Universidad de La Laguna

Máster en Lógica y Filosofía de la Ciencia

Curso 2017-18

TRABAJO FIN DE MÁSTER

La lógica híbrida como extensión de la lógica temporal

Alumno: Daniel Álvarez Domínguez

Tutora: María Manzano Arjona

Cotutor: Antonio Manuel Liz Gutiérrez

Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en explicar el origen de la lógica híbrida a partir de la modal/ temporal para mostrar qué añade a ambos sistemas en la representación de información, porqué es más potente que ellos y qué relación guarda con el lenguaje de correspondencia de la lógica de primer orden. La lógica temporal permite la representación de información temporal en un sistema lógico. Su creador fue Arthur Prior, cuya propuesta se basa en definir operadores temporales para representar enunciados como “fue alguna vez en el pasado p”, “será alguna vez en el futuro p”, “ha sido siempre en el pasado p” o “será siempre en el futuro p”. La evaluación de tales enunciados se lleva a cabo en semánticas kripkeanas. Lógica temporal y lógica modal en consecuencia están relacionadas. Sin embargo, la primera no tiene la capacidad de nombrar puntos concretos dentro de un modelo, por ejemplo. La lógica temporal tampoco puede hacerlo al fundamentarse en ella. Pero la lógica de primer orden sí puede mediante las constantes y la relación de identidad. La lógica híbrida es el resultado de combinar la lógica modal con la lógica de primer orden para realizar tal cosa.

Palabras clave: Arthur Prior, lenguaje de correspondencia de primer orden, lógica modal, representación temporal.

Abstract

The aim of this paper is to explain the origin of Hybrid Logic from modal/temporal one to show how much it contributes to the representation of formulae, why it is stronger than them and which relation holds with first order correspondence language. Temporal Logic allows the representation of temporal information in logical systems. Its origin goes back to Arthur Prior´s works, whose proposal consists in defining temporal operators which can be applied to propositions to represent sentences such as “p was sometime in the past”, “p will be sometime in the future p”, “p has always been in the past” or “p will always be in the future”. The evaluation of such a sentences is carrying out on Kripke semantics. Temporal Logic and Modal Logic are consequently related. However Modal Logic is not able to name points inside models, for instance. And as Temporal Logic is based on it, it cannot make such a thing neither. First Order Logic on the contrary does can through constants and equality relation. Hybrid Logic is the result of combining Modal Logic and First Order Logic to make that thing.

Key Words: Arthur Prior, First Order Correspondence Language, Modal Logic, Temporal Representation.

1. Introducción

Arthur Prior (1955), (1957), (1967) fue el creador de uno de los planteamientos más clásicos y fundamentales de la lógica temporal (LT), que puede entenderse en términos generales como la representación en un marco lógico de proposiciones con información temporal.

En la lógica clásica y en la lógica modal estamos acostumbrados a tratar con fórmulas del tipo ¬p, p → q, □p o ◇p, entre otras, donde p y q son variables que representan proposiciones cualesquiera, → es el condicional material y □ y ◇ son operadores modales que representan la necesidad y la posibilidad respectivamente.

La sintaxis de la lógica modal no es mucho más amplia que la clásica. Tan solo queda añadir el resto de operadores lógicos. Su semántica por otra parte recurre a la noción de "mundo posible" para evaluar fórmulas del tipo $\Box\varphi$ y $\Diamond\varphi$: $\Box\varphi$ es verdadera en el mundo w_0 si y solo si φ es verdadera en todos los mundos posibles accesibles desde w_0, mientras que $\Diamond\varphi$ es verdadera en el mundo w_0 si y solo si hay al menos un mundo posible w_1 accesible desde w_0 en el que φ sea verdadera.

Lo fundamental de esta semántica de mundos posibles (también llamada "semántica kripkeana") es que proporciona una perspectiva interna de los modelos kripkeanos. Cuando decimos que una proposición como $\Diamond\varphi$ es verdadera en un mundo si y solo si existe otro accesible desde él en el que φ es verdadera lo que estamos haciendo es evaluar esa fórmula dentro de un modelo y en función de un (o varios) mundo posible. Por eso la perspectiva es interna, porque evaluamos fórmulas en un determinado punto de un cierto modelo.

Siguiendo la metáfora que plantea Patrick Blackburn en (2006, p. 332) una fórmula modal es como una criatura que se sitúa dentro de un modelo en un cierto punto w y que es obligada a moverse de punto en base a una serie de "reglas de transición" que están determinadas por la relación de accesibilidad. Por lo tanto, su valor de verdad es contexto-dependiente en el sentido de que depende del mundo posible actual y de los mundos a los que este puede acceder.

En la lógica de primer orden (LPO) sin embargo la perspectiva que tenemos de las fórmulas y de los modelos no es interna, sino externa. En LPO la evaluación de las fórmulas no atiende a una serie de puntos dentro de un modelo, es decir, su valor de verdad no depende de información contextual de ningún tipo. Las proposiciones simplemente son verdaderas o falsas en un modelo.

La distinción interno/externo guarda relación por tanto con la distinción intensional/extensional. La lógica clásica es extensional porque las fórmulas en ella son verdaderas o falsas. Sin más. Pero la lógica modal es intensional porque sus fórmulas son verdaderas o falsas en función de la serie de mundos posibles de un modelo.

En términos formales la diferencia radicaría en que en la lógica modal diríamos que φ es verdad en el modelo $\mathscr{M}$ y en el mundo posible w, esto es, $\mathscr{M}, w \vDash \varphi$, mientras que en la lógica de primer orden solo diríamos que φ es verdad en $\mathscr{M}$: $\mathscr{M} \vDash \varphi$.

Es esta diferencia de perspectivas la que hizo que Prior se decantara por la lógica modal en lugar de por la de primer orden para construir la lógica temporal. Su idea principal es que nuestro lenguaje y nuestro pensamiento poseen una perspectiva interna del tiempo según la cual este se representa fijando un pasado y un futuro respecto a un ahora cambiante. Una lógica del tiempo debería en consecuencia respetar tal perspectiva interna.

Dado que, como hemos visto, la lógica modal (LM) es la que mejor la plasma, la propuesta de Prior consiste en extender el vocabulario de LM con nuevos operadores temporales que permitan representar proposiciones del tipo "será alguna vez en el futuro que p", "fue alguna vez en el pasado que p", "será siempre en el futuro que p" o "ha sido siempre en el pasado que p". Las fórmulas resultantes se evalúan del mismo modo que las de LM, esto es, en base a la semántica de mundos posibles. Aunque adaptada ahora a instantes de tiempo.

De esta forma podemos expresar oraciones como «Alguna vez en el futuro seré rico» (1), que será verdadera en este momento (t_0) si y solo si existe al menos un momento futuro t_1 (sea cuando sea eso) en el que seamos ricos.

El problema de este planteamiento no obstante es evidente: si bien gracias a LT es posible formalizar y evaluar fórmulas que hacen referencia a eventos temporales, la expresividad de esas fórmulas es limitada, pues con ellas no podemos aludir por ejemplo a un momento concreto. No podemos decir algo como «El 15 de mayo de 2021 seré rico» (2) o «En este mismo momento soy rico» (3). Para ello debemos recurrir a mecanismos de la lógica de primer orden.

La cuantificación, el uso de constantes no lógicas (individuos, functores y predicados) y la relación de identidad para establecer una igualdad entre ellas es una de las mayores ventajas que posee LPO respecto a LM y LT, ya que permite hacer referencia a puntos concretos dentro de un modelo. El resultado de combinar la perspectiva interna de la lógica modal con la perspectiva externa de la lógica de primer orden es la lógica híbrida (LH), que al igual que LT fue planteada por primera vez por Prior.

La novedad de LH radica en que amplía el lenguaje de la lógica modal básica (y por consiguiente también de la lógica temporal) con nuevos operadores y con un nuevo tipo de símbolo proposicional, a saber, los nominales, que pueden combinarse con fórmulas más complejas y permiten nombrar un punto específico dentro del modelo estableciendo que la fórmula a la que afectan es verdadera únicamente en ese punto.

El objetivo de este trabajo consiste en exponer cómo LH surge como una extensión de LM y LT, y explicar la enorme utilidad que posee la lógica híbrida para, entre otras cosas, representar información temporal. Para ello seguiremos el mismo recorrido que hemos seguido en esta introducción: en la sección 2 presentaremos los aspectos básicos de la lógica modal y el sistema mínimo de la lógica temporal desarrollado por Prior; en la sección 3 plantearemos la diferencia entre estos dos sistemas y la lógica de primer orden en términos de las perspectivas interna y externa que hemos visto; en la sección 4 explicaremos cómo surge la lógica híbrida al combinar ambas perspectivas y cuál es su novedad respecto a LM, LT y LPO; en la sección 5 ofreceremos las conclusiones obtenidas durante la exposición y esbozaremos el trabajo que aún queda por hacer en el ámbito de LH; la sección 6 estará compuesta por un anexo en el que definiremos la sintaxis del lenguaje lógico que emplearemos en este TFM, así como por un índice de abreviaturas; y por último la sección 7 estará compuesta por las referencias bibliográficas.

2. Lógica modal y lógica temporal

La lógica híbrida es en gran medida una extensión de la lógica modal, y surge además de la mano de Arthur Prior y de sus investigaciones en lógica temporal. Es por eso por lo que resulta necesario conocer los aspectos esenciales de estos dos sistemas para entender en qué consiste la lógica híbrida. Esa será la finalidad de esta parte. La dividiremos en dos apartados: en el primero explicaremos brevemente la sintaxis y la semántica de la lógica modal; en el segundo presentaremos el sistema mínimo de la lógica temporal ideado por Prior, aunque desde una perspectiva contemporánea.

2.1. La lógica modal básica

La sintaxis de la lógica proposicional clásica está compuesta por $\mathcal{L}$:

$$p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi,$$

donde p $\in$ PROP (el conjunto de símbolos proposicionales) y φ, $\psi \in$ FBF (el conjunto de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}$). El resto de fbf pueden definirse en términos de $\neg$ y $\wedge$.

Por otra parte su semántica se basa en la idea de "interpretación", que es una función V que asigna a cada fórmula un valor de verdad: verdadero (1) o falso (0). V se define de manera recursiva a partir de f, que es una función que otorga un valor de verdad a cada símbolo proposicional, esto es, f: PROP $\rightarrow \{1, 0\}$.

V cumple las siguientes condiciones para cualesquiera φ, $\psi \in$ FBF y variable proposicional p:

1. $V(p) = f(p)$
2. $V(\neg\varphi) = 1$ si y solo si (syss) $V(\varphi) = 0$
3. $V(\varphi \wedge \psi) = 1$ syss $V(\varphi) = 1$ y $V(\psi) = 1$
4. $V(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ syss $V(\varphi) = 0$ o $V(\psi) = 1$

La relación de consecuencia queda definida entonces en base a V. Así, una fórmula φ es consecuencia (semántica) de un conjunto $\mathbf{\Gamma}$ de fórmulas si y solo si no existe ninguna interpretación que haga verdaderos a todos los elementos de $\mathbf{\Gamma}$ y falsa a φ. Lo simbolizamos de la siguiente manera: $\mathbf{\Gamma} \vDash \varphi$, donde $\vDash$ representa la relación de consecuencia lógica semántica.

En el caso de la lógica modal la sintaxis se amplía con nuevos operadores. Sea $\mathcal{L}_M$ el lenguaje de LM. $\mathcal{L}_M$ está compuesto por (Blackburn y van Benthem, 2007, p. 3):

- El conjunto PROP.
- El conjunto MOD de símbolos modales, donde MOD = {m, m', m'', …} y hay un único m para cada relación de accesibilidad.

Los distintos elementos de MOD pueden representar cualquier operador modal. Generalmente estamos acostumbrados a $\Box$ y a $\Diamond$ (ambos relacionados con un único m). Pero también pueden representar a K y B, que son los operadores epistémicos para el conocimiento y la creencia respectivamente; a F, P, G y H, que son los operadores temporales que se usan en LT; o a muchos otros. En este apartado representarán tan solo a $\Box$ y a $\Diamond$.

Formalmente $\mathcal{L}_M$ se define entonces como:

$$p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

El resto de operadores ($\vee$, $\equiv$) pueden definirse a partir de $\neg$ y $\wedge$, o de $\neg$ y $\rightarrow$ del mismo modo que en lógica proposicional.

