Homotopía Cónica.

por

Francisco Javier Díaz Díaz.

Memoria realizada para optar al grado de Doctor en Matemáticas. La Laguna, Julio de 1998

Contenido

Introducción.

El concepto clásico de homotopía en espacios topológicos desarrollado por J.H.C. Whitehead en 1950 [W2] se basa en el uso de un funtor cilindro para obtener identificaciones de aplicaciones continuas, dando lugar a grupos, sucesiones exactas y otros entes algebraicos que permiten un conocimiento más amplio de los espacios. A partir del cilindro topológico, identificando una de sus tapas a un punto, surge el funtor cono, que preserva los objetos algebraicos obtenidos a través del cilindro.

Otro procedimiento desde el punto de vista homotópico para el estudio de los espacios topológicos consiste en definir un funtor con dominio esa categoría y codominio una algebraica, en la cual se puede definir una homotopía, entendiendo por ello una relación de equivalencia con propiedades similares a las de la homotopía clásica. La aproximación simplicial introducida por D.W. Kan en 1955 [Ka] es uno de los primeros y más importantes ejemplos en este sentido.

Con la noción anterior de homotopía en categorías algebraicas, existen también ejemplos que no se corresponden, en principio, con ningún funtor asociado desde los espacios topológicos, entre los cuales destacan, entre otras cosas por ser precursores en este sentido, las homotopías proyectiva e inyectiva creadas por B. Eckmann y P.J. Hilton para R-módulos entre los años 1956 y 1958 [E] [Hi1] [Hi2].

En 1961 P.J. Huber intenta relacionar la homotopía de Whitehead en espacios topológicos con las de Eckmann y Hilton para R-módulos [Hub2], utilizando para ello las construcciones standard definidas por R. Godement en

1958 [Go]. Huber asocia así a los espacios topológicos y R-módulos complejos semisimpliciales cuyos grupos y sucesiones exactas coinciden con los ya conocidos. Pero de sus axiomas no se deduce que los complejos asociados sean necesariamente de Kan, lo cual no permite, en general, la obtención de grupos y sucesiones exactas de homotopía. El cono topológico es un ejemplo de construcción standard dual, pudiéndose considerar por ello la teoría de Huber como uno de los primeros intentos de axiomatizar la homotopía a través de un funtor cono.

Posteriormente, H. Kleisli en 1962 [Kl1] y J.A. Seebach Jr. en 1972 [Se] intentan generalizar el concepto de cono topológico basándose en las homotopías ya mencionadas de Eckmann y Hilton para R-módulos, pero sus desarrollos sólo son válidos en categorías muy particulares, aditivas con propiedades adicionales en el primer caso y con objetos inyectivos en el segundo, lo cual hace que dichas axiomáticas sean muy pobres, pues incluso en categorías aditivas existen homotopías no inyectivas ni proyectivas.

La axiomática de homotopía funtorial sobre categorías aditivas más amplia desarrollada hasta el momento, pues engloba todos los ejemplos anteriormente mencionados y da origen a otros no proyectivos ni inyectivos, es la introducida por S. Rodríguez-Machín en 1990 [R] y [P-]. Usando axiomas similares a los de categoría con un cilindro natural descritos por H.J. Baues [B2] y un funtor cono obtiene grupos de homotopía, sucesiones exactas de homotopía y, a semejanza de lo hecho por Huber con las construcciones standard, Δ-grupos abelianos cuyos grupos de homotopía coinciden con los obtenidos a través del cono. En esta teoría todos los grupos de homotopía, incluido el primero, son abelianos, y dado un cilindro en el sentido de Baues es posible asociarle un cono del tipo de Rodríguez-Machín, y viceversa, de forma que las teorías de homotopía resultantes son coincidentes.

Existen diversas teorías de homotopía algebraica que no utilizan funtores, destacando, pues la mayoría de las homotopías existentes en la actualidad son ejemplos de ellas, las categorías de modelo creadas por D.G. Quillen en 1969 [Q1] y más aún, por no ser una teoría autodual, las categorías cofibradas obtenidas por H.J. Baues en 1989 [B2]. La exigencia de límites y colímites finitos, así como el hecho de ser una teoría autodual, posibilitan las existencia de homotopías que no sean categorías de modelo. Además, las dificultades que presentan ciertos cálculos en el caso de teorías no funtoriales, el hecho de que gran número de las homotopías conocidas sí lo sean y, por último, que las categorías cofibradas de Baues incluyan a las homotopías cilíndricas, sugiere que una axiomática basada en un funtor cono, no necesariamante incluida en dichas categorías cofibradas y que englobe a la mayoría de las homotopías es de gran importancia a la hora de simplificar cálculos y de obtener nuevos ejemplos, así como para llegar a dar una axiomática definitiva en homotopía.

La teoría de homotopía algebraica aquí presentada usa como cono la construcción standard dual de Huber [Hub2], junto con axiomas relativos a cofibraciones deducidos de los respectivos dados por Baues en las categorías con un cilindro natural [B2]. Esto permite, por una parte, desarrollar la teoría desde el punto de vista clásico, sin asociar funtorialmente una categoría algebraica, y por otro lado usar las técnicas de Huber para obtener complejos semisimpliciales, que en este caso son de Kan, cuyos grupos y sucesiones exactas coinciden con los obtenidos a través del primer método.

Análogamente a lo que sucede en categorías cofibradas y a diferencia de lo que ocurre en categorías con un cilindro natural, sólo se puede hablar de homotopía relativa a una cofibración, pues no se exige la existencia de objetos cofibrantes, ni siquiera de objeto inicial. Esto impide usar, a semejanza de lo hecho con cilindro, las equivalencias de homotopía como equivalencias débiles, pues no se puede asegurar su existencia y por ello, en principio, una categoría con cono natural no tiene por qué ser una categoría cofibrada.

No obstante, haciendo uso del concepto aquí denominado "homotopía generalizada" se obtienen grupos de homotopía relativa basados en un morfismo que, a su vez, dan lugar a sucesiones exactas cuando se tiene un par. La homotopía generalizada se obtiene para evitar las categorías punteadas con su funtor suspensión, tan necesarias en otras teorías de homotopía algebraica para la obtención de grupos, y que de esta forma resultan como un caso particular cuando se toma como morfismo base del grupo al cero. Este concepto de homotopía generalizada se puede también desarrollar de forma análoga en la mayoría de las teorías que hacen uso de cofibraciones, obteniéndose no sólo los grupos de homotopía relativa basados en un morfismo sino también, usando las cofibraciones de pares adecuadas, las sucesiones exactas correspondientes, resultando los grupos y sucesiones exactas ya existentes como caso particular. Las categorías cofibradas y las categorías con un cilindro natural son importantes ejemplos de lo anteriormente dicho.

El producto de los números reales induce una transformación natural desde el doble cilindro en el cilindro topológico de forma que su composición con las inclusiones asociadas a éste y consigo misma dan relaciones entre estas transformaciones y la proyección. Usando estas relaciones como definición de producto natural en un cilindro, si se tiene una categoría con objeto final y un cilindro natural que admita un producto del tipo anterior, se induce una estructura de cono, en el sentido axiomático aquí presentado, cuya homotopía relativa coincide con la asociada al cilindro. Este producto natural no sólo existe, como en un principio pudiera pensarse, para el cilindro topológico, sino que también está presente en otros que se relacionan de alguna forma con él, como por ejemplo el cilindro en la categoría de espacios exteriores para el estudio de la homotopía propia, o sin ninguna relación directa, como pueden ser los cilindros de la homotopía de los complejos de cadena sobre categorías aditivas.

El cono de Rodríguez-Machín es también un caso particular de esta axiomática, pues en categorías aditivas la operación de los grupos de homotopía viene unívocamente determinada por la suma de morfismos existente en la categoría pudiéndose, cuando la categoría tiene conúcleos o las cofibraciones se definen por la propiedad de extensión de nulhomotopía, reducir el número y la exigencia de los axiomas. De esta forma, homotopías proyectivas e inyectivas similares a las definidas por Eckmann y Hilton para R-módulos, así como otras no de este tipo relacionadas con funtores Hom y productos tensoriales pueden ser encuadradas dentro de esta axiomática.

El concepto dual de categoría con un cono natural se ha denominado categoría con un cocono natural, y es el equivalente a los desarrollos usando fibraciones en la homotopía clásica, a las categorías con un funtor caminos naturales y a las construcciones standard de Huber. Como sucede con la teoría cilindro-caminos, en determinadas circunstancias una homotopía puede venir definida mediante un par de funtores adjuntos cono-cocono. Es más, todo par de funtores adjuntos induce nuevas estructuras duales de este tipo a partir de una dada, pudiéndose así crear homotopías en categorías relacionadas por dichos funtores.

El trabajo que aquí se presenta está dividido en cuatro partes. La primera es un capítulo introductorio donde se hacen constar los fundamentos categóricos que se van a utilizar, así como la notación. La parte segunda comprende los capítulos II, III y IV, y en ella se desarrolla la teoría de homotopía algebraica a través de un cono, comenzando por el concepto de homotopía relativa a una cofibración, siguiendo con la creación de los grupos de homotopía y finalizando con las sucesiones exactas asociadas a un par. La tercera parte consta de un capítulo que analiza el caso particular de las categorías punteadas, expresando su homotopía en función de la generalizada. La última parte, capítulo VI, está dedicada a la dualización de la teoría y a la obtención, a partir de desarrollos teóricos, de ejemplos concretos de homotopías que verifican la axiomática.

En el capítulo primero, como ya se ha dicho, se dan los fundamentos de la teoría de categorías que se van a usar a lo largo del trabajo. Estos fundamentos son definiciones y propiedades que poseen los distintos conceptos definidos, y que se darán sin demostración, pues éstas pueden encontrarse en cualquier tratado general de teoría de categorías, salvo que dichas demostraciones adopten un punto de vista no usual o sea preciso recurrir a ellas a lo largo del desarrollo. También se fijará la notación categórica que se utilizará en los siguientes capítulos. Se hace notar que el concepto de diagrama, al introducirse en el primer párrafo cuando aún no se ha dado el de funtor, tiene una definición poco usual aunque coincidente con la habitual. Asimismo sucede con el concepto de colímite, íntimamente relacionado con el anterior. Por esto, las demostraciones en estos casos sí son indicadas.

Este capítulo consta de tres párrafos. En el primero se dan los principales conceptos categóricos, sin hacer uso de funtores ni transformaciones naturales, presentando la teoría de dualización. Cabe señalar que se trabaja en categorías pequeñas, aunque la teoría es fácilmente extendible a categorías en el sentido amplio de la palabra, también denominadas por algunos autores metacategorías. Esto se hace por considerar el concepto de categoría pequeña lo suficientemente amplio para el propósito que se desea. En el segundo párrafo se realiza un desarrollo similar al hecho en el anterior, para los conceptos de funtor y transformación natural. Por último, en el tercero se define la categoría denominada de push outs, y se estudian algunas de sus propiedades, que van a ser fundamentales en el capítulo V, dedicado a las categorías punteadas. En este caso, a diferencia de los párrafos anteriores, sí se realizan las demostraciones pertinentes.

El segundo capítulo tiene como objetivo principal definir homotopía relativa a una cofibración mediante la axiomática establecida. Consta de dos párrafos. En el primero se da el concepto de categoría con un cono natural, usando la construcción standard dual de P.J. Huber [Hub2] como definición de cono junto con axiomas (de push out, cofibración y cono relativo) similares, desde el punto de vista de la nulhomotopía, a los respectivos de las categorías con un cilindro natural dadas por H.J. Baues [B2].

El axioma de push out da un método para decidir cuándo un morfismo es cofibración, permite extender la homotopía relativa a cofibraciones con codominio contráctil hasta otras no necesariamente de este tipo, y hace que el axioma de cono relativo tenga sentido, obteniéndose de esta forma a partir de una cofibración dada, mediante un proceso iterativo, una sucesión de cofibraciones que dará lugar a los grupos de homotopía relativos a ésta. La transformación de los push outs cofibrados en push outs por el funtor cono hace que los grupos de homotopía relativos a cofibraciones relacionadas mediante push outs sean indistinguibles.

El axioma de cofibración hace que los isomorfismos sean cofibraciones, permite crear la sucesión exacta asociada a un par así como los grupos de homotopía esférica, da otro método de decisión sobre cuándo un morfismo es cofibración y hace que la relación de homotopía sea de equivalencia, obteniéndose así una estructura de grupo en los corchetes de homotopía relativa.

El axioma de cono relativo, además de permitir crear los grupos de homotopía relativos a una cofibración, como ya se ha dicho, hace que el cono de una cofibración también lo sea.

La propiedad de extensión de nulhomotopía dada en el axioma de cofibración es equivalente, por tener una retracción el cono de la inclusión de un objeto en su cono, a la propiedad de extensión de homotopía para morfismos homótopos al cero en categorías con un cilindro natural. Dicha retracción siempre existe cuando el cilindro tiene producto natural.

Cuando el axioma de cono relativo se cumple para cualquier morfismo que verifique la propiedad de extensión de nulhomotopía y éstos tienen push outs, entonces dichos morfismos se pueden usar como cofibraciones, y se dirá que la categoría tiene "todas las cofibraciones". En este caso las construcciones standard duales de Huber, si el funtor cono transforma push outs cofibrados en push outs, son categorías con un cono natural.

Cuando el morfismo inicial en una categoría con un cono natural es cofibración, esto es, todos los objetos son cofibrantes, se puede suprimir, a semejanza de lo que ocurre en una categoría con cilindro natural, en el axioma de cofibración que las identidades e inclusiones en su cono de los objetos, sean cofibraciones.

En el segundo párrafo se define homotopía relativa a una cofibración cuyo codominio sea un objeto contráctil, haciendo uso del axioma de cono relativo y de una retracción para la inclusión del objeto codominio en su cono, siendo dicha definición independiente de la retracción elegida. Por la propiedad de extensión de nulhomotopía esta relación de homotopía es de equivalencia, y compatible con la composición de morfismos. Hay que observar que para la compatibilidad a izquierda, al estar trabajando con homotopía relativa, es necesario un cuadrado conmutativo que relacione las cofibraciones.

El tercer capítulo está totalmente dedicado a la creación de los grupos de homotopía de un objeto relativos a una cofibración y basados en un morfismo.

En este sentido, en el primer párrafo se crea el grupoide de homotopía de un objeto relativo a una cofibración cuyo codominio sea un contráctil fundamental, esto es, un objeto contráctil que verifique con alguna de las retracciones para la inclusión en su cono una propiedad similar a la segunda del axioma de cono. El método utilizado es bastante frecuente en homotopía algebraica, usando las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la relación de homotopía para las identidades, caminos inversos y composición de caminos, respectivamente. De esta forma, el espacio de lazos basado en cualquier identidad adquiere estructura de grupo, denominado primer grupo de homotopía del objeto relativo a la cofibración basado en el morfismo que hace de identidad. Estos grupoides tienen carácter funtorial respecto a cofibraciones y objetos, de forma que si la cofibración o el objeto es contráctil, los primeros grupos son triviales.

Cuando dos cofibraciones fundamentales están relacionadas por push outs, los grupoides de un objeto relativos a ellas son isomorfos. En consecuencia, si dos cofibraciones están relacionadas por un push out y una de ellas es fundamental se puede extender la definición de homotopía relativa a la otra, usando el isomorfismo anterior. También existe un isomorfismo entre la homotopía relativa a una cofibración fundamental y la relativa a la composición de ésta con la inclusión en el cono de su codominio, por lo que basta considerar homotopía relativa a cofibraciones con codominio un cono.

Los grupos de homotopía se definen en el segundo párrafo, usando la sucesión de cofibraciones procedente de la iteración, por el axioma de cono relativo, de una dada, y la proyección natural que existe desde el doble cono en el cono. En este sentido, el n-grupo de homotopía relativo a una cofibración de un objeto basado en un morfismo coincide con el primer grupo de homotopía relativo a la (n-1)-iteración de la cofibración, de dicho objeto, basado en la composición de la proyección desde el n-cono con el morfismo.

El cono relativo actúa funtorialmente sobre las cofibraciones, de forma que relaciona mediante push outs las iteraciones de una cofibración relacionada por push outs con otra con las iteradas de la segunda, produciéndose así un isomorfismo entre los grupos relativos a dichas cofibraciones.

Los grupos de homotopía definidos tienen carácter funtorial respecto a cofibraciones y morfismos base, de forma que sobre cofibraciones contráctiles o morfismos con codominio contráctil son triviales. En categorías punteadas existe un isomorfismo natural entre la homotopía relativa al coproducto finito de cofibraciones y el producto de los grupos relativos a ellas. Usando, en estas categorías, el morfismo cero, surgen los grupos de homotopía relativos a una cofibración y los referidos a un objeto, siendo isomorfos al corchete de homotopía desde la n-suspensión del objeto, como sucede en la mayoría de las teorías de homotopía conocidas. Es por esto que se ha denominado a la homotopía aquí introducida "generalizada". Para los grupos de homotopía referidos a un objeto es suficiente la existencia de una retracción para la inclusión del cono en el doble cono, pudiéndose así prescindir de la proyección natural.

En el capítulo cuarto se crean las sucesiones exactas de grupos de homotopía relativas a una cofibración de un par basados en un morfismo. Consta de dos párrafos. El primero está dedicado al estudio de la categoría de pares, que en este caso tiene como objetos cofibraciones. La estructura de cono de la categoría original dota a la de pares de un cono natural, donde las cofibraciones son morfismos de pares cuya componente entre los dominios es cofibración y de forma que el morfismo inducido desde el push out de ésta con la cofibración dominio, en el cuadrado conmutativo de dicho morfismo sea también cofibración. Obsérvese que, de esta forma, la componente entre los codominios es cofibración. Al tener la categoría de pares una estructura de cono natural, todo lo dicho en los capítulos II y III sigue siendo válido, pudiéndose así hablar de grupos de homotopía relativos a una cofibración de un par basados en un morfismo de pares.

Las sucesiones exactas asociadas a un par se crean en el segundo párrafo de este capítulo, definiendo el (n+1)-grupo de homotopía relativo a una cofibración de un par basado en un morfismo con codominio el dominio del par, como el n-grupo de homotopía relativo a la cofibración de pares con componentes la cofibración dada y su cono, del par mencionado, basado en el morfismo de componentes el dado, y la composición de la proyección desde el cono con dicho morfismo y la cofibración asociada al par.

Los homomorfismos de la sucesión se definen de forma similar a como se hace en las distintas teorías de homotopía algebraica, necesitando para la exactitud, como también sucede en ellas, un isomorfismo que relacione el corchete de homotopía desde el n-cono de la inclusión con el corchete de homotopía desde el cono de la inclusión del (n-1)-cono.

Las sucesiones exactas asociadas a un par relativas a una cofibración y referidas a un objeto son también casos particulares de las anteriores, cuando se trabaja en categorías punteadas y se utiliza como morfismo base el cero. Estas sucesiones dan lugar a las asociadas a un par de la homotopía ordinaria.

Las sucesiones exactas definidas tienen carácter funtorial respecto a las cofibraciones, a los pares y al morfismo base.

En el capítulo V, a partir de una categoría con cono natural se definen las categorías punteadas asociadas a dicho cono, y se relaciona, al poseer éstas también un cono natural, su homotopía con la generalizada en la categoría original. En el primer párrafo, dado un objeto arbitrario se define la categoría punteada asociada a éste como la subcategoría llena de la categoría bajo el cono del mismo que tiene como objetos cofibraciones. Esta categoría, definiendo el cono de un objeto cofibración como la inducida del cono de dicha cofibración en el push out de ésta con la proyección natural desde el doble cono en el cono del objeto distinguido, y tomando como cofibraciones los morfismos de la categoría que lo sean en la original, tiene efectivamente una estructura de categoría punteada con cono natural, donde el punto es la identidad sobre el cono del objeto distinguido.

En el párrafo segundo, usando las propiedades relativas a push outs vistas en el párrafo tercero del capítulo I, se relacionan las construcciones punteadas cono y cono relativo con las respectivas de la categoría original, viéndose de esta forma que la homotopía, grupos de homotopía generalizada y sucesiones exactas de éstos relativos a una cofibración, coinciden con los respectivos relativos a otra en la categoría primitiva. Como consecuencia de esto surgen los grupos referidos a un objeto en la primera categoría como grupos de homotopía esféricos en la punteada. Se destaca como caso particular la categoría punteada asociada al objeto inicial, si éste existe, que da origen a los denominados grupos de homotopía standard, coincidentes en la categoría de espacios topológicos con los grupos de homotopía de un objeto basados en un punto.

El capítulo VI está dedicado a la dualización de la teoría en el párrafo primero y a la presentación de ejemplos en los dos siguientes. La dualización se hace únicamente con dos objetivos, distinguir los resultados importantes obtenidos en los cuatro capítulos precedentes y fijar la notación y denominación que se dará a los conceptos duales.

En el párrafo segundo se estudian ejemplos generales de la teoría axiomática. En este sentido se ve que es suficiente tener un cono para que se generen unas cofibraciones de forma que, si dicho cono conserva push outs y la inclusión natural es una de estas cofibraciones, se tenga una categoría con cono natural. Esto tiene gran importancia, pues dado un funtor adjunto a derecha (izquierda) de un cono (cocono) con la inclusión (proyección) natural una cofibración (fibración) generada, se induce un cocono (cono) de forma que, si la categoría posee pull backs (push outs), los grupos de homotopía esféricos coinciden con los respectivos coesféricos.

En categorías aditivas, los grupos de homotopía relativos a una cofibración y los referidos a un objeto tienen su operación coincidente con la inducida por la suma de morfismos, y en consecuencia no es necesario exigir que el cono conserve push outs cofibrados. Además, dado un cono en una categoría aditiva con conúcleos, con las cofibraciones generadas se induce una estructura de cono natural con todas las cofibraciones en el sentido expresado anteriormente. Esta estructura natural no depende del cono elegido, sino de la familia de objetos contráctiles generados por él, esto es, a idénticas familias estructuras coincidentes. Lo que hace sospechar que, en cierta manera, son los objetos contráctiles los que van a determinar la homotopía.

A semejanza de lo que ocurre en espacios topológicos, donde el producto numérico real induce una aplicación continua del cuadrado en el intervalo unidad que se puede trasladar a otra desde el doble cilindro en el cilindro de un espacio, dando lugar a la proyección natural desde el doble cono en el cono, si una categoría con cilindro natural tiene objeto final y una transformación natural del doble cilindro en el cilindro verificando propiedades similares a las del producto anteriormente citado, con las inclusiones y proyecciones naturales, se induce una estructura de cono natural con las mismas cofibraciones y homotopía relativa coincidente.

Se termina esta memoria en el párrafo tercero, dando ejemplos concretos de homotopías que verifican la axiomática. El par de funtores producto tensorial - Hom, definidos de forma adecuada en ciertas categorías aditivas (grupos abelianos, R-casi módulos, R-módulos) es adjunto, y dota a éstas de estructuras de cono y cocono naturales cuyos grupos esféricos coinciden con los respectivos coesféricos. También las homotopías de los complejos de cadena en categorías abelianas y la ordinaria de los espacios topológicos punteados verifican lo anterior.

La homotopía proyectiva (inyectiva) definida por Eckmann y Hilton para R-módulos es un ejemplo de categoría con cocono (cono) natural que no conserva, en general, pull backs (push outs), pero que al ser aditiva permite definir los grupos de homotopía relativos a una fibración (cofibración) y los referidos a un objeto. Al no conservar pull backs (push outs), el funtor cocono (cono) no tiene adjunto a izquierda (derecha), y se puede asegurar que dicha homotopía no puede ser obtenida por una estructura dual a la dada de cocono (cono).

Los espacios topológicos, con su funtor cono, tienen estructura de categoría con cono natural, tanto con las cofibraciones definidas por la propiedad de extensión de homotopía como con las cofibraciones cerradas, coincidiendo la homotopía cónica con la homotopía ordinaria de los espacios topológicos.

Por último, la homotopía de los espacios exteriores también es una homotopía cónica, pues su cilindro tiene un producto natural.

Capítulo I

Teoría de categorías.

Uno de los soportes axiomáticos de la homotopía algebraica es la teoría de categorías. En este sentido es conveniente conocer los principales elementos y resultados de la misma. Aquí se expresan, haciendo hincapié en la notación, aquéllos que serán útiles a lo largo del desarrollo de esta axiomática de homotopía, dando las propiedades básicas sin demostración, pues pueden hallarse en cualquier tratado general de teoría de categorías, como por ejemplo *"Categories for the Working Mathematician"* de S. Mac Lane [M] o los *"Handbook of Categorical Algebra"* de F. Borceux [Bo].

Estudios particulares se hacen de los colímites en las categorías de pares y de push outs de una dada, relacionándolos con los respectivos en la original. Se obtienen así resultados interesantes que darán gran maniobrabilidad en el desarrollo de la teoría.

I.1 Categorías.

El concepto básico donde se fundamenta la teoría de categorías es, como indica su nombre, el de categoría. Partiendo del mismo se van introduciendo otros nuevos, que se han denominado categóricos.

El proceso de dualización permite hacer el desarrollo de la teoría relativa a estos conceptos desde un punto de vista parcial, atendiendo sólo a un aspecto de ellos, pues su aspecto dual es garantizado por dicho proceso.

Se estudia la relación entre los conceptos categóricos en la categoría de pares de una dada y los respectivos en ésta, usando para ello la noción de colímite. Surgen así teoremas relacionantes generales que también tienen su versión en las categorías bajo y sobre un objeto.

Dado un conjunto, siempre es posible obtener uno nuevo conteniendo al primero propiamente y que tenga como elemento a un ente "elegido". Teniendo en cuenta esto y, aunque existen otras definiciones más generales donde la teoría que posteriormente se desarrolla sería cierta, se ha preferido utilizar

Definición I.1.1 Una *categoría* $\mathbf{C}$ es un conjunto cuyos elementos se denominan *objetos de* $\mathbf{C}$, con las siguientes propiedades

1. Todo par (X,Y) de objetos de $\mathbf{C}$ tiene asociado un conjunto notado por $Hom_{\mathbf{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, cuyos elementos se denominan *morfismos de* $\mathbf{C}$ *con dominio* X *y codominio* Y, y se representan por $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$. $Hom_{\mathbf{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ se representará también por $Hom(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ si no hay posibilidad de confusión.

2. Existe una aplicación $c: Hom(\mathrm{X},\mathrm{Y})\times Hom(\mathrm{Y},\mathrm{Z})\to Hom(\mathrm{X},\mathrm{Z})$, notada por $c(f,g)=gf$, verificando $(hg)f=h(gf)$. A c se le denomina *composición de morfismos* y $(hg)f=h(gf)$ se notará simplemente por hgf.

3. Para todo objeto X existe el *morfismo identidad* $1_{\mathrm{X}}\in Hom(\mathrm{X},\mathrm{X})$ ve-

rificando $1_X f = f$ y $g 1_X = g$, para todo morfismo f con codominio X ($codom\ f = X$) y todo morfismo g con dominio X ($dom\ g = X$).

Dados morfismos f y g en $\mathbf{C}$ con codominios X e Y, respectivamente, se notará $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)^{g(f)} = \{h : X \to Y \ tales\ que\ hf = g\}$.

Con la anterior definición los conjuntos con sus aplicaciones se pueden considerar una categoría, que se notará por **Set**, de forma que "elegido" un conjunto siempre se puede suponer objeto de la misma. Análogamente, se pueden interpretar como categorías:

Grp $\equiv$ Grupos con los homomorfismos de grupos.

Ab $\equiv$ Grupos abelianos con los homomorfismos de grupos.

$_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ $\equiv$ R-módulos a izquierda con sus homomorfismos.

$\mathbf{M}_{\mathbf{R}}$ $\equiv$ R-módulos a derecha con sus homomorfismos.

Top $\equiv$ Espacios topológicos con las aplicaciones continuas.

Definición I.1.2 Una categoría $\mathbf{S}$ se dirá *subcategoría* de otra dada $\mathbf{C}$ cuando el conjunto de objetos de $\mathbf{S}$ es subconjunto del conjunto de objetos de $\mathbf{C}$, $Hom_{\mathbf{S}}(X, Y) \subset Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ para todo par de objetos X, Y de $\mathbf{S}$ y se conservan composiciones e identidades.

Atendiendo a propiedades básicas de las operaciones, se obtiene para morfismos

Definición I.1.3 Dado un morfismo $f : X \to Y$, se dirá que f es

a) *sección* si tiene inversa a izquierda (existe $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$).

b) *retracción* si tiene inversa a derecha (existe $g : Y \to X$ tal que $fg = 1_Y$).

c) isomorfismo si es sección y retracción.

d) monomorfismo si es simplificable a izquierda ($fg = fh \Rightarrow g = h$).

e) epimorfismo si es simplificable a derecha ($gf = hf \Rightarrow g = h$).

f) bimorfismo si es monomorfismo y epimorfismo.

Dos objetos X e Y se dirán *isomorfos* ($\mathrm{X} \cong \mathrm{Y}$) cuando exista un isomorfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. En este caso la inversa a izquierda y la inversa a derecha coinciden y se notará por f^{-1}.

Definición I.1.4 Un *grupoide* es una categoría en la cual todos los morfismos son isomorfismos.

Proposición I.1.1 *Para todo objeto* X *de un grupoide* **G**, $Hom(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ *tiene estructura de grupo con la composición de morfismos.*

Referente a objetos se distinguen, por su utilidad y relación con posteriores conceptos

Definición I.1.5 Un objeto X se dirá

a) objeto inicial si $Hom(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ unitario, para todo objeto Y de **C**.

b) objeto final si $Hom(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ unitario, para todo objeto Y de **C**.

c) objeto cero si es inicial y final.

Los objetos anteriores se notarán, respectivamente, por ϕ, ε y 0, y los únicos morfismos existentes por $\phi_{\mathrm{Y}} : \phi \to \mathrm{Y}$, $\varepsilon_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y} \to \varepsilon$ y $0 = \phi_{\mathrm{Z}}\varepsilon_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$.

Nótese que los objetos inicial, final y cero, en caso de existir, son únicos salvo isomorfismo, y que pueden existir objeto inicial y final pero en cambio no existir objeto cero.

La teoría de dualización aplicada a la axiomática categórica permite, al ser ésta autodual, estudiar sólo un aspecto de los problemas planteados, pues los resultados que se obtengan serán ciertos si y sólo si lo son sus respectivos duales.

Para el desarrollo de este concepto son necesarios otros previos.

Definición I.1.6 Una *sentencia categórica* es cualquier afirmación que se pueda expresar usando únicamente términos representativos de los conceptos objeto, morfismo, identidad, composición, dominio y codominio, partículas conectivas y cuantificadores. *Dualizar* una sentencia categórica consiste en intercambiar dominios y codominios, además del orden de las composiciones, en su expresión.

Obviamente, la dual de una sentencia categórica dual coincide con la sentencia categórica original.

Definición I.1.7 Una sentencia categórica se dice *autodual* cuando su dual coincide consigo misma.

En este sentido los axiomas de categoría (asociatividad de la composición e identidades) son autoduales. Por consiguiente, una sentencia categórica es verdadera si y sólo si lo es su dual (Principio de dualidad). En consecuencia, a partir de aquí y hasta el final del presente capítulo, sólo se indicará una de ellas.

Definición I.1.8 Un *concepto categórico* es el que se puede definir mediante una sentencia categórica. Se entiende por *concepto categórico dual* el definido por la sentencia categórica dual.

Proposición I.1.2 *La dual de una sentencia categórica expresada usando conceptos categóricos es la que intercambia dominios y codominios, el orden de las composiciones y los conceptos categóricos por sus duales en su expresión.*

Obsérvese que los pares de conceptos (sección , retracción), (monomorfismo, , epimorfismo) y (objeto inicial , objeto final) son conceptos categóricos duales, y que isomorfismo, bimorfismo y objeto cero son conceptos autoduales.

Definición I.1.9 Dada una categoría $\mathbf{C}$ se define la *categoría opuesta* de $\mathbf{C}$, notada por $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, como la que tiene por objetos y morfismos los mismos de $\mathbf{C}$, pero intercambiando dominios por codominios y el orden de las composiciones.

Proposición I.1.3 *Una sentencia categórica en una categoría* $\mathbf{C}$ *es equivalente a la sentencia categórica dual en* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

A continuación se dan algunos de los principales conceptos categóricos dentro de una categoría. Para ello se parte de uno más general que será base para la obtención de los mismos.

Definición I.1.10 Un *diagrama* en una categoría es cualquier representación, con posibles repeticiones, de objetos y morfismos de la categoría, respectivamente mediante puntos y flechas, usando flechas consecutivas para las composiciones, pudiéndose así obviar éstas. En general, I representará el conjunto de puntos del diagrama. La representación, conjunto de puntos y flechas sin asociación de objetos y morfismos, se denomina *diagrama.*

Dados dos puntos i, j de un diagrama D, se define el *subdiagrama con origen i y final j, $D(i, j)$,* como el diagrama formado por todos los caminos de flechas en D con origen i y final j.

Un diagrama en una categoría $\mathbf{C}$ se dirá *conmutativo* cuando todo camino de flechas con el mismo origen y el mismo final represente el mismo morfismo.

Nótese que si D es conmutativo entonces $D(i,j)$ también lo es para todo par de puntos i,j de D.

Definición I.1.11 Un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "n"] \\ Z \arrow[r, "m"] & T \end{tikzcd}$$

se dirá un *push out* cuando para todo par de morfismos r,s tales que $rf = sg$ existe un único morfismo h verificando $hn = r$ y $hm = s$.

Y se denomina *componente vertical del push out,* Z *componente horizontal,* X *origen,* f *morfismo horizontal,* g *morfismo vertical,* n *morfismo inducido vertical notado en general por* $\overline{g}$*,* m *morfismo inducido horizontal notado en general por* $\overline{f}$ *y* T *push out de* f *y* g *notado por* $P\{f,g\}$. El único morfismo inducido h se notará por $\{r,s\}$, denominando a r y s componentes *vertical* y *horizontal* del morfismo h, respectivamente. Si $r = \{r_1, r_2\}$ entonces $\{r,s\} =$ $= \{\{r_1,r_2\},s\}$ se notará simplemente por $\{r_1,r_2,s\}$, si no hay posibilidad de error. Análogamente, si $s = \{s_1,s_2\}$ se notará por $\{r,s_1,s_2\}$.

En el caso de que $f = g$, se notará a $\overline{g}$ y $\overline{f}$ por $\overline{f}_0$ y $\overline{f}_1$, respectivamente.

El concepto dual se denomina *pull back* y, en este caso, se usará la misma notación salvo los cambios de $P\{f,g\}$ por $P < f,g >$ y $\{r,s\}$ por $< r,s >$. También se usará la misma denominación para los conceptos duales, salvo que $P < f,g >$ se denomina *pull back* y X *objeto final del pull back.*

Proposición I.1.4

a) Los push outs son únicos salvo isomorfismo.

b) $P\{f,g\} \cong P\{g,f\}$.

Definición I.1.12 Se dirá que una categoría **C** *tiene push outs* cuando para todo par de morfismos f, g con el mismo dominio existe $P\{f,g\}$. Se dirá que un morfismo g *tiene push outs* cuando para todo morfismo f con $dom\ f = dom\ g$ existe $P\{f,g\}$. Dualmente se define cuándo una categoría o un morfismo *tiene pull backs.*

Proposición I.1.5 *Dados el push out D_1 y el cuadrado conmutativo D_2:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "D_1"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "D_2"] & Z \arrow[d, "w"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \end{tikzcd}$$

si se llama D_3 al cuadrado composición de D_1 con D_2, diagrama sin la flecha v, entonces D_2 es push out si y sólo si D_3 lo es.

Dados dos push outs $P\{f,g\}$ y $P\{f',g'\}$, si existe un morfismo $v : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ entre los orígenes de ambos verificando, para morfismos u y w, que $uf = f'v$ y $wg = g'v$ entonces el morfismo $\{\overline{g'}u, \overline{f'}w\}$ se notará por $u \cup w$ (dualmente $u \cap w$).

Proposición I.1.6 *En un push out se cumple:*

a) $h\{r,s\} = \{hr, hs\}$.

b) $\{r,s\}(u \cup w) = \{ru, sw\}$.

c) $(u \cup w)(u' \cup w') = uu' \cup ww'$.

d) Si u, v y w son isomorfismos entonces $u \cup w$ también lo es.

Definición I.1.13 Un objeto C se dirá el *coproducto de* X *e* Y *con inclusiones* $i_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{C}$ *e* $i_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y} \to \mathrm{C}$ cuando, para cualquier par de morfismos $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ y $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ existe un único morfismo $h : \mathrm{C} \to \mathrm{Z}$ verificando $hi_{\mathrm{X}} = f$ y $hi_{\mathrm{Y}} = g$. C se notará por $\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}$.

El concepto dual se denomina *producto de* X *e* Y *con proyecciones* $p_{\mathrm{X}} :$ $: \mathrm{C} \to \mathrm{X}$ *y* $p_{\mathrm{Y}} : \mathrm{C} \to \mathrm{Y}$, y se nota por $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Obsérvese que el coproducto de dos objetos es único salvo isomorfismo.

Proposición I.1.7 *Si existe el push out, entonces* $P\{\phi_{\mathrm{X}}, \phi_{\mathrm{Y}}\} = \mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}$.

En consecuencia, abusando de notación, el único morfismo $h : \mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ de la definición anterior se notará por $\{f, g\}$ (dualmente $< f, g >$), y el único morfismo $\{i_{\mathrm{X}'}u, i_{\mathrm{Y}'}w\}$ por $u \sqcup w$ (dualmente $u \times w$).

Corolario I.1.1 *Una categoría con objeto inicial y push outs para pares de morfismos iniciales tiene coproductos.*

Definición I.1.14 Dados dos morfismos $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, se dirá que $h : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ es el *coigualador de* f *y* g si $hf = hg$ y para cualquier otro morfismo $h' : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}'$ tal que $h'f = h'g$ existe un único morfismo $h'' : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ con $h''h = h'$.

El concepto dual se denomina *igualador.*

El objeto Z es único salvo isomorfismo.

Definición I.1.15 Dado un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, se dice que $p : \mathrm{Y} \to \mathrm{C}$ es el *conúcleo de* f cuando $pf = 0$ y para todo $p' : \mathrm{Y} \to \mathrm{C}'$ tal que $p'f = 0$ existe un único $p'' : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ tal que $p' = p''p$. El objeto C se notará por *coker* f, único salvo isomorfismo.

El concepto dual se denomina *núcleo de* f y se notará por *ker* f con morfismo $i : ker\ f \to \mathrm{Y}$ $(f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X})$.

Obsérvese que para que existan conúcleos la categoría debe tener objeto cero.

Proposición I.1.8 *Dado un morfismo* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$

a) $p : \mathrm{Y} \to$ *coker* f *es el coigualador de* f *y 0.*

b) Si existe el push out entonces $P\{f, 0\} =$ *coker* f*, donde* $0 : \mathrm{X} \to 0$.

Teniendo en cuenta que la definición de los conceptos anteriores lleva siempre implícito el uso de algún diagrama, se puede generalizar el proceso obteniéndose la noción de colímite.

Definición I.1.16 Un objeto C de **C** se dirá *colímite* de un diagrama D en **C** cuando existen morfismos $\{f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{C}\}_{i \in I}$, con X_i objeto representado por el punto i, verificando la propiedad de igualación de caminos (PIC) para D, esto es, que el nuevo diagrama D' formado por D junto con flechas con origen en i y final en c representantes de los f_i, tenga los subdiagramas $D'(i, c)$ conmutativos para todo $i \in I$; y si $\{\mathrm{C}', f'_i\}_{i \in I}$ verifica PIC entonces existe un único morfismo $f : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ tal que $ff_i = f'_i$, para todo $i \in I$.

El colímite de un diagrama D en una categoría **C**, único salvo isomorfismo, se notará por *colim* $D = \{C, f_i\}_{i \in I}$ o por *colim* $D = \mathrm{C}$, según conveniencia.

Nótese que si $gf_i = g'f_i$ para todo $i \in I$ entonces $g = g'$.

El concepto dual es el de *límite* de un diagrama, notado por *lim D.*

Definición I.1.17 Dado un diagrama D se dirá que *tiene colímites en una categoría* **C***, o que* **C** *tiene D-colímites,* cuando lo tiene independientemente de los objetos y morfismos de **C** representados.

Proposición I.1.9

a) Toda identidad 1_{X} *es el colímite del diagrama* X.

b) El objeto inicial es el colímite del diagrama vacío.

c) $P\{f,g\}$ *es el colímite del diagrama*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}.$$

d) El coigualador de f *y* g *es el colímite del diagrama* $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$.

e) coker f *es el colímite de los diagramas*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & Y \\ 0 & \end{tikzcd} \quad y \quad X \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y.$$

f) El coproducto $\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}$ *es el colímite del diagrama* $\mathrm{X} \quad \mathrm{Y}$.

Con los colímites se pueden generalizar las definiciones de coigualadores y coproductos para morfismos $f_k : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ y objetos X_k, respectivamente ($k \in$ $\in K \equiv$ conjunto de índices).

Proposición I.1.10 *Una categoría tiene coproductos y coigualadores si y sólo si tiene colímites.*

En el caso de coproductos finitos se puede asegurar la existencia de colímites finitos, esto es, colímites de diagramas con un número finito de puntos y flechas.

Existen categorías en las cuales los conjuntos $Hom(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tienen una estructura aditiva suplementaria, que permite simplificar las condiciones para obtener los resultados básicos en teoría de categorías. Surgen así los conceptos de categorías aditiva y abeliana.

Definición I.1.18 Una categoría se dice *aditiva* cuando

1. Tiene objeto cero.

2. Tiene coproductos finitos.

3. $Hom(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ es un grupo abeliano para todo par de objetos X, Y.

4. La composición de morfismos es distributiva respecto a la suma.

Proposición I.1.11 *En categorías aditivas*

a) $p_{\mathrm{X}} = \{1, 0\} : \mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *y* $p_{\mathrm{Y}} = \{0, 1\} : \mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ *hacen* $\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y} \cong \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

b) $\{f, g\} < f', g' >= ff' + gg'$.

En este caso, tanto el coproducto como el producto de objetos X e Y se notará por $\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}$. En consecuencia, el concepto de categoría aditiva es autodual.

Proposición I.1.12 *Sea* **A** *una categoría aditiva, entonces* **A** *tiene conúcleos si y sólo si tiene colímites finitos.*

Definición I.1.19 Una categoría *abeliana* es una categoría aditiva verificando

1. Todo morfismo tiene núcleo y conúcleo.

2. Todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo y todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo.

3. Todo morfismo se puede expresar como la composición de un epimorfismo y un monomorfismo.

Proposición I.1.13 *En una categoría abeliana*

a) *Si* $f = pi = p'i'$, *con* p, p' *epimorfismos e* i, i' *monomorfismos, entonces existe* $h : dom\ i \cong dom\ i'$ *con* $hp = p'$ *e* $i'h = i$.

b) f *es bimorfismo si y sólo si* f *es isomorfismo.*

Proposición I.1.14 *Toda categoría abeliana tiene colímites finitos.*

A partir de una categoría dada se pueden crear otras relacionadas con ella, entre las que cabe distinguir, por su frecuente utilización y propiedades, la categoría de pares y las categorías bajo y sobre un objeto.

Proposición I.1.15 *Dada una categoría* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{C(2)}$ *con objetos los morfismos de* $\mathbf{C}$ *y* $Hom(f, f') = \{(g_0, g_1) \,/\, g_1 f = f' g_0\}$ *es una categoría, denominada categoría de pares de* $\mathbf{C}$*.*

El concepto anterior es autodual, y permite extender la idea de isomorfismo a morfismos de una categoría $\mathbf{C}$, esto es, *dos morfismos de* $\mathbf{C}$ *se dirán isomorfos* cuando lo sean como objetos de $\mathbf{C(2)}$. Nótese que los isomorfismos de pares tienen como componentes isomorfismos.

Todo diagrama D en $\mathbf{C(2)}$ induce dos diagramas en $\mathbf{C}$ iguales a D:

- *dom* D, cuyos puntos representan el dominio de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan la primera componente de los morfismos de pares representados en D.

- *codom* D cuyos puntos representan el codominio de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan la segunda componente de los morfismos de pares representados en D.

Teorema I.1.1 *Dado un diagrama* D *en* $\mathbf{C(2)}$*.*

a) Si $colim\ D = \{f, (h_{i0}, h_{i1})\}_{i\in I}$ *entonces* $colim(codom\ D) = \{codom\, f, , h_{i1}\}_{i\in I}$. $(codom(colim\ D) = colim(codom\ D))$.

b) Si existen $colim(dom\ D)$ *y* $colim(codom\ D)$ *entonces existe* $colim\ D$*, con* $codom(colim\ D) = colim(codom\ D)$ *y* $dom(colim\ D) = colim(dom\ D)$.

Demostración:

Considérense $\{f_i\}_{i\in I}$ objetos de $\mathbf{C(2)}$ representados por los puntos de I, con *dom* $f_i = \mathrm{X}_i$ y *codom* $f_i = \mathrm{Y}_i$.

(a) Sea $\{\mathrm{Y}, h_i\}_{i\in I}$ verificando PIC para *codom* D, entonces $\{1_{\mathrm{Y}}, (h_i f_i, h_i)\}_{i\in I}$ verifica PIC para D, luego existe $(\alpha_0, \alpha_1) : f \to 1_{\mathrm{Y}}$ único tal que $(\alpha_0, \alpha_1)(h_{i0}, h_{i1}) = (h_i f_i, h_i)$, para todo $i \in I$. En particular $\alpha_1 h_{i1} = h_i$, y si $\beta h_{i1} = h_i$ entonces $(\beta f, \beta)(h_{i0}, h_{i1}) = (\beta f h_{i0}, \beta h_{i1}) = (\beta h_{i1} f_i, h_i) =$ $= (h_i f_i, h_i)$, de donde $(\beta f, \beta) = (\alpha_0, \alpha_1)$ y por tanto $\beta = \alpha_1$.

(b) Sea $colim(dom\ D) = \{\mathrm{X}, h_{i0}\}_{i\in I}$ y $colim(codom\ D) = \{\mathrm{Y}, h_{i1}\}_{i\in I}$. Entonces $\{\mathrm{Y}, h_{i1} f_i\}_{i\in I}$ verifica PIC para *dom* D, de donde existe un único $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tal que $f h_{i0} = h_{i1} f_i$.

$\{f, (h_{i0}, h_{i1})\}_{i\in I} = colim\ D$, pues si $\{f', (h'_{i0}, h'_{i1})\}_{i\in I}$ verifica PIC para D entonces $\{dom\ f', h'_{i0}\}_{i\in I}$ y $\{codom\ f', h'_{i1}\}_{i\in I}$ verifican PIC para *dom* D y *codom* D, respectivamente, de donde existen únicas $\alpha_0 : dom\ f \to dom\ f'$ y $\alpha_1 : codom\ f \to codom\ f'$ tales que $\alpha_0 h_{i0} = h'_{i0}$ y $\alpha_1 h_{i1} = h'_{i1}$, y como $f'\alpha_0 h_{i0} = f' h'_{i0} = h'_{i1} f_i = \alpha_1 h_{i1} f_i = \alpha_1 f h_{i0}$ para todo $i \in I$, se concluye que $f'\alpha_0 = \alpha_1 f$, siendo $(\alpha_0, \alpha_1) : f \to f'$ el único morfismo tal que $(\alpha_0, \alpha_1)(h_{i0}, h_{i1}) = (h'_{i0}, h'_{i1})$.

□

Corolario I.1.2 *Dado un diagrama D en $\mathbf{C(2)}$, si existe $colim(dom\ D)$ y $colim\ D$, entonces $dom(colim\ D) = colim(dom\ D)$.*

Demostración:

Consecuencia inmediata de la unicidad de los colímites y del teorema I.1.1 anterior.

□

Corolario I.1.3 *Dado un diagrama D,* $\mathbf{C(2)}$ *tiene D-colímites si y sólo si* $\mathbf{C}$ *los tiene.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Dado un diagrama D en $\mathbf{C}$, considérese D en $\mathbf{C(2)}$ como el diagrama cuyos puntos representan los morfismos identidades de los objetos representados en D y cuyas flechas representan los morfismos de pares cuyas componentes, idénticas, son los morfismos representados en D. Por el apartado a) del teorema I.1.1 anterior se concluye el resultado.

($\Leftarrow$) Consecuencia directa del apartado b) del teorema I.1.1 anterior.

□

Corolario I.1.4 *ϕ es objeto inicial en* $\mathbf{C}$ *si y sólo si 1_ϕ es objeto inicial en* $\mathbf{C(2)}$.

Demostración:

El objeto inicial en $\mathbf{C(2)}$ es el colímite del diagrama vacío D, que tiene por *codom* D y *dom* D al mismo diagrama vacío, de donde, por la demostración del apartado b) del teorema I.1.1 se concluye el resultado.

□

Corolario I.1.5

a) $\mathbf{C(2)}$ *tiene colímites finitos si y sólo si* $\mathbf{C}$ *los tiene.*

b) $\mathbf{C(2)}$ *tiene colímites si y sólo si* $\mathbf{C}$ *los tiene.*

Definición I.1.20 Dado un objeto X de una categoría $\mathbf{C}$, se define la *categoría bajo el objeto* X, $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$, como la subcategoría de $\mathbf{C(2)}$ que tiene como objetos los morfismos con dominio X y como morfismos los de $\mathbf{C(2)}$ cuya primera componente sea 1_{X}.

El concepto dual es el de *categoría sobre el objeto* X, notado por $\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$.

Teorema I.1.2 *Dado un diagrama D no vacío en $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$, D tiene colímite si y sólo si codom D lo tiene.*

Demostración:

Consecuencia del teorema I.1.1 observando que *dom* D equivale al diagrama X cuyo colímite es $(\mathrm{X}, 1_{\mathrm{X}})$.

□

Consecuentemente, para un diagrama $D \neq \phi$, $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ tiene D-colímites si y sólo si $\mathbf{C}$ los tiene.

Nótese que 1_{X} es objeto inicial en $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$, y por tanto $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ tiene colímites si y sólo si $\mathbf{C}$ los tiene para diagramas no vacíos.

I.2 Funtores y transformaciones naturales.

El principal concepto categórico relacionante de categorías es el de funtor. Su papel es semejante al de los morfismos, de hecho las categorías con los funtores dan origen a la categoría denominada **Cat**.

Los conceptos estudiados anteriormente adquieren ahora un significado especial, obteniéndose propiedades interesantes involucrando distintas categorías.

A su vez, los funtores pueden ser relacionados entre sí mediante el concepto de transformación, surgiendo interacciones entre ellos tan destacadas, por las propiedades que conllevan, como la adjunción.

Definición I.2.1 Un *funtor* F desde una categoría $\mathbf{C}$ en una categoría $\mathbf{D}$, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, es una aplicación desde los objetos de $\mathbf{C}$ en los objetos de $\mathbf{D}$ junto con otra desde los morfismos de $\mathbf{C}$ en los morfismos de $\mathbf{D}$ verificando

1. $F1_{\mathrm{X}} = 1_{F\mathrm{X}}$, para todo objeto X de $\mathbf{C}$.
2. $F(gh) = FgFh$, para todo par de morfismos g, h de $\mathbf{C}$.
3. $F(dom\ g) = dom\ Fg$ y $F(codom\ g) = codom\ Fg$, para todo morfismo g de $\mathbf{C}$.

El concepto de funtor es autodual.

Proposición I.2.1 **Cat**, *con objetos las categorías y morfismos los funtores, es una categoría.*

Nótese que **Cat** tiene como identidades los funtores identidad $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \to \mathbf{C}$ definidos mediante las aplicaciones identidad sobre objetos y morfismos. Un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es isomorfismo si las aplicaciones asociadas para objetos y morfismos son biyectivas.

Dado un objeto X de $\mathbf{C}$, se define el funtor constante $X : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ por $X\mathrm{A} = \mathrm{X}$, para cualquier objeto A de $\mathbf{D}$ y $Xf = 1_{\mathrm{X}}$ para cualquier morfismo f de $\mathbf{D}$.

Dada una subcategoría $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$, entonces $I : \mathbf{S} \to \mathbf{C}$ definido por $I\mathrm{X} = = \mathrm{X}$ para cualquier objeto X de $\mathbf{S}$ e $If = f$ para cualquier morfismo f de $\mathbf{S}$ determina el funtor inclusión I.

Un funtor con dominio y codominio la misma categoría se puede iterar dando origen a la siguiente notación: si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ entonces $F^n = FF^{n-1}$, con $F^0 = 1_{\mathbf{C}}$.

Definición I.2.2 Un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se dirá *lleno* cuando $F : Hom(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to$ $\to Hom(F\mathrm{X}, F\mathrm{Y})$ es un epimorfismo, para todo par de objetos X, Y de **C**.

El concepto dual se denomina *funtor fiel.*

Una subcategoría **S** de **C** se dirá *llena* cuando lo sea el funtor inclusión I. Nótese que I es siempre fiel.

Cuando una subcategoría **S** de **C** tiene una estructura más rica que la de **C**, por ejemplo **Ab** como subcategoría de **Grp**, el funtor inclusión se denomina *funtor olvido* y se suele notar por U.

Proposición I.2.2 *Dado un funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, *si* **S** *es una subcategoría de* **C** *entonces* $F_{|\mathbf{S}} = FI : \mathbf{S} \to \mathbf{D}$ *es también un funtor que se denominará restricción de* F *a* **S**.

Entre los límites y colímites que posee **Cat** se destacan algunos por su importancia en numerosos desarrollos matemáticos. De hecho el funtor Hom, íntimamente ligado al producto de categorías, está presente en cualquier teoría algebraica en alguno de sus diversos aspectos.

Proposición I.2.3 *La categoría "vacía" (sin objetos ni morfismos) y la categoría "punto" (con un único objeto y su morfismo identidad) son objeto inicial y final, respectivamente, en* **Cat**.

Proposición I.2.4 **Cat** *tiene productos.*

Demostración:

Dadas dos categorías $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2}$ es la categoría que tiene por objetos y morfismos pares de éstos con la primera componente en $\mathbf{C}_1$ y la segunda en $\mathbf{C}_2$. Los funtores proyección se definen de forma obvia.

□

Proposición I.2.5 *Dada una categoría* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C(2)}$ *es subcategoría de* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Un funtor $F : \mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$ suele también denominarse *bifuntor*.

Teorema I.2.1

a) Si $F : \mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$ *es un funtor, entonces* $F_{\mathrm{C}_1} : \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$ *y* $F_{\mathrm{C}_2} : \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$ *son funtores para todo par de objetos* C_1 *y* C_2 *de* $\mathbf{C_1}$ *y* $\mathbf{C_2}$*, respectivamente. Además se verifica la propiedad de compatibilidad (PC) siguiente:*

(PC) *Para todo par de morfismos* $f_1 : \mathrm{C}_1 \to \mathrm{C'}_1$ *y* $f_2 : \mathrm{C}_2 \to \mathrm{C'}_2$ *se tiene* $F_{\mathrm{C}_1} f_2 F_{\mathrm{C}_2} f_1 = F_{\mathrm{C}_2} f_1 F_{\mathrm{C}_1} f_2$.

b) Si para todo par de objetos C_1 *y* C_2 *de* $\mathbf{C_1}$ *y* $\mathbf{C_2}$ *se tienen funtores* $F_{\mathrm{C}_1} : \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$ *y* $F_{\mathrm{C}_2} : \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$*, respectivamente, verificando PC entonces estos funtores determinan otro* $G : \mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$ *con* $G_{\mathrm{C}_1} = F_{\mathrm{C}_1}$ *y* $G_{\mathrm{C}_2} = F_{\mathrm{C}_2}$.

Corolario I.2.1 *Dada una categoría* $\mathbf{C}$*, entonces* $Hom(-,\sim) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \longrightarrow \mathbf{Set}$ *definido por* $Hom(-,\sim)(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = Hom(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *y* $Hom(-,\sim)(f,g) : Hom(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \to Hom(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ *con* $Hom(-,\sim)(f,g)(h) = ghf$*, es un funtor.*

El coproducto y el producto en una categoría tienen una vinculación funtorial con el producto de categorías que permitirá posteriores desarrollos en homotopía.

Proposición I.2.6 *Dado el coproducto de dos objetos* X *e* Y *en una categoría* $\mathbf{C}$*, entonces* $I : \mathbf{C}^{\mathrm{X}\sqcup\mathrm{Y}} \to \mathbf{C}^{\mathrm{X}} \times \mathbf{C}^{\mathrm{Y}}$ *definido por* $I(\{f,g\}) = (f,g)$ *e* $I(h) = (h,h)$*, es un funtor inyectivo sobre los objetos y fiel que permite considerar a* $\mathbf{C}^{\mathrm{X}\sqcup\mathrm{Y}}$ *subcategoría de* $\mathbf{C}^{\mathrm{X}} \times \mathbf{C}^{\mathrm{Y}}$.

Proposición I.2.7 *Dada* $\mathbf{D}$ *una categoría con productos, y funtores* $F_1 : : \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$, $F_2 : \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$, *entonces* $F_1 \times F_2 : \mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2} \to \mathbf{D}$, *definido usando el producto de* $\mathbf{D}$, *es un funtor.*

Una cuestión que frecuentemente se plantea es cuándo un funtor transforma algún colímite en colímite. Los siguientes resultados responden en parte esta pregunta, aunque más tarde se dará otra solución adoptando un punto de vista diferente.

Definición I.2.3 Dado un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, se dice que F *conserva el colímite de un diagrama* D *en* $\mathbf{C}$ cuando $F(colim\ D) = colim\ FD$, donde FD es el diagrama D considerado en $\mathbf{D}$, representando las imágenes por F de los objetos y morfismos representados por D en $\mathbf{C}$. F se dirá que *conserva colímites* cuando $F(colim\ D) = colim\ FD$ para todo colímite en $\mathbf{C}$.

Teorema I.2.2 *Dado un funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$

a) Si $\mathbf{C}$ *tiene coproductos y coigualadores y* F *los conserva entonces* F *conserva colímites.*

b) Si $\mathbf{C}$ *tiene coproductos finitos y coigualadores y* F *los conserva entonces* F *conserva colímites finitos.*

c) Cuando $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$ *son aditivas, si* $\mathbf{C}$ *tiene colímites finitos entonces* F *los conserva si y sólo si conserva conúcleos.*

Los funtores adjuntos también son solución a la cuestión anteriormente planteada. Antes de especificar este concepto se da el de transformación entre funtores, pues facilita su comprensión.

Definición I.2.4 Una *transformación* t desde un funtor F en otro G que actúan desde $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$, $t : F \to G$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{D})$, es una aplicación desde los objetos de $\mathbf{C}$ en los morfismos de $\mathbf{D}$ de forma que si A es un objeto de $\mathbf{C}$ entonces $t_{\mathrm{A}} : F\mathrm{A} \to G\mathrm{A}$.

Una transformación t se dirá *natural* cuando para todo morfismo $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ en $\mathbf{C}$ se verifica $t_{\mathrm{B}}Ff = Gft_{\mathrm{A}}$.

Una transformación t se dirá *equivalencia* cuando para todo objeto A de $\mathbf{C}$, $t_{\mathrm{A}} : F\mathrm{A} \to G\mathrm{A}$ es un isomorfismo. En este caso $t^{-1} : G \to F$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{D})$ definida de forma obvia también es una equivalencia.

Si no se presta a confusión, en general, se obviará el objeto sobre el que actúa la transformación.

Proposición I.2.8 *Si t es una transformación natural con inversa entonces t^{-1} también es natural.*

Dado un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, existe siempre la equivalencia natural $1_F :$ $: F \to F$. La composición de transformaciones se define de forma obvia. Si son naturales su composición también lo es.

Proposición I.2.9 *Dada una transformación $t : F \to G$ $(\mathbf{B} \to \mathbf{C})$ y un funtor $H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entonces $Ht : HF \to HG$ $(\mathbf{B} \to \mathbf{D})$ definida por $(Ht)_{\mathrm{B}} = Ht_{\mathrm{B}}$ es una transformación.*

Proposición I.2.10 *Dada una transformación $t : F \to G$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{D})$ y un funtor $H : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, entonces $tH : FH \to GH$ $(\mathbf{B} \to \mathbf{D})$ definida por $(tH)_{\mathrm{B}} =$ $= t_{H\mathrm{B}}$ es una transformación.*

Corolario I.2.2

a) Si t es natural entonces Ht y tH también lo son.

b) Si t es una equivalencia entonces Ht y tH también lo son.

Definición I.2.5 Dados dos funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, se dirá que *(F,G) es un par adjunto de funtores* cuando exista una equivalencia natural $\gamma : Hom(F-, \sim) \to Hom(-, G\sim)$ ($\mathbf{C}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{D} \to \mathbf{Set}$).

En determinados casos el funtor Hom puede tener otra categoría imagen distinta de **Set**, por ejemplo **Ab** en el caso de que **C** y **D** sean categorías aditivas. Habrá entonces que especificar sobre qué categoría se da la equivalencia natural γ.

Si (F, G) es un par adjunto de funtores, entonces también se dice que F *es adjunto a izquierda de* G y G *es adjunto a derecha de* F.

Teorema I.2.3 *(F,G) es un par adjunto de funtores si y sólo si existen transformaciones naturales $c : 1_{\mathbf{C}} \to GF$ y $d : FG \to 1_{\mathbf{D}}$ tales que $(Gd)(cG) = 1_G$ y $(dF)(Fc) = 1_F$.*

Teorema I.2.4 *Si (F,G) es un par adjunto de funtores entonces F conserva colímites.*

I.3 Categoría de push outs.

A semejanza de lo que ocurre en la homotopía ordinaria de los Espacios Topológicos, que se puede extender a Espacios Topológicos Punteados, se verá que la homotopía cónica también se puede extender a una categoría que hace la función de la punteada. Para esto es básico el uso de los push outs y de sus propiedades, por lo que un estudio de los mismos es necesario.

Teorema I.3.1 *Dada una categoría* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{poC}$ *con objetos de la forma* (X, f, g) *tales que* $\mathrm{X} = P\{f, g\}$ *en* $\mathbf{C}$ *y morfismos* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) : (\mathrm{X}, f, g) \to (\mathrm{X}', f', g')$ *verificando* $\alpha_1 f = f'\alpha_0$ *y* $\alpha_2 g = g'\alpha_0$*, es una categoría.*

Demostración:

Basta observar que la composición de morfismos viene definida componente a componente.

□

A $\mathbf{poC}$ se le denomina *categoría de push outs de* $\mathbf{C}$*.*

Proposición I.3.1 *Para todo objeto* A *de* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}$ *con objetos* (X, f, g) *donde codom* $f = \mathrm{A}$ *y morfismos* $(\alpha_0, 1_{\mathrm{A}}, \alpha_2)$*, es una subcategoría de* $\mathbf{poC}$*.*

$\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}$ se denomina *categoría de push outs de* $\mathbf{C}$ *con componente vertical* A. Obsérvese que los morfismos de $\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}$ se pueden interpretar como pares (α_0, α_2) verificando $f = f'\alpha_0$ y $\alpha_2 g = g'\alpha_0$.

Proposición I.3.2

a) $\mathbf{C}$ *se puede considerar una subcategoría llena de* $\mathbf{poC}$*.*

b) $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$ *se puede considerar una subcategoría llena de* $\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}$*, para todo objeto* A *de* $\mathbf{C}$*.*

Demostración:

Se define:

(a) $I : \mathbf{C} \to \mathbf{poC}$ por $I\mathrm{X} = (\mathrm{X}, 1_{\mathrm{X}}, 1_{\mathrm{X}})$ e $If = (f, f, f) : (\mathrm{X}, 1_{\mathrm{X}}, 1_{\mathrm{X}}) \to$ $\to (\mathrm{Y}, 1_{\mathrm{Y}}, 1_{\mathrm{Y}})$.

(b) $I : \mathbf{C}^{\mathrm{A}} \to \mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}$ por $I(\mathrm{X}, x) = (\mathrm{X}, 1_{\mathrm{A}}, x)$ e $If = (1_{\mathrm{A}}, f) : (\mathrm{X}, 1_{\mathrm{A}}, x) \to$ $\to (\mathrm{Y}, 1_{\mathrm{A}}, y)$. Nótese que $fx = y$ y $1_{\mathrm{A}}1_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}1_{\mathrm{A}}$.

□

Así como las categorías anteriores se pueden considerar incluidas en la de push outs también, desde el punto de vista de los morfismos, existen isomorfismos relacionantes.

Proposición I.3.3

$Hom_{\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}}((\mathrm{X}, f, g), (\mathrm{Y}, 1_{\mathrm{A}}, y)) \cong Hom_{\mathbf{C}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y})^{yf(g)}$.

Demostración:

Sea $i : Hom_{\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}}((\mathrm{X}, f, g), (\mathrm{Y}, 1_{\mathrm{A}}, y)) \to Hom_{\mathbf{C}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y})^{yf(g)}$ definida por $i(f, h) = h$. i es sobre, pues si $hg = yf$, como $1_{\mathrm{A}}f = 1_{\mathrm{A}}f$ existe $(f, h) :$ $: (\mathrm{X}, f, g) \to (\mathrm{X}, 1_{\mathrm{A}}, y)$. i es inyectiva, pues si $h = i(t, h) = i(t', h') = h'$ entonces $t1_{\mathrm{A}} = f1_{\mathrm{A}} = t'1_{\mathrm{A}}$, de donde $t = f = t'$ y por consiguiente $(t, h) =$ $= (t', h')$.

□

Proposición I.3.4

$(\mathbf{C}^{\mathrm{A}})^{(\mathrm{X}, f, g)} \cong \mathbf{C}^{\mathrm{X}}$, *donde* $\mathrm{A} = \mathit{codom}\ f$.

Demostración:

Nótese que la categoría $(\mathbf{C}^{\mathrm{A}})^{(\mathrm{X}, f, g)}$ tiene sentido utilizando la inclusión isomórfica de $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$ en $\mathbf{po}^{\mathrm{A}}\mathbf{C}$ vista en el apartado b) de la proposición I.3.2.

Se define $F : (\mathbf{C}^{\mathrm{A}})^{(\mathrm{X}, f, g)} \to \mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ por $F(f, h) = \{y, h\}$ para todo $(f, h) :$ $: (\mathrm{X}, f, g) \to (\mathrm{Y}, y)$, y dado $t : ((\mathrm{Y}, y), (f, h)) \to ((\mathrm{Y}', y'), (f, h'))$, $Ft = t$. Obsérvese que $t\{y, h\} = \{ty, th\} = \{y', h'\}$.

Se define $G : \mathbf{C}^{\mathrm{X}} \to (\mathbf{C}^{\mathrm{A}})^{(\mathrm{X}, f, g)}$ por $G\{\beta_1, \beta_2\} = (f, \beta_2) : (\mathrm{X}, f, g) \to$ $\to (\mathrm{Y}, \beta_1)$, y dado $t : \{\beta_1, \beta_2\} \to \{\beta_1', \beta_2'\}$, $Gt = t$. Nótese que $t\beta_1 = \beta_1'$ y que $t(f, \beta_2) = (1_{\mathrm{A}}, t)(f, \beta_2) = (f, t\beta_2) = f\beta_2'$.

$FG\{\beta_1, \beta_2\} = F(f, \beta_2) = \{\beta_1, \beta_2\}.$

$GF(f, h) = G\{y, h\} = (f, h).$

□

De la relación existente entre los colímites de **poC** y los de **C** nacen diferentes interpretaciones de estos colímites que simplificarán los cálculos en la ya mencionada categoría "punteada".

Todo diagrama D en **poC** tiene asociados cuatro diagramas en **C** y otros tantos en **C(2)**, todos iguales a D:

- OD, cuyos vértices representan los orígenes de los push outs representados en D, y cuyas flechas representan las primeras componentes de los morfismos representados en D.

- VD, cuyos vértices representan las componentes verticales de los push outs representados en D, y cuyas flechas representan las segundas componentes de los morfismos representados en D.

- HD, cuyos vértices representan las componentes horizontales de los push outs representados en D, y cuyas flechas representan las terceras componentes de los morfismos representados en D.

- PD, cuyos vértices representan las primeras componentes de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan la unión de las segundas y terceras componentes de los morfismos representados en D.

- MHD, cuyos vértices representan las segundas componentes de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan los morfismos de pares formados por las primeras y segundas componentes de los morfismos representados en D.

- MVD, cuyos vértices representan las terceras componentes de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan los morfismos de pares formados por las primeras y terceras componentes de los morfismos representados en D.

- IHD, cuyos vértices representan las inducidas de las segundas componentes de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan los morfismos de pares formados por las segundas componentes y la unión de las segundas y terceras componentes de los morfismos representados en D.

- IVD, cuyos vértices representan las inducidas de las terceras componentes de los objetos representados en D, y cuyas flechas representan los morfismos de pares formados por las terceras componentes y la unión de las segundas y terceras componentes de los morfismos representados en D.

Teorema I.3.2 *Dado un diagrama D en* **poC**

a) *Si colim* $D = \{(\mathrm{X}, f, g), (h_{i0}, h_{i1}, h_{i2})\}_{i \in I}$ *entonces colim* $PD = \{\mathrm{X}, , h_{i1} \cup h_{i2}\}_{i \in I}$.

b) *Si existen colim* OD, *colim* MHD, *colim* MVD *y* $P\{colim\ MHD, , colim\ MVD\}$, *entonces colim* $D = (P\{colim\ MHD, colim\ MVD\}, colim\ MHD, colim\ MVD)$, *con* $colim\, IHD = \overline{colim\, MHD}$ *y* $colim\, IVD = = \overline{colim\, MVD}$.

c) *Si existen* $colim\, OD$, $colim\, HD$, $colim\, VD$ *y* $P\{colim\, MHD, colim\, MVD\}$, *entonces* $D = (P\{colim\ MHD, colim\ MVD\}, colim\ MHD, colim\ MVD)$, *con* $colim\ IHD = \overline{colim\ MHD}$ *y* $colim\ IVD = \overline{colim\ MVD}$.

Demostración:

(a) Si $\{Y, h_i\}_{i\in I}$ verifica PIC para PD, entonces $(\{Y, 1_Y, 1_Y), (h_i\overline{g_i}f_i, h_i\overline{g_i}, , h_i\overline{f_i})\}_{i\in I}$ verifica PIC para D, de donde existe un único $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) : : (X, f, g) \to (Y, 1_Y, 1_Y)$ tal que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)(h_{i0}, h_{i1}, h_{i2}) = (\alpha_0 h_{i0}, \alpha_1 h_{i1}, , \alpha_2 h_{i2}) = (h_i\overline{g_i}f_i, h_i\overline{g_i}, h_i\overline{f_i})$, luego $(\alpha_1\cup\alpha_2)(h_{i1}\cup h_{i2}) = h_i\overline{g_i}\cup h_i\overline{f_i} = h_i$, y si existe $\beta : X\to Y$ tal que $\beta(h_{i1}\cup h_{i2}) = h_i$ entonces $(\beta\overline{g}f, \beta\overline{g}, \beta\overline{f})(h_{i0}, h_{i1}, , h_{i2}) = (\beta\overline{g}fh_{i0}, \beta\overline{g}h_{i1}, \beta\overline{f}h_{i2}) = (\beta(h_{i1}\cup h_{i2})\overline{g_i}f_i, \beta(h_{i1}\cup h_{i2})\overline{g_i}, \beta(h_{i1}\cup \cup h_{i2})\overline{f_i}) = (h_i\overline{g_i}f_i, h_i\overline{g_i}, h_i\overline{f_i})$, de donde se deduce que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (\beta\overline{g}f, , \beta\overline{g}, \beta\overline{f})$, y en consecuencia $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \beta\overline{g} \cup \beta\overline{f} = \beta$

(b) Obsérvese que por el corolario I.1.2 $dom(colim\ MHD) = colim\ OD$ y $dom(colim\ MVD) = colim\ OD$, y si $\{f, (h_{i0}, h_{i1})\}_{i\in I}$ y $\{g, (h_{i0}, h_{i2})\}_{i\in I}$ verifican PIC para MHD y MVD, respectivamente, entonces $\{(P\{f, g\}, f, , g), (h_{i0}, h_{i1}, h_{i2})\}_{i\in I}$ verifica PIC para D.

Si $\{(Y, f', g'), (h'_{i0}, h'_{i1}, h'_{i2})\}_{i\in I}$ verifica PIC para D, entonces $dom\ f' = = dom\ g' = X'$, y $\{X', h'_{i0}\}_{i\in I}$ verifica PIC para OD. Si $colim\ OD = = \{X, h_{i0}\}_{i\in I}$, existe un único $\alpha_0 : X \to X'$ tal que $\alpha_0 h_{i0} = h'_{i0}$ para todo $i \in I$. $\{f', (h'_{i0}, h'_{i1})\}_{i\in I}$ verifica PIC para MHD. Si $colim\ MHD = = \{f, (h_{i0}, h_{i1})\}_{i\in I}$, entonces existe un único $(\beta, \alpha_1) : f \to f'$ tal que $(\beta, \alpha_1)(h_{i0}, h_{i1}) = (h'_{i0}, h'_{i1})$ de donde $\beta h'_{i0} = h_{i0}$, y por lo anterior $\beta = \alpha_0$.

Análogamente con $\{g', (h'_{i0}, h'_{i2})\}_{i\in I}$ y $colim\, MVD = \{g, (h_{i0}, h_{i2})\}_{i\in I}$, por lo que existe un único $(\alpha_0, \alpha_2) : g \to g'$ con $(\alpha_0, \alpha_2)(h_{i0}, h_{i2}) = (h'_{i0}, h'_{i2})$, luego $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ es el único morfismo tal que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)(h_{i0}, h_{i1}, h_{i2}) = = (h'_{i0}, h'_{i1}, h'_{i2})$, de donde $colim\ D = \{(P\{f, g\}, f, g), (h_{i0}, h_{i1}, h_{i2})\}_{i\in I}$.

Por el apartado $a)$ anterior y lo demostrado en éste $\{P\{f, g\}, h_{i1} \cup \cup h_{i2}\}_{i\in I} = colim\ PD$. Por el apartado $b)$ del teorema I.1.1, $\{codom\ g,$

$, h_{i2}\}_{i\in I} = colim\, HD$, y como $\overline{f} h_{i2} = (h_{i1} \cup h_{i2})\overline{f_i}$, se concluye que $\{\overline{f}, (h_{i1}, h_{i1} \cup h_{i2})\}_{i\in I} = colim\, IHD$. Análogamente para $\overline{g}$.

(c) Consecuencia inmediata del apartado b) anterior usando el b) del teorema I.1.1.

□

Corolario I.3.1

a) Si **C** *tiene push outs,* **poC** *tiene D-colímites si y sólo si* **C(2)** *tiene D-colímites si y sólo si* **C** *tiene D-colímites.*

b) **poC** *tiene colímites si y sólo si* **C(2)** *tiene colímites si y sólo si* **C** *tiene colímites.*

Capítulo II

Categoría con cono natural.

El concepto de cono para espacios topológicos es bien conocido, pero su utilización en los desarrollos de la homotopía ordinaria queda relegado a un segundo término al poseer éstos una construcción cilindro. Las principales axiomáticas sobre teoría de homotopía han usado fundamentalmente este segundo concepto, existiendo pocos estudios que usen como noción básica el cono.

Aquí se inicia el desarrollo de una axiomática que tiene como soporte una categoría arbitraria y cuyo fundamento principal es la idea generalizada de cono. A través de ella se obtienen de forma análoga a la teoría clásica los conceptos de nulhomotopía y objeto contráctil con sus primeras propiedades. Junto con el funtor cono se destacan los morfismos que hacen de cofibraciones con su propiedad característica de extender nulhomotopías, que jugará un papel primordial a lo largo de este trabajo. Como caso particular se analizan en este sentido las categorías punteadas, aunque posteriormente se verá que es posible prescindir de ellas.

Por último se introduce el concepto de homotopía relativa a cofibraciones con codominio contráctil como un primer paso para una posterior generalización, observando que verifica las propiedades comunes a la homotopía relativa en las diversas teorías.

II.1 Cono natural. C-categorías.

Tras establecer los axiomas que se utilizarán a lo largo de todo este trabajo, se estudian las primeras propiedades derivadas de los mismos relativas a objetos contráctiles y nulhomotopía.

La definición que a continuación se presenta, de categoría con cono natural, es el resultado del estudio comparativo de diversas teorías de homotopía, entre las que destacan la inyectiva de B. Eckmann y P.J. Hilton [E] [Hi1] [Hi2], las construcciones standard duales de P.J. Huber [Hub2], las categorías de modelos de D. Quillen [Q1], las categorías cofibradas de H.J. Baues [B2], y las construcciones cono de S. Rodríguez-Machín [R] [P-]. Sus axiomas son los mínimos exigibles que permiten obtener grupos, sucesiones exactas y demás propiedades que debe poseer toda teoría de homotopía.

Definición II.1.1 Una *C-categoría*, o *categoría con cono natural* es una categoría $\mathbf{C}$, con un funtor $C : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ denominado funtor cono, transformaciones naturales $k : 1 \to C$ y $p : CC \to C$, y una clase de morfismos cof, llamados cofibraciones y representados por "$\rightarrowtail$", verificando los axiomas $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ y $(C4)$.

(C1) Axioma de cono.

$p(kC) = p(Ck) = 1C$ y $p(pC) = p(Cp)$.

(C2) Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{P}\{f,i\}
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es también una cofibración. A este tipo de push outs se les denominará *cofibrados.* Además el funtor C transforma push outs cofibrados en push outs: $C(P\{f,i\}) = P\{Cf, Ci\}$.

(C3) Axioma de cofibración.

Para todo objeto X, 1_X y k_X son cofibraciones. La composición de cofibraciones es cofibración. Además, toda cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ tiene una retracción r para su cono ($rCi = 1$). A esto último se le denomina propiedad de extensión de nulhomotopía (PEN).

(C4) Axioma de cono relativo.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, el morfismo $i_1 = \{Ci, k\}$, definido por el siguiente push out, es una cofibración:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, tail, "i"] & C\mathrm{B} \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \arrow[dd, tail, bend left, "Ci"] \\
\mathrm{A} \arrow[r, tail, "\bar{k}"] \arrow[dr, tail, bend right, "k"'] & \Sigma^i \arrow[d, dashed, "i_1"] \\
 & C\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

El objeto Σ^i se denomina *cono relativo a la cofibración i.*

Observación II.1.1 Si el funtor C conservara push outs, evidentemente se daría la última parte del axioma (C2), pero eliminaría homotopías cónicas tan importantes como la inducida en la categoría de pares.

Consecuencia directa de la definición II.1.1 son las siguientes propiedades.

Proposición II.1.1 *Los isomorfismos y el cono de toda cofibración son cofibraciones.*

Demostración:

Todo isomorfismo f es cofibración por $(C2)$ y $(C3)$, observando que el siguiente cuadrado es un push out.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "1_X"] \arrow[d, tail, "1_X"] & X \arrow[d, tail, "f"] \\ X \arrow[r, tail, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Usando $(C4)$ $Ci = i_1\bar{i}$. Por $(C2)$ $\bar{i}$ es cofibración, y por tanto Ci es cofibración al ser composición de ellas $(C3)$.

□

Corolario II.1.1 *El cono de un push out cofibrado es también un push out cofibrado.*

Proposición II.1.2 *Dados dos morfismos isomorfos, uno es cofibración si y sólo si lo es el otro.*

Demostración:

Consecuencia de la proposición II.1.1 anterior y de que la composición de cofibraciones es cofibración.

□

Proposición II.1.3 $C\{f,g\} = \{Cf, Cg\}$ *y* $C(f \cup g) = Cf \cup Cg$.

Demostración:

Consecuencia de que el cono conserva push outs $(C2)$.

$\square$

Proposición II.1.4 $k_{P\{f,g\}} = k_{\mathrm{Y}} \cup k_{\mathrm{Z}}$ *y* $p_{P\{f,g\}} = p_{\mathrm{Y}} \cup p_{\mathrm{Z}}$, *donde* Y *y* Z *son las componentes vertical y horizontal del push out, respectivamente.*

Demostración:

Consecuencia de la naturalidad de las transformaciones y de que el cono conserva push outs.

$\square$

Corolario II.1.2 $C^n k_{P\{f,g\}} = C^n k_{\mathrm{Y}} \cup C^n k_{\mathrm{Z}}$ *y* $C^n p_{P\{f,g\}} = C^n p_{\mathrm{Y}} \cup C^n p_{\mathrm{Z}}$

Los axiomas $(C2)$, $(C3)$ y $(C4)$ proporcionan métodos para obtener cofibraciones. Sin embargo, comprobar si un morfismo dado es cofibración o no verificando directamente si está en cof es, en ocasiones, muy difícil. El siguiente resultado es muy importante en este sentido, por su frecuente utilización durante el desarrollo de esta teoría.

Teorema II.1.1 *Dado el siguiente cubo conmutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, tail, "\gamma"] & & Y \arrow[dl] \arrow[dd, tail, "\alpha"] \\
Z \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd, tail, "\beta"'] & & \mathrm{P}\{f,g\} & \\
 & X' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dl, "g'"'] & & Y' \arrow[dl] \\
Z' \arrow[rr] & & \mathrm{P}\{f',g'\} \arrow[from=uu, crossing over, "\alpha \cup \beta"] &
\end{tikzcd}
$$

donde las caras superior e inferior son push outs.

Si $\{\beta, g'\} : \mathrm{P}\{g,\gamma\} \to \mathrm{Z}'$ *o* $\{\alpha, f'\} : \mathrm{P}\{f,\gamma\} \to \mathrm{Y}'$ *son cofibraciones, entonces* $\alpha \cup \beta$ *también lo es.*

Demostración:

Nótese que $\mathrm{P}\{g,\gamma\}$ y $\mathrm{P}\{f,\gamma\}$ existen por $(C2)$.

El siguiente diagrama es totalmente conmutativo, y todos sus cuadrados son push outs, unos por construcción y otros por la proposición I.1.5.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, tail, "\gamma"'] & & \mathrm{Y} \arrow[ddrr, tail, "\alpha"] \arrow[dl, "\overline{g}"'] \arrow[dd, tail, "\overline{\gamma}"] & & \\
 & \mathrm{Z} \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[dd, tail, "\tilde{\gamma}"'] \arrow[dddl, "\beta"'] & & \mathrm{P}\{f,g\} \arrow[ddrr, tail, "\overline{\alpha}"] \arrow[dd, tail, "\overline{\overline{\gamma}}"'] \arrow[dddl, "\overline{\beta}"'] & & & \\
 & & \mathrm{X'} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dl, "\tilde{g}"] & & \mathrm{P}\{f,\gamma\} \arrow[rr, "{\{\alpha, f'\}}"] \arrow[dl, "\overline{\overline{g}}"] & & \mathrm{Y'} \arrow[dl, "\widehat{g}"] \\
 & \mathrm{P}\{g,\gamma\} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dl, "{\{\beta, g'\}}"] & & \mathrm{P}\{\overline{g},\overline{\gamma}\} \arrow[rr, "\alpha'"] \arrow[dl, "\beta'"] & & \mathrm{P}\{\overline{g},\alpha\} \arrow[dl, "\beta''"] & \\
\mathrm{Z'} \arrow[rr, "\widehat{f}"'] & & \mathrm{P}\{\overline{f},\beta\} \arrow[rr, "\alpha''"'] & & \mathrm{P}\{f',g'\} & &
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que $\theta = \{\overline{\overline{\gamma}}\overline{f}, \overline{\overline{g}}\tilde{f}\}$ y por la proposición I.1.5 $\overline{\overline{\gamma}} = \overline{\tilde{\gamma}}$, $\overline{\overline{g}} = \overline{\tilde{g}}$, $\theta = \overline{\tilde{f}}$ y $\mathrm{P}\{\overline{g},\overline{\gamma}\} = \mathrm{P}\{\overline{f},\tilde{\gamma}\}$.

Por otro lado $\alpha' = \{\overline{\alpha}, \widehat{g}\{\alpha, f'\}\}$, $\beta' = \{\overline{\beta}, \widehat{f}\{\beta, g'\}\}$, $\alpha'' = \{\alpha \cup \beta, \overline{f'}\}$ y $\beta'' = \{\alpha \cup \beta, \overline{g'}\}$ donde también $\alpha' = \overline{\{\alpha, f'\}}$, $\alpha'' = \overline{\alpha'}$, $\beta' = \overline{\{\beta, g'\}}$, $\beta'' = \overline{\beta'}$, por la proposición I.1.5.

Si $\{\alpha, f'\}$ (resp. $\{\beta, g'\}$) es cofibración entonces α' (resp. β') es cofibración por $(C2)$, y por lo mismo α'' (resp. β'') también. Luego $\alpha \cup \beta = \alpha''\overline{\beta}$ $(= \beta''\overline{\alpha})$ es cofibración por ser composición de cofibraciones.

□

El concepto de cofibración está íntimamente ligado al de extensión.

Definición II.1.2 Dados una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to$ $\to \mathrm{X}$, los morfismos del conjunto $Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{f(i)}$ se denominan *extensiones de f relativas a la cofibración i.*

Análogamente a como se hace en teoría de homotopía, se definen los conceptos de morfismo nulhomótopo y objeto contráctil.

Definición II.1.3 Un morfismo $f : X \to Y$ se dice *nulhomótopo* ($f \simeq 0$), cuando tiene una extensión relativa a k, es decir, cuando $Hom(C\mathrm{X},\mathrm{Y})^{f(k)} \neq \phi$. Todo morfismo $F \in Hom(C\mathrm{X},\mathrm{Y})^{f(k)}$ se denomina una *nulhomotopía* para f y se nota por $F : f \simeq 0$.

Definición II.1.4 Un objeto X se dice *contráctil* cuando $1_{\mathrm{X}} \simeq 0$, esto es, cuando existe una retracción q para k_{X}. Se notará por $\mathrm{X} \simeq 0$.

Proposición II.1.5 *Dados dos objetos isomorfos, uno es contráctil si y sólo si lo es el otro.*

Demostración:

Sea $g : \mathrm{A} \cong \mathrm{A}'$ y sea q una retracción para k_{A}. Entonces $q' = gqCg^{-1}$ es una retracción para $k_{\mathrm{A}'}$.

Análogamente si A′ es contráctil con g^{-1}.

$\square$

Propiedades clásicas relativas a los conceptos anteriores y que se utilizarán posteriormente son

Proposición II.1.6 *Un morfismo es nulhomótopo si y sólo si se factoriza a través de un objeto contráctil.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Basta observar que el cono de todo objeto es contráctil, pues por (C1) $1_{C\mathrm{X}} = p(kC)$.

($\Leftarrow$) Si f se factoriza a través de un objeto contráctil Z, $f = rs$, entonces: $f = rs = r1_{\mathrm{Z}}s = r(qk_{\mathrm{Z}})s = (rqCs)k_{\mathrm{X}}$.

□

Obsérvese que por la proposición anterior, todo morfismo con dominio o codominio contráctil es nulhomótopo.

Corolario II.1.3 *La composición de un morfismo con otro nulhomótopo es nulhomótopa.*

Demostración:

Como todo morfismo nulhomótopo se factoriza a través de un objeto contráctil, la composición, sea a izquierda o a derecha, también.

□

Corolario II.1.4 *Dados dos morfismos isomorfos, uno es nulhomótopo si y sólo si lo es el otro.*

PEN es la propiedad básica que servirá para extender la nulhomotopía a homotopía. Es importante por ello obtener otras caracterizaciones de la misma.

Teorema II.1.2 *Dado un morfismo $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ son equivalentes:*

a) i verifica PEN.

b) Todo morfismo nulhomótopo tiene una extensión nulhomótopa relativa a i.

c) Todo morfismo nulhomótopo tiene una extensión relativa a i.

d) k tiene una extensión relativa a i.

Demostración:

$a) \Rightarrow b)$ Dado $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ tal que $F : f \simeq 0$. Por $a)$ se tiene $r : C\mathrm{A} \to C\mathrm{B}$ con $rCi = 1$. $\tilde{f} = Frk$ es la extensión buscada.

$b) \Rightarrow c)$ Trivial.

$c) \Rightarrow d)$ Evidente, pues $k \simeq 0$.

$d) \Rightarrow a)$ $r = p(C\tilde{k})$ es la retracción buscada, donde $\tilde{k}$ es una extensión de k relativa a i, existente por $d)$.

□

Corolario II.1.5 *$Hom(\mathrm{A}, \mathrm{X})^{f(i)} \neq \phi$, para todo objeto contráctil X y todo morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$.*

Demostración:

Si $\mathrm{X} \simeq 0$ entonces, por la proposición II.1.6 $f \simeq 0$, y por la parte $c)$ del teorema II.1.2 anterior se concluye el resultado.

□

Corolario II.1.6 *Si existe objeto 0 en una C-categoría, es contráctil.*

Demostración:

1_0 se factoriza a través de cualquier objeto, en particular los contráctiles.

□

El concepto "contráctil" se puede extender a cofibraciones, que como se verá en el capítulo IV son los objetos contráctiles en la categoría de pares.

Definición II.1.5 Se denomina *cofibración contráctil* a cualquier cofibración con dominio y codominio contráctiles.

Proposición II.1.7 *Si $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ es una cofibración contráctil, entonces $Hom(\mathrm{A}, \mathrm{X})^{f(i)} \neq \phi$ para todo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$.*

Demostración:

Como $\mathrm{B} \simeq 0$ entonces $f \simeq 0$, y por PEN se concluye el resultado.

□

Teorema II.1.3 *Todo push out de cofibraciones contráctiles es contráctil.*

Demostración:

Observando el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{B} \arrow[rr, tail, "i'"] \arrow[dl, tail, "i"'] \arrow[dd, tail, "k"] & & \mathrm{A'} \arrow[dl, tail] \arrow[dd, tail, "k"] \\
\mathrm{A} \arrow[rr, tail] \arrow[dd, tail, "k"] & & \mathrm{P}\{i', i\} \arrow[dd, tail, "k"] & \\
 & C\mathrm{B} \arrow[rr, tail, "Ci'"] \arrow[dl, tail, "Ci"'] \arrow[dd, "r"] & & C\mathrm{A'} \arrow[dl, tail] \arrow[dd, "q'"] \\
C\mathrm{A} \arrow[rr, tail] \arrow[dd, "q"] & & \mathrm{P}\{Ci', Ci\} \arrow[dd, "q' \cup q"] & \\
 & \mathrm{B} \arrow[rr, tail, "i'"] \arrow[dl, tail, "i"'] & & \mathrm{A'} \arrow[dl, tail] \\
\mathrm{A} \arrow[rr, tail] & & \mathrm{P}\{i', i\} &
\end{tikzcd}
$$

donde i, i' son las cofibraciones contráctiles, con $rk_{\mathrm{B}} = 1_{\mathrm{B}}$, pues $B \simeq 0$, y q, q' son extensiones de $\{ir, 1\}$ e $\{i'r, 1\}$ relativas a las cofibraciones i_1 e i'_1, respectivamente, existentes por el corolario II.1.5. Por la proposición II.1.4 $q' \cup q$ es la retracción de k buscada.

□

Corolario II.1.7 *Si i es una cofibración contráctil, entonces Σ^i e i_1 son contráctiles.*

Demostración:

Basta observar que si $\mathrm{B} \simeq 0$ entonces k_{B} es cofibración contráctil. $\square$

Toda cofibración tiene que verificar PEN, por (C3), pero puede suceder que un morfismo verifique esta propiedad y no sea cofibración. Cuando la clase de cofibraciones viene definida por PEN, se dirá que la C-categoría tiene todas las cofibraciones. En este caso los axiomas que definen la categoría con cono se reducen.

Definición II.1.6 Una *C-categoría con todas las cofibraciones* es una C-categoría en la cual la clase de cofibraciones viene definida por la propiedad de extensión de nulhomotopía, esto es, un morfismo es cofibración si verifica PEN.

Teorema II.1.4 *Una C-categoría con todas las cofibraciones es una categoría $\mathbf{C}$, con un funtor $C : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, transformaciones naturales $k : 1 \to C$ y $p :$ $: CC \to C$, donde los morfismos que cumplen PEN se denominan cofibraciones y se verifican los axiomas $(C1)$, $(C2)'$ y $(C4)$, donde:*

(C2)' Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{P}\{f,i\} \end{tikzcd}$$

Además el funtor C transforma push outs cofibrados en push outs.

Demostración:

Basta demostrar que de (C1), (C2)' y (C4) se derivan (C2) y (C3), pues en el otro sentido ya estaría al ser (C2)' una restricción de (C2).

Para que se verifique (C2) sólo falta comprobar que $\bar{i}$ permite extender cualquier morfismo nulhomótopo. Sea $g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ con $g \simeq 0$. Entonces por el corolario II.1.3 $gf \simeq 0$. Por PEN existe $h : \mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ tal que $hi = gf$. $\{g, h\}$ es una extensión para g relativa a $\bar{i}$.

Respecto a (C3), para todo objeto X, 1_{X} permite la extensión de cualquier morfismo, en particular los nulhomótopos, y todo morfismo nulhomótopo con dominio X es extendible relativo a k_{X}, por definición. Además, dados $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ y $j : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ verificando PEN, si $f : \mathrm{C} \to \mathrm{X}$, $f \simeq 0$, entonces tiene una extensión $\tilde{f} \simeq 0$ relativa a j y, por tanto, existe $\tilde{\tilde{f}}$ extensión de $\tilde{f}$ relativa a i. $\tilde{\tilde{f}}ij = f$.

□

Cuando la categoría donde se desarrolla una teoría de homotopía tiene objeto inicial, surge de forma natural la noción de objeto cofibrante. Las homotopías en las cuales todos los objetos son cofibrantes permiten desarrollos menos complicados.

Definición II.1.7 Un objeto X de una C-categoría $\mathbf{C}$, con objeto inicial ϕ, se dirá *ϕ-cofibrante* o simplemente *cofibrante* cuando $\phi_{\mathrm{X}} : \phi \rightarrowtail \mathrm{X}$ es cofibración.

Proposición II.1.8 *Dados dos objetos isomorfos, uno es cofibrante si y sólo si lo es el otro.*

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición II.1.2.

□

Proposición II.1.9 *En una C-categoría con todos sus objetos cofibrantes, se puede suprimir en el axioma (C3): "Para todo objeto X, 1_X y k_X son cofibraciones".*

Demostración:

1_{X} es cofibración, por (C2) observando el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} \phi \arrow[r, tail, "\phi_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, tail, "1_\phi"] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "1_{\mathrm{X}}"] \\ \phi \arrow[r, tail, "\phi_{\mathrm{X}}"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

Si se toma en (C4) $i = \phi_X$ se tiene que $k_{\mathrm{X}} = (\phi_{\mathrm{X}})_1\overline{k_\phi}$. $k_\phi = \phi_{C\phi}$ es cofibración, y por (C2) también lo es $\overline{k_\phi}$. Por tanto k_{X} es cofibración al ser composición de ellas.

□

Proposición II.1.10 *En una C-categoría con todos los objetos cofibrantes se verifica que $Hom(A, C\phi)^{k_\phi(\phi_{\mathrm{A}})} \neq \phi$, para todo objeto* A.

Demostración:

Consecuencia del corolario II.1.5.

□

El concepto de "punto" es imprescindible para la obtención de suspensiones y éstas, a su vez, son necesarias para definir los grupos de homotopía de objetos punteados, $\pi_n^{\mathrm{A}} X = [S^n\mathrm{A}, \mathrm{X}]$, a semejanza de lo que sucede en la homotopía ordinaria de los espacios topológicos. En una C-categoría se pueden obtener grupos y sucesiones exactas de homotopía para objetos no necesariamente punteados, y conseguir C-categorías punteadas cuyos grupos y sucesiones se reduzcan a los anteriores haciendo innecesario el uso de suspensiones y el concepto de punto. No obstante, se introduce aquí dicha noción para posteriormente confirmar lo expresado.

Definición II.1.8 Una *C-categoría punteada* es una C-categoría con todos sus objetos cofibrantes y tal que el cono del objeto inicial coincida con él. Se notará dicho objeto por $*$ y se denominará *punto.* El morfismo inicial $*_{\mathrm{X}} : * \rightarrowtail \mathrm{X}$ se notará simplemente por $*$ cuando no lleve a error. Obsérvese que $(*_{\mathrm{X}})_1 = k_{\mathrm{X}}$. El coproducto de dos objetos X e Y se notará en este caso $\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}$.

Obsérvese que por ser todos los objetos cofibrantes el coproducto de dos objetos siempre existe, y que por el cono conservar push outs $C(\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}) =$ $= C\mathrm{X} \vee C\mathrm{Y}$. Además $*$ es contráctil, por ser un cono.

Proposición II.1.11 *Dadas $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ e $i' : \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A}'$ cofibraciones, entonces $i \vee i' : \mathrm{B} \vee \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A} \vee \mathrm{A}'$ es también cofibración.*

Demostración:

Consecuencia del teorema II.1.1.

□

Proposición II.1.12 *Si* X *y* X' *son objetos contráctiles, entonces* $\mathrm{X} \vee \mathrm{X}'$ *es contráctil.*

Demostración:

Consecuencia del teorema II.1.3, pues $*_{\mathrm{X}}$ y $*_{\mathrm{X}'}$ son cofibraciones contráctiles.

□

II.2 Homotopía.

La definición de homotopía relativa a una cofibración con codominio contráctil es un primer paso que permitirá extender, en el capítulo siguiente, dicha noción para una cofibración cualquiera. Esta verifica las propiedades básicas comunes a todas las homotopías: relación de equivalencia, trivialidad sobre objetos contráctiles, transformación de coproductos en productos y compatibilidades con la composición de morfismos. En su definición se usa una retracción de la transformación natural k, y posteriormente se demuestra que la homotopía es independiente de la elección de la misma.

Definición II.2.1 Dada $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración, con A contráctil, y dados $f_0, f_1 : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, se dirá que f_0 *es homótopo a* f_1 *relativo a* i cuando exista una extensión H de $\{f_0 qCi, f_1\}$ relativa a i_1, donde $qk_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}$. H se denomina *homotopía relativa a* i *entre* f_0 *y* f_1 ($H : f_0 \simeq f_1$ rel. i).

Obsérvese que por existir $\{f_0 qCi, f_1\}$ se tiene que $f_0 i = f_1 i$.

Toda homotopía entre morfismos debe clasificarlos mediante una relación de equivalencia.

Teorema II.2.1 *Ser homótopo rel.* i *es una relación de equivalencia.*

Demostración:

Por PEN existe una extensión μ de $kqCi \cup k = k(qCi \cup 1) : \Sigma^i \to \mathrm{P}\{i,i\} \rightarrowtail$ $\rightarrowtail C(\mathrm{P}\{i,i\}) = P\{Ci, Ci\}$ relativa a i_1, con $qk_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}$.

- *Reflexiva.* $fq : f \simeq f$ rel. i.

- *Simétrica.* Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i, entonces $\overline{H} = \{H, f_0 q\}\mu : f_1 \simeq f_0$ rel. i.

- *Transitiva.* Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i y $G : f_1 \simeq f_2$ rel. i, entonces $H * G = \{\overline{H}, G\}\mu = \{\{H, f_0 q\}\mu, G\}\mu : f_0 \simeq f_2$ rel. i.

$\square$

Las notaciones $-$ y $*$ usadas en la demostración de este teorema se repetirán relacionando homotopías a lo largo de este trabajo, siempre con el mismo significado.

Definición II.2.2 Dados $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración, A contráctil ($qk_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}$), y $u : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, se define el *corchete de homotopía de* X *relativo a* i *basado en* u por $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)} = Hom(\mathrm{A}, \mathrm{X})^{u(i)}/ \simeq$, donde "$\simeq$" es la relación de equivalencia "ser homótopo relativo a i". Cuando la categoría tiene objeto inicial y A es contráctil y cofibrante, $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{\phi_{\mathrm{X}}(\phi_{\mathrm{A}})}$ se notará simplemente por $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]$ y se denominará *corchete de homotopía de* X *referido a* A.

En homotopía relativa, la compatibilidad con la composición a izquierda no plantea dificultades. En cambio, para la composición a derecha hay que exigir la existencia de un cuadrado conmutativo que relacione las cofibraciones.

Proposición II.2.1 *Sea* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *cofibración, con* A *objeto contráctil, entonces* $[\mathrm{A}, codom\, -]^{-\,(i)} : \mathbf{C}^{\mathrm{B}} \to \mathbf{Set}$*, definido de forma obvia sobre los objetos y dado* $h : u \to v$ *en* $\mathbf{C}^{\mathrm{B}}$ $\quad [\mathrm{A}, codom\, -]^{-\,(i)}(h) = h_*$*, es un funtor.*

Demostración:

Si $[f_0] = [f_1]$ en $[\mathrm{A}, X]^{u(i)}$ con $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i, entonces $hH : hf_0 \simeq hf_1$ rel. i.

$\square$

La actuación de los corchetes de homotopía sobre morfismos con dominio y codominio contráctiles y de corchetes de homotopía relativos a cofibraciones contráctiles es bien conocida.

Proposición II.2.2 *Si* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *cofibración y* $u : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$*, con* A *y* X *contráctiles, entonces* $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)}$ *es un conjunto unitario.*

Demostración:

Al ser $\mathrm{X} \simeq 0$, por la proposición II.1.6 para todos $f_0, f_1 \in Hom(\mathrm{A}, \mathrm{X})^{u(i)}$, $\{f_0 qCi, f_1\} \simeq 0$, y aplicando PEN a i_1 se obtiene una extensión.

□

Proposición II.2.3 *Si* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *es una cofibración contráctil, entonces* $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)}$ *es un conjunto unitario para todo objeto* X *y todo morfismo* $u : \mathrm{B} \to \to \mathrm{X}$.

Demostración:

Por el corolario II.1.7 i_1 es contráctil, y por la proposición II.1.7 $\{f_0 qCi, f_1\}$ tiene una extensión relativa a i_1.

□

Observación II.2.1 Los precedentes resultados son equivalentes a decir que si el objeto X o la cofibración i son contráctiles entonces $f_0, f_1 : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ son homótopos relativo a i si y sólo si $f_0 i = f_1 i$.

Corolario II.2.1 *En una categoría punteada,* $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]$ *es un conjunto unitario, para todo objeto* X.

También en categorías punteadas se observa, análogamente a lo que sucede en otras homotopías, que un corchete con un coproducto en la primera componente es equivalente a un producto de corchetes.

Proposición II.2.4 *Dadas* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, $i' : \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A}'$ *cofibraciones, con* A, A' *contráctiles, entonces* $[\mathrm{A}, codom\ -]^{-(i)} \times [\mathrm{A}', codom\ \ \sim]^{\sim(i')} : \mathbf{C}^{\mathrm{B} \vee \mathrm{B}'} \to \mathbf{Set}$, *definido de forma obvia sobre los objetos y dado* $h : \{u, u'\} \to \{v, v'\}$ *en* $\mathbf{C}^{\mathrm{B} \vee \mathrm{B}'}$ $[\mathrm{A}, codom\ -]^{-(i)} \times [\mathrm{A}', codom\ \ \sim]^{\sim(i')}(h) = h_* \times h_*$*, es un funtor.*

Demostración:

Basta aplicar las proposiciones I.2.2, I.2.6 y I.2.7.

□

Proposición II.2.5 *Dadas* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, $i' : \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A}'$ *cofibraciones, con* A, A' *objetos contráctiles, existe una equivalencia natural:*

$[\mathrm{A} \vee \mathrm{A}', codom\ \{-,\sim\}]^{\{-,\sim\}(i\vee i')} \;\rightarrow\; [\mathrm{A}, codom\ -]^{-(i)} \times [\mathrm{A}', codom\ \ \sim]^{\sim(i')}$ $(\mathbf{C}^{\mathrm{B}\vee\mathrm{B}'} \rightarrow \mathbf{Set})$.

Demostración:

Se define $\varphi_{\{u,u'\}} : [\mathrm{A} \vee \mathrm{A}', \mathrm{X}]^{\{u,u'\}(i\vee i')} \longrightarrow [\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)} \times [\mathrm{A}', \mathrm{X}]^{u'(i')}$ por $\varphi_{\{u,u'\}}([\{f, f'\}])=([f],[f'])$, y $\varphi^{-1}_{\{u,u'\}}:[\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)}\times[\mathrm{A}', \mathrm{X}]^{u'(i')}\rightarrow[\mathrm{A}\vee\mathrm{A}', \mathrm{X}]^{\{u,u'\}(i\vee i')}$ por $\varphi^{-1}_{\{u,u'\}}([f],[f']) = ([\{f, f'\}])$.

Usando que el cono conserva push outs y que $C* = *$, se tiene que $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i y $H' : f'_0 \simeq f'_1$ rel. i' si y sólo si $\{H, H'\} : \{f_0, f'_0\} \simeq \{f_1, f'_1\}$ rel. $i \vee i'$, de donde se concluye que las transformaciones están bien definidas y son inversas.

Para la naturalidad basta observar que el siguiente cuadrado es conmutativo para cualquier morfismo $h : \{u, u'\} \rightarrow \{v, v'\}$.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathrm{A}\vee\mathrm{A}', codom\ \{u,u'\}]^{\{u,u'\}(i\vee i')}} \arrow[r, "\varphi_{\{u,u'\}}"] \arrow[d, "h_*"] & {[\mathrm{A}, codom\ u]^{u(i)}\times[\mathrm{A}', codom\ u']^{u'(i')}} \arrow[d, "h_* \times h_*"] \\
{[\mathrm{A}\vee\mathrm{A}', codom\ \{v,v'\}]^{\{v,v'\}(i\vee i')}} \arrow[r, "\varphi_{\{v,v'\}}"] & {[\mathrm{A}, codom\ v]^{v(i)}\times[\mathrm{A}', codom\ v']^{v'(i')}}
\end{tikzcd}$$

□

Para ver la compatibilidad con la composición a derecha se hace uso de una equivalencia natural derivada de la transformación k. La independencia de la homotopía respecto de la retracción usada en su definición permite crear dicha equivalencia.

Proposición II.2.6 *Sean* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *cofibración,* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ *y* $h_0, h_1 : C\mathrm{B} \to$ $\to \mathrm{X}$ *tales que* $h_0 \simeq h_1$ *rel.* k*. Entonces* $\{h_0, f\}$ *tiene una extensión relativa a* i_1 *si y sólo si* $\{h_1, f\}$ *la tiene.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si H_0 es una extensión de $\{h_0, f\}$ relativa a i_1 y $G : h_0 \simeq h_1$ rel. k, entonces $\{G, H_0\}rk$ es una extensión de $\{h_1, f\}$ relativa a i_1, donde r es una retracción para Ci_1 existente por PEN.

($\Leftarrow$) Análogo.

□

Teorema II.2.2 *La homotopía relativa a* i *es independiente de la retracción para la transformación natural* k*.*

Demostración:

Sean $q, q' : C\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ tales que $qk_A = q'k_A = 1$. Por la proposición II.2.2 $qCi \simeq q'Ci$ rel. k, por la proposición II.2.1 $f_0qCi \simeq f_0q'Ci$ rel. k, y por la proposición II.2.6 anterior se concluye el resultado.

□

Observación II.2.2 La independencia de la homotopía respecto de la retracción para la inclusión en el cono permite usar la transformación natural p como la retracción idónea en homotopía para kC.

Proposición II.2.7 *Dada* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *cofibración, con* A *contráctil, entonces* $k^* : [C\mathrm{A}, codom\, -]^{-\,(ki)} \to [\mathrm{A}, codom\, -]^{-\,(i)}$ $(\mathbf{C}^{\mathrm{B}} \to \mathbf{Set})$ *es una equivalencia natural.*

Demostración:

$k^*_u : [C\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(ki)} \to [\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)}$ es una aplicación, pues si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. ki entonces HCk es una extensión de $\{f_0Ci, f_1k\}$ relativa a i_1. Por la proposición

II.2.2 $kqCi \simeq Ci$ rel. k, y por la proposición II.2.1 $f_0kqCi \simeq f_0Ci$ rel. k. Aplicando ahora la proposición II.2.6 se obtiene $H' : f_0k \simeq f_1k$ rel. i.

Para la naturalidad obsérvese que el siguiente cuadrado es conmutativo para cualquier morfismo $h : u \to v$.

$$\begin{tikzcd} {[C\mathrm{A},\mathrm{X}]^{u(ki)}} \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "h_*"] & {[\mathrm{A},\mathrm{X}]^{u(i)}} \arrow[d, "h_*"] \\ {[C\mathrm{A},\mathrm{Y}]^{v(ki)}} \arrow[r, "k^*"] & {[\mathrm{A},\mathrm{Y}]^{v(i)}} \end{tikzcd}$$

Sea $qk_{\mathrm{A}} = 1_{\mathrm{A}}$. $q_u^* : [\mathrm{A},\mathrm{X}]^{u(i)} \to [C\mathrm{A},\mathrm{X}]^{u(ki)}$ es una aplicación, pues si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i entonces $HCq : f_0q \simeq f_1q$ rel. ki.

Evidentemente $k^*q^* = 1$; por la proposición II.2.2 $1 \simeq kq$ rel. ki, y por la proposición II.2.1 $q^*k^* = 1$. De la proposición I.2.8 se concluye el resultado. $\square$

Teorema II.2.3 *Dado el siguiente cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "i"] & \mathrm{B'} \arrow[d, tail, "i'"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "g"] & \mathrm{A'} \end{tikzcd}$$

con i, i' *cofibraciones y* A, A' *objetos contráctiles.*

a) $g^* : [\mathrm{A}', codom\ -]^{-\ (i')} \to [\mathrm{A}, codom\ -]^{-h\ (i)}$ $(\mathbf{C}^{\mathrm{B}'} \to \mathbf{Set})$ *es una transformación natural.*

b) Si el cuadrado es un push out, entonces g^* *es una equivalencia natural.*

Demostración:

a) Si $[f_0] = [f_1]$ en $[\mathrm{A}', codom\ u]^{u(i')}$, por la proposición II.2.7 anterior $[f_0 q'] = [f_1 q']$ en $[C\mathrm{A}', codom\ u]^{u(ki')}$, donde $q' k_{\mathrm{A}'} = 1_{\mathrm{A}'}$. Sea $H : f_0 q' \simeq f_1 q'$ rel. ki', entonces $HC^2 g : f_0 q' C g \simeq f_1 q' C g$ rel. ki, y usando de nuevo la proposición II.2.7 se tiene que $f_0 q' C g k = f_0 g \simeq f_1 q' C g k = f_1 g$ rel. i.

La naturalidad es obvia, observando que el siguiente cuadrado es conmutativo para cualquier morfismo $f : u \to v$ en $\mathbf{C}^{\mathrm{B}'}$:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathrm{A}', codom\ u]^{u(i')}} \arrow[r, "g_u^*"] \arrow[d, "f_*"] & {[\mathrm{A}, codom\ u]^{uh(i)}} \arrow[d, "f_*"] \\
{[\mathrm{A}', codom\ v]^{v(i')}} \arrow[r, "g_v^*"] & {[\mathrm{A}, codom\ v]^{vh(i)}}
\end{tikzcd}$$

b) Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i, se tiene que H es una extensión de $\{f_0 q C i, f_1\}$ relativa a i_1. $gqCi \simeq q' C g C i$ rel. k por la proposición II.2.2, donde $qk_{\mathrm{A}} = = 1_{\mathrm{A}}$, y $f_0 q C i = \{u, f_0\} g q C i \simeq \{u, f_0\} q' C g C i$ rel. k por la proposición II.2.1. Aplicando la proposición II.2.6 existe una extensión H' de $\{\{u, f_0\} q' C g C i, f_1\}$ relativa a i_1. Entonces $\{\{u, f_0\} q' C i', H'\} : \{u, f_0\} \simeq \{u, f_1\}$ rel. i'.

□

Corolario II.2.2 *Sea* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *cofibración, con* A *contráctil. Si* $i \cong i'$, *entonces* $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)} \cong [\mathrm{A}', \mathrm{X}]^{u'(i')}$, *donde* u' *es el morfismo asociado a* u *por el isomorfismo.*

Demostración:

Si $i \cong i'$, existen isomorfismos $g : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ y $h : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ tales que $gi = i'h$. Entonces, por las proposiciones II.1.2 y II.1.5 $i' : \mathrm{B}' \rightarrowtail \mathrm{A}'$ es una cofibración con A' contráctil. El siguiente cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "i"] & \mathrm{B'} \arrow[d, tail, "i'"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "g"] & \mathrm{A'} \end{tikzcd}$$

es un push out, y por el teorema II.2.3 anterior $g^*_{u'} : [\mathrm{A}', \mathrm{X}]^{u'(i')} \to [\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{u(i)}$ es un isomorfismo.

Nótese que $u' = uh^{-1}$.

□

Corolario II.2.3 *Si* $\mathrm{A} \cong \mathrm{A}'$, *entonces* $[\mathrm{A}, \mathrm{X}] \cong [\mathrm{A}', \mathrm{X}]$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición II.1.8 y del corolario II.2.2 anterior.

□

Capítulo III

Grupos de homotopía generalizada.

Una vez establecida la noción de homotopía relativa en una categoría con cono natural, el siguiente paso es obtener los grupos de homotopía. Para ello se introducen primeramente los grupoides de homotopía relativos a una cofibración y se estudia su carácter funtorial sobre objetos y cofibraciones. De la actuación de dichos funtores sobre push outs surge una generalización del concepto de homotopía relativa a una cofibración que no tenga, necesariamente, codominio contráctil como sucedía en el capítulo anterior. Es posible también crear los grupoides superiores de homotopía, que darán lugar a los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un objeto basados en un morfismo, que también se denominarán grupos de homotopía generalizada relativos a una cofibración.

Cuando se tiene una categoría punteada, a través del concepto de suspensión y usando el morfismo cero, se obtienen los grupos de homotopía relativos a una cofibración y los referidos a un objeto como un caso particular de la homotopía generalizada, dando lugar a funtores que actúan similarmente a los respectivos de la homotopía ordinaria respecto a contráctiles y coproductos.

III.1 Grupoides de homotopía.

Usando el concepto "contráctil fundamental" se crean los grupoides de homotopía relativos a cofibraciones cuyo codominio sea un objeto de este tipo. Éstos son creados mediante una extensión fija, aunque posteriormente se demuestra que cualquier otra genera grupoides isomorfos.

Reiterando el proceso dado en el axioma de cono relativo se obtienen los grupoides de orden superior para dichas cofibraciones, permitiendo esta técnica la definición de éstos para una cofibración cualquiera. Generalizando el isomorfismo que inducen los morfismos push out entre la homotopía relativa a una cofibración y la relativa a su inducida, se extiende el concepto de grupoide de primer orden para cofibraciones cuyo codominio no sea contráctil.

Para definir homotopía relativa a una cofibración se ha exigido que el codominio de ésta sea contráctil. Aunque esto sea suficiente para ver que la homotopía es una relación de equivalencia mediante el operador μ introducido, no basta para que se verifiquen las propiedades homotópicas que darán lugar a la estructura de grupoide. Para ello es necesario usar el concepto de contráctil fundamental.

