UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Filtros uniformes y geometría algebraica no conmutativa

Manuel García Román

La Laguna, 1998

Memoria de tesis doctoral dirigida por:
Dra. C. Mercedes Márquez Hernández
Dr. Alain H. M. J. Verschoren

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Departamento de Matemática Fundamental
Área de Álgebra

Filtros uniformes y geometría algebraica no conmutativa

Manuel García Román

Memoria de tesis para la obtención del título de doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de La Laguna que presenta el licenciado Manuel García Román bajo la dirección de la Dra. Concepción Mercedes Márquez Hernández y el Dr. Alain H. M. J. Verschoren.

La Laguna, 1998

Índice General

Índice General **i**

Introducción **iii**

Notación **xiii**

1 Preliminares **1**

1.1. Geometría algebraica clásica 1

1.1.1. Variedades algebraicas 1

1.1.2. El espectro de un anillo conmutativo 5

1.1.3. Haces y esquemas 7

1.2. Localización en categorías de módulos 13

1.3. Compatibilidad y estabilidad 22

2 Geometría algebraica no conmutativa: visión histórica **29**

2.1. El espectro de un anillo no conmutativo 29

2.2. Localización de bimódulos y anillos con identidad polinomial . 36

2.3. Birradicales y haces 44

2.4. Álgebras esquemáticas 49

3 Filtros uniformes **57**

3.1. El retículo de los filtros uniformes 57

3.2. Inducción de filtros uniformes 76

4 Topologías de Grothendieck y haces de estructura **83**

4.1. Algunos resultados algebraicos 84

4.2. El *sitio no conmutativo* 98

5 Casi–Cuantales 115
5.1. $R - \mathbf{filt}^{opp}$ es un casi–cuantal 115
5.2. Haces en un casi–cuantal 123
5.3. El teorema de representación 136
5.4. Funtorialidad 147

Bibliografía 157

Introducción

La geometría algebraica clásica, que ha influido de forma decisiva en la teoría de representación de anillos y que, de hecho, proporciona una técnica eficaz para representar cualquier anillo conmutativo por medio de las secciones globales de un *haz* sobre un espacio topológico, constituye la base de la generalización de dicha teoría para anillos no necesariamente conmutativos. Esta generalización acarrea diversos problemas que surgen, principalmente, porque la intersección de los abiertos está, de una u otra forma, ligada al producto (no conmutativo) de ideales.

El objetivo principal de esta memoria es la obtención de una teoría de representación para anillos no necesariamente conmutativos. Para conseguir dicha representación asociaremos, a cada anillo, un *espacio sin puntos* dotado de una *topología* en la que la intersección de los abiertos no sea necesariamente conmutativa, y que generalice la noción de espectro primo con la topología de Zariski de un anillo conmutativo.

La idea de representar una estructura algebraica por medio de haces en un *espacio sin puntos* no es nueva ([27, 29, et al.]). Pero, por otra parte, la idea de hacerlo en un espacio con una *topología* no conmutativa (por ejemplo, en un *cuantal*[1]) es relativamente reciente ([2, 5, 6, 8, 18, 47, 52]).

Es de sobra conocido que los anillos de polinomios conmutativos pueden ser representados geométricamente como el conjunto de soluciones de una familia de ecuaciones. El conjunto de las soluciones en un cuerpo k de un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left.\begin{array}{c} p_1(X) = 0 \\ \cdots \\ p_t(X) = 0 \end{array}\right\}$$

(donde $p_i(X) \in k[x_1, \ldots, x_n]$) puede ser estudiado como un conjunto de elementos del espacio afín n–dimensional $\mathbb{A}_k^n$. Estos conjuntos de soluciones (o *conjuntos algebraicos afines*) quedan también determinados como los ceros de

[1] Traducción del término francés *quantale*.

los polinomios del radical del ideal de $k[X]$ generado por $p_1(X), \ldots, p_t(X)$, de tal manera que, si k es algebraicamente cerrado, entonces existe una biyección entre los ideales radicales de $k[X]$ y los conjuntos algebraicos afines en $\mathbb{A}_k^n$. Esta correspondencia permite, a partir de propiedades geométricas del conjunto algebraico afín $V(I)$, inducir propiedades algebraicas de su anillo de coordenadas $k[X]/I$, y viceversa. Por ejemplo, si se dota a $\mathbb{A}_k^n$ de la topología que tiene como conjuntos cerrados a los conjuntos algebraicos afines, entonces el anillo $k[X]/I$ es un dominio de integridad si, y sólo si, $V(I)$ es un conjunto cerrado irreducible (una variedad) en $\mathbb{A}_k^n$. Además, los ideales maximales de $k[X]/I$ se corresponden biyectivamente con los puntos de $V(I)$, y si I es un ideal primo, entonces la localización de $k[X]/I$ en el ideal maximal correspondiente a un punto $x \in V(I)$ es un anillo regular si, y sólo si, x es no singular.

La potencia de esta técnica está en que, si $V(I)$ es una variedad afín, entonces el conjunto de funciones regulares en $V(I)$ tiene estructura de anillo y es isomorfo a $k[X]/I$, lo que permite recuperar el anillo de coordenadas a partir de la variedad. Además, el anillo de funciones regulares en un punto x de $V(I)$ es isomorfo a la localización de $k[X]/I$ en el ideal maximal que corresponde a dicho punto x.

En un primer intento de asociar un espacio topológico a un anillo conmutativo arbitrario A, de manera que se puedan inducir propiedades algebraicas en A a partir de propiedades geométricas de dicho espacio, es natural pensar en el conjunto de ideales maximales $\mathbf{Max}A$ de A. Sin embargo, si se pretende que esta construcción sea funtorial, este espacio no es el más adecuado, ya que si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de B, en general $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ no es un ideal maximal, sino un ideal primo de A. Puesto que la imagen inversa de un ideal primo también es un ideal primo, parece razonable considerar el espectro primo $\mathbf{Spec}A$ como espacio asociado a A. Al conjunto $\mathbf{Spec}A$ se le dota de la topología de Zariski, que es aquella en la que los conjuntos cerrados son de la forma

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}A \ ; \ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \ ,$$

siendo $\mathfrak{a}$ un ideal de A.

Un haz de anillos sobre un espacio topológico X es un espacio recubridor $E \xrightarrow{\pi} X$ de manera que $\pi^{-1}(x) = A_x$ es un anillo para cada $x \in X$, y las aplicaciones

$$\begin{aligned} A_x \times A_x &\longrightarrow A_x \\ (a\ ,\ b) &\longmapsto a+b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_x \times A_x &\longrightarrow A_x \\ (a\ ,\ b) &\longmapsto ab \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A_x &\longrightarrow A_x \\ a &\longmapsto -a \end{aligned}$$

son continuas. Si A es un anillo conmutativo, se define de manera canónica un *haz de estructura* sobre el espacio $\mathbf{Spec}A$, tomando como fibra del punto $\mathfrak{p}$ a la localización de A en $\mathfrak{p}$, y dotando a $E = \biguplus A_{\mathfrak{p}}$ de la topología inducida por la proyección $E \xrightarrow{\pi} \mathbf{Spec}A$.

Una sección del haz E en el abierto U de X es una aplicación continua $s : U \longrightarrow E$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo. El conjunto de secciones sobre el abierto U se denota por $\Gamma(U)$ y tiene estructura de anillo. El anillo A se obtiene de nuevo como el anillo de secciones globales $\Gamma(\mathbf{Spec}A)$ del haz de estructura $E \xrightarrow{\pi} \mathbf{Spec}A$. De esta forma todo anillo conmutativo puede ser representado como el anillo de secciones globales de un haz sobre un espacio topológico.

La generalización de este resultado a una familia más general de anillos (no necesariamente conmutativos) plantea diversos problemas. El primero es la elección del espacio topológico adecuado, pues en un anillo no conmutativo se pueden considerar distintas generalizaciones de la noción de ideal primo ([15, 35, 36, 37, et al.]).

El espectro de ideales primos biláteros surge de manera natural del conjunto de representaciones absolutamente irreducibles de una k–álgebra con identidad polinomial ([50]). De hecho, para ciertos anillos *no demasiado* no conmutativos, por ejemplo, para anillos totalmente acotados a izquierda, es posible construir de manera funtorial un haz sobre el espectro de ideales primos biláteros con una topología adecuada, de forma que se obtiene de nuevo el anillo como el conjunto de secciones globales del haz. Las construcciones más satisfactorias en este sentido son las que se han desarrollado, primero, en la categoría de anillos primos con identidad polinomial y extensiones centralizantes ([46]), y posteriormente, en la categoría de anillos que satisfacen la condición fuerte de segunda capa (a izquierda) y extensiones fuertemente normalizantes ([11, 31, 32]).

Sin embargo, en algunos anillos el espectro de ideales primos biláteros es muy reducido, llegando incluso a estar formado por un sólo punto (por ejemplo, el del anillo de matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en un cuerpo). Por otra parte, en otros anillos que aparecen de manera natural a partir de anillos conmutativos, o más exactamente, en algunas familias de anillos en las que para ciertos valores de parámetros se obtienen anillos conmutativos, el espectro de ideales primos biláteros no expresa bien la geometría del anillo. El ejemplo más claro es el del plano cuántico: si k es un cuerpo y q es un elemento de k, se denota por $k_q[x,y]$ al cociente del álgebra libre $k\{x,y\}$ por el ideal bilátero generado por el elemento $yx - qxy$. El anillo $k_q[x,y]$ es conmutativo si, y sólo si, $q = 1$, y en ese caso coincide con el anillo de polinomios en dos variables con coeficientes en k, esto es, con el anillo de coordenadas del plano afín $\mathbb{A}_k^2$. Si q no es una raiz de la unidad, entonces el espectro de ideales primos biláteros de $k_q[x,y]$ es el conjunto

$$\mathbf{Spec}\, k_q[x,y] = \{(x-\lambda, y), (x, y-\lambda)\}_{\lambda \in k} \cup \{(x), (y), (0)\} ,$$

que geométricamente equivale a los ejes coordenados del plano, pero no es un plano ([50]).

Para resolver este problema hemos asociado al anillo un espacio topológico *sin puntos*, y considerado sólo su topología. De esta forma se hace preciso trabajar con el concepto de *local* ([7, 27, 29]), pero como en el espacio asociado a un anillo los abiertos suelen estar asociados a (ciertos) ideales y en general, como demostramos en esta memoria, la intersección de ideales no es distributiva respecto a la suma, es necesario definir una operación que haga las veces de intersección y que *sí* posea dicha propiedad distributiva. Además, al menos en la topología de Zariski, la intersección de abiertos está relacionada con el producto de ideales, que en general no es conmutativo. Estas son dos de las justificaciones que esgrimen algunos autores para introducir la noción de *cuantal*.

La gran mayoría de los ejemplos de topologías asociadas a un anillo no conmutativo están basadas en el conjunto de los ideales biláteros ([6, 8, 9, 11, 35, 41]) que, como hemos señalado, en ciertos anillos es muy pequeño. Por ello, en esta memoria proponemos *topologías* basadas en familias de filtros de ideales a izquierda.

Uno de los ejemplos que presentamos, que a su vez corrige muchas de las carencias de la construcción de L. Willaert ([47, 52]), consiste en una *topología de Grothendieck no conmutativa* que tiene como base de abiertos a una familia de filtros de Gabriel en el anillo. Sobre esta topología construimos un prehaz de módulos asignando, a cada *abierto*, la composición de los funtores localización en los elementos del monoide libre generado por dicha familia de filtros de Gabriel, que sorprendentemente tiene un comportamiento muy parecido al de la localización en un sólo filtro. Dado que el límite de ciertos sistemas proyectivos finitos de funtores composición de funtores localización coincide con la localización en la intersección de los filtros asociados, demostramos que este prehaz es un haz. Obtenemos así un *teorema*

de representación con el que aseguramos que *todo anillo noetheriano es el anillo de secciones globales de un haz.*
Además, a diferencia de la construcción de Willaert, este *sitio no conmutativo* coincide con la construcción clásica cuando el anillo es conmutativo, y con la construcción que se describe en [11] cuando el anillo satisface la condición fuerte de segunda capa.

Cada *abierto* en esa *topología de Grothendieck no conmutativa* tiene asignado de forma natural un filtro uniforme. Este hecho nos ha inducido a estudiar en profundidad el retículo de los filtros uniformes del anillo, y también sus subretículos, como una *topología*, o más exactamente, como un (casi–)cuantal. Se dedica una parte importante de esta memoria a la recopilación y obtención de nuevas propiedades sobre dicho retículo, fijándonos, en particular, en la distributividad de la composición de filtros con respecto a las operaciones booleanas. También se estudia la equivalencia entre los conceptos de filtro uniforme, funtor núcleo, topología lineal y clase de pretorsión, y la relación entre un filtro uniforme y el filtro de Gabriel que genera.
Por otra parte, y atendiendo a cuestiones de funtorialidad, obtenemos nuevos resultados en relación a la inducción de filtros uniformes por medio de homomorfismos de anillos, destacando el que asegura que, si se satisface la propiedad de compatibilidad con el homomorfismo, la inducción de filtros uniformes conserva la composición.

Haciendo uso de las propiedades del retículo de los filtros uniformes, describimos la estructura de casi–cuantal que posee dicho retículo, y definimos un funtor de la categoría de módulos a izquierda en la categoría de haces sobre ese casi–cuantal. También se proporcionan las versiones simétrica, jansiana y relativa de dicho funtor.
En este contexto demostramos el siguiente teorema de representación:
Dado un módulo a izquierda M, el conjunto de secciones globales del haz definido por M siempre contiene a M, y si el elemento superior en el casi–cuantal de los filtros uniformes es un elemento compacto, entonces M coincide exactamente con él.
Conseguimos así representar a cualquier módulo, y en particular al anillo, como el conjunto de las secciones globales de un haz sobre el casi–cuantal de los filtros uniformes.
Además, esta construcción tiene caracter funtorial en la categoría de anillos y extensiones centralizantes, o bien extensiones fuertemente normalizantes en el caso del casi–cuantal de los filtros uniformes simétricos o jansianos.

Esta memoria está estructurada en cinco capítulos cuyos contenidos se han organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se recopilan los conceptos y resultados básicos de la geometría algebraica clásica y de la teoría de localización abstracta, que sirven de motivación para el desarrollo del resto del trabajo. Comenzando por los conjuntos algebraicos afines, se recoge la noción de variedad y cómo los intentos de generalización de dicha noción han ampliado el radio de acción de las técnicas geométricas, primero, al espectro de un anillo conmutativo general y luego, al ámbito de haces y esquemas. También se recogen los principios de la localización abstracta en categorías abelianas y su particularización a categorías de Grothendieck que se aplicará a categorías de módulos y, en el segundo capítulo, a categorías de bimódulos y de módulos graduados. La última sección hace referencia, explicando su origen, a las propiedades de estabilidad y compatibilidad mutua de los radicales en una categoría de módulos. Estas propiedades no tienen análogo en geometría algebraica conmutativa, pues en un anillo conmutativo todos los radicales son estables y, por lo tanto, mutuamente compatibles dos a dos.

En el segundo capítulo se da una visión histórica que, aunque forzosamente incompleta, pretende proporcionar una idea de algunas de las construcciones geométricas que se han desarrollado para representar a un anillo, lo más general posible, por medio de un haz sobre su *espectro primo*. Se describen con especial detenimiento las consideradas como más completas, y por tanto más relevantes, en los siguientes sentidos:

1. las que generalizan la construcción de haces de estructura en el caso conmutativo,

2. las que representan efectivamente al anillo, esto es, se obtiene de nuevo el anillo como el conjunto de secciones globales del haz, y

3. las que tienen caracter funtorial.

Se dedica particular atención, en primer lugar, a la construcción de haces sobre el espectro de ideales primos biláteros con la topología de Zariski de un anillo primo con identidad polinomial ([35]). F. Van Oystaeyen y A. Verschoren ([46]) usan las propiedades que posee la localización en categorías de bimódulos para probar la funtorialidad de sus haces con respecto a extensiones centralizantes. Posteriormente se describe la manera en la que J. Bueso, P. Jara y A. Verschoren ([11]) definen una *topología de Zariski estable* en el espectro de primos biláteros, y utilizan la propiedad (débil) de Artin-Rees para generalizar estos resultados a la clase (bastante más general) de anillos que satisfacen la condición fuerte de segunda capa, y a extensiones fuertemente normalizantes de anillos. Para finalizar, y también en un intento de mostrar las últimas tendencias, se detalla como L. Willaert ([47, 52]) desprende al *espectro* de sus puntos y lo dota de una *topología de Grothendieck no conmutativa* que le permite definir un haz por medio de la composición de funtores localización en conjuntos de Ore.

La noción de filtro uniforme (o topología lineal) en un anillo no es nueva: de hecho, aparece ya, en el contexto de la localización, en el trabajo de P. Gabriel ([16]). En el tercer capítulo de esta memoria se agrupa un buen número de propiedades de estos filtros, haciendo particular hincapié sobre aquellas que atañen a la estructura de retículo que posee el conjunto de los filtros uniformes en un anillo. También planteamos de qué manera interactúa la composición de filtros uniformes con las operaciones booleanas de dicho retículo y de alguno de sus subretículos. Cabe destacar, en concreto, que la composición por la izquierda es completamente compatible con la intersección de filtros uniformes en el siguiente sentido: si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme y $\{\mathcal{H}_a\}_{a\in A}$ es una familia de filtros uniformes, entonces

$$\bigcap_a \mathcal{L}\circ\mathcal{H}_a = \mathcal{L}\circ\bigcap_a \mathcal{H}_a \ .$$

Sin embargo, la composición por la derecha es compatible sólo con intersecciones finitas. Este hecho es el que justifica la definición de *casi–cuantal* que damos posteriormente en el capítulo cinco.

Por otra parte, el conjunto de filtros uniformes se corresponde biyectivamente con las topologías lineales en el anillo, con la familia de funtores núcleo y también con la de teorías de pretorsión hereditarias. Sin embargo, aunque todo filtro uniforme tiene asociada la clase de módulos libres de torsión de una teoría de torsión hereditaria, demostramos que dicha clase no determina al filtro pues, por ejemplo, coincide con la del filtro de Gabriel generado por él.

Finalmente introducimos la noción de compatibilidad de un filtro uniforme respecto a un homomorfismo de anillos y demostramos que, en presencia de esta propiedad, la inducción de filtros uniformes mediante dicho homomorfismo de anillos conserva la composición. Este resultado nos permite asegurar que la construcción de haces sobre el casi–cuantal de los filtros uniformes que presentamos en el último capítulo es una construcción funtorial.

En la construcción de Willaert ([47, 52]) que se describe en 2.4. se definen los recubrimientos de un abierto como la intersección del abierto con un recubrimiento global, lo que obliga a considerar solamente anillos que poseen al menos un recubrimiento global formado por conjuntos de Ore (álgebras esquemáticas). Esta característica, junto al hecho de que desafortunadamente su *sitio no conmutativo* adolece de propiedades topológicas, es la motivación para la construcción que introducimos en el capítulo cuatro.

Este capítulo está dedicado a la construcción de haces, mediante composición de funtores localización, sobre una *topología no conmutativa* basada en el monoide libre generado por una familia de filtros de Gabriel.

En primer lugar demostramos (de una forma alternativa a como se hace en [34]) que, en presencia de la propiedad de compatibilidad, es posible definir haces sobre topologías basadas en filtros de Gabriel ((4.1.1)). Siguiendo la línea de esa demostración se prueba que el límite de un sistema proyectivo finito constituido por la composición de (ciertos) funtores localización es la localización en la intersección de los filtros uniformes asociados a cada elemento del sistema. Este resultado es generalizado ((4.1.13)) a los sistemas proyectivos que se obtienen al hacer actuar varios funtores localización sobre el sistema anterior.

En la segunda sección definimos el *sitio no conmutativo* como el monoide libre generado por una familia de filtros de Gabriel, identificando aquellos elementos que proporcionan el mismo funtor localización. Dada la similitud de los resultados obtenidos sobre la composición de funtores localización con las propiedades de la localización en un sólo filtro de Gabriel, es posible definir haces de estructura de una forma bastante natural, que representan no sólo al anillo sino también a cualquier módulo ((4.2.23)). Además, estos haces definidos sobre el *sitio no conmutativo* generalizan a los de los anillos conmutativos y a los que se describen en el segundo capítulo ((4.2.25)).

El precio que hay que pagar (que es razonablemente bajo) es que el haz de estructura del anillo no es en general un haz de anillos, sino de módulos sobre el anillo.

Atendiendo a la definición de cuantal de F. Borceux y R. Cruciani ([6]), introducimos en el capítulo cinco la noción de casi–cuantal. La justificación fundamental de esta definición es que el retículo de los filtros uniformes en un anillo, ordenado por la inclusión inversa, no verifica uno de los axiomas de la definición de cuantal. Estas estructuras generalizan el concepto de local, o *espacio topológico sin puntos* y, en particular, si el anillo es conmutativo, generalizan a la topología de Zariski del espectro primo ((5.1.8)).

La construcción de los haces sobre el casi–cuantal de los filtros uniformes se hace desde un punto de vista distinto al del capítulo cuarto, pues se definen mediante conjuntos de generadores y relaciones que describen el abierto en el que dos secciones coinciden. Además, a cada módulo a izquierda se le puede asociar de forma natural un haz, y a cada homomorfismo un morfismo de haces. Como la composición de homomorfismos se traduce en la composición de morfismos de haces, estas asignaciones definen un funtor de la categoría de módulos sobre un anillo en la de haces sobre el casi–cuantal de los filtros uniformes en ese anillo ((5.2.11)).

En este contexto demostramos, en (5.3.4), que el conjunto de secciones globales del haz asociado a un módulo siempre contiene al módulo y, en (5.3.8), el teorema de representación, que afirma que, bajo la hipótesis de la compacidad del elemento superior en el casi–cuantal de los filtros uniformes, el módulo coincide con el conjunto de secciones globales del haz.

Haciendo uso de las propiedades de la inducción de filtros uniformes por medio de homomorfismos obtenidas en el capítulo tres es posible, dado un homomorfismo de anillos (de cierto tipo), construir un morfismo de casi–cuantales. Este hecho implica que la construcción de haces es completamente funtorial ((5.4.2)), pues un morfismo de casi–cuantales define por composición un funtor entre las categorías de haces.

Por último, utilizando el morfismo de casi–cuantales que a cada filtro uniforme le asigna su radical* (definido en [21]), probamos que, al igual que en el trabajo de Borceux y Cruciani ([6]), es posible representar al anillo por medio de un haz sobre el local de los filtros uniformes radicales.

Entre las cuestiones que habría que resolver para el desarrollo de una geometría algebraica basada en la construcción de haces sobre *topologías no conmutativas* que tomara como punto de partida los resultados obtenidos a lo largo de esta memoria, destacaríamos:

- la funtorialidad de la construcción de haces en el *sitio no conmutativo*;
- la equivalencia, en algún sentido, de las dos construcciones propuestas en esta memoria.

En la resolución de la primera de ellas se podría utilizar, tal vez, un tratamiento similar al que le dan J. Bueso, P. Jara y A. Verschoren en [11]. Sin embargo, no parece sencillo probar que si $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}$ son dos elementos equivalentes en el monoide libre generado por una familia de filtros de Gabriel, entonces las composiciones de los funtores localización correspondientes a los inducidos (por medio de un homomorfismo de anillos) de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}$ coincidan. Por otra parte, que los filtros uniformes $\varepsilon(\overline{\mathbf{L}})$ y $\varepsilon(\overline{\mathbf{H}})$ asociados a dichos inducidos puedan ser distintos queda resuelto por la proposición (3.2.9), que asegura que, si los filtros que componen $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}$ son compatibles con el homomorfismo, entonces

$$\varepsilon(\overline{\mathbf{L}}) = \overline{\varepsilon(\mathbf{L})} = \overline{\varepsilon(\mathbf{H})} = \varepsilon(\overline{\mathbf{H}}) \ .$$

Con respecto a la segunda cuestión propuesta, uno de los posibles caminos para encontrar la equivalencia, y el más natural a nuestro entender, pasaría por encontrar una factorización canónica para cualquier filtro uniforme como composición de filtros de Gabriel. Esta descomposición permitiría asociar a cada filtro uniforme un funtor composición de funtores localización, de manera que el filtro uniforme asociado a dicho funtor fuese el de partida. Se haría preciso, también, un estudio más extenso de las propiedades de la composición de funtores localización, del que ya proporcionamos una muestra en la primera sección del capítulo cuatro.

Notación

El término *anillo* hará referencia a un anillo asociativo con elemento unidad 1, y si R es un anillo, con el término *R–módulo a izquierda* (respectivamente *a derecha*) se designará a los R–módulos por la izquierda (resp. por la derecha) unitarios.

Si R y S son anillos, se denominará *R-S–bimódulo* a todo R–módulo a izquierda y S–módulo a derecha M de manera que

$$\forall (r, m, s) \in R \times M \times S \ , \quad (rm)s = r(ms) \ .$$

Un R-S–bimódulo se denotará por ${}_R M_S$ cuando haya necesidad de explicitar R ó S y, en cualquier caso, siempre se omitirá escribir aquel de los dos anillos que coincida con el de los números enteros $\mathbb{Z}$.

El hecho de que N sea un sub-bimódulo del R-S–bimódulo M se denotará por $N \leq_{l,r} M$, y si $S = \mathbb{Z}$ (resp. $R = \mathbb{Z}$) se denotará simplemente por $N \leq_l M$ (resp. $N \leq_r M$). En particular, el hecho de que L sea un *ideal a izquierda* (resp. *ideal a derecha*, resp. *ideal bilátero*) del anillo R se denotará por $L \leq_l R$ (resp. $L \leq_r R$, resp. $L \leq_{l,r} R$).

Si F es un subconjunto del anillo R y L es un ideal a izquierda de R, se denotará por $(L : F)$ al ideal a izquierda formado por los elementos r de R tales que $rs \in L$ para todo $s \in F$. Si F tiene como único elemento a s, entonces dicho ideal será denotado por $(L : s)$.

Por otra parte, si M es un R-módulo a izquierda (resp. a derecha) y $F \subseteq M$, entonces se denotará por $\mathrm{Ann}^l_R(F)$ (resp. por $\mathrm{Ann}^r_R(F)$) al ideal a izquierda (resp. a derecha) formado por los elementos r de R tales que $rm = 0$ (resp. $mr = 0$) para cada $m \in F$. En particular, si $F = \{m\}$, entonces dicho ideal se denotará por $\mathrm{Ann}^l_R(m)$ (resp. por $\mathrm{Ann}^r_R(m)$).

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas:

- a mi directora, la Prof. C. Mercedes Márquez, por sus oportunos consejos dentro y fuera del plano académico y por la inestimable ayuda que me ha prestado en todo mi trabajo;
- a mi director, el Prof. Alain Verschoren de la Universidad de Amberes–RUCA, por permitirme trabajar a su lado, por sus amenas y estimulantes charlas, y por su ayuda durante la redacción y corrección de *todoh loh capituloh* de esta memoria;
- a la Prof. Mariví Reyes, por su amistad, su simpatía y por el aprecio que me ha demostrado en incontables ocasiones;
- a Evelia y a todos los demás miembros del Área de Álgebra del Departamento de Matemática Fundamental de la Universidad de La Laguna por compartir conmigo su experiencia y por hacerme compatible la docencia con la elaboración de este trabajo, y al Prof. Antonio Vidal por su apoyo en los momentos más difíciles;
- a Nieves, Ann, Bart N., David, Dominique, Pieter, Werner V. y al resto de los miembros del Departement Wiskunde en Informatica de la RUCA, por procurarme un cálido ambiente de trabajo y haber hecho de esa universidad mi segunda *casa*: hartelijk bedankt allemaal;
- a mis padres por haber puesto los medios a mi alcance;
- y a Sandra, por todo el tiempo que le he quitado.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a proporcionar una descripción de los principios básicos de la geometría algebraica *clásica*. También se describen los fundamentos de la teoría de localización abstracta en categorías abelianas, su posterior particularización a las categorías de Grothendieck, y en especial, a la categoría de módulos sobre un anillo no necesariamente conmutativo.

1.1. Geometría algebraica clásica

El problema original del Álgebra, el cálculo de soluciones de (sistemas de) ecuaciones polinomiales, ha sido históricamente enfocado desde distintos puntos de vista, dependiendo principalmente de si se buscan soluciones con alguna particularidad (números enteros, racionales, soluciones no singulares, etc.), del grado de las ecuaciones (lineales o de grado superior), del número de ecuaciones y de incógnitas, etc.. Desde el punto de vista de la geometría algebraica, las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales en n incógnitas, como puntos del espacio afín de dimensión n, constituyen una *variedad algebraica*, cuyas propiedades están intimamente ligadas a las del ideal del anillo de polinomios en n incógnitas generado por las ecuaciones del sistema de la manera que se describe en esta sección.

1.1.1. Variedades algebraicas

(1.1.1) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Se denota por $\mathbb{A}^n_k$ al k-espacio afín de dimensión n, cuyos puntos, fijado un sistema de referencia afín, se corresponden biyectivamente con los elementos de k^n. Una familia de polinomios $F \subseteq k[x_1, \cdots, x_n] = k[X]$ define un *conjunto algebraico afín*

$V(F)$, que no es más que el subconjunto de los puntos de $\mathbb{A}_k^n$ cuyas coordenadas son ceros de cada uno de los polinomios de F. Los conjuntos algebraicos afines tienen las siguientes propiedades:

(1.1.1.1) Si F es un conjunto de polinomios de $k[X]$ e I es el ideal generado por F, entonces los conjuntos algebraicos afines $V(F)$ y $V(I)$ son iguales.

Dado un conjunto algebraico afín $V(I)$, donde I es un ideal de $k[X]$, el conjunto de polinomios

$$J = \{p(X) \in k[X] \ ; \ p(a) = 0, \ \forall a \in V(I)\}$$

es un ideal de $k[X]$ que contiene a I, pero que en general no coincide con I. Por ejemplo, si $I = (x^2) \subseteq k[x,y]$, entonces

$$V(I) = \{a = (a_1, a_2) \ ; \ a_1 = 0\} \ ,$$

y $J = (x)$. De hecho, en general J es $\sqrt{I}$, el radical del ideal I (teorema de los ceros de Hilbert), y puesto que $V(\sqrt{I}) = V(I)$, los conjuntos algebraicos afines en $\mathbb{A}_k^n$ se corresponden biyectivamente con el conjunto de los ideales radicales de $k[X]$.

(1.1.1.2) Un conjunto algebraico afín no vacío se dice que es irreducible si no es la unión de dos subconjuntos algebraicos estrictamente más pequeños. Un conjunto algebraico $V(I)$, donde I es un ideal radical de $k[X]$, es irreducible si, y sólo si, I es un ideal primo. Los conjuntos algebraicos afines irreducibles también se denominan variedades afines. La variedad afín $V(I)$ está formada por un sólo punto si, y sólo si, I es un ideal maximal.

(1.1.1.3) Los conjuntos algebraicos afines de $\mathbb{A}_k^n$ constituyen la familia de cerrados de una topología, que se denomina topología de Zariski. En efecto, tanto $\mathbb{A}_k^n = V(0)$ como $\emptyset = V(1)$ son conjuntos algebraicos afines. dados dos ideales I y J de $k[X]$, La unión de los conjuntos algebraicos afines $V(I)$ y $V(J)$ es $V(IJ)$, y si $\{I_a\}_{a\in A}$ es una familia de ideales de $k[X]$, entonces la intersección de los conjuntos algebraicos afines $\{V(I_a)\}_{a\in A}$ es $V(\sum_{a\in A} I_a)$.

El conjunto $\mathbb{A}_k^n$ con la topología de Zariski no es un espacio Hausdorff, pues todo abierto es denso en $\mathbb{A}_k^n$, aunque sí es un espacio compacto (como consecuencia de que $k[X]$ es un anillo noetheriano). Además todo conjunto algebraico afín $V(I)$ se descompone de manera única como unión de variedades afines $V(I) = V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_l)$, donde $V(P_i) \not\subseteq V(P_j)$ para $i \neq j$. Los abiertos de una variedad afín se denominan variedades abiertas afines.

(1.1.2) La dimensión de una variedad (abierta) afín V se define como el mayor de los enteros p tal que existe una cadena de variedades afines

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_p$$

contenidas en V. Equivalentemente, si V es (un abierto de) $V(P)$, con P un ideal primo de $k[X]$, entonces la dimensión de V coincide con la dimensión de Krull de su anillo de coordenadas $k[X]/P$, (el mayor de los enteros p tal que existe una cadena de ideales primos $P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_p$ conteniendo a P), que a su vez es igual al grado de trascendencia del cuerpo de fracciones de $k[X]/P$ sobre k.

La dimensión del espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ es n, y la dimensión de la variedad afín $V(P)$ es $n - h(P)$, donde $h(P)$ es la altura del ideal primo P (el mayor entero h tal que existe una cadena de ideales primos $P = P_0 \supset \cdots \supset P_h$).

Si V es una variedad (abierta) afín de dimensión d y el ideal primo P tal que V es (un abierto de) $V(P)$ está generado por $n - d$ elementos de $k[X]$, entonces se dice que V es una *intersección completa.* En general, si V tiene dimensión d, el cardinal de un sistema generador minimal de P es mayor o igual que $n - d$ (ej.: $V(P) \subseteq \mathbb{A}_k^3$, donde $P = (x^4 - y^3, x^5 - z^3, y^5 - z^4)$). Sin embargo, si la variedad afín V tiene dimensión $n - 1$, entonces el ideal P es principal, y está generado por un polinomio irreducible de $k[X]$

(1.1.3) Conceptos geométricos como el de tangencia en el *infinito* no tienen sentido para variedades en el espacio afín. Por esto se introduce el estudio de las variedades en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$, identificando el espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ con un subconjunto de puntos del espacio proyectivo (aquellos que no pertenecen al hiperplano del infinito).

Un conjunto algebraico proyectivo en $\mathbb{P}_k^n$ es el conjunto de puntos cuyas coordenadas proyectivas son los ceros de una familia $\{h_i\} \subseteq k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de polinomios homogéneos, o equivalentemente, del ideal homogéneo que generan. Al igual que para conjuntos algebraicos afines, si H y L son ideales homogéneos de $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, entonces

$$V(H) \cup V(L) = V(HL) \ ,$$

y si $\{H_i\}$ es una familia de ideales homogéneos, entonces

$$\bigcap_i V(H_i) = V(\sum_i H_i) \ .$$

Como además $V(0) = \mathbb{P}_k^n$ y $V(1) = \emptyset$, los conjuntos algebraicos proyectivos son los cerrados de una topología en $\mathbb{P}_k^n$. El espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ es un abierto de esta topología, y la topología inducida en $\mathbb{A}_k^n$ es la topología de Zariski.

(1.1.4) Si $V(H)$ es un conjunto algebraico proyectivo entonces $V(H) = V(\sqrt{H})$, donde $\sqrt{H}$ es el radical de H, que también es un ideal homogéneo. Al anillo $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/\sqrt{H}$ se le llama anillo de coordenadas de $V(H)$.

Los conjuntos algebraicos proyectivos irreducibles, esto es, que no son unión propia de otros conjuntos algebraicos proyectivos, se denominan variedades proyectivas, y al igual que en el caso afín, corresponden al conjunto de ceros de los polinomios de un ideal homogéneo primo. A los abiertos en la topología inducida de una variedad proyectiva se les denomina variedades abiertas proyectivas. El anillo de coordenadas de una variedad abierta proyectiva en una variedad $V(H)$ es el anillo de coordenadas de $V(H)$. Todo conjunto algebraico proyectivo es unión finita de variedades proyectivas que no se contienen: sus componentes irreducibles.

(1.1.5) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_k$ admite un recubrimiento por abiertos homeomorfos a $\mathbb{A}^n_k$ (los complementarios de los hiperplanos del infinito correspondientes a cada una de las coordenadas). Cualquier variedad (abierta) proyectiva V admite un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i=0}^n$ donde cada U_i es una variedad (abierta) afín y toda variedad afín es una variedad abierta proyectiva.

Se designa con el término *variedad* a cualquier variedad, afín o proyectiva, ya sea abierta o no.

(1.1.6) Sea V una variedad (abierta) afín (resp. proyectiva) en el espacio afín (resp. proyectivo) n-dimensional y p un punto de V. Una función

$$f : V \longrightarrow k$$

es regular en el punto p si existe un entorno abierto U de p en V y dos polinomios (resp. polinomios homogéneos del mismo grado) $p(x), q(x) \in k[X]$ tales que $q(a) \neq 0$ y $f(a) = p(a)/q(a)$ para las coordenadas a de cualquier punto de U.

Se dice que f es regular en V si es regular en todos los puntos de V. Una función regular $f : V \longrightarrow k \sim \mathbb{A}^1_k$ es una aplicación continua. El conjunto de funciones regulares en V tiene estructura de anillo.

Se denota por $K(V)$ al cuerpo de gérmenes de funciones regulares de V (dos funciones regulares $f : U \longrightarrow k$ y $g : U' \longrightarrow k$ provienen del mismo germen si coinciden en $U \cap U'$). Los elementos de $K(V)$ se denominan *funciones racionales* sobre V.

(1.1.7) Si V es una variedad afín, entonces el anillo de funciones regulares en V, que se denota por $\mathcal{O}(V)$, es isomorfo al anillo de coordenadas de V. Para cada punto p de V, el conjunto $\mathcal{O}_p$ de gérmenes de funciones regulares en p es un anillo local, y su ideal maximal $\mathfrak{m}_p$ es el conjunto de gérmenes de funciones regulares que se anulan en p. El cuerpo residual $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ es isomorfo a k. $\mathcal{O}_p$ es la localización del anillo $\mathcal{O}(V)$ en el ideal maximal de las funciones regulares en V que se anulan en p, o equivalentemente, la localización del anillo de coordenadas de V en el ideal de las clases de polinomios que se anulan en p.

El cuerpo $K(V)$ es el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $\mathcal{O}(V)$

Si V es una variedad proyectiva, entonces el anillo de funciones regulares en V es isomorfo a k. El anillo (graduado) de coordenadas de V también se denota por $\mathcal{O}(V)$ y para cada punto $p \in V$, el conjunto $\mathcal{O}_p$ de gérmenes de funciones regulares en p es un anillo isomorfo al subanillo de los elementos de grado cero de la localización de $\mathcal{O}(V)$ en el ideal $\mathfrak{m}_p$ formado por las clases de polinomios que se anulan en p.

El cuerpo de funciones racionales $K(V)$ es isomorfo al subcuerpo de elementos de grado cero del cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}(V)$ ([26]).

Para cualquier punto $p \in V$, el anillo $\mathcal{O}(V)$ es un subanillo de $\mathcal{O}_p$, y éste a su vez de $K(V)$.

(1.1.8) Un morfismo de variedades es una aplicación continua entre variedades $\varphi : V \longrightarrow V'$ tal que para todo abierto U de V' y toda función regular $f : U \longrightarrow k$, la composición $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V') \longrightarrow k$ es también una función regular.

Puesto que la composición de morfismos y la aplicación identidad en cualquier variedad son morfismos de variedades, las variedades y morfismos de variedades constituyen una categoría. Un isomorfismo $\psi : V \longrightarrow V'$ es en particular un homeomorfismo entre las estructuras topológicas de las variedades V y V', aunque no todo homeomorfismo entre dos variedades es un isomorfismo.

Dos morfismos de variedades $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$ que coincidan en un abierto de V son iguales.

1.1.2. El espectro de un anillo conmutativo

Ciertos sistemas de ecuaciones algebraicas requieren del estudio de sus soluciones en cuerpos más generales (no necesariamente algebraicamente cerrados). Como ejemplo más conocido cabe citar el último teorema de Fermat, que establece que la ecuación $x^n + y^n = 1$ no tiene soluciones en el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ para $n > 2$.

Por otra parte, se hace necesario generalizar el concepto de variedad para que no dependa del espacio afín o proyectivo en el que está contenida. La noción de esquema, introducida por Grothendieck en sus *Eléments de Géométrie Algébrique* [24], facilita la resolución de estas cuestiones.

(1.1.9) Sea A un anillo conmutativo (pensemos en el anillo de coordenadas de una variedad). El conjunto de ideales maximales de A se denomina *es-*

pectro maximal de A, y se denota $\mathbf{Max}(A)$. Si A es el anillo de coordenadas de una variedad afín V sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, $\mathbf{Max}(A)$ se corresponde biyectivamente con los puntos de V.

Al igual que ocurre con los anillos de coordenadas de las variedades afines, si asignamos un objeto geométrico a un anillo, es conveniente, dado un homomorfismo entre dos anillos $\varphi : A \longrightarrow B$, obtener un morfismo entre el objeto geométrico asociado a B y el asociado a A. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de B, el ideal $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ no es en general un ideal maximal de A (lo es, por ejemplo, cuando φ es epimorfismo). Sin embargo, para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de B, el ideal $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ de A es también primo. El conjunto de ideales primos del anillo A se denomina *espectro* de A, y se denota $\mathbf{Spec}(A)$. Si A es el anillo de coordenadas de una variedad afín V sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, existe una correspondencia biyectiva entre $\mathbf{Spec}(A)$ y el conjunto de subvariedades cerradas contenidas en V.

(1.1.10) Si a es un elemento del anillo A, se denota por D_a al conjunto de ideales primos de A que no contienen a a. Puesto que para $a, b \in A$ la intersección $D_a \cap D_b = D_{ab}$, el conjunto $\{D_a\}_{a\in A}$ es una base de entornos abiertos de una topología en $\mathbf{Spec}(A)$. A esta topología en $\mathbf{Spec}(A)$ se le denomina también topología de Zariski. Los abiertos son los conjuntos

$$D(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}(A) \ ; \ \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}\} \ ,$$

donde $\mathfrak{a}$ es un ideal de A.

Si A es el anillo de coordenadas de una variedad afín V sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces V, con la topología de Zariski, es homeomorfo al subespacio $\mathbf{Max}(A)$ de $\mathbf{Spec}(A)$ (esto es, los ideales de A correspondientes a las subvariedades de V consistentes en un sólo punto). Como consecuencia, $\mathbf{Max}(A)$ no es Hausdorff, y por lo tanto $\mathbf{Spec}(A)$ tampoco lo es.

Al igual que toda variedad afín, el espacio $\mathbf{Spec}(A)$ es compacto.

(1.1.11) Los cerrados de $\mathbf{Spec}(A)$ son los conjuntos

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}(A) \ ; \ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\} \ .$$

Los únicos puntos que constituyen por sí mismos un conjunto cerrado en $\mathbf{Spec}(A)$ son los elementos de $\mathbf{Max}(A)$. Dado un punto $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{Spec}(A)$, su clausura es el cerrado $V(\mathfrak{p})$, que es homeomorfo al espectro del anillo $A/\mathfrak{p}$.

Si A es un dominio de integridad, entonces el ideal cero es un elemento de $\mathbf{Spec}(A)$, y su clausura es todo el espacio $\mathbf{Spec}(A)$. Luego, (0) es un punto que pertenece a cualquier abierto, y por lo tanto cualquier abierto de $\mathbf{Spec}(A)$ es denso.

Un *punto genérico* de $\mathbf{Spec}(A)$ es un elemento de $\mathbf{Spec}(A)$ cuya clausura es todo el espacio. Para que exista un punto genérico es necesario y suficiente que el nilradical de A (el ideal formado por todos los elementos nilpotentes del anillo) sea un ideal primo, y en tal caso, el propio nilradical es un punto genérico. Un punto genérico de $\mathbf{Spec}(A)$ pertenece a cualquier abierto, y por lo tanto, si existe un punto genérico, entonces cualquier abierto es denso.

(1.1.12) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces

$$^{a}\varphi : \mathbf{Spec}(B) \longrightarrow \mathbf{Spec}(A)\ ;\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

es una aplicación continua.
Si $\varphi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ es el epimorfismo proyección en el cociente, entonces el cerrado $V(\mathfrak{a})$ de $\mathbf{Spec}(A)$ es homeomorfo al espectro del anillo $A/\mathfrak{a}$, pues $V(\mathfrak{a})$ es la imagen de la aplicación continua inyectiva y abierta $^{a}\varphi$.

(1.1.13) Un espacio topológico X es irreducible si no es la intersección de dos cerrados propiamente contenidos en X. El espectro de un anillo A es irreducible si, y sólo si, el nilradical de A es un ideal primo, o sea, si, y sólo si, $\mathbf{Spec}(A)$ tiene un punto genérico.
Los puntos de $\mathbf{Spec}(A)$ se corresponden biyectivamente con los cerrados irreducibles de $\mathbf{Spec}(A)$. La aplicación que asigna a cada punto $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spec}(A)$ su clausura es biyectiva, pues cada cerrado $V(\mathfrak{a})$ de $\mathbf{Spec}(A)$ es homeomorfo al espectro del anillo $A/\mathfrak{a}$.
Si A es un anillo noetheriano, entonces $\mathbf{Spec}(A)$ se descompone de manera única como unión de conjuntos cerrados irreducibles que no se contienen entre sí.

1.1.3. Haces y esquemas

Al igual que el anillo de coordenadas de una variedad afín V está determinado por la propia variedad, pues es isomorfo al anillo de funciones regulares $\mathcal{O}(V)$, al espectro de un anillo conmutativo A se le asocia canónicamente un sistema de anillos de tal manera que el anillo de *secciones globales* vuelve a ser A. De la misma forma que una variedad (proyectiva) es el resultado de *encolar* variedades afines, estas estructuras se pueden *encolar* para formar otras más complejas, dando lugar a la noción de esquema que generaliza el concepto de variedad algebraica.

(1.1.14) Dado un espacio topológico X, consideraremos la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y, dados dos abiertos U y V, el conjunto de morfismos entre U y V es unitario si $U \subseteq V$ o vacío si $U \not\subseteq V$. Un *prehaz* *de grupos abelianos* (resp. *de anillos*, *de módulos*) sobre el espacio topológico X es un funtor contravariante $\mathcal{F}$ de esta categoría en la categoría de grupos abelianos (resp. de anillos, de módulos), de tal manera que $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Si $U \subseteq V$, a la imagen del único morfismo de U en V por el funtor $\mathcal{F}$ se le denota ρ_U^V y se le denomina *morfismo restricción*.

Un morfismo de prehaces $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ es una transformación natural entre los funtores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$.

Dado un prehaz $\mathcal{F}$, se denomina *fibra* de $\mathcal{F}$ en el punto $p \in X$, y se denota por $\mathcal{F}_p$, al límite del sistema inductivo $\{\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)\}_{p \in V \subseteq U}$. Para cada abierto U que contenga a p, al homomorfismo $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_p$ del límite directo se le denota por ρ_p^U .

(1.1.15) Un *haz de grupos abelianos* (resp. *de anillos*, *de módulos*) sobre el espacio topológico X es un prehaz $\mathcal{F}$ de grupos abelianos (resp. de anillos, de módulos) sobre X tal que:

(1.1.15.1) si U es un abierto de X, $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de U y $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ de tal manera que $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(s')$ para cada $i \in I$, entonces $s = s'$ (se dice que $\mathcal{F}$ es separado);

(1.1.15.2) si U es un abierto de X, $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de U y $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ de tal manera que $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ para todo $i, j \in I$, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ para cada $i \in I$.

Los morfismos de haces son los morfismos de prehaces entre dos haces.

La *categoría de haces sobre* X es una subcategoría plena de la categoría de funtores de la categoría de abiertos de X a la categoría de grupos abelianos (resp. anillos, módulos).

(1.1.16) Un concepto equivalente al de haz es el de *espacio étalé* ([39]). Dado un espacio topológico X, un espacio étalé sobre X es un espacio recubridor $\pi : F \longrightarrow X$, es decir, un homeomorfismo local sobreyectivo, tal que la fibra $F_p = \pi^{-1}(p)$ de cada punto $p \in X$ es un grupo abeliano (resp. un anillo) de tal manera que las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} F_p \times F_p & \longrightarrow & F_p \\ a, b & \longmapsto & a + b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} F_p & \longrightarrow & F_p \\ a & \longmapsto & -a \end{array}$$

(resp.

$$\begin{array}{rcl} F_p \times F_p & \longrightarrow & F_p \\ a, b & \longmapsto & a + b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_p \times F_p & \longrightarrow & F_p \\ a, b & \longmapsto & ab \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_p & \longrightarrow & F_p \\ a & \longmapsto & -a \end{array} \;)$$

son continuas cuando se considera en F_p la topología inducida por F.

Dado un espacio étalé $\pi : F \longrightarrow X$, una *sección* sobre F en un abierto U de X es una aplicación continua $s : U \longrightarrow F$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Dos espacios étalé $\pi : F \longrightarrow X$ y $\pi' : F' \longrightarrow X$ se dice que son equivalentes cuando son equivalentes como espacios recubridores, esto es, cuando existe un homeomorfismo $\psi : F \longrightarrow F'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por ejemplo, si $\mathcal{F}$ es un prehaz sobre el espacio topológico X, se puede construir un espacio étalé $\pi : F_{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ denominado espacio étalé de las fibras de $\mathcal{F}$, donde $F_{\mathcal{F}} = \biguplus_{p\in X} \mathcal{F}_p$ (la unión disjunta) está dotado de la topología que tiene por base de abiertos a los conjuntos $\{\rho_p^U(t)\ ;\ p \in U\}$, siendo U abierto de X y $t \in \mathcal{F}(U)$, y π es la proyección que lleva a los elementos de $\mathcal{F}_p$ en p.

Por otra parte, si $\pi : F \longrightarrow X$ es un espacio étalé, entonces el funtor $\mathcal{F}_F$ de la categoría de abiertos de X en la de grupos abelianos (resp. de anillos, de módulos) que a cada abierto U le asigna

$$\mathcal{F}_F(U) = \{s : U \longrightarrow F\ ;\ s \text{ es una sección}\}\ ,$$

y que al morfismo $V \subseteq U$ le asigna el homomorfismo que restringe a V las secciones en U, es un haz denominado haz de secciones sobre F.

Si $\pi : F \longrightarrow X$ es un espacio étalé y $\mathcal{F}$ es el haz de las secciones sobre F, entonces el espacio étalé de las fibras de $\mathcal{F}$ es isomorfo al primero.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es un haz sobre X y $\pi : F \longrightarrow X$ es el espacio étalé de las fibras de $\mathcal{F}$, el haz de las secciones sobre F es un funtor naturalmente equivalente a $\mathcal{F}$.

(1.1.17) Si $\mathcal{F}$ es un prehaz sobre X y $\pi : F \longrightarrow X$ es el espacio étalé de las fibras de $\mathcal{F}$, se denomina *haz asociado al prehaz* $\mathcal{F}$, y se denota por $\mathcal{F}^+$, al haz de las secciones sobre F. El haz $\mathcal{F}^+$ junto con el morfismo de prehaces $i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ que a cada abierto U de X le asigna el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} i(U) : \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^+(U) \\ s & \longmapsto & i(U)(s) : U \longrightarrow \quad F \\ & & \qquad\qquad p \longmapsto \rho_p^U(s) \end{array}$$

verifica la siguiente propiedad universal: dado un haz $\mathcal{H}$ sobre X y un morfismo de prehaces $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$, existe un único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $\psi \circ i = \theta$. Como consecuencia, $\mathcal{F}^+$ es el único haz, salvo isomorfismos, que verifica esta propiedad.

Por otra parte, si $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un morfismo de prehaces sobre X, entonces existe un único morfismo de haces $\psi^+ : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{H}^+$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "i"] \\ \mathcal{F}^+ \arrow[r, "\psi^+"'] & \mathcal{H}^+ \end{tikzcd}$$

es conmutativo. De esta manera se define un funtor de la categoría de prehaces sobre X en la categoría de haces sobre X que recibe el nombre de funtor *hacificación*.

Si $\mathcal{F}$ es un prehaz separado, entonces $\mathcal{F}$ es un subprehaz de $\mathcal{F}^+$, esto es, un subobjeto de $\mathcal{F}^+$ en la categoría de prehaces sobre X.

(1.1.18) El ejemplo que se describe a continuación se conoce como *haz de estructura* de un anillo. Dado un anillo conmutativo A, se denota por $\mathcal{O}_A$ al haz sobre $\mathbf{Spec}(A)$ que asigna

- a cada abierto U (de la topología de Zariski), el anillo de las secciones en U, esto es, el conjunto de secciones

  $$s : U \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

  de tal manera que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ para cada $\mathfrak{p} \in U$ y existe un abierto $\mathfrak{p} \in V \subseteq U$ y un par de elementos $a, f \in A$ tales que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ para todo $\mathfrak{q} \in V$,

- y a la inclusión $V \subseteq U$, el homomorfismo restricción de secciones

  $$\mathcal{O}_A(U) \longrightarrow \mathcal{O}_A(V) \ ; \ s \longmapsto s_{|V} \ .$$

Equivalentemente, $\mathcal{O}_A$ puede ser definido (ver [26]) de la siguiente forma: a cada abierto $U = D(I)$, donde I es un ideal de A, se le asigna el anillo

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_A(I^n, A) \ ,$$

y a la inclusión $D(J) \subseteq D(I)$ (o sea, $J \subseteq I$), se le asigna el homomorfismo entre los límites inducido por las restricciones

$$f_n : Hom_A(I^n, A) \longrightarrow Hom_A(J^n, A) \ .$$

El anillo de secciones globales de $\mathcal{O}_A$, esto es, el anillo $\mathcal{O}_A(\mathbf{Spec}(A))$ es isomorfo a A.
Si M es un A–módulo, el haz de estructura $\mathcal{O}_M$ es el funtor que a cada abierto $U = D(I)$ de $\mathbf{Spec}(A)$ le asigna el $\mathcal{O}_A(U)$–módulo

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_A(I^n, M) \ ,$$

y a cada morfismo $D(J) \subseteq D(I)$ el homomorfismo de A–módulos que inducen los homomorfismos restricción

$$f_n : Hom_A(I^n, M) \longrightarrow Hom_A(J^n, M) \ .$$

Además, el A–módulo M se obtiene de nuevo como el A–módulo de secciones globales de $\mathcal{O}_M$.

(1.1.19) Dada una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$, cada haz $\mathcal{F}$ sobre X induce un haz $f_*\mathcal{F}$ sobre Y, que se denomina *imagen directa* de $\mathcal{F}$, y que a cada abierto abierto U de Y le asigna $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$.
Por otra parte, todo haz $\mathcal{G}$ sobre Y induce un haz $f^{-1}\mathcal{G}$ sobre X, denominado *imagen inversa* de $\mathcal{G}$, que es el haz obtenido por hacificación del prehaz que a cada abierto U de X le asigna

$$\varprojlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{G}(V) \ .$$

Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{F})$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es un haz de anillos sobre X. Un morfismo entre los espacios anillados $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ es un par (f, ψ) en el que $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow f_*\mathcal{F}$ es un morfismo de haces sobre Y.
Un *espacio localmente anillado* es un espacio anillado $(X, \mathcal{F})$ tal que para cada $p \in X$, la fibra $\mathcal{F}_p$ es un anillo local. Un morfismo de espacios localmente anillados (f, ψ) entre los espacios localmente anillados $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ es

un morfismo de espacios anillados de tal manera que para cada $p \in X$, la composición

$$\mathcal{G}_{f(p)} \xrightarrow{\psi_{f(p)}} (f_*\mathcal{F})_{f(p)} = \varinjlim_{f(p)\in V} (f_*\mathcal{F})(V) \longrightarrow \mathcal{F}_p = \varinjlim_{p\in U} \mathcal{F}(U)$$

es un homomorfismo local, esto es, la imagen inversa del ideal maximal de $\mathcal{F}_p$ es el ideal maximal de $\mathcal{G}_{f(p)}$.

(1.1.20) Ejemplo. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces tanto $(\mathbf{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ como $(\mathbf{Spec}(B), \mathcal{O}_B)$ son espacios localmente anillados, y el par $({}^a\varphi, \varphi^\#)$, donde $\varphi^\#$ asigna a cada sección $s : U \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ en el abierto U de $\mathbf{Spec}(A)$, la sección

$$({}^a\varphi)^{-1}(U) \xrightarrow{{}^a\varphi} U \xrightarrow{s} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in({}^a\varphi)^{-1}(U)} A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \xrightarrow{\bigoplus \varphi_\mathfrak{q}} \bigoplus_{\mathfrak{q}\in({}^a\varphi)^{-1}(U)} B_\mathfrak{q} \ ,$$

es un morfismo de espacios anillados.

Además, si el par (f, ψ) es un homomorfismo de espacios localmente anillados entre $(\mathbf{Spec}(B), \mathcal{O}_B)$ y $(\mathbf{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$, entonces existe un homomorfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que $f = {}^a\varphi$ y $\psi = \varphi^\#$ ([26]).

(1.1.21) Ejemplo. Si $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ es un anillo positivamente graduado y S_+ es el ideal $\bigoplus_{n\geq 1} S_n$, se llama *espectro primo homogéneo* de S al conjunto

$$\mathbf{Proj}(S) = \{\mathfrak{p} \leq S \ ; \ \mathfrak{p} \text{ es primo y homogéneo} \ , \ S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}\} \ .$$

La familia de los $D(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{Proj}(S) \ ; \ I \nsubseteq \mathfrak{p}\}$, donde I es un ideal homogéneo de S, es una topología de $\mathbf{Proj}(S)$.

En $\mathbf{Proj}(S)$ se puede definir un haz $\mathcal{O}_S$ también llamado *de estructura*, y que es aquel cuya fibra en el punto $\mathfrak{p}$ es el anillo de los elementos de grado cero de $T^{-1}S$, la localización de S en el conjunto T de los elementos homogéneos de S que no están en $\mathfrak{p}$.

El par $(\mathbf{Proj}(S), \mathcal{O}_S)$ es un espacio localmente anillado.

(1.1.22) Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado isomorfo a $(\mathbf{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ para algún anillo A.

Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{F})$ que localmente es un esquema afín, esto es, para cada $p \in X$ existe un entorno abierto U de p tal que $(U, \mathcal{F}_{|U})$ es un esquema afín.

Un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios localmente anillados.

Dado un esquema S, un *esquema sobre* S es un esquema X para el que existe un morfismo $p : X \longrightarrow S$. Si $p : X \longrightarrow S$ y $q : Y \longrightarrow S$ son esquemas sobre S, un morfismo de esquemas sobre S es un morfismo de esquemas $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

1.2. Localización en categorías de módulos

Si X es un espacio topológico (pensemos en el espectro primo de un anillo conmutativo), U es un abierto de X, y consideramos las categorías abelianas $\mathcal{C}$, de haces de grupos abelianos sobre X, y $\mathcal{Q}$, de haces de grupos abelianos sobre U, entonces el funtor restricción

$$Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Q} \ , \quad Q\mathcal{F} = \mathcal{F}_{|U}$$

es exacto, es adjunto a izquierda del funtor imagen directa $I : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{C}$ y la composición $Q \circ I$ es naturalmente equivalente al funtor identidad en $\mathcal{Q}$ ([16]).

Teniendo en cuenta que la categoría de haces coherentes sobre el espectro de un anillo conmutativo A es equivalente a la categoría $A - \mathbf{mod}$ ([39]), a la hora de desarrollar una *teoría de localización* para anillos no necesariamente conmutativos es interesante caracterizar primero a las categorías $\mathcal{D}$ y a los funtores $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ que verifican esas propiedades cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de módulos, o más generalmente, cuando $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana.

En esta sección se recogen los principios básicos de la localización abstracta en categorías abelianas y su particularización a categorías de Grothendieck y a categorías de módulos.

(1.2.1) Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, se puede construir una categoría preaditiva $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ denominada *categoría cociente* ([25]) cuyos objetos son los objetos de $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos son

$$Hom_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}(M, N) = \varinjlim Hom_{\mathcal{C}}(M', N/N') \ ,$$

donde el límite está tomado en los subobjetos M' de M y N' de N tales que M/M' y N' son objetos de $\mathcal{D}$.

Esta categoría cociente tiene asociado un funtor proyección $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{D}$ mediante el cual a un objeto M de $\mathcal{C}$ se le asigna el mismo objeto M en la categoría cociente, y a cada morfismo $f : M \longrightarrow N$, se le asigna su imagen en el límite $\varinjlim Hom_{\mathcal{C}}(M', N/N')$.

No es difícil ver que Q es aditivo y que lleva núcleos en núcleos y conúcleos en conúcleos.

(1.2.2) Una subcategoría plena $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ se dice que es *gruesa* si es cerrada para subobjetos, cocientes y extensiones exactas.

Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría gruesa de $\mathcal{C}$, entonces la categoría cociente $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ es abeliana y el funtor proyección $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{D}$ es exacto. Además, toda sucesión exacta corta en $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ es imagen por Q de una sucesión exacta corta de $\mathcal{C}$. El funtor $I : \mathcal{C}/\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ adjunto a derecha de Q, en caso de existir, se denomina *funtor sección*, y siempre es exacto a izquierda ([40])

(1.2.3) Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría gruesa de la categoría abeliana $\mathcal{C}$, se dice que un objeto M de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{D}$–cerrado si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes ([16]):

(1.2.3.1) Si $f : N \longrightarrow N'$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ y tanto $\mathrm{Ker} f$ como $\mathrm{Coker} f$ son objetos de $\mathcal{D}$, entonces $f^* : Hom_{\mathcal{C}}(N', M) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(N, M)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

(1.2.3.2) El único subobjeto de M que es un objeto de $\mathcal{D}$ es el cero.

(1.2.3.3) Para todo objeto N de $\mathcal{C}$, el funtor Q induce un isomorfismo de grupos abelianos $Q_{N,M} : Hom_{\mathcal{C}}(N, M) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}(N, M)$.

Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría gruesa y Q admite un funtor adjunto a derecha I, entonces se dice que $\mathcal{D}$ es una subcategoría *localizante* y al funtor $I \circ Q$ se le denomina *funtor localización*. Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría localizante, entonces para todo objeto N de $\mathcal{C}/\mathcal{D}$, el objeto $I(N)$ es $\mathcal{D}$–cerrado. Además, la transformación natural $\xi : Q \circ I \longrightarrow id_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}$ es una equivalencia natural.

Si $\zeta : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow I \circ Q$ es la transformación natural inducida por la adjunción, entonces un objeto M de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{D}$–cerrado si, y sólo si, el morfismo

$$\zeta_M : M \longrightarrow I \circ Q(M)$$

es un isomorfismo.

Recíprocamente, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son dos categorías abelianas y $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor exacto que admite un adjunto a derecha I de manera que la transformación natural $\xi : Q \circ I \longrightarrow id_{\mathcal{C}'}$ es una equivalencia natural, entonces la subcategoría plena $\mathrm{Ker} Q$ de $\mathcal{C}$ (cuyos objetos son los objetos M de $\mathcal{C}$ tales que $Q(M)$ es isomorfo al cero de $\mathcal{C}'$) es una subcategoría localizante.

La $\mathcal{D}$–*envolvente* de un objeto M de $\mathcal{C}$ es un morfismo $j : M \longrightarrow N$ de $\mathcal{C}$, donde N es un objeto $\mathcal{D}$–cerrado tal que Ker$j$ y Coker$j$ son objetos de $\mathcal{D}$.

(1.2.4) Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Grothendieck (esto es, una categoría abeliana con un generador y límites inductivos exactos). Una subcategoría gruesa $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es localizante si, y sólo si, es cerrada para límites inductivos (tomados en $\mathcal{C}$).

Una *teoría de torsión* en $\mathcal{C}$ es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de familias no vacías de objetos de $\mathcal{C}$ tales que

(1.2.4.1) $M \in \mathcal{T}$ si, y sólo si, $Hom_{\mathcal{C}}(M, N) = \{0\}$ para todo $N \in \mathcal{F}$, y

(1.2.4.2) $N \in \mathcal{F}$ si, y sólo si, $Hom_R(M, N) = \{0\}$ para todo $M \in \mathcal{T}$

(ver [45, 51, et al.]). A la clase $\mathcal{T}$ se le llama *clase de torsión* de la teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ y a $\mathcal{F}$ *clase de libres de torsión.*

Una familia $\mathcal{T}'$ de objetos de $\mathcal{C}$ genera una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Dicha teoría de torsión viene dada por

$$\mathcal{F} = \{N \in Obj\mathcal{C} \ ; \ \forall M' \in \mathcal{T}', \ Hom_{\mathcal{C}}(M', N) = 0\} \ ,$$

$$\mathcal{T} = \{M \in Obj\mathcal{C} \ ; \ \forall N \in \mathcal{F}, \ Hom_{\mathcal{C}}(M, N) = 0\} \ .$$

Si $\mathcal{T}'$ es la clase de torsión de una teoría de torsión $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$, entonces la teoría de torsión generada por $\mathcal{T}'$ es la propia $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$.

La teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se dice que es *hereditaria* si dado un objeto M en $\mathcal{T}$, todos los subobjetos de M pertenecen a $\mathcal{T}$, o equivalentemente, si dado un objeto N de $\mathcal{F}$, la envolvente inyectiva de N pertenece a $\mathcal{F}$. La familia $\mathcal{T}$ de objetos de $\mathcal{C}$ es la clase de torsión de una teoría de torsión hereditaria si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es cerrada al tomar cocientes, coproductos, extensiones exactas y subobjetos, esto es, si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es la clase de objetos de una subcategoría localizante de $\mathcal{C}$.

(1.2.5) Un *funtor núcleo* en la categoría de Grothendieck $\mathcal{C}$ es un subfuntor σ exacto a izquierda del funtor identidad en $\mathcal{C}$. Si además $\sigma(M/\sigma M) = 0$ para todo objeto M de $\mathcal{C}$, entonces se dice que σ es un funtor núcleo *idempotente* o un *radical* .

Si σ es un radical, se llama objetos de σ–torsión a los objetos M de $\mathcal{C}$ tales que $\sigma M = M$ y objetos σ–libres de torsión a los M tales que $\sigma M = 0$. El par de clases $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ de objetos de σ–torsión y σ–libres de torsión respectivamente, es una teoría de torsión hereditaria en $\mathcal{C}$.

Recíprocamente, si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria en $\mathcal{C}$, entonces el subfuntor σ de la identidad en $\mathcal{C}$ que a cada objeto M le asigna la suma de todos los subobjetos de M que están en $\mathcal{T}$ es un radical.

De esta manera se establece una correspondencia biyectiva entre la clase de radicales y la de teorías de torsión hereditarias en $\mathcal{C}$, o equivalentemente, de subcategorías localizantes de $\mathcal{C}$.

(1.2.6) Sea σ un radical en la categoría de Grothendieck $\mathcal{C}$. Se dice que un morfismo f es un *σ–isomorfismo* si Ker$f$ y Coker$f$ son objetos de σ–torsión. Un objeto E de $\mathcal{C}$ se dice que es *σ–inyectivo* (resp. *σ–cerrado*) si para cada morfismo $g : M \longrightarrow E$ y cada σ–isomorfismo $f : M \longrightarrow N$ existe un morfismo (resp. un único morfismo) $h : N \longrightarrow E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ E & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

El objeto E de $\mathcal{C}$ es σ–cerrado si, y sólo si, E es σ–inyectivo y σ–libre de torsión. La subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son todos los objetos σ–cerrados de $\mathcal{C}$ se denota por $\mathcal{C}(\sigma)$.

(1.2.7) Si M es un objeto de $\mathcal{C}$, una *envolvente σ–inyectiva* de M es una extensión esencial $j : M \longrightarrow E$, donde E es un objeto de $\mathcal{C}(\sigma)$, tal que el conúcleo de j es de σ–torsión. Todo objeto M de $\mathcal{C}$ tiene una única (salvo isomorfismos) envolvente σ–inyectiva tal que Ker$j_{\sigma,M} = \sigma M$ que se denota por $j_{\sigma,M} : M \longrightarrow E_\sigma M$.

Se denota por $\underline{\underline{a}}_\sigma$ al funtor de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}(\sigma)$ que a cada objeto M de $\mathcal{C}$ le asigna $E_\sigma M$, y a cada morfismo $f : M \longrightarrow N$ el único morfismo que hace al cuadrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_{\sigma,M}"'] & N \arrow[d, "j_{\sigma,N}"] \\ E_\sigma M \arrow[r, "\underline{\underline{a}}_\sigma f"'] & E_\sigma N \end{tikzcd}$$

conmutativo. El funtor $\underline{\underline{a}}_\sigma$ es exacto y adjunto a izquierda del funtor inclusión. Si $\{F_i \longrightarrow F_j\}_{i\leq j\in I}$ es un sistema proyectivo, entonces el límite del sistema proyectivo $\{\underline{\underline{a}}_\sigma F_i \longrightarrow \underline{\underline{a}}_\sigma F_j\}_{i\leq j\in I}$ coincide con

$$\underline{\underline{a}}_\sigma(\varprojlim F_i)\ ,$$

es decir, $\underline{\underline{a}}_\sigma$ conmuta con límites proyectivos.

Además, la composición de $\underline{\underline{a}}_\sigma$ y el funtor inclusión es un endofuntor de $\mathcal{C}$ exacto a izquierda.

(1.2.8) Sea R un anillo. La categoría de R–módulos a izquierda, que se denota por $R-\mathbf{mod}$, es una categoría de Grothendieck y por tanto se pueden particularizar a dicha categoría los resultados que se han mencionado en los párrafos precedentes.

Las subcategorías localizantes de $R-\mathbf{mod}$ son las subcategorías plenas cerradas al tomar submódulos, imágenes epimórficas, extensiones exactas y límites inductivos.

Una teoría de torsión es un par $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ de familias no vacías de R–módulos a izquierda tales que M pertenece a $\mathcal{T}$ si, y sólo si, $Hom_R(M,N)=\{0\}$ para todo $N\in\mathcal{F}$, y N pertenece a $\mathcal{F}$ si, y sólo si, $Hom_R(M,N)=\{0\}$ para todo $M\in\mathcal{T}$.

Una teoría de torsión hereditaria queda perfectamente determinada dando su clase de torsión hereditaria $\mathcal{T}$, o lo que es lo mismo, la clase de objetos de la subcategoría topologizante de $R-\mathbf{mod}$ que tiene asociada, puesto que la clase de libres de torsión viene dada por

$$\mathcal{F}=\{N\ ;\ \forall M\in\mathcal{T},\ Hom_R(M,N)=\{0\}\ \}\ .$$

Una familia de R–módulos a izquierda es la clase de libres de torsión de alguna teoría de torsión hereditaria si, y sólo si, es cerrada para submódulos, extensiones exactas, límites proyectivos y envolventes inyectivas.

Una teoría de torsión hereditaria también está determinada por su clase de libres de torsión.

Un funtor núcleo $\sigma: R-\mathbf{mod}\longrightarrow R-\mathbf{mod}$ es un funtor exacto a izquierda tal que, para cada R–módulo M, σM es un submódulo de M y $\sigma f=f_{|\sigma M}$ para cada R–homomorfismo $f: M\longrightarrow N$.

(1.2.9) La descripción de los funtores localización en una categoría de módulos se hace más sencilla gracias a la noción de filtro de Gabriel, que en esa categoría es equivalente a la de radical.

Un conjunto $\mathcal{L}$ de ideales a izquierda de R se dice que es un *filtro* en R si es cerrado para generalizaciones y para intersecciones, esto es, si $L,L'\in\mathcal{L}$ y $L\cap L'\subseteq H\leq_l R$, entonces $H\in\mathcal{L}$. El conjunto de todos los filtros en R está parcialmente ordenado por la inclusión. Ejemplos de filtros en el anillo R son el global, formado por todos los ideales a izquierda del anillo R y el unitario, que esta formado por el propio R como único ideal a izquierda.

Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros en R, se puede definir un nuevo filtro llamado *composición de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$* que se denota por $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ y está formado por todos los ideales a izquierda L de R para los que existe un ideal $H\in\mathcal{H}$ tal que $L\subseteq H$ y

$$(L:r)=\{s\in R\ ;\ sr\in L\}\in\mathcal{L}\ .$$

Un filtro $\mathcal{L}$ de ideales a izquierda de R se dice que es *uniforme* si para todo elemento r de R y todo L perteneciente a $\mathcal{L}$, el ideal $(L : r)$ también pertenece a $\mathcal{L}$, o equivalentemente, si $\mathcal{L} \circ \{R\} = \mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces el subfuntor $\sigma_{\mathcal{L}}$ de la identidad en $R-\mathbf{mod}$ que a cada R–módulo a izquierda M le asigna el submódulo

$$\sigma_{\mathcal{L}} M = \{m \in M \ ; \ \mathrm{Ann}_R^l(m) \in \mathcal{L}\} \ ,$$

es un funtor núcleo.

Por otra parte, si σ es un funtor núcleo en $R-\mathbf{mod}$, entonces el conjunto $\mathcal{L}_\sigma$ de todos los ideales a izquierda L tales que R/L es un R–módulo de σ–torsión, es un filtro uniforme en R. Además esta correspondencia es una biyección entre los conjuntos de filtros uniformes en R y de funtores núcleo en $R-\mathbf{mod}$.

Un filtro uniforme $\mathcal{L}$ se dice que es un filtro *de Gabriel* si, siempre que para un ideal a izquierda L exista un elemento $H \in \mathcal{L}$ tal que $(L : r) \in \mathcal{L}$ para todo $r \in H$, entonces $L \in \mathcal{L}$. Equivalentemente, el filtro uniforme $\mathcal{L}$ es de Gabriel si, y sólo si, $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$.

La biyección entre la familia de filtros uniformes en R y la familia de funtores núcleo en $R-\mathbf{mod}$ hace corresponder filtros de Gabriel a radicales y viceversa. Luego la familia de filtros de Gabriel en R se corresponde biyectivamente con la de radicales en $R-\mathbf{mod}$, y por lo tanto con la de teorías de torsión hereditarias de R–módulos.

(1.2.10) Ejemplos. Sea I un ideal bilátero de R finitamente generado como ideal a izquierda. Entonces el conjunto de ideales a izquierda

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq_l R \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}, \ I^n \subseteq L\}$$

es un filtro de Gabriel en R.

Un conjunto de Ore a izquierda de R es una parte multiplicativamente cerrada $S \subseteq R$ tal que para cada $r \in R$ y cada $s \in S$ existen $r' \in R$ y $s' \in S$ tales que $s'r = r's$. Si S es un conjunto de Ore a izquierda de R, entonces

$$\mathcal{L}_S = \{L \leq_l R \ ; \ L \cap S \neq \emptyset\}$$

es un filtro de Gabriel en R.

(1.2.11) Dado un radical σ en $R-\mathbf{mod}$, un R–módulo a izquierda E es un objeto σ–inyectivo (resp. σ–cerrado) de $R-\mathbf{mod}$ si, y sólo si, para todo homomorfismo de R–módulos $f : L \longrightarrow E$, donde $L \in \mathcal{L}_\sigma$, existe un elemento (resp. un único elemento) $m \in E$ tal que $f(r) = rm$ para cada $r \in L$.

La clase de R–módulos de σ–torsión es la clase de objetos de una subcategoría localizante en $R-\mathbf{mod}$, que se denota por T_σ. La subcategoría plena de los objetos σ–cerrados de $R-\mathbf{mod}$ se denota por $(R,\sigma)-\mathbf{mod}$. La subcategoría T_σ es el núcleo de un funtor exacto $\underline{\underline{a}}_\sigma : R-\mathbf{mod} \longrightarrow (R,\sigma)-\mathbf{mod}$ adjunto a izquierda del funtor inclusión (ver (1.2.7))

Consideremos el funtor Q_σ de la categoría $R-\mathbf{mod}$ en la subcategoría $(R,\sigma)-\mathbf{mod}$ que a cada R–módulo a izquierda M le asigna el R–módulo σ–cerrado

$$Q_\sigma M = \varinjlim_{L\in\mathcal{L}_\sigma} Hom_R(L, M/\sigma M)$$

y a cada morfismo $f : M \longrightarrow M'$ de R–módulos a izquierda, el límite f_σ de los homomorfismos

$$L \longrightarrow M/\sigma M \longrightarrow M'/\sigma M' \ .$$

El homomorfismo f_σ es el único que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_{\sigma,M}"'] & M' \arrow[d, "j_{\sigma,M'}"] \\ Q_\sigma M \arrow[r, "f_\sigma"'] & Q_\sigma M' \end{tikzcd}$$

donde $j_{\sigma,M}$ es el homomorfismo tal que la imagen de $m \in M$ es el elemento del límite representado por el R–homomorfismo

$$\begin{aligned} \cdot\overline{m} : R &\longrightarrow M/\sigma M \\ r &\longmapsto \overline{rm} \end{aligned}$$

Dado que el núcleo y el conúcleo de $j_{\sigma,M}$ son de σ–torsión y $Q_\sigma M$ es σ–cerrado para cada R–módulo a izquierda M, el morfismo $j_{\sigma,M} : M \longrightarrow Q_\sigma M$ es la envolvente σ–inyectiva de M. Además, el núcleo de $j_{\sigma,M}$ es σM, y por lo tanto el funtor Q_σ coincide con el funtor $\underline{\underline{a}}_\sigma$. Luego $Q_\sigma : R-\mathbf{mod} \longrightarrow (R,\sigma)-\mathbf{mod}$ es exacto, y es adjunto a izquierda del funtor inclusión, por lo que conmuta con límites proyectivos.

Además la transformación natural $\xi : Q_\sigma \circ i \longrightarrow id_{(R,\sigma)-\mathbf{mod}}$ es una equivalencia natural y por lo tanto la subcategoría $(R,\sigma)-\mathbf{mod}$ es cerrada para límites proyectivos tomados en $R-\mathbf{mod}$.

Al funtor $i \circ Q_\sigma$ se le denomina funtor localización, y generalmente, salvo en casos en los que haya posibilidad de confusión, también se le denota Q_σ.

El R–módulo a izquierda $Q_\sigma R$ está dotado de una estructura de anillo de tal forma que $j_{\sigma,R} : R \longrightarrow Q_\sigma R$ es un homomorfismo de anillos. Si M es un

R–módulo a izquierda, entonces $Q_\sigma M$ posee una estructura de $Q_\sigma R$–módulo a izquierda que es compatible con la de R–módulo al restringir los escalares por medio del homomorfismo $j_{\sigma,R}$.

(1.2.12) Ejemplo. Sean σ y τ dos radicales en $R-\mathbf{mod}$ de tal manera que $\sigma M \subseteq \tau M$ para todo R–módulo a izquierda M. Entonces, aplicando el funtor Q_τ al homomorfismo $j_{\sigma,M} : M \longrightarrow Q_\sigma M$, se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\sigma,M}"] \arrow[d, "j_{\tau,M}"'] & Q_\sigma M \arrow[d, "j_{\tau,Q_\sigma M}"] \\ Q_\tau M \arrow[r, "Q_\tau j_{\sigma,M}"'] & Q_\tau Q_\sigma M \end{tikzcd}$$

El R–módulo a izquierda $Q_\tau Q_\sigma M$ es τ–cerrado y

$$\begin{aligned} \mathrm{Coker}(j_{\tau,Q_\sigma M} \circ j_{\sigma,M}) &= Q_\tau Q_\sigma M / j_{\tau,Q_\sigma M} \circ j_{\sigma,M}(M) \\ &= \frac{Q_\tau Q_\sigma M / j_{\tau,Q_\sigma M}(Q_\sigma M)}{j_{\tau,Q_\sigma M}(Q_\sigma M)/j_{\tau,Q_\sigma M} \circ j_{\sigma,M}(M)} \end{aligned}$$

es (el cociente de un R–módulo) de τ–torsión. Como $\mathrm{Ker}(j_{\tau,Q_\sigma M} \circ j_{\sigma,M}) = \tau M$ por ser

$$\mathcal{L}_\tau \subseteq \mathcal{L}_\sigma \circ \mathcal{L}_\tau \subseteq \mathcal{L}_\tau \circ \mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_\tau$$

(ver (4.1.5)), el homomorfismo $j_{\tau,Q_\sigma M} \circ j_{\sigma,M} : M \longrightarrow Q_\tau Q_\sigma M$ es la envolvente τ–inyectiva de M, y por lo tanto el homomorfismo $Q_\tau j_{\sigma,M}$ es un isomorfismo entre $Q_\tau M$ y $Q_\tau Q_\sigma M$. De hecho, $Q_\tau j_\sigma$ define una equivalencia natural entre los funtores Q_τ y $Q_\tau Q_\sigma$.

(1.2.13) El funtor Q_σ de puede construir de una forma equivalente ([22]). Dado un R–módulo a izquierda M, denotaremos por $E_{M/\sigma M}$ a la envolvente inyectiva del R–módulo σ–libre de torsión $M/\sigma M$ y por p al homomorfismo proyección

$$p : E_{M/\sigma M} \longrightarrow \frac{E_{M/\sigma M}}{M/\sigma M} \ .$$

Sea E_σ el funtor que a cada R–módulo a izquierda M le asigna el R–módulo σ–cerrado

$$p^{-1}(\sigma \frac{E_M^\sigma}{M/\sigma M}) \ ,$$

y a cada homomorfismo $f \in Hom_R(M, M')$, el único homomorfismo $E_\sigma(f)$

que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_{\sigma,M}"'] & M' \arrow[d, "i_{\sigma,M'}"] \\ E_\sigma M \arrow[r, "E_\sigma(f)"'] & E_\sigma M' \end{tikzcd}$$

donde $i_{\sigma,M} : M \longrightarrow E_\sigma M$ es la composición de la proyección y la inclusión

$$M \longrightarrow M/\sigma M \longrightarrow E_{M/\sigma M} \quad .$$

Existe una equivalencia natural η entre los funtores E_σ y Q_σ, pues de hecho $i_{\sigma,M} : M \longrightarrow E_\sigma M$ es la envolvente σ–inyectiva de M. Además, para cada R–módulo a izquierda M el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E_\sigma M \arrow[rr, "\eta(M)"] & & Q_\sigma M \\ & M \arrow[ul, "i_{\sigma,M}"] \arrow[ur, "j_{\sigma,M}"'] & \end{tikzcd}$$

(1.2.14) Dado un radical σ en $R-\mathbf{mod}$, el funtor localización

$$i \circ Q_\sigma : R-\mathbf{mod} \longrightarrow R-\mathbf{mod}$$

es exacto a izquierda, pero en general no es exacto, aún cuando el funtor $Q_\sigma : R-\mathbf{mod} \longrightarrow (R,\sigma)-\mathbf{mod}$ es siempre exacto.

Por otra parte, cualquier R–módulo a izquierda σ–cerrado M es también un $Q_\sigma R$–módulo a izquierda (puesto que $M = (i \circ Q_\sigma)M)$, pero generalmente no todo $Q_\sigma R$–módulo a izquierda es σ–cerrado como R–módulo.

De hecho, el funtor localización $i \circ Q_\sigma$ es exacto si, y sólo si, las categorías $Q_\sigma R-\mathbf{mod}$ y $(R,\sigma)-\mathbf{mod}$ coinciden, o equivalentemente ([22]), si, y sólo si, para todo R–módulo a izquierda M el homomorfismo

$$Q_\sigma R \otimes_R M \longrightarrow Q_\sigma M \ ; \quad s \otimes m \longmapsto s j_{\sigma,M}(m)$$

es un isomorfismo de $Q_\sigma R$–módulos.

De los radicales σ en $R-\mathbf{mod}$ (y también de los filtros de Gabriel asociados) que verifican esta propiedad se dice que satisfacen la propiedad T, o también que el funtor localización $i \circ Q_\sigma$ es una *localización perfecta.*

1.3. Compatibilidad y estabilidad

(1.3.1) El conjunto $R-\mathbf{filt}$ de los filtros uniformes de ideales a izquierda del anillo R está parcialmente ordenado por la inclusión. Además, puesto que la intersección de filtros uniformes es de nuevo un filtro uniforme, $R-\mathbf{filt}$ es un retículo, en el que el ínfimo de una familia $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es la intersección $\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{L}_\alpha$ y el supremo es $\bigcap\{\mathcal{H}\ ;\ \mathcal{H}\in R-\mathbf{filt},\ \mathcal{L}_\alpha\subseteq\mathcal{H},\ \forall\alpha\in A\}$.
La inclusión es un orden parcial también en el conjunto de filtros de Gabriel, y la intersección de filtros de Gabriel es un filtro de Gabriel, aunque generalmente el conjunto de filtros de Gabriel no es un subretículo de $R-\mathbf{filt}$, pues el supremo de un par de filtros de Gabriel contiene al supremo de de esos dos filtros en $R-\mathbf{filt}$, pero no coincide con él (ver (3.1.19)).

(1.3.2) Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son dos filtros uniformes, en general $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}\circ\mathcal{L}$ son filtros uniformes distintos. Si además $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros de Gabriel, los filtros uniformes $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}\circ\mathcal{L}$ no tienen por qué ser filtros de Gabriel. Las parejas de filtros de Gabriel tales que su composición es un filtro de Gabriel están caracterizadas por las siguientes propiedades:

(1.3.3) Teorema. ([11, 34]) *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ dos filtros de Gabriel en el anillo R que tienen como radicales asociados a $\sigma_\mathcal{L}$ y $\sigma_\mathcal{H}$ respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.3.3.1) *Para todo R–módulo a izquierda M, $\sigma_\mathcal{L}(Q_{\sigma_\mathcal{H}}M)=Q_{\sigma_\mathcal{H}}(\sigma_\mathcal{L}M)$;*

(1.3.3.2) *Para todo R–módulo a izquierda M, $\sigma_\mathcal{H}(Q_{\sigma_\mathcal{L}}M)=Q_{\sigma_\mathcal{L}}(\sigma_\mathcal{H}M)$;*

(1.3.3.3) *Si $M\in\mathcal{T}_{\sigma_\mathcal{L}}$ y $N\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{L}}$ entonces $Q_{\sigma_\mathcal{H}}M\in\mathcal{T}_{\sigma_\mathcal{L}}$ y $Q_{\sigma_\mathcal{H}}N\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{L}}$;*

(1.3.3.4) *Si $M\in\mathcal{T}_{\sigma_\mathcal{H}}$ y $N\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{H}}$ entonces $Q_{\sigma_\mathcal{L}}M\in\mathcal{T}_{\sigma_\mathcal{H}}$ y $Q_{\sigma_\mathcal{L}}N\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{H}}$;*

(1.3.3.5) *$\sigma_\mathcal{H}$, resp. $\sigma_\mathcal{L}$, es por restricción un radical en $(R,\sigma_\mathcal{L})-\mathbf{mod}$, resp. en $(R,\sigma_\mathcal{H})-\mathbf{mod}$;*

(1.3.3.6) *Si $M\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{L}}$, resp. $N\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{H}}$, entonces $M/\sigma_\mathcal{H}M\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{L}}$, resp. $N/\sigma_\mathcal{L}N\in\mathcal{F}_{\sigma_\mathcal{H}}$;*

(1.3.3.7) *$\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ es un filtro de Gabriel;*

(1.3.3.8) *$\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ es el supremo de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ en el retículo de filtros de Gabriel de R;*

(1.3.3.9) *$\mathcal{L}\circ\mathcal{H}=\mathcal{H}\circ\mathcal{L}$.*

(1.3.4) Si dos filtros de Gabriel verifican alguna de las condiciones equivalentes del resultado anterior se dice que son *mutuamente compatibles* ([43]).

Más generalmente, dado un R–módulo a izquierda M, se dice que dos filtros de Gabriel $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ en R son *mutuamente compatibles con respecto a* M si $\sigma_{\mathcal{L}}(Q_{\mathcal{H}}M) = Q_{\mathcal{H}}(\sigma_{\mathcal{L}}M)$ y $\sigma_{\mathcal{H}}(Q_{\mathcal{L}}M) = Q_{\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{H}}M)$, o equivalentemente ([11]), si $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ y $Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ son $\mathcal{L} \vee \mathcal{H}$–libres de torsión, donde el supremo está tomado en el retículo de filtros de Gabriel en R. La compatibilidad entre filtros de Gabriel con respecto a un módulo permite construir, a partir de un anillo noetheriano a izquierda R, un haz de anillos $\mathcal{O}_R$ y, a partir de un R–módulo a izquierda M, un haz de $\mathcal{O}_R$–módulos $\mathcal{O}_M$. En efecto, si consideramos en el espectro de los ideales primos biláteros $\mathbf{Spec}(R)$ una topología en la que los abiertos son de la forma

$$\mathcal{K}(\mathcal{L}) = \{P \in \mathbf{Spec}(R)\ ;\ R/P \text{ es } \mathcal{L}\text{–libre de torsión}\}$$

donde $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico, entonces, puesto que $\mathcal{L}$ queda unívocamente determinado por $\mathcal{K}(\mathcal{L})$, es posible definir un prehaz de anillos $\mathcal{O}_R$, resp. de $\mathcal{O}_R$–módulos a izquierda $\mathcal{O}_M$, que a cada abierto $U = \mathcal{K}(\mathcal{L})$ le asigne la localización $Q_{\sigma_{\mathcal{L}}}R$, resp. $Q_{\sigma_{\mathcal{L}}}M$, y a la inclusión $\mathcal{K}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (que equivale a $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$) el único homomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\sigma_{\mathcal{H}}}R \arrow[rr] & & Q_{\sigma_{\mathcal{L}}}R \\ & R \arrow[ul, "j_{\sigma_{\mathcal{H}},R}"] \arrow[ur, "j_{\sigma_{\mathcal{L}},R}"'] & \end{tikzcd}$$

resp.

$$\begin{tikzcd} Q_{\sigma_{\mathcal{H}}}M \arrow[rr] & & Q_{\sigma_{\mathcal{L}}}M \\ & M \arrow[ul, "j_{\sigma_{\mathcal{H}},M}"] \arrow[ur, "j_{\sigma_{\mathcal{L}},M}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si, además, para cada par de abiertos $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, los filtros de Gabriel $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son mutuamente compatibles respecto a M, entonces (y sólo en ese caso) el prehaz descrito anteriormente es un haz, como prueban J. Mulet y A. Verschoren con el siguiente resultado:

(1.3.5) Teorema. ([34]) *Sean M un R–módulo a izquierda y $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ dos filtros de Gabriel en el anillo noetheriano a izquierda y a derecha R. Entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son mutuamente compatibles respecto a M si, y sólo si, la sucesión canónica*

$$0 \longrightarrow Q_{\sigma_{\mathcal{L}\cap\mathcal{H}}}M \longrightarrow Q_{\sigma_{\mathcal{L}}}M \oplus Q_{\sigma_{\mathcal{H}}}M \rightrightarrows Q_{\sigma_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}}M$$

es exacta (donde el supremo $\mathcal{L} \vee \mathcal{H}$ está tomado en el retículo de filtros de Gabriel en R).

(1.3.6) Si A es un anillo conmutativo e I es un ideal de A, se llama topología I–ádica o I–topología de A a la topología lineal que tiene a la familia $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como base de entornos abiertos de 0. Si M es un A–módulo, la topología I–ádica o I–topología de M es la topología lineal que tiene a la familia $\{I^nM\}_{n\in\mathbb{N}}$ como base de entornos abiertos de 0.
En un submódulo M' de M se puede considerar su topología I–ádica y también la topología inducida en M' por la topología I–ádica de M. El lema de Artin-Rees dice que si A es un anillo noetheriano, entonces ambas topologías coinciden.

(1.3.7) Si $\mathcal{L}$ es una familia de ideales a izquierda de un anillo R, entonces $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme si, y sólo si, es la familia de entornos abiertos de 0 de una topología que convierte a R en un anillo topológico (ver (3.1.10)). Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme y M es un R–módulo a izquierda, se denomina $\mathcal{L}$–topología de M a la topología que tiene como base de entornos abiertos de 0 a la familia de submódulos

$$\mathcal{L}(M) = \{N \leq M \ ; \ M/N \text{ es } \mathcal{L} - \text{torsión}\} \ .$$

Si M' es un submódulo de M, en general la $\mathcal{L}$–topología de M' no es la topología inducida por la $\mathcal{L}$–topología de M. Sin embargo, ambas topologías coinciden cuando M' es un abierto en la $\mathcal{L}$–topología de M y $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel:

(1.3.8) Proposición. ([22]) *Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en el anillo R. Entonces $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel si, y sólo si, para todo R–módulo a izquierda M y todo submódulo M' abierto en la $\mathcal{L}$–topología de M, la $\mathcal{L}$–topología de M' y la topología inducida por la $\mathcal{L}$–topología de M coinciden.*

(1.3.9) Si M' es un submódulo de M tal que M' no es un abierto en la $\mathcal{L}$–topología de M, entonces la topología inducida en M' y la $\mathcal{L}$–topología de M' en general no coinciden ni aún cuando $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel. Se dice que un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$, y también su radical asociado $\sigma_{\mathcal{L}}$, resp. la teoría de torsión $(\mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{L}}}, \mathcal{F}_{\sigma_{\mathcal{L}}})$ correspondiente a éste, es *estable* si para todo R–módulo a izquierda M y todo submódulo M' de M la $\mathcal{L}$–topología de M' es la topología inducida de la $\mathcal{L}$–topología de M.
La noción de estabilidad se puede definir de otras maneras equivalentes:

(1.3.10) Proposición. ([11]) *Sea $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel en el anillo R, $\sigma_{\mathcal{L}}$ el radical asociado a $\mathcal{L}$ y $(\mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{L}}}, \mathcal{F}_{\sigma_{\mathcal{L}}})$ la teoría de torsión correspondiente a $\sigma_{\mathcal{L}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.3.10.1) *$\mathcal{L}$ es estable;*

(1.3.10.2) $\mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{L}}}$ *es cerrada para envolventes inyectivas;*

(1.3.10.3) *para todo R–módulo a izquierda $\sigma_{\mathcal{L}}$–inyectivo M, $\sigma_{\mathcal{L}}M$ es un sumando directo de M.*

La familia de filtros de Gabriel estables en R es cerrada al tomar supremos finitos e intersecciones arbitrarias. Si R es noetheriano a izquierda, entonces también es cerrada al tomar supremos arbitrarios ([11, III.1.6]).

(1.3.11) Si I es un ideal bilátero del anillo R y M es un R–módulo a izquierda, se dice que I tiene la propiedad de *Artin-Rees (a izquierda) con respecto a* M si para todo submódulo M' de M y todo número natural n existe otro número natural r de manera que $I^r M \cap M' \subseteq I^n M'$.

Si I es un ideal bilátero de R finitamente generado como ideal a izquierda, entonces, como hemos mencionado en (1.2.10), el conjunto

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq R \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}, I^n \subseteq L\}$$

es un filtro de Gabriel en R. Si R es un anillo noetheriano a izquierda y M es un R–módulo a izquierda finitamente generado, entonces, para todo entorno del cero N en la $\mathcal{L}_I$–topología de M, existe un número natural n tal que $I^n M \subseteq N$. Por lo tanto, si R es noetheriano a izquierda, el filtro $\mathcal{L}_I$ es estable si, y sólo si, el ideal I tiene la propiedad de Artin-Rees con respecto a cada R–módulo a izquierda finitamente generado, o equivalentemente, con respecto a cada uno de los ideales a izquierda de R ([11]).

Se dice que un ideal bilátero I en un anillo noetheriano R tiene la propiedad de *Artin-Rees (a izquierda)* si tiene la propiedad de Artin-Rees con respecto a cada uno de los ideales a izquierda de R.

(1.3.12) Se dice que un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ en R tiene la propiedad de *Artin-Rees (a izquierda)* si, para todo ideal a izquierda L de R y todo I perteneciente a $\mathcal{L}$, existe un elemento $J \in \mathcal{L}$ de manera que $J \cap L \subseteq IL$.

En general, si R es un anillo noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel estable en R, entonces $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Artin-Rees, pero no recíprocamente.

Sin embargo, si I es un ideal bilátero de R, entonces I tiene la propiedad de Artin-Rees si, y sólo si, el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_I$ tiene la propiedad de Artin-Rees, por lo que se tiene que si R es un anillo noetheriano a izquierda, el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_I$ es estable si, y sólo si, $\mathcal{L}_I$ tiene la propiedad de Artin-Rees. Esta equivalencia puede ser extendida a filtros de Gabriel simétricos, como prueba un conocido resultado que se enuncia a continuación. Una consecuencia de este resultado y del lema de Krull es que todo filtro de Gabriel en un anillo conmutativo noetheriano es estable.

(1.3.13) Proposición. ([11, 38]) *Si R es un anillo noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico en R, entonces $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Artin-Rees si, y sólo si, $\mathcal{L}$ es estable.*

(1.3.14) Un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ en el anillo R se dice que tiene la propiedad de *Artin-Rees débil (a izquierda)* si para cada ideal bilátero I de R y cada $L \in \mathcal{L}$ existe un elemento $H \in \mathcal{L}$ tal que $IH \subseteq LI$.
Si el filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Artin-Rees, evidentemente también tiene la propiedad de Artin-Rees débil. A continuación se verá que estas dos propiedades son equivalentes para una clase de anillos bastante grande.

(1.3.15) Definición. ([1, 11, 28, 30]) Se dice que el ideal primo bilátero P del anillo R satisface la *condición fuerte de segunda capa* a izquierda si no contiene estrictamente a ningún ideal primo bilátero Q de manera que exista una sucesión exacta de R–módulos a izquierda unifomes finitamente generados

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

tal que

(1.3.15.1) $M' = \{m \in M \ ; \ Pm = 0\}$;

(1.3.15.2) $P = \{r \in R \ ; \ rN' = 0\}$ para cada submódulo $N' \neq 0$ de M';

(1.3.15.3) $Q = \{r \in R \ ; \ rN'' = 0\}$ para cada submódulo $N'' \neq 0$ de M''.

(1.3.16) Si todos los ideales primos biláteros de R verifican la condición anterior, se dice que R satisface la condición fuerte de segunda capa a izquierda.
La clase de anillos que satisfacen la condición fuerte de segunda capa a izquierda es amplia. Algunos ejemplos, que pueden ser encontrados en la literatura al respecto ([1, 11, 28, et al.]), son los siguientes:

(1.3.16.1) Anillos noetherianos totalmente acotados a izquierda (también llamados FBN), o equivalentemente ([13]), anillos noetherianos a izquierda que satisfacen la condición (H) de Gabriel, esto es, tales que para todo ideal a izquierda L existe una familia finita de elementos $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \subseteq R$ de manera que $(L : R) = \bigcap_{1 \leq i \leq n}(L : r_i)$. Como ejemplos cabe citar a los anillos en los que se verifica una identidad polinomial, y por supuesto, a los anillos noetherianos conmutativos.

(1.3.16.2) Anillos artinianos a izquierda y a derecha.

(1.3.16.3) Anillos cuyos ideales a izquierda y a derecha son principales.

(1.3.16.4) Extensiones de Ore de la forma $R[x; \varphi, \delta]$ y $R[x, x^{-1}; \varphi]$ de un anillo noetheriano conmutativo R.

(1.3.16.5) Anillos de grupo RG, donde R es noetheriano a izquierda y a derecha, y G es un grupo que se puede descomponer como producto de grupos cíclicos por un grupo finito (*polycyclic-by-finite*).

(1.3.16.6) Anillos noetherianos a izquierda y a derecha tales que el ideal cero es un ideal primo y cada ideal a izquierda es proyectivo si es considerado como un módulo a izquierda.

(1.3.16.7) Anillos que son extensión de otro anillo noetheriano a izquierda y a derecha R que satisface la condición fuerte de segunda capa a izquierda y que están finitamente generados como R–módulos a izquierda y a derecha.

(1.3.17) Teorema. ([32]) *Si R es un anillo noetheriano a izquierda que satisface la condición fuerte de segunda capa a izquierda, entonces un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Artin-Rees si, y sólo si, $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Artin-Rees débil.*

La conexión entre las nociones de estabilidad y compatibilidad vienen dadas por el siguiente resultado:

(1.3.18) Proposición. ([11, 38]) *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son dos filtros de Gabriel estables en el anillo R, entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son mutuamente compatibles, y además los funtores localización $Q_{\mathcal{L}}, Q_{\mathcal{H}} : R-\mathbf{mod} \longrightarrow R-\mathbf{mod}$ conmutan.*

Puesto que en un anillo conmutativo noetheriano todos los filtros de Gabriel son estables, se obtiene como corolario de la proposición anterior que si R es un anillo conmutativo noetheriano y $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros de Gabriel en R, entonces $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \cong Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ para cada R–módulo M, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \arrow[rr, "\cong"] & & Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}M \\ & M \arrow[ul, "j_{\mathcal{L},Q_{\mathcal{H}}M}\circ j_{\mathcal{H},M}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{H},Q_{\mathcal{L}}M}\circ j_{\mathcal{L},M}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Capítulo 2

Geometría algebraica no conmutativa: visión histórica

En este capítulo se pretende hacer una recopilación de algunas de las generalizaciones más completas, para anillos no conmutativos, de la construcción de haces de estructura en el espectro de un anillo conmutativo. Son particularmente interesantes aquellas construcciones de *haces* sobre el *espectro* de un anillo R que satisfacen (el mayor número posible de) las propiedades siguientes:

- El *espectro* y su *topología* coinciden con el espectro de los ideales primos con la topología de Zariski cuando el anillo R es conmutativo.

- Se puede definir un haz de anillos $\mathcal{O}_R$ sobre el *espectro*, y para cada R–módulo M se puede definir un haz de $\mathcal{O}_R$*–módulos* $\mathcal{O}_M$, de manera que R, resp. M, se obtiene como el conjunto de *secciones globales* de $\mathcal{O}_R$, resp. de $\mathcal{O}_M$.

- Un homorfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ (de cierto tipo) induce un morfismo de *espacios anillados* entre las estructuras *espectro-haz* de R y de S.

2.1. El espectro de un anillo no conmutativo

La construcción de un objeto geométrico asociado a un anillo no necesariamente conmutativo comienza con la generalización de la noción de espectro primo. Un ideal a izquierda propio L de un anillo R se dice que es primo si siempre que $rRs \subseteq L$, con $r, s \in R$, entonces o bien $r \in L$, o bien $s \in L$. En un anillo conmutativo esta definición coincide con la definición clásica, pero en anillos no conmutativos, el espectro de ideales primos biláteros puede ser muy reducido: por ejemplo, si k es un cuerpo y R es el anillo de matrices cuadradas $M_2(k)$, el espectro de ideales primos biláteros de R tiene como único elemento al ideal $\{0\}$.

Con el objetivo de obtener espectros más grandes, diversos autores han dado diferentes definiciones de *primo* en un anillo R, que en el caso de ser R conmutativo se corresponden con los ideales primos clásicos, y a partir de ellas han desarrollado, en mayor o menor medida, la construcción del objeto geométrico.

(2.1.1) Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel en un anillo noetheriano a izquierda R e I es un ideal bilátero de R, entonces $(Q_{\mathcal{L}}R)I$ es un ideal a izquierda de $Q_{\mathcal{L}}R$, pero en general no es un ideal bilátero (ver [22]). Se dice que el filtro $\mathcal{L}$ es *geométrico* (o también que el anillo R es $\mathcal{L}$–*perfecto*) si $(Q_{\mathcal{L}}R)I$ es un ideal bilátero de $Q_{\mathcal{L}}R$ siempre que I sea un ideal bilátero de R. Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel geométrico con la propiedad T, entonces existe una biyección entre el conjunto de ideales primos biláteros que no están en $\mathcal{L}$, que se denota por $\mathcal{K}(\mathcal{L})$, y el conjunto de ideales primos biláteros de $Q_{\mathcal{L}}R$ ([35]). Los anillos primos noetherianos a izquierda cuyos ideales biláteros están generados por elementos del centro, como por ejemplo los anillos de matrices cuadradas con coeficientes en un anillo primo noetheriano a izquierda, son $\mathcal{L}$–perfectos para cualquier filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ con la propiedad T. No es fácil encontrar ejemplos de anillos primos noetherianos a izquierda que no sean perfectos respecto a cualquier filtro de Gabriel con la propiedad T, aunque no se puede decir que cualquier anillo primo noetheriano a izquierda lo sea.

Si R es noetheriano a izquierda y primo, entonces el prehaz definido en el espectro de primos biláteros $\mathbf{Spec}R$ que asigna, a cada abierto de la forma

$$X(I) = \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ I \not\subseteq P\} \ ,$$

donde $I \leq_{l,r} R$, el anillo $Q_{\mathcal{L}_I}R$, y a la inclusión $X(I) \subseteq X(J)$ (que equivale a $I \supseteq J$), el homomorfismo de anillos $Q_{\mathcal{L}_J}R \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_I}R$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{L}_J}R \arrow[rr] & & Q_{\mathcal{L}_I}R \\ & R \arrow[ul, "j_{\mathcal{L}_J}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{L}_I}"'] & \end{tikzcd}$$

es un haz de anillos. La fibra en un punto $P \in \mathbf{Spec}R$ es el anillo

$$\varinjlim_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{L}_I)} Q_{\mathcal{L}_I}R = Q_{\mathcal{L}_{R\setminus P}}R \ ,$$

donde $\mathcal{L}_{R\backslash P} = \{L \leq_l R \ ; \ (L : R) \nsubseteq P\}$ ([11, 35, 46]). Si $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es un filtro de Gabriel geométrico con la propiedad T, entonces la fibra $Q_{\mathcal{L}_{R\backslash P}}R$ es un anillo local, en el sentido de que tiene un único ideal bilátero maximal.

En el apartado 2.2. de este capítulo se estudian con más profundidad las propiedades de esta construcción y su funtorialidad, siguiendo [46].

(2.1.2) Considerando que, dado un ideal primo P del anillo conmutativo A, un A–módulo N es de $(R\backslash P)$–torsión si, y sólo si, $Hom_A(N, E(A/P)) = 0$, primero O. Goldman, y posteriormente N. Popescu, introducen la noción de filtro de Gabriel primo como generalización de la de ideal primo.

Dado un R–módulo a izquierda M, se denota por $\xi(M)$ al menor radical en $R-\mathbf{mod}$ tal que M es de torsión, y por $\chi(M)$ al mayor radical en $R-\mathbf{mod}$ tal que M es libre de torsión. La clase de torsión de $\chi(M)$ es la familia de R–módulos a izquierda N tales que $Hom_R(N, E(M)) = 0$, donde $E(M)$ es la envolvente inyectiva de M.

Un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ es *primo* si existe algún R–módulo a izquierda M de manera que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\chi(M)}$ y M/N es de $\mathcal{L}$–torsión para cada submódulo no nulo N de M ([22]).

Si A es un anillo conmutativo y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\chi(M)}$ es un filtro de Gabriel primo, entonces M se puede tomar de la forma A/P, donde P es un ideal primo. Por otra parte, si P es un ideal primo de A, entonces el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_{\chi(A/P)}$ es primo, de donde se obtiene una aplicación sobreyectiva del conjunto de primos de A en el conjunto de filtros de Gabriel primos en $A-\mathbf{mod}$.

En [36] se da una definición equivalente de primo: un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ es primo si, y sólo si, la categoría de R–módulos a izquierda $\mathcal{L}$–cerrados tiene un sólo tipo de objetos simples y su envolvente inyectiva E (en $(R, \mathcal{L})-\mathbf{mod}$) es un cogenerador (esto es, para todo R–módulo $\mathcal{L}$–cerrado no nulo N, el grupo abeliano $Hom_{(R,\mathcal{L})-\mathbf{mod}}(N, E)$ es no nulo). Además se comprueba que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel primo si, y sólo si, existe un ideal a izquierda L de R tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\chi(R/L)}$ y de manera que si $L \nsubseteq H \leq_l R$, entonces $H \in \mathcal{L}$. Un ideal a izquierda L de R se denomina *super primo* si, siempre que $L \nsubseteq H \leq_l R$, entonces $H \in \mathcal{L}_{\chi(R/L)}$. Si R es conmutativo entonces los ideales super primos de R son exactamente los ideales primos.

Si $\mathfrak{m}$ es un ideal a izquierda maximal del anillo R, entonces el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_{\chi(R/\mathfrak{m})}$ es primo, y el ideal $\mathfrak{m}$ es super primo.

(2.1.3) Consideremos ahora el conjunto de clases de isomorfía de módulos a izquierda inyectivos indescomponibles sobre un anillo noetheriano a izquierda R, que se denota por $\mathbf{Sp}R$ y que, en caso de ser R totalmente acotado a izquierda, se corresponde biyectivamente con $\mathbf{Spec}R$ mediante la aplicación

$$\mathbf{Sp}R \longrightarrow \mathbf{Spec}R \ , \quad [E] \longmapsto ass(E) \ ,$$

donde $ass(E)$ es el (único) elemento maximal en el conjunto de anuladores de partes de E. La generalización del espectro de primos que proponen B. Goldston y A. C. Mewborn ([23]) consiste en un grafo dirigido $\mathcal{G}$ que tiene como vértices a los elementos de $\mathbf{Sp}R$ y de tal manera que hay una flecha desde $[E]$ a $[F]$ si, y sólo si, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

tal que N y N' son submódulos críticos (esto es, tienen dimensión de Krull estrictamente mayor que la dimensión de Krull de cualquier imagen epimórfica no trivial [30, 6.2.9]) de E y F respectivamente y M es un submódulo de E. El conjunto $\mathbf{Sp}R$ está dotado de una topología que tiene como base de abiertos a los conjuntos $X(L)$, donde $L \leq_l R$, definidos por

$$X(L) = \mathbf{Sp}R \ \setminus \ \{ \, [F] \ ; \ \exists \, [E] \in \mathbf{Sp}R, \ 0 \neq f : R/L \longrightarrow E \\ \text{y una ruta en } \mathcal{G} \text{ desde } [E] \text{ hasta } [F] \, \} \ .$$

De hecho, si L y L' son dos ideales a izquierda en R, entonces

$$X(L) \cap X(L') = X(L \cap L') \ .$$

Dado un R–módulo a izquierda M, consideremos el prehaz en $\mathbf{Sp}R$, que a cada abierto U de $\mathbf{Sp}R$ le asigna el R–módulo $Q_{\chi(E_U)}M$, donde

$$E_U = \bigoplus_{[E] \in U} E \ ,$$

y a la inclusión $U \subseteq V$ le asigna el homomorfismo de R–módulos a izquierda $Q_{\chi(E_V)}M \longrightarrow Q_{\chi(E_U)}M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\chi(E_V)}M \arrow[rr] & & Q_{\chi(E_U)}M \\
& M \arrow[ul, "j_{\chi(E_V)}"] \arrow[ur, "j_{\chi(E_U)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $M = R$, entonces este prehaz es un haz de anillos y si M es de dimensión uniforme finita (esto es, no contiene sumas directas infinitas) o bien todo abierto de $\mathbf{Sp}R$ es compacto, entonces el prehaz descrito anteriormente es un haz de módulos ([23]).

Sea R un anillo conmutativo noetheriano. Puesto que R es, en particular, totalmente acotado, la aplicación que a P le asigna $[E(R/P)]$ describe una biyección entre $\mathbf{Spec}R$ y $\mathbf{Sp}R$. Si P y Q son ideales primos de R, la inclusión $P \subseteq Q$ equivale a que exista un camino en el grafo $\mathcal{G}$ desde $[E(R/P)]$ hasta $[E(R/Q)]$. Para cada elemento no nilpotente $r \in R$, la localización en el conjunto multiplicativamente cerrado $\{r^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es el anillo de secciones en el abierto $U_r = \{[E(R/P)] \ ; \ r \notin P\}$.

(2.1.4) La noción de primo de P. Cohn ([15]) está inspirada en el hecho de que el núcleo de un homomorfismo de un anillo conmutativo en un dominio de integridad es un ideal primo. Como en el caso no necesariamente conmutativo las cosas no funcionan de manera tan directa, Cohn introduce matrices tanto en la definición como en la localización en primos.

Sea k un anillo de división y R una k–álgebra. Un conjunto P de matrices cuadradas no necesariamente del mismo tamaño con coeficientes en R se dice que es un *Primo* de R si existe un anillo de división L y un homomorfismo de anillos $f : R \longrightarrow L$ de tal manera que para cada matriz $A = (a_{ij})$ perteneciente a P, la matriz $(f(a_{ij}))$ no es inversible. Si S es un conjunto de matrices cuadradas con coeficientes en R, se llama *anillo S–inversor universal*, y se denota por R_S, al anillo obtenido a partir de R al que se le adjuntan, para cada matriz $A = (a_{ij})_{n\times n} \in S$, unos elementos a'_{ij} con las relaciones dadas por la expresión

$$AA' = A'A = I_n \ ,$$

donde $A' = (a'_{ij})_{n\times n}$. Si S es el complementario de un Primo P en el conjunto de todas las matrices cuadradas con coeficientes en R, entonces el anillo S–inversor universal R_S es un anillo local, que se denota por R_P.

El conjunto de Primos de R se denomina *espectro cuerpo* de R y se denota por $\mathbf{Field} - \mathbf{spec}R$. Los subconjuntos de la forma

$$O(A) = \{P \in \mathbf{Field} - \mathbf{spec}R \ ; \ A \notin P\} \ ,$$

donde A es una matriz cuadrada con coeficientes en R, forman una base de abiertos de una topología en $\mathbf{Field} - \mathbf{spec}R$, y de hecho,

$$O(A) \cap O(B) = O(C) \ ,$$

donde C es la matriz

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

El funtor que a cada abierto de la forma $O(A)$ le asigna el anillo S_A–inversor universal, donde S_A es el complementario de $\bigcup_{P\in O(A)} P$ en el conjunto de las matrices cuadradas con coeficientes en R, y a la inclusión $O(A) \subseteq O(B)$ le asigna el homomorfismo de anillos natural $R_{S_B} \longrightarrow R_{S_A}$ (pues $S_B \subseteq S_A$), es un prehaz de anillos sobre el espacio topológico $\mathbf{Field} - \mathbf{spec}R$ ([15]). La fibra en el punto $P \in \mathbf{Field} - \mathbf{spec}R$ de este prehaz y del haz $\widetilde{R}$ obtenido por hacificación, es el anillo local R_P (cfr. [14]).

Cada elemento r de R define de manera natural una sección global s_r de $\widetilde{R}$. La aplicación de R en el anillo de secciones globales $\Gamma(\mathbf{Field} - \mathbf{spec}R, \widetilde{R})$

dada por $r \longmapsto s_r$ es un homomorfismo de anillos, aunque en general no es ni un monomorfismo ni un epimorfismo ([15]).

En el caso de que R sea un anillo conmutativo, entonces para cada conjunto S de matrices cuadradas con coeficientes en R, el anillo S–inversor universal R_S es isomorfo a la localización de R en el conjunto multiplicativamente cerrado

$$C = \{\det A \; ; \; A \in S\} \; .$$

Dado que todo Primo P está determinado por el homomorfismo natural $R \longrightarrow K_P$, donde K_P es el anillo de división residual del anillo local R_P, se tiene que P viene dado por, y a su vez, determina a la localización de R en el conjunto de los determinantes de las matrices cuadradas que no están en P. Como el conjunto de elementos de R que no va a unidades de R_C vía el morfismo localización $R \longrightarrow R_C$ es un ideal primo, se obtiene una identificación del espectro cuerpo de R con el espectro de ideales primos de R.

(2.1.5) El espectro que propone A. Rosenberg en [37] está constituido por ideales a izquierda, que no son en general biláteros, pero que están relacionados de manera directa con la localización. Rosenberg define una relación de orden entre los ideales a izquierda del anillo que se reduce a la inclusión en el caso conmutativo, y a partir de ella introduce la noción de primo a izquierda haciéndole jugar a dicha relación el papel de la inclusión.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, y consideremos el preorden en el conjunto de objetos de $\mathcal{C}$ dado por

$$X \leq Y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \; , \quad \text{un subobjeto } U \text{ de } X^{(k)} \text{ y un epimorfismo } U \longrightarrow Y \; .$$

Si X_0 es un subobjeto de X, entonces $X \leq X_0$. Se dice que X es un *objeto espectral* de $\mathcal{C}$ si $X_0 \leq X$ para cada subobjeto no nulo X_0 de X. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de Grothendieck, entonces un objeto X de $\mathcal{C}$ es un objeto espectral si, y sólo si, la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son aquellos Y tales que $Y \not\leq X$ es una subcategoría localizante ([37]).

Un ideal a izquierda $\mathfrak{p}$ del anillo R se dice que es un *primo a izquierda* si $R/\mathfrak{p}$ es un objeto espectral de $R-\mathbf{mod}$, o equivalentemente, si para cada $r \in R$ que no pertenezca a $\mathfrak{p}$, existe un subconjunto finito F de R tal que

$$((\mathfrak{p} : r) : F) = \bigcap_{f \in F} (\mathfrak{p} : fr) \subseteq \mathfrak{p} \; .$$

El filtro de Gabriel que corresponde a la subcategoría localizante de $R-\mathbf{mod}$ dada por el objeto espectral $R/\mathfrak{p}$, y que denotamos $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$, es el mayor filtro uniforme que no contiene a $\mathfrak{p}$.

Cualquier ideal a izquierda maximal de R es primo a izquierda, y si el anillo R es noetheriano a izquierda, entonces todo ideal primo bilátero de R es primo a izquierda.

El conjunto de ideales primos a izquierda del anillo R, que se denota $\mathbf{spec}R$, puede ser dotado de varias topologías *compatibles con la especialización* en el sentido de que todos los primos a izquierda $\mathfrak{q}$ tales que $(\mathfrak{p} : F) \subseteq \mathfrak{q}$ para algún conjunto finito F de elementos de R pertenecen a la clausura de $\mathfrak{p}$. La topología mas fina que satisface esta condición se denota por τ. La topología de Zariski es aquella que tiene como abiertos a los conjuntos de la forma

$$X(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathbf{spec}R\ ;\ I \not\subseteq \mathfrak{p}\}\ ,$$

donde I es un ideal bilátero de R, y se denota por τ_Z. La topología que tiene como base de abiertos a los conjuntos

$$X(L) = \mathbf{spec}R \setminus \{\mathfrak{p} \in \mathbf{spec}R\ ;\ \exists F \subseteq R, F\text{finito}, (L : F) \subseteq \mathfrak{p}\}\ ,$$

donde L es un ideal a izquierda de R, se denota por τ^*.

Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos tal que, para todo par de ideales $\mathfrak{q} \in \mathbf{spec}S$ y $L \leq_l S$ tal que $(L : F) \subseteq \mathfrak{q}$ para algún conjunto finito $F' \subseteq S$, se puede encontrar $F \subseteq R$ finito tal que $(\varphi^{-1}(L) : F) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ (p.ej.: sea φ una extensión centralizante). Entonces la aplicación

$${}^a\varphi : \mathbf{spec}S \longrightarrow \mathbf{spec}R\ \ ,\quad \mathfrak{q} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

es una aplicación continua si consideramos en $\mathbf{spec}R$ y $\mathbf{spec}S$, o bien las topologías τ, o bien las topologías de Zariski τ_Z.

Dado un R–módulo a izquierda M, el funtor de la categoría de abiertos de $\mathbf{spec}R$ (con cualquiera de las tres topologías anteriores) en la categoría $R-\mathbf{mod}$ que a cada abierto U le asigna $Q_{\mathcal{L}_U}M$, donde $\mathcal{L}_U = \bigcap_{\mathfrak{p}\in U}\mathcal{L}_\mathfrak{p}$, y a la inclusión $U \subseteq V$ le asigna el homomorfismo $Q_{\mathcal{L}_V}M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_U}M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{L}_V}M \arrow[rr] & & Q_{\mathcal{L}_U}M \\ & M \arrow[ul, "j_{\mathcal{L}_V}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{L}_U}"'] & \end{tikzcd}$$

es un prehaz separado.

En el caso de que R sea un anillo primo de Goldie a izquierda (esto es, R tiene dimensión uniforme finita como R–módulo a izquierda y verifica la condición de cadena ascendente en anuladores) y M es un submódulo del producto de una familia de R–módulos a izquierda proyectivos, entonces ese prehaz es un haz (ver [37, 6.4.4]).

Por último, si R es un anillo conmutativo, entonces un ideal L de R es primo a izquierda si, y sólo si, es primo. Las topologías τ_Z y τ^* con las que está dotado $\mathbf{spec}R$ coinciden con la de Zarizki en $\mathbf{Spec}R$, y para cada R–módulo M, el prehaz separado que define M sobre $\mathbf{spec}R$ coincide con su haz de estructura.

2.2. Localización de bimódulos y anillos con identidad polinomial

Retomando la idea de considerar, como en el caso conmutativo, principalmente módulos e ideales con estructura a ambos lados, F. Van Oystaeyen y A. Verschoren particularizan la teoría de localización en categorías de Grothendieck a las categorías de bimódulos. Posteriormente, y tomando como espacio topológico de base el conjunto de ideales primos biláteros con la topología de Zariski, utilizan dicha teoría de localización para construir un haz asociado a cada bimódulo.

Como el funtor que se obtiene en un principio carece de la propiedad de encolado ((1.1.15.2)), hacen uso del funtor hacificación. Por lo tanto el anillo de secciones globales del haz de estructura asociado a R no coincide con R salvo en algunos casos como, por ejemplo, cuando R es un anillo primo.

Además, debido a las propiedades que posee la localización en bimódulos, dada una extensión centralizante entre anillos primos para los que se satisface una *identidad polinomial* (propia), es posible definir un morfismo entre sus espacios anillados asociados respectivos, con lo que esta construcción tiene carácter funtorial.

Sea R un anillo y $\mathbf{Spec}R$ el espacio topológico formado por todos los ideales primos biláteros de R dotado de la topología de Zariski, que es aquella que tiene por abiertos a los conjuntos de la forma

$$X(I) = \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ I \not\subseteq P\} \ ,$$

donde I es un ideal bilátero de R. Al igual que en el caso conmutativo, $\mathbf{Spec}R$ es compacto pero no Hausdorff. Si además R es noetheriano a izquierda, entonces todo abierto de $\mathbf{Spec}R$ es compacto.

Sea R un anillo noetheriano a izquierda. A cada abierto $X(I)$ se le puede asociar el radical $\sigma_I = \xi(R/I)$, que es el menor radical tal que R/I es un

R–módulo a izquierda de torsión, cuyo filtro de Gabriel asociado es

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq_l R \; ; \; \exists n \in \mathbb{N}, \; I^n \subseteq L\} \; .$$

Como ya se ha mencionado, se puede construir un prehaz de anillos $\mathcal{Q}_R$ sobre $\mathbf{Spec}R$, y dado un R–módulo a izquierda M, se puede construir un prehaz de $\mathcal{Q}_R$–módulos que asigna, a cada abierto $X(I)$, el $Q_{\mathcal{L}_I}R$–módulo a izquierda $Q_{\mathcal{L}_I}M$, y a la inclusión $X(I) \subseteq X(J)$ (que equivale a $\mathcal{L}_I \subseteq \mathcal{L}_J$), el único homomorfismo de R–módulos

$$\rho^{X(J)}_{X(I)} : Q_{\mathcal{L}_J}M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_I}M$$

tal que $\rho^{X(J)}_{X(I)} \circ j_{\mathcal{L}_J,M} = j_{\mathcal{L}_I,M}$.

El prehaz $\mathcal{Q}_M$ es un prehaz separado (ver [35, 42]) que devuelve a M como el módulo de las secciones globales $\Gamma(\mathbf{Spec}R, \mathcal{Q}_M)$.