Cualquier combinación de este tipo constituye una fórmula bien formada de $\mathcal{L}_M$. Pertenece al conjunto FBF de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_M$. La proposición

$$(4) \quad \Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

sería un ejemplo. Además, $\Box$ y $\Diamond$ son interdefinibles: $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$ y $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$.

El alfabeto de la lógica modal por tanto no es más que el mismo que el de la lógica clásica, pero con la adición de $\Box$ y $\Diamond$, por lo que en lo que respecta a su sintaxis no son muy diferentes. La diferencia fundamental reside en su semántica.

Como hemos indicado en la introducción, la lógica modal se basa en la semántica de mundos posibles, que responde a los llamados "marcos (y modelos) kripkeanos". Un marco kripkeano está formado por la dupla $\langle W, R\rangle$, donde W es el conjunto no vacío de mundos posibles y R es la relación de accesibilidad entre ellos. Es decir, $W = \{w, w', w'', \ldots\}$ y $R \subseteq W \times W$.

A partir de un marco podemos construir un modelo añadiendo una función de evaluación o interpretación a la dupla $\langle W, R\rangle$. Sea V_M esa función. Lo que hace V_M es asignar subconjuntos de W a fórmulas de tal modo que el conjunto de mundos posibles asignados a una fórmula (φ, por ejemplo) es el conjunto de mundos en los que esa fórmula es verdadera. En términos formales: V_M: FBF $\rightarrow \wp(W)$. El resultado de añadir V_M al marco $\langle W, R\rangle$ es el modelo $\langle W, R, V_M\rangle$, al que llamaremos $\mathcal{M}_K$.

Para expresar "φ es verdad en el mundo w en $\mathcal{M}_K$" escribimos $\mathcal{M}_K, w \vDash \varphi$. Es decir, la interpretación V_M satisface la fórmula φ en el mundo w y en el modelo $\mathcal{M}_K$.

V_M cumple las siguientes condiciones para cualesquiera $\varphi, \psi \in$ FBF; $w, w' \in W$ y variable proposicional p:

1. $\mathcal{M}_K, w \vDash p$ syss $w \in V_M(p)$
2. $\mathcal{M}_K, w \vDash \neg\varphi$ syss no $\mathcal{M}_K, w \vDash \varphi$
3. $\mathcal{M}_K, w \vDash \varphi \wedge \psi$ syss $\mathcal{M}_K, w \vDash \varphi$ y $\mathcal{M}_K, w \vDash \psi$
4. $\mathcal{M}_K, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$ syss no $\mathcal{M}_K, w \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}_K, w \vDash \psi$
5. $\mathcal{M}_K, w \vDash \Diamond\varphi$ syss $\exists w' \in W\ (wRw' \wedge \mathcal{M}_K, w' \vDash \varphi)$
6. $\mathcal{M}_K, w \vDash \Box\varphi$ syss $\forall w' \in W\ (wRw' \rightarrow \mathcal{M}_K, w' \vDash \varphi)$

Una fórmula se satisface globalmente en un modelo $\mathscr{M}_K$ si se satisface, vale decir, es verdadera, en todos los mundos posibles de ese modelo. Denotamos eso como $\mathscr{M}_K \vDash \varphi$. Una fórmula es válida si se satisface globalmente en todos los modelos. $\vDash \varphi$ denota tal cosa. Por último, una fórmula φ es consecuencia (semántica) de un conjunto de fórmulas $\mathbf{\Gamma}$ si para todo modelo $\mathscr{M}_K$, para todo mundo posible w en $\mathscr{M}_K$ y para cada $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{\Gamma}$, si $\mathscr{M}_K$, w $\vDash \boldsymbol{\gamma}$ entonces $\mathscr{M}_K$, w $\vDash \varphi$. Al igual que en la lógica proposicional $\mathbf{\Gamma} \vDash \varphi$ denota tal cosa.

El sistema que hemos presentado es el sistema más básico de la lógica modal, y se dice que es mínimo porque no realiza ninguna exigencia en particular sobre la relación R de accesibilidad, esto es, no impone ninguna propiedad sobre R (reflexividad, transitividad, simetría, etc.) a la hora de trabajar con los mundos posibles. Llamemos K a este sistema.

La evaluación de una fórmula como (4) en K se llevaría a cabo de la siguiente manera:

$$\mathscr{M}_K, w \vDash \Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

se da si y solo si se verifica que si

$$(4.1)\quad \mathscr{M}_K, w \vDash \Diamond(r \wedge p)$$

y

$$(4.2)\quad \mathscr{M}_K, w \vDash \Diamond(r \wedge q)$$

entonces

$$(4.3)\quad \mathscr{M}_K, w \vDash \Diamond(p \wedge q).$$

Para que (4.1) sea verdad ha de existir al menos otro mundo posible w' accesible desde w en el que $r \wedge p$ sea verdadero. Para que (4.2) lo sea ha de existir al menos otro mundo posible w'' accesible desde w en el que $r \wedge q$ sea verdadero. Y para que (4.3) también lo sea ha de existir un mundo posible accesible desde w en el que $p \wedge q$ sea verdadera. Como p es verdad en el mundo w' y q lo es en w'' no hay garantía de que exista un mundo accesible desde w en el que ambas sean verdaderas, y por lo tanto (4.3) es falsa. Eso significa que entonces (4) también lo es, pues su antecedente es verdadero, pero su consecuente no. Y de este modo, formalmente,

$$\mathscr{M}_K, w' \vDash r \wedge p,$$

$$\mathscr{M}_K, w'' \vDash r \wedge q$$

y

$$\mathscr{M}_K, w \nvDash \Diamond(p \wedge q).$$

En consecuencia, en un modelo donde $R = \{\langle w, w' \rangle, \langle w, w'' \rangle\}$

$$\mathscr{M}_K, w \nvDash \Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q).$$

En otros términos: dado el modelo $\mathscr{M}_K$ de K donde a R no se le exige ninguna propiedad en particular, si $R = \{\langle w, w' \rangle, \langle w, w'' \rangle\}$ y $w'' \notin V_M(p)$, $w' \notin V_M(q)$ y $w', w'' \in V_M(r)$ entonces se cumple que si $\mathscr{M}_K, w' \vDash r \wedge p$ y $\mathscr{M}_K, w'' \vDash r \wedge q$ entonces $\mathscr{M}_K, w \nvDash \Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$.

Fijémonos en las condiciones de evaluación de V en la lógica proposicional clásica y en la lógica modal. Como vemos, en la segunda V_M depende del modelo y del conjunto de mundos posibles de ese modelo. Algo que en la primera no ocurre, y que muestra que en LM las fórmulas se interpretan intensionalmente, mientras que en la lógica clásica las fórmulas se interpretan extensionalmente.

Es esta intensionalidad la que pone de manifiesto la perspectiva interna de la lógica modal de la que hablábamos en la introducción y que comentaremos con más detenimiento en la sección 3. Por ahora basta con saber que la lógica temporal de Prior es uno de los sistemas de lógica modal que mejor capta esa perspectiva, pues para él, dado que existimos en el tiempo y hacemos uso de él de manera contexto-dependiente mediante nuestras proferencias, una lógica que pretenda reflejar información temporal deberá respetar tal dependencia. De ahí que haya recurrido a la lógica modal para ello. Pasemos a verlo.

2.2. La lógica temporal de Prior

La principal motivación de Prior para crear la lógica temporal fue eminentemente filosófica. En 1941 John Findlay publicó "Time: A Treatment of Some Puzzles", un artículo en el que exponía algunos de los problemas que se derivan de nuestra concepción del tiempo y del cambio. Fue a partir de este momento en el que Prior se propuso construir un sistema formal semejante a la lógica modal que permitiera reflejar la perspectiva interna del tiempo que, según él, posee nuestro lenguaje y nuestro pensamiento. Su objetivo no era otro que dar una solución formal a esos problemas, sobre todo al del determinismo.

Prior construyó LT fundamentalmente en tres escritos: el artículo "Diodoran Modalities" (1955) y los libros *Time and Modality* (1957) y *Past, Present and Future* (1967). Es en ellos en los que nos basaremos en este apartado. Aunque el principal será (1967), pues es en él donde presenta definitivamente (cf. esp. p. 176) el sistema mínimo de la lógica temporal tal y como se conoce hoy en día. Nuestra forma de exponerlo diferirá no obstante de la suya dado que la notación de Prior es la notación polaca.

Si K es el sistema de la lógica modal que hemos presentado en el apartado anterior, sea K_T el sistema (también básico) de LT que vamos a presentar a continuación.

El lenguaje de K_T, al que llamaremos $\mathcal{L}_{KT}$, está formado por $\mathcal{L}$ más los operadores temporales F, P, G y H. F puede leerse como "será alguna vez en el futuro que…", P puede leerse como "fue alguna vez en el pasado que…", G puede leerse como "será siempre en el futuro que…" y H puede leerse como "ha sido siempre en el pasado que…". $\mathcal{L}_{KT}$ se define en consecuencia como:

$$p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid F\varphi \mid P\varphi \mid G\varphi \mid H\varphi$$

Y al igual que antes, cualquier combinación de este tipo constituye una fórmula bien formada de $\mathcal{L}_{KT}$. Pertenece al conjunto FBF de fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}_{KT}$. Una proposición como (4) (página 7) podría plantearse ahora en términos de

$$(5)\quad F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q)$$

o de

$$(6)\quad P(r \wedge p) \wedge P(r \wedge q) \rightarrow P(p \wedge q).$$

Como veremos dentro de un momento en las condiciones de la función de evaluación, F y P son similares al operador de posibilidad de la lógica modal, mientras que G y H lo son respecto al de necesidad. Y del mismo modo que $\square$ y $\diamond$ son interdifinibles F y G y P y H también lo son: $F\varphi \equiv \neg G\neg\varphi$, $P\varphi \equiv \neg H\neg\varphi$, $G\varphi \equiv \neg F\neg\varphi$ y $H\varphi \equiv \neg P\neg\varphi$.

Respecto a su semántica la lógica temporal, por ser modal, se basa también en la semántica kripkeana de mundos posibles. Sin embargo, en lugar de $\langle W, R\rangle$ el marco será ahora la dupla $\langle T, <\rangle$: T es el conjunto no vacío de instantes de tiempo y $<$ es la relación de accesibilidad entre instantes, pero en este caso entendida como una relación de ulterioridad. Así, $T = \{t, t', t'', \ldots\}$[1] y $< \subseteq T \times T$.

A partir de $\langle T, <\rangle$ un modelo, $\mathcal{M}_{KT}$, se define como una tripla $\langle T, <, V_T\rangle$, donde V_T es evidentemente la función de interpretación. El cometido de V_T en LT por tanto consiste en asignar a cada fórmula un subconjunto de instantes temporales de T en los que esa fórmula es verdadera. En términos formales: V_T: FBF $\rightarrow \wp(T)$.

[1] En la lógica temporal los instantes de tiempo suelen representarse mediante la variable t con números enteros como subíndices. El momento actual, que es en el que se lleva a cabo la evaluación, se simboliza siempre como t_0. Para los momentos posteriores a él el valor del subíndice de t es un entero positivo, y para los anteriores un entero negativo.

