforas en la enseñanza de las Matemáticas. Periódico "El Día" (12 de Agosto).

[28] DORTA DÍAZ, J. A.; ESPINEL FEBLES, C.; PLASENCIA CRUZ, I. y GÜIMES ARTILES, R. (1999). Metodología utilizada en un trabajo sobre Visualización Matemática. *Revista de Investigación Educativa*, 17, 1, 167-185.

[29] DREYFUS, T. (1994). Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics Education. En Robitaille, D.; Wheeler, D. y Kieran, C. (eds.), *ICME 7 Selected Lectures*, 107-122. Les Presses de l'Université Laval. Canadá.

[30] DUBINSKY, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8, 3, 24-41.

[31] DUBINSKY, E. y LEWIN, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Descomposition of Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, 55-92.

[32] DUVAL, R. (1988). Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 1, 235-253.

[33] DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65.

[34] DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang. Suisse.

[35] EISENBERG, T. y DREYFUS, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.*, 25-37. MAA Notes 19. USA.

[36] EUCLIDES. (1956). *The Thirteen Books of the Elements.* Dover Publications. New York.

[37] FARFÁN, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

[38] FARFÁN, R. M. y HITT, F. (1983). *Heurística Matemática.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

[39] FARFÁN, R. M. y SOLÍS, M. (1987). *Lecturas de Cálculo para docentes de ingeniería. Problemas de variación.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

[40] FERNÁNDEZ VIÑA, J. A. (1976). *Lecciones de Análisis Matemático.* Tecnos. Madrid.

[41] FOURIER, J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur.* Éditions Jacques Gabay réimpression de 1988. France.

[42] FREUDENTHAL, H. (1986). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure.* Kluwer Academic Publishers.

[43] GARBIN, S. y AZCÁRATE, C. (2000). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. *Educación Matemática*, 12, 3, 5-18.

[44] GARCÍA, A.; MARTÍNEZ, A. y MIÑANO, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas.* Síntesis. Madrid.

[45] GARCÍA CRUZ, J. A. (1998). El proceso de generalización desarrollado por alumnos de Secundaria en problemas de generalización lineal. *Tesis Doctoral.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. Tenerife.

[46] GRAF, K. D. ET AL (1992). Technology in the service of the Mathematics Curriculum. En Gaulin, C.; Hodgson, B. R.; Wheeler, D. H. and Egsgard, J. C. (eds.), *Proceedings of the Seventh International Congress on Mathematical Education (WG17)*, 197-201. Québec (Canadá).

[47] GUTIÉRREZ, A. (2000). Los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas. En Martinón, A. (ed.), *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 43 y 44, 427-430.

[48] GUZMÁN, M. DE. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis.* Pirámide. Madrid.

[49] GUZMÁN, M. DE y RUBIO, B. (1990). *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático. Estrategias del pensamiento matemático*, 1, 2, 3. Pirámide. Madrid.

[50] HAIRER, E. y WANNER, G. (1996). *Analysis by History.* Springer-Verlag. New York.

[51] HART, K. y HITT, F. (1999). *Dirección de Tesis de Doctorado en Educación Matemática. Una perspectiva Internacional.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

[52] HAUCHART, N. y ROUCHE, N. (1987). *Apprivoiser l'infini - un enseignement des débuts de analyse.* GEM, Louvain la Neuve. Belgique.

[53] HEID, M. K. (1988). Resequencing Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.

[54] HITT, F. (1991). *El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

[55] HITT, F. (1991). *Percepción e Imagen mental en relación a sistemas de representación e implicaciones para su uso con la Microcomputadora.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

[56] HITT, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16, 4, 10-20.

[57] HITT, F. (1996). *Educación matemática y uso de nuevas tecnologías.* En Santos, L. M. y Sánchez, E. (eds.), *Perspectivas en Educación Matemática*, 21-44. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

[58] HITT, F. (1998). Investigando un problema de convergencia con el Mathematica: Historia y visualización de una idea matemática. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28, 5, 697-706.

[59] HITT, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática*, 10, 2, 23-45.

[60] HITT, F. (2000). Herramientas Tecnológicas y Enseñanza de las Matemáticas. *Actas de XXIII Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana.* CINVESTAV. Sección de Matemática Educativa. México.

[61] HOLMES, ECKER, BOYCE y SIEGMANN. (1993). *Exploring Calculus with Maple.* Addison-Wesley Publishing Company. USA.

[62] JANVIER, C. (1987). Representation and Understanding: The notion of Function as an example. En Janvier, C. (ed.), *Problems of Representation in Teaching and Learning of Mathematics*, 67-71. Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey.

[63] KAPUT, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws, D. (ed.) *Handbook on research in mathematics and learning*, 515-556. Macmillan. New York.

[64] LAKATOS, I. (1978). Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 1, 3, 151-161.

[65] LAKATOS, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Universidad. Madrid.

[66] LAUTEN, A.; GRAHAM, K. y FERRINI-MUNDY, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 225-237.

[67] LEITZEL, J. R. C. Y TUCKER, A. C. (1995). *Assessing Calculus Reform Efforts.* MAA USA.

[68] MARLÍN, J. y KIM, H. *Calculus and Differencial Equations with Maple V.* Department of Mathematics. College of Physical Mathematical Sciences.

[69] MASON, A.; SELDEN, A. y SELDEN, J. (1989). Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems? *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45-50.

[70] MEJÍA VELASCO, H. R. (1996). Un sistema interactivo guiado para la enseñanza de las matemáticas: CuadratX. *Tesis doctoral.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. México.

[71] MÉNDEZ CONTRERAS, J. A. (2001). *Utilización de Maple como apoyo a la Matemática en el Bachillerato.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Colección de Cuadernos para el aula, n^o 1. Badajoz.

[72] MONAGHAM, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

[73] MORENO, L. y WALDEGG, G. (1992). *La Aritmetización del Cálculo.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

[74] MONTEAGUDO MARTÍNEZ, M. F. y PAZ FERNÁNDEZ, J. (2002). *Matemáticas M1. Proyecto 2.2.* Edelvives. Madrid.

[75] MURPHY, L. D. Students' Conceptions of Limit. A Review of Research Literature with Attention to Methodology.

http://www.mste.uiuc.edu/murphy/Papers/LimitConceptsPaper.html

[76] MURRAY, R. SPIEGEL (1976). *Matemáticas Superiores para Ingenieros y Científicos.* McGraw-Hill. Bogotá.

[77] MURRAY, R. SPIEGEL (1976). *Análisis de Fourier (Teoría y Problemas).* McGraw-Hill. Bogotá.

[78] PENN, H. L. (1994). Comparison of Test Scores in Calculus I at the Naval Academy. *Focus on Calculus*, 6, 6-7.

[79] PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Ediciones Morata. Madrid.

[80] PLASENCIA CRUZ, I. (2000). Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos. *Tesis Doctoral.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. Tenerife.

[81] PRASLON, F. (2000). Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. *Tesis Doctoral.* Universidad de París 7. France.

[82] RECIO, T. (1998). El número de raíces reales de un polinomio. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 1, 1, 105-111.

[83] RECIO, T. (1999). ¡Ponga un programa de Cálculo Matemático en su vida! *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2, 3, 569-572.

[84] REY PASTOR, CALLEJO y TREJO. (1998). *Análisis Matemático.* Kapelusz. Buenos Aires.

[85] RINCON, F. ; GARCÍA, A. y MARTÍNEZ, A. (1995). *Cálculo científico con Maple.* Ra-ma. Madrid.

[86] RÍOS, S.(1966). *Cálculo Infinitesimal.* Ediciones Ibérica. Madrid.

[87] ROANES, E. (1976). *Didáctica de las Matemáticas.* Anaya. Salamanca.

[88] ROBERT, A. (1982). Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérior. *Thése de doctorat.* Université París. France.

[89] ROBINET, J. (1992). *Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. La convergence uniforme.* CAHIER DE DIDIREM, 12. Université París 7-Denis Diderot. France.

[90] RUDIN, W. (1967). *Principios del Análisis Matemático.* Castillo. Madrid.

[91] SCHNEIDER, M. (1988). Des objects mentaux “Aire” et “Volume” au calcul des primitives *Thèse de doctorat.* Université Lovain la Neuve. Bélgique.

[92] SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 6, 1, 5-67.

[93] SIMONS, G. F. (1993). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* McGraw Hill. Madrid.

[94] SKEMP, R. (1979). *Inteligence, learning and action.* Wiley. New York.

[95] SKEMP, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Ediciones Morata. Madrid.

[96] SOTO, M. J. y VICENTE, J. L. (1996). *Matemática con Maple.* Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.

[97] SOTO JOHNSON, H. (1998). Impact of Technology on Learning Infinite Series. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 5, 2, 95-109.

[98] STROYAN, K. D. (1993). *Calculus using Mathematica.* Scientific Proyects and Mathematical Background. Academic Press Limited. London.

[99] TALL, D.; VAN BLOKLAND, P. y KOK, D. (1991) *A Graphic Approach to the Calculus.* Manual del usuario. Holland.

[100] TALL, D. (1986). Building and testing a cognitive approach to the calculus using computer graphics. *Tesis Doctoral.* University of Warwick. Gran Bretaña.

[101] TALL, D. (1989). Different cognitive obstacles in a technical paradigm or A reaction to: “Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra”. En Wagner, S. y Kieran, C. (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 4, 87-92. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[102] TALL, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 49-63.

[103] TALL, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. En Carraher, D. y Miera, L. (eds.), *Proceedings of XIX International Conference for The Psychology of Mathematics Education*, 1, 61-75. Brasil.

[104] TALL, D. (1998). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. Plenary presentation at *The International Conference on the Teaching of Mathematics*. Samos.

[105] TALL, D. (1999). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En Zaslavsky, O. (ed.), *Proceedings of the XXIII Conference of PME*, 1, 111-118. Israel.

[106] TALL, D. y VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

[107] URREA, M.; GASTALDI, C. y FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, P. (1996). Matemáticas y Ordenador en las Etapas Iniciales del Aprendizaje. *Divulgaciones Matemáticas*, 4, 1/2, 83-98.

[108] VEGA, J.L.; BUENO, B. y BUZ, J. (1996). *Desarrollo cognitivo en la edad adulta y la vejez.*

[109] VINOGRÁDOV, I. M. (Director) (1993). *Enciclopedia de las Matemáticas.* MIR. Moscú-Madrid.