En general $\mathcal{Q}_M$ no es un haz, aunque sí lo es en ciertos casos particulares. Por ejemplo, si R es un anillo primo (noetheriano a izquierda), entonces $\mathcal{Q}_R$ es un haz de anillos, y si M es un R–módulo a izquierda *totalmente libre de torsión* (esto es, es σ_I–libre de torsión para todo ideal bilátero I de R), entonces $\mathcal{Q}_M$ también es un haz.

El haz obtenido por hacificación del prehaz $\mathcal{Q}_M$ (ver (1.1.16)) se denota por $\mathcal{O}_M$. En general, el módulo de las secciones globales de $\mathcal{O}_M$ no tiene por qué coincidir con M.

La fibra de $\mathcal{O}_M$ (y de $\mathcal{Q}_M$) en el punto $P \in \mathbf{Spec}R$ es $Q_{\mathcal{L}_{R\setminus P}}M$, donde $\mathcal{L}_{R\setminus P}$ es el mayor filtro de Gabriel simétrico que no contiene a P (ver (3.1.32) para una definición alternativa).

Si el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_I$ es geométrico, entonces existe una biyección entre los ideales primos biláteros de $Q_{\mathcal{L}_I}R$ y los puntos del abierto $X(I)$. Esta biyección es un homeomorfismo si consideramos en $\mathbf{Spec}Q_{\mathcal{L}_I}R$ la topología de Zariski. Con esta identificación, el haz $\mathcal{O}_{Q_{\mathcal{L}_I}R}$ es isomorfo a la restricción del haz $\mathcal{O}_R$ al abierto $X(I)$.

(2.2.1) Como se ha visto en (1.2.4), las técnicas de localización en categorías de módulos debidas a Goldman (y que a su vez son particularización de las de Gabriel en categorías abelianas) pueden ser extendidas a categorías de Grothendieck sin mucho esfuerzo. De hecho, en virtud del teorema de Popescu-Gabriel ([40, 45, 51, et al.]), toda categoría de Grothendieck con generador G es equivalente a la categoría de $End(G)$–módulos a izquierda $\mathcal{L}$–cerrados para algún filtro de Gabriel $\mathcal{L}$ en el anillo de endomorfismos $End(G)$.

Dado un anillo R, la categoría cuyos objetos son los R–bimódulos y cuyos morfismos los homomorfismos R–lineales a izquierda y a derecha es una categoría de Grothendieck que se denota por $R-\mathbf{bimod}$. Un R–bimódulo M se dice que es *centralizante* o *de Artin* si está generado como R–módulo a izquierda (y por tanto también a derecha) por su centralizador

$$C_R(M) = \{m \in M \ ; \ rm = mr, \ \forall r \in R\} \ .$$

La subcategoría plena de $R-\mathbf{bimod}$ cuyos objetos son los R–bimódulos centralizantes se denota por $R-\mathbf{Cbimod}$. En general $R-\mathbf{Cbimod}$ no es una categoría abeliana.
Dado un R–bimódulo M, el R–bimódulo $RC_R(M)$ es el mayor objeto de $R-\mathbf{Cbimod}$ contenido en M. Si L es un ideal a izquierda de R, el mayor ideal bilátero contenido en L es $L^* = (L : R)$. Al sub-bimódulo $RC_R(L^*)$ de R se le denota $C(L)$. Un filtro uniforme $\mathcal{L}$ se dice que es *hipersimétrico* si $C(L) \in \mathcal{L}$ para cada $L \in \mathcal{L}$.
Si, dado un filtro de Gabriel $\mathcal{L}$, denotamos por $\mathcal{L}^{(2)}$ (resp. por $\mathcal{L}^C$) al menor filtro uniforme que contiene a L^* (resp. a $C(L)$) para cada $L \in \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L}$ es simétrico (resp. hipersimétrico) si, y sólo si, $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^{(2)} \subseteq \mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^C \subseteq \mathcal{L}$) (ver [46]).

(2.2.2) Una teoría de torsión en $R-\mathbf{bimod}$ es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de clases de bimódulos, tales que M pertenece a $\mathcal{T}$, resp. N pertenece a $\mathcal{F}$, si, y sólo si, $Hom_{R-\mathbf{bimod}}(M, N) = \{0\}$ para todo $N \in \mathcal{F}$, resp. para todo $M \in \mathcal{T}$. Los R–bimódulos que pertenecen a $\mathcal{T}$ se llaman de torsión y los que pertenecen a $\mathcal{F}$ se llaman libres de torsión. Un teoría de torsión es hereditaria si la clase de R–bimódulos de torsión es cerrada al tomar sub-bimódulos.
Un radical en $R-\mathbf{bimod}$ es un funtor exacto a izquierda

$$\sigma : R-\mathbf{bimod} \longrightarrow R-\mathbf{bimod}$$

tal que $\sigma M \leq_{l,r} M$ y $\sigma(M/\sigma M) = 0$ para todo R–bimódulo M, y $\sigma f = f_{\sigma M}$ para todo homomorfismo de R–bimódulos $f : M \longrightarrow N$.
Si $\sigma : R-\mathbf{mod} \longrightarrow R-\mathbf{mod}$ es un radical en la categoría de R–módulos a izquierda entonces su restricción

$$\sigma_{|R-\mathbf{bimod}} : R-\mathbf{bimod} \longrightarrow R-\mathbf{bimod}$$

es un radical en $R-\mathbf{bimod}$, pues $\sigma M \leq_{l,r} M$ para todo R–bimódulo M. Un radical σ define un teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$, donde

$$\mathcal{T}_\sigma = \{M \ ; \ \sigma M = M\}$$

y
$$\mathcal{F}_\sigma = \{M \ ; \ \sigma M = 0\} \ .$$

Recíprocamente, toda teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ define un radical σ dado por $\sigma M = \sum_{\substack{N \leq_{l,r} M \\ N \in \mathcal{T}}} N$. De esta manera se establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de teorías de torsión hereditarias y el conjunto de radicales en $R - \mathbf{bimod}$.

Si σ es un radical en $R - \mathbf{bimod}$, entonces el conjunto de ideales biláteros

$$\mathcal{L} = \{I \leq_{l,r} R \ ; \ \sigma(R/I) = R/I\}$$

es cerrado para generalizaciones, en el sentido en que si $I \subseteq J$ son dos ideales biláteros e $I \in \mathcal{L}_\sigma$ entonces $J \in \mathcal{L}_\sigma$. A diferencia de lo que ocurre en la categoría de R–módulos a izquierda, $\mathcal{L}_\sigma$ no determina a σ. Sin embargo, si se denota por R^e al generador $R \otimes_{C(R)} R^{opp}$ de $R - \mathbf{bimod}$, se tiene que

$$\mathcal{L}^b_\sigma = \{N \leq_{l,r} R^e \ ; \ \sigma(R^e/N) = R^e/N\}$$

verifica:

(2.2.2.1) si N y N' están en $\mathcal{L}^b_\sigma$, entonces cualquier sub-bimódulo de R^e que contenga a $N \cap N'$ también está en $\mathcal{L}^b_\sigma$;

(2.2.2.2) si $N \in \mathcal{L}^b_\sigma$ y $f \in End(R^e)$, entonces $f^{-1}(N) \in \mathcal{L}^b_\sigma$;

(2.2.2.3) si $N \leq_{l,r} R^e$ y existe $N' \in \mathcal{L}^b_\sigma$ de manera que $f^{-1}(N) \in \mathcal{L}^b_\sigma$ para todo $f \in End(R^e)$, entonces $N \in \mathcal{L}^b_\sigma$.

Una familia $\mathcal{L}$ de sub-bimódulos de R^e verificando estas propiedades determina una teoría de torsión hereditaria en $R - \mathbf{bimod}$ cuya clase de torsión es
$$\mathcal{T}_\mathcal{L} = \{M \ ; \ \forall f \in Hom_{R-\mathbf{bimod}}(R^e, M) \ , \ Kerf \in \mathcal{L}\} \ .$$

El conjunto de familias de sub-bimódulos de R^e que verifican esta tres condiciones y el conjunto de radicales en $R - \mathbf{bimod}$ se corresponden biyectivamente.

(2.2.3) Dado un radical σ en $R - \mathbf{bimod}$, decimos que un R–bimódulo E es σ–cerrado si siempre que se tenga un morfismo

$$f \in Hom_{R-\mathbf{bimod}}(N, E)$$

es posible extenderlo de manera única a cualquier $M \geq_{l,r} N$ tal que M/N es de σ–torsión. Para todo R–bimódulo σ–libre de torsión M existe un único (salvo isomorfismos) R–bimódulo σ–cerrado $E^b_\sigma M$ tal que M es un sub-bimódulo esencial de $E^b_\sigma M$ y $(E^b_\sigma M)/M$ es de σ–torsión: su envolvente σ–inyectiva.

Consideremos la subcategoría plena de $R-$ **bimod** que tiene por objetos a los R–bimódulos σ–cerrados. El funtor inclusión de esta subcategoría en $R-$ **bimod** tiene un adjunto a izquierda exacto, que se denota Q^b_σ, y que asigna a cada R–bimódulo M el R–bimódulo σ–cerrado $E^b_\sigma(M/\sigma M)$, y a cada homomorfismo de R–bimódulos $f : M \longrightarrow M'$ el único homomorfismo de R–bimódulos $Q^b_\sigma f$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M/\sigma M & \longrightarrow & Q^b_\sigma M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q^b_\sigma f} \\ M' & \longrightarrow & M'/\sigma(M') & \longrightarrow & Q^b_\sigma M' \end{array}$$

El funtor composición $i \circ Q^b_\sigma$ se denomina funtor localización en σ, y se suele denotar igual que Q^b_σ. El morfismo localización $M \longrightarrow M/\sigma M \longrightarrow Q^b_\sigma M$ se denota por $j^b_{\sigma,M}$.

La relación entre las localizaciones en $R-$ **mod** y en $R-$ **bimod** viene dada por el siguiente resultado:

(2.2.4) Teorema. ([46]) *Sea $j : R-$ **bimod** $\longrightarrow R-$ **mod** el funtor inclusión. Si M es un R–bimódulo y σ es un radical en $R-$ **mod**, entonces $Q_\sigma(jM)$ posee una estructura de R–bimódulo que extiende a la de R–módulo a izquierda y que lo hace isomorfo, como R–bimódulo, a $Q^b_{\sigma\circ j}M$.*

En adelante dejaremos de escribir el funtor inclusión j siempre que su ausencia no dé lugar a confusión.

(2.2.5) Un radical σ en $R-$ **Cbimod** es un subfuntor exacto a izquierda del funtor inclusión

$$i : R - \mathbf{Cbimod} \longrightarrow R - \mathbf{bimod}$$

tal que $\sigma(M/\sigma M) = 0$ para todo R–bimódulo centralizante M. Si σ es un radical en $R-$ **bimod**, entonces $\sigma \circ i$ es un radical en $R-$ **Cbimod**.

Dado un radical σ en $R-$ **Cbimod**, un R–bimódulo centralizante E se dice que es σ–cerrado si $\sigma E = 0$ y cualquier homomorfismo de R–bimódulos $f : N \longrightarrow E$, con N un R–bimódulo centralizante, puede ser extendido de forma única a todo R–bimódulo centralizante M tal que M/N es de σ–torsión. Para cada R–bimódulo centralizante M tal que $\sigma M = 0$, existe un único (salvo isomorfismos) R–bimódulo centralizante σ–cerrado $E^{Cb}_\sigma M$ tal que $\sigma(E^{Cb}_\sigma M/M) = E^{Cb}_\sigma M/M$.

El funtor $Q_\sigma^{Cb} : R-\mathbf{Cbimod} \longrightarrow R-\mathbf{Cbimod}$ se define asignando, a cada R–bimódulo centralizante M, el R–bimódulo centralizante

$$Q_\sigma^{Cb}M = E_\sigma^{Cb}(M/\sigma M) \ ,$$

y a cada homomorfismo de R–bimódulos entre R–bimódulos centralizantes $f : M \longrightarrow N$, el único homomorfismo de R–bimódulos $Q_\sigma^{Cb}f$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M/\sigma M \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"'] & Q_\sigma^{Cb}M \arrow[d, "Q_\sigma^{Cb}f"] \\
M' \arrow[r] & M'/\sigma(M') \arrow[r] & Q_\sigma^{Cb}M'
\end{tikzcd}$$

La relación entre las localizaciones en $R-\mathbf{bimod}$ y en $R-\mathbf{Cbimod}$ vienen dadas por el siguiente resultado:

(2.2.6) Teorema. ([46]) *Si M es un R–bimódulo centralizante y σ es un radical en $R-\mathbf{bimod}$, entonces $RC_R(Q_\sigma^b i(M))$ (el mayor R–bimódulo centralizante contenido en $Q_\sigma^b(iM)$) es isomorfo, como R–bimódulo, a $Q_{\sigma\circ i}^{Cb}M$. De hecho, dado un radical σ en $R-\mathbf{bimod}$, los funtores $RC_R(Q_\sigma^b \circ i(\cdot))$ y $Q_{\sigma\circ i}^{Cb}(\cdot)$ son naturalmente equivalentes.*

(2.2.7) Sea R de nuevo un anillo noetheriano a izquierda. Cada abierto $X(I)$, donde I es un ideal bilátero de R, del espacio topológico $\mathbf{Spec}R$ es el conjunto de ideales primos biláteros de R que no están en el filtro de Gabriel

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq_l R \ ; \ \exists n \in \mathbb{N}, \ I^n \subseteq L\} \ .$$

El filtro $\mathcal{L}_I$ tiene como radical asociado en $R-\mathbf{mod}$ al ínfimo de la familia $\{\sigma_{R\setminus P}\}_{P\in X(I)}$, que se denota σ_I. La restricción del radical σ_I a la categoría de R–bimódulos, proporciona un radical en $R-\mathbf{bimod}$, y la composición de éste y el funtor inclusión $R-\mathbf{Cbimod} \longrightarrow R-\mathbf{bimod}$ es un radical en $R-\mathbf{Cbimod}$. A ambos los denotaremos también por σ_I.

Dado un R–bimódulo M, asignando, a cada abierto no vacío $X(I)$ de $\mathbf{Spec}R$, el R–bimódulo $Q_{\sigma_I}^b M$, y a la inclusión $X(I) \subseteq X(J)$ el homomorfismo de bimódulos $Q_{\sigma_J}^b M \longrightarrow Q_{\sigma_I}^b M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\sigma_J}^b M \arrow[rr] & & Q_{\sigma_I}^b M \\
& M \arrow[ul, "j_{\sigma_J,M}^b"] \arrow[ur, "j_{\sigma_I,M}^b"'] &
\end{tikzcd}$$

se obtiene un prehaz separado de R–bimódulos sobre $\mathbf{Spec}R$ que se denota $\mathcal{Q}^b_M$. De manera similar, si M es un R–bimódulo centralizante, asignando a cada abierto no vacío $X(I)$ el R–bimódulo centralizante $Q^{Cb}_{\sigma_I}M$, y a la inclusión $X(I) \subseteq X(J)$ el homomorfismo de R–bimódulos $Q^{Cb}_{\sigma_J}M \longrightarrow Q^{Cb}_{\sigma_I}M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} Q^{Cb}_{\sigma_J}M \arrow[rr] & & Q^{Cb}_{\sigma_I}M \\ & M \arrow[ul, "j^{Cb}_{\sigma_J,M}"] \arrow[ur, "j^{Cb}_{\sigma_I,M}"'] & \end{tikzcd}$$

se obtiene un prehaz separado $\mathcal{Q}^{Cb}_M$ de R–bimódulos centralizantes. El prehaz $\mathcal{Q}^{Cb}_M$ es un subprehaz de $\mathcal{Q}^b_M$. Si M es el R–bimódulo R, el prehaz $\mathcal{Q}^{Cb}_R$ es un prehaz de anillos. Al haz que se obtiene a partir de $\mathcal{Q}^{Cb}_M$ mediante el funtor hacificación descrito en (1.1.16) se le denota por $\mathcal{O}^{Cb}_M$.

(2.2.8) Si M es un R–bimódulo centralizante finitamente generado como R–módulo a izquierda, entonces, para todo ideal primo bilátero P de R, el R bimódulo $Q^{Cb}_{\sigma_{R\setminus P}}M$ es el límite directo

$$\varinjlim_{P\in X(I)} Q^{Cb}_{\sigma_I}M \ ,$$

donde $\sigma_{R\setminus P}$ y σ_I son los radicales que resultan de restringir a $R-\mathbf{Cbimod}$ sus homónimos en $R-\mathbf{mod}$. Por tanto, para todo R–bimódulo centralizante noetheriano a izquierda M, la fibra del haz $\mathcal{O}^{Cb}_M$ (y del prehaz $\mathcal{Q}^{Cb}_M$) en el punto $P \in \mathbf{Spec}R$ es $Q^{Cb}_{\sigma_{R\setminus P}}M$.

Si, además, M es libre de torsión respecto a cualquier radical en $R-\mathbf{Cbimod}$ (o *totalmente libre de torsión*) y noetheriano a izquierda, esto es, cualquier familia de submódulos a izquierda de M tiene un elemento maximal, entonces el bimódulo de secciones globales de $\mathcal{O}^{Cb}_M$ coincide con M. En particular, si R es primo, entonces

$$\Gamma(\mathbf{Spec}R, \mathcal{O}^{Cb}_R) = R \ .$$

Más generalmente, si $X(I)$ es un abierto de $\mathbf{Spec}R$ de manera que el radical σ_I en $R-\mathbf{bimod}$ tiene la propiedad T con respecto a R–bimódulos centralizantes, esto es, para todo R–bimódulo centralizante N existe un isomorfismo $Q^{Cb}_{\sigma_I}N \overset{\cong}{\longrightarrow} Q^{Cb}_{\sigma_I}R \otimes_R N$ haciendo conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} Q^{Cb}_{\sigma_I}N \arrow[rr, "\cong"] & & Q^{Cb}_{\sigma_I}R \otimes_R N \\ & N \arrow[ul, "j^{Cb}_{\sigma_I,N}"] \arrow[ur, "j^{Cb}_{\sigma_I,R}\otimes id_N"'] & \end{tikzcd}$$

y el R–bimódulo centralizante M es libre de torsión para todo radical en $R-$ **Cbimod**, entonces el R–bimódulo de secciones de $\mathcal{O}_M^{Cb}$ en el abierto $X(I)$ coincide con $Q_{\sigma_I}^{Cb}M$.
Supongamos que **Spec**R tiene una base de abiertos $X(I)$ de manera que sus radicales asociados σ_I tienen la propiedad T en $R-$ **Cbimod**, y $Q_{\sigma_I}^{Cb}R\cdot K$ es un ideal bilátero del anillo $Q_{\sigma_I}^{Cb}R$ para cada ideal bilátero K de R. Entonces para cada R–bimódulo centralizante M noetheriano a izquierda totalmente libre de torsión el prehaz separado $\mathcal{Q}_M^{Cb}$ es un haz. En particular, bajo estas hipótesis sobre **Spec**R, si R es primo además de noetheriano a izquierda, entonces $\mathcal{O}_R^{Cb}=\mathcal{Q}_R^{Cb}$.

(2.2.9) A diferencia de $\mathcal{O}_R$, el haz de anillos $\mathcal{O}_R^{Cb}$ posee propiedades funtoriales ([35, 46]).
Dado un anillo R, un elemento $f(X)$ del álgebra libre $\mathbb{Z}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es una *identidad polinomial* en R si $f(t)=0$ para cada elemento $(t)\in R^{(\mathbb{N})}$. Una identidad polinomial $f(X)$ se dice que es propia si para todo $r\in R\backslash\{0\}$, se tiene $m\cdot r\neq 0$, donde m es el máximo común divisor de los coeficientes de $f(X)$. Si R admite una identidad polinomial propia, entonces se dice que R es un *anillo con identidad polinomial* o también un *PI anillo*.
Si $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión centralizante de anillos, se define una aplicación ${}^a\varphi$: **Spec**$S \longrightarrow$ **Spec**R asignando a cada ideal primo bilátero Q de S su imagen inversa $\varphi^{-1}(Q)\in$ **Spec**R. La imagen inversa por ${}^a\varphi$ del abierto $X(I)$ es el abierto $X(S\varphi(I))$, con lo que ${}^a\varphi$ es continua. Si además R y S son PI anillos, entonces para cada abierto $X(I)$ de R existe una extensión centralizante

$$\varphi_I : Q_{\sigma_I}^{Cb}R \longrightarrow Q_{\sigma_J}^{Cb}S\ ,$$

donde $J=S\varphi(I)$, que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\sigma_I}^{Cb}R \arrow[r, "\varphi_I"] & Q_{\sigma_J}^{Cb}S \\ R \arrow[u, "j_{\sigma_I,R}^{Cb}"] \arrow[r, "\varphi"'] & S \arrow[u, "j_{\sigma_J,S}^{Cb}"'] \end{tikzcd}$$

y que permite definir un morfismo de prehaces

$$\phi^- : \mathcal{Q}_R^{Cb} \longrightarrow ({}^a\varphi)_*\mathcal{Q}_S^{Cb}\ .$$

La imagen de ϕ^- por el funtor hacificación es un morfismo de haces

$$\phi : \mathcal{O}_R^{Cb} \longrightarrow ({}^a\varphi)_*\mathcal{O}_S^{Cb}\ .$$

De esta manera se obtiene un morfismo de espacios anillados (ver [46])

$$({}^a\varphi,\phi) : (\mathbf{Spec}R,\mathcal{O}_R^{Cb}) \longrightarrow (\mathbf{Spec}S,\mathcal{O}_S^{Cb})\ .$$

2.3. Birradicales y haces

En (1.3.5) (ver también [11, 34]) se describe de que manera se hace necesaria la propiedad de compatibilidad mutua entre filtros de Gabriel para definir, de manera directa y utilizando localización, haces sobre el espectro de ideales primos biláteros. Sin embargo, esta propiedad no basta para probar que dicha construcción es funtorial. A diferencia de otros autores que, como en la sección 2.2., consideran familias de módulos con alguna propiedad, para desarrollar haces de estructura sobre el espectro de ideales primos biláteros, J. Bueso, P. Jara y A. Verschoren ([11]) proponen utilizar una topología menos fina que la de Zariski, sobre la que construyen, para cada módulo a izquierda M, un haz de estructura asociado $\mathcal{O}_M$.
Dicha topología está basada en *birradicales (centralizantes)*. Dado que todo birradical tiene la propiedad de Artin-Rees débil, y todo par de filtros de Gabriel con esta propiedad es mutuamente compatible, se pueden definir haces sobre el espectro de ideales primos biláteros con esa topología haciendo uso de la localización.
Además, si se satisface la condición fuerte de segunda capa entonces toda extensión *fuertemente normalizante* induce un morfismo entre los espacios anillados asociados a cada uno de los anillos, como se detalla a continuación.

Dado un radical σ en $R - \mathbf{mod}$, podemos considerar el radical σ^r en la categoría $\mathbf{mod} - R$ de R–módulos a derecha, cuyo filtro de Gabriel asociado (constituido por ideales a derecha de R) está generado por la familia de ideales biláteros de $\mathcal{L}_\sigma$. En general la σ^r–torsión $\sigma^r M$ de un R–módulo a derecha M viene dada por el conjunto de los $m \in M$ tales que el ideal a izquierda

$$\{r \in R \ ; \ Rr \subseteq \mathrm{Ann}_R^r(m)\}$$

pertenece a $\mathcal{L}_\sigma$. Si I es un ideal bilátero perteneciente a $\mathcal{L}_\sigma$, entonces

$$\sigma(R/I) = R/I = \sigma^r(R/I) \ ,$$

pero si I no pertenece a $\mathcal{L}_\sigma$, en general $\sigma(R/I)$ y $\sigma^r(R/I)$ no coinciden.
Un radical λ en $R - \mathbf{mod}$ se dice que es un *birradical* (*de R–módulos*) si existe un radical ρ en $\mathbf{mod} - R$ de manera que $\lambda(R/I) = \rho(R/I)$ para cada ideal bilátero I de R. También se dice que el par (λ, ρ) es un birradical.
Si R es un anillo noetheriano a izquierda y λ es un birradical en $R - \mathbf{mod}$ entonces el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_\lambda$ tiene la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda.

(2.3.1) Un R–bimódulo M se dice que es *normalizante*, resp. *fuertemente normalizante* ([31, 33]), si M está generado como R–módulo a izquierda (y también a derecha) por

$$N_R(M) = \{m \in M \ ; \ Rm = mR\} \ ,$$

resp. por

$$N_R^s(M) = \{m \in M \ ; \ \forall I \leq_{l,r} R \ , \ Im = mI\} \ .$$

Un radical λ en $R - \mathbf{mod}$ se dice que es un *birradical centralizante*, resp. *fuertemente normalizante*, si existe un radical ρ en $\mathbf{mod} - R$ de forma que $\lambda M = \rho M$ para todo R–bimódulo centralizante, resp. fuertemente normalizante M. También se dice que el par (λ, ρ) es un birradical centralizante, resp. un birradical fuertemente normalizante.

El conjunto de birradicales centralizantes en $R - \mathbf{mod}$ es un subretículo distributivo completo del retículo de los radicales en $R-\mathbf{mod}$, pues el ínfimo y el supremo de una familia $\{(\lambda_a, \rho_a)\}_{a\in A}$ de birradicales centralizantes de $R - \mathbf{mod}$ son también birradicales centralizantes. En efecto, si M es un R–bimódulo centralizante, entonces

$$\bigwedge_{a\in A} \lambda_a M = \bigcap_{a\in A} \lambda_a M = \bigcap_{a\in A} \rho_a M = \bigwedge_{a\in A} \rho_a M \ ,$$

con lo que $(\bigwedge_{a\in A} \lambda_a, \bigwedge_{a\in A} \rho_a)$ es un birradical centralizante. Por otra parte, dado que el R–bimódulo centralizante $M/\bigvee_{a\in A} \lambda_a M$ es $\bigvee_{a\in A} \lambda_a$–libre de torsión, o sea, es λ_a–libre de torsión para cada $a \in A$, entonces

$$\rho_b(M/\bigvee_{a\in A} \lambda_a M) = \lambda_b(M/\bigvee_{a\in A} \lambda_a M) = 0$$

para cada $b \in A$, esto es,

$$M/\bigvee_{a\in A} \lambda_a M \in \bigcap_{a\in A} \mathcal{F}_{\rho_a} = \mathcal{F}_{\bigvee_{a\in A} \rho_a} \ .$$

Luego, al aplicar el funtor exacto a izquierda $\bigvee_{a\in A} \rho_a$ a la sucesión

$$0 \longrightarrow \bigvee_{a\in A} \lambda_a M \longrightarrow M \longrightarrow M/\bigvee_{a\in A} \lambda_a M \longrightarrow 0 \ ,$$

se tiene que

$$\bigvee_{a\in A} \rho_a M = \bigvee_{a\in A} \rho_a(\bigvee_{a\in A} \lambda_a M) = \bigvee_{a\in A} \rho_a M \cap \bigvee_{a\in A} \lambda_a M \ ,$$

de donde se concluye que,

$$\bigvee_{a\in A} \rho_a M \subseteq \bigvee_{a\in A} \lambda_a M \ .$$

Con un razonamiento totalmente simétrico se obtiene

$$\bigvee_{a\in A} \lambda_a M \subseteq \bigvee_{a\in A} \rho_a M \ ,$$

y por tanto $(\bigvee_{a\in A} \lambda_a, \bigvee_{a\in A} \rho_a)$ es un birradical centralizante.
Puesto que para todo ideal bilátero I de R el R–bimódulo R/I es centralizante, y el centralizador $C_R(M)$ de todo R–bimódulo M está contenido en $N_R^s(M)$, todo birradical fuertemente normalizante es un birradical centralizante, y todo birradical centralizante es un birradical. Según el siguiente resultado, los tres conceptos coinciden en anillos con la condición fuerte de segunda capa.

(2.3.2) Teorema. ([11]) *Si R es un anillo noetheriano a izquierda y a derecha y todos los ideales primos biláteros de R satisfacen la condición fuerte de segunda capa, entonces todo birradical es un birradical fuertemente normalizante.*

(2.3.3) Por el resto de esta sección, R será un anillo noetheriano a derecha e izquierda.
Consideremos en $\mathbf{Spec}R$ la familia de subconjuntos de la forma

$$X(I) = \mathcal{K}(\sigma_I) = \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ I \not\subseteq P\} \ ,$$

donde I es un ideal bilátero de R tal manera el radical σ_I es un birradical centralizante. Puesto que el conjunto de birradicales centralizantes de R es un retículo completo y para cualquier conjunto de ideales biláteros $\{I_a\}_{a\in A}$,

$$\mathcal{K}(\bigvee_{a\in A} \sigma_{I_a}) = \bigcap_{a\in A} \mathcal{K}(\sigma_{I_a}) \quad ; \quad \mathcal{K}(\bigwedge_{a\in A} \sigma_{I_a}) = \bigcup_{a\in A} \mathcal{K}(\sigma_{I_a}) \ ,$$

esta familia es una topología para $\mathbf{Spec}R$, que se denota por $\mathbf{T}$, y que, en caso de ser R conmutativo, coincide con la topología de Zariski.
Como R es noetheriano (a izquierda), un radical simétrico σ de $R-\mathbf{mod}$ está completamente determinado por el conjunto

$$\mathcal{K}(\sigma) = \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ \sigma(R/P) = 0\} \ ,$$

puesto que σ es el ínfimo de la familia de radicales simétricos $\{\sigma_{R\setminus P}\}_{P\in\mathcal{K}(\sigma)}$ (ver (3.1.35)). De esta manera, dado un abierto U en la topología $\mathbf{T}$, existe un único birradical centralizante σ_I tal que $U = \mathcal{K}(\sigma_I)$.
Sea M un R–módulo a izquierda. Asignando al abierto $\mathcal{K}(\sigma_I)$ el R–módulo a izquierda $Q_{\sigma_I}M$, y a la inclusión $\mathcal{K}(\sigma_I) \subseteq \mathcal{K}(\sigma_J)$, que equivale a $\sigma_J \leq \sigma_I$, el

(único) homomorfismo $Q_{\sigma_J}M \longrightarrow Q_{\sigma_I}M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\sigma_J}M \arrow[rr] & & Q_{\sigma_I}M \\ & M \arrow[ul, "j_{\sigma_J,M}"] \arrow[ur, "j_{\sigma_I,M}"'] & \end{tikzcd}$$

se obtiene un prehaz separado $\mathcal{Q}_M$ sobre $\mathbf{Spec}R$. El prehaz $\mathcal{Q}_R$ es un prehaz de anillos y, en general, $\mathcal{O}_M$ es un prehaz de $\mathcal{O}_R$–módulos.

(2.3.4) Si dos filtros de Gabriel simétricos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ en el anillo noetheriano (a izquierda) R tienen la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda, entonces son mutuamente compatibles. En efecto, si $L \in \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, entonces existe un par de ideales (biláteros) $I \in \mathcal{L}$ y $J \in \mathcal{H}$ tales que $IJ \subseteq L$ (ver (3.1.33)), y dado que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda, existe un ideal bilátero $I' \in \mathcal{L}$ tal que $JI' \subseteq IJ \subseteq L$, con lo que $L \in \mathcal{H} \circ \mathcal{L}$. La otra inclusión se prueba mediante un razonamiento simétrico.
Como todo birradical (centralizante) σ tiene, en particular, la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda, se deduce, como consecuencia del resultado enunciado en (1.3.5), que el prehaz $\mathcal{O}_M$ es en realidad un haz, del que se obtiene de nuevo M como el R–módulo de secciones globales.

(2.3.5) Si $\varphi : R \longrightarrow S$ es un homomorfismo de anillos, todo radical σ en $R - \mathbf{mod}$ induce un radical $\overline{\sigma}$ en $S - \mathbf{mod}$ que viene dado por su clase de S–módulos de torsión

$$\mathcal{T}_{\overline{\sigma}} = \{N \in S - \mathbf{mod} \ ; \ N \text{ es de } \sigma\text{-torsión como } R\text{–módulo}\}$$

(ver (3.2.1) y (3.2.3)). Si φ es una extensión centralizante, o bien si σ es un radical simétrico y φ es una extensión fuertemente normalizante, entonces la $\overline{\sigma}$–torsión de todo S–módulo a izquierda coincide con su σ–torsión como R–módulo al restringir los escalares y el filtro de Gabriel es S asociado a $\overline{\sigma}$ es

$$\mathcal{L}_{\overline{\sigma}} = \{L \leq_l S \ ; \ \varphi^{-1}(L) \in \mathcal{L}_\sigma\}$$

(ese resultado será probado para filtros uniformes en el próximo capítulo). Por lo tanto, si $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión fuertemente normalizante (en particular, si φ es una extensión centralizante) e I es un ideal bilátero de R, entonces el radical en $S - \mathbf{mod}$ inducido por σ_I es σ_J, con $J = S\varphi(I)$.

(2.3.6) Por otra parte, si $\varphi : R \longrightarrow S$ es una entensión centralizante y (λ, ρ) es un birradical centralizante de R–módulos, entonces $(\overline{\lambda}, \overline{\rho})$ es un birradical centralizante de S–módulos. En efecto, si M es un S–bimódulo centralizante, entonces M es centralizante como R–bimódulo, puesto que

$$M = SC_S(M) = RC_R(S)C_S(M) \subseteq RC_R(M) \subseteq M \ ,$$

y por tanto
$$\overline{\lambda}M = \lambda({}_RM_R) = \rho({}_RM_R) = \overline{\rho}M \ .$$

De manera similar, si $\varphi : R \longrightarrow S$ es un extensión fuertemente normalizante y R satisface la condición fuerte de segunda capa, entonces todo birradical centralizante de R–módulos (λ, ρ) induce un birradical centralizante $(\overline{\lambda}, \overline{\rho})$ de S–módulos. En efecto, si M es un S–bimódulo centralizante, entonces M es fuertemente normalizante como R–bimódulo, pues

$$M = SC_S(M) = RN^s_R(S)C_S(M) \subseteq RN^s_R(S)N^s_S(M) \subseteq RN^s_R(M) \subseteq M \ .$$

Como bajo la hipótesis de que R satisface la condición fuerte de segunda capa todo birradical centralizante de R–módulos es también un birradical fuertemente normalizante, se tiene que

$$\overline{\lambda}M = \lambda({}_RM_R) = \rho({}_RM_R) = \overline{\rho}M \ .$$

Si $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión centralizante, o bien R satisface la condición fuerte de segunda capa y $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión fuertemente normalizante, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} {}^a\varphi : \mathbf{Spec}S &\longrightarrow \mathbf{Spec}R \\ P \quad &\longmapsto \varphi^{-1}(P) \end{aligned}$$

es continua si consideramos en ambos espectros la topología $\mathbf{T}$. Esto es consecuencia de que la imagen inversa del abierto $\mathcal{K}(\sigma_I)$, donde σ_I es un birradical centralizante, es $\mathcal{K}(\sigma_{S\varphi(I)}) = \mathcal{K}(\overline{\sigma_I})$, que además es un abierto en la topología $\mathbf{T}$ de $\mathbf{Spec}S$ puesto que, como se ha probado, $\overline{\sigma_I}$ es un birradical centralizante de S–módulos.

(2.3.7) Si σ es un radical que tiene la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda, entonces $Q_\sigma I$ es un ideal bilátero de $Q_\sigma R$ para todo ideal bilátero I de R. En efecto, puesto que el funtor localización $Q_\sigma : R-\mathbf{mod} \longrightarrow R-\mathbf{mod}$ es exacto a izquierda, la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_\sigma I \longrightarrow Q_\sigma R \longrightarrow Q_\sigma(R/I)$$

es exacta, o sea, $Q_\sigma R/Q_\sigma I \subseteq Q_\sigma(R/I)$. Pero $IQ_\sigma(R/I) \subseteq \sigma Q_\sigma(R/I) = 0$, pues para todo $r \in I$ y todo $q \in Q_\sigma R/I$ existe un ideal $L \in \mathcal{L}_\sigma$ tal que $Lq \subseteq j_{\sigma,R/I}(R/I)$, y como σ tiene la propiedad de Artin-Rees a izquierda, existe un ideal $L' \in \mathcal{L}_\sigma$ de manera que $L'I \subseteq IL$, lo que implica que

$$L'rq \subseteq ILq \subseteq Ij_{\sigma,R/I}(R/I) = 0 \ .$$

Por lo tanto, $I(Q_\sigma R/Q_\sigma I) = 0$, o sea, $IQ_\sigma R \subseteq Q_\sigma I$, de donde se deduce que $Q_\sigma I$ es un ideal a derecha de $Q_\sigma R$ (ver [11]).

En particular, si σ es un birradical centralizante de R–módulos, entonces σ tiene la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda, y por lo tanto $Q_\sigma I$ es un ideal bilátero de $Q_\sigma R$ para cada ideal bilátero I de R. Este hecho y el siguiente resultado son los ingredientes necesarios para probar que la construcción del haz de anillos $\mathcal{O}_R$ es funtorial.

(2.3.8) Teorema. ([11, II.6.12]) *Sean R y S anillos primos noetherianos a izquierda, $\varphi : R \longrightarrow S$ una extensión fuertemente normalizante y σ un radical simétrico en $R-$ **mod**. Si $Q_\sigma Ker(\varphi)$ es un ideal bilátero de $Q_\sigma R$, entonces φ puede ser extendida de manera única a un homomorfismo de anillos $\varphi_\sigma : Q_\sigma R \longrightarrow Q_{\overline{\sigma}} S$*

(2.3.9) Como consecuencia directa de este resultado, si R y S son anillos primos noetherianos (a derecha e izquierda) y, o bien $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión centralizante, o bien R verifica la condición fuerte de segunda capa y $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión fuertemente normalizante, entonces, asignando a cada abierto $\mathcal{K}(\sigma_I)$ de la topología $\mathbf{T}$ de $\mathbf{Spec}R$ el homomorfismo

$$\varphi_\#(\mathcal{K}(\sigma_I)) : \Gamma(\mathcal{K}(\sigma_I), \mathcal{O}_R) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{K}(\overline{\sigma_I}), \mathcal{O}_S) = \Gamma(\mathcal{K}(\sigma_I), ({}^a\varphi)_*\mathcal{O}_S)$$

que proporciona el teorema anterior, se obtiene un morfismo de haces sobre $\mathbf{Spec}R$ $\varphi_\# : \mathcal{O}_R \longrightarrow {}^a\varphi_*(\mathcal{O}_S)$ de manera que el par

$$({}^a\varphi, \varphi_\#) : (\mathbf{Spec}R, \mathcal{O}_R) \longrightarrow (\mathbf{Spec}S, \mathcal{O}_S)$$

es un morfismo de espacios anillados.

2.4. Álgebras esquemáticas

Las construcciones descritas en las secciones 2.2. y 2.3. están basadas en el espectro de ideales primos biláteros con la topología de Zariski (o una topología menos fina).

Como hemos hecho notar, considerar un espacio topológico (*con puntos*) como espacio base, acarrea diversos problemas, que surgen fundamentalmente de que, si se pretende generalizar lo que sucede en el caso conmutativo, la intersección de abiertos deberá estar ligada de cierta manera al producto, en general no conmutativo, de ideales. Esta es la principal motivación para introducir la noción de compatibilidad mutua, pues si I y J son dos ideales biláteros del anillo noetheriano a izquierda R de manera que $\mathcal{L}_I$ y $\mathcal{L}_J$ son mutuamente compatibles, entonces los abiertos $X(IJ)$ y $X(JI)$ de $\mathbf{Spec}R$ coinciden con $X(I) \cap X(J)$, aunque en general IJ es distinto de JI.

Si se quieren construir haces utilizando localización y prescindiendo de la propiedad de compatibilidad mutua, en virtud de (1.3.5) se hace necesario, en principio, un planteamiento diferente. Un ejemplo es la construcción de L. Willaert ([52]) sobre álgebras esquemáticas que se describe en esta sección. Willaert asocia a un anillo graduado R, una *topología de Grothendieck no conmutativa* que no es más que un espacio topológico sin puntos en el que el papel de abiertos lo juegan los elementos del monoide libre $\mathcal{W}_R$ generado por todos los conjuntos de Ore a izquierda homogéneos del anillo. Para garantizar la existencia de recubrimientos, se le exige al anillo que tenga la propiedad *esquemática*, esto es, que el *elemento global* de $\mathcal{W}_R$ posea al menos un recubrimiento finito formado por conjuntos de Ore homogéneos. En ese contexto, a cada módulo a izquierda M se le asocia un haz de estructura, que devuelve a M como el módulo de secciones globales.

(2.4.1) Una graduación de un anillo R es una familia de subgrupos $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de tal manera que $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ y $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$. Si un anillo R admite una graduación, se dice que es *graduado*.

Si R es un anillo graduado, una graduación del R–módulo a izquierda M es una familia de subgrupos $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de tal manera que $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ y $R_iM_j \subseteq M_{i+j}$. Si M es un R–módulo a izquierda graduado y $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una graduación de M, entonces los elementos de M_n se llaman *homogéneos de grado n*. Se dice que M es *positivamente graduado* si $M_n = 0$ para todo $n < 0$. Se llama *m-desplazamiento de M*, con $m \in \mathbb{Z}$, y se denota por $M(m)$, al R–módulo a izquierda graduado con la graduación

$$\{M(m)_n = M_{m+n}\}_{n\in\mathbb{Z}} \ .$$

Si M y N son R–módulos a izquierda graduados y $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de R–módulos, se dice que f es de grado m si $f(M_i) \subseteq N_{m+i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Los R–módulos a izquierda graduados y los homomorfismos de grado 0 constituyen una categoría de Grothendieck que se denota por $R - \mathbf{gr}$. La familia $\{R(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, donde $R(m)$ es el m-desplazamiento del R–módulo a izquierda graduado R, es un sistema de generadores de $R - \mathbf{gr}$. Los subobjetos de un R–módulo a izquierda graduado M en $R - \mathbf{gr}$ son los submódulos N de M con una graduación $\{N_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $N_n \subseteq M_n$ para todo n.

(2.4.2) Un radical η en la categoría de Grothendieck $R - \mathbf{gr}$ (esto es, un subfuntor del funtor identidad, exacto a izquierda e idempotente) se dice que es *rígido* si $\eta(M(m)) = (\eta M)(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y para todo R–módulo a izquierda graduado M.

Un radical σ en $R - \mathbf{mod}$ se dice que es *graduado* si su filtro de Gabriel asociado $\mathcal{L}_\sigma$ tiene una base formada por una familia de ideales a izquierda graduados de R. Si σ es un radical graduado en $R - \mathbf{mod}$, entonces σM y $M/\sigma M$ son graduados para todo R–módulo a izquierda graduado M.

La restricción del radical graduado σ de $R - \mathbf{mod}$ a la categoría $R - \mathbf{gr}$ es un radical rígido en $R - \mathbf{gr}$ que denotamos también por σ, y cuya clase de torsión en $R - \mathbf{gr}$ es

$$\mathcal{T}_\sigma = \{N \in R - \mathbf{gr} \ ; \ \sigma(N) = N\} \ .$$

Si η es un radical rígido en $R - \mathbf{gr}$, entonces η es la restricción a $R - \mathbf{gr}$ de un radical graduado σ en $R - \mathbf{mod}$ cuya teoría de torsión está generada por la familia de R–módulos a izquierda

$$\mathcal{T}_\eta = \{N \in R - \mathbf{gr} \ ; \ \eta(N) = N\} \ ,$$

y el *filtro graduado* asociado a η, que se denota por $\mathcal{L}^g_\eta$, es el conjunto de todos los ideales a izquierda graduados de $\mathcal{L}_\sigma$.

Los radicales rígidos de $R - \mathbf{gr}$ se corresponden biyectivamente con los filtros graduados de R.

(2.4.3) Ejemplo. Sea S un conjunto de Ore a izquierda del anillo graduado R, de manera que todos los elementos de S son homogéneos y $0 \notin S$. Entonces el radical σ_S en $R - \mathbf{mod}$ definido por

$$\sigma_S M = \{m \in M \ ; \ \exists s \in S, \ sm = 0\}$$

para todo R–módulo a izquierda M (ver (1.2.10)) es graduado, y su restricción η a $R - \mathbf{gr}$ es un radical rígido cuyo filtro graduado es

$$\mathcal{L}^g_\eta = \{L \leq_l R \ ; \ L \text{ es graduado y, } \forall r \in R \text{ homogéneo, } (L : r) \cap S \neq \emptyset\} \ .$$

(2.4.4) Ejemplo. Sea R un anillo graduado noetheriano a izquierda e I un ideal bilátero graduado de R. Entonces el conjunto de ideales

$$\mathcal{L}^g_I = \{L \leq_l R \ ; \ L \text{ es graduado y } \exists n \in \mathbb{N}, \ I^n \subseteq L\}$$

es un filtro graduado y su radical en $R - \mathbf{gr}$ asociado η_I es rígido. Además, η_I es la restricción a $R - \mathbf{gr}$ del radical graduado σ_I de $R - \mathbf{mod}$.

(2.4.5) Si η es un radical en $R-\mathbf{gr}$ y M es un R–módulo a izquierda graduado, aplicando la teoría general de localización en categorías de Grothendieck a $R-\mathbf{gr}$, el R–módulo graduado localizado de M en η es

$$Q_\eta^{gr} M = \varinjlim_{L \in \mathcal{L}_\eta^g} HOM_R(L, M/\eta M) \ ,$$

donde $\mathcal{L}_\eta^r$ es el filtro graduado asociado a η y $HOM_R(M,N)$ denota el grupo abeliano de los morfismos de grado arbitrario entre dos R–módulos a izquierda graduados M y N ([46]).

Sea M un R–módulo a izquierda graduado y η un radical rígido en $R-\mathbf{gr}$. Si σ es el radical graduado en $R-\mathbf{mod}$ cuya restricción a $R-\mathbf{gr}$ es el funtor η, entonces $Q_\eta^{gr}M$ coincide con el R–módulo a izquierda $g(Q_\sigma M)$ graduado, por la graduación $\{g(Q_\sigma M)_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde

$$\begin{aligned} &g(Q_\sigma M)_n \\ &= \{q \in Q_\sigma M \ ; \ \exists L \in \mathcal{L}_\sigma, L \text{ graduado}, \ L_m q \subseteq (M/\sigma M)_{m+n} \ \forall m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si además σ es de tipo finito (como ocurre cuando R es noetheriano a izquierda) entonces $Q_\sigma M$ es graduado y existe un isomorfismo $Q_\eta^{gr}M \longrightarrow Q_\sigma M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_\eta^{gr} M \arrow[rr, "\cong"] & & Q_\sigma M \\ & M \arrow[ul, "j_{\eta,M}^{gr}"] \arrow[ur, "j_{\sigma,M}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo (cfr. [44]).

(2.4.6) Sea k un cuerpo. Un k-álgebra positivamente graduada R, generada por los elementos homogéneos de grado uno y noetheriana a izquierda, se dice que es *esquemática* si existe una familia finita de conjuntos de Ore a izquierda $\{S_i\}_{1\le i\le r}$ formados por elementos homogéneos y de tal manera que el ínfimo de los radicales graduados σ_{S_i} de $R-\mathbf{mod}$ es el radical graduado σ_{R_+} definido en (2.4.4) a partir del ideal bilátero graduado $R_+ = \bigoplus_{i\ge 0} R_i$.

(2.4.7) Ejemplos. El álgebra de Weyl homogeneizada, esto es, la k-álgebra generada por tres elementos x, y, z de grado uno con las relaciones

$$xy - yx = z^2 \quad , \qquad xz - zx = yz - zy = 0 \ ,$$

es esquemática.

Sea $q \in \mathbb{C}$. El anillo $\mathcal{O}_q(M_2(\mathbb{C}))$ de las matrices 2×2 cuánticas, es decir, la $\mathbb{C}$-álgebra generada en grado uno por los elementos a, b, c y d sujetos a las relaciones

$$\begin{array}{rlrl} ba = & q^{-1}ab & dc = & q^{-1}cd \\ db = & q^{-1}bd & bc = & cb \\ ca = & q^{-1}ac & ad - da = & (q^2 - q^{-2})bc \end{array}$$

es una $\mathbb{C}$-álgebra esquemática. En efecto, el ínfimo de la familia de radicales graduados $\{\sigma_{S_a}, \sigma_{S_b}, \sigma_{S_c}, \sigma_{S_d}\}$, donde cada S_r es el conjunto de Ore homogéneo formado por las potencias de r, es el radical graduado $\sigma_{\mathcal{O}_q(M_2(\mathbb{C}))_+}$ ([52]).

(2.4.8) Una *topología de Grothendieck* es una categoría $\mathcal{C}$ tal que para cada objeto U existe una familia $Cov(U)$ de conjuntos de morfismos $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$ de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

(2.4.8.1) $\{U \xrightarrow{id} U\} \in Cov(U)$ para todo objeto U de $\mathcal{C}$.

(2.4.8.2) Si $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in Cov(U)$ y $\{U_{ij} \longrightarrow U_i\}_{j \in J_i} \in Cov(U_i)$ para cada $i \in I$, entonces $\{U_{ij} \longrightarrow U_i \longrightarrow U\}_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}} \in Cov(U)$.

(2.4.8.3) Si $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in Cov(U)$ y $U' \longrightarrow U$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces para cada $i \in I$ existe el pullback $U_i \times_U U'$, y

$$\{U_i \times_U U' \longrightarrow U'\}_{i \in I} \in Cov(U') \ .$$

Sea R una k-álgebra esquemática. Se denota por $\mathcal{W}_R$ a la categoría cuyo conjunto de objetos es el monoide libre generado por todos los conjuntos de Ore homogéneos S de R tales que $0 \notin S \ni 1$ y $S \cap R_+ \neq \emptyset$, y donde el conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(W, W')$, con $W = S_1 \cdots S_n$ y $W' = T_1 \cdots T_m$, es igual a $\{W \longrightarrow W'\}$ si existe una aplicación

$$\varepsilon : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$$

tal que $T_i = S_{\varepsilon(i)}$, para todo $1 \leq i \leq m$ y $\varepsilon(i) < \varepsilon(j)$ siempre que $i < j$, y $Hom_{\mathcal{C}}(W, W') = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Si $W \longrightarrow W'$ es un morfismo y V es un objeto de $\mathcal{W}_R$, entonces $VW \longrightarrow VW'$ y $WV \longrightarrow W'V$ también son morfismos de $\mathcal{W}_R$.

Dado un objeto $W = S_1 \cdots S_n$ de $\mathcal{W}_R$, en general el producto

$$S_1 \cdot \ldots \cdot S_n = \{s_1 \cdots s_n \ ; \ s_i \in S_i, \ 1 \leq i \leq n\}$$

no es un conjunto de Ore a izquierda de R, y el conjunto de ideales a izquierda $\mathcal{L}_W = \{L \leq_l R \ ; \ L \cap S_1 \cdot \ldots \cdot S_n \neq \emptyset\}$ es un filtro uniforme pero en general no es de Gabriel (ver lema (4.2.9)). Si $W \longrightarrow W'$ es un morfismo en $\mathcal{W}_R$, entonces $\mathcal{L}_{W'} \subseteq \mathcal{L}_W$.

Dado un R–módulo graduado M, se denota por $Q_W M$ a la imagen de M por la composición de los funtores localización $Q_{\sigma_{S_n}} \circ \cdots \circ Q_{\sigma_{S_1}}$. El núcleo de la composición de los morfismos localización

$$M \longrightarrow Q_{\sigma_{S_1}} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{\sigma_{S_n}} \cdots Q_{\sigma S_1} M$$

es la $\mathcal{L}_W$–torsión de M

(2.4.9) Un *recubrimiento global* en $\mathcal{W}_R$ es un conjunto finito $\{W_i\}_{1 \leq i \leq s}$ de objetos de $\mathcal{W}_R$ de tal manera que $\bigcap_{1 \leq i \leq s} \mathcal{L}_{W_i} = \mathcal{L}_{R_+}$. Puesto que R es un álgebra esquemática, siempre existe un recubrimiento global en $\mathcal{W}_R$.

Dado un objeto W de $\mathcal{W}_R$, se define $Cov(W)$ como el conjunto formado por todas las familias de morfismos $\{W_i W \longrightarrow W\}_{i \in I}$, donde $\{W_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento global. A los elementos de $Cov(W)$ se les llama recubrimientos de W.

La categoría $\mathcal{W}_R$ con las familias de recubrimientos de cada uno de sus objetos satisface los axiomas (2.4.8.1) y (2.4.8.2), pero dado que, en general, $\mathcal{W}_R$ no tiene pullbacks, el axioma (2.4.8.3) carece de sentido. Sin embargo, si $W' \longrightarrow W$ es un morfismo en $\mathcal{W}_R$ y $\{W_i W \longrightarrow W\}_{1 \leq i \leq w} \in Cov(W)$ entonces $\{W_i W' \longrightarrow W'\}_{1 \leq i \leq m} \in Cov(W')$. Se dice que $\mathcal{W}_R$ es una *topología de Grothendieck no conmutativa* ([47]).

(2.4.10) Un prehaz (de R–módulos a izquierda) sobre $\mathcal{W}_R$ es un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{W}_R$ en $R-\mathbf{mod}$. Un prehaz $\mathcal{P}$ se dice que es un haz si para cada objeto W de $\mathcal{W}_R$ y cada $\{W_i \longrightarrow W\}_{1 \leq i \leq m} \in Cov(W)$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(W) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \mathcal{P}(W_i) \rightrightarrows \bigoplus_{1 \leq i,j \leq m} \mathcal{P}(W_i W_j) \ ,$$

donde los morfismos son los naturales, es exacta.

Dado un R–módulo a izquierda graduado M, se puede definir un prehaz $\mathcal{O}_M$ asignando, a cada objeto W de $\mathcal{W}_R$, el R–módulo a izquierda $Q_W M$, y a cada morfismo $W \longrightarrow W'$ (que, siendo $W' = S_1 \cdots S_r$, existe si, y sólo si, W es de la forma $W_0 S_1 W_1 \cdots S_r W_r$), el homomorfismo $Q_{W'} M \longrightarrow Q_W M$ que se obtiene de manera natural mediante el proceso iterativo de composición con los morfismos localización y localización de dichas composiciones.

(2.4.11) Teorema. ([47, 52]) *Para todo R–módulo a izquierda graduado M, el prehaz $\mathcal{O}_M$ es un haz.*

(2.4.12) En general $\mathcal{O}_R$ no es un haz de anillos, y por lo tanto no tiene sentido plantearse si $\mathcal{O}_M$ lo es de $\mathcal{O}_R$–módulos. Sin embargo, $\mathcal{O}_M(W)$ siempre es un $Q_{\sigma_S}R$–módulo a izquierda, donde S es el último conjunto de Ore a izquierda que aparece en la expresión de W.

El R–módulo a izquierda M se obtiene de nuevo como el módulo de las secciones globales del haz $\mathcal{O}_M$ puesto que $Q_{\sigma_{R_+}}M = M$ ([47]).

Sin embargo, el hecho de que todo recubrimiento se obtenga como intersección con un recubrimiento global, hace imposible que $\mathcal{W}_R$ sea una generalización de la topología de Zariski del espectro primo cuando la k–álgebra R es conmutativa (ver (4.2.15)).

Capítulo 3

Filtros uniformes

Como se ha comentado en el capítulo uno (ver también [11, 16, 22, 40, et al.]), el conjunto de filtros de Gabriel en un anillo R se corresponde biyectivamente con el de subcategorías localizantes de $R-\mathbf{Mod}$. Principalmente por esta razón se ha dedicado históricamente mucho más tiempo al estudio (del retículo) de los filtros de Gabriel y sus propiedades que al de los filtros uniformes. En este capítulo se estudian con más detenimiento las propiedades de los filtros uniformes, especialmente aquellas que tendrán aplicación en los capítulos siguientes. También se exponen varios ejemplos.

3.1. El retículo de los filtros uniformes

Sea R un anillo.

(3.1.1) Un filtro en R es un conjunto no vacío $\mathcal{L}$ de ideales a izquierda de R tal que

(3.1.1.1) si $L \in \mathcal{L}$ y $L \subseteq L' \leq_l R$, entonces $L' \in \mathcal{L}$;

(3.1.1.2) si $L, L' \in \mathcal{L}$, entonces $L \cap L' \in \mathcal{L}$,

o equivalentemente, tal que si L y L' pertenecen a $\mathcal{L}$, entonces cualquier ideal a izquierda que contenga a $L \cap L'$ también pertenece a $\mathcal{L}$. El ideal R pertenece a cualquier filtro en R.

El conjunto de filtros en R está parcialmente ordenado por la inclusión, y dado que la intersección de filtros es un filtro, existe el ínfimo (y por tanto también el supremo) de cualquier familia de filtros en R. Los conjuntos $\{R\}$ y $\{L;\ L \leq_l R\}$ son, trivialmente, filtros en R, y son el menor y mayor elemento respectivamente en el retículo de filtros en R.

Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros en R, se denota por $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ a la *composición* de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$, esto es, al conjunto formado por todos los ideales a izquierda L de R para los que existe un ideal a izquierda H (que se puede asumir que contiene a L) perteneciente a $\mathcal{H}$ tal que

$$(L : r) = \{s \in R\ ;\ sr \in L\} \in \mathcal{L}$$

para cada $r \in H$. El conjunto $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es un filtro, pues, en efecto, si L y L' pertenecen a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ y L'' es un ideal a izquierda que contiene a $L \cap L'$, entonces existen H y H' pertenecientes a $\mathcal{H}$ tales que $(L : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H$ resp. $(L' : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H'$. Luego $H \cap H'$ pertenece a $\mathcal{H}$ y para cada $r \in H \cap H'$,

$$(L'' : r) \supseteq (L \cap L' : r) = (L : r) \cap (L' : r) \in \mathcal{L}\ ,$$

de donde se tiene que $(L'' : r) \in \mathcal{L}$.
Dado que $\mathcal{H}$ es un filtro, un ideal a izquierda L pertenece a la composición $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ si, y sólo si, el ideal a izquierda

$$H = \{r \in R\ ;\ (L : r) \in \mathcal{L}\}$$

pertenece a $\mathcal{H}$.

(3.1.2) Lema. *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros en R, H es un ideal a izquierda perteneciente a $\mathcal{H}$ y $\{L_r\}_{r\in H}$ es una familia de ideales a izquierda en $\mathcal{L}$, entonces*

$$\sum_{r\in H} L_r r$$

pertenece a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$.

Demostración. Denotemos por L al ideal a izquierda $\sum_{r\in H} L_r r$. Dado que $L_r r \subseteq L$, se tiene que $L_r \subseteq (L : r)$, y por tanto $(L : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H \in \mathcal{H}$, puesto que $L_r \in \mathcal{L}$. □

(3.1.3) Corolario. *Si $L \in \mathcal{L}$ y $H \in \mathcal{H}$, entonces $LH \in \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$.*

(3.1.4) Lema. *La composición es una operación asociativa en el conjunto de filtros en R.*

Demostración. Sean $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}''$ filtros en R. Si $L \in (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}') \circ \mathcal{L}''$ entonces existe $H \in \mathcal{L}''$ tal que $(L : r) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{L}'$ para cada $r \in H$, y por lo tanto existe $L_r \in \mathcal{L}'$ tal que $((L : r) : s) \in \mathcal{L}$ para cada $s \in L_r$. Por el lema (3.1.2), el ideal a izquierda $H' = \sum_{r\in H} L_r r$ pertenece a $\mathcal{L}' \circ \mathcal{L}''$, y para cada $t = \sum_{i=1}^{n} s_i r_i \in H'$, con $r_i \in H$ y $s_i \in L_{r_i}$,

$$(L : t) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (L : s_i r_i) = \bigcap_{i=1}^{n} ((L : r_i) : s_i) \in \mathcal{L}\ ,$$

de donde se tiene que $L \in \mathcal{L} \circ (\mathcal{L}' \circ \mathcal{L}'')$.

Recíprocamente, si $L \in \mathcal{L} \circ (\mathcal{L}' \circ \mathcal{L}'')$, entonces existe $H \in \mathcal{L}' \circ \mathcal{L}''$ tal que $(L : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H$. Puesto que $H \in \mathcal{L}' \circ \mathcal{L}''$, existe $H' \in \mathcal{L}''$ tal que $(H : s) \in \mathcal{L}'$ para cada $s \in H'$. Por tanto $(L : s) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{L}'$, pues $(H : s) \in \mathcal{L}'$ y para cada $r \in (H : s)$,

$$((L : s) : r) = (L : rs) \in \mathcal{L}$$

(dado que $rs \in H$). Luego $L \in (\mathcal{L} \circ \mathcal{L}') \circ \mathcal{L}''$. □

Sin embargo, en general la composición de filtros no tiene la propiedad conmutativa, como muestra el ejemplo, debido a R. Bronowitz, que se detalla a continuación.

(3.1.5) Ejemplo. ([10, 21]) Sea k un cuerpo y R el anillo (conmutativo) $k^{\mathbb{N}}$. El ideal $H = k^{(\mathbb{N})}$ es el zócalo de R (esto es, H es la suma de todos los ideales de R que son simples como R–módulos), y por lo tanto es un ideal esencial.

