Universidad de La Laguna

Introducción a la teoría de grupoides de Lie

Introduction to the theory of Lie groupoids

Miguel Vara León

Trabajo de Fin de Grado

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 18 de julio de 2014

Dr. D. **David Iglesias Ponte**, con N.I.F. 44.705.752-P investigador Ramón y Cajal adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*Introducción a la teoría de grupoides de Lie.*"

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Miguel Vara León**, con N.I.F. 42.223.025-Q.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 18 de julio de 2014

Agradecimientos

A todo aquel que haya colaborado para

la realización de este trabajo.

Especialmente a mi tutor.

Resumen

Es bien sabido que, dado un objeto geométrico, a la hora de entender las simetrías del mismo, el conjunto de aplicaciones biyectivas del objeto en sí mismo nos codifica una familia de simetrías y, que además, éste tiene estructura de grupo. Pero, ¿nos es suficiente con la familia de simetrías codificada?, ¿y si el espacio no se comporta como un grupo?.

Es en este momento en el que entran en juego unas estructuras algebraicas llamadas grupoides, las cuales se pueden entender como una generalización de la estructura de grupo.

En este trabajo comenzaremos introduciendo la noción de grupoide y la comparativa de éstos con los grupos mediante dos ejemplos sencillos basados en puzzles, como son el cubo de Rubik o el puzzle de quince. Posteriormente definiremos su estructura más rigurosamente, presentando algunas de sus propiedades y su teoría paralela a la de grupos, junto a ciertos ejemplos que ilustrarán los resultados mostrados. Para hacer énfasis en los grupoides como herramientas a la hora de captar las simetrías de un espacio, mostraremos un ejemplo más evidente de su utilidad.

Concluyendo con el trabajo, estudiaremos las principales propiedades de los grupoides cuando estos tienen, además, una estructura diferenciable definida sobre ellos. Para que esto sea posible, mostraremos algunos resultados principales de la teoría de grupos de Lie y de acciones de grupos de Lie sobre variedades. Desarrollaremos la teoría de los grupoides con estructura diferenciable de forma análoga a la de grupos de Lie, culminando con la construcción del objeto infinitesimal asociado, denominado algebroide de Lie.

Abstract

It is well known that, given a geometric object, to understand its symmetries, the set of bijective maps from the object to itself encodes a family of symmetries and, furthermore, it has a group structure. But, what if the encoding family of symmetries is not enough or the space of transformations of the object does not behave as a group?

It is in this moment when an algebraic structure called groupoid turns up, which can be understood as a generalization of the structure of groups.

In this paper we begin introducing the notion of a groupoid and comparing these with groups through two simple examples based in puzzles, namely, the Rubik's cube and the fifteen puzzle. Then, we define more rigorously this structure and present some of its properties and a parallel theory to groups, along with some examples which will illustrate the obtained results. To emphasize groupoids as tools to capture the symmetries of a space, we will show a more interesting example of its utility.

Concluding with the project, we will study the principal properties of groupoids when they are also equipped with a differentiable structure. In order to do this, we will show some related results of the theory of Lie groups and actions of Lie groups on manifolds. The theory of differentiable groupoids will be developed analogously to the theory of Lie groups, culminating with the construction of the associated infinitesimal object, the so-called Lie algebroid.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Simetrías y simetrías generalizadas

En este capítulo motivaremos la introducción de la noción de grupoide desde el punto de vista de las simetrías de un objeto geométrico. Para ello, comencemos con un ejemplo conocido de grupo.

1.1. Cubo de Rubik

Tomemos para comenzar el cubo de Rubik, que denotaremos por $\boxplus$, cuyas caras están pintadas de un color distinto y subdivididas en nueve cuadrados. Por la construcción de este puzzle los cuadrados centrales de cada cara son siempre de distinto color, es decir, no es posible tener dos centros de caras distintas del mismo color; por tanto podemos tomarlos como fijos.

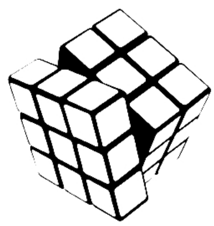

Figura 1.1: Cubo de Rubik

Definamos ahora que consideraremos un movimiento en el cubo.

Definición 1.1 *Un movimiento m en $\boxplus$ es una rotación de 90^o en sentido horario de alguna de sus caras. Denotaremos m^{-1} al movimiento inverso, que consiste en realizar la rotación en sentido antihorario de la misma cara, es decir, deshacer el movimiento.*

La composición o sucesión de movimientos será expresada por $*$. Así, dados m_1, m_2 dos movimientos, $m_1 * m_2$ nos dirá que realizamos primero m_1 y sucesivamente m_2. De esta forma una transformación del cubo consistirá en la composición finita de movimientos. Las transformaciones serán denotadas por $M = m_1 * \cdots * m_n$ donde m_i es un movimiento, $i = 1 \dots n$.

Consideremos pues el conjunto de todas las transformaciones sobre $\boxplus$, que denotaremos de la misma forma. Dicho conjunto tiene una operación inducida por la composición de movimientos, que denotaremos de la misma manera, definida como

$$M_1 * M_2 = m_1 * \cdots * m_j * n_1 * \cdots * n_k$$

para $M_1 = m_1 * \cdots * m_j, M_2 = n_1 * \cdots * n_k \in \boxplus$. Con la operación definida en el conjunto de transformaciones veamos que $(\boxplus, *)$ tiene estructura de grupo.

- Obviamente la composición de transformaciones es una transformación, con dicha notación, formada por $j + k$ movimientos.
- El elemento neutro corresponderá, como es natural, con la transformación identidad o no transformación.
- Para cada transformación $M = m_1 * \cdots * m_n$ definimos su inverso como $M^{-1} = {m_n}^{-1} * \cdots * {m_1}^{-1}$.
- Para demostrar la asociatividad de $*$ fijemos una orientación C del cubo y denotaremos $M(C)$ como la actuación sobre el cubo de la transformación M. Así $M_1 * M_2(C) = M_2(M_1(C))$. Por tanto $M_1 * (M_2 * M_3)(C) = (M_2 * M_3)(M_1(C)) = M_3(M_2(M_1(C)))$ y por otra parte $(M_1 * M_2) * M_3(C) = M_3((M_1 * M_2)(C)) = M_3(M_2(M_1(C)))$, por lo que concluimos que $M_1 * (M_2 * M_3) = (M_1 * M_2) * M_3$.

Luego el conjunto de transformaciones del cubo de Rubik tiene estructura de grupo con la operación $*$.

Para terminar con este apartado, recordemos que, dado un conjunto X, el conjunto de aplicaciones biyectivas de X en sí mismo tiene estructura de grupo con la composición. En caso de que X sea finito es el denominado grupo simétrico $Sim(X)$. Cualquier subgrupo del grupo de aplicaciones biyectivas, siendo X finito o no, codificará una familia de simetrías de X.

Continuemos con otro ejemplo en el que el concepto de grupo no es aplicable.

1.2. Puzzle de quince

El puzzle de quince consiste en un cuadrado dividido en dieciséis cuadrados formando una cuadrícula de 4×4 en la que se numeran las casillas del uno al quince y se elimina la casilla número 16, como se ve en la figura.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 1.2: Puzzle de quince

Los cuadrados se deslizan ocupando la casilla vacía, por lo que consideraremos que es la casilla vacía la que se mueve. De esta forma podemos representar los posibles movimientos mediante el diagrama.

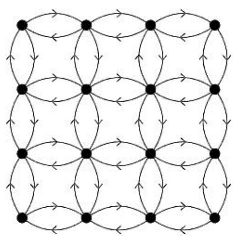

Figura 1.3: Diagrama puzzle de quince

Obviamente, al contrario que en el caso del cubo de Rubik, dos movimientos cualesquiera no pueden ser compuestos debido a que éstos dependen de la posición de la casilla vacía. Por tanto debemos considerar dos conjuntos, un conjunto P cuyos elementos son las posiciones del cuadrado vacío y otro M cuyos elementos son los movimientos del cuadrado vacío, los elementos de dichos conjuntos están representados en 1.3 como puntos y flechas respectivamente. Nótese que los puntos también representan movimientos, mejor dicho, los no movimientos del cuadrado vacío en dicha posición.

Para componer dos movimientos necesitamos que uno acabe donde comienza el siguiente, para representar esto de forma matemática introduzcamos dos aplicaciones $s : M \longrightarrow P$ y $t : M \longrightarrow P$, a las que llamaremos comienzo y final respectivamente, que nos servirán a modo de restricción a la hora de saber cuando podemos componer movimientos. De esta forma dos movimientos $\mu, \nu \in M$ podrán ser compuestos siempre y cuando $s(\nu) = t(\mu)$, la composición será representada por yuxtaposición $\nu\mu \in M$. Por tanto tenemos una operación parcial definida en el conjunto $M * M = \{(\nu, \mu) \in M \times M : s(\nu) = t(\mu)\}$. Necesitamos también identificar en M los puntos del diagrama 1.3, para ello introduzcamos otra aplicación $i : P \longrightarrow M$ de manera que para $p \in P$ tenemos $i(p) \in M$ correspondiente a el no movimiento en la posición p. Nótese que, al contrario que en el ejemplo del cubo de Rubik, la composición se lee de derecha a izquierda; es decir, $\nu\mu$ representa la realización de μ continuada de la de ν.

Con el diagrama 1.3 en mente podemos extraer de forma natural las siguientes conclusiones.

- Para $\nu\mu$ definido, $s(\nu\mu) = s(\mu)$ y $t(\nu\mu) = t(\nu)$.
- La composición es asociativa, siempre y cuando la composición esté definida.
- Para los no movimientos $i(p)$ con $p \in P$ tendremos obviamente $s(i(p)) = t(i(p)) = p$.
- Para todo $\mu \in M$, $\mu i(s(\mu)) = \mu = i(t(\mu))\mu$.
- Para todo μ existe un inverso por ambos lados que denotaremos μ^{-1} cumpliendo $s(\mu^{-1}) = t(\mu)$ y $t(\mu^{-1}) = s(\mu)$, y de manera que $\mu^{-1}\mu = i(s(\mu))$, $\mu\mu^{-1} = i(t(\mu))$. Este movimiento no ha de ser confundido con movimientos que cierren un ciclo, se trata del movimiento opuesto.

El comportamiento que sigue este puzzle es lo que definiremos de forma más correcta posteriormente como grupoide.

1.3. Objetivos del trabajo

El objetivo del trabajo es ofrecer una introducción a la teoría de grupoides, de manera que formalicemos las propiedades de las simetrías del puzzle de quince.

Comenzaremos desarrollando los aspectos algebraicos de los grupoides. Para ello definimos la estructura algebraica de éstos, y desarrollamos algunos ejemplos relacionados con distintas ramas de la matemática.

La estructura interna de un grupoide es bastante rica. Para demostrarlo, mostramos algunas propiedades de los grupoides y su relación con los grupos mediante la definición de algunos subconjuntos de interés, extraibles naturalmente de la propia estructura.

Continuamos desarrollando su teoría de forma análoga a la de grupos, definiendo las nociones de morfismo entre grupoides y subgrupoide, intercalando ejemplos, junto al teorema equivalente al primer teorema de isomorfía. Concluimos la parte algebraica con un ejemplo aclarador sobre la utilidad de los grupoides.

En el último capítulo, comenzaremos haciendo un pequeño receso de la teoría de grupoides para recordar algunos resultados de interés de la teoría de grupos de Lie y acciones de grupos de Lie en variedades, y que son esenciales para la sección posterior.

Seguidamente pasamos al desarrollo de la teoría de grupoides cuando admiten estructura de variedad diferenciable. Comprobaremos la correspondencia con los elementos mostrados en el desarrollo algebraico, así como su paralelismo con los grupos de Lie, para finalizar el trabajo con la construcción del objeto infinitesimal asociado, el algebroide de Lie, y algunos ejemplos.

1.4. Estructura del trabajo

El presente Trabajo de Fin de Grado presenta un total de 4 capítulos, incluyendo esta primera introducción.

En el capítulo 2, Grupoides, definimos la estructura algebraica de grupoide y estudiamos su teoría de forma paralela a la teoría de grupos. Definimos los conceptos de morfismo entre grupoides, subgrupoide y vemos algunos resultados puramente algebraicos a la par que mostramos ejemplos. Terminamos el capítulo con un ejemplo sobre la utilidad de estas estructuras algebraicas.