[110] VIZMANOS, J. R. y ANZOLA, M. (2001). *Algoritmo 2001. Matemáticas 1 y 2.* Ediciones SM. Madrid.

[111] WEIERSTRASS, K.
http://chronomath.irem.univ-mrs.sr/chronomath/Weierstrass.html

[112] WHEATLEY, G. H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher*, 37, 6, 10-11.

[113] WILLIAMS, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219-236.

[114] ZIMMERMANN, W. (1991). Visual Thinking in Calculus. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 127-138. MAA Notes 19. USA.

[115] ZIMMERMANN, W. y CUNNINGHAM, S. (1991). What is Mathematical Visualization? En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 1-8. MAA Notes 19. USA.

Apéndice A

Formas de converger para una sucesión numérica

Las sucesiones numéricas que convergen tienen diversas formas de "aproximarse y acercarse" a su límite L; seguidamente, describimos los "caminos" más habituales que siguen en ese progresivo acercamiento.

Primero: **Tan próximos y tan cerca que todos los elementos están superpuestos al límite**.

El primero de esos "caminos" es el más sencillo porque todos los elementos de la sucesión están superpuestos a L: coinciden con L.. Se trata de una sucesión constante. En la Figura A-1 se representa la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{5\}_{n\in\mathbf{N}}$ cuyo límite obviamente es 5. En un símil metafórico, podríamos decir que si estuviéramos caminando "por encima de la sucesión", todos los elementos coincidirían con 5 y en consecuencia, estaríamos "muy próximos" y "muy cerca" de 5, tanto que la distancia de cualquier elemento a 5 es cero (en una representación unidimensional la gráfica de esta sucesión quedaría reducida a un punto: el 5. Por este motivo, pensamos que este tipo de representación es menos intuitiva que la bidimensional. Esta cuestión se analizó en el Capítulo 3).

```
>restart:with(plots):
>d1:=plot([seq([n,5],n=1..35)],x=1..35,style=point,xtickmarks=3,symbol=circle):
>display(d1,color=black);
```

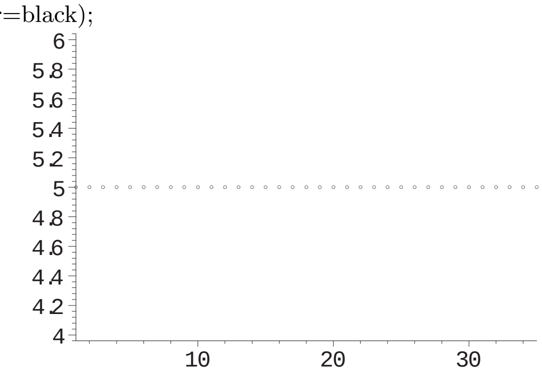


FIGURA A-1

Segundo: **Alejándose y aproximándose, y a veces pasando por el límite; en todo caso cada vez más cerca de él**.

Una segunda forma de converger, denominada "sinusoidal amortiguada", corresponde a la observada en la Figura A-2, gráfica de $\left\{5 + \frac{5\cdot sen(\frac{\pi}{2}n)}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$. En este caso, los distintos elementos de la sucesión se aproximan y se elejan de $L = 5$, pero cada vez más cerca de L, incluso pasando a veces por encima de 5. Los términos a_{2n} están superpuestos a 5, pero los términos a_{2n+1} vuelven a alejarse de él, a pesar de lo cual, a medida que avanzamos en la sucesión, la distancia a 5 es cada vez más pequeña. Por ejemplo, si tomamos el término 20001 se tiene:

$$| a_{20001} - 5 |= 0{,}0002499875...$$

>restart:with(plots):
> d1:=plot([seq([n,5+5*sin(Pi/2*n)/n],n=5..45)],x=5..45,style=point,xtickmarks=3,symbol=circle):
>d2:=plot(5,x=5..45,y=4..6):
>d3:=plot(5+5*sin(Pi/2*x)/x,x=5..45,thickness=1):
>display({d1,d2,d3},color=black);

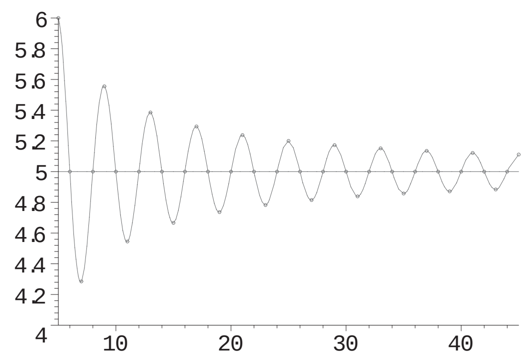


FIGURA A-2

>evalf(5*sin(Pi/2*2001)/2001);

$$,002498750625$$

Tercero: **Aproximándose alternativamente por "arriba" y por "abajo" del límite, y cada vez más cerca de él, pero sin lograr alcanzarlo (en el sentido de superposición)**.

Una tercera vía consiste en que los elementos de la sucesión se situen, alternativamente, "por arriba" y "por abajo" de L y cada vez más cerca de L, tal y como se observa en la Figura A-3, correspondiente a la sucesión $\left\{5 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$. En este caso, por mucho que se avance sobre la sucesión no se "alcanza" el valor $L = 5$, los términos nunca se "superponen a 5" . Sí se cumplirá sin embargo que la distancia al límite es cada vez más pequeña:

$$| a_{2000} - 5 |= 0{,}00005$$

En este caso, al contrario que en los dos anteriores, el límite $L = 5$ no es un elemento de la sucesión $\left\{5 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$. El límite es el número real al cual ésta "se aproxima" y "se acerca" cada vez más y más.

>restart:with(plots):

>d1:=plot([seq([n,5+(-1)ˆn/n],n=1..70)],x=1..70,style=point,xtickmarks=3,symbol=circle):

>d2:=plot(5,x=1..70,y=4.4..5.6):

>display({d1,d2},color=black);

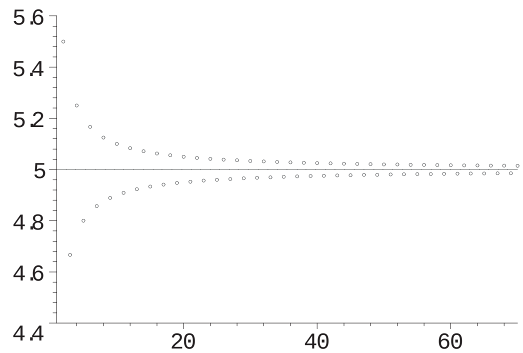


FIGURA A-3

>evalf(1/20000);

$$,00005000000000$$

Cuarto: **<u>Aproximándose por debajo del límite y cada vez más cerca de él, tanto como queramos, pero sin llegar a alcanzarlo (en el sentido de superposición)</u>**.

Una cuarta forma de converger consiste en que los elementos de la sucesión estén situados, todos, por "debajo" de L, de tal forma que vayan acercándose monótonamente, con carácter estricto o no (cada elemento es mayor o igual que el que le precede), hacia L. La sucesión $\left\{\frac{5n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ de la Figura A-4, corresponde a este caso. Igual que en el anterior, el límite 5 no es un elemento de la sucesión y por mucho que avancemos sobre ella nunca lograremos "superponernos a 5", a pesar de los cual la distancia a L es cada vez más pequeña:

$$\mid a_{20000} - 5 \mid = \mid -0{,}000249987 \mid = 0{,}000249987$$

>restart:with(plots):

>d1:=plot([seq([n,(5*n)/(n+1)],n=1..40)],x=1..40,style=point,xtickmarks=3,symbol=circle):

>d2:=plot(5,x=1..40,y=3..5.6):

>display({d1,d2},color=black);

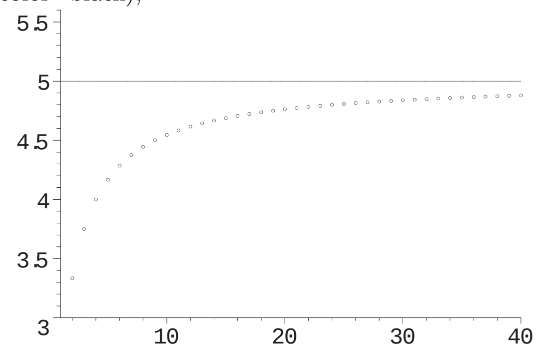


FIGURA A-4

>evalf((5*20000)/(20001)-5);

$$-,0002499875006$$

Quinto: **Aproximándose por encima del límite y cada vez más cerca de él, tanto como queramos, pero sin llegar a alcanzarlo (en el sentido de superposición)**.

Una forma paralela a la anterior, se da cuando los elementos de la sucesión están situados, todos, por "encima" de L, de tal forma que vayan acercándose monótonamente, con carácter estricto o no, hacia L. La sucesión de la Figura A-5 es $\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$. Para este caso valen las argumentaciones anteriores.

>restart:with(plots):

> d1:=plot([seq([n,(5*n+1)/n],n=1..40)],x=1..40,style=point,xtickmarks=3,symbol=circle):

>d2:=plot(5,x=1..40,y=4.6..5.6):

>display({d1,d2},color=black);

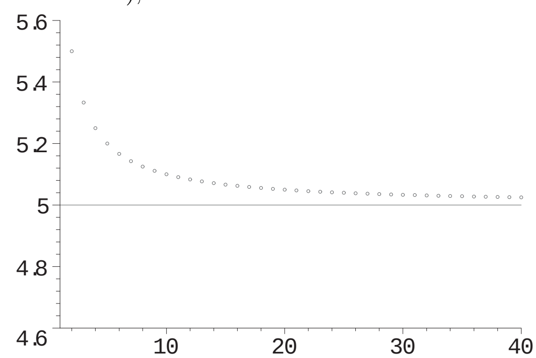


FIGURA A-5

Aunque pueden describirse otras formas o *"caminos de convergencia"* más aleatorios para sucesiones numéricas, las expuestas son básicamente las más usuales.