Como es usual denotaremos la verdad de una fórmula φ en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$ y en el instante t como $\mathscr{M}_{KT}$, t $\vDash \varphi$. Las condiciones que V_T ha de cumplir son, para cualesquiera φ, $\psi \in$ FBF; t, t' $\in$ W y variable proposicional p:

1. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash p$ syss $t \in V_T(p)$
2. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \neg\varphi$ syss no $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \varphi$
3. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \varphi \wedge \psi$ syss $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \varphi$ y $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \psi$
4. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \varphi \rightarrow \psi$ syss no $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \varphi$ o $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash \psi$
5. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash F\varphi$ syss $\exists t' \in T\ (t < t' \wedge \mathscr{M}_{KT}, t' \vDash \varphi)$
6. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash P\varphi$ syss $\exists t' \in T\ (t' < t \wedge \mathscr{M}_{KT}, t' \vDash \varphi)$
7. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash G\varphi$ syss $\forall t' \in T\ (t < t' \rightarrow \mathscr{M}_{KT}, t' \vDash \varphi)$
8. $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash H\varphi$ syss $\forall t' \in T\ (t' < t \rightarrow \mathscr{M}_{KT}, t' \vDash \varphi)$

1 representa las condiciones de verdad de las variables proposicionales, que son verdaderas en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$ y en el instante t si y solo si t pertenece al conjunto de instantes temporales en los que esa variable es verdadera. 2 representa la ley de bivalencia, según la cual si una fórmula es verdadera entonces su negación ha de ser falsa, y viceversa. 3 y 4 reflejan la interpretación de la conjunción y del condicional. 5 muestra las condiciones de verdad de una fórmula de tipo Fφ, que es verdadera en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$ y en el instante t si y solo si existe al menos un instante t' posterior a t en el que φ es verdadera. 6 muestra lo mismo, pero de una fórmula de tipo Pφ, que es verdadera en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$ y en el instante t si y solo si existe al menos un instante t' anterior a t en el que φ es verdadera. 7 establece que una proposición de tipo Gφ es verdadera en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$ y en el instante t si y solo si φ es verdadera en todos los instantes t' posteriores a t. Por último, 8 declara que una fórmula de tipo Hφ es verdadera en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$ y en el instante t si y solo si φ es verdadera en todos los instantes t' anteriores a t.

La satisfacción global de las fórmulas, su validez y la relación de consecuencia semántica se definen de la misma manera que en LM, aunque adaptadas en este caso al modelo $\langle T, <, V_T\rangle$. $\mathscr{M}_{KT}$ tampoco realiza ninguna exigencia concreta sobre <.

Veamos cómo se evaluaría en K_T una fórmula como (4), pero en sus versiones (5) y (6). Para que (5) sea verdadera en t en el modelo $\mathscr{M}_{KT}$, esto es,

$$\mathcal{M}_{KT}, t \vDash F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q),$$

debe darse que si $F(r \wedge p)$ y $F(r \wedge q)$ son verdaderas entonces $F(p \wedge q)$ también lo es. Si $F(r \wedge p)$ es verdadera en t significa que existe al menos un instante t' posterior a él en el que $r \wedge p$ es verdadero. Con $F(r \wedge q)$ sucede lo mismo: debe haber un instante t'' posterior a t en el que $r \wedge q$ sea verdadero. Como en (4), eso no necesariamente significa que existe un instante posterior a t en el que $p \wedge q$ sea verdadero, y por lo tanto $F(p \wedge q)$ es falso en t, en algunos modelos.

De ello se sigue que (5) también es falsa, pues su antecedente es verdadero, pero su consecuente no, y entonces

$$\mathcal{M}_{KT}, t \nvDash F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q).$$

Es decir, si la relación < es $\{\langle t, t' \rangle, \langle t, t'' \rangle\}$ y $t' \notin V_T(q)$ o $t'' \notin V_T(p)$ entonces se cumple que

$$\mathcal{M}_{KT}, t' \vDash r \wedge p$$

y

$$\mathcal{M}_{KT}, t'' \vDash r \wedge q.$$

Pero

$$\mathcal{M}_{KT}, t \nvDash F(p \wedge q),$$

y así

$$\mathcal{M}_{KT}, t \nvDash F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q).$$

En el caso de (6) sucede exactamente lo mismo, pero con respecto a los instantes t' y t'' anteriores a t: si $< = \{\langle t', t \rangle, \langle t'', t \rangle\}$ y $t' \in V_T(p)$, $t'' \in V_T(q)$ y $t', t'' \in V_T(r)$ entonces si $\mathcal{M}_{KT}, t' \vDash r \wedge p$ y $\mathcal{M}_{KT}, t'' \vDash r \wedge q$ se cumple que $\mathcal{M}_{KT}, t \nvDash P(r \wedge p) \wedge P(r \wedge q) \rightarrow P(p \wedge q)$.

Sin embargo, en el lenguaje natural esto no siempre queda claro si nos basamos solo en los mecanismos de LT. Pongamos un ejemplo. Imaginemos que estamos conversando con otra persona (un amigo) sobre lo que hicimos el fin de semana y que le estamos contando que fuimos a un hotel a disfrutar de su spa y de su restaurante. Podemos transformar esta proferencia en «Si alguna vez en el pasado (el fin de semana anterior) fuimos a un hotel y disfrutamos de su spa, y alguna vez en el pasado fuimos a un hotel y disfrutamos de su restaurante, entonces alguna vez en el pasado disfrutamos de un spa y de un restaurante».

Si r representa “ir a un hotel”, p “disfrutar del spa” y q “disfrutar del restaurante” $P(r \wedge p) \wedge P(r \wedge q) \rightarrow P(p \wedge q)$, que es (6), representaría la proposición anterior. Una proposición que es verdadera hoy (en el instante t) siempre y cuando sea cierto que ayer (en el instante t') fuimos a un hotel en el que disfrutamos del spa y del restaurante. Pero que sería falsa si no estableciéramos que el instante en el que se dan p y q coincide.

En cualquier caso, lo que este ejemplo muestra es que gracias a los mecanismos de la lógica modal la lógica temporal es capaz de reflejar tanto la fluidez del tiempo como esa perspectiva interna de la temporalidad de la que hablábamos al principio y que, según Prior, posee nuestro lenguaje. En efecto, siempre que aludimos a un hecho lo hacemos tomando como punto de referencia el presente y estableciendo que tal hecho o bien sucedió en un momento anterior a este, o bien está sucediendo en el mismo presente, o bien sucederá en un momento posterior a este. Esa dependencia contextual es la característica principal de la lógica modal, como hemos dicho, y por eso LT constituye un buen ejemplo de cómo LM habla de los modelos desde dentro.

Ahora bien, si nos fijamos en las condiciones 5 y 6 de V_M en LM, y en las condiciones 5-8 de V_T en LT veremos que podemos hacer uso de la lógica de primer orden para capturar al menos una parte de esa perspectiva interna de la representación modal. LM (y por consiguiente LT) es entonces más débil que LPO, y de hecho por medio de lo que se conoce como “traducción estándar” la lógica modal puede representarse a través de los mecanismos del lenguaje de correspondencia de la lógica de primer orden. En concreto, a través del uso de variables libres para contextualizar las evaluaciones de las fórmulas de LPO en base a determinados individuos (equivalentes a los mundos posibles).

Por lo tanto, aunque la lógica de primer orden ofrezca una visión externa de los modelos puede emplearse para reflejar la perspectiva interna que ofrece la lógica modal, y eso es lo que presentaremos en la siguiente sección.

3. Traducción estándar y problemas de la lógica modal

Al comienzo de la sección 2 dijimos que la lógica híbrida guarda una estrecha relación con la lógica modal. Pero también se encuentra estrechamente vinculada con la lógica de primer orden. En concreto, con una parte especial de LPO llamada “lenguaje de correspondencia de primer orden" (LCPO)[2]. LM y LCPO poseen a su vez una conexión bastante interesante, y es necesaria conocerla para entender cuál es la verdadera innovación de la lógica híbrida y qué gana respecto a LM, LT y LCPO.

El objetivo de esta sección será por tanto mostrar esa conexión entre la lógica modal y el lenguaje de correspondencia de primer orden, así como los problemas de la primera a la hora de representar cierto tipo de proposiciones. Para ello dividiremos la sección en dos partes: en la primera abordaremos la relación entre LM y LCPO, y en la segunda nos ocuparemos de los problemas de LM.

3.1. Relación entre lógica modal y LCPO

Las fórmulas de la lógica modal pueden expresarse mediante fórmulas del lenguaje de correspondencia de primer orden que contengan al menos una variable libre. Sin embargo, la inversa no ocurre: las fórmulas del lenguaje de correspondencia no pueden expresarse mediante fórmulas de la lógica modal porque esta es más débil que aquel. Hay fórmulas de LCPO que no son expresables en LM. Por eso es posible concebir a LM como una parte de su correspondiente lenguaje de primer orden.

Los modelos kripkeanos de la lógica modal no son (cf. Blackburn y van Benthem, 2007, p. 10) más que estructuras relacionales que están compuestas por un dominio sobre el que llevar a cabo la cuantificación (W en el caso de LM y T en el caso de LT), una serie de relaciones binarias sobre ese dominio (R en el caso de LM y < en el caso de LT)[3] y otra serie de relaciones monarias que se aplican a las fórmulas de esa estructura (V_M en el caso de LM y V_T en el caso de LT).

El problema es que si esto es así entonces realmente no necesitamos recurrir a la lógica modal para hablar de los modelos kripkeanos, sino que nos basta con la lógica de primer orden para ello. En efecto, si añadimos al lenguaje de LPO un relator binario R que se aplique a cada elemento de MOD, esto es, una relación R^m para cada $m \in$ MOD, y una relación monaria P para cada elemento de PROP, esto es, una relación P para cada $p \in$ PROP, entonces podemos establecer una correspondencia entre las fórmulas de LM (o de LT) y las fórmulas de LPO por medio de la traducción estándar. En esto consiste LCPO.

[2] A partir de este momento toda alusión que hagamos a LPO debe entenderse como referida a este lenguaje y no a la lógica de primer orden en su totalidad.

[3] En los casos vistos solo había una relación binaria, pero en la lógica modal se representa como R y en la lógica temporal como < por ser específicamente una relación de ulterioridad.

Sea ST_x la función que asigna a cada fórmula modal su correspondiente fórmula de primer orden. ST_x consiste en lo siguiente, para cualquier símbolo proposicional p, cualesquiera φ, $\psi \in$ FBF, y cualesquiera [m], $\langle m\rangle \in$ MOD (donde [m] representa cualquier operador modal cuya evaluación sea similar a $\Box$, esto es, donde la verdad de la fórmula que atañe dependa de todos los mundos posibles accesibles desde el actual, y $\langle m\rangle$ representa cualquier operador que se evalúe de forma similar a $\Diamond$, esto es, donde la verdad de la fórmula que atañe dependa de al menos un mundo posible accesible desde el actual) (cf. Blackburn, 2006, 334):

1. $ST_x(p) = P(x)$
2. $ST_x(\neg\varphi) = \neg\, ST_x(\varphi)$
3. $ST_x(\varphi \wedge \psi) = ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi)$
4. $ST_x(\varphi \rightarrow \psi) = ST_x(\varphi) \rightarrow ST_x(\psi)$
5. $ST_x(\langle m\rangle\varphi) = \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge ST_y(\varphi))$
6. $ST_x([m]\varphi) = \forall y\, (R^m\langle x, y\rangle \rightarrow ST_y(\varphi))$

1-6 son muy parecidas a las condiciones 1-6 de V_M que vimos en el apartado 2.1. Pero lo que establecen es una correspondencia entre la lógica modal y la lógica de primer orden recurriendo a la variable libre x, cuya importancia veremos a continuación.

1 muestra que una variable proposicional p de LM puede traducirse mediante LCPO como un predicado P que tiene por argumento x. En la lógica modal veíamos que una proposición p es verdadera en el modelo $\mathscr{M}_K$ y en el mundo w si y solo si w pertenece al conjunto de mundos posibles en los que p es verdadera. Eso es lo que significaba $\mathscr{M}_K, w \vDash p$ syss $w \in V_M(p)$.

Como en la lógica de primer orden la evaluación de las fórmulas no atiende a la semántica kripkeana no podemos sostener lo mismo a la hora de hablar de la verdad de p. Para eso usamos las variables libres (x en este caso), que son las que permiten reflejar la perspectiva interna de la lógica modal a través de la lógica clásica. Al asignar un valor a x lo que hacemos es algo parecido a lo que sucede en LM cuando establecemos que p es verdad en w, a saber, indicamos que la fórmula afectada por x es verdadera (o falsa) en x. P(x) significa entonces que todo símbolo proposicional p es verdadero en x. $\mathscr{M}_K, w \vDash p$ syss $w \in V_M(p)$ y P(x) son por tanto análogas, pues asignar un valor a x es equivalente a evaluar una fórmula modal en un cierto modelo y en un determinado punto de ese modelo.