En el capítulo 3, Grupoides de Lie, estudiamos la estructura de grupoide cuando los conjuntos están también dotados de una estructura de variedad diferenciable. Para ello se introducirá una primera sección formada por resultados de teoría de grupos de Lie y acciones de grupos sobre variedades que nos serán útiles en el desarrollo de la teoría de los grupoides diferenciables. Estudiamos la relación entre la parte algebraica y esta parte de la geometría diferencial de grupoides, y desarrollaremos ésta de forma análoga a la vista de grupos de Lie para concluir con la construcción del objeto infinitesimal asociado.

En el capítulo 4 recogeremos las conclusiones sacadas de la elaboración de este escrito.

Capítulo 2

Grupoides

2.1. Definición y ejemplos

Una vez introducida la idea de grupoide en el capítulo anterior como un conjunto de simetrías generalizadas, definamos el concepto de forma rigurosa, así como diversos ejemplos que ilustren dicha definición.

Definición 2.1 *Un grupoide consiste en dos conjuntos Ω, al que llamaremos grupoide, y B, al que llamaremos base, junto a las aplicaciones*

$$s : \Omega \longrightarrow B \qquad t : \Omega \longrightarrow B$$

$$\tilde{\imath} : B \longrightarrow \Omega$$

y una multiplicación parcial definida en el conjunto $\Omega * \Omega = \{(\eta, \xi) \in \Omega \times \Omega : s(\eta) = t(\xi)\}$ que denotaremos por yuxtaposición. Todo sujeto a las siguientes condiciones

(I) *$s(\eta\xi) = s(\xi)$ y $t(\eta\xi) = t(\eta)$ para todo $(\eta, \xi) \in \Omega * \Omega$*

(II) *$\zeta(\eta\xi) = (\zeta\eta)\xi$ para todo $\zeta, \eta, \xi \in \Omega$ tal que $s(\zeta) = t(\eta)$ y $s(\eta) = t(\xi)$*

(III) *$s \circ \tilde{\imath}(x) = t \circ \tilde{\imath}(x) = x$ para todo $x \in B$*

(IV) *$\xi(\tilde{\imath} \circ s(\xi)) = \xi$ y $(\tilde{\imath} \circ t(\xi))\xi = \xi$ para todo $\xi \in \Omega$*

(V) *Cada $\xi \in \Omega$ posee un inverso por ambos lados ξ^{-1} tal que $s(\xi^{-1}) = t(\xi)$, $t(\xi^{-1}) = s(\xi)$ y $\xi^{-1}\xi = \tilde{\imath} \circ s(\xi)$, $\xi\xi^{-1} = \tilde{\imath} \circ t(\xi)$*

A los elementos de B los llamaremos objetos mientras que a los elementos de Ω los denominaremos flechas, esto es debido a que podemos interpretar $\xi \in \Omega$ como aplicaciones $\xi : s(\xi) \longrightarrow t(\xi)$. La flecha $\tilde{\iota}(x) = \tilde{x}$ correspondiente a $x \in B$ será llamada la unidad o la identidad correspondiente a x. La función s es llamada proyección fuente, la función t proyección objetivo e $\tilde{\iota}$ inclusión objeto.

De forma poco precisa, podemos decir que un grupoide es un conjunto con una multiplicación parcial, para el que se cumplen las propiedades habituales que poseen los grupos, es decir, dicha multiplicación es asociativa, todo elemento tiene inverso y existe una familia de unidades que son los $\tilde{x}$ con $x \in B$. Es trivial comprobar que si B es unitario entonces recuperamos la noción de grupo. Otros ejemplos interesantes son los siguientes.

Ejemplo 2.2 Sea B un conjunto. Entonces $B \times B$ es un grupoide sobre B con $s = p_2 : B \times B \longrightarrow B$ y $t = p_1 : B \times B \longrightarrow B$ las proyecciones sobre la segunda y primera componente, respectivamente, y multiplicación parcial definida por

$$(x, y)(y, z) = (x, z)$$

Notar en este caso que la inversión viene definida por $(x, y)^{-1} = (y, x)$ y la inclusión objetos es $\tilde{\iota}(x) = (x, x)$.

Ejemplo 2.3 Sea R una relación de equivalencia en un conjunto B. Entonces $R \subseteq B \times B$ es un grupoide sobre B con respecto a la restricción de la estructura descrita en el ejemplo 2.2.

Ejemplo 2.4 Sea $\phi : G \times B \longrightarrow B$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, una acción de un grupo G sobre un conjunto B. Tomemos s como la proyección sobre el segundo factor y $t = \phi$ la acción en sí. La multiplicación parcial se define como $(g_1, x)(g_2, y) = (g_1 g_2, x)$, definida sólo si $y = g_1 \cdot x$ y la inversión sería $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot x)$. La inclusión objeto vendrá dada como $\tilde{\iota}(x) = (e, x)$ donde $e \in G$ es el elemento neutro.

Por tanto, $G \times B$ es un grupoide sobre B. Éste es conocido como grupoide acción.

Veamos ahora un ejemplo que proviene de la topología algebraica, y que justifica, desde un punto de vista diferente, la noción de grupoide.

Ejemplo 2.5 Sea X un espacio topológico. Consideremos $\Pi(X)$ como el conjunto de clases de homotopía de caminos relativas a $\{0, 1\}$, es decir, $\Pi(X) = \{[\gamma] : \gamma : [0, 1] \to X\}$.

$\Pi(X)$ tiene estructura de grupoide sobre X; las proyecciones serán $s([\gamma]) = \gamma(0)$ y $t([\gamma]) = \gamma(1)$, la inclusión objeto vendrá dada como $\tilde{\iota}(x) = [c_x]$ donde c_x es el camino constante en $x \in X$; la multiplicación parcial será $[\gamma][\alpha] = [\gamma * \alpha]$ donde $*$ representa la concatenación de caminos definida sólo si $s(\alpha) = t(\gamma)$, así la inversión vendrá dada como $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ donde $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ es el camino inverso.

$\Pi(X)$ es conocido como el grupoide fundamental de X. Este concepto es interesante porque nos permite eliminar la elección de un punto distinguido del espacio X. Esta aproximación se ha usado en [1] para desarrollar algunos resultados de la topología algebraica.

Ejemplo 2.6 Sea $p : M \longrightarrow N$ una aplicación sobreyectiva. Consideremos $\Phi(M) = \{\phi : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(y) : \phi \ biyectiva,\ x, y \in N\}$.

Para $\phi : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(y)$ definimos las proyecciones como $s(\phi) = x$, $t(\phi) = y$; la inclusión objeto será $\tilde{\imath}(x) = Id_{p^{-1}(x)}$. La multiplicación parcial será la composición de aplicaciones, así el inverso de una ϕ será su inverso como aplicación.

Por tanto $\Phi(M) = \{\phi : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(y) : \phi \ biyectiva,\ x, y \in N\}$ tiene estructura de grupoide sobre N.

Este ejemplo es una versión fibrada del grupo de aplicaciones biyectivas de un conjunto en sí mismo. El origen de este ejemplo se encuentra en la teoría de fibrados, para los que se cumple que todos los conjuntos $p^{-1}(x)$ son isomorfos a un conjunto fijo F, llamado la fibra.

Justifiquemos la notación, así como la unicidad del inverso en 2.1, mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.7 *Sea Ω un grupoide con base B y $\xi \in \Omega$ tal que $s(\xi) = x$ y $t(\xi) = y$. Entonces:*

(I) *si $\eta \in \Omega$ con $s(\eta) = y$ y $\eta\xi = \xi$; entonces $\eta = \tilde{y}$*
si $\zeta \in \Omega$ con $t(\zeta) = x$ y $\zeta\xi = \xi$; entonces $\zeta = \tilde{x}$

(II) *si $\eta \in \Omega$ con $s(\eta) = y$ y $\eta\xi = \tilde{x}$; entonces $\eta = \xi^{-1}$*
si $\zeta \in \Omega$ con $t(\zeta) = x$ y $\zeta\xi = \tilde{y}$; entonces $\zeta = \xi^{-1}$

Demostración Usando los axiomas de la definición de grupoide demostraremos los primeros casos de los apartados de la proposición, los casos restantes son semejantes.

$\eta\xi = \xi \overset{\mathrm{V}}{\Longrightarrow} (\eta\xi)\xi^{-1} = \xi\xi^{-1} \overset{\mathrm{II}}{\Longrightarrow} \eta(\xi\xi^{-1}) = \xi\xi^{-1} \overset{\mathrm{V}}{\Longrightarrow} \eta\widetilde{t(\xi)} = \widetilde{t(\xi)}$ y por hipótesis sabemos que $s(\eta) = t(\xi) = y$, luego $\eta\widetilde{s(\eta)} = \widetilde{s(\eta)} \overset{\mathrm{IV}}{\Longrightarrow} \eta = \widetilde{s(\eta)} = \tilde{y}$

$\eta\xi = \tilde{x} \overset{\mathrm{V}}{\Longrightarrow} (\eta\xi)\xi^{-1} = \tilde{x}\xi^{-1} \overset{\mathrm{II}}{\Longrightarrow} \eta(\xi\xi^{-1}) = \tilde{x}\xi^{-1} \overset{\mathrm{V}}{\Longrightarrow} \eta\widetilde{t(\xi)} = \tilde{x}\xi^{-1}$ y $x = s(\xi)$, pero por V sabemos que $x = s(\xi) = t(\xi^{-1})$ y por hipótesis $t(\xi) = s(\eta) = y$, por tanto $\eta\widetilde{s(\eta)} = \widetilde{t(\xi^{-1})}\xi^{-1} = \eta = \xi^{-1}$ ■

A partir de ahora en lugar de referirnos a un grupoide como un grupoide con base B diremos un grupoide sobre B como simplificación del lenguaje.

2.2. Primeras propiedades. Grupo de isotropía y órbitas

En esta sección describiremos algunas de las propiedades fundamentales de los grupoides. En particular, que cada punto tiene asociado un grupo y que en el conjunto de unidades se puede definir una relación de equivalencia de manera que la clase de un punto describirá los puntos que se pueden alcanzar desde él mediante flechas.

Definición 2.8 *Sea Ω un grupoide sobre B, $x, y \in B$. Definimos la s-fibra sobre x como*

$$\Omega_x = s^{-1}(x) = \{\xi \in \Omega : s(\xi) = x\}$$

y análogamente la t-fibra sobre y como

$$\Omega^y = t^{-1}(y) = \{\xi \in \Omega : t(\xi) = y\}$$

Además definimos $\Omega_x^y = \Omega_x \cap \Omega^y$ cuyos elementos podemos representar $\xi : x \longrightarrow y$.

Si fijamos $x \in B$, Ω_x^x representa el conjunto de flechas que empiezan y terminan en x. Esto sugiere que dicho conjunto es un grupo. Veamos que, efectivamente, se cumple esta condición.

Proposición 2.9 *El conjunto Ω_x^x es un grupo donde la multiplicación es la restricción de la multiplicación parcial en el grupoide. Además, Ω_x^x actúa sobre la fibra $s^{-1}(x) = \Omega_x$. El grupo Ω_x^x se denominará grupo de isotropía en x.*

Demostración La demostración de que Ω_x^x es un grupo es trivial, nótese que el elemento neutro es $\tilde{x}$ y que el resto de condiciones surgen de la restricción de la multiplicación parcial, obviamente cualesquiera dos elementos de Ω_x^x pueden ser compuestos ya que empiezan y acaban en el mismo punto.

Veamos que Ω_x^x actúa sobre Ω_x, para ello definamos $\phi : \Omega_x^x \times \Omega_x \longrightarrow \Omega_x$ como $\phi(\xi, \zeta) = \zeta\xi$.

- Obviamente $\phi(\tilde{x},\zeta) = \zeta\tilde{x} = \zeta$ para todo $\zeta \in \Omega_x$.
- Sean $\xi,\eta \in \Omega_x^x$ entonces $\phi(\xi\eta,\zeta) = \zeta(\xi\eta) = \phi(\eta,\zeta\xi) = \phi(\eta,\phi(\zeta,\xi))$

Por tanto ϕ es una acción. ■

De los axiomas de grupoide, es fácil probar la siguiente proposición.

Proposición 2.10 *Sea Ω un grupoide sobre B. Definimos en B una relación de equivalencia de la siguiente manera.*

$$x \sim_\Omega y \;\Leftrightarrow\; \exists \xi \in \Omega : \; s(\xi) = x, t(\xi) = y$$

Demostración Obviamente la relación es simétrica, ya que $\tilde{x}$ es un elemento del grupoide.