Apéndice B

Ecuación diferencial en derivadas parciales del calor
Ecuación del Calor

Joseph Fourier (1768-1830)

Versión de Murray R. Spiegel

([77], págs. 7 y 8; problemas 1.5 y 1.6)

Preámbulo:

Justifiquemos que el flujo de calor a través de un plano en un medio conductor viene dado por la expresión:

$$-k\left(\tfrac{\partial}{\partial x}U\right)$$

siendo:
- U la temperatura
- x una normal en la dirección perpendicular al plano
- k la constante de conductividad térmica del medio.

Disponemos de dos placas paralelas, I y II, separadas una distancia $dx = \Delta(x)$, de forma que la temperatura fluye desde II hasta I (véase Figura B-1).

```
>restart:with(plots):with(plottools):
>d1:=plot([[2,-2],[2,2]],x=0..8,style=line,thickness=3,color=black):
>d2:=plot([[4,-2],[4,2]],style=line,thickness=3,color=black):
>d3:=textplot({[2,2.2,`I`],[4,2.2,`II`],[2,-2.3,`U`],[4,-2.3,`U+dU`],[3,.1,`dx`]}):
>d4 := arrow([5,0],[4.1,0], .1, .4, 0.1,color=black):
>display({d1,d2,d3,d4},axes=none);
```

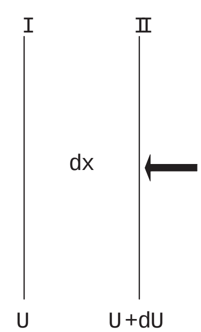


Figura B-1

Existe un principio fundamental de la termodinámica, denominado "*Ley de Fourier*", que dice que la cantidad de calor que permanece, por unidad de tiempo, es directamente proporcional a la diferencia de temperatura ΔU e inversamente proporcional a la distancia Δx..

Así pues, el flujo de calor que va desde la placa II hasta la I viene dado por:

$$-\frac{k\Delta U}{\Delta x}$$

donde k es la constante térmica. Si tomamos límite cuando Δx tiende a cero, el flujo de calor a través del plano I se transforma en la expresión:

$$-k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)$$

Ecuación del calor

Deducción de la ecuación

Si la temperatura en cualquier punto (x, y, z) de un sólido, en un tiempo t es $U(x, y, x, t)$ y si

- k es la constante de conductividad térmica
- σ es el calor específico y
- μ es la densidad del sólido

demostremos que:

```
>Diff(U,t)=k*[Diff(U,x$2)+Diff(U,y$2)+Diff(U,z$2)];
```

$$\frac{\partial}{\partial t}U = k\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}U\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}U\right)\right]$$

Tomemos un sólido dV de dimensiones $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$, tal como se ve en la figura B-2:

```
>f := cuboid([0,0,0],[2,2,2],x=0..4,y=0..4,z=0..4):
>d1 := arrow([-1,1,1], [0,1,1], .1, .4, 0.5, color=blue):
>d2 := arrow([2,1,1], [3,1,1], .1, .4, 0.5, color=blue):
>d3:=textplot3d({[0,3,4,‘dV‘],[0,0,2.1,‘A‘],[0,2.1,2.1,‘B‘],[0,-0.4,0,‘C‘],[0,2.1,0,‘D‘]},
color=red,axes=normal):
>display({f,d1,d2,d3},style=wireframe,scaling=constrained,thickness=2);
```

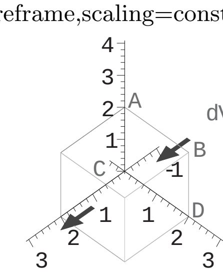


Figura B-2

La cantidad de calor, por unidad de superficie y por unidad de tiempo, que entra en dV a través de la cara $ABCD$ viene dada por:

$$-k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x)$$

Como el área de esta cara es $\Delta y \Delta z$, la cantidad de calor que entra por la misma en un tiempo Δt viene dado por:

$$-k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x)\,\Delta y \Delta z \Delta t$$

De igual forma la cantidad de calor que saldrá por la cara opuesta a la anterior será:

$$-k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x+\Delta x)\,\Delta y \Delta z \Delta t$$

Por tanto, el calor que permanece en dV es:

```
>k*[Diff(U,x)(x+dx)-k*Diff(U,x)(x)]*dy*dz*dt,([1]);
```

$$k\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x+dx)-k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x)\right]dydzdt,\ \ [1]$$

Por otra parte, la cantidad de calor que permanece al tomar la dirección de y será:

```
>k*[Diff(U,y)(y+dy)-k*Diff(U,y)(y)]*dx*dz*dt,([2]);
```

$$k\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right)(y+dy)-k\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right)(y)\right]dxdzdt,\ [2]$$

y el calor que permanece en la dirección de z:

```
>k*[Diff(U,z)(z+dz)-k*Diff(U,z)(z)]*dx*dy*dt,([3]);
```

$$k\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)(z+dz)-k\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)(z)\right]dxdydt,\ [3]$$

Por todo ello, la cantidad de calor ganado será: $[1]+[2]+[3]$ que sirve para elevar la temperatura en ΔU.

Además sabemos que el calor necesario para elevar la temperatura de una masa m en una cantidad ΔU es

$$m\sigma\Delta U$$

(σ =calor específico). Si la densidad μ del sólido es $\mu=\frac{m}{V}$, tenemos que $m=\mu dxdydz$ y por consiguiente, la cantidad de calor que permanece en dV es:

$$[1]+[2]+[3]=\mu\ dxdydz\ \sigma\ \Delta U$$

Al dividir ambos miembros por $dxdydzdt$ obtenemos:

```
>k*[Diff(U,x)(x+dx)-k*Diff(U,x)(x)]/dx+k*[Diff(U,y)(y+dy)-k*Diff(U,y)(y)]/dy+
k*[Diff(U,z)(z+dz)-k*Diff(U,z)(z)]/dz=mu*sigma*[(Delta*U)/(Delta*t)];
```

$$\frac{k\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x+dx)-k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)(x)\right]}{dx}+\frac{k\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right)(y+dy)-k\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right)(y)\right]}{dy}+\frac{k\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)(z+dz)-k\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)(z)\right]}{dz}=\mu\sigma\left[\frac{U}{t}\right]$$

y tomando límites cuando dx, dy,dz y dt tienden a cero llegamos a:

>Diff(k*(Diff(U,x)),x)+Diff(k*(Diff(U,y)),y)+Diff(k*(Diff(U,z)),z)=mu*sigma*Diff(U,t);

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}k\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}k\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}k\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)\right)=\mu\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}U\right)$$

o lo que es lo mismo:

>K*[Diff(U,x$2)+Diff(U,y$2)+Diff(U,z$2)]=Diff(U,t);

$$K\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}U\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}U\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}U$$

donde $K=\frac{k}{\sigma\mu}$ se denomina constante de difusión. La ecuación:

>K*Diff(U,x$2)=Diff(U,t);

$$K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U\right)=\frac{\partial}{\partial t}U$$

recibe el nombre de *ecuación del calor unidimensional*.

Resolución de un problema relacionado con la ecuación del calor por medio de Maple

Una barra de longitud L, cuya superficie total está aislada, incluyendo sus extremos $x=0$ y $x=L$ tiene una temperatura inicial $f(x)$. Determinar la temperartura posterior de la barra.

([76], pág. 39, problema 2.27)

El problema de valor límite será:

>Diff(U,t)=K*Diff(U,x$2);

$$\frac{\partial}{\partial t}U=K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U\right)$$

con las condiciones:

$$\mid U\left(x,t\right)\mid< M,\quad U_x\left(0,t\right)=0,\quad U_x\left(L,t\right)=0,\quad U\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

Para resolver este problema de valor de contorno utilicemos el método de separación de variables, es decir, tomemos:

$$U(x,t)=X(x)T(t)$$

y busquemos la solución a la ecuación correspondiente:

```
>restart:
>X(x)*Diff([T(t)],t)=K*T(t)*Diff(X(x),x$2);
```

$$X(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}[T(t)]\right) = KT(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)\right)$$

o lo que es lo mismo:

$$X(x) * T'(t) = K * T(t) * X''(x)$$

la cual, puede reescribirse:

$$T'(t)/K * T(t) = X''(x)/X(x) = -\lambda^2$$

de tal forma que obtenemos dos ecuaciones diferenciales a resolver:

```
>restart:
>dsolve(Diff(T(t),t)+lambda^2*K*T(t),T(t));
```

$$T(t) = \_C1 e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}$$

```
>T := t -> c*exp(-lambda^2* K* t);
```

$$T := t \rightarrow c e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}$$

```
>dsolve(Diff(X(x),x$2)+lambda^2*X(x),X(x));
```

$$X(x) = \_C1\ sin(\lambda x) + \_C2\ cos(\lambda x)$$

```
>X:=x->a*cos(lambda*x)+b*sin(lambda*x);
```

$$X := x \rightarrow a\ cos(\lambda x) + b\ sin(\lambda x)$$

Una solución estará dada por:

```
>U(x,t)=T(t)*X(x);
```

$$U(x,t) = c\ e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}(a\ cos(\lambda x) + b\ sin(\lambda x))$$

```
>U(x,t):= exp(-lambda^2*K*t)*(A*cos(lambda*x)+B*sin(lambda*x));
```

$$U(x,t) := e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}(A\ cos(\lambda x) + B\ sin(\lambda x))$$

```
>U:=(x,t)->exp(-lambda^2*K*t)*(A*cos(lambda*x)+B*sin(lambda*x));
```