Las condiciones 3 y 4 funcionan de la misma manera. Centrémonos en 5 y 6. Cuando en la lógica modal teníamos una proposición del tipo $\Diamond\varphi$ decíamos que era verdadera en el modelo $\mathscr{M}_K$ y en el mundo w si y solo si existía otro mundo w' accesible desde w en el que φ fuera verdadera. $\mathscr{M}_K, w \vDash \Diamond\varphi$ syss $\exists w' \in W\ (wRw' \wedge \mathscr{M}_K, w' \vDash \varphi)$ establece tal cosa. En el caso de la lógica clásica la evaluación de $\Diamond\varphi$ no difiere demasiado. La única diferencia notable es, como es natural, que la verdad de φ no depende de los mundos posibles de $\mathscr{M}_K$, sino de la variable libre x y de la variable ligada y. Así, lo que muestra 5 es que una fórmula como $\langle m\rangle\varphi$ es verdadera en base a x en la lógica clásica si y solo si existe al menos un y tal que x e y estén relacionadas y φ sea verdadera en y. Algo parecido ocurre con fórmulas de tipo $[m]\varphi$, que son verdaderas en base a x en la lógica clásica si y solo si, para toda variable y, si x e y están relacionadas entonces φ es verdadera en y.

En consecuencia,

$$\mathscr{M}_K, w \vDash \Diamond\varphi \text{ syss } \exists w' \in W\ (wRw' \wedge \mathscr{M}_K, w' \vDash \varphi)$$

y podemos definir

$$ST_x(\langle m\rangle\varphi) = \exists y\ (R^m\langle x, y\rangle \wedge ST_y(\varphi)).$$

Y también

$$\mathscr{M}_K, w \vDash \Box\varphi \text{ syss } \forall w' \in W\ (wRw' \rightarrow \mathscr{M}_K, w' \vDash \varphi)$$

y definimos

$$ST_x([m]\varphi) = \forall y\ (R^m\langle x, y\rangle \rightarrow ST_y(\varphi)).$$

Lo que pone de manifiesto que las fórmulas modales y su traducción a primer orden expresan lo mismo.

La traducción estándar puede aplicarse también a la lógica temporal. Lo único que habría que modificar sería las condiciones 5 y 6 para que se adapten a los operadores F, P, G y H. Para ello simplemente tenemos que invertir el orden de los pares de R^m en P y H para reflejar las condiciones 6 y 8 de V_T:

5*. $ST_x(F\varphi) = \exists y\ (R^m\langle x, y\rangle \wedge ST_y(\varphi))$

6*. $ST_x(P\varphi) = \exists y\ (R^m\langle y, x\rangle \wedge ST_y(\varphi))$

7*. $ST_x(G\varphi) = \forall y\ (R^m\langle x, y\rangle \rightarrow ST_y(\varphi))$

8*. $ST_x(H\varphi) = \forall y\ (R^m\langle y, x\rangle \rightarrow ST_y(\varphi))$

Un ejemplo de cómo funcionaría la traducción estándar sería el siguiente, donde R es una relación monaria para cada $r \in PROP$ y Q es una relación monaria para cada $q \in PROP$; P sigue siendo lo mismo que antes:

$$\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q) =$$

$$ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)) =$$

$$\exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (R(y) \wedge P(y))) \wedge \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (R(y) \wedge Q(y))) \rightarrow \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (P(y) \wedge Q(y))).$$

La fórmula que hemos traducido recursivamente a la lógica clásica es nuestro ejemplo (4), cuya traducción estándar es $ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q))$. Por la condición 4 de ST_x, $ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q))$ es igual a $ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q)) \rightarrow ST_x(\Diamond(p \wedge q))$. Y mediante la aplicación recursiva de las reglas 1, 3 y 5 obtenemos $\exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (R(y) \wedge P(y))) \wedge \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (R(y) \wedge Q(y))) \rightarrow \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (P(y) \wedge Q(y)))$, que es la traducción estándar completa de (4).

La traducción de (5) y (6) sería similar, pero siguiendo esta vez las condiciones 5*-8* en lugar de 5 y 6. (5) sería entonces:

$$F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q) =$$

$$ST_x(F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q)) =$$

$$\exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (R(y) \wedge P(y))) \wedge \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (R(y) \wedge Q(y))) \rightarrow \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (P(y) \wedge Q(y))).$$

(6) por su parte sería igual, pero con R^m aplicada sobre $\langle y, x\rangle$.

Lo más interesante de la traducción estándar es que preserva la satisfacibilidad, es decir, tanto

$$\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q) \text{ y } ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q))$$

como

$$F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q) \text{ y } ST_x(F(r \wedge p) \wedge F(r \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q))$$

(y su análoga con (6)) son equisatisfacibles, lo que significa que si una de ellas es satisfacible en la lógica de primer orden entonces su correspondiente también lo será en LPO. Denotaremos esta propiedad mediante el símbolo $\approx$. Así, representamos que

$$\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

y

$$ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q))$$

son equisatisfacibles como

$$\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q) \approx ST_x(\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)).$$

Tal resultado puede expresarse por medio de la siguiente proposición (Blackburn y van Benthem, 2007, p. 11; Blackburn, 2006, p. 335):

Equisatisfacibilidad LM-LCPO (LM ≈ LCPO). Para cualquier fórmula modal básica φ, cualquier modelo $\mathcal{M}_K$ y cualquier mundo posible w en $\mathcal{M}_K$, $\mathcal{M}_K$, w $\vDash \varphi$ si y solo si $\mathcal{M}_K \vDash ST_x(\varphi)$ $[x \leftarrow w]$.

$[x \leftarrow w]$ significa que x toma el valor del mundo w, vale decir, que w es asignado a la variable libre x. La prueba de LM ≈ LCPO se sigue directamente de las condiciones 1-6 de la traducción estándar.

Toda fórmula de la lógica modal puede transformarse por tanto en su fórmula de la lógica de primer orden correspondiente, pero como comentamos al principio de esta sección no toda fórmula de LCPO puede transformarse en una fórmula de LM, $\neg(xRx)$ o $\neg(x < x)$ sería un ejemplo. En efecto, mientras que en LPO podemos expresar propiedades como la irreflexividad por medio de $\neg(xRx)$ y de $\neg(x < x)$, en LM no podemos. La razón reside en que no hay ninguna fórmula modal que se satisfaga en todos los puntos irreflexivos de un modelo. Para explicar porqué es necesario introducir la noción de “bisimulación”.

Sean $\mathcal{M}_K$ y $\mathcal{M}_K$* dos modelos cualesquiera de LM, y sea B una relación binaria entre esos dos modelos. Para que B sea una bisimulación entre $\mathcal{M}_K$ y $\mathcal{M}_K$* debe cumplir fundamentalmente tres condiciones:

- La primera es que si B se aplica a dos individuos w y w' de $\mathcal{M}_K$ y $\mathcal{M}_K$* respectivamente entonces, para cada símbolo proposicional p, si w pertenece al conjunto de mundos posibles de $\mathcal{M}_K$ en los que p es verdadera, w' también ha de pertenecer al conjunto de mundos posibles de $\mathcal{M}_K$* en los que p es verdadera.
- La segunda es que si w y w' están relacionados mediante B y w se relaciona en $\mathcal{M}_K$ mediante R con otro mundo posible v, entonces w' también se relaciona en $\mathcal{M}_K$* mediante R' con otro mundo posible v' y además v se relaciona mediante B con v'.
- La tercera es que si w y w' se encuentran relacionados mediante B y w' se relaciona mediante R' en $\mathcal{M}_K$* con v', entonces w también se relaciona con v mediante R en $\mathcal{M}_K$ y además v se relaciona mediante B con v'.

En términos formales:

Bisimulación en LM. Si $\mathscr{M}_K$ y $\mathscr{M}_K$* son dos modelos de la lógica modal básica tales que $\mathscr{M}_K = \langle W, R, V\rangle$ y $\mathscr{M}_K^* = \langle W', R', V'\rangle$ entonces la relación $B \subseteq W \times W'$ es una bisimulación entre $\mathscr{M}_K$ y $\mathscr{M}_K$* si satisface las siguientes condiciones:

1. Si wBw' entonces, para cada $p \in$ PROP, $w \in V(p)$ si y solo si $w' \in V'(p)$.
2. Si wBw' y wRv entonces existe un punto v' en $\mathscr{M}_K$* tal que w'R'v' y vBv'.
3. Si wBw' y w'R'v' entonces wRv y vBv'.

Decimos que un mundo posible w en $\mathscr{M}_K$ es bisimilar con otro mundo posible w' en $\mathscr{M}_K$* si wBw'.

1 establece que dos mundos bisimilares satisfacen las mismas proposiciones, es decir, que si p es verdad en w en el modelo $\mathscr{M}_K$ también lo será en w' en el modelo $\mathscr{M}_K$*. Por su parte 2 y 3 establecen que si hay dos mundos bisimilares y uno de ellos accede a otro en $\mathscr{M}_K$ o en $\mathscr{M}_K$* entonces esa relación de accesibilidad también se dará en el otro modelo y los dos mundos a los que se accede serán asimismo bisimilares. Por lo tanto, dos mundos son bisimilares si hacen verdaderas a las mismas fórmulas y acceden a los mismos mundos.

De aquí se sigue entonces que dos mundos bisimilares satisfacen también a las mismas fórmulas modales, pues su satisfacción requiere simplemente del acceso a otro (u otros) mundo(s) y que en ese mundo(s) la fórmula en cuestión sea satisfecha. En consecuencia, dos fórmulas modales son incapaces de distinguir entre dos mundos bisimilares.

El ejemplo más claro es el que hemos comentado: una fórmula de tipo $\neg(xRx)$ o $\neg(x < x)$. Supongamos que $\mathscr{M}_K$ es un modelo en el que todos los símbolos proposicionales son falsos en todos los mundos, y que $\mathscr{M}_K$* es un modelo en el que solo existe un mundo posible reflexivo donde los símbolos proposicionales también son todos falsos. B en este caso relaciona cada mundo de $\mathscr{M}_K$ con el único mundo w' de $\mathscr{M}_K$*. Por el resultado que se deriva de **Bisimulación en LM** todo mundo de $\mathscr{M}_K$ y $\mathscr{M}_K$* satisface las mismas fórmulas modales, pero eso significa que no puede haber ninguna fórmula modal que sea verdadera en todos los mundos irreflexivos, porque si existiera sería verdadera en todos los mundos de $\mathscr{M}_K$ y falsa en el mundo w' de $\mathscr{M}_K$*. Como eso es imposible al haber una relación de bisimulación entre los mundos de $\mathscr{M}_K$ y w', se sigue que no hay ninguna fórmula modal que satisfaga algo como $\neg(xRx)$ o $\neg(x < x)$.

Así pues, la capacidad expresiva de la lógica modal es menor que la de la lógica de primer orden. Este es el motivo por el que toda fórmula de LM puede expresarse mediante una fórmula de LCPO a través de la traducción estándar, pero no toda fórmula de LCPO puede traducirse a una fórmula de LM. No hay ninguna proposición modal que sea equisatisfacible con la proposición ¬(xRx) de primer orden. La lógica modal por consiguiente puede concebirse como un fragmento propio de la lógica de primer orden. En concreto, como el fragmento compuesto por todas aquellas fórmulas que están cerradas bajo bisimulación, es decir, la lógica modal es aquella parte de la lógica de primer orden que alberga todas las fórmulas que son invariantes por bisimulación (*invariant for bisimulation*).

Se dice que una fórmula φ de LPO con una variable libre es invariante por bisimulación si su evaluación en mundos bisimilares es siempre la misma. El hecho de que LM sea un fragmento propio de LCPO se deriva de esta definición y del Teorema de Caracterización de van Benthem (cf. van Eijck, 2006, p. 15; Blackburn, 2006, pp. 337-338; o Blackburn y van Benthem, 2007, p. 21), que establece que si una fórmula φ de primer orden con una variable libre es invariante por bisimulación entonces φ es equivalente a la traducción estándar de su correspondiente fórmula modal.

¿Por qué hacer uso entonces de la lógica modal en lugar de la lógica de primer orden si aquella no es más que una pequeña parte de esta? Fundamentalmente por dos razones:

I. La primera es por la cuestión de la decidibilidad: la lógica modal es decidible en PSPACE, mientras que la lógica de primer orden no lo es.

II. La segunda es por la perspectiva interna de los modelos que proporciona frente a la perspectiva externa que ofrece LPO.