Sean $x, y \in B$ tal que $x \sim_\Omega y$, entonces existe $\xi \in \Omega$ tal que $s(\xi) = x$, $t(\xi) = y$. Luego por el axioma V existe $\xi^{-1} \in \Omega$ inverso de ξ tal que $s(\xi^{-1}) = x$, $t(\xi^{-1}) = y$, por tanto, $y \sim_\Omega x$.

Sean $x, y, z \in B$ tales que $x \sim_\Omega y$, $y \sim_\Omega z$; entonces existen $\xi, \eta \in \Omega$ con $s(\xi) = x$, $t(\xi) = y$, $s(\eta) = y$, $t(\eta) = z$, es decir $(\eta,\xi) \in \Omega * \Omega$. Luego por I tenemos $\eta\xi \in \Omega$ con $s(\eta\xi) = x$, $t(\eta\xi) = z$. ■

Definición 2.11 *La órbita de $x \in B$, denotada por O_x, es la clase de equivalencia de x mediante la relación definida en la proposición anterior. Es decir,*

$$O_x = \{y \in B : x \sim_\Omega y\} = t(s^{-1}(x)) \tag{2.1}$$

Definición 2.12 *Sea Ω un grupoide sobre B. Diremos que Ω es un grupoide transitivo si la aplicación*

$$[t,s] : \Omega \longrightarrow B \times B \; ; \; \xi \mapsto (t(\xi), s(\xi))$$

es sobreyectiva; es decir, dados dos elementos cualesquiera de la base, existe un elemento del grupoide que los une. Equivalentemente, $O_x = B$.
Diremos que Ω es totalmente intransitivo si es la unión de sus grupos de isotropía, en otras palabras, la imagen de $[t,s]$ es $\{(x,x) : x \in B\}$. Equivalentemente, $O_x = \{x\}$

Dos casos extremos para la relación de equivalencia definida en la proposición 2.10 son los siguientes.

Ejemplo 2.13 En el ejemplo 2.2, para $x \in B$; $(B \times B)_x = B \times \{x\}$, $(B \times B)^x = \{x\} \times B$ y $(B \times B)_x^x = \{x\} \times \{x\}$, es decir, las fibras son isomorfas a la base y el grupo de isotropía está formado por un único elemento. En cambio la órbita de un elemento cualquiera x será $O_x = \{y \in B : (x, y) \in B \times B\} = B$, es decir, el grupoide es transitivo.

Ejemplo 2.14 Para el ejemplo 2.3 tenemos; $R_x = \{x\} \times [x]$, $R^x = [x] \times \{x\}$ y $R_x^x = (x, x)$. Las órbitas serán $O_x = [x]$.

Ejemplo 2.15 En el caso de 2.4 la s-fibra $(G \times B)_x = G \times \{x\}$, mientras que la t-fibra $(G \times B)^x = \{(g, y) : g \cdot y = x\}$. Así $(G \times B)_x^x = G_x \times \{x\}$ donde G_x es el subgrupo estabilizador o subgrupo de isotropía de la acción en $x \in B$. La órbita de $x \in B$ será $O_x = G \cdot x$ donde $G \cdot x$ es la órbita de x por la acción del grupo, es decir, $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$.

Este ejemplo es el que justifica el nombre de grupo de isotropía y de órbita.

Ejemplo 2.16 Para el grupoide de homotopía, véase ejemplo 2.5, $\Pi(X)_x = \{[\gamma] : \gamma(0) = x\}$ y $\Pi(X)^x = \{[\gamma] : \gamma(1) = x\}$. El grupo de isotropía será el grupo fundamental de X basado en x, es decir, $\Pi(X)_x^x = \pi_1(X, x)$. La órbita de un elemento $x \in X$ será la componente conexa por caminos de dicho punto.

Ejemplo 2.17 En el ejemplo 2.6 las fibras serán $\Phi(M)_x = \{\phi : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(y) : y \in N,\ \phi \textit{ biyectiva}\}$ y $\Phi(M)^x = \{\phi : p^{-1}(y) \longrightarrow p^{-1}(x) : y \in N,\ \phi \textit{ biyectiva}\}$. De esta forma el grupo de isotropía es $\Phi(M)_x^x = \{\phi : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x) : \phi \textit{ biyectiva}\}$, el conjunto de biyecciones de $p^{-1}(x)$ en sí mismo, es decir, el grupo de simetrías de $p^{-1}(x)$. La órbita de $x \in N$ es $O_x = \{y : \exists \phi : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(y) : \phi \textit{ biyectiva}\}$.

En el caso de grupos, aparecen de forma natural las traslaciones a derecha e izquierda, que son aplicaciones biyectivas del grupo en sí mismo con propiedades interesantes. En el caso del grupoide, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.18 *Sea Ω un grupoide sobre B y $\xi \in \Omega$ tal que $s(\xi) = x$, $t(\xi) = y$. Definimos la traslación a derecha y la traslación a la izquierda de ξ como las aplicaciones*

$$R_\xi : \Omega_y \longrightarrow \Omega_x \ ; \ \zeta \longmapsto \zeta\xi$$

$$L_\xi : \Omega^x \longrightarrow \Omega^y \ ; \ \eta \longmapsto \xi\eta$$

Si queremos definir las traslaciones a izquierda y a derecha de manera global, es decir, que involucren a todo el grupoide, tenemos que introducir el concepto de bisección.

Definición 2.19 *Una bisección o sección admisible de un grupoide Ω sobre B es una aplicación $\sigma : B \longrightarrow \Omega$ tal que $s \circ \sigma = Id_B$ y $t \circ \sigma$ es una biyección. Denotaremos el conjunto de bisecciones de Ω como $Bis(\Omega)$.*

Proposición 2.20 *Sea Ω un grupoide sobre B. Entonces $(Bis(\Omega), \star)$ es un grupo con $\star$ definida como sigue:*

$$(\sigma \star \tau)(x) = \sigma(t \circ \tau)(x)\tau(x)$$

donde $\sigma, \tau \in Bis(\Omega)$ y $\forall x \in B$.

Demostración Veamos que la operación $\star$ está bien definida. Obviamente $(\sigma\star\tau) : B \longrightarrow \Omega$.

$$s((\sigma \star \tau)(x)) = s(\sigma(t \circ \tau)(x))\tau(x)) = s(\tau(x)) = x$$

$$t((\sigma \star \tau)(x)) = t(\sigma(t \circ \tau)(x))\tau(x)) = t(\sigma(t \circ \tau)(x)) = (t \circ \sigma) \circ (t \circ \tau)(x)$$

por tanto $t(\sigma \star \tau) = (t \circ \sigma) \circ (t \circ \tau)$ es una biyección por ser composición de biyecciones. Nótese además que la multiplicación de las flechas $\sigma(t \circ \tau)(x))$ y $\tau(x)$ está definida, puesto que $s(\sigma(t \circ \tau)(x)) = (s \circ \sigma) \circ (t \circ \tau)(x) = Id_B \circ (t \circ \tau)(x) = (t \circ \tau)(x)$.

El elemento neutro será la inclusión objeto $\tilde{\iota}$ ya que

$$(\sigma \star \tilde{\iota})(x) = \sigma((t \circ \tilde{\iota})(x))\tilde{\iota}(x) = \sigma(x)\tilde{x} = \sigma(x)$$

Definamos el elemento inverso como $\sigma^{-1}(x) = \sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}$ y comprobemos:

$$(\sigma \star \sigma^{-1})(x) = \sigma((t \circ \sigma^{-1})(x))\sigma^{-1}(x) = \sigma(t(\sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}))\sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}$$

$$= \sigma(s \circ \sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x)))\sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1} = \sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x))\sigma((t \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}$$

$$= \tilde{\iota}((t \circ \sigma) \circ (t \circ \sigma)^{-1}(x)) = \tilde{x}$$

Luego $(\sigma \star \sigma^{-1}) = \tilde{\iota}$.

Veamos para concluir la asociatividad de $\star$. Sean $\sigma, \tau, \lambda \in Bis(\Omega)$ y $x \in B$, entonces $((\sigma \star \tau) \star \lambda)(x) = (\sigma \star \lambda)((t \circ \lambda)(x))\lambda(x) = \sigma((t \circ \tau) \circ (t \circ \lambda)(x))\tau((t \circ \lambda)(x))\lambda(x) = \sigma(t(\tau(t \circ \lambda)\lambda(x)))\tau((t \circ \lambda)(x))\lambda(x) = \sigma(t((\tau \star \lambda)(x))(\tau \star \lambda)(x)) = (\sigma \star (\tau \star \lambda))(x)$ ■

Nótese que si σ es una bisección, podemos definir la aplicación traslación a la izquierda por σ, $L_\sigma : \Omega \longrightarrow \Omega$, dada por $L_\sigma(\xi) = \sigma(t(\xi))\xi$. Además, la aplicación $\sigma \mapsto L_\sigma$ es un morfismo de grupos, entre el grupo de bisecciones, $Bis(\Omega)$, y el conjunto de traslaciones a izquierda de Ω.

2.3. Morfismos de grupoides

En esta sección definimos el concepto de morfismo de grupoides, probando los correspondientes teoremas de isomorfía, que en este caso hay que adaptar a nuestra teoría.

Definición 2.21 *Sean Ω y Ω' dos grupoides sobre B y B' respectivamente. Un morfismo desde Ω a Ω' consiste en un par de aplicaciones*

$$\phi : \Omega \longrightarrow \Omega' \qquad \phi_0 : B \longrightarrow B'$$

tales que $s' \circ \phi = \phi_0 \circ s$, $t' \circ \phi = \phi_0 \circ t$ y además

$$\phi(\eta\xi) = \phi(\eta)\phi(\xi) \text{ para todo } (\eta, \xi) \in \Omega * \Omega \tag{2.2}$$

Como en el caso de grupos, diremos que ϕ es un morfismo sobre ϕ_0. Si $B = B'$ y $\phi_0 = Id_B$ diremos que ϕ es un morfismo sobre B, o que es un morfismo que preserva la base.

Evidentemente las condiciones $s' \circ \phi = \phi_0 \circ s$ y $t' \circ \phi = \phi_0 \circ t$ aseguran la existencia de $\phi(\eta)\phi(\xi)$ siempre que $\eta\xi$ esté definido.

Veamos primero que, como es de esperar, un morfismo de grupoides preserva las unidades y los inversos.

Proposición 2.22 *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$, $\phi_0 : b \longrightarrow B'$ un morfismo de grupoides. Entonces:*

(I) $\phi(\tilde{x}) = \widetilde{\phi_0(x)}$ para todo $x \in B$

(II) $\phi(\xi^{-1}) = \phi(\xi)^{-1}$ para todo $\xi \in \Omega$.

Demostración Como $\tilde{x}$ es una unidad en Ω sabemos que $\tilde{x}\tilde{x} = \tilde{x}$. Luego $\phi(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}\tilde{x}) = \phi(\tilde{x})\phi(\tilde{x})$. Por 2.1 V, $\phi(\tilde{x})^{-1}$ existe, entonces

$$\phi(\tilde{x})\phi(\tilde{x})^{-1} = \widetilde{t'(\phi(\tilde{x}))} = \phi(\tilde{x})\phi(\tilde{x})\phi(\tilde{x})^{-1} = \phi(\tilde{x})\widetilde{t'(\phi(\tilde{x}))}$$

pero por 2.21 tenemos $t'\phi(\tilde{x}) = \phi_0 t(\tilde{x}) = \phi_0(x) = \phi_0 s(\tilde{x}) = s'\phi(\tilde{x})$. Por tanto concluimos

$$\widetilde{t'(\phi(\tilde{x}))} = \widetilde{\phi_0(x)} = \phi(\tilde{x})\widetilde{t'(\phi(\tilde{x}))} = \phi(\tilde{x})\widetilde{s'(\phi(\tilde{x}))} = \phi(\tilde{x})$$

Veamos la segunda parte. $\phi(\xi\xi^{-1}) = \phi(\widetilde{t(\xi)}) = \widetilde{\phi_0(t(\xi))}$ pero $\phi(\xi\xi^{-1}) = \phi(\xi)\phi(\xi^{-1})$. Entonces $\phi(\xi)\phi(\xi^{-1}) = \phi(\widetilde{t(\xi)}) = \widetilde{\phi_0(t(\xi))}$ y por 2.7 $\phi(\xi^{-1}) = \phi(\xi)^{-1}$ ■

Veamos dos ejemplos básicos de morfismos de grupoides.