Definición III.1.1 Un objeto A de una C-categoría se dice *contráctil fundamental* cuando es contráctil y posee una retracción q para k_{A} haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^2\mathrm{A} \arrow[r, "Cq"] \arrow[d, "p"] & C\mathrm{A} \arrow[d, "q"] \\ C\mathrm{A} \arrow[r, "q"] & \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

donde p es la transformación natural del axioma de cono. q se denominará una *retracción fundamental de* k_{A}. Una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ se dirá *fundamental* cuando A sea un contráctil fundamental.

Proposición III.1.1 *Dados dos morfismos isomorfos, uno es cofibración fundamental si y sólo si lo es el otro.*

Demostración:

Dada $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración fundamental. Sean $g : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ y $h : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ isomorfismos tales que $gi = i'h$, y q una retracción fundamental para k_{A}. Entonces q' como en la proposición II.1.5 es una retracción fundamental para $k_{\mathrm{A}'}$, pues $q'p = gqCg^{-1}p = gqpC^2g^{-1} = gqCqC^2g^{-1} = gqCg^{-1}CgCqC^2g^{-1} =$ $= gqCg^{-1}C(gqCg^{-1}) = q'Cq'$.

La proposición II.1.2 concluye la demostración.

□

Proposición III.1.2 *Para cualquier objeto* A *de* $\mathbf{C}$, $C\mathrm{A}$ *es un contráctil fundamental.*

Demostración:

Por el axioma de cono, la transformación natural p es una retracción fundamental.

□

Observación III.1.1 Por lo anterior k_{A} es una cofibración fundamental. Más aún, toda cofibración que llegue a un cono es fundamental. En particular, dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, $i_1 : \Sigma^i \rightarrowtail C\mathrm{A}$ es fundamental.

Definición III.1.2 Dados $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración con A contráctil ($qk_{\mathrm{A}} = 1$) y $f_0, f_1 : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, se define el *conjunto de las clases de homotopía relativa a i entre f_0 y f_1* como:

$$H_i(f_0, f_1) = [C\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{\{f_0 qCi, f_1\}(i_1)}$$

Proposición III.1.3 *Si codom f_0 = codom f_1 es un objeto contráctil y $f_0 i = f_1 i$, entonces $H_i(f_0, f_1)$ es un conjunto unitario.*

Demostración:

Por la observación II.2.1 $f_0 \simeq f_1$ rel. i, y si $F, F' : f_0 \simeq f_1$ rel. i, al ser $Fi_1 = F'i_1$ también $F \simeq F'$ rel. i_1.

□

Proposición III.1.4 *Si i es una cofibración contráctil y $f_0 i = f_1 i$, entonces $H_i(f_0, f_1)$ es un conjunto unitario.*

Demostración:

Análoga a la anterior, observando que por el corolario II.1.7 i_1 es una cofibración contráctil.

□

Cuando $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ sea una cofibración fundamental, $H_i(f_0, f_1)$ representará el conjunto de morfismos entre f_0 y f_1 en el grupoide de homotopía que se va a crear. Por ello a partir de aquí y hasta que se especifique lo contrario se considerará que $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ es siempre cofibración fundamental.

La extensión μ dada en el teorema II.2.1 establece una equivalencia natural entre dos funtores, cuando éstos se definen sobre una cofibración fundamental, que simplificará la demostración de las propiedades homotópicas de los grupoides.

Lema III.1.1 $[C(\mathrm{P}\{i,i\}), codom\ \{-,\sim\}]^{\{-,\sim\}(k)}$, $H_i(-,\sim) : \mathbf{C}^{\mathrm{P}\{i,i\}} \to \mathbf{Set}$, *definidos de forma análoga a la proposición II.2.1, son funtores.*

Demostración:

Similar a la de la proposición II.2.1, pues

$$H_i(-,\sim) = [C\mathrm{A}, codom\ -]^{\{-qCi,\sim\}(i_1)}$$

□

Obsérvese que $codom\ \{-,\sim\} = codom\ - = codom\ \sim$.

Teorema III.1.1 $\mu^* : [C(\mathrm{P}\{i,i\}), codom\ -]^{\{-,\sim\}(k)} \to H_i(-,\sim)$ $(\mathbf{C}^{\mathrm{P}\{i,i\}} \to$ $\to \mathbf{Set})$ *es una equivalencia natural.*

Demostración:

- μ^* *está bien definida.* Si $H : F_0 \simeq F_1$ rel. k entonces $H\mu' : F_0\mu \simeq F_1\mu$ rel. i_1, donde μ' es una extensión de $\{Ck\mu pCi_1, k\mu\}$ relativa a i_2, existente por ser $\{Ck\mu pCi_1, k\mu\} \simeq 0$, y donde $i_2 = (i_1)_1$.

- μ^* *es natural.* El siguiente cuadrado es conmutativo, para cualquier morfismo $h : \{f_0, f_1\} \to \{g_0, g_1\}$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{P}\{i,i\}}$.

$$\begin{array}{ccc}
[C(\mathrm{P}\{i,i\}), codom\ f_0]^{\{f_0,f_1\}(k)} & \xrightarrow{\mu^*_{\{f_0,f_1\}}} & H_i(f_0,f_1) \\
\downarrow h_* & & \downarrow h_* \\
[C(\mathrm{P}\{i,i\}), codom\ g_0]^{\{g_0,g_1\}(k)} & \xrightarrow{\mu^*_{\{g_0,g_1\}}} & H_i(g_0,g_1)
\end{array}$$

- μ^* *tiene como inversa* $(\mu^*)^{-1}_{\{f_0,f_1\}}([F]) = [\{f_0q, F\}]$.

  - $(\mu^*)^{-1}$ *está bien definida.* Si $H : F_0 \simeq F_1$ rel. i_1, entonces $\{f_0qp, H\} : \{f_0q, F_0\} \simeq \{f_0q, F_1\}$ rel. k.

  - $(\mu^*)^{-1}\mu^* = 1$. Si $[\{F,G\}] \in [C(\mathrm{P}\{i,i\}), \mathrm{X}]^{\{f_0,f_1\}(k)}$, entonces $\{FCq, \{Fp, Gp\}C\mu\} : \{F,G\} \simeq \{f_0q, \{F,G\}\mu\}$ rel. k.

  - $\mu^*(\mu^*)^{-1} = 1$. Usando que A es contráctil fundamental se tiene $\{f_0qp, Fp\}C\mu : F \simeq \{f_0q, F\}\mu$ rel. i_1.

□

Corolario III.1.1 $[\overline{fq}] = [fq]$ *en* $H_i(f,f)$.

Demostración:

Consecuencia inmediata del teorema III.1.1 anterior, ya que $\{fq, fq\}\mu \simeq fq$ rel. i_1 si y sólo si $\{fq, fq\} \simeq \{fq, fq\}$ rel. k.

□

Proposición III.1.5 (Inverso homotópico a derecha)

Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ *entonces* $[F * \overline{F}] = [f_0q]$ *en* $H_i(f_0, f_0)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1, $\{\overline{F}, \overline{F}\}\mu \simeq f_0q$ rel. i_1 si y sólo si $\{\overline{F}, \overline{F}\} \simeq$ $\simeq \{f_0q, f_0q\}$ rel. k. $H = \{\overline{F}Cq, \overline{F}Cq\}$ es la homotopía relativa a k buscada.

□

Proposición III.1.6 (Identidad homotópica a derecha)

$[F * f_1q] = [F]$ *en* $H_i(f_0, f_1)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1 $F \simeq \{\{F, f_0q\}\mu, f_1q\}\mu$ rel. i_1 si y sólo si $\{f_0q, F\} \simeq \{\{F, f_0q\}\mu, f_1q\}$ rel. k. $H = \{\{Fp, f_0qp\}C\mu, FCq\}$ es la homotopía relativa a k buscada.

□

Corolario III.1.2 $[\overline{\overline{F}}] = [F]$ *en* $H_i(f_0, f_1)$.

Demostración:

Es consecuencia directa de la proposición III.1.6 anterior observando que $\overline{\overline{F}} = \{\overline{F}, f_1q\}\mu = F * f_1q$.

□

Proposición III.1.7 *Si* $[F_0] = [F_1]$ *en* $H_i(f_0, f_1)$ *y* $[G_0] = [G_1]$ *en* $H_i(f_0, f_2)$, *entonces* $[\{F_0, G_0\}] = [\{F_1, G_1\}]$ *en* $[C(\mathrm{P}\{i, i\}), \mathrm{X}]^{\{f_1, f_2\}(k)}$.

Demostración:

Si $F : F_0 \simeq F_1$ rel. i_1 y $G : G_0 \simeq G_1$ rel. i_1, entonces $\{F, G\} : \{F_0, G_0\} \simeq \simeq \{F_1, G_1\}$ rel. k.

□

Corolario III.1.3 (Compatibilidad del inverso con la homotopía) *Si* $[F] = [G]$ *en* $H_i(f_0, f_1)$, *entonces* $[\overline{F}] = [\overline{G}]$ *en* $H_i(f_1, f_0)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1 $\{F, f_0q\}\mu \simeq \{G, f_0q\}\mu$ rel. i_1 si y sólo si $\{F, f_0q\} \simeq \simeq \{G, f_0q\}$ rel. k, lo cual se obtiene usando la proposición III.1.7 anterior.

□

Corolario III.1.4 (Compatibilidad del producto con la homotopía) *Si* $[F_0] = [F_1]$ *en* $H_i(f_0, f_1)$ *y* $[G_0] = [G_1]$ *en* $H_i(f_1, f_2)$, *entonces* $[F_0 * G_0] = = [F_1 * G_1]$ *en* $H_i(f_0, f_2)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1, $\{\overline{F_0}, G_0\}\mu \simeq \{\overline{F_1}, G_1\}\mu$ rel. i_1 si y sólo si $\{\overline{F_0}, G_0\} \simeq$ $\simeq \{\overline{F_1}, G_1\}$ rel. k, lo que se deduce del corolario III.1.3 y la proposición III.1.7. □

Corolario III.1.5 (Identidad homotópica a izquierda)
$[f_0q * F] = [F]$ *en* $H_i(f_0, f_1)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1 $\{\overline{f_0q}, F\}\mu \simeq F$ rel. i_1 si y sólo si $\{\overline{f_0q}, F\} \simeq \{f_0q, F\}$ rel. k, lo cual es cierto por el corolario III.1.1 y la proposición III.1.7. □

Proposición III.1.8 (Inversa homotópica a izquierda)
Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, *entonces* $[\overline{F} * F] = [f_1q]$ *en* $H_i(f_1, f_1)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1 $\{\overline{\overline{F}}, F\}\mu \simeq f_1q$ rel. i_1 si y sólo si $\{\overline{\overline{F}}, F\} \simeq \{f_1q, f_1q\}$ rel. k. Por el corolario III.1.2 y la proposición III.1.7 $\{\overline{\overline{F}}, F\} \simeq \{f_1q, f_1q\}$ rel. k si y sólo si $\{F, F\} \simeq \{f_1q, f_1q\}$ rel. k. $H = \{FCq, FCq\}$ es la homotopía rel. k buscada. □

Proposición III.1.9 *Si* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ *y* $[G] \in H_i(f_1, f_2)$, *entonces* $[\overline{G} * \overline{F}] =$ $= [\overline{F * G}]$ *en* $H_i(f_2, f_0)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1 $\{\overline{\overline{G}}, \overline{F}\}\mu \simeq \{\{\overline{F}, G\}\mu, f_0q\}\mu$ rel. i_1 si y sólo si $\{\overline{\overline{G}}, \overline{F}\} \simeq \{\{\overline{F}, G\}\mu, f_0q\}$ rel. k. Por el corolario III.1.2 y la proposición III.1.7 $\{\overline{\overline{G}}, \overline{F}\} \simeq \{\{\overline{F}, G\}\mu, f_0q\}$ rel. k. si y sólo si $\{G, \overline{F}\} \simeq \{\{\overline{F}, G\}\mu, f_0q\}$ rel. k. $H = \{\{\overline{F}p, Gp\}C\mu, \overline{F}Cq\}$ es la homotopía rel. k buscada. □

Proposición III.1.10 *Si* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $[G] \in H_i(f_1, f_2)$ *y* $[H] \in H_i(f_1, f_3)$, *entonces* $[F * H] = [(F * G) * (\overline{G} * H)]$ *en* $H_i(f_0, f_3)$.

Demostración:

Por el teorema III.1.1 $\{\overline{F}, H\}\mu \simeq \{\overline{F * G}, \overline{G} * H\}\mu$ rel. i_1 si y sólo si $\{\overline{F}, H\} \simeq \{\overline{F * G}, \overline{G} * H\}$ rel. k. Por las proposiciones III.1.7 y III.1.9 $\{\overline{F}, H\} \simeq \{\overline{F * G}, \overline{G} * H\}$ rel. k si y sólo si $\{\overline{F}, H\} \simeq \{\overline{G} * \overline{F}, \overline{G} * H\}$ rel. k. Por el corolario III.1.2, la proposición III.1.7 y el teorema III.1.1 $\{\overline{F}, H\} \simeq \{\overline{G} * \overline{F}, \overline{G} * H\}$ rel. k si y sólo si $\{\overline{F}, H\} \simeq \{\{G, \overline{F}\}\mu, \{G, H\}\mu\}$ rel. k. $K = \{\{Gp, \overline{F}p\}C\mu, \{Gp, Hp\}C\mu\}$ es la homotopía rel. k buscada.

□

Corolario III.1.6 (Asociatividad homotópica)
Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $[G] \in H_i(f_1, f_2)$ *y* $[H] \in H_i(f_2, f_3)$, *entonces* $[(F * G) * H] =$ $= [F * (G * H)]$ *en* $H_i(f_0, f_3)$.

Demostración:

Por el corolario III.1.5 $H \simeq f_2 q * H$ rel. i_1. Aplicando la proposición III.1.10 $f_2 q * H \simeq (f_2 q * \overline{G}) * (G * H)$ rel. i_1. Por los corolarios III.1.4 y III.1.5 $(f_2 q * \overline{G}) * (G * H) \simeq \overline{G} * (G * H)$ rel. i_1. Luego, por la transitividad de la relación, $H \simeq \overline{G} * (G * H)$ rel. i_1. Aplicando ahora el corolario III.1.4 $(F * G) * H \simeq (F * G) * (\overline{G} * (G * H))$ rel. i_1, y por la proposición III.1.10 $(F * G) * H \simeq F * (G * H)$ rel. i_1.

□

Teorema III.1.2 $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$, *con:*

- *Conjunto de objetos:* $Hom(\mathrm{A}, \mathrm{X})$.

- *Dados* $f_0, f_1 \in Hom(\mathrm{A}, \mathrm{X})$*:* $Hom(f_0, f_1) = H_i(f_0, f_1)$.

- *Morfismo identidad: Sea* $f_0 : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, $1_{f_0} = [f_0 q]$.

- *Morfismo inverso: Dada* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $\overline{[F]} = [\overline{F}]$.

- *Composición de morfismos:*

$$\begin{array}{llcl} * : & H_i(f_0,f_1) \times H_i(f_1,f_2) & \to & H_i(f_0,f_2) \\ & ([F],[G]) & \to & [F]*[G] = [F*G] \end{array}$$

es un grupoide.

Demostración:

Los corolarios III.1.3 y III.1.4 demuestran que la operación y el inverso no dependen de los representantes elegidos.

La proposición III.1.6 y el corolario III.1.5 prueban la existencia de identidades.

Las proposiciones III.1.5 y III.1.8 demuestran la existencia de inversos.

El corolario III.1.6 prueba la asociatividad.

□

A lo largo de todo el proceso anterior se ha hecho uso de un elemento $\mu \in$ $\in Hom(C\mathrm{A}, C(P\{i,i\}))^{kqCi \cup k(i_1)}$ para la obtención de los grupoides de homotopía $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$. Otro elemento cualquiera de este conjunto va a generar grupoides idénticos, por lo que éstos son independientes de la elección hecha.

Proposición III.1.11 *Si* μ_0, μ_1 *son extensiones de* $kqCi \cup k$ *relativas a* i_1 *y* $F, G \in Hom(C\mathrm{A}, \mathrm{X})^{u(Ci)}$, *entonces* $[\{F,G\}\mu_0] = [\{F,G\}\mu_1]$ *en* $H_i(Fk, Gk)$.

Demostración:

Por la observación II.2.1 $\mu_0 \simeq \mu_1$ rel. i_1, y por la proposición II.2.1 se concluye el resultado.

□

Corolario III.1.7 *Si μ_0, μ_1 son extensiones de $kqCi \cup k$ relativas a i_1, entonces el grupoide de homotopía a que dan lugar es el mismo.*

Demostración:

Por la proposición III.1.11 anterior se tiene que, dada $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, $\overline{[F]} = [\{F, f_0q\}\mu_0] = [\{F, f_0q\}\mu_1]$.

Usando además el teorema III.1.1 y la proposición III.1.7, dadas $[F] \in$ $\in H_i(f_0, f_1)$ y $[G] \in H_i(f_1, f_2)$, $[F * G] = [\{\{F, f_0q\}\mu_0, G\}\mu_0] =$
$= [\{\{F, f_0q\}\mu_0, G\}\mu_1] = [\{\{F, f_0q\}\mu_1, G\}\mu_1]$.

□

La creación de los grupoides permite introducir un concepto usual en homotopía como es el de conexidad por caminos.

Teorema III.1.3 *Dados una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail C\mathrm{A}$ y morfismos $f, g :$ $: C\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tales que $H : f \simeq g$ rel. i, entonces $\Lambda_H : H_i(f,f) \to H_i(g,g)$ definido por $\Lambda_H([F]) = [\overline{H} * F * H]$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración:

Consecuencia de la proposición I.1.1 al ser $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_\mathrm{X}$ un grupoide.

□

Los grupoides de homotopía pueden ser interpretados como bifuntores y sus conjuntos de morfismos como funtores con variación sobre morfismos fijada la cofibración, o con variación sobre ambos.

Proposición III.1.12 $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_\sim : \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$, *definido de forma obvia sobre los objetos y dado $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ en $\mathbf{C}$ $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_\sim(f) = f_*$, es un funtor.*

Demostración:

Simple comprobación usando la proposición II.2.1.

□

Corolario III.1.8 *Si i es una cofibración contráctil, $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\sim}(f)$ son funtores fieles y llenos.*

Demostración:

Basta observar que para cualquier objeto X, $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$ tiene como conjunto de morfismos $\bigcup_{u\in Hom(\mathrm{B},\mathrm{X})} Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{u(i)} \times Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{u(i)}$, pues por la proposición II.1.7, al ser i contráctil, para todo $u : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ $Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{u(i)} \neq \phi$, y por la proposición III.1.4 ya estaría.

□

Corolario III.1.9 $H_i(-,-) : \mathbf{C}^{\mathrm{A}} \to \mathbf{Grp}$*, definido de forma obvia sobre los objetos y dado $h : f_0 \to g_0$ en $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$ $H_i(-,-)(h) = h_*$, es un funtor.*

Demostración:

Por el teorema III.1.2 $H_i(f_0, f_0)$ es un grupo para todo f_0 objeto de $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$. Además por la proposición II.2.1 $h_*(1_{f_0}) = h_*([f_0q]) = [hf_0q] = 1_{hf_0} = 1_{g_0}$ y $h_*([F] * [G]) = h_*([F * G]) = h_*([\{\overline{F}, G\}\mu]) = h_*([\{\{F, f_0q\}\mu, G\}\mu]) =$
$= [\{h\{F, f_0q\}\mu, hG\}\mu]) = [\{\{hF, hf_0q\}\mu, hG\}\mu]) = [\{\overline{hF}, hG\}\mu]) =$
$= [hF * hG] = h_*([F]) * h_*([G])$, y por tanto $h_* : H_i(f_0, f_0) \to H_i(g_0, g_0)$ es homomorfismo de grupos.

□

La categoría de cofibraciones de $\mathbf{C}$, **cof** $\mathbf{C}$, es la subcategoría llena de $\mathbf{C(2)}$ que tiene por objetos las cofibraciones de $\mathbf{C}$.

La categoría de cofibraciones fundamentales de $\mathbf{C}$, **coff** $\mathbf{C}$, es la que tiene por objetos pares de la forma (i, q), donde $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ es cofibración fundamental con retracción fundamental q, y por morfismos los pares $(g, h) : (i, q) \to (i', q')$, donde g, h son morfismos en $\mathbf{C}$ con $gi = i'h$ y $gq = q'Cg$.

La categoría de cofibraciones de $\mathbf{C}$ que tienen como codominio un cono, $\mathbf{cof}_C$ $\mathbf{C}$, puede ser considerada subcategoría llena de cada una de las anteriores, según se consideren sus objetos de la forma i o (i,p), con p la transformación natural del axioma de cono.

En el teorema III.1.1 se usa la notación $(i_1)_1 = i_2$. De forma inductiva se puede definir $i_n = (i_{n-1})_1$ para todo $n \in I\!N$, considerando $i_0 = i$. A veces es conveniente prolongar hasta -1 la notación y usar por convenio y $\Sigma^{i_{-1}} = \mathrm{B}$ e $i_{-1} = 1_{\mathrm{B}}$, aunque $\Sigma^{1_{\mathrm{B}}} = C\mathrm{B}$. Observar que $i_n = (i_s)_{n-s}$ para $n, s \in I\!N^*$, $s \leq n$, y que i_n es cofibración fundamental para todo $n \in I\!N$, independientemente de que lo sea i.

Si $\mathbf{A}$ representa una cualquiera de las categorías de cofibraciones definidas anteriormente, $\mathbf{A}^{P\{-n,-m\}}$, $n, m \in I\!N^* \cup \{-1\}$, $(n,m) \neq (-1,-1)$, es la categoría que tiene como objetos pares de la forma $(\mathrm{A}, \{f_0, f_1\})$, con A un objeto de $\mathbf{A}$ y $\{f_0, f_1\}$ un morfismo de $\mathbf{C}$ con dominio $P\{i_n, i_m\}$, donde i es la cofibración de A, y como morfismos $(g,h) : (\mathrm{A}, \{f_0, f_1\}) \to (\mathrm{A}', \{f'_0, f'_1\})$ donde $(g,h) : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ verificando $f_0 = f'_0 C^n g$ y $f_1 = f'_1 C^m g$. Obsérvese que cuando $n = -1$ ó $m = -1$, $\{f_0, f_1\} = f_1$ ó $\{f_0, f_1\} = f_0$, respectivamente, y la categoría también se podrá notar por $\mathbf{A}^{codom\ -m}$ o $\mathbf{A}^{codom\ -n}$, respectivamente. Cuando $n = 0$ ó $m = 0$, pueden suprimirse en la notación de la categoría.

Definición III.1.3 Un morfismo (g,h) en cualquiera de las anteriores categorías se denomina *morfismo push out* si el siguiente cuadrado lo es:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "i"] & B' \arrow[d, tail, "i'"] \\ A \arrow[r, "g"] & A' \end{tikzcd}$$

$(\mathbf{A}\times\mathbf{A})^{P\{-n,-m\}\vee P\{-n',-m'\}}$ es la subcategoría llena de $\mathbf{A}^{P\{-n,-m\}} \times \mathbf{A}^{P\{-n',-m'\}}$ que tiene como objetos los pares de la forma $((\mathrm{A}, \{f_0, f_1\}), (\mathrm{A}', \{f'_0, f'_1\}))$, con $codom\ \{f_0, f_1\} = codom\ \{f'_0, f'_1\}$.

Teorema III.1.4 $\mathbf{H\_C}_{\mathrm{X}} : (\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$, *definido sobre los objetos de forma obvia, y que dado* $(g,h) : (i,q) \to (i',q')$ *en* $(\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}}$ $\mathbf{H\_C}_{\mathrm{X}}(g,h)$ *es el funtor que sobre los objetos actúa como* g^* *y sobre los morfismos como* $(Cg)^*$*, es un funtor.*

Demostración:

- Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i entonces, por ser (g,h) un morfismo entre cofibraciones fundamentales, $HCg : f_0 g \simeq f_1 g$ rel. i', y observando el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{i'} \arrow[r, "Ch \cup g"] \arrow[d, tail, "i'_1"] & \Sigma^{i} \arrow[d, tail, "i_1"] \\ C\mathrm{A'} \arrow[r, "Cg"] & C\mathrm{A} \end{tikzcd}$$

  por el teorema II.2.3 se tiene que $(Cg)^*$ está bien definido.

- $(Cg)^*(1_f) = (Cg)^*([fq]) = [fqCg] = [fgq'] = 1_{fg}$.

- $(Cg)^*([F] *_i [G]) = (Cg)^*([F *_i G]) = [(F *_i G)Cg] =$

$$\begin{aligned}
&= [\{\overline{F}, G\}\mu_i Cg] = [\{\overline{F}, G\}(Cg \cup Cg)\mu_{i'}] = [\{\overline{F}Cg, GCg\}\mu_{i'}] = \\
&= [\{\{F, f_0 q\}\mu_i Cg, GCg\}\mu_{i'}] = [\{\{F, f_0 q\}(Cg \cup Cg)\mu_{i'}, GCg\}\mu_{i'}] = \\
&= [\{\{FCg, f_0 qCg\}\mu_{i'}, GCg\}\mu_{i'}] = [\{\{FCg, f_0 gq'\}\mu_{i'}, GCg\}\mu_{i'}] = \\
&= [\{\overline{FCg}, GCg\}\mu_{i'}] = [FCg *_{i'} GCg] = [FCg] *_{i'} [GCg] = \\
&= (Cg)^*([F]) *_{i'} (Cg)^*([G])
\end{aligned}$$

  donde $\mu_{i'}$, μ_i son extensiones de $kq'Ci' \cup k$ y $kqCi \cup k$ relativas a i'_1 e i_1 y $*_{i'}$, $*_i$ indican las composiciones en $\mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$ y $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$, respectivamente.

Nótese que por la observación II.2.1 $\mu_i Cg \simeq (Cg \cup Cg)\mu_{i'}$ rel. i'_1, pues

$$\begin{aligned}
\mu_i Cgi'_1 &= \mu_i i_1(Ch \cup g) = (kqCi \cup k)(Ch \cup g) = \\
&= kqCiCh \cup kg = kqCgCi' \cup kg = kgq'Ci' \cup kg = \\
&= k(g \cup g)(q'Ci' \cup 1) = (Cg \cup Cg)k(q'Ci' \cup 1) = \\
&= (Cg \cup Cg)\mu_{i'}i'_1.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}(g,h) : \mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \to \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$ es un funtor.

□

Corolario III.1.10 *Si* X *es contráctil,* $\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}(g,h)$ *son funtores fieles y llenos.*

Demostración:

Basta observar que para cualquier cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, $\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$ tiene como conjunto de morfismos $\bigcup_{u \in Hom(\mathrm{B},\mathrm{X})} Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{u(i)} \times Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{u(i)}$, pues por el corolario II.1.5, al ser X contráctil, para todo $u : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ $Hom(\mathrm{A},\mathrm{X})^{u(i)} \neq \phi$, y por la proposición III.1.3 ya estaría.

□

Proposición III.1.13 $\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\sim} : (\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ *es un funtor.*

Demostración:

Por el teorema I.2.1 basta observar que dado $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ y $(g,h) : i' \to i$ en **coff C** se tiene, para todo $f_0 : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{Y}}(g,h)(\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\sim}(f)(f_0)) &= \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{Y}}(g,h)(ff_0) = \\
&= ff_0g = \\
&= \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\sim}(f)(f_0g) = \\
&= \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\sim}(f)(\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}(g,h)(f_0))
\end{aligned}$$

y para todo $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ se verifica

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{Y}}(g,h)(\mathbf{H}_i\mathbf{C}_{\sim}(f)([F])) &= \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{Y}}(g,h)([fF]) = \\ &= [fFCg] = \\ &= \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\sim}(f)([FCg]) = \\ &= \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\sim}(f)(\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}(g,h)([F])).\end{aligned}$$

□

Corolario III.1.11 *$H_{-}(\sim,\sim') : ((\mathbf{coff}\ \mathbf{C})^{\mathrm{P}\{-,-\}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ y $H_{-}(\sim,\sim) :$ $: ((\mathbf{coff}\ \mathbf{C})^{codom\ -})^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, definidos de forma obvia sobre los objetos y dado $(g,h) : ((i,q),\{f_0,f_1\}) \longrightarrow ((i',q'),\{f_0',f_1'\})$ en $((\mathbf{coff}\ \mathbf{C})^{\mathrm{P}\{-,-\}})^{\mathbf{op}}$ $H_{-}(\sim,\sim')(g,h) = (Cg)^*$, son funtores que transforman los morfismos push out en isomorfismos.*

Demostración:

El hecho de ser funtores es consecuencia del teorema III.1.4 anterior. Además si (g,h) es un morfismo push out, el cuadrado de la demostración del teorema III.1.4 es también un push out, pues si $\{F,f\} : \Sigma^i \to \mathrm{X}$ y $G : C\mathrm{A}' \to$ $\to \mathrm{X}$, con $\{F,f\}(Ch \cup g) = Gi_1'$, en particular $FCh = GCi'$ y por conservar el cono push outs existe $\{F,G\} : C\mathrm{A} = P\{Ch, Ci'\} \to \mathrm{X}$ que es exactamente $\{\{F,f\},G\} : C\mathrm{A} = P\{Ch \cup g, i_1'\} \to \mathrm{X}$. Aplicando ahora el teorema II.2.3 se concluye la demostración.

□

Lema III.1.2 *Si (i,q) e (i',q') son objetos de $\mathbf{coff}\ \mathbf{C}$, entonces $(i \vee i', q \vee q')$ también lo es.*

Demostración:

Simple comprobación usando las proposiciones II.1.3 y II.1.4.

□

Los funtores grupoides de homotopía actúan sobre un coproducto de cofibraciones como un producto de dichos funtores.

Teorema III.1.5

$\psi : \mathbf{H}_{-\vee -'}\mathbf{C}_{\sim} \rightarrow \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\sim} \times \mathbf{H}_{-'}\mathbf{C}_{\sim}$ $((\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}} \times (\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat})$ *definida por* $\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})} : \mathbf{H}_{i\vee i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \rightarrow \mathbf{H}_{i}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$*, con*

$$\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}(\{f, f'\}) = (f, f')$$

$$\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{F, F'\}]) = ([F], [F'])$$

es una equivalencia natural.

Demostración:

- $\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}$ está bien definida por la proposición II.2.5.

- $\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}$ conserva las identidades:

$$\begin{aligned}\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{f_0, f_0'\}(q \vee q')]) &= \psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{f_0 q, f_0' q'\}]) = \\ &= ([f_0 q], [f_0' q']).\end{aligned}$$

- $\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}$ conserva composición:

$$\begin{aligned}&\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{F, F'\}] *_{i\vee i'} [\{G, G'\}]) = \\ &= \psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{F, F'\} *_{i\vee i'} \{G, G'\}]) = \\ &= \psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{F *_i G, F' *_{i'} G'\}]) = \\ &= ([F *_i G], [F' *_{i'} G']) = \\ &= ([F] *_i [G], [F'] *_{i'} [G']) = \\ &= ([F], [F']) *_{i\vee i'} ([G], [G']) = \\ &= \psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{F, F'\}]) *_{i\vee i'} \psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([\{G, G'\}])\end{aligned}$$

pues por el teorema I.3.2 se tiene $\Sigma^{i\vee i'} = \Sigma^{i} \vee \Sigma^{i'}$ y $\mathrm{P}\{i \vee i', i \vee i'\} = = \mathrm{P}\{i, i\} \vee \mathrm{P}\{i', i'\}$. Como consecuencia de esto $\mu_i \vee \mu_{i'}$ es una extensión de $k(q \vee q')C(i \vee i') \cup k$ relativa a $(i \vee i')_1 = i_1 \vee i'_1$, por lo que $\{F, F'\} *_{i\vee i'} *_{i \vee i'} \{G, G'\} = \{F *_i G, F' *_{i'} G'\}$.

- ψ es natural. Sean $(g, h) : (j, r) \to (i, q)$ y $(g', h') : (j', r') \to (i', q')$ en **coff C** y sea $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, entonces $(g \vee g', h \vee h') : (j \vee j', r \vee r') \to \to (i \vee i', q \vee q')$, y el siguiente cuadrado conmutativo da la naturalidad:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}_{i\vee i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \arrow[r, "\psi_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}"] \arrow[d, "\mathbf{H}_{-\vee -'}\mathbf{C}_{\sim}((g\vee g'),(h\vee h'),f)"'] & \mathbf{H}_{i}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \arrow[d, "\mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\sim}((g,h),f) \times \mathbf{H}_{-'}\mathbf{C}_{\sim}((g',h'),f)"] \\
\mathbf{H}_{j\vee j'}\mathbf{C}_{\mathrm{Y}} \arrow[r, "\psi_{((j,r),(j',r'),\mathrm{Y})}"] & \mathbf{H}_{j}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{H}_{j'}\mathbf{C}_{\mathrm{Y}}
\end{tikzcd}$$

- Un desarrollo análogo al realizado hasta ahora en la demostración prueba que $\psi^{-1} : \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\sim} \times \mathbf{H}_{-'}\mathbf{C}_{\sim} \to \mathbf{H}_{-\vee -'}\mathbf{C}_{\sim}$ $((\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}} \times (\mathbf{coff\ C})^{\mathrm{op}} \to \longrightarrow \mathbf{Cat})$ definida por $\psi^{-1}_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})} : \mathbf{H}_{i}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{H}_{i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathbf{H}_{i\vee i'}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$, con $\psi^{-1}_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}(f, f') = \{f, f'\}$ y $\psi^{-1}_{((i,q),(i',q'),\mathrm{X})}([F], [F']) = [\{F, F'\}]$, es una transformación natural, que evidentemente es inversa de ψ.

$\square$

Corolario III.1.12 *La equivalencia natural ψ induce otras equivalencias naturales:*

i) $H_{i\vee i'}(\{\sim, \sim'\}, \{\approx, \approx'\}) \cong H_i(\sim, \approx) \times H_{i'}(\sim', \approx')$ $(\mathbf{C}^{P\{i\vee i', i\vee i'\}} \to \mathbf{Set})$.

ii) $H_{i\vee i'}(\{\sim, \sim'\}, \{\sim, \sim'\}) \cong H_i(\sim, \sim) \times H_{i'}(\sim', \sim')$ $(\mathbf{C}^{codom\ i\vee i'} \to \mathbf{Grp})$.

iii) $H_{-\vee -'}(\{\sim, \sim'\}, \{\approx, \approx'\}) \cong H_{-}(\sim, \approx) \times H_{-'}(\sim', \approx')$
$(((\mathbf{coff\ C} \times \mathbf{coff\ C})^{\mathrm{P}\{-,-\}\vee \mathrm{P}\{-',-'\}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set})$.

iv) $H_{-\vee -'}(\{\sim,\sim'\},\{\sim,\sim'\}) \cong H_{-}(\sim,\sim) \times H_{-'}(\sim',\sim')$
$(((\mathbf{coff\ C} \times \mathbf{coff\ C})^{codom\ -\vee codom\ -'})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$.

Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ no necesariamente fundamental, como se ha hecho notar en la observación III.1.1 i_n es siempre una cofibración fundamental. Por el teorema III.1.2 $\mathbf{H}_{i_n}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$ es un grupoide, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la proposición III.1.12 $\mathbf{H}_{i_n}\mathbf{C}_{\sim} : \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ es un funtor, y por el lema III.1.1 y el corolario III.1.9, $H_{i_n}(-,\sim) : \mathbf{C}^{P\{i_n,i_n\}} \to \mathbf{Set}$ y $H_{i_n}(-,-) : \mathbf{C}^{codom\ i_n} \to \mathbf{Grp}$ también lo son.

Observación III.1.2 Los funtores precedentes también pueden ser interpretados como funtores que actúan sobre la cofibración i. Como consecuencia de ello, $\mathbf{H}_{i_n}\mathbf{C}_{\mathrm{X}}$ se denominará grupoide de homotopía de orden n relativo a i del objeto X.

Proposición III.1.14 *$\Sigma^n : \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{C}$, definido por $\Sigma^n(i) = \Sigma^{i_{n-1}}$ y dado un morfismo $(g,h) : i \to i'$ en $\mathbf{cof\ C}$, $\Sigma^n(g,h) = C^n h \cup C^{n-1}g \cup \overset{(n}{\ldots} \cup C^{n-1}g$, es un funtor para $n \in \mathbb{N}^*$.*

Demostración:

Simple comprobación usando que C es un funtor.

$\square$

Obsérvese que $\Sigma^n(g,h) = \Sigma^{n-m}(C^m g, \Sigma^m(g,h))$, $0 \leq m \leq n$, $\Sigma^n(1_{\mathrm{B}}) = = C^n\mathrm{B}$ y $(1_{\mathrm{B}})_n = 1_{C^n\mathrm{B}}$.

Corolario III.1.13 *$\Sigma^n(k) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definido por $\Sigma^n(k)(\mathrm{A}) = \Sigma^n(k_{\mathrm{A}})$ y dado un morfismo $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$, $\Sigma^n(k)(f) = \Sigma^n(Cf, f)$, es un funtor para $n \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema III.1.6 *$I_n : \mathbf{cof\ C} \longrightarrow \mathbf{cof}_{\mathrm{C}}\,\mathbf{C}$, definido por $I_n(i) = (i_n, p)$ e $I_n(g,h) = (C^n g, \Sigma^n(g,h))$, es un funtor que transforma morfismos push out en morfismos push out, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

Obsérvese que:

- $$\begin{aligned} i'_n\Sigma^n(g,h) = \; & \{C^n i', C^{n-1}k, ..., k\}(C^n h \cup C^{n-1}g \cup \overset{(n}{\cdots\cdots} \cup C^{n-1}g) = \\ = \; & \{C^n(i'h), C^{n-1}kC^{n-1}g, ..., kC^{n-1}g\} = \\ = \; & \{C^n(gi), C^n gC^{n-1}k, ..., C^n gk\} = \\ = \; & C^n gi_n. \end{aligned}$$

- Dados $\{f_n, f_{n-1}, ..., f_1, f_0\} : \Sigma^{\bar{i}_{n-1}} \to \mathrm{X}$ y $f : C^n\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tales que $fC^sk = = f_sC^{n-1}\overline{f}$, $0 \leq s \leq n-1$, y $fC^ni = f_nC^nh$. Obsérvese que $f_n : C^n\mathrm{B}' \to \to \mathrm{X}$, y $f_s : C^{n-1}\mathrm{A}' \to \mathrm{X}$, $0 \leq s \leq n-1$, y por el cono conservar push outs $f_s = \{f_{s_0}, f_{s_1}\}$, con $f_{s_0}C^{n-1}h = f_{s_1}C^{n-1}i$. Además $f_nC^sk = = f_sC^{n-1}\overline{i} = f_{s_0}$. Por otro lado $fC^sk = f_sC^{n-1}\overline{f} = f_{s_1}$, de donde $f_s = \{f_nC^sk, fC^sk\}$.

  Por ser $fC^ni = f_nC^nh$ existe una única $F : C^n\mathrm{A}' \to \mathrm{X}$ tal que $FC^n\overline{i} = f_n$ y $FC^n\overline{f} = f$. Luego $FC^sk = \{f_n, f\}C^sk = \{f_nC^sk, fC^sk\} = f_s$.

  De esto último se deduce que F es la única solución posible.

$\square$

Corolario III.1.14 *$I_n : (\mathbf{cof\ C})^{codom\ -n} \to (\mathbf{cof}_{\mathrm{C}}\ \mathbf{C})^{codom\ -}$, definido de forma obvia, es un funtor.*

Demostración:

Basta observar que dado $(g,h) : (i,f) \to (i',f')$, $f'C^ng = f$.

$\square$

Observación III.1.3 Para $n = 1$ el funtor anterior permite extender los funtores definidos sobre $(\mathbf{cof}_{\mathrm{C}}\ \mathbf{C})^{codom\ -}$ a $(\mathbf{cof\ C})^{codom\ -1}$, pasando de cofibraciones con codominio un cono a cofibraciones totalmente arbitrarias, resultado que será muy útil a la hora de definir grupos de homotopía generalizada.

Corolario III.1.15 *$k_n : \Sigma^n(k) \to C^{n+1}$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{C})$ es una transformación natural.*

Corolario III.1.16 *$k_n(P\{f,g\}) = k_n(\mathrm{Y}) \cup k_n(\mathrm{Z})$, donde Y y Z son las componentes vertical y horizontal, respectivamente, del push out.*

Demostración:

Consecuencia de la naturalidad de la transformación k_n.

□

Considerando $I_n : (\mathbf{cof\,C})^{\mathbf{op}} \to (\mathbf{cof}_{\mathrm{C}}\,\mathbf{C})^{\mathbf{op}}$ y como consecuencia del teorema III.1.6 se tiene $\mathbf{H}_{-_n}\mathbf{C}_\sim = \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_\sim(I_n \times 1) : (\mathbf{cof\ \ C})^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$, esto es,

$$\mathbf{H}_{-_n}\mathbf{C}_\sim(i,\mathrm{X}) = \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_\sim((i_n,p),\mathrm{X})$$

$$\mathbf{H}_{-_n}\mathbf{C}_\sim((g,h),f) = \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_\sim((C^n g, \Sigma^n(g,h)),f)$$

Por otro lado se pueden definir $H_{-_n}(\sim,\sim') : ((\mathbf{cof\ \ C})^{\mathrm{P}\{-_n,-_n\}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ y $H_{-_n}(\sim,\sim) : ((\mathbf{cof\ \ C})^{codom\ -_n})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$ por $H_{-_n}(\sim,\sim')(i,\{f_0,f_1\}) = = H_{-}(\sim,\sim')((i_n,p),\{f_0,f_1\})$, $H_{-_n}(\sim,\sim)(i,f) = H_{-}(\sim,\sim)((i_n,p),f)$ y $H_{-_n}(\sim,\sim')(g,h) = H_{-}(\sim,\sim')(C^n g, \Sigma^n(g,h))$.

Análogamente existen $\mathbf{H}_{-_n\vee -'_m}\mathbf{C}_\sim : (\mathbf{cof\ \ C})^{\mathbf{op}} \times (\mathbf{cof\ \ C})^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$, $H_{-_n\vee -'_m}(\{\sim,\sim'\},\{\approx,\approx'\}) : ((\mathbf{cof\ \ C} \times \mathbf{cof\ \ C})^{P\{-_n,-_n\}\vee P\{-'_m,-'_m\}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ y $H_{-_n\vee -'_m}(\{\sim,\sim'\},\{\sim,\sim'\}) : ((\mathbf{cof\ \ C} \times \mathbf{cof\ \ C})^{codom\ -_n \vee codom\ -'_m})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$.

De lo anterior y por el teorema III.1.5 y el corolario III.1.12 existen equivalencias naturales:

$$H_{-_n\vee -'_m}\mathbf{C}_\sim \cong H_{-_n}\mathbf{C}_\sim \times H_{-'_m}\mathbf{C}_\sim$$

$$H_{-_n\vee -'_m}(\{\sim,\sim'\},\{\approx,\approx'\}) \cong H_{-_n}(\sim,\approx) \times H_{-'_m}(\sim',\approx')$$

$$H_{-_n\vee -'_m}(\{\sim,\sim'\},\{\sim,\sim'\}) \cong H_{-_n}(\sim,\sim) \times H_{-'_m}(\sim',\sim')$$

Observación III.1.4 (Homotopía relativa a cofibraciones con codominio no contráctil.)

La segunda parte del teorema II.2.3 y el teorema III.1.6 permiten una extensión de la homotopía relativa a cofibraciones con codominio no contráctil:

Dado el push out

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, tail, "\overline{i}"] \\ A \arrow[r, "\overline{f}"] & P\{f,i\} \end{tikzcd}$$

con i cofibración, se dirá que $f_0 \simeq f_1$ rel. i si y sólo si $\{u, f_0\} \simeq \{u, f_1\}$ rel. $\overline{i}$. Esta equivalencia permite definir homotopía relativa a una cofibración si existe homotopía relativa a la otra, obteniéndose como consecuencia obvia un isomorfismo entre $[A, Z]^{uf(i)}$ y $[P\{f,i\}, Z]^{u(\overline{i})}$.

Nótese que la cofibración $\overline{i}$ es única salvo isomorfismo, y que el corolario II.2.2 justifica la unicidad de la homotopía así definida. Por otro lado, si alguna de las cofibraciones tiene codominio contráctil, induce homotopía relativa a la otra, sin necesidad de que ésta lo tenga, pudiéndo así darse la circunstancia de un push out cofibrado con homotopía relativa a ambas cofibraciones sin codominios contráctiles.

Observación III.1.5 Intuitivamente una cofibración fundamental es aquélla cuyo codominio es un objeto contráctil que se comporta de forma similar a un cono. Más aún, toda cofibración fundamental puede ser sustituida por una con codominio un cono, obteniéndose homotopías relativas equivalentes y haciendo así superflua la relativa a cofibraciones fundamentales.

Teorema III.1.7 *Dada* $i : B \rightarrowtail A$ *cofibración fundamental:*

$(C^n k)^* : H_{(ki)_{n-1}}(-C^{n-1}q, -'C^{n-1}q) \to H_{i_{n-1}}(-,-') \ (\mathbf{C}^{P\{i_{n-1},i_{n-1}\}} \to \mathbf{Set})$ *y* $(C^n k)^* : H_{(ki)_{n-1}}(-C^{n-1}q, -C^{n-1}q) \to H_{i_{n-1}}(-,-) \ (\mathbf{C}^{C^{n-1}\mathrm{A}} \to \mathbf{Grp})$ *son equivalencias naturales.*

Demostración:

$(C^n k)^*$ es transformación, como consecuencia del teorema III.1.4, pues por el teorema III.1.6 $(C^{n-1}k, \Sigma^{n-1}(k,1)) : i_{n-1} \to (ki)_{n-1}$ en $\mathbf{cof}_{\mathrm{C}}\ \mathbf{C}$. Para la naturalidad basta observar que el siguiente cuadrado es conmutativo, para cualquier $h : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$:

$$\begin{tikzcd}
H_{(ki)_{n-1}}(f_0C^{n-1}q, f_1C^{n-1}q) \arrow[r, "(C^nk)^*_{\{f_0,f_1\}}"] \arrow[d, "h_*"] & H_{i_{n-1}}(f_0,f_1) \arrow[d, "h_*"] \\
H_{(ki)_{n-1}}(hf_0C^{n-1}q, hf_1C^{n-1}q) \arrow[r, "(C^nk)^*_{\{hf_0,hf_1\}}"] & H_{i_{n-1}}(hf_0,hf_1)
\end{tikzcd}$$

$(C^n q)^* : H_{i_{n-1}}(-,\sim) \to H_{(ki)_{n-1}}(-C^{n-1}q, \sim C^{n-1}q)$ es también transformación, pues $(C^{n-1}q, \Sigma^{n-1}(q,1)) : (ki)_{n-1} \to i_{n-1}$ en $\mathbf{cof}_C\ \mathbf{C}$, y es inversa de $(C^n k)^*$, ya que $(C^n k)^*(C^n q)^* = 1$ y $w(C^{n+1}kC) : HC^n kC^n q \simeq H$ rel. $(ki)_n$, donde $[H] \in H_{(ki)_{n-1}}(f_0C^{n-1}q, f_1C^{n-1}q)$ y w es una extensión de $\{HC^{n+1}ip, , HC(kC)_{n-2}p(C^n p), HC^{n+1}q, HC^n p\} : \Sigma^{(C(ki))_n} \to \mathrm{X}$ relativa a $(C(ki))_{n+1}$ cuya existencia está garantizada por PEN, puesto que por la proposición II.1.7 $\Sigma^{(C(ki))_n}$ es contráctil. Para $n = 1$ el término $HC(kC)_{-1}p(Cp)$ desaparece. □

III.2 Grupos de homotopía.

Los grupoides introducidos en el párrafo anterior permiten ahora definir los grupos de homotopía relativos a una cofibración basados en un morfismo y estudiar su actuación, pues pueden ser interpretados como funtores, sobre objetos distinguidos, los contráctiles, sobre las cofibraciones contráctiles y sobre los coproductos.

En categorías punteadas se crean a través de funtores suspensión grupos de homotopía relativos a una cofibración y grupos de homotopía referidos a un objeto similares a los obtenidos en homotopía ordinaria. Además se analiza su actuación en los casos particulares ya reseñados para grupos de homotopía generalizada.

Definición III.2.1 Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, se denomina *$n$-grupo de homotopía relativo a i_m del objeto* X *basado en* $f : C^r\mathrm{A} \to \mathrm{X}$, $1 \leq r \leq n+m-1$, al grupo $H_{i_{n+m-1}}(fp^{n+m-r-1}, fp^{n+m-r-1})$, que se notará por $\pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, f)$.

Observación III.2.1 Al ser $n \geq r - m + 1$, puede tomar valores no positivos.

Si $\mathrm{A} = C\mathrm{A}'$, entonces r también puede tomar el valor 0, existiendo $\pi_1^i(\mathrm{X}, f)$. Nótese que por el teorema III.1.7 también existe dicho grupo para las cofibraciones fundamentales. Por esto el $1-$grupo de homotopía recibirá el nombre de grupo fundamental de X relativo a i basado en f.

Obsérvese que dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ las cofibraciones i_n son únicas, salvo isomorfismo, para todo n, y por ser funtores los grupos de homotopía de un objeto relativos a i_m basados en un morfismo son también únicos salvo isomorfismo.

Proposición III.2.1 $\pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, f) = \pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, fp^s)$, $0 \leq s \leq n + m - r - 1$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, f) &= H_{i_{n+m-1}}(fp^{n+m-r-1}, fp^{n+m-r-1}) = \\
&= H_{i_{n+m-1}}(fp^s p^{n+m-r-s-1}, fp^s p^{n+m-r-s-1}) = \\
&= \pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, fp^s).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición III.2.2 $\pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, f) = \pi_{n-s}^{i_{m+s}}(\mathrm{X}, f)$, $-m \leq s$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\pi_n^{i_m}(\mathrm{X}, f) &= H_{i_{n+m-1}}(fp^{n+m-r-1}, fp^{n+m-r-1}) = \\
&= H_{i_{m+s+(n-s-1)}}(fp^{(n-s)+(m+s)-r-1}, fp^{(n-s)+(m+s)-r-1}) = \\
&= \pi_{n-s}^{i_{m+s}}(\mathrm{X}, f).
\end{aligned}$$

□

Las proposiciones anteriores permiten reducir el desarrollo de la teoría a grupos de homotopía de la forma $\pi_n^i(\mathrm{X}, f)$, donde i es una cofibración con codominio un cono y f es un morfismo con dominio dicho cono.

Como sucede en la mayoría de las teorías de homotopía, también en ésta los funtores grupos de homotopía actúan de forma trivial sobre contráctiles.

Proposición III.2.3 *Si* X *es contráctil,* $\pi_n^i(\mathrm{X}, f) \cong \{0\}$, *para toda cofibración* i *y todo morfismo* f.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la definición de los grupos de homotopía y de la observación II.2.1

□

Proposición III.2.4 *Si* i *es una cofibración contráctil,* $\pi_n^i(\mathrm{X}, f) \cong \{0\}$, *para todo objeto* X *y todo morfismo* f.

Demostración:

Consecuencia de la observación II.2.1 y del corolario II.1.7 usando iteración.

□

Los grupos de homotopía se pueden considerar funtores actuando sobre morfismos, si la cofibración es fija, o sobre ambos.

Teorema III.2.1 *Dada* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail C\mathrm{A}$ *cofibración,* $\pi_n^i : \mathbf{C}^{C\mathrm{A}} \to \mathbf{Grp}$ *son funtores, para* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración:

Dado $f : C\mathrm{A} \to \mathrm{X}$, $\pi_n^i(f) = \pi_n^i(\mathrm{X}, f)$. Dado $h : f \to hf$, evidentemente por el corolario III.1.9 $h_* : \pi_n^i(\mathrm{X}, f) \to \pi_n^i(\mathrm{X}', hf)$ es un homomorfismo de grupos.

□

Teorema III.2.2 $\pi_n^- : ((\mathbf{cof}_C\ \mathbf{C})^{codom\ -})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$*, definido por* $\pi_n^-((i,p), f) = \pi_n^i(\mathrm{X}, f)$ *y dado un morfismo* $(g, h) : ((i,p), f) \to ((i',p), f')$*,* $\pi_n^-(g,h) = (C^n g)^* : \pi_n^i(\mathrm{X}, f) \to \pi_n^{i'}(\mathrm{X}, f')$*, donde* $\mathrm{X} = codom\ f$*, es un funtor que transforma morfismos push out en isomorfismos, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración:

Por el corolario III.1.11, $(C^n g)^*$ es un homomorfismo de grupos, y si (g, h) es morfismo push out, un isomorfismo.

□

Corolario III.2.1 $\pi_n^- : ((\mathbf{cof}\ \mathbf{C})^{codom\ -_1})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$ *es un funtor que transforma morfismos push out en isomorfismos, para todo* $n \geq 2$*.*

Demostración:

Este funtor es la composición del funtor I_1 del corolario III.1.14 con el del teorema III.2.2 anterior, observando la proposición III.2.2.

□

Los funtores grupos de homotopía también transforman el coproducto de cofibraciones en producto de grupos.

Proposición III.2.5 *Existen equivalencias naturales, para* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\pi_n^{-\vee-'} \cong \pi_n^- \times \pi_n^{-'} \ (((\mathbf{cof}_C\ \mathbf{C} \times \mathbf{cof}_C\ \mathbf{C})^{codom\ -\vee codom\ -'})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$$

y dadas $i : \mathrm{B} \rightarrowtail C\mathrm{A}$ *e* $i' : \mathrm{B}' \rightarrowtail C\mathrm{A}'$

$$\pi_n^{i \vee i'} \cong \pi_n^i \times \pi_n^{i'} \ (\mathbf{C}^{C\mathrm{A} \vee C\mathrm{A}'} \to \mathbf{Grp})$$

Demostración:

Usando la proposición II.1.4 y combinando el corolario III.1.12 y el teorema III.1.6 se obtiene el resultado.

□

Una vez creados los grupos de homotopía generalizada, esto es, los basados en morfismos cualesquiera, se procede a estudiar en categorías punteadas el caso particular que tiene como morfismo base al cero, dando origen a los grupos de homotopía ordinaria relativos a una cofibración o referidos a un objeto, similarmente a lo que sucede en la homotopía ordinaria de los Espacios Topológicos Punteados. Para ello se comienza definiendo el funtor suspensión.

Definición III.2.2 Dada $\mathbf{C}$ una C-categoría punteada con punto $*$, la categoría $\mathbf{C}_*$ se denominará *categoría basada de* $\mathbf{C}$. Dado un objeto $\alpha : \mathrm{A} \to *$ en $\mathbf{C}_*$ se dirá que A es un *objeto basado en* α o que α *es el morfismo base de* A, y se notará también por (A, α).

Observación III.2.2 Como consecuencia del corolario II.1.5, todo objeto de una categoría punteada tiene al menos un morfismo base.

Definición III.2.3 Dada $\mathbf{C}$ una categoría punteada con punto $*$, la categoría $(\mathbf{cof\ C})_{1_*}$ se denominará *categoría de cofibraciones basadas de* $\mathbf{C}$.

Todo morfismo basado $i : (\mathrm{B}, \beta) \rightarrowtail (\mathrm{A}, \alpha)$ que sea cofibración en $\mathbf{C}$ se denominará *cofibración basada.* Un morfismo entre cofibraciones basadas $i : (\mathrm{B}, \beta) \rightarrowtail (\mathrm{A}, \alpha)$ e $i' : (\mathrm{B}', \beta') \rightarrowtail (\mathrm{A}', \alpha')$ es un par de morfismos basados (g, h) donde $g : (\mathrm{A}, \alpha) \to (\mathrm{A}', \alpha')$ y $h : (\mathrm{B}, \beta) \to (\mathrm{B}', \beta')$ tales que $gi = i'h$.

Es fácil ver que la categoría así formada es isomorfa a $(\mathbf{cof\ C})_{1_*}$ identificando i con (α, β), y por ello se utilizará indistintamente una u otra categoría.

Proposición III.2.6 $C : \mathbf{C}_* \to \mathbf{C}_*$, *actuando como en los morfismos de* $\mathbf{C}$, *es un funtor que transforma push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas.*

Demostración:

Basta observar que tanto los objetos como los morfismos de $\mathbf{C}_*$ son morfismos en $\mathbf{C}$, y que $C* = *$.

$\square$

Proposición III.2.7 $\Sigma^n : (\mathbf{cof\ C})_{1_*} \to \mathbf{C}_*$ *definido como en la proposición III.1.14 para morfismos, es un funtor que transforma push outs en push outs para* $n \in I\!N^*$.

Demostración:

Tanto los objetos como los morfismos de $(\mathbf{cof\ C})_{1_*}$ son morfismos de $\mathbf{cof\ C}$. Por ello y por la proposición III.1.14 es una simple comprobación observando que $\Sigma^n(1_*) = *$ y que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{i_{n-1}} \arrow[r, "\Sigma^n(g_0, h_0)"] \arrow[d, tail, "\Sigma^n(g_1, h_1)"] & \Sigma^{i'_{n-1}} \arrow[d, tail, "\Sigma^n(\overline{g_1}, \overline{h_1})"] \\
\Sigma^{i''_{n-1}} \arrow[r, "\Sigma^n(\overline{g_0}, \overline{h_0})"] & \Sigma^{(i' \cup i'')_{n-1}}
\end{tikzcd}$$

es un push out, por el apartado a) del teorema I.1.1, al tener los objetos push out en la categoría de pares por codominio un push out.

$\square$

Corolario III.2.2 *$\Sigma^n(*) : \mathbf{C}_* \to \mathbf{C}_*$, definido sobre morfismos $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ por $\Sigma^n(*)(f) = \Sigma^n(f, 1_*)$ es un funtor que transforma push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas, para $n \in I\!N^*$.*

Demostración:

Obsérvese que $* : * \to 1$ ($\mathbf{C}_* \to \mathbf{C}_*$) es una transformación natural que actuando sobre los objetos de $\mathbf{C}$ es una cofibración. Por otro lado, dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ se tiene:

- si $n = 0$: $\Sigma^0(i, 1_*) = 1_* : * \rightarrowtail *$ cofibración.

- si $n = 1$: $i = \Sigma^1(i, 1_*) = \Sigma^0(Ci, i) : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración.

- si $n = 2$: $\Sigma^2(i, 1_*) = Ci \cup Ci : \Sigma^{k_\mathrm{B}} \rightarrowtail \Sigma^{k_\mathrm{A}}$ es cofibración por el teorema II.1.1, pues en el siguiente cubo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{B} \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[dl, "k"'] \arrow[dd, tail, "i"] & & C\mathrm{B} \arrow[dl] \arrow[dd, tail, "Ci"] \\
C\mathrm{B} \arrow[rr, tail] \arrow[dd, tail, "Ci"] & & \Sigma^{k_\mathrm{B}} \arrow[dd, tail, "Ci \cup Ci" near start] & \\
 & \mathrm{A} \arrow[rr, tail, "k" near start] \arrow[dl, "k"'] & & C\mathrm{A} \arrow[dl] \\
C\mathrm{A} \arrow[rr, tail] & & \Sigma^{k_\mathrm{A}} &
\end{tikzcd}$$

$\{Ci, k\} = i_1$ es cofibración. Nótese que $*_1 = k$.

- Suponiendo que $\Sigma^{m+1}(i, 1_*) = \Sigma^m(Ci, i)$ es cofibración y observando el siguiente cubo conmutativo, por el teorema II.1.1 se concluye que $\Sigma^{m+1}(Ci, i) = \Sigma^{m+2}(i, 1_*)$ es cofibración,

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma^{k_{m-1}} \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[dl, "k_m"'] \arrow[dd, tail, "\Sigma^m(Ci,i)"] & & C\Sigma^{k_{m-1}} \arrow[dl] \arrow[dd, tail, "C\Sigma^m(Ci,i)"] \\
C^{m+1}\mathrm{B} \arrow[rr, tail] \arrow[dd, tail, "C^{n+1}i"] & & \Sigma^{k_m} \arrow[dd, tail, "\Sigma^{m+1}(Ci,i)"' near start] & \\
 & \Sigma^{k_{m-1}} \arrow[rr, tail, "k"'] \arrow[dl, "k_m"'] & & C\Sigma^{k_{m-1}} \arrow[dl] \\
C^{m+1}\mathrm{A} \arrow[rr, tail] & & \Sigma^{k_m} &
\end{tikzcd}
$$

pues $\{C\Sigma^m(Ci,i),k\} = (\Sigma^m(Ci,i))_1$ que es cofibración.

$\square$

Proposición III.2.8 *Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, el siguiente cuadrado es un push out, para $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma^{k_{n-1}} \arrow[rrr, "k_n"] \arrow[d, tail, "\Sigma^n(Ci,i)"] & & & C^{n+1}B \arrow[d, tail, "\overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}...C^{n-1}\overline{i_1}C^n\overline{i}"'] \\
\Sigma^{k_{n-1}} \arrow[rrr, "\{\overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}...C^{n-1}\overline{i_1}C^n\overline{k},\,\overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}...C^{n-2}\overline{i_2}C^{n-1}\overline{k},\,...,\,\overline{i_n}C\overline{k},\,\overline{k}\}"] & & & \Sigma^{i_n}
\end{tikzcd}
$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
&\overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}...C^{n-1}\overline{i_1}C^n\overline{i}C^m k = \\
&\quad = \overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}...C^m\overline{i_{n-m}}C^m k C^m\overline{i_{n-m-1}}C^{n-1}\overline{i} = \\
&\quad = \overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}...C^{m-1}\overline{i_{n-m+1}}C^m\overline{k}C^m i_{n-m}C^m\overline{i_{n-m-1}}C^{n-1}\overline{i} = \\
&\quad = \overline{i_n}C\overline{i_{n-1}}.....C^m\overline{k}C^n i
\end{aligned}
$$

$0 \leq m \leq n$, demuestra la conmutatividad del cuadrado.

Dados $H : C^{n+1}\mathrm{B} \to \mathrm{X}$ y $\{g_n, .., g_0\} : \Sigma^{k_{n-1}} \to \mathrm{X}$ tales que $g_m C^n i = HC^m k$, $0 \leq m \leq n$. El morfismo $\{H, g_n, ..., g_0\} : \Sigma^{i_n} = P\{k, i_n\} \to \mathrm{X}$ es la única solución.

Obsérvese que $\{H, g_n, ...g_m\} : C^m\Sigma^{i_{n-m+1}} \to \mathrm{X}$ existe pues

$$\begin{aligned} g_m C^m i_{n-m} &= g_m\{C^n i, C^{n-1}k, ..., C^m k\} = \\ &= \{g_m C^n i, g_m C^{n-1}k, ..., g_m C^m k\} \overset{(1)}{=} \\ &= \{g_m C^n i, g_n C^m k, ..., g_{m+1} C^n k\} = \\ &= \{HC^m k, g_n C^m k, ..., g_{m+1} C^n k\} = \\ &= \{H, g_n, ..., g_{m+1}\} C^m k. \end{aligned}$$

(1) Existencia de $\{g_n, ..., g_0\}$.

□

Definición III.2.4 Dada una cofibración basada $i : (\mathrm{B}, \beta) \to (\mathrm{A}, \alpha)$ se define la *suspensión de* i por el siguiente push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, tail, "i"] & * \arrow[d, tail] \\ A \arrow[r, "\overline{\beta}"] & S(i) \end{tikzcd}$$

Proposición III.2.9 *$S(-) : (\mathbf{cof\ C})_{1_*} \to \mathbf{C}_*$ definido para un morfismo $(g, h) : i \to i'$ por $S(-)(g, h) = 1_* \cup g : S(i) \to S(i')$ es un funtor que transforma push outs en push outs.*

Demostración:

Un objeto (α, β) de $(\mathbf{cof\ C})_{1_*}$ es un morfismo $(\alpha, \beta) : i \to 1_*$, y $S(1_*) = = *$. Por ello la demostración es una simple comprobación observando que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} S(i) & \xrightarrow{S(-)(g_0,h_0)} & S(i') \\ {\scriptstyle S(-)(g_1,h_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S(-)(\overline{g_1},\overline{h_1})} \\ S(i'') & \xrightarrow{S(-)(\overline{g_0},\overline{h_0})} & S(i' \cup i'') \end{array}$$

es un push out al tener, por el apartado a) del teorema I.1.1, los objetos push out en la categoría de pares como codominio un push out.

□

Corolario III.2.3 $S(-_n) : (\mathbf{cof}\ \mathbf{C})_{1_*} \to \mathbf{C}_*$ *definido para un morfismo* $(g,h) : i \to i'$ *por* $S(-_n)(g,h) = S(C^n g, \Sigma^n(g,h)) : S(i_n) \to S(i'_n)$ *es un funtor que transforma push outs en push outs.*

Corolario III.2.4 $S(*_n) : \mathbf{C}_* \to \mathbf{C}_*$ *definido para un morfismo* $f : (\mathrm{A},\alpha) \to (\mathrm{A}',\alpha')$ *por* $S(*_n)(f) = S(-)(C^n f, \Sigma^n(f,1_*)) : S((*_\mathrm{A})_n) \to S((*_{\mathrm{A}'})_n)$ *es un funtor que transforma push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas, para* $n \in \mathbb{N}^*$.

Demostración:

Por los corolarios III.1.15 y III.2.2 y la proposición III.2.6, $* : * \to 1$ y $*_{n+1} = k_n : \Sigma^n \to C^{n+1}$ $(\mathbf{C}_* \to \mathbf{C}_*)$ son transformaciones naturales que actuando sobre los objetos de $\mathbf{C}$ son cofibraciones. Además por el teorema II.1.1, observando el siguiente cubo conmutativo se tiene que $S(*_{n+1})(i) = S(-)(C^{n+1}i, \Sigma^{n+1}(i,1_*)) = S(-)(C^{n+1}i, \Sigma^n(Ci,i)) = S(k_n)(i)$ es cofibración,

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma^{k_{n-1}} \arrow[rr] \arrow[dl, tail, "k_n"'] \arrow[dd, tail, "\Sigma^n(Ci,i)" near start] & & * \arrow[dl, tail] \arrow[dd, "1_*"] \\
C^{n+1}\mathrm{B} \arrow[rr] \arrow[dd, tail, "C^{n+1}i"'] & & S((k_{\mathrm{B}})_n) \arrow[dd, tail, "S(k_n)(i)" near start] & \\
& \Sigma^{k_{n-1}} \arrow[rr] \arrow[dl, tail, "k_n"'] & & * \arrow[dl, tail] \\
C^{n+1}\mathrm{A} \arrow[rr] & & S((k_{\mathrm{A}})_n) &
\end{tikzcd}$$

pues por la proposición III.2.8 $\{C^{n+1}i, k_n\} : P\{k_n, \Sigma^n(Ci,i)\} \to C^{n+1}\mathrm{A}$ coincide con $i_{n+1} : P\{k, i_n\} \to C^{n+1}\mathrm{A}$ que es cofibración.

Obsérvese que $S(*)(i) = S(-)(i, \Sigma^0(i, 1_*)) = S(-)(i, 1_*) = 1_* \cup i = i$.

□

Por convenio se notará al funtor suspensión $S(*_1) = S(k)$ simplemente por S resultando entonces $S(k_{\mathrm{A}}) \approx S\mathrm{A}$ y $S(-)(Cf, f) \approx Sf$. Para evitar confusiones obsérvese que $S(i) \neq Si = S(k)(i)$.

También por convenio se usará $S^n(k)(S(-)(g,h)) = S^nS(-)(g,h) \approx$ $\approx S^{n+1}(g,h)$ y $S^n(k)(S(i)) = S^nS(i) \approx S^{n+1}(i)$. El siguiente corolario justifica en parte esta notación.

Corolario III.2.5 *Dada una cofibración basada* $i : (\mathrm{B}, \beta) \rightarrowtail (\mathrm{A}, \alpha)$, $CS(i) =$ $= S(Ci)$ *y* $SS(i) = S(Si)$.

Demostración:

Consecuencia de que los funtores transformen push outs en push outs y cofibraciones basadas en cofibraciones basadas.

□

Definición III.2.5 Dado un objeto A basado en α y un objeto B, se define el *morfismo cero entre* A *y* B por $0 = *\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

La proposición III.2.6 y los corolarios III.2.2 y III.2.4 así como las proposiciones III.2.7 y III.2.9 anteriores dotan a conos, $\Sigma^n(*)$ y $S(*_n)$ de objetos basados, así como a Σ^n y suspensiones de cofibraciones basadas ($n \in I\!N^*$) de un morfismo base. Cuando se usen estos objetos sin hacer referencia a un morfismo base se supondrá que el utilizado es el mencionado anteriormente. En particular el cero con dominio uno de estos objetos se considerará de esta forma.

A partir de ahora y hasta el final del párrafo cuando se hable de objetos basados se obviará en general el morfismo base.

Teorema III.2.3 *Existe una equivalencia natural entre los funtores* $S(-_n)$ *y* S^{n+1} $((\mathbf{cof\ C})_{1_*} \to \mathbf{C}_*)$*, para* $n \in I\!N^*$.

Demostración:

Dada una cofibración basada $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, el siguiente cuadrado es un push out.

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma^n(i) & \longrightarrow & * \\
{\scriptstyle i_n}\big\downarrow & & \big\downarrow \\
C^n\mathrm{A} & \xrightarrow{S^n(\overline{\alpha},\overline{\beta})\,CS^{n-1}(\overline{\alpha},\overline{\beta})....C^{n-1}S(\overline{\alpha},\overline{\beta})C^n\overline{\beta}} & S^{n+1}(i)
\end{array}$$

pues dada $h : C^n\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{X}$ tal que $hi_n = 0$ se puede definir $\{*, \overset{(n+1}{\ldots\ldots}, *, h\} : S^{n+1}(i) = S^nP\{\beta, i\} \longrightarrow \mathrm{X}$, único morfismo que compuesto con $S^n(\overline{\alpha},\overline{\beta})\,CS^{n-1}(\overline{\alpha},\overline{\beta})....C^{n-1}S(\overline{\alpha},\overline{\beta})C^n\overline{\beta}$ da h.

□

Corolario III.2.6 *Existe una equivalencia natural entre* $S(*_n)$ *y* S^n $(\mathbf{C}_* \to \to \mathbf{C}_*)$ *para* $n \in I\!N^*$.

Demostración:

Para $n \in I\!N$ es consecuencia inmediata del teorema III.2.3 anterior porque $S(*_n) = S(k_{n-1}) \cong S^n(k) \approx S^n$. Si $n = 0$ $S(*) = 1 = S^0$.

□

Proposición III.2.10 *Para todo objeto i de $(\mathbf{cof\ C})_{1_*}$ (de $(\mathbf{cof}_C\ \mathbf{C})_{1_*}$), $[S^n(i), \mathrm{X}] \cong \pi^i_{n-1}(\mathrm{X}, 0)$ para $n \geq 3$ (para $n \geq 2$).*

Demostración:

Consecuencia de la observación III.1.4, usando el push out del teorema III.2.3.

□

Corolario III.2.7 *Para todo objeto basado A, $[S^n\mathrm{A}, \mathrm{X}] \cong \pi^{*_\mathrm{A}}_n(\mathrm{X}, 0)$, para $n \geq 2$.*

Observación III.2.3 (Axioma de cono ordinario.)

Las propiedades que debe verificar la transformación p para que se pueda definir la estructura de grupo en los corchetes de homotopía anteriores pueden ser obtenidas por PEN, asociando a toda cofibración i una transformación p_i tal que $p_i C^2 i = Cip$, haciendo así innecesaria para la homotopía ordinaria la existencia de la transformación natural p y el axioma de cono, sin más que sustituir éste por

(C1)' Axioma de cono ordinario.

Para todo objeto X de $\mathbf{C}$, $k_{C\mathrm{X}}$ tiene una retracción p: $pk_{C\mathrm{X}} = 1_{C\mathrm{X}}$.

Nótese que si A es contráctil, por la observación II.2.1 $\pi^{*_\mathrm{A}}_n(\mathrm{X}, 0) \cong \{0\}$ para todo n, inclusive para $n = 1$ cuando A sea contráctil fundamental. Se notará a $\pi^i_n(\mathrm{X}, 0)$ y $\pi^{*_\mathrm{A}}_n(\mathrm{X}, 0)$ simplemente por $\pi^i_n(\mathrm{X})$ y $\pi^\mathrm{A}_n(\mathrm{X})$, respectivamente.

Definición III.2.6 Para toda cofibración basada i se define el *n-grupo de homotopía de un objeto* X *relativo a* i por $\pi_n^i(\mathrm{X})$. Para todo objeto basado A se define el *n-grupo de homotopía de* X *referido a* A por $\pi_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$. $(n \geq 2)$.

Las propiedades estudiadas anteriormente para los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un objeto basados en un morfismo adquieren ahora nuevos significados.

Proposición III.2.11 $\pi_n^i(\mathrm{X}) \cong \pi_{n-r}^{i_r}(\mathrm{X})$, $0 \leq r$.

Demostración:

Consecuencia de la proposición III.2.2.

□

Proposición III.2.12 $\pi_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \cong \pi_{n-r}^{S^r\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \quad (0 \leq r \leq n-2)$.

Demostración:

Evidente por el corolario III.2.7 observando que $S^n = S^{n-r}S^r$.

□

Observación III.2.4 La proposición III.2.12 anterior permite por extensión definir grupos de homotopía referidos a objetos de orden no necesariamente mayor o igual que 2, esto es:

Definición III.2.7 *Sea* $\mathrm{A} = S^r\mathrm{A}'$. *Entonces* $\pi_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \pi_{n+r}^{\mathrm{A}'}(\mathrm{X})$, *para* $n \geq$ $\geq 2 - r$.

Proposición III.2.13 *Si* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *es una cofibración basada y* X *contráctil,* $\pi_n^i(\mathrm{X}) \cong \{0\}$, *para todo* n.

Proposición III.2.14 *Si* X *es contráctil,* $\pi_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \cong \{0\}$, *para cualquier objeto basado* A *y todo* n.

Proposición III.2.15 *Si* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *es una cofibración contráctil basada,* $\pi_n^i(\mathrm{X}) \cong \{0\}$*, para todo objeto* X *y todo* n*.*

Proposición III.2.16 *Si* A *es un objeto contráctil,* $\pi_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \cong \{0\}$*, para todo objeto* X *y todo* n*.*

Proposición III.2.17 *Dada una cofibración basada* i*,* $\pi_n^i : \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$*, es un funtor.*

Demostración:

Consecuencia del teorema III.2.1.

□

Corolario III.2.8 *Dado un objeto basado* A*,* $\pi_n^{\mathrm{A}} : \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$ *es un funtor.*

Proposición III.2.18 *Dado un objeto* X*,* $\pi_n^-(\mathrm{X}) : (\mathbf{cof\ C})_{1*}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$*, definido de forma obvia, es un funtor que transforma morfismos push out en isomorfismos, para todo* n*.*

Demostración:

Consecuencia del teorema III.2.2.

□

Corolario III.2.9 *Dado un objeto* X*,* $\pi_n^-(\mathrm{X}) : \mathbf{C}_*^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$ *es un funtor, para todo* n*.*

Proposición III.2.19 $\pi_n^- : (\mathbf{cof\ C})_{1*}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$*, es un funtor.*

Demostración:

Evidente por el teorema I.2.1 ya que dados $(g,h) : i' \to i$ en **cof C** y $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ en **C**, se verifica:

$$\begin{aligned}
\pi_n^-(\mathrm{Y})(g,h)(\pi_n^i(f)([F])) &= \pi_n^-(\mathrm{Y})(g,h)([fF]) = \\
&= [fFC^ng] = \\
&= \pi_n^{i'}(f)([FC^ng]) = \\
&= \pi_n^{i'}(f)(\pi_n^-(\mathrm{X})(g,h)([F])).
\end{aligned}$$

□

Corolario III.2.10 $\pi_n^- : \mathbf{C}_*^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$, *es un funtor.*

Proposición III.2.20 *Existe una equivalencia natural:*

$\pi_n^{i \vee i'} \cong \pi_n^i \times \pi_n^{i'}$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{Grp})$.

Demostración:

Consecuencia de la proposición III.2.5

□

Corolario III.2.11 *Existe una equivalencia natural:*

$\pi_n^{\mathrm{A} \vee \mathrm{A}'} \cong \pi_n^{\mathrm{A}} \times \pi_n^{\mathrm{A}'}$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{Grp})$.

Corolario III.2.12 *Existe una equivalencia natural:*

$\pi_n^{- \vee =} \cong \pi_n^- \times \pi_n^=$ $((\mathbf{cof\ C})_{1_*}^{\mathbf{op}} \times (\mathbf{cof\ C})_{1_*}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Grp})$.

Corolario III.2.13 *Existe una equivalencia natural:*

$\pi_n^{- \vee =} \cong \pi_n^- \times \pi_n^=$ $(\mathbf{C}_*^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C}_*^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Grp})$.

Capítulo IV

Sucesiones exactas de homotopía.

La mayoría de las teorías de homotopía con cofibraciones tienen como uno de sus resultados más importantes la creación de sucesiones exactas de grupos de homotopía asociadas a un par.

En las C-categorías también existen dichas sucesiones. Considerando un par (X,Y) en el sentido clásico homotópico como una cofibración $f : \mathrm{Y} \rightarrowtail \mathrm{X}$ se obtiene que la categoría de estos pares es también una C-categoría, pudiéndose así definir los grupos de homotopía relativos a pares de cofibraciones de un par basado en un morfismo de pares como los grupos de homotopía generalizada de dicha categoría. A través de ellos se obtienen los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un par basado en un morfismo, que dan lugar a distintas sucesiones exactas de grupos de homotopía generalización de las clásicas: la relativa a una cofibración basada en un morfismo, la relativa a una cofibración y la referida a un objeto.

IV.1 Categoría de pares.

Para la creación de las sucesiones exactas de grupos de homotopía es necesario un estudio de la categoría de cofibraciones de una dada. Todo cono natural en una categoría se extiende a la categoría de cofibraciones, de forma que conceptos como nulhomotopía, contráctiles, extensiones de morfismos relativas a cofibraciones, totalidad de cofibraciones, cofibrantes, punto y homotopía pueden ser relacionados con los respectivos en la categoría original. Asimismo, a través del funtor inyección desde la categoría de pares de la dada en el producto de ésta por si misma se inducen transformaciones naturales entre los distintos funtores de homotopía ya vistos en los capítulos anteriores.

La categoría de pares **C(2)** de una categoría **C** tiene como objetos los morfismos de **C**. En homotopía es frecuente exigir a dichos morfismos que sean también cofibraciones, obteniéndose la categoría de cofibraciones de **C**, **cof C**, ya definida en el párrafo III.1. En este caso los objetos de dicha categoría se representarán por (X,Y), suponiéndose conocida la cofibración. En general a los pares (X,Y), (X',Y'),... se les supondrán asociadas cofibraciones $f : \mathrm{Y} \rightarrowtail \mathrm{X}$, $f' : \mathrm{Y}' \rightarrowtail \mathrm{X}'$,... respectivamente, y a los pares de la forma (A,A) la cofibración 1_{A}.

Si **C** tiene una estructura de cono natural entonces **cof C** también la tiene. Para ello primeramente se obtienen un funtor cono C y transformaciones naturales k y p en función de los respectivos en **C**, de forma que se verifique el axioma de cono.

Proposición IV.1.1 C : **cof C** $\rightarrow$ **cof C** *definido por* $C(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = (C\mathrm{X}, C\mathrm{Y})$*, donde* $Cf : C\mathrm{Y} \rightarrowtail C\mathrm{X}$ *es la cofibración asociada, y* $C(g,h) = (Cg, Ch)$*, es un funtor.*

Demostración:

Consecuencia de ser C un funtor en $\mathbf{C}$ que transforma cofibraciones en cofibraciones.

$\square$

En general, dado (X,Y) se supondrá que $C^n f$ es la cofibración asociada a $(C^n\mathrm{X},C^n\mathrm{Y})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposición IV.1.2 *$k : 1 \to C$ ($\mathbf{cof\ C} \to \mathbf{cof\ C}$) definida por $k_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = (k_{\mathrm{X}}, k_{\mathrm{Y}})$ y $p : C^2 \to C$ ($\mathbf{cof\ C} \to \mathbf{cof\ C}$) definida por $p_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = (p_{\mathrm{X}}, p_{\mathrm{Y}})$, son transformaciones naturales.*

Demostración:

Consecuencia de que k y p son transformaciones naturales entre los respectivos funtores en $\mathbf{C}$.

$\square$

Proposición IV.1.3 *El funtor C y las transformaciones k y p verifican el axioma de cono en* $\mathbf{cof\ C}$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de verificarse dicho axioma en $\mathbf{C}$.

$\square$

Para los restantes axiomas es preciso establecer qué morfismos de pares van a ser cofibraciones.

Definición IV.1.1 Un morfismo de pares $(u, v) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ se dirá *cofibración de pares* cuando $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ y $\{f', u\} : \mathrm{P}\{v, f\} \to \mathrm{X}'$ son cofibraciones en $\mathbf{C}$.

Nótese que al transformar el cono de $\mathbf{C}$ cofibraciones en cofibraciones y push outs cofibrados en push outs, el cono de una cofibración de pares también es cofibración de pares. Además, $u = \{f', u\}\overline{v}$ es también cofibración.

Proposición IV.1.4 *Dada una cofibración* $(u,v) : (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \rightarrowtail (\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ *y un morfismo* $(g,h) : (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'')$*, existe* $P\{(g,h),(u,v)\}$ *y* $\overline{(u,v)}$ *es una cofibración.*

Demostración:

Por el axioma de push out en **C** y el apartado b) del teorema I.1.1, $\mathrm{P}\{(g,h),$ $,(u,v)\} = (\mathrm{P}\{g,u\},\mathrm{P}\{h,v\})$. Nótese que $f'' \cup f' : \mathrm{P}\{h,v\} \rightarrowtail \mathrm{P}\{g,u\}$ es cofibración en **C** por el teorema II.1.1.

En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "\tilde{v}"] & \mathrm{X}'' \arrow[d, tail, "\tilde{\overline{v}}"] \\
\mathrm{P}\{v,f\} \arrow[r, "\overline{h}\cup g"] \arrow[d, tail, "\{f',u\}"] & \mathrm{P}\{\overline{v},f''\} \arrow[d, tail, "\{f''\cup f',\overline{u}\}"] \\
\mathrm{X}' \arrow[r, "\overline{g}"] & \mathrm{P}\{g,u\}
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{v}$ es la inducida horizontal de $\mathrm{P}\{v,f\}$ y $\tilde{\overline{v}}$ es la inducida horizontal de $\mathrm{P}\{\overline{v},f''\}$, el cuadrado superior es un push out por la proposición I.1.5, usando $P\{h,v\}$, $P\{v,f\}$ y $P\{\overline{v},f''\}$. El cuadrado inferior es conmutativo y, como la composición de ambos define $\mathrm{P}\{g,u\}$, por la misma proposición I.1.5 es push out. De donde $\{f''\cup f',\overline{u}\}$ es cofibración por el axioma de push out en **C**.

Por el mismo axioma $\overline{v}$ es también cofibración en **C**, de donde $(\overline{u},\overline{v})$ es cofibración de pares.

□

Proposición IV.1.5 *C transforma push outs cofibrados en push outs en* **cof C**.

Demostración:

Consecuencia de este mismo hecho en $\mathbf{C}$ y de la obtención de los push outs cofibrados vista en la proposición IV.1.4 anterior.

□

Observación IV.1.1 Aunque el funtor cono transforme push outs en push outs en $\mathbf{C}$ no se puede asegurar que lo haga en **cof C**, pues un push out en **cof C** no necesariamente tiene como dominio un push out en $\mathbf{C}$. De aquí la importancia de que el axioma (C2) sólo exija la conservación de push outs cofibrados.

Proposición IV.1.6 $1_{(\mathrm{X,Y})}$ *y* $k_{(\mathrm{X,Y})}$ *son cofibraciones, para todo par* (X,Y). *La composición de cofibraciones de pares es también cofibración.*

Demostración:

1_{Y} y $\{f, 1_{\mathrm{X}}\} = 1_{\mathrm{X}}$ son cofibraciones, por ser identidades en $\mathbf{C}$, luego $(1_{\mathrm{X}}, 1_{\mathrm{Y}}) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \rightarrowtail (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ es cofibración de pares. k_{Y} y $\{Cf, k_{\mathrm{X}}\} = f_1$ son cofibraciones en $\mathbf{C}$, luego $(k_{\mathrm{X}}, k_{\mathrm{Y}}) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \rightarrowtail (C\mathrm{X}, C\mathrm{Y})$ es cofibración de pares.

Dados $(u, v) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \rightarrowtail (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ y $(u', v') : (\mathrm{X}', \mathrm{Y}') \rightarrowtail (\mathrm{X}'', \mathrm{Y}'')$ cofibraciones de pares, $v'v : \mathrm{Y} \rightarrowtail \mathrm{Y}''$ es cofibración en $\mathbf{C}$ por ser composición de ellas. $\{f'', u'u\} = \{f'', u'\}(1 \cup u) : \mathrm{P}\{v'v, f\} \rightarrowtail \mathrm{P}\{v', f'\} \rightarrowtail \mathrm{X}''$ es también cofibración por el mismo motivo pues $\{f'', u'\}$ lo es por hipótesis y $1 \cup u$ también lo es por el teorema II.1.1, sin más que observar $\{f', u\}$ es cofibración, de donde se concluye que $(u'u, v'v)$ es cofibración de pares.

□

Observación IV.1.2 Las cofibraciones de pares aquí establecidas son pares de cofibraciones, pero no todo par de cofibraciones es necesariamente una cofibración de pares, pues puede no verificar PEN.

Proposición IV.1.7 *Las cofibraciones de pares verifican la propiedad de extensión de nulhomotopía.*

Demostración:

Sea $(u, v) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \rightarrowtail (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ cofibración de pares. Como v es cofibración en $\mathbf{C}$, por PEN Cv tiene una retracción r. $\{Cf', Cu\} = C\{f', u\} :$ $: \mathrm{P}\{Cv, Cf\} \rightarrowtail C\mathrm{X}'$ es cofibración en $\mathbf{C}$ por serlo (u, v) en **cof C**. $\{Cfr, 1\} :$ $: \mathrm{P}\{Cv, Cf\} \to C\mathrm{X}$ es nulhomótopo, y por tanto existe una extensión q de $\{Cfr, 1\}$ relativa a $\{Cf', Cu\}$. (q, r) es la retracción de pares que hace que (u, v) verifique PEN.

$\square$

Proposición IV.1.8 *Dada una cofibración de pares* $(u, v) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$, *el morfismo de pares* $(u, v)_1 = \{C(u, v), k\} : \Sigma^{(u,v)} \rightarrowtail (C\mathrm{X}', C\mathrm{Y}')$ *es una cofibración de pares.*

Demostración:

Obsérvese que por el teorema I.1.1 $(u, v)_1 = \{C(u, v), k\} = \{(Cu, Cv),$ $, (k_{\mathrm{X}}, k_{\mathrm{Y}})\} = (\{Cu, k\}, \{Cv, k\}) = (u_1, v_1) : (\Sigma^u, \Sigma^v) \to (C\mathrm{X}', C\mathrm{Y}')$, donde la cofibración asociada al par (Σ^u, Σ^v) es $\Sigma(f', f)$.

Obsérvese que el siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^v \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, tail, "\Sigma(f', f)"] & C\mathrm{Y}' \arrow[d, tail, "\overline{\{f', u\}}C\overline{f}"] \\
\Sigma^u \arrow[r, "\{\overline{\{f', u\}}C\overline{v}, \overline{k}\}"] & \Sigma^{\{f', u\}}
\end{tikzcd}$$

pues dados $\alpha : C\mathrm{Y}' \to \mathrm{Z}$ y $\{\beta, \gamma\} : \Sigma^u \to \mathrm{Z}$ verificando $\alpha Cv = \beta Cf$ y $\alpha k = \gamma f'$, el morfismo $\{\{\alpha, \beta\}, \gamma\} : P\{k_{\mathrm{Y}'} \cup k_{\mathrm{X}}, \{f', u\}\} \to \mathrm{Z}$ coincide con $\{\alpha, \{\beta, \gamma\}\} : P\{\{Cv, k\}, Cf \cup f'\} \to \mathrm{Z}$. Por tanto $\{Cf', \{Cu, k\}\}$ coincide con $\{\{Cf', Cu\}, k\} = \{C\{f', u\}, k\} = \{f', u\}_1$ que es cofibración. Como v_1 también lo es se concluye que $(u, v)_1$ es cofibración de pares.

□

Teorema IV.1.1 *Si* **C** *es una categoría con cono natural,* **cof C** *también lo es.*

Demostración:

Tomando como familia de cofibraciones las cofibraciones de pares, como construcción cono la anteriormente definida y observando las proposiciones previas al teorema en este párrafo se concluye el resultado.

□

Una vez obtenida esta construcción cono en **cof C** se tienen todos los resultados conseguidos en los capítulos anteriores. Al ser obtenida la construcción a través de la existente en la categoría original, se procede a relacionar los conceptos y resultados en ambas categorías.

Proposición IV.1.9 *Dado un morfismo de pares* $(g, h) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$, *si* $(g, h) \simeq 0$ *entonces* $g \simeq 0$ *y* $h \simeq 0$.

Demostración:

Obsérvese que $(g, h) \simeq 0$ si existe $(G, H) : (C\mathrm{X}, C\mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ haciendo el siguiente prisma triangular totalmente conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rr, "h"] \arrow[dd, tail, "f"'] \arrow[dr, "k"] & & \mathrm{Y'} \arrow[dd, tail, "f'"] \\
& C\mathrm{Y} \arrow[ur, "H"] \arrow[dd, tail, "Cf"] & \\
\mathrm{X} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "k"] & & \mathrm{X'} \\
& C\mathrm{X} \arrow[ur, "G"] &
\end{tikzcd}$$

Las caras superior e inferior del prisma dan el resultado.

□

Obsérvese que si $g \simeq 0$ y $h \simeq 0$ en $\mathbf{C}$, la cara derecha del prisma no tiene por qué ser conmutativa, esto es, (G, H) no tiene por qué ser un morfismo de pares y por tanto (g, h) no sería nulhomótopo. En cambio

Proposición IV.1.10 *Si* $(g, h) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ *con* X' *contráctil, entonces* $(g, h) \simeq 0$ *si y sólo si* $h \simeq 0$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Ya visto en la proposición IV.1.9 anterior.

($\Leftarrow$) Sea $H : h \simeq 0$ y sea G una extensión del morfismo $\{f'H, g\} : P\{k, f\} \to \to \mathrm{X}'$ relativa a f_1, cuya existencia está garantizada por ser X' contráctil. Entonces $(G, H) : (g, h) \simeq 0$.

□

Corolario IV.1.1 (X,Y) *es contráctil si y sólo si* Y *y* X *son contráctiles.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Por la proposición IV.1.9, si $(1_{\mathrm{X}}, 1_{\mathrm{Y}}) \simeq 0$ entonces $1_{\mathrm{X}} \simeq 0$ y $1_{\mathrm{Y}} \simeq 0$.

($\Leftarrow$) Por la proposición IV.1.10 anterior, al ser X contráctil, $(1_{\mathrm{X}}, 1_{\mathrm{Y}}) \simeq 0$ si y sólo si $1_{\mathrm{Y}} \simeq 0$.

□

Proposición IV.1.11 *Si* $(\tilde{g}, \tilde{h})$ *es una extensión del morfismo de pares* (g, h) *relativa a una cofibración de pares* (u, v)*, entonces* $\tilde{g}$ *y* $\tilde{h}$ *son extensiones de* g *y* h *relativas a* u *y* v*, respectivamente.*

Demostración:

Basta observar el siguiente diagrama, totalmente conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rrr, "h"] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, tail, "v"] & & & \mathrm{Y}" \arrow[d, tail, "f''"] \\
& \mathrm{Y}' \arrow[urr, "\widetilde{h}"] \arrow[d, tail, "f'"] & & \\
\mathrm{X} \arrow[rrr, "g"] \arrow[dr, tail, "u"] & & & \mathrm{X}" \\
& \mathrm{X}' \arrow[urr, "\widetilde{g}"] & &
\end{tikzcd}
$$

□

Corolario IV.1.2 $Hom((\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), (\mathrm{X}'', \mathrm{Y}''))^{(g,h)((u,v))}$ *está isomórficamente contenido en* $Hom(X', X'')^{g(u)} \times Hom(Y', Y'')^{h(v)}$.

De que existan extensiones de g relativas a u y de h relativas a v no se deduce, en general, que existan extensiones para el par (g, h) relativas a (u, v), pero

Teorema IV.1.2 *Si* X" *contráctil y* $\{f', u\} : P\{v, f\} \to \mathrm{X}'$ *cofibración, entonces* $Hom((\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), (\mathrm{X}'', \mathrm{Y}''))^{(g,h)((u,v))} \neq \phi$ *si y sólo si* $Hom(Y', Y'')^{h(v)} \neq \phi$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Consecuencia de la proposición IV.1.11 anterior.

($\Leftarrow$) Sea $\widetilde{h}u = h$ y sea $\widetilde{g}$ una extensión de $\{f''\widetilde{h}, g\}$ relativa a $\{f', u\}$. Entonces $(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = \widetilde{(g, h)}$.

□

Corolario IV.1.3 *Si* X" *es contráctil y* $\{f', u\}$ *cofibración, entonces*

$$Hom((\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), (\mathrm{X}'', \mathrm{Y}''))^{(g,h)((u,v))} \cong \bigcup_{\widetilde{h} \in Hom(Y', Y'')^{h(v)}} \{\widetilde{h}\} \times Hom(X', X'')^{\{f''\widetilde{h}, g\}(\{f', u\})}$$

Las categorías con cono natural distinguidas en los capítulos anteriores, categorías con todas las cofibraciones, con objeto inicial y punteadas, también se interrelacionan con las respectivas de pares.

Proposición IV.1.12 *Si* **cof C** *tiene todas las cofibraciones entonces* **C** *también las tiene.*

Demostración:

Sea $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ tal que existe $r : C\mathrm{Y}' \to C\mathrm{Y}$ con $rCv = 1$. Entonces $(r, r) : (C\mathrm{Y}', C\mathrm{Y}') \to (C\mathrm{Y}, C\mathrm{Y})$ es una retracción de pares para $(Cv, Cv) :$ $: (C\mathrm{Y}, C\mathrm{Y}) \to (C\mathrm{Y}', C\mathrm{Y}')$, considerando 1_{Y} y $1_{\mathrm{Y}'}$ las cofibraciones asociadas a los pares (Y,Y) e (Y',Y'), respectivamente. Por hipótesis $(v, v) : (\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) \rightarrowtail$ $\rightarrowtail (\mathrm{Y}', \mathrm{Y}')$ es cofibración de pares, y por tanto v es cofibración.

□

Proposición IV.1.13 **C** *tiene objeto inicial si y sólo si* **cof C** *lo tiene.*

Demostración:

Por el corolario I.1.4, si ϕ es objeto inicial en **C** entonces 1_ϕ es objeto inicial en **C(2)**, y por ser objeto de **cof C** también lo es en esta subcategoría.

Si (X,Y) es objeto inicial en **cof C**, entonces existe un único morfismo $(g, h) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$. Como $(f, 1) : (\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, entonces $(fg, h) :$ $: (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tiene que ser el morfismo inicial $(1, 1)$. Se concluye que $fg = 1 = gf$, por tanto f es isomorfismo y $(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \cong (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ es objeto inicial. De donde X es objeto inicial en **C**, al poderse considerar como subcategoría de **cof C** mediante el funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{cof\ C}$ definido por $F\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$ y $Fh = (h, h)$.

□

Proposición IV.1.14 *Un par* (X,Y) *es cofibrante si y sólo si* X *e* Y *son objetos cofibrantes.*

Demostración:

Basta observar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \phi \arrow[r, tail, "\phi_{\mathrm{Y}}"] \arrow[d, tail, "1"] & \mathrm{Y} \arrow[d, tail, "f"] \\ \phi \arrow[r, tail, "\phi_{\mathrm{X}}"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

teniendo en cuenta que $\{f, \phi_{\mathrm{X}}\} = f : \mathrm{Y} \sqcup \phi = \mathrm{Y} \rightarrowtail \mathrm{X}$.

□

Corolario IV.1.4 **C** *es una categoría punteada si y sólo si* **cof C** *lo es.*

Demostración:

Consecuencia de las proposiciones IV.1.13 y IV.1.14 anteriores, observando que $C(*,*) = (C*, C*) = (*,*)$.

□

La homotopía en **cof C** también está relacionada con la de **C**, obteniéndose transformaciones naturales entre los diferentes funtores de homotopía.

Proposición IV.1.15 *Dada una cofibración de pares* $(u,v):(\mathrm{X},\mathrm{Y})\rightarrow(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$, *con* $(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ *contráctil, si* $(g_0,h_0),(g_1,h_1) : (\mathrm{X}',\mathrm{Y}') \rightarrow (\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'')$ *son tales que* $(g_0,h_0) \simeq (g_1,h_1)$ *rel.* (u,v), *entonces* $g_0 \simeq g_1$ *rel.* u *y* $h_0 \simeq h_1$ *rel.* v.

Demostración:

Si $(G,H) : (g_0,h_0) \simeq (g_1,h_1)$ rel. (u,v), entonces

$$\begin{aligned} (G,H)(u,v)_1 &= \{(g_0,h_0)(q_{X'},q_{Y'})(Cu,Cv),(g_1,h_1)\} = \\ &= \{(g_0 q_{X'} Cu, h_0 q_{Y'} Cv),(g_1,h_1)\} \end{aligned}$$

de donde por el teorema I.1.1

$$(G,H)(u_1,v_1) = (Gu_1, Hv_1) =$$

$$= (\{g_0 q_{X'} Cu, g_1\}, \{h_0 q_{Y'} Cv, h_1\})$$

luego $G : g_0 \simeq g_1$ rel. u y $H : h_0 \simeq h_1$ rel. v.

□

Proposición IV.1.16 *Si en las hipótesis de la proposición anterior además* X" *es contráctil, entonces* $(g_0, h_0) \simeq (g_1, h_1)$ *rel.* (u, v) *si y sólo si* $g_0 \simeq g_1$ *rel.* u *y* $h_0 \simeq h_1$ *rel.* v.

Demostración:

Consecuencia del teorema IV.1.2.

□

Teorema IV.1.3 *Si* X" *contráctil,* $[(\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), (\mathrm{X}'', \mathrm{Y}'')]^{(g,h)((u,v))} \cong [\mathrm{Y}', \mathrm{Y}'']^{h(v)}$.

Demostración:

El isomorfismo viene dado asociando $[(g_0, h_0)]$ con $[h_0]$.

- Si $(g_0, h_0) \simeq (g_1, h_1)$ rel. (u, v), entonces por la proposición IV.1.15 $h_0 \simeq h_1$ rel. v.

- Si (g_0, h_0), (g_1, h_1) son tales que $h_0 \simeq h_1$ rel. v, por ser X" contráctil y verificarse $g_0 u = g_1 u = g$ se tiene, usando la observación II.2.1, que $g_0 \simeq g_1$ rel. u, y por la proposición IV.1.16 anterior $(g_0, h_0) \simeq (g_1, h_1)$ rel. (u, v).

- Dado $h_0 : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}''$ tal que $h_0 v = h$, por PEN, observando que X" es contráctil, existe $g_0 : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}''$ tal que $g_0\{f', u\} = \{f'' h, g\}$.

□

Obsérvese que si $(u, v) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \rightarrowtail (C\mathrm{X}', C\mathrm{Y}')$ es una cofibración de pares, entonces $\mathbf{H}_{(u,v)}(\mathbf{cof\ C})_{(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'')}$, $\mathbf{H}_u \mathbf{C}_{\mathrm{X}''}$ y $\mathbf{H}_v \mathbf{C}_{\mathrm{Y}''}$ son grupoides.

Teorema IV.1.4 *Si* $(u,v):(\mathrm{X},\mathrm{Y})\rightarrowtail(C\mathrm{X}',C\mathrm{Y}')$ *es una cofibración de pares, entonces* $J:\mathbf{H}_{(u,v)}(\mathbf{cof\ C})_{(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'')}\longrightarrow\mathbf{H}_u\mathbf{C}_{\mathrm{X}''}\times\mathbf{H}_v\mathbf{C}_{\mathrm{Y}''}$ *definido por* $J(g_0,h_0)=(g_0,h_0)$*, y dado* $(G,H):(g_0,h_0)\simeq(g_1,h_1)$ *rel.* (u,v)*,* $J([(G,H)])=$ $=([G],[H])$*, es un funtor.*

Demostración:

Por la proposición IV.1.15, observando que $(u,v)_n=(u_n,v_n)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ y la definición de la transformación p en pares, J está bien definida.

Observando de nuevo la definición de p en pares se conservan las identidades, y como dada (μ,ν) extensión del morfismo $kpC(u,v)\cup k=(kpCu\cup$ $\cup k, kpCv\cup k)$ relativa a $(u,v)_1=(u_1,v_1)$, por la proposición IV.1.11 μ y ν son extensiones de $kpCu\cup k$ y $kpCv\cup k$ relativas a u_1 y v_1 respectivamente, es una simple comprobación verificar que $[(G_0,H_0)]*[(G_1,H_1)]=[(G_0*G_1,H_0*H_1)]$.
□

Corolario IV.1.5 *Si* X" *es contráctil, entonces* J *es un funtor inyectivo y lleno.*

Demostración:

J es inyectivo trivialmente sobre los objetos.

Por el teorema IV.1.3 observando que $Hom((g_0,h_0),(g_1,h_1))=$ $=[(C^2\mathrm{X}',C^2\mathrm{Y}'),(X'',Y'')]^{(\{g_0pCu,g_1\},\{h_0pCv,h_1\})((u_1,v_1))}$, y por el corolario III.1.10 J es fiel y lleno.
□

Corolario IV.1.6 *El funtor* J *permite crear transformaciones naturales:*

i) $\iota:\mathbf{H}_{(-,=)}(\mathbf{cof\ C})_{(\sim,\approx)}\to\mathbf{H}_-\mathbf{C}_\sim\times\mathbf{H}_=\mathbf{C}_\approx$
$((\mathbf{coff\ (cof\ C)})^{\mathrm{op}}\times\mathbf{cof\ C}\to\mathbf{Cat})$.

ii) $\iota : H_{(u,v)}((\sim,\approx),(\sim',\approx')) \to H_u(\sim,\sim') \times H_v(\approx,\approx')$

$((\mathbf{cof\ C})^{P\{(u,v),(u,v)\}} \to \mathbf{Set})$.

iii) $\iota : H_{(u,v)}((\sim,\approx),(\sim,\approx)) \to H_u(\sim,\sim) \times H_v(\approx,\approx)$

$((\mathbf{cof\ C})^{(C\mathrm{X}',C\mathrm{Y}')} \to \mathbf{Grp})$.

iv) $\iota : H_{(-,=)}((\sim,\approx),(\sim',\approx')) \to H_{-}(\sim,\sim') \times H_{=}(\approx,\approx')$

$(((\mathbf{coff\ (cof\ C)})^{\mathrm{P}\{-,-\}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set})$.

v) $\iota : H_{(-,=)}((\sim,\approx),(\sim,\approx)) \to H_{-}(\sim,\sim) \times H_{=}(\approx,\approx)$

$(((\mathbf{coff\ (cof\ C)})^{codom\ -})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$.

vi) $\iota : \mathbf{H}_{(-,=)\vee(-',=')}(\mathbf{cof\ C})_{(\sim,\approx)} \to \mathbf{H}_{-}\mathbf{C}_{\sim} \times \mathbf{H}_{=}\mathbf{C}_{\approx} \times \mathbf{H}_{-'}\mathbf{C}_{\sim} \times \mathbf{H}_{='}\mathbf{C}_{\approx}$

$((\mathbf{coff\ (cof\ C)})^{\mathbf{op}} \times (\mathbf{coff\ (cof\ C)})^{\mathbf{op}} \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{Cat})$.

vii) $\iota : H_{(u,v)\vee(u',v')}(\{(\sim,\approx),(\sim',\approx')\},\{(\backsim,\backsimeq),(\backsim',\backsimeq')\}) \to$

$\to H_u(\sim,\backsim) \times H_v(\approx,\backsimeq) \times H_{u'}(\sim',\backsim') \times H_{v'}(\approx',\backsimeq')$

$((\mathbf{cof\ C})^{\mathrm{P}\{(u,v)\vee(u',v'),(u,v)\vee(u',v')\}} \to \mathbf{Set})$.

viii) $\iota : H_{(u,v)\vee(u',v')}(\{(\sim,\approx),(\sim',\approx')\},\{(\sim,\approx),(\sim',\approx')\}) \to$

$\to H_u(\sim,\sim) \times H_v(\approx,\approx) \times H_{u'}(\sim',\sim') \times H_{v'}(\approx',\approx')$

$((\mathbf{cof\ C})^{codom\ (u,v)\vee(u',v')} \to \mathbf{Grp})$.

ix) $\iota : H_{(-,=)\vee(-',=')}(\{(\sim,\approx),(\sim',\approx')\},\{(\backsim,\backsimeq),(\backsim',\backsimeq')\}) \to$

$\to H_{-}(\sim,\backsim) \times H_{=}(\approx,\backsimeq) \times H_{-'}(\sim',\backsim') \times H_{='}(\approx',\backsimeq')$

$(((\mathbf{coff\ (cof\ C)} \times \mathbf{coff\ (cof\ C)})^{\mathrm{P}\{-,-\}\vee\mathrm{P}\{-,-\}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set})$.

x) $\iota : H_{(-,=)\vee(-',=')}(\{(\sim,\approx),(\sim',\approx')\},\{(\sim,\approx),(\sim',\approx')\}) \to$

$\to H_{-}(\sim,\sim) \times H_{=}(\approx,\approx) \times H_{-'}(\sim',\sim') \times H_{='}(\approx',\approx')$

$(((\mathbf{coff\ (cof\ C)} \times \mathbf{coff\ (cof\ C)})^{codom\ -\vee codom\ -})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$.

xi) $\iota : \pi_n^{(u,v)} \to \pi_n^u \times \pi_n^v \; ((\mathbf{cof\ C})^{(C\mathrm{X}',C\mathrm{Y}')} \to \mathbf{Grp})$.

xii) $\iota : \pi_n^{(-,=)} \to \pi_n^- \times \pi_n^= \; (((\mathbf{cof}_C\ (\mathbf{cof\ C}))^{codom\ -})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$.

xiii) $\iota : \pi_n^{(u,v)\vee(\widetilde{u},\widetilde{v})} \to \pi_n^u \times \pi_n^v \times \pi_n^{\widetilde{u}} \times \pi_n^{\widetilde{v}}$

$((\mathbf{cof\ C}))^{(C\mathrm{X}',C\mathrm{Y}')\vee(C\widetilde{X},C\widetilde{Y})} \to \mathbf{Grp})$.

xiv) $\iota : \pi_n^{(-,=)\vee(-',=')} \to \pi_n^- \times \pi_n^= \times \pi_n^{-'} \times \pi_n^{='}$

$(((\mathbf{cof}_C\ (\mathbf{cof\ C}) \times \mathbf{cof}_C\ (\mathbf{cof\ C}))^{codom\ -\vee codom\ -})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$.

xv) $\iota : \pi_n^{(-,=)}(\sim,\approx) \to \pi_n^-(\sim) \times \pi_n^=(\approx)$

$(\mathbf{cof\ C} \times \mathbf{cof}\ (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp})$.

xvi) $\iota : \pi_n^{(-,=)}(\sim,\approx) \to \pi_n^-(\sim) \times \pi_n^=(\approx)$

$(\mathbf{cof\ C} \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{Grp})$.

xvii) $\iota : \pi_n^{(-,=)\vee(-',=')}(\sim,\approx) \to \pi_n^-(\sim) \times \pi_n^=(\approx) \times \pi_n^{-'}(\sim) \times \pi_n^{='}(\approx)$

$((\mathbf{cof}\ (\mathbf{cof\ C}))_*^{\mathbf{op}} \times (\mathbf{cof}\ (\mathbf{cof\ C}))_*^{\mathbf{op}} \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{Grp})$.

xviii) $\iota : \pi_n^{(-,=)\vee(-',=')}(\sim,\approx) \to \pi_n^-(\sim) \times \pi_n^=(\approx) \times \pi_n^{-'}(\sim) \times \pi_n^{='}(\approx)$

$((\mathbf{cof\ C})_* \times (\mathbf{cof\ C})_* \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{Grp})$.

Demostración:

La naturalidad se deduce de que la composición en **cof C** es componente a componente. *vi)* es consecuencia del teorema III.1.5 y *vii)*, *viii)*, *ix)* y *x)* del corolario III.1.12.

A partir de *xv)* tener en cuenta que dado (X,Y), se tiene que $(S\mathrm{X}, S\mathrm{Y}) = S(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, $(C\mathrm{X}, C\mathrm{Y}) = C(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ y $(\Sigma^{(k_\mathrm{X})_{n-1}}, \Sigma^{(k_\mathrm{Y})_{n-1}}) = \Sigma^{(k_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})})_{n-1}}$ tienen como cofibraciones asociadas Sf, Cf y $\Sigma^n(Cf,f)$, respectivamente. Por otro lado, dada una cofibración $(u,v) : (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \rightarrowtail (\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$, con (X',Y') no necesariamente un cono, $(\Sigma^{u_{n-1}}, \Sigma^{v_{n-1}}) = \Sigma^{(u,v)_{n-1}}$ tiene como cofibración asociada

$\Sigma^n(f', f)$. Obsérvese que esto es cierto pues S, C, $\Sigma^n(*)$ y Σ^n transforman cofibraciones en cofibraciones, C por la proposición II.1.1 y S, $\Sigma^n(*)$, Σ^n por ser push outs en la categoría de pares.

$\square$

Corolario IV.1.7 *Si $\sim$ es contráctil entonces son isomorfismos:*

- *En xv) y xvi)* $\iota : \pi_n^{(-,=)}(\sim, \approx) \to \pi_n^{=}(\approx)$.

- *En xvii) y xviii)* $\iota : \pi_n^{(-,=)\vee(-',=')}(\sim, \approx) \to \pi_n^{=}(\approx) \times \pi_n^{='}(\approx)$

Si codom $\sim$ contráctil, entonces son isomorfismos:

- *En ii)* $\iota : H_{(u,v)}((\sim, \approx), (\sim', \approx')) \to H_v(\approx, \approx')$

- *En iii)* $\iota : H_{(u,v)}((\sim, \approx), (\sim, \approx)) \to H_v(\approx, \approx)$

- *En iv)* $\iota : H_{(-,=)}((\sim, \approx), (\sim', \approx')) \to H_{=}(\approx, \approx')$

- *En v)* $\iota : H_{(-,=)}((\sim, \approx), (\sim, \approx)) \to H_{-}(\sim, \sim) \times H_{=}(\approx, \approx)$

- *En vii)* $\iota : H_{(u,v)\vee(u',v')}(\{(\sim, \approx), (\sim', \approx')\}, \{(\backsim, \reflectbox{$\approx$}), (\backsim', \reflectbox{$\approx$}')\}) \to$
  $\to H_v(\approx, \reflectbox{$\approx$}) \times H_{v'}(\approx', \reflectbox{$\approx$}')$

- *En viii)* $\iota : H_{(u,v)\vee(u',v')}(\{(\sim, \approx), (\sim', \approx')\}, \{(\sim, \approx), (\sim', \approx')\}) \to$
  $\to H_v(\approx, \approx) \times H_{v'}(\approx', \approx')$

- *En ix)* $\iota : H_{(-,=)\vee(-',=')}(\{(\sim, \approx), (\sim', \approx')\}, \{(\backsim, \reflectbox{$\approx$}), (\backsim', \reflectbox{$\approx$}')\}) \to$
  $\to H_{=}(\approx, \reflectbox{$\approx$}) \times H_{='}(\approx', \reflectbox{$\approx$}')$

- *En x)* $\iota : H_{(-,=)\vee(-',=')}(\{(\sim, \approx), (\sim', \approx')\}, \{(\sim, \approx), (\sim', \approx')\}) \to$
  $\to H_{=}(\approx, \approx) \times H_{='}(\approx', \approx')$

- *En xi)* $\iota : \pi_n^{(u,v)} \to \pi_n^{v}$

- *En xii)* $\iota : \pi_n^{(-,=)} \to \pi_n^{=}$

- *En xiii)* $\iota : \pi_n^{(u,v)\vee(\widetilde{u},\widetilde{v})} \to \pi_n^{v} \times \pi_n^{\widetilde{v}}$

- *En xiv)* $\iota : \pi_n^{(-,=)\vee(-',=')} \to \pi_n^{=} \times \pi_n^{='}$

Demostración:

Consecuencia inmediata del corolario IV.1.5 sin más que usar las proposiciones III.1.3, III.2.3, III.2.13 y III.2.14.

□

IV.2 Sucesiones exactas.

Una vez creados los grupos de homotopía de pares se hace uso de ellos para la obtención de un resultado clásico en teoría de homotopía como son las sucesiones exactas de grupos de homotopía. No sólo se obtienen las sucesiones referidas a un objeto, sino que se extienden a homotopía generalizada.

Para ello se introduce primeramente el concepto de grupo de homotopía de un par basado en un morfismo y relativo a una cofibración.

Definición IV.2.1 Dada una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $h : C\mathrm{A} \to$ $\to \mathrm{Y}$, se define:

$$\pi_{n+1}^{i}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),h) = \pi_n^{(Ci,i)}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),(fhp,h))$$

Proposición IV.2.1 *Si* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ *es una cofibración contráctil, entonces* $\pi_{n+1}^{i}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),h) = \{0\}$ *para todo n, par* (X,Y) *y* $h : C\mathrm{A} \to \mathrm{Y}$.

Demostración:

Si i es una cofibración contráctil, entonces (Ci, i) también lo es por el corolario IV.1.1, y se obtiene el resultado aplicando la proposición III.2.4.

□

Proposición IV.2.2 *Si* X *es contráctil,* $\pi^i_{n+1}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),h) \cong \pi^i_n(\mathrm{Y},h)$.

Demostración:

Consecuencia de la definición IV.2.1 y del corolario IV.1.7.

□

Los grupos de homotopía que intervienen en la sucesión, así como ella misma se pueden expresar como funtores. Para ello es necesario crear la categoría $(\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*}$, que tiene por objetos los triples de la forma (i,f,h), donde i, f son objetos de **cof C** y $h : C(\mathit{codom}\ i) \to \mathit{dom}\ f$ en **C**, y como morfismos $(g_0,g_1,g_2,g_3) : (i,f,h) \to (i',f',h')$ donde $(g_0,g_1) : i' \to i$ y $(g_2,g_3) : f \to f'$ tales que $g_3hCg_0 = h'$. Obsérvese que la composición de morfismos se define $(g_0',g_1',g_2',g_3')(g_0,g_1,g_2,g_3) = (g_0g_0',g_1g_1',g_2'g_2,g_3'g_3)$.

Proposición IV.2.3 $\pi^{codom}_{n+1} : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\begin{aligned}
\pi^{codom}_{n+1}(i,f,h) &= \pi^-_{n+1}(i,fh) \\
\pi^{codom}_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^-_{n+1}(g_0,g_1)\pi^i_{n+1}(g_2) = \\
&= \pi^{i'}_{n+1}(g_2)\pi^-_{n+1}(g_0,g_1)
\end{aligned}$$

donde π^i_{n+1} *y* π^-_{n+1} *vienen definidos en los teoremas III.2.1 y III.2.2, respectivamente, es un funtor para* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Basta aplicar los teoremas III.2.1 y III.2.2 ya mencionados.

□

Si g_2 es un isomorfismo y (g_0,g_1) un morfismo push out, es fácil comprobar que $\pi^{codom}_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3)$ es un isomorfismo.

Proposición IV.2.4 $\pi^{dom}_{n+1} : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\pi^{dom}_{n+1}(i,f,h) = \pi^-_{n+1}(i,h)$$

$$\begin{aligned}\pi^{dom}_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^{-}_{n+1}(g_0,g_1)\pi^{i}_{n+1}(g_3) = \\ &= \pi^{i'}_{n+1}(g_3)\pi^{-}_{n+1}(g_0,g_1)\end{aligned}$$

es un funtor para $n \in I\!N$.

Demostración:

Análoga a la anterior.

□

Si g_3 es un isomorfismo y (g_0, g_1) un morfismo push out, entonces también $\pi^{dom}_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3)$ es un isomorfismo.

Proposición IV.2.5 $\pi_{n+1} : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(i,f,h) &= \pi^{i}_{n+1}((codom\ f, dom\ f), h) \\ \pi_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^{(-,=)}_{n}((Cg_0, Cg_1),(g_0,g_1))\pi^{(Ci,i)}_{n}((g_2,g_3)) = \\ &= \pi^{(Ci',i')}_{n}((g_2,g_3))\pi^{(-,=)}_{n}((Cg_0,Cg_1),(g_0,g_1))\end{aligned}$$

es un funtor para $n \geq 2$.

Demostración:

Similar a las anteriores.

□

Si g_2 y g_3 son isomorfismos y (g_0, g_1) es un morfismo push out, es fácil comprobar que $\pi_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3)$ es un isomorfismo. Basta observar que el cono transforma push outs en push outs.

Una vez obtenidos los funtores que determinan los términos de la sucesión se pasa a crear las transformaciones naturales que relacionan dichos términos.

Proposición IV.2.6 $\pi^1_{n+1} : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\begin{aligned}\pi^1_{n+1}(i,f,h) &= \pi^{(i_1,1)}_{n}((codom\ f, dom\ f),(fhp,h)) \\ \pi^1_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^{(-,=)}_{n}((Cg_0,Cg_1),(g_0,g_1))\pi^{(i_1,1)}_{n}((g_2,g_3)) = \\ &= \pi^{(i'_1,1)}_{n}((g_2,g_3))\pi^{(-,=)}_{n}((Cg_0,Cg_1),(g_0,g_1))\end{aligned}$$

es un funtor para $n \geq 2$.

Demostración:

Semejante a las anteriores.

$\square$

Proposición IV.2.7 $id : \pi^1_{n+1} \to \pi_{n+1}$ $((\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp})$, *definida por* $id_{(i,f,h)}([(F,G)]) = [(F,G)]$ *es una transformación natural.*

Demostración:

Consecuencia inmediata del teorema III.2.2 aplicado al siguiente cuadrado conmutativo en **cof C**

$$\begin{tikzcd} k_B \arrow[r, tail, "(\overline{i},i)"] \arrow[d, tail, "(Ci,i)"'] & \overline{k_A} : A \to \Sigma^i \arrow[d, tail, "(i_1,1)"] \\ k_A \arrow[r, tail, "(1,1)"] & k_A \end{tikzcd}$$

Obsérvese que $\{i_1, k\} = i_1 : P\{\overline{k}, 1\} = \Sigma^i \to CA$, y por tanto $(i_1, 1)$ es una cofibración en **cof C**.

$\square$

Proposición IV.2.8 $j_{n+1} : \pi^{codom}_{n+1} \to \pi_{n+1}$ $((\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp})$, *definida por* $j_{n+1(i,f,h)}([F]) = [(F, hp^{n-1})]$ *es una transformación natural.*

Demostración:

Basta tener en cuenta el apartado xii) del corolario IV.1.6 para observar que existe una equivalencia natural $\theta : \pi^1_{n+1} \to \pi^{codom}_{n+1}$ y que $j = id\, \theta^{-1}$.

Nótese que $\pi^{codom}_{n+1}(i,f,h) = \pi^i_{n+1}(codom\ f, fh) \cong \pi^{i_1}_n(codom\ f, fh)$ y que $\pi^{1_A}_{n+1}(dom\ f, h) \cong \{0\}$.

$\square$

Proposición IV.2.9 $\delta_{n+1} : \pi_{n+1} \to \pi_n^{dom}$ $((\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp})$, *definida por* $\delta_{n+1(i,f,h)}([(F,G)]) = [G]$ *es una transformación natural.*

Demostración:

- $\delta_{n+1(i,f,h)}$ *bien definida.*

  Consecuencia directa de la proposición IV.1.15.

- $\delta_{n+1(i,f,h)}$ *homomorfismo de grupos.*

$$\begin{aligned}\delta_{n+1(i,f,h)}([(F,G)] * [(F',G')]) = \delta_{n+1(i,f,h)}([(F * F', G * G')]) = \\ &= [G * G'] = [G] * [G'] = \\ &= \delta_{n+1(i,f,h)}([(F,G)]) * \delta_{n+1(i,f,h)}([(F',G')]).\end{aligned}$$

- *Naturalidad.*

$$\begin{aligned}\pi_n^{dom}(g_0,g_1,g_2,g_3)\delta_{n+1(i,f,h)}([(F,G)]) = \pi_n^{dom}(g_0,g_1,g_2,g_3)([G]) = \\ &= [g_3 G C^n g_0] = \\ &= \delta_{n+1(i',f',h')}([(g_2 F C^{n+1} g_0, g_3 G C^n g_0)]) \\ &= \delta_{n+1(i',f',h')}\pi_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3)([(F,G)]).\end{aligned}$$

□

Proposición IV.2.10 $u_{n+1} : \pi_{n+1}^{dom} \to \pi_{n+1}^{codom}$ $((\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp})$, *definida por* $u_{n+1(i,f,h)} = f_*$ *es una transformación natural.*

Demostración:

Inmediata, usando el teorema III.2.1.

□

La exactitud en la composición de las transformaciones naturales anteriores concluirá el resultado principal de este capítulo.

Proposición IV.2.11 *El par* $(j_{n+1(i,f,h)}, \delta_{n+1(i,f,h)})$ *es exacto.*

Demostración:

- $Im\ j_{n+1(i,f,h)} \subseteq Ker\ \delta_{n+1(i,f,h)}$.

  $\delta_{n+1(i,f,h)} j_{n+1(i,f,h)}([F]) = \delta_{n+1(i,f,h)}([(F, hp^{n-1})]) = [hp^{n-1}]$.

- $Ker\ \delta_{n+1(i,f,h)} \subseteq Im\ j_{n+1(i,f,h)}$.

  Sea $[(F, H')]$ tal que $[H'] = [hp^{n-1}]$. Entonces existe $H : hp^{n-1} \simeq H'$ rel. i. $j_{n+1(i,f,h)}([GCk]) = [(F, H')]$, donde G es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+1}C^{n+2}i, fH, fhp^n, ..., fhp^n, F\}$ relativa a la cofibración $(Ci_n)_1$. □

Proposición IV.2.12 *El par* $(\delta_{n+1(i,f,h)}, u_{n(i,f,h)})$ *es exacto.*

Demostración:

- $Im\ \delta_{n+1(i,f,h)} \subseteq Ker\ u_{n(i,f,h)}$.

  $u_{n(i,f,h)}\delta_{n+1(i,f,h)}([(F, G)]) = u_{n(i,f,h)}([G]) = [fG]$. $HC^{n+1}k : fhp^{n-1} \simeq$ $\simeq fG$ rel. i, donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+1}C^{n+2}i, fhp^n,$ $..., fhp^n, F\}$ relativa a la cofibración $(Ci)_{n+1}$.

- $Ker\ u_{n(i,f,h)} \subseteq Im\ \delta_{n+1(i,f,h)}$.

  Sea $[G]$ tal que $[fG] = [fhp^{n-1}]$. Entonces existe $H : fhp^{n-1} \simeq fG$ rel. i. $[(Fk, G)]$ es un elemento de $\pi^i_{n+1}((\mathrm{X}, \mathrm{Y}), h)$, donde F es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+1}C^{n+2}i, H, fhp^n, ..., fhp^n\}$ relativa a la cofibración $C(i_{n+1})$.

□

Para verificar la exactitud del último par de transformaciones es necesario crear un isomorfismo natural entre funtores de homotopía.

π^{codom}_{n+1}, π^{dom}_{n+1} y π_{n+1}, definidos en las proposiciones IV.2.3, IV.2.4 y IV.2.5, se pueden componer con el funtor olvido desde **Grp** en **Set*** y ser considerados como funtores corchetes de homotopía P^{codom}_{n+1}, P^{dom}_{n+1} y P_{n+1} con codominio la categoría **Set***, existiendo en este caso también para $n = 0$ en los dos primeros casos y $n = 1$ en el tercero.

Proposición IV.2.13 $Q_{n+1} : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Set}^*$, *definido por* $Q_{n+1}(i, f, h) = = P_2(i_{n-1}, f, hp^{n-1})$ *es un funtor para* $n \geq 1$.

Teorema IV.2.1 *Existe una equivalencia natural* $\beta_{n+1} : Q_{n+1} \to P_{n+1}$ $((\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Set}^*)$.

Demostración:

Se definen $\beta_{n+1(i,f,h)} : Q_{n+1}(i, f, h) \to P_{n+1}(i, f, h)$ por $\beta_{n+1(i,f,h)}([(F, G)]) = = [(F'Ck, G)]$, donde F' es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+1}C^{n+2}i, F, fhp^n, ..., fhp^n\}$ relativa a $(Ci_n)_1$ y $\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)} : P_{n+1}(i, f, h) \to Q_{n+1}(i, f, h)$ por $\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}([(F, G)]) = [(F^oC^{n+1}k, G)])$, donde F^o es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+1}C^{n+2}i, fhp^n, ..., fhp^n, F, fhp^n\}$ relativa a $(Ci)_{n+1}$.

- $\beta_{n+1(i,f,h)}$ *bien definida.*

  $\beta_{n+1(i,f,h)}$ no depende de la extensión, pues si F' y F'' son dos extensiones, entonces $(HC^2k, Gp) : (F'Ck, G) \simeq (F''Ck, G)$ rel. (Ci, i), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i, Fp, fhp^{n+1}, ..., fhp^{n+1}, F', F''\}$ relativa a $(Ci_n)_2$.

  $\beta_{n+1(i,f,h)}$ no depende del representante, pues si $(\widehat{F}, \widehat{G}) : (F_0, G_0) \simeq \simeq (F_1, G_1)$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}), entonces $(HC^2k, \widehat{G}) : (F'_0Ck, G_0) \simeq \simeq (F'_1Ck, G_1))$ rel. (Ci, i), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i, \widehat{F}, fhp^{n+1}, ..., fhp^{n+1}, F'_0, F'_1\}$ relativa a $(Ci_n)_2$.

- $\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}$ *bien definida.*

$\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}$ no depende de la extensión, pues si F^o y F^{oo} son dos extensiones, entonces $(HC^{n+2}k, Gp) : (F^oC^{n+1}k, G) \simeq (F^{oo}C^{n+1}k, G)$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i,$ $, fhp^{n+1}, ...fhp^{n+1}, Fp, F^o, F^{oo}\}$ relativa a $(Ci)_{n+2}$.

$\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}$ no depende del representante, pues si $(\widehat{F}, \widehat{G}) : (F_0, G_0) \simeq$ $\simeq (F_1, G_1)$ rel. (Ci, i), entonces $(HC^{n+2}k, \widehat{G}) : (F^o_0C^{n+1}k, G_0) \simeq$ $\simeq (F^o_1C^{n+1}k, G_1)$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i, fhp^{n+1}, ..., fhp^{n+1}, \widehat{F}, F^o_0, F^o_1\}$ relativa a $(Ci)_{n+2}$.

- $\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}\beta_{n+1(i,f,h)} = 1$

$$\begin{aligned} \beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}\beta_{n+1(i,f,h)}([(F,G)]) &= \beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}([(F'Ck, G)]) = \\ &= [((F'Ck)^oC^{n+1}k, G)]. \end{aligned}$$

$(HC^{n+2}k, Gp) : (F, G) \simeq ((F'Ck)^oC^{n+1}k, G)$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i, fhp^{n+1}, ..., fhp^{n+1}, F'Ckp,$ $, F', (F'Ck)^o\}$ relativa a la cofibración $(Ci)_{n+2}$.

- $\beta_{n+1(i,f,h)}\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)} = 1$

$$\begin{aligned} \beta_{n+1(i,f,h)}\beta^{-1}_{n+1(i,f,h)}([(F,G)]) &= \beta_{n+1(i,f,h)}([(F^oC^{n+1}k, G)]) = \\ &= [((F^oC^{n+1}k)'Ck, G)]. \end{aligned}$$

$(HC^2k, Gp) : (F, G) \simeq ((F^oC^{n+1}k)'Ck, G)$ rel. (Ci, i), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i, F^oC^{n+1}kp, fhp^{n+1}, ..., fhp^{n+1}, F^o,$ $, (F^oC^{n+1}k)'\}$ relativa a la cofibración $(Ci_n)_2$.

- *Naturalidad.* Basta observar que $g_2F'C^{n+2}g_0$ es una extensión del morfismo $\{f'h'p^{n+1}C^{n+2}i', g_2FC^{n+1}g_0, f'h'p^n, ..., f'h'p^n\}$ relativo a $(Ci'_n)_1$.

□

Obsérvese que β_2 es la equivalencia natural identidad.

Proposición IV.2.14 *El par* $(u_{n+1(i,f,h)}, j_{n+1(i,f,h)})$ *es exacto.*

Demostración:

- $Im\ u_{n+1(i,f,h)} \subseteq Ker\ \delta_{n+1(i,f,h)}$.

  $j_{n+1(i,f,h)}u_{n+1(i,f,h)}([F]) = j_{n+1(i,f,h)}([fF]) = [(fF, hp^{n-1})]$. Observando que $\{fhp^{n+1}C^{n+2}i, fhp^n, ..., fF, fhp^n\} = f\{hp^{n+1}C^{n+2}i, hp^n, ..., F, hp^n\}$ se tiene que $[((fF)^o, hp^{n-1})] = [(fF^o, hp^{n-1})]$, donde aquí F^o es una generalización, usando el morfismo representante del neutro homotópico adecuado al corchete de homotopía.

  Entonces $(fF^oC^{n+1}kCp, F^oC^{n+1}k) : (fF^oC^{n+1}k, hp^{n-1}) \simeq (fhp^n, hp^{n-1})$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}), y por el isomorfismo natural $\beta_{n+1(i,f,h)}$ se verifica $[(fF, hp^{n-1})] = [(fhp^n, fhp^{n-1})]$ en $\pi^i_{n+1}((\mathrm{X}, \mathrm{Y}), h)$.

- $Ker\ j_{n+1(i,f,h)} \subseteq Im\ u_{n+1(i,f,h)}$.

  Sea $[F]$ tal que $[(F, hp^{n-1})] = [(fhp^n, hp^{n-1})]$. Por el teorema IV.2.1 anterior existe $(\widehat{F}, \widehat{G}) : (F^oC^{n+1}k, hp^{n-1}) \simeq (fhp^n, hp^{n-1})$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}).

  Entonces $(HC^3k, hp^n) : (F^oC^{n+1}k, hp^{n-1}) \simeq (f\widehat{G}, hp^{n-1})$ rel. (Ci_{n-1}, i_{n-1}), donde H es una extensión del morfismo $\{fhp^{n+2}C^{n+3}i, fhp^{n+1}, ..., fhp^{n+1},$ $, F^oC^{n+1}kp, F^oC^{n+1}kCp, \widehat{F}\}$ relativa a la cofibración $(Ci_{n-1})_3$, y por el isomorfismo natural $\beta_{n+1(i,f,h)}$ se verifica $[(F, hp^{n-1})] = [((f\widehat{G})', hp^{n-1})] =$ $= [(f(\widehat{G})', hp^{n-1})]$. En particular, por la proposición IV.1.15, $[F] =$ $= [f(\widehat{G})'] = f_*([(\widehat{G})'])$.

□

SEGrp y **SESet*** simbolizan las categorías que tienen como objetos sucesiones exactas decrecientes de grupos y conjuntos punteados, respectivamente, indizados sobre los números naturales. Los morfismos de esta categoría son sucesiones de homomorfismos de grupos y aplicaciones punteadas, respectivamente, entre los elementos de las sucesiones con el mismo índice, que hacen conmutativo el diagrama.

Teorema IV.2.2 $\pi : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{SEGrp}$, *definido por:*

$$\pi = ... \to \pi_3^{dom} \xrightarrow{u} \pi_3^{codom} \xrightarrow{j} \pi_3 \xrightarrow{\delta} \pi_2^{dom} \xrightarrow{u} \pi_2^{codom}$$

es un funtor.

Demostración:

Evidente, por las proposiciones vistas anteriormente en este párrafo.

□

Teorema IV.2.3 $P : (\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{SESet}^*$, *definido por:*

$$P = ... \to P_2^{dom} \xrightarrow{u} P_2^{codom} \xrightarrow{j} P_2 \xrightarrow{\delta} P_1^{dom} \xrightarrow{u} P_1^{codom}$$

es un funtor.

Demostración:

Nótese que en la verificación de la exactitud de las transformaciones naturales no se ha utilizado su condición de homomorfismos de grupos.

□

La categoría $(\mathbf{cof\ C})^{C\mathrm{A}}$ tiene como objetos los pares de la forma (f, h), donde $f \in \mathbf{cof\ C}$ y $h : C\mathrm{A} \to dom\ f$ morfismo de $\mathbf{C}$, y como morfismos pares $(g_2, g_3) : f \to f'$ en $\mathbf{cof\ C}$ verificando $g_3 h = h'$.

Teorema IV.2.4 *Dada una cofibración* $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, $\pi^i : (\mathbf{cof\ C})^{C\mathrm{A}} \to \mathbf{SEGrp}$, *definido por* $\pi^i(f, h) = \pi(i, f, h)$ *y* $\pi^i(g_2, g_3) = \pi(1, 1, g_2, g_3)$ *es un funtor.*

Demostración:

Análoga a la anterior.

□

Corolario IV.2.1 *$P^i : (\mathbf{cof\ C})^{CA} \longrightarrow \mathbf{SESet}^*$, definido por $P^i(f,h) = P(i,f,h)$ y $P^i(g_2,g_3) = P(1,1,g_2,g_3)$ es un funtor.*

En el caso de que $\mathbf{C}$ sea una categoría punteada se tiene:

Teorema IV.2.5 *$\pi : ((\mathbf{cof\ C})_{\mathbf{1}_*})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{SEGrp}$, definido por $\pi(i,f) = \pi(i,f,0)$ es un funtor.*

Demostración:

Es el caso particular del teorema IV.2.2 para $h = 0$.

□

Corolario IV.2.2 *$P : ((\mathbf{cof\ C})_{\mathbf{1}_*})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{cof\ C} \longrightarrow \mathbf{SESet}^*$, definido por $P(i,f) = P(i,f,0)$ es un funtor.*

Teorema IV.2.6 *$\pi : (\mathbf{C}_*)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{SEGrp}$, definido por $\pi(\mathrm{A},f) = \pi(*_{\mathrm{A}},f)$ es un funtor.*

Demostración:

Es el caso particular del teorema IV.2.5 para $i = *_{\mathrm{A}}$.

□

Corolario IV.2.3 *$P : (\mathbf{C}_*)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{cof\ C} \to \mathbf{SESet}^*$, definido por $P(\mathrm{A},f) = P(*_{\mathrm{A}},f)$ es un funtor.*

Corolario IV.2.4 *Dado un objeto (i,f,h) de $(\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*}$, con $f : \mathrm{Y} \rightarrowtail \mathrm{X}$.*

a) Si Y es contráctil, entonces $j_{m(i,f,h)}$ es un isomorfismo, para todo m.

b) Si X *es contráctil, entonces* $\delta_{m(i,f,h)}$ *es un isomorfismo, para todo* m.

Nótese que la transformación natural δ es la composición de la transformación natural ι del corolario IV.1.6 con la transformación natural proyección, y que el apartado *b*) del corolario IV.2.4 anterior viene expresado desde otro punto de vista en el corolario IV.1.7 con $\delta = \iota$.

Si i es una cofibración contráctil las sucesiones de homotopía a que da origen son todas nulas, por la proposición III.2.4, pudiéndose deducir también la proposición IV.2.1 como consecuencia de esto.

Capítulo V

Categorías punteadas.

En una C-categoría existen, como se ha probado en los capítulos III y IV, grupos de homotopía relativos a una cofibración basados en un morfismo, que se han denominado grupos de homotopía generalizada, y sucesiones exactas de dichos grupos. Cuando la C-categoría es punteada también existen los grupos de homotopía referidos a un objeto y los relativos a una cofibración, así como las sucesiones exactas respectivas.

La categoría de los espacios topológicos es una C-categoría no punteada, como se verá en el siguiente capítulo, que tiene asociada una C-categoría punteada: la categoría de los espacios topológicos punteados.

Los conceptos de punto y de espacio topológico punteado se pueden generalizar en cualquier C-categoría, asociando a ésta C-categorías punteadas similarmente a lo que sucede en espacios topológicos. Se van a considerar distintos puntos, los conos de objetos, que dan lugar a C-categorías punteadas cuyos grupos de homotopía referidos a objetos y los relativos a una cofibración, así como sus sucesiones exactas, vendrán expresados en función de la homotopía generalizada de la C-categoría primitiva, obteniéndose conceptos como los de esfera punteada, grupos de homotopía esféricos y sucesiones exactas de éstos que terminan en un grupo fundamental de Poincaré.

Dada una C-categoría $\mathbf{C}$, se considerará al cono de cualquier objeto de $\mathbf{C}$ como un *objeto punto.* A lo largo de todo este capítulo se supondrá fijado un punto $C\nabla$, y todo el desarrollo se hará en función del mismo.

V.1 Categoría punteada $\mathbf{C}^{COF\,C\nabla}$.

Fijado un punto se obtiene la C-categoría punteada asociada, surgiendo relaciones entre los conceptos de nulhomotopía y contráctil en ambas categorías, la punteada y la primitiva.

Definición V.1.1 *La categoría punteada* $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ es la subcategoría llena de $\mathbf{C}^{C\nabla}$ que tiene como objetos los pares de la forma (X,x), con $x : C\nabla \rightarrowtail \mathrm{X}$ cofibración. A (X,x) se le denominará *objeto punteado con punto x.*

Proposición V.1.1 $\widehat{C} : \mathbf{C}^{COF\ C\nabla} \to \mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ *definido mediante el siguiente push out por* $\widehat{C}(\mathrm{X}, x) = (\widehat{C}\mathrm{X}, \overline{Cx})$

$$\begin{tikzcd} C^2\nabla \arrow[r, "p"] \arrow[d, tail, "Cx"] & C\nabla \arrow[d, tail, "\overline{Cx}"] \\ CX \arrow[r, "\overline{p}"] & \widehat{C}X \end{tikzcd}$$

y dado un morfismo $f : (\mathrm{X}, x) \to (\mathrm{Y}, y)$, $\widehat{C}f = 1 \cup Cf : \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\} \to$ $\to \widehat{C}(\mathrm{Y}, y) = P\{p, Cy\}$, *es un funtor.*

Demostración:

Simple comprobación de que $1 \cup Cf$ existe pues $CfCx = Cy1$ y $1p = p1$.

□

Por la proposición I.3.2 $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ se puede considerar una subcategoría llena de $\mathbf{po}^{\mathbf{C}\nabla}\mathbf{C}$, identificando un morfismo $f : (\mathrm{X}, x) \to (\mathrm{Y}, y)$ con el morfismo $1 \cup f : P\{1_{C\nabla}, x\} \to P\{1_{C\nabla}, y\}$. De esta forma cualquier objeto punteado de $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ se puede interpretar siempre como un push out cofibrado de componente vertical $C\nabla$ e inducida vertical el punto, aunque no necesariamente del tipo anterior, dando sentido a notaciones de la forma $1 \cup f : (\mathrm{X}, x) = P\{s, j\} \to (\mathrm{Y}, y) = P\{s', j'\}$. Cuando para un objeto (X, x) no se especifique el push out se supondrá que es el asociado para la identificación como subcategoría de $\mathbf{po}^{\mathbf{C}\nabla}\mathbf{C}$: $(\mathrm{X}, x) = P\{1_{C\nabla}, x\}$.

Proposición V.1.2 $\widehat{k} : 1 \to \widehat{C}$ *(*$\mathbf{C}^{COF\ C\nabla} \to \mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$*) definida por* $\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)} =$ $= 1 \cup k_{\mathrm{X}} : (\mathrm{X}, x) \to \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\}$ *es una transformación natural.*

Demostración:

$1 \cup k_{\mathrm{X}}$ existe pues $k_{\mathrm{X}}x = Cxk_{C\nabla}$ y $1 = p_{\nabla}k_{C\nabla}$.

Para la naturalidad basta observar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{X}, x) \arrow[r, "1 \cup k_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "1 \cup f"] & \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\} \arrow[d, "1 \cup Cf"] \\
(\mathrm{Y}, y) \arrow[r, "1 \cup k_{\mathrm{Y}}"] & \widehat{C}(\mathrm{Y}, y) = P\{p, Cy\}
\end{tikzcd}$$

□

Proposición V.1.3 $\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)} = \overline{p_{\nabla}}k_{\mathrm{X}} : (\mathrm{X}, x) \to (\widehat{C}X, \overline{Cx})$

Demostración:

Basta observar que $1 \cup k_{\mathrm{X}} = \{\overline{Cx}, \overline{p_{\nabla}}k_{\mathrm{X}}\} = \overline{p_{\nabla}}k_{\mathrm{X}}$.

□

Al intentar relacionar los conceptos de la categoría punteada con los de la original es necesario expresar los nuevos desarrollos en función de los primeros. Así, partiendo de que el funtor $\widehat{C}$ viene definido en función del C tambien $\widehat{C}^n$ se puede obtener de C^n.

Teorema V.1.1 *El siguiente cuadrado es un push out*

$$
\begin{tikzcd}
C^{n+1}\nabla \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, tail, "C^n x"] & C\nabla \arrow[d, tail, "\overset{(n}{\overline{Cx}}"] \\
C^n X \arrow[r, "\overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}"] & \widehat{C}^n \mathrm{X}
\end{tikzcd}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$, *donde* $\overset{(0}{\overline{Cx}} = x$ *y* $\overset{(n}{\overline{Cx}} = \overline{C\ \overset{(n-1}{\overline{Cx}}}$ *obtenido aplicando sucesivamente el funtor* $\widehat{C}$.

Demostración:

Sean $f : C\nabla \to \mathrm{Y}$ y $g : C^n\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tales que $fp^n = gC^n x$. Entonces $fp^n = = fp^{n-1}C^{n-1}p = gC^n x = gC^{n-1}(Cx)$, y existe por la propiedad de push out $\{fp^{n-1}, g\} : C^{n-1}\widehat{C}\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. $\{fp^{n-1}, g\}C^{n-2}C\overline{Cx} = \{fp^{n-1}, g\}C^{n-1}\overline{Cx} = = fp^{n-1} = fp^{n-2}C^{n-2}p$, y aplicando de nuevo la propiedad de push out existe $\{fp^{n-2}, fp^{n-1}, g\} : C^{n-2}\widehat{C}^2\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$. Reiterando el proceso existe $\{f, fp, ...$ $..., fp^{n-2}, fp^{n-1}, g\} : \widehat{C}^n\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tal que $\{f, fp, ..., fp^{n-2}, fp^{n-1}, g\}\overset{(n}{\overline{Cx}} = f$ y $\{f, fp, ..., fp^{n-2}, fp^{n-1}, g\}\overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p} = g$. Si existiese $h : \widehat{C}^n\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tal que $h\overset{(n}{\overline{Cx}} = f$ y $h\overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p} = g$ entonces $h = \{h_0, h_1, ..., h_{n-1}, h_n\}$ y por lo anterior $h_0 = f$ y $h_n = g$. Para que esta llave exista se tiene que verificar $h_0 p = = fp = \{h_1, ..., h_n\}\overset{(n-1}{\overline{Cx}} = h_1$. Reiterando el proceso se concluye el resultado.

$\square$

Corolario V.1.1

a) $\widehat{C}^n f = 1 \cup C^n f : \widehat{C}^n(\mathrm{X}, x) = P\{p^n, C^n x\} \to \widehat{C}^n(\mathrm{Y}, y) = P\{p^n, C^n y\}$, *para todo* $f : (\mathrm{X}, x) \to (\mathrm{Y}, y)$.

b) $\widehat{k}\widehat{C}^n_{(\mathrm{X},x)} = 1 \cup kC^n_{\mathrm{X}} : \widehat{C}^n(\mathrm{X}, x) = P\{p^n, C^n x\} \longrightarrow \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{X}, x) =$
$= P\{p^{n+1}, C^{n+1}x\}$, *para todo* (X, x).

Demostración:

$$
\begin{array}{lrcl}
(a) & \widehat{C}^n f & = & 1 \cup C\widehat{C}^{n-1} f = \\
 & & = & \{\overset{(n}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\widehat{C}^{n-1}f\} = \{\overset{(n}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\{\overset{(n-1}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\widehat{C}^{n-2}f\}\} = \\
 & & = & \{\overset{(n}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\ \overset{(n-1}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\overline{p}C^2\widehat{C}^{n-2}f\} = \\
 & & = & \{\overset{(n}{\overline{Cy}}, \overset{(n}{\overline{Cy}}\ p, \overline{p}C\overline{p}C^2\{\overset{(n-2}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\widehat{C}^{n-3}f\}\} = ... \\
 & & = & = \{\overset{(n}{\overline{Cy}}, \overset{(n}{\overline{Cy}}\ p, \overset{(n}{\overline{Cy}}\ p^2, ..., \overset{(n}{\overline{Cy}}\ p^{n-1}, \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n f\} \overset{(*)}{=} \\
 & & = & \{\overset{(n}{\overline{Cy}}, \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n f\} = 1 \cup C^n f.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(b) & \widehat{k}\widehat{C}^n_{(\mathrm{X},x)} & = & \widehat{k}_{\widehat{C}^n(\mathrm{X},x)} = \overline{p}k_{\widehat{C}^n\mathrm{X}} = \\
 & & = & \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overline{p}C\overline{p}k_{C\widehat{C}^{n-1}X}\} = \\
 & & = & \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p, \overline{p}C\overline{p}C^2\overline{p}k_{C^2\widehat{C}^{n-2}X}\} = ... \\
 & & = & \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p, ..., \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p^{n-1}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}k_{C^nX}\} = \\
 & & = & \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p, ..., \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p^{n-1}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}kC^n_{\mathrm{X}}\} \overset{(*)}{=} ... \\
 & & = & \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}kC^n_{\mathrm{X}}\} = \\
 & & = & 1 \cup kC^n_{\mathrm{X}}.
\end{array}
$$

$(*)$ Igualdad válida por el teorema V.1.1 anterior.

□

En particular, obsérvese que $\widehat{C}^n\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)} = 1 \cup C^n k_{\mathrm{X}}$.

Proposición V.1.4 *$\widehat{p} : \widehat{C}^2 \to \widehat{C}$ definida por $\widehat{p}_{(\mathrm{X},\mathrm{x})} = 1 \cup p_{\mathrm{X}} : \widehat{C}^2(\mathrm{X}, x) = P\{p^2, C^2 x\} \to \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\}$ es una transformación natural.*

Demostración:

$1 \cup p_{\mathrm{X}}$ existe, pues $pC^2x = Cxp$ y $1p^2 = pp$.

Para la naturalidad basta observar que el siguiente cuadrado es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C}^2(\mathrm{X}, x) = P\{p^2, C^2x\} \arrow[r, "1 \cup p_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "1 \cup C^2 f"] & \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\} \arrow[d, "1 \cup Cf"] \\
\widehat{C}^2(\mathrm{Y}, y) = P\{p^2, C^2y\} \arrow[r, "1 \cup p_{\mathrm{Y}}"] & \widehat{C}(\mathrm{Y}, y) = P\{p, Cy\}
\end{tikzcd}$$

□

Proposición V.1.5 $\widehat{p}_{(\mathrm{X},x)} = \{\overline{Cx}, p_{\nabla} \cup p_{\mathrm{X}}\} : \widehat{C}^2(\mathrm{X}, x) = P\{p, C\overline{Cx}\} \longrightarrow \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\}$.

Demostración:

$\{\overline{Cx}, p_{\nabla} \cup p_{\mathrm{X}}\} = \{\overline{Cx}, \overline{Cx}p_{\nabla}, \overline{p}p_{\mathrm{X}}\} = \{\overline{Cx}, \overline{p}p_{\mathrm{X}}\} = 1 \cup p_{\mathrm{X}} : \widehat{C}^2(\mathrm{X}, x) = P\{p^2, C^2x\} \to \widehat{C}(\mathrm{X}, x) = P\{p, Cx\}$.

□

Corolario V.1.2 $\widehat{p}\widehat{C}^n_{(\mathrm{X},x)} = 1 \cup pC^n_{\mathrm{X}} : \widehat{C}^{n+2}(\mathrm{X}, x) = P\{p^{n+2}, C^{n+2}x\} \to \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{X}, x) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}x\}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\widehat{p}\widehat{C}^n_{(\mathrm{X},x)} &= \widehat{p}_{\widehat{C}^n(\mathrm{X},x)} = \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, p_{\nabla} \cup p_{\widehat{C}^n\mathrm{X}}\} = \\
&= \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p, \overline{p}p_{\widehat{C}^n\mathrm{X}}\} = \\
&= \{\overset{(n+1}{\overline{Cx}}, \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p, \overset{(n+1}{\overline{Cx}}\ p^2, \overline{p}C\overline{p}p_{C\widehat{C}^{n-1}\mathrm{X}}\} = \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\overline{\overset{(n+1}{Cx}}, \overline{\overset{(n+1}{Cx}}\ p, \overline{\overset{(n+1}{Cx}}\ p^2, ..., \overline{\overset{(n+1}{Cx}}\ p^{n+1}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}p_{C^n\mathrm{X}}\} = \\
&= \{\overline{\overset{(n+1}{Cx}}, \overline{\overset{(n+1}{Cx}}\ p, \overline{\overset{(n+1}{Cx}}\ p^2, ..., \overline{\overset{(n+1}{Cx}}\ p^{n+1}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}pC^n_{\mathrm{X}}\} = \\
&= \{\overline{\overset{(n+1}{Cx}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}pC^n_{\mathrm{X}}\} = \\
&= 1 \cup pC^n_{\mathrm{X}}.
\end{aligned}
$$

□

Obsérvese que, como caso particular del apartado $a)$ del corolario V.1.1, $\widehat{C}^n\widehat{p}_{(\mathrm{X},x)} = 1 \cup C^n p_{\mathrm{X}} : \widehat{C}^{n+2}(\mathrm{X},x) = P\{p^{n+2}, C^{n+2}x\} \longrightarrow \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{X},x) =$ $= P\{p^{n+1}, C^{n+1}x\}$.

Proposición V.1.6 *El funtor $\widehat{C}$ junto con las transformaciones $\widehat{k}$ y $\widehat{p}$ verifican el axioma de cono en $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$.*

Demostración:

Evidente, pues $\widehat{p} = 1 \cup p$, $\widehat{p}\widehat{C} = 1 \cup pC$, $\widehat{C}\widehat{p} = 1 \cup Cp$, $\widehat{k} = 1 \cup k$, $\widehat{k}\widehat{C} = 1 \cup kC$ y $\widehat{C}\widehat{k} = 1 \cup Ck$.

□

Una vez construido el cono es necesario decir qué morfismos punteados van a ser cofibraciones adecuadas para tener una $\widehat{C}$-categoría.

Definición V.1.2 *Un morfismo $i : (\mathrm{B}, b) \to (\mathrm{A}, a)$ se dirá una cofibración cuando $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ lo sea en $\mathbf{C}$, es decir, las cofibraciones en $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ son precisamente las cofibraciones punteadas.*

Proposición V.1.7 *Dados una cofibración $i : (\mathrm{B}, b) \rightarrowtail (\mathrm{A}, a)$ y un morfismo $f : (\mathrm{B}, b) \to (\mathrm{X}, x)$, existe $P\{f, i\}$ en $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$, donde $\overline{i}$ es una cofibración.*

Demostración:

Usando el teorema I.3.2 para $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) \rightarrowtail (\mathrm{A}, a)$ y $1 \cup f : (\mathrm{B}, b) \to$ $\longrightarrow (\mathrm{X}, x)$ se tiene que $P\{f, i\} = (P\{f, i\}, x \cup a)$, con $\overline{i} : (\mathrm{X}, x) \longrightarrow$

$\to (P\{f,i\}, x \cup a)$ la inducida $\overline{i} : \mathrm{X} \rightarrowtail P\{f,i\}$ y por tanto cofibración. Obsérvese que $x \cup a : C\nabla \rightarrowtail P\{f,i\}$ es cofibración por el teorema II.1.1 al serlo i.

□

Proposición V.1.8 *$\widehat{C}$ transforma push outs cofibrados en push outs.*

Demostración:

Dado el push out

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{B}, b) \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & (\mathrm{X}, x) \arrow[d, tail, "\overline{i}"] \\
(\mathrm{A}, a) \arrow[r, "\overline{f}"] & (P\{f,i\}, x \cup a)
\end{tikzcd}$$

considerando el siguiente push out en la categoría de push outs de **C**:

$$\begin{tikzcd}
C^2\nabla \arrow[r, "p \cup p"] \arrow[d, "Cx \cup Ca"] & C\nabla \arrow[d, "\overline{Cx \cup Ca}"] \\
CP\{f,i\} \arrow[r, "\overline{p \cup p}"] & P\{p \cup p, Cx \cup Ca\}
\end{tikzcd}$$

por el teorema I.3.2 se tiene $P\{\widehat{C}f, \widehat{C}i\} = P\{1 \cup Cf, 1 \cup Ci\} = P\{p \cup p, Cx \cup$ $\cup Ca\} = \widehat{C}P\{f,i\}$, con $\overline{Cx \cup Ca} = \overline{Cx} \cup \overline{Ca}$, $\overline{p \cup p} = \overline{p} \cup \overline{p}$, $\widetilde{1 \cup Cf} = 1 \cup C\overline{f}$ y $\widetilde{1 \cup Ci} = 1 \cup C\overline{i}$.

□

Proposición V.1.9 *$1_{(\mathrm{X},x)}$ y $\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)}$ son cofibraciones, para todo objeto (X, x). La composición de cofibraciones también lo es.*

Demostración:

$\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)} = 1 \cup k_{\mathrm{X}}$ es cofibración por el teorema II.1.1, observando que x_1 es cofibración al serlo x. El resto es evidente por ser cofibraciones 1_{X} y la composición de ellas en $\mathbf{C}$.

$\square$

Proposición V.1.10 *Las cofibraciones verifican la propiedad de extensión de nulhomotopía en* $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$.

Demostración:

$\widehat{C}i = 1 \cup Ci : \widehat{C}(\mathrm{B}, B) = P\{p, Cb\} \to \widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{p, Ca\}$. Entonces, $1 \cup r :$ $: P\{p, Ca\} \to P\{p, Cb\}$ es una retracción de $\widehat{C}i$, donde r es cualquier retracción que tenga i por verificarse PEN en $\mathbf{C}$. Obsérvese que $rCa = rCiCb = Cb$.

$\square$

Proposición V.1.11 *Dada una cofibración* $i : (\mathrm{B}, b) \rightarrowtail (\mathrm{A}, a)$*, el morfismo* $i_{\widehat{1}} = \{\widehat{C}i, \widehat{k}\} : (P\{\widehat{k}, i\}, \overline{Cb} \cup a) \to (\widehat{C}\mathrm{A}, \overline{Ca})$ *es también cofibración.*

Demostración:

Por el teorema I.3.2, $P\{1 \cup k, 1 \cup i\}$ puede definirse mediante el siguiente push out

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{B}, b) \arrow[r, tail, "1 \cup k"] \arrow[d, tail, "1 \cup i"'] & \widehat{C}(\mathrm{B}, b) = (P\{p, Cb\}, \overline{Cb}) \arrow[d, tail, "\overline{1 \cup i}"] \\
(\mathrm{A}, a) \arrow[r, tail, "\overline{i \cup k}"] & (P\{p \cup 1, Cb \cup a\}, \overline{Cb} \cup a)
\end{tikzcd}$$

y se tiene $\widehat{\Sigma}^i = P\{1 \cup k, 1 \cup i\} = P\{p \cup 1, Cb \cup a\}$, con $\overline{1 \cup i} = 1 \cup \overline{i}$, $\overline{1 \cup k} = 1 \cup \overline{k}$, $\widetilde{Cb \cup a} = \overline{Cb} \cup a$ y $\widetilde{p \cup 1} = \overline{p} \cup 1$, de donde $\{\widehat{C}i, \widehat{k}\} = \{\widehat{C}i, 1 \cup k\} = \{1 \cup Ci, 1 \cup k\} =$ $= \{\overline{Ca}, \overline{p}i_1\} = 1 \cup i_1$. Esta unión existe pues $i_1(Cb \cup a) = \{CiCb, ka\} =$

$= \{Ca, Cak\} = Ca\{1,k\} = Ca(1_{C\nabla})_1 = Ca1$, y es cofibración por el teorema II.1.1 al serlo i_1 en $\mathbf{C}$.

$\square$

Teorema V.1.2 $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ *es una* $\widehat{C}$*-categoría punteada.*

Demostración:

Por el comentario posterior al teorema I.1.2, $(C\nabla, 1)$ es objeto inicial con morfismos iniciales $x : (C\nabla, 1) \rightarrowtail (\mathrm{X}, x)$, de donde cualquier objeto es cofibrante. Por otro lado, con $(\widehat{C}, \widehat{k}, \widehat{p})$ y las cofibraciones punteadas, $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ es una categoría con cono natural, pues la proposición V.1.6 es el axioma del cono, las proposiciones V.1.7 y V.1.8 dan el axioma de push out, las V.1.9 y V.1.10 el axioma de cofibración y por último la proposición V.1.11 el axioma de cono relativo. Además $\widehat{C}(C\nabla, 1) = (C\nabla, 1)$.

$\square$

Los conceptos homotópicos de la categoría punteada de una dada se van a relacionar con los respectivos de la categoría original. La relación para nulhomotopía y contráctil concluirá este párrafo, dejando lo relativo a homotopía para el siguiente.

Proposición V.1.12 *Dado* $f : (\mathrm{X}, x) \to (\mathrm{Y}, y)$ *un morfismo punteado,* f *es nulhomótopo en* $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ *si y sólo si* f *es nulhomótopo en* $\mathbf{C}$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $f : (\mathrm{X}, x) \to (\mathrm{Y}, y)$ es nulhomótopo, existe $F : (\widehat{C}\mathrm{X}, \overline{Cx}) \to (\mathrm{Y}, y)$ tal que $f = F\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)} = F\overline{p}k_{\mathrm{X}}$, de donde $F\overline{p} : f \simeq 0$.

($\Leftarrow$) Observando que $\{FCxCp, F\} : \{yp, f\} \simeq 0$, donde $F : f \simeq 0$, existe H una extensión de $\{yp, f\}$ relativa a x_1. $\{y, H\} : f \simeq 0$ en $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$.

$\square$

Corolario V.1.3 *Dado* (X, x) *un objeto punteado,* (X, x) *es contráctil en* $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ *si y sólo si* X *es contráctil en* **C**.

Demostración:

Evidente, pues por la proposición V.1.12 anterior $1_{(\mathrm{X},x)} \simeq 0$ si y sólo si $1_{\mathrm{X}} \simeq 0$.

□

V.2 Homotopía en categorías de cofibraciones bajo un cono.

La homotopía en categorías punteadas puede expresarse como homotopía generalizada en la categoría primitiva, obteniéndose de esta forma funtores de homotopía en la categoría punteada equivalentes a otros en la original. Para ello, usando teoría de push outs, se expresan las distintas construcciones homotópicas punteadas en función de las respectivas no punteadas.

Como consecuencia de lo anterior y similarmente a lo que sucede en la homotopía ordinaria de los espacios topológicos surgen conceptos como esferas, grupos de homotopía esféricos, grupo fundamental de Poincaré y sucesiones exactas de estos grupos.

Un primer paso en este proceso consiste en relacionar, haciendo uso de las cofibraciones entre push outs, el cono relativo punteado con el cono relativo original, mediante la extensión del concepto de cono de un objeto punteado a sus push outs de definición, push outs cofibrados con inducida vertical el punto base.

En general, cuando se exprese $(\mathrm{B}, b) = P\{s, j\}$ se supondrá $j : S \rightarrowtail T$. Por otro lado, una cofibración $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$ tal que

$i : \mathrm{T} \rightarrowtail \mathrm{T}'$ cofibración con $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$, $s = s'$ y $j' = ij$ se dirá cofibración de push outs.

Proposición V.2.1 *Dado un objeto punteado* $(\mathrm{X}, x) = P\{s, j\}$, *se verifica* $\widehat{C}^n(\mathrm{X}, x) = P\{p^n C^n s, C^n j\}$.

Demostración:

Basta observar la siguiente composición de push outs

$$\begin{tikzcd}
C^n\mathrm{S} \arrow[r, "C^n s"] \arrow[d, tail, "C^n j"] & C^{n+1}\nabla \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, tail, "C^n x"] & C\nabla \arrow[d, tail, "\overset{(n}{\overline{Cx}}"] \\
C^n\mathrm{T} \arrow[r, "C^n\overline{s}"] & C^n\mathrm{X} \arrow[r, "\overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}"] & \widehat{C}^n\mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que por ser $x = \overline{j}$ entonces $\overline{C^n j} = \overset{(n}{\overline{Cj}}$, que también se notará simplemente por $\overset{(n}{\overline{Cj}}$, considerando $\overline{j} = \overset{(0}{\overline{Cj}}$.

$\square$

Proposición V.2.2 *Dado un morfismo punteado* $1 \cup f : (\mathrm{X}, x) = P\{s, j\} \to$ $\longrightarrow (\mathrm{Y}, y) = P\{s', j'\}$, *se verifica* $\widehat{C}^n(1 \cup f) = 1 \cup C^n f : \widehat{C}^n(\mathrm{X}, x) =$ $= P\{p^n C^n s, C^n j\} \to \widehat{C}^n(\mathrm{Y}, y) = P\{p^n C^n s', C^n j'\}$.

Demostración:

Basta observar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & C^n\mathrm{S} \arrow[rr, "C^n s"] \arrow[dl, "C^n j"'] \arrow[dd, "C^n g"' near start] & & C^{n+1}\nabla \arrow[rr, "p^n"] \arrow[dl, "C^n x"'] \arrow[dd, tail, "1" near end] & & C\nabla \arrow[dl, "\overset{(n}{\overline{Cx}}"'] \arrow[dd, tail, "1"] \\
C^n\mathrm{T} \arrow[rr, "C^n\overline{s}" near end] \arrow[dd, "C^n f"'] & & C^n\mathrm{X} \arrow[rr, "\overline{p}C\overline{p}\ldots C^{n-1}\overline{p}" near end] \arrow[dd, "C^n(1\cup f)"' near start] & & \widehat{C}^n\mathrm{X} \arrow[dd, "\widehat{C}^n(1\cup f)"' near start] & \\
 & C^n\mathrm{S}' \arrow[rr, "C^n s'"'] \arrow[dl, "C^n j'"] & & C^{n+1}\nabla \arrow[rr, "p^n"'] \arrow[dl, "C^n y"] & & C\nabla \arrow[dl, "\overset{(n}{\overline{Cy}}"] \\
C^n\mathrm{T'} \arrow[rr, "C^n\overline{s'}"'] & & C^n\mathrm{Y} \arrow[rr, "\overline{p}C\overline{p}\ldots C^{n-1}\overline{p}"'] & & \widehat{C}^n\mathrm{Y} &
\end{tikzcd}$$

□

Proposición V.2.3 *Dado un objeto punteado* $(\mathrm{X},x)=P\{s,j\}$, $\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)}=$ $=1\cup k_{\mathrm{T}}:(\mathrm{X},x)=P\{s,j\}\rightarrowtail\widehat{C}(\mathrm{X},x)=P\{pCs,Cj\}$ *y* $\widehat{p}_{(\mathrm{X},x)}=1\cup p_{\mathrm{T}}:$ $:\widehat{C}^2(\mathrm{X},x)=P\{p^2C^2s,C^2j\}\to\widehat{C}(\mathrm{X},x)=P\{pCs,Cj\}$.

Demostración:

Basta observar

$\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)}x=\overline{p}k_{\mathrm{X}}x=\overline{p}Cxk_{C\nabla}=\overline{Cx}p_{\nabla}k_{C\nabla}=\overline{Cx}=(1\cup k_{\mathrm{T}})x.$

$\widehat{k}_{(\mathrm{X},x)}\overline{s}=\overline{p}k_{\mathrm{X}}\overline{s}=\overline{p}C\overline{s}k_{\mathrm{T}}=(1\cup k_{\mathrm{T}})\overline{s}.$

$\widehat{p}_{(\mathrm{X},x)}\overset{(2}{\overline{Cx}}=\overline{Cx}=(1\cup p_{\mathrm{T}})\overset{(2}{\overline{Cx}}.$

$\widehat{p}_{(\mathrm{X},x)}\overline{p}C\overline{p}C^2\overline{s}=(1\cup p_{\mathrm{X}})\overline{p}C\overline{p}C^2\overline{s}=\overline{p}p_{\mathrm{X}}C^2\overline{s}=\overline{p}C\overline{s}p_{\mathrm{T}}=(1\cup p_{\mathrm{T}})\overline{p}C\overline{p}C^2\overline{s}.$ □

Proposición V.2.4 *Dada* $1\cup i:(\mathrm{B},b)=P\{s,j\}\rightarrowtail(\mathrm{A},a)=P\{s',j'\}$ *cofibración de push outs,* $\widehat{\Sigma}^{1\cup i}=P\{pCs,Cj\cup j'\}$ *y* $(1\cup i)_{\widehat{1}}=1\cup i_1$.

Demostración:

Obsérvese que $pCs=pCs\cup s:\Sigma^{1_{\mathrm{S}}}\to C\nabla$.

Usando la proposición V.2.1 y el teorema I.3.2 se tiene que $\widehat{\Sigma}^{1\cup i}=$ $= P\{1\cup k, 1\cup i\} = P\{pCs, Cj\cup j'\}$. $(1\cup i)_{\widehat{1}} = \{\widehat{C}(1\cup i), \widehat{k}\} = \{1\cup Ci, 1\cup k\}$. Entonces $\{1\cup Ci, 1\cup k\}\overline{p}C\overline{s}\cup\overline{s'} = \{(1\cup Ci)\overline{p}C\overline{s}, (1\cup k)\overline{s'}\} = \{\overline{p}C\overline{s'}Ci, \overline{p}C\overline{s'}k\} =$ $= \overline{p}C\overline{s'}\{Ci, k\} = \overline{p}C\overline{s'}i_1$ y $\{1\cup Ci, 1\cup k\} \overset{(1}{\overline{Cj}} \cup \overset{(0}{\overline{Cj'}} = \{(1\cup Ci)\overset{(1}{\overline{Cj}}, (1\cup k)\overset{(0}{\overline{Cj'}}\} =$ $= \{\overset{(0}{\overline{Cj'}}, \overset{(0}{\overline{Cj'}}\} = \overset{(0}{\overline{Cj'}}$, de donde $(\widehat{1\cup i})_1 = \{\overset{(0}{\overline{Cj'}}, \overline{p}C\overline{s'}i_1\} = 1\cup i_1$, pues $pCs1 =$ $= 1pCs$ y $Cj'1 = Cj'\{1, k\} = \{Cj', Cj'k\} = \{CiCj, kj'\} = \{Ci, k\}(Cj\cup j') =$ $= i_1(Cj\cup j')$.

$\square$

Obsérvese que $(1\cup i)_{\widehat{1}} : \widehat{\Sigma}^{1\cup i} = P\{pCs, Cj\cup j'\} \rightarrowtail \widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{pCs, Cj'\}$ vuelve a ser una cofibración de push outs por el teorema II.1.1 y por tanto se puede iterar el proceso.

Teorema V.2.1 *Dada una cofibración de push outs* $1\cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail$ $\rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$, *el siguiente cuadrado es un push out*

$$\begin{tikzcd}
C^{n+1}\mathrm{S} \arrow[rrr, "p^{n+1}C^{n+1}s"] \arrow[d, tail, "\Sigma^{n+1}(j',j)"] & & & C\nabla \arrow[d, tail, "\overset{(n+1}{\overline{Cj}} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}} \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}}"'] \\
\Sigma^{i_n} \arrow[rrr, "\overline{p}C\overline{p}\ldots C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s} \cup \overline{p}C\overline{p}\ldots C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'} \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overline{p}C\overline{p}\ldots C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'}"'] & & & \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{n}}}
\end{tikzcd}$$

que transforma $(1\cup i)_{\widehat{n+1}} : \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{n}}} \to \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{A}, a) = P\{p^{n+1}C^{n+1}s, C^{n+1}j'\}$ *en* $1\cup i_{n+1} : P\{p^{n+1}C^{n+1}s, \Sigma^{n+1}(j', j)\} \to \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{A}, a) = P\{p^{n+1}C^{n+1}s, C^{n+1}j'\}$.

Demostración:

Análogamente a lo que sucedía en la proposición V.2.4 anterior,

$$p^{n+1}C^{n+1}s = p^{n+1}C^{n+1}s \cup p^nC^ns \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup p^nC^ns : C^{n+1}\mathrm{S} = \Sigma^{(1_{\mathrm{S}})_n} \to C\nabla$$

Conmutatividad:

$(\overset{(n+1}{\overline{Cj}} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}} \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}})p^{n+1}C^{n+1}s =$

$$
\begin{aligned}
&= (\overset{(n+1}{\overline{Cj}} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}} \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}})(p^{n+1}C^{n+1}s \cup p^nC^ns \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \cup p^nC^ns) = \\
&= \overset{(n+1}{\overline{Cj}}\ p^{n+1}C^{n+1}s \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}}\ p^nC^ns \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \cup \overset{(n}{\overline{Cj'}}\ p^nC^ns = \\
&= \overline{p}C\overline{p}.....C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s}C^{n+1}j \cup \overline{p}C\overline{p}.....C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'}C^nj' \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots\ldots} \\
&\quad \ldots \cup \overline{p}C\overline{p}......C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'}C^nj' = \\
&= (\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s} \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'} \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \\
&\quad \ldots \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'})(C^{n+1}j \cup C^nj' \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \cup C^nj') = \\
&= (\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s} \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'} \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \\
&\quad \ldots \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'})\Sigma^{n+1}(j',j).
\end{aligned}
$$

Push out:

Dados $f : C\nabla \to \mathrm{X}$ y $g = \{g_{n+1}, ..., g_0\} : \Sigma^{i_{n+1}} \to \mathrm{X}$ con $fp^{n+1}C^{n+1}s = g\Sigma^{n+1}(j', j)$, es decir $\{f, ..., f\}(p^{n+1}C^{n+1}s \cup p^nC^ns \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \cup p^nC^ns) = \{g_{n+1}, ..., g_0\}(C^{n+1}j \cup C^nj' \cup \overset{(n+1}{\ldots\ldots} \cup C^nj')$, se tiene:

$$\{fp^{n+1}C^{n+1}s, fp^nC^ns, \overset{(n+1}{\ldots\ldots}, fp^nC^ns\} = \{g_{n+1}C^{n+1}j, g_nC^nj', \overset{(n+1}{\ldots\ldots}, g_0C^nj'\}$$

de donde $g_{n+1}C^{n+1}j = fp^{n+1}C^{n+1}s$ y $g_iC^nj' = fp^nC^ns$, $1 \leq i \leq n$. Se puede entonces definir $\{\{f, g_{n+1}\}, \{f, g_n\}, ..., \{f, g_0\}\} : \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{n}}} \to \mathrm{X}$ que es el único morfismo solución $\{f, g_{n+1}, ..., g_0\}$.

En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
(1 \cup i)_{\widehat{n+1}} &= \{\widehat{C}^{n+1}(1 \cup i), \widehat{C}^n\widehat{k}, ..., \widehat{k}\} = \\
&= \{1 \cup C^{n+1}i, 1 \cup C^nk, ..., 1 \cup k\} = \\
&= \{\{\overset{(n+1}{\overline{Ca}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s'}C^{n+1}i\}, \{\overset{(n+1}{\overline{Ca}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s'}C^nk\}, .. \\
&\quad ..., \{\overset{(n+1}{\overline{Ca}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s'}k\}\} \approx \\
&\approx \{\overset{(n+1}{\overline{Ca}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s'}\{C^{n+1}i, C^nk, ..., k\}\} = \\
&= \{\overset{(n+1}{\overline{Ca}}, \overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s'}i_1\} = 1 \cup i_{n+1}
\end{aligned}
$$

pues $p^{n+1}C^{n+1}s1_{C^{n+1}S} = 1_{C\nabla}p^{n+1}C^{n+1}s$ y $C^{n+1}j'1_{C^{n+1}S} = C^{n+1}j'(1_S)_{n+1} =$
$= C^{n+1}j'\{C^{n+1}1_S, C^nk, ..., k\} = \{C^{n+1}j'C^{n+1}1_S, C^{n+1}j'C^nk, ..., C^{n+1}j'k\} =$
$= \{C^{n+1}iC^{n+1}j, C^nkC^nj', ..., kC^nj'\} = \{C^{n+1}i, C^nk, ..., k\}(C^{n+1}j \cup C^nj' \cup ...$
$\overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup C^nj') = i_{n+1}\Sigma^{n+1}(j', j).$

□

Para simplificar la notación se usará

$$\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s} \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'}\overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}C^n\overline{s'} = p^{n+1}\widetilde{C^{n+1}}s.$$

Corolario V.2.1 *Dada $i = 1 \cup i : (\mathrm{B}, b) \rightarrowtail (\mathrm{A}, a)$ cofibración de push outs, el siguiente cuadrado es un push out*

$$\begin{tikzcd}
C^{n+2}\nabla \arrow[r, "p^{n+1}"] \arrow[d, tail, "C^{n+1}b \cup C^na \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup C^na"'] & C\nabla \arrow[d, tail, "\overset{(n+1}{\overline{Cb}} \cup \overset{(n}{\overline{Ca}} \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overset{(n}{\overline{Ca}}"'] \\
\Sigma^{i_n} \arrow[r, "\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p} \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p} \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overline{p}C\overline{p}...C^{n-1}\overline{p}"'] & \widehat{\Sigma}^{i_{\widehat{n}}}
\end{tikzcd}$$

que transforma $i_{\widehat{n+1}} : \widehat{\Sigma}^{i_{\widehat{n}}} \to \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{A}, a) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}a\}$ *en* $1 \cup i_{n+1} :$
$: P\{p^{n+1}, C^{n+1}b \cup C^na \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup C^na\} \to \widehat{C}^{n+1}(\mathrm{A}, a) = P\{p^{n+1}, C^{n+1}a\}.$

Corolario V.2.2 *El siguiente cuadrado*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{i_n} \arrow[r, "p^{n+1}\widetilde{C^{n+1}}s"] \arrow[d, tail, "i_{n+1}"'] & \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{n}}} \arrow[d, tail, "(1\cup i)_{\widehat{n+1}}"] \\
C^{n+1}T' \arrow[r, "\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s}"] & \widehat{C}^{n+1}\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

es un push out.

Demostración:

Es evidente, por la proposición I.1.5, usando el teorema V.2.1 anterior y observando que la composición de los siguientes cuadrados

$$\begin{tikzcd}
C^{n+1}\mathrm{S} \arrow[r, "p^{n+1}C^{n+1}s"] \arrow[d, tail, "\Sigma^{n+1}(j',j)"'] & C\nabla \arrow[d, tail, "\overline{Cj}^{(n+1} \cup \overline{Cj'}^{(n} \cup \overset{(n+1}{\cdots\cdots} \cup \overline{Cj'}^{(n}"] \\
\Sigma^{i_n} \arrow[r, "p^{n+1}\widetilde{C^{n+1}}s"] \arrow[d, tail, "i_{n+1}"'] & \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{n}}} \arrow[d, tail, "(1\cup i)_{\widehat{n+1}}"] \\
C^{n+1}T' \arrow[r, "\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s}"] & \widehat{C}^{n+1}\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

coincide con la composición de push outs.

$$\begin{tikzcd}
C^{n+1}\mathrm{S} \arrow[r, "p^{n+1}C^{n+1}s"] \arrow[d, tail, "1"'] & C\nabla \arrow[d, tail, "1"] \\
C^{n+1}\mathrm{S} \arrow[r, "p^{n+1}C^{n+1}s"] \arrow[d, tail, "C^{n+1}j'"'] & C\nabla \arrow[d, tail, "\overline{Cj'}^{(n+1}"] \\
C^{n+1}T' \arrow[r, "\overline{p}C\overline{p}...C^n\overline{p}C^{n+1}\overline{s}"] & \widehat{C}^{n+1}\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

□

Los morfismos punteados considerados como morfismos de push outs, sea su dominio un push out de identificación o no, coinciden con los morfismos en **C** con dominio un push out del tipo anterior y componente vertical una cofibración.

$(\mathbf{C}^{P\{s,j\}})^{\mathbf{cof}}$ y $(\mathbf{C}^{P\{s,j\}})_{\mathbf{cof}}$ representarán las subcategorías llenas de $\mathbf{C}^{P\{s,j\}}$ cuyas componentes vertical y horizontal de los objetos, respectivamente, son cofibraciones.

Proposición V.2.5 *Dado* $(\mathrm{A},a) = P\{s,j\}$,

$$(\mathbf{C}^{COF\ C\nabla})^{P\{s,j\}} \cong (\mathbf{C}^{P\{s,j\}})^{\mathbf{cof}}$$

Demostración:

Consecuencia de la proposición I.3.4 observando que las componentes verticales de los morfismos son puntos, y por tanto cofibraciones.

□

Observando que dado un objeto de $(\mathbf{C}^{P\{s,j\}})^{\mathbf{cof}}$, $\{\sim,-\} : P\{s,j\} \to \mathrm{X}$, se tiene $\{\sim s,-\} = - : P\{1,j\} = \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ y que dada una cofibración de push outs $1 \cup i : (\mathrm{B},b) = P\{s,j\} \rightarrowtail (\mathrm{A},a) = P\{s',j'\}$ se verifica $\{j',i\} = i :$ $: P\{1,j\} = \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$,

Proposición V.2.6 *Dada una cofibración de push outs* $1 \cup i : (\mathrm{B},b) =$ $= P\{s,j\} \rightarrowtail (\mathrm{A},a) = P\{s',j'\}$, *existen equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : Hom((\mathrm{A},a),(-,\sim)) \cong Hom(\mathrm{T}',-)^{\sim s(j')}$ $(\mathbf{C}^{COF\ C\nabla} \to \mathbf{Set})$ *definida por*

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_{(\mathrm{X},x)}: & Hom((\mathrm{A},a),(\mathrm{X},x)) & \to & Hom(\mathrm{T}',\mathrm{X})^{xs(j')} \\ & 1 \cup f & \to & f \end{array}$$

b) $\varepsilon : Hom((\mathrm{A},a),(codom\ \sim,\sim))^{1\cup-(1\cup i)} \cong Hom(\mathrm{T}',codom\ \sim)^{\{\sim s,-\}(\{j',i\})}$ $((\mathbf{C}^{P\{s,j\}})^{\mathbf{cof}} \to \mathbf{Set})$ *definida por*

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_{\{x,u\}}: & Hom((\mathrm{A},a),(\mathrm{X},x))^{1\cup u(1\cup i)} & \to & Hom(\mathrm{T}',\mathrm{X})^{\{xs,u\}(\{j',i\})} \\ & 1 \cup f & \to & f \end{array}$$

Demostración:

Son equivalencias por la proposición V.2.5 anterior, y naturales pues dado un morfismo $g = 1 \cup g : (\mathrm{X},x) \to (\mathrm{Y},y)$, $g_*\varepsilon(1\cup f) = g_*(f) = gf = \varepsilon(1 \cup gf) =$ $= \varepsilon(1 \cup g)_*(1 \cup f)$.

□

Corolario V.2.3 *Dada* $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$ *cofibración de push outs y considerando* $\widehat{C}^n(\mathrm{A}, a) = P\{p^n C^n s, C^n j'\}$ *y* $\widehat{\Sigma}^{(1\cup i)}\widehat{{}_n} =$ $= P\{p^{n+1} C^{n+1} s, \Sigma^{n+1}(j', j)\}$*, la equivalencia natural* ε *induce equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : Hom(\widehat{\Sigma}^{(1\cup i)}\widehat{{}_n}, (-, \sim)) \cong Hom(\Sigma^{i_n}, -)^{\sim p^{n+1} C^{n+1} s(\Sigma^{n+1}(j', j))}$
$(\mathbf{C}^{COF\ C\nabla} \rightarrow \mathbf{Set})$

b) $\varepsilon : Hom(\widehat{C}^n(\mathrm{A}, a), (codom \sim, \sim))^{1\cup -((1\cup i)\widehat{{}_n})} \cong$
$\cong Hom(C^n \mathrm{T}', codom \sim)^{\{\sim p^n C^n s, -\}(\{C^n j', i_n\})}\ (\mathbf{C}^{P\{p^n C^n s, \Sigma^n(j', j)\}})^{\mathbf{cof}} \rightarrow \mathbf{Set})$.

La relación entre los conos relativos punteado y no punteado establecida en el teorema V.2.1 permite extender la equivalencia natural de la proposición V.2.6 a los distintos funtores de homotopía. Para ello es necesario introducir previamente la noción de push out contráctil.

Definición V.2.1 $(\mathrm{A}, a) = P\{s, j\}$ se dirá un *push out contráctil* si k_{T} tiene una retracción $q \in Hom(C\mathrm{T}, \mathrm{T})^{jq'(Cj)}$, con $q' : C\mathrm{S} \rightarrow \mathrm{S}$ tal que $sq' = pCs$.

Obsérvese que si (A,a) es un push out contráctil entonces (A,a) es un objeto contráctil, y por el corolario V.1.3 A es contráctil. También T es contráctil.

Proposición V.2.7 *Si* $(\mathrm{A}, a) = P\{s, j\}$*, entonces* $\widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{pCs, Cj\}$ *es un push out contráctil.*

Demostración:

$q = p_{\mathrm{T}}$ y $q' = p_{\mathrm{S}}$.

□

Proposición V.2.8 *Dada* $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$ *cofibración de push outs y dado* $1 \cup f : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrow (\mathrm{X}, x) = P\{s'', j''\}$ *con*

(X, x) *push out contráctil, entonces existe* $1 \cup \widetilde{f} : (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\} \to (\mathrm{X}, x) =$ $= P\{s'', j''\}$ *tal que* $(1 \cup \widetilde{f})(1 \cup i) = 1 \cup \widetilde{f}i = 1 \cup f$.

Demostración:

Sea $\widetilde{f}$ una extensión de f relativa a i y sea g el morfismo que permite definir $1 \cup f$, entonces $\widetilde{f}j' = \widetilde{f}ij = fj = j''g$. Además $s''g = s$, luego g permite también definir $1 \cup \widetilde{f}$.

$\square$

Teorema V.2.2 *Dada una cofibración de push outs* $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail$ $\rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$, *con* (A, a) *push out contráctil, la equivalencia natural* ε *induce una equivalencia natural*

$$\varepsilon : [(\mathrm{A}, a), (codom \sim, \sim)]^{1 \cup -(1 \cup i)} \cong [\mathrm{T}', codom \sim]^{\{\sim s, -\}(\{j', i\})} \; ((\mathbf{C}^{P\{s,j\}})^{\mathbf{cof}} \to \mathbf{Set})$$

Demostración:

Por el apartado $b)$ de la proposición V.2.6 basta comprobar que se conserva la homotopía.

$1 \cup f_0 \simeq 1 \cup f_1$ rel. $1 \cup i$ en $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ si y sólo si existe $1 \cup F : \widehat{C}(\mathrm{A}, a) =$ $= P\{pCs, Cj'\} \longrightarrow (\mathrm{X}, x)$ tal que $(1 \cup F)(1 \cup i)_{\widehat{1}} = (1 \cup F)(1 \cup i_1) =$ $= \{(1 \cup f_0)(1 \cup q)\widehat{C}(1 \cup i), 1 \cup f_1\} = \{(1 \cup f_0)(1 \cup q)(1 \cup Ci), 1 \cup f_1\} =$ $= \{1 \cup f_0 qCi, 1 \cup f_1\} = 1 \cup \{f_0 qCi, f_1\}$, si y sólo si $F : f_0 \simeq f_1$ rel. $\{j', i\}$ en $\mathbf{C}$, por el apartado $b)$ de la proposición V.2.6 pues si $F : f_0 \simeq f_1$ rel. $\{j', i\}$ entonces $FCj' = FCiCj = f_0 qCiCj = f_0 qCj' = f_0 j'q' = xsq' = xpCs$, por lo que existe $1 \cup F$.

La naturalidad es evidente por la proposición II.2.1

$\square$

Corolario V.2.4 *Dada una cofibración de push outs* $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail$ $\rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$, *se induce una equivalencia natural*

$$\varepsilon : [\widehat{C}^n(\mathrm{A}, a), (codom \sim, \sim)]^{1\cup -((1\cup i)_{\widehat{n}})} \cong$$
$$\cong [C^n\mathrm{T}', codom \sim]^{\{\sim p^n C^n s, -\}(\{C^n j', i_n\})} \; ((\mathbf{C}^{P\{p^n C^n s, \Sigma^n(j',j)\}})^{\mathbf{cof}} \to \mathbf{Set}).$$

Demostración:

Por la proposición V.2.4, $(1 \cup i)_{\widehat{n}} = 1 \cup i_n : \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{n-1}}} =$ $= P\{p^n C^n s, \Sigma^n(j', j)\} \rightarrowtail \widehat{C}^n(\mathrm{A}, a) = P\{p^n C^n s, C^n j'\}$ es una cofibración de push outs, con $\widehat{C}^n(\mathrm{A}, a)$ un push out contráctil por la proposición V.2.7. □

Una vez establecida la equivalencia entre los corchetes de homotopía punteado y no punteado se procede a la definición de la categoría $\mathbf{cof\ po}^{\mathbf{C}\nabla}\mathbf{C}$ para extender dicha equivalencia a los grupos de homotopía.

La categoría $\mathbf{cof\ po}^{\mathbf{C}\nabla}\mathbf{C}$ es aquella que tiene por objetos las cofibraciones de push outs definidas en la introducción de este párrafo y como morfismos los pares de morfismos de push outs que hacen conmutativo el diagrama. Los objetos de esta categoría se representarán por $1\cup \sim$. $\smile$ representará la cofibración morfismo vertical del push out dominio de $1\cup \sim$.

Teorema V.2.3 *Dada una cofibración de push outs $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail$ $\rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$ y considerando $\widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{pCs, Cj'\}$, las equivalencias naturales anteriores inducen equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1\cup i}(codom\ 1 \cup -, 1 \cup -) \cong \pi_n^{\{j',i\}}(codom\ -, -)$

$((\mathbf{C}^{COF\ C\nabla})^{\widehat{C}(A,a)} \to \mathbf{Grp})$

b) $\varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1\cup\sim}(codom\ 1 \cup -, 1 \cup -) \cong \pi_n^{\{\sim\smile, \sim\}}(codom\ -, -)$

$(((\mathbf{cof\ po}^{\mathbf{C}\nabla}\mathbf{C})^{\widehat{C}(codom\ \ (1\cup\sim))})^{op} \to \mathbf{Grp})$

Demostración:

Dado un morfismo $1 \cup f : \widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{pCs, Cj'\} \to (\mathrm{X}, x)$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\pi}_n^{1\cup i}((\mathrm{X},x),1\cup f) = [\widehat{C}^n(\mathrm{A},a),(\mathrm{X},x)]^{\{(1\cup f)\widehat{p}^{n-1}\widehat{C}(1\cup i)_{\widehat{n-1}},(1\cup f)\widehat{p}^{n-2}\}((1\cup i)_{\widehat{n}})} &= \\
= \quad & [\widehat{C}^n(\mathrm{A},a),(\mathrm{X},x)]^{\{(1\cup f)(1\cup p^{n-1})(1\cup Ci_{n-1}),(1\cup f)(1\cup p^{n-2})\}(1\cup i_n)} = \\
= \quad & [\widehat{C}^n(\mathrm{A},a),(\mathrm{X},x)]^{\{1\cup fp^{n-1}Ci_{n-1},1\cup fp^{n-2}\}(1\cup i_n)} = \\
= \quad & [\widehat{C}^n(\mathrm{A},a),(\mathrm{X},x)]^{(1\cup\{fp^{n-1}Ci_{n-1},fp^{n-2}\})(1\cup i_n)} \overset{\varepsilon}{\cong} \\
\overset{\varepsilon}{\cong} \quad & [C^n\mathrm{T}',\mathrm{X}]^{\{xp^nC^ns,\{fp^{n-1}Ci_{n-1},fp^{n-2}\}\}(\{C^nj',i_n\})} = \\
= \quad & [C^n\mathrm{T}',\mathrm{X}]^{\{fp^{n-1}C\{j',i\}_{n-1},fp^{n-2}\}(\{j',i\}_n)} = \\
= \quad & \pi_n^{\{j',i\}}(\mathrm{X},f).
\end{aligned}
$$

Obsérvese que por un procedimiento similar al de la demostración de la proposición IV.1.8 $\{C^nj',i_n\} = \{j',i\}_n$, y que por la proposición II.2.1 y el teorema II.2.3 se tiene la naturalidad en el caso b).

Para concluir la demostración basta comprobar que la equivalencia ε conserva la operación de grupo.

Ya se vio que si $1\cup i$ es cofibración de push outs $(1\cup i)_{\widehat{1}} = 1\cup i_1 : \widehat{\Sigma}^{1\cup i} = P\{pCs,\Sigma(j',j)\} \rightarrowtail \widehat{C}(\mathrm{A},a) = P\{pCs,Cj'\}$ también lo es. Entonces $1\cup i_2 = (1\cup i)_{\widehat{2}} = ((1\cup i)_{\widehat{1}})_{\widehat{1}} = ((1\cup i_1)_{\widehat{1}}) : \widehat{\Sigma}^{(1\cup i)_{\widehat{1}}} = P\{p^2C^2s,\Sigma^2(j',j)\} \rightarrowtail \widehat{C}^2(\mathrm{A},a) = P\{p^2C^2s,C^2j'\}$ es cofibración de push outs.

$P\{(1\cup i)_{\widehat{1}},(1\cup i)_{\widehat{1}}\} = P\{pCs,Cj'\cup Cj'\}$ por el teorema I.3.2, de donde $\widehat{C}P\{(1\cup i)_{\widehat{1}},(1\cup i)_{\widehat{1}}\} = P\{p^2C^2s,C^2j'\cup C^2j'\}$.

$\widehat{k}\widehat{p}\widehat{C}(1\cup i)_{\widehat{1}}\cup\widehat{k} = (1\cup k)(1\cup p)(1\cup Ci_1)\cup(1\cup k) = 1\cup(kpCi_1\cup k)$, tiene por codominio $\widehat{C}P\{(1\cup i)_{\widehat{1}},(1\cup i)_{\widehat{1}}\}$, que es contráctil por la proposición V.2.7 y donde el morfismo que permite la unión es $kp : C^2\mathrm{S}\to C^2\mathrm{S}$. Al ser $(1\cup i)_{\widehat{2}}$ una cofibración de push outs, por la proposición V.2.8 existe una extensión $1\cup\mu$ de dicho morfismo relativa a esta cofibración, es decir, $(1\cup\mu)(1\cup i)_{\widehat{2}} = (1\cup\mu)(1\cup i_2) = 1\cup\mu i_2 = 1\cup(kpCi_1\cup k)$, y por la independencia de la operación respecto a la extensión (proposición III.1.11) μ hace que ésta se conserve. $\square$

La equivalencia natural anteriormente establecida sigue siendo válida cuando el morfismo base es el "cero". Para analizar este caso hay que hacer uso de objetos punteados basados.

Por la observación III.2.2, todo objeto punteado (A, a) tiene al menos un morfismo base $a' : (\mathrm{A}, a) \to (C\nabla, 1)$. Si $(\mathrm{A}, a) = P\{s, j\}$, un morfismo a' tal que $a'j = s$ induce un morfismo base $1 \cup a' : (\mathrm{A}, a) = P\{s, j\} \to (C\nabla, 1)$. Por abuso de lenguaje, pues en el caso del push out de identificación $a' = 1 \cup a'$, se dirá que a' es el morfismo base de $(\mathrm{A}, a) = P\{s, j\}$.

Proposición V.2.9 *Dado* $(\mathrm{A}, a) = P\{s, j\}$ *basado en* a'*, entonces* $0 = 1 \cup \cup xa' : (\mathrm{A}, a) = P\{s, j\} \to (\mathrm{X}, x)$*. En particular en el caso de push outs de identificación* $0 = xa' : (\mathrm{A}, a) \to (\mathrm{X}, x)$*.*

Proposición V.2.10 *Una cofibración de push outs* $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$*, con* b' *y* a' *respectivos morfismos base de* $(\mathrm{B}, b) = P\{s, j\}$ *y* $(\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$*, es basada si y sólo si* $a'i = b'$*.*

Proposición V.2.11 *Dada una cofibración de push outs basada* $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$*, la equivalencia natural* ε *induce una equivalencia natural*

$$\varepsilon : \hat{\pi}_n^{1\cup\sim}(-, \approx) \cong \pi_n^{\{\sim\smile,\sim\}}(-, \approx p(Ca')) \ (((\mathbf{cof}\,\mathbf{C}^{COF\ C\nabla})^{\mathbf{op}}_{1_{(C\nabla,1)}} \times \mathbf{C}^{COF\ C\nabla}) \to \mathbf{Grp})$$

Demostración:

Obsérvese que si a' es base de $(\mathrm{A}, a) = P\{s, j'\}$ entonces $p(Ca')$ es base de $\widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{pCs, Cj'\}$.

$\square$

Proposición V.2.12 *La equivalencia natural* ε *induce una equivalencia natural*

$$\varepsilon : \hat{\pi}_n^{(-,\sim)}(=, \approx) \cong \pi_n^{\sim}(=, \approx p(C \sim')) \ (((\mathbf{C}^{COF\ C\nabla})^{\mathbf{op}}_{(C\nabla,1)} \times \mathbf{C}^{COF\ C\nabla}) \to \mathbf{Grp})$$

La relación existente entre la categoría de pares **cof C** y la categoría **cof** $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ es similar a la existente entre **C** y $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ sin más que observar que **cof** $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla} \cong (\mathbf{cof\ C})^{COF\ C1_\nabla}$.

En este sentido se tiene que los objetos de la categoría se pueden identificar con push outs de **cof C** $f = 1 \cup f : (\mathrm{X}, x) \rightarrowtail (\mathrm{Y}, y)$, pero también estos objetos pueden llevar asociado un push out con componente vertical $1_{C\nabla}$, no necesariamente de identificación: $1 \cup f : (\mathrm{X}, x) = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{Y}, y) = P\{s', j'\}$. Como en el caso simple, cuando $1 \cup f$ tiene asociados push outs de identificación se puede hablar de grupos de homotopía del par $1 \cup f$.

Las cofibraciones de pares de push outs serán de la forma $1_{1_{C\nabla}} \cup (i', i) = = (1_{C\nabla}, 1_{C\nabla}) \cup (i', i) : 1 \cup f_0 \rightarrowtail 1 \cup f_1$, con $1 \cup f_t : (\mathrm{X}_t, x_t) = P\{s_t, j_t\} \rightarrowtail \rightarrowtail (\mathrm{Y}_t, y_t) = P\{s'_t, j'_t\}$, $t = 0, 1$, $(i', i) : f_0 \rightarrowtail f_1$ cofibración de pares, $f'_0 = f'_1$ (donde f'_t es el morfismo que permite crear $1 \cup f_t$), $(s'_0, s_0) = (s'_1, s_1)$, $i'j'_0 = j'_1$ e $ij_0 = j_1$. De donde se tiene que $1 \cup i : (\mathrm{X}_0, x_0) = P\{s_0, j_0\} \rightarrowtail (\mathrm{X}_1, x_1) = = P\{s_1, j_1\}$ y $1 \cup i' : (\mathrm{Y}_0, y_0) = P\{s'_0, j'_0\} \rightarrowtail (\mathrm{Y}_1, y_1) = P\{s'_1, j'_1\}$ son cofibraciones de push outs. Obsérvese que $\{1 \cup f_1, 1 \cup i'\} = 1 \cup \{f_1, i'\} : P\{1 \cup i, 1 \cup f_0\} = = P\{s'_0, j_1 \cup j'_0\} \rightarrowtail (\mathrm{Y}_1, y_1) = P\{s'_1, j'_1\}$ cofibración de push outs y por tanto cofibración.

Aplicando los resultados obtenidos en $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ a este caso resultan equivalencias naturales, que se expresarán entre los funtores adecuados sin hacer mención de las categorías involucradas, pues son fáciles de deducir por analogía y en cambio su notación es compleja.

Teorema V.2.4 *Dada una cofibración de push outs* $1 \cup (i', i) : 1 \cup f_0 \rightarrowtail 1 \cup f_1$, *y considerando* $\widehat{C}(1 \cup f_1) = 1 \cup Cf_1 : \widehat{C}(\mathrm{X}_1, x_1) = P\{pCs_1, Cj_1\} \rightarrowtail \widehat{C}(\mathrm{Y}_1, y_1) = = P\{pCs'_1, Cj'_1\}$, *se inducen equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1 \cup (i', i)}(codom\ (1 \cup -', 1 \cup -), (1 \cup -', 1 \cup -)) \cong$

$$\cong \pi_n^{(\{j_1', i'\}, \{j_1, i\})}(codom\ (-', -), (-', -))$$

b) $\varepsilon : \widehat{\pi}_n^{1\cup(\sim', \sim)}(codom\ (1 \cup -', 1 \cup -), (1 \cup -', 1 \cup -)) \cong$

$$\cong \pi_n^{(\{\sim'\smile', \sim'\}, \{\sim\smile, \sim\})}(codom\ (-', -), (-', -))$$

Como consecuencia de este teorema resulta, para los funtores grupos de homotopía relativos a una cofibración de un par basado en un morfismo

Teorema V.2.5 *Se inducen equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : \widehat{\pi}_{n+1}^{1\cup i}(1 \cup -, 1 \cup \vee) \cong \pi_{n+1}^{\{j_1', i\}}(-, \vee)$

b) $\varepsilon : \widehat{\pi}_{n+1}^{1\cup\sim}(1 \cup -, 1 \cup \vee) \cong \pi_{n+1}^{\{\sim\smile, \sim\}}(-, \vee)$

Demostración:

Si $1 \cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\}$ es una cofibración de push outs, entonces $(1 \cup Ci, 1 \cup i) = 1 \cup (Ci, i) : 1 \cup k \rightarrowtail 1 \cup k$ es una cofibración de pares, pues $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$ y $s' = s$, de donde $C\mathrm{S}' = C\mathrm{S}$ y $pCs' = pCs$. Además $1 \cup k : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail \widehat{C}(\mathrm{B}, b) = P\{pCs, Cj\}$ y $1 \cup k : (\mathrm{A}, a) = P\{s', j'\} \rightarrowtail$ $\rightarrowtail \widehat{C}(\mathrm{A}, a) = P\{pCs, Cj'\}$ existen por $k_{\mathrm{S}} : \mathrm{S} \rightarrowtail C\mathrm{S}$, y (Ci, i) es cofibración de pares al ser i e $i_1 = \{Ci, k\}$ cofibraciones. De donde se concluye que $(1 \cup Ci, 1 \cup i)$ es cofibración de pares push outs.

Aplicando el teorema V.2.4 anterior y la definición IV.2.1 de grupo de homotopía relativo a una cofibración de un par basado en un morfismo se concluye el resultado.

□

Combinando el teorema V.2.5 anterior con el teorema V.2.3 se obtienen equivalencias naturales entre sucesiones exactas, observando que un morfismo de pares $(1 \cup f, 1 \cup g) : 1 \cup f_0 \to 1 \cup f_1$ es tal que $(1 \cup f, 1 \cup g) = 1 \cup (f, g)$

Teorema V.2.6 *Existen equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : \widehat{\pi}^{1\cup i}(1\cup -, 1\cup \vee) \cong \pi^{\{j',i\}}(-, \vee)$

b) $\varepsilon : \widehat{\pi}(1\cup \sim, 1\cup -, 1\cup \vee) \cong \pi(\{\sim\smile, \sim\}, -, \vee)$

Para una cofibración de push outs basada $1\cup i : (\mathrm{B}, b) = P\{s, j\} \rightarrowtail (\mathrm{A}, a) =$ $= P\{s', j'\}$ con b' y a' respectivos morfismos base de (B, b) y (A, a), usando la proposición V.2.11

Teorema V.2.7 *Existen equivalencias naturales*

a) $\varepsilon : \widehat{\pi}^{1\cup i}(1\cup -) \cong \pi^{\{j',i\}}(-, \vee pCa')$

b) $\varepsilon : \widehat{\pi}(1\cup \sim, 1\cup -) \cong \pi(\{\sim\smile, \sim\}, -, \vee pCa')$

donde dom $(1\cup -) = (\approx, \vee)$ *push out de identificación.*

Para objetos punteados basados, usando la proposición V.2.12

Teorema V.2.8 *Existe una equivalencia natural*

$\varepsilon : \widehat{\pi}((\approx, \sim), (1\cup -)) \cong \pi(\sim, -, \vee pC \sim')$

donde dom $(1\cup -) = (=, \vee)$ *push out de identificación.*

A semejanza de lo que sucede en la categoría de los espacios topológicos punteados, a partir de un punto se pueden crear las sucesivas esferas como suspensiones de S^0.

$\Sigma^{k\triangledown}$ es un objeto punteado basado con punto $\overline{k}$ y base $\{1, 1\} : \Sigma^{k\triangledown} \to C\nabla$.

Definición V.2.2 A $\widehat{S}^n(\Sigma^{k\triangledown}, \overline{k})$ se le denominará *n-esfera* y se le notará por $\Sigma^n\nabla$, $n \in I\!N^*$.

Los grupos de homotopía esféricos de los espacios topológicos punteados se definen por $\pi_n(\mathrm{X},x) = \pi_n^{S^0}(\mathrm{X},x)$, de donde por similitud

Definición V.2.3 *Dado un objeto punteado* (X,x)*, se define el n-grupo esférico de homotopía* $\pi_n^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X},x) = \widehat{\pi}_n^{(\Sigma^0\nabla,\overline{k})}(\mathrm{X},x)$.

Proposición V.2.13 $\pi_n^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X},x) \cong \pi_n^{k\triangledown}(\mathrm{X},x)$*, para* $n \geq 2$.

Demostración:

$\pi_n^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X},x) = \widehat{\pi}_n^{(\Sigma^0\nabla,\overline{k})}(\mathrm{X},x) \overset{\varepsilon}{\cong} \pi_n^{\overline{k}}(\mathrm{X},\{xp,xp\}) \cong$ (Teorema III.2.2) $\cong$
$\cong \pi_n^{k\triangledown}(\mathrm{X},x)$.

□

Observación V.2.1 La anterior proposición V.2.13 y la observación III.1.4 permiten extender la definición de los grupos de homotopía esféricos para $n = 1$ y x no necesariamente cofibración:

$$\pi_n^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X},x) = \pi_n^{k\triangledown}(\mathrm{X},x), \quad n \geq 1$$

En particular, si la categoría **C** tiene objeto inicial ϕ se puede considerar como punto $C\phi$. En este caso a $\Sigma^n\phi$ se le denominará n-esfera standard en **C** y se notará por S^n y a $\pi_n^{\Sigma^0\phi}(\mathrm{X},x)$ se le denominará n-grupo de homotopía standard del objeto punteado (X,x) y se notará simplemente por $\pi_n(\mathrm{X},x)$. A $\pi_1(\mathrm{X},x)$ también se le denomina grupo fundamental de Poincaré del objeto X con punto distinguido x.

Dados dos objetos X, Y de **C**, *cof* (X,Y) representará el conjunto de cofibraciones con dominio X y codominio Y.

Obsérvese que *cof* $(C\nabla,\mathrm{X})$ es el conjunto de puntos del objeto X.

Definición V.2.4 Dados dos puntos x, x' de X, un *camino de x a x'* es un morfismo $\alpha : C^2\nabla \to \mathrm{X}$ tal que $\alpha k_1 = \{x, x'\}$.

Nótese que $x \simeq x'$ rel k_∇ si y sólo si existe un camino de x a x', y que por tanto la relación "estar ligados por caminos", entre puntos de X, es una relación de equivalencia cuyas clases se denominan *componentes conexas por caminos de* X.

Definición V.2.5 Un objeto X se dirá *conexo por caminos* si tiene una única componente conexa por caminos.

Obsérvese que si X es conexo por caminos entonces $Hom(C\nabla, \mathrm{X}) = $ $= Hom(C\nabla, \mathrm{X})^{xk(k)}$, para todo punto x. Si $\nabla = \phi$ objeto inicial de **C**, siempre $Hom(C\phi, \mathrm{X}) = Hom(C\phi, \mathrm{X})^{\phi_X(\phi_{C\phi})}$.

Teorema V.2.9 *Dados dos puntos x y x' de un objeto* X*, todo camino α de x en x' induce un isomorfismo $\Lambda_\alpha : \pi_1^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X}, x) \to \pi_1^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X}, x')$.*

Demostración:

Consecuencia inmediata del apartado a) del teorema III.1.3 observando que $\pi_1^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X}, x) = H_k(x, x)$ y $\pi_1^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X}, x') = H_k(x', x')$.

□

El teorema V.2.9 anterior permite, para los objetos conexos por caminos, hablar simplemente del grupo fundamental $\pi_1^{\Sigma^0\nabla}(\mathrm{X})$, al ser independiente del punto fijado. En particular, para este caso, el grupo fundamental standard se notará por $\pi_1(\mathrm{X})$.

Capítulo VI

Teoría dual y ejemplos.

La teoría de homotopía cónica desarrollada en los cuatro capítulos precedentes tiene una dualización que da origen a una axiomática de la cual existen ejemplos bastante conocidos, como son la homotopía proyectiva para R-módulos [E] [Hi1], [Hi2] la homotopía de complejos de cadena [K3] y la homotopía de los espacios topológicos punteados a través de caminos punteados.

Como su dual, esta teoría se puede desarrollar tomando como referencia la homotopía ordinaria de los espacios topológicos. Un cono se obtiene mediante el push out de la inclusión en el nivel cero de un espacio en su cilindro con la proyección de este espacio en el objeto final. El proceso dual da que el pull back, de la proyección punto inicial desde el cocilindro de un espacio (caminos) sobre éste con la inclusión del objeto inicial en dicho espacio, es siempre el objeto inicial. Por ello se ha preferido denominar a los conceptos duales que van a intervenir anteponiendo el prefijo "co": cocilindro, cocono, cosuspensión, etc., excepto en el caso de "cofibración" que será "fibración" pues este concepto sí es el dual en el caso de **Top** desde el punto de vista cilindro-caminos (ver [B2]), en lugar de otros nombres no tan genéricos usados en determinados casos.

Procesos teóricos a partir de otras estructuras axiomáticas que dan origen a homotopía, así como relaciones categóricas y funtoriales entre éstas, permiten obtener ejemplos de homotopía cónica o cocónica.

Por último se verán ejemplos conocidos de homotopías que resultan ser cónicas o cocónicas, y también se crearán nuevos ejemplos de las mismas. Cabe destacar entre las ya conocidas la clásica de los espacios topológicos y los espacios topológicos punteados, las homotopías proyectivas e inyectivas [Hi2] y los complejos de cadena [K3]. Por su curiosidad y vigencia merece especial consideración la homotopía propia a través de los espacios exteriores [G-].

VI.1 Teoría de homotopía con un cocono natural. C'-categorías.

El proceso de dualización de una teoría axiomática es fácilmente realizable, como ya se ha visto en el Capítulo I. Por ello, aquí se destacan, sin demostración, los principales conceptos y resultados duales de los vistos en los capítulos precedentes para, posteriormente, hacer referencia a los mismos.

Definición VI.1.1 Una *C'-categoría,* o *categoría con cocono natural* es una categoría $\mathbf{C}$, con un funtor $C' : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ denominado cocono, transformaciones naturales $k' : C' \to 1$ y $p' : C' \to C'^2$, y un subconjunto de morfismos fib, llamados fibraciones y representados por "$\twoheadrightarrow$", verificando los axiomas $(C'1)$, $(C'2)$, $(C'3)$ y $(C'4)$.

$(C'1)$ Axioma de cocono.

$(k'C')p' = (C'k')p' = 1C' \quad \text{y} \quad (p'C')p' = (C'p')p'.$

(C'2) Axioma de pull back.

Para una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, siempre existe el siguiente pull back

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P} < f, q > \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{q}"] & \mathrm{A} \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{q}$ es también una fibración. Además el funtor C' transforma pull backs fibrados en pull backs: $C'(P < f, q >) = P < C'f, C'q >$.

(C'3) Axioma de fibración.

Para todo objeto X, 1_X y k'_X son fibraciones. La composición de fibraciones es fibración. Además, toda fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ tiene una sección s para su cocono ($C'qs = 1$). A esto último se le denomina propiedad de levantamiento (o elevación) de nulhomotopía (PLN).

(C'4) Axioma de cocono relativo.

Para una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, el morfismo $q_1 =< C'q, k' >$, definido por el siguiente pull back, es una fibración:

$$\begin{tikzcd}
C'\mathrm{A} \arrow[dr, "q_1"] \arrow[drr, bend left, "k'"] \arrow[ddr, bend right, "C'q"'] & & \\
& \Sigma'_q \arrow[r, "\overline{k'}"] \arrow[d, "\overline{q}"] & \mathrm{A} \arrow[d, "q"] \\
& C'\mathrm{B} \arrow[r, "k'"'] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

Los isomorfismos y el cocono de toda fibración son fibraciones. Asimismo el cocono de un pull back fibrado es también un pull back fibrado.

Proposición VI.1.1 *Dado el siguiente cubo conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{P}<f',g'> \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\alpha\cap\beta"] & & Z' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dd, "\beta"] \\
Y' \arrow[rr, "f'", crossing over] \arrow[dd, "\alpha"'] & & X' & \\
& \mathrm{P}<f,g> \arrow[rr] \arrow[dl] & & Z \arrow[dl, "g"] \\
Y \arrow[rr, "f"] & & X \arrow[from=uu, "\gamma", crossing over] &
\end{tikzcd}$$

donde las caras superior e inferior son pull backs.

Si $<\beta,g'>$: $\mathrm{Z}' \to \mathrm{P} < g,\gamma >$ *o* $<\alpha,f'>$: $\mathrm{Y}' \to \mathrm{P} < f,\gamma >$ *son fibraciones, entonces* $\alpha\cap\beta$ *también lo es.*

Definición VI.1.2 Dada una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, todo morfismo $\tilde{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$ tal que $q\tilde{f} = f$ se denomina una *elevación de f relativa a la fibración q.* El conjunto de elevaciones de f relativas a q se notará $Hom(\mathrm{X},\mathrm{A})_{f(q)}$.

Definición VI.1.3 Un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ se dice *nulhomótopo* ($f \simeq 0$), cuando tiene una elevación relativa a k', es decir, cuando $Hom(\mathrm{X}, C'\mathrm{Y})_{f(k')} \neq$ $\neq \phi$.

Se usará la misma notación que en las construcciones cono para nulhomotopías y objetos contráctiles, los cuales mantienen la misma definición. También se tiene que un morfismo es nulhomótopo si y sólo si se factoriza a través de un objeto contráctil, y que la composición de un morfismo con otro nulhomótopo es nulhomótopa.

Proposición VI.1.2 *Dado un morfismo $q : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ son equivalentes:*

a) q verifica PLN.

b) Todo morfismo nulhomótopo tiene una elevación nulhomótopa relativa a q.

c) Todo morfismo nulhomótopo tiene una elevación relativa a q.

d) k' tiene una elevación relativa a q.

$Hom(\mathrm{X}, \mathrm{A})_{f(q)} \neq \phi$, para todo objeto contráctil X y todo morfismo $f :$ $: \mathrm{X} \to \mathrm{B}$. Además, si existe objeto 0 en una C'-categoría, es contráctil.

Definiendo fibración contráctil como aquella con dominio y codominio contráctiles se tiene que, para toda cofibración contráctil $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, Σ'_q y q_1 son contráctiles y $Hom(\mathrm{X}, \mathrm{A})_{f(q)} \neq \phi$ para todo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$. También todo pull back de fibraciones contráctiles es contráctil.

Definición VI.1.4 Una *C'-categoría con todas las fibraciones* es una C'-categoría en la cual el conjunto de fibraciones viene definido por la propiedad de elevación de nulhomotopía.

Proposición VI.1.3 *Una C'-categoría con todas las fibraciones es una categoría $\mathbf{C}$, con un funtor $C' : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, transformaciones naturales $k' : C' \to 1$ y $p' : C' \to C'^2$, donde los morfismos que cumplen PLN se denominan fibraciones y se verifican los axiomas $(C'1)$, $(C'2)'$ y $(C'4)$, donde:*

$(C'2)$' Axioma de pull back.

Para una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$, siempre existe el siguiente pull back:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P} < f, q > \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{q}"] & A \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Además el funtor C' transforma pull backs fibrados en pull backs.

Definición VI.1.5 Un objeto X de una C'-categoría **C**, con objeto final ε, se dirá *ε-fibrante* o simplemente *fibrante* cuando $\varepsilon_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \twoheadrightarrow \varepsilon$ es fibración.

En una C'-categoría con todos sus objetos fibrantes, se puede suprimir en el axioma $(C'3)$: "Para todo objeto X, 1_X y k'_X son fibraciones". Por otro lado $Hom(C'\varepsilon, \mathrm{A})_{k'_\varepsilon(\varepsilon_{\mathrm{A}})} \neq \phi$, para todo objeto A.

Definición VI.1.6 Una *C'-categoría punteada* es una C'-categoría con todos sus objetos fibrantes y tal que el cocono del objeto final coincida con él. El producto de dos objetos X e Y se notará en este caso $\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}$.

El producto de fibraciones es fibración y el producto de objetos contráctiles es contráctil.

Definición VI.1.7 Dada $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ fibración, con A contráctil, y dados $f_0, f_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$, se dirá que *$f_0$ es homótopo a f_1 relativo a q* cuando exista una elevación H de $< C'qsf_0, f_1 >$ relativa a q_1, donde $k'_{\mathrm{A}}s = 1_{\mathrm{A}}$.

Proposición VI.1.4 *Ser homótopo rel. q es una relación de equivalencia.*

Demostración:

Dualmente al teorema II.2.1, por PLN existe una elevación μ' de $C'qsk' \cap \cap k' = (C'qs \cap 1)k' : C'(\mathrm{P} < q, q >) \twoheadrightarrow \mathrm{P} < q, q > \to \Sigma'_q$ relativa a q_1, con $k'_{\mathrm{A}}s = 1_{\mathrm{A}}$. $\square$

De forma dual a lo hecho con cofibraciones se definen los corchetes de homotopía relativos a fibraciones con dominio contráctil por

$$[\mathrm{X},\mathrm{A}]_{u(q)} = Hom(\mathrm{X},\mathrm{A})_{u(q)}/\simeq$$

y los referidos a objetos contráctiles, por

$$[\mathrm{X},\mathrm{A}] = [\mathrm{X},\mathrm{A}]_{\varepsilon_{\mathrm{X}}(\varepsilon_{\mathrm{A}})}$$

En este sentido, si X ó $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ son contráctiles, $[\mathrm{X},\mathrm{A}]_{u(q)}$ es un conjunto unitario. Si la categoría es punteada, $[\mathrm{X},\mathrm{A}]$ es siempre unitario.

Proposición VI.1.5 $[dom\ -,\mathrm{A}]_{-\ (q)} : (\mathbf{C}_{\mathrm{B}})^{\mathbf{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *es un funtor tal que* $[dom\ -,\mathrm{A}]_{-\ (q)}(h) = h^*$*, donde* $h : u \to v$ *en* $(\mathbf{C}_{\mathrm{B}})^{\mathbf{op}}$

En categorías punteadas, análogamente a lo que sucede en otras homotopías, un corchete de homotopía relativa con un producto en la segunda componente es equivalente a un producto de corchetes.

La homotopía relativa a q es independiente de la sección para la transformación natural k', haciendo de esta forma que $k'_* : [dom\ -, C'\mathrm{A}]_{-\ (qk')} \cong$ $\cong [dom\ -,\mathrm{A}]_{-\ (q)}$ $((\mathbf{C}_{\mathrm{B}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set})$ sea una equivalencia natural.

Proposición VI.1.6 *Dado el siguiente cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & \mathrm{A'} \arrow[d, "q'"] \\ \mathrm{B} \arrow[r, "h"] & \mathrm{B'} \end{tikzcd}$$

con q, q' *fibraciones y* A, A' *objetos contráctiles.*

a) $g_* : [dom\, -, \mathrm{A}]_{-\ (q)} \to [dom\, -, \mathrm{A}']_{h-\ (q')}$ $((\mathbf{C}_{\mathrm{B}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set})$ *es una transformación natural.*

b) *Si el cuadrado es un pull back, entonces g_* es una equivalencia natural.*

Definición VI.1.8 Un objeto A de una C'-categoría se dice *contráctil fundamental* cuando es contráctil y posee una sección s para k'_{A} haciendo conmutativo $p's = C'ss$. Una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ se dirá *fundamental* cuando A sea un contráctil fundamental.

Obsérvese que el cocono de cualquier objeto es siempre un contráctil fundamental.

Definición VI.1.9 Dados $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ fibración y $f_0, f_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{A}$, se define

$$H^q(f_0, f_1) = [\mathrm{X}, C'\mathrm{A}]_{<C'qsf_0, f_1>(q_1)}$$

Obviamente si X ó q es contráctil y $qf_0 = qf_1$ entonces $H^q(f_0, f_1)$ es un conjunto unitario.

Proposición VI.1.7 $\mu'_* : H^q(-, \sim) \to [dom\, -, C'(\mathrm{P} < q, q >)]_{<-,\sim>(k')}$ $((\mathbf{C}_{\mathrm{P}<q,q>})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set})$ *es una equivalencia natural.*

Teorema VI.1.1 $\mathbf{H}^q\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$*, con conjunto de objetos* $Hom(\mathrm{X}, \mathrm{A})$*,* $Hom(f_0, f_1) = $ $= H^q(f_0, f_1)$*,* $1_{f_0} = [sf_0]$*,* $\overline{[F]} = [\overline{F}] = [\mu' < F, sf_0 >]$ *y* $[F] * [G] = [F * G] = $ $= [\mu' < \mu' < F, sf_0 >, G >]$*, donde* $[F] \in H^q(f_0, f_1)$ *y* $[G] \in H^q(f_1, f_2)$*, es un grupoide.*

El grupoide anterior es independiente de la elevación μ', pues distintas elevaciones dan grupoides isomorfos. Además, como sucede en muchas homotopías, toda $H : f \simeq g$ rel. q induce un isomorfismo $\Lambda'_H : H^q(f, f) \to H^q(g, g)$.

Iterando el axioma de cocono relativo se obtienen fibraciones q_n, $n \in I\!N^*$, a partir de una fibración dada q.

Se definen dualmente las categorías **fib C**, **fibf C** y $\mathbf{fib}^{C'}$ **C**. Asimismo, si **A** representa una de las categorías anteriores también se puede definir $\mathbf{A}_{P<-_n,-_m>}$, $n, m \in I\!N^* \cup \{-1\}$, $(n,m) \neq (-1,-1)$, resultando si $n = -1$ $\mathbf{A}_{dom\ -_m}$ y si $m = -1$ $\mathbf{A}_{dom\ -_n}$.

Los morfismos entre fibraciones son pares $(g,h) : q \to q'$ tales que $q'g = hq$.

Definición VI.1.10 Un morfismo (g,h) en cualquiera de las anteriores categorías de fibraciones se denomina *morfismo pull back* si el siguiente cuadrado lo es:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ \downarrow q & & \downarrow q' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

Las categorías $(\mathbf{A} \times \mathbf{A})_{P<-_n,-_m> \wedge P<-_{n'},-_{m'}>}$ se definen de forma dual a lo hecho con cono.

De esta forma $\Sigma'^n : \mathbf{fib\ C} \to \mathbf{C}$, y $\Sigma'^n(k') : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, son funtores.

Proposición VI.1.8 *$Q_n : \mathbf{fib\ C} \longrightarrow \mathbf{fib}^{C'}\ \mathbf{C}$, definido por $Q_n(q) = (q_n, p')$ $Q_n(g,h) = (C'^n g, \Sigma'^n(g,h))$, es un funtor que transforma morfismos pull back en morfismos pull back, para todo $n \in I\!N$.*

Como consecuencia de esta proposición se tiene que $k'_n : C'^{n+1} \to \Sigma'^n(k')$ $(\mathbf{C} \to \mathbf{C})$ es una transformación natural.

Proposición VI.1.9

a) $\mathbf{H}^{-_n}\mathbf{C}^{\sim} : \mathbf{fib\ C} \times \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Cat}$

b) $\mathbf{H}^{-_n\wedge -'_m}\mathbf{C}^{\sim} : \mathbf{fib\ C} \times \mathbf{fib\ C} \times \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Cat}$

c) $H^q(-,\sim) : (\mathbf{C}_{\mathrm{P}<q,q>})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$

d) $H^q(-,-) : (\mathbf{C}_{dom\ q})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$

e) $H^{q\wedge q'}(<-,-'>,<\sim,\sim'>) : (\mathbf{C}_{P<q,q>\wedge P<q',q'>})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$

f) $H_{q\wedge q'}(<-,-'>,<-,-'>) : (\mathbf{C}_{dom\ q\wedge\ q'})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$

g) $H^{-_n}(\sim,\sim') : (\mathbf{fib\ C})_{\mathrm{P}<-_n,-_n>} \to \mathbf{Set}$

h) $H^{-_n}(\sim,\sim) : (\mathbf{fib\ C})_{dom\ -_n} \to \mathbf{Grp}$

i) $H^{-_n\wedge -'_m}(<\sim,\sim'>,<\approx,\approx'>) : (\mathbf{fib\ C} \times \mathbf{fib\ C})_{P<-_n,-_n>\wedge<-'_m,-'_m>} \to \mathbf{Set}$

j) $H^{-_n\wedge -'_m}(<\sim,\sim'>,<\sim,\sim'>) : (\mathbf{fib\ C} \times \mathbf{fib\ C})_{dom\ -_n\wedge dom\ -'_m} \to \mathbf{Grp}$

son funtores.

Proposición VI.1.10 *Existen equivalencias naturales*

a) $H^{-_n\wedge -'_m}\mathbf{C}^{\sim} \cong H^{-_n}\mathbf{C}^{\sim} \times H^{-'_m}\mathbf{C}^{\sim}$

b) $H^{-_n\wedge -'_m}(<\sim,\sim'>,<\approx,\approx'>) \cong H^{-_n}(\sim,\approx) \times H^{-'_m}(\sim',\approx')$

c) $H^{-_n\wedge -'_m}(<\sim,\sim'>,<\sim,\sim'>) \cong H^{-_n}(\sim,\sim) \times H^{-'_m}(\sim',\sim')$

Homotopía relativa a fibraciones con dominio no contráctil.

El funtor de iteración Q_n y el hecho de que los funtores de homotopía transforman morfismos pull back en isomorfismos permiten extender la homotopía relativa a fibraciones con dominio no contráctil:

Dado el pull back

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & \mathrm{A'} \arrow[d, "q'"] \\
\mathrm{B} \arrow[r, "h"] & \mathrm{B'}
\end{tikzcd}
$$

con q' fibración, $q = \overline{q'}$ y $g = \overline{h}$, se dirá que $f_0 \simeq f_1$ rel. q si y sólo si $gf_0 \simeq gf_1$ rel. q'. Esta equivalencia permite definir homotopía relativa a una fibración si existe homotopía relativa a la otra, obteniéndose como consecuencia obvia un isomorfismo entre $[\mathrm{X}, \mathrm{A}]_{qf_0(q)}$ y $[\mathrm{X}, \mathrm{A}']_{hqf_0(q')}$.

Teorema VI.1.2 *Dada $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ fibración fundamental existen equivalencias naturales*

a) $(C'^n k')_* : H^{(qk')_{n-1}}(C'^{n-1}s-, C'^{n-1}s-') \to H^{q_{n-1}}(-,-')$

b) $(C'^n k')_* : H^{(qk')_{n-1}}(C'^{n-1}s-, C'^{n-1}s-) \to H^{q_{n-1}}(-,-)$

Definición VI.1.11 Dada una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$, se define *el n-grupo de homotopía relativo a q_m del objeto* X *basado en* $f : \mathrm{X} \to C'^r\mathrm{A}$*,* $1 \leq r \leq$ $\leq n + m - 1$, por

$$\pi_n^{q_m}(\mathrm{X}, f) = H^{q_{n+m-1}}((p')^{n+m-r-1}f, (p')^{n+m-r-1}f)$$

De la definición anterior se deduce que $\pi_n^{q_m}(\mathrm{X}, f) = \pi_n^{q_m}(\mathrm{X}, (p')^s f)$, para $0 \leq s \leq n + m - r - 1$, y $\pi_n^{q_m}(\mathrm{X}, f) = \pi_{n-s}^{q_{m+s}}(\mathrm{X}, f)$, para $-m \leq s$.

Teorema VI.1.3 *Dada $q : C'\mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ fibración*

a) $\pi_n^q : (\mathbf{C}_{C'\mathrm{A}})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$ *es un funtor, para $n \in \mathbb{N}$.*

b) $\pi_n^- : (\mathbf{fib}^{\mathbf{C}'}\,\mathbf{C})_{dom\ -} \to \mathbf{Grp}$, *definido por* $\pi_n^-((q,p'),f) = \pi_n^q(\mathrm{X},f)$ *y dado un morfismo* $(g,h) : ((q,p'),f) \to ((q',p'),f')$, $\pi_n^-(g,h) = (C'^n g)_* :$ $: \pi_n^q(\mathrm{X},f) \to \pi_n^{q'}(\mathrm{X},f')$, *con* $\mathrm{X} = dom\ f$, *es un funtor que transforma morfismos pull back en isomorfismos, para todo* $n \in I\!N$.

c) $\pi_n^- : (\mathbf{fib\ C})_{dom\ -_1} \to \mathbf{Grp}$ *es un funtor que transforma morfismos pull back en isomorfismos, para todo* $n \geq 2$.

Del apartado $j)$ de la proposición VI.1.9 se deduce que existe una equivalencia natural, para $n \in I\!N$, entre $\pi_n^{-\wedge -'} \cong \pi_n^- \times \pi_n^{-'}$

Definición VI.1.12 Dada $\mathbf{C}$ una C'-categoría punteada con punto $*$, la categoría $\mathbf{C}^*$ se denominará *categoría basada de* $\mathbf{C}$. La categoría $(\mathbf{fib\ C})^{1_*}$ se denominará *categoría de fibraciones basadas de* $\mathbf{C}$.

En este sentido se pueden considerar $C' : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$, $\Sigma'^n : (\mathbf{fib\ C})^{1_*} \to \mathbf{C}^*$ y $\Sigma'^n(*) : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ como funtores, transformando pull backs en pull backs. Además C' y $\Sigma'^n(*)$ también transforman fibraciones basadas en fibraciones basadas ($n \in I\!N^*$).

Definición VI.1.13 *Dada una fibración basada* $q : (\alpha, \mathrm{A}) \twoheadrightarrow (\beta, \mathrm{B})$, *se define la cosuspensión de* q *por* $S'(q) = P < \beta, q >$.

De esta forma surgen los funtores $S'(-_n) : (\mathbf{fib\ C})^{1_*} \to \mathbf{C}^*$, que transforma pull backs en pull backs, y $S'(*_n) : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$, que transforma pull backs en pull backs y fibraciones basadas en fibraciones basadas, para $n \in I\!N^*$.

$S'(*_1) = S'(k')$ se notará simplemente por S' y $S'^n S'(-_m)$ por $S'^{n+1}(-_m)$. Obsérvese que $C'S'(-_n) = S'(C'-_n)$ y $S'S'(-_n) = S'(S'-_n)$.

Definición VI.1.14 Dado un objeto A basado en α y un objeto B, se define el *morfismo cero entre* B *y* A *por* $0 = \alpha *$.

Proposición VI.1.11 *Existen equivalencias naturales haciendo*

a) $S'(-_n) \cong S'^{n+1}(-)$, $n \in I\!N^*$.

b) $S'(*_n) \cong S'^n$, $n \in I\!N^*$.

Proposición VI.1.12

a) Para toda fibración basada q, $[\mathrm{X}, S'^n(q)] \cong \pi^q_{n+1}(\mathrm{X})$.

b) Para todo objeto basado A, $[\mathrm{X}, S'^n\mathrm{A}] \cong \pi^{\mathrm{A}}_n(\mathrm{X})$.

De la proposición VI.1.12 anterior y de las propiedades de los corchetes de homotopía ya vistas se tiene que $\pi^q_n(\mathrm{X}) \cong \pi^{q_r}_{n-r}(\mathrm{X})$; para X ó q contráctil $\pi^q_n(\mathrm{X}) \cong \{0\}$; $\pi^{\mathrm{A}}_n(\mathrm{X}) \cong \pi^{S'^r\mathrm{A}}_{n-r}(\mathrm{X})$; y para X ó A contráctil $\pi^{\mathrm{A}}_n(\mathrm{X}) \cong \{0\}$.

Asimismo se tienen los funtores $\pi^-_n : (\mathbf{fib\,C})^{1_*} \times \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$ y $\pi^-_n :$ $: \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Grp}$, así como la equivalencia natural $\pi^{-\wedge-'}_n \cong \pi^-_n \times \pi^{-'}_n$.

Dualmente a lo realizado en C-categorías se puede considerar la categoría de pares **fib C** con una estructura de cocono inducida de forma análoga a lo hecho para cofibraciones, y fibraciones de la forma $(u, v) : (\mathrm{X}', \mathrm{Y}') \twoheadrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, donde v y $< f', u >$ son fibraciones en **C**. Las fibraciones asociadas a los pares (X,Y), (X',Y'),... se notarán respectivamente por f, f',...

Observando que dada una fibración de pares (u, v) se tiene que $(u, v)_1 =$ $= (u_1, v_1)$

Teorema VI.1.4 *Si* **C** *es una* C'*-categoría entonces* **fib C** *también lo es.*

fib C tiene así asociada una estructura de cocono a partir de la de **C**, y por tanto se pueden asumir todos los resultados descritos para una C'-categoría cualquiera. Entre ellos cabe destacar los grupos de homotopía relativos a una fibración de pares basados en un morfismo de pares y, teniendo en cuenta que **fib C** es punteada si y sólo si lo es **C**, en caso de que **C** lo sea, los grupos de homotopía relativos a una fibración de pares y los grupos de homotopía referidos a un par.

Definición VI.1.15 Dada una fibración $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ y un morfismo $h : \mathrm{Y} \to$ $\to C'\mathrm{A}$, se define:

$$\pi^q_{n+1}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),h) = \pi^{(C'q,q)}_n((\mathrm{X},\mathrm{Y}),(p'hf,h))$$

De la definición anterior se deduce que si $q : \mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ es contráctil entonces $\pi^q_{n+1}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),h) = \{0\}$, y si X lo es $\pi^q_{n+1}((\mathrm{X},\mathrm{Y}),h) \cong \pi^q_n(\mathrm{Y},h)$.

$(\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{2}*}$ se construye de forma dual a $(\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{2}*}$. Sus objetos son los triples de la forma (q,f,h), con q, f fibraciones y $h : codom\ f \to C'(dom\ q)$, y sus morfismos cuaternas $(g_0,g_1,g_2,g_3) : (q,f,h) \to (q',f',h')$ donde $(g_0,g_1) :$ $: q \to q'$ y $(g_2,g_3) : f' \to f$ verificando $C'g_0hg_3 = h'$.

Con esta categoría se crean los funtores grupos de homotopía que darán lugar a la sucesión exacta de una fibración.

Proposición VI.1.13

a) $\pi^{dom}_{n+1} : (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\begin{aligned}
\pi^{dom}_{n+1}(q,f,h) &= \pi^-_{n+1}(q,hf)\\
\pi^{dom}_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^-_{n+1}(g_0,g_1)\pi^q_{n+1}(g_2) =\\
&= \pi^{q'}_{n+1}(g_2)\pi^-_{n+1}(g_0,g_1).
\end{aligned}$$

b) $\pi^{codom}_{n+1} : (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\begin{aligned}
\pi^{codom}_{n+1}(q,f,h) &= \pi^-_{n+1}(q,h)\\
\pi^{codom}_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^-_{n+1}(g_0,g_1)\pi^q_{n+1}(g_3) =\\
&= \pi^{q'}_{n+1}(g_3)\pi^-_{n+1}(g_0,g_1).
\end{aligned}$$

c) $\pi_{n+1} : (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{2}*} \to \mathbf{Grp}$, *definido por*

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1}(q,f,h) &= \pi^{q}_{n+1}((dom\ f, codom\ f), h)\\
\pi_{n+1}(g_0,g_1,g_2,g_3) &= \pi^{(-,=)}_{n+1}((C'g_0, C'g_1),(g_0,g_1))\pi^{(C'q,q)}_{n+1}((g_2,g_3)) =\\
&= \pi^{(C'q',q')}_{n+1}((g_2,g_3))\pi^{(-,=)}_{n+1}((C'g_0, C'g_1),(g_0,g_1))
\end{aligned}$$

son funtores.

Proposición VI.1.14

a) $j'_{n+1} : \pi^{dom}_{n+1} \to \pi_{n+1}$, *definida por* $j'_{n+1(q,f,h)}([F]) = [(F,(p')^{n-1}h)]$

b) $\delta'_{n+1} : \pi_{n+1} \to \pi^{codom}_{n}$, *definida por* $\delta'_{n+1(q,f,h)}([(F,G)]) = [G]$

c) $u'_{n+1} : \pi^{codom}_{n+1} \to \pi^{dom}_{n+1}$, *definida por* $u'_{n+1(q,f,h)} = f^*$

son transformaciones naturales.

Proposición VI.1.15 *Los pares* $(j'_{n+1(q,f,h)}, \delta'_{n+1(q,f,h)})$, $(\delta'_{n+1(q,f,h)}, u'_{n(q,f,h)})$ *y* $(u'_{n+1(q,f,h)}, j'_{n+1(q,f,h)})$ *son exactos.*

Los funtores definidos en la proposición VI.1.13 considerados con codominio **Set** se notarán por P^{dom}_{n+1}, P^{codom}_{n+1} y P_{n+1}, respectivamente. Nótese que en este caso n puede tomar valores menores que en el caso de grupos.

La categoría $(\mathbf{fib\ C})_{\mathbf{C'}\mathrm{A}}$ tiene por objetos los pares de la forma (f,h), donde $f \in \mathbf{fib\ C}$ y $h : codom\ f \to C'\mathrm{A}$, y como morfismos $(g_2,g_3) : (f,h) \to (f',h')$ los pares $(g_2,g_3) : f' \to f$ verificando $hg_3 = h'$.

Teorema VI.1.5

a) $\pi = \ldots.. \to \pi^{codom}_3 \xrightarrow{u'} \pi^{dom}_3 \xrightarrow{j'} \pi_3 \xrightarrow{\delta'} \pi^{codom}_2 \xrightarrow{u'} \pi^{dom}_2 : (\mathbf{fib\ C})^{2*} \to$
$\to \mathbf{SEGrp}$

b) $P = ... \to P_2^{codom} \xrightarrow{u'} P_2^{dom} \xrightarrow{j'} P_2 \xrightarrow{\delta'} P_1^{codom} \xrightarrow{u'} P_1^{dom} : (\mathbf{fib\ C})^{2*} \to$
$\to \mathbf{SESet}^*$

c) $\pi^q : (\mathbf{fib\ C})_{C'\mathrm{A}} \to \mathbf{SEGrp}$, *definido por* $\pi^q(f,h) = \pi(q,f,h)$ *y* $\pi^q(g_2,g_3) = \pi(1,1,g_2,g_3)$

d) $P^q : (\mathbf{fib\ C})_{C'\mathrm{A}} \to \mathbf{SESet}^*$, *definido por* $P^q(f,h) = P(q,f,h)$ *y* $P^q(g_2,g_3) = P(1,1,g_2,g_3)$

e) $\pi : (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{1}*} \times (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{SEGrp}$, *definido por* $\pi(q,f) = \pi(q,f,0)$

f) $P : (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{1}*} \times (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{SESet}^*$, *definido por* $P(q,f) = P(q,f,0)$

g) $\pi : \mathbf{C}^* \times (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{SEGrp}$, *definido por* $\pi(\mathrm{A},f) = \pi(*_\mathrm{A},f)$

h) $P : \mathbf{C}^* \times (\mathbf{fib\ C})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{SESet}^*$, *definido por* $P(\mathrm{A},f) = P(*_\mathrm{A},f)$

son funtores.

A una categoría **C** con una estructura de cocono se le pueden asociar distintas categorías punteadas. Para todo objeto ∇ de **C** se considera la categoría punteada $\mathbf{C}_{FIB\ C'\nabla}$, cuyos objetos son de la forma (x,X), con $x : \mathrm{X} \twoheadrightarrow C'\nabla$ una fibración, y con morfismos los de $\mathbf{C}_{C'\nabla}$. A (x,X) se le denominará *objeto punteado con punto* x.

Los objetos punteados pueden ser identificados, como se ve en el teorema dual de I.3.2, con pull backs dentro de la categoría de pull backs de **C**. También estos objetos pueden tener asociado un pull back distinto al de identificación, esto es, un pull back fibrado con codominio de la fibración inducida $C'\nabla$.

Sea $\widehat{C'}(x,\mathrm{X}) = (\overline{C'x}, \widehat{C'}\mathrm{X})$, donde $\widehat{C'}\mathrm{X}$ viene definido mediante el siguiente pull back:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C'}\mathrm{X} \arrow[r, "\overline{p'}"] \arrow[d, "\overline{C'x}"] & C'\mathrm{X} \arrow[d, "C'x"] \\
C'\nabla \arrow[r, "p'"] & C'^2\nabla
\end{tikzcd}$$

y dado un morfismo $f : (x, \mathrm{X}) \to (y, \mathrm{Y})$, $\widehat{C'}f = 1 \cap C'f : \widehat{C'}(x, \mathrm{X}) = = P < p', C'x > \to \widehat{C'}(y, \mathrm{Y}) = P < p', C'y >$, $\widehat{k'}_{(x,\mathrm{X})} = k'_{\mathrm{X}}\overline{p'_{\nabla}} : (\overline{C'x}, \widehat{C'\mathrm{X}}) \to \to (x, \mathrm{X})$ y $\widehat{p'}_{(x,\mathrm{X})} = < \overline{C'x}, p'_{\nabla} \cap p'_{\mathrm{X}} >: \widehat{C'}(x, \mathrm{X}) = P < p', C'x > \to \widehat{C'}^2(x, \mathrm{X}) = = P < p', C'\overline{C'x} >$.

Teorema VI.1.6 $\mathbf{C}_{FIB\ C'\nabla}$, *con* $(\widehat{C'}, \widehat{k'}, \widehat{p'})$ *y las fibraciones punteadas es una categoría punteada con cocono natural cuyo objeto final es* $(1_{C'\nabla}, C'\nabla)$.

Proposición VI.1.16 *Dado* $1 \cap f : (x, \mathrm{X}) = P < s, j > \longrightarrow (y, \mathrm{Y}) = = P < s', j' >$

a) $\widehat{C'}^n(x, \mathrm{X}) = P < C'^n s(p')^n, C'^n j >$.

b) $\widehat{C'}^n(1 \cap f) = 1 \cap C'^n f : \widehat{C'}^n(x, \mathrm{X}) = P < C'^n s(p')^n, C'^n j > \to \widehat{C'}^n(y, \mathrm{Y}) = = P < C'^n s'(p')^n, C'^n j' >$.

c) $\widehat{k'}_{(x,\mathrm{X})} = 1 \cap k'_{\mathrm{T}} : \widehat{C'}(x, \mathrm{X}) = P < C'sp', C'j > \to (x, \mathrm{X}) = P < s, j >$.

d) $\widehat{p'}_{(\mathrm{X},x)} = 1 \cap p'_{\mathrm{T}} : \widehat{C'}(x, \mathrm{X}) = P < C'sp', C'j > \longrightarrow \widehat{C'}^2(x, \mathrm{X}) = = P < C'^2 s(p')^2, C'^2 j >$.

$1 \cap q : (a, \mathrm{A}) = P < s', j' > \twoheadrightarrow (b, \mathrm{B}) = P < s, j >$ se dirá fibración de pull backs cuando $q : \mathrm{T}' \twoheadrightarrow \mathrm{T}$ fibración, $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$, $s = s'$ y $j' = jq$.

Proposición VI.1.17 *Dada* $1 \cap q : (a, \mathrm{A}) = P < s', j' > \twoheadrightarrow (b, \mathrm{B}) = P < s, j >$ *fibración de pull backs* *a)* $\widehat{\Sigma'}_{(1\cap q)_{\widehat{n}}} = P < C'^{n+1}s(p')^{n+1}, \Sigma'^{n+1}(j',j) >$.

b) $(1\cap q)_{\widehat{n+1}} = 1\cap q_{n+1} : \widehat{C'}^{n+1}(x,\mathrm{X}) = P < C'^{n+1}s(p')^{n+1}, C'^{n+1}j > \twoheadrightarrow$
$\twoheadrightarrow \widehat{\Sigma'}_{(1\cap q)_{\widehat{n}}} = P < C'^{n+1}s(p')^{n+1}, \Sigma'^{n+1}(j',j) >$.

Definición VI.1.16 $(a,\mathrm{A}) = P < s,j >$ se dirá un *pull back contráctil* si k'_{T} tiene una sección $\sigma \in Hom(\mathrm{T}, C'\mathrm{T})^{\sigma' j(C'j)}$, con $\sigma' : \mathrm{S} \to C'\mathrm{S}$ tal que $\sigma' s = C' s p'$.

Según esto resulta que el cocono de un pull back asociado a un objeto punteado es un pull back contráctil, y que toda fibración de pull backs verifica PLN para todo morfismo de pull backs con dominio un pull back contráctil.

Observando que $(\mathbf{C}_{FIB\ C'\nabla})_{P<s,j>} \cong (\mathbf{C}_{P<s,j>})_{\mathbf{fib}}$, considerando la categoría $\mathbf{fib\ pb}_{\mathbf{C}'\nabla}\mathbf{C}$ definida de forma dual a $\mathbf{cof\ po}^{\mathbf{C}\nabla}\mathbf{C}$ y haciendo uso de objetos y fibraciones punteados basados:

Teorema VI.1.7 *Dada* $1\cap q : (b,\mathrm{B}) = P < s,j > \twoheadrightarrow (a,\mathrm{A}) = P < s',j' >$ *fibración de pull backs. Existen equivalencias naturales*

a) $[(dom \sim, \sim), (\mathrm{A}, a)]_{1\cap -(1\cap q)} \cong [dom \sim, \mathrm{T}']_{<s\sim,->(<j',q>)}$.

b) $\hat{\pi}_n^{1\cap q}(1\cap -, dom\ 1\cap -) \cong \pi_n^{<j',q>}(-, dom\ -)$.

c) $\hat{\pi}_n^{1\cap\sim}(1\cap -, dom\ 1\cap -) \cong \pi_n^{<\smile\sim,\sim>}(-, dom\ -)$.

d) $\hat{\pi}_n^{1\cap\sim}(-,\approx) \cong \pi_n^{<\smile\sim,\sim>}(-, C'a'p' \approx)$

e) $\hat{\pi}_n^{(-,\sim)}(=,\approx) \cong \pi_n^{\sim}(=, C' \sim' p' \approx)$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{fib\ C}_{FIB\ C'\nabla} \cong (\mathbf{fib\ C})_{FIB\ C'1_\nabla}$

Proposición VI.1.18

a) $\widehat{\pi}_n^{1\cap(q',q)}((1\cap -', 1\cap -), dom\ (1\cap -', 1\cap -)) \cong$
$\cong \pi_n^{(<j_1',q'>,<j_1,q>)}((-',-), dom\ (-',-))$

b) $\widehat{\pi}_n^{1\cap(\sim',\sim)}((1\cap -', 1\cap -), dom\ (1\cap -', 1\cap -)) \cong$
$\cong \pi_n^{(<\smile'\sim',\sim'>,<\smile\sim,\sim>)}((-',-), dom\ (-',-))$

c) $\widehat{\pi}_{n+1}^{1\cap i}(1\cap -, 1\cap \vee) \cong \pi_{n+1}^{<j_1',q>}(-,\vee)$

d) $\widehat{\pi}_{n+1}^{1\cap\sim}(1\cap -, 1\cap \vee) \cong \pi_{n+1}^{<\smile\sim,\sim>}(-,\vee)$

e) $\widehat{\pi}^{1\cap q}(1\cap -, 1\cap \vee) \cong \pi^{<j',q>}(-,\vee)$

f) $\widehat{\pi}(1\cap \sim, 1\cap -, 1\cap \vee) \cong \pi(<\smile\sim,\sim>, -, \vee)$

g) $\widehat{\pi}^{1\cap q}(1\cap -) \cong \pi^{<j',q>}(-, C'a'p'\vee)$

h) $\widehat{\pi}(1\cap \sim, 1\cap -) \cong \pi(<\smile\sim,\sim>, -, C'a'p'\vee)$

i) $\widehat{\pi}((\approx,\sim),(1\cap -)) \cong \pi(\sim, -, C' \sim' p'\vee)$

Dado un objeto ∇ de **C**, $\Sigma'_{k'_\nabla}$ es un objeto punteado basado con punto $\overline{k'}$ y base $<1,1>: C'\nabla \to \Sigma'_{k'_\nabla}$.

Definición VI.1.17 $\widehat{S'}^n(\Sigma'_{k'_\nabla}, \overline{k'})$ se denominará *n-coesfera* y se notará por $\Sigma'^n\nabla$, $n \in I\!N^*$.

De donde los grupos de homotopía coesféricos de un objeto punteado (x, X) son $\pi_n^{\Sigma'^0\nabla}(x,\mathrm{X}) = \pi_n^{k'_\nabla}(x,\mathrm{X})$, $n \in I\!N$.

En particular, si la categoría **C** tiene objeto final ε se obtienen las n-coesferas standard $S'^n = \Sigma'^n\varepsilon$ y los grupos de homotopía standard $\pi_n(x,\mathrm{X})$. $\pi_1(x,\mathrm{X})$ se denomina grupo fundamental de Poincaré del objeto X.

$fib(\mathrm{X}, C'\nabla)$ es el conjunto de puntos del objeto X. Dados dos puntos x y x' de un objeto X, un *camino de x a x'* es un morfismo $\alpha : \mathrm{X} \to C'^2\nabla$ tal que $k'_1\alpha = < x, x' >$. X se dirá conexo por caminos si $fib(\mathrm{X}, C'\nabla)$ posee una única clase de equivalencia bajo la relación "estar ligados por caminos".

Proposición VI.1.19 *Dados dos puntos x y x' de un objeto* X*, todo camino α de x en x' induce un isomorfismo $\pi_1^{\Sigma'^0\nabla}(x, \mathrm{X}) \xrightarrow{\Lambda_\alpha} \pi_1^{\Sigma'^0\nabla}(x', \mathrm{X})$.*

En este caso se hablará simplemente de $\pi_1^{\Sigma'^0\nabla}(\mathrm{X})$, y si $\nabla = \varepsilon$ de $\pi_1(\mathrm{X})$.

VI.2 Ejemplos teóricos.

Los funtores adjuntos tienen un cierto poder en el traslado de estructuras de homotopía. Es bien conocido que la homotopía ordinaria de los espacios topológicos puede ser obtenida a través de un cilindro o un cocilindro (funtor caminos) y que éstos son funtores adjuntos que inducen isomorfismos en las transformaciones naturales asociadas. Este proceso se puede desarrollar también con conos y coconos, e incluso generalizar a funtores adjuntos no necesariamente del tipo anterior, obteniéndose nuevas estructuras cónicas o cocónicas a partir de una dada mediante dichos funtores.

Para el cálculo de grupos esféricos, el uso de cofibraciones (de fibraciones) es innecesario. Basta tener un cono (cocono) que transforme push outs en push ots (pull backs en pull backs) y con k_n verificando PEN y poseyendo push outs (k'_n verificando PLN y poseyendo pull backs). De esta forma surge el concepto de E-categoría (E'-categoría), que con ciertas cofibraciones (fibraciones) generadas por la estructura dan lugar a C-categorías (a C'-categorías). En el caso de una E-categoría (E'-categoría) con un funtor adjunto a derecha del cono (a izquierda del cocono) se obtiene que la E-categoría es también una E'-categoría (que la E'-categoría es también una E-categoría) cuya homotopía coincide con la primitiva, obteniéndose el concepto de EE'-categoría.

En el caso de categorías aditivas los grupos de homotopía basados en el cero tienen ya determinada su estructura de grupo por la suma de morfismos en la categoría, pudiéndose así hablar, por extensión, de los grupos de homotopía desde el orden cero, siendo siempre éstos abelianos. En este sentido, para estos grupos no es necesario que los funtores cono y cocono transformen push outs en push outs y pull backs en pull backs, respectivamente, surgiendo así los conceptos de C_0 y C'_0-categorías aditivas.

En la categoría de los espacios topológicos es conocido el método a través del cual, a partir de un cilindro, se obtiene un cono que conserva la homotopía cilíndrica. Este proceso se generaliza con la noción de I-categoría con producto natural.

VI.2.1 Funtores adjuntos en homotopía cónica.

Definición VI.2.1 Un triple (C, k, p) se dirá un *cono en* $\mathbf{C}$ cuando $C : \mathbf{C} \to \to \mathbf{C}$ es un funtor, con transformaciones naturales $k : 1 \to C$ y $p : C^2 \to C$ verificando el axioma $(C1)$. Dualmente se define un *cocono en* $\mathbf{C}$.

Dados $U : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ y $V : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ tales que (U, V) es un par adjunto de funtores con isomorfismo natural de adjunción $\gamma : Hom(U-, \sim) \to Hom(-, V\sim)$, se tiene

La demostración de la siguiente proposición VI.2.1 así como de la VI.2.6 pueden ser vistas en [Hub2], aunque con una notación diferente a la utilizada en este trabajo, por lo que se repiten, para una mejor comprensión por parte del lector, con la notación adecuada.

Proposición VI.2.1

a) Si (C,k,p) *es un cono en* $\mathbf{C}$*, entonces*
$(VCU,(VkU)\gamma(1_U),V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)$ *es un cono en* $\mathbf{A}$*.*

b) Si (C',k',p') *es un cocono en* $\mathbf{A}$*, entonces*
$(UC'V,\gamma^{-1}(1_V)(Uk'V),U(C'\gamma(1_{UC'})p')V)$ *es un cocono en* $\mathbf{C}$*.*

Demostración:

(a) Usando la naturalidad de las transformaciones intervinientes y el axioma de cono se tiene:

$$
\begin{aligned}
&(V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)(((VkU)\gamma(1_U))VCU) = \\
&\qquad = (V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))(VkUVC)\gamma(1_{UVC}))U = \\
&\qquad = (V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC}))(kUVC))\gamma(1_{UVC}))U = \\
&\qquad = (V(p(kC)\gamma^{-1}(1_{VC}))\gamma(1_{UVC}))U = \\
&\qquad = (V\gamma^{-1}(1_{VC})\gamma(1_{UVC}))U = \\
&\qquad = \gamma\gamma^{-1}(1_{VC})U = \\
&\qquad = 1_{VCU}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)(VCU((VkU)\gamma(1_U))) = \\
&\qquad = V((pU)(C\gamma^{-1}(1_{VCU}))(CU((VkU)\gamma(1_U)))) = \\
&\qquad = V((pU)(C\gamma^{-1}(1_{VCU}))(CU\gamma(kU))) = \\
&\qquad = V((pU)(C(\gamma^{-1}(1_{VCU})(U\gamma(kU))))) = \\
&\qquad = V((pU)(C\gamma^{-1}\gamma(kU))) = \\
&\qquad = V((pU)(C(kU))) = \\
&\qquad = V(1_{CU}) = \\
&\qquad = 1_{VCU}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)(VCUV(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U) = \\
&= V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC}))(CUV(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))))U = \\
&= V(p(C(\gamma^{-1}(1_{VC})(UV(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))))))U = \\
&= V(p(C\gamma^{-1}(V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC}))))))U = \\
&= V(p(C(p(C\gamma^{-1}(1_{VC}))\gamma^{-1}(1_{VCUVC}))))U = \\
&= V(p(Cp)(C^2\gamma^{-1}(1_{VC}))(C\gamma^{-1}(1_{VCUVC})))U = \\
&= V(p(pC)(C^2\gamma^{-1}(1_{VC}))(C\gamma^{-1}(1_{VCUVC})))U = \\
&= V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC}))(pUVC)(C\gamma^{-1}(1_{VCUVC})))U = \\
&= (V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)(V(p(C\gamma^{-1}(1_{VC})))U)VCU.
\end{aligned}
$$

(b) Análoga a la anterior.

□

Corolario VI.2.1

a) Si (C', k', p') es un cocono en $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$, entonces $(VC'U, (Vk'U)\gamma(1_U), V(p'(C'\gamma^{-1}(1_{VC'})))U)$ es un cono en $\mathbf{A}$.

b) Si (C, k, p) es un cono en $\mathbf{A}^{\mathbf{op}}$, entonces $(UCV, \gamma^{-1}(1_V)(UkV), U(C\gamma(1_{UC})p)V)$ es un cocono en $\mathbf{C}$.

Demostración:

(a) Si $(\mathbf{C}^{\mathbf{op}}, C', k', p', fib)$ es una C'-categoría entonces $(\mathbf{C}, C', k', p', cof = fib)$ es una C-categoría.

(b) Si $(\mathbf{C}^{\mathbf{op}}, C, k, p, cof)$ es una C-categoría entonces $(\mathbf{C}, C, k, p, fib = cof)$ es una C'-categoría.

□

Corolario VI.2.2 *Todo par adjunto de funtores induce cono en $\mathbf{A}$ y cocono en $\mathbf{C}$.*

Demostración:

Obsérvese que $(1_{\mathbf{D}}, 1, 1)$ es un cono y un cocono en cualquier categoría $\mathbf{D}$.
□

El recíproco del corolario VI.2.2 anterior también es cierto (ver [Kl2]).

Dado un cono, se plantea la cuestión de qué condiciones debe cumplir un morfismo para que la clase de los morfismos así caracterizados verifique los axiomas $(C2)$, $(C3)$ y $(C4)$ como familia de cofibraciones. Dicha cuestión se resuelve mediante la siguiente definición, como se verá posteriormente.

Definición VI.2.2 Dado un cono (C, k, p) en $\mathbf{C}$, $i : B \to A$ se dirá una *cofibración generada por el cono* cuando i_n tiene push outs y verifica PEN para $n \in \mathbb{N}^*$. El conjunto de cofibraciones generadas por el cono se notará por $cof_C(\mathbf{C})$.

Para la obtención de los grupos de homotopía esféricos basta tener un cono (C, k, p) en $\mathbf{C}$, con C transformando push outs en push outs y k_{A} una cofibración generada para todo objeto A de $\mathbf{C}$.

Definición VI.2.3 Una *E-categoría* o *categoría con esferas naturales* es una categoría $\mathbf{C}$ con un cono (C, k, p) tal que C transforma push outs en push outs y k_{A} es cofibración generada, para todo objeto A de $\mathbf{C}$.

Proposición VI.2.2 *Toda E-categoría es una C-categoría, con las cofibraciones generadas.*

Demostración:

- (C1) Se verifica por ser (C, k, p) un cono.

- (C2) Toda cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ tiene push outs por definición, y C transforma push outs en push outs por hipótesis.

Por el teorema III.1.6 $(\overline{i})_n = \overline{i_n}$ en $P\{\Sigma^n(\overline{f}, f), i_n\}$, para $n \in \mathbb{N}^*$, que tiene push outs por la proposición I.1.5 pues $P\{g, \overline{i_n}\} = P\{g\Sigma^n(\overline{f}, f), i_n\}$.

Demostrando que si i verifica PEN entonces $\overline{i}$ también la verifica, por ser $(\overline{i})_n = \overline{i_n}$ se concluiría que $\overline{i}$ es cofibración.

Por i verificar PEN existe r retracción de Ci. $CfrCi = Cf$, de donde existe $\{1, Cfr\}$ tal que $\{1, Cfr\}C\overline{i} = 1$.

- (C3) Evidentemente las identidades son cofibraciones, y k_{A} lo es por hipótesis.

Dados $j : \mathrm{C} \rightarrowtail \mathrm{B}$ e $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibraciones, se tiene que $(ij)_n = = i_n\Sigma^n(1, j)$.

Por un razonamiento similar al hecho en la proposición IV.1.8 se puede considerar $\Sigma^{\alpha_m} = P\{k_m, \Sigma^m(C\alpha, \alpha)\}$ para toda cofibración α y $m \in \mathbb{N}$, de donde $\Sigma^n(1, j) \cong C^n j \cup 1$. Hasta el final de la demostración Σ^{α_m} será considerado de esta forma para toda cofibración α.

Al tener i_n push outs bastaría, por la proposición I.1.5, ver que $C^n j \cup 1$ los tiene para que $(ij)_n$ también tenga push outs.

Sea $f = \{f_0, f_1\} : \Sigma^{(ij)_{n-1}} \to \mathrm{X}$. Entonces $f_0 k_{n-1} = f_1\Sigma^{n-1}(C(ij), ij) = = f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\Sigma^{n-1}(Cj, j)$, de donde existe $\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\} : \Sigma^{j_{n-1}} \to \to \mathrm{X}$. Como j_n tiene push outs, considérese $P\{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}, j_n\}$. Observando que $\overline{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}}k_{n-1} = \overline{j_n} f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)$ se puede definir $\{\overline{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}}, \overline{j_n} f_1\} : \Sigma^{i_{n-1}} \to P\{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}, j_n\}$. El siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{(ij)_{n-1}} & \xrightarrow{\quad\quad\quad\quad f \quad\quad\quad\quad} & X \\ {\scriptstyle C^n j \cup 1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{j_n}} \\ \Sigma^{i_{n-1}} & \xrightarrow{\{\overline{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci,i)\}}, \overline{j_n} f_1\}} & P\{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci,i)\}, j_n\} \end{array}$$

es un push out, pues si $hf = \{h_0, h_1\}(C^n j \cup 1)$ entonces $hf_0 = h_0 C^n j$ y $hf_1 = h_1$ y, como $h_0 k_{n-1} = h_1 \Sigma^{n-1}(Ci, i)$, $h_0 j_n = h\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}$, luego existe $\{h, h_0\} : P\{\{f_0, f_1\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}, j_n\} \to Y$ solución de ambos push outs.

Es evidente que la composición de dos morfismos verificando PEN también verifica PEN, sin más que componer las retracciones respectivas. De donde es suficiente demostrar que $C^n j \cup 1$ verifica PEN para que también $(ij)_n$ la verifique.

$\{C\{\overline{\Sigma^{n-1}(C(ij), ij)}, \overline{k_{n-1}}\Sigma^{n-1}(Ci, i)\}r, C\overline{k_{n-1}}\} : C\Sigma^{i_{n-1}} \to C\Sigma^{(ij)_{n-1}}$ es una retracción para $C^n j \cup 1$, donde $rCj_n = 1$, pues j_n verifica PEN.

- (C4) es evidente por la definición de cofibración, observando que $(i_1)_n = = i_{n+1}$, $n \in I\!N^*$.

□

Observación VI.2.1 En los espacios topológicos punteados existe un isomorfismo natural haciendo que el par (Σ, Ω) sea adjunto, resultando una equivalencia natural entre $[\Sigma^{n-i}, \Omega^m] \cong [\Sigma^n, \Omega^{m-i}]$, donde Σ y Ω representan respectivamente los funtores suspensión y lazos [Hi2]. Este resultado puede ser generalizado al caso de E-categorías, de ahí que ciertos autores denominen al funtor cosuspensión como funtor lazos Ω. Para ello es necesario hacer uso de estructuras duales compatibles, como sucede en **Top***.

Definición VI.2.4 Una *EE'-categoría* es una E-categoría y E'-categoría tal que (C, C') es un par adjunto de funtores mediante un isomorfismo natural γ que hace $k^* \cong k'_*$ y $p^* \cong p'_*$.

Proposición VI.2.3 *Una EE'-categoría es una categoría con un cono (C, k, p) y un cocono (C', k', p') tales que k_{A} y k'_{A} son cofibraciones y fibraciones generadas, respectivamente, y (C, C') es un par adjunto de funtores haciendo $k^* \cong k'_*$ y $p^* \cong p'_*$.*

Demostración:

Obvia, observando que al ser (C, C') un par adjunto, por la proposición I.2.4 C conserva colímites y C' conserva límites.

$\square$

Proposición VI.2.4 *En una EE'-categoría $\pi_n^{\Sigma^0 \mathrm{A}}(\mathrm{X}, f) \cong \pi_n^{\Sigma'^0 \mathrm{X}}(\mathrm{A}, \gamma(f))$.*

Demostración:

Teniendo en cuenta que $\pi_n^{\Sigma^0 \mathrm{A}}(\mathrm{X}, f) = [C^{n+1}\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{\{fp^nCk_{n-1}, fp^{n-1}\}(k_n)}$ y que $\pi_n^{\Sigma'^0 \mathrm{X}}(\mathrm{A}, \gamma(f)) = [\mathrm{A}, C'^{n+1}\mathrm{X}]_{<C'k'_{n-1}(p')^n\gamma(f), (p')^{n-1}\gamma(f)>(k'_n)}$ se define

$$\gamma' : \pi_n^{\Sigma^0 \mathrm{A}}(\mathrm{X}, f) \to \pi_n^{\Sigma'^0 \mathrm{X}}(\mathrm{A}, \gamma(f)) \text{ por } \gamma'([F]) = [\gamma^{n+1}(F)]$$

Efectivamente

$$\begin{aligned}
C'^{n-i}k'\gamma^{n+1}(F) &= \gamma^{n-i}(k'\gamma^{i+1}(F)) = \gamma^{n-i}(\gamma^i(F)k) = \\
&= \gamma^{n-i}(\gamma^i(FC^ik)) = \gamma^n(fp^nC^ik) = \\
&= \gamma^n(fp^{n-1}) = \gamma^{n-2}(\gamma^2((fp^{n-2})p))) = \\
&= \gamma^{n-2}(p'\gamma(fp^{n-2})) = C'^{n-2}p'\gamma^{n-1}(fp^{n-2})) = ... \\
&= C'^{n-2}p'C'^{n-3}p'....p'\gamma(f) = (p')^{n-1}\gamma(f) = \\
&= C'^{n-1}k'(p')^n\gamma(f)
\end{aligned}$$

$0 \leq i \leq n$.

Si $H : F_0 \simeq F_1$ rel. k_n entonces $Hk_{n+1} = \{F_0 pCk_n, F_1\}$. Sea H' elevación de $< p'\gamma^{n+1}(F_0), C'^n p'C'^n k'p'\gamma^{n+1}(F_0), ..., C'^n p'C'^2 k'p'\gamma^{n+1}(F_0), C'^n p'\gamma^{n+1}(F_0),$ $, \gamma^{n+2}(H) >$ relativa a $(k'C')_{n+1}$, entonces $C'^{n+1}k'H' : \gamma^{n+1}(F_0) \simeq \gamma^{n+1}(F_1)$ rel. k'_n.

Análogamente se define γ'^{-1}, que obviamente es inversa de γ', al ser γ isomorfismo.

□

Proposición VI.2.5 *Dada una EE'-categoría con objeto cero, entonces* (S, S') *es un par adjunto de funtores.*

Demostración:

$\gamma' : Hom(S-, \sim) \to Hom(-, S' \sim)$, definido por $\gamma'(\{0, f\}) =< 0, \gamma(f) >$ es un isomorfismo natural.

□

Teorema VI.2.1 *Dada una EE'-categoría con objeto cero, entonces*

$$[S^{n-i}\mathrm{A}, S'^m\mathrm{X}] \cong [S^n\mathrm{A}, S'^{m-i}\mathrm{X}]$$

Demostración:

Al ser (C, C') un par adjunto de funtores, C conserva colímites y C' conserva límites (proposición I.2.4). Como el objeto cero es un límite y un colímite entonces $C(0) = 0 = C'(0)$. Por otro lado, dado un objeto A, SA es cofibrante pues $0 = \overline{k_{\mathrm{A}}} : 0 \to S\mathrm{A}$. Dualmente S'A es fibrante, por lo que los corchetes de homotopía expresados siempre existen.

γ' conserva la homotopía, pues $\{0, f_0\} \simeq \{0, f_1\}$ si y sólo si $f_0 \simeq f_1$ rel. k si y sólo si $\gamma(f_0) \simeq \gamma(f_1)$ rel k' si y sólo si $< 0, \gamma(f_0) > \simeq < 0, \gamma(f_1) >$ rel k'.

□

Las relaciones vistas anteriormente entre pares adjuntos de funtores, conos y coconos tienen ahora aplicaciones importantes en la construcción de estructuras compatibles.

Proposición VI.2.6 *Dado un cono (C, k, p), si (C, C') es un par adjunto de funtores, entonces existe un cocono (C', k', p') tal que el isomorfismo de adjunción γ hace $k^* \cong k'_*$ y $p^* \cong p'_*$.*

Demostración:

Sean $k' = \gamma^{-1}(1_{C'})kC'$ y $p' = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')$

$$\begin{aligned}
(k'C')p' &= \gamma^{-1}(1_{C'^2})(kC'^2)\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC') = \\
&= \gamma^{-1}(1_{C'^2})C(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC'))(kC') = \\
&= \gamma^{-1}\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')(kC') = \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')(kC') = \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')C(kC')) = \\
&= \gamma\gamma^{-1}(1_{C'}) = \\
&= 1_{C'}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(C'k')p' &= C'(\gamma^{-1}(1_{C'})kC')\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC') = \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})(kC')\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')) = \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})C(\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC'))kCC') = \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC'))kCC') = \\
&= \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')(kCC')) = \\
&= \gamma\gamma^{-1}(1_{C'}) = \\
&= 1_{C'}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(C'p')p' &= C'(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC'))\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC') = \\
&= \gamma(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')) = \\
&= \gamma(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')C^2(\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')))) = \\
&= \gamma(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})C(\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC'))pCC')) = \\
&= \gamma(\gamma^2(\gamma^{-1}(\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')))pCC') = \\
&= \gamma(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')(pCC'))) = \\
&= \gamma(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')C(pC'))) = \\
&= \gamma(\gamma(\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC'))(pC'))) = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')))(pC')) = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'^2})C(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC'))(pC'))) = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'^2})(pC'^2)C^2(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')))) = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'^2})(pC'^2))\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')) = \\
&= (p'C')p'.
\end{aligned}
$$

$$
k'_*(f) = k'f = \gamma^{-1}(1_{C'})(kC')f\gamma^{-1}(1_{C'})Cfk = \gamma^{-1}(f)k.
$$

$$
\begin{aligned}
p'_*(f) &= p'f = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})pC')f = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})(pC')(C^2f)) = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})Cfp) = \\
&= \gamma^2(\gamma^{-1}(f)p).
\end{aligned}
$$

□

Corolario VI.2.3 *En las condiciones de la proposición anterior, f es nulhomótopo respecto de C si y sólo si f es nulhomótopo respecto de C'.*

Demostración:

Evidente pues $k^* \cong k'_*$.

□

Proposición VI.2.7 *Dada una E-categoría* $\mathbf{C}$ *con pull backs y cono* (C,k,p)*, si* (C,C') *es un par adjunto de funtores entonces* $(\Sigma^n(k),\Sigma'^n(k'))$ *también lo es.*

Demostración:

Por la proposición I.2.4 C' conserva límites, y por tanto transforma pull backs en pull backs dando sentido a la notación usada a continuación.

$\gamma' : Hom(\Sigma^n(k)-,\sim) \to Hom(-,\Sigma'^n(k')\sim)$ definido por $\gamma'(\{f_n,...,f_0\}) = \;=<\gamma^n(f_0),...,\gamma^n(f_n)>$ es evidentemente un isomorfismo natural, pues

$$\begin{aligned}\gamma'(h\{f_n,...,f_0\}\Sigma^n(k)(g)) &= \gamma'(\{hf_nC^ng,...,hf_0C^ng\} = \\ &= <\gamma^n(hf_0C^ng),...,\gamma^n(hf_nC^ng)>= \\ &= <C'^nh\gamma^n(f_0)g,...,C'^nh\gamma^n(f_n)g>= \\ &= \Sigma'^n(k')(h)\gamma'(\{f_n,...,f_0\})g.\end{aligned}$$

□

Corolario VI.2.4 *El isomorfismo inverso del natural de adjunción* γ' *asociado al par* $(\Sigma^n(k),\Sigma'^n(k'))$ *transforma morfismos nulhomótopos en morfismos nulhomótopos.*

Demostración:

Sea $f:\mathrm{A}\to\Sigma'_{k'_{n-1}}$ nulhomótopo. Entonces, por el corolario VI.2.3, existe $F: C\mathrm{A}\to\Sigma'_{k'_{n-1}}$ tal que $Fk=f$. Por la proposición VI.2.7 anterior γ' es natural, y por la I.2.8 $(\gamma')^{-1}$ también lo es, de donde $(\gamma')^{-1}(f)=(\gamma')^{-1}(Fk)= \;=(\gamma')^{-1}(F)\Sigma^n(k)(k):\Sigma^{k_{n-1}}\to\Sigma^{(kC)_{n-1}}\to\mathrm{X}$, nulhomótopo pues se factoriza a través de un objeto contráctil.

□

Teorema VI.2.2 *Si* $\mathbf{C}$ *es una E-categoría con pull backs y cono* (C,k,p) *de forma que* (C,C') *es un par adjunto de funtores, entonces* $\mathbf{C}$ *es una EE'-categoría.*

Demostración:

Por las proposiciones VI.2.3 y VI.2.6 sólo falta probar que k'_n verifican PLN.

Si $f : \mathrm{A} \to \Sigma'_{k'_n}$ es nulhomótopo entonces $(\gamma')^{-1}(f) : \Sigma^{k_n} \to \mathrm{X}$ también es nulhomótopo por el corolario VI.2.4 anterior, y por PEN existe $F : C^{n+2}\mathrm{A} \to$ $\to \mathrm{X}$ tal que $Fk_{n+1} = (\gamma')^{-1}(f)$, de donde

$$\begin{aligned} f &= \gamma'(Fk_{n+1}) = \Sigma'^{n+1}(k')(F)\gamma'(k_{n+1}) \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} \Sigma'^{n+1}(k')(F)k'_{n+1}\gamma^{n+2}(1_{C^{n+2}\mathrm{A}}) = \\ &= k'_{n+1}C'^{n+2}(F)\gamma^{n+2}(1_{C^{n+2}\mathrm{A}}) = \\ &= k'_{n+1}\gamma^{n+2}(F). \end{aligned}$$

$(*)$ Obsérvese que

$$\begin{aligned} \gamma^{n+1}(C^{n+1-i}k) &= \gamma^{n+1}(1_{C^{n+2}A}C^{n+1-i}k) = \\ &= \gamma^{i}(\gamma^{n+1-i}(1_{C^{n+2}A})k) \overset{(k^*\cong k'_*)}{=} \\ &= \gamma^{i}(k'\gamma^{n+2-i}(1_{C^{n+2}A})) = \\ &= C^{i}k'\gamma^{n+2}(1_{C^{n+2}A}) \end{aligned}$$

□

VI.2.2 Homotopía cónica en categorías aditivas.

La aditividad de las categorías caracteriza la operación de los grupos de homotopía, obteniéndose en este caso una axiomática más simple que da lugar a resultados análogos a los ya vistos en los capítulos precedentes.

Proposición VI.2.8 *Si* $\mathbf{C}$ *es una categoría aditiva con conúcleos y tiene un cono* (C, k, p) *con* C *transformando push outs en push outs, entonces* $(\mathbf{C}, C, k, p, cof_C(\mathbf{C}))$ *es una* C*-categoría aditiva con todas las cofibraciones.*

Demostración:

- (C1) Se da por definición de cono.

- (C2) Al ser **C** aditiva y con conúcleos existen, por la proposición I.1.12, push outs para todo par de morfismos. Por hipótesis C transforma push outs en push outs. La inducida de una cofibración en un push out cofibrado es cofibración pues verifica PEN por la misma razón que en la proposición VI.2.2.

- (C3) Obviamente las identidades son cofibraciones. k es cofibración pues $pCk = 1$ por definición de cono, y la composición de cofibraciones es cofibración pues si $rCi = 1$ y $r'Cj = 1$ entonces $r'rC(ij) = 1$.

- (C4) Si $rCi = 1$ entonces $(C\overline{k}p + C\overline{i}Cr - C\overline{i}CrCkp)\{C^2i, Ck\} = 1$.

□

Observación VI.2.2 Las cofibraciones generadas por un cono que transforme push outs en push outs en una categoría con conúcleos son todas las cofibraciones.

Proposición VI.2.9 *Si* **C** *es una C-categoría aditiva e $i : \mathrm{B} \rightarrowtail C\mathrm{A}$ es una cofibración, entonces $f_0 \simeq f_1$ rel. i si y sólo si $f_1 - f_0$ es nulhomótopo mediante una nulhomotopía F tal que $FCi = 0$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $H : f_0 \simeq f_1$ rel. i entonces $F = H - f_0p$ es una nulhomotopía para $f_1 - f_0$ verificando $FCi = 0$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, $F + f_0p : f_0 \simeq f_1$ rel i.

□

Corolario VI.2.5 *$f_0 \simeq f_1$ rel. i si y sólo si $f_1 - f_0 \simeq 0$ rel i.*

Nótese que $Hom(C\mathrm{A}, \mathrm{X})^{0(i)}$ es un subgupo de $Hom(C\mathrm{A}, \mathrm{X})$, y que por tanto $[C\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{0(i)}$ es también un grupo abeliano.

Teorema VI.2.3 *Si **C** es una categoría aditiva, existe una equivalencia natural*

$$id : \pi_n^{\sim} \cong [C^n codom \ \sim, -]^{0(\sim_n)} \ ((\mathbf{cof\ C})^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Grp})$$

Demostración:

Dado un objeto (i, X), $\pi_n^i(\mathrm{X}) = H_{i_{n-1}}(0p^{n-2}, 0p^{n-2}) = H_{i_{n-1}}(0,0) =$
$= [C^n\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{\{0pCi_{n-1},0\}(i_n)} = [C^n\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{0(i_n)}$. Sean $[F], [G] \in [C^n\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{0(i_n)}$,

$$\begin{aligned}
[F] + [G] &= [\overline{\overline{F}}] + [G] = [\{\overline{F}, 0\}\mu] + [\{0, G\}\mu] = \\
&= [\{\overline{F}, 0\}\mu + \{0, G\}\mu] = [(\{\overline{F}, 0\} + \{0, G\})\mu] = \\
&= [\{\overline{F}, G\}\mu] = [F * G] = \\
&= [F] * [G].
\end{aligned}$$

□

Corolario VI.2.6 *Los grupos de homotopía relativos a una cofibración en una C-categoría aditiva son abelianos.*

Observación VI.2.3 En categorías aditivas, por el teorema VI.2.3 anterior, se puede extender la definición de los grupos de homotopía, usando como operación la inducida en los corchetes de homotopía por la suma de la categoría.

Definición VI.2.5 Dada $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración en una C-categoría aditiva, $\pi_n^i(X) = [C^n\mathrm{A}, \mathrm{X}]^{0(i_n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En particular, para un objeto A cofibrante de una C-categoría aditiva se tiene $\pi_0^{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = [\mathrm{A}, \mathrm{X}] = \pi_{-1}^{k_{\mathrm{A}}}(\mathrm{X})$

Observación VI.2.4 Esto permite obtener, en categorías aditivas, los grupos de homotopía $\pi_n^i(\mathrm{X})$ sin necesidad de usar la propiedad de que el cono transforma push outs en push outs, propiedad que sólo será necesaria para definir los grupos $\pi_n^i(\mathrm{X}, f)$ cuando $f \neq 0$. Una C-categoría aditiva salvo esta propiedad se llamará C_0-*categoría aditiva*, y una proposición análoga a la VI.2.8 se verifica.

Proposición VI.2.10 *Si* $\mathbf{C}$ *es una categoría aditiva con un cono* (C, k, p) *y con conúcleos, entonces* $(\mathbf{C}, C, k, p, cof_C(\mathbf{C}))$ *es una* C_0*-categoría con todas las cofibraciones.*

Demostración:

Lo hecho en la demostración de la proposición VI.2.8 sigue siendo válido salvo en el caso de $\bar{i}$ e i_1, ya que se utiliza que el cono transforma push outs en push outs. Para estos casos:

- Dados $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$ y $k : \mathrm{X} \to C\mathrm{X}$, entonces $kf = Cfk \simeq 0$, y por $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ verificar PEN existe $\tilde{f} : \mathrm{A} \to C\mathrm{X}$ tal que $\tilde{f}i = kf$. $\{k, \tilde{f}\}\bar{i} = k$.

- $(C\overline{k} + k\bar{i}r - C(\bar{i}rk))i_1 = \{C\bar{i}k, C\overline{k}k\} = k$.

$\square$

Observación VI.2.5 En una categoría de homotopía, los objetos contráctiles tienen gran importancia pues, con ciertas condiciones, estos objetos caracterizan la homotopía como se ve a continuación.

Teorema VI.2.4 *Si* $\mathbf{C}$ *es una categoría aditiva con dos conos,* (C, k, p) *y* $(\widetilde{C}, \widetilde{k}, \widetilde{p})$*, y que posee conúcleos, entonces si los objetos contráctiles mediante* (C, k, p) *coinciden con los respectivos mediante* $(\widetilde{C}, \widetilde{k}, \widetilde{p})$ *las estructuras de* C_0 *y* $\widetilde{C}_0$*-categoría con todas las cofibraciones de* $\mathbf{C}$ *son equivalentes.*

Demostración:

Dado un morfismo $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, al ser $C\mathrm{B}$ y $\widetilde{C}\mathrm{B}$ objetos contráctiles para ambos conos, i verifica PEN respecto a (C, k, p) si y sólo si i verifica PEN respecto a $(\widetilde{C}, \widetilde{k}, \widetilde{p})$, y por tanto la familia de cofibraciones coincide en ambas estructuras.

Dada $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración, por PEN existe $\theta : \widetilde{C}\mathrm{B} \to C\mathrm{B}$ tal que $\theta\widetilde{k} = k$. Usando otra vez PEN existe $\widetilde{\theta} : \widetilde{C}\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ tal que $\widetilde{\theta}\widetilde{i_1} = i_1(\theta \cup 1)$. Si $F : 0 \simeq f_1 - f_0$ rel. i respecto a (C, k, p) entonces $F\widetilde{\theta} : 0 \simeq f_1 - f_0$ rel. i respecto a $(\widetilde{C}, \widetilde{k}, \widetilde{p})$.

Invirtiendo el proceso se concluye, por el corolario VI.2.5, que $f_0 \simeq f_1$ rel. i respecto a (C, k, p) si y sólo si $f_0 \simeq f_1$ rel. i respecto a $(\widetilde{C}, \widetilde{k}, \widetilde{p})$.

□

Para más información sobre homotopía funtorial en categorías aditivas ver [P-], [D-1], [D-2] ó [D-3].

VI.2.3 Homotopía cónica y cilíndrica.

H.J. Baues, en su libro “Algebraic homotopy”, da la noción abstracta de *categoría de homotopía a través de cilindro* o *I-categoría*. Tomando como ejemplo lo que sucede en espacios topológicos, se generaliza el producto natural en un cilindro y surge

Definición VI.2.6 $(I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ es un *cilindro con producto natural* en una categoría $\mathbf{C}$ cuando $I : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es un funtor con transformaciones naturales $\iota_0, \iota_1 : id \to I$, $\rho : I \to id$, y $\psi : I^2 \to I$, verificando

(I1) Axioma de cilindro con producto.

$\rho\iota_0 = \rho\iota_1 = 1$, $\psi\iota_0 = \psi(I\iota_0) = \iota_0\rho$, $\psi\iota_1 = \psi(I\iota_1) = 1$ y $\psi(I\psi) = \psi^2$.

Proposición VI.2.11 *Si* **C** *tiene push outs, objeto final* ε *y un cilindro con producto natural de forma que* I *transforma push outs en push outs, entonces* **C** *tiene un cono.*

Demostración:

- Funtor cono. $C : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definido por $C\mathrm{A} = P\{\varepsilon_{\mathrm{A}}, (\iota_0)_{\mathrm{A}}\}$, y dado $f : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$, $Cf = 1_\varepsilon \cup If$. Obsérvese que $\overline{(\iota_0)_{\mathrm{A}}} = C\phi_{\mathrm{A}} : \varepsilon = C\phi \to C\mathrm{A}$.

- Transformaciones naturales. $k : 1 \to C$ definida por $k_{\mathrm{A}} = q_{\mathrm{A}}(\iota_1)_{\mathrm{A}}$, donde $q_{\mathrm{A}} = \overline{\varepsilon_{\mathrm{A}}} : I\mathrm{A} \to C\mathrm{A} = P\{\varepsilon_{\mathrm{A}}, (\iota_0)_{\mathrm{A}}\}$, y $p : C^2 \to C$ definido por $p_{\mathrm{A}} = \{C\phi_{\mathrm{A}}, C\phi_{\mathrm{A}}\varepsilon_{I\varepsilon}, q_{\mathrm{A}}\psi_{\mathrm{A}}\}$.

- Axioma de cono.

$$\begin{aligned} p(kC) &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}qi_1 = \\ &= \{C\phi\varepsilon, q\psi\}i_1 = \\ &= \{C\phi\varepsilon i_1, q\psi i_1\} = \\ &= \{C\phi, q\} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(Ck) &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}(1 \cup I(qi_1)) = \\ &= \{C\phi, \{C\phi\varepsilon, q\psi\}IqIi_1\} = \\ &= \{C\phi, q\psi Ii_1\} = \\ &= \{C\phi, q\} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(Cp) &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}(1 \cup I\{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}) = \\ &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}\{IC\phi, IC\phi I\varepsilon, IqI\psi\}) = \\ &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, C\phi\varepsilon, q\psi I\psi\} = \\ &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, C\phi\varepsilon, q\psi^2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(pC) &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\}\{C\phi, C\phi\varepsilon, q\psi\} = \\ &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, \{C\phi\varepsilon, q\psi\}\psi\} \overset{(*)}{=} \\ &= \{C\phi, C\phi\varepsilon, C\phi\varepsilon, q\psi^2\}. \end{aligned}$$

$(*)$ Nótese que al ser ψ una transformación natural $\psi C = \psi \cup \psi I$.

□

Definición VI.2.7 $(\mathbf{C}, I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi, cof)$ es una *I-categoría con producto natural* cuando $(I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ es un cilindro con producto natural y cof es una familia distinguida de morfismos en $\mathbf{C}$ verificando $(I2)$, $(I3)$, $(I4)$ e $(I5)$, esto es, $\mathbf{C}$ es una I-categoría cuyo cilindro tiene un producto natural.

(I2) Axioma de push out.

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ y un morfismo $f : \mathrm{B} \to \mathrm{X}$, siempre existe el siguiente push out cofibrado:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & \mathrm{X} \arrow[d, tail, "\bar{i}"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{B}\{i, f\} \end{tikzcd}$$

donde $\bar{i}$ es también una cofibración. Además el funtor I transforma push outs cofibrados en push outs y $I\phi = \phi$.

(I3) Axioma de cofibración.

Para cualquier objeto X, el morfismo inicial $\phi_{\mathrm{X}} : \phi \to \mathrm{X}$ es una cofibración. La composición de cofibraciones es cofibración. Además, cualquier cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ verifica la siguiente *propiedad de extensión de homotopía (PEH)* en $\mathbf{C}$:

Sea $\varepsilon \in \{0{,}1\}$, para cada diagrama conmutativo del tipo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "\iota_\varepsilon"] \arrow[d, tail, "i"] & I\mathrm{B} \arrow[d, "H"] \arrow[dr, bend left, "Ii"] & \\
\mathrm{A} \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "\iota_\varepsilon"'] & \mathrm{X} & \\
& & I\mathrm{A} \arrow[ul, "E_\varepsilon"']
\end{tikzcd}
$$

Existe un morfismo $E_\varepsilon : I\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ tal que $E_\varepsilon(Ii) = H$ y $E_\varepsilon \iota_\varepsilon = f$.

(I4) Axioma de cilindro relativo:

Para una cofibración $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$, el morfismo i^1, definido por el siguiente push out, es una cofibración:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \sqcup \mathrm{B} \arrow[r, "\{\iota_0, \iota_1\}"] \arrow[d, "i \sqcup i"] & I\mathrm{B} \arrow[d, "\overline{i \sqcup i}"] \arrow[dr, bend left, "Ii"] & \\
\mathrm{A} \sqcup \mathrm{A} \arrow[r, "\overline{\{\iota_0, \iota_1\}}"'] \arrow[drr, bend right, "\{\iota_0, \iota_1\}"'] & T^i \arrow[dr, "i^1"] & \\
& & I\mathrm{A}
\end{tikzcd}
$$

(I5) Axioma de intercambio.

Existe una transformación $T : II \to II$, verificando $T(\iota_\varepsilon I) = I\iota_\varepsilon$ y $T(I\iota_\varepsilon) =$ $= \iota_\varepsilon I$, para $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Se llamará a T *transformación de intercambio.*

Definición VI.2.8 Una I-categoría con producto natural $\mathbf{C}$ se dice que tiene *todas las cofibraciones* cuando cof es la familia de morfismos de $\mathbf{C}$ que verifican PEH.

Proposición VI.2.12 $(\mathbf{C}, I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ *es una I-categoría con producto natural y todas las cofibraciones si y sólo si* $(I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ *es un cilindro con* *producto natural verificando (I5), transformando push outs en push outs, conservando el objeto inicial y de forma que todo morfismo i que verifique PEH tenga push outs e i_1 verificando PEH.*

Demostración:

Si $(\mathbf{C}, I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ es una I-categoría con producto natural y todas las cofibraciones, evidentemente, por definición, se da la tesis.

Recíprocamente faltaría ver que se cumplen los axiomas $(I2)$, $(I3)$ e $(I4)$.

$(I2)$ Considérese $P\{f, i\}$ con i verificando PEH. Dado el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\iota_\varepsilon"] \arrow[d, "\bar{i}"] & I\mathrm{X} \arrow[d, "H"] \\ P\{f,i\} \arrow[r, "h"] & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

$\varepsilon \in \{0, 1\}$, se tiene que $h\overline{f}i = h\bar{i}f = H\iota_\varepsilon f = HIf\iota_\varepsilon$. Como i verifica PEH existe $F : I\mathrm{A} \to \mathrm{Z}$ verificando $FIi = HIf$ y $F\iota_\varepsilon = h\overline{f}$. Por conservar el cilindro push outs existe $\{H, F\} : I(P\{f, i\}) \to \mathrm{Z}$, y $\{H, F\}I\bar{i} = H$, $\{H, F\}\iota_\varepsilon = \{H\iota_\varepsilon, F\iota_\varepsilon\} = \{h\bar{i}, h\overline{f}\} = h\{\bar{i}, \overline{f}\} = h$.