Son estos dos motivos, junto con la simplicidad de su lenguaje, los que justifican la importancia de la lógica modal. Aunque a pesar de ello LM sigue contando con graves problemas a la hora de representar ciertos tipos de proposiciones, como veremos a continuación.

3.2. Problemas de la lógica modal

En el apartado anterior hemos visto que pese a que la lógica modal esté incluida propiamente en el lenguaje de correspondencia de primer orden sigue teniendo una gran utilidad debido a las condiciones I y II que se han señalado. Especialmente gracias a la segunda, que fue por lo que Prior recurrió a LM para plantear la lógica temporal.

Sin embargo, el principal problema de la lógica modal reside en su expresividad. Anteriormente también se ha visto que no hay ninguna fórmula modal que satisfaga una proposición irreflexiva, y eso constituye una limitación expresiva bastante notable. Pero ahora vamos a centrarnos en otra limitación, a saber, en su incapacidad para nombrar puntos dentro de un modelo.

El rasgos característico del lenguaje de LM y de LT es que está formado por expresiones modales ($\Box\varphi$, $\Diamond\varphi$, Fφ, Pφ, Gφ o Hφ) que permiten relativizar la verdad de φ a una serie de mundos o instantes (o de uno en el caso de $\Diamond$, F y P). Pero no podemos establecer por ejemplo que φ es verdadera exactamente en *este* mundo.

La lógica de primer orden sí permite hacerlo. En efecto, por medio de las constantes y de la relación de identidad podemos decir que un cierto individuo posee tal o cual propiedad, o que dos individuos con x propiedad son iguales. Pero LM y LT no cuentan con este mecanismo.

La consecuencia directa de todo esto consiste en que entonces la lógica temporal, tal y como está planteada en base a la lógica modal, no refleja fielmente la concepción natural del tiempo. Cuando aludimos a hechos que han ocurrido u ocurrirán en algún momento distinto al actual normalmente no nos contentamos con afirmar que ese hecho ha tenido lugar en algún momento del pasado o del futuro. En general buscamos detallar cuándo sucedió o sucederá tal hecho, y eso es algo que la lógica temporal no puede representar formalmente.

En la lógica modal clásica, sea puramente modal o temporal, epistémica, etc., las fórmulas son evaluadas respecto a un punto de referencia, que suele ser un mundo posible. Ese punto de referencia (o mundo posible) puede cambiar y en consecuencia el valor de verdad de las fórmulas también lo hará. Si por ejemplo decimos «Después voy a ir al cine», es evidente que esa afirmación tendrá distintos valores de verdad en función del mundo posible (o del momento y la historia en el caso de la lógica temporal) en el que se evalúe.

Sin embargo, algunas veces queremos ser más precisos y determinar el momento exacto en el que el hecho sucedió, sucede o sucederá. Siguiendo con nuestro ejemplo, quizá queramos especificar que iremos al cine a las 5 de la tarde del día de hoy.

La primera proposición, «Después voy a ir al cine», puede representarse en términos de LT mediante la fórmula F(1)p, donde el valor 1 indica que p tendrá lugar una unidad de tiempo (pongamos, 8 horas) más tarde del momento de proferencia[4]. Pero la segunda proposición, «Voy a ir al cine a las 5 de la tarde del día de hoy», no se puede representar.

[4] Nos encontramos en la versión métrica de la lógica temporal. Cf. Prior, 2010, pp. 159-170 o Øhrstrøm y Hasle, 1995, pp. 231-240.

No es posible porque requiere la introducción de nominales, esto es, de símbolos que determinen con exactitud cuándo evaluar una proposición. Por lo tanto, el punto de referencia que permitirá establecer el valor de verdad de las proposiciones acompañadas de nominales será tan solo el punto que ese nominal indica, y ninguno más. En nuestro caso sería el 14 de junio de 2018 a las 17:00.

Siguiendo la distinción de Hans Reichenbach (1947) entre el punto de proferencia (S), el punto del evento (E) y el punto de referencia (R) vemos que en la lógica temporal básica solo contamos con el punto de proferencia y con el punto del evento, pero no con el punto de referencia. Cuando evaluamos una fórmula como F(1)p en t_0 S, que es el punto de evaluación, es precisamente t_0, mientras que E, que es el punto en el que el hecho del que la proposición habla tiene lugar, es algún momento t_1 futuro en el que p es verdad. Lo mismo ocurre con P, G y H.

Esta estructura nos permite formalizar cosas como «Después voy a ir al cine» o «Fui al cine», pero no nos permite formalizar «Había ido al cine», pues para que esta afirmación pueda evaluarse es necesario contar con un punto de referencia tal que suceda a S y anteceda a E. Gráficamente:

$$E \leftarrow R \leftarrow S.$$

Al decir en t_0 que habíamos ido al cine lo que estamos enunciando es que hay un momento t_{-1} anterior a él, que se corresponde con R, en el que es cierto que en un momento t_{-2} anterior fuimos al cine. Ese momento se corresponde con E.

Del mismo modo, si dijéramos «Habré ido al cine» en t_0 lo que estaríamos sosteniendo es que es verdad que en algún momento futuro t_2 (R) es verdad que en algún momento pasado t_1 (E) habremos ido al cine. (Aunque la estructura del futuro perfecto de indicativo no siempre es así (cf. Reichenbach, 1947).) Gráficamente:

$$S \leftarrow E \leftarrow R.$$

Estructuras como estas son las que no pueden reflejarse en la lógica temporal básica. Su sintaxis y su semántica no permiten aludir a instantes concretos. Por eso es limitada. Y por eso también Prior vio la necesidad de adoptar mecanismos de la lógica de primer orden para construir un sistema que fuera más expresivo que LT. Ese sistema es la lógica híbrida.

Hemos visto por tanto que la lógica modal puede subsumirse bajo la lógica de primer orden por medio de la traducción estándar. Eso hace que la perspectiva interna de la primera pueda expresarse a través de la perspectiva externa de la segunda y que podamos cuestionar entonces la utilidad de LM. Pero su utilidad estriba precisamente en su capacidad para hablar de los modelos desde dentro. En el caso de la lógica temporal esa perspectiva interna es fundamental para plantear un sistema lógico que refleje lo mejor posible la concepción natural del tiempo. El problema no obstante es que LT al menos no lo consigue. No lo hace porque se funda en la lógica modal, cuya capacidad expresiva es bastante limitada. Una solución podría ser unir los mecanismos de LM/LT y LPO para ampliar esa expresividad. El resultado de esta unión es la lógica híbrida, a la que dedicaremos la siguiente sección.

4. La lógica híbrida

Al comienzo de este trabajo dijimos que la motivación de Prior para crear tanto la lógica temporal como la lógica híbrida fue filosófica. Para él toda cuestión relacionada con el tiempo (y con casi cualquier cosa) puede resolverse lógicamente y es por eso por lo que, como veremos, llegado un determinado momento ha de recurrir a la lógica híbrida para solucionar uno de los grandes problemas de LT. Problema que guarda relación con la cuestión de su expresividad que hemos presentado en la sección anterior.

En esta lo que haremos será por un lado explicar la motivación de la lógica híbrida para, por otro lado, presentar su sistema básico y extenderlo en base al planteamiento de Prior.

4.1. Motivación de la lógica híbrida

En (1908) John McTaggart plantea dos formas de concebir el tiempo, vale decir, dos formas de entender la ordenación de los hechos en el tiempo: la serie-A y la serie-B. La primera consiste en ordenar los eventos en términos de pasado, presente y futuro. La segunda consiste en ordenarlos en base a la relación de ulterioridad, esto es, en base a la relación antes/después. El fiel reflejo de la serie-A son los operadores F, P, G y H, mientras que el reflejo de la serie-B es la relación $<$.

Al ordenar los hechos en función de si tienen lugar en el presente, en el pasado o en el futuro adoptamos una visión interna del tiempo, es decir, nos situamos dentro de él y reflejamos la sucesión de eventos desde el futuro hasta el pasado pasando por el presente. La lógica temporal, al derivarse de la modal, capta muy bien esta visión interna por medio de F, P, G y H.

En cambio, al ordenar los hechos en función de si tienen lugar antes o después de otro adoptamos una visión externa del tiempo, pues nos situamos fuera de él y simplemente reflejamos su transcurso mediante la mera sucesión de eventos. La relación $<$, propia de la lógica de primer orden, plasma muy bien esta idea.

Que Prior haya desarrollado en mayor medida la lógica temporal y le haya concedido una mayor importancia en sus escritos es una muestra de que para él la serie-A prima sobre la serie-B. De hecho, en su opinión esta presupone aquella. Pero no solo eso. Además, la serie-B adolece de dos grandes problemas: por un lado no representa realmente la forma en que experimentamos el tiempo, porque nuestra experiencia no es externa, sino interna y por otro lado implica aceptar la existencia de instantes. En efecto, la cuantificación en LT se realiza en instantes (como hemos visto en las condiciones 5-8 de V_T) y al sostener que "Existe un instante t tal que…" o que "Para todo instante t…" nos estamos comprometiendo con su existencia, la cual es dudosa.

Por todo ello Prior prioriza la serie-A sobre la B. Sin embargo, debe demostrar que es posible subsumirla bajo A. Esta es la razón por la que recurre a la lógica híbrida.

En "Tense Logic and the Logic of Earlier and Later" (2010) sostiene que es posible distinguir cuatro tipos (grados) de implicación lógico-temporal:

En el primero presenta a LT como una especie de abreviatura de lo que él llama "Cálculo-U", que no es más que su propia versión de la traducción estándar. Lo que defiende es que fórmulas como $F\varphi$ o $P\varphi$ actúan como abreviaturas de «Existe un instante t' tal que t' es posterior a t y φ es verdad en t'» y de «Existe un instante t' tal que t' es anterior a t y φ es verdad en t'», y que en consecuencia podemos entender los operadores temporales simplemente como una vía para sintetizar las propiedades de la relación <. En otras palabras: Prior recurre a la traducción estándar para mostrar que la lógica temporal puede concebirse como una lógica de primer orden del tiempo. La serie-A se reduce entonces a la serie-B.

En el segundo los operadores temporales ya no se subsumen bajo la relación <. Ahora se encuentran al mismo nivel. La clave para defender tal cosa reside en el tratamiento de proposiciones atómicas como p. En el apartado 2.2 vimos que la semántica de K_T exige la referencia a instantes para evaluar las fórmulas. Eso significa que una proposición como p no puede evaluarse en LT porque no contamos con la referencia a ningún instante para poder llevarla a cabo. Para ello necesitaríamos contar con un instante t y sostener que p es verdad en él, es decir, sostener que $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash p$. Por lo tanto, p por sí sola es una fórmula incompleta.

Sin embargo, lo que afirma Prior es que en el segundo grado de implicación lógico-temporal p en realidad constituye lo que Nicholas Rescher y Alasdair Urquhart han denominado una "proposición cronológicamente definida" (cf. Rescher y Urquhart, 1971; Prior, 2010, p. 118; o Øhrstrøm y Hasle, 1995, p. 218). Una proposición cronológicamente definida es aquella que implícitamente hace referencia a un instante aunque no se refiera a él de forma explícita. Eso quiere decir que una fórmula como p es equivalente a $\mathscr{M}_{KT}, t \vDash p$, esto es, p es una manera de decir "p es verdad en el instante t”. De ello se deriva que la serie-A y la serie-B se encuentran al mismo nivel conceptual. Ninguna de las dos está condicionada por la otra, pero se encuentran relacionadas.

En el tercer grado esta conexión entre ambas series se vuelve aún más patente con la introducción de lo que Prior llama “variables de mundo” (*world-variable*), que no son otra cosa más que los nominales. Para Prior los nominales describen el mundo (posible) tal y como es exactamente en el momento que señalan. Eso implica que su naturaleza es dual: por un lado constituyen índices que nombran un determinado instante, pero por otro lado constituyen proposiciones que describen el mundo tal y como es en ese preciso instante.

Si esto es así, es decir, si los nominales no son solo términos para referirse a instante de tiempo, sino que también son proposiciones, entonces uno de los grandes problemas de la serie-B, a saber, el compromiso con la existencia de los instantes, queda solucionado. Por ser proposiciones los instantes dejan de ser entidades ficticias (cf. Prior, 1967, pp. 188-189), y dado que afirmar «φ es verdad justo en el instante i» es lo mismo que afirmar «es necesario que si i entonces φ» es posible derivar la lógica temporal al completo de la serie-A más el operador de necesidad, vale decir, de F, P, G, H y $\Box$.