Ejemplo 2.23 Sea Ω un grupoide sobre B. Consideremos el grupoide $B \times B$ como en el ejemplo 2.2. Entonces, la aplicación $[t, s] : \Omega \longrightarrow B \times B$, de la definición 2.12, es un morfismo de grupoides.

Ejemplo 2.24 Sea G un grupo, tomemos el grupoide $G \times G$ sobre G con la estructura del ejemplo 2.2. Entonces la aplicación división $G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es un morfismo.

Para las restricciones de un morpismo ϕ denotaremos $\phi_x : \Omega_x \longrightarrow \Omega'_{\phi_0(x)}$, $\phi^y : \Omega^y \longrightarrow \Omega'^{\phi_0(y)}$ y $\phi_x^y : \Omega_x^y \longrightarrow \Omega'^{\phi_0(y)}_{\phi_0(x)}$.

Definición 2.25 *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$, $\phi_0 : B \longrightarrow B'$ un morfismo de grupoides.Diremos que:*

(I) *ϕ es sobreyectivo (inyectivo, biyectivo) a trozos si ϕ_x^y es sobreyectiva (inyectivo, biyectivo) para todo $x, y \in B$*

(II) *ϕ es sobreyectivo (inyectivo, biyectivo) sobre la base si ϕ_0 es sobreyectiva (inyectivo, biyectivo).*

Definición 2.26 *Diremos que un morfismo de grupoides es un isomorfismo si ϕ y ϕ_0 son biyectivas.*

A partir del concepto de morfismo de grupoide, es natural introducir la noción de subgrupoide de un grupoide.

Definición 2.27 *Sea Ω un grupoide sobre B. Un subgrupoide de Ω es un par de subconjuntos $\Omega' \subseteq \Omega$, $B' \subseteq B$, tales que $s(\Omega') \subseteq B'$, $t(\Omega') \subseteq B'$, $\tilde{x} \in \Omega'$ $\forall x \in B'$ y además Ω' es cerrado bajo la multiplicación parcial y la inversión de Ω. Es decir, un grupoide es un par de subconjuntos de Ω y B, respectivamente, formando una estructura de grupoide de tal manera que la inclusión es un morfismo de grupoides.*

Diremos que un subgrupoide (Ω', B') de (Ω, B) es extenso si $B' = B$, y que es completo si $\Omega'^y_x = \Omega^y_x$ $\forall x, y \in B'$.

Veamos dos ejemplos sencillos de subgrupoides.

Ejemplo 2.28 El subconjunto de Ω, $\widetilde{B} = \{\tilde{x} : x \in B\}$ es un grupoide sobre B, con las restricción de la estructura de Ω. Este subgrupoide compuesto por las unidades de Ω recibe el nombre de subgrupoide base o subgrupoide identidad.

Ejemplo 2.29 Tomemos el conjunto $\mathcal{G}(\Omega) = \bigcup_{x \in B} \Omega_x^x$, contenido en Ω. Con la restricción de la multiplicación parcial de Ω y la restricción a $\mathcal{G}(\Omega)$ de las proyecciones, obtenemos que $\mathcal{G}(\Omega)$ es un grupoide sobre B. Por tanto, $\mathcal{G}(\Omega)$ es un subgrupoide extenso de Ω, denominado como el subgrupoide interior de Ω.

Veamos ahora la noción correspondiente a la de subgrupo normal.

Definición 2.30 *Sea Ω un grupoide sobre B. Un subgrupoide normal de Ω es un subgrupoide extenso Ω' tal que para cualquier $\lambda \in \mathcal{G}(\Omega')$ y cualquier $\xi \in \Omega$ con $s(\xi) = s(\lambda) = t(\lambda)$ tenemos $\xi\lambda\xi^{-1} \in \Omega'$.*

Nótese que para que un subgrupoide sea normal depende sólo de los elementos de su subgrupoide interior.

El primero de los elementos necesarios para obtener un teorema de isomorfía es el núcleo del morfismo. Más precisamente

Definición 2.31 *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$, $\phi_0 : B \longrightarrow B'$ un morfismo de grupoides. Se define el núcleo de ϕ como el conjunto:*

$$Ker(\phi) = \{\xi \in \Omega : \phi(\xi) = \tilde{x} \ para \ x \in B'\}$$

Obviamente el núcleo de un morfismo es un subgrupoide normal.

Veamos un ejemplo del núcleo de un morfismo.

Ejemplo 2.32 Tomemos el morfismo del ejemplo 2.23. Por la definición del núcleo sabemos que $Ker(\phi) = \phi^{-1}(\widetilde{B'})$, en nuestro caso, $Ker([t,s]) = [t,s]^{-1}(\widetilde{B \times B})$ con $\widetilde{B \times B} = \{(x,x) : x \in B\}$ el subgrupoide base de $B \times B$. Para $(x,x) \in \widetilde{B \times B}$, $[t,s]^{-1}(x,x) = \Omega_x^x$, por tanto, $Ker([t,s]) = \bigcup_{x \in B} \Omega_x^x = \mathcal{G}(\Omega)$, el subgrupoide interior de Ω.

Proposición 2.33 *Sea Φ un subgrupoide normal de un grupoide Ω sobre B. Definimos una relación de equivalencia, denotada $\sim$, en B como*

$$x \sim y \iff \exists \zeta \in \Phi : s(\zeta) = x,\ t(\zeta) = y$$

y denotamos sus clases de equivalencia por $[x]$, $x \in B$, y el conjunto de clases como B/Φ. Definimos en Ω otra relación de equivalencia, también denotada por $\sim$, como

$$\xi \sim \eta \iff \exists \zeta, \zeta' \in \Phi : \zeta\eta\zeta' = \xi$$

siempre que $\zeta\eta\zeta'$ esté definido. Escribiremos las clases de equivalencia por $[\xi]$, $\xi \in \Omega$ y el conjunto de ellas como Ω/Φ. Obsérvese que $\forall x, y \in B,\ x \sim y \iff \tilde{x} \sim \tilde{y}$.

Entonces Ω/Φ es un grupoide sobre B/Φ, denominado grupoide cociente de Ω sobre el subgrupoide normal Φ. Nótese que las proyecciones al cociente $\natural : \Omega \longrightarrow \Omega/\Phi$ y $\natural_0 : B \longrightarrow B/\Phi$ constituyen un morfismo de grupoides con $Ker(\natural) = \Phi$.

Demostración Demostremos primero que la relación definida en Ω es de equivalencia.

- $\xi \sim \xi$ ya que $\widetilde{s(\xi)}, \widetilde{t(\xi)} \in \Phi$, por ser subgrupoide normal.
- Si $\xi \sim \eta$, entonces existen $\zeta, \zeta' \in \Phi$ tales que $\zeta\eta\zeta' = \xi$. Por tanto $\eta = \zeta^{-1}\xi\zeta'^{-1}$
- Si $\xi \sim \eta$ y $\eta \sim \zeta$ sabemos que existen $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \Phi$ tal que $\lambda\eta\lambda' = \xi$ y $\mu\zeta\mu' = \eta$. Luego $\lambda\mu\zeta\mu'\lambda' = \xi$, y por tanto, $\xi \sim \zeta$.

Luego la relación es de equivalencia.

Definamos pues la estructura de grupoide. Para ello tomemos $\bar{s}([\xi]) = [s(\xi)]$ como proyección fuente , $\bar{t}([\xi]) = [t(\xi)]$ como proyección objetivo y $\bar{\iota}([x]) = \widetilde{[x]} = [\tilde{x}]$ como inclusión objeto. La multiplicación $[\eta][\xi]$ donde $s(\eta) \sim t(\xi)$ es definida como $[\eta\zeta^{-1}\xi]$, donde $\zeta \in \Phi$ con $s(\zeta) = s(\eta)$ y $t(\zeta) = t(\xi)$. La inversión será simplemente $[\xi]^{-1} = [\xi^{-1}]$. ∎

Veamos ahora el primer teorema de isomorfía, pero adaptado a grupoides.

Teorema 2.34 *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ un morfismo de grupoides sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B'$ con $Ker(\phi) = \Phi$.*

(I) Si ϕ es sobreyectivo sobre la base y a trozos, $\bar{\phi} : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega'$, $[\xi] \longrightarrow \phi(\xi)$ es un isomorfismo de grupoides y $\phi = \bar{\phi} \circ \natural$.

(II) *Si existe algún isomorfismo de grupoides* $\psi : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega'$ *tal que* $\phi = \psi \circ \natural$, ϕ *es sobreyectivo sobre la base y a trozos.*

Demostración Demostremos el primer apartado.
Claramente $\bar{\phi}$ es sobre ya que ϕ lo es. Veamos pues que es inyectivo.
Supongamos $\bar{\phi}([\xi]) = \bar{\phi}([\eta])$, esto es, $\phi(\xi) = \phi(\eta)$. Entonces $t(\xi)$ y $t(\eta)$ tienen la misma imagen, digamos $z = \phi_0(t(\xi))$. Como

$$\phi_{t(\xi)}^{t(\eta)} : \Omega_{t(\xi)}^{t(\eta)} \longrightarrow \Omega'^{z}_{z}$$

es sobre existe al menos un elemento $\zeta \in \Omega_{t(\xi)}^{t(\eta)}$ tal que $\phi(\zeta) = \tilde{z}$, y además $\tilde{z} \in \Phi_{t(\xi)}^{t(\eta)}$. De forma similar hay un elemento $\zeta' \in \Phi_{s(\xi)}^{s(\eta)}$.
Ahora $\zeta^{-1}\eta\zeta'\xi^{-1}$ está definido y es un elemento de $\Omega_{t(\xi)}^{t(\xi)}$ con $\phi(\zeta^{-1}\eta\zeta'\xi^{-1}) = \tilde{z}$, por lo que es un elemento de $\Phi_{t(\xi)}^{t(\xi)}$. Para aligerar notación escribamos $\lambda = \zeta^{-1}\eta\zeta'\xi^{-1}$. Entonces $\xi = (\zeta\lambda)^{-1}\eta\zeta'$, lo que muestra que $\xi \sim \eta$, y por tanto $[\xi] = [\eta]$.

Veamos ahora el segundo.
$\natural$ es sobreyectivo sobre la base por construcción, por lo que sólo debemos demostrar que es sobreyectivo a trozos. Tomemos $[\xi] \in \Omega/\Phi$ con $\bar{t}([\xi]) = [y]$ y $\bar{s}([\xi]) = [x]$. Por tanto $t(\xi) \sim y$ y $s(\xi) \sim x$ por lo que existen $\zeta, \zeta' \in \Phi$ tales que $\zeta : y \longrightarrow t(\xi)$ y $\zeta' : x \longrightarrow s(\xi)$. Ahora $\zeta^{-1}\xi\zeta' \sim \xi$ y $\zeta^{-1}\xi\zeta' \in \Omega_x^y$.
Por tanto hemos demostrado que $\natural_x^y : \Omega_x^y \longrightarrow \Omega/\Phi_{[x]}^{[y]}$ es sobreyectiva para cualesquiera $x, y \in B$. ■

Notar que en el caso de grupoides, el primer teorema de isomorfía sólo es cierto en el caso en que el morfismo es sobreyectivo sobre la base y sobreyectivo a trozos. El problema viene porque la imagen de un morfismo de grupoides no es necesariamente un subgrupoide, a diferencia de lo que ocurre en grupos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.35 Tomemos $B = (a, b) \subsetneq \mathbb{R}^+$, por el ejemplo 2.2 sabemos que $B \times B$ tiene estructura de grupoide sobre B. Consideremos $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ el grupo multiplicativo de números reales positivos, que es, obviamente, un grupoide con base trivial, es decir, la base está formada por un solo elemento.

Definamos el morfismo de grupoides $\phi : B \times B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como $\phi(x, y) = xy^{-1}$, $\phi_0 : B \longrightarrow \{1\}$ es obviamente la aplicación constante en 1. Nótese que $\phi(B \times B)$ no es un grupoide, pues para todo elemento de la imagen no podemos asegurar la existencia de su inverso.

Un ejemplo donde ϕ sobre no implica que sea sobre a trozos es el siguiente.