$$U := (x,t) \rightarrow e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}(A\ cos(\lambda x) + B\ sin(\lambda x))$$

```
>Diff('U(x,t)',x)=diff(U(x,t),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,t) = e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}\left(-A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\lambda\right)$$

>simplify(subs(x=0,diff(U(x,t),x)));

$$e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}B\lambda$$

>B:=solve(%,B);

$$B := 0$$

Por tanto:

>'U(x,t)'=U(x,t);

$$U(x,t) = e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}\ A\ cos(\lambda x)$$

De la condición $U_x(L,t) = 0$ se tiene:

>simplify(subs(x=L,diff(U(x,t),x)));

$$-e^{\left(-\lambda^2 K t\right)}A\sin(\lambda L)\lambda$$

de donde $sin(\lambda L) = 0$ y en consecuencia $\lambda L = m\pi$, es decir:

>lambda:=m*Pi/L;

$$\lambda := \frac{m\pi}{L}$$

>'U(x,t)'=U(x,t);

$$U(x,t) = e^{\left(-\frac{m^2\pi^2 K t}{L^2}\right)}A\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Así pues definimos funcionalmente $U(x,t)$:

>U:=(x,t)->exp(-m^2*Pi^2*K*t/(L^2))*A*cos(m*Pi*x/L);

$$U := (x,t) \to e^{\left(-\frac{m^2\pi^2 K t}{L^2}\right)}A\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

para $m = 0, 1, 2, ...$

Finalmente, para satisfacer la última condición $U(x,0) = f(x)$, usamos el principio de superposición:

>U:=(x,t)->A[0]/2+Sum(A[m]*exp(-m^2*Pi^2*K*t/(L^2))*cos(m*Pi*x/L),m=1..infinity);

$$U := (x,t) \to \frac{1}{2}A_0 + \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m\ e^{\left(-\frac{m^2\pi^2 K t}{L^2}\right)}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

>f:=x->U(x,0);

$$f := x \to U(x,0)$$

>'f(x)'=f(x);

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2}A_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

A partir de las series de Fourier encontramos:

>A[m]:=2/L*Int('f(x)'*cos(m*Pi*x/L),x=0..L);

$$A_m = 2\frac{\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx}{L}$$

Finalmente la solución pedida o lo que es lo mismo $U(x,t)$ viene expresada de la forma:

>1/2*Int('f(x)',x = 0..L)+2/L*[Sum(exp(-m^2*Pi^2*K*t/L^2)*cos(m*Pi*x/L),m = 1 .. infinity)]*[Int('f(x)'*cos(m*Pi*x/L),x=0..L)];

$$\frac{1}{2}\int_0^L f\left(x\right)dx + 2\frac{\left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{\left(-\frac{m^2\pi^2Kt}{L^2}\right)}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] + \left[\int_0^L f\left(x\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx\right]}{L}$$

Problema

Resolver el problema de valor límite:

$$\begin{gathered} 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}T\left(x,t\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}T\left(x,t\right) \\ 0 < x < 3, \quad t > 0, \quad T(0,t) = T(3,t) = 0 \\ T(x,0) = 5sin(4\pi x) - 3sin(8\pi x) + 2sin(10\pi x), \\ |T(x,t)| < M \end{gathered}$$

donde esta última condición nos indica que la temperatura está limitada para $0 < x < 3$, $t > 0$.

([76], pág.278; problema 12.16)

Utilizando nuevamente el método de separación de variables, consideremos:

$$T(x,t) = X(x)Y(t)$$

y encontremos la solución a la ecuación diferencial resultante:

>restart:

>X(x)*Diff([Y(t)],t)=2*Y(t)*Diff(X(x),x$2);

$$X\left(x\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[Y\left(t\right)\right]\right)=2Y\left(t\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}X\left(x\right)\right]$$

o lo que es lo mismo:

$$X(x)Y'(t)=2*Y(t)*X''(x)$$

la cual puede escribirse:

$$Y'(t)/2*Y(t)=X''(x)/X(x)=-\lambda^2$$

de tal forma que:

```
>restart:
>dsolve(Diff(Y(t),t)+lambda^2*2*Y(t),Y(t));
```

$$Y(t)=\_C1\ e^{\left(-2\lambda^2 t\right)}$$

```
>Y:=t->c*exp(-lambda^2*2*t);
```

$$Y:=t\to ce^{\left(-2\lambda^2 t\right)}$$

```
>dsolve(Diff(X(x),x$2)+lambda^2*X(x),X(x));
```

$$X(x)=\_C1\ sin(\lambda x)+\_C2\ cos(\lambda x)$$

```
>X:=x->a*cos(lambda*x)+b*sin(lambda*x);
```

$$X:=x\to a\ cos(\lambda x)+b\ sin(\lambda x)$$

Por tanto, una solución vendrá dada por:

```
>T(x,t)=Y(t)*X(x);
```

$$T(x,t)=ce^{\left(-2\lambda^2 t\right)}(a\ cos(\lambda x)+b\ sin(\lambda x))$$

```
>T(x,t):= exp(-lambda^2*2*t)*(A*cos(lambda*x)+B*sin(lambda*x));
```

$$T(x,t)=e^{\left(-2\lambda^2 t\right)}(A\ cos(\lambda x)+B\ sin(\lambda x))$$

```
>T:=(x,t)->exp(-lambda^2*2*t)*(A*cos(lambda*x)+B*sin(lambda*x));
```

$$T:=(x,t)\to e^{\left(-2\lambda^2 t\right)}(A\ cos(\lambda x)+B\ sin(\lambda x))$$