Por último, el cuarto grado no es más que un intento de definir el operador de necesidad en términos de los operadores temporales. En él Prior propone lo que se conoce como “modalidad universal” y reduce además toda la lógica temporal (incluyendo a $\Box$) a los operadores F y P.

Los grados tres y cuatro son los que permiten subsumir la serie-B bajo la A, y es a partir de ellos que surge lo que hoy en día se conoce como “lógica híbrida”. El sistema que recoge el tercer grado es más general que el que recoge el cuarto, que es más específico, pero en cualquier caso ambos son el origen de LH. Una lógica que, como Prior reconoce más adelante en artículos como “Quasi-Propositions and Quasi-Individuals” (Prior, 2010, pp. 213-221) o en “Egocentric Logic” (Prior, 2010, pp. 223-240), puede extenderse a cualquier dominio y permite considerar como proposiciones no solo a predicados que aluden a instantes, sino a cualquier predicado. La lógica descriptiva, planteada ya por él en el segundo artículo que hemos citado, es un resultado de esto que decimos.

El surgimiento de la lógica híbrida se debe entonces a la pretensión de Prior de demostrar que la concepción del tiempo verdaderamente genuina es la que refleja la serie-A, y que la serie-B puede reducirse a ella. En otros términos eso significa que es posible reducir una parte de la lógica de primer orden a una lógica puramente temporal. Reducción que solo puede llevase a cabo mediante los mecanismos de LH. En el siguiente apartado veremos cuáles son.

4.2. Dos sistemas de lógica híbrida

La importancia de la lógica híbrida tanto para la lógica temporal como para la lógica modal ha sido puesta de manifiesto en el apartado anterior. En este lo que haremos será presentar formalmente dos sistemas de LH: el primero es su sistema básico, mientras que el segundo es el sistema fuerte planteado por el propio Prior.

El alfabeto de LH se basa en el de LM, pero con dos diferencias fundamentales: añade un nuevo tipo de símbolos proposicionales y un nuevo conjunto de operadores modales.

Aparte del conjunto PROP de símbolos proposicionales la lógica híbrida introduce un segundo tipo de símbolos para representar los nominales: NOM. Esos símbolos son i, j, k y l: NOM = {i, j, k y l…}. Una de las características más interesantes y relevantes de los nominales es que constituyen términos, es decir, no solo son variables que indican un momento concreto, sino que esas variables por sí solas son proposiciones. Así, si decimos «i» lo que estamos afirmando es por un lado que hay un instante que se llama "i" y por otro lado que esa fórmula es verdadera en el instante cuyo nombre es i.

Los nominales pueden combinarse con otras fórmulas para construir fórmulas más complejas, y tales fórmulas serán verdaderas en el punto que indique el nominal, y solo ahí. Su función por lo tanto es nombrar un punto en el modelo y establecer que la proposición a la que afecta es verdadera únicamente en ese punto. Con ello podemos solventar en parte la limitación expresiva de la lógica modal.

Recordemos la proposición (4):

$$\Diamond(r \wedge p) \wedge \Diamond(r \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q).$$

(4) no es válida en K, pero sí lo es en la lógica híbrida cuando sustituimos r por i. La fórmula resultante sería:

$$(4^*) \quad \Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q).$$

(4*) siempre es verdadera porque lo que sostiene es que el mundo en el que p es verdadera y el mundo en el que q es verdadera es el mismo, a saber, i. Y en consecuencia es verdad que existe un mundo w' (i) en el que p y q son simultáneamente verdaderas.

En el caso de (5) y (6) sucede lo mismo. Si estas proposiciones se transforman en

$$(5^*) \quad F(i \wedge p) \wedge F(i \wedge q) \rightarrow F(p \wedge q)$$

y en

$$(6^*)\ \ P(i \wedge p) \wedge P(i \wedge q) \rightarrow P(p \wedge q)$$

mediante la sustitución de r por i entonces los instantes en los que p y q se dan coinciden, y por lo tanto el consecuente del condicional siempre es verdadero.

Pero los nominales también permiten representar formalmente proposiciones que la lógica modal/ temporal es incapaz de hacer como «Había ido al cine», que vimos en el apartado 3.2. En la lógica híbrida la fórmula que representaría esta oración sería:

$$(7)\ \ P(i \wedge Pp),$$

que establece que hay un momento i anterior a t_0 y un momento t_{-1} anterior a i tal que p es verdad en t_{-1}. Es decir, que el momento en el que tiene lugar el hecho es anterior al punto de referencia, que a su vez antecede al momento en el que se profiere (7). La estructura de (7) como vemos es

$$E \leftarrow R \leftarrow S,$$

donde i es R, que se corresponde con lo que Reichenbach plantea en (1947) y que comentamos en 3.2[5].

El problema con «Habré ido al cine» se soluciona de manera similar. Ahora esta afirmación sería:

$$(8)\ \ F(i \wedge Pp),$$

esto es, existe un momento i posterior a t_0 y un momento t_1 anterior a i tal que p es verdad en t_1. (8) refleja la estructura

$$S \leftarrow E \leftarrow R.$$

Así pues, los nominales aumentan la expresividad de la lógica modal/temporal al permitir aludir a puntos concretos y constituyen el primer paso para la construcción de la lógica híbrida. El segundo es el operador de satisfacción: @.

La función del operador de satisfacción consiste en ligar un nominal y un símbolo proposicional para determinar el punto exacto en el que tal símbolo es verdad. Una fórmula como $@_i\varphi$, que se lee "en i, φ", establece entonces que φ se satisface única y exclusivamente en i. @ por tanto es un operador modal cuyo rango solo es un instante o mundo posible, y al igual que $\Box$ y $\Diamond$ cumple las siguientes propiedades:

- Distribución:

$$@_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (@_i\varphi \rightarrow @_i\psi).$$

[5] Cabe señalar que pese a la enorme conexión que hay entre el planteamiento de Reichenbach y el de Prior este nunca consideró que la hubiera. De hecho, Prior pensaba que la propuesta de Reichenbach era demasiado complicada debido a la distinción entre R y E (cf. Prior, 1967, p. 13). Aunque como vemos el uso de los nominales implica esa distinción.

- Generalización:

$$\text{Si} \vDash \varphi \text{ entonces} \vDash @_i\varphi,$$

para cualquier i.

- Auto-dualidad (*self-duality*):

$$@_i\varphi \equiv \neg @_i \neg \varphi.$$

Una de las principales ventajas del operador de satisfacción es que proporciona una versión modal de la relación de identidad. En efecto, gracias a @ podemos representar la igualdad en la lógica híbrida mediante la fórmula

$$@_i j,$$

que establece que en el punto i j se satisface. Como i y j son nominales eso significa que el punto i es idéntico al punto j y en consecuencia podemos expresar = por medio de $@_i j$. @ también permite expresar otras propiedades de la igualdad para las que en otros sistemas se recurre a = y a la lógica de primer orden, a saber, la reflexividad, la simetría, la transitividad y la sustitución (cf. Blackburn, 2006, p. 343):

- Reflexividad:

$$\forall x\ (x = x)$$

se representa en LH como

$$@_i i.$$

- Simetría:

$$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow y = x)$$

se representa en LH como

$$@_i j \rightarrow @_j i.$$

- Transitividad:

$$\forall x \forall y \forall z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

se representa en LH como

$$@_i j \wedge @_j k \rightarrow @_i k.$$

- Sustitución:

$$\forall x \forall y\ (x = y \wedge \Psi(x) \rightarrow \Psi(y))$$

se representa en LH como

$$@_i\varphi \wedge @_i j \rightarrow @_j\varphi,$$

donde Ψ simboliza cualquier propiedad.

La lógica híbrida, gracias a @, puede por tanto traducir modalmente fórmulas de LPO. Por eso (entre otras cosas) su capacidad expresiva es mucho mayor que la de otros sistemas como LM o LT.

El alfabeto de la lógica híbrida básica, al que llamaremos $\mathcal{L}_H$, consta entonces de:

$$i \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid @_i\varphi$$

donde $i \in$ NOM, $p \in$ PROP, $\varphi, \psi \in$ FBF y $\Box, \Diamond, @ \in$ MOD. (4*), (5*) y (6*) serían ejemplos de fórmulas bien formadas en LH.

Dado que LH no es más que LM, pero enriquecida con NOM y @, su semántica responde también a la semántica de mundos posibles. Así, en base al marco $\langle W, R\rangle$ construimos el modelo $\mathcal{M}_H = \langle W, R, V_H\rangle$, donde W es un conjunto no vacío de mundos (o de estados, o de puntos), R es la relación binaria de accesibilidad en W, esto es, $R \subseteq W \times W$, y V_H es la función de evaluación que asigna subconjuntos de W tanto a fórmulas como a nominales, vale decir, PROP $\cup$ NOM $\rightarrow \wp(W)$. El dominio de V_H en este caso es por tanto PROP $\cup$ NOM y su rango es $\wp(W)$.

Respecto a los nominales V_H siempre es un subconjunto unitario (*singleton subset*) de W, esto es, para cada $i \in$ NOM y cada $w \in W$, $w \in V_H(i) \equiv w = i$. En otras palabras: cada nominal tiene tan solo uno y el mismo valor en W (que es lo que refleja la idea expresada con anterioridad respecto a que el punto que indica un nominal debe ser unívoco para que la evaluación de la proposición que acompaña se realice únicamente en él). El único mundo de $V_H(i)$ es la denotación de i.

Al igual que en la lógica modal simbolizaremos la verdad de una fórmula en el modelo $\mathcal{M}_H$ y en el mundo w como $\mathcal{M}_H, w \vDash \varphi$. Las condiciones que ha de cumplir V_H son, para cualesquiera $\varphi, \psi \in$ FBF; $w, w' \in W$; $i \in$ NOM y variable proposicional p (cf. Blackburn, 2000, p. 347; Areces y ten Cate, 2007, p. 825):

1. $\mathcal{M}_H, w \vDash p$ syss $w \in V_H(p)$
2. $\mathcal{M}_H, w \vDash i$ syss $w \in V_H(i)$
3. $\mathcal{M}_H, w \vDash \neg\varphi$ syss no $\mathcal{M}_H, w \vDash \varphi$
4. $\mathcal{M}_H, w \vDash \varphi \wedge \psi$ syss $\mathcal{M}_H, w \vDash \varphi$ y $\mathcal{M}_H, w \vDash \psi$

5. $\mathscr{M}_H, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$ syss no $\mathscr{M}_H, w \vDash \varphi$ o $\mathscr{M}_H, w \vDash \psi$

6. $\mathscr{M}_H, w \vDash \Box\varphi$ syss $\forall w' \in W\ (wRw' \rightarrow \mathscr{M}_H, w' \vDash \varphi)$

7. $\mathscr{M}_H, w \vDash \Diamond\varphi$ syss $\exists w' \in W\ (wRw' \wedge \mathscr{M}_H, w' \vDash \varphi)$

8. $\mathscr{M}_H, w \vDash @_i\varphi$ syss $\mathscr{M}_H, w' \vDash \varphi$, donde $w' \in V(i)$ (es la denotación de i)

1, 3, 4, 5, 6 y 7 son similares a las que hemos visto en K y en K_T. Las únicas dos diferentes son 2 y 8. Lo que establece 2 es que un nominal i es verdad en el mundo w si y solo si i es el nombre de w, es decir, si w e i son iguales. 8 por su parte establece que una fórmula de tipo $@_i\varphi$ es verdad en el mundo w si y solo si φ es verdad en el mundo que denota i.

Si φ se satisface en todos los mundos posibles y en todos los modelos $\mathscr{M}_H$ basados en el marco $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ entonces decimos que φ es válida en $\mathcal{F}$. En términos lógicos: $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Y si φ es válida en todos los marcos $\mathcal{F}$ decimos que es válida sin más, esto es, $\Vdash \varphi$.

Básicamente en esto consiste el sistema básico de la lógica híbrida. Sistema que cuenta con tres características fundamentales: en primer lugar, del mismo modo que la lógica modal, es decidible en PSPACE; en segundo lugar puede traducirse a la lógica de primer orden si extendemos la traducción estándar a los nominales y el operador de satisfacción; y en tercer lugar constituye el fragmento de LPO invariante por bisimulación de las fórmulas con constantes e identidad.