Ejemplo 2.36 Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto P, denotemos la órbita mediante la acción de G en P de un elemento $p \in P$ como $[p]$ y al conjunto de éstas como $\frac{P}{G}$. Consideremos ahora la acción $G \times (P \times P) \longrightarrow P \times P$ como $g \cdot (p,q) = (g \cdot p, g \cdot q)$; denotemos la órbita de $(p,q) \in P \times P$ como $< p,q >$ y al espacio cociente por $\frac{P \times P}{G}$.

$\frac{P \times P}{G}$ es un grupoide sobre $\frac{P}{G}$. Tomando las proyecciones como $s(< p,q >) = [q]$ y $t(< p,q >) = [p]$, la inclusión objeto $\tilde{\imath}[p] =< p,p >$. La multiplicación parcial viene dada por

$$< p,q >< q,r >=< p,r >$$

mientras la inversión es simplemente $< p,q >^{-1} =< q,p >$.

Considerando $P \times P$ como grupoide sobre P con la estructura del ejemplo 2.2. Tenemos que

$$\pi : P \times P \longrightarrow \frac{P \times P}{G} \quad \pi(p,q) =< p,q >$$

$$\pi_0 : P \longrightarrow \frac{P}{G} \quad \pi_0(p) = [p]$$

las proyecciones al cociente, respectivamente, forman un morfismo de grupoides, es decir, π es un morfismo junto a π_0. Obviamente π y π_0 son sobreyectivas por ser las proyecciones al cociente.

Veamos que $\pi_q^p : (P \times P)_q^p \longrightarrow \frac{(P \times P)}{G}{}_{[q]}^{[p]}$ no es sobreyectiva. Nótese que $(P \times P)_q^p = \{(p,q)\}$ y $\frac{P \times P}{G}{}_{[q]}^{[p]} = [p] \times [q]$, por tanto $\pi(p,q) \subsetneq [p] \times [q]$, es decir, el morfismo no es sobreyectivo a trozos.

2.4. Otro ejemplo sobre simetrías

Veamos un ejemplo recogido en un artículo de Alan Weinstein, [4], que aclara la relación entre las simetrías y los grupoides.

Dividamos $\mathbb{R}^2$ en baldosas de dimensión 2×1, para ello consideremos $X = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (2\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ la malla que separa el plano real. De esta forma, las baldosas serán las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash X$. Denotemos por $\Lambda = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el conjunto de vértices de las baldosas.

Las simetrías de esta división en baldosas viene descrita por el grupo de transformaciones rígidas Γ de $\mathbb{R}^2$ que dejan X invariante; es decir, Γ está compuesto por el subgrupo normal de traslaciones por elementos de Λ junto a reflexiones a través de los puntos de $\frac{1}{2}\Lambda = \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ y las rectas, tanto verticales como horizontales, que pasan por esos puntos.

Cuando pasamos de X a Γ para entender las simetrías ocurre lo siguiente.

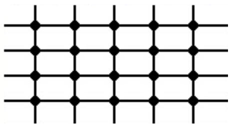

Figura 2.1: Baldosas

- El mismo grupo de simetría Γ funciona si reemplazamos X por el conjunto de vértices Λ, incluso si éste es claramente distinto de X.
- El grupo Γ no retiene ninguna información sobre la estructura local del plano dividido; ya que los entornos de puntos interiores de las baldosas parecen idénticos si las baldosas son uniformes, incluso si éstas tienen algún tipo dibujo o están coloreadas cuando, en dicho caso, deberían ser distintos.
- Además, para una aplicación real como puede ser el suelo de un baño, es decir, una restricción de $\mathbb{R}^2$ a una parte finita $B = [0, 2m] \times [0, n]$, $m, n \in \mathbb{N}$, el grupo de simetrías se contrae drásticamente. Así, el subgrupo de Γ dejando $X \cap B$ invariante contiene sólo 4 elementos incluso si hay algún patrón en el suelo del baño.

Definamos el grupoide acción de Γ sobre $\mathbb{R}^2$ como

$$G(\Gamma, \mathbb{R}^2) = \{(x, \gamma, y) : x, y \in \mathbb{R}^2,\ \gamma \in \Gamma \ y \ x = \gamma(y)\}$$

con multiplicación parcial $(x, \gamma, y)(y, \nu, z) = (x, \gamma\nu, z)$ e inversión $(x, \gamma, y)^{-1} = (y, \gamma^{-1}, x)$; proyecciones $s(x, \gamma, y) = x$, $t(x, \gamma, y) = y$ e inclusión $\tilde{\imath}(x) = (x, Id, x)$. Podríamos haber definido este grupoide como hicimos en el ejemplo 2.4, en este caso el abuso de notación es sólo una herramienta para ver la composición y el concepto de simetría de forma más clara.

Restrinjamos nuestro grupoide al caso finito $B = [0, 2m] \times [0, n]$, es decir,

$$G(\Gamma, \mathbb{R}^2)|_B = \{g \in G(\Gamma, \mathbb{R}^2) : s(g), t(g) \in B\}$$

Para este caso, las órbitas las formarán los puntos situados en lugares similares dentro de las baldosas o de la malla. Los grupos de isotropía serán triviales excepto para aquellos puntos en $\frac{1}{2}\Lambda \cap B$ que será el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Podemos describir simetrías locales de nuestro suelo de baldosas introduciendo un nuevo grupoide. Consideremos el plano real $\mathbb{R}^2$ como la unión disjunta de $P_1 = B \cap X$, $P_2 = B \setminus P_1$ y $P_3 = \mathbb{R}^2 \setminus B$. Denotemos por E el grupo euclídeo del plano y definamos pues el grupoide como

$$G_{loc} = \{(x, \zeta, y) \in B \times E \times B : x = \zeta(y),\ \exists U \text{entorno de } y \text{ con } \zeta(U \cap P_i) \subseteq P_i \text{ para } i = 1, 2, 3\}$$

La multiplicación y la estructura de grupoide vienen dadas igual que para el grupoide $G(\Gamma, \mathbb{R}^2)$.

Para G_{loc} tenemos sólo 6 órbitas distintas.
$O_1 =$ puntos interiores de las baldosas
$O_2 =$ puntos interiores de las aristas
$O_3 =$ vértices interiores de B
$O_4 =$ puntos interiores de las aristas del borde
$O_5 =$ vértices del borde
$O_6 =$ esquinas de B

EL grupo de isotropía de un punto de O_1 es isomorfo al grupo ortogonal real de dimensión 2; para O_2 es el grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; para O_3 es el grupo diedral D_4 y $\mathbb{Z}_2$ para O_4, O_5 y O_6.

Capítulo 3

Grupoides de Lie

Estudiaremos en este capítulo el caso particular en el que los grupoides viven en un contexto diferenciable, especializando los resultados del capítulo anterior.

3.1. Grupos de Lie. Acciones de grupos en variedades

En esta sección, recordemos algunos resultados básicos sobre grupos de Lie y acciones de grupos sobre variedades.

Definición 3.1 *Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable dotada de estructura de grupo tal que las aplicaciones*

$$G \times G \longrightarrow G \ ; \quad (g, h) \mapsto gh$$

$$G \longrightarrow G \ ; \quad g \mapsto g^{-1}$$

son diferenciables. Es decir, la multiplicación y la inversión son aplicaciones diferenciables.

Proposición 3.2 *Las aplicaciones*

$$L_g : G \longrightarrow G \quad h \longmapsto gh$$

$$R_h : G \longrightarrow G \quad g \longmapsto gh$$

son diferenciables. Se denominan traslación a izquierda y derecha, respectivamente. Además tenemos:

- $L_g \circ L_h = L_{gh}$ *y* $R_g \circ R_h = R_{hg}$
- $R_h \circ L_g = L_g \circ R_h$

Demostración La diferenciabilidad de las aplicaciones es inmediata ya que $L_g = m|_{\{g\}\times G}$ y $R_h = m|_{G\times\{h\}}$, donde m es la multiplicación definida en G.

Demostremos la primera propiedad para L_g, para R_h es análoga. Sea $k \in G$, entonces $L_g(L_h(k)) = L_g(hk) = g(hk) = (gh)k = L_{gh}(k)$. Veamos la segunda propiedad, $R_h(L_g(k)) = R_h(gk) = (gk)h = g(kh) = L_g(kh) = L_g(R_h(k))$. ■

Nótese que, por la primera propiedad de la proposición, ${L_g}^{-1} = L_{g^{-1}}$ y ${R_h}^{-1} = R_{h^{-1}}$. Por tanto, las traslaciones son difeomorfismos.

Proposición 3.3 *Sea $m : G \times G \longrightarrow G$ la multiplicación definida en G. Entonces, para $(g, h) \in G \times G$, la aplicación inducida de m es:*

$$m_* : T_gG \times T_hG \longrightarrow T_{gh}G \ ; \quad m_*(u_g, v_h) = (R_h)_*(u_g) + (L_g)_*(v_h)$$

Para todo grupo de Lie existe un objeto infinitesimal (lineal) asociado, que es un álgebra de Lie. Para dicha construcción, definamos primero el concepto de campo de vector invariante a derecha, dicho concepto puede ser definido de forma análoga a izquierda.

Definición 3.4 *Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo de vectores, diremos que X es invariante a derecha si*

$$(R_h)_*(X(g)) = X(gh)$$

Denotemos por $\mathfrak{X}_r(G)$ el conjunto de campos de vectores invariantes a derecha.

Proposición 3.5 *Si X e Y son campos de vectores invariantes derecha, entonces su corchete de Lie*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \ \textit{para todo } f \in C^\infty(G) \tag{3.1}$$

es también invariante a derecha.

Fíjese que $\mathfrak{X}_r(G)$ es isomorfo al espacio tangente del elemento neutro e del grupo, T_eG. Tomando el isomorfismo $\chi : \mathfrak{X}_r(G) \longrightarrow T_eG$, $\chi(X) = X(e)$, con inversa $\chi^{-1} : T_eG \longrightarrow \mathfrak{X}_r(G)$, $\chi^{-1}(u) = u^r$ tal que $u^r(g) = (R_g)_*(u)$; nótese que $u^r(gh) = (R_{gh})_*(u) = (R_h \circ R_g)_*(u) = (R_h)_*(u^r(g))$. Por tanto, la dimensión de $\mathfrak{X}_r(G)$ será igual a la del espacio tangente en la identidad, y, de esta manera, igual a la dimensión de G. Además, $\mathfrak{X}_r(G)$ tiene estructura de espacio vectorial con la suma y el producto por escalares, es decir, para $X, Y \in \mathfrak{X}_r(G)$ se cumple:

$$(X+Y)(x) = X(x) + Y(x) \quad ; \quad (\lambda X)(x) = \lambda X(x)$$

para todo $x \in G$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

La estructura de álgebra de Lie se define en T_eG, cuya estructura de espacio vectorial es la que tiene por ser el espacio tangente a un punto. Definiendo la operación corchete, $[[\cdot,\cdot]] : T_eG \times T_eG \longrightarrow T_eG$, como

$$[[u, v]] = [u^r, v^r](e), \tag{3.2}$$

ésta satisface las siguientes condiciones:

$\mathbb{R}$-bilineal $[[\lambda u, v]] = \lambda[[u, v]]$, $[[u + v, w]] = [[u, w]] + [[v, w]]$

Anticonmutatividad $[[u, v]] = -[[v, u]]$

Identidad de Jacobi $[[[[u, v]], w]] + [[[[v, w]], u]] + [[[[w, u]], v]] = 0$

para $u, v, w \in T_eG$. Luego T_eG tiene estructura de álgebra de Lie y llamamos a T_eG el álgebra de Lie de G.

Definamos, como es natural, el concepto de subgrupo de Lie de un grupo de Lie.

Definición 3.6 *Un subgrupo de Lie H de un grupo de Lie G es una variedad H que es un subgrupo algebraico de G para el que la aplicación inclusión es una inmersión.*

Recordemos ahora el teorema de Cartan para subgrupos de Lie, el cual da una condición suficiente a cuando un subgrupo algebraico es un subgrupo de Lie embebido.

Teorema 3.7 *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G, tal que H es cerrado como subespacio topológico de G. Entonces H es un subgrupo de Lie de G.*

Definamos lo que es una acción de un grupo de Lie en una variedad diferenciable. Recordemos que $Dif(X)$ es el conjunto de difeomorfismos de X en sí mismo.