```
>T(0,t);
```

$$e^{\left(-2\lambda^2 t\right)}A$$

```
>A:=solve(T(0,t),A);
```

$$A := 0$$

>T(x,t);

$$e^{\left(-2\lambda^2 t\right)} B \sin(\lambda x)$$

>T(3,t)=0;

$$e^{\left(-2\lambda^2 t\right)} B \sin(3\lambda) = 0$$

y como B no debe ser cero se tiene que:

>sin(lambda*3) = 0;

$$\sin(3\lambda) = 0$$

>lambda:=m*Pi/3;

$$\lambda := \frac{1}{3} m\pi$$

siendo $m = 0, 1, 2, 3, ..., -1, -2, -3, ...$; entonces la solución de la ecuación será:

>'T(x,t)'=T(x,t);

$$T(x,t) = e^{\left(-2/9m^2\pi^2 t\right)} B \sin\left(\frac{1}{3} m\pi x\right)$$

Por el principio de superposición también será una solución:

>T:=(x,t)->B[1]*exp(-2/9*m[1]^2*Pi^2*t)*sin(1/3*m[1]*Pi*x)+
B[2]*exp(-2/9*m[2]^2*Pi^2*t)*sin(1/3*m[2]*Pi*x)+B[3]*exp(-2/9*m[3]^2*Pi^2*t)*
sin(1/3*m[3]*Pi*x);

$$T := (x,t) \to B_1 e^{\left(-2/9m_1^2\pi^2 t\right)} \sin\left(\frac{1}{3} m_1 \pi x\right) + B_2 e^{\left(-2/9m_2^2\pi^2 t\right)} \sin\left(\frac{1}{3} m_2 \pi x\right) +$$

$$+ B_3 e^{\left(-2/9m_3^2\pi^2 t\right)} \sin\left(\frac{1}{3} m_3 \pi x\right)$$

>T(x,0):=simplify(subs(t=0,T(x,t)));

$$T(x,0) := B_1 \sin\left(\frac{1}{3} m_1 \pi x\right) + B_2 \sin\left(\frac{1}{3} m_2 \pi x\right) + B_3 \sin\left(\frac{1}{3} m_3 \pi x\right)$$

Utilizando la última condición límite obtenemos:

>T(x,0)=5*sin(4*Pi*x)-3*sin(8*Pi*x)+2*sin(10*Pi*x);

$$B_1 \sin\left(\frac{1}{3} m_1 \pi x\right) + B_2 \sin\left(\frac{1}{3} m_2 \pi x\right) + B_3 \sin\left(\frac{1}{3} m_3 \pi x\right) =$$
$$5\ sin(4\pi x) - 3\ sin(8\pi x) + 2\ sin(10\pi x)$$

Por tanto no queda otra alternativa:

>B[1]:=5;B[2]:=-3;B[3]:=2;

$$B_1 := 5$$
$$B_2 := -3$$
$$B_3 := 2$$

>m[1]:=12;m[2]:=24;m[3]:=30;

$$m_1 := 12$$
$$m_2 := 24$$
$$m_3 := 30$$

>'T(x,t)'=T(x,t);

$$T(x,t) = 5\ e^{\left(-32\pi^2 t\right)} \sin(4\pi x) - 3e^{\left(-128\pi^2 t\right)} \sin(8\pi x) + 2e^{\left(-200\pi^2 t\right)} \sin(10\pi x)$$

>T:=(x,t)->5*exp(-32*Pi^2*t)*sin(4*Pi*x)-3*exp(-128*Pi^2*t)*sin(8*Pi*x)+
2*exp(-200*Pi^2*t)*sin(10*Pi*x);

$$T := (x,t) \to 5\ e^{\left(-32\pi^2 t\right)} \sin(4\pi x) - 3e^{\left(-128\pi^2 t\right)} \sin(8\pi x) + 2e^{\left(-200\pi^2 t\right)} \sin(10\pi x)$$

que es la solución del problema.

Apéndice C

La solución de Fourier a la ecuación del calor y El fenómeno de Gibbs

La solución de Fourier a la ecuación del calor es:

$$U := f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n cos((2n+1)x)}{(2n+1)}$$

Veamos, desde una perspectiva visual, que esta serie converge uniformemente en todo intervalo contenido en $[-\pi/2, \pi/2]$. Para ello haremos uso de un estudio que hemos realizado sobre el *Fenómeno de Gibbs*.

>restart:with(plots):

>f[n]:=(x,n)->(-1)^n*cos((2*n+1)*x)/(2*n+1);

$$f_n := (x,n) \to \frac{(-1)^n cos((2n+1)x)}{(2n+1)}$$

>Sum((-1)^n*cos((2*n+1)*x)/(2*n+1),n=0..infinity);

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n cos((2n+1)x)}{(2n+1)}$$

>s:=(x,n)->sum((-1)^k*cos((2*k+1)*x)/(2*k+1),k=0..n);

$$s_n := (x,n) \to \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k cos((2k+1)x)}{(2k+1)}$$

Al reflexionar sobre la serie anterior, Fourier afirma:

"*...la convergencia no es lo suficientemente rápida como para procurar una aproximación fácil...*"

¿Por qué sabía Fourier que la convergencia era lenta en $(-\pi/2, \pi/2)$?

Pensamos que lo más probable es que tuviera a su cargo personal dedicado exclusivamente a realizar "cálculos". Hoy día, con los adelantos técnicos podemos comprobar la lentitud a la que se refería Fourier sin mayor problema; por ejemplo, si estudiamos el **comportamiento de la serie en el punto** $x = 0$, obtenemos la siguiente serie numérica "alternada":

>Sum((-1)^n/(2*n+1),n = 0 .. infinity);

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

la cual converge, ya que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$ y $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ es una sucesión monótona decreciente (*Criterio de Leibniz*). El error que se comete al sumar, por ejemplo, los primeros 1000 términos es menor que el valor absoluto del término 1001 (primer término despreciado):

>'s(0,1000)'=Sum((-1)^k*cos((2*k+1)*0)/(2*k+1),k=0..1000);

$$s(0,1000) = \sum_{k=0}^{1000} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

>evalf(s(0,1000));

$$,7856479136$$

>evalf(Pi/4);

$$,7853981635$$

>Error=abs(%-%%);

$$Error = ,0002497501$$

Nótese que este *Error* es, efectivamente, menor que el valor absoluto del primer término despreciado, es decir, el término $\frac{(-1)^{1001}}{2\cdot 1001+1} = \frac{-1}{2003}$.

>'abs(1/(2*1001+1))'=evalf(abs(1/(2*1001+1)));

$$\left|\frac{1}{2003}\right| = 0{,}0004992511233$$

Así, comprobemos que la suma de la serie anterior, con cuarenta cifras de precisión decimal, coincide con $\frac{\pi}{4}$:

>Limit(Sum((-1)^k*cos((2*k+1)*0)/(2*k+1),k=0..m),m=infinity)=
evalf(sum((-1)^k*cos((2*k+1)*0)/(2*k+1),k=0..infinity),40);

$$\lim_{m\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\right] = 0{,}7853981633974483096156608458198757210493$$

>El-numero-Pi/4-con-40-cifras-decimales=evalf(Pi/4,40);

$$El - numero - (1/4)\pi - con - 40 - cifras - decimales =$$
$$= 0{,}7853981633974483096156608458198757210493$$

Igualmente sucede al considerar el **comportamiento de la serie en** $x = -\pi$:

>Limit(Sum((-1)^k*cos((2*k+1)*Pi)/(2*k+1),k=0..m),m=infinity)=
evalf(sum((-1)^k*cos((2*k+1)*Pi)/(2*k+1),k=0..infinity),35);

$$\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k cos((2k+1)\pi)}{(2k+1)}\right] = -0{,}78539816339744830961566084581987573$$

Como se observa, este resultado coincide con $-\pi/4$.

En el punto $x = 1$ ocurre algo similar. Si sumamos 1000 términos obtenemos:

>Sum((-1)^k*cos((2*k+1)*1)/(2*k+1),k=0..1000)=
evalf(sum((-1)^k*cos((2*k+1)*1)/(2*k+1),k=0..1000));

$$\sum_{k=0}^{1000}\frac{(-1)^k cos(2k+1)}{(2k+1)} = 0{,}7850781981$$

donde se observa que el error que se comete, respecto de $\frac{\pi}{4}$ es:

>'abs(Pi/4-0.7850781981)'=evalf(abs(Pi/4-0.7850781981));

$$|\tfrac{\pi}{4} - {,}7850781981| = {,}0003199654$$

Por otra parte si sumamos 2000 términos obtemenos:

>Sum((-1)^k*cos((2*k+1)*1)/(2*k+1),k=0..2000)=
evalf(sum((-1)^k*cos((2*k+1)*1)/(2*k+1),k=0..2000));

$$\sum_{k=0}^{2000}\frac{(-1)^k cos(2k+1)}{(2k+1)} = 0{,}7856121544$$

donde a su vez se observa que el error que se comete, respecto de $\frac{\pi}{4}$ es:

>'abs(Pi/4-0.78546121544)'=evalf(abs(Pi/4-0.7856121544));

$$|\tfrac{\pi}{4} - {,}78546121544| = {,}0002139909$$

Así pues, puede observarse la "lentitud de la convergencia": el error, si sumamos 1000 términos, es del orden de 3 *diezmilésimas*, y si sumamos 2000 términos, el error es del orden de 2 *diezmilésimas*; hemos sumado 1000 términos más y el error difiere muy poco del anterior.

Para graficar esta sucesión numérica, es decir, la sucesión de sumas parciales en $x = 1$ y verificar visualmente esta lentitud, usamos la secuencia de instrucciones siguiente:

>h:=m->sum((-1)^k*cos((2*k+1)*1)/(2*k+1),k=0..m);

$$h := m \to \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k cos(2k+1)}{(2k+1)}$$

>#j es el número de términos que deseamos sumar#

>numerodesumandos=j;

$$numerodesumandos = j$$

>j:=200:

>d1:=plot([seq([m,h(m)],m=0..j)],style=point,color=black):

>d2:=plot([[0,Pi/4],[j,Pi/4]],x=0..j,y=Pi/4-0.05..Pi/4+0.05):

>d3:=textplot([j/2+15,0.822,'Comportamiento de s(x,m) en x=1'],color=black):

>display({d1,d2,d3});

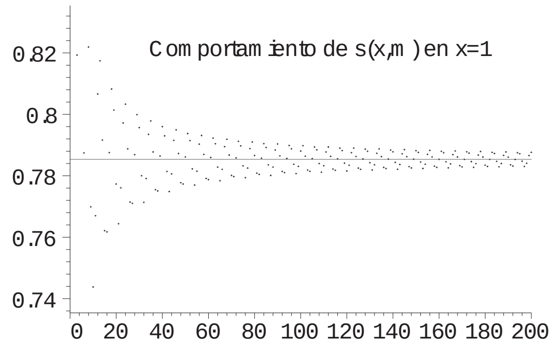


Figura C-1

>d2:=plot([[0,Pi/4],[j,Pi/4]],x=0..j,y=Pi/4-0.1..Pi/4+0.1):

>display({d1,d2,d3});

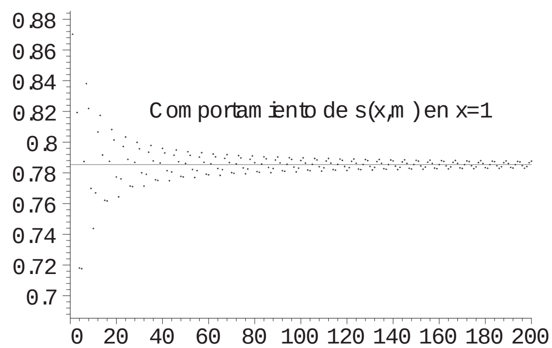


Figura C-2

A continuación, estudiemos el **comportamiento de la serie inicial en los puntos** $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$.

>Limit(Sum((-1)^k*cos((2*k+1)*Pi/2)/(2*k+1),k=0..m),m=infinity)=
evalf(sum((-1)^k*cos((2*k+1)*Pi/2)/(2*k+1),k=0..infinity));

$$\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k cos((2k+1)\frac{\pi}{2})}{(2k+1)}\right] = 0$$

En el punto $x = -\pi/2$ sucede lo mismo que en el punto $\pi/2$ dado que sus cosenos son iguales a 0.

Las gráficas del quinto término de la sucesión de sumas parciales en los intervalos $[-2, 2]$ y $[-3\pi/2, 3\pi/2]$ son, respectivamente:

>'s(x,5)'=s(x,5);

$$s(x,5) = cos(x) - \frac{1}{3cos(3x)} + \frac{1}{5\cos(5x)} - \frac{1}{7\cos(7x)} + \frac{1}{9\cos(9x)} - \frac{1}{11\cos(11x)}$$

>plot({seq(s(x,n),n=5..5)},x=-2..2,y=-1..1,color=black);

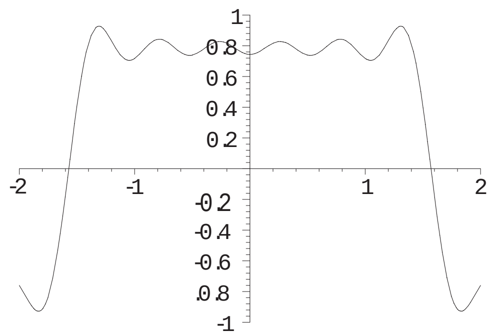


Figura C-3

>plot({seq(s(x,n),n=5..5)},x=-3*Pi/2..3*Pi/2,y=-1..1,color=black);

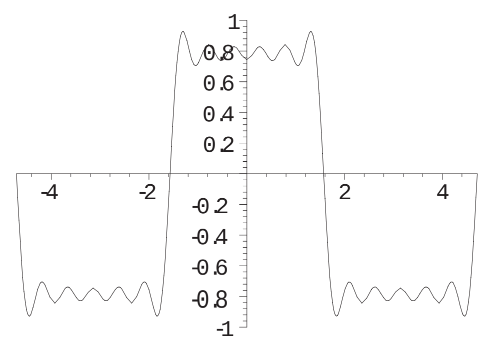


Figura C-4

Por otro lado, observemos la representación gráfica de los 20 y 200 primeros términos en [-2,2]:

>plot({seq(s(x,n),n=20..20)},x=-2..2,y=-1..1, color=black);

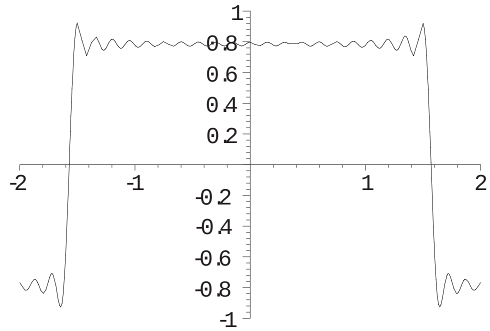


Figura C-5

>plot({seq(s(x,n),n=200..200)},x=-2..2,y=-1..1, color=black);

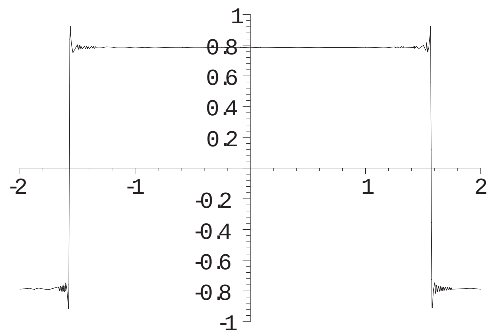


Figura C-6

La gráfica de la función límite que describe Fourier con palabras textuales, y que fue objeto de polémica es:

>plot({[[-3*Pi/2,-Pi/4],[-Pi/2,-Pi/4]],[[-Pi/2,Pi/4],[Pi/2,Pi/4]],[[Pi/2,-Pi/4],[3*Pi/2,-Pi/4]], [[-Pi/2,-Pi/4],[-Pi/2,Pi/4]],[[Pi/2,Pi/4],[Pi/2,-Pi/4]]},color=black,thickness=3);

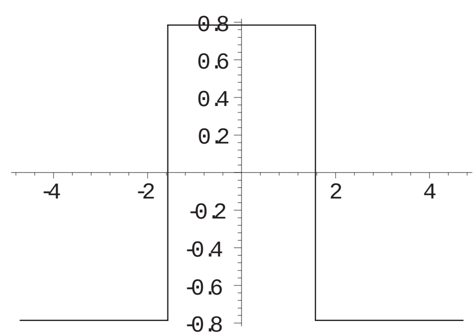


Figura C-7

y la gráfica de la "verdadera" función límite:

```
>d4:=plot({[[-3*Pi/2,-Pi/4],[-Pi/2,-Pi/4]],[[-Pi/2,Pi/4],[Pi/2,Pi/4]]},color=black,
thickness=3):
>d5:=plot({[[Pi/2,-Pi/4],[3*Pi/2,-Pi/4]],[[3*Pi/2,Pi/4],[5*Pi/2,Pi/4]]},color=black,
thickness=3,linestyle=3):
>d6:=pointplot({[-Pi/2,0],[Pi/2,0],[-3*Pi/2,0],[3*Pi/2,0],[5*Pi/2,0]}):
>d7:=textplot({[-3*Pi/2,0.2,‘-3Pi/2‘],[-Pi/2,0.2,‘-Pi/2‘],[Pi/2,0.2,‘Pi/2‘],[5*Pi/2,0.2,‘5Pi/2‘],
[3*Pi/2,0.2,‘3Pi/2‘],[-2.2,Pi/4,‘Pi/4‘],[-0.7,-Pi/4,‘Pi/4‘],[2,1,‘Período = Pi‘]}):
>display({d4,d5,d6,d7},axes=normal,xtickmarks=0,ytickmarks=0);
```

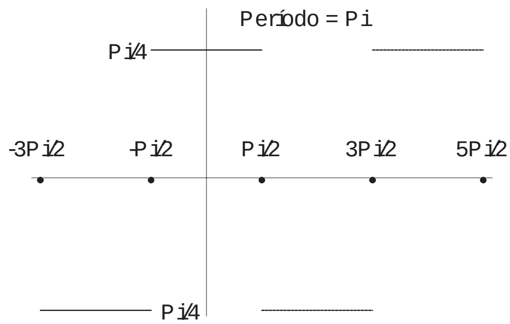


FIGURA C-8

Teniendo en cuenta que el período de $f(x)$ es π, ésta debe definirse de la siguiente manera:

```
>piecewise(x= -3*Pi/2,0, x>-3*Pi/2 and x<-Pi/2,-Pi/4,x=-Pi/2,0, x>-Pi/2 and x< Pi/2,Pi/4,
```
$x = Pi/2, 0$);

$$\left\{ \begin{array}{c} 0, \quad \text{si} \;\; x = -\frac{3\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4}, \text{ si } \; -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, \quad \text{si} \;\; x = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4}, \text{ si } \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, \quad \text{si} \;\; x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

Fenómeno de Gibbs

Carslaw [16] (págs. 239 y 305), refiriéndose al comportamiemto de la "curva aproximación", en un entorno del punto de discontinuidad $-\pi/2$, cuando n es "grande", dice:

"...justo antes de $x = -\pi/2$ la curva aproximacción para un valor grande de n tendrá un mínimo en una profundidad cerca de 0,14 *por debajo de $-\pi/4$,..., y tendrá un máximo justo después de $x = -\pi/2$ de una altura aproximada de* 0,14 *por encima de $-\pi/4$ "*

Visualmente:

Si tomamos las funciones aproximaciones para $n = 21, 22, ..., 26$, y las representamos simultáneamente podemos visualizar el comportamiento "a la derecha" de $x = -\pi/2$ y comprobar que todas esas funciones presentan máximos de una altura aproximada de 0,14 por encima de $\pi/4$.

```
>d8:=plot({seq(s(x,n),n=21..26)},x=-1.6..-1.4,y=0.0..1,color=black):
>d9:=plot({[[-1.6,Pi/4+0.14],[-1.4,Pi/4+0.14]],[[-1.6,Pi/4],[-1.4,Pi/4]],
[[-1.505,Pi/4],[-1.505,Pi/4+0.14]],[[-Pi/2,0],[-Pi/2,Pi/4]]},color=blue):
>d10:=textplot({[-Pi/2-0.015,0.05,`x=-Pi/2`],[-1.513,0.82,`0.14`],
[-Pi/2-0.015,0.82,`y=Pi/4`],[-1.5,1,`Fenómeno de Gibbs`]}):
>display({d8,d9,d10},axes=normal,xtickmarks=0,ytickmarks=0);
```

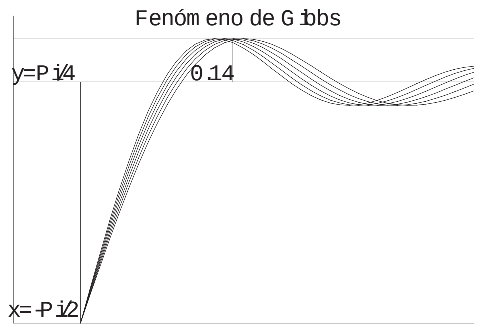


Figura C-9

Obsérvese que si tomamos las funciones para $m = 50, 51, ..., 55$ o las funciones para $m = 201, 201, ..,205$, figuras C-10 y C-11 respectivamente, sigue conservándose la altura 0,14 en todas ellas, con la única diferencia que las abcisas de los valores máximos se van "acercando" (se van desplazando) cada vez más y más a $-\pi/2$. Nótese que ese desplazamiento es determinante para la convergencia uniforme de esta serie hacia la función $f(x) = \pi/4$ en todo intervalo $[-a, a]$ incluido en $]-\pi/2, \pi/2[$.

```
>d11:=plot({seq(s(x,n),n=50..55)},x=-1.6..-1.4,y=0.0..1,color=black):
>display({d9,d10,d11},axes=normal,xtickmarks=0,ytickmarks=0);
```

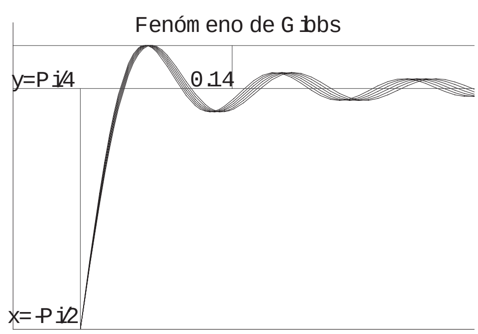


Figura C-10

>d12:=plot({seq(s(x,n),n=201..205)},x=-1.6..-1.4,y=0.0..1,color=black):

>display({d9,d10,d12},axes=normal,xtickmarks=0,ytickmarks=0);

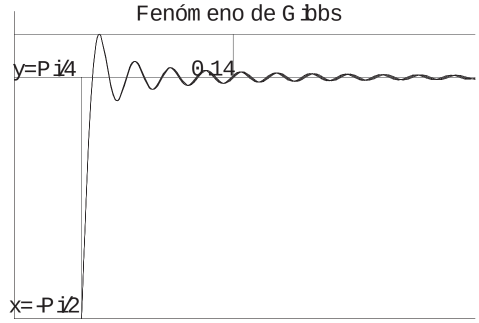


FIGURA C-11

Numéricamente: si realizamos un *zoom* en torno a $x = -\pi/2$ para la función aproximada con $n = 200$

>d11:=plot({seq(s(x,n),n=200..200)},x=-1.58..-1.56,y=-1..1,color=black):

>d12:=plot({[[-1.58,Pi/4],[-1.56,Pi/4]],[[-1.58,-Pi/4],[-1.56,-Pi/4]]},color=black):

>display({d11,d12});

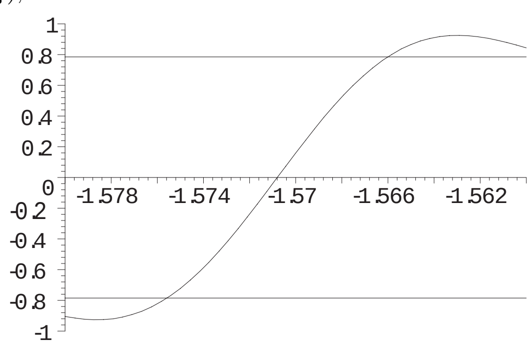


FIGURA C-12

observamos que a la derecha del punto existe un máximo que sobrepasa 0,14 por encima de $\pi/4$:

>evalf(s(-1.563,200)-Pi/4);

$$,1405675366$$

y a la izquierda del punto existe un mínimo que sobrepasa 0,14 por debajo de $-\pi/4$:

>evalf(abs(-Pi/4-s(-1.5788,200)));

$$,1401212046$$

Las mismas argumentaciones pueden hacerse para el punto $x = \pi/2$ y para cualquier valor de m, con la diferencia que ahora, a la izquierda obtendrémos valores máximos y a la derecha mínimos. Tomemos $m = 500$:

>d13:=plot({seq(s(x,n),n=500..500)},x=Pi/2-0.03..Pi/2+0.03,y=-1..1,color=black):
>d14:=plot({[[Pi/2-0.03,Pi/4+0.14],[Pi/2+0.03,Pi/4+0.14]],[[Pi/2-0.03,Pi/4],
[Pi/2+0.03,Pi/4]],[[Pi/2-0.03,-Pi/4-0.14],[Pi/2+0.03,-Pi/4-0.14]],[[Pi/2-0..03,-Pi/4],
[Pi/2+0.03,-Pi/4]]},color=red):
>display({d13,d14});

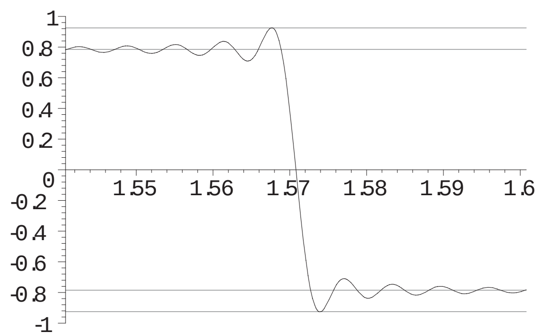


FIGURA C-13

Para m=2000:

>d15:=plot({seq(s(x,n),n=2000..2000)},x=Pi/2-0.003..Pi/2+0.003,y=-1..1,color=black):
>d16:=plot({[[Pi/2-0.003,Pi/4+0.14],[Pi/2+0.003,Pi/4+0.14]],[[Pi/2-0.003,Pi/4],
[Pi/2+0.003,Pi/4]], [[Pi/2-0.003,-Pi/4-0.14],[Pi/2+0.003,-Pi/4-0.14]],[[Pi/2-0.003,-Pi/4],
[Pi/2+0.003,-Pi/4]]},color=red):
>display({d15,d16});

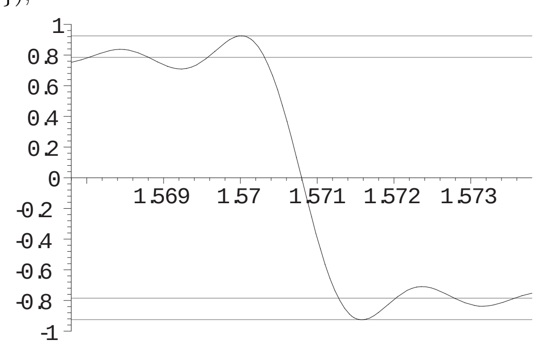


FIGURA C-14

La convergencia es uniforme en $[-a, a]$ contenido en $[-\pi/2, \pi/2]$, para todo $a > 0$, por muy cerca que se encuentre de $\pi/2$.

Veámoslo desde un punto de vista visual. Desde el momento en que el valor de las ordenadas de los máximos de todas las funciones aproximantes (n grande), a la izquierda de $\pi/2$, es prácticamente $\pi/4+0{,}14$ y las ordenadas de los míminos de todas las funciones aproximantes (n grande), a la derecha de $\pi/2$, es igual a $-\pi/4-0{,}14$, por muy pequeño que podamos elegir un $\varepsilon > 0$, siempre podremos encontrar un índice de penetración ν, de tal forma que a partir de él, todas las funciones aproximantes quedan incluidas dentro de la banda de semianchura ε centrada en $\pi/4$.

Para observar la convergencia uniforme utilizamos la gráfica B-15, en cuyo caso el intervalo considerado es $[-\pi/2 + 1/10, \pi/2 - 1/10]$ y $\varepsilon = 1/10$.