$(I3)$ Sean $j : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ e $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ verificando PEH. Si se tiene que $h(ij) = H\iota_\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, entonces $(hi)j = H\iota_\varepsilon$, y por la PEH de j existe $F : I\mathrm{B} \to \mathrm{X}$ tal que $FIj = H$ y $F\iota_\varepsilon = hi$. Por verificar i PEH existe $G : I\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ verificando $GIi = F$ y $G\iota_\varepsilon = h$, de donde $GIiIj = FIj = H$.

Al ser $I\phi = \phi$, dado un cuadrado conmutativo de la forma $f\phi_{\mathrm{X}} = H$, $fp : I\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ es una extensión de dicho cuadrado, y por tanto ϕ_{X} verifica PEH, para todo objeto X.

El resto es dado por hipótesis.

□

Teorema VI.2.5 *Si* $\mathbf{C}$ *es una* I*-categoría con producto natural que tiene un objeto final* ε*, entonces* $\mathbf{C}$ *tiene inducida una estructura de cono natural cuya homotopía coincide con la cilíndrica.*

Demostración:

Por la proposición VI.2.11 existe (C, k, p) cono en $\mathbf{C}$. Tomando la familia de cofibraciones existente

- $(C2)$ Axioma de push out.

  Por $(I2)$ las cofibraciones tienen push outs en los cuales sus inducidas son también cofibraciones. $CP\{f, i\} = P\{Cf, Ci\}$ por el teorema I.3.2.

- $(C3)$ Axioma de cofibración.

  La composición de cofibraciones es cofibración, por $(I3)$.

  $1_{\mathrm{A}} = \overline{1_\phi}$ en $P\{1_\phi, \phi_{\mathrm{A}}\}$, y por $(I2)$ es cofibración.

  El siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \sqcup \mathrm{A} \arrow[r, "\varepsilon \sqcup 1"] \arrow[d, tail, "\{\iota_0, \iota_1\}"] & \varepsilon \sqcup \mathrm{A} \arrow[d, tail, "\{C\phi, k\}"] \\ I\mathrm{A} \arrow[r, "q"] & C\mathrm{A} \end{tikzcd}$$

  donde $\{C\phi, k\} = \overline{\{\iota_0, \iota_1\}}$ y $j_0 = \overline{\phi_\varepsilon} : A \rightarrowtail \varepsilon \sqcup \mathrm{A}$ son cofibraciones por $(I2)$, y $k = \{C\phi, k\}j_0$ es cofibración por $(I3)$, al ser composición de ellas.

  Para toda cofibración i el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, tail, "i"] & I\mathrm{B} \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{A} \arrow[r, "C\phi\varepsilon"] & C\mathrm{B} \end{tikzcd}$$

tiene, por PEH, una extensión $F : I\mathrm{A} \to C\mathrm{B}$ tal que $FIi = q$ y $F\iota_0 = C\phi\varepsilon$. Entonces $(F\iota_1)i = FIi\iota_1 = q\iota_1 = k$, de donde aplicando el funtor cono y el axioma $(C1)$ se tiene que $p(CF)C\iota_1$ es una retracción para Ci.

- $(C4)$ Axioma de cono relativo.

  i_1 es cofibración al ser la inducida de i^1, cofibración por $(I4)$, en el siguiente push out

$$\begin{tikzcd} T^i \arrow[r, "\{\bar{i}q, C\phi\varepsilon \cup 1\}"] \arrow[d, tail, "i^1"] & \Sigma^i \arrow[d, tail, "i_1"] \\ I\mathrm{A} \arrow[r, "q"] & C\mathrm{A} \end{tikzcd}$$

  Nótese que el cuadrado es conmutativo, y dados $\{f_0, f_1\}$ y H tales que $Hi^1 = \{f_0, f_1\}\{\bar{i}q, C\phi\varepsilon \cup 1\}$, se tiene en particular que $H\iota_0 = f_0 C\phi\varepsilon$, de donde existe $\{f_0 C\phi, H\}$ única solución de este push out.

En [D-1] se prueba que toda I-categoría es una categoría cofibrada con todos sus objetos fibrantes, tomando como cofibraciones las existentes y como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía.

Además, para una cofibración $i : \mathrm{B} \to C\mathrm{A}$, se demuestra que el siguiente push out es un cilindro relativo

$$\begin{tikzcd}
T^i \arrow[r, "\{(\bar{i})_0 i\rho, 1\cup 1\}"] \arrow[d, tail, "i^1"] & P\{i,i\} \arrow[d, tail, "\overline{i^1}"] \\
IC\mathrm{A} \arrow[r, "t"] & Z^i
\end{tikzcd}$$

con $p_i = \{1, 1, \rho\} : Z^i \xrightarrow{\sim} C\mathrm{A}$ la equivalencia débil asociada.

Si $Hi_1 = \{f_0 pCi, f_1\}$ entonces $(\{f_0 p, H\}\widetilde{k}t)i^1 = \{f_0 i\rho, f_0, f_1\}$, donde $\widetilde{k}$ es una extensión de $k : P\{i,i\} \rightarrowtail P\{Ci, Ci\}$ relativa a la cofibración $\overline{i^1}$.

Recíprocamente, si $Hi^1 = \{f_0 i\rho, f_0, f_1\}$ entonces $(\{f_0, f_1, H\}d\mu)i_1 =$ $= \{f_0 pCi, f_1\}$, donde $d : P\{Ci, Ci\} \to Z^i$ es la diagonal que en el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P\{i,i\} \arrow[r, "\overline{i^1}"] \arrow[d, tail, "k"] & Z^i \arrow[d, "p_i", "\sim"'] \\
P\{Ci,Ci\} \arrow[r, "\{p,p\}"] & C\mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

hace $dk = \overline{i^1}$ y $p_i d \simeq \{p, p\}$ rel. i, existente por la estructura de categoría cofibrada antes mencionada en $\mathbf{C}$ (ver [D-2]).

$\square$

Todo lo hecho en este párrafo tiene una dualización obvia, parte de la cual se ha hecho notar explícitamente pues posteriormente se hace referencia a ella.

VI.3 Ejemplos.

A partir de los ejemplos teóricos ya vistos se van a obtener otros concretos en categorías conocidas.

VI.3.1 EE'-categorías

La adjunción existente en muchos casos entre el funtor producto tensorial y el Hom, hace surgir en determinadas categorías $EE'-$estructuras.

1. Grupos Abelianos.

Dado un anillo con unidad R, su estructura de grupo abeliano para la suma permite definir el producto tensorial de un grupo por el anillo, $G \otimes R$, como producto de $\mathbb{Z}$-módulos. Asimismo G^R notará el conjunto de homomorfismos de grupos con dominio R y codominio G. Se puede considerar de forma natural $(G^R)^R \cong G^{(R\otimes R)}$.

Se define

$$
\begin{array}{ll}
CG = G \otimes R & C'G = G^R \\
Cf = f \otimes 1_R & C'f = f_* \\
k(g) = g \otimes 1 & k'(\alpha) = \alpha(1) \\
p(g \otimes r \otimes s) = g \otimes rs & p'(\alpha)(r \otimes s) = \alpha(rs)
\end{array}
$$

$g \in G,\ r, s \in R,\ \alpha \in R^S$

La categoría posee push outs y pull backs y es aditiva. Por la proposición VI.2.8 y el teorema VI.2.2, bastaría probar que (C, k, p) es un cono y que (C, C') es un par adjunto de funtores haciendo $k^* \cong k'_*$ y $p^* \cong p'_*$.

- Cono.

$$
\begin{aligned}
p(kC)(g \otimes r) &= p(g \otimes r \otimes 1) = g \otimes r. \\
\\
p(Ck)(g \otimes r) &= p(g \otimes 1 \otimes r) = g \otimes r.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} p(pC)(g \otimes r \otimes s \otimes t) &= p(g \otimes r \otimes st) \\ &= g \otimes rst \\ &= p(g \otimes rs \otimes t) = \\ &= p(Cp)(g \otimes r \otimes s \otimes t). \end{aligned}$$

- Isomorfismo de adjunción.

  Dado $f : G \otimes R \to H$, se define $\gamma(f) = f' : G \to H^R$ por $f'(g)(r) = = f(g \otimes r)$, y dado $f' : G \to H^R$, $\gamma^{-1}(f') = f : G \otimes R \to H$ definido por $f(g \otimes r) = f'(g)(r)$.

- Naturalidad.

  $(nfCm)'(g)(r) = (nfCm)(g \otimes r) = nf(mg \otimes r) = (nf'm)(g)(r)$, de donde $(nfCm)' = C'nf'm$.

- $fk(g) = f(g \otimes 1) = f'(g)(1) = k'f'(g)$

  $fp(g \otimes r \otimes s) = f(g \otimes rs) = f'(g)(rs) = p'f'(g)(r \otimes s) = \gamma^{-1}(p'f'(g \otimes r \otimes s)$.

Un grupo G es contráctil cuando existe un homomorfismo $\theta : G \otimes R \to G$, notado por $\theta(g \otimes r) = rg$, con $\theta k = 1$, de donde G es contráctil si existe una operación externa $\ . : R \times G \to G$ verificando

a) $r(g + g') = rg + rg'$, $r \in R$, $g, g' \in G$.

b) $(r + r')g = rg + r'g$, $r, r' \in R$, $g \in G$.

c) $1g = g$, $g \in G$.

En este caso se dirá que G es un R-casi módulo, pues únicamente falta la propiedad $(rr')g = r(r'g)$ para que sea un R-módulo.

Para mayor información sobre esta homotopía puede consultarse [Her].

2. R-casi Módulos.

Los R-casi módulos forman una categoría con los homomorfismos de R-casi módulos, esto es, aplicaciones lineales: $f(rg + r'g') = rf(g) + r'f'(g')$.

La categoría de R-casi módulos es aditiva, posee núcleos, conúcleos y productos tensoriales.

- Aditiva. Dados dos R-casi módulos G y G', entonces $G \times G'$ es un grupo abeliano, y con la operación $r(g, g') = (rg, rg')$ es un R-casi módulo. Esta operación hace que $G \times G'$ sea producto y coproducto de G y G'. El grupo trivial $\{0\}$ es evidentemente un R-casi módulo. Además se define

$$\begin{aligned}
(f+f')(rg+r'g') &= f(rg+r'g') + f'(rg+r'g') = \\
&= rf(g) + r'f(g') + rf'(g) + r'f'(g') = \\
&= r(f(g) + f'(g)) + r'(f(g') + f'(g')) = \\
&= r(f+f')(g) + r'(f+f')(g')
\end{aligned}$$

  y por tanto los homomorfismos de R-casi módulos forman grupos abelianos que, evidentemente, tienen también estructura de R-casi módulo. Al conservarse la suma de morfismos de grupos abelianos a R-casi módulos también se conserva la bilinealidad de la composición.

- Posee núcleos, conúcleos y productos tensoriales. $Ker f$ es grupo abeliano. Entonces $g \in Ker\ f$ si y sólo si $f(g) = 0$, de donde $f(rg) = rf(g) = = r0 = 0$, y por tanto $rg \in Ker\ f$ y $Ker\ f$ es un R-casi módulo.

  $Coker\ f$ es un grupo abeliano, y si $[g] \in Coker\ f$ se define $r[g] = [rg]$ haciendo a $Coker\ f$ un R-casi módulo, pues $[g] = [g']$ si y sólo si $g' - g \in \in Im\ f$ si y sólo si existe h tal que $f(h) = g' - g$ de donde $rg' - rg = = r(g' - g) = rf(h) = f(rh)$ con lo cual $[rg] = [rg']$.

Se define $G \otimes H$ como el grupo abeliano con conjunto de generadores $G \times H$ y conjunto de relaciones $\{(g,h)+(g,h')-(g,h+h'),(g,h)+$ $+(g',h)-(g+g',h),(rg,h)-(g,rh),g,g' \in G,h,h' \in H,r \in R\}$. Con la operación $r(g \otimes h) = rg \otimes h$, $G \otimes H$ es un R-casi módulo.

Una estructura análoga a la definida anteriormente para grupos abelianos hace de los R-casi módulos una EE'-categoría.

Un R-casi módulo G es contráctil cuando existe un homomorfismo $\theta :$ $: G \otimes R \to G$, notado por $\theta(g \otimes r) = rg$, con $\theta k = 1$, de donde $(rs)g =$ $= \theta(g \otimes rs) = \theta(r(g \otimes s)) = r(\theta(g \otimes s)) = r(sg)$, luego los R-casi módulos contráctiles son los R-módulos.

3. R- Módulos a izquierda.

Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos unitarios con $f(1) = 1$, S es un R- módulo a derecha con la operación $sr = sf(r)$, de donde para cualquier R-módulo M existen $M \otimes S$ y M^S como R-módulos a izquierda.

De esta forma los R-módulos a izquierda con una estructura definida análogamente las anteriores es una EE'-categoría con R-módulos contráctiles los que también admiten una estructura de S-casi módulo.

$\theta : M \otimes S \to M$ notado por $\theta(m \otimes s) = sm$ verifica

a) $s(m+m') = sm + sm'$, $s \in S$, $m, m' \in M$.

b) $(s+s')m = sm + s'm$, $s, s' \in S$, $m \in M$.

c) $1m = m$, $m \in M$.

Si $f : R \to S$ es epimorfismo, entonces los R-módulos contráctiles son los que admiten una estructura de S-módulo

$$d) \quad (ss')m \quad = \quad \theta(m \otimes ss') = \theta(m \otimes sf(r)) =$$

$$\begin{aligned} &= \theta(m \otimes sr) = \theta(rm \otimes s) \\ &= s(rm) = s\theta(rm \otimes 1) = \\ &= s\theta(m \otimes 1r) = s\theta(m \otimes 1f(r)) = \\ &= s\theta(m \otimes s') = s(s'm) \end{aligned}$$

donde $f(r) = s'$.

4. Complejos de Cadena de una Categoría Abeliana.

La adjunción existente entre los complejos de cadena de la forma $\{X_n \oplus \oplus X_{n-1}\}$ y $\{X_n \oplus X_{n+1}\}$ da origen a una EE'-categoría bien conocida, que genera la homotopía de los complejos de cadena [K3].

Dada una categoría abeliana $\mathbf{A}$ se define la categoría de complejos de cadena de $\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{A}$, como la que tiene por objetos pares (X, δ), donde $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con X_n objetos de $\mathbf{A}$ y $\delta = \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $\delta_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_{n-1}$ morfismos de $\mathbf{A}$ tales que y $\delta_{n-1}\delta_n = 0$, y por morfismos $f : (\mathrm{X}, \delta) \to (\mathrm{Y}, \delta')$ donde $f = \{f_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ verificando $\delta' f_n = f_{n-1}\delta$.

Por simplificar notación, en δ_n se suprimirá el índice cuando no lleve a error.

Kamps, en [K3], define una homotopía en $\delta\mathbf{A}$ utilizando el siguiente cilindro:

$I(\mathrm{X}, \delta) = (I\mathrm{X}, I\delta)$, con $(I\mathrm{X})_n = \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_{n-1}$ e $(I\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 1 \\ 0 & \delta & -1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix}$,

y dado $f : (\mathrm{X}, \delta) \to (\mathrm{Y}, \delta')$, $If = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 \\ 0 & 0 & f_{n-1} \end{pmatrix}$

$\iota_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\iota_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si se define $\psi : I^2 \to I$ por

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la categoría $\delta\mathbf{A}$ tiene un cilindro con producto natural. Al ser $\mathbf{A}$ categoría abeliana $\delta\mathbf{A}$ también lo es. Por tanto posee objeto cero, push outs y pull backs, y por la proposición VI.2.11 tiene el siguiente cono

$C(\mathrm{X}, \delta) = (C\mathrm{X}, C\delta)$, con $(C\mathrm{X})_n = \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_{n-1}$ y $(C\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & -1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$, y dado $f : (\mathrm{X}, \delta) \to (\mathrm{Y}, \delta')$ $Cf = \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n-1} \end{pmatrix}$

$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En particular $\delta\mathbf{A}$ es aditiva y por la proposición VI.2.8, al verificar k PEN ($pCk = 1$) se tiene que k_n también verifica PEN.

La homotopía de Kamps en los complejos de cadena también es posible obtenerla a través de un funtor cocilindro con producto natural.

$I'(\mathrm{X}, \delta) = (I'\mathrm{X}, I'\delta)$, con $(I'\mathrm{X})_n = \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_{n+1}$ e $(I'\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 1 & -1 & -\delta \end{pmatrix}$,

y dado $f : (\mathrm{X}, \delta) \to (\mathrm{Y}, \delta')$ $I'f = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 \\ 0 & 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}$

$\iota'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\iota'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, y $\rho' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\psi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que las matrices que definen las transformaciones naturales no son otras que las traspuestas de las respectivas de cilindro, y por ser la traspuesta de un producto de matrices el producto en orden inverso de las traspuestas se verifica (I'1).

Por la proposición dual de VI.2.11 se obtiene el siguiente cocono

$C'(\mathrm{X},\delta) = (C'\mathrm{X}, C'\delta)$, con $(C'\mathrm{X})_n = \mathrm{X}_n \oplus \mathrm{X}_{n+1}$ y $(C'\delta)_n = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix}$, y dado $f : (\mathrm{X},\delta) \to (\mathrm{Y},\delta')$ $C'f = \begin{pmatrix} f_n & 0 \\ 0 & f_{n+1} \end{pmatrix}$

$$k' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},\ p' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Razonando dualmente a lo hecho anteriormente, k'_n verifica PLN.

$\gamma : Hom(C-,\sim) \to Hom(-, C'\sim)$ definido por $\gamma\begin{pmatrix} f_n & g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$, donde $g_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}_{n+1}$ y $f_n = -(\delta g_n + g_{n-1}\delta)$, es un isomorfismo natural.

Además,

$$\begin{pmatrix} f_n & g_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_n & g_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_{n-1} & g_{n-1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma^{-1}\begin{pmatrix} f_n & g_{n-1} \\ g_n & 0 \end{pmatrix} = \\
&= (\gamma^{-1})^2 \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ g_n \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= (\gamma^{-1})^2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

de donde $k^* \cong k'_*$ y $p^* \cong p'_*$, por lo que se tiene por el teorema VI.2.2 una EE'-categoría.

(X, δ) es un complejo de cadena contráctil si existe, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_{n+1}$ verificando $\delta g_n + g_{n-1}\delta = -1$.

5. Espacios Topológicos Punteados.

La homotopía ordinaria de los espacios topológicos punteados también puede expresarse a través de una EE'-estructura.

La relación de homotopía clásica de los espacios topológicos es obtenida a través de un cilindro con producto natural:

$I\mathrm{X} = \mathrm{X} \times I$, donde $I = [0,1]$, y dado $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ aplicación continua $If = f \times 1$.

$\iota_0(x) = (x, 0)$, $\iota_1(x) = (x, 1)$, $\rho(x, t) = x$ y $\psi(x, t, s) = (x, ts)$.

Al tener **Top** push outs, objeto final $*$, y transformar I push outs en push outs, se puede definir por la proposición VI.2.11 un cono en **Top**:

$C\mathrm{X} = P\{\varepsilon_{\mathrm{X}}, (\iota_0)_{\mathrm{X}}\}$, y dada $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ aplicación continua, $Cf = 1 \cup If$, esto es, si *dom* $f \neq \phi$ entonces $Cf([(x,t)]) = [(f(x), t)]$, y si *dom* $f = \phi$ entonces $Cf(*) = [(x, 0)]$. Nótese que si $\mathrm{X} \neq \phi$ entonces $C\mathrm{X} = \mathrm{X} \times I/\mathrm{X} \times \{0\}$, y $C\phi = *$.

$k(x) = [(x, 1)]$ y $p([([(x,t)], s)]) = [(x, ts)]$. En el caso $\mathrm{X} = \phi$, k y p son únicas, por ser ϕ objeto inicial y $C\phi = *$ objeto final.

Es evidente que el cilindro conserva push outs, y por el teorema VI.2.5 el cono también los conserva. Por la proposición VI.2.12, los espacios topológicos con este cilindro forman una I-categoría con producto natural y todas las cofibraciones, pues evidentemente los morfismos iniciales tienen la PEH y se verifica $(I4)$ (ver [B2], pág. 29) donde la transformación de intercambio T viene definida por $T(x, t, s) = (x, s, t)$. Por el teorema VI.2.5 k_n verifican PEN. Luego **Top** es una E-categoría, y con estas mismas cofibraciones, por el teorema VI.2.5 una C-categoría.

Por lo visto en el capítulo V anterior se tiene que, con estas cofibraciones, $\mathbf{Top}^{COF\ *} = \mathbf{Top}^{COF\ C\phi}$ es también una C-categoría y en particular una E-categoría:

$C(\mathrm{X}, x_0) = (\mathrm{X} \times I)/(\mathrm{X} \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I)$, y dada $f : (\mathrm{X}, x_0) \to (\mathrm{Y}, y_0)$, $Cf([(x,t)]) = [(f(x), t)]$.

$k(x) = [(x, 1)]$, $p([([(x,t)], s)]) = [(x, ts)]$.

En general, si una categoría **C** posee push outs y $C\nabla$ es objeto final, se puede extender la estructura cónica de la subcategoría llena $\mathbf{C}^{COF\ C\nabla}$ a $\mathbf{C}^{C\nabla}$, verificándose todos los axiomas salvo que k tenga que ser cofibración. En el caso de los espacios topológicos, por poseer $\mathbf{Top}^*$ una estructura de cilindro con producto natural derivada de la de **Top**, ver [B2], y coincidir el cono de $\mathbf{Top}^{COF\ *}$ con el cono originado por el cilindro punteado, sí se puede asegurar que k es siempre cofibración en $\mathbf{Top}^*$, dando así origen a una estructura de C-categoría y en particular E-categoría.

$\mathbf{Top}^*$ también tiene pull backs, y C' definido por $C'(\mathrm{X}, x_0) = (\mathrm{X}, x_0)^{(I,0)}$, $C'f = f_*$ es un funtor adjunto a derecha de C mediante el isomorfismo natural

$\gamma : Hom(C-, \sim) \to Hom(-, C' \sim)$ definido por $(\gamma(f))(x)(t) = f([(x,t)])$, cuya inversa es $\gamma^{-1}(f')([(x,t)]) = (f'(x))(t)$.

Así, definiendo las transformaciones naturales $k'(\alpha) = \alpha(1)$ y $(p'(\alpha))(t)(s) = = \alpha(ts)$, $\mathbf{Top}^*$ es una EE'-categoría.

De esta forma surgen los grupos de homotopía clásica $\pi_n(\mathrm{X}, x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, como los denominados grupos de homotopía standard de la categoría punteada $\mathbf{Top}^{C\phi}$, así como las correspondientes sucesiones exactas de homotopía asociadas a una tripleta.

(X, x_0) es un espacio topológico punteado contráctil cuando $\{x_0\}$ es un retracto por deformación fuerte de X, pues existe $F : C(\mathrm{X}, x_0) \to (\mathrm{X}, x_0)$ verificando $Fk = 1$ si y sólo si existe $H : \mathrm{X} \times I \to \mathrm{X}$ verificando $H(x,0) = x_0$, $H(x,1) = x$ y $H(x_0, t) = x_0$.

VI.3.2 C-categorías y C'-categorías.

Primeramente se verán dos ejemplos de C'_0-categoría y C_0-categoría en R-módulos que dan origen a la homotopía proyectiva e inyectiva, respectivamente, dadas por B. Eckmann y P.J. Hilton [E] [Hi1] [Hi2], que no son C'-categoría ni C-categoría.

6. Homotopía proyectiva en R-módulos.

Sea $L : \mathbf{Set}^* \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ el funtor libre y $U : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M} \to \mathbf{Set}^*$ el funtor olvido, entonces (L, U) es un par adjunto de funtores mediante el isomorfismo natural de adjunción $\gamma : Hom(L-, \sim) \to Hom(-, U \sim)$ definido por $\gamma(f) = fi$, donde i es la aplicación inclusión en el libre.

Considerando el cocono trivial en $\mathbf{Set}^*$ se obtiene el respectivo en los R-módulos por la proposición VI.2.1.

$C'M = LM$, donde LM representa el R-módulo libre sobre el conjunto punteado $(M, 0)$, $C'f = Lf$ es el único R-homomorfismo inducido por el funtor libre, esto es, el único R-homomorfismo tal que $i_{codom\ f} f = Lf i_{dom\ f}$, donde i representa la aplicación inclusión en el libre.

k' es el único R-homomorfismo verificando $k'i = 1$ y p' es el único R-homomorfismo tal que $p'i = i^2$, esto es, $p' = Li$.

Al ser la categoría abeliana tiene pull backs, pero en general el funtor libre no transforma pull backs en pull backs (observación VI.3.1). En particular, al ser la categoría aditiva se tiene que los R-módulos, con este cocono, es una C_0'-categoría aditiva con todas las fibraciones (proposición dual de VI.2.10).

Un R-módulo M es contráctil cuando es proyectivo:

Sea P un R-módulo proyectivo, entonces $k' : LP \to P$ es un R-homomorfismo suprayectivo. Luego, por ser P proyectivo existe un R-homomorfismo $F : P \to LP$ tal que $k'F = 1$. Recíprocamente, si existe $F : P \to LP$ tal que $k'F = 1$, sean $f : P \to C$ un R-homomorfismo y $g : B \to C$ un R-homomorfismo suprayectivo. Como todo R-módulo libre es proyectivo, existe $f' : LP \to B$ tal que $gf' = fk'$. Luego $gf'F = fk'F = f$.

Un R-homomorfismo $f : M \to N$ es una fibración si y sólo si f es un epimorfismo

($\Rightarrow$) Si f es fibración, existe $\widetilde{k'} : LN \to M$ tal que $f\widetilde{k'} = k'$. Si $gf = hf$ entonces $g = gk'i = gf\widetilde{k'}i = hf\widetilde{k'}i = hk'i = h$.

($\Leftarrow$) Evidente, por coincidir los R-módulos contráctiles con los proyectivos.

Observación VI.3.1 Si se considera el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{M} \cong \mathbf{Ab}$. Sea $f : \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ definido por $f(a, b) = a + b$. $Ker\ f \cong \mathbb{Z}_4$, $Lf : L(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, (0,0)) \cong \bigoplus_{i=1}^{7} \mathbb{Z} \to L(\mathbb{Z}_2, 0) \cong \mathbb{Z}$ viene definida por $Lf(x_1, .., x_7) =$

$= x_4+x_5+x_6+x_7$, donde $\mathbb{Z}_i \cong \mathbb{Z}$ están generados por los elementos de $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ distintos de $(0,0)$ que van al neutro para $1 \leq i \leq 3$ y por los restantes distintos de $(0,0)$ para $4 \leq i \leq 7$.

$$L(Ker\ f, 0) \cong L(\mathbb{Z}_4, 0) \cong \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z} \neq Ker\ Lf \cong \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{Z}$$

Observación VI.3.2 Por el teorema dual del I.2.4, la homotopía proyectiva no puede ser obtenida mediante una C-estructura adjunta a la libre, al no conservar ésta límites finitos.

7. Homotopía inyectiva en R-módulos.

Sea Q_1 el grupo aditivo de los racionales módulo los enteros. Entonces $Hom(-, Q_1) : (_{\mathbf{R}}\mathbf{M})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{M_R}$ es un funtor adjunto a derecha de $Hom(-, Q_1) :$ $: \mathbf{M_R} \to (_{\mathbf{R}}\mathbf{M})^{\mathbf{op}}$, con isomorfismo natural de adjunción

$$\gamma : Hom_{(_{\mathbf{R}}\mathbf{M})^{\mathbf{op}}}(Hom(-, Q_1), \sim) \to Hom_{\mathbf{M_R}}(-, Hom(\sim, Q_1))$$

definido por $\gamma(f(m)(n)) = f(n)(m)$.

Por el apartado $a)$ del corolario VI.2.1 se tiene un cono:

CM $= Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$, y dado $f : M \to N$ homomorfismo de R-módulos, $Cf(h)(s_1 g_1 \hat{+} ... \hat{+} s_n g_n) = h(s_1(g_1 f) \hat{+} ... \hat{+} s_n(g_n f))$, $s_1 g_1 \hat{+} ... \hat{+} s_n g_n \in$ $\in L(Hom(N, Q_1))$, $h \in Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$, .

$k : M \to Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$ se define por $k(m)(s_1\alpha_1 \hat{+} ... \hat{+} s_n \alpha_n) =$ $= s_1\alpha_1(m) + ... + s_n\alpha_n(m)$.

$p : Hom(L(Hom((Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)), Q_1)), Q_1) \longrightarrow$ $\longrightarrow Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$ se define por $p(\alpha)(s_1\alpha_1 \hat{+} s_2\alpha_2 \hat{+} ..... \hat{+} s_n\alpha_n) =$ $= \alpha(s_1\alpha_1 +' s_2\alpha_2 +' ... +' s_n\alpha_n)$, usando que todo elemento m de un módulo M se puede interpretar como un elemento de $Hom(Hom(M, Q_1), Q_1)$ definido por $m(\alpha) = \alpha(m)$.

Haciendo un razonamiento dual al hecho en la homotopía proyectiva se tiene que los R-módulos, con este cono, es una C_0-categoría aditiva con todas las cofibraciones.

Los R-módulos contráctiles son los inyectivos:

$Hom(M, Q_1)$ es inyectivo, para todo módulo M, por ser Q_1 un grupo abeliano divisible (ver [Hi-], pág. 35). Si M es un módulo contráctil existe $F :$ $: Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1) \to M$ con $Fk = 1$. Considérese un homomorfismo $f : B \to M$ y un monomorfismo $g : B \to C$, entonces por ser $Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$ inyectivo existe $f' : C \longrightarrow Hom(L(Hom(M, Q_1)),$ $Q_1)$ con $f'g = kf$. Ff' hace inyectivo a M. Recíprocamente, si I es inyectivo entonces, al ser $k : M \to Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$ un monomorfismo existe $F : Hom(L(Hom(I, Q_1)), Q_1) \to I$ tal que $Fk = 1$. Obsérvese que si $k(m) = 0$ entonces $\alpha(m) = 0$, para todo $\alpha \in Hom(M, Q_1)$, de donde $m = 0$.

Un R-homomorfismo $f : M \to N$ es una cofibración si y sólo si es un monomorfismo:

($\Rightarrow$) Si f es cofibración existe $\widetilde{k} : N \to Hom(L(Hom(M, Q_1)), Q_1)$ tal que $\widetilde{k}f = k$. Si $fg = fh$ entonces $g = ikg = i\widetilde{k}fg = i\widetilde{k}fh = ikh = h$, donde i es una aplicación inversa a izquierda para k, al ser k inyectiva.

($\Leftarrow$) Evidente, por coincidir los R-módulos contráctiles con los inyectivos.

Observación VI.3.3 Por el corolario VI.2.2, usando los funtores $Hom(-, Q_1)$ anteriormente definidos, se puede definir el siguiente cono:

$C\mathrm{M} = Hom(Hom(\mathrm{M}, Q_1), Q_1)$ y $Cf(h)(g) = h(gf)$

$k(m)(\alpha) = \alpha(m)$ y $p(\alpha)(\beta) = \alpha(\beta)$.

Por la misma razón expresada anteriormente el cono de todo módulo M es un módulo inyectivo y k_M es un monomorfismo, de donde se deduce que los módulos contráctiles son también aquí los inyectivos, y por el teorema VI.2.4 se obtiene una estructura de C_0-categoría aditiva con todas las cofibraciones equivalente a la anterior.

Observación VI.3.4 Tanto la homotopía proyectiva como la inyectiva se pueden definir independientemente de la lateralidad de los módulos.

8. C y C'-categorías aditivas.

Todos los ejemplos de EE'-categorías aditivas vistos anteriormente, grupos abelianos, R-casi módulos, R-módulos y complejos de cadena, son también ejemplos, por la proposición VI.2.8 y su dual, de C y C'-categorías con todas las cofibraciones y fibraciones, respectivamente.

En las homotopías tensoriales anteriormente definidas las cofibraciones o fibraciones dependerán del anillo unitario elegido.

En los complejos de cadena, $i : (\mathrm{B}, \delta) \to (\mathrm{A}, \delta')$ es cofibración si y sólo si para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe $r_n : \mathrm{A}_n \to \mathrm{B}_n$ tal que $r_n i_n = 1$.

Sea $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : (\mathrm{B}, \delta) \to C(\mathrm{B}, \delta)$, entonces existe $\widetilde{k} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : (\mathrm{A}, \delta') \longrightarrow$

$\to C(\mathrm{B}, \delta)$ tal que $\widetilde{k} i = k$, de donde $\begin{pmatrix} (a_1)_n \\ (a_2)_n \end{pmatrix} i_n = \begin{pmatrix} (a_1)_n i_n \\ (a_2)_n i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(a_1)_n$ es entonces una retracción para i_n, $n \in \mathbb{Z}$.

Recíprocamente, sea $\widehat{k}_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \delta r_n - r_{n-1}\delta \end{pmatrix}$, entonces $\begin{pmatrix} r_n \\ \delta r_n - r_{n-1}\delta \end{pmatrix} \delta =$

$$= \begin{pmatrix} r_n \delta \\ \delta r_n \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \delta r_{n+1} - r_n \delta \end{pmatrix}.$$

Un razonamiento semejante da que las fibraciones son los morfismos que tienen secciones en cada nivel.

En este caso las cofibraciones y fibraciones coinciden con las definidas por Kamps en [K3], es decir, las cofibraciones PEN y las fibraciones PLN coinciden con las cofibraciones PEH y las fibraciones PLH, respectivamente.

Por último, se verán ejemplos originados por cilindros o cocilindros con productos naturales.

9. Espacios Topológicos.

En el ejemplo 5 ya se vio que los espacios topológicos, con las cofibraciones PEH, forman una C-categoría.

Strϕm prueba en [St2] que $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ es cofibración si y sólo si $P\{\iota_0, i\}$ es un retracto de $I\mathrm{A}$. Por otro lado en, [St1], prueba que si i es cofibración entonces $i : \mathrm{B} \to i(\mathrm{B})$ es un homeomorfismo, por lo que se puede siempre suponer, identificando B con $i(\mathrm{B})$, que B es un subconjunto de A, de donde $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ cofibración es cerrada si y sólo si $i(\mathrm{B})$ es cerrado en A.

Existen cofibraciones no necesariamente cerradas: Considérese $\mathrm{B} = \{x\}$ y $\mathrm{A} = \{y, z\}$ con la topología indiscreta, cualquier aplicación $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ es una cofibración no cerrada. Luego las cofibraciones cerradas forman un subconjunto propio de las cofibraciones PEH.

Los espacios topológicos con su cilindro con producto natural y las cofibraciones cerradas son también una I-categoría con producto natural, pues si $i : \mathrm{B} \rightarrowtail \mathrm{A}$ es cofibración cerrada entonces $\bar{i}$ también es cofibración, y cerrada pues $\bar{i}^{-1}(\bar{i}(\mathrm{X})) = \mathrm{X}$ cerrado y $\overline{f}(\bar{i}(\mathrm{X})) = \bar{i}(\mathrm{B})$ también cerrado. Evidentemente la composición de aplicaciones cerradas es cerrada. Por último

$i^1(T^i) = (i \times 1)(\mathrm{B} \times I) \cup \mathrm{A} \times \{0\} \cup \mathrm{A} \times \{1\}$ cerrado en $\mathrm{A} \times I$, de donde i^1 además de cofibración es cerrada.

Por el teorema VI.2.5 **Top**, con las cofibraciones cerradas, tiene estructura de C-categoría.

Por la proposición VI.2.2, **Top** con las cofibraciones generadas es una C-categoría. Por poseer **Top** push outs, las cofibraciones generadas se reducen a las aplicaciones continuas $i : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ tales que i_n verifica PEN, para todo $n \in I\!N^*$. En particular, por el teorema VI.2.5 toda cofibración PEH es una cofibración generada, sin embargo un morfismo puede verificar PEN y no PEH: sea $i : \{0\} \to \mathrm{A} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ / \ n \in I\!N\}$, entonces i verifica PEN pero no verifica PEH, pues $(\{0\} \times I) \cup \{\frac{1}{n} \ / \ n \in I\!N\}$ no es un retracto de $\mathrm{A} \times I$, condición equivalente a PEH (ver [St1]). No obstante este morfismo i no es una cofibración generada, pues i_1 no verifica PEN.

La relación de homotopía clásica de los espacios topológicos puede obtenerse también a través de un funtor cocilindro con producto natural:

$I'\mathrm{X} = \mathrm{X}^I = Hom_{\mathbf{Top}}(I, \mathrm{X})$ con la topología compacto abierta, donde $I = [0,1]$, y dado $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ aplicación continua $I'f = f_*$.

$\iota'_0(\alpha) = \alpha(0)$, $\iota'_1(\alpha) = \alpha(1)$, $\rho'(x) = C_x$ donde $C_x(t) = x$, y $\psi'(\alpha)(t)(s) = \alpha(ts)$, donde $\alpha \in \mathrm{X}^I$, $x \in \mathrm{X}$, $t, s \in I$.

Al tener **Top** pull backs, transformar P pull backs en pull backs, conservar el objeto final y poseer una transformación de intercambio T' definida por $T'(\alpha)(t)(s) = \alpha(s)(t)$, por la proposición dual de VI.2.12 se tiene que los espacios topológicos con este funtor cocilindro es una I'-categoría con producto natural y todas las fibraciones, pues evidentemente los morfismos finales tienen la PLH y se verifica $(I'4)$ (ver [B1], pág. 133).

Observación VI.3.5 Por el dual del teorema VI.2.5, **Top** con estas fibraciones es una C'-categoría trivial, en el sentido de que $C'X = P < \phi_{\mathrm{X}}, (\iota'_0)_{\mathrm{X}} >=$ $= \phi$ para todo espacio X, y no existen aplicaciones continuas con codominio ϕ, necesarias para poder definir homotopía.

10. Espacios Topológicos Punteados.

Ya se vio en el ejemplo 5 que **Top*** con:

$C(\mathrm{X}, x_0) = (\mathrm{X} \times I)/(\mathrm{X} \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I)$, $Cf([(x,t)]) = [(f(x), t)]$.

$k(x) = [(x,1)]$, $p([([(x,t)], s)]) = [(x, ts)]$.

y las cofibraciones punteadas es una C-categoría.

Top* con el cocono definido en el ejemplo 5:

$C'(\mathrm{X}, x_0) = (\mathrm{X}, x_0)^{(I,0)}$, $C'f = f_*$.

$k'(\alpha) = \alpha(1)$, $(p'(\alpha))(t)(s) = \alpha(ts)$,

y con las fibraciones de Hurewicz es una C'-categoría.

11. Espacios Exteriores.

La categoría **P** formada por los espacios topológicos con las aplicaciones propias no posee, en general, límites y colímites. En particular no siempre existen push outs, y es necesario extender esta categoría a una más amplia que la contenga como subcategoría llena y que sí los posea para poder así definir, a través de un cilindro con producto natural, una estructura de cono natural cuya homotopía restringida a la subcategoría llena **P** coincida con la homotopía propia de los espacios topológicos (Ver [G-]).

Dado un conjunto X con una topología τ, una externología ε sobre X es cualquier subconjunto de τ verificando:

E1: Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$.

E2: Si $A \in \tau$ y existe $E \in \varepsilon$ con $E \subset A$ entonces $A \in \varepsilon$.

A (X, ε, τ) se le denomina espacio exterior. Una aplicación $f : (X, \varepsilon, \tau) \to \to (X', \varepsilon', \tau')$ se dirá exterior cuando es continua y para todo $E' \in \varepsilon'$, $f^{-1}(E') \in \in \varepsilon$.

Los espacios exteriores con sus aplicaciones forman la categoría $\mathbf{E}$.

Se define:

- $I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ por $I(X, \varepsilon, \tau) = (X \times I, \varepsilon_{X\times I}, \tau_{X\times I})$, donde I es el intervalo unidad con la externología $\{I\}$, $\tau_{X\times I}$ es la topología producto y $\varepsilon_{X\times I}$ es la externología producto $\varepsilon_{X\times I} = \{A \in \tau_{X\times I} \;/\; \textit{existen } E \in \in \varepsilon \textit{ y } E' \in \varepsilon_I \textit{ con } E \times E' \subset A\} = \{A \in \tau_{X\times I} \;/\; \textit{existe } E \in \varepsilon \textit{ con } E \times I \subset A\}$ e $If = f \times 1_I$, exterior pues si $A \in \varepsilon_{X'\times I}$ existe $E \in \varepsilon_{X'}$ tal que $E \times I \subset A$, de donde $f^{-1}(E) \times I = (f \times 1_I)^{-1}(E \times I) \subset \subset (f \times 1_I)^{-1}(A)$. Al ser f exterior y $f \times 1_I$ continua, por definición de externo se tiene el resultado.

- $\iota_r : X \to X \times I$ por $\iota_r(x) = (x, r)$ $(r \in \{0, 1\})$.

- $\rho : X \times I \to X$ por $\rho(x, t) = x$.

- $\psi : X \times I \times I \to X \times I$ por $\psi(x, t, s) = (x, ts)$.

ι_r, ρ, ψ son continuas, y

- Dado $E' \in \varepsilon_{X\times I}$ existe $E \in \varepsilon$ tal que $E \times I \subset E'$, de donde $E = = \iota_r^{-1}(E \times I) \subset \iota_r^{-1}(E')$, y por E2 $\iota_r^{-1}(E') \in \varepsilon$.

- Dado $E \in \varepsilon$, $E \times I = \rho^{-1}(E) \in \varepsilon_{X\times I}$

- Dado $E' \in \varepsilon_{X\times I}$ existe $E \in \varepsilon$ tal que $E \times I \subset E'$, de donde $E \times I \times I = = \psi^{-1}(E \times I) \subset \psi^{-1}(E') \in \varepsilon_{X\times I\times I}$ por definición.

$(I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ es así un cilindro con producto natural en **E**, pues las propiedades se siguen verificando como en **Top**.

E posee push outs: Sean $f : X \to X'$ y $g : X \to X''$ aplicaciones exteriores, entonces $P\{f, g\} = (P\{f, g\}, \varepsilon_{P\{f,g\}}, \tau_{P\{f,g\}})$, donde $P\{f, g\}$ es el push out en **Set**, $\tau_{P\{f,g\}}$ es la topología asociada a $P\{f, g\}$ en **Top** y $\varepsilon_{P\{f,g\}} = \{A \subset \subset P\{f, g\} \;/\; \overline{f}^{-1}(A) \in \varepsilon'' \; y \; \overline{g}^{-1}(A) \in \varepsilon'\}$, pues si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente, $\varepsilon_Y = \{A \subset Y \;/\; p^{-1}(A) \in \varepsilon_X\}$ es una externología para Y:

E1: Dados A_1, $A_2 \in \varepsilon_Y$, $p^{-1}(A_1 \cap A_2) = p^{-1}(A_1) \cap p^{-1}(A_2) \in \varepsilon_X$.

E2: Sean $E \in \varepsilon_Y$ y $A \in \tau_Y$ tales que $E \subset A$. Entonces $p^{-1}(E) \subset p^{-1}(A) \in \varepsilon_X$ por ser un abierto conteniendo a un externo.

Evidentemente $(\phi, \{\phi\}, \{\phi\})$ es objeto inicial y $(*, \{*\}, \{\phi, *\})$ es objeto final, pues $X \in \varepsilon_X$ para todo X, por E2.

El cilindro conserva push outs, pues lo hace en **Top**, y el objeto push out en **E** coincide con el de **Top** con la externología ya indicada.

$T : X \times I \times I \to X \times I \times I$ definida por $T(x, t, s) = (x, s, t)$ es exterior, pues dado $A \in \varepsilon_{X \times I \times I}$ existe $B \in \varepsilon_{X \times I}$ tal que $B \times I \subset A$ y existe $C \in \varepsilon_X$ tal que $C \times I \subset B$, de donde $C \times I \times I \subset A$. Se concluye que $C \times I \times I = = T^{-1}(C \times I \times I) \subset T^{-1}(B \times I) \subset T^{-1}(A)$ externo por definición.

Por último se consideran como cofibraciones los morfismos i que verifican PEH, o equivalentemente que $\{Ii, \iota_0\}$ es una sección (ver [K3]):

Sea $\alpha : I \times I \to I \times I$ un homeomorfismo que sobre la frontera actúe enviando homeomórficamente $\{0\} \times I \cong [\frac{1}{3}, 0] \times \{0\}$, $I \times \{0\} \cong [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{0\}$, $\{1\} \times I \cong [\frac{2}{3}, 1] \times \{0\}$, $[0, \frac{1}{3}] \times \{1\} \cong \{0\} \times I$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{1\} \cong I \times \{1\}$ y $[1, \frac{2}{3}] \times \{1\} \cong \{1\} \times I$, donde se ha dotado a los intervalos del sentido adecuado, considerando $I = [0, 1]$.

Se define $\sqcup$ por el siguiente push out

$$\begin{tikzcd}
S^0 \arrow[r, tail, "\iota_0 \sqcup \iota_0"] \arrow[d, tail, "\{\iota_0,\iota_1\}"'] & I \sqcup I \arrow[d, tail] \\
I \arrow[r, tail] & \sqcup
\end{tikzcd}$$

y $\alpha' : I \times I \to \sqcup$ es la proyección desde el punto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ del cuadrado $I \times I$ sobre $\sqcup$ identificado con $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)$.

Sean

$$\beta_1 = \overline{i^1} I(\overline{i \sqcup i})(1 \times \alpha^{-1})T : IIB \to P\{\iota_0, i^1\}$$

$$\beta_2 = \{\overline{i^1} I\overline{\{\iota_0, \iota_1\}}, \overline{\iota_0}\}(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 : IA \to P\{\iota_0, i^1\}$$

$1 \times \alpha : IIA \to IIA$ es un isomorfismo exterior con $(1 \times \alpha)^{-1} = 1 \times \alpha^{-1}$ sin más que tener en cuenta que $\alpha : I \times I \to I \times I$ es un homeomorfismo y la identidad envía todo externo sobre sí mismo. Por otro lado $1 \times \alpha' : A \times I \times I \to$ $\to A \times \sqcup$ también es exterior, considerando en el push out de definición de $\sqcup$ $\varepsilon_* = \{*\}$ y $\varepsilon_I = \{I\}$, de donde $\varepsilon_{A \times \sqcup} = \{O \in \tau_{A \times \sqcup} \ / \ existe\ E \in \varepsilon_A\ con E \times \sqcup \subset$ $\subset O\}$.

Se concluye que β_1 y β_2 son exteriores, por ser composición de ellas. Además

$$\begin{aligned}
\beta_2 Ii &= \{\overline{i^1} I\overline{\{\iota_0, \iota_1\}}, \overline{\iota_0}\}(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 Ii = \\
&= \{\overline{i^1} I\overline{\{\iota_0, \iota_1\}}, \overline{\iota_0}\}(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})I^2 i\iota_0 = \\
&= \{\overline{i^1} I\overline{\{\iota_0, \iota_1\}}, \overline{\iota_0}\}(1 \times \alpha')I^2 i(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 = \\
&= \{\overline{i^1} I\overline{\{\iota_0, \iota_1\}}, \overline{\iota_0}\}(I(i \sqcup i) \cup Ii)(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 = \\
&= \{\overline{i^1} I\overline{\{\iota_0, \iota_1\}} I(i \sqcup i), \overline{\iota_0} Ii\}(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 = \\
&= \{\overline{i^1} I(\overline{i \sqcup i})I\{\iota_0, \iota_1\}, \overline{\iota_0} i^1 \overline{i \sqcup i}\}(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 = \\
&= \{\overline{i^1} I(\overline{i \sqcup i})I\{\iota_0, \iota_1\}, \overline{i^1}\iota_0 \overline{i \sqcup i}\}(1 \times \alpha')(1 \times \alpha^{-1})\iota_0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\overline{i^1}I(\overline{i \sqcup i})I\{\iota_0,\iota_1\}, \overline{i^1}I(\overline{i \sqcup i})\iota_0\}(1\times\alpha')(1\times\alpha^{-1})\iota_0 = \\
&= \overline{i^1}I(\overline{i \sqcup i})\{I\{\iota_0,\iota_1\},\iota_0\}(1\times\alpha')(1\times\alpha^{-1})\iota_0 \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{i^1}I(\overline{i \sqcup i})(1\times\alpha')(1\times\alpha^{-1})\iota_0 = \\
&= \overline{i^1}I(\overline{i \sqcup i})(1\times\alpha')(1\times\alpha^{-1})TI\iota_0 = \\
&= \beta_1 I\iota_0
\end{aligned}$$

$(*)$ Obsérvese que, en general, $(1\times\alpha')_{A\times\sqcup} = 1_{A\times\sqcup}$, donde la inclusión es $\{I\{\iota_0,\iota_1\},\iota_0\} : A\times\sqcup \to IIA$.

Luego existe $\beta = \{\beta_1,\beta_2\} : IP\{\iota_0, i\} \to P\{\iota_0, i^1\}$.

La retracción para $\{Ii^1,\iota_0\}$ es $\beta IrT(1\times\alpha)$, donde r es una retracción para $\{Ii,\iota_0\}$.

Por la proposición VI.2.12, $(\mathbf{E}, I, \iota_0, \iota_1, \rho, \psi)$ es una I-categoría con cilindro natural y todas las cofibraciones, y por el teorema VI.2.5, con estas mismas cofibraciones y el cono (C,k,p) inducido, es una categoría con cono natural cuya homotopía coincide con la obtenida mediante el cilindro anterior. Obsérvese que $\varepsilon_{CX} = \{O \in \tau_{CX} \ / \ existe\ E \in \varepsilon_X\ con\ CE \subset O\}$.

Bibliografía

[B1] BAUES, H.J.

Obstruction Theory. Lecture Notes in Math **628**, Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg-New York (1977).

[B2] BAUES, H.J.

Algebraic homotopy. Cambridge University Press (1989).

[Bo] BORCEUX, F,

Handbook of Categorical Algebra 1, 2, 3. Encyclopedia of Mathematics and its applications, **50, 51, 52**. Cambridge University Press (1994).

[Br] BROWN, K.S.

Abstract homotopy theory and generalizated sheaf cohomology. T Am Math Soc, **186** (1973), 419-458.

[C] CURTIS, E.B.

Simplicial Homotopy theory. Adv Math, **6** (1971), 107-209.

[D-1] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.

Homotopía algebraica: Descripción e interrelación de las principales teorías. Monografías Acad Cienc Zaragoza **5** (1994).

[D-2] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.

Grupos en categorías de homotopía. Monografías Acad Cienc Zaragoza **6**

(1995).

[D-3] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.
Un estudio en Homotopía Aditiva. Simposium Internacional de la Matemática Actual, Secr Publ Univ La Laguna. ISBN:84-7756-444. 255--265 (1996).

[D-4] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.
Homotopía Axiomática. Simposium Internacional de la Matemática Actual, Secr Publ Univ La Laguna. ISBN:84-7756-444. 237-244 (1996).

[D-5] DIAZ, F.J.; GARCIA-CALCINES, J.; RODRIGUEZ-MACHIN, S.
Homotopía Semisimplicial. Simposium Internacional de la Matemática Actual, Secr Publ Univ La Laguna. ISBN:84-7756-444. 245-254 (1996).

[Di-] DIECK,T., KAMPS, K.H. AND PUPPE, D.
Homotopietheorie. Lecture Notes in Math **157**, Springer-Verlag (1970)

[Dw-] DWYER, W.G. AND KAN, D.M.
Homotopy theory and simplicial grupoids. Proc Konink Neder Akad, **87** (1984), 379-389.

[E] ECKMANN, B.
Homotopie et dualité. Colloque de Topologie algebraique Louvain, (1956).

[E-1] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.
Groupes d'homotopie et dualité. B Soc Math Fr, **86** (1958), 271-281.

[E-2] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.
Groups like structures in general categories, I multiplications. Ann Math, **145** (1962), 227-255.

[E-3] ECKMANN, B. AND HILTON, P.J.

Unions and intersections in Homotopy Theory. Comment Math Helv, **38** (1964), 239-307.

[Ed-] EDWARS, D.A. AND HASTING, H.M.

Čech and Steenrod Homotopy Theories. Lecture notes in Math **542**, Springer-Verlag (1976).

[Ei-] EILENBERG, S. AND STEENROD, N.

Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press (1952).

[F] FREYD, P.

Abelian Categories. Harper International (1966).

[G-] GARCIA-CALCINES, J.; GARCIA-PINILLOS, M.; HERNANDEZ-PARICIO, L.J.

A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories. B Aust Math Soc, **57** (1998), 221-242.

[Go] GODEMENT, R.

Théorie des faisceaux. Paris: Hermann (1958).

[Gol-] GOLASINSKI, M. AND GROMADZKI, G.

The homotopy category of chain complex is a homotopy category. Colloq Math, **47**, 2 (1982), 173-178.

[Gr] GRAY, B.

Homotopy theory. Academic Press (1975).

[H-] HALPERIN, S. AND WATKISS, C.

Relative Homotopical Algebra. Lille Publ, IRMA.

[He1] HELLER, A.

Homotopical Algebra in abelian categories. Ann Math, **68** (1958), 484-525.

[He2] HELLER, A.

Stable Homotopy Categories. B Am Math Soc, **74** (1968), 28-36.

[He3] HELLER, A.

Abstract homotopy in categories of cofibrations and the spectral sequence of Eilenberg-Moore. J Math, **16** (1972).

[Her] HERNANDEZ, L.J.

Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos. Dpto. de Geometría y Topología. Universidad de Zaragoza (1980).

[Hi1] HILTON, P.J.

Homotopy theory of Modules and duality. International Symposium on Algebraic Topology. Univ Nacional Autónoma de Mexico (1958), 273--281.

[Hi2] HILTON, P.J.

Homotopy theory and duality. Nelson Gordon and Breach (1965).

[Hi-] HILTON, P.J. AND STAMMBACH, U.

A course in Homological Algebra. Springer-Verlag GTM 4, New York (1971).

[Hu] HU, S.T.

Homotopy theory. Academic Press (1959).

[Hub1] HUBER, P.J.

Homotopy theory in general categories. Math Ann, **144** (1961), 361--385.

[Hub2] HUBER, P.J.

Standard constructions in Abelian Categories. Math Ann, **146** (1962), 321-325.

[K1] KAMPS, K.H.

Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopietheorie. Math Zeitschrift, **124** (1972), 215-236.

[K2] KAMPS, K.H.

Fundamentelgruppoid and Homotopien. Arch Math, **24** (1973), 456-460.

[K3] KAMPS, K.H.

Note on normal sequences of chain complexes. Colloq Math, **39**, 2 (1978), 225-227.

[Ka] KAN, D.M.

Abstract homotopy I,II. Proc Nat Acad Sci USA, **41** (1955), 1092-1096.

[Kl1] KLEISLI, H.

Homotopy theory in Abelian Categories. Can J Math, **14** (1962), 139-169.

[Kl2] KLEISLI, H.

Every Standard construction is induced by a pair of Adjount Functors. P Am Math Soc, **16**, 3 (1965) 544-546.

[M] Mac LANE, S.

Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics **5**. Springer-Verlag (1971).

[Ma] MARDEŠIC, S. AND SEGAL, J.
Shape Theory. North-Holland (1982).

[May] MAY, J.P.
Simplicial objets in Algebraic Topology. Van Nostrand (1967).

[P-] PADRON, E. AND RODRIGUEZ-MACHIN, S.
Model additive categories. Suppl Rendiconti Circolo Mat Palermo. Serie II. **24** (1990), 465-474.

[Po] POPESCU, N.
Abelian Categories with applications to Rings and Modules. Academic Press (1973).

[Pu] PUPPE, V.
A remark on homotopy fibrations. Manuscripta Math, **12** (1974), 113-120.

[Q1] QUILLEN, D.G.
Homotopical algebra. Lecture notes en Math **43**, Springer-Verlag (1967).

[Q2] QUILLEN, D.G.
Rational homotopy theory. Ann Math, **90** (1969), 205-295.

[R] RODRIGUEZ-MACHIN, S.
Homotopy theories in additive categories are homotopies of Δ-groups. Suppl Rendiconti Circolo Mat Palermo, **39** (1990), 47-57.

[S] SANZ, M.
Homotopía en R-casi módulos. Dpto Geometría y Topología Univ de Zaragoza (1980).

[Se] SEEBACH, J.A. JR.
Injectives and homotopy. I V J Math **16** (1972) 446-453.

[St1] STRØM, A.

Note on cofibrations. Math Scand, **19** (1966), 11-14.

[St2] STRØM, A.

Note on cofibrations II. Math Scand, **22** (1968), 130-142.

[St3] STRØM, A.

The homotopy category is a homotopy category. Arch Math, **23** (1972), 435-441.

[W1] WHITEHEAD, J.H.C.

Combinatorial Homotopy II. B Am Math Soc, **55** (1949), 213-245.

[W2] WHITEHEAD, J.H.C.

Algebraic homotopy theory. Proc Int Congress of Mathematicians, Harvard, **2** (1950), 354-357.

[W3] WHITEHEAD, J.H.C.

A certain exact sequence. Ann Math, **52** (1950), 51-110.

[W4] WHITEHEAD, J.H.C.

Simple homotopy types. Am J Math, **72** (1950), 1-57.

F.J. Díaz.
Departamento de Matemática Fundamental.
Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna.
C/ Astrofísico Fco. Sánchez s/n.
38071 - La Laguna.
S/C de Tenerife. España.

fradiaz@ull.es