Consideremos el conjunto de ideales $\mathcal{L} = \{L \leq R \ ; \ soc(R/L) = R/L\}$ (donde $soc(M)$ denota el zócalo del R–módulo M). Si $L \in \mathcal{L}$ y $L \subseteq L' \leq R$, el homomorfismo natural $p : R/L \longrightarrow R/L'$ es un epimorfismo y entonces

$$soc(R/L') \supseteq \sum_{R/L \geq M \text{simple}} p(M) \supseteq p(soc(R/L)) = p(R/L) = R/L' \ ,$$

luego $L' \in \mathcal{L}$. Por otra parte, si L y L' pertenecen a $\mathcal{L}$, entonces,

$$soc(R/L \oplus R/L') = soc(R/L) \oplus soc(R/L') = R/L \oplus R/L' \ ,$$

y dado que $R/(L \cap L')$ puede ser considerado como un submódulo de la suma $R/L \oplus R/L'$,

$$soc(R/(L \cap L')) = R/(L \cap L') \cap soc(R/L \oplus R/L') = R/(L \cap L') \ .$$

Por tanto $L \cap L' \in \mathcal{L}$, de donde se tiene que $\mathcal{L}$ es un filtro.

Dado que la intersección de ideales esenciales de R es esencial, el conjunto $\mathcal{H}$ de todos los ideales esenciales de R es también un filtro. Además H pertenece a $\mathcal{H}$, y todo elemento de $\mathcal{H}$ contiene a H.

Sea $h \in H$. Puesto que $soc(H) = H$, el zócalo de Rh es también el propio Rh, y dado que $Rh \cong R/(0 : h)$, se tiene que $(0 : h) \in \mathcal{L}$. Luego el ideal cero es un ideal de $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, y esto implica que $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es el conjunto de todos los ideales de R.

Sin embargo, si el ideal cero pertenece a $\mathcal{H} \circ \mathcal{L}$, entonces existe un ideal $L \in \mathcal{L}$ de tal manera que $(0 : r) \in \mathcal{H}$ para todo $r \in L$, esto es, $Hr = 0$. Puesto que $L \neq 0$ (pues en el caso $L = 0$ se tendría que $H = soc(R) = R$, y esto no es cierto) se tiene que $H \cap L \neq 0$, y por tanto existe un elemento m no nulo en $L \cap H$. Luego $m^2 \in Hm = 0$, pero esto no puede suceder porque R no tiene elementos nilpotentes. Luego el ideal cero no pertenece a $\mathcal{H} \circ \mathcal{L}$, que no puede ser igual entonces a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$.

(3.1.6) Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$ son filtros en R, entonces $\mathcal{L} \circ \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}' \circ \mathcal{H}'$, ya que para cada $L \in \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ existe un ideal a izquierda $H \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$ tal que $(L : r) \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ para cada $r \in H$.
Por otra parte, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, pues si $H \in \mathcal{H}$, entonces $R = (H : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H$. Además, en el caso particular $\mathcal{L} = \{R\}$, si $L \in \{R\} \circ \mathcal{H}$ entonces existe $H \in \mathcal{H}$ tal que (L está contenido en H y) $(L : r) \in \{R\}$ para cada $r \in H$. Por lo tanto $r = 1r \in L$ para cada $r \in H$, esto es, $L = H \in \mathcal{H}$, de donde se tiene $\mathcal{H} = \{R\} \circ \mathcal{H}$.
Sin embargo, $\mathcal{L}$ no siempre está contenido en $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$. De hecho:

(3.1.7) Proposición. *Dado un filtro $\mathcal{L}$ en R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(3.1.7.1) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ *para todo filtro* $\mathcal{H}$ *en* R;

(3.1.7.2) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \{R\}$;

(3.1.7.3) $\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \{R\}$;

(3.1.7.4) $(L : r) \in \mathcal{L}$ *para todo* $L \in \mathcal{L}$ *y todo* $r \in R$.

Demostración. (1) y (2) son trivialmente equivalentes, pues $\{R\} \subseteq \mathcal{H}$ para todo filtro $\mathcal{H}$, y por otro lado (2) es esquivalente a (3) puesto que $\mathcal{L} \circ \{R\}$ siempre está contenido en $\mathcal{L}$ (en efecto, si $L \in \mathcal{L} \circ \{R\}$, entonces en particular $L = (L : 1) \in \mathcal{L}$).
Supongamos que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \{R\}$. Si $L \in \mathcal{L}$, entonces existe un ideal a izquierda H en $\{R\}$ (que tiene que ser $H = R$) tal que $(L : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H$, luego $(L : r) \in \mathcal{L}$ para todo $r \in R$.
Recíprocamente, si $L \in \mathcal{L}$ y $(L : r) \in \mathcal{L}$ para cualquier $r \in R$, entonces $L \in \mathcal{L} \circ \{R\}$. □

(3.1.8) Un filtro $\mathcal{L}$ en R se dice que es *uniforme* si cumple alguna de las condiciones equivalentes de la proposición anterior. Si $\mathcal{L}$ es un filtro y $\mathcal{H}$ es un filtro uniforme, entonces $\mathcal{L} \circ \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H} \circ \{R\}$, y por lo tanto $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es un filtro uniforme. Dado que los filtros $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ del ejemplo (3.1.5) son uniformes, esos mismos filtros constituyen un ejemplo de que en general la composición de filtros uniformes no conmuta.

Si R es conmutativo, entonces todo filtro en R es uniforme, dado que para todo ideal L y todo $r \in R$, el ideal $(L : r)$ contiene a L.

La intersección de filtros uniformes es un filtro uniforme, y por tanto el conjunto de filtros uniformes ordenado por la inclusión es un retículo completo que se denota $R - \mathbf{filt}$. El supremo de una familia de filtros uniformes es la intersección de los filtros uniformes que contienen a cada uno de los miembros de la familia. El siguiente resultado proporciona una forma más directa de calcular supremos en $R - \mathbf{filt}$.

(3.1.9) Lema. ([3, 17, 21]) *Sea F una familia de ideales a izquierda de R y definamos*

(3.1.9.1) $F' = \{(L : r) \ ; \ L \in F, r \in R\}$;

(3.1.9.2) $F'' = \{\bigcap_{i=1}^n L_i \ ; \ L_i \in F', \ 1 \leq i \leq n\}$;

(3.1.9.3) $\mathcal{L} = \{L \leq_l R \ ; \exists H \in F'', \ H \subseteq L\}$.

Entonces $\mathcal{L}$ es el filtro uniforme más pequeño que contiene a F.

Demostración. En efecto, $\mathcal{L}$ es un filtro, pues si $H \supseteq L \cap L'$, con $L, L' \in \mathcal{L}$, entonces existen $L_1, \ldots, L_n, L'_1, \ldots, L'_m$ pertenecientes a F' tales que $\bigcap_{i=1}^n L_i \subseteq L$ y $\bigcap_{i=1}^m L'_i \subseteq L'$, luego

$$(\bigcap_{i=1}^n L_i) \cap (\bigcap_{i=1}^m L'_i) \subseteq L \cap L' \subseteq H \ ,$$

y de ahí que $H \in \mathcal{L}$. Además $\mathcal{L}$ es uniforme, ya que para todo $r \in R$ y para todo $L \in \mathcal{L}$, existen $L_1, \ldots, L_n \in F$ y $r_1, \ldots, r_n \in R$ de manera que $\bigcap_{i=1}^n (L_i : r_i) \subseteq L$, y por lo tanto

$$(L : r) \supseteq \bigcap_{i=1}^n ((L_i : r_i) : r) = \bigcap_{i=1}^n (L_i : rr_i) \in F'' \ ,$$

luego $(L : r) \in \mathcal{L}$.

Si $\mathcal{H}$ es un filtro uniforme que contiene a F, entonces $F' \subseteq \mathcal{H}$ dado que $(L : r) \in \mathcal{H}$ para todo $L \in F$ y todo $r \in R$. Por lo tanto $F'' \subseteq \mathcal{H}$, por ser $\mathcal{H}$ cerrado al tomar intersecciones finitas, y esto implica que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ por la definición de $\mathcal{L}$. $\square$

Como consecuencia del lema anterior, el supremo de una familia de filtros uniformes $\{\mathcal{L}_a\}_{a \in A}$ es el filtro uniforme

$$\{L \leq_l R \ ; \ \exists a_1, \ldots, a_n \in A, \ \exists L_{a_i} \in \mathcal{L}_{a_i} \ , \ \bigcap_{i=1}^n L_{a_i} \subseteq L\} \ .$$

Como este conjunto de ideales a izquierda es precisamente el supremo de $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ en el retículo de filtros en R, se puede concluir que $R-\mathbf{filt}$ es un subretículo del retículo de filtros en R.

El concepto de filtro uniforme no es nuevo. De hecho, nociones equivalentes como la de topología lineal en un anillo y la de funtor núcleo, expuestas a continuación, son sobradamente conocidas.

(3.1.10) Se dice que el anillo R es un anillo topológico si admite una topología de manera que las aplicaciones

$$\begin{array}{lll} R\times R \longrightarrow R & \qquad R\times R \longrightarrow R & \qquad R\longrightarrow R \\ (r,r') \longmapsto r+r' & \qquad (r,r') \longmapsto rr' & \qquad r\longmapsto -r \end{array}$$

son continuas. Dado que un subconjunto U de R es un entorno de $r\in R$ si, y sólo si, $\{s-r\ ;\ s\in U\}$ es un entorno del cero, la topología de R queda perfectamente determinada por la familia $\mathcal{N}$ de entornos abiertos del cero. Dicha familia verifica:

(3.1.10.1) para cada $U\in\mathcal{N}$ existe un $V\in\mathcal{N}$ tal que $V+V\subseteq U$;

(3.1.10.2) $-U\in\mathcal{N}$ para cada $U\in\mathcal{N}$;

(3.1.10.3) para cada $U\in\mathcal{N}$ y cada $r\in R$ existe un $V\in\mathcal{N}$ tal que $rV\subseteq U$;

(3.1.10.4) para cada $U\in\mathcal{N}$ y cada $r\in R$ existe un $V\in\mathcal{N}$ tal que $Vr\subseteq U$;

(3.1.10.5) para cada $U\in\mathcal{N}$ existe un $V\in\mathcal{N}$ tal que $VV\subseteq U$.

Además, toda familia de subconjuntos de R que contengan al cero y verifiquen estas cinco condiciones es el conjunto de entornos abiertos del cero de una (única) topología que convierte a R en un anillo topológico.

Una topología en R que hace a R un anillo topológico se dice que es *lineal* (a izquierda) si todos los elementos del conjunto $\mathcal{N}$, de entornos abiertos del cero, son ideales (a izquierda) de R. En ese caso, $\mathcal{N}$ es un filtro, y por (3.1.10.4), para cada $L\in\mathcal{N}$ y cada $r\in R$ se tiene $(L:r)\in\mathcal{N}$, esto es, $\mathcal{N}$ es un filtro uniforme.

Recíprocamente, si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces $\mathcal{L}$ es el conjunto de entornos abiertos del cero de una topología de R. Además, dado que $\mathcal{L}$ es uniforme, para cada $L\in\mathcal{L}$ y cada $r\in R$ el ideal $(L:r)$ pertenece a $\mathcal{L}$ y es tal que $(L:r)r\subseteq L$. Luego $\mathcal{L}$ satisface (3.1.10.4), y puesto que el resto de las propiedades anteriores se satisfacen trivialmente por estar $\mathcal{L}$ constituido por ideales a izquierda, $\mathcal{L}$ es la familia de entornos abiertos del cero de una topología lineal que convierte a R en un anillo topológico ([21, 22, 40]).

(3.1.11) Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R y M es un R–módulo a izquierda se define la *$\mathcal{L}$–torsión de M* como el conjunto $\sigma_{\mathcal{L}}M$ de los elementos $m\in M$

tales que $\mathrm{Ann}_R^l(m) \in \mathcal{L}$. Se dice que M es de $\mathcal{L}$–torsión si coincide con su $\mathcal{L}$–torsión, y que es $\mathcal{L}$–libre de torsión si su $\mathcal{L}$–torsión es cero.

Como consecuencia de que $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme, la $\mathcal{L}$–torsión de todo R–módulo a izquierda M es un submódulo de M, pues

$$\mathrm{Ann}_R^l(m+m') \supseteq \mathrm{Ann}_R^l(m) \cap \mathrm{Ann}_R^l(m')$$

y

$$\mathrm{Ann}_R^l(rm) = (\mathrm{Ann}_R^l(m) : r)$$

para cada $m, m' \in M$ y cada $r \in R$. Además, si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de R–módulos a izquierda, entonces para cada $m \in \sigma_{\mathcal{L}} M$ se tiene que $f(m) \in \sigma_{\mathcal{L}} N$, pues $\mathrm{Ann}_R^l(f(m)) \supseteq \mathrm{Ann}_R^l(m) \in \mathcal{L}$.

El subfuntor $\sigma_{\mathcal{L}}$ de la identidad en $R-\mathbf{mod}$ que a cada R–módulo a izquierda M le asigna su $\mathcal{L}$–torsión es un funtor núcleo, esto es, es exacto a izquierda, pues si $f : M' \longrightarrow M$ es un monomorfismo y $m \in \sigma_{\mathcal{L}} M \cap \mathrm{Im} f$ entonces existe un elemento $m' \in M'$ tal que $f(m') = m$, y m' pertenece a la $\mathcal{L}$–torsión de M' ya que por ser f monomorfismo,

$$\mathrm{Ann}_R^l(m') = \mathrm{Ann}_R^l(m) \in \mathcal{L} \ .$$

Recíprocamente, si σ es un subfuntor de la identidad en $R-\mathbf{mod}$ exacto a izquierda, el conjunto de ideales a izquierda

$$\mathcal{L}_\sigma = \{L \leq_l R \ ; \ \sigma(R/L) = R/L\}$$

es un filtro uniforme ([21, 22]).

Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros uniformes, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ si, y sólo si, $\sigma_{\mathcal{L}} M \subseteq \sigma_{\mathcal{H}} M$ para todo R–módulo a izquierda M.

Dado que $\sigma_{\mathcal{L}}$ determina a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_\sigma$ determina a σ, se establece de esta forma una correspondencia biyectiva entre el conjunto de filtros uniformes de R y el de funtores núcleo en $R-\mathbf{mod}$.

(3.1.12) Una *clase de pretorsión en* $R-\mathbf{mod}$ es una familia $\mathcal{T}$ de R–módulos a izquierda cerrada al tomar imágenes por epimorfismos y sumas directas. Si además $\mathcal{T}$ es cerrada al tomar submódulos, se dice que es una clase de pretorsión hereditaria. Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en R. Entonces la clase $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ de R–módulos a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión es una clase de pretorsión hereditaria en $R-\mathbf{mod}$. En efecto, si $M' \leq_l M \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ entonces $\mathrm{Ann}_R^l(m) \in \mathcal{L}$ para cada $m \in M'$, y por tanto $M' \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Si $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo, para cada n perteneciente a N existe un elemento $m \in M$ del que es imagen, y $\mathrm{Ann}^l_R(n) \supseteq \mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L}$, de donde se tiene que $N \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Finalmente, si $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y $(m_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces

$$\mathrm{Ann}^l_R((m_i)) \supseteq \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ann}^l_R(m_i)$$

y esta intersección pertenece a $\mathcal{L}$ pues es la intersección de R con a lo sumo un número finito de elementos de $\mathcal{L}\backslash\{R\}$, luego $(m_i) \in \sigma_{\mathcal{L}} \bigoplus_{i\in I} M_i$, y por tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i$ coincide con su $\mathcal{L}$–torsión.

Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros uniformes en R, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ si, y sólo si, $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$.

Dada una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}$ en $R-\mathbf{mod}$, el conjunto de ideales a izquierda

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}} = \{L \leq_l R\ ;\ R/L \in \mathcal{T}\}$$

es un filtro uniforme en R. La aplicación dada por $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ es una biyección entre el conjunto de clases de pretorsión hereditarias en $R-\mathbf{mod}$ y el conjunto de filtros uniformes en R.

Teniendo en cuenta esta biyección, la composición de filtros uniformes se puede describir de la siguiente manera:

(3.1.13) Proposición. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ dos filtros uniformes en R. Entonces un R–módulo a izquierda M pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}}$ si, y sólo si, existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

con $M' \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y $M'' \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$.

Demostración. Asumamos que M es de $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$–torsión. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \sigma_{\mathcal{L}} M \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/\sigma_{\mathcal{L}} M \longrightarrow 0$$

es exacta y $\sigma_{\mathcal{L}} M$ es de $\mathcal{L}$–torsión. Si $\overline{m} \in M/\sigma_{\mathcal{L}} M$ entonces $\mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L}\circ\mathcal{H}$, y por lo tanto existe $H \in \mathcal{H}$ de tal manera que

$$\mathrm{Ann}^l_R(rm) = (\mathrm{Ann}^l_R(m) : r) \in \mathcal{L}$$

para cada $r \in H$. Luego $rm \in \sigma_{\mathcal{L}} M$, esto es, $r\overline{m} = 0$ para cada $r \in H$, con lo que $\overline{m}$ es un elemento de la $\mathcal{H}$–torsión de $M/\sigma_{\mathcal{L}} M$. Dado que $\overline{m}$ ha sido tomado de manera arbitraria, esto prueba que $M/\sigma_{\mathcal{L}} M$ es de $\mathcal{H}$–torsión.

Recíprocamente, si la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta con $M' \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ y $M'' \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$, entonces para cada $m \in M$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $g(Hm) = Hg(m) = 0$. Luego para cada $r \in H$, el elemento rm

pertenece a $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$, y por lo tanto existe un elemento $m_r \in M'$ y un ideal $L_r \in \mathcal{L}$ de manera que rm es la imagen de m_r y $L_r m_r = 0$. El ideal $L = \sum_{r\in H} L_r r$, que pertenece a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ por el lema (3.1.2), está contenido en el anulador de m, pues

$$Lm = \sum_{r\in H} L_r rm = \sum_{r\in H} L_r f(m_r) = \sum_{r\in H} f(L_r m_r) = 0 \ .$$

Esto implica que $\mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ y, dado que m fue tomado arbitrariamente en M, que M es de $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$–torsión. □

(3.1.14) Como se ha comentado ya en (1.2.8), una familia de R–módulos a izquierda $\mathcal{F}$ es la clase de libres de torsión de una teoría de torsión hereditaria en $R-$**mod** si, y sólo si, es cerrada al tomar submódulos, productos directos, extensiones exactas y envolventes inyectivas. Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces la familia $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ de R–módulos a izquierda $\mathcal{L}$–libres de torsión es la clase de libres de torsión de una teoría de torsión hereditaria. En efecto, si $M' \leq M \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$ y m pertenece a $\sigma_\mathcal{L} M'$, entonces $m = 0$ pues m también pertenece a $\sigma_\mathcal{L} M$. Si $M \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$ entonces $0 = \sigma_\mathcal{L} M = M \cap \sigma_\mathcal{L} E$, donde E es la envolvente inyectiva de M. Dado que $M \longrightarrow E$ es una extensión esencial, esto implica que $\sigma_\mathcal{L} E = 0$, es decir, $E \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$. Consideremos ahora una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{F}_\mathcal{L}$. Si $(m_i) \in \sigma_\mathcal{L}(\prod_{i\in I} M_i)$, entonces $\mathrm{Ann}^l_R(m_i) \supseteq \mathrm{Ann}^l_R((m_i)) \in \mathcal{L}$ para cada $i \in I$, y así $m_i \in \sigma_\mathcal{L} M_i = 0$, de donde se tiene que $(m_i) = 0$. Finalmente, si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta con M' y M'' pertenecientes a $\mathcal{F}_\mathcal{L}$, entonces para todo $m \in \sigma_\mathcal{L} M$ existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $Lm = 0$. Luego

$$Lg(m) = g(Lm) = 0 \ ,$$

y como M'' es $\mathcal{L}$–libre de torsión, $m \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$, esto es, existe un elemento $m' \in M'$ cuya imagen es m. Como f es un monomorfismo,

$$\mathrm{Ann}^l_R(m') = \mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L} \ ,$$

y de ahí $m' = 0$ y $m = f(m') = 0$.

(3.1.15) Nota. A diferencia de lo que ocurre con la clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}_\mathcal{L}$, la familia de R–módulos a izquierda $\mathcal{L}$–libres de torsión no determina al filtro uniforme $\mathcal{L}$. De hecho se tiene que si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros uniformes, entonces

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}} = \mathcal{F}_\mathcal{L} \cap \mathcal{F}_\mathcal{H} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}\circ\mathcal{L}} \ .$$

El contenido $\mathcal{F}_{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ surge de manera trivial por estar tanto $\mathcal{L}$ como $\mathcal{H}$ contenidos en $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$. Si por contra M pertenece a $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, entonces para cada $m \in \sigma_{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}}M$ existe un ideal a izquierda H perteneciente a $\mathcal{H}$ tal que $\mathrm{Ann}^l_R(rm) = (\mathrm{Ann}^l_R(m) : r) \in \mathcal{L}$ para todo $r \in H$. Luego $rm = 0$ para cada $r \in H$, esto es, $m \in \sigma_{\mathcal{H}}M = 0$, de donde se deduce que M es $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$–libre de torsión.

Como se ha probado en (3.1.9), el retículo de filtros uniformes en R es un subretículo del retículo de filtros en R. El ínfimo de una familia de filtros uniformes viene dado por su intersección, pero el supremo en general no coincide con la unión puesto que la unión de filtros uniformes no tiene por qué ser ni siquiera un filtro. Si la unión de una familia de filtros uniformes es un filtro, claramente también es un filtro uniforme.
A la hora de estudiar la estructura de *casi–cuantal* (ver (5.1.1)) del conjunto de filtros uniformes, será conveniente tener en cuenta las propiedades de compatibilidad de la composición con los ínfimos y supremos tomados en $R-\mathbf{filt}$.

(3.1.16) Lema. ([21]) *Sea $\mathcal{H}$ un filtro uniforme y $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ una familia de filtros uniformes en R. Entonces:*

(3.1.16.1) $\bigcap_{a\in A}\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a = \mathcal{H}\circ\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a$;

(3.1.16.2) $(\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a)\circ\mathcal{H} \subseteq \bigcap_{a\in A}(\mathcal{L}_a\circ\mathcal{H})$, *y si $\mathcal{H}$ es cerrado al tomar intersecciones indexadas en A, también se verifica la igualdad.*

Demostración. Sea $L \in \bigcap_{a\in A}\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a$. Para cada $a \in A$ existe un ideal $L_a \in \mathcal{L}_a$ tal que $(L:r) \in \mathcal{H}$ para todo $r \in L_a$. Luego

$$L' = \sum_{a\in A} L_a \in \mathcal{L}_a$$

para todo $a \in A$, y si $r = r_1 + \cdots + r_n \in L'$, entonces

$$(L:r) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n}(L:r_i) \in \mathcal{H} \ ,$$

de donde $L \in \mathcal{H}\circ\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a$. Dado que por otra parte $\mathcal{H}\circ\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a$ está contenido en $\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a$ para todo $a \in A$, se satisface la igualdad en (1).
De la misma manera, $(\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a)\circ\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}_a\circ\mathcal{H}$ para cada $a \in A$, y por tanto $(\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a)\circ\mathcal{H} \subseteq \bigcap_{a\in A}(\mathcal{L}_a\circ\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}$ es cerrado para intersecciones indexadas en A y $L \in \bigcap_{a\in A}(\mathcal{L}_a\circ\mathcal{H})$, entonces para cada $a \in A$ existe un elemento $H_a \in \mathcal{H}$ tal que $(L:r) \in \mathcal{L}_a$ para todo $r \in H_a$. Sea

$$H = \bigcap_{a\in A} H_a \in \mathcal{H} \ .$$

Dado que $(L : r) \in \bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a$ para cada $r \in H$, se tiene que $L \in (\bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a) \circ \mathcal{H}$. $\square$

En particular si $\mathcal{H}$ es cerrado para intersecciones arbitrarias, o bien la familia $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ del resultado anterior es finita, entonces se da la igualdad en (2).

Como prueba el siguiente ejemplo apuntado por el profesor Pascual Jara ([17]), que $\mathcal{H}$ sea cerrado para intersecciones indexadas en A no es estrictamente necesario para que $(\bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a) \circ \mathcal{H}$ sea igual a $\bigcap_{a\in A}(\mathcal{L}_a \circ \mathcal{H})$ para una determinada familia $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$

(3.1.17) Ejemplo. Sea $R = \mathbb{Z}$ el anillo de los enteros y $\mathcal{H}$ el filtro uniforme formado por todos los ideales de $\mathbb{Z}$ distintos de cero. Consideremos la familia $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ donde

$$\mathcal{L}_n = \{L \leq \mathbb{Z} \; ; \; (n) \subseteq L\} \; .$$

Trivialmente $\mathcal{L}_n$ es un filtro (uniforme) para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Un ideal (d) pertenece a $\mathcal{L}_n$ si, y sólo si, d divide a n.

Puesto que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \mathcal{L}_n = \{\mathbb{Z}\}$, la composición de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \mathcal{L}_n$ y $\mathcal{H}$ es igual a $\mathcal{H}$.

Por otra parte, $\mathcal{L}_n \circ \mathcal{H}$ es el conjunto de los ideales L de $\mathbb{Z}$ tales que

$$\{m \in \mathbb{Z}; \; (L : m) \in \mathcal{L}_n\} \neq (0) \; ,$$

para $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, el ideal $L = (0)$ no pertenece a $\mathcal{L}_n \circ \mathcal{H}$ pues, dado que $\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad, para $m \neq 0$ no existe ningún divisor d de n tal que $dm = 0$. Luego

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}_n \circ \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H} \; ,$$

y esto implica que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} (\mathcal{L}_n \circ \mathcal{H}) = \mathcal{H} = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \mathcal{L}_n) \circ \mathcal{H} \; .$$

Sin embargo $\mathcal{H}$ no es cerrado para intersecciones numerables, pues

$$(0) = \bigcap_{n\neq 0} (n)$$

no pertenece a $\mathcal{H}$.

(3.1.18) Lema. ([17]) *Sea $\mathcal{H}$ un filtro uniforme y $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ una familia de filtros uniformes en R de tal manera que $\bigcup_{a\in A} \mathcal{L}_a$ es un filtro (y por lo tanto un filtro uniforme). Entonces:*

(3.1.18.1) *$\bigcup_{a\in A}\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a$ es también un filtro uniforme y*

$$\bigcup_{a\in A}\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a=\mathcal{H}\circ\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a\ ;$$

(3.1.18.2) *$\bigcup_{a\in A}(\mathcal{L}_a\circ\mathcal{H})\subseteq(\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a)\circ\mathcal{H}$;*

(3.1.18.3) *si $A=\{1,\cdots,n\}$ y $\bigcup_{i=1}^{l}\mathcal{L}_i$ es un filtro para $2\le l\le n$, entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{n}(\mathcal{L}_i\circ\mathcal{H})=(\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{L}_i)\circ\mathcal{H}\ ;$$

(3.1.18.4) *si R es noetheriano a izquierda y $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ es un conjunto dirigido, esto es, para todo par de índices $a,b\in A$ existe $c\in A$ tal que $\mathcal{L}_a\cup\mathcal{L}_b\subseteq\mathcal{L}_c$, entonces*

$$\bigcup_{a\in A}(\mathcal{L}_a\circ\mathcal{H})=(\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a)\circ\mathcal{H}\ .$$

Demostración. Para cada $a\in A$, el filtro $\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a$ está contenido en $\mathcal{H}\circ\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a$, y por lo tanto $\bigcup_{a\in A}\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a\subseteq\mathcal{H}\circ\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a$. Por otra parte, si L es un elemento de $\mathcal{H}\circ\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a$, entonces existe un ideal a izquierda $H\in\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a$ tal que $(L:r)\in\mathcal{H}$ para cada $r\in H$. Como H pertenece a $\mathcal{L}_a$, para algún $a\in A$, se tiene que $L\in\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a$ para dicho a, de donde $L\in\bigcap_{a\in A}\mathcal{H}\circ\mathcal{L}_a$.
El contenido en (2) es siempre cierto ya que $\mathcal{L}_a\circ\mathcal{H}\subseteq(\bigcup_{a\in A}\mathcal{L}_a)\circ\mathcal{H}$ para todo $a\in A$.
Para probar la inclusión no trivial en (3), tomaremos primero $A=\{1,2\}$. Si $L\in(\mathcal{L}_1\circ\mathcal{L}_2)\cup\mathcal{H}$, entonces el ideal a izquierda

$$H=\{r\in R\ ;\ (L:r)\in\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2\}$$

pertenece a $\mathcal{H}$. Además, si para $i=1,2$ definimos

$$H_i=\{r\in R\ ;\ (L:r)\in\mathcal{L}_i\}\ ,$$

entonces $H=H_1\cup H_2$, y dado que la unión propia de ideales nunca es un ideal, uno de ellos debe contener al otro, esto es, o bien $H_1=H$ o bien $H_2=H$. Luego o bien $L\in\mathcal{L}_1\circ\mathcal{H}$, o bien $L\in\mathcal{L}_2\circ\mathcal{H}$, de donde se tiene que $L\in(\mathcal{L}_1\circ\mathcal{H})\cup(\mathcal{L}_2\circ\mathcal{H})$. Si $A=\{1,\ldots,n\}$, entonces, por el mismo razonamiento,

$$(\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{L}_i)\circ\mathcal{H}\subseteq((\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathcal{L}_i)\circ\mathcal{H})\cup(\mathcal{L}_n\circ\mathcal{H})\subseteq\cdots\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(\mathcal{L}_i\circ\mathcal{H})\ .$$

Finalmente, supongamos que R es noetheriano a izquierda y $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ es dirigido, y sea $L \in (\bigcup_{a\in A} \mathcal{L}_a) \circ \mathcal{H}$. Entonces existe $H \in \mathcal{H}$ de manera que para cada $r \in H$ existe $a_r \in A$ tal que $(L : r) \in \mathcal{L}_{a_r}$. Puesto que H admite una familia de generadores $\{r_1, \ldots, r_n\}$ y existe $b \in A$ tal que $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_{a_{r_i}} \subseteq \mathcal{L}_b$, se tiene, para cada $r = s_1r_1 + \cdots + s_nr_n \in H$, que

$$(L : r) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (L : s_ir_i) = \bigcap_{i=1}^{n} ((L : r_i) : s_i) \in \mathcal{L}_b \ .$$

Luego L pertenece a $\mathcal{L}_b \circ \mathcal{H} \subseteq \bigcup_{a\in A}(\mathcal{L}_a \circ \mathcal{H})$, de donde se obtiene la inclusión no trivial en la igualdad $\bigcup_{a\in A}(\mathcal{L}_a \circ \mathcal{H}) = (\bigcup_{a\in A} \mathcal{L}_a) \circ \mathcal{H}$. □

(3.1.19) Como se ha comentado en (1.2.9), un filtro uniforme $\mathcal{L}$ se dice que es un filtro de Gabriel si $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$, o equivalentemente, si $\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}$.

La intersección de una familia de filtros de Gabriel es de nuevo un filtro de Gabriel, y por tanto el conjunto de filtros de Gabriel en R parcialmente ordenado por la inclusión es un retículo completo, que se denota $R - \mathbf{Gab}$.

La composición de dos filtros de Gabriel $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ no es, en general, un filtro de Gabriel (ver (1.3.4)). Si $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es un filtro de Gabriel, entonces $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ coincide con el supremo $\mathcal{L} \vee \mathcal{H}$ (tomado en el retículo de filtros de Gabriel). En caso contrario, $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ está contenido estrictamente en dicho supremo, mientras que el supremo de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ en $R - \mathbf{filt}$ está contenido en $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$. Se puede concluir que el supremo en $R - \mathbf{Gab}$ no coincide con el supremo en $R - \mathbf{filt}$, y por lo tanto $R - \mathbf{Gab}$ no es un subretículo de $R - \mathbf{filt}$.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de (3.1.2)

(3.1.20) Corolario. *Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, L un elemento de $\mathcal{L}$ y $\{L_r\}_{r\in L}$ una familia de elementos de $\mathcal{L}$, entonces el ideal a izquierda*

$$\sum_{r\in L} L_r r$$

también pertenece a $\mathcal{L}$.

(3.1.21) Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme. Llamamos *filtro de Gabriel generado por* $\mathcal{L}$, y denotamos por $\widetilde{\mathcal{L}}$, al menor filtro de Gabriel que contiene a $\mathcal{L}$, o equivalentemente, a la intersección de todos los filtros de Gabriel que contienen a $\mathcal{L}$.

Si el anillo R es noetheriano, entonces el lema (3.1.18) proporciona una descripción más directa de $\widetilde{\mathcal{L}}$.

(3.1.22) Proposición. *Si el anillo R es noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces*

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n \ ,$$

donde, para cada n natural, $\mathcal{L}^n$ denota a la composición de n veces $\mathcal{L}$.

Demostración. Dado que $\{\mathcal{L}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es dirigido, la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n$ es un filtro (uniforme), pues si L y L' son elementos de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n$, entonces existen números naturales, n y n', que se pueden suponer $n \geq n'$, tales que $L \in \mathcal{L}^n$ resp. $L' \in \mathcal{L}^{n'} \subseteq \mathcal{L}^n$, luego $L \cap L' \in \mathcal{L}^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n$.
Puesto que R es noetheriano a izquierda, se pueden aplicar (1) y (4) del lema (3.1.18) y se tiene que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n \circ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n \mathcal{L}^m = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^p \ ,$$

esto es, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n$ es un filtro de Gabriel.
Si $\mathcal{H}$ es un filtro de Gabriel en R tal que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$, entonces

$$\mathcal{L}^n \subseteq \mathcal{H}^n = \mathcal{H}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde se concluye que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n \subseteq \mathcal{H}$ y que, en efecto, la unión de la familia $\{\mathcal{L}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $\widetilde{\mathcal{L}}$. $\square$

(3.1.23) Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, es de sobra conocido ([1, 11, 19, 22, 40, 46, et al.]) que el funtor núcleo $\sigma_{\mathcal{L}}$ es un radical (ver (1.2.5)), esto es, que $\sigma_{\mathcal{L}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) = 0$ para todo R–módulo a izquierda M. Recíprocamente, si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme y $\sigma_{\mathcal{L}}$ es un radical entonces $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel.
De la misma manera, si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces la clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es la clase de torsión de una teoría de torsión hereditaria si, y sólo si, $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel. Además, en ese caso, $\mathcal{L}$ queda perfectamente determinado por la clase de R–módulos $\mathcal{L}$–libres de torsión $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.
La clase de libres de torsión asociada a un filtro uniforme coincide con la del filtro de Gabriel que genera:

(3.1.24) Proposición. *Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_{\widetilde{\mathcal{L}}} \ .$$

Demostración. La clase $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ es la clase de R–módulos libres de torsión de una teoría de torsión hereditaria en $R-\mathbf{mod}$ (ver (3.1.14)). Sea $\mathcal{H}$ el filtro de Gabriel determinado (unívocamente) por dicha teoría de torsión hereditaria. Entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Si $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, entonces para todo $N \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ se tiene que $Hom_R(M, N) = 0$, pues si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo y $m \in M$, entonces

$$\mathrm{Ann}^l_R(f(m)) \supseteq \mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L} ,$$

y por lo tanto $f(m) = 0$ al ser $\sigma_{\mathcal{L}} N = 0$. Luego $M \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ y, dada la arbitrariedad de M, esto implica que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$.

Además, si $\mathcal{H}'$ es un filtro de Gabriel que contiene a $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{H}'} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ pues si $M \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}'}$ y $m \in \sigma_{\mathcal{L}} M$, entonces

$$\mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}' ,$$

de donde se tiene que $m = 0$. Por lo tanto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$, es decir, $\mathcal{H}$ es en efecto el menor filtro de Gabriel que contiene a $\mathcal{L}$. □

(3.1.25) Si L es un ideal a izquierda de R, entonces el filtro uniforme generado por L, que se denota por $\mathcal{L}_L$, es, en virtud del lema (3.1.9), el conjunto de ideales a izquierda

$$\{H \leq_l R \; ; \; \exists F \subseteq R, \; F \text{ finito}, \; (L : F) \subseteq H\} .$$

Si I es un ideal bilátero de R, entonces el ideal $(I : F)$ contiene a I para todo $F \subseteq R$, y por lo tanto

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq_l R \; ; \; I \subseteq L\} .$$

Esto implica que el filtro $\mathcal{L}_I$ es *jansiano* ([21]), esto es, es cerrado al tomar intersecciones arbitrarias, pues en efecto, si $\{L_a\}_{a \in A}$ es una familia de elementos de $\mathcal{L}_I$, entonces $I \subseteq L_a$ para cada $a \in A$, y por lo tanto $I \subseteq \bigcap_{a \in A} L_a$.

Realmente, los únicos filtros uniformes jansianos en un anillo R son los de la forma $\mathcal{L}_I$ donde I es un ideal bilátero, puesto que si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme jansiano, entonces el ideal a izquierda $H = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L \in \mathcal{L}$ genera a $\mathcal{L}$. Además H es bilátero, ya que $(H : r) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}_H$, y de ahí $Hr \subseteq H$, para todo $r \in R$.

Si I y J son ideales biláteros de R, entonces la composición $\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J$ es el conjunto de ideales a izquierda L de R tales que

$$J \subseteq \{r \in R \; ; \; I \subseteq (L : r)\} ,$$

y de ahí se deduce que $Ir \subseteq L$ para cada $r \in J$, esto es, $IJ \subseteq L$. Recíprocamente, dado que $IJ \in \mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J$ (ver lema (3.1.2)) entonces $\mathcal{L}_{IJ} \subseteq \mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J$, lo que prueba que

$$\mathcal{L}_{IJ} = \mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J \ ,$$

y por lo tanto que la composición de filtros uniformes jansianos es también un filtro uniforme jansiano.

(3.1.26) Nota. La composición de filtros jansianos permite dar un segundo ejemplo de que en general la composición de filtros uniformes (jansianos) no es una operación conmutativa. Para ello basta tomar dos ideales biláteros I y J de un anillo R de forma que $IJ \neq JI$, de donde se tiene que

$$\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J = \mathcal{L}_{IJ} \neq \mathcal{L}_{JI} = \mathcal{L}_J \circ \mathcal{L}_I \ .$$

En efecto, sea k un cuerpo y R el anillo formado por las matrices cuadradas de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \ ,$$

con $a, b, c \in k$. Consideremos los ideales biláteros

$$I = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & k \end{pmatrix} \ .$$

Por un lado, IJ es el ideal nulo de R, y sin embargo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in JI \ ,$$

luego $JI \neq IJ$.

(3.1.27) Sea $\{I_a\}_{a \in A}$ una familia de ideales biláteros de R. Un ideal a izquierda L pertenece a la intersección $\bigcap_{a \in A} \mathcal{L}_{I_a}$ si, y sólo si, contiene a I_a para cada $a \in A$, esto es, si, y sólo si, contiene a la suma $\sum_{a \in A} I_a$. Luego

$$\bigcap_{a \in A} \mathcal{L}_{I_a} = \mathcal{L}_{\sum_{a \in A} I_a} \ .$$

Por otra parte, si A es finito, entonces un ideal a izquierda L pertenece a $\bigvee_{a \in A} \mathcal{L}_{I_a}$ si, y sólo si, $\bigcap_{a \in A} I_a \subseteq L$ (lema (3.1.9)), y esto implica que

$$\bigvee_{a \in A} \mathcal{L}_{I_a} = \mathcal{L}_{\bigcap_{a \in A} I_a} \ .$$

Por lo tanto el conjunto de los filtros uniformes jansianos en R ordenado parcialmente por la inclusión, que denotaremos $Id(R)-\mathbf{filt}$, es un subretículo de $R-\mathbf{filt}$.

Si el conjunto A no es finito, entonces todavía se tiene la inclusión

$$\bigvee_{a\in A}\mathcal{L}_{I_a}\subseteq\mathcal{L}_{\bigcap_{a\in A}I_a}\ .$$

Sin embargo, la otra inclusión no se verifica en general, como muestra el siguiente ejemplo.

(3.1.28) Ejemplo. Consideremos la familia de ideales (biláteros) $\{(n)\}_{n\neq 0}$ de $R=\mathbb{Z}$. Dado que $\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad, no existe ninguna familia finita F de números naturales no nulos de tal manera que el ideal generado por el mínimo común múltiplo m de F sea el ideal nulo. Luego $0=\bigcap_{n\neq 0}(n)$ es un ideal que pertenece a $\mathcal{L}_{\bigcap_{n\neq 0}(n)}$ y sin embargo no pertenece al supremo de la familia $\{\mathcal{L}_{(n)}\}_{n\neq 0}$.

(3.1.29) Se denota por $\mathcal{L}^*$ al conjunto de todos los ideales biláteros del filtro uniforme $\mathcal{L}$. Se dice que $\mathcal{L}$ es *simétrico* ([35]) si cada elemento L de $\mathcal{L}$ contiene a un elemento de $\mathcal{L}^*$, o equivalentemente, si, para cada $L\in\mathcal{L}$, el mayor ideal bilátero contenido en L, que denotamos L^* y coincide con $(L:R)$, pertenece a $\mathcal{L}$.

Dado que todo filtro uniforme jansiano es de la forma $\mathcal{L}_I$, donde I es un ideal bilátero de R, el conjunto de filtros uniformes jansianos está contenido en el de filtros uniformes simétricos en R. Además, todo filtro uniforme simétrico $\mathcal{L}$ es el supremo en $R-\mathbf{filt}$ de una familia de filtros uniformes jansianos, pues es la unión de

$$\{\mathcal{L}_I\}_{I\in\mathcal{L}^*}\ .$$

Realmente esta propiedad caracteriza a los filtros uniformes simétricos, ya que si $\{\mathcal{L}_{I_a}\}_{a\in A}$ es una familia de filtros uniformes jansianos y el ideal a izquierda L es un elemento de $\bigvee_{a\in A}\mathcal{L}_{I_a}$, entonces para cierta familia finita de índices $a_1,\ldots,a_n$, el ideal bilátero $I=\bigcap_{i=1}^n I_{a_i}\in\bigvee_{a\in A}\mathcal{L}_{I_a}$ está contenido en L.

El siguiente lema muestra que el conjunto de filtros uniformes simétricos parcialmente ordenado por la inclusión, que denotamos por $R-\mathbf{filt}^{(2)}$, es un subretículo de $R-\mathbf{filt}$.

(3.1.30) Lema. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ filtros uniformes simétricos y $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ una familia de filtros uniformes simétricos en R. Entonces:*

(3.1.30.1) *la intersección $\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a$ y el supremo (considerado en $R-\mathbf{filt}$) $\bigvee_{a\in A}\mathcal{L}_a$ son filtros uniformes simétricos;*

(3.1.30.2) *si R es noetheriano a izquierda, entonces $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es un filtro uniforme simétrico.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{L}_a$ es simétrico, si L es un elemento de $\bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a$ entonces L^* pertenece a $\mathcal{L}_a$ para cada $a \in A$, luego L^* pertenece a $\bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a$, que es por tanto un filtro uniforme simétrico.
Si $L \in \bigvee_{a\in A} \mathcal{L}_a$, entonces, en virtud del lema (3.1.9), para ciertos índices $a_1, \ldots, a_n \in A$ existen ideales (biláteros) $I_{a_i} \in \mathcal{L}_{a_i}$ tales que $I = \bigcap_{i=1}^n I_{a_i} \subseteq L$. Como la intersección de ideales biláteros es un ideal bilátero e $I \in \bigvee_{a\in A} \mathcal{L}_a$, se puede concluir que $\bigvee_{a\in A} \mathcal{L}_a$ es un filtro uniforme simétrico.
Sea L un elemento de $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$. Dado que $\mathcal{H}$ es simétrico, existe un ideal bilátero H perteneciente a $\mathcal{H}$ tal que $(L : x) \in \mathcal{L}$ para cada $x \in H$. Sea x un elemento de H. Dado que H es bilátero, $xr \in H$ para cada $r \in R$, y por ser $\mathcal{L}$ simétrico,

$$(L : xr)^* = ((L : xr) : R) = (L : Rxr) \in \mathcal{L} \ .$$

Bajo la hipótesis de que R es noetheriano a izquierda, existen $r_1, \ldots, r_n$ pertenecientes a R tales que $\{xr_1, \ldots, xr_n\}$ es un sistema generador de RxR como ideal a izquierda. Luego

$$(L^* : x) = ((L : R) : x) \supseteq ((L : R) : Rx) = (L : RxR) = \bigcap_{i=1}^{n} (L : Rxr_i) \in \mathcal{L} \ ,$$

y puesto que $x \in H$ es arbitrario, $L^* \in \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$. □

(3.1.31) Corolario. *Si R es noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme simétrico, entonces $\widetilde{\mathcal{L}}$ es un filtro de Gabriel simétrico.*

Demostración. Dado que R es noetheriano y $\mathcal{L}$ es simétrico, el filtro uniforme

$$\mathcal{L}^n = \underbrace{\mathcal{L} \circ \cdots \circ \mathcal{L}}_{n}$$

es simétrico para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que cuando es un filtro uniforme, la unión de filtros uniformes coincide con el supremo en $R-$**filt**, el lema anterior y la proposicion (3.1.22) garantizan que

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n$$

es un filtro de Gabriel simétrico. □

(3.1.32) A cada ideal a izquierda primo P de R se le puede asociar un filtro uniforme, que se denota $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ y está formado por todos los ideales a izquierda L de R tales que existe un ideal bilátero $I \subseteq L$ que no está contenido en P. En efecto, $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es un filtro, pues si L y L' son elementos de $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ y H es un ideal a izquierda de R que contiene a $L \cap L'$, entonces existen ideales biláteros $I \subseteq L$ resp. $I' \subseteq L'$ tales que ni I ni I' están contenidos en P. Dado que P es primo, entonces el producto II' tampoco está contenido en P. Se tiene entonces que $I \cap I' \supseteq II'$ es un ideal bilátero que no está contenido en P e

$$I \cap I' \subseteq L \cap L' \subseteq H \ ,$$

luego $H \in \mathcal{L}_{R\backslash P}$. Por otra parte, si $L \in \mathcal{L}_{R\backslash P}$ entonces existe un ideal bilátero I que no está contenido en P tal que $I \subseteq L$, y para cada $r \in R$,

$$I \subseteq (I : r) \subseteq (L : r) \ ,$$

luego $(L : r)$ también pertenece a $\mathcal{L}_{R\backslash P}$.
El filtro uniforme $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es simétrico, pues para cada $L \in \mathcal{L}_{R\backslash P}$, existe un ideal bilátero $I \nsubseteq P$ contenido en L y por tanto I también pertenece a $\mathcal{L}_{R\backslash P}$. De hecho, $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es el mayor filtro uniforme simétrico que no tiene a P como elemento, ya que si $\mathcal{H}$ es un filtro simétrico y $P \notin \mathcal{H}$, entonces $L^* \nsubseteq P$ para cada $L \in \mathcal{H}$ (pues en caso contrario P pertenecería a $\mathcal{H}$), luego L pertenece a $\mathcal{L}_{R\backslash P}$.
Como consecuencia del siguiente resultado, si R es noetheriano a izquierda, entonces $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es de Gabriel.

(3.1.33) Lema. *Sea R noetheriano a izquierda. Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros uniformes en R y $\mathcal{L}$ es simétrico, entonces*

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{H} = \{K \leq_l R \ ; \ \exists L \in \mathcal{L}, \exists H \in \mathcal{H} \ , \ LH \subseteq K\} \ .$$

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$. Entonces existe $H \in \mathcal{H}$ de manera que $(K : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H$. Sea

$$L = \bigcap_{i=1}^{n} (K : r_i)^* \in \mathcal{L} \ ,$$

donde $\{r_1, \ldots, r_n\}$ es un sistema generador de H. Para cada elemento $r \in H$ existen $s_1, \ldots, s_n \in R$ tales que $r = s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n$, y por tanto

$$Lr \subseteq \sum_{i=1}^{n} L s_i r_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} (K : r_i)^* s_i r_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} (K : r_i) r_i \subseteq K \ .$$

Por el lema (3.1.2), el producto de elementos de $\mathcal{L}$ por elementos de $\mathcal{H}$ pertenece a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, de donde se sigue la otra inclusión. $\square$

(3.1.34) Corolario. ([11]) *Si R es un anillo noetheriano a izquierda y P es un ideal a izquierda primo, entonces $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es el mayor filtro de Gabriel simétrico que no contiene a P.*

Demostración. En virtud del lema anterior, si H es un elemento de $\mathcal{L}_{R\backslash P} \circ \mathcal{L}_{R\backslash P}$ entonces existen L y L' en $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ tales que $LL' \subseteq H$. Sean I, resp. I', ideales biláteros contenidos en L, resp. L', pero no en P. Entonces el producto II' es también un ideal bilátero contenido en $LL' \subseteq H$ pero no en P, dado que P es primo. Luego H pertenece a $\mathcal{L}_{R\backslash P}$, y como H ha sido tomado arbitrariamente, esto implica que

$$\mathcal{L}_{R\backslash P} \circ \mathcal{L}_{R\backslash P} \subseteq \mathcal{L}_{R\backslash P} \ ,$$

esto es, $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es un filtro de Gabriel. □

(3.1.35) Puesto que el filtro uniforme $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es simétrico y $\mathcal{L}^*_{R\backslash P}$ es la familia de ideales biláteros $\{I \leq_{l,r} R \ ; \ I \nsubseteq P\}$, el filtro $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ es el supremo de la familia (ver (3.1.29))

$$\{\mathcal{L}_I \ ; \ I \leq_{l,r} R, \ I \nsubseteq P\} \ .$$

Por otra parte, si P es un ideal a izquierda primo, entonces P^* también es primo. Además, como P^* es el mayor ideal bilátero contenido en P, un ideal bilátero I de R está contenido en P si, y sólo si, I está contenido en P^*, de donde se concluye que $\mathcal{L}_{R\backslash P} = \mathcal{L}_{R\backslash P^*}$. Se tiene entonces que en la definición de $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ se puede asumir sin pérdida de generalidad que el ideal a izquierda primo P es bilátero.

Si R es noetheriano a izquierda entonces todo filtro de Gabriel simétrico $\mathcal{L}$ se puede expresar como la intersección de la familia de filtros de la forma $\mathcal{L}_{R\backslash P}$ donde los P son los ideales a izquierda primos (o equivalentemente los ideales primos biláteros) que no pertenecen a $\mathcal{L}$ (ver [11, I.4.10]).

3.2. Inducción de filtros uniformes

A la hora de estudiar la funtorialidad en la categoría de anillos y (cierto tipo de) homomorfismos de las construcciones geométricas que se presentan en los dos últimos capítulos, es conveniente tener en cuenta las propiedades de la inducción de filtros uniformes por medio de homomorfismos de anillos. En esta sección se recogen algunas de estas propiedades y se hace un tratamiento de la *compatibilidad* de filtros y homomorfismos similar al que se sigue en [11].

(3.2.1) A lo largo de esta sección R y S serán anillos y $\varphi : R \longrightarrow S$ será un homomorfismo de anillos. Si N es un S–módulo a izquierda, denotaremos por

${}_R N$ al R–módulo obtenido a partir de N al restringir los escalares mediante el homomorfismo φ.
Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en R. Entonces

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \{M \in R - \mathbf{mod}\ ;\ \forall m \in M,\ \mathrm{Ann}^l_R(m) \in \mathcal{L}\}$$

es una clase de pretorsión hereditaria (ver (3.1.12)). Denotemos por $\mathcal{T}'$ a la familia de S–módulos a izquierda

$$\{N \in S - \mathbf{mod}\ ;\ {}_R N \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}\}\ .$$

Si N' es un submódulo de $N \in \mathcal{T}'$, entonces ${}_R N'$ es un submódulo de ${}_R N$ y ${}_R(N/N') = {}_R N/{}_R N'$. Puesto que $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es cerrada para submódulos e imágenes epimórficas, tanto N' como N/N' pertenecen a $\mathcal{T}'$. Por otra parte, si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{T}'$, entonces

$${}_R(\bigoplus_{i\in I} N_i) = \bigoplus_{i\in I} {}_R N_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}\ ,$$

lo que implica que $\bigoplus_{i\in I} N_i$ pertenece a $\mathcal{T}'$. Esto prueba que $\mathcal{T}'$ es una clase de pretorsión hereditaria en $S - \mathbf{mod}$ y por lo tanto existe un filtro uniforme, que se llama filtro uniforme *inducido* por $\mathcal{L}$ a través de φ y se denota por $\overline{\mathcal{L}}$, de tal manera que $\mathcal{T}'$ es el conjunto de S–módulos a izquierda de $\overline{\mathcal{L}}$–torsión.
Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R y N es un S–módulo a izquierda, entonces $\sigma_{\overline{\mathcal{L}}} N$ es de $\mathcal{L}$–torsión como R–módulo a izquierda, luego

$${}_R(\sigma_{\overline{\mathcal{L}}} N) \subseteq \sigma_{\mathcal{L}}({}_R N)\ .$$

Por lo tanto, si N es un S–módulo a izquierda y ${}_R N$ es $\mathcal{L}$–libre de torsión, entonces N es $\overline{\mathcal{L}}$–libre de torsión, esto es,

$$\{N \in S - \mathbf{mod}\ ;\ {}_R N \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\} \subseteq \mathcal{F}_{\overline{\mathcal{L}}}\ .$$

Si $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ es una familia de filtros uniformes en R entonces un S–módulo a izquierda N es de $\overline{\bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a}$–torsión si, y sólo si, ${}_R N$ es de $\mathcal{L}_a$–torsión para cada $a \in A$, esto es, si, y sólo si, N es de $\bigcap_{a\in A} \overline{\mathcal{L}_a}$–torsión. Luego

$$\overline{\bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a} = \bigcap_{a\in A} \overline{\mathcal{L}_a}\ .$$

(3.2.2) Lema. *Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros uniformes en R, entonces*

$$\overline{\mathcal{L}} \circ \overline{\mathcal{H}} \subseteq \overline{\mathcal{L} \circ \mathcal{H}}\ .$$

Demostración. Si N pertenece a $\mathcal{T}_{\overline{\mathcal{L}}\circ\overline{\mathcal{H}}}$, por el lema (3.1.13) existe una sucesión exacta de S–módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

con N' de $\overline{\mathcal{L}}$–torsión y N'' de $\overline{\mathcal{H}}$–torsión. La imagen de esta sucesión por el funtor restricción de escalares es una sucesión exacta de R–módulos a izquierda, donde ${}_RN'$ es de $\mathcal{L}$–torsión y ${}_RN''$ es de $\mathcal{H}$–torsión, luego ${}_RN$ es de $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$–torsión y por lo tanto N pertenece a $\mathcal{T}_{\overline{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}}}$. Luego, en efecto, $\overline{\mathcal{L}}\circ\overline{\mathcal{H}}$ está contenido en $\overline{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}}$. □

(3.2.3) Corolario. *Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel en R, entonces $\overline{\mathcal{L}}$ es un filtro de Gabriel en S.*

Demostración. Dado que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, se tiene que $\mathcal{L}\circ\mathcal{L} = \mathcal{L}$, y por el lema anterior,

$$\overline{\mathcal{L}}\circ\overline{\mathcal{L}} \subseteq \overline{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}\ .$$

□

(3.2.4) Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en R. Si L es un elemento de $\overline{\mathcal{L}}$, entonces S/L es de $\overline{\mathcal{L}}$–torsión, o equivalentemente, ${}_R(S/L)$ es de $\mathcal{L}$–torsión. Dado que el homomorfismo de R–módulos

$$R/\varphi^{-1}(L) \longrightarrow {}_R(S/L)\ ;\ \ \overline{r} \longmapsto \overline{\varphi(r)}$$

es un monomorfismo y que $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ es cerrada al tomar submódulos, el ideal a izquierda $\varphi^{-1}(L)$ pertenece $\mathcal{L}$, luego $\overline{\mathcal{L}} \subseteq \{L \leq_l S\ ;\ \varphi^{-1}(L) \in \mathcal{L}\}$.
Si $\overline{\mathcal{L}}$ se puede describir de esa forma, esto es, si

$$\overline{\mathcal{L}} = \{L \leq_l S\ ;\ \varphi^{-1}(L) \in \mathcal{L}\}\ ,$$

entonces se dice que $\mathcal{L}$ *es compatible con* φ.
Esta condición se verifica para todo filtro uniforme $\mathcal{L}$ si, por ejemplo, φ es un epimorfismo, pues en efecto, para cada ideal a izquierda L de S, el homomorfismo

$$R/\varphi^{-1}(L) \longrightarrow {}_R(S/L)\ ;\ \ \overline{r} \longmapsto \overline{\varphi(r)}$$

es un isomorfismo de R–módulos a izquierda, y de ahí se concluye que L pertenece a $\overline{\mathcal{L}}$ si, y sólo si, $\varphi^{-1}(L)$ pertenece a $\mathcal{L}$.

(3.2.5) Lema. *Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos y $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en R. Si $\mathcal{L}$ es compatible con φ, entonces*

(3.2.5.1) ${}_R(\sigma_{\overline{\mathcal{L}}}N) = \sigma_{\mathcal{L}}({}_RN)$ *para todo S–módulo a izquierda N, y*

(3.2.5.2) $\mathcal{F}_{\overline{\mathcal{L}}} = \{N \in S-\mathbf{mod}\ ;\ {}_RN \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$.

Demostración. Sea N un S–módulo a izquierda. Si n es un elemento de la $\mathcal{L}$–torsión de ${}_RN$, entonces existe un ideal a izquierda L de R en $\mathcal{L}$ tal que $Ln = 0$. El ideal a izquierda $S\varphi(L)$ de S pertenece a $\overline{\mathcal{L}}$, pues su imagen inversa por φ contiene a L, y por hipótesis,

$$\overline{\mathcal{L}} = \{H \leq_l S \ ; \ \varphi^{-1}(H) \in \mathcal{L}\} \ .$$

Además, dado que $S\varphi(L)n = 0$, el ideal a izquierda $S\varphi(L)$ está contenido en $\mathrm{Ann}^l_S(n)$, que por lo tanto también pertenece a $\overline{\mathcal{L}}$ y de ahí $n \in \sigma_{\overline{\mathcal{L}}}N$. Puesto que ${}_R(\sigma_{\overline{\mathcal{L}}}N)$ siempre está contenido en $\sigma_{\mathcal{L}}({}_RN)$, esto prueba la igualdad en (1).
Luego ${}_R(\sigma_{\overline{\mathcal{L}}}N)$ coincide con $\sigma_{\overline{\mathcal{L}}}({}_RN)$ para todo S–módulo a izquierda N, así que N es $\overline{\mathcal{L}}$–libre de torsión si, y sólo si, $\sigma_{\mathcal{L}}({}_RN) = 0$, esto es, si, y sólo si, ${}_RN$ es un R–módulo a izquierda $\mathcal{L}$–libre de torsión. □

Una *base* de un filtro $\mathcal{L}$ en R es un conjunto de ideales a izquierda $\mathcal{L}'$ de manera que cada L perteneciente a $\mathcal{L}$ contiene a un elemento de $\mathcal{L}'$. Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme simétrico, entonces $\mathcal{L}^*$ es una base de $\mathcal{L}$ y si $\mathcal{L}$ es jansiano, entonces el conjunto unitario $\{\bigcap_{L\in\mathcal{L}} L\}$ es la única base de $\mathcal{L}$.
Si M es un R–bimódulo, se llama *normalizador de* M y se denota por $N_R(M)$ al subconjunto formado por aquellos elementos m de M tales que $mR = Rm$.
Si $\varphi : R \longrightarrow S$ es un homomorfismo de anillos, entonces S es por restricción de escalares un R–bimódulo. Para cada ideal a izquierda L de R y cada elemento $s \in N_R(S)$ denotaremos por $L^\#_s$ al conjunto de los elementos r de R tales que $rs \in sL$. Realmente $L^\#_s$ es un ideal a izquierda de R, pues si r y r' son elementos de $L^\#_s$, entonces $(r + r')s \in sL$ y

$$Rrs \subseteq RsL = sRL = sL \ .$$

(3.2.6) Lema. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ dos filtros uniformes en R y $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos, de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(3.2.6.1) *$\mathcal{H}$ es compatible con φ;*

(3.2.6.2) *S está generado como R–módulo a izquierda por un subconjunto N de $N_R(S)$;*

(3.2.6.3) *existe una base $\mathcal{L}'$ del filtro uniforme $\mathcal{L}$ tal que $L^\#_s$ pertenece a $\mathcal{L}$ para cada $L \in \mathcal{L}'$ y cada $s \in N$.*

Entonces $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es compatible con φ.

Demostración. Como hemos probado en (3.2.4), $\varphi^{-1}(L)$ pertenece a $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ para todo elemento L de $\overline{\mathcal{L} \circ \mathcal{H}}$.

Recíprocamente, si L es un ideal a izquierda de S de manera que $\varphi^{-1}(L)$ pertenece a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, entonces existe un ideal a izquierda $H \in \mathcal{H}$ conteniendo a L tal que $(\varphi^{-1}(L) : r) \in \mathcal{L}$ para todo $r \in H$, esto es, $H/\varphi^{-1}(L)$ es un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión. El ideal a izquierda $S\varphi(H)$ pertenece a $\overline{\mathcal{H}}$, dado que $\mathcal{H}$ es compatible con φ y la imagen inversa por φ de $S\varphi(H)$ contiene a H, luego $S/S\varphi(H)$ es un S–módulo a izquierda de $\overline{\mathcal{H}}$–torsión.

Por otra parte, como $\mathcal{L}'$ es una base de $\mathcal{L}$ y $(\varphi^{-1}(L) : r) \in \mathcal{L}$, para cada $r \in H$ existe $K \in \mathcal{L}'$ tal que $K\varphi(r) \subseteq L$. Aplicando la hipótesis (3), para cada $s \in S$ el ideal a izquierda $K_s^{\#}$ pertenece a $\mathcal{L}$ y de la manera en que está definido,

$$K_s^{\#} s\varphi(r) \subseteq sK\varphi(r) \subseteq sL \subseteq L \ .$$

Luego para cada $r \in H$ y cada $s \in N$, el elemento $\overline{s\varphi(r)}$ pertenece a la $\mathcal{L}$–torsión de $_R(S\varphi(H)/L)$, y dado que $S\varphi(H)$ está generado como R–módulo por $N\varphi(H)$, esto implica que $_R(S\varphi(H)/L)$ es de $\mathcal{L}$–torsión o, equivalentemente, que $S\varphi(H)/L$ es de $\overline{\mathcal{L}}$–torsión.