Veamos más detenidamente la segunda y la tercera propiedad.

Para expresar mediante el lenguaje de correspondencia de primer orden las proposiciones de la lógica híbrida lo único que necesitamos es extender las condiciones de la traducción estándar (página 15) para representar a los nominales y al operador de satisfacción. Esas dos condiciones podrían ser (cf. Blackburn, 2006, p. 344):

7. $ST_x(i) = (x = i)$

8. $ST_x(@_i\varphi) = ST_i(\varphi)$

En LCPO el nominal i se representa por medio de la constante i, mientras que el operador de satisfacción se representa mediante la sustitución de la variable libre x por la constante i.

La traducción de (4*) sería entonces:

$$\Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q) =$$

$$ST_x(\Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)) =$$

$$\exists y\ (R^m\langle x, y\rangle \wedge (y = i \wedge P(y))) \wedge \exists y\ (R^m\langle x, y\rangle \wedge (y = i \wedge Q(y))) \rightarrow \exists y\ (R^m\langle x, y\rangle \wedge (P(y) \wedge Q(y))).$$

Al igual que en LM y en LT la traducción estándar preserva la satisfacibilidad, de modo que:

Equisatisfacibilidad LH-LCPO (LH ≈ LCPO). Para cualquier fórmula híbrida básica φ, cualquier modelo $\mathscr{M}_H$ y cualquier mundo posible w en $\mathscr{M}_H$, $\mathscr{M}_H$, w $\vDash \varphi$ si y solo si $\mathscr{M}_H \vDash ST_x(\varphi)$ $[x \leftarrow w]$.

Por lo tanto, de **LH ≈ LCPO** se deduce que

$$\Diamond(i \wedge p) \wedge \Diamond(i \wedge q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$$

y

$$\exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (y = i \wedge P(y))) \wedge \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (y = i \wedge Q(y))) \rightarrow \exists y\, (R^m\langle x, y\rangle \wedge (P(y) \wedge Q(y)))$$

son equisatisfacibles.

Si esto es verdad entonces LH es un fragmento de LPO, como hemos dicho. En concreto, es el fragmento de todas aquellas fórmulas compuestas por constantes y la relación de identidad que son invariantes por bisimulación. Esto es lo que refleja la siguiente proposición:

Bisimulación en LH. Si $\mathscr{M}_H$ y $\mathscr{M}_H$* son dos modelos de la lógica híbrida básica tales que $\mathscr{M}_H = \langle W, R, V\rangle$ y $\mathscr{M}_H^* = \langle W', R', V'\rangle$ entonces la relación $B \subseteq W \times W'$ es una bisimulación entre $\mathscr{M}_H$ y $\mathscr{M}_H$* si satisface las siguientes condiciones:

1. Si wBw' entonces, para cada $p \in$ PROP, $w \in V(p)$ si y solo si $w' \in V'(p)$ y $w \in V(i)$ si y solo si $w' \in V'(i)$, para todo $i \in$ NOM.
2. Si wBw' y wRv entonces w'R'v' y vBv'.
3. Si wBw' y w'R'v' entonces wRv y vBv'.
4. Si, para todo $w \in W$ y $w' \in W'$, w y w' son denotados por el mismo nominal entonces wBw'.

Se dice que una fórmula φ de LPO con una variable libre es invariante por bisimulación si su evaluación en mundos bisimilares es siempre la misma. El hecho de que LH sea un fragmento propio de LCPO se deriva de esta definición y del Teorema de Caracterización (cf. Blackburn, 2006, p. 345; o Areces y ten Cate, 2007, pp. 838-839), que establece que si una fórmula φ de primer orden con una variable libre es invariante por bisimulación entonces φ es equivalente a la correspondiente traducción estándar de una fórmula de LH.

Hemos dicho que este es el sistema básico de la lógica híbrida. Lo es porque solo añade NOM y el operador de satisfacción al lenguaje de LM. Sin embargo, el sistema que propuso Prior es mucho más fuerte.

A diferencia de nosotros, que hemos partido de la lógica modal para construir la lógica híbrida, Prior parte de la lógica temporal y la amplía añadiéndole tres cosas: los nominales, la modalidad universal y los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

Respecto a los nominales poco más cabe decir. Tan solo que introduce un nuevo operador, Q, como alternativa a ellos. Así, una fórmula como $Q\varphi$ es verdadera en cualquier mundo posible del modelo si y solo si hay un único mundo en él en el que φ sea verdadera. Eso significa que por medio de $Q\varphi$ φ se convierte entonces en un nominal, pues lo anterior es equivalente a la condición 2 de V_H: φ es verdad en w si y solo si w pertenece al conjunto de mundos posibles que satisfacen a φ. Como solo hay uno φ y w son idénticos.

La modalidad universal es una herramienta que se encuentra presente en la mayoría de los sistemas de lógica híbrida contemporáneos y posee dos formas: una equivalente a $\Box$, que se simboliza A, y otra equivalente a $\Diamond$, cuyo símbolo es E. $A\varphi$ significa que φ es verdadera en todos los mundos posibles del modelo, mientras que $E\varphi$ significa que φ es verdadera en algún mundo posible del modelo.

Como vemos, la condición de verdad de $E(i \wedge \varphi)$ es equivalente a la de $@_i\varphi$ y por ello $@_i\varphi$ puede definirse en términos de E como:

$$@_i\varphi =_{Def} E(i \wedge \varphi),$$

que establece que existe algún punto en el modelo donde i y φ son simultáneamente verdaderas.

$@_i\varphi$ también puede definirse en términos de A de la siguiente manera:

$$@_i\varphi =_{Def} A(i \rightarrow \varphi),$$

que establece que en todos los puntos en los que i sea verdadera φ también lo será.

Por último Prior introduce los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, pero con la novedad de que, además de su uso normal, pueden ligar nominales. De este modo, fórmulas como

$$\exists x @_x\varphi$$

o

$$\forall x @_x F\varphi$$

tendrían cabida en el lenguaje de la lógica híbrida fuerte (LH^+), al que llamaremos $\mathcal{L}_{H+}$.

$\mathcal{L}_{H+}$ está compuesto, aparte de por PROP, NOM y MOD, por un nuevo conjunto de variables de estado EVAR formado por las variables x, y, z…, que representan nominales. La diferencia entre NOM y EVAR radica en que los elementos de NOM son constantes, designan siempre al mismo mundo, mientras que los de EVAR son variables.

$\mathcal{L}_{H+}$ se define en consecuencia como sigue (cf. Blackburn, 2006, p. 351):

$$x \mid i \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid @_i\varphi \mid A\varphi \mid E\varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi$$

Muchos de estos operadores pueden definirse en base a otros (el resto de constantes lógicas y $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$, $@_i\varphi \equiv E(i \wedge \varphi)$, $A\varphi \equiv \neg E\neg\varphi$, $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$, y viceversa), pero hemos optado por ponerlos todos para presentar el alfabeto de LH^+ íntegramente.

En lo que respecta a la semántica el modelo sigue siendo kripkeano, esto es, $\mathcal{M}_{H+} = \langle W, R, V_{H+}\rangle$, a partir del marco $\langle W, R\rangle$. Sin embargo, como ahora hay variables libres y ligadas es necesario asignar valores de verdad en función de EVAR y por consiguiente relativizar la evaluación de las fórmulas a la asignación de variables.

Sea g una función que asigna valores a las variables en $\mathcal{M}_{H+}$. g es una función de EVAR sobre W, esto es, g: EVAR $\rightarrow$ W. Además, si g y g' son funciones que asignan valores a las variables en $\mathcal{M}_{H+}$ y g difiere de g' únicamente en el valor que asigna a x entonces decimos que g' es una x-variante de g: $g' \sim^x g$. Representamos que una fórmula φ es verdadera en el modelo $\mathcal{M}_{H+}$ y en el mundo w en base a g como $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \varphi$.

Las condiciones que ha de satisfacer V_{H+} son por tanto:

1. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash x$ syss $w = g(x)$
2. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash i$ syss $w \in V_{H+}(i)$
3. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash p$ syss $w \in V_{H+}(p)$
4. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \neg\varphi$ syss no $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \varphi$
5. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \varphi \wedge \psi$ syss $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \varphi$ y $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \psi$
6. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$ syss no $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \varphi$ o $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \psi$
7. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \Box\varphi$ syss $\forall w' \in W\ (wRw' \rightarrow \mathcal{M}_{H+}, g, w' \vDash \varphi)$
8. $\mathcal{M}_{H+}, g, w \vDash \Diamond\varphi$ syss $\exists w' \in W\ (wRw' \wedge \mathcal{M}_{H+}, g, w' \vDash \varphi)$

9. $\mathscr{M}_{H+}$, g, w $\models @_i\varphi$ syss $\mathscr{M}_{H+}$, g, w' $\models \varphi$, donde w' $\in$ V(i) (es la denotación de i)

10. $\mathscr{M}_{H+}$, g, w $\models A\varphi$ syss $\forall$w' $\in$ W ($\mathscr{M}_{H+}$, g, w' $\models \varphi$)

11. $\mathscr{M}_{H+}$, g, w $\models E\varphi$ syss $\exists$w' $\in$ W ($\mathscr{M}_{H+}$, g, w' $\models \varphi$)

12. $\mathscr{M}_{H+}$, g, w $\models \forall x\varphi$ syss, para todo g' $\sim^x$ g, $\mathscr{M}_{H+}$, g', w $\models \varphi$

13. $\mathscr{M}_{H+}$, g, w $\models \exists x\varphi$ syss, para algún g' $\sim^x$ g, $\mathscr{M}_{H+}$, g', w $\models \varphi$

2-9 son similares a las que hemos visto antes. Las condiciones nuevas son 1, 10, 11, 12 y 13. 1 establece que si la variable x es verdadera en base a g en w es porque el valor que asigna g a x es w. Por su parte 10-13 no son más que la representación formal de lo que hemos señalado hace un momento.

$\mathcal{L}_{H+}$ y $\mathscr{M}_{H+}$ pueden ampliarse a la lógica temporal y aceptar proposiciones compuestas por operadores temporales cuya evaluación se realiza atendiendo a instantes, no a mundos. Y además el lenguaje de LH^+ puede extenderse mediante otros operadores como $\downarrow$, Until o Since (cf. Areces y ten Cate, 2007, p. 822-823).

En cualquier caso, lo fundamental de la lógica híbrida fuerte, aparte de su enorme expresividad y de que pese a ello sigue siendo decidible, es que es lo suficientemente potente como para traducir LCPO a ella. En otras palabras: mientras que hasta el momento LCPO tenía la capacidad de traducir el lenguaje de LM, LT y LH al suyo por medio de la traducción estándar ahora LH^+ es capaz de traducir el lenguaje de correspondencia de primer orden al suyo por medio de lo que se denomina "traducción híbrida".

Sea HT la función que asigna a cada fórmula del lenguaje de correspondencia de primer orden su respectiva fórmula de la lógica híbrida fuerte. HT consiste en lo siguiente, para cualesquiera variables x, y, v $\in$ EVAR, cualquier símbolo proposicional p $\in$ PROP y cualesquiera $\varphi, \psi \in$ FBF (cf. Blackburn, 2006, 352):

1. $HT(R^m\langle x, y\rangle) = @_x\langle m\rangle y$
2. $HT(P(x)) = @_x p$
3. $HT(x = y) = @_x y$
4. $HT(\neg\varphi) = \neg HT(\varphi)$
5. $HT(\varphi \wedge \psi) = HT(\varphi) \wedge HT(\psi)$
6. $HT(\varphi \rightarrow \psi) = HT(\varphi) \rightarrow HT(\psi)$

7. $HT(\exists v\varphi) = \exists vHT(\varphi)$
8. $HT(\forall v\varphi) = \forall vHT(\varphi)$

Similarmente para el resto de fórmulas.

Como puede observarse la pieza principal de la traducción híbrida es @. Gracia a él podemos reducir el lenguaje de correspondencia de LPO a LH^{+}. Sin @ la lógica híbrida no tendría la capacidad suficiente para llevar a cabo esta traducción.