```
>restart:with(plots):
>s:=(x,n)->sum((-1)^k*cos((2*k+1)*x)/(2*k+1),k=0..n):
>x[1]:=-Pi/2+0.1:x[2]:=Pi/2-0.1:y[1]:=0.4:y[2]:=1:
>w:=0.1:
>t:=plot({Pi/4+w,Pi/4,Pi/4-w},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],color=black):
>c:=plot({seq(s(x,n),n=20..21)},x=x[1]..x[2],color=black):
>display({t,c},thickness=2);
```

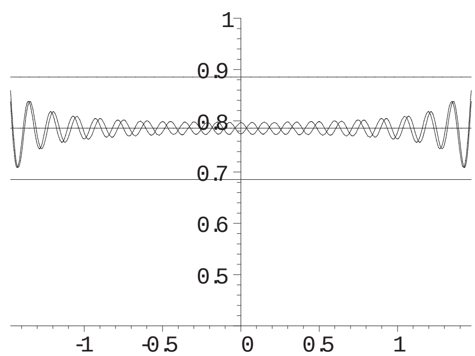


FIGURA C-15

En la gráfica correspondiente a la figura C-16, el intervalo considerado es $[-\pi/2 + 1/100, \pi/2 - 1/100]$ y $\varepsilon = 1/500$. Se constata que parte de las gráficas de las funciones con 20 y 21 sumandos quedan fuera de la banda.

```
>restart:with(plots):
>s:=(x,n)->sum((-1)^k*cos((2*k+1)*x)/(2*k+1),k=0..n):
>x[1]:=-Pi/2+0.01:x[2]:=Pi/2-0.01:y[1]:=0.4:y[2]:=1:
>w:=0.05:
>t:=plot({Pi/4+w,Pi/4,Pi/4-w},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],color=black):
>c:=plot({seq(s(x,n),n=20..21)},x=x[1]..x[2],color=black):
```

>display({t,c},thickness=2);

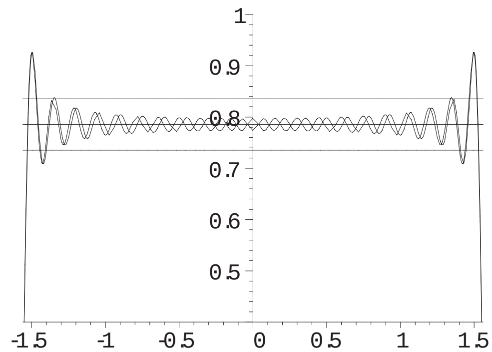


Figura C-16

Manteniendo el intervalo y la banda fijos, el fenómeno de Gibbs implica que los máximos se van desplazando a derecha e izquierda; por simple tanteo podemos ir aumentando n (n^{o}de sumandos) hasta conseguir que las funciones queden en el interior de la banda. Así comprobamos que la convergencia es uniforme.

>c:=plot({seq(s(x,n),n=40..41)},x=x[1]..x[2],color=black):
>display({t,c},thickness=2);

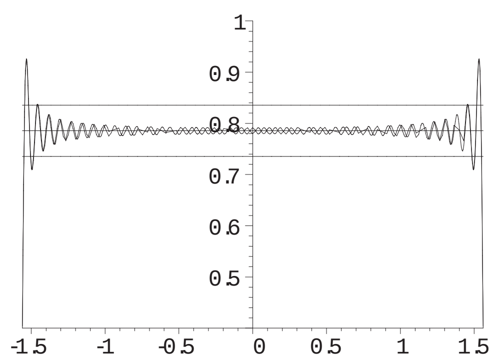


Figura C-17

>c:=plot({seq(s(x,n),n=200..200)},x=x[1]..x[2],color=black):
>display({t,c},thickness=2);

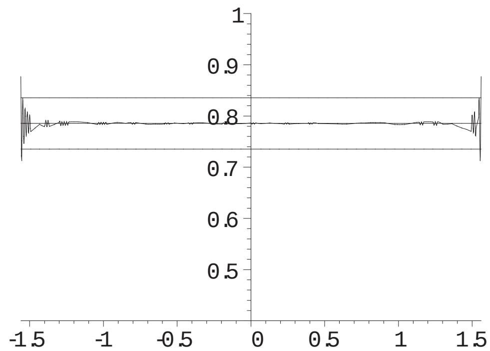


FIGURA C-18

>c:=plot({seq(s(x,n),n=1100..1100)},x=x[1]..x[2],color=black):
>display({t,c},thickness=2);

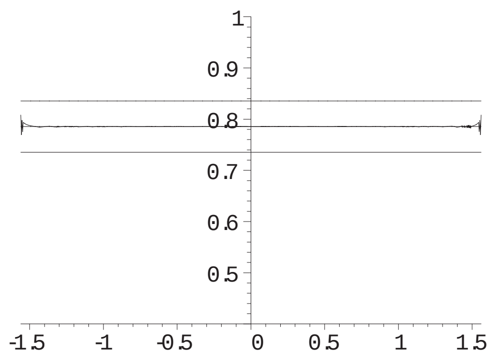


FIGURA C-19

Apéndice D

Ecuación diferencial en derivadas parciales de la cuerda vibrante

Daniel Bernoulli (1700-1782)

$$a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)\right]=\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)$$

Versión de Murray R. Spiegel

([77], págs. 6 y 44; problemas 1.1 y 2.32)

Deducción de la ecuación:

Es bien sabido que esta ecuación es aplicable a las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda flexible y tensa, semejante a una cuerda de una guitarra, a la que en un principio se ha colocado sobre el eje OX (véase Figura D-2) y se ha hecho vibrar. $a^2=\frac{T}{m\mu}$ es una constante, siendo T = tensión de la cuerda y μ = masa por unidad de longitud. Se supone que no hay fuerzas externas actuando sobre la cuerda y que vibra a causa de su elasticidad.

Para realizar la deducción habrá que analizar las variables que aparecen en la Figura D-1.