Definición 3.8 *Sea M una variedad diferenciable. Una acción de un grupo de Lie G en M es un morfismo de grupos*

$$\Phi : G \longrightarrow Dif(M).$$

Equivalentemente, $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ es una aplicación diferenciable tal que:

(I) $\Phi(e,x) = x$ *para todo* $x \in M$*, con* e *elemento neutro de* G*.*

(II) $\Phi(gh,x) = \Phi(g,\Phi(h,x))$*.*

Para aligerar notación, denotaremos $\Phi_g(x) = \Phi(g,x)$ y $\Phi_x(g) = \Phi(g,x)$. De esta forma $\Phi_e = Id$, $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$ y ${\Phi_g}^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$. Veamos un ejemplo de acción.

Ejemplo 3.9 Si H es un subgrupo de Lie de G grupo de Lie. Entonces

$$\Phi : H \times G \longrightarrow G \; ; \quad (h,g) \longmapsto hg$$

es una acción. Nótese que, en este caso, $\Phi = m|_{H\times G}$.

Asociados a una acción y a un punto de M aparecen dos objetos significativos.

Definición 3.10 *Sea* Φ *una acción de* G *grupo de Lie en una variedad* M*. Sea* $x \in M$*, definimos:*

- *La órbita de* x *como el conjunto* $G\cdot x = \Phi_x(G) = \{\Phi_x(g) : g \in G\}$
- *El subgrupo de isotropía de* x *como el conjunto* $G_x = \{g \in G : \Phi_g(x) = x\} = {\Phi_x}^{-1}(\{x\})$

Obviamente G_x es un subgrupo de G y, además, es cerrado por ser la antimagen de un cerrado. Por tanto, aplicando el teorema de Cartan 3.7, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.11 G_x *es un subgrupo de Lie de* G *que es embebido y cerrado.*

Definición 3.12 *Diremos que una acción es transitiva si sólo existe una órbita,* $G\cdot x = M$*. Es decir, para todo* $x, y \in M$ *existe* $g \in G$ *tal que* $\Phi_g(x) = y$*. Esto es equivalente a decir que* Φ_x *es sobre para todo* $x \in M$*.*

Definición 3.13 *Una acción se dirá libre si para todo* $x \in M$*,* Φ_x *es inyectiva.*

Para una acción $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ de un grupo de Lie G en una variedad M podemos definir en M una relación de equivalencia de la siguiente manera

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \exists g \in G : y = \Phi_g(x)$$

Las clases de equivalencia de esta relación son las órbitas $\Phi_x(G)$, es decir, $[x] = \{\Phi_g(x) : g \in G\}$. Denotamos el espacio cociente como $\frac{M}{G}$ y la proyección al cociente como $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{G}$, $x \mapsto [x]$. Tomando en $\frac{M}{G}$ la topología cociente (recordemos que $U \subset \frac{M}{G}$ será un abierto sí y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en M) lo natural es preguntarnos cuando $\frac{M}{G}$ será una variedad. Veamos un ejemplo sencillo en el que el espacio de órbitas no es una variedad.

Ejemplo 3.14 Consideremos la acción $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto e^t x$. El espacio de órbitas en este caso sería $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} = \{[-1], [0], [-1]\}$, con la topología cociente los abiertos serían $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}$, $\emptyset$, $\{[-1]\}$, $\{[1]\}$ y $\{[-1], [1]\}$; nótese que $\{[0]\}$ no es un abierto puesto que $\pi^{-1}([0]) = \{0\}$. Por tanto $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}$ no es Hausdorff, ya que para $[0]$ no existe un abierto que lo contenga únicamente a él. Es decir, $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}$ no es una variedad.

Veamos en qué condiciones $\frac{M}{G}$ es Hausdorff, para ello tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.15 *Sea Φ una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M, tomemos el grafo de la relación de equivalencia $\mathcal{R} = \{(x, \Phi_g(x)) \in M \times M : (g, x) \in G \times M\}$. Entonces $\mathcal{R}$ cerrado en $M \times M \Leftrightarrow \frac{M}{G}$ es Hausdorff.*

El siguiente teorema nos dirá en qué casos, además de ser Hausdorff, será una variedad.

Teorema 3.16 *Sea Φ una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M, tomemos la relación de equivalencia $\mathcal{R} = \{(x, \Phi_g(x)) \in M \times M : (g, x) \in G \times M\}$. Entonces $\mathcal{R}$ es una subvariedad cerrada de $M \times M$ si y sólo si $\frac{M}{G}$ es una variedad y la proyección al cociente π es una sumersión.*

Como resultado tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.17 $\frac{G}{G_x}$ *es una variedad.*

Demostración Por la proposición 3.11 sabemos que G_x es un subgrupo de Lie de G cerrado. Además, como en el ejemplo 3.9, podemos definir la acción $\Phi : G_x \times G \longrightarrow G$. Para nuestro caso, $\mathcal{R} \subset G \times G$ es cerrado por ser $\mathcal{R} = \alpha^{-1}(G_x)$, donde $\alpha : G \times G \longrightarrow G$ con $\alpha(g, h) = gh^{-1}$. De aquí, $\mathcal{R}$ es cerrado en $G \times G$.

Veamos que es una subvariedad inmersa. Definamos la aplicación $\psi : G \times G_x \longrightarrow G \times G$ por $(h, g) \mapsto (h, gh)$, esta aplicación es obviamente diferenciable ya que $\psi = (Id_G, \Phi)$. Tomemos $g \in G_x$ y $h \in G$, luego la aplicación inducida $\psi_* : T_hG \times T_gG_x \longrightarrow T_hG \times T_{gh}G$

es tal que $(v_h, u_g) \mapsto (v_h, (R_h)_*(u_g) + (L_g)_*(v_h))$. Supongamos $(v, u) \in T_hG \times T_gG_x$ tal que $\psi_*(v, u) = (0, 0)$, automáticamente sabemos que $v = 0$, y por tanto $(R_h)_*(u) = 0$, como R_h difeomorfismo, esto implica que $u = 0$. De esta forma, ψ es una inmersión y $\psi(G \times G_x) = \mathcal{R}$.

Luego estamos en condiciones de aplicar el teorema 3.16. ■

Veamos ahora condiciones suficientes para asegurar que el espacio cociente sea una variedad diferenciable.

Recordemos que una aplicación continua $f : M \longrightarrow N$ entre espacios topológicos es propia si para todo compacto $K \subset N$, $f^{-1}(K)$ es compacto en M. Definamos pues lo que es una acción propia.

Definición 3.18 *Sea $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G en una variedad M. Diremos que la acción Φ es propia si la aplicación*

$$\widetilde{\Phi} : G \times M \longrightarrow M \times M$$

$$(g, x) \longmapsto (x, \Phi(g, x))$$

es propia.

Nótese que si G es compacto, entonces $\widetilde{\Phi}$ es propia.

Probaremos ahora que, dada una acción, cada órbita es una subvariedad inmersa y que, en el caso que la acción es propia, nos permite asegurar que es un embebimiento.

Proposición 3.19 *Sea $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G en una variedad M. Entonces la aplicación $\phi : \frac{G}{G_x} \longrightarrow M$, $[g] \mapsto g \cdot x$, es una inmersión inyectiva con $\phi(\frac{G}{G_x}) = G \cdot x$.*

Además si la acción Φ es propia, entonces $G \cdot x$ es una subvariedad cerrada de M.

Demostración Veamos que la aplicación está bien definida. Sean $[g], [h] \in \frac{G}{G_x}$ tales que $\phi([g]) = \phi([h])$, es decir, $g \cdot x = h \cdot x$ entonces $(gg^{-1}) \cdot x = (hg^{-1}) \cdot x = x$, luego $hg^{-1} \in G_x$. Por tanto, $h = (hg^{-1})g$ y, entonces, $[g] = [h]$. La aplicación está bien definida y es inyectiva.

Veamos que es una inmersión. Recordemos que, por el teorema 3.16, sabemos que la proyección al cociente $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{G_x}$ es una sumersión. Además, como Φ es una acción, tenemos que $\Phi_x : G \longrightarrow M$ es una aplicación diferenciable, es más, $\Phi_x = \phi \circ \pi$. Luego tenemos $(\Phi_x)_* = (\phi \circ \pi)_* = \phi_* \circ \pi_*$. Por tanto, para $[g] \in \frac{G}{G_x}$, sea $[v] \in T_{[g]}\frac{G}{G_x}$ tal que $\phi_*([v]) = 0$, entonces $\phi_*([v]) = \phi_* \circ \pi_*(v) = (\Phi_x)_*(v) = 0$, es decir, $v \in Ker(\Phi_x)_* = T_g G_x$. Por tanto, concluimos que $[v] = [0]$ y ϕ_* inyectiva.

Si la acción Φ es propia, es decir, $\widetilde{\Phi}$ es propia, al ser $\widetilde{\Phi}$ aplicación propia entre variedades es cerrada. Además, por la topología producto, sabemos que $G \times \{x\}$ es cerrado por ser el producto cartesiano de cerrados y $\widetilde{\Phi}(G \times \{x\}) = \{x\} \times G \cdot x$. Considerando el espacio $\{x\} \times M$, sabemos que la proyección de la segunda coordenada es una aplicación cerrada, por ser $\{x\}$ un compacto. Por tanto, podemos concluir que $G \cdot x$ es un cerrado de M. ■

Para terminar la sección, enunciaremos un teorema en el que se dan condiciones suficientes para las que el espacio de las órbitas tiene estructura de variedad diferenciable.

Teorema 3.20 *Sea $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G en una variedad M. Si Φ es libre y propia, entonces $\frac{M}{G}$ es una variedad y la proyección al cociente $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{G}$ es una sumersión localmente trivial, es decir, para todo $[x] \in \frac{M}{G}$ existe $U \subset \frac{M}{G}$ abierto con $[x] \in U$ tal que $\pi^{-1}(U) \cong (U \times G)$.*

3.2. Grupoides de Lie

Estudiemos, en esta sección, el caso en que el grupoide posee estructura diferencial. La base del grupoide se denotará por M, en lugar de B, debido a que en este caso la base será una variedad diferenciable.

Definición 3.21 *Un grupoide diferenciable es un grupoide Ω sobre M junto a estructuras diferenciables sobre Ω y M de manera que las proyecciones $s, t : \Omega \longrightarrow M$ son sumersiones sobreyectivas, la inclusión objeto $\tilde{\iota} : M \longrightarrow \Omega$ es diferenciable y la multiplicación parcial $\Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$ también lo es.*

Definición 3.22 *Un morfismo entre grupoides diferenciables será un morfismo de grupoides $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ sobre $\phi_0 : M \longrightarrow M'$ tal que ϕ y ϕ_0 son diferenciables.*

Ejemplo 3.23 Sea M una variedad diferenciable, como en el ejemplo 2.2, podemos definir una estructura de grupoide en $M \times M$ sobre M. Obviamente la estructura diferenciable de $M \times M$ es la estructura producto.

Ejemplo 3.24 Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M. Definimos, como en el ejemplo 2.4, una estructura de grupoide en $G \times M$ sobre M. Tomando de nuevo la estructura diferenciable producto, tenemos que es un grupoide diferenciable.

Ejemplo 3.25 Sea M una variedad diferenciable conexa, y por tanto conexa por caminos. Consideremos el grupoide fundamental de M, $\Pi(M)$, definido en el ejemplo 2.5. Nótese que la condición de conexidad impuesta sobre M nos asegura que $\Pi(M)$ es transitivo. El ser localmente euclídeo nos asegura que la topología de M tiene una base de abiertos conexos por caminos $\{U_i\}$ de manera que la aplicación inclusión $i : U_i \longrightarrow M$, aplica $\pi_1(U_i, x)$, $x \in U_i$, en el subgrupo trivial de $\pi_1(M, x)$.

Para cada U_i y $x \in U_i$ tomemos una aplicación $\theta_{i,x} : U_i \longrightarrow (\Pi(M))_x$ de manera que para todo $y \in U_i$ su imagen es un camino desde x a y. Denotemos por $\tilde{U}_{i,x}$ a la imagen mediante $\theta_{i,x}$ de U_i. Mediante esta construcción sabemos que los conjuntos de la forma $\tilde{U}_{j,y}[\gamma]\tilde{U}_{i,x}$, donde $[\gamma] \in (\Pi(M))_x^y$, forman una base para la topología de $\Pi(M)$. De tal manera, $\Pi(M)$ es grupoide de Lie.