Puesto que la sucesión

$$0 \longrightarrow S\varphi(H)/L \longrightarrow S/L \longrightarrow S/S\varphi(H) \longrightarrow 0$$

es exacta, por el lema (3.1.13) S/L es de $\overline{\mathcal{L}} \circ \overline{\mathcal{H}}$–torsión, esto es, L pertenece a $\overline{\mathcal{L}} \circ \overline{\mathcal{H}}$. □

(3.2.7) Proposición. *Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en R y $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos de manera que S está generado como R–módulo a izquierda por un subconjunto N de $N_R(S)$ y existe una base $\mathcal{L}'$ del filtro $\mathcal{L}$ tal que para todo $L \in \mathcal{L}'$ y todo $s \in N$ el ideal a izquierda $L_s^{\#}$ pertenece a $\mathcal{L}$. Entonces:*

(3.2.7.1) *$\mathcal{L}$ es compatible con φ;*

(3.2.7.2) *$_R(\sigma_{\overline{\mathcal{L}}}N) = \sigma_{\mathcal{L}}(_RN)$ para cada S–módulo a izquierda N;*

(3.2.7.3) *$\mathcal{F}_{\overline{\mathcal{L}}} = \{N \in S-\mathbf{mod}\ ;\ _RN \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$;*

(3.2.7.4) *si $M \in R-\mathbf{mod}$ es de $\mathcal{L}$–torsión, entonces $Hom_R(S,M)$ también es un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión;*

(3.2.7.5) *si $M \in R-\mathbf{mod}$ es $\mathcal{L}$–libre de torsión, entonces $S \otimes_R M$ también es un R–módulo a izquierda $\mathcal{L}$–libre de torsión.*

Demostración. El filtro uniforme $\mathcal{H} = \{R\}$ es compatible con φ, pues

$$S \in \overline{\mathcal{H}} \subseteq \{L \leq_l S\ ;\ 1 \in \varphi^{-1}(L)\} = \{S\} \ .$$

Por el lema anterior se puede concluir entonces que $\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \{R\}$ es compatible con φ. Las propiedades (2) y (3) son consecuencia de (1) y del lema (3.2.5).

Sea ahora M un R–módulo a izquierda $\mathcal{L}$–libre de torsión, y $f : S \longrightarrow M$ un R–homomorfismo de manera que $\mathrm{Ann}^l_R(f) \in \mathcal{L}$. Entonces existe $L \in \mathcal{L}'$ tal que $L \subseteq \mathrm{Ann}^l_R(f)$, y por lo tanto $f(Sr) = (rf)(S) = 0$ para cada $r \in L$. Dado que S está generado por N como R–módulo a izquierda, para cada $s \in S$ existen $s_1, \ldots, s_n \in N$ y $r_1, \ldots, r_n \in R$ tales que $s = \sum_{i=1}^n r_i s_i$, y por hipótesis $L^{\#}_{s_i}$ pertenece a $\mathcal{L}$ para $1 \leq i \leq n$. Luego el ideal a izquierda

$$L' = \bigcap_{i=1}^{n} (L^{\#}_{s_i} : r_i)$$

también pertenece a $\mathcal{L}$, y además verifica que

$$L' f(s) \subseteq f(\sum_{i=1}^{n} L' r_i s_i) \subseteq f(\sum_{i=1}^{n} L^{\#}_{s_i} s_i) \subseteq f(\sum_{i=1}^{n} s_i L) \subseteq f(SL) = 0 \ ,$$

de donde se concluye que $f(s) = 0$ pues M es $\mathcal{L}$–libre de torsión. Como s ha sido tomado arbitrariamente, esto prueba que $f = 0$, y por tanto que $\sigma_{\mathcal{L}}(Hom_R(S, M)) = 0$.
Si por el contrario M es un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión, entonces para cada $m \in M$ existe un elemento L de $\mathcal{L}'$ de tal manera que $L \subseteq \mathrm{Ann}^l_R(m)$. Dado un elemento s de N, por hipótesis $L^{\#}_s$ pertenece a $\mathcal{L}$, y por definición, para cada $r \in L^{\#}_s$ existe $r' \in L$ tal que,

$$rs \otimes m = sr' \otimes m = s \otimes r'm = 0 \ .$$

Dado que $S \otimes_R M$ está generado como R–módulo a izquierda por los elementos de la forma $s \otimes m$ con $s \in N$ y $m \in M$, esto implica que $S \otimes_R M$ es también de $\mathcal{L}$–torsión. $\square$

(3.2.8) Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ una extensión centralizante, esto es, un homomorfismo de anillos de tal manera que el R–bimódulo S está generado por su centralizador

$$C_R(S) = \{s \in S \ ; \ s\varphi(r) = \varphi(r)s \ , \forall r \in R\} \subseteq N_R(S)$$

como R–módulo a izquierda. Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme en R, entonces para cada elemento L de $\mathcal{L}$ y cada $s \in C_S(R)$,

$$L^{\#}_s = \{r \in R \ ; \ rs \in sL\} = L \in \mathcal{L} \ ,$$

y por el lema anterior esto implica que $\mathcal{L}$ es compatible con φ.
Más generalmente, sea $\varphi : R \longrightarrow S$ una extensión fuertemente normalizante (ver [31, 33]), esto es, un homomorfismo de anillos tal que

$$N^s_R(S) = \{s \in S \ ; \ s\varphi(I) = \varphi(I)s, \ \forall I \leq_{l,r} R\} \subseteq N_R(S)$$

es un sistema generador de S como R–módulo a izquierda. El homomorfismo φ y cualquier filtro uniforme simétrico $\mathcal{L}$ están en las hipótesis del lema anterior, pues $\mathcal{L}^*$ es una base de $\mathcal{L}$ y para cada $s \in N_R^s(S)$ y cada $I \in \mathcal{L}^*$,

$$I_s^{\#} = \{r \in R \; ; \; rs \in sI\} \supseteq I \in \mathcal{L} \; .$$

Luego todo filtro uniforme simétrico en R es compatible con φ.

Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son compatibles con φ, entonces se verifica la igualdad en (3.2.2), como muestra el siguiente resultado.

(3.2.9) Proposición. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ filtros uniformes compatibles con el homomorfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$. Entonces*

$$\overline{\mathcal{L}} \circ \overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{L} \circ \mathcal{H}} \; .$$

Demostración. Sea $L \in \overline{\mathcal{L} \circ \mathcal{H}}$. Para probar que L pertenece a $\overline{\mathcal{L}} \circ \overline{\mathcal{H}}$, basta probar que

$$H = \{s \in S \; ; \; (L : s) \in \overline{\mathcal{L}}\}$$

pertenece a $\overline{\mathcal{H}}$, o lo que es lo mismo, que $\varphi^{-1}(H)$ pertenece a $\mathcal{H}$ dado que $\mathcal{H}$ es compatible con φ. Para todo $r \in R$ se tiene que $\varphi^{-1}(L : \varphi(r)) = (\varphi^{-1}(L) : r)$, luego, puesto que $\mathcal{L}$ es compatible con φ,

$$\varphi^{-1}(H) = \{r \in R \; ; \; (L : \varphi(r)) \in \overline{\mathcal{L}}\}$$

$$= \{r \in R \; ; \; \varphi^{-1}(L : \varphi(r)) \in \mathcal{L}\} = \{r \in R \; ; \; (\varphi^{-1}(L) : r) \in \mathcal{L}\} \; .$$

Dado que $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ es compatible con φ, (lema (3.2.6)), $\varphi^{-1}(L)$ pertenece a $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, y por lo tanto $\varphi^{-1}(H) \in \mathcal{H}$. $\square$

Capítulo 4

Topologías de Grothendieck y haces de estructura

En este capítulo queremos presentar una generalización de la construcción descrita en 2.4., que además repara algunas de sus carencias, como la ausencia de propiedades geométricas o la consideración sólo de recubrimientos obtenidos a partir de la intersección con recubrimientos globales.

Como propiedades principales podemos destacar que, aunque el *haz de estructura* que construimos asociado al anillo R en general no es un haz de anillos, obtenemos de nuevo R como el anillo de secciones globales, y en caso de ser R un anillo conmutativo, nuestra construcción se reduce a la clásica. Veremos también que, además de la construcción para álgebras esquemáticas, nuestro *sitio no conmutativo* (resp. los haces definidos sobre él) generaliza a las topologías en $\mathbf{Spec}R$ con abiertos $\mathcal{K}(\sigma)$ donde σ es un radical estable (resp. los haces sobre $\mathbf{Spec}R$), y en particular a la construcción descrita en 2.3.

Recordemos (ver (1.3.5) y también [11, 34]) que dado un R–módulo a izquierda M y dos filtros de Gabriel $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathcal{L}\cap\mathcal{H}}M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}}M \oplus Q_{\mathcal{H}}M \rightrightarrows Q_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}M$$

es exacta si, y sólo si, los filtros de Gabriel $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son mutuamente compatibles respecto a M.

Por lo tanto, para poder definir un haz $\mathcal{O}_M$ en una topología de $\mathbf{Spec}R$ cuyos abiertos sean de la forma $\mathcal{K}(\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel perteneciente a cierta familia, es necesario (y suficiente) que todo par de filtros $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ de dicha familia sean mutuamente compatibles. La razón por la que la exactitud de esta sucesión está ligada al hecho de que el prehaz separado $\mathcal{O}_M$ (ver [11, 37, 46]) sea un haz es que, mediante la correspondencia que asigna el abierto $\mathcal{K}(\mathcal{L})$ a cada filtro de Gabriel $\mathcal{L}$, la unión de abiertos está asociada a la intersección de filtros de Gabriel y la intersección de abiertos al supremo de los radicales (cuando los filtros son *disyuntivos* según la terminología de [11]).

En nuestro intento de definir un *haz de estructura* $\mathcal{F}$ en ausencia de la propiedad de compatibilidad mutua, tendremos que romper la dependencia entre la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \bigoplus_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

(donde $\{U_i\}_{i\in I}$ es un *recubrimiento* de U) y el hecho de que los filtros que asociaremos a los *abiertos* U_i sean mutuamente compatibles dos a dos. Para ello, prescindiremos del espectro como un espacio de puntos y definiremos una *intersección no conmutativa* en su *topología* de manera que cuando R sea conmutativo se reduzca a la intersección de abiertos en la topología de Zariski, y que las propiedades del *haz* surjan como consecuencia de la exactitud de una sucesión apropiada.

4.1. Algunos resultados algebraicos

El resultado enunciado en (1.3.5) puede ser probado a partir del siguiente:

(4.1.1) Teorema. ([49]) *Sea M un R–módulo a izquierda y $K = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq n}$ un familia de filtros de Gabriel en R. Si $\mathcal{L} = \bigcap_{1\leq\alpha\leq n} \mathcal{L}_\alpha$, entonces el límite proyectivo del sistema*

$$Q_K M = \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] Q_{\mathcal{L}_\alpha} M \arrow[dr, "j^\alpha_{\alpha\beta}"] & \\ & Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M \\ Q_{\mathcal{L}_\beta} M \arrow[ur, "j^\beta_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd} \right\}_{1\leq\alpha,\beta\leq n} ,$$

donde $j^\alpha_{\alpha\beta} = Q_{\mathcal{L}_\alpha} j_{\mathcal{L}_\beta,M}$ y $j^\beta_{\alpha\beta} = j_{\mathcal{L}_\alpha, Q_{\mathcal{L}_\beta} M}$, coincide con $Q_\mathcal{L} M$.

Demostración. Consideremos primero $n = 2$. El límite de $Q_K M$ es el núcleo N del homomorfismo

$$(j^1_{12} - j^2_{12}, j^1_{21} - j^2_{21}) : Q_{\mathcal{L}_1} M \oplus Q_{\mathcal{L}_2} M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_1} Q_{\mathcal{L}_2} M \oplus Q_{\mathcal{L}_2} Q_{\mathcal{L}_1} M \ ,$$

donde $j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta}$ denota el homomorfismo de la suma $Q_{\mathcal{L}_1}M \oplus Q_{\mathcal{L}_2}M$ en $Q_{\mathcal{L}_\alpha}Q_{\mathcal{L}_\beta}M$ tal que $(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(q_1, q_2) = j^1_{\alpha\beta}(q_1) - j^2_{\alpha\beta}(q_2)$ para $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$. Veamos que $Q_{\mathcal{L}}M$ coincide con N. Puesto que $Q_{\mathcal{L}}M/j_{\mathcal{L}}(M)$ es de $\mathcal{L}$–torsión, también es de $\mathcal{L}_1$–torsión y de $\mathcal{L}_2$–torsión, y existe un par de R–homomorfismos j_1 y j_2 que hacen conmutativos a los diagramas

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\mathcal{L}}"] \arrow[d, "j_{\mathcal{L}_\gamma}"'] & Q_{\mathcal{L}}M \arrow[dl, "j_\gamma"] \\ Q_{\mathcal{L}_\gamma}M & \end{tikzcd}$$

para $\gamma = 1, 2$. Veamos que el producto de j_1 y j_2, que denotaremos por j, es un monomorfismo. Si $q \in Q_{\mathcal{L}}M$ es tal que $j(q) = 0$, entonces $j_1(q) = 0$ y $j_2(q) = 0$. Como $Q_{\mathcal{L}}M/j_{\mathcal{L}}(M)$ es de $\mathcal{L}$–torsión, existe un ideal a izquierda $L \in \mathcal{L}$ de tal manera que $Lq \subseteq j_{\mathcal{L}}(M)$, y por tanto para cada $r \in L$ existe $m_r \in M$ tal que $j_{\mathcal{L}}(m_r) = rq$. Para $r \in L$ arbitrario, tenemos

$$j_{\mathcal{L}_\gamma}(m_r) = j_\gamma(j_{\mathcal{L}}(m_r)) = j_\gamma(rq) = 0 \ ,$$

con lo que m_r pertenece a la $\mathcal{L}_\gamma$–torsión de M para $\gamma = 1, 2$, esto es, es de $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$–torsión. Luego $rq = j_{\mathcal{L}}(m_r) = 0$, y $Lq = 0$ dada la arbitrariedad de r, lo que implica $q = 0$ y de ahí la injectividad de j.

Por otra parte, $j(Q_{\mathcal{L}}M) \subseteq N$. En efecto si $q \in Q_{\mathcal{L}}M$, entonces existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $Lq \in j_{\mathcal{L}}(M)$, esto es, para cada $r \in L$ existe $m_r \in M$ tal que $j_{\mathcal{L}}(m_r) = rq$. Si tomamos $r \in L$ arbitrario, entonces $r(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(j(q)) = (j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(j(m_r)) = 0$ pues el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\mathcal{L}_2}"] \arrow[d, "j_{\mathcal{L}_1}"] & Q_{\mathcal{L}_2}M \arrow[d, "j^2_{\alpha\beta}"] \\ Q_{\mathcal{L}_1}M \arrow[r, "j^1_{\alpha\beta}"'] & Q_{\mathcal{L}_\alpha}Q_{\mathcal{L}_\beta}M \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por tanto $L(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(j(q)) = 0$, y dado que $Q_{\mathcal{L}_\alpha}Q_{\mathcal{L}_\beta}M$ es $\mathcal{L}_\alpha$–libre de torsión y en particular $\mathcal{L}$–libre de torsión, $(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(j(q)) = 0$ para $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$.

Puesto que $Q_{\mathcal{L}_\gamma}M$ es $\mathcal{L}$–libre de torsión para $\gamma = 1, 2$, y todo submódulo del producto de $\mathcal{L}$–libres de torsión es $\mathcal{L}$–libre de torsión, tenemos que N es $\mathcal{L}$–libre de torsión.

Por otra parte, N es $\mathcal{L}$–inyectivo, pues si $L \in \mathcal{L}$ y $f \in Hom_R(L, N)$, entonces $k \circ f \in Hom_R(L, Q_{\mathcal{L}_1}M \oplus Q_{\mathcal{L}_2}M)$, siendo $k : N \hookrightarrow Q_{\mathcal{L}_1}M \oplus Q_{\mathcal{L}_2}M$. Dado que el producto de $\mathcal{L}$–inyectivos es $\mathcal{L}$–inyectivo, existe un homomorfismo

$$h : R \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_1}M \oplus Q_{\mathcal{L}_2}M$$

que extiende a $k \circ f$. Para cada $r \in R$, $h(r) \in N$, y por lo tanto

$$r(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(h(1)) = (j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(h(r)) = 0 \ .$$

Por la arbitrariedad de $r \in L$, $(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(h(1))$ es un elemento de $\mathcal{L}$–torsión, y puesto que $Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M$ es $\mathcal{L}$–libre de torsión, $(j^1_{\alpha\beta} - j^2_{\alpha\beta})(h(1)) = 0$ para $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$, por lo que $h(1) \in N$, esto es, H se correstringe a un homomorfismo de R en N que extiende a f.

Para concluir que N es $Q_{\mathcal{L}} M$, esto es, que j es un isomorfismo, veamos que $N/(j \circ j_{\mathcal{L}}(M))$ es de $\mathcal{L}$–torsión. Si $(q_1, q_2) \in N \subseteq Q_{\mathcal{L}_1} M \oplus Q_{\mathcal{L}_2} M$, entonces $j^1_{12}(q_1) - j^2_{12}(q_2) = 0$ y $j^1_{21}(q_1) - j^2_{21}(q_2) = 0$. Sea $\alpha \in \{1, 2\}$ y $\beta = 3 - \alpha$. Puesto que $q_\alpha \in Q_{\mathcal{L}_\alpha} M$, existe $L \in \mathcal{L}_\alpha$ tal que $L q_\alpha \subseteq j_{\mathcal{L}_\alpha}(M)$. Si $r \in L$, entonces existe $m_r \in M$ tal que $j_{\mathcal{L}_\alpha}(m_r) = r q_\alpha$, y se tiene que

$$j^\beta_{\alpha\beta}(j_{\mathcal{L}_\beta}(m_r) - r q_\beta) = j^\beta_{\alpha\beta}(j_{\mathcal{L}_\beta}(m_r)) - r j^\beta_{\alpha\beta}(q_\beta) =$$

$$j^\beta_{\alpha\beta}(j_{\mathcal{L}_\beta}(m_r)) - r j^\alpha_{\alpha\beta}(q_\alpha) = j^\beta_{\alpha\beta}(j_{\mathcal{L}_\beta}(m_r)) - j^\alpha_{\alpha\beta}(j_{\mathcal{L}_\alpha}(m_r)) = 0 \ ,$$

puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\mathcal{L}_\alpha}"] \arrow[d, "j_{\mathcal{L}_\beta}"'] & Q_{\mathcal{L}_\alpha} M \arrow[d, "j^\alpha_{\alpha\beta}"] \\ Q_{\mathcal{L}_\beta} M \arrow[r, "j^\beta_{\alpha\beta}"'] & Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Como $\mathrm{Ker}(j^\beta_{\alpha\beta})$ es la $\mathcal{L}_\alpha$–torsión de $Q_{\mathcal{L}_\beta} M$, podemos tomar un ideal a izquierda $L_r \in \mathcal{L}_\alpha$ de tal manera que $L_r(j_{\mathcal{L}_\beta}(m_r) - r q_\beta) = 0$. Por lo tanto, dado que el ideal a izquierda $\sum_{r \in L} L_r r \in \mathcal{L}_\alpha$ (ver lema (3.1.2)) y para cada $r \in L$, $s \in L_r$ existe $m_r \in M$ tal que $j_{\mathcal{L}_\alpha}(s m_r) = s r q_\alpha$ y $j_{\mathcal{L}_\beta}(s m_r) = s r q_\beta$, tenemos que $N/j \circ j_{\mathcal{L}}(M)$ es $\mathcal{L}_\alpha$–torsión. Como α ha sido elegido arbitrario y $\mathcal{L}$ es el ínfimo de $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ tenemos que $N/j \circ j_{\mathcal{L}}(M)$ es $\mathcal{L}$–torsión, y por lo tanto $N = Q_{\mathcal{L}} M$, lo que prueba el teorema para el caso $n = 2$.

Si suponemos que el enunciado es cierto para aquellos sistemas proyectivos con $n = k - 1$ y consideramos el sistema

$$Q_K M = \{Q_{\mathcal{L}_\alpha} M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M \ , \ \ Q_{\mathcal{L}_\beta} M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M\}_{1 \le \alpha, \beta \le k}$$

entonces el límite de $Q_K M$ es el pullback del diagrama

$$\begin{tikzcd} & Q_{\mathcal{L}_n} M \arrow[d] \\ Q_{\mathcal{L}'} M = \varprojlim Q_{K'} M \arrow[r] & Q_{\mathcal{L}_n} Q_{\mathcal{L}'} M \oplus Q_{\mathcal{L}'} Q_{\mathcal{L}_n} M \end{tikzcd}$$

donde $Q_{K'}M = \{Q_{\mathcal{L}_\alpha}M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_\alpha}Q_{\mathcal{L}_\beta}M \ , \ \ Q_{\mathcal{L}_\beta}M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_\alpha}Q_{\mathcal{L}_\beta}M\}_{1\leq\alpha,\beta\leq k-1}$ y $\mathcal{L}' = \bigcap_{1\leq\gamma\leq k-1}\mathcal{L}_\gamma$. Aplicando el caso $n=2$ de nuevo, $\varprojlim Q_K M = Q_{\mathcal{L}}M$, donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}'\cap\mathcal{L}_n$. $\square$

(4.1.2) Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ dos filtros de Gabriel en R. Dado que

$$Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M/j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}(M) \cong \frac{Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M/j_{\mathcal{L}}(Q_{\mathcal{H}}M)}{j_{\mathcal{L}}(Q_{\mathcal{H}}M)/j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}(M)} \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}} \ ,$$

existe un (único) homomorfismo $j_{\mathcal{L},\mathcal{H}} : Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}"] \arrow[dr, "j_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}"'] & & Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \arrow[dl, "j_{\mathcal{L},\mathcal{H}}"] \\ & Q_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}M & \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son mutuamente compatibles respecto a M, entonces $j_{\mathcal{L},\mathcal{H}}$ es un monomorfismo.

En efecto, consideremos un elemento $q \in Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ del núcleo de $j_{\mathcal{L},\mathcal{H}}$. Dado que $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M/j_{\mathcal{L}}(Q_{\mathcal{H}}M)$ es de $\mathcal{L}$–torsión, existe un ideal a izquierda $L\in\mathcal{L}$ tal que $Lq \subseteq j_{\mathcal{L}}(Q_{\mathcal{H}}M)$, y como $Q_{\mathcal{H}}M/j_{\mathcal{H}}M$ es de $\mathcal{H}$–torsión, para cada $r\in L$ existe un ideal $H_r\in\mathcal{H}$ tal que $H_r rq \subseteq j_{\mathcal{H}}(M)$. Por tanto, para cada $r \in L$ y cada $s\in H_r$ existe $m_{r,s}\in M$ de manera que $j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}(m_{r,s}) = srq$. Por el lema (3.1.2),

$$K = \sum_{r\in L} H_r r \in \mathcal{H}\circ\mathcal{L} = \mathcal{L}\vee\mathcal{H} \ ,$$

y si $t = \sum_{i=1}^n s_i r_i \in K$, entonces la imagen del elemento $m_t = \sum_{i=1}^n m_{r_i,s_i}$ por $j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}$ es tq. Dado que q pertenece al núcleo de $j_{\mathcal{L},\mathcal{H}}$,

$$j_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}(m_t) = j_{\mathcal{L},\mathcal{H}}\circ j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}(m_t) = t j_{\mathcal{L},\mathcal{H}}(q) = 0 \ ,$$

y esto implica que existe un ideal $K'_t \in \mathcal{L}\vee\mathcal{H}$ de manera que $K'_t m_t = 0$. En virtud de (3.1.20), el ideal a izquierda $\sum_{t\in K} K'_t t$ pertenece a $\mathcal{L}\vee\mathcal{H}$ y por lo tanto q es de $\mathcal{L}\vee\mathcal{H}$–torsión, pues para todo $t\in K$,

$$K'_t tq = j_{\mathcal{L}}\circ j_{\mathcal{H}}(K'_t m_t) = 0 \ .$$

Por otra parte, $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ es $\mathcal{L}\vee\mathcal{H}$–libre de torsión, al ser $\mathcal{F}_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ y ser $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ cerrada para $Q_{\mathcal{L}}$ bajo la hipótesis de compatibilidad mutua, y de ahí se obtiene $q = 0$.

Luego si $\{\mathcal{L}_\gamma\}_{\gamma=1}^n$ es un conjunto de filtros de Gabriel mutuamente compatibles respecto a M dos a dos, entonces el homomorfismo

$$j_{\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_\beta} : Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M \longrightarrow Q_{\mathcal{L}_\alpha \vee \mathcal{L}_\beta} M$$

es un monomorfismo para $1 \leq \alpha, \beta \leq n$. Esta familia de monomorfismos define un monomorfismo en la suma

$$\bigoplus_{1\leq\alpha,\beta\leq n} Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M \xrightarrow{j} \bigoplus_{1\leq\alpha,\beta\leq n} Q_{\mathcal{L}_\alpha \vee \mathcal{L}_\beta} M \quad .$$

Por lo tanto, el homomorfismo de la derecha en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q_{\mathcal{L}} M \longrightarrow \bigoplus_{1\leq\gamma\leq n} Q_{\mathcal{L}_\gamma} M \rightrightarrows \bigoplus_{1\leq\alpha,\beta\leq n} Q_{\mathcal{L}_\alpha} Q_{\mathcal{L}_\beta} M$$

del teorema anterior, donde $\mathcal{L} = \bigcap_{\gamma=1}^n \mathcal{L}_\gamma$, se puede componer con j y se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q_{\mathcal{L}} M \longrightarrow \bigoplus_{1\leq\gamma\leq n} Q_{\mathcal{L}_\gamma} M \rightrightarrows \bigoplus_{1\leq\alpha,\beta\leq n} Q_{\mathcal{L}_\alpha \vee \mathcal{L}_\beta} M \quad .$$

(4.1.3) Sea $\mathcal{G}(R)$ el conjunto de todos los filtros de Gabriel de R y consideremos el monoide libre $< \mathcal{G}(R) >$ generado por $\mathcal{G}(R)$, que tiene por elemento neutro al filtro $\{R\}$.

Dado un elemento $\mathbf{L} = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n$ de $< \mathcal{G}(R) >$, denotaremos por $\varepsilon(\mathbf{L})$ al filtro uniforme $\mathcal{L}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{L}_n$, y por $\sigma_{\mathbf{L}}$ al funtor núcleo asociado a $\varepsilon(\mathbf{L})$. Diremos que un R–módulo a izquierda es de $\mathbf{L}$–torsión (respectivamente, $\mathbf{L}$–libre de torsión) si es de $\varepsilon(\mathbf{L})$–torsión (resp. $\varepsilon(\mathbf{L})$–libre de torsión). Denotaremos por $Q_{\mathbf{L}}$ a la composición de los funtores localización $Q_{\mathcal{L}_n} \circ \cdots \circ Q_{\mathcal{L}_1}$, y si M es un R–módulo a izquierda, entonces $j_{\mathbf{L},M}$ (o $j_{\mathbf{L}}$ cuando no exista ambigüedad) denotará la composición $j_{n,M} \circ \cdots \circ j_{1,M}$, donde $j_{i,M}$ (o también j_i) es el morfismo localización $j_{\mathcal{L}_1,M}$ si $i = 1$, y el morfismo localización

$$Q_{\mathcal{L}_{i-1}} \cdots Q_{\mathcal{L}_1} M \xrightarrow{j_{\mathcal{L}_i, Q_{\mathcal{L}_{i-1}} \cdots Q_{\mathcal{L}_1} M}} Q_{\mathcal{L}_i} Q_{\mathcal{L}_{i-1}} \cdots Q_{\mathcal{L}_1} M$$

si $2 \leq i \leq n$.

Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de R–módulos a izquierda, denotaremos por $f_{\mathbf{L}}$ a la imagen de f por el funtor $Q_{\mathbf{L}}$. Con esta notación, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\mathbf{L},M}"] \arrow[d, "f"'] & Q_{\mathbf{L}} M \arrow[d, "f_{\mathbf{L}}"] \\ N \arrow[r, "j_{\mathbf{L},N}"'] & Q_{\mathbf{L}} N \end{tikzcd}$$

es conmutativo, aunque en general no podemos garantizar que $f_{\mathbf{L}}$ sea el único homomorfismo que encaja en este cuadrado.

(4.1.4) En esta sección se pretende generalizar el resultado (4.1.1) a sistemas de la forma

$$\{Q_{\mathbf{L}_\alpha} M \longrightarrow Q_{\mathbf{L}_\alpha} Q_{\mathbf{L}_\beta} M \ , \quad Q_{\mathbf{L}_\beta} M \longrightarrow Q_{\mathbf{L}_\alpha} Q_{\mathbf{L}_\beta} M\}_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$$

donde $\mathbf{L}_\gamma$ es un elemento de $< \mathcal{G}(R) >$ para cada $1 \leq \gamma \leq n$. Para la demostración que se expone de dicha generalización, previamente habrá que probar algunas propiedades de los funtores $Q_{\mathbf{L}_\gamma}$.
En el siguiente resultado se demuestra que el funtor $Q_{\mathbf{L}}$ y los *morfismos localización* $j_{\mathbf{L}}$, donde $\mathbf{L} \in < \mathcal{G}(R) >$ se comportan de manera análoga a $Q_{\mathcal{L}}$ y $j_{\mathcal{L}}$ cuando $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel.

(4.1.5) Proposición. *Sea $\mathbf{L} = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n$ un elemento de $< \mathcal{G}(R) >$. Entonces, para todo R–módulo a izquierda M, el núcleo de $j_{\mathbf{L},M}$ es $\sigma_{\mathbf{L}}(M)$ y el conúcleo de $j_{\mathbf{L},M}$ es un R–módulo a izquierda de $\mathbf{L}$–torsión.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre la longitud de $\mathbf{L}$. Si $\mathbf{L}$ consta de un sólo filtro de Gabriel $\mathcal{L}$, entonces en efecto $\mathrm{Ker} j_{\mathcal{L},M} = \sigma_{\mathcal{L}} M$ y $Q_{\mathcal{L}} M / j_{\mathcal{L},M}(M)$ es de $\mathcal{L}$–torsión. (ver (1.2.13)).
Si asumimos como hipótesis que el enunciado es cierto para todos los elementos de $< \mathcal{G}(R) >$ formados por un número de filtros de Gabriel estrictamente menor que n, entonces en particular es cierto para cualesquiera $\mathbf{L}'$ y $\mathbf{L}''$ no triviales (es decir, formados por al menos un filtro de Gabriel) de $< \mathcal{G}(R) >$ de tal manera que $\mathbf{L} = \mathbf{L}'\mathbf{L}''$. Elijamos una descomposición $\mathbf{L}'\mathbf{L}''$ no trivial de $\mathbf{L}$.
Sea m un elemento del núcleo de $j_{\mathbf{L},M} = j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M} \circ j_{\mathbf{L}',M}$. Entonces,

$$j_{\mathbf{L}',M}(m) \in \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M} = \sigma_{\mathbf{L}''} Q_{\mathbf{L}'} M \ ,$$

y por tanto existe un ideal a izquierda $L'' \in \varepsilon(\mathbf{L}'')$ tal que $L'' j_{\mathbf{L}',M}(m) = 0$. Luego $j_{\mathbf{L}',M}(rm) = 0$, o sea,

$$rm \in \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L}',M} = \sigma_{\mathbf{L}'} M$$

para cada $r \in L''$. Esto implica que existe un ideal $L'_r \in \varepsilon(\mathbf{L}')$ de manera que $L'_r rm = 0$, y de ahí que $m \in \sigma_{\mathbf{L}} M$, pues por el lema (3.1.2),

$$L = \sum_{r \in L''} L'_r r \in \varepsilon(\mathbf{L}') \circ \varepsilon(\mathbf{L}'') = \varepsilon(\mathbf{L})$$

y $Lm = 0$.
Recíprocamente, si $m \in \sigma_{\mathbf{L}} M$, entonces existe un elemento L de $\varepsilon(\mathbf{L})$ tal que $Lm = 0$. Dado que $\varepsilon(\mathbf{L}) = \varepsilon(\mathbf{L}') \circ \varepsilon(\mathbf{L}'')$, existe un ideal a izquierda

$L'' \in \varepsilon(\mathbf{L}'')$ conteniendo a L de manera que $(L : r) \in \varepsilon(\mathbf{L}')$ para cada $r \in L''$. Luego

$$rm \in \sigma_{\mathbf{L}'} M = \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L}',M}$$

para cada $r \in L''$, puesto que $(L : r)rm = 0$. Por lo tanto $rj_{\mathbf{L}',M}(m) = 0$ para cada $r \in L''$, así que $j_{\mathbf{L}',M}(m)$ es un elemento de $\mathbf{L}''$–torsión de $Q_{\mathbf{L}'}M$. Como bajo la hipótesis de inducción

$$\mathrm{Ker} j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M} = \sigma_{\mathbf{L}''} Q_{\mathbf{L}'} M$$

tenemos que $j_{\mathbf{L}',M}(m) \in \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M}$, y como consecuencia

$$m \in \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L},M} = \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M} \circ j_{\mathbf{L}',M} \ .$$

Por otro lado, si q es un elemento de $Q_{\mathbf{L}}M = Q_{\mathbf{L}''}Q_{\mathbf{L}'}M$, entonces, dado que bajo la hipótesis de inducción el conúcleo de $j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M}$ es de $\mathbf{L}''$–torsión, existe un ideal a izquierda $L'' \in \varepsilon(\mathbf{L}'')$ tal que

$$L''q \subseteq j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M}(Q_{\mathbf{L}'}M) \ .$$

Para cada $r \in L''$ existe un elemento $x_r \in Q_{\mathbf{L}'}M$ tal que $j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M}(x_r) = rq$, y como el conúcleo de $j_{\mathbf{L}',M}$ es de $\mathbf{L}'$–torsión, existe un $L'_r \in \varepsilon(\mathbf{L}')$ tal que $L'_r x_r \subseteq j_{\mathbf{L}',M}(M)$. En virtud del lema (3.1.2),

$$L = \sum_{r \in L''} L'_r r \in \varepsilon(\mathbf{L}') \circ \varepsilon(\mathbf{L}'') = \varepsilon(\mathbf{L}) \ ,$$

y de la forma que hemos elegido L'' y L'_r para cada $r \in L''$,

$$Lq = \sum_{r \in L''} L'_r rq = \sum_{r \in L''} j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M}(L'_r x_r) \subseteq j_{\mathbf{L}'',Q_{\mathbf{L}'}M}(j_{\mathbf{L}',M}(M)) = j_{\mathbf{L},M}(M) \ .$$

Luego $Q_{\mathbf{L}}M/j_{\mathbf{L},M}(M)$ es de $\mathbf{L}$–torsión. □

(4.1.6) Sea $\mathbf{L} = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n$ un elemento de $< \mathcal{G}(R) >$ y $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de R–módulos. Dado que $Q_{\mathcal{L}_i}$ es un funtor exacto a izquierda para cada $1 \leq i \leq n$ y que la composición de funtores exactos a izquierda entre categorías abelianas es un funtor exacto a izquierda, tenemos que $Q_{\mathbf{L}}$ también es exacto a izquierda. Por lo tanto $Q_{\mathbf{L}}\mathrm{Im} f \hookrightarrow Q_{\mathbf{L}}N$ y la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathbf{L}}\mathrm{Ker} f \longrightarrow Q_{\mathbf{L}}M \xrightarrow{f_{\mathbf{L}}} Q_{\mathbf{L}}\mathrm{Im} f$$

es exacta, de donde se tiene que $Q_{\mathbf{L}}\mathrm{Im} f$ contiene a $\mathrm{Im} f_{\mathbf{L}}$ si consideramos también al primero como un submódulo de $Q_{\mathbf{L}}N$.

(4.1.7) Lema. *Sean* $\mathbf{L} = \mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n$ *y* $\mathbf{H}$ *dos elementos de* $< \mathcal{G}(R) >$ *y* M *un* R*–módulo a izquierda, y consideremos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\mathbf{H},M}"] \arrow[d, "j_{\mathbf{L},M}"'] & Q_{\mathbf{H}}M \arrow[d, "j_{\mathbf{L},Q_{\mathbf{H}}M}"] \\ Q_{\mathbf{L}}M \arrow[r, "Q_{\mathbf{L}}j_{\mathbf{H},M}"'] & Q_{\mathbf{L}}Q_{\mathbf{H}}M \end{tikzcd}$$

Si q *es un elemento de* $Q_{\mathbf{H}}M$ *de tal manera que* $j_{\mathbf{L},Q_{\mathbf{H}}M}(q) \in \mathrm{Im}Q_{\mathbf{L}}j_{\mathbf{H},M}$, *entonces existe un ideal a izquierda* $L \in \varepsilon(\mathbf{L})$ *tal que* $Lq \subseteq \mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M}$.

Demostración. A lo largo de la demostración usaremos una notación menos explícita pero más sencilla. Denotaremos por $\mathbf{L}^i$ a $\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_{n-i}$ para $0 \leq i \leq n-1$ y por $\mathbf{L}^n$ al filtro de Gabriel $\{R\}$. A los morfismos localización $j_{\mathbf{L}^i,Q_{\mathbf{H}}M} : Q_{\mathbf{H}}M \longrightarrow Q_{\mathbf{HL}^i}M$ y $j_{\mathcal{L}_{n-i+1}} : Q_{\mathbf{HL}^i}M \longrightarrow Q_{\mathbf{HL}^{i-1}}M$ los denotaremos por v^i y t^i respectivamente, para $0 \leq i \leq n-1$. Es claro que $t^i \circ v^i = v^{i-1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Puesto que

$$\mathrm{Im}Q_{\mathbf{L}^i}j_{\mathbf{H},M} \subseteq Q_{\mathbf{L}^i}\mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \subseteq Q_{\mathbf{L}^i}Q_{\mathbf{H}}M$$

para $0 \leq i \leq n-1$, tenemos el diagrama con cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_{\mathbf{H},M}"] \arrow[d, "j_{1,M}"'] & \mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \arrow[r] \arrow[d, "t^n"'] & Q_{\mathbf{H}}M \arrow[d, "t^n"] \\ Q_{\mathcal{L}_1}M \arrow[r, "Q_{\mathcal{L}_1}j_{\mathbf{H},M}"'] \arrow[d, "j_{2,M}"'] & Q_{\mathcal{L}_1}\mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \arrow[r] \arrow[d, "t^{n-1}"'] & Q_{\mathcal{L}_1}Q_{\mathbf{H}}M \arrow[d, "t^{n-1}"] \\ \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] \\ Q_{\mathbf{L}^2}M \arrow[r, "Q_{\mathbf{L}^2}j_{\mathbf{H},M}"] \arrow[d, "j_{(n-1),M}"'] & Q_{\mathbf{L}^2}\mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \arrow[r] \arrow[d, "t^2"'] & Q_{\mathbf{L}^2}Q_{\mathbf{H}}M \arrow[d, "t^2"] \\ Q_{\mathbf{L}^1}M \arrow[r, "Q_{\mathbf{L}^1}j_{\mathbf{H},M}"] \arrow[d, "j_{n,M}"'] & Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \arrow[r] \arrow[d, "t^1"'] & Q_{\mathbf{L}^1}Q_{\mathbf{H}}M \arrow[d, "t^1"] \\ Q_{\mathbf{L}}M \arrow[r, "Q_{\mathbf{L}}j_{\mathbf{H},M}"'] & Q_{\mathbf{L}}\mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \arrow[r] & Q_{\mathbf{L}}Q_{\mathbf{H}}M \end{tikzcd}$$

donde los homomorfismos de la segunda columna son las restricciones de los de la tercera.

Sea $x \in Q_{\mathbf{L}}M$ tal que $Q_{\mathbf{L}}j_{\mathbf{H},M}(x) = v^0(q) = j_{\mathbf{L},Q_{\mathbf{H}}M}(q)$. Dado que

$$Q_{\mathbf{L}}j_{\mathbf{H},M}(x) \in \mathrm{Im}Q_{\mathbf{L}}j_{\mathbf{H},M} \subseteq Q_{\mathcal{L}_n}Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im}j_{\mathbf{H},M} \ ,$$

y el conúcleo de t^1 es de $\mathcal{L}_n$–torsión, existe un ideal a izquierda $H_n \in \mathcal{L}_n$ tal que $H_n v^0(q) \subseteq t^1(Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M})$. Luego para cada $r \in H_n$ existe un elemento $x_r \in Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$ cuya imagen por t^1 es

$$t^1(x_r) = rv^0(q) = t^1(rv^1(q)) \ .$$

Como el núcleo de t^1 es la $\mathcal{L}_n$–torsión de $Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$, existe un ideal a izquierda $H'_{n,r} \in \mathcal{L}_n$ tal que $H'_{n,r}(rv^1(q) - x_r) = 0$, esto es,

$$H'_{n,r} rv^1(q) \subseteq Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M} \ .$$

Por (3.1.20), el ideal a izquierda $L_n = \sum_{r \in H_n} H'_{n,r} r$ pertenece a $\mathcal{L}_n$, y es tal que $L_n v^1(q) \subseteq Q_{\mathbf{L}^1}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$.
Sea $r \in L_n$. Entonces, dado que el conúcleo de t^2 es de $\mathcal{L}_{n-1}$–torsión, existe un ideal a izquierda $H_{n-1,r} \in \mathcal{L}_{n-1}$ tal que

$$H_{n-1,r} rv^1(q) \subseteq t^2(Q_{\mathbf{L}^2}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}) \ .$$

Para cada $s \in H_{n-1,r}$ existe un elemento $x_{r,s}$ de $Q_{\mathbf{L}^2}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$ de tal forma que $t^2(x_{r,s}) = srv^1(q)$, y como $v^1 = t^2 \circ v^2$,

$$t^2(srv^2(q)) = srv^1(q) = t^2(x_{r,s}) \ .$$

Luego $srv^2(q) - x_{r,s}$ es un elemento del núcleo de t^2, que coincide con la $\mathcal{L}_{n-1}$–torsión de $Q_{\mathbf{L}^2}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$, y por lo tanto existe un ideal $H_{n-1,r,s} \in \mathcal{L}_{n-1}$ tal que $H_{n-1,r,s}(srv^2(q) - x_{r,s}) = 0$, esto es,

$$H_{n-1,r,s} srv^2(q) \subseteq Q_{\mathbf{L}^2}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M} \ .$$

Por (3.1.20), para cada $r \in L_n$, el ideal $L_{n-1,r} = \sum_{s \in H_{n-1,r}} H_{n-1,r,s} s$ pertenece a $\mathcal{L}_{n-1}$, y por el lema (3.1.2), el ideal $L_{n-1} = \sum_{r \in L_n} L_{n-1,r} r$ pertenece a $\mathcal{L}_{n-1} \circ \mathcal{L}_n$. Además,

$$L_{n-1} v^2(q) \subseteq Q_{\mathbf{L}^2}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M} \ .$$

Iterando este proceso n veces obtenemos un ideal $L_1 \in \mathcal{L}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{L}_n$ de tal manera que $L_1 v^n(q) \subseteq Q_{\mathbf{L}^n}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$. Pero v^n es el homomorfismo identidad de $Q_{\mathbf{H}}M$ y $Q_{\mathbf{L}^n}\mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M} = \mathrm{Im} j_{\mathbf{H},M}$, de donde se sigue que $L = L_1$ es un ideal a izquierda que satisface las condiciones del enunciado. □

(4.1.8) Sea $\mathbf{K} = \{\mathbf{L}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n}$ una familia de elementos de $< \mathcal{G}(R) >$. Dado un R–módulo a izquierda M, denotemos por $Q_\alpha M$ a $Q_{\mathbf{L}_\alpha} M$ y por $j_{\alpha,M}$, resp.

$j_{\alpha\beta,M}$ (o j_α resp. $j_{\alpha\beta}$ cuando no exista ambigüedad) al homomorfismo $j_{\mathbf{L}_\alpha,M}$ resp. $j_{\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha,M}$. Consideremos el sistema proyectivo

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M = \{ \begin{tikzcd} Q_\alpha M \arrow[dr, "j^{\alpha}_{\alpha\beta}"] & \\ & Q_\alpha Q_\beta M \\ Q_\beta M \arrow[ur, "j^{\beta}_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd} \}_{1\leq\alpha,\beta\leq n} ,$$

donde $j^{\alpha}_{\alpha\beta} = Q_\alpha j_{\beta,M}$ y $j^{\beta}_{\alpha\beta} = j_{\alpha,Q_\beta M}$. Con esta notación, se puede afirmar que $j_{\alpha\beta,M} = j^{\alpha}_{\alpha\beta} \circ j_\alpha = j^{\beta}_{\alpha\beta} \circ j_\beta$ para cada $1 \leq \alpha,\beta \leq n$.
Sea $\mathcal{L}$ la intersección de los filtros uniformes $\bigcap_{1\leq\alpha\leq n} \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$. Puesto que

$$\sigma_{\mathcal{L}}M \subseteq \sigma_{\varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)}M = \mathrm{Ker} j_{\alpha,M} \subseteq \sigma_{\varepsilon(\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha)}M = \mathrm{Ker} j_{\alpha\beta,M} ,$$

el homomorfismo $j_{\alpha,M}$ factoriza a través de

$$\overline{j_\alpha} : M/\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow Q_\alpha M$$

y $j_{\alpha\beta,M}$ a través de

$$\overline{j_{\alpha\beta}} : M/\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow Q_{\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha}M$$

para cada $\alpha,\beta \in \{1,\ldots,n\}$.
Dado que $j^{\alpha}_{\alpha\beta} \circ \overline{j_\alpha} = \overline{j_{\alpha\beta}} = j^{\beta}_{\alpha\beta} \circ \overline{j_\beta}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M/\sigma_{\mathcal{L}}M \arrow[r, "\overline{j_\alpha}"] \arrow[d, "\overline{j_\beta}"'] & Q_\alpha M \arrow[d, "j^{\alpha}_{\alpha\beta}"] \\ Q_\beta M \arrow[r, "j^{\beta}_{\alpha\beta}"'] & Q_\alpha Q_\beta M \end{tikzcd}$$

es conmutativo para $1 \leq \alpha,\beta \leq n$, y por lo tanto existe un único homomorfismo $j : M/\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow \varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ de manera que los diagramas

$$\begin{tikzcd} & M/\sigma_{\mathcal{L}}M \arrow[dl, "\overline{j_\alpha}"'] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "\overline{j_{\alpha\beta}}"] & \\ Q_\alpha M & \varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \arrow[l, "p_\alpha"] \arrow[r, "p_{\alpha\beta}"'] & Q_\alpha Q_\beta M \end{tikzcd}$$

son conmutativos para cualesquiera $\alpha,\beta \in \{1,\ldots,n\}$, donde p_α resp. $p_{\alpha\beta}$ es la proyección del límite en $Q_\alpha M$ resp. $Q_\alpha Q_\beta M$.

De hecho, el límite de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ es, salvo isomorfismos, el submódulo de la suma $\bigoplus_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha M$ formado por todos los elementos $(q_\alpha)_\alpha$ de manera que $j^\alpha_{\alpha\beta}(q_\alpha) = j^\beta_{\alpha\beta}(q_\beta)$ para cualesquiera $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, y la imagen por j de un elemento $\overline{m} \in M/\sigma_{\mathcal{L}}M$ es $(\overline{j_\alpha}(\overline{m}))_\alpha$.

(4.1.9) Lema. *Sea M un R–módulo a izquierda y $\{\mathbf{L}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq n}$ una familia de elementos de $< \mathcal{G}(R) >$. El homomorfismo*

$$j : M/\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow \varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$$

construido de la manera que se describe en (4.1.8) es un monomorfismo.

Demostración. Puesto que $\sigma_{\mathcal{L}}M \subseteq \sigma_{\mathbf{L}_\alpha}M$, y el núcleo de $j_{\alpha,M}$ es $\sigma_{\mathbf{L}_\alpha}M$, el homomorfismo $\overline{j_\alpha}$ se puede factorizar como composición de la proyección $M/\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow M/\sigma_{\mathbf{L}_\alpha}M$ y el monomorfismo $M/\sigma_{\mathbf{L}_\alpha}M \longrightarrow Q_\alpha M$, luego el núcleo de $\overline{j_\alpha}$ es el cociente $\sigma_{\mathbf{L}_\alpha}M/\sigma_{\mathcal{L}}M$.
Del comentario previo al enunciado del lema sobre la expresión de j, podemos deducir que

$$\mathrm{Ker}(j) = \{\overline{m} \in M/\sigma_{\mathcal{L}}M \ ; \ \ (\overline{j_\alpha}(\overline{m}))_\alpha = 0\}$$
$$= \bigcap_{1\leq\alpha\leq n} \mathrm{Ker}\overline{j_\alpha} = \bigcap_{1\leq\alpha\leq n} \sigma_{\mathbf{L}_\alpha}M/\sigma_{\mathcal{L}}M = \sigma_{\mathcal{L}}M/\sigma_{\mathcal{L}}M = 0 \ ,$$

y de ahí que j es un monomorfismo. □

(4.1.10) Lema. *Dado un R–módulo a izquierda M y una familia $\{\mathbf{L}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq n}$ de elementos de $< \mathcal{G}(R) >$, el conúcleo del homomorfismo j construido en (4.1.8) es de $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}$–torsión.*

Demostración. Sea $q = (q_\alpha)_\alpha$ un elemento del límite

$$\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M = \{(q_\alpha)_\alpha \in \bigoplus_{1\leq\alpha\leq n} Q_\alpha M \ ; \ j^\alpha_{\alpha\beta}(q_\alpha) = j^\beta_{\alpha\beta}(q_\beta), \ 1 \leq \alpha, \beta \leq n\} \ .$$

Puesto que $j^\alpha_{\alpha\beta}(q_\alpha) = j^\beta_{\alpha\beta}(q_\beta)$, en virtud del lema (4.1.7) existe un ideal a izquierda $L_{\alpha\beta} \in \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ de tal manera que $L_{\alpha\beta}q_\beta \subseteq \mathrm{Im}j_{\beta,M}$. Sea

$$L_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} L_{\alpha\beta} \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha) = \mathcal{L} \ .$$

Entonces $L_\beta q_\beta \subseteq \mathrm{Im}j_{\beta,M}$, y de la misma manera, si denotamos la intersección $\bigcap_{\beta=1}^{n} L_\beta \in \mathcal{L}$ por L, entonces

$$Lq_\beta \subseteq \mathrm{Im}j_{\beta,M} = \mathrm{Im}\overline{j_\beta}$$

para cada $\beta \in \{1, \cdots, n\}$.
Sea $r \in L$. Como $rq_\alpha \in \mathrm{Im}\overline{j_\alpha}$, existe un elemento $x_{r,\alpha} \in M/\sigma_{\mathcal{L}}M$ de manera que $\overline{j_\alpha}(x_{r,\alpha}) = rq_\alpha$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$.
Sea α un índice fijo. En general $x_{r,\alpha} \neq x_{r,\beta}$ para $\beta \in \{1, \ldots, n\}$ distinto de α, pero, puesto que $j^\alpha_{\alpha\beta}(q_\alpha) = j^\beta_{\alpha\beta}(q_\beta)$, se tiene que

$$j^\beta_{\alpha\beta}(\overline{j_\beta}(x_{r,\alpha})) = j^\alpha_{\alpha\beta}(\overline{j_\alpha}(x_{r,\alpha})) = j^\alpha_{\alpha\beta}(rq_\alpha) = j^\beta_{\alpha\beta}(rq_\beta) = j^\beta_{\alpha\beta}(\overline{j_\beta}(x_{r,\beta}))\ ,$$

esto es, $\overline{j_\beta}(x_{r,\alpha}) - \overline{j_\beta}(x_{r,\beta})$ es un elemento del núcleo de $j^\beta_{\alpha\beta} = j_{\mathbf{L}_\alpha, Q_\beta M}$, que por la proposición (4.1.5) coincide con $\sigma_{\mathbf{L}_\alpha} Q_\beta M$. Por lo tanto existe un ideal a izquierda $H_{r,\alpha\beta} \in \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ tal que

$$H_{r,\alpha\beta}(\overline{j_\beta}(x_{r,\alpha}) - \overline{j_\beta}(x_{r,\beta})) = 0\ .$$

Si $H_{r,\alpha} = \bigcap_{\beta=1}^n H_{r,\alpha\beta}$, entonces $H_{r,\alpha} \in \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$, y $H_{r,\alpha}(\overline{j_\beta}(x_{r,\alpha}) - \overline{j_\beta}(x_{r,\beta})) = 0$ para todo $\beta \in \{1, \ldots, n\}$, y de esta manera, para todo $s \in H_{r,\alpha}$,

$$srq = (srq_\beta)_\beta = (s\overline{j_\beta}(x_{r,\beta}))_\beta = (s\overline{j_\beta}(x_{r,\alpha}))_\beta = j(sx_{r,\alpha})\ ,$$

esto es, $H_{r,\alpha}rq \subseteq \mathrm{Im}j$.
Si denotamos por H_r al ideal $\sum_{\alpha=1}^n H_{r,\alpha}$, entonces $H_r \in \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha) = \mathcal{L}$, y el ideal a izquierda $H = \sum_{r\in L} H_r r$, que por el lema (3.1.2) pertenece a $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}$, verifica que

$$Hq = \sum_{r\in L} H_r rq \subseteq \mathrm{Im}j\ ,$$

de donde podemos concluir que el conúcleo de j es de $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}$–torsión. □

El siguiente resultado surge como consecuencia natural de los dos lemas anteriores:

(4.1.11) Corolario. *Sea M un R–módulo a izquierda y $\mathbf{K} = \{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ una familia de elementos de $< \mathcal{G}(R) >$ que satisface las siguientes condiciones:*

(4.1.11.1) $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ *es un filtro de Gabriel;*

(4.1.11.2) *para todo $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ y todo R–módulo a izquierda N,*

$$Q_{\mathcal{L}}Q_\alpha N \cong Q_\alpha N\ .$$

Entonces el límite del sistema proyectivo $\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ coincide con $Q_{\mathcal{L}}M$.

Demostración. Por el lema (4.1.9), j es un monomorfismo, y dado que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, por el lema (4.1.10) el conúcleo de j es un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión.

Por otra parte, puesto que $Q_{\mathcal{L}}Q_\alpha(N) \cong Q_\alpha N$ para todo N, se tiene que $Q_\alpha N$ es $\mathcal{L}$–cerrado para todo R–módulo a izquierda N y todo $\alpha \in \{1,\dots,n\}$. Luego $Q_\alpha M$ y $Q_\alpha Q_\beta M$ son $\mathcal{L}$–cerrados para $1 \leq \alpha,\beta \leq n$, y dado que la subcategoría $(R,\mathcal{L}) - \mathbf{mod}$ de $R - \mathbf{mod}$ es cerrada para límites proyectivos (ver (1.2.11)), el límite de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ es también $\mathcal{L}$–cerrado. Por lo tanto, existe un isomorfismo entre $Q_{\mathcal{L}}M$ y el límite de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{L}}M \arrow[rr] & & \varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \\ & M \arrow[ul, "j_{\mathcal{L},M}"] \arrow[ur, "\lim j_{\alpha,M}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $\lim j_{\alpha,M}$ denota a la composición de la proyección $M \longrightarrow M/\sigma_{\mathcal{L}}M$ con j. $\square$

(4.1.12) Sean $\mathbf{H} \in <\mathcal{G}(R)>$ y $\mathbf{K} = \{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ una familia de elementos de $<\mathcal{G}(R)>$. Dado un R–módulo a izquierda M denotaremos por $Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ al sistema proyectivo

$$Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M = \left\{ \begin{tikzcd} Q_{\mathbf{H}}Q_\alpha M \arrow[dr, "Q_{\mathbf{H}}j^\alpha_{\alpha\beta}"] & \\ & Q_{\mathbf{H}}Q_\alpha Q_\beta M \\ Q_{\mathbf{H}}Q_\beta M \arrow[ur, "Q_{\mathbf{H}}j^\beta_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd} \right\}_{1\leq\alpha,\beta\leq n},$$

donde $j^\alpha_{\alpha\beta}$ y $j^\beta_{\alpha\beta}$ son los homomorfismos definidos en (4.1.8).

(4.1.13) Teorema. *Sea* $\mathbf{H}$ *un elemento de* $<\mathcal{G}(R)>$ *y* $\mathbf{K} = \{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ *una familia de elementos de* $<\mathcal{G}(R)>$ *de manera que* $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ *es un filtro de Gabriel, y* M *un* R*–módulo a izquierda. Si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(4.1.13.1) *para* $1 \leq \alpha \leq n$ *y todo* R*–módulo a izquierda* N *existe un isomorfismo* $Q_{\mathcal{L}}Q_\alpha N \cong Q_\alpha N$*;*

(4.1.13.2) *existe una equivalencia* $\theta : Q_{\mathbf{H}} \cong Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}$ *de manera que*

$$\theta_N \circ j_{\mathbf{H},N} = j_{\mathbf{H},Q_{\mathcal{L}}N} \circ j_{\mathcal{L},N}$$

para todo R*–módulo a izquierda* N*.*

Entonces el límite del sistema proyectivo $Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ *coincide con* $Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M$*.*

Demostración. Si $\mathbf{H} = \mathcal{H}_1 \cdots \mathcal{H}_p$ y denotamos por $\mathbf{H}_i$ a $\mathcal{H}_1 \cdots \mathcal{H}_i$ para $1 \leq i \leq p-1$, entonces, puesto que $Q_{\mathcal{H}_i}$ conmuta con límites proyectivos (ver (1.2.11)), el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Q_{\mathbf{H}}\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \arrow[d, "\cong"] \\
 & Q_{\mathcal{H}_2\cdots\mathcal{H}_p}\varprojlim Q_{\mathbf{H}_1}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \arrow[d, "\cong"] \\
M \arrow[uur, "j_{\mathbf{H}}\circ\lim j_{\alpha,M}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{H}_2\cdots\mathcal{H}_p}\circ\lim j_{\mathbf{H}_1\mathbf{L}_\alpha,M}"'] \arrow[dr, "j_{\mathcal{H}_p}\circ\lim j_{\mathbf{H}_{p-1}\mathbf{L}_\alpha,M}"] \arrow[ddr, "\lim j_{\mathbf{H}\mathbf{L}_\alpha,M}"'] & \cdots \arrow[d, "\cong"] \\
 & Q_{\mathcal{H}_p}\varprojlim Q_{\mathbf{H}_{p-1}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \arrow[d, "\cong"] \\
 & \varprojlim Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por lo tanto, basta comprobar que $Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ coincide con $Q_{\mathbf{H}}\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$.

Supongamos que $\{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ verifica (4.1.13.1). Entonces, por (4.1.11), el límite de $\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ es $Q_{\mathcal{L}}M$, y en efecto, existe un isomorfismo entre $Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ y $Q_{\mathbf{H}}\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{H}}\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \arrow[rr, "\cong"] & & Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M \\
 & M \arrow[ul, "j_{\mathbf{H}}\circ\lim j_{\alpha,M}"] \arrow[ur, "j_{\mathbf{H}}\circ j_{\mathcal{L},M}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por el contrario, asumamos ahora que se verifica (4.1.13.2). En virtud del lema (4.1.9), la sucesión

$$0 \longrightarrow M/\sigma_{\mathcal{L}}M \xrightarrow{j} \varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M \longrightarrow \mathrm{Coker} j \longrightarrow 0$$

es exacta. Dado que $Q_{\mathbf{H}}$ es exacto a izquierda, la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) \xrightarrow{Q_{\mathbf{H}}j} Q_{\mathbf{H}}(\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M) \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}(\mathrm{Coker} j) \longrightarrow 0$$

es exacta y $Q_{\mathbf{H}}(\mathrm{Coker} j) = Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}(\mathrm{Coker} j) = 0$ ya que $\mathrm{Coker} j$ es, por el lema (4.1.10), de $\mathcal{L}$–torsión. Luego $Q_{\mathbf{H}}j$ es un isomorfismo, y puesto que

$Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M = Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M)$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) \arrow[r, "\cong"] & Q_{\mathbf{H}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) \arrow[r, "Q_{\mathbf{H}}j"] & Q\mathbf{H}(\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M) \\
& M \arrow[ul, "j_{\mathbf{H}}\circ j_{\mathcal{L},M}"] \arrow[u, "j_{\mathbf{H},M/\sigma_{\mathcal{L}}M}\circ p"'] \arrow[ur, "j_{\mathbf{H}}\circ \lim j_{\alpha,M}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, $Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ coincide con $Q_{\mathbf{H}}(\varprojlim \mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M) = \varprojlim Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$. □

(4.1.14) Ejemplo. Una familia de palabras $\{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ formadas por un sólo filtro de Gabriel verifica trivialmente la condición (4.1.13.1). Más en general, si $\mathbf{L}_\alpha = \mathcal{L}_1^\alpha \cdots \mathcal{L}_{m_\alpha}^\alpha$ y el filtro de Gabriel $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ está contenido en $\mathcal{L}_{m_\alpha}^\alpha$ para $1 \leq \alpha \leq n$, entonces $\{\mathbf{L}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ satisface (4.1.13.1), pues para cada R–módulo a izquierda N, el homomorfismo localización $j_{\mathcal{L},Q_\alpha N}$ es un isomorfismo.

Por otra parte, si $\mathbf{H} = \mathcal{H}_1 \cdots \mathcal{H}_p$ y si existe un $d \in \{1, \ldots, p\}$ de manera que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_d$ y los filtros $\mathcal{H}_i$ y $\mathcal{L}$ son mutuamente compatibles para $1 \leq i \leq d-1$, entonces dado que el conúcleo del homomorfismo localización $j_{\mathcal{L},N}$ es de $\mathcal{L}$–torsión y la clase de R–módulos a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión es cerrada para $Q_{\mathcal{H}_i}$ con $1 \leq i \leq d-1$ (ver (1.3.3)), la imagen por $Q_{\mathcal{H}_{d-1}} \circ \cdots \circ Q_{\mathcal{H}_1}$ de $\mathrm{Coker} j_{\mathcal{L},N}$ es de $\mathcal{L}$–torsión. Luego $Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{H}_{d-1}} \cdots Q_{\mathcal{H}_1}\mathrm{Coker} j_{\mathcal{L},N} = 0$ y por tanto $Q_{\mathcal{H}_d} \cdots Q_{\mathcal{H}_1} j_{\mathcal{L},N}$ es un isomorfismo, ya que la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathcal{H}_d} \cdots Q_{\mathcal{H}_1} N \xrightarrow{Q_{\mathcal{H}_d} \cdots Q_{\mathcal{H}_1} j_{\mathcal{L},N}} Q_{\mathcal{H}_d} \cdots Q_{\mathcal{H}_1} Q_{\mathcal{L}} N \longrightarrow Q_{\mathcal{H}_d} \cdots Q_{\mathcal{H}_1} \mathrm{Coker} j_{\mathcal{L},N}$$

es exacta. Esto implica que $Q_{\mathbf{H}} j_{\mathcal{L},N}$ es un isomorfismo.

4.2. El *sitio no conmutativo*

Una vez que tenemos los resultados algebraicos necesarios, en esta sección pretendemos construir un *objeto* geométrico dotado de una *topología no conmutativa* que generalice la topología de Zariski del espectro primo de un anillo conmutativo y la topología de abiertos asociados a birradicales de la forma σ_I descrita en 2.3. Nuestro *objeto* también generaliza y, en cierta manera, mejora la construcción de Van Oystaeyen y Willaert ([47, 52]) para álgebras esquemáticas (ver 2.4.), porque a diferencia de dichos autores, hemos considerado, para cada abierto, otros recubrimientos además de aquellos que provienen de la intersección del abierto con recubrimientos globales.

A lo largo de esta sección R será un anillo noetheriano a izquierda.

(4.2.1) Sea $\mathcal{G}$ un subconjunto de $\mathcal{G}(R)$ de manera que $\mathcal{G}$ contiene al filtro de Gabriel $\{R\}$. Denotamos por $<\mathcal{G}>$ al monoide libre generado por $\mathcal{G}$ y con el filtro de Gabriel $\{R\}$ como elemento neutro. En $<\mathcal{G}>$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: si $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}$ son elementos de $<\mathcal{G}>$, entonces $\mathbf{L} \sim \mathbf{H}$ si, y sólo si, para cada R–módulo a izquierda N existe un isomorfismo $Q_{\mathbf{L}}N \xrightarrow{\eta_N} Q_{\mathbf{H}}N$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{L}}N \arrow[rr, "\eta_N"] & & Q_{\mathbf{H}}N \\
& N \arrow[ul, "j_{\mathbf{L},N}"] \arrow[ur, "j_{\mathbf{H},N}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. La relación $\sim$ es claramente de equivalencia. Al conjunto de clases de equivalencia $<\mathcal{G}>/\sim$ lo denotaremos por $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ y a la clase de un elemento $\mathbf{L} \in <\mathcal{G}>$ la denotaremos por $[\mathbf{L}]$.

El producto de elementos de $<\mathcal{G}>$ es compatible con la relación de equivalencia, pues si $\mathbf{L} \sim \mathbf{L}'$ y $\mathbf{H}$ son elementos de $<\mathcal{G}>$, entonces para cada R–módulo a izquierda N los homomorfismos $Q_{\mathbf{H}}(\eta_N) : Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}}N \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}'}N$ y $\eta_{Q_{\mathbf{H}}N} : Q_{\mathbf{L}}Q_{\mathbf{H}}N \longrightarrow Q_{\mathbf{L}'}Q_{\mathbf{H}}N$ son isomorfismos, y los diagramas

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}}N \arrow[rr, "Q_{\mathbf{H}}(\eta_N)"] & & Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}'}N \\
& N \arrow[ul, "j_{\mathbf{LH},N}"] \arrow[ur, "j_{\mathbf{L}'\mathbf{H},N}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{L}}Q_{\mathbf{H}}N \arrow[rr, "\eta_{Q_{\mathbf{H}}N}"] & & Q_{\mathbf{L}'}Q_{\mathbf{H}}N \\
& N \arrow[ul, "j_{\mathbf{HL},N}"] \arrow[ur, "j_{\mathbf{HL}',N}"'] &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. Luego $[\mathbf{LH}] = [\mathbf{L}'\mathbf{H}]$ y $[\mathbf{HL}] = [\mathbf{HL}']$, y podemos definir el producto de clases $[\mathbf{L}][\mathbf{H}]$ como la clase $[\mathbf{LH}]$ del producto de dos representantes cualesquiera.

Si N es un R–módulo a izquierda de $\mathbf{L}$–torsión y $\mathbf{L} \sim \mathbf{H}$, entonces, por el lema (4.1.5),

$$\sigma_{\mathbf{H}}N = \mathrm{Ker} j_{\mathbf{H},N} = \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L},N} = \sigma_{\mathbf{L}}N = N \ ,$$

y recíprocamente, si N es de $\mathbf{H}$–torsión, entonces también es de $\mathbf{L}$–torsión. Dado que todo filtro uniforme viene determinado por su clase de pretorsión, tenemos como consecuencia que $\varepsilon(\mathbf{L}) = \varepsilon(\mathbf{H})$, y por lo tanto podemos definir el filtro uniforme $\varepsilon[\mathbf{L}]$ asociado a una clase $[\mathbf{L}] \in \mathbb{T}(\mathcal{G})$ como el filtro $\varepsilon(\mathbf{L})$, donde $\mathbf{L}$ es cualquiera de sus representantes.

(4.2.2) El conjunto de clases de equivalencia de elementos de $<\mathcal{G}>$ es el conjunto de objetos de una categoría, que también denotamos por $\mathbb{T}(\mathcal{G})$, en la que $Hom_{\mathbb{T}(\mathcal{G})}([\mathbf{L}],[\mathbf{H}])$ es el conjunto de transformaciones naturales $\eta : Q_{\mathbf{H}} \longrightarrow Q_{\mathbf{L}}$ sobre la identidad, esto es, de manera que para cualquier

R–módulo a izquierda M, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathbf{H}}M \arrow[rr, "\eta_M"] & & Q_{\mathbf{L}}M \\ & M \arrow[ul, "j_{\mathbf{H},M}"] \arrow[ur, "j_{\mathbf{L},M}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada par de clases $[\mathbf{L}]$ y $[\mathbf{H}]$.

(4.2.3) Ejemplo. Sean $[\mathbf{L}]$, $[\mathbf{L}']$ y $[\mathbf{H}]$ clases de elementos de $< \mathcal{G} >$ de manera que $[\mathbf{H}]$ se puede factorizar como $[\mathbf{H}] = [\mathbf{L}][\mathbf{L}']$. Entonces las transformación natural que a cada R–módulo a izquierda N le asigna el homomorfismo $j_{\mathbf{L}',Q_{\mathbf{L}}N} : Q_{\mathbf{L}}N \longrightarrow Q_{\mathbf{L}'}Q_{\mathbf{L}}N$ resp. $Q_{\mathbf{L}'}j_{\mathbf{L},N} : Q_{\mathbf{L}'}N \longrightarrow Q_{\mathbf{L}'}Q_{\mathbf{L}}N$ describe un morfismo $[\mathbf{H}] \longrightarrow [\mathbf{L}]$ resp. $[\mathbf{H}] \longrightarrow [\mathbf{L}']$ en $\mathbb{T}(\mathcal{G})$.

Si $\eta \in Hom_{\mathbb{T}(\mathcal{G})}([\mathbf{H}], [\mathbf{L}])$, entonces para cualquier R–módulo a izquierda de $\mathbf{L}$–torsión N se tiene

$$\mathrm{Ker} j_{\mathbf{H},N} = \mathrm{Ker}(\eta_N \circ j_{\mathbf{L},N}) \supseteq \mathrm{Ker} j_{\mathbf{L},N} \ ,$$

y por lema (4.1.5), $\sigma_{\mathbf{H}}N \supseteq \sigma_{\mathbf{L}}N = N$, con lo que N es también de $\mathbf{H}$–torsión. Como todo filtro uniforme está determinado por su clase de pretorsión, podemos concluir que $\varepsilon[\mathbf{L}] \subseteq \varepsilon[\mathbf{H}]$.
Recíprocamente:

(4.2.4) Proposición. *Si* $[\mathbf{L}]$ *y* $[\mathbf{H}]$ *son clases de elementos de* $< \mathcal{G} >$ *de manera que cada una de ellas admite un representante formado por un sólo filtro de Gabriel, entonces* $Hom_{\mathbb{T}(\mathcal{G})}([\mathbf{H}], [\mathbf{L}])$ *es no vacío si, y sólo si,* $\varepsilon[\mathbf{L}]$ *está contenido en* $\varepsilon[\mathbf{H}]$, *y en tal caso,* $Hom_{\mathbb{T}(\mathcal{G})}([\mathbf{H}], [\mathbf{L}])$ *tiene un sólo elemento.*

Demostración. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ filtros de Gabriel de $\mathcal{G}$ tales que $[\mathbf{L}] = [\mathcal{L}]$ y $[\mathbf{H}] = [\mathcal{H}]$. Si $\mathcal{L} = \varepsilon[\mathbf{L}]$ está contenido en $\mathcal{H} = \varepsilon[\mathbf{H}]$, entonces $Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}N$ es isomorfo a $Q_{\mathcal{H}}N$ para cada R–módulo a izquierda N (ver (1.2.12)), y el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{L}}N \arrow[r, "j_{\mathcal{H},Q_{\mathcal{L}}N}"] & Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}N \arrow[r, "\cong"] & Q_{\mathcal{H}}N \\ & M \arrow[ul, "j_{\mathcal{L}}"] \arrow[u, "j_{\mathcal{L}\mathcal{H}}"'] \arrow[ur, "j_{\mathcal{H}}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, con lo que $j_{\mathcal{H},Q_{\mathcal{L}}(\cdot)}$ describe un homomorfismo $[\mathcal{H}] \longrightarrow [\mathcal{L}]$. Además, si $\eta : Q_{\mathcal{L}} \longrightarrow Q_{\mathcal{H}}$ es una transformación natural, dado que para cada R–módulo a izquierda N el núcleo $\mathrm{Ker} j_{\mathcal{L},N} = \sigma_{\mathcal{L}}N \subseteq \sigma_{\mathcal{H}}N$ y el conúcleo de $j_{\mathcal{L},N}$ son de $\mathcal{H}$–torsión y $Q_{\mathcal{H}}N$ es $\mathcal{H}$–cerrado, entonces η_N es el único homomorfimo que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "j_{\mathcal{L},N}"] \arrow[dr, "j_{\mathcal{H},N}"'] & & Q_{\mathcal{L}}N \arrow[dl, "\eta_N"] \\ & Q_{\mathcal{H}}N & \end{tikzcd}$$

y por lo tanto coincide con $j_{\mathcal{H},Q_{\mathcal{L}}N}$. □

Debemos pensar en la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ como la categoría de abiertos de un espacio topológico. Veamos que en efecto, para una familia $\mathcal{G}$ adecuada, $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ es la categoría de abiertos de la topología de Zariski de un anillo conmutativo noetheriano.

(4.2.5) Lema. *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros de Gabriel de manera que para cada R–módulo a izquierda N existe un isomorfismo $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}N \cong Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}N$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}N \arrow[rr, "\cong"] & & Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}N \\ & N \arrow[ul, "j_{\mathcal{HL},N}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{LH},N}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}$ coincide con $Q_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}$.

Demostración. Si N es un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$–torsión, dado que el núcleo de $j_{\mathcal{LH},N}$ coincide con el de $j_{\mathcal{HL},N}$, por el lema (4.1.5),

$$\sigma_{\mathcal{H}\circ\mathcal{L}}N = \sigma_{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}}N = N \ ,$$

y por lo tanto N es de $\mathcal{H}\circ\mathcal{L}$–torsión. Intercambiando los papeles de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ se obtiene que todo R–módulo a izquierda de $\mathcal{H}\circ\mathcal{L}$–torsión también es de $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$–torsión, de donde se concluye que $\mathcal{L}\circ\mathcal{H} = \mathcal{H}\circ\mathcal{L}$, esto es, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son mutuamente compatibles, y por (1.3.3),

$$\mathcal{L}\vee\mathcal{H} = \mathcal{L}\circ\mathcal{H} = \mathcal{H}\circ\mathcal{L} \ .$$

Sea M un R–módulo a izquierda y consideremos el homomorfismo $j_{\mathcal{HL},M}$. Por el lema (4.1.5),

$$\mathrm{Ker} j_{\mathcal{HL},M} = \sigma_{\mathcal{H}\circ\mathcal{L}}M = \sigma_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}M$$

y el conúcleo de $j_{\mathcal{HL},M}$ también es de $\mathcal{H}\circ\mathcal{L} = \mathcal{L}\vee\mathcal{H}$–torsión. Además, $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \cong Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ es tanto $\mathcal{L}$–libre de torsión como $\mathcal{H}$–libre de torsión, y puesto que $\mathcal{F}_{\mathcal{L}\circ\mathcal{H}} = \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ también es $\mathcal{L}\vee\mathcal{H}$–libre de torsión.

Por otra parte, si $f : L \longrightarrow Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ es un homomorfismo, y L es un elemento de $\mathcal{L} \vee \mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, entonces existe un ideal a izquierda $H \in \mathcal{H}$ de tal manera que $(L : r) \in \mathcal{L}$ para todo $r \in H$. Sea $r \in H$. Como $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ es $\mathcal{L}$–cerrado, el homomorfismo

$$(L : r) \longrightarrow Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \ ; \quad s \longrightarrow f(sr)$$

puede ser extendido por un único homomorfismo $h_r : R \longrightarrow Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$. Es fácil ver, debido precisamente a la unicidad de h_r para cada $r \in H$, que la aplicación

$$g : H \longrightarrow Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \ ; \quad r \longrightarrow h_r(1)$$

es un homomorfismo de R–módulos, que además extiende a f. Dado que $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M \cong Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}M$ es $\mathcal{H}$–cerrado, existe una extensión h de g a todo el anillo R. Puesto que h también extiende a f, hemos probado que todo homomorfismo de un ideal de $\mathcal{L} \vee \mathcal{H}$ en $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ puede ser extendido a todo el anillo, esto es, que $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}M$ es $\mathcal{L} \vee \mathcal{H}$–inyectivo, y por lo tanto coincide con $Q_{\mathcal{L}\vee\mathcal{H}}M$. $\square$

(4.2.6) Ejemplo. Sea R un anillo conmutativo noetheriano y consideremos el conjunto $\mathcal{G}_{Zar}$ de filtros de Gabriel en R de la forma

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq R \ : \ \exists n \in \mathbb{N}, \ I^n \subseteq L\}$$

donde I es un ideal de R. Al conjunto de clases de equivalencia de elementos de $< \mathcal{G}_{Zar} >$, y también a la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G}_{Zar})$ los denotaremos por $\mathbb{T}_{Zar}$.

Puesto que R es conmutativo y noetheriano, si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros de Gabriel en R, entonces $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}} = Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}$ (ver [11, IV.2.17] ó [48]). En virtud de (4.2.5), para cada par de ideales I y J de R se tiene que $Q_{\mathcal{L}_I}Q_{\mathcal{L}_J} = Q_{\mathcal{L}_J}Q_{\mathcal{L}_I}$ coincide con $Q_{\mathcal{L}_{IJ}}$, dado que

$$\mathcal{L}_I \vee \mathcal{L}_J = \mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J = \{L \leq R \ ; \ \exists n, m \in \mathbb{N}, \ I^n J^m \subseteq L\} = \mathcal{L}_{IJ} \ .$$

Luego si $\mathbf{L} = \mathcal{L}_{I_1} \cdots \mathcal{L}_{I_n} \in < \mathcal{G}_{Zar} >$, entonces $\mathbf{L} \sim \mathcal{L}_J$, donde $J = I_1 \cdots I_n$, y por tanto cada clase $[\mathbf{L}]$ en $\mathbb{T}_{Zar}$ tiene un representante formado por un único filtro de Gabriel $\mathcal{L}_J$, con J ideal de R. Además, puesto que $\mathcal{L}_J = \varepsilon[\mathbf{L}]$, ese representante es único. De esta manera los objetos de la categoría $\mathbb{T}_{Zar}$ están en correspondencia biyectiva con los filtros de $\mathcal{G}_{Zar}$.

Por otra parte, si denotamos por $D(I)$ al abierto de la topología de Zariski formado por los ideales primos de R que no contienen a I, o equivalentemente, que no pertenecen a $\mathcal{L}_I$, entonces, dado que

$$\mathcal{L}_I = \bigcap_{P \in D(I)} \mathcal{L}_{R \setminus P} \ ,$$

(ver (3.1.35)) tenemos una correspondencia biyectiva entre los filtros de $\mathcal{G}_{Zar}$ y los abiertos de la topología de Zariski del espectro de R.
Además, si $[\mathcal{L}_I]$ y $[\mathcal{L}_J]$ son elementos de $\mathbb{T}_{Zar}$, la inclusión $\mathcal{L}_I \subseteq \mathcal{L}_J$ equivale, por la proposición (4.2.4), a que exista un único morfismo $[\mathcal{L}_J] \longrightarrow [\mathcal{L}_I]$, y por otra parte, también equivale a que $D(J) \subseteq D(I)$.
Concluimos por tanto que (el conjunto de objetos de) $\mathbb{T}_{Zar}$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de abiertos de la topología de Zariski del espectro de R de tal manera que un abierto $D(J)$ está contenido en $D(I)$ si, y sólo si, existe un morfismo de $[\mathcal{L}_J]$ a $[\mathcal{L}_I]$.

(4.2.7) Ejemplo. Sea R un anillo noetheriano a izquierda de manera que todo ideal primo bilátero de R satisface la condición fuerte de segunda capa. Consideremos la familia $\mathcal{G}_{st}$ de filtros de Gabriel de la forma

$$\mathcal{L}_I = \{L \leq_l R \; ; \; \exists n \in \mathbb{N}, \; I^n \subseteq L\} \; ,$$

donde I es un ideal bilátero que verifica la propiedad de Artin–Rees débil a izquierda, esto es, tal que para cada ideal bilátero J de R existe un número natural n de manera que $JI^n \subseteq IJ$. En presencia de la condición fuerte de segunda capa, esto equivale a decir (ver (1.3.17)) que el filtro $\mathcal{L}_I$ es estable. Dado que todo birradical simétrico σ en $R-\mathbf{mod}$ tiene la propiedad de Artin-Rees débil a izquierda ([11, III.4.10]), en particular $\mathcal{G}_{st}$ contiene a todos los filtros de Gabriel $\mathcal{L}_I$ tales que σ_I es un birradical. Denotaremos a $\mathbb{T}(\mathcal{G}_{st})$ por $\mathbb{T}_{st}$.
Puesto que para todo par de filtros de Gabriel estables $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ los funtores $Q_{\mathcal{L}}Q_{\mathcal{H}}$ y $Q_{\mathcal{H}}Q_{\mathcal{L}}$ coinciden ([11, IV.3.23]), por el lema (4.2.5) se tiene que $Q_{\mathcal{L}_I}Q_{\mathcal{L}_J} = Q_{\mathcal{L}_I \vee \mathcal{L}_J} = Q_{\mathcal{L}_{IJ}}$ para todo par de ideales biláteros I, J que satisfacen la propiedad de Artin–Rees a izquierda.
Luego toda clase de equivalencia $[\mathbf{L}]$ en $\mathbb{T}_{st}$ admite un representante constituido por un sólo filtro de Gabriel $\mathcal{L}_I$ que por lo tanto coincide con $\varepsilon[\mathbf{L}]$.
Consideremos en el espectro de ideales primos biláteros la *topología de Zariski estable*, esto es, la topología cuyos abiertos son de la forma

$$X(I) = \{P \in \mathbf{Spec}R \; ; \; I \nsubseteq P\}$$

e I es un ideal que satisface la propiedad de Artin–Rees, esto es, tal que para cada ideal a izquierda L de R existe un número natural n de manera que $L \cap I^n \subseteq IL$. En virtud de (1.3.13), esto es equivalente a que el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_I$ sea estable.
Si I y J son dos ideales biláteros de R de manera que existe un morfismo en $\mathbb{T}_{st}$ de $[\mathcal{L}_I]$ a $[\mathcal{L}_J]$, entonces, por la proposición (4.2.4), $\mathcal{L}_I \supseteq \mathcal{L}_J$, y esto implica que

$$X(I) = \{P \in \mathbf{Spec}R \; ; \; P \notin \mathcal{L}_I\} \subseteq X(J) \; .$$

Recíprocamente, dado que todo filtro de Gabriel simétrico $\mathcal{L}$ se puede expresar como $\bigcap_{P \notin \mathcal{L}} \mathcal{L}_{R \setminus P}$, si $X(I) \subseteq X(J)$, entonces $\mathcal{L}_I \supseteq \mathcal{L}_J$, y por la proposición (4.2.4), existe un (único) morfismo $[\mathcal{L}_I] \longrightarrow [\mathcal{L}_J]$ en $\mathbb{T}_{st}$.

(4.2.8) En (2.4.8) hemos descrito la construcción de una *topología* en la que los *abiertos* se obtienen como yuxtaposición de conjuntos de Ore tal y como ha sido desarrollada por los autores de [47, 52]. El producto de conjuntos de Ore $S_1 \cdot \ldots \cdot S_n = \{s_1 \cdots s_n \ ; \ s_i \in S_i\}$ en general no es un conjunto de Ore, aunque

$$\mathcal{L}_{S_1 \cdots S_n} = \{L \leq_l R \ ; \ L \cap (S_1 \cdot \ldots \cdot S_n) \neq \emptyset\}$$

es un filtro uniforme. De hecho, $\mathcal{L}_{S_1 \cdots S_n}$ se puede obtener como composición de filtros de Gabriel de la siguiente manera:

(4.2.9) Lema. *Sean $S_1, \ldots S_n$ conjuntos de Ore a izquierda en el anillo R. Entonces*

$$\mathcal{L}_{S_1 \cdots S_n} = \mathcal{L}_{S_1} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{S_n} \ .$$

Demostración. Sea $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. Si $L \in \mathcal{L}_{S_p S_{p+1} \cdots S_n}$, entonces existen $s_p \in S_p$ y $s \in S_{p+1} \cdots S_n$ de tales que $s_p s \in L$. Consideremos el ideal a izquierda $H = L + Rs$ que pertenece a $\mathcal{L}_{S_{p+1} \cdots S_n}$ por contener a s. Dado que S_p es un conjunto de Ore a izquierda, para cada elemento $t + rs \in H$, con $t \in L$, existen $s'_p \in S_p$ y $r' \in R$ tales que $s'_p r = r' s_p$, y esto implica que $s'_p \in (L : t + rs)$ ya que

$$s'_p(t + rs) = s'_p t + r' s_p s \in L \ .$$

Luego $(L : t + rs) \in \mathcal{L}_{S_p}$ y como $t + rs$ está tomado arbitrariamente en H, se concluye que $L \in \mathcal{L}_{S_p} \circ \mathcal{L}_{S_{p+1} \cdots S_n}$.
Recíprocamente, si $L \in \mathcal{L}_{S_p} \circ \mathcal{L}_{S_{p+1} \cdots S_n}$, entonces existe un ideal $H \in \mathcal{L}_{S_{p+1} \cdots S_n}$ tal que $(L : r) \in \mathcal{L}_{S_p}$ para cada $r \in H$. En particular, dado que existe $s \in H \cap (S_{p+1} \cdots S_n)$, el ideal a izquierda $(L : s) \in \mathcal{L}_{S_p}$, y por tanto existe $s_p \in S_p$ tal que $s_p s \in L$. Luego $L \in \mathcal{L}_{S_p S_{p+1} \cdots S_n}$.
Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{S_1 \cdots S_n} = \mathcal{L}_{S_1} \circ \mathcal{L}_{S_2 \cdots S_n} = \mathcal{L}_{S_1} \circ \mathcal{L}_{S_2} \circ \mathcal{L}_{S_3 \cdots S_n} = \cdots = \mathcal{L}_{S_1} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{S_n} \ .$$

□

(4.2.10) Ejemplo. Sea $\mathcal{G}_W$ el conjunto de filtros de Gabriel de la forma

$$\mathcal{L}_S = \{L \leq_l R \ ; \ S \cap L \neq \emptyset\} \ ,$$

donde S es un conjunto de Ore a izquierda de R y denotemos por $\mathbb{T}_W$ al conjunto de clases bajo la relación $\sim$ de elementos de $< \mathcal{G}_W >$.

En virtud del lema (4.2.9), la aplicación que a $S_1 \cdots S_n \in \mathcal{W}_R$ (ver (2.4.8)) le asigna el filtro uniforme $\mathcal{L}_{S_1} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{S_n}$ en $< \mathcal{G}_W >$ es sobreyectiva, y por lo tanto, también lo es la composición con la proyección en $\mathbb{T}_W$.

Por otra parte, si $W = T_1 \cdots T_m$ y $W' = S_1 \cdots S_n$ son objetos de $\mathcal{W}_R$ y existe un morfismo $W \longrightarrow W'$ en $\mathcal{W}_R$, entonces $W = V_0 S_0 V_1 \cdots S_n V_n$ y por lo tanto existe un morfismo $[\mathcal{L}_{T_1} \cdots \mathcal{L}_{T_m}] \longrightarrow [\mathcal{L}_{S_1} \cdots \mathcal{L}_{S_n}]$ en $\mathbb{T}_W$ que puede ser construido de la manera que se describe en (4.2.3)

(4.2.11) Definición. Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R y $[\mathbf{H}]$ un objeto en la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Un *recubrimiento* de $[\mathbf{H}]$ es una familia finita de clases $\{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^n$ que satisface

(4.2.11.1) $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ es un filtro de Gabriel, y

(4.2.11.2) $[\mathcal{L}][\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$.

(4.2.12) Dado un elemento $[\mathbf{H}]$ de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$, denotaremos por $Cov_{\mathcal{G}}[\mathbf{H}]$ al conjunto de recubrimientos de $[\mathbf{H}]$ en $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Nos referiremos al par

$$(\mathbb{T}(\mathcal{G}), \{Cov_{\mathcal{G}}[\mathbf{H}]\}_{[\mathbf{H}] \in \mathbb{T}(\mathcal{G})})$$

como al *sitio no conmutativo* asociado a la familia de filtros de Gabriel $\mathcal{G}$.

El hecho de que se consideren solamente recubrimientos finitos obedece a que hemos supuesto que R es noetheriano a izquierda, y bajo esas hipótesis, si R es comutativo entonces cualquier abierto del espectro primo es compacto.

Por otra parte, la definición de recubrimiento de $[\mathbf{H}]$ no es del todo caprichosa, pues si interpretamos el *abierto* $[\mathcal{L}]$ como la *unión* de los *abiertos* $[\mathbf{L}_\alpha]$, entonces la condición (4.2.11.2) de la definición dice que la *intersección* $[\mathcal{L}][\mathbf{H}]$ coincide con $[\mathbf{H}]$, esto es, $[\mathbf{H}]$ *está contenido* en la *unión* de los $[\mathbf{L}_\alpha]$.

Veamos que en efecto esta noción de recubrimiento generaliza la de recubrimiento por abiertos en el espacio topológico $\mathbf{Spec}R$.

(4.2.13) Ejemplo. Sea R un anillo (noetheriano) conmutativo y consideremos de nuevo la familia de filtros de Gabriel $\mathcal{G}_{Zar}$ formada por todos los filtros de la forma $\mathcal{L}_I$, donde I es un ideal de R. Si $[\mathcal{L}_I] \in \mathbb{T}_{Zar}$ y $\{[\mathcal{L}_{I_\alpha}]\}_{\alpha=1}^n$ es un recubrimiento de $[\mathcal{L}_I]$, entonces

$$\mathcal{L} \vee \mathcal{L}_I = \varepsilon[\mathcal{L}\mathcal{L}_I] = \varepsilon[\mathcal{L}_I] = \mathcal{L}_I \ ,$$

donde $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \mathcal{L}_{I_\alpha}$. Luego $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_I$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} D(I) &= \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ P \notin \mathcal{L}_I\} \\ &\subseteq \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ P \notin \bigcap_{\alpha=1}^n \mathcal{L}_{I_\alpha}\} = \bigcup_{\alpha=1}^n D(I_\alpha) \ . \end{aligned}$$

Por otra parte, si la familia de abiertos $\{D(I_\alpha)\}_{\alpha=1}^n$ de $\mathbf{Spec}R$ recubre a $D(I)$, entonces $D(I) \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^n D(I_\alpha)$, y dado que

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} D(I_\alpha) = \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ \ \exists 1 \leq \alpha \leq n, \ I_\alpha \nsubseteq P\}$$

$$= \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ \sum_{\alpha=1}^{n} I_\alpha \nsubseteq P\} = D(\sum_{\alpha=1}^{n} I_\alpha) \ ,$$

podemos decir que

$$\mathcal{L}_I = \bigcap_{P \in D(I)} \mathcal{L}_{R \setminus P} \supseteq \bigcap_{P \in D(\sum_\alpha I_\alpha)} \mathcal{L}_{R \setminus P} = \mathcal{L} \ ,$$

donde $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_{\sum_\alpha I_\alpha} = \bigcap_{\alpha=1}^n \mathcal{L}_{I_\alpha}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_I \vee \mathcal{L} = \mathcal{L}_I$, y esto implica que $[\mathcal{L}][\mathcal{L}_I] = [\mathcal{L} \vee \mathcal{L}_I] = [\mathcal{L}_I]$. Luego $\{[\mathcal{L}_{I_\alpha}]\}_{\alpha=1}^n$ es un recubrimiento de $[\mathcal{L}_I]$.

(4.2.14) Ejemplo. Sea R un anillo no necesariamente conmutativo (noetheriano a izquierda) tal que todo ideal primo bilátero satisface la condición fuerte de segunda capa. Dado un recubrimiento $\{[\mathcal{L}_{I_\alpha}]\}_{\alpha=1}^n$ de $[\mathcal{L}_I]$ en $\mathbb{T}_{st}$, el razonamiento del ejemplo anterior nos permite asegurar que $\{X(I_\alpha)\}_{\alpha=1}^n$ recubre al abierto $X(I)$, y recíprocamente, que todo recubrimiento (finito) de un abierto $X(I)$ en la topología de Zariski estable de $\mathbf{Spec}R$ genera un recubrimiento de $[\mathcal{L}_I]$ en $\mathbb{T}_{st}$.

(4.2.15) Ejemplo. Sea R un anillo no necesariamente conmutativo y $\mathcal{G}_W$ la familia de filtros de Gabriel de la forma $\mathcal{L}_S$, donde S es un conjunto de Ore a izquierda de R. Dado un objeto $W = S_1 \cdots S_n$ de la categoría $\mathcal{W}_R$ que se describe en (2.4.8), denotemos por $[\mathbf{L}_W]$ a la clase de $\mathcal{L}_{S_1} \cdots \mathcal{L}_{S_n}$ en $\mathbb{T}_W$. Si $\{W_iW \longrightarrow W\}_{i=1}^n$ es un recubrimiento de W, entonces $\{W_i\}_{i=1}^n$ es un recubrimiento global (ver (2.4.9)), esto es, $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{W_i}$ es el filtro de Gabriel $\{R\}$, y $[\{R\}][\mathbf{L}_W]$ es trivialmente igual a $[\mathbf{L}_W]$, con lo que $\{[\mathbf{L}_{W_i}]\}_{i=1}^n$ es un recubrimiento de $[\mathcal{L}]$.

Sin embargo, no todos los recubrimiento de $[\mathbf{L}_W]$ provienen de recubrimientos $\{W_iW \longrightarrow W\}_{i=1}^n$ de W en $\mathcal{W}_R$, puesto que dado un recubrimiento $\{[\mathbf{L}_{W_i}]\}_{i=1}^n$ de $[\mathcal{L}_W]$ en $\mathbb{T}_W$, no siempre se tiene que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_W = \{R\}$, esto es, no todos los recubrimientos de un *abierto* provienen de la intersección del *abierto* con un recubrimiento global.

En general, en el espectro primo de un anillo conmutativo tampoco todo recubrimiento proviene de la intersección con un recubrimiento global. Por ejemplo, sea k un cuerpo y $R = k[x, y]$ el anillo de polinomios en dos variables con coeficientes en k. Consideremos el recubrimiento del abierto $U = D((x,y))$ (que corresponde al plano afín $\mathbb{A}^2_k$ menos el punto $(0,0)$) formado por los abiertos $V = D((x))$ y $W = D((y))$ (el plano menos cada uno de los ejes coordenados respectivamente). Supongamos que existe un recubrimiento global formado por los abiertos $V' = D(I)$ y $W' = D(J)$ de manera que

$$V = V' \cap U = D(I(x,y)) \quad , \quad W = W' \cap U = D(J(x,y)) \ .$$

Dado que $V' \cup W' = D(I+J) = D(R)$, existen dos polinomios $p \in I$ y $q \in J$ de tal manera que $p + q = 1$ (esto es, el punto $(0,0)$ pertenece a $V' \cup W'$). Luego alguno de los dos polinomios tiene término independiente distinto de cero (o equivalentemente, el punto $(0,0)$ pertenece o bien a V', o bien a W'). Supongamos que $p = \alpha + p'$, donde $\alpha \in k$ y p' es un polinomio que no tiene término independiente. Entonces,

$$py = \alpha y + yp' \in I(x,y) \ ,$$

lo que está en contradicción con el hecho de que $I(x,y) = (x)$, puesto que en en el ideal (x) no hay polinomios que tengan términos de grado uno en y. De la misma manera, si suponemos que es q el que tiene término independiente no nulo, también se llega a una contradicción, luego el recubrimiento de U formado por V y W no proviene de la intersección de U con un recubrimiento global.

(4.2.16) Proposición. *Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R y $[\mathbf{H}]$ un elemento de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Si $\{[\mathbf{L}]_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ es un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$ y $\{[\mathbf{L}^\alpha_\beta]\}_{\beta=1}^{m_\alpha}$ es un recubrimiento de $[\mathbf{L}_\alpha]$ para cada $\alpha \in \{1,\dots,n\}$, entonces*

$$\{[\mathbf{L}^\alpha_\beta][\mathbf{L}_\alpha]\}_{1\le\alpha\le n,\ 1\le\beta\le m_\alpha}$$

es un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_\alpha$ a los filtros de Gabriel $\bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$ y $\bigcap_{\beta=1}^{m_\alpha} \varepsilon[\mathbf{L}^\alpha_\beta]$ para $1 \le \alpha \le n$, respectivamente. Dado que $[\mathcal{L}_\alpha][\mathbf{L}_\alpha] = [\mathbf{L}_\alpha]$ para todo α, por (3.1.16) se tiene que

$$\bigcap_{\substack{1\le\alpha\le n\\ 1\le\beta\le m_\alpha}} \varepsilon[\mathbf{L}^\alpha_\beta\mathbf{L}_\alpha] = \bigcap_{\alpha=1}^{n}\bigcap_{\beta=1}^{m_\alpha} \varepsilon[\mathbf{L}^\alpha_\beta] \circ \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$$

$$= \bigcap_{\alpha=1}^{n} \mathcal{L}_\alpha \circ \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha] = \bigcap_{\alpha=1}^{n} \varepsilon[\mathcal{L}_\alpha \mathbf{L}_\alpha] = \bigcap_{\alpha=1}^{n} \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha] = \mathcal{L} \ ,$$

que es un filtro de Gabriel y además verifica la igualdad $[\mathcal{L}][\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$. $\square$

(4.2.17) Para todo elemento $[\mathbf{H}]$ de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$, la familia formada por la clase $[\{R\}]$ es un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$, pues $\{R\}$ es un filtro de Gabriel y trivialmente $[\{R\}][\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$, luego en virtud del resultado anterior, el *sitio no conmutativo* asociado a una familia de filtros de Gabriel $\mathcal{G}$, verifica las propiedades (2.4.8.1) y (2.4.8.2) de los recubrimientos en una topología de Grothendieck.

Por otra parte, si $[\mathbf{H}']$ admite una factorización $[\mathbf{H}'] = [\mathbf{H}][\mathbf{L}]$ entonces, como hemos visto en (4.2.3), existe un morfismo $[\mathbf{H}'] \longrightarrow [\mathbf{H}]$ en $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Si $\{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^n$ es un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$, entonces también es un recubrimiento de $[\mathbf{H}']$, pues si denotamos por $\mathcal{L}$ al filtro de Gabriel $\bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$ y por η a la equivalencia $Q_{\mathbf{H}} \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}$ que proporciona la igualdad $[\mathcal{L}][\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$, entonces $Q_{\mathbf{L}}\eta : Q_{\mathbf{HL}} \longrightarrow Q_{\mathbf{HL}}Q_{\mathcal{L}}$ es también una equivalencia y para cada R–módulo a izquierda M, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{H}'}M \arrow[rr, "Q_{\mathbf{L}}\eta_M"] & & Q_{\mathbf{H}'}Q_{\mathcal{L}}M \\
Q_{\mathbf{H}}M \arrow[u, "j_{\mathbf{L}}"] \arrow[rr, "\eta_M"'] & & Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M \arrow[u, "j_{\mathbf{L}}"'] \\
& M \arrow[ul, "j_{\mathbf{H}}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{L}\mathbf{H}}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(4.2.18) Definición. Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R y sea $\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^n$ un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$ en $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Diremos que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento *estable* si

$$\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^{n} \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$$

es un filtro de Gabriel estable.

(4.2.19) Lema. *La familia* $\{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^n$ *es un recubrimiento estable de* $[\mathbf{H}]$ *en* $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ *si, y sólo si,*

(4.2.19.1) $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$ *es un filtro de Gabriel estable y*

(4.2.19.2) $Q_{\mathbf{H}}T = 0$ *para todo* R*–módulo a izquierda* T *de* $\mathcal{L}$*–torsión.*

Demostración. Si $\{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^n$ es un recubrimiento estable, entonces en efecto $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$ es un filtro de Gabriel estable y para cada R–módulo a izquierda T de $\mathcal{L}$–torsión,

$$Q_{\mathbf{H}}T = Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}T = 0 \ .$$

Recíprocamente, si M es un R–módulo a izquierda, entonces, dado que $Q_{\mathbf{H}}$ es un funtor exacto a izquierda, se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) \xrightarrow{Q_{\mathbf{H}} j_{\mathcal{L},M/\sigma_{\mathcal{L}}M}} Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}\mathrm{Coker} j_{\mathcal{L},M/\sigma_{\mathcal{L}}M} \quad ,$$

y por tanto $Q_{\mathcal{H}} j_{\mathcal{L},M/\sigma_{\mathcal{L}}M}$ es un isomorfismo ya que $Q_{\mathbf{H}}(\mathrm{Coker} j_{\mathcal{L},M/\sigma_{\mathcal{L}}M}) = 0$. Por otra parte, puesto que la sucesión

$$0 \longrightarrow \sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow M \xrightarrow{p} M/\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}M \xrightarrow{Q_{\mathbf{H}}p} Q_{\mathbf{H}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) \longrightarrow (R^1Q_{\mathbf{H}})\sigma_{\mathcal{L}}M \longrightarrow \cdots$$

donde $R^1Q_{\mathbf{H}}$ es el primer funtor derivado a derecha de $Q_{\mathbf{H}}$, es también exacta. Por hipótesis, $Q_{\mathbf{H}}\sigma_{\mathcal{L}}M = 0$, y dado que $\mathcal{L}$ es estable, cualquier resolución inyectiva

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots$$

de $\sigma_{\mathcal{L}}M$ está formada por R–módulos a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión y de ahí que la imagen por $Q_{\mathbf{H}}$ de la resolución es el complejo nulo. Luego $R^nQ_{\mathbf{H}} = 0$ para todo $n \geq 1$, y esto implica que $Q_{\mathbf{H}}p$ es un isomorfismo. Luego $Q_{\mathcal{H}} j_{\mathcal{L},M/\sigma_{\mathcal{L}}M} \circ Q_{\mathbf{H}}p$ es un isomorfismo que hace al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathbf{H}}M \arrow[r, "Q_{\mathbf{H}}p"] & Q_{\mathbf{H}}(M/\sigma_{\mathcal{L}}M) \arrow[r, "Q_{\mathcal{H}} j_{\mathcal{L},M/\sigma_{\mathcal{L}}M}"] & Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}M \\
& M \arrow[ul, "j_{\mathbf{H}}"] \arrow[u, "j_{\mathcal{L}\mathbf{H}}\circ p"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{L}\mathbf{H}}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutativo, y dado que M ha sido tomado arbitrariamente, esto implica que $[\mathcal{L}][\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$. $\square$

Puesto que nuestro objetivo es dotar a cada R–módulo M de un haz de estructura, es preciso apuntar lo que se entiende por intersección de dos recubrimientos. En el caso de ser recubrimientos estables, la noción coincide (salvo en la conmutatividad) con la intersección de recubrimientos en un espacio topológico.

(4.2.20) Proposición. *Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R y $[\mathbf{H}]$ un elemento de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^{n}$ y $\mathcal{V} = \{[\mathbf{H}_\beta]\}_{\beta=1}^{m}$ son recubrimientos estables de $[\mathbf{H}]$, entonces*

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{[\mathbf{L}_\alpha \mathbf{H}_\beta]\}_{\substack{1\leq\alpha\leq n \\ 1\leq\beta\leq m}}$$

también es un recubrimiento estable de $[\mathbf{H}]$.

Demostración. Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ los filtros de Gabriel estables $\bigcap_{\alpha=1}^{n} \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]$ y $\bigcap_{\beta=1}^{m} \varepsilon[\mathbf{H}_\beta]$ respectivamente. Dado que todo par de filtros de Gabriel estables son mutuamente compatibles y el supremo de filtros de Gabriel estables es estable, tenemos que

$$\bigcap_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ 1\leq\beta\leq m}} \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}_\beta] = \bigcap_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ 1\leq\beta\leq m}} \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]\circ\varepsilon[\mathbf{H}_\beta]$$

$$= \bigcap_{\alpha=1}^{n} \varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]\circ\bigcap_{\beta=1}^{m}\varepsilon[\mathbf{H}_\beta] = \mathcal{L}\circ\mathcal{H} = \mathcal{L}\vee\mathcal{H}$$

es un filtro de Gabriel estable.

Sea M un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$–torsión. En virtud del lema (3.1.13) existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

donde M' y M'' son R–módulos a izquierda de $\mathcal{L}$–torsión y $\mathcal{H}$–torsión respectivamente. Como $Q_{\mathbf{H}}$ es un funtor exacto a izquierda, la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}M' \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}M \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}M''$$

también es exacta, y puesto que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son recubrimientos estables, por el lema (4.2.19) se tiene que $Q_{\mathbf{H}}M' = Q_{\mathbf{H}}M'' = 0$, luego $Q_{\mathbf{H}}M = 0$. Dado que M es un R–módulo a izquierda de $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}$–torsión arbitrario, por el lema (4.2.19) $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$ es un recubrimiento estable. □

En general si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son recubrimientos (no necesariamente estables) no podemos asegurar que $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$, definido como en el resultado anterior, sea también un recubrimiento, porque $\bigcap_{\alpha,\beta}\varepsilon[\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}_\beta] = \mathcal{L}\circ\mathcal{H}$ no es generalmente un filtro de Gabriel.

(4.2.21) Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R y $[\mathbf{H}]$ un elemento de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^{n}$ es un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$, entonces

$$\mathcal{U}\wedge\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha\mathbf{L}_\beta]\}_{1\leq\alpha,\beta\leq n}$$

también es un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$ pues, efectivamente,

$$\bigcap_{1\leq\alpha,\beta\leq n}\varepsilon[\mathbf{L}_\alpha\mathbf{L}_\beta] = \bigcap_{1\leq\alpha,\beta\leq n}\varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]\circ\varepsilon[\mathbf{L}_\beta]$$

$$= \bigcap_{\alpha=1}^{n}\varepsilon[\mathbf{L}_\alpha]\circ\bigcap_{\beta=1}^{n}\varepsilon[\mathbf{L}_\beta] = \mathcal{L}\circ\mathcal{L} = \mathcal{L}$$

es un filtro de Gabriel, y $[\mathcal{L}][\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]$.

(4.2.22) Sea M un R–módulo a izquierda. Asociando a cada objeto $[\mathbf{H}]$ de la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ el R–módulo a izquierda $Q_{\mathbf{H}}M$ y a cada morfismo $\eta \in Hom_{\mathbb{T}(\mathcal{G})}([\mathbf{L}],[\mathbf{H}])$ el homomorfismo de R–módulos $\eta_M : Q_{\mathbf{H}}M \longrightarrow Q_{\mathbf{L}}M$, definimos un prehaz de la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ en $R - \mathbf{mod}$ que denotaremos por $\mathcal{O}_M$.

Hay que hacer notar que en general el prehaz $\mathcal{O}_R$ no es un prehaz de anillos. Esto es debido a que dado un objeto $[\mathbf{H}]$ de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$, $Q_{\mathbf{H}}$ no es un funtor localización. Si $[\mathbf{H}] = [\mathcal{H}_1 \cdots \mathcal{H}_n]$ y $Q_{\mathcal{H}_i}Q_{\mathcal{H}_j} = Q_{\mathcal{H}_j}Q_{\mathcal{H}_i}$ para $1 \leq i, j \leq n$ (por ejemplo, $\mathcal{H}_i$ es un filtro de Gabriel estable para cada i) entonces $[\mathbf{H}] = [\mathcal{H}]$, donde $\mathcal{H} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ (ver (4.2.4)), y por lo tanto $\mathcal{O}_R[\mathbf{H}]$ es en ese caso un anillo.

Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R. Diremos que un prehaz $\mathcal{P}$ en la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ es un *haz en el sitio no conmutativo asociado a* $\mathcal{G}$ cuando para cada objeto $[\mathbf{H}]$ de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ y cada recubrimiento $\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^{n}$ de $[\mathbf{H}]$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(4.2.22.1) Si m y m' son elementos de $\mathcal{P}[\mathbf{H}]$ tales que $\mathcal{P}\eta_\alpha(m) = \mathcal{P}\eta_\alpha(m')$, donde η_α es la transformación natural $Q_{\mathbf{H}}j_{\mathbf{L}_\alpha} : [\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}] \longrightarrow [\mathbf{H}]$, para cada $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $m = m'$;

(4.2.22.2) Si $m_\alpha \in \mathcal{P}[\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}]$ y $\mathcal{P}\eta_{\alpha\beta}^{\alpha}(m_\alpha) = \mathcal{P}\eta_{\alpha\beta}^{\beta}(m_\beta)$, donde $\eta_{\alpha\beta}^{\alpha}$ y $\eta_{\alpha\beta}^{\beta}$ son las transformaciones naturales

$$Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}_\alpha}j_{\mathbf{L}_\beta} : [\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}] \longrightarrow [\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}]$$

y

$$Q_{\mathbf{H}}j_{\mathbf{L}_\alpha, Q_{\mathbf{L}_\beta}} : [\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}] \longrightarrow [\mathbf{L}_\beta\mathbf{H}]$$

respectivamente para $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$, entonces existe $m \in \mathcal{P}[\mathbf{H}]$ tal que $\mathcal{P}\eta_\alpha(m) = m_\alpha$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$.

La noción de haz en el sitio no conmutativo coincide con la de haz en la categoría de abiertos de un espacio topológico, pues en efecto, dado un recubrimiento $\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^{n}$ de $[\mathbf{H}]$, para cada α podemos interpretar $[\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}]$ como la intersección de $[\mathbf{L}_\alpha]$ y $[\mathbf{H}]$, y $[\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha\mathbf{H}]$ como la intersección de cada *abierto* $[\mathbf{L}_\beta\mathbf{L}_\alpha]$ de $\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}$ con $[\mathbf{H}]$.

Como una consecuencia directa del teorema (4.1.13) obtenemos:

(4.2.23) Teorema. ([18]) *Sea $\mathcal{G}$ una familia de filtros de Gabriel en R y M un R–módulo a izquierda. Entonces el prehaz $\mathcal{O}_M$ es un haz en el sitio no conmutativo asociado a $\mathcal{G}$.*

Demostración. Sea $[\mathbf{H}]$ un objeto de $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{U} = \{[\mathbf{L}_\alpha]\}_{\alpha=1}^n$ un recubrimiento de $[\mathbf{H}]$. Las condiciones (4.2.22.1) y (4.2.22.2) se verifican si, y sólo si, la sucesión

$$0 \longrightarrow Q_{\mathbf{H}}M \xrightarrow{(\eta_{\alpha,M})_\alpha} \bigoplus_{\alpha=1}^n Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}_\alpha}M \overset{\bigoplus_\alpha(\eta^\alpha_{\alpha\beta})_\beta}{\underset{\bigoplus_\beta(\eta^\beta_{\alpha\beta})_\alpha}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{1\leq\alpha,\beta\leq n} Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathbf{L}_\alpha}Q_{\mathbf{L}_\beta}M$$

es exacta, o equivalentemente, si, y sólo si, $Q_{\mathbf{H}}M$ es el límite del sistema proyectivo

$$Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M = \left\{ \begin{tikzcd} Q_{\mathbf{H}}Q_\alpha M \arrow[dr, "Q_{\mathbf{H}}j^\alpha_{\alpha\beta}"] & \\ & Q_{\mathbf{H}}Q_\alpha Q_\beta M \\ Q_{\mathbf{H}}Q_\beta M \arrow[ur, "Q_{\mathbf{H}}j^\beta_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd} \right\}_{1\leq\alpha,\beta\leq n} ,$$

donde $j^\alpha_{\alpha\beta} = Q_{\mathbf{L}_\alpha}j_{\mathbf{L}_\beta,M}$ y $j^\beta_{\alpha\beta} = j_{\mathbf{L}_\alpha,Q_{\mathbf{L}_\beta}M}$. En efecto, puesto que $\mathcal{U}$ es un recubrimiento, $\mathcal{L} = \bigcap_{\alpha=1}^n \varepsilon(\mathbf{L}_\alpha)$ es un filtro de Gabriel y los funtores $Q_{\mathbf{H}}Q_{\mathcal{L}}$ y $Q_{\mathbf{H}}$ son equivalentes. Por el teorema (4.1.13), esto es suficiente para que el límite proyectivo de $Q_{\mathbf{H}}\mathcal{Q}_{\mathbf{K}}M$ coincida con $Q_{\mathbf{H}}M$. □

(4.2.24) La clase del filtro de Gabriel $\{R\}$ puede ser considerada como el *abierto global* formado por todo el espacio, pues eso es exactamente lo que sucede vía la identificación de la categoría $\mathbb{T}(\mathcal{G})$ con la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo conmutativo noetheriano, o bien con la topología de Zariski estable en el espectro de primos biláteros de un anillo noetheriano a izquierda. Es necesario hacer notar que entonces el R–módulo a izquierda M se obtiene como el R–módulo de secciones globales del haz $\mathcal{O}_M$.

(4.2.25) Ejemplo. Sea R un anillo conmutativo noetheriano y consideremos de nuevo la familia $\mathcal{G}_{Zar}$ de filtros de Gabriel de la forma $\mathcal{L}_I$ donde I es un ideal de R. Teniendo en cuenta la identificación que hemos hecho entre la categoría de abiertos de la topología de Zariski de $\mathbf{Spec}R$ y la categoría $\mathbb{T}_{Zar}$ y dado que para cada R–módulo M el módulo de secciones del haz de estructura clásico en el abierto $D(I)$ es

$$\Gamma(D(I), \mathcal{O}_M) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} Hom_R(I^n, M) = Q_{\mathcal{L}_I}M ,$$

(ver [11, IV.2.6]) tenemos que el haz $\mathcal{O}_M$ que hemos definido sobre el sitio no conmutativo $(\mathbb{T}_{Zar}, Cov_{\mathcal{G}_{Zar}})$ es exactamente el haz de estructura clásico definido por el R–módulo M.

De la misma manera, si R es un anillo (no necesariamente conmutativo) noetheriano a izquierda que verifica la condición fuerte de segunda capa a izquierda, mediante la identificación entre la categoría $\mathbb{T}_{st}$ y la categoría de abiertos de la topología de Zariski estable del espectro de ideales primos biláteros de R obtenemos que el haz $\mathcal{O}_M$ sobre el sitio no conmutativo $(\mathbb{T}_{st}, Cov_{\mathcal{G}_{st}})$ es el haz de estructura asociado al R–módulo a izquierda M, tal y como se define en [11].

(4.2.26) Nota. Por otra parte, si consideramos la familia $\mathcal{G}_W$ de filtros de Gabriel de la forma $\mathcal{L}_S$, donde S es un conjunto de Ore a izquierda de R, nuestra construcción del sitio no conmutativo asociado a $\mathcal{G}_W$ generaliza en cierta manera a la de Van Oystaeyen y Willaert en el sentido de que las secciones del haz $\mathcal{O}_M$ sobre el objeto $[\mathbf{L}_W]$, donde $W = S_1 \cdots S_n \in \mathcal{W}(R)$ (ver (2.4.8)), coinciden con las del haz de estructura definido en [47, 52] que describimos en 2.4. Sin embargo, su *topología no conmutativa* adolece de propiedades topológicas como el hecho de que todo el espacio sea un abierto, o de recubrimientos que no provengan de la *intersección* con recubrimientos globales, y por lo tanto no generaliza a la topología del espectro de un anillo conmutativo, como se ha visto en (4.2.15). Esa es la principal razón por la que se ha considerado realizar la construcción que se presenta en este capítulo.

Capítulo 5

Casi–Cuantales

5.1. $R - \mathbf{filt}^{opp}$ es un casi–cuantal

En esta sección se introduce la definición de casi–cuantal y se enumeran algunas de las propiedades que satisface esta estructura. También se proporcionan varios ejemplos, como son el retículo de filtros uniformes sobre un anillo y algunos de sus subretículos.

(5.1.1) Definición. ([17]) Un *casi–cuantal* es un retículo completo $\mathcal{C}$ dotado de una operación binaria asociativa

$$\& : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

que tiene al elemento superior 1 como elemento neutro y de tal manera que para todo U perteneciente a $\mathcal{C}$ y toda familia $\{V_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{C}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(5.1.1.1) $U \,\&\, \bigvee_{i\in I} V_i = \bigvee_{i\in I} U \,\&\, V_i$;

(5.1.1.2) $\bigvee_{i\in I}(V_i \,\&\, U) \leq (\bigvee_{i\in I} V_i) \,\&\, U$, y siempre que I sea finito se tiene que $\bigvee_{i\in I}(V_i \,\&\, U) = (\bigvee_{i\in I} V_i) \,\&\, U$.

Si $\mathcal{C}$ es un casi–cuantal y se cumple la igualdad en (5.1.1.2) aún cuando I no sea un conjunto finito, entonces se dice que $\mathcal{C}$ es un *cuantal* (ver [6]).

(5.1.2) Para cada par de elementos U y V del casi–cuantal $\mathcal{C}$ se verifica que

$$U \,\&\, V \leq (U \,\&\, V) \vee (U \,\&\, 1) = U \,\&\, (V \vee 1) = U$$

y también que

$$U \,\&\, V \leq (U \,\&\, V) \vee (1 \,\&\, V) = (U \vee 1) \,\&V = V \ .$$

Por lo tanto el producto $U \,\&\, V$ es siempre menor que el ínfimo $U \wedge V$.
Si el producto $U \,\&\, V$ coincide con el ínfimo de cada par de elementos U y V de $\mathcal{C}$ (lo que implica que & es una operación conmutativa) entonces se dice que $\mathcal{C}$ es un *local* ([5, 8]). El conjunto de abiertos de una topología, parcialmente ordenado por la inclusión, es un local. La noción de (casi–)cuantal se introduce como una generalización de la noción de espacio topológico, con la salvedad de que la *intersección* de abiertos (la operación &) no es necesariamente conmutativa.

(5.1.3) Ejemplo. El retículo opuesto al retículo de los filtros uniformes en el anillo R, que se denota $R - \mathbf{filt}^{opp}$, es un casi–cuantal con la composición de filtros.
En efecto, R–$\mathbf{filt}^{opp}$ es un retículo completo ordenado por la inclusión inversa, en el que el supremo de una familia viene dado por su intersección. El filtro uniforme $\{R\}$ es el elemento neutro de la composición y, como se ha probado con el lema (3.1.16), también se satisfacen las condiciones (5.1.1.1) y (5.1.1.2).

(5.1.4) Nota. Llegados a este punto cabe plantearse si R–$\mathbf{filt}^{opp}$ es un local, esto es, si es un (casi–)cuantal con la operación $\wedge$ (el supremo en $R - \mathbf{filt}$). Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme y $\{\mathcal{H}_a\}_{a\in A}$ es una familia de filtros uniformes, entonces

$$\mathcal{L} \vee \bigcap_{a\in A} \mathcal{H}_a = \{K \leq_l R \,;\, \exists L \in \mathcal{L},\ \exists H \in \bigcap_{a\in A} \mathcal{H}_a,\ L \cap H \subseteq K\}$$

$$\subseteq \{K \leq_l R \,;\, \forall a \in A,\ \exists L_a \in \mathcal{L},\ \exists H_a \in \mathcal{H}_a,\ L_a \cap H_a \subseteq K\} = \bigcap_{a\in A} \mathcal{L} \vee \mathcal{H}_a\ ,$$

pero no se puede decir que la otra inclusión también se verifique, ni aún siendo el conjunto de índices A finito, como se muestra a continuación:
Sea k un cuerpo y R el anillo (conmutativo) $k\{x, y\}/(xy, yx)$, cociente de la k–álgebra libre $k\{x, y\}$ por el ideal bilátero generado por xy e yx. El ideal bilátero I generado por $x + y$ contiene a todas las potencias de x y de y de orden mayor o igual a 2, además de a $x + y$. Sean J y K los ideales de R generados por x e y respectivamente. Entonces

$$\mathcal{L}_I \wedge (\mathcal{L}_J \cap \mathcal{L}_K) = \mathcal{L}_I \wedge \mathcal{L}_{J+K} = \mathcal{L}_{I\cap(J+K)} = \mathcal{L}_I\ .$$

Por otra parte

$$(\mathcal{L}_I \wedge \mathcal{L}_J) \cap (\mathcal{L}_I \wedge \mathcal{L}_K) = \mathcal{L}_{I\cap J} \cap \mathcal{L}_{I\cap K} = \mathcal{L}_{(I\cap J)+(I\cap K)}$$

contiene estrictamente a $\mathcal{L}_I \wedge (\mathcal{L}_J \cap \mathcal{L}_K)$ puesto que $x + y$ no pertenece al ideal

$$(I \cap J) + (I \cap K) = \{ \sum_{\substack{i,j\geq 2 \\ finita}} a_i x^i + b_j y^j \ ;\ a_i, b_j \in k\}\ ,$$

y por lo tanto $(I \cap J) + (I \cap K)$ está contenido estrictamente en I

(5.1.5) Ejemplo. Sea R un anillo conmutativo y noetheriano. Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son filtros uniformes (simétricos) en R, entonces, en virtud del lema (3.1.33),

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{H} = \{K \leq R \; ; \; \exists L \in \mathcal{L}, \; \exists H \in \mathcal{H}, \; LH \subseteq K\} = \mathcal{H} \circ \mathcal{L} \; .$$

Luego la composición en $R - \mathbf{filt}^{opp}$ tiene la propiedad conmutativa, al igual que la intersección de los abiertos en cualquier topología de $\mathbf{Spec}R$.

(5.1.6) Definición. Un morfismo de retículos $q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ entre casi–cuantales se dice que es un *morfismo de casi–cuantales* si conserva el producto, el elemento superior y el supremo de cualquier familia.

(5.1.7) Ejemplo. ([6]) Consideremos el retículo $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ de filtros jansianos de un anillo R parcialmente ordenado por la inclusión inversa. Como se ha probado en (3.1.25), la aplicación dada por $I \longmapsto \mathcal{L}_I$ es una biyección entre el conjunto de ideales biláteros de R y el de filtros uniformes jansianos en R. Además, para cada par de ideales biláteros I y J de R, la inclusión $\mathcal{L}_I \supseteq \mathcal{L}_J$ equivale a $I \subseteq J$. Por otra parte, $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ es un subretículo de $R - \mathbf{filt}^{opp}$ (ver (3.1.27)), y para ideales biláteros cualesquiera I y J, y cualquier familia $\{I_a\}_{a \in A}$ de ideales biláteros de R, se tiene

$$\bigcap_{a \in A} \mathcal{L}_{I_a} = \mathcal{L}_{\sum_{a \in A} I_a} \; ,$$

y

$$\mathcal{L}_I \wedge \mathcal{L}_J = \mathcal{L}_{I \cap J} \; ,$$

(con el ínfimo tomado en $R - \mathbf{filt}^{opp}$), luego $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ es isomorfo al retículo de ideales biláteros de R.

Puesto que para los ideales biláteros I y J,

$$\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J = \mathcal{L}_{IJ}$$

es un filtro jansiano, la composición de filtros es una operación asociativa en $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ que tiene por elemento neutro al filtro uniforme jansiano $\mathcal{L}_R = \{R\}$. Además, dado que un filtro uniforme jansiano es cerrado al tomar intersecciones arbitrarias, el lema (3.1.16) garantiza la igualdad tanto en (5.1.1.1) como en (5.1.1.2), esto es, $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ es un cuantal. El morfismo inclusión de retículos

$$Id(R) - \mathbf{filt}^{opp} \longrightarrow R - \mathbf{filt}^{opp}$$

es un morfismo de casi–cuantales, y por tanto $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ es un *subcasi–cuantal* de $R - \mathbf{filt}^{opp}$.

(5.1.8) Nota. Sea R un anillo conmutativo y noetheriano. Como se ha probado en (5.1.5), la composición de filtros uniformes en R tiene la propiedad conmutativa, como la intersección de abiertos en una topología.
A cada filtro uniforme jansiano $\mathcal{L}_I$ de R le podemos asociar el abierto

$$D(\mathcal{L}_I) = D(I) = \{P \in \mathbf{Spec}R \ ; \ P \notin \mathcal{L}_I\}$$

de $\mathbf{Spec}R$. Si $\mathcal{L}_I$ y $\mathcal{L}_J$ son filtros uniformes jansianos en R, entonces

$$D(\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J) \subseteq D(\mathcal{L}_I) \cap D(\mathcal{L}_J) \ ,$$

dado que $\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J$ contiene a $\mathcal{L}_I$ y a $\mathcal{L}_J$. Recíprocamente, sea P un elemento de $D(\mathcal{L}_I) \cap D(\mathcal{L}_J)$, y supongamos que P pertenece a $\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J = \mathcal{L}_{IJ}$, esto es, $IJ \subseteq P$. Entonces o bien $I \subseteq P$, o bien $J \subseteq P$, y ambas afirmaciones contradicen que $P \in D(\mathcal{L}_I) \cap D(\mathcal{L}_J)$.
Luego $D(\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_J) = D(\mathcal{L}_I) \cap D(\mathcal{L}_J)$, y en este sentido la composición de filtros uniformes puede ser considerada como una generalización de la intersección de abiertos de la topología de Zariski.

(5.1.9) Ejemplo. Sea R noetheriano a izquierda y consideremos el retículo $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ constituido por todos los filtros uniformes simétricos en R parcialmente ordenado por la inclusión inversa. Como se ha probado en (3.1.30), $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ es un subretículo de $R-\mathbf{filt}^{opp}$, y por ser R noetheriano a izquierda, la composición de filtros uniformes simétricos es un filtro uniforme simétrico. Por tanto la composición es una operación binaria asociativa en $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ que tiene como elemento neutro al filtro uniforme simétrico $\{R\}$. Además, puesto que el supremo de una familia arbitraria en $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ coincide con el supremo tomado en $R-\mathbf{filt}^{opp}$ (es la intersección de filtros uniformes), se verifican las condiciones (5.1.1.1) y (5.1.1.2), y se puede concluir que $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ es un subcasi–cuantal de $R-\mathbf{filt}^{opp}$.

(5.1.10) Si $\mathcal{L}$ es un filtro uniforme, entonces el intervalo

$$[\mathcal{L}, \{R\}] = \{\mathcal{H} \in R-\mathbf{filt}^{opp} \ ; \ \mathcal{L} \supseteq \mathcal{H}\}$$

es un subcasi–cuantal de $R-\mathbf{filt}^{opp}$ si, y sólo si, es cerrado para la composición.
Por otra parte, el intervalo

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}] = \{\mathcal{H} \in R-\mathbf{filt}^{opp} \ ; \ \mathcal{H} \supseteq \mathcal{L}\}$$

es siempre cerrado para la composición, la intersección y el ínfimo de cualquier familia tomado en $R-\mathbf{filt}^{opp}$. Sin embargo no es un casi–cuantal, porque el elemento superior $\mathcal{L}$, en general, no es el elemento neutro de la composición. Esto motiva la siguiente definición.

(5.1.11) Definición. ([17]) Sea $\mathcal{L}$ un filtro uniforme en R. Se dice que un filtro uniforme $\mathcal{H}$ (que contiene a $\mathcal{L}$) es $\mathcal{L}$*–Gabriel* si $\mathcal{L} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{L} = \mathcal{H}$.

Claramente un filtro uniforme $\mathcal{H}$ es de Gabriel si, y sólo si, es $\mathcal{L}$–Gabriel para todo filtro uniforme $\mathcal{L}$ contenido en $\mathcal{H}$.

(5.1.12) Ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel en R. El conjunto $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ de todos los filtros uniformes $\mathcal{H}$ en R que son $\mathcal{L}$–Gabriel es un retículo completo parcialmente ordenado por la inclusión inversa, pues en efecto, si $\{\mathcal{H}_a\}_{a \in A}$ es una familia de filtros $\mathcal{L}$–Gabriel, entonces

$$\mathcal{L} \circ \bigcap_{a \in A} \mathcal{H}_a = \bigcap_{a \in A} \mathcal{L} \circ \mathcal{H}_a = \bigcap_{a \in A} \mathcal{H}_a \ ,$$

y por otro lado

$$\bigcap_{a \in A} \mathcal{H}_a \subseteq (\bigcap_{a \in A} \mathcal{H}_a) \circ \mathcal{L} \subseteq \bigcap_{a \in A} (\mathcal{H}_a \circ \mathcal{L}) = \bigcap_{a \in A} \mathcal{H}_a \ ,$$

esto es, la intersección $\bigcap_{a \in A} \mathcal{H}_a$ también es un filtro $\mathcal{L}$–Gabriel, lo que implica que el supremo en $R - \mathbf{filt}^{opp}$ de la familia $\{\mathcal{H}_a\}_{a \in A}$ pertenece a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ son filtros $\mathcal{L}$–Gabriel, entonces, dado que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, el filtro uniforme

$$\mathcal{L} \circ (\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}') \circ \mathcal{L}$$

(donde el ínfimo $\wedge$ está tomado en $R - \mathbf{filt}^{opp}$) es $\mathcal{L}$–Gabriel. Cualquier otro filtro $\mathcal{L}$–Gabriel que contenga a $\mathcal{H}$ y a $\mathcal{H}'$ también contiene a $\mathcal{L} \circ (\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}') \circ \mathcal{L}$, de donde se concluye que $\mathcal{L} \circ (\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}') \circ \mathcal{L}$ es el ínfimo de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.
Por otra parte, la composición de filtros es una operación binaria asociativa en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, pues si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ son filtros $\mathcal{L}$–Gabriel, entonces

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{H}' \circ \mathcal{L} = \mathcal{H} \circ \mathcal{H}' = \mathcal{L} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{H}' \ .$$

El elemento neutro de la composición en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ es el elemento superior $\mathcal{L}$. Como consecuencia de que el supremo en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ coincide con el supremo en $R - \mathbf{filt}^{opp}$, se verifican las condiciones (5.1.1.1) y (5.1.1.2), y por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ es un casi–cuantal, aunque no es un subcasi–cuantal de $R - \mathbf{filt}^{opp}$ puesto que el elemento superior en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ es $\mathcal{L}$.
Si $\mathcal{L} = \{R\}$, entonces $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ es el casi–cuantal $R - \mathbf{filt}^{opp}$, pues todo filtro uniforme es $\{R\}$–Gabriel por definición.

(5.1.13) Ejemplo. De manera similar, si R es noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico, entonces el retículo $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ de los filtros $\mathcal{L}$–Gabriel simétricos parcialmente ordenado por la inclusión inversa es un subretículo de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$. En efecto, la intersección arbitraria de filtros $\mathcal{L}$–Gabriel simétricos pertenece a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ y si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ pertenecen a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$, entonces el ínfimo $\mathcal{L} \circ (\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}') \circ \mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ tomado en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, también es un filtro $\mathcal{L}$–Gabriel simétrico.

Además, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ es cerrado para la composición (ver (3.1.30)) y el elemento superior $\mathcal{L} \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ es el elemento neutro. Dado que el supremo en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ de una familia de filtros $\mathcal{L}$–Gabriel simétricos es la intersección de los elementos de la familia, las condiciones (5.1.1.1) y (5.1.1.2) se heredan del casi–cuantal $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, lo que implica que $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ es un subcasi–cuantal de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

En general $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ no es un subcasi–cuantal de $(R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$, pues el elemento superior de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ es $\mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel simétrico $\{R\}$, entonces $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)} = (R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$.

(5.1.14) Ejemplo. Sea I un ideal bilátero idempotente de R. Entonces el filtro uniforme jansiano $\mathcal{L}_I$ es un filtro de Gabriel pues, como se ha probado en (3.1.25),

$$\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{I^2} = \mathcal{L}_I \ .$$

Denotemos por $\mathcal{C}_I^{jan}$ al conjunto de los filtros uniformes jansianos $\mathcal{L}_J$ de tal manera que $JI = IJ = J$, o equivalentemente, al conjunto de los filtros jansianos $\mathcal{L}_I$–Gabriel. De la misma manera que en el ejemplo anterior, $\mathcal{C}_I^{jan}$ es un subretículo de $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ con $\mathcal{L}_I$ como elemento superior. Dado que $\mathcal{C}_I^{jan}$ es cerrado para la composición y el supremo viene dado por la intersección, el retículo $\mathcal{C}_I^{jan}$ dotado con la composición es un subcasi–cuantal de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_I}^{(2)}$. Además, puesto que $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$ es un cuantal, la igualdad en la propiedad (5.1.1.2) se verifica también para familias arbitrarias de elementos de $\mathcal{C}_I^{jan}$, luego $\mathcal{C}_I^{jan}$ es un cuantal.

(5.1.15) Un elemento $W \neq 1$ de un casi–cuantal $\mathcal{C}$ se dice que es *primo* si, siempre que $U \,\&\, V \leq W$, se tiene que o bien $U \leq W$ o bien $V \leq W$. Si U es un elemento de $\mathcal{C}$, se define el *radical de* U, y se denota por $\sqrt{U}$, como el ínfimo de la familia de elementos primos de $\mathcal{C}$ que contienen a U. El radical de U siempre supera a U.

Un filtro uniforme en R se dice que es *primo** si es un elemento primo del casi–cuantal $R - \mathbf{filt}^{opp}$ (ver [21]). Si L es un ideal a izquierda maximal de R, entonces $\mathcal{L}_L$ es un filtro uniforme primo*. En efecto, si $\mathcal{L}_L$ está contenido en la composición $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}$, entonces existe un ideal a izquierda $H \in \mathcal{H}$ conteniendo a L tal que $(L : r) \in \mathcal{L}$ para cada $r \in H$. Si $L = H$, entonces $\mathcal{L}_L \subseteq \mathcal{H}$. En caso contrario, por ser L maximal, H tiene que coincidir con R, y en particular, para $1 \in H$, el ideal a izquierda $L = (L : 1) \in \mathcal{L}$, luego $\mathcal{L}_L \subseteq \mathcal{L}$.

Por otra parte, si P es un ideal primo bilátero del anillo noetheriano a izquierda R y el filtro uniforme (jansiano) $\mathcal{L}_P$ está contenido en la composición de los filtros uniformes simétricos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$, entonces $P \in \mathcal{L} \circ \mathcal{H}$ y, por (3.1.33), existen elementos $L \in \mathcal{L}$ resp. $H \in \mathcal{H}$ tales que $LH \subseteq P$. Como P es primo, se puede concluir que o bien $L \subseteq P$ y de ahí $\mathcal{L}_P \subseteq \mathcal{L}$, o bien $H \subseteq P$ y por lo tanto $\mathcal{L}_P \subseteq \mathcal{H}$. Luego $\mathcal{L}_P$ es un elemento primo de $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ y también de $Id(R)-\mathbf{filt}^{opp}$.

Muchas propiedades de los filtros primos* se pueden ver como particularización al casi–cuantal $R-\mathbf{filt}^{opp}$ de sus análogas en un casi–cuantal genérico.

(5.1.16) Proposición. ([6]) *Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal. Si U, V son elementos cualesquiera de $\mathcal{C}$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{C}$, entonces*

(5.1.16.1) *si $U \leq V$, entonces $\sqrt{U} \leq \sqrt{V}$;*

(5.1.16.2) $\sqrt{\sqrt{U}} = \sqrt{U}$;

(5.1.16.3) $\sqrt{\bigvee_{i\in I} U_i} = \sqrt{\bigvee_{i\in I} \sqrt{U_i}}$;

(5.1.16.4) $\sqrt{U \,\&\, V} = \sqrt{U} \wedge \sqrt{V}$.

Demostración. Si $U \leq V$ y W es un elemento primo de $\mathcal{C}$ de manera que $V \leq W$, entonces $U \leq W$, de donde se tiene que

$$\sqrt{U} = \bigwedge\{W;\ U \leq W,\ W \text{ primo}\} \leq \bigwedge\{W;\ V \leq W,\ W \text{ primo}\} = \sqrt{V}\ .$$

Esto implica que si U es un elemento de $\mathcal{C}$, dado que $U \leq \sqrt{U}$, entonces $\sqrt{U} \leq \sqrt{\sqrt{U}}$. Por otro lado, si W es un elemento primo de $\mathcal{L}$ tal que $U \leq W$, entonces $\sqrt{U} \leq W$, de donde se concluye que

$$\sqrt{U} = \bigwedge\{W; U \leq W,\ W \text{ primo}\} \geq \bigwedge\{W; \sqrt{U} \leq W,\ W \text{ primo}\} = \sqrt{\sqrt{U}}\ .$$

Un elemento primo de $\mathcal{C}$ supera al supremo de la familia $\{U_i\}_{i\in I}$ si, y sólo si, supera a cada uno de (los radicales de) sus miembros, esto es, si, y sólo si, supera al supremo de la familia $\{\sqrt{U_i}\}_{i\in I}$. Por lo tanto

$$\sqrt{\bigvee_{i\in I} U_i} = \bigwedge\{W;\ \bigvee_{i\in I} U_i \leq W,\ W \text{ primo}\} = \sqrt{\bigvee_{i\in I} \sqrt{U_i}}\ .$$

Dado que en un casi–cuantal el producto de un par de elementos es menor que cada uno de ellos ((5.1.2)), por (1) se tiene que $\sqrt{U \,\&\, V} \leq \sqrt{U} \wedge \sqrt{V}$. Si

W es un elemento primo de $\mathcal{C}$ tal que $U \mathbin{\&} V \leq W$, entonces o bien $U \leq W$ o bien $V \leq W$, de donde se concluye que

$$\sqrt{U} \wedge \sqrt{V} = \bigwedge\{W;\ W \text{ primo y } U \leq W \text{ o } V \leq W\} \leq \sqrt{U \mathbin{\&} V}\ .$$

$\square$

(5.1.17) Ejemplo. Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal, y denotemos por $\sqrt{\mathcal{C}}$ al subconjunto de elementos radicales de $\mathcal{C}$, esto es, de elementos $W \in \mathcal{C}$ tales que $\sqrt{W} = W$. El orden parcial de $\mathcal{C}$ induce un orden parcial en $\sqrt{\mathcal{C}}$.

Por otra parte, dada una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{C}$, por (5.1.16.2) $\sqrt{\bigvee_{i\in I} U_i}$ es un elemento radical, y si V es un elemento radical tal que $U_i \leq V$ para cada $i \in I$, entonces $\bigvee_{i\in I} U_i \leq V$ y

$$\sqrt{\bigvee_{i\in I} U_i} \leq \sqrt{V} = V\ ,$$

luego $\sqrt{\bigvee_{i\in I} U_i}$ es el supremo de la familia $\{U_i\}_{i\in I}$ en $\sqrt{\mathcal{C}}$. Por tanto, $\sqrt{\mathcal{C}}$ es un retículo completo.

El ínfimo en $\mathcal{C}$ de un par de elementos U y V de $\sqrt{\mathcal{C}}$, en virtud de (5.1.16.4), viene dado por

$$U \wedge V = \sqrt{U} \wedge \sqrt{V} = \sqrt{U \mathbin{\&} V}\ ,$$

esto es, el ínfimo en $\mathcal{C}$ de dos elementos radicales también es un elemento radical, y por lo tanto el ínfimo de cualquier familia finita de elementos de $\sqrt{\mathcal{C}}$ coincide con el ínfimo tomado en $\mathcal{C}$.

Además, si U es un elemento radical y $\{V_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\sqrt{\mathcal{C}}$, entonces

$$U \wedge \sqrt{\bigvee_{i\in I} V_i} = \sqrt{U} \wedge \sqrt{\bigvee_{i\in I} V_i}\ ,$$

y por (5.1.16.4), este elemento coincide con

$$\sqrt{U \mathbin{\&} \bigvee_{i\in I} V_i}\ .$$

Dado que $\mathcal{C}$ es un casi–cuantal,

$$U \mathbin{\&} \bigvee_{i\in I} V_i = \bigvee_{i\in I} U \mathbin{\&} V_i\ ,$$

y por (5.1.16.3)

$$\sqrt{\bigvee_{i\in I} U \mathbin{\&} V_i} = \sqrt{\bigvee_{i\in I} \sqrt{U \mathbin{\&} V_i}} = \sqrt{\bigvee_{i\in I} \sqrt{U} \wedge \sqrt{V_i}} = \sqrt{\bigvee_{i\in I} U \wedge V_i} \ .$$

Luego $\sqrt{\mathcal{C}}$ es un local.

En general, aunque conserva el orden de los elementos y el ínfimo de cualquier familia finita, la inclusión $\sqrt{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ no es un morfismo de casi–cuantales.

En virtud de (5.1.16.1), la aplicación

$$\sqrt{\cdot} : \mathcal{C} \longrightarrow \sqrt{\mathcal{C}} \ ; \quad U \longmapsto \sqrt{U}$$

también conserva el orden de los elementos. Para cada par de elementos U y V de $\mathcal{C}$, se tiene que $\sqrt{U \wedge V} \geq \sqrt{U \mathbin{\&} V} = \sqrt{U} \wedge \sqrt{V}$, y por otra parte, $\sqrt{U \wedge V} \leq \sqrt{U} \wedge \sqrt{V}$ puesto que $\sqrt{U \wedge V} \leq \sqrt{U}$ y $\sqrt{U \wedge V} \leq \sqrt{V}$, luego

$$\sqrt{U \wedge V} = \sqrt{U} \wedge \sqrt{V} \ .$$

Por (5.1.16.3), el supremo en $\sqrt{\mathcal{C}}$ de la familia $\{\sqrt{U_i}\}_{i\in I}$ es el radical del supremo $\bigvee_{i\in I} U_i$ tomado en $\mathcal{C}$, lo que implica que $\sqrt{\cdot}$ es un morfismo de retículos. Además, el radical del elemento superior es el propio 1 (pues dado que 1 no es primo, la familia de primos que lo superan es vacía), y el radical del producto de dos elementos U y V es el ínfimo (el producto en el local $\sqrt{\mathcal{C}}$) de sus radicales (por (5.1.16.4)), de donde se concluye que $\sqrt{\cdot}$ es un morfismo de casi–cuantales.

5.2. Haces en un casi–cuantal

Para representar al anillo R por medio de un haz definido sobre un casi–cuantal, se ha optado en esta sección por una construcción dual a la que se detalla en (1.1.18), en términos de *secciones* y *abiertos* donde coinciden dichas secciones al estilo de [5, 6, 8, 27, et al.].

(5.2.1) Definición. Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal. Un *haz débil* sobre $\mathcal{C}$ es un par $(A, [\cdot = \cdot])$ formado por un conjunto A, a cuyos elementos nos referiremos como a los *generadores*, y una aplicación

$$[\cdot = \cdot] : A \times A \longrightarrow \mathcal{C}$$

(que describe las *relaciones* entre los generadores) de manera que para cada par de elementos a y c de A, se satisfacen las siguientes condiciones:

(5.2.1.1) $\bigvee_{b\in A}[a=b]\ \&\ [b=c]=[a=c]$;

(5.2.1.2) $\bigvee_{b\in A}[b=c]\ \&\ [a=b]=[c=a]$.

Un *haz sobre el casi–cuantal* $\mathcal{C}$, o $\mathcal{C}$*–haz*, es un haz débil $(A,[\cdot=\cdot])$ en el que se verifica $[a=a]=1$ para cada $a\in A$.

Como se ha visto en (5.1.8), la noción de casi–cuantal es una generalización de la topología de Zariski del espectro de un anillo conmutativo. En este sentido, la *igualdad* $[a=b]$ puede ser interpretada como el *abierto* donde las *secciones* a y b coinciden.

(5.2.2) Ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel en R y M un R–módulo a izquierda. Consideremos la aplicación del producto cartesiano $M\times M$ en el casi–cuantal $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ dada por

$$[m=m']=\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}\circ\mathcal{L}$$

para cada m y m' pertenecientes a M, donde $\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}$ es el filtro uniforme generado por el ideal a izquierda $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')$ (ver (3.1.25)). Dado que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}\circ\mathcal{L}$ es un filtro $\mathcal{L}$–Gabriel para cualquier filtro uniforme $\mathcal{H}$, y en particular para $\mathcal{H}=\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}$.

El par $(M,[\cdot=\cdot])$ es un $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haz. En efecto, si m y m' son dos elementos de M, entonces el supremo en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ de la familia $\{[m=m'']\circ[m''=m']\}_{m''\in M}$ es la intersección

$$\bigcap_{m''\in M}\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')}\circ\mathcal{L}\ ,$$

que está contenida, tomando $m''=m'$, en

$$\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_R\circ\mathcal{L}=\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}\circ\mathcal{L}=[m=m']\ .$$

Por otra parte, para cada $m''\in M$ el anulador

$$\mathrm{Ann}^l_R(m-m')=\mathrm{Ann}^l_R(m-m''+m''-m')$$

contiene a la intersección $\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')\cap\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')$, y como ambos ideales a izquierda en dicha intersección pertenecen a

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')}\subseteq\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')}\ ,$$

se tiene que $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')\in\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}\subseteq\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')}\ ,$$

y esto implica que

$$[m = m'] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')} \circ \mathcal{L}$$

$$\subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')} \circ \mathcal{L} = [m = m''] \circ [m'' = m'] \ .$$

Dado que m'' ha sido tomado de manera arbitraria, se puede concluir que $[m = m'] \subseteq \bigcap_{m'' \in M} [m = m''] \circ [m'' = m']$, y esto prueba la igualdad

$$[m = m'] = \bigvee_{m'' \in M} [m = m''] \ \& \ [m'' = m'] \ .$$

Una vez que se ha probado (5.2.1.1), la condición (5.2.1.2) se satisface automáticamente, pues de la manera en que se ha definido la aplicación $[\cdot = \cdot]$, se tiene que $[m = m'] = [m' = m]$ para todo par de elementos m y m' de M. Además, $[m = m] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_R \circ \mathcal{L} = \mathcal{L}$ para cada $m \in M$, luego $(M, [\cdot = \cdot])$ es un haz sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

En particular, si $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel $\{R\}$, entonces el par $(M, [\cdot = \cdot])$, donde $[m = m'] = \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')}$ para todo m y m' pertenecientes a M, es un haz sobre $R - \mathbf{filt}^{opp}$.
De manera similar se puede asociar a cada R–módulo a izquierda un haz con valores en el casi–cuantal de filtros uniformes simétricos resp. de filtros uniformes jansianos:

(5.2.3) Ejemplo. Sea R un anillo noetheriano a izquierda. Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico y M es un R–módulo a izquierda, podemos considerar el par $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ donde $[\cdot = \cdot]^{(2)}$ es la aplicación de $M \times M$ en el casi–cuantal $\mathcal{L}^{(2)}_{\mathcal{L}}$ dada por

$$[m = m']^{(2)} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*} \circ \mathcal{L} \ ,$$

donde $\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*}$ es el filtro jansiano generado por $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*$, el mayor ideal bilátero contenido en el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')$. De la misma manera que en el ejemplo anterior, $[m = m']^{(2)}$ es $\mathcal{L}$–Gabriel, y por el lema (3.1.30), $[m = m']^{(2)}$ es un filtro $\mathcal{L}$–Gabriel simétrico para todo m y m' pertenecientes a M.
Por otra parte, si m, m' y m'' son tres elementos de M, la intersección $\mathrm{Ann}^l_R(m-m'') \cap \mathrm{Ann}^l_R(m''-m')$ pertenece al filtro uniforme simétrico

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')^*} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')^*} \ ,$$

y dado que $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')$ contiene a $\mathrm{Ann}^l_R(m-m'') \cap \mathrm{Ann}^l_R(m''-m')$, el ideal bilátero $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*$ también pertenece a dicho filtro uniforme simétrico. Luego

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')^*} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m''-m')^*} \ ,$$

y por tanto $[m = m']^{(2)} \subseteq [m = m'']^{(2)} \circ [m'' = m']^{(2)}$. Como m'' es un elemento arbitrario de M, esto implica que

$$[m = m']^{(2)} \subseteq \bigvee_{m'' \in M} [m = m'']^{(2)} \,\&\, [m'' = m']^{(2)} \ ,$$

y dado que la otra inclusión siempre es cierta (tomando $m'' = m'$), se tiene que m y m'' verifican la condición (5.2.1.1). La condición (5.2.1.2) es consecuencia de (5.2.1.1), porque $[m = m']^{(2)} = [m' = m]^{(2)}$.
Por otra parte, $[m = m]^{(2)} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_R \circ \mathcal{L} = \mathcal{L}$ para todo $m \in M$, con lo que se prueba que $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ es un haz sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$.
En particular, si I es un ideal bilátero idempotente y $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel jansiano $\mathcal{L}_I$, entonces para cada par de elementos m y m' de M, el filtro

$$[m = m']^{(2)} = \mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*} \circ \mathcal{L}_I$$

es un filtro $\mathcal{L}_I$–Gabriel jansiano, y puesto que el ínfimo de una familia en $\mathcal{C}_I^{jan}$ es también la intersección de sus elementos, $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ puede ser considerado como un haz sobre el cuantal $\mathcal{C}_I^{jan}$.

Si $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel simétrico $\{R\}$, entonces el haz $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ del ejemplo anterior es un haz sobre el casi–cuantal $(R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$.
Además, dado que en ese caso $[m = m']^{(2)} = \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*}$ es un filtro jansiano, $[\cdot = \cdot]^{(2)}$ se puede considerar como una aplicación de $M \times M$ en $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$, y el par $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ es un $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$–haz.

(5.2.4) Definición. ([6, 17]) Sean $(A, [\cdot = \cdot])$ y $(B, [\cdot = \cdot])$ haces sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}$. Un *premorfismo de $\mathcal{C}$–haces*

$$f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (B, [\cdot = \cdot])$$

es un par de aplicaciones

$$[f\cdot = \cdot] : A \times B \longrightarrow \mathcal{C} \qquad , \qquad [\cdot = f\cdot] : B \times A \longrightarrow \mathcal{C}$$

de manera que para cada a y a' en A y para cada b en B, se satisfacen las siguientes condiciones:

(5.2.4.1) $\bigvee_{a'' \in A} [a = a''] \,\&\, [fa'' = b] = [fa = b]$;

(5.2.4.2) $\bigvee_{a'' \in A} [b = fa''] \,\&\, [a'' = a] \geq [b = fa]$;

(5.2.4.3) $\bigvee_{b' \in B} [b = b'] \,\&\, [b' = fa] = [b = fa]$;

(5.2.4.4) $\bigvee_{b' \in B} [fa = b'] \,\&\, [b' = b] \geq [fa = b]$;

(5.2.4.5) $[a = a'] \leq \bigvee_{b \in B} [fa = b] \,\&\, [b = fa']$.

Con el objeto de definir la categoría de $\mathcal{C}$–haces, siendo $\mathcal{C}$ un casi–cuantal, se introduce a continuación la noción de precategoría.

(5.2.5) Definición. Una *precategoría* $\mathcal{D}$ está formada por una clase de objetos Obj$\mathcal{D}$ y por un conjunto de flechas $\mathcal{D}(A,B)$ para cada par de objetos A y B, de tal manera que existe una aplicación *composición de flechas*

$$\mathcal{D}(A,B)\times\mathcal{D}(B,C)\longrightarrow\mathcal{D}(A,C)$$

para cada terna de objetos A, B y C, y una *flecha distinguida* $id_A\in\mathcal{D}(A,A)$ para cada objeto A.

(5.2.6) Si $\mathcal{C}$ es un casi–cuantal, entonces los $\mathcal{C}$–haces y los premorfismos de $\mathcal{C}$–haces $f:(A,[\cdot=\cdot])\longrightarrow(B,[\cdot=\cdot])$ tales que para cada $a\in A$ existen b_a y b'_a pertenecientes a B con $[fa=b_a]=[b'_a=fa]=1$, constituyen una precategoría, como se prueba a continuación:
Si $(A,[\cdot=\cdot])$ es un $\mathcal{C}$–haz consideremos como flecha distinguida id_A al premorfismo $(A,[\cdot=\cdot])\longrightarrow(A,[\cdot=\cdot])$ dado por

$$[id_Aa=a']=[a=a']=[a=id_Aa']$$

para cada a y a' pertenecientes a A.
Por otro lado, si $f:(A,[\cdot=\cdot])\longrightarrow(B,[\cdot=\cdot])$ y $g:(B,[\cdot=\cdot])\longrightarrow(C,[\cdot=\cdot])$ son premorfismos de $\mathcal{C}$–haces tales que para cada $a\in A$ y $b\in B$ existen elementos $b_a,{b_a}'\in B$ resp. $c_b,{c_b}'\in C$ de tal manera que

$$[fa=b_a]=[{b_a}'=fa]=1\ \text{ resp. }\ [gb=c_b]=[{c_b}'=gb]=1\ ,$$

entonces se define la composición gf como el premorfismo dado por las aplicaciones

$$[gf\cdot=\cdot]:A\times C\longrightarrow\mathcal{C}\ ;\ \ [gfa=c]=\bigvee_{b\in B}[fa=b]\ \&\ [gb=c]\ ,$$

y

$$[\cdot=gf\cdot]:C\times A\longrightarrow\mathcal{C}\ ;\ \ [c=gfa]=\bigvee_{b\in B}[c=gb]\ \&\ [b=fa]\ .$$

En efecto, gf satisface:
(5.2.4.1): para cada $a\in A$ y cada $c\in C$,

$$\begin{aligned}\bigvee_{a'\in A}[a=a']\ \&\ [gfa'=c]&=\bigvee_{a'\in A}[a=a']\ \&\ \bigvee_{b\in B}[fa'=b]\ \&\ [gb=c]\\&=\bigvee_{a'\in A}\bigvee_{b\in B}([a=a']\ \&\ [fa'=b]\ \&\ [gb=c])\ .\end{aligned}$$

Por un lado $\bigvee_{a'\in A}\bigvee_{b\in B}([a=a'] \mathbin{\&} [fa'=b] \mathbin{\&} [gb=c])$ es menor que

$$\bigvee_{b\in B}\bigvee_{a'\in A}([a=a'] \mathbin{\&} [fa'=b]) \mathbin{\&} [gb=c]$$

$$=\bigvee_{b\in B}[fa=b] \mathbin{\&} [gb=c]=[gfa=c]\ ,$$

y por otra parte, dado que $[a=a]=1$,

$$\begin{aligned}[gfa=c] &= \bigvee_{b\in B}[a=a] \mathbin{\&} [fa=b] \mathbin{\&} [gb=c] \\ &\le \bigvee_{b\in B}\bigvee_{a'\in A}([a=a'] \mathbin{\&} [fa'=b] \mathbin{\&} [gb=c])\ .\end{aligned}$$

(5.2.4.2): para cada $a\in A$ y cada $c\in C$,

$$\begin{aligned}\bigvee_{a'\in A}[c=gfa'] \mathbin{\&} [a'=a] &= \bigvee_{a'\in A}(\bigvee_{b\in B}[c=gb] \mathbin{\&} [b=fa']) \mathbin{\&} [a'=a] \\ &\ge \bigvee_{a'\in A}\bigvee_{b\in B}([c=gb] \mathbin{\&} [b=fa'] \mathbin{\&} [a'=a]) \\ &= \bigvee_{b\in B}[c=gb] \mathbin{\&} \bigvee_{a'\in A}[b=fa'] \mathbin{\&} [a'=a] \\ &\ge \bigvee_{b\in B}[c=gb] \mathbin{\&} [b=fa]=[c=gfa]\ .\end{aligned}$$

(5.2.4.3): para cada $a\in A$ y cada $c\in C$,

$$\begin{aligned}\bigvee_{c'\in C}[c=c'] \mathbin{\&} [c'=gfa] &= \bigvee_{c'\in C}[c=c'] \mathbin{\&} \bigvee_{b\in B}[c'=gb] \mathbin{\&} [b=fa] \\ &= \bigvee_{c'\in C}\bigvee_{b\in B}([c=c'] \mathbin{\&} [c'=gb] \mathbin{\&} [b=fa])\ .\end{aligned}$$

Por (5.1.1.2),

$$\begin{aligned}&\bigvee_{c'\in C}\bigvee_{b\in B}([c=c'] \mathbin{\&} [c'=gb] \mathbin{\&} [b=fa]) \\ &\le \bigvee_{b\in B}(\bigvee_{c'\in C}[c=c'] \mathbin{\&} [c'=gb]) \mathbin{\&} [b=fa] \\ &= \bigvee_{b\in B}[c=gb] \mathbin{\&} [b=fa]=[c=gfa]\ ,\end{aligned}$$

y recíprocamente, dado que $[c = c] = 1$,

$$[c = gfa] = \bigvee_{b \in B} [c = gb] \ \& \ [b = fa] = \bigvee_{b \in B} [c = c] \ \& \ [c = gb] \ \& \ [b = fa]$$
$$\leq \bigvee_{b \in B} \bigvee_{c' \in C} ([c = c'] \ \& \ [c' = gb] \ \& \ [b = fa]) \ .$$

(5.2.4.4): para cada $a \in A$ y cada $c \in C$,

$$\bigvee_{c' \in C} [gfa = c'] \ \& \ [c' = c] = \bigvee_{c' \in C} (\bigvee_{b \in B} [fa = b] \ \& \ [gb = c']) \ \& \ [c' = c]$$
$$\geq \bigvee_{c' \in C} \bigvee_{b \in B} ([fa = b] \ \& \ [gb = c'] \ \& \ [c' = c])$$
$$= \bigvee_{b \in B} [fa = b] \ \& \ \bigvee_{c' \in C} [gb = c'] \ \& \ [c' = c]$$
$$\geq \bigvee_{b \in B} [fa = b] \ \& \ [gb = c] = [gfa = c] \ .$$

(5.2.4.5): para cada par de elementos a y a' de A,

$$\bigvee_{c \in C} [gfa = c] \ \& \ [c = gfa']$$
$$= \bigvee_{c \in C} (\bigvee_{b \in B} [fa = b] \ \& \ [gb = c]) \ \& \ (\bigvee_{b' \in B} [c = gb'] \ \& \ [b' = fa'])$$
$$\geq \bigvee_{c \in C} \bigvee_{b \in B} \bigvee_{b' \in B} ([fa = b] \ \& \ [gb = c] \ \& \ [c = gb'] \ \& \ [b' = fa']) \ .$$

Por (5.1.1.1) y (5.1.1.2),

$$\bigvee_{c \in C} \bigvee_{b \in B} \bigvee_{b' \in B} ([fa = b] \ \& \ [gb = c] \ \& \ [c = gb'] \ \& \ [b' = fa'])$$
$$\leq \bigvee_{b \in B} \bigvee_{b' \in B} ([fa = b] \ \& \ (\bigvee_{c \in C} [gb = c] \ \& \ [c = gb']) \ \& \ [b' = fa']) \ ,$$

y por otra parte, dado que existen elementos b_a y ${b_a}'$ en B de tal manera que $[fa = b_a] = [{b_a}' = fa'] = 1$, se tiene que

$$\bigvee_{c \in C} [gb = c] \ \& \ [c = gb']$$
$$= \bigvee_{c \in C} 1 \ \& \ [gb = c] \ \& \ [c = gb'] \ \& \ 1$$
$$\leq \bigvee_{c \in C} \bigvee_{b \in B} \bigvee_{b' \in B} ([fa = b] \ \& \ [gb = c] \ \& \ [c = gb'] \ \& \ [b' = fa']) \ ,$$

de donde se concluye que

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{c\in C}\bigvee_{b\in B}\bigvee_{b'\in B}([fa=b]\ \&\ [gb=c]\ \&\ [c=gb']\ \&\ [b'=fa'])\\
&=\bigvee_{b\in B}\bigvee_{b'\in B}([fa=b]\ \&\ (\bigvee_{c\in C}[gb=c]\ \&\ [c=gb'])\ \&\ [b'=fa'])\\
&\geq\bigvee_{b\in B}\bigvee_{b'\in B}([fa=b]\ \&\ [b=b']\ \&\ [b'=fa'])\\
&\geq\bigvee_{b\in B}([fa=b]\ \&\ 1\ \&\ [b=fa'])\geq[a=a']\ .
\end{aligned}$$

(5.2.7) Toda precategoría $\mathcal{D}$ tiene una *categoría envolvente* asociada $\mathcal{D}'$ cuyos objetos son los objetos de $\mathcal{D}$ y cuyos conjuntos de morfismos son los conjuntos cocientes

$$Hom_{\mathcal{D}'}(A,B)=\frac{\mathcal{D}(A,B)}{\sim}\ ,$$

donde "$\sim$" es la clausura transitiva (esto es, $g\sim h\Leftrightarrow g\approx\cdots\approx h$) de la relación (reflexiva y simétrica) "$\approx$" en $\mathcal{D}(A,B)$ dada por $f\approx f'$ si, y sólo si, existe una cadena de flechas

$$A=A_0\xrightarrow{f_1}A_1\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_n}A_n=B$$

tal que tanto f como f' son composición de $id_A, f_1, id_{A_1}, f_2,\ldots,f_n$ e id_B (en ese orden), aunque algunas flechas distinguidas puedan o no aparecer en las descomposiciones de f o f', y dichas composiciones para f y para f' puedan calcularse asociando las flechas de diferente manera.
En efecto, la relación "$\sim$" es de equivalencia, y además es compatible con la composición de flechas en $\mathcal{D}$, es decir, si A, B y C son objetos de $\mathcal{D}$, $f\sim f'\in\mathcal{D}(A,B)$ y $g\sim g'\in\mathcal{D}(B,C)$, entonces $gf\sim g'f'$. De esta manera podemos definir la composición de clases de equivalencia de flechas como la clase de la composición de flechas.
Por otro lado, si A, B, C y D son objetos de $\mathcal{D}$ y $f\in\mathcal{D}(A,B)$, $g\in\mathcal{D}(B,C)$ y $h\in\mathcal{D}(C,D)$, entonces

$$h(gf)\sim(hg)f\ ,\qquad id_Bf\sim f\ ,\qquad fid_A\sim f,$$

luego $\mathcal{D}'$ es una categoría.

(5.2.8) Si $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son precategorías, un funtor $\mathcal{F}:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{E}$ (entre precategorías) asigna a cada objeto A de $\mathcal{D}$ un objeto $\mathcal{F}A$ de $\mathcal{E}$, y a cada par de objetos A y B de $\mathcal{D}$ una aplicación

$$\mathcal{F}:\mathcal{D}(A,B)\longrightarrow\mathcal{E}(\mathcal{F}A,\mathcal{F}B)$$

tal que la imagen de la flecha distinguida id_A es la flecha distinguida $id_{\mathcal{F}A}$ y la imagen de la composición de flechas es la composición de las imágenes de dichas flechas.
Si $\mathcal{D}$ es una precategoría y $\mathcal{D}'$ es su categoría envolvente, existe un funtor $\mathcal{P} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ que a cada objeto de $\mathcal{D}$ le asigna el mismo objeto en $\mathcal{D}'$ y que se comporta como la proyección canónica

$$\mathcal{D}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}'}(A,B) = \frac{\mathcal{D}(A,B)}{\sim}$$

entre los conjuntos de flechas.

(5.2.9) El par formado por la categoría envolvente $\mathcal{D}'$ y el funtor $\mathcal{P}$ satisface la siguiente propiedad universal: Si $\mathcal{E}$ es una categoría y $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor, entonces existe un único funtor (entre categorías) $\mathcal{F}' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{F}'\mathcal{P} = \mathcal{F}$.
En efecto, $\mathcal{F}' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{E}$ que a cada objeto A de $\mathcal{D}'$ le asigna $\mathcal{F}A$ y tal que, para cada par de objetos A y B, la aplicación

$$Hom_{\mathcal{D}'}(A,B) \xrightarrow{\mathcal{F}'} Hom_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}'A, \mathcal{F}'B)$$

es la factorización por el conjunto cociente de la aplicación

$$\mathcal{D}(A,B) \xrightarrow{\mathcal{F}} Hom_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) \ ,$$

es el único funtor de $\mathcal{D}'$ en $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{F}'\mathcal{P} = \mathcal{F}$.
Como consecuencia, si $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son precategorías y $\mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor, entonces podemos considerar el funtor $\mathcal{P}\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}$ en la categoría $\mathcal{E}'$ envolvente de $\mathcal{E}$, y por la propiedad universal de la categoría envolvente de $\mathcal{D}$, existe un único funtor $\mathcal{F}'$ entre las categorías envolventes $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}'$ de tal manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathcal{P}"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ \mathcal{D}' \arrow[r, "\mathcal{F}'"'] & \mathcal{E}' \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(5.2.10) Definición. Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal. Se llamará *categoría de haces sobre el casi–cuantal* $\mathcal{C}$, y se denotará por $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$, a la categoría envolvente de la precategoría cuyos objetos son los $\mathcal{C}$–haces y cuyas flechas son los premorfismos de $\mathcal{C}$–haces $f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (B, [\cdot = \cdot])$ con la propiedad de que para cada $a \in A$ existen b_a y ${b_a}'$ pertenecientes a B tales que $[fa = b_a] = [{b_a}' = fa] = 1$.

(5.2.11) Ejemplo. Sea $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel en R y $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de R–módulos a izquierda. Las aplicaciones $[f\cdot = \cdot]$ y $[\cdot = f\cdot]$ de $M \times N$, resp. $N \times M$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ dadas por

$$[fm = n] = [n = fm] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)} \circ \mathcal{L}$$

definen un premorfismo de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haces

$$f : (M, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (N, [\cdot = \cdot]) \ .$$

En efecto, para todo m perteneciente a M y todo n perteneciente a N, el filtro uniforme $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)} \circ \mathcal{L}$ es $\mathcal{L}$-Gabriel.
Dados dos elementos $m \in M$ y $n \in N$, la intersección de filtros uniformes $\bigcap_{m' \in M}[m = m'] \circ [fm' = n]$ está contenida en

$$[m = m] \circ [fm = n] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_R \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)} \circ \mathcal{L} = [fm = n] \ .$$

Por otra parte, para cualquier elemento m' de M, el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)$ contiene a la intersección $\mathrm{Ann}^l_R(m-m') \cap \mathrm{Ann}^l_R(f(m')-n)$, y dado que dicha intersección pertenece al filtro $\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m')-n)}$, se tiene que

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m')-n)} \ .$$

Por lo tanto $[fm = n] \subseteq [m = m'] \circ [fm' = n]$ para todo $m' \in M$, de donde se concluye que $[fm = n] \subseteq \bigcap_{m' \in M}[m = m'] \circ [fm' = n]$.
De forma similar, también se verifican las propiedades (5.2.4.2), (5.2.4.3) y (5.2.4.4), e incluso las igualdades en (5.2.4.2) y en (5.2.4.4).
Al ser $(N, [\cdot = \cdot])$ un haz, si m y m' son elementos de M entonces

$$\bigcap_{n \in N} [fm = n] \circ [n = fm'] = [f(m) = f(m')]$$

por la manera en que han sido definidas $[f\cdot = \cdot]$ y $[\cdot = f\cdot]$. Como el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(m - m')$ está contenido en $\mathrm{Ann}^l_R(f(m) - f(m'))$, se tiene que

$$[m = m'] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')} \circ \mathcal{L} \supseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-f(m'))} \circ \mathcal{L} = [f(m) = f(m')] \ ,$$

de donde se sigue (5.2.4.5).
Además para cada $m \in M$ existe un elemento $n \in N$ (el propio $n = f(m)$) tal que

$$[fm = n] = [n = fm] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_R \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \ .$$

Dado un R–módulo a izquierda M, el premorfismo de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haces que induce el homomorfismo identidad en M viene dado por

$$[id_M m = m'] = [m = m'] = [m = id_M m'] \ ,$$

esto es, coincide exactamente con la flecha distinguida correspondiente al haz $(M, [\cdot = \cdot])$.

Por otra parte, si $f : M \longrightarrow N$ y $g : N \longrightarrow P$ son homomorfismos de R–módulos a izquierda, entonces la composición gf de los premorfismos de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haces $f : (M, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (N, [\cdot = \cdot])$ y $g : (N, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (P, [\cdot = \cdot])$ es el premorfismo $g \circ f : (M, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (P, [\cdot = \cdot])$ correspondiente a la composición $g \circ f : M \longrightarrow P$. Efectivamente, para cada $m \in M$ y cada $p \in P$, el filtro uniforme

$$[gfm = p] = \bigcap_{n \in N} [fm = n] \circ [gn = p] = \bigcap_{n \in N} [f(m) = n] \circ [g(n) = p]$$

está contenido en $[g(f(m)) = p] = [(g \circ f)m = p]$ (tomando $n = f(m)$ en la intersección). Recíprocamente, el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m)) - p)$ contiene a

$$\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m)) - g(n)) \cap \mathrm{Ann}^l_R(g(n) - p) \supseteq \mathrm{Ann}^l_R(f(m) - n) \cap \mathrm{Ann}^l_R(g(n) - p)$$

para cada n perteneciente a N. Luego

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m))-p)} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(g(n)-p)} \ ,$$

y esto implica que $[g(f(m)) = p] \subseteq [fm = n] \circ [gn = p]$, de donde se tiene que

$$[(g \circ f)m = p] = [g(f(m)) = p] \subseteq \bigcap_{n \in N} [fm = n] \circ [gn = p] = [gfm = p] \ .$$

De la misma manera se comprueba que $[p = gfm] = [p = (g \circ f)m]$.

Por lo tanto, se obtiene un funtor de la categoría $R - \mathbf{mod}$ en la precategoría de haces sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ y, mediante composición con el funtor proyección, un funtor de $R - \mathbf{mod}$ en la categoría de haces sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ que asigna a cada R–módulo a izquierda M el haz $(M, [\cdot = \cdot])$, y a cada R–homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ el morfismo que tiene como representante al premorfismo de haces $f : (M, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (N, [\cdot = \cdot])$.

Si en el ejemplo anterior consideramos $\mathcal{L} = \{R\}$, entonces se tiene un funtor de $R - \mathbf{mod}$ en la categoría de haces sobre el casi–cuantal $R - \mathbf{filt}^{opp}$ que a cada R–módulo a izquierda M le asigna el $R - \mathbf{filt}^{opp}$–haz $(M, [\cdot = \cdot])$ y a cada homomorfismo de R–módulos $f : M \longrightarrow N$ el morfismo de haces que tiene como representante al premorfismo

$$[fm = n] = [n = fm] = \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)} \ .$$

De forma similar se puede definir un funtor de $R - \mathbf{mod}$ en la categoría de haces sobre el casi–cuantal de los filtros uniformes simétricos:

(5.2.12) Ejemplo. Sea R un anillo noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel simétrico en R. Para cada homomorfismo de R–módulos a izquierda $f : M \longrightarrow N$, las aplicaciones dadas por

$$[fm = n]^{(2)} = [n = fm]^{(2)} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)^*} \circ \mathcal{L}$$

definen un premorfismo de $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haces $f : (M, [\cdot = \cdot]^{(2)}) \longrightarrow (N, [\cdot = \cdot]^{(2)})$. En efecto, puesto que R es noetheriano a izquierda, la composición de filtros uniformes simétricos es un filtro uniforme simétrico, y dado que $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, $[fm = n]^{(2)} = [n = fm]^{(2)}$ es un filtro $\mathcal{L}$–Gabriel simétrico para todo $m \in M$ y todo $n \in N$.
Si $m \in$M y $n \in N$, entonces la intersección

$$\bigcap_{n' \in N} [n = n']^{(2)} \circ [n' = fm]^{(2)}$$

está contenida en $[n = fm]^{(2)}$. Por otro lado, para cada $n' \in N$, el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(f(m) - n)$ contiene a la intersección

$$\mathrm{Ann}^l_R(f(m) - n')^* \cap \mathrm{Ann}^l_R(n' - n)^* \ ,$$

y por lo tanto pertenece al filtro uniforme simétrico

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n')^*} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(n'-n)^*} \ .$$

Luego el ideal bilátero $\mathrm{Ann}^l_R(f(m) - n')^*$ también pertenece a dicho filtro, de donde se tiene que

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n')^*} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n')^*} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(n'-n)^*}$$

Esto implica que $[fm = n]^{(2)} \subseteq [fm = n']^{(2)} \circ [n' = n]^{(2)}$, de donde se concluye, por la arbitrariedad con la que se ha tomado n', que

$$[fm = n]^{(2)} \subseteq \bigcap_{n' \in N} [fm = n']^{(2)} \circ [n' = n]^{(2)} \ .$$

De la misma manera se prueba la igualdad en (5.2.4.1), (5.2.4.2) y (5.2.4.4). Por la forma en que se ha definido $[f\cdot = \cdot]^{(2)} = [\cdot = f\cdot]^{(2)}$, y puesto que $(N, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ es un haz, para todo par de elementos m y m' de M, se tiene que

$$\bigcap_{n \in N} [fm = n]^{(2)} \circ [n = fm']^{(2)} = [f(m) = f(m')]^{(2)} \ .$$

Como el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')$ está contenido en $\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-f(m'))$, también se tiene la inclusión $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^* \subseteq \mathrm{Ann}^l_R(f(m)-f(m'))^*$, y esto implica que

$$\bigcap_{n\in N}[fm=n]^{(2)}\circ[n=fm']^{(2)} \subseteq [m=m']^{(2)}\ ,$$

esto es, que las aplicaciones $[f\cdot=\cdot]^{(2)}$ y $[\cdot=f\cdot]^{(2)}$ definen un premorfismo $f:(M,[\cdot=\cdot]^{(2)}) \longrightarrow (N,[\cdot=\cdot]^{(2)})$ de haces sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$.
Además, dado $m\in M$, siempre existe un elemento $n=f(m)\in N$ tal que $\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)=R$, y de ahí,

$$[fm=n]^{(2)}=[n=fm]^{(2)}=\mathcal{L}\ .$$

En particular, si I es un ideal bilátero idempotente y $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel jansiano $\mathcal{L}_I$, entonces

$$[fm=n]=[n=fm]=\mathcal{L}_I\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)^*}\circ\mathcal{L}_I$$

es un filtro $\mathcal{L}_I$–Gabriel jansiano para cada $m\in M$ y cada $n\in N$, y

$$f:(M,[\cdot=\cdot]^{(2)}) \longrightarrow (N,[\cdot=\cdot]^{(2)})$$

se puede considerar como un premorfismo de haces sobre $\mathcal{C}^{jan}_I$.
De la misma manera que en el ejemplo (5.2.11), el homomorfismo identidad de un R–módulo a izquierda M induce la flecha distinguida del $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haz $(M,[\cdot=\cdot]^{(2)})$.
Si $f:M\longrightarrow N$ y $g:N\longrightarrow P$ son homomorfismos de R–módulos, entonces para cada $m\in M$ y cada $p\in P$,

$$[gfm=p]^{(2)}=\bigcap_{n\in N}[fm=n]^{(2)}\circ[gn=p]^{(2)}$$

está contenido en $[g(f(m))=p]^{(2)}$, por la forma en que han sido definidas $[f\cdot=\cdot]^{(2)}$ y $[g\cdot=\cdot]^{(2)}$. Por otra parte, el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m))-p)$ contiene a

$$\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m))-g(n))\cap\mathrm{Ann}^l_R(g(n)-p) \supseteq \mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)^*\cap\mathrm{Ann}^l_R(g(n)-p)^*$$

para cada $n\in N$, luego $\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m))-p)$ pertenece al filtro uniforme simétrico

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)^*}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(g(n)-p)^*}\ .$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ann}^l_R(g(f(m)) - p)^*$ también pertenece a

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(f(m)-n)^*} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(g(n)-p)^*} \ ,$$

y de ahí que

$$[g(f(m)) = p]^{(2)} \subseteq \bigcap_{n \in N} [fm = n]^{(2)} \circ [gn = p]^{(2)} = [gfm = p]^{(2)}$$

dado que $[g(f(m)) = p]^{(2)} \subseteq [fm = n]^{(2)} \circ [gn = p]^{(2)}$ para n escogido arbitrariamente.
De forma parecida $[p = gfm]^{(2)} = [p = (g \circ f)m]^{(2)}$ para cada $m \in M$ y cada $p \in P$, y se concluye entonces que el morfismo de $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haces gf es el que induce la composición de homomorfismos $g \circ f : M \longrightarrow P$.

(5.2.13) El ejemplo anterior prueba que si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico en el anillo noetheriano a izquierda R, entonces asignando a cada R–módulo a izquierda M el $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haz $(M, [\cdot = \cdot])^{(2)}$ y a cada homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ el premorfismo $f : (M, [\cdot = \cdot]^{(2)}) \longrightarrow (N, [\cdot = \cdot]^{(2)})$, se define un funtor de la categoría $R - \mathbf{mod}$ en la precategoría de $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haces, y la composición de éste con el funtor proyección es un funtor de $R - \mathbf{mod}$ en la categoría de $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haces que hemos denotado $\mathcal{S}_{\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}}$.
En el caso particular en que $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel simétrico $\{R\}$, se obtiene un funtor de $R - \mathbf{mod}$ en la categoría de haces sobre $(R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$.
Si I es un ideal bilátero idempotente de R y $\mathcal{L}$ es el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_I$, entonces para cada homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, el premorfismo de haces

$$f : (M, [\cdot = \cdot]^{(2)}) \longrightarrow (N, [\cdot = \cdot]^{(2)})$$

puede ser considerado como un premorfismo de $\mathcal{C}^{jan}_I$–haces. Dado que el supremo de una familia en $\mathcal{C}^{jan}_I$ coincide con el supremo tomado en $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}_I}$, los cálculos del ejemplo anterior sirven para probar que el funtor de $R - \mathbf{mod}$ en $\mathcal{S}_{\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}_I}}$ puede ser considerado como un funtor de $R - \mathbf{mod}$ en la categoría de haces sobre el cuantal $\mathcal{C}^{jan}_I$.

5.3. El teorema de representación

Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal y consideremos el $\mathcal{C}$–haz, que denotaremos por $\#$, y que tiene por conjunto de generadores a $\{*\}$ de manera que $[* = *] = 1$.

(5.3.1) Proposición. ([6]) *Para todo $\mathcal{C}$–haz (débil) $(A, [\cdot = \cdot])$ existe un único premorfismo de haces $(A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow \#$. Por lo tanto el haz $\#$ es un objeto terminal en la categoría de haces sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $(A, [\cdot = \cdot])$ un $\mathcal{C}$–haz. Las aplicaciones

$$[f\cdot = \cdot] : A \times \{*\} \longrightarrow \mathcal{C} \ , \quad [fa = *] = \bigvee_{a' \in A} [a = a'] \ ;$$

$$[\cdot = f\cdot] : \{*\} \times A \longrightarrow \mathcal{C} \ , \quad [* = fa] = \bigvee_{a' \in A} [a' = a]$$

definen un premorfismo de haces $f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow \#$, pues, en efecto,
(5.2.4.1) para cada $a \in A$,

$$\begin{aligned}\bigvee_{a' \in A} [a = a'] \ \& \ [fa' = *] &= \bigvee_{a' \in A} [a = a'] \ \& \ \bigvee_{a'' \in A} [a' = a''] \\ &= \bigvee_{a' \in A} \bigvee_{a'' \in A} [a = a'] \ \& \ [a' = a''] \\ &= \bigvee_{a'' \in A} [a = a''] = [fa = *] \ ;\end{aligned}$$

(5.2.4.2) para cada $a \in A$,

$$\begin{aligned}\bigvee_{a' \in A} [* = fa'] \ \& \ [a' = a] &= \bigvee_{a' \in A} (\bigvee_{a'' \in A} [a'' = a']) \ \& \ [a' = a] \\ &\geq \bigvee_{a' \in A} \bigvee_{a'' \in A} ([a'' = a'] \ \& \ [a' = a]) \\ &= \bigvee_{a'' \in A} [a'' = a] = [* = fa] \ ;\end{aligned}$$

(5.2.4.3) y (5.2.4.4) se siguen de que $[* = *] = 1$, ya que, por lo tanto

$$[* = *] \ \& \ [* = fa] = [* = fa] \quad , \quad [fa = *] \ \& \ [* = *] = [fa = *] \ ;$$

(5.2.4.5) para cada a y a' pertenecientes a A,

$$\begin{aligned}[fa = *] \ \& \ [* = fa'] &= (\bigvee_{a'' \in A} [a = a'']) \ \& \ (\bigvee_{a''' \in A} [a''' = a']) \\ &\geq \bigvee_{a'' \in A} \bigvee_{a''' \in A} ([a = a''] \ \& \ [a''' = a']) \\ &\geq \bigvee_{a'' \in A} [a = a''] \ \& \ [a'' = a'] = [a = a'] \ .\end{aligned}$$

Además f es único, pues si $h : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow \#$ es el premorfismo dado por las aplicaciones $[h\cdot = \cdot]$ y $[\cdot = h\cdot]$, entonces, dado que h verifica (5.2.4.1),

$$[ha = *] = \bigvee_{a' \in A} [a = a'] \ \& \ [ha' = *] \leq \bigvee_{a' \in A} [a = a'] = [fa = *] \ ,$$

y por (5.2.4.5),

$$[fa = *] = \bigvee_{a' \in A} [a = a'] \leq \bigvee_{a' \in A} [ha = *] \ \& \ [* = ha'] \leq [ha = *] \ ,$$

luego $[fa = *] = [ha = *]$ para cada $a \in A$. De manera similar se prueba que $[* = fa] = [* = ha]$ para cada $a \in A$, y por lo tanto $h = f$. $\square$

(5.3.2) Definición. Sea $(A, [\cdot = \cdot])$ un haz sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}$. Una *sección global de* $(A, [\cdot = \cdot])$ es un premorfismo de $\mathcal{C}$–haces

$$f : \# \longrightarrow (A, [\cdot = \cdot])$$

tal que

(5.3.2.1) $\bigvee_{a'' \in A} [f* = a''] \ \& \ [a'' = a] = [f* = a]$;

(5.3.2.2) $[a = f*] \ \& \ [f* = a'] \leq [a = a']$;

para todo a y a' pertenecientes a A.

(5.3.3) Ejemplo. ([6, 17]) Si $(A, [\cdot = \cdot])$ es un haz sobre el casi–cuantal $\mathcal{C}$ entonces todo elemento a de A define una sección global f_a dada por

$$[f_a* = a'] = [a = a'] \ , \quad [a' = f_a*] = [a' = a] \quad , \quad \forall a' \in A \ .$$

En efecto, para cada a' y a'' pertenecientes a A,

(5.2.4.1):

$$[* = *] \ \& \ [f_a* = a'] = [a = a'] = [f_a* = a'] \ ;$$

(5.2.4.2):

$$[a' = f_a*] \ \& \ [* = *] = [a' = a] = [a' = f_a*] \ ;$$

(5.2.4.3):

$$\bigvee_{a'' \in A} [a' = a''] \ \& \ [a'' = f_a*] = \bigvee_{a'' \in A} [a' = a''] \ \& \ [a'' = a] = [a' = a] \ ;$$

(5.2.4.5):

$$\bigvee_{a' \in A} [f_a* = a'] \ \& \ [a' = f_a*] = \bigvee_{a' \in A} [a = a'] \ \& \ [a' = a] = [a = a] = 1 = [* = *] \ ;$$

(5.3.2.1):

$$\bigvee_{a''\in A} [f_a * = a''] \ \& \ [a'' = a'] = \bigvee_{a''\in A} [a = a''] \ \& \ [a'' = a'] = [a = a'] \ ;$$

(5.3.2.2):

$$\begin{aligned}[a' = f_a *] \ \& \ [f_a * = a''] &= [a' = a] \ \& \ [a = a''] \\ &\leq \bigvee_{a'''\in A} [a' = a'''] \ \& \ [a''' = a''] = [a' = a''] \ .\end{aligned}$$

(5.3.4) Proposición. *Sea M un R–módulo a izquierda y $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel (resp. $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel simétrico en el anillo noetheriano a izquierda R, resp. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_I$ un filtro de Gabriel jansiano). Entonces para cada $m \in M$, las aplicaciones dadas por*

$$[f_m * = m'] = [m' = f_m *] = [m = m'] \ ,$$

(resp.

$$[f_m * = m']^{(2)} = [m' = f_m *]^{(2)} = [m = m']^{(2)} \ ) \ ,$$

definen una sección global f_m del haz $(M, [\cdot = \cdot])$ sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ (resp. del haz $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$, resp. del $\mathcal{C}_I^{jan}$–haz $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$). Además, dos secciones globales f_m y $f_{m'}$ son iguales si, y sólo si, $\overline{m} = \overline{m}'$ en $M/\sigma_{\mathcal{L}}M$.

Demostración. Como se ha probado en (5.3.3), dado que $(M, [\cdot = \cdot])$ (resp. $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$, resp. $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$) es un $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haz (resp. un $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$–haz, resp. un $\mathcal{C}_I^{jan}$–haz), f_m es una sección global.

Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel y las secciones globales f_m y $f_{m'}$ coinciden, entonces

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')} \circ \mathcal{L} = [f_m * = m'] = [f_{m'} * = m'] = \mathcal{L} \ ,$$

luego $\mathrm{Ann}^l_R(m - m') \in \mathcal{L}$, o equivalentemente, $\overline{m} = \overline{m}'$ en $M/\sigma_{\mathcal{L}}M$.

Recíprocamente, si $\overline{m} = \overline{m}'$, entonces para todo $m'' \in M$ se tiene que

$$\mathrm{Ann}^l_R(m - m'') \supseteq \mathrm{Ann}^l_R(m - m') \cap \mathrm{Ann}^l_R(m' - m'') \in \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')} \ ,$$

y por lo tanto $\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')}$. Esto implica que

$$[f_m * = m''] = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')} \circ \mathcal{L} = [f_{m'} * = m''] \ ,$$

e intercambiando los papeles de m y m', que $[f_{m'} * = m''] \subseteq [f_m * = m'']$. De la manera en que han sido definidas, se tiene que $f_m = f_{m'}$, pues es claro que $[f_m * = m''] = [m'' = f_m *]$ y $[f_{m'} * = m''] = [m'' = f_{m'} *]$.

Sea ahora R noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel simétrico. Si $f_m = f_{m'}$, de manera similar al caso anterior,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^*} \subseteq [f_m * = m']^{(2)} = [f_{m'} * = m']^{(2)} = \mathcal{L} \ ,$$

luego $\mathrm{Ann}^l_R(m-m')^* \subseteq \mathrm{Ann}^l_R(m-m') \in \mathcal{L}$ y $\overline{m} = \overline{m}'$ en $M/\sigma_{\mathcal{L}}M$.
Por otra parte, si $\mathrm{Ann}^l_R(m-m') \in \mathcal{L}$, entonces para todo $m'' \in M$,

$$\mathrm{Ann}^l_R(m-m'') \supseteq \mathrm{Ann}^l_R(m-m')^* \cap \mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')^* \in \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')^*} \ ,$$

y dado que $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')^*}$ es simétrico bajo la hipótesis de que R es noetheriano a izquierda (ver (3.1.30)), el ideal bilátero $\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')^*$ también pertenece a $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')^*}$. Luego

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m-m'')^*} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{L}_{\mathrm{Ann}^l_R(m'-m'')^*} \ ,$$

y esto implica que $[f_m * = m''] \subseteq [f_{m'} * = m'']$. De la misma manera, se deduce que $[f_{m'} * = m''] \subseteq [f_m * = m'']$ y por lo tanto $f_m = f_{m'}$.
Finalmente, sea I un ideal bilátero idempotente. Dado que todo filtro uniforme jansiano es en particular simétrico, los cálculos para el caso simétrico prueban que si m y m' son elementos de M, entonces las secciones globales f_m y $f_{m'}$ del $\mathcal{C}_I^{jan}$–haz $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$ son iguales si, y sólo si, $\overline{m}$ y $\overline{m}'$ son el mismo elemento en $M/\sigma_{\mathcal{L}_I}M$. $\square$

(5.3.5) Lema. *Sea R un anillo noetheriano a izquierda y $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel (resp. un filtro de Gabriel simétrico, resp. el filtro de Gabriel jansiano generado por el ideal bilátero I). Si $\mathcal{H}$ es un elemento de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ (resp. de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$, resp. de $\mathcal{C}_I^{jan}$) tal que $\sqrt{\mathcal{H}} = \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{L}$.*

Demostración. Consideremos en primer lugar el caso no simétrico. Si suponemos que $\mathcal{L}$ está contenido estrictamente en $\mathcal{H}$, entonces existe un elemento $L \in \mathcal{H}$ que no pertenece a $\mathcal{L}$. Consideremos el conjunto (no vacío) de ideales a izquierda de R que contienen a L y no pertenecen a $\mathcal{L}$. Dado que R es noetheriano a izquierda, este conjunto es inductivo, y por el axioma de Zorn, tiene un elemento maximal K. Puesto que K no pertenece a $\mathcal{L}$, el filtro $\mathcal{L}$–Gabriel $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L}$ contiene estrictamente a $\mathcal{L}$. Además, $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L}$ es un elemento primo de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, pues si $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}''$ son dos filtros $\mathcal{L}$–Gabriel tales que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}' \circ \mathcal{H}'' \ ,$$

entonces, en particular, K pertenece a $\mathcal{H}' \circ \mathcal{H}''$, y por lo tanto existe un ideal a izquierda $H \in \mathcal{H}''$ conteniendo a K tal que $(K : r) \in \mathcal{H}'$ para cada $r \in H$. Si H pertenece a $\mathcal{L}$, entonces $K \in \mathcal{H}' \circ \mathcal{L}$, y por lo tanto

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H}' \circ \mathcal{L} = \mathcal{H}' \ .$$

Si por el contrario H no pertenece a $\mathcal{L}$, entonces por la maximalidad de K, se tiene que $H = K$, y por tanto $K \in \mathcal{H}''$, de donde se sigue que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H}'' \circ \mathcal{L} = \mathcal{H}'' \ .$$

Dado que $L \subseteq K \in \mathcal{H}$, el radical de $\mathcal{H}$ contiene a $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L}$, pero esto está en contradicción con el hecho de que $\sqrt{\mathcal{H}} = \mathcal{L}$ pues $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_K \circ \mathcal{L}$ contiene estrictamente a $\mathcal{L}$. Luego $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.

Sea ahora $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel simétrico (resp. el filtro de Gabriel jansiano generado por el ideal bilátero I). De la misma manera que en el caso anterior, si $\mathcal{L}$ está contenido estrictamente en $\mathcal{H}$, entonces existe un ideal bilátero L que pertenece a $\mathcal{H}$ y no pertenece a $\mathcal{L}$. Como R es noetheriano a izquierda, el conjunto de ideales biláteros de R que contienen a L y no pertenecen a $\mathcal{L}$ es inductivo y no vacío, y por lo tanto tiene un elemento maximal P. El ideal bilátero P es primo, pues si J y J' son ideales biláteros de tal manera que $JJ' \subseteq P$, entonces $(J + L)(J' + L) \subseteq P$. Si $J + L$ y $J' + L$ pertenecen a $\mathcal{L}$, entonces

$$P \supseteq (J + L)(J' + L) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \ ,$$

que está en contradicción con que P no pertenezca a $\mathcal{L}$. Luego o bien $J + L$ no pertenece a $\mathcal{L}$, o bien $J' + L$ no pertenece a $\mathcal{L}$, y por la maximalidad de P, o bien $J \subseteq J + L \subseteq P$, o bien $J' \subseteq J' + L \subseteq P$.

Por lo tanto, el filtro uniforme jansiano $\mathcal{L}_P$ es un elemento primo del casi–cuantal $(R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ (resp. de $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$) (ver (5.1.15)), y si $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}''$ son elementos de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ (resp. de $\mathcal{C}_I^{jan}$) tales que el filtro $\mathcal{L}$–Gabriel simétrico $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}$ (resp. el filtro $\mathcal{L}$–Gabriel jansiano $\mathcal{L}_I \circ \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}_I$) está contenido en $\mathcal{H}' \circ \mathcal{H}''$, entonces $\mathcal{L}_P$ también lo está, y por lo tanto o bien

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H}' \circ \mathcal{L} = \mathcal{H}' \ ,$$

o bien

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{H}'' \circ \mathcal{L} = \mathcal{H}'' \ ,$$

luego $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}$ es un elemento primo de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ (resp. de $\mathcal{C}_I^{jan}$). Puesto que $P \in \mathcal{H}$ no pertenece a $\mathcal{L}$, se tiene entonces que $\mathcal{L}$ está contenido estrictamente en

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}_P \circ \mathcal{L} \subseteq \sqrt{\mathcal{H}} \ ,$$

lo que contradice la hipótesis $\sqrt{\mathcal{H}} = \mathcal{L}$. $\square$

(5.3.6) Lema. *Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal y $f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (B, [\cdot = \cdot])$ un premorfismo de $\mathcal{C}$–haces. Entonces*

(5.3.6.1) $\sqrt{[a = a']} = \sqrt{[a' = a]}$;

(5.3.6.2) $\bigvee_{b\in B}[fa=b]=\bigvee_{a''\in A}[a=a'']$ *y* $\bigvee_{b\in B}[b=fa]=\bigvee_{a''\in A}[a''=a]$, *para cada* a *y* a'' *pertenecientes a* A.

Demostración. Dado que $\sqrt{\cdot}\,:\,\mathcal{C}\longrightarrow\sqrt{\mathcal{C}}$ es un morfismo de casi–cuantales,

$$\begin{aligned}\sqrt{[a=a']} &= \sqrt{\bigvee_{a''\in A}[a=a'']\ \&\ [a''=a']}\\ &= \bigvee_{a''\in A}\sqrt{[a=a'']}\wedge\sqrt{[a''=a']}\\ &= \sqrt{\bigvee_{a''\in A}[a''=a']\ \&\ [a=a'']}=\sqrt{[a'=a]}\ .\end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que f satisface (5.2.4.1) y (5.2.4.5),

$$\begin{aligned}\bigvee_{b\in B}[fa=b] &= \bigvee_{b\in B}\bigvee_{a''\in A}[a=a'']\ \&\ [fa''=b]\\ &= \bigvee_{a''\in A}[a=a'']\ \&\ \bigvee_{b\in B}[fa''=b]\\ &\leq \bigvee_{a''\in A}[a=a'']\\ &\leq \bigvee_{a''\in A}\bigvee_{b\in B}[fa=b]\ \&\ [b=fa'']\\ &\leq \bigvee_{b\in B}[fa=b]\ ,\end{aligned}$$

y de manera simétrica,

$$\begin{aligned}\bigvee_{b\in B}[b=fa] &\leq \bigvee_{b\in B}\bigvee_{a''\in A}[b=fa'']\ \&\ [a''=a]\\ &\leq \bigvee_{a''\in A}\Big(\bigvee_{b\in B}[b=fa'']\Big)\ \&\ [a''=a]\\ &\leq \bigvee_{a''\in A}[a''=a]\\ &\leq \bigvee_{a''\in A}\bigvee_{b\in B}[fa''=b]\ \&\ [b=fa]\\ &\leq \bigvee_{b\in B}[b=fa]\ ,\end{aligned}$$

□

(5.3.7) Lema. ([6, 17]) *Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal. Si f es una sección global del $\mathcal{C}$–haz $(A, [\cdot = \cdot])$, entonces:*

(5.3.7.1) $\sqrt{[f* = a]} \wedge \sqrt{[f* = a']} \leq \sqrt{[a = a']}$, *y de manera simétrica,* $\sqrt{[a = f*]} \wedge \sqrt{[a' = f*]} \leq \sqrt{[a = a']}$;

(5.3.7.2) $\sqrt{[f* = a]} = \sqrt{[a = f*]}$,

para cada a y a' pertenececientes a A.

Demostración. En virtud del lema (5.3.6), $\bigvee_{a'' \in A}[a'' = f*] = [* = *] = 1$, y por tanto

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{[f* = a]} \wedge \sqrt{[f* = a']} \\
&= \bigvee_{a'' \in A} \sqrt{[a'' = f*]} \wedge \sqrt{[f* = a]} \wedge \sqrt{[a'' = f*]} \wedge \sqrt{[f* = a']} \\
&= \bigvee_{a'' \in A} \sqrt{[a'' = f*]\ \&\ [f* = a]} \wedge \sqrt{[a'' = f*]\ \&\ [f* = a']}\ .
\end{aligned}
$$

Dado que f satisface (5.3.2.2), este supremo es menor o igual que

$$
\begin{aligned}
&\bigvee_{a'' \in A} \sqrt{[a'' = a]} \wedge \sqrt{[a'' = a']} \\
&= \sqrt{\bigvee_{a'' \in A} [a = a'']\ \&\ [a'' = a']} = \sqrt{[a = a']}\ .
\end{aligned}
$$

Simétricamente, por (5.3.2.2) y el lema (5.3.6),

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{[a = f*]} \wedge \sqrt{[a' = f*]} \\
&= \bigvee_{a'' \in A} \sqrt{[a = f*]} \wedge \sqrt{[f* = a'']} \wedge \sqrt{[a' = f*]} \wedge \sqrt{[f* = a'']} \\
&= \bigvee_{a'' \in A} \sqrt{[a = f*]\ \&\ [f* = a'']} \wedge \sqrt{[a' = f*]\ \&\ [f* = a'']} \\
&\leq \bigvee_{a'' \in A} \sqrt{[a = a'']} \wedge \sqrt{[a' = a'']} \\
&= \sqrt{\bigvee_{a'' \in A} [a = a'']\ \&\ [a'' = a']} = \sqrt{[a = a']}\ .
\end{aligned}
$$

Finalmente, por (5.2.4.5) se tiene que

$$\sqrt{[f* = a]} = \sqrt{[* = *]\ \&\ [f* = a]}$$

$$\leq \sqrt{(\bigvee_{a''\in A} [f* = a''] \ \& \ [a'' = f*]) \ \& \ [f* = a]}$$
$$= \bigvee_{a''\in A} \sqrt{[f* = a'']} \wedge \sqrt{[f* = a]} \wedge \sqrt{[a'' = f*]}$$
$$\leq \bigvee_{a''\in A} \sqrt{[a = a'']} \wedge \sqrt{[a'' = f*]}$$
$$= \bigvee_{a''\in A} \sqrt{[a = a''] \ \& \ [a'' = f*]} = \sqrt{[a = f*]} \ ,$$

y simétricamente, $\sqrt{[a = f*]} \leq \sqrt{[f* = a]}$, de donde se sigue la igualdad.

□

(5.3.8) Teorema. ([17]) *Sea R un anillo noetheriano a izquierda y $\mathcal{C}$ el casi–cuantal $R - \mathbf{filt}^{opp}$ (resp. el casi–cuantal $(R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$, resp. el cuantal $Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}$). Si M es un R–módulo a izquierda, y el filtro $\{R\}$ es un elemento compacto de $\mathcal{C}$, entonces la aplicación que asigna a cada elemento m de M la sección global f_m es una biyección entre M y el conjunto de secciones globales del $\mathcal{C}$–haz definido por M.*

Demostración. Dado que la $\{R\}$–torsión de M es el submódulo nulo, la inyectividad es consecuencia de la proposición (5.3.4).
Sea f una sección global del haz asociado a M. Dado que f verifica (5.2.4.5), se tiene que

$$\bigcap_{m\in M} [f* = m] \ \& \ [m = f*] = [* = *] = \{R\} \ ,$$

y por ser $\{R\}$ un elemento compacto de $\mathcal{C}$, existen $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} [f* = m_i] \ \& \ [m_i = f*] = \{R\} \ .$$

Por (5.3.2.2), para cada par de índices distintos i y j,

$$\mathrm{Ann}^l_R(m_i - m_j) \in [m_i = m_j] \subseteq [m_i = f*] \circ [f* = m_j]$$
$$\subseteq [m_i = f*] \circ [f* = m_j] \circ [m_j = f*] \ ,$$

y de ahí que existe un elemento L_{ij} de $[f* = m_j] \circ [m_j = f*]$ tal que

$$(\mathrm{Ann}^l_R(m_i - m_j) : r) = \mathrm{Ann}^l_R(r(m_i - m_j)) \in [m_i = f*]$$

para todo $r \in L_{ij}$. Luego

$$L_j = \bigcap_{i=1}^{n} L_{ij} \in [f* = m_j] \circ [m_j = f*]$$

para cada j. Dado que

$$\sum_{j=1}^{n} L_j \in \bigcap_{j=1}^{n} [f* = m_j] \circ [m_j = f*] = \{R\} \ ,$$

existe un elemento $r_j \in L_j$ para cada j, de manera que $r_1 + \cdots + r_n = 1$. Sea $m = r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} m_i - m &= (r_1 + \cdots + r_n) m_i - (r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n) \\ &= r_1(m_i - m_1) + \cdots + r_n(m_i - m_n) \ , \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\mathrm{Ann}_R^l(m_i - m) \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ann}_R^l(r_j(m_i - m_j)) \in [m_i = f*] \ .$$

Luego $[m_i = m] \subseteq [m_i = f*]$, de donde se concluye que

$$\begin{aligned} [f* = m] &= \bigcap_{m' \in M} [f* = m'] \circ [m' = m] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} [f* = m_i] \circ [m_i = m] \\ &\subseteq \bigcap_{i=1}^{m} [f* = m_i] \circ [m_i = f*] = \{R\} \ , \end{aligned}$$

esto es, $[f* = m] = \{R\}$.

Por el lema (5.3.7), y dado que $\sqrt{[f* = m]} \subseteq [f* = m]$,

$$\sqrt{[f* = m]} = \sqrt{[m = f*]} = \{R\} \ .$$

Luego $[m = f*] = \{R\}$ por el lema (5.3.5), y puesto que f verifica (5.2.4.3), (5.3.2.1) y (5.3.2.2), de ahí se concluye que

$$[f_m = m'] = [m = m'] \subseteq [m = f*] \circ [f* = m'] = [f* = m'] \ ,$$

$$[f* = m'] \subseteq [f* = m] \circ [m = m'] = [m = m'] = [f_m * = m'] \ ,$$

y también que

$$[m' = f_m] = [m' = m] \subseteq [m' = f*] \circ [f* = m] = [m' = f*] \ ,$$

$$[m' = f*] \subseteq [m' = m] \circ [m = f*] = [m' = m] = [m' = f_m*] ,$$

para cada $m' \in M$, luego $f = f_m$.
La demostración para los casos simétrico y jansiano sigue exactamente estas mismas líneas. $\square$

(5.3.9) Nota. El filtro uniforme jansiano $\{R\}$ es siempre un elemento compacto del cuantal $Id(R)-\mathbf{filt}^{opp}$ ([6]), pues en efecto, si $\{I_a\}_{a\in A}$ es una familia de ideales biláteros de R y

$$\mathcal{L}_R = \{R\} = \bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_{I_a} = \mathcal{L}_{\sum_{a\in A} I_a} ,$$

entonces existen ciertos índices $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que la unidad del anillo pertenece a la suma $\sum_{i=1}^n I_{a_i}$, y por lo tanto $\sum_{i=1}^n I_{a_i} = R$. Luego

$$\{R\} = \mathcal{L}_{\sum_{i=1}^n I_{a_i}} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{I_{a_i}} .$$

Por otra parte, $\{R\}$ es un elemento compacto de $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ si, y sólo si, R tiene un número finito de ideales biláteros maximales pues si $\{M_1, \ldots, M_n\}$ es el conjunto de ideales biláteros maximales de R y $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ es una familia de filtros uniformes simétricos cuya intersección es $\{R\}$, entonces, dado que $M_i \notin \bigcap_{a\in A} \mathcal{L}_a$, existe $a_i \in A$ tal que $M_i \notin \mathcal{L}_{a_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego ningún ideal a izquierda L distinto de R puede pertenecer al filtro uniforme simétrico $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{a_i}$, pues en ese caso $L^* \neq R$ pertenecería a $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{a_i}$, y existiría un ideal bilátero maximal de R conteniendo a L^* que por tanto también pertenecería a $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{a_i}$, lo que contradice que $M_i \notin \mathcal{L}_{a_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Recíprocamente, si $\{R\}$ es un elemento compacto de $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ y $\mathbf{Max}^{(2)}R$ es el conjunto de ideales biláteros maximales de R, entonces cada $M \in \mathbf{Max}^{(2)}R$ es un ideal primo. Consideremos para cada M el filtro uniforme simétrico $\mathcal{L}_{R\setminus M}$ (ver (3.1.32)). Si L es un ideal distinto de R, entonces existe un ideal bilátero maximal M tal que $L^* \subseteq M$, y por lo tanto L no puede pertenecer a $\mathcal{L}_{R\setminus M}$ y mucho menos a la intersección $\bigcap_{M\in\mathbf{Max}^{(2)}R} \mathcal{L}_{R\setminus M}$. Luego

$$\bigcap_{M\in\mathbf{Max}^{(2)}R} \mathcal{L}_{R\setminus M} = \{R\} ,$$

y por ser $\{R\}$ compacto, existe una familia finita $\{M_1, \ldots, M_n\}$ de ideales biláteros maximales tal que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{R\setminus M_i} = \{R\}$. Estos son todos los elementos de $\mathbf{Max}^{(2)}R$, ya que si M es un ideal bilátero maximal, entonces M no pertenece a $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{L}_{R\setminus M_i}$, y esto quiere decir que existe un índice i tal que

$M \notin \mathcal{L}_{R\setminus M_i}$, o equivalentemente, $M \subseteq M_i$. Por la maximalidad de M, se tiene que $M = M_i$.

De manera similar, si R tiene solamente un número finito de ideales maximales $\{M_1, \ldots, M_n\}$, entonces el filtro uniforme $\{R\}$ es un elemento compacto de $R - \mathbf{filt}^{opp}$, pues si $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ es una familia de filtros uniformes cuya intersección es $\{R\}$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ existe un índice $a_i \in A$ tal que $M_i \notin \mathcal{L}_{a_i}$. Si L es un ideal a izquierda distinto de R, entonces L está contenido en M_i para algún i, y por lo tanto L no pertenece a $\mathcal{L}_{a_i}$ y tampoco a la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{a_i}$. Luego $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{a_i} = \{R\}$.

5.4. Funtorialidad

Como se verá en esta sección, la construcción de haces sobre el casi–cuantal de los filtros uniformes tiene un buen comportamiento funtorial. Dado un homomorfismo (de cierto tipo) de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$, es posible construir un morfismo entre los casi–cuantales de filtros uniformes (resp. simétricos, jansianos) en R y en S, de la misma manera que un homomorfismo entre anillos conmutativos define una aplicación continua entre los respectivos espectros de ideales primos.

Por otra parte, como $\sqrt{\cdot}$ es un morfismo de casi–cuantales, es posible representar cierta clase anillos por medio de haces sobre el local de los filtros uniformes (resp. simétricos, jansianos) radicales

(5.4.1) Proposición. ([6, 17]) *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ casi–cuantales. Si $q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo de casi–cuantales, entonces q induce por composición un funtor de la categoría de haces sobre $\mathcal{C}$ en la categoría de haces sobre $\mathcal{C}'$.*

Demostración. Construyamos en primer lugar un funtor entre las precategorías de haces y premorfismos sobre cada uno de los casi–cuantales. Sea $(A, [\cdot = \cdot])$ un $\mathcal{C}$–haz y consideremos la composición de aplicaciones

$$q \circ [\cdot = \cdot] : A \times A \longrightarrow \mathcal{C}'$$

que denotaremos por $q[\cdot = \cdot]$. Como consecuencia de que $(A, [\cdot = \cdot])$ satisface los axiomas de $\mathcal{C}$–haz y de que q conserva la multiplicación, el supremo de cualquier familia de elementos de $\mathcal{C}$ y el elemento superior, se tiene que $(A, q[\cdot = \cdot])$ es un $\mathcal{C}'$–haz.

Si $f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (B, [\cdot = \cdot])$ es un premorfismo de haces sobre $\mathcal{C}$, entonces, dado que q conserva el producto y el supremo de cualquier familia de elementos de $\mathcal{C}$, el par de aplicaciones

$$q \circ [f\cdot = \cdot] : A \times B \longrightarrow \mathcal{C}' \quad ; \quad q \circ [\cdot = f\cdot] : B \times A \longrightarrow \mathcal{C}'$$

define un premorfismo de $\mathcal{C}'$–haces que denotaremos por qf. Además, si f es una flecha en la precategoría de $\mathcal{C}$–haces, o sea, si para cada $a \in A$ existen b_a y b'_a pertenecientes a B tales que $[fa = b_a] = [b'_a = fa] = 1$, entonces, dado que q conserva el elemento superior, el morfismo qf es también una flecha en la precategoría de haces sobre $\mathcal{C}'$.

Por otro lado, si $f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (B, [\cdot = \cdot])$ y $g : (B, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (C, [\cdot = \cdot])$ son premorfismos de $\mathcal{C}$–haces, entonces $q(gf)$ viene dado por las aplicaciones

$$[q(gf)a = c] = q(\bigvee_{b \in B} [fa = b] \;\&\; [gb = c]) = \bigvee_{b \in B} q[fa = b] \;\&\; q[gb = c] \ ,$$

$$[c = q(gf)a] = q(\bigvee_{b \in B} [c = gb] \;\&\; [b = fa]) = \bigvee_{b \in B} q[c = gb] \;\&\; q[b = fa] \ ,$$

esto es, $q(gf)$ es la composición de los premorfismos qf y qg. Como además $q\,id_A$ es la flecha distinguida del $\mathcal{C}'$–haz $(A, q[\cdot = \cdot])$, en efecto q define un funtor de la precategoría de $\mathcal{C}$–haces en la precategoría de $\mathcal{C}'$–haces.

Tal como observamos ya en (5.2.9), aplicando la propiedad universal de la categoría envolvente de una precategoría obtenemos un funtor de la categoría de $\mathcal{C}$–haces en la categoría de $\mathcal{C}'$–haces que asigna a cada $\mathcal{C}$–haz $(A, [\cdot = \cdot])$ el $\mathcal{C}'$–haz $(A, q[\cdot = \cdot])$, y al morfismo representado por el premorfismo de haces f, el morfismo representado por qf. $\square$

(5.4.2) Ejemplo. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos y $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel en R. Por (3.2.3), el filtro $\overline{\mathcal{L}}$ es un filtro de Gabriel en S. Si $\mathcal{H}$ es un filtro $\mathcal{L}$–Gabriel en R, entonces, en virtud del lema (3.2.2),

$$\overline{\mathcal{H}} \subseteq \overline{\mathcal{L}} \circ \overline{\mathcal{H}} \subseteq \overline{\mathcal{L} \circ \mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}} \ ,$$

y de la misma manera $\overline{\mathcal{H}} \circ \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{H}}$.

Si todos los filtros uniformes en R son compatibles con φ (por ejemplo, φ es una extensión centralizante), entonces la aplicación que asigna a cada filtro $\mathcal{L}$–Gabriel $\mathcal{H}$ en R el filtro inducido $\overline{\mathcal{H}}$ en S es un morfismo entre el casi–cuantal de filtros $\mathcal{L}$–Gabriel en R y el de filtros $\overline{\mathcal{L}}$–Gabriel en S. En efecto, si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ son dos filtros $\mathcal{L}$–Gabriel en R, entonces el ínfimo $\overline{\mathcal{H}} \wedge \overline{\mathcal{H}'}$ en $S - \mathbf{filt}^{opp}$ es el conjunto de ideales a izquierda

$$\begin{aligned} &\{L \leq_l S \ ; \ \exists H \in \overline{\mathcal{H}}, \ H' \in \overline{\mathcal{H}'} \ , \ H \cap H' \subseteq L\} \\ &= \{L \leq_l S \ ; \ \exists H \in \mathcal{H}, \ H' \in \mathcal{H}' \ , \ H \cap H' \subseteq \varphi^{-1}(L)\} \ , \end{aligned}$$

o sea, coincide con el filtro inducido del ínfimo $\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}'$ en $R - \mathbf{filt}^{opp}$. Luego el ínfimo de $\overline{\mathcal{H}}$ y $\overline{\mathcal{H}'}$ en $\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}}$ es (ver (5.1.12))

$$\overline{\mathcal{L}} \circ (\overline{\mathcal{H}} \wedge \overline{\mathcal{H}'}) \circ \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} \circ (\overline{\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}'}) \circ \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L} \circ (\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}') \circ \mathcal{L}} \ ,$$

esto es, es el inducido del ínfimo de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.
Por otra parte, si $\{\mathcal{L}_a\}_{a\in A}$ es una familia de filtros $\mathcal{L}$-Gabriel en R, entonces el inducido por la intersección es

$$\overline{\bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a} = \{L \leq_l S \; ; \; \varphi^{-1}(L) \in \bigcap_{a\in A}\mathcal{L}_a\}$$

$$= \bigcap_{a\in A}\{L \leq_l S \; ; \; \varphi^{-1}(L) \in \mathcal{L}_a\} = \bigcap_{a\in A}\overline{\mathcal{L}_a} \; .$$

Además, en virtud de la proposición (3.2.9), el inducido de la composición es la composición de los inducidos, y esto prueba que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}} \; ; \quad \mathcal{H} \longmapsto \overline{\mathcal{H}}$$

es un morfismo de casi–cuantales, pues el inducido del supremo $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ es el supremo de $\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}}$.
Tal y como se ha comprobado en la demostración de (3.2.7), en el caso particular de ser $\mathcal{L}$ el filtro de Gabriel $\{R\}$, entonces $\overline{\mathcal{L}} = \{S\}$, y la inducción de filtros uniformes es un morfismo de casi–cuantales entre $R - \mathbf{filt}^{opp}$ y $S - \mathbf{filt}^{opp}$.

(5.4.3) Ejemplo. De la misma manera, si $\mathcal{H}$ es un filtro uniforme simétrico en R y $\varphi : R \longrightarrow S$ es una extensión fuertemente normalizante, entonces $\overline{\mathcal{H}}$ es un filtro uniforme simétrico en S. En efecto, como $\mathcal{H}$ es compatible con φ (ver (3.2.8)), si L es un elemento de $\overline{\mathcal{H}}$, entonces existe un ideal bilátero H perteneciente a $\mathcal{H}$ tal que $H \subseteq \varphi^{-1}(L)$. Por ser φ fuertemente normalizante, $S\varphi(H)$ es un ideal bilátero de S, que pertenece a $\overline{\mathcal{H}}$ dado que $H \subseteq \varphi^{-1}(S\varphi(H))$, y tal que

$$S\varphi(H) \subseteq S\varphi(\varphi^{-1}(L)) \subseteq L \; .$$

Por lo tanto, si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico en R, entonces $\overline{\mathcal{L}}$ es un filtro de Gabriel simétrico en S. Si R y S son noetherianos a izquierda entonces, de la misma manera que en el ejemplo anterior, la inducción de filtros uniformes es un morfismo de casi–cuantales entre $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{C}^{(2)}_{\overline{\mathcal{L}}}$.
Además, si J es un ideal bilátero de R, entonces el ideal bilátero $S\varphi(J)$ de S pertenece al inducido del filtro uniforme jansiano $\mathcal{L}_J$, puesto que J está contenido en $\varphi^{-1}(S\varphi(J))$, y por otra parte, si L es un elemento de $\overline{\mathcal{L}_J}$, entonces $J \subseteq \varphi^{-1}(L)$, de donde se concluye que $L \in \mathcal{L}_{S\varphi(J)}$, pues

$$S\varphi(J) \subseteq S\varphi(\varphi^{-1}(L)) \subseteq L \; .$$

Luego $\overline{\mathcal{L}_J} = \mathcal{L}_{S\varphi(J)}$.
Si $\mathcal{L}$ es el filtro uniforme jansiano $\mathcal{L}_I$, entonces la inducción de filtros uniformes es un morfismo de casi–cuantales entre los cuantales $\mathcal{C}_I^{jan}$ y $\mathcal{C}_{S\varphi(I)}^{jan}$, pues en efecto el inducido de un filtro ($\mathcal{L}_I$–Gabriel) jansiano en R es un filtro ($\mathcal{L}_{S\varphi(I)}$–Gabriel) jansiano en S, y la inducción conserva la composición, el elemento superior y el supremo (esto es, la intersección) de cualquier familia de filtros jansianos $\mathcal{L}_I$–Gabriel.
En particular, si $\mathcal{L}$ es el filtro uniforme simétrico (resp. jansiano) $\{R\}$, entonces el inducido de $\mathcal{L}$ es $\{S\}$, y por lo tanto la inducción de filtros uniformes es un morfismo entre los casi–cuantales $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ y $(S-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$ (resp. entre los cuantales $Id(R)-\mathbf{filt}^{opp}$ e $Id(S)-\mathbf{filt}^{opp}$).

El siguiente resultado es consecuencia de (5.4.1):

(5.4.4) Corolario. *Sea $\mathcal{L}$ un filtro de Gabriel en R (resp. un filtro de Gabriel simétrico en el anillo noetheriano a izquierda R) y $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos tal que todo filtro uniforme en R es compatible con φ (resp. $\varphi : R \longrightarrow S$ una extensión fuertemente normalizante). Entonces la inducción de filtros uniformes define por composición un funtor de la categoría de haces sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ en la categoría de haces sobre $\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}}$ (resp. de la categoría de haces sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{(2)}$ en la de haces sobre $\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{L}}}^{(2)}$, y si $\mathcal{L}$ es el filtro uniforme jansiano generado por el ideal bilátero I, de la categoría de haces sobre el cuantal $\mathcal{C}_I^{jan}$ en la categoría de haces sobre el cuantal $\mathcal{C}_{S\varphi(I)}^{jan}$).*

(5.4.5) Ejemplo. Sea $\mathcal{C}$ un casi–cuantal. Como se ha probado en (5.1.17), la aplicación

$$\sqrt{\cdot} : \mathcal{C} \longrightarrow \sqrt{\mathcal{C}}$$

que a cada elemento de $\mathcal{C}$ le asigna su radical es un morfismo de casi–cuantales de $\mathcal{C}$ en el local $\sqrt{\mathcal{C}}$. Por la proposición (5.4.1), $\sqrt{\cdot}$ define por composición un funtor de la categoría de haces sobre $\mathcal{C}$ en la categoría de haces sobre $\sqrt{\mathcal{C}}$, que a cada haz $(A, [\cdot = \cdot])$ le asigna el haz $(A, \sqrt{[\cdot = \cdot]})$, y al morfismo en la categoría de $\mathcal{C}$–haces representado por el premorfismo

$$f : (A, [\cdot = \cdot]) \longrightarrow (B, [\cdot = \cdot]) \ ,$$

el morfismo representado por $\sqrt{f}$, donde $\sqrt{f}$ está dado por las aplicaciones

$$(a,b) \longmapsto [\sqrt{f}a = b] = \sqrt{[fa = b]} \quad , \qquad (b,a) \longmapsto [b = \sqrt{f}a] = \sqrt{[b = fa]} \ .$$

Por otra parte, si f es una sección global de $(A, [\cdot = \cdot])$, entonces el morfismo $\sqrt{f}$ dado por $[\sqrt{f}* = a] = \sqrt{[f* = a]}$ y $[a = \sqrt{f}*] = \sqrt{[a = f*]}$ para cada a perteneciente a A, es una sección global de $(A, \sqrt{[\cdot = \cdot]})$.

(5.4.6) Sea R un anillo noetheriano a izquierda. En particular, si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel en R, entonces

$$\sqrt{\cdot} : \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \sqrt{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}$$

define un funtor de la categoría de $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haces en la categoría de $\sqrt{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}$–haces, y al componer con el funtor que se ha construido en (5.2.11), se obtiene un funtor de $R-\mathbf{mod}$ en la categoría de haces sobre el local $\sqrt{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}$.
Además, si M es un R–módulo a izquierda, entonces cada elemento m de M define una sección global $\sqrt{f_m}$ del $\sqrt{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}$–haz $(M, \sqrt{[\cdot = \cdot]})$. Si las secciones globales $\sqrt{f_m}$ y $\sqrt{f_{m'}}$ son iguales, entonces

$$\sqrt{[m = m']} = [\sqrt{f_m}* = m'] = [\sqrt{f_{m'}}* = m'] = \sqrt{[m' = m']} = \sqrt{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\ .$$

Luego, por el lema (5.3.5), $[m = m'] = \mathcal{L}$, y por lo tanto $\mathrm{Ann}^l_R(m - m') \in \mathcal{L}$, esto es, $\overline{m} = \overline{m}'$ en $M/\sigma_{\mathcal{L}}M$.
Recíprocamente, si $\overline{m} = \overline{m}'$, entonces $\sqrt{f_m} = \sqrt{f_{m'}}$, pues las secciones f_m y $f_{m'}$ del $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$–haz $(M, [\cdot = \cdot])$ también coinciden (ver (5.3.4)).
De forma similar, si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel simétrico (resp. es el filtro uniforme jansiano generado por el ideal bilátero idempotente I), el morfismo de casi–cuantales $\sqrt{\cdot}$ define un funtor de la categoría de $\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}$–haces en la categoría de $\sqrt{\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}}$–haces (resp. de la categoría de $\mathcal{C}^{jan}_{I}$–haces en la categoría de $\sqrt{\mathcal{C}^{jan}_{I}}$–haces), y por tanto, componiendo con el funtor que se ha descrito en (5.2.12), se obtiene un funtor de la categoría de R–módulos a izquierda en la categoría de haces sobre el local $\sqrt{\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}}$ (resp. sobre el local $\sqrt{\mathcal{C}^{jan}_{I}}$).
Al igual que en el caso no simétrico, si M es un R–módulo a izquierda, entonces todo elemento m de M define una sección global $\sqrt{f_m}$ del $\sqrt{\mathcal{C}^{(2)}_{\mathcal{L}}}$–haz (resp. del $\sqrt{\mathcal{C}^{jan}_{I}}$–haz) $(M, [\cdot = \cdot]^{(2)})$. Si las secciones globales $\sqrt{f_m}$ y $\sqrt{f_{m'}}$ son iguales, entonces

$$\sqrt{[m = m']^{(2)}} = [\sqrt{f_m}* = m']^{(2)} = [\sqrt{f_{m'}}* = m']^{(2)} = \sqrt{[m' = m']^{(2)}} = \mathcal{L}\ ,$$

y por el lema (5.3.5), $[m = m']^{(2)} = \mathcal{L}$. Luego

$$\mathrm{Ann}^l_R(m - m')^* \subseteq \mathrm{Ann}^l_R(m - m') \in \mathcal{L}\ ,$$

o lo que es lo mismo, $\overline{m}$ y $\overline{m}'$ coinciden en $M/\sigma_{\mathcal{L}}M$. Recíprocamente, si $\overline{m} = \overline{m}'$, entonces $f_m = f_{m'}$ y por lo tanto $\sqrt{f_m} = \sqrt{f_{m'}}$.

(5.4.7) En particular si $\mathcal{L} = \{R\}$, entonces la aplicación que a cada elemento r de R le asigna la sección global $\sqrt{f_r}$ del haz definido por M sobre el local $\sqrt{R - \mathbf{filt}^{opp}}$ (resp. $\sqrt{(R - \mathbf{filt}^{(2)})^{opp}}$, resp. $\sqrt{Id(R) - \mathbf{filt}^{opp}}$) es inyectiva.

Es interesante conocer en qué condiciones se puede asegurar que esta aplicación es una biyección, pues entonces se obtendría de nuevo el anillo R como el conjunto de secciones globales del haz asociado a R sobre un local.

(5.4.8) Lema. *Sea $\mathcal{C}$ el casi–cuantal $R-\mathbf{filt}^{opp}$, (resp. $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$, resp. $Id(R)-\mathbf{filt}^{opp}$). Las aplicaciones $i:\sqrt{\mathcal{C}}\longrightarrow\mathcal{C}$ y $\sqrt{\cdot}:\mathcal{C}\longrightarrow\sqrt{\mathcal{C}}$ tienen las siguientes propiedades:*

(5.4.8.1) *la composición $\sqrt{\cdot}\circ i$ es la aplicación identidad en $\sqrt{\mathcal{C}}$, e $i(\sqrt{\mathcal{L}})\subseteq\mathcal{L}$ para todo $\mathcal{L}\in\mathcal{C}$;*

(5.4.8.2) *dado que conservan el orden de los elementos, i y $\sqrt{\cdot}$ pueden ser considerados funtores entre las categorías (pre)orden y, como tales, i es adjunto a derecha de $\sqrt{\cdot}$, esto es, $\mathcal{L}\supseteq\sqrt{\mathcal{H}}$ si, y sólo si, $i(\mathcal{L})\supseteq\mathcal{H}$ para todo $\mathcal{L}\in\mathcal{C}$ y todo $\mathcal{H}\in\sqrt{\mathcal{C}}$;*

(5.4.8.3) *el funtor i conserva el elemento superior $\{R\}$ y $\sqrt{\cdot}$ lo refleja, esto es, si $\sqrt{\mathcal{L}}=\{R\}$, entonces $\mathcal{L}=\{R\}$;*

(5.4.8.4) *$i(\mathcal{H})\circ i(\mathcal{H}')\supseteq i(\mathcal{H}\wedge\mathcal{H}')$ para todo $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ pertenecientes a $\sqrt{\mathcal{C}}$;*

(5.4.8.5) *$\mathcal{H}\wedge\mathcal{H}'=\sqrt{i(\mathcal{H})\circ i(\mathcal{H}')}$ para todo $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ pertenecientes a $\sqrt{\mathcal{C}}$;*

(5.4.8.6) *$i(\sqrt{\mathcal{L}})\circ i(\sqrt{\mathcal{L}'})\supseteq i(\sqrt{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}'})$ para todo par de elementos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ pertenecientes a $\mathcal{C}$;*

(5.4.8.7) *para toda familia $\{\mathcal{H}_a\}_{a\in A}$ de elementos de $\sqrt{\mathcal{C}}$,*

$$\bigvee_{a\in A}\mathcal{H}_a=\sqrt{\bigcap_{a\in A}i(\mathcal{H}_a)}\ .$$

Demostración. Dado que el radical de un elemento $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ es el ínfimo de todos los elementos primos de $\mathcal{C}$ que lo superan, en particular, el radical de $\mathcal{L}$ supera a $\mathcal{L}$, de donde se sigue (1).
Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son elementos de $\mathcal{C}$ y $\sqrt{\mathcal{C}}$ resp. y $\mathcal{L}\supseteq i(\mathcal{H})$, entonces $\sqrt{\mathcal{L}}\supseteq\sqrt{i(\mathcal{H})}=\mathcal{H}$, y recíprocamente, si $\mathcal{H}\subseteq\sqrt{\mathcal{L}}$, entonces $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{L}$ puesto que $\sqrt{\mathcal{L}}\subseteq\mathcal{L}$.
Como consecuencia de (5.3.5) (en este caso no es necesaria la hipótesis de que R es noetheriano a izquierda porque el elemento superior es $\{R\}$), el funtor $\sqrt{\cdot}$ refleja el elemento superior, y la inclusión lo conserva.
La propiedad (5) se verifica en cualquier casi–cuantal, como se ha probado en (5.1.16), y (4) es consecuencia de (2) y (5).
La propiedad (6) también es consecuencia de (5.1.16) dado que $\sqrt{\mathcal{L}}\wedge\sqrt{\mathcal{L}'}\subseteq\sqrt{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}'}$.
Finalmente, la propiedad (7) es justamente el hecho de que $\sqrt{\cdot}$ conserva el supremo de la familia $\{i(\mathcal{H}_a)\}_{a\in A}$ (ver (5.1.17)), pues por (1), $\sqrt{i(\mathcal{H}_a)}=\mathcal{H}_a$ para cada $a\in A$. □

(5.4.9) Teorema. ([17]) *Sea $\mathcal{C}$ el casi–cuantal $R-\mathbf{filt}^{opp}$, (resp. el casi–cuantal $(R-\mathbf{filt}^{(2)})^{opp}$, resp. el cuantal $Id(R)-\mathbf{filt}^{opp}$). Si $\{R\}$ es un elemento compacto en $\mathcal{C}$ y el radical del filtro uniforme jansiano generado por el ideal 0 es $\sqrt{\mathcal{L}_0}=\mathcal{L}_0$, entonces la aplicación que a cada elemento r de R le asigna la sección global $\sqrt{f_r}$ del haz $(R,\sqrt{[\cdot=\cdot]})$ sobre el local $\sqrt{\mathcal{C}}$ es biyectiva.*

Demostración. Dado que la $\{R\}$–torsión de cualquier R–módulo, y en particular de R, es el submódulo nulo, la aplicación $r\longmapsto\sqrt{f_r}$ es inyectiva (ver (5.4.6)).
Sea f una sección global de $(R,\sqrt{[\cdot=\cdot]})$. Dado que f verifica (5.2.4.5), por (5.4.8.7) se tiene que

$$\{R\}=[*=*]=\bigvee_{r\in R}[f*=r]\wedge[r=f*]=\sqrt{\bigcap_{r\in R}i([f*=r]\wedge[r=f*])}\ ,$$

y por (5.4.8.3),

$$\{R\}=\bigcap_{r\in R}i([f*=r]\wedge[r=f*])\ .$$

Bajo la hipótesis de compacidad de $\{R\}$, existen elementos $r_1,\ldots,r_n$ de R tales que

$$\{R\}=\bigcap_{j=1}^{n}i([f*=r_j]\wedge[r_j=f*])\ .$$

Luego, puesto que $\sqrt{\cdot}$ conserva el elemento superior,

$$\{R\}=\sqrt{\bigcap_{j=1}^{n}i([f*=r_j]\wedge[r_j=f*])}\ ,$$

y por (5.4.8.7) y (5.4.8.5),

$$\sqrt{\bigcap_{j=1}^{n}i([f*=r_j]\wedge[r_j=f*])}=\bigvee_{j=1}^{n}\sqrt{i([f*=r_j]\wedge[r_j=f*])}$$

$$=\bigvee_{j=1}^{n}\sqrt{i(\sqrt{i([f*=r_j])\circ i([r_j=f*])})}=\sqrt{\bigcap_{j=1}^{n}i([f*=r_j])\circ i([r_j=f*])}\ .$$

De nuevo por (5.4.8.3), se tiene que $\bigcap_{j=1}^{n}i([f*=r_j])\circ i([r_j=f*])=\{R\}$.
Sean $j,k\in\{1,\ldots,n\}$ y denotemos por J_{jk} al ideal bilátero $R(r_j-r_k)R$. Entonces, por (5.4.8.4),

$$i([r_j=f*])\circ i([f*=r_k])\circ\mathcal{L}_{J_{jk}}\supseteq i([r_j=f*]\wedge[f*=r_k])\circ i(\sqrt{\mathcal{L}_{J_{jk}}})\ ,$$

y este último contiene a $i(\sqrt{[r_j = r_k]}) \circ i(\sqrt{\mathcal{L}_{J_{jk}}})$ puesto que f verifica el axioma (5.3.2.2). Por lo tanto, (5.4.8.6) y la hipótesis sobre $\mathcal{L}_0$ implican que

$$i([r_j = f*]) \circ i([f* = r_k]) \circ \mathcal{L}_{J_{jk}} \supseteq i(\sqrt{[r_j = r_k] \circ \mathcal{L}_{J_{jk}}}) = i(\sqrt{\mathcal{L}_0}) = \mathcal{L}_0 \ ,$$

y de ahí que existe un elemento L de $\mathcal{L}_{J_{jk}}$ tal que para cada $r \in L$, el anulador $\mathrm{Ann}^l_R(r)$ pertenece a $i([r_j = f*]) \circ i([f* = r_k])$. Como todo elemento de $\mathcal{L}_{J_{jk}}$ contiene a J_{jk}, en particular

$$\mathrm{Ann}^l_R(r_j - r_k) \in i([r_j = f*]) \circ i([f* = r_k]) \ ,$$

y por lo tanto existe un elemento

$$L_{jk} \in i([f* = r_k]) \subseteq i([f* = r_k]) \circ i([r_k = f*])$$

tal que

$$(\mathrm{Ann}^l_R(r_j - r_k) : r) = \mathrm{Ann}^l_R(r(r_j - r_k)) \in i([r_j = f*])$$

para cada $r \in L_{jk}$. Sea

$$L_k = \bigcap_{j=1}^{n} L_{jk} \in i([f* = r_k]) \circ i([r_k = f*]) \ .$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} L_k \in \bigcap_{k=1}^{n} i([f* = r_k]) \circ i([r_k = f*]) = \{R\} \ ,$$

de donde existe para $1 \leq k \leq n$ un elemento $s_k \in L_k$ de tal manera que $s_1 + \cdots + s_n = 1$.

Sea $s = s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n$. El elemento $r_j - s$ es de $i([r_j = f*])$–torsión para cada j, pues

$$\begin{aligned} r_j - s &= (s_1 + \cdots + s_n) r_j - (s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n) \\ &= s_1(r_j - r_1) + \cdots + s_n(r_j - r_n) \ , \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Ann}^l_R(r_j - s) \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ann}^l_R(s_k(r_j - r_k)) \in i([r_j = f*]) \ .$$

Luego $[r_j = s] \subseteq i([r_j = f*])$ para cada j. Esto implica que

$$\sqrt{[r_j = s]} \subseteq \sqrt{i([r_j = f*])} = [r_j = f*] \ ,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}[f* = s] &= \bigvee_{r \in R} [f* = r] \wedge \sqrt{[r = s]} \subseteq \bigvee_{j=1}^{n} [f* = r_j] \wedge \sqrt{[r_j = s]} \\ &\subseteq \bigvee_{j=1}^{n} [f* = r_j] \wedge [r_j = f*] = \{R\} \ .\end{aligned}$$

Por el lema (5.3.7), y dado que todo elemento de $\sqrt{\mathcal{C}}$ es radical,

$$[s = f*] = \sqrt{[s = f*]} = \sqrt{[f* = s]} = [f* = s] = \{R\}.$$

Se concluye entonces que f coincide con la sección global $\sqrt{f_s}$, ya que para cada $r \in R$,

$$[\sqrt{f_s}* = r] = \sqrt{[s = r]} \subseteq [s = f*] \wedge [f* = r] = [f* = r] \ ,$$

$$[f* = r] \subseteq [f* = s] \wedge \sqrt{[s = r]} = \sqrt{[s = r]} = [\sqrt{f_s}* = r] \ ,$$

y simétricamente,

$$[r = \sqrt{f_s}*] = \sqrt{[r = s]} \subseteq [r = f*] \wedge [f* = s] = [r = f*] \ ,$$

$$[r = f*] \subseteq \sqrt{[r = s]} \wedge [s = f*] = \sqrt{[r = s]} = [r = \sqrt{f_s}*] \ .$$

□

(5.4.10) De esta manera se obtiene, una representación del anillo R por medio de un haz sobre el local $\sqrt{\mathcal{C}}$ cuando $\mathcal{L}_0$ es radical y $\{R\}$ es compacto en el casi–cuantal $\mathcal{C}$ de los filtros uniformes (resp. simétricos, jansianos) en R.

Bibliografía

[1] Bell, A. D., Notes on localization in noncommutative noetherian rings, Cuadernos de Algebra 9, Universidad de Granada, 1988.

[2] Berni-Canani, U., Borceux, F. y Succi-Cruciani, R., *A theory of quantale sets*, J. Pure Appl. Algebra, **62** (1989) 123-136.

[3] Bikan, L., Kepka, T. y Nemec, P., Rings, modules and preradicals, MĎekker, New York, 1982.

[4] Borceux, F., *Examples of quantales in topos theory*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **101** (1987) 61-67.

[5] Borceux, F. y Cruciani, R., *Sheaves on a quantale*, Cahiers Top. Géom. Diff. Catégoriques **24** (1993) 209-228.

[6] Borceux, F. y Cruciani, R., *A Generic Representation Theorem for Non–Commutative Rings*, J. of Algebra **167** (1994) 291-308.

[7] Borceux, F. y Kelly, G. M., *On locales of localizations*, J. Pure Appl. Algebra **46** (1987) 1-34.

[8] Borceux, F. y Van den Bossche, G., *Quantales and their Sheaves*, Order **3** (1986) 61-87.

[9] Borceux, F. y Van den Bossche, G., *A generic sheaf representation for rings*, Lecture Notes in Mathematics **1488**, Springer Verlag, New York, (1991), 30-42.

[10] Bronowitz, R., Decomposition of Torsion Theories, Tesis doctoral, Universidad de Florida, 1972.

[11] Bueso, J. L., Jara, P. y Verschoren, A., Compatibility, Stability and Sheaves, M. Dekker, New York, 1995.

[12] Cartan, H. y Eilenberg, S., Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[13] Cauchon, G., *Les T-anneaux, la condition (H) de Gabriel et ses conséquences*, Comm. in Algebra **4** (1976) 11-50.

[14] Cohn, P. M., *Skew fields of fractions and the prime spectrum of a general ring*, in: Lectures on Rings and Modules, Lecture Notes in Mathematics 246, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[15] Cohn, P. M., *The affine scheme of a general ring*, in: Lecture Notes in Mathematics 753, Springer Verlag, Berlin, 1979, 197-211.

[16] Gabriel, P., *Des Catégories Abeliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962) 323-448.

[17] García, M., Jara, P., Márquez Hernández, M. y Verschoren, A., *Uniform Filters*, aceptado para publicación en Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques.

[18] García, M., Márquez Hernández, M. y Verschoren, A., *Structure Sheaves and Noncommutative Topologies*, J. of Algebra **194** (1997) 224-244.

[19] Golan, J., Localization in Noncommutative Rings, M. Dekker, New York, 1975.

[20] Golan, J., Structure sheaves over a noncommutative ring, M. Dekker, New York, 1980.

[21] Golan, J., Linear topologies on a ring: an overview, Research Notes in Mathematics 159, Pitman, 1987.

[22] Goldman, O., *Rings and modules of quotients*, J. of Algebra **13** (1969) 10-47.

[23] Goldston, B. y Mewborn, A. C., *A structure sheaf for non-commutative noetherian rings*, J. of Algebra **47** (1977) 18-28.

[24] Grothendieck, A., Dieudonné, J. et alter, Eléments de Géometrie Algébrique, Publ. Math IHES 4,8,11,17,20,24,28 y 32 (1960-1967).

[25] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J. **9** (1957) 119-221.

[26] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer Verlag, 1977.

[27] Hofmann, K. H., *Representations of algebras by continuous sections*, Bull. Am. Math. Soc. **78** (1972) 291-373.

[28] Jategaonkar, A. V., Localization in noetherian rings, London Math. Soc. Lecture Notes 98, Cambridge Univ. Press, London, 1986.

[29] Johnstone, P. T., Stone Spaces, Cambridge studies in Adv. Math. 3, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1982.

[30] McConnell, J. y Robson, J. C., Noncommutative noetherian rings, Wiley Interscience, New York, 1988.

[31] Merino, L., Radwan, A. y Verschoren, A., *Strongly normalizing modules and sheaves*, Bull. Soc. Math. Belg. **44** (1992) 273-291.

[32] Merino, L. M. y Verschoren, A., *Symmetry and localization*, Bull. Soc. Math. Belg. **43** (1991) 99-112.

[33] Merino, L. M. y Verschoren, A., *Strongly normalizing extensions*, J. Pure Appl. Algebra **92** (1994) 161-172.

[34] Mulet, J. y Verschoren, A., *On compatibility II*, Comm. in Algebra **20** (1992) 1897-1905.

[35] Murdoch, D. C. y Van Oystaeyen, F., *Noncommutative Localization and Sheaves*, J. of Algebra **35** (1975) 500-515

[36] Popescu, N., *Le spectre à gauche d'un anneau*, J. of Algebra **18** (1971) 213-228.

[37] Rosenberg, A. L., Noncommutative Algebraic Geometry and Representations of Quantized Algebras, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[38] Segura, M. I., Tarazona, D. y Verschoren, A., *On compatibility*, Comm. in Algebra **17** (1989) 677-690.

[39] Serre, J. P., *Faisceaux Algébriques Cohérentes*, Annals of Math. **61** (1955) 197-278.

[40] Stenström, B., Rings of Quotients, Springer Verlag, 1975.

[41] Van den Bossche, G., *Quantaloids and Non-Commutative Ring Representations*, App. Cat. Structures **3** (1995) 305-320.

[42] Van Oystaeyen, F., Prime Spectra in Non-commutative Algebra, Lecture Notes in Mathematics 444, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[43] Van Oystaeyen, F., *Compatibility of kernel functors and localization functors*, Bull. Soc. Math. Belg. **28** (1976) 131-137.

[44] Van Oystaeyen, F., *On Graded Rings and Modules of Quotients*, Comm. in Algebra **6** (1978) 1923-1959.

[45] Van Oystaeyen, F. y Verschoren, A., Reflectors and Localization, M. Dekker, New York, 1979.

[46] Van Oystaeyen, F. y Verschoren, A., Noncommutative Algebraic Geometry, Lecture Notes in Mathematics 887, Springer Verlag, Berlin, 1981.

[47] Van Oystaeyen, F. y Willaert, L., *Grothendieck topology, coherent sheaves and Serre's theorem for schematic algebras*, J. Pure Appl. Algebra, **104** (1995) 109-122.

[48] Verschoren, A., Compatibility and Stability, Notas de Matemática 3, Murcia, 1990.

[49] Verschoren, A., *Sheaves and Localization*, J. of Algebra **182** (1996) 341-346.

[50] Verschoren, A. y Willaert, L., *Noncommutative Algebraic Geometry: from pi–algebras to quantum groups*, Simon Stevin, por aparecer.

[51] Vidal Martín, C., Noetherianidad Relativa, Localización y Haces, Alxebra **61**, Serv. de publ. Univ. Santiago de Compostela, 1996.

[52] Willaert, L., Schematic Algebras, tesis doctoral, Universidad de Amberes – UIA, 1995.

Índice de Materias

álgebra esquemática, 52
altura de un ideal primo, 3
anillo, xiii
  S–inversor universal, 33
  $\mathcal{L}$–perfecto, 30
  con identidad polinomial, 43
  de coordenadas, 3
  de Goldie, 35
  de secciones globales, 11
  FBN, 26
  graduado, 50
  topológico, 62

base de un filtro, 79
bimódulo, xiii
  centralizante o de Artin, 38
  fuertemente normalizante, 44
  normalizante, 44
  totalmente libre de torsión, 42
birradical, 44
  centralizante, 45
  fuertemente normalizante, 45

casi–cuantal, 115
  de filtros $\mathcal{L}$–Gabriel, 119
  de filtros $\mathcal{L}$–Gabriel simétricos, 119
  de filtros uniformes, 116
  de filtros uniformes simétricos, 118
categoría
  cociente, 13
  de haces, 8
    sobre un casi–cuantal, 131
  envolvente de una precategoría, 130
clase de libres de torsión, 15, 65
clase de pretorsión, 63
  hereditaria, 63
clase de torsión, 15
composición
  de filtros, 17, 57
  de flechas, 127
  de premorfimos, 127
condición
  (H) de Gabriel, 26
  fuerte de segunda capa, 26
conjunto algebraico afín, 2
conjunto algebraico proyectivo, 3
cuantal, 115
  de filtros $\mathcal{L}_I$–Gabriel jansianos, 120
  de filtros uniformes jansianos, 117

dimensión
  de Krull, 3
  de una variedad afín, 2

elemento primo en un casi–cuantal, 120
elemento radical en un casi–cuantal, 122
envolvente σ–inyectiva, 16
espacio
  étalé, 8
  anillado, 11
  localmente anillado, 11

espectro
cuerpo, 33
maximal, 6
primo
(anillos conmutativos), 6
primo (anillos no conmutativos), 23, 36, 46
primo homogéneo, 12
esquema, 12
afín, 12
sobre S, 12

fecha distinguida, 127
fibra, 8
filtro, 17, 57
$\mathcal{L}$–Gabriel, 119
de Gabriel, 18, 69
asociado a S, 18
con la propiedad de Artin-Rees, 25
con la propiedad de Artin-Rees débil, 26
estable, 24
generado por $\mathcal{L}$, 69
generado por I, 18
geométrico, 30
primo, 31
graduado asociado a un radical rígido, 51
uniforme, 18, 60
asociado a la clase $[\mathbf{L}]$, 99
compatible con φ, 78
hipersimétrico, 38
inducido por $\mathcal{L}$ a través de φ, 77
jansiano, 71
primo*, 120
simétrico, 73
filtros de Gabriel mutuamente compatibles, 22
función
racional, 4
regular, 4
funtor
entre precategorías, 130
hacificación, 10
localización, 14, 19, 40
núcleo, 15, 17, 63
núcleo idempotente, 15
proyección, 14, 131
restricción, 13
sección, 14

haz, 8
débil sobre un casi–cuantal, 123
de estructura, 10, 12
en el sitio no conmutativo, 111
imagen directa, 11
imagen inversa, 11
sobre un casi–cuantal, 124

ideal
anulador, xiii
de Artin-Rees, 25
primo, 29
primo a izquierda, 34
super primo, 31

local, 116
radical de un casi–cuantal, 122
localización
en categorías abelianas, 13
en categorías de bimódulos, 38
en categorías de Grothendieck, 15
en categorías de módulos, 17
en categorías de módulos graduados, 52
perfecta, 21

m–dezplazamiento de un módulo graduado, 50
módulo

L–libre de torsión, 88
de **L**–torsión, 88
graduado, 50
totalmente libre de torsión, 37
morfismo
de casi–cuantales, 117
de esquemas, 12
de haces, 8
de prehaces, 8
de variedades, 5
localización, 89
restricción, 8

objeto
σ–inyectivo, 16
σ–cerrado, 16
de torsión, 15
espectral, 34
libre de torsión, 15

precategoría, 127
de haces sobre un casi–cuantal, 127
prehaz, 8
separado, 8
premorfismo de haces sobre un casi–cuantal, 126
Primo, 33
punto genérico, 7

radical, 15, 38, 40
de un elemento en un casi–cuantal, 120
graduado, 51
rígido, 51
recubrimiento, 54, 105
estable, 108
global, 54
retículo
de birradicales centralizantes, 45
de filtros, 57
de filtros de Gabriel, 22, 69
de filtros uniformes, 22, 61
de filtros uniformes jansianos, 73
de filtros uniformes simétricos, 73

sección, 9
global, 138
sitio no conmutativo, 105
subcategoría
gruesa, 14
localizante, 14
submódulo crítico, 32

teoría de torsión, 15, 17, 38
hereditaria, 15, 17, 38
topología
I–ádica, 24
$\mathbb{T}$ de **Spec**R, 46
τ^* de **spec**R, 35
τ de **spec**R, 35
de **Field** – **spec**R, 33
de **Sp**R, 32
de Grothendieck, 53
no conmutativa, 54
de Zariski, 2, 6, 36
estable, 103
de Zariski de **Spec**R, 35
lineal, 62

variedad, 4
afín, 2
proyectiva, 4

zócalo de un anillo, 59