```
>restart:with(plots):with(plottools):
>d1:=plot(sqrt(x),x=3..10):
>d2:=plot(1/5*(x-10)+sqrt(10),x=10..17):
>d3:=plot(1/5*(x-3)+sqrt(3),x=-3..3):
>d4:=plot([[-3,-6/5+sqrt(3)],[3,-6/5+sqrt(3)],[3,sqrt(3)],[10,sqrt(3)],[10,sqrt(10)],
[17,sqrt(10)],[17,7/5+sqrt(10)]],style=line):
>d5:=textplot({[-1,0.7,`A`],[6.9,1.9, `dx`],[11.9,3.3,`B`],[5.4,2.6,`dS`],[-0.1,1.4,`T`],
[12.8,4,`T`],[3.5,0.2,`x`],[11.2,0.2,`x+dx`],[10.7,2.4,`dy`]}):
>d6 := arrow([3,sqrt(3)], [-3,-6/5+sqrt(3)], .1, .4, 0.1, color=green):
>d7 := arrow([10,sqrt(10)], [17,7/5+sqrt(10)], .1, .4, ..1, color=green):
>d8:=plot([[-3,0],[17,0]]):
>d9:=plot({[[3,0],[3,sqrt(3)]],[[10,0],[10,sqrt(10)]]},color=black):
```

>display({d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9},thickness=3,axes=none,ytickmarks=0,xtickmarks=0);

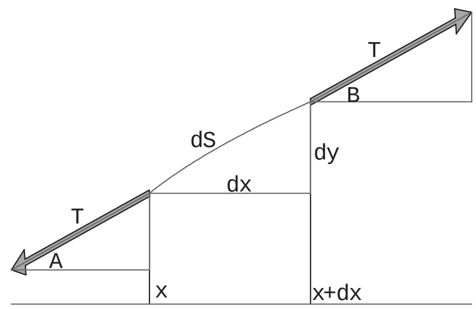


FIGURA D-1

La fuerza vertical sobre $dS = \Delta S$ viene dada por:

$$Tsin(B) - Tsin(A)$$

y para ángulos muy pequeños se tiene que:

$$sin(A) = tg(A)$$

Luego la fuerza vertical sobre ΔS puede escribirse:

>T*Diff(y(x+Delta*x),x)-T*Diff(y(x),x);

$$[T\frac{\partial}{\partial x}y(x + \Delta x) - T\frac{\partial}{\partial x}y(x)]$$

Por otra parte, la ley de Newton nos dice que la fuerza neta es igual a la masa de la cuerda ($\mu\Delta S$) por la aceleración de ΔS (que viene dada por $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon$, con $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta S \to 0$):

$$f = ma = \mu\Delta S\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}y + \varepsilon\right]$$

Por tanto la ecuación toma la forma:

>T*Diff(y(x+Delta*x),x)-T*Diff(y(x),x)=mu*Delta*S*[Diff(y,'$'(t,2))+epsilon];

$$[T\frac{\partial}{\partial x}y(x + \Delta x) - T\frac{\partial}{\partial x}y(x)] = \mu\Delta S\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}y + \varepsilon\right]$$

Por otra parte, si las vibraciones son pequeñas, se tiene que $\Delta S = \Delta x$ y si dividimos ambos miembros de la ecuación anterior por $T\Delta S$ nos queda:

$$\frac{[T\frac{\partial}{\partial x}y(x+\Delta x) - T\frac{\partial}{\partial x}y(x)]}{T\Delta x} = \mu\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}y + \varepsilon}{T}$$

y si tomamos límites cuando Δx tiende a cero llegamos a:

>[T/mu]*Diff(y(x,t),x$2)=Diff(y(x,t),t$2);

$$\left[\frac{T}{\mu}\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)$$

o lo que es lo mismo:

>aˆ2*Diff(y(x,t),x$2)=Diff(y(x,t),t$2);

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t)$$

Resolución de un problema de la cuerda vibrante (Método de separación de variables)

Una cuerda de longitud L está estirada entre los puntos $(0,0)$ y $(L,0)$ sobre el eje x.

En el tiempo $t = 0$ tiene la forma dada por $f(x)$, $0 < x < L$ y queda en libertad para vibrar libremente. Encontrar la elongación de la cuerda en un instante posterior cualquiera.

La ecuación de la cuerda vibrante:

>restart:with(plots):with(inttrans):

>Diff(y,t$2)=aˆ2*Diff(y,x$2);

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)$$

donde $0 < x < L$, $t > 0$ e $y(x,t)$ es la elongación con respecto al eje x en el tiempo t.

>d1:=plot(sin(x/2),x=0..4*Pi,y=-1..5):

>d2:=plot([[3,0],[3,sin(3/2)]]):

>d3:=textplot({[3.8,0.4,‘y(x,t)‘],[12.3,0.4,‘L‘]}):

>display([d1,d2,d3],thickness=2);

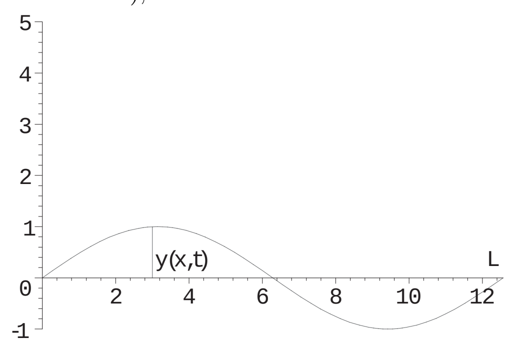


Figura D-2

Dado que los extremos de la cuerda están en $x = 0$ y en $x = L$ se tiene que:

$$y(0,t) = y(L,0) = 0, \quad t > 0.$$

Además, la forma inicial de la cuerda está dada por $f(x)$; por consiguiente:

$$f(x) = y(x,0), \;\; 0 < x < L.$$

Por otra parte, la velocidad inicial de la cuerda es cero y por ello podemos escribir:
>y[t](x,0) = 0;

$$y_t(x,0) = 0$$

Resolvamos este problema de valor de contorno utilizando el método de separación de variables, es decir, tomemos:

$$Y(x,t) = X(x)T(t)$$

de tal forma que la solución $Y(x,t)$ satisfaga las condiciones mencionadas. Nótese que X es sólo función de x y T es sólo función de t.

Como $Y(x,t)$ satisface la ecuación diferencial podemos escribir:

$$X(x)T\text{"}(t) = a^2X\text{"}(x)T(t)$$

la cual dividida por $a^2X(x)T(t)$ se tranforma en:

>Diff(T(t),t$2)/(a^2*T(t))=Diff(X(x),x$2)/X(x);

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)}{a^2T(t)} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)}{X(x)}$$

El primer miembro es sólo función de t (no puede variar con x) y es igual a una función de x (segundo miembro); el segundo miembro es sólo función de x (no puede variar con t) y es igual a una función de t (primer miembro). Además x y t son variables independientes. Por tanto, ambos miembros deben tener algún valor constante en común; a este valor lo denominaremos constante de separación y lo designaremos:

>-lambda^2;

$$-\lambda^2$$

Así obtenemos dos ecuaciones diferenciales a resolver:

>restart:
>Diff(T(t),t$2)+lambda^2*a^2*T(t)=0;

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t)\right] + \lambda^2a^2T(t) = 0$$

>Diff(X(x),x$2)+lambda^2*X(x)=0;

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(x)\right] + \lambda^2X(x) = 0$$

>dsolve(Diff(T(t),t$2)+lambda^2*a^2*T(t),T(t));

$$T(t) = \_C1sin(\lambda at) + \_C2cos(\lambda at)$$

>T:=t->A[1]*sin(lambda*a*t)+B[1]*cos(lambda*a*t);

$$T := t-> A_1sin(\lambda at) + B_1cos(\lambda at)$$

>dsolve(Diff(X(x),x$2)+lambda^2*X(x),X(x));

$$X(x) = \_C1cos(\lambda x) + \_C2sin(\lambda x)$$

>X:=x->A[2]*sin(lambda*x)+B[2]*cos(lambda*x);

$$X := x-> A_2sin(\lambda x) + B_2cos(\lambda x)$$

Por tanto, una solución estará dada por:

>y:=(x,t)->X(x)*T(t);

$$y := (x,t)-> X(x)T(t)$$

>'y(x,t)'=y(x,t);

$$y(x,t) = (A_2sin(\lambda x) + B_2cos(\lambda x))(A_1sin(\lambda at) + B_1cos(\lambda at))$$

De la condición inicial $y(0,t) = 0$ se tiene:

>y(0,t);

$$B_2(A_1sin(\lambda at) + B_1cos(\lambda at))$$

>B[2]:=solve(y(0,t)=0,B[2]);

$$B_2 := 0$$

>y(x,t);

$$A_2sin(\lambda x)\left[A_1sin(\lambda at) + B_1cos(\lambda at)\right]$$

y como A_2 no puede ser cero, organizando las constantes, se tiene:

>y:=(x,t)->sin(lambda*x)*(A*sin(lambda*a*t)+B*cos(lambda*a*t));

$$y := (x,t)-> sin(\lambda x)(Asin(\lambda at) + Bcos(\lambda at))$$

Por otra parte, de la condición inicial y(L,t)=0 se obtiene:

>y(L,t)=0;

$$sin(\lambda L)(Asin(\lambda at) + Bcos(\lambda at)) = 0$$

de donde:

$$sin(\lambda L) = 0$$

Necesariamente:

>lambda:=m*Pi/L;

$$\lambda = \frac{m\pi}{L}$$

puesto que el segundo factor del primer miembro de $y(L,t) = 0$ no debe ser cero. Por otra parte, la derivada $\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)$ toma la forma:

>'Diff(y(x,t),t)'=diff(y(x,t),t);

$$\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) = \frac{m\pi a}{L}\sin(\frac{m\pi x}{L})\left[A\cos(\frac{m\pi at}{L}) - B\sin(\frac{m\pi at}{L})\right]$$

y de la condición de contorno $\frac{\partial}{\partial t}y(x,0) = 0$:

>simplify(subs(t=0,diff(y(x,t),t)));

$$\frac{Am\pi a}{L}\sin(\frac{m\pi at}{L})$$

se llega a que:

>A:=solve(sin(m*Pi*x/L)*A*m*Pi*a/L,A);

$$A := 0.$$

Así pues, la función es:

>'y(x,t)'=y(x,t);

$$y(x,t) = \sin(\frac{m\pi x}{L})B\cos(\frac{m\pi at}{L})$$

Para que se verifique la condición de contorno $y(x,0) = f(x)$ será necesario superponer las soluciones:

>'y(x,t)'=Sum(C[m]*sin(m*Pi*x/L)*cos(m*Pi*a*t/L),m=1..infinity);

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{m\pi at}{L})$$

y en consecuencia $f(x)$ toma la forma:

>'y(x,0)'=Sum(C[m]*sin(m*Pi*x/L)*cos(m*Pi*a*0/L),m=1..infinity);

$$y(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\frac{m\pi x}{L})$$

Escribamos sólo los cuatro primeros sumandos de la serie infinita anterior:

```
>sum(C[m]*sin(m*Pi*x/L)*cos(m*Pi*a*0/L),m=1..4);
```

$$C_1 \sin(\tfrac{\pi x}{L}) + C_2 \sin(2\tfrac{\pi x}{L}) + C_3 \sin(3\tfrac{\pi x}{L}) + C_4 \sin(4\tfrac{\pi x}{L})$$

Teniendo en cuenta la teoría de las series de Fourier, los coeficientes son de la forma:

```
>C[m]:=2/L*Int(f(x)*sin(m*Pi*x/L),x=0..L);
```

$$C_m = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\tfrac{m\pi x}{L}) dx$$

En consecuencia la solución será:

```
>'y(x,t)'=Sum(2/L*[Int(f(x)*sin(m*Pi*x/L),x=0..L)]*sin(m*Pi*x/L)*cos(m*Pi*a*t/L),
    m=1..infinity);
```

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \left[\int_0^L f(x) \sin(\frac{m\pi x}{L}) dx \right] \sin(\frac{m\pi x}{L}) \cos(\frac{m\pi a t}{L}) \right]$$