Nótese que debido a que s y t son sumersiones, entonces $\Omega_x = s^{-1}(x)$ y $\Omega^x = t^{-1}(x)$ son subvariedades embebidas de Ω. Como s y t submersiones, tenemos también que $\Omega * \Omega = (s \times t)^{-1}(\Delta_M)$, con $\Delta_M = \{(x, x) : x \in M\}$, es una subvariedad embebida de $\Omega \times \Omega$, donde $s \times t : \Omega \times \Omega \longrightarrow M \times M$, $(\eta, \xi) \mapsto (s(\eta), t(\xi))$, no confundir con la aplicación del ejemplo 2.12.

Describamos ahora su espacio tangente y la aplicación inducida χ_*, donde $\chi : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$ denota la multiplicación parcial en el grupoide.

Lema 3.26 *El fibrado tangente de* $\Omega*\Omega$ *es* $T\Omega*T\Omega = \{X \oplus Y \in T\Omega \times T\Omega : s_*(X) = t_*(Y)\}$ *donde* s_*, t_* *son las aplicaciones inducidas. Además,*

$$\chi_*(X, Y) = (R_\xi)_{*\eta}(X) + (L_\eta)_{*\xi}(Y) \tag{3.3}$$

Demostración Tomemos $\xi, \eta \in \Omega$ tales que $s(\eta) = t(\xi)$ y supongamos que $X \in T_\eta\Omega_{s(\eta)}$, $Y \in T_\xi\Omega^{t(\xi)}$. Apicando la regla de Liebniz a la aplicación $\Omega_{s(\eta)} \times \Omega^{t(\xi)} \longrightarrow \Omega$ obtenemos 3.3. ∎

Veamos ahora que la inversión es un difeomorfismo.

Proposición 3.27 *Sea* Ω *un grupoide diferenciable sobre* M*. Entonces la aplicación inversión* $\xi \mapsto \xi^{-1}$ *es un difeomorfismo.*

Demostración Definamos $\theta : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega \times_t \Omega$ por $(\eta, \xi) \mapsto (\eta, \eta\xi)$, donde $\Omega \times_t \Omega = \{(\eta, \xi) \in \Omega \times \Omega : t(\eta) = t(\xi)\}$. De esta forma θ es una biyección, por los axiomas de 2.1. Para ver que θ es una inmersión , tomemos $(X, Y) \in T(\Omega * \Omega)_{(\eta,\xi)}$ y supongamos que $\theta_*(X, Y) = (0, 0)$. Como la proyección sobre la primera componente π_1 es tal que $\pi_1 \circ \theta = \pi_1$ sigue que $X = 0$. Por tanto $Y \in T_\xi \Omega^{t(\xi)}$, y por 3.3 $Y = 0$. Como s y t son sumersiones, $\Omega * \Omega$ y $\Omega \times_t \Omega$ tienen la misma dimensión. Luego θ es un difeomorfismo. Tenemos entonces que la aplicación inversión es $\pi_1 \circ \theta^{-1} \circ (Id_\Omega \times (\tilde{\iota} \circ t))$, por tanto, la inversión es diferenciable. Además, como es natural, la inversión es su propia inversa, luego la inversión es un difeomorfismo. ■

Nótese que la imagen mediante la aplicación inversión de la s-fibra Ω_x es la t-fibra Ω^x, es decir, las fibras de un punto $x \in M$ son difeomorfas y, por tanto, tienen la misma dimensión.

Denotemos $t_x = t|_{\Omega_x}$, la restricción de t a Ω_x, y veamos que ésta tiene rango constante.

Proposición 3.28 *La aplicación t_x tiene rango constante.*

Demostración Sean $\xi, \eta \in \Omega_x$, consideremos la traslación a derecha $R_{\eta^{-1}\xi} : \Omega_x \longrightarrow \Omega_x$, la cual es obviamente un difeomorfismo con inversa $R_{\xi^{-1}\eta}$. Luego $(t_x)_{*\eta} = (t_x \circ R_{\eta^{-1}\xi})_{*\eta}$. Además, sabemos que $(R_{\eta^{-1}\xi})_{*\eta}$ es un isomorfismo, y, por tanto, el rango de $(t_x)_{*\eta}$ es igual al de $(t_x)_{*\xi}$. Concluimos que el rango de t_x es constante, por $\xi, \eta \in \Omega_x$ fijos pero arbitrarios. ■

Luego, como t_x tiene rango constante, dado $y \in M$, ${t_x}^{-1}(\{y\})$ es una subvariedad embebida de Ω_x, es decir, Ω_x^y es una subvariedad embebida de Ω_x. Entonces, Ω_x^x es una subvariedad embebida de Ω_x, más concretamente, es un grupo de Lie.

Proposición 3.29 *El grupo de Lie Ω_x^x actúa sobre la variedad Ω_x de manera libre y propia.*

Demostración Por la proposición 2.9 sabemos que es una acción. La diferenciabilidad surge de que la acción $\phi : \Omega_x^x \times \Omega_x \longrightarrow \Omega_x$, $\phi(\xi, \zeta) = \zeta\xi$, es la restricción de la multiplicación parcial del grupoide al conjunto $\Omega_x \times \Omega_x^x$. Luego es la acción de un grupo de Lie en una variedad.

Veamos que la acción es libre, es decir, $\phi_\eta : \Omega_x^x \longrightarrow \Omega_x$ con $\phi_\eta(\xi) = \eta\xi$ es inyectiva para todo $\eta \in \Omega_x$. Tomemos $\eta \in \Omega_x$ fijo pero arbitrario y sean $\xi\lambda \in \Omega_x^x$ tal que $\phi_\eta(\xi) = \phi_\eta(\lambda)$. Entonces $\eta\xi = \eta\lambda \overset{\text{V}}{\Longrightarrow} \eta^{-1}\eta\xi = \eta^{-1}\eta\lambda \overset{\text{V}}{\Longrightarrow} \widetilde{s(\eta)}\xi = \widetilde{s(\eta)}\lambda \Longrightarrow \xi = \lambda$.

Veamos que la acción es propia. Sean $K, L \subseteq \Omega_x$ compactos, entonces el conjunto $\{\xi \in \Omega_x^x : K\xi \cap L \neq \emptyset\}$ es la imagen de $K \times_t L = K \times L \cap (\Omega_x \times_t \Omega_x)$, subconjunto cerrado de $K \times L$, mediante la aplicación $\delta : \Omega_x \times_t \Omega_x \longrightarrow \Omega_x^x$ con $\delta(\eta, \xi) = \eta^{-1}\xi$. Luego $\{\xi \in \Omega_x^x : K\xi \cap L \neq \emptyset\}$ es compacto en Ω_x^x y como $\widetilde{\phi}^{-1} = (\delta \times Id_{\Omega_x})$, tenemos que la acción es propia. ■

Entonces, como aplicación de la proposición 3.20, el conjunto $\frac{\Omega_x}{\Omega_x^x}$ es una variedad y la proyección al cociente π es una sumersión.

Además, podemos ver $\frac{\Omega_x}{\Omega_x^x}$ como una subvariedad inmersa de M. Para ello veamos la siguiente proposición.

Proposición 3.30 *$t(\Omega_x)$ es una subvariedad inmersa de M, es decir, la órbita de $x \in M$ es una subvariedad inmersa.*

Demostración Por la proposición 3.29, sabemos que $\frac{\Omega_x}{\Omega_x^x}$ es una variedad. Definamos la aplicación $j : \frac{\Omega_x}{\Omega_x^x} \longrightarrow M$ como $j(\xi \cdot \Omega_x^x) = t(\xi)$, la cual es obviamente diferenciable e inyectiva. Como la proyección al cociente $\pi : \Omega_x \longrightarrow \frac{\Omega_x}{\Omega_x^x}$ es una sumersión, entonces $Rank_{\xi \cdot \Omega_x^x}(j) = Rank_\xi(t)$ para todo $\xi \in \Omega_x$. Luego j es una inmersión.

Además, $j(\frac{\Omega_x}{\Omega_x^x}) = \{y \in M : t(\xi) = y, \ \xi \in \Omega_x\} = O_x$. ■

Por tanto, el rango de $Rank(t_x) = dim(\frac{\Omega_x}{\Omega_x^x}) = dim(\Omega_x) - dim(\Omega_x^x)$.

Definamos, como es natural, el concepto de subgrupoide de un grupoide diferenciable.

Definición 3.31 *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre M. Un subgrupoide diferenciable de Ω es un grupoide diferenciable Ω' sobre M' junto a un morfismo de grupoides diferenciable (ϕ, ϕ_0) tal que ϕ y ϕ_0 son inmersiones inyectivas.*

Veamos que el subgrupoide interior $\mathcal{G}(\Omega)$ de un grupoide diferenciable, es un subgrupoide diferenciable.

Proposición 3.32 *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre B. Entonces $\mathcal{G}(\Omega)$ es una subvariedad embebida cerrada de Ω y es, además, un subgrupoide diferenciable de Ω.*

Demostración Comencemos definiendo en $\mathcal{G}(\Omega)$ una estructura diferenciable, denotemos por $\hat{s}$, $\hat{t}$ a las aplicaciones representación de s y t.

Sea $U \subseteq \Omega$ un abierto cuya intersección con $\mathcal{G}(\Omega)$ es no vacía, como s sumersión, podemos representar $s : U \longrightarrow s(U)$ de la forma $\hat{s} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$, donde $\hat{s} = \pi$ la proyección de $\mathbb{R}^q$. $\hat{t} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ será una sumersión. Entonces $\mathcal{G}(\Omega) \cap U$ estará representado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : t(x, y) = y\}$. De esta forma, $\mathcal{G}(\Omega) \cap U$ es una subvariedad embebida de U y, como U es un abierto cualquiera de Ω, concluimos que $\mathcal{G}(\Omega)$ es una subvariedad embebida de Ω. Además, ésta es cerrada por ser $\mathcal{G}(\Omega) = [t, s]^{-1}(\Delta_M)$.

Por tanto las restricciones a $\mathcal{G}(\Omega)$ de t y s siguen siendo sumersiones. El hecho de que $\mathcal{G}(\Omega)$ satisfaga la definición de subgrupoide diferenciable es obvia. ■

Como en el caso de los grupos de Lie, para los cuales describíamos un álgebra de Lie asociada, dado un grupoide Ω podemos describir un objeto infinitesimal asociado que llamaremos algebroide de Lie. Para el desarrollo de éste, introduzcamos primero el concepto de fibrado vectorial.

Definición 3.33 *Sea M una variedad diferenciable y V un espacio vectorial. Un fibrado vectorial sobre M es una variedad E junto a una sumersión sobreyectiva $\pi : E \longrightarrow M$ tal que para todo $x \in M$ existe un entorno abierto U y un difeomorfismo*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$$

de manera que, para $e_x \in \pi^{-1}(\{x\})$, $\phi(e_x) = (x, \psi(e_x))$. Si existen U_α, U_β entornos abiertos tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\{x\}) \arrow[r, "\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(\{x\})}"] \arrow[dr, "\phi_\beta|_{\pi^{-1}(\{x\})}"'] & \{x\} \times V \arrow[d, "(Id_{\{x\}}, g_{\alpha\beta})"] \\ & \{x\} \times V \end{tikzcd}$$

donde $g_{\alpha\beta} \in \mathbb{GL}(V)$, los isomorfismos lineales de V.

Notar que de la definición, se tiene que para todo $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial y además es isomorfo a V.

Veamos algunos ejemplos sencillos de fibrados vectoriales.

Ejemplo 3.34 Es trivial que si M es un único punto $\{*\}$, un fibrado vectorial se reduce a un espacio vectorial.

Ejemplo 3.35 Sea M una variedad y V un espacio vectorial. Entonces $M \times V$ es un fibrado vectorial con $\pi : M \times V \longrightarrow M$, $\pi(x, v) = x$. Nótese que $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times V$.

Ejemplo 3.36 Sea M una variedad y TM su fibrado tangente. Entonces TM es un fibrado vectorial con $\pi : TM \longrightarrow M$ definida como $\pi(v) = x$ donde $v \in T_xM$. Además, si (U, φ) es una carta coordenada de M tenemos $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$, $\phi(v) = (x, (v^1, \dots, v^n))$ con $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \in T_xM$.

Ejemplo 3.37 Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial y supongamos que existe $f : N \longrightarrow M$ aplicación diferenciable. Definimos el conjunto $f^*E = \{(n, e) \in N \times E : f(n) = \pi(e)\}$, éste es claramente un fibrado vectorial sobre N con $\tau : f^*E \longrightarrow N$, $\tau(n, e) = n$. Este fibrado recibe el nombre de fibrado pull-back de E a través de f.

En el caso de que $N = \{x\}$, $x \in M$, y $f : \{x\} \longrightarrow M$ es la inclusión, se deduce que f^*E es el espacio vectorial$\pi^{-1}(x)$.

Para terminar, introduzcamos el concepto de sección de un fibrado vectorial, el cual nos será necesario para la construcción del algebroide.

Definición 3.38 *Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial, una sección del fibrado vectorial será una aplicación diferenciable $\sigma : M \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$.*

Denotaremos $\Gamma(E)$ al conjunto formado por las secciones del fibrado vectorial E, es decir, $\Gamma(E) = \{\sigma : M \longrightarrow E : \pi \circ \sigma = Id_M\}$.

Para proseguir, de forma análoga a la construcción del álgebra de Lie, definamos el concepto de campos de vectores invariantes, en este caso, a derecha.

Definición 3.39 *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre M y $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ un campo de vectores. Diremos que X es invariante a derecha si:*

- $X(\eta) \in Ker(s_*) \subseteq T_\eta\Omega$, *es decir,* $X(\eta) \in T_\eta\Omega_x$ *para todo* $\eta \in \Omega_x$ *con* $x \in M$
- $(R_\xi)_*(X(\eta)) = X(\eta\xi)$ *para todo* $(\eta, \xi) \in \Omega * \Omega$

La primera condición, necesaria ya que las traslaciones a derecha R_ξ sólo están definidas en las s-fibras, nos dice que los campos de vectores invariantes a derecha tienen que ser tangentes a las s-fibras del grupoide. De forma análoga a los grupos de Lie, la segunda condición de la definición nos dice que

$$(R_\xi)_*(X(\widetilde{t(\xi)})) = X(\xi) \tag{3.4}$$

para todo $\xi \in \Omega$. Además, si X, Y son invariantes a derecha entonces su corchete de Lie $[X, Y]$ también lo será.

Para continuar imitando la construcción del algebra de Lie de un grupo de Lie, debemos darnos cuenta del hecho de que en lugar de tener un único elemento neutro, para un grupoide tenemos un conjunto, no necesariamente trivial, de unidades. Debido a esto, consideremos $A\Omega$ como el fibrado

$$A\Omega = \bigcup_{x \in M} Ker(s_*)_{\tilde{x}} = \bigcup_{x \in M} T_{\tilde{x}}\Omega_x$$

Éste es un fibrado vectorial sobre M con $\pi : A\Omega \longrightarrow M$, $u \in T_{\tilde{x}}\Omega_x \mapsto x$. Obviamente las fibras son $\pi^{-1}(\{x\}) = T_{\tilde{x}}\Omega_x$. De hecho, es el fibrado vectorial pull-back de $Ker(s_*) \longrightarrow \Omega$ a través de la inclusión objeto $\tilde{\imath} : M \longrightarrow \Omega$.

Además de lo dicho, tenemos una relación entre los campos de vectores invariantes a derecha y las secciones de $A\Omega$. Es decir, todo campo de vectores invariante a derecha induce una sección $X_M : M \longrightarrow A\Omega$, para ello basta con tomar la restricción a las unidades

$$X_M(x) = X(\tilde{x}) \text{ para todo } x \in M$$

Recíprocamente, dada una sección $\sigma : M \longrightarrow A\Omega$, podemos construir un campo de vectores invariante a derecha, el cual denotaremos σ^r, por

$$\sigma^r(\xi) = (R_\xi)_*(\sigma(t(\xi))) \text{ para todo } \xi \in \Omega$$

El hecho de que éste sea invariante a derecha sigue de 3.4.

Debido a que el corchete de Lie de dos campos invariantes a derecha sigue siendo invariante a derecha, definimos un corchete $[[\cdot, \cdot]]$ en $\Gamma(A\Omega)$, el conjunto de secciones de $A\Omega$, como

$$[[\sigma_1, \sigma_2]] = [\sigma_1^r, \sigma_2^r]_M$$

Por otra parte, para $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable y $\sigma \in \Gamma(A\Omega)$, tenemos que

$$(f\sigma)^r = (f \circ t)\sigma^r$$

Usando esto, es fácil demostrar que si $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(A\Omega)$ y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable, entonces

$$[[\sigma_1, f\sigma_2]] = f[[\sigma_1, \sigma_2]] + \rho(\sigma_1)(f)\sigma_2$$

donde $\rho(\sigma_1)$ es el campo de vectores en M que está caracterizado por

$$\rho(\sigma_1)(f) \circ t = \sigma_1^r(f \circ t), \text{ para todo } f \in C^\infty(M)$$

El desarrollo llevado hasta ahora incita la siguiente definición, así como el posterior resultado.

Definición 3.40 *Una estructura de algebroide de Lie en un fibrado vectorial* $E \xrightarrow{\pi} M$ *es un par* $([[\cdot,\cdot]], \rho)$*, donde*

- $[[\cdot,\cdot]]$ *es un corchete de Lie en* $\Gamma(E)$
- $\rho : \Gamma(E) \longrightarrow TM$ *es una aplicación entre fibrados vectoriales*

tales que

$$[[\sigma_1, f\sigma_2]] = f[[\sigma_1,\sigma_2]] + \rho(\sigma_1)(f)\sigma_2$$

para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ *y para toda* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *función diferenciable. Notar además que*

$$\rho[[\sigma_1,\sigma_2]] = [\rho(\sigma_1), \rho(\sigma_2)]$$

Proposición 3.41 *Sea* Ω *un grupoide diferenciable sobre* M*, entonces existe un algebroide de Lie* $A\Omega$ *sobre* M*.*

Veamos algunos ejemplos de algebroide asociado a un grupoide.

Ejemplo 3.42 Como es natural, por lo expuesto a lo largo del trabajo, el álgebra de Lie de un grupo de Lie será obviamente un algebroide de Lie, donde el corchete es definido en 3.2 en T_eG y $\rho = 0$.

Ejemplo 3.43 Construyamos el algebroide de Lie asociado al grupoide diferenciable en 3.23. Primero notemos que $Ker(s_*)_{(x,y)} = T_xM \times \{0_y\}$, por tanto para las unidades tenemos

$$Ker(s_*)_{(x,x)} = T_xM \times \{0_x\}$$

De esta manera $A(M \times M) = TM \times \{0\}$ el cual es claramente isomorfo a TM. De esta forma una sección $\sigma : M \longrightarrow TM$ no es más que un campo de vectores en M. Definimos en $\Gamma(A(M \times M))$ un corchete de Lie por

$$[[X,Y]] = [(X,0),(Y,0)]_M = ([X,Y],0)|_M$$

donde $[\cdot,\cdot] : TM \times TM \longrightarrow TM$ denota el corchete de Lie de campos de vectores. Por tanto, dada una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tenemos

$$[[X,fY]] = [(X,0),(fY,0)]_M = ([X,fY],0)|_M = (f[X,Y] + X(f)Y, 0)$$

es decir, $\rho = Id_{TM}$.

Ejemplo 3.44 Para el grupoide en 3.24 recordemos que $s(g,x) = x$, por tanto, $s_*(u_g, v_x) = v_x$. Luego para $(g,x) \in G \times M$ se tiene que

$$Ker(s_*)_{(g,x)} = T_g G \times \{0_x\}$$

y por tanto, $A(G \times M) \subseteq T_e G \times \{0_M\}$ isomorfo a $T_e G \times M$. De esta forma una sección $\sigma : M \longrightarrow A(G \times M)$ será $\sigma(x) = (f(x), x)$ con $f(x) \in T_e G$, debido a esto podemos identificar el conjunto de secciones con el conjunto de aplicaciones de M en $T_e G$. Como $T_e G$ es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G, sabemos que es un espacio vectorial finito dimensional. Sea $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ una base de $T_e G$, consideremos f la aplicación constante a un elemento de la base ξ, es decir, $f(x) = \xi$ para todo $x \in M$. De esta forma, $f^r(g,x) = (\xi^r, 0)$. Tomando f_1, f_2 dos aplicaciones constantes a los elementos de la base, podemos definir

$$[[f_1, f_2]] = [f_1^r, f_2^r]_M = ([\xi_1^r, \xi_2^r], 0)_M = ([\xi_1, \xi_2], 0)_M^r.$$

Para $f_1, f_2 : M \longrightarrow T_e G$ dos secciones cualesquiera, como $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ es base, tenemos

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} g_1^i \xi_i \qquad f_2 = \sum_{j=1}^{n} g_2^j \xi_i$$

donde $g_1^i, g_2^i \in C^\infty(M)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De esta forma estamos en condiciones de definir el corchete de Lie en $\Gamma(A(G \times M))$ como

$$[[f_1, f_2]] = \sum_{i,j} g_1^i \rho(\xi_j)(g_2^j) - \sum_{i,j} g_2^j \rho(\xi_i)(g_1^i) - \sum_{i,j} g_1^i g_2^j [\xi_i, \xi_j]$$

Nótese que $\rho(f)|_x = t_*((f(x), 0) = (\phi_x)_*(f(x)) + (\phi_e)_*(0) = (\phi_x)_*(f(x))$ y que para $\xi \in T_e G$ es el llamado campo fundamental de la acción definido por $\xi_M \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi_M(x) = (\phi_x)_*(\xi)$.

Ejemplo 3.45 Para el grupoide fundamental de una variedad conexa M, véase 3.25, notemos que, debido a la construcción de la topología en $\Pi(M)$, el morfismo de grupoides $[t,s] : \Pi(M) \longrightarrow M \times M$, $[t,s]([\gamma]) = (\gamma(1), \gamma(0))$, es una aplicación recubridora. Debido a esto, tenemos que $Ker(s_*^{\Pi(M)}) \subset T\Pi(M)$ es isomorfo a $Ker(s_*^{(M \times M)}) \subset T(M \times M)$. Por tanto, $[t,s]_*$ será un isomorfismo entre $A(\Pi(M))$ y $A(M \times M)$. Por tanto, usando la relación entre campos de vectores y secciones del fibrado, podemos concluir que el algebroide de Lie de $\Pi(M)$ es isomorfo al de $M \times M$, es decir, isomorfo a TM.

Capítulo 4

Conclusiones

Hemos introducido mediante el ejemplo del puzzle de quince la noción de grupoide de forma natural. Además, introduciendo primeramente el ejemplo del cubo de Rubik, destacamos las semejanzas y diferencias entre los grupos y los grupoides.

Definimos y desarrollamos la estructura algebraica de grupoide de forma análoga a la de grupos. Hemos entendido estos como la generalización de la estructura de grupo. Así, hemos visto la relación entre ellos, como que dado un punto del grupoide éste tiene un grupo asociado. Definimos, como es natural, el concepto de morfismo entre grupoides, así como el de subgrupoide, llegando a demostrar el análogo al primer teorema de isomorfía para grupoides. Se han expuesto ejemplos de grupoides relacionados con diferentes elementos de la matemática, como pueden ser la topología algebraica y teoría de fibrados.

Hemos mostrado una clara aplicación de los grupoides como herramientas para captar las simetrías de un espacio, así como la comparación con los grupos, que son la herramienta fundamental para ello.

Han sido expuestos algunos resultados de teoría de grupos de Lie, y acciones de estos en variedades, así como construido el objeto infinitesimal asociado al grupo de Lie, el álgebra de Lie. Dichos resultados nos fueron de utilidad a la hora de demostrar resultados de la teoría de grupoides que admiten una estructura diferenciable.

Desarrollamos, de forma análoga a la teoría de grupos de Lie, los grupoides diferenciables. De esta manera probamos que ciertos subconjuntos notables asociados a puntos del grupoide conservan una estructura diferenciable o pueden ser vistos como subvariedades. Como en la teoría de grupos de Lie, construimos un objeto infnitesimal asociado al grupoide, el algebroide de Lie. Se mostraron ejemplos de grupoides diferenciables y de sus algebroides asociados.

Bibliografía

[1] Ronald Brown. *Topology and groupoids. Third edition of Elements of modern topology.* McGraw-Hill, 2006.

[2] Kirill Mackenzie. *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids.* Lectures notes. Cambridge University Press, 2005.

[3] Ieke Moerdijk; Janez Mrcun. *Introduction to foliations and Lie groupoids.* Cambrige Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2003.

[4] Alan Weinstein. Groupoids: unifying internal and external symmetry — A tour through some examples. *Notices of AMS*, pages 744–752, 1996.