Básicamente en esto consiste el sistema LH (en su versión débil y fuerte), cuya mayor ventaja respecto al resto de sistemas que hemos presentado en este trabajo es que es capaz de expresar LCPO mediante su propio lenguaje.

5. Conclusiones

Tal y como dijimos en la introducción el objetivo de este Trabajo de Fin de Máster era mostrar cómo la lógica híbrida surge de la mano de Arthur Prior como extensión de la lógica temporal para solucionar los problemas de esta, y consiguientemente los de la lógica modal, y porqué es más potente que ambas.

Con el fin de cumplir tal objetivo en la segunda sección expusimos los sistemas de LM y LT para ver en primer lugar cómo Prior construye la lógica temporal a partir de la lógica modal. LT constituye un gran avance respecto a LM a la hora de representar formalmente proposiciones con información temporal, pero adolece de sus mismos inconvenientes.

En la tercera sección presentamos dichos inconvenientes. Son dos fundamentalmente: por un lado tanto LM como LT son subsumibles bajo el lenguaje de correspondencia de primer orden. En el primer apartado de esta sección vimos que mediante la traducción estándar LPO puede traducir cualquier fórmula de LM y LT a su propio lenguaje. Explicamos porqué: porque la lógica modal es el fragmento de LPO compuesto por todas aquellas fórmulas invariantes por bisimulación. Por otro lado LM y LT son incapaces de nombrar puntos específicos dentro de un modelo, es decir, no cuentan con ningún mecanismo que permita señalar que tal proposición es verdadera en un determinado punto. Pero la lógica de primer orden sí puede.

Eso significa que LPO es más fuerte que LM y LT. Sin embargo, la principal ventaja de estos dos sistemas es que proporcionan una perspectiva interna de los modelos, al contrario que LPO, cuya perspectiva es externa. Y por ello precisamente al final del segundo apartado de la sección 3 sostuvimos que son mejores para plantear un sistema lógico que refleje lo mejor posible la concepción natural del tiempo. Es necesario simplemente combinar los mecanismos de LM/LT con los de LPO para conseguirlo. El resultado de tal combinación es la lógica híbrida.

La cuarta sección ha estado dedicada a ella íntegramente. En la primera parte explicamos su motivación. La necesidad para plantear un sistema más potente que la lógica temporal residía en el planteamiento prioreano de que la serie-B del tiempo puede reducirse a la serie-A. Dado que el lenguaje de LT no es lo suficientemente expresivo como para permitir tal cosa, a través de los cuatro grados de implicación lógico-temporal vimos cómo Prior plantea un sistema que sí permite reducir la lógica de primer orden a una lógica puramente temporal. Reducción que solo puede llevase a cabo mediante los mecanismos de LH.

En la segunda parte de esta sección presentamos esos mecanismos. El uso de un nuevo conjunto de símbolos para representar nominales y del operador de satisfacción constituyen los principales logros de la lógica híbrida. Gracias a ellos, y a operadores como A, E, $\forall$ y $\exists$, podemos construir un sistema aún más fuerte de LH al que puede traducirse ahora sí el lenguaje de correspondencia de primer orden. Al final de esta parte se ha indicado cómo hacerlo a través de la traducción híbrida.

La traducción híbrida es el resultado más importante que se ha propuesto en este TFM. Por medio de ella se demuestra que LH es un sistema increíblemente potente debido a enorme expresividad. Una expresividad que como se ha indicado permite traducir LCPO al lenguaje de LH. Y como la traducción estándar permite hacer lo mismo con los lenguajes de LM y LT entonces ambas lógicas también pueden ser traducidas a la híbrida.

Formalmente podríamos decir que:

$$\text{LM/LT} \subset \text{LCPO} \subseteq \text{LH},$$

esto es, que la lógica modal y la lógica temporal están incluidas propiamente en el lenguaje de correspondencia de primer orden, que está incluido a su vez (aunque no propiamente) en la lógica híbrida. Es decir, tanto LCPO como LH pueden traducirse mutuamente; cosa que LM y LT son incapaces de hacer con respecto a LCPO. De ahí la relevancia de la traducción híbrida.

A lo largo de toda la exposición hemos aportado siempre ejemplos con el fin de clarificar las cuestiones que se han ido discutiendo. Solo queda por tanto concluir señalando que la lógica híbrida tiene aplicación no solo para lo que acabamos de comentar, sino que la "hibridización" puede aplicarse en una gran variedad de contextos.

Tal y como indicamos en el apartado 4.1 Prior se dio cuenta de que los mecanismos de LH permiten considerar como proposiciones no solo a predicados que aluden a instantes, sino a cualquier predicado. En este trabajo nos hemos centrado únicamente en semánticas kripkeanas, pero la lógica híbrida también puede extenderse a semánticas topológicas y algebraicas. Las herramientas de LH pueden añadirse tanto a la lógica modal básica como a lógicas modales de primer y segundo orden (con base intuicionista incluso), y permiten obtener resultados muy interesantes. Un ejemplo puede encontrarse en el artículo (2011) de Carlos Areces, Patrick Blackburn, Antonia Huertas y María Manzano, donde se desarrolla una Teoría de tipos híbrida. O en Areces, Blackburn, Huertas y Manzano (2014), donde se prueba la completud, vía Henkin, de esa Teoría de tipos.

Algunas de estas aplicaciones han sido ya investigadas, pero hay muchas otras que permanecen sin estudiar. En nuestro caso creemos que sería muy interesante por sus implicaciones prácticas combinar la lógica híbrida con la lógica epistémica y la lógica difusa (*fuzzy logic*) para construir modelos que reflejen más fielmente la forma en que razonamos y argumentamos los seres humanos.

Cuando decimos "Creo que φ" o "Sé que φ" generalmente esa creencia o ese conocimiento es contexto-dependiente, es decir, podemos creer o saber que φ en un momento determinado, pero no creerlo o saberlo en otro (porque nuestro conocimiento haya cambiado, por ejemplo). Pero no solo eso. Muchas veces no creemos o sabemos que φ totalmente. Podemos tener dudas de su verdad (o falsedad) y no creerlo *mucho*, o no saberlo *muy bien*.

La lógica epistémica clásica permite formalizar proposiciones como "Creo que φ" o "Sé que φ" y evaluarlas en función de mundos posibles, llamados "estados epistémicos". Al combinarla con la lógica difusa obtenemos un sistema multivalorado que permite ampliar el número de valores de verdad que podemos atribuir a las fórmulas para reflejar valores como "mucho" o "no mucho", "muy bien" o "no muy bien", "poco", "bastante", etc. Pero si unimos todo eso con la lógica híbrida podríamos construir un sistema en el que sea posible reflejar además el hecho de que ciertas proposiciones solo tienen un valor de verdad en un determinado punto. Por ejemplo, podríamos representar formalmente y evaluar una afirmación como (9) «No estoy del todo seguro en este momento de φ».

Proferencias como (9) son bastante comunes en nuestra interacción comunicativa. Nuestras creencias y nuestro conocimiento suelen ser vagos y dependientes del contexto, y por eso debemos recurrir a los mecanismos de estos tres sistemas (epistémico, difuso e híbrido) si queremos construir modelos que plasmen tales características. Modelos cuya aplicación podría ir desde la representación del conocimiento y del razonamiento en la Inteligencia Artificial hasta la argumentación.

6. Anexos

6.1. Notación

La sintaxis del lenguaje lógico $\mathcal{L}$ que se emplea en este TFM se compone de:

A. **Símbolos primitivos**:

1. Variables proposicionales: p, q, r, s, t… Es decir, las letras del abecedario empezando por la p y en minúscula.
2. Conectivas:
    1. Negación: ¬
    2. Conjunción: ∧
    3. Disyunción: ∨
    4. Condicional material: →
    5. Equivalencia lógica: ≡
3. Cuantificadores:
    1. Universal ("Para todo…"): ∀
    2. Existencial ("Existe al menos un…"): ∃

B. **Metavariables**, que representan variables proposicionales o fórmulas bien formadas: φ, ψ…

C. **Fórmulas bien formadas (fbf)**, que son aquellas fórmulas que cumplen los siguientes requisitos:

1. Las variables proposicionales y las metavariables son fbf.
2. Si p es una fbf, ¬p también lo es.
3. Si φ y ψ son fbf, entonces $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $\forall\varphi$ y $\exists\psi$ también lo son.
4. Los paréntesis exteriores de una fbf pueden quitarse.
5. Nada es una fbf que no salga se la aplicación recursiva de las reglas 1-4.

Llamamos PROP al conjunto de las variables (símbolos) proposicionales y FBF al conjunto de las fórmulas bien formadas.

Aparte de estos símbolos a lo largo del trabajo se han introducido otros en la medida en que los hemos ido necesitando.

6.2. Índice de abreviaturas

Las abreviaturas utilizadas en este trabajo son:

- LCPO: Lenguaje de correspondencia de primer orden
- LH: Lógica híbrida
- LH^{+}: Lógica híbrida fuerte
- LM: Lógica modal
- LPO: Lógica de primer orden
- LT: Lógica temporal

7. Bibliografía

- Areces, Carlos y ten Cate, Balder (2007). "Hybrid Logics". En Blackburn, Patrick; van Benthem, Johan y Wolter, Frank (eds.). *Handbook of Modal Logic*. Ámsterdam: Elsevier, Vol. 3, pp. 822-863.
- Areces, Carlos; Blackburn, Patrick; Huertas, Antonia y Manzano, María (2014). "Completeness in Hybrid Type Theory". En *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 43, Nº 2-3, pp. 209-238.
- Areces, Carlos; Blackburn, Patrick; Huertas, Antonia y Manzano, María (2011). "Hybrid Type Theory: A Quartet in Four Movements". En *Principia: An International Journal of Epistemology*, Vol. 15, Nº 2, pp. 225-247.
- Blackburn, Patrick (2000). "Representation, Reasoning, and Relational Structures: a Hybrid Logic Manifesto". En *Logic Journal of the IGPL*, Vol. 8, Nº 3, pp. 339-365.
- Blackburn, Patrick (2006). "Arthur Prior and Hybrid Logic". En *Synthese*, Vol. 150, Nº 3, pp. 329-372.
- Blackburn, Patrick y van Benthem, Johan (2007). "Modal Logic: A Semantic Perspective". En Blackburn, Patrick; van Benthem, Johan y Wolter, Frank (eds.). *Handbook of Modal Logic*. Ámsterdam: Elsevier, Vol. 3, pp. 2-79.
- Findlay, John (1941). "Time: A Treatment of Some Puzzles". En *Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, Nº 19, pp. 216-235.
- McTaggart, John (1908). "The Unreality of Time". En *Mind*, Vol. 17, Nº 68, pp. 457-474.
- Øhrstrøm, Peter y Hasle, Per (1995). *Temporal Logic. From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*. Dordrecht: Springer Science+Business Media Dordrecht.
- Prior, Arthur (1955). "Diodoran Modalities". En *The Philosophical Quarterly*, Vol. 5, Nº 20, pp. 205-213.
- Prior, Arthur (1957). *Time and Modality*. Oxford: Oxford University Press.
- Prior, Arthur (1967). *Past, Present and Future*. Oxford: Oxford University Press.
- Prior, Arthur (2010). *Papers on Time and Tense*. Oxford: Oxford University Press.
- Reichenbach, Hans (1947). *Elements of Symbolic Logic*. Nueva York: Dover Publications.
- Rescher, Nicholas y Alasdair, Urquhart (1971). *Temporal Logic*. Nueva York: Springer.

- van Eijck, Jan (2006). “Bisimulation”. En https://homepages.cwi.nl/~jve/courses/lai0506/LAI11.pdf.

Declaración de integridad intelectual

Trabajo Fin de Máster

Curso: 2017-2018

Título del trabajo: *La lógica híbrida como extensión de la lógica temporal*

1. Sé que copiar es una forma de deshonestidad académica.
2. He leído el documento sobre cómo ser intelectualmente íntegro, estoy familiarizado con sus contenidos y he evitado todas las formas de plagio allí recogidas.
3. Cuando utilizo las palabras de otros, lo indico mediante el uso de comillas.
4. He referenciado todas las citas e igualmente el resto de ideas tomadas de otros.
5. No he plagiado mi propio trabajo.
6. No permitiré a otros que plagien mi trabajo.

Fecha: 29 de junio de 2018

Firma: