Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Pablo Rodríguez Flores

Operadores Compactos

Compact Operators

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2021

Dirigido por
Teresa J. Bermúdez de León

Teresa J. Bermúdez de León
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

Los operadores acotados pueden entenderse como los operadores en los que la imagen de todo conjunto acotado es un conjunto acotado. De forma similar, los operadores compactos son operadores tales que la imagen de un conjunto acotado es un conjunto cuya clausura es compacta. Estos operadores exhiben numerosas y útiles propiedades, aplicables a diversos campos más allá del análisis funcional. Este trabajo es una introducción al estudio de los operadores compactos, exponiendo algunos de los resultados y aplicaciones más importantes que tienen los mismos.

Palabras clave: *Análisis funcional – Operadores compactos –Teoría espectral – Subespacios invariantes – Modelos universales – Operadores que alcanzan la norma.*

Abstract

Bounded operators can be understood as operators where the range of every bounded set is a bounded set. In similar way, compact operators are operators such that the range of every bounded set is a set which closure is compact. These operators exhibit numerous and practical properties, applicable to diverse fields beyond functional analysis. This work is an introduction to the study of compact operators, presenting some of their most important results and applications.

Keywords: *Functional analysis– Compact operators – Spectral theory – Invariant subspaces – Universal models – Norm attaining operators.*

Contenido

Resumen/Abstract . . . iii

Introducción . . . vii

1. Conjuntos Compactos . . . 1
1.1. Definiciones y ejemplos . . . 1
1.2. Caracterizaciones y otras propiedades . . . 5
1.3. Teorema de Ascoli-Arzelà . . . 9

2. Operadores Compactos . . . 13
2.1. Definición y primeras propiedades . . . 13
2.2. La propiedad de aproximación . . . 16
2.3. Operadores que alcanzan su norma . . . 19

3. Ejemplos de Operadores Compactos . . . 25
3.1. Primeros ejemplos de operadores compactos . . . 25
3.2. Ejemplos de operadores no compactos . . . 26
3.3. Operador integral de Fredholm . . . 27
3.4. Operadores con potencia compacta . . . 28

4. Teoría Espectral de los Operadores Compactos . . . 29
4.1. Teoría de Riesz-Schauder . . . 29
4.2. Espectro de un operador compacto . . . 36
4.3. Aplicación. Alternativa de Fredholm y soluciones aproximadas . . . 40
4.4. Distancia de los modelos universales a los operadores compactos . . . 46
4.5. Problema del subespacio invariante . . . 49

Bibliografía . . . 51

Póster . . . 53

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar algunas propiedades de los operadores compactos, una clase de operadores en cierto modo similar a las matrices de dimensión finita y que se podría decir que son “pequeños”, refiriéndonos con “pequeño” a que el operador transforma conjuntos acotados en “conjuntos pequeños”.

El estudio de los operadores compactos nace en 1912 de la mano de D. Hilbert, como lo que originalmente se denominaban “operadores completamente continuos”, en un contexto de espacios de Hilbert. Un operador se dice completamente continuo si transforma sucesiones débilmente convergentes en fuertemente convergentes. El término “operador compacto” y la definición actual que tienen estos fueron empleados por primera vez por E. Hille en 1950. En 1913, al año siguiente a que D. Hilbert los introdujese, F. Riesz realiza el primer estudio sistemático de estos operadores y, en 1930, J. Schauder avanza el trabajo de F. Riesz con varios resultados sobre la dualidad de los mismos. Por esta razón a la teoría desarrollada en esta primera etapa se la conoce como teoría de Riesz-Schauder. Desde entonces se han demostrado como una potente herramienta para resolver diversos problemas (como por ejemplo el problema del espacio invariante) y como un objeto de estudio interesante de por sí, dadas sus numerosas propiedades. Una historia más completa sobre los operadores compactos puede encontrarse en [4] y [13].

Este trabajo supone una introducción al estudio de los operadores compactos. Presuponemos que el lector está familiarizado con conceptos y resultados del análisis funcional, tales como “operador acotado”, “principio de acotación uniforme”, “funcional” o “espacio de Banach”. La bibliografía básica utilizada ha sido [2] y [16].

En el primer capítulo definimos los conjuntos compactos y otros conceptos relacionados y enunciamos algunas de sus principales propiedades. Especial atención se pone en demostrar el Teorema de Ascoli-Arzelà, un resultado que relaciona la compacidad de un conjunto en el espacio de funciones $C_{\mathbb{K}}(X)$, que definiremos más adelante, con el de equicontinuidad y acotación.

En el segundo capítulo se definen los operadores compactos y se exponen algunos resultados sobre los mismos. Dos de los resultados más importantes que se verán es que en espacios de Hilbert todo operador compacto es límite de operadores de rango finito y que en espacios reflexivos todos los operadores compactos alcanzan su norma.

El tercer capítulo es un listado de ejemplos de operadores compactos y no compactos que consideramos interesantes y útiles.

El cuarto y último capítulo versa sobre las ricas propiedades espectrales de los operadores compactos. Fruto de este estudio surgen, entre otros, resultados como que, dado un operador compacto definido en un espacio normado complejo de dimensión infinita, el espectro está formado por el 0 y por un conjunto de autovalores que es finito o es una sucesión que converge a 0 y que el espacio del operador puede descomponerse como suma directa de espacios cerrados íntimamente relacionados con el espectro del operador.

También en el capítulo 4, se da una aplicación práctica a los resultados del trabajo mediante la resolución de un problema numérico mediante la implementación de un algoritmo en Python. Además, se muestra que la distancia de los operadores compactos a los modelos universales, una importantísima clase de operadores, es a lo sumo igual a 1. Para finalizar, se vuelve a poner de manifiesto la utilidad de los operadores compactos ofreciendo una solución parcial al famoso problema del subespacio invariante, pues todo operador en un espacio de Banach complejo que conmute con un operador compacto no nulo tiene un subespacio invariante cerrado y propio.

1

Conjuntos Compactos

En este capítulo definiremos lo que es un conjunto compacto y daremos diferentes caracterizaciones de esta propiedad. Además, demostraremos el Teorema de Ascoli-Arzelà, un teorema que nos será útil más adelante. Para ello estudiaremos brevemente algunas de las propiedades de $C_{\mathbb{K}}(X)$, el conjunto de funciones continuas definidas en un subconjunto compacto X de un espacio normado y tomando valores en el cuerpo del espacio $\mathbb{K}$.

1.1. Definiciones y ejemplos

En primer lugar, para definir y estudiar los operadores compactos es necesario entender primero qué es un conjunto compacto. En esta sección definiremos la compacidad y algunas propiedades relacionadas y daremos algunos ejemplos de las mismas.

Nota. En este trabajo, cada vez que nos refiramos a un cuerpo $\mathbb{K}$, este será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. *Dado un espacio métrico (X, d), se dice que un subconjunto U de X es:*

(i) Compacto *si, dado cualquier recubrimiento por abiertos $\{B_i\}_{i\in I}$ de U, existe un subrecubrimiento finito $\{B_i\}_{i=1}^n$ de U.*
(ii) Relativamente compacto *o* precompacto *si su clausura $\overline{U}$ es un conjunto compacto.*
(iii) Secuencialmente compacto *si, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en U, se tiene que existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ contenida en $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento de U.*
(iv) Relativamente secuencialmente compacto *si su clausura $\overline{U}$ es un conjunto secuencialmente compacto.*

(v) Totalmente acotado *si, para todo* $\epsilon > 0$ *existen* $x_1, \ldots, x_n \in U$ *tales que* $\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$ *es un recubrimiento de* U*. A la colección* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *se le llama una* ϵ-red *de* U*.*

Los siguientes ejemplos se consideran elementales y no proporcionaremos prueba de los mismos.

Ejemplo 1.2. Todo conjunto finito en un espacio métrico es compacto y precompacto.

Ejemplo 1.3. Sea (X, d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión convergente a un cierto $x \in X$. Entonces el conjunto $\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Definición 1.4. *Dada una familia de conjuntos, se dice que tiene la* propiedad de la intersección finita *si toda subfamilia finita de conjuntos no vacíos tiene intersección no vacía.*

Veamos algunas propiedades básicas que se obtienen de las definiciones anteriores.

Proposición 1.5. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* U *un subconjunto de* X*. Se tiene que:*

1. *Si* U *es compacto, entonces es cerrado y acotado.*
2. *Si* M *es un subconjunto cerrado no vacío de un compacto* U, *entonces* M *es compacto.*
3. *Si* X *es compacto, entonces es separable.*
4. *Si* X *es compacto, entonces toda familia de cerrados* $\mathcal{F}$ *con la propiedad de la intersección finita tiene intersección* $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.
5. *Si para toda familia de cerrados* $\mathcal{F}$ *con la propiedad de la intersección finita se tiene que* $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, *entonces* X *es secuencialmente compacto.*
6. *Si* U *es relativamente secuencialmente compacto, entonces está totalmente acotado.*
7. *Si* X *es secuencialmente compacto, entonces es un espacio métrico completo.*
8. *Si* U *está totalmente acotado y* M *es un subconjunto no vacío de* U, *entonces* M *también está totalmente acotado.*

Demostración. 1. Sea $\{B(x_0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento abierto de U con $x_0 \in X$ fijo. Entonces existe un subrecubrimiento finito $\{B(x_0, n_i)\}_{1 \leq i \leq N}$. Por tanto, si tomamos n_{i_0} como el mayor de estos n_i, tenemos que $U \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_0, n_i) = B(x_0, n_{i_0})$, luego U está acotado.
Falta ver que U es cerrado, lo que demostraremos comprobando que $\overline{U} \subset U$. Sea $x \in X \backslash U$. Se tiene que $\{X \backslash \overline{B}(x, 1/n)\}_{n \geq 1}$ es un recubrimiento abierto de U. Luego, como U es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{X \backslash \overline{B}(x, 1/n_j)\}_{j=1}^{k}$. Sea $1/N$ es el menor de los diámetros de las bolas cerradas asociadas a este recubrimiento. Entonces

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{k} X \backslash \overline{B}(x, 1/n_j)\} = X \backslash \overline{B}(x, 1/N).$$

De donde se obtiene que

$$U \cap B(x, 1/N) \subset (X \backslash \overline{B}(x, 1/N)) \cap \overline{B}(x, 1/N) = \emptyset.$$

Por tanto $x \notin \overline{U}$, es decir, U es cerrado.

2. Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de M. Entonces $\{B_i\}_{i\in I} \cup \{X \backslash M\}$ es un recubrimiento abierto de U. Como U es compacto, existe un subrecubrimiento finito de U. Es decir, existe cierto $J \subset I$ finito tal que $U \subset \bigcup_{i\in J} B_i \cup (X \backslash M)$. Por tanto, $M \subset \bigcup_{i\in J} B_i$. Luego $\{B_i\}_{i\in J}$ es un recubrimiento finito por abiertos de M contenido en $\{B_i\}_{i\in I}$. Con lo que se tiene que M es compacto.

3. Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{B(x, 1/n) \ / \ x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X. Por tanto, para cada n natural, existe $\mathcal{B}_n = \{B(x_{i,n} \ , 1/n)\}_{1\leq i\leq N_n}$ recubrimiento finito de X.
Consideremos $A := \{x_{i,n} \ / \ i, n \in \mathbb{N}\}$. Claramente A es un conjunto numerable. Sea ahora $x_0 \in X$. Entonces, para todo n natural, se tiene que existe $i_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in B(x_{i_n,n}, 1/n)$, puesto que $\mathcal{B}_n$ es un recubrimiento de X. Así, obtenemos que la sucesión $(x_{i_n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Luego $x_0 \in \overline{A}$ y, por tanto, $\overline{A} = X$.

4. Sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados no vacíos de X con la propiedad de la intersección finita. Consideremos $\mathcal{G} := \{F^c \ / \ F \in \mathcal{F}\}$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{F}$ tiene intersección vacía. Tenemos que

$$\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F^c = (\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F)^c = \emptyset^c = X.$$

Entonces $\mathcal{G}$ sería un recubrimiento abierto de X. Consecuentemente existiría $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ subrecubrimiento finito de X, al ser este compacto. Sea $\mathcal{F}' := \{F \in \mathcal{F} \ / \ F^c \in \mathcal{G}'\}$. Nótese que $\mathcal{F}'$ es un conjunto finito, ya que $\mathcal{G}'$ también lo es. Se tiene que:

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}'} F = (\bigcup_{G\in\mathcal{G}'} G)^c = X^c = \emptyset.$$

Lo cual es absurdo, puesto que contradice la propiedad de la intersección finita de $\mathcal{F}$.

5. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en X. Pretendemos demostrar que existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge a un cierto $x \in X$. Consideremos $V_n := \{x_m \ / \ m \geq n\}$. Claramente, $(\overline{V_n})_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos, luego es claro que tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces por hipótesis tiene que tener intersección arbitraria no vacía. Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$. Como para todo natural k, $x \in \overline{V_k}$, tenemos que existe $x_{n_k} \in V_k$ tal que $d(x, x_{n_k}) \leq 1/k$. Por tanto, $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a $x \in X$. Es decir, X es secuencialmente compacto.

6. Por contrarrecíproco. Supongamos que U no es totalmente acotado. Consecuentemente existe un $\epsilon > 0$ para el cual no existe una ϵ-red finita de U. Veamos entonces que existe una sucesión en U sin subsucesiones convergentes.
   Sea $x_1 \in U$. Tomamos $x_2 \in U \backslash B(x_1, \epsilon)$. Esto es posible porque en caso contrario $\{x_1\}$ sería una ϵ-red finita de U. Además se tiene que por esta misma razón, $\{B(x_1, \epsilon)\} \cup \{B(x_2, \epsilon)\}$ tampoco recubre a U.
   Así, si tenemos definidos $x_1, \ldots, x_n$, tales que $\{B(x_i, \epsilon)\}_{1\leq i\leq n}$ no es un recubrimiento de U y $x_i \notin B(x_j, \epsilon)$ si $i \neq j$, podemos definir x_{n+1} como un elemento cualquiera de $U \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$. Entonces, como no pueden existir ϵ-redes finitas de U, se tiene que $\{B(x_i, \epsilon)\}_{1\leq i\leq n+1}$ no es un recubrimiento de U y $x_i \notin B(x_j, \epsilon)$ si $i \neq j$. Ya con la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida, tenemos que $x_i \notin B(x_j, \epsilon)$ si $i \neq j$, es decir $d(x_i, x_j) > \epsilon$. Luego, (x_n) no puede tener ninguna subsucesión convergente.

7. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en X. Como X es secuencialmente compacto, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a un $x \in X$. Recordemos ahora que toda sucesión de Cauchy con alguna subsucesión convergente converge a su vez al mismo elemento que la subsucesión. Por tanto, como $(x_n)_{n\geq 1}$ es sucesión Cauchy, también tiene que converger al mismo $x \in X$.

8. Sea $M \subset U$ un conjunto no vacío y $\epsilon > 0$. Como U está totalmente acotado, podemos considerar $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una $\frac{\epsilon}{2}$-red de U. Para cada i con $1 \leq i \leq n$, tomamos un $y_i \in M \cap B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ donde la intersección sea no vacía. Obtenemos así $y_1, \ldots, y_m$, con $m \leq n$. Si $y \in M$, se tiene que $y \in M \cap B(x_j, \frac{\epsilon}{2})$, para algún j con $1 \leq j \leq m$. Luego:
$$d(y, y_j) \leq d(y, x_j) + d(y_j, x_j) < \epsilon. \tag{1.1}$$
   Consecuentemente, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ es una ϵ-red finita de M.

■

Nótese que de la proposición anterior se sigue que para que un conjunto sea compacto es necesario (aunque no suficiente) que sea a su vez cerrado, acotado y separable. Además, el que todo compacto sea cerrado nos indica a su vez que todo compacto es precompacto.

1.2. Caracterizaciones y otras propiedades

Ahora que ya tenemos algunas propiedades con las que empezar a trabajar, es conveniente ver que hay formas equivalentes de entender la compacidad de un conjunto.

Teorema 1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *X tiene la propiedad de la intersección finita para cerrados.*
3. *X es secuencialmente compacto.*
4. *X es un espacio métrico completo y está totalmente acotado.*

Demostración. Las implicaciones $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)$ se obtienen inmediatamente aplicando las propiedades (4), (5), (6) y (7), en ese orden, de la proposición 1.5.
Veamos $(4) \implies (1)$. Por reducción al absurdo. Supongamos que X no es compacto. Luego, existe un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X que no tiene ningún subrecubrimiento finito de X. Vamos a construir una sucesión (x_n) en X que cumpla las siguientes propiedades para todo n natural:

(i) $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n+1}$.
(ii) La bola abierta $B(x_n, 2^{-n+1})$ no puede ser recubierta por una familia finita de conjuntos de $\mathcal{A}$.

Por hipótesis, X está totalmente acotado, luego existe una 1-red finita de X $y_1, \ldots, y_m$. Ya que $X \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, 1)$, hay al menos un natural j, con $1 \leq j \leq m$ tal que $B(y_j, 1)$ no puede ser recubierto por una subfamilia finita de $\mathcal{A}$. Sea $x_1 = y_j$, siendo j el menor de estos naturales. Entonces x_1 satisface (ii).
Supongamos ahora que tenemos $x_1, \ldots, x_n$ puntos de X que cumplen las condiciones (i) y (ii). Por la propiedad (8) de la proposición 1.5, la bola abierta $B(x_n, 2^{-n+1})$ está totalmente acotada y, por tanto, existe $\{y_1, \ldots, y_m\}$ una 2^{-n}-red de $B(x_n, 2^{-n+1})$.
Por hipótesis, $B(x_n, 2^{-n+1})$ satisface (ii), luego para al menos un natural j, $1 \leq j \leq m$, se tiene que $B(y_j, 2^{-n})$ no puede ser cubierta por una subfamilia finita de $\mathcal{A}$. Consideremos $x_{n+1} = y_j$, donde j es el menor de estos naturales. Ya que $x_{n+1} \in B(x_n, 2^{-n+1})$ la condición (i) se satisface. Claramente la condición (ii) también se satisface, por la elección de x_{n+1}. Una vez obtenida la sucesión (x_n), se tiene que para $m > n$:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq 2^{-m+2} + 2^{-m+3} + \cdots + 2^{-n+1} \leq \sum_{k=n-1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+2}. \end{aligned}$$

Hemos obtenido que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Como X es un espacio métrico completo, se tiene que (x_n) es convergente en X. Sea $x \in X$ el límite de (x_n). Puesto que $\mathcal{A}$ recubre a X, se tiene que $x \in A$, para algún $A \in \mathcal{A}$. Además, A es abierto, luego existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Además, como (x_n) converge a x, se tiene que existe un N natural tal que $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ y $2^{-n+1} < \frac{r}{2}$ para $n \geq N$. Así que, para $y \in B(x_N, 2^{-N+1})$ se tiene que:

$$d(y, x) \leq d(y, x_N) + d(x_N, x) < 2^{-N+1} + \frac{r}{2} < r.$$

Por tanto, $B(x_N, 2^{-N+1}) \subset B(x, r) \subset A \in \mathcal{A}$, lo que contradice la condición (ii). Consecuentemente obtenemos finalmente que (4) implica (1). ■

Con esta caracterización se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico y U un subconjunto no vacío de X. Entonces:*

1. *U es relativamente compacto si y sólo si, es relativamente secuencialmente compacto.*
2. *Si X es completo, entonces U es relativamente compacto si y sólo si, U está totalmente acotado.*

Demostración. La parte (1) se obtiene por el teorema 1.6.
Veamos la parte (2): Por la propiedad (6) de la proposición 1.5 y el resultado (1), se tiene de inmediato que si U es relativamente compacto, entonces está totalmente acotado. Por otro lado, si U está totalmente acotado, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una $\frac{\epsilon}{2}$-red. Por tanto, $U \subset \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. Sea $x \in \overline{U}$. Luego, existe $x' \in U$ tal que $d(x, x') < \frac{\epsilon}{2}$. Además, como $x' \in U$, se tiene que existe $x_{n_0} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $d(x', x_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Es decir:

$$d(x, x_{n_0}) \leq d(x, x') + d(x', x_{n_0}) < \epsilon.$$

Por tanto, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una ϵ-red finita de $\overline{U}$, por lo que $\overline{U}$ está totalmente acotado. Además, como es un conjunto cerrado contenido en un espacio métrico completo es también un espacio métrico completo. Así, $\overline{U}$ es completo y totalmente acotado, luego por el teorema anterior, $\overline{U}$ es compacto. ■

Lema 1.8. *La bola cerrada $\overline{B}(0, r)$ con r >0 es un compacto en $(\mathbb{K}, d)$, siendo d la distancia euclídea.*

Demostración. Claramente, $\overline{B}(0,r)$ es cerrado, luego por el teorema 1.6 tenemos que solo falta ver que está totalmente acotado. Veamos los dos casos posibles por separado:
Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces, para $\epsilon > 0$, consideramos $\{x_j\}_{j=-n}^{n}$ con $x_j := j\frac{\epsilon}{2}$, con $j \in \mathbb{Z}$ y $n > 2\frac{r}{\epsilon}$. Claramente, $\bigcup_{j=-n}^{n} B(x_j, \epsilon)$ forma un recubrimiento de $\overline{B}(0,r) = [-r,r]$, luego $\{x_j\}_{j=-n}^{n}$ es una ϵ-red finita. Por tanto, $\overline{B}(0,r)$ está totalmente acotado.

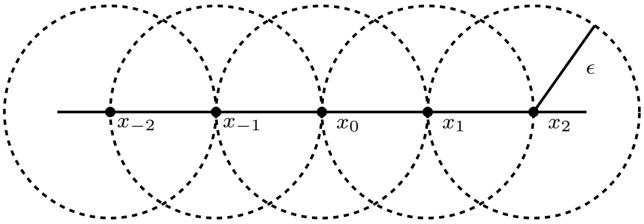

Figura 1.1. ϵ-red finita en $\mathbb{R}$ de un intervalo cerrado y acotado.

Veamos ahora el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea $\epsilon > 0$, como acabamos de ver, $[-r,r]$ está totalmente acotado en $\mathbb{R}$. Tomamos los mismos $\{x_{-n}, \ldots, x_n\}$ que usamos para la ϵ-red finita de $[-r,r]$ en $\mathbb{R}$. Se obtiene que $\{x_j + ix_k \in \mathbb{C} \ / \ -n \leq j,k \leq n\}$ es una ϵ-red finita de $A := \{a + bi \in \mathbb{C} \ / \ -r \leq a, b \leq r\}$, como puede observarse en la siguiente figura:

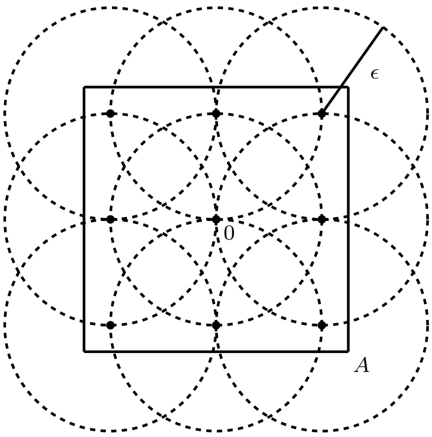

Figura 1.2. ϵ-red finita en $\mathbb{C}$ del conjunto A.

Luego, como $\overline{B}(0,r) \subset A$, tenemos que $\overline{B}(0,r)$ está totalmente acotado. ■

Teorema 1.9 (Borel-Lebesgue). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y consideremos $d : V \times V \to \mathbb{R}$ la distancia euclídea.*

Entonces se tiene que un subconjunto M no vacío de V es compacto si y sólo si, M es cerrado y acotado.

Demostración. En primer lugar, si M es compacto se tiene por el primer apartado de la proposición 1.5 que es cerrado y acotado. Veamos la otra implicación: Consideremos $\{e_1, \ldots, e_m\}$ base de V. Como M está acotado, se tiene que $M \subset M_r := \{x_1e_1 + \cdots + x_me_m \in V \quad / \quad x_i \in \overline{B}(0,r)\}$ para algún $r > 0$. Luego, si M_r es compacto entonces M también, al ser M un subconjunto cerrado de M_r. Sea $(x_n) \subset M_r$ una sucesión cualquiera. Tenemos entonces que $x_n = x_n(1)e_1 + \cdots + x_n(m)e_m$, con $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}(0,r)$. Por el lema anterior, sabemos que $\overline{B}(0,r)$ es compacto. Luego, tomamos $(n_1) \subset \mathbb{N}$ sucesión tal que $(x_{n_1}(1))$ converge. Ahora, tomamos $(n_2) \subset (n_1)$ subsucesión tal que $(x_{n_2}(2))$ converge. Nótese que al tener $(n_2) \subset (n_1)$ se tiene que $(x_{n_2}(1)$ converge. Repitiendo el proceso m veces, obtenemos finalmente una sucesión $(n_m) \subset (n_{(m-1)}) \subset \cdots \subset (n_1) \subset \mathbb{N}$ tal que $(x_{n_m}(1)), \ldots, (x_{n_m}(m))$ son sucesiones convergentes. Por consiguiente, $(x_{n_m}) = x_{n_m}(1)e_1 + \cdots + x_{n_m}(m)e_m$ también converge.
Luego, M_r es un conjunto compacto y, consecuentemente, M también lo es. ■

Este resultado nos permite dar ejemplos de conjuntos compactos y conjuntos que no lo son. Por ejemplo, cualquier bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un compacto, mientras que, por ejemplo, los números enteros $\mathbb{Z}$ no lo son, puesto que no están acotados, ni tampoco es compacta ninguna bola abierta.

Una pregunta interesante que puede hacerse, es si efectivamente una bola cerrada es siempre compacta. El siguiente teorema nos muestra que esto sólo se da si el espacio es de dimensión finita. Para probar dicho teorema, hará falta hacer uso del siguiente lema, cuya prueba puede encontrarse en [16, Theorem II.3.5].

Lema 1.10 (Riesz). *Sean X un espacio normado, Y un subespacio cerrado propio de X y a un número real con $0 < a < 1$. Entonces existe un $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tal que $d(x, Y) \geq a$.*

Teorema 1.11 (Riesz). *Sea X un espacio normado. Son equivalentes:*

1. *La bola cerrada $\overline{B}(0,1)$ es un compacto.*
2. *$dimX$ $<\infty$.*

Demostración. La implicación (2)⇒(1) se tiene de inmediato por el Teorema de Borel-Lebesgue 1.9.
Veamos que (1) implica (2): Supongamos por contrarrecíproco que X tiene dimensión infinita. Consideremos x_1 un elemento cualquiera no nulo de $\overline{B}(0,1)$. Ahora, por el Lema de Riesz, existe un $x_2 \in X$ con $\|x_2\| = 1$ tal que, si Y_1 es

el espacio generado por $\{x_1\}$, $\langle\{x_1\}\rangle$, se tiene que $d(x_2, Y_1) \geq \frac{1}{2}$. Usando reiteradamente el Lema de Riesz, se obtiene x_n como $x_n \in X$ con $\|x_n\|$=1 tal que, si Y_{n-1} es el espacio $\langle\{x_1, \dots x_{n-1}\}\rangle$, se tiene que $d(x_n, Y_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Claramente, esto puede hacerse porque los Y_n son subespacios cerrados al ser de dimensión finita y siempre propios porque en caso contrario tendríamos que $\{x_1, \dots x_n\}$ es un sistema generador de X, lo cual es absurdo, por ser X de dimensión infinita. Además, $(x_n) \subset \overline{B}(0,1)$ y (x_n) no tiene subsucesiones convergentes, ya que $d(x_n, x_m) > \frac{1}{2}$ si $m \neq n$. Por tanto, $\overline{B}(0,1)$ no es compacta. ■

Este teorema nos demuestra, por ejemplo, que la bola unidad cerrada no es compacta en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Corolario 1.12. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua con X compacto. Entonces f alcanza el máximo y el mínimo en X.*

Demostración. Como X es compacto, por el teorema anterior, $f(X)$ también lo es. Por el teorema de Borel-Lebesgue 1.9, sabemos que los compactos en $\mathbb{R}$ son cerrados y acotados. Por tanto, $f(X) \subset [a, b]$, para ciertos $a, b \in f(X)$. Esto es, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = a$ y $f(x_2) = b$. Luego, para todo $x \in X$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. ■

1.3. Teorema de Ascoli-Arzelà

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de Ascoli-Arzelà, un resultado que nos caracteriza cuándo una familia de funciones definidas sobre un conjunto compacto es compacta.

A partir de ahora, dado X un espacio métrico y $\mathbb{K}$ un cuerpo se denotará como

$$C_{\mathbb{K}}(X) := \{f : X \to \mathbb{K} \ / \ f \text{ es continua en} X\},$$

al espacio de funciones continuas definidas sobre X y con valores en $\mathbb{K}$.

Definición 1.13 (Continuidad uniforme). *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios métricos. Se dice que f es* uniformemente continua *en X si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ para cualesquiera x_1, x_2 tales que $d(x_1, x_2) < \delta$.*

Teorema 1.14. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios métricos con X compacto. Entonces f es uniformemente continua en X.*

Demostración. Sea ϵ>0. Como f es una aplicación continua, para todo $x \in X$ existe un δ_x tal que

$$d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.2}$$

si $d(x,y) < \delta_x$. Por otra parte, $\{B(x, \frac{\delta_x}{2}) \ / \ x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$\{B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}), \dots, B(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2})\}$$

que recubre a X. Sea $\delta := min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\}$ e $y_1, y_2 \in X$ con $d(y_1, y_2) < \delta$. Se tiene que existe $i \in \{1 \dots n\}$ tal que $y_1 \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$, puesto que dichas bolas forman un recubrimiento de X. Además:

$$d(x_i, y_2) \leq d(x_i, y_1) + d(y_1, y_2) \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \delta_{x_i}.$$

Por tanto, por (1.2) se tiene que:

$$d(f(y_1), f(y_2)) \leq d(f(y_1), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y_2)) < \epsilon.$$

Consecuentemente, f es uniformemente continua. ■

Proposición 1.15. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $\|\cdot\| : C_{\mathbb{K}}(X) \to \mathbb{R}$ la norma uniforme definida por $\|f\| := \sup\{|f(x)| \ / \ x \in X\}$. Entonces $(C_{\mathbb{K}}(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Claramente se tiene que $C_{\mathbb{K}}(X)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y que $\|\cdot\|$ es una norma. Veamos que efectivamente es un espacio completo.
Sea $(f_n) \subset C_{\mathbb{K}}(X)$ una sucesión de Cauchy. Para cada $x \in X$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \ / \ x \in X\} = \|f_n - f_m\|,$$

luego, $(f_n(x)) \subset \mathbb{K}$ es una sucesión es de Cauchy para todo $x \in X$. Como $\mathbb{K}$ es un espacio completo, tenemos que $(f_n(x))$ es convergente para cada $x \in X$. Sea $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Es claro que $f : X \to \mathbb{K}$ es una aplicación bien definida. Falta comprobar que es continua y que (f_n) converge a ella.
Veamos que f es continua. Sea $\epsilon > 0$. Como $f_n(x) \to f(x)$, para cualquier x de X, tenemos que para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ y $|f(y) - f_{n_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, con $x, y \in X$. Además, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua. Como X es compacto, tenemos entonces que f_{n_0} es uniformemente continua. Es decir existe cierto $\delta_0 > 0$ para el que $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ si $d(x,y) < \delta_0$. Luego, para x, y con $d(x,y) < \delta_0$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \epsilon.\end{aligned}$$

Esto demuestra que f es uniformemente continua y por consiguiente continua.
Finalmente, comprobemos que (f_n) converge a f. Definamos $g_n(x) := |f(x) - f_n(x)|$, para todo $x \in X$. Es claro que g_n es continua, puesto que f , f_n y el

valor absoluto lo son. Como X es un compacto, g_n debe alcanzar el máximo. Sea $x_0 \in X$ un punto donde g_n alcanza dicho máximo. Se tiene que $(f_n(x_0)) \to f(x_0)$ luego $g_n(x_0) \to 0$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\|f - f_n\| &= max\{|f(x) - f_n(x)| \ / \ x \in X\} = max\{g_n(x) \ / \ x \in X\} \\ &= g_n(x_0) \to 0.\end{aligned}$$

De donde se obtiene finalmente que $f_n \to f$. ■

La demostración del siguiente teorema necesita de varios resultados previos que profundizan las propiedades algebraicas y topológicas que tiene $C_{\mathbb{K}}(X)$ como álgebra lineal asociativa. Consideramos que esto excede los objetivos de este trabajo por lo que nos abstendremos de presentarla. Para el interesado, esta prueba puede encontrarse en [2, Theorem 4.5.12].

Teorema 1.16. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces el espacio $C_{\mathbb{K}}(X)$ es separable.*

Definición 1.17 (Equicontinuidad). *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A no vacío de $C_{\mathbb{K}}(X)$ se dice* equicontinuo en un punto $x \in X$ *si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ para el cual $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ con $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$ para toda $f \in A$.*
Si A es equicontinuo para todo $x \in X$ se dice que A es equicontinuo *en X.*

Teorema 1.18 (Ascoli-Arzelà). *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces un subconjunto A no vacío de $C_{\mathbb{K}}(X)$ es relativamente compacto si y sólo si, A es equicontinuo y acotado.*

Demostración. Supongamos que A es relativamente compacto, entonces se tiene que A está totalmente acotado y por tanto está acotado. Veamos que es equicontinuo. Sea $\epsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_n$ una $\frac{\epsilon}{3}$-red en A. Entonces existen reales positivos $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tales que, para $x \in X$:

$$|f_k(y) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para $d(x, y) < \delta_k$. Sea $\delta := min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Puesto que $f \in A$, se tiene que $\|f - f_k\| < \frac{\epsilon}{3}$ para cierto $k \in \{1, \ldots, n\}$. Consecuentemente, si $d(x, y) < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x)| + |f(x) - f_k(x)| \\ &\leq 2\|f - f_k\| + |f_k(y) - f_k(x)| < \epsilon.\end{aligned}$$

Luego, A es equicontinuo en nuestro x arbitrario de X. Por tanto, A es equicontinuo en X.

Veamos el otro lado de la implicación, es decir, comprobar que todo conjunto equicontinuo y acotado en $C_{\mathbb{K}}(X)$ es relativamente compacto. Para ello, consideremos (f_n) una sucesión cualquiera en A y veamos que tiene una subsucesión convergente. Como X es compacto se tiene por el tercer apartado de la proposición 1.5 que es también separable. Sea (x_n) una sucesión densa en X. Como A está acotado, entonces la sucesión $(f_n) \subset A$ está acotada. Consecuentemente la sucesión $(f_n(x_1)) \subset \mathbb{K}$ está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos que existe $(f_n^{(1)}) \subset (f_n)$ tal que la sucesión $(f_n^{(1)}(x_1))$ converge. De igual manera, como A está acotado, entonces $(f_n^{(1)}) \subset A$ es una sucesión acotada. Mediante el mismo razonamiento que el usado antes, obtenemos que existe $(f_n^{(2)}) \subset (f_n^{(1)})$ tal que la sucesión $(f_n^{(2)}(x_2))$ converge. Además por ser $(f_n^{(2)})$ subsucesión de $(f_n^{(1)})$ tenemos que la sucesión $(f_n^{(2)}(x_1))$ converge al mismo punto. Repitiendo iterativamente este proceso, obtenemos subsucesiones

$$(f_n) \supset (f_n^{(1)}) \supset (f_n^{(2)}) \supset \dots$$

tales que $(f_n^{(k)}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $1 \leq j \leq k$. Nótese que además de converger, las sucesiones $(f_n^{(k)}(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ han de converger al mismo valor para cada j, al ser las sucesiones $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesiones de $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Afirmamos que la sucesión $(f_n^{(n)})$ converge. Para demostrarlo, veamos que es una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ y x un punto arbitrario de X. Como A es equicontinuo, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $f \in A$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para todo $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$.

Ahora, como (x_n) es una sucesión densa en X, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_t) < \delta$. Además, como para cada $k \geq t$ tenemos que las sucesiones $(f_n^{(k)}(x_t))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo punto, entonces la sucesión $(f_n^{(n)}(x_t))$ converge. Por lo tanto, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$|f_n^{(n)}(x_t) - f_m^{(m)}(x_t)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por consiguiente, para $n, m > N$:

$$\begin{aligned} |f_n^{(n)}(x) - f_m^{(m)}(x)| &\leq |f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(x_t)| + |f_n^{(n)}(x_t) - f_m^{(m)}(x_t)| + |f_m^{(m)}(x_t) - f_m^{(m)}(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $\|f_n^{(n)} - f_m^{(m)}\| < \epsilon$. Con lo cual $(f_{(n)}^{(n)})$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Banach y es por tanto convergente.

■

2

Operadores Compactos

En este capítulo se presentará a los protagonistas de este trabajo, los operadores compactos. Expondremos en primer lugar la definición y algunas propiedades importantes de estos operadores. Luego trataremos brevemente la conocida como la propiedad de aproximación, que consiste en si en un espacio de normado E todo operador compacto puede escribirse como límite de operadores de rango finito, que son aquellos cuya imagen tiene dimensión finita. Finalmente, discutiremos cuando un operador compacto alcanza su norma.

2.1. Definición y primeras propiedades

A lo largo de esta sección, E y F denotarán espacios normados sobre $\mathbb{K}$.

Definición 2.1 (Operador compacto). *Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Se dice que T es un* operador compacto *si para toda sucesión acotada $(x_n) \subset E$ se tiene que la sucesión (Tx_n) tiene una subsucesión convergente. Al conjunto de todos los operadores compactos de E en F se le denotará como $K(E, F)$ y, en caso de que $E = F$, se denotará como $K(E)$.*

En el siguiente teorema, se muestra que $K(E, F)$ es un ideal bilateral cerrado de $L(E, F)$.

Teorema 2.2. *Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Entonces:*

(i) Se tiene que T es compacto si y solo si, para todo $A \subset E$ acotado se tiene que $T(A)$ es relativamente compacto.
(ii) Si $T(\overline{B}(0, 1))$ es relativamente compacto, entonces T es compacto.
(iii) Si T es compacto, entonces es acotado.
(iv) $K(E, F)$ es un subespacio vectorial de $L(E, F)$.
(v) Si T es compacto, $S \in L(F, G)$ y $R \in L(G, E)$ donde G es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, entonces $TR \in K(G, F)$ y $ST \in K(E, G)$.
(vi) Si E y F son espacios de Banach entonces $K(E, F)$ es cerrado en $L(E, F)$.

Demostración. (i) Supongamos que T es compacto y consideremos $A \subset E$ acotado y $(y_n) \subset \overline{T(A)}$. Para cada n, consideramos $Tx_n \in T(A)$ tal que $\|y_n - Tx_n\| < 1/n$. Ahora bien, como $(x_n) \subset A$ y A está acotado, entonces $(x_n) \subset A$ es una sucesión acotada. Consecuentemente, por definición de operador compacto, (Tx_n) tiene una subsucesión (Tx_{n_k}) que converge a cierto $y \in F$. Por tanto:

$$\|y - y_{n_k}\| \leq \|y - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - y_{n_k}\| \longrightarrow 0.$$

Luego (y_{n_k}) converge a y, lo que implica que $\overline{T(A)}$ es compacto, es decir, que $T(A)$ es relativamente compacto. La implicación recíproca es inmediata.

(ii) Supongamos que $T(\overline{B}(0,1))$ es relativamente compacto y sea $(x_n) \subset E$ una sucesión acotada. Por tanto, para algún $r > 0$, se tiene que $\|x_n\| < r$, para cualquier n. Entonces $(r^{-1}x_n) \subset \overline{B}(0,1)$. Luego tenemos que $(Tr^{-1}x_n) \subset T(\overline{B}(0,1))$ y, como este último es relativamente compacto, entonces existe una subsucesión convergente $(Tr^{-1}x_{n_k})$. Por consiguiente, $(Tx_{n_k}) = (Trr^{-1}x_{n_k}) = (rTr^{-1}x_{n_k})$ es una subsucesión convergente de $T(x_n)$ y se tiene que T es compacto.

(iii) Por contrarrecíproco, supongamos que T no está acotado. Entonces, para $n = 1, 2\ldots$ existe $x_n \in E$ tal $\|x_n\| = 1$ y $\|Tx_n\| \geq n$. Por tanto, la sucesión (x_n) está acotada pero (Tx_n) no tiene subsucesiones convergentes, luego T no es compacto.

(iv) Por (iii) tenemos que $K(E,F) \subset L(E,F)$. Falta demostrar que $K(E,F)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean $T, S \in K(E,F)$ y $a, b \in \mathbb{K}$. Consideremos $(x_n) \subset E$ acotada. Por definición, existe (Tx_{n_k}) subsucesión convergente de (Tx_n). Ahora, (x_{n_k}) es también acotada, luego existe $(Sx_{n_{k_r}})$ subsucesión convergente de (Sx_{n_k}). Por tanto, $((aT + bS)x_{n_{k_r}}) = (Tax_{n_{k_r}} + Sbx_{n_{k_r}})$ es una subsucesión convergente de $((aT + bS)x_n)$.

(v) Sea $(x_n) \subset G$ sucesión acotada. Entonces, como $R \in L(G,F)$, tenemos que (Sx_n) es también una sucesión acotada. Luego, (TRx_n) tiene una subsucesión convergente, al ser T compacto y por tanto TS es un operador compacto. La demostración de la compacidad del operador ST es análoga.

(vi) Supongamos que E y F son espacios de Banach y sea $(T_n) \subset K(E,F)$ sucesión convergente a cierto $T \in L(E,F)$. Veamos entonces que T es un operador compacto. Sea $\epsilon > 0$ y B la bola unidad cerrada en E. Para cierto N entero positivo se tiene, que $\|T - T_N\| < \frac{\epsilon}{3}$, luego, para todo $x \in B$:

$$\|Tx - T_N x\| \leq \|x\|\|T - T_N\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.1}$$

Ahora, por (i), tenemos que $T_N(B)$ es relativamente compacto y, por el corolario 1.7, está totalmente acotado. Sea entonces $\{T_N x_1, \dots, T_N x_m\}$ una $\frac{\epsilon}{3}$-red de $T_N(B)$. Por tanto, para $x \in B$ existe cierto $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\|T_N x - T_N x_k\| < \frac{\epsilon}{3}$. Así:

$$\|Tx - Tx_k\| \leq \|Tx - T_N x\| + \|T_N x - T_N x_k\| + \|T_N x_k - Tx_k\| < \epsilon. \quad (2.2)$$

Luego $\{Tx_1, \dots, Tx_m\}$ es una ϵ-red de $T(B)$. Esto implica que $T(B)$ está totalmente acotado, por lo que es a su vez relativamente compacto y, por (ii), T es compacto.

■

Por la definición de operador adjunto es fácil de demostrar que el adjunto de un operador acotado es a su vez un operador acotado. El siguiente teorema nos establece una relación similar con los operadores compactos.

Teorema 2.3 (Schauder). *Sea $T \in L(E, F)$. Entonces $T \in K(E, F)$ si y solo si $T^* \in K(F^*, E^*)$.*

Demostración. Veamos primero que $T^* \in K(F^*, E^*)$. Sea $(y_n^*) \subset B^*$ una sucesión, siendo B^* la bola unidad cerrada de F^*. Pretendemos demostrar que $(T^* y_n^*)$ tiene una subsucesión convergente, lo que implicaría que $T^*(B^*)$ es relativamente compacto y por el segundo apartado del teorema 2.2 que T^* es compacto.
Sea B la bola unidad cerrada en E y denotemos $Y = \overline{T(B)}$. Como T es compacto y B está acotada, entonces Y es un compacto. Denotemos por $y_n^*|_Y$ la restricción de y_n^* al conjunto Y y consideremos el conjunto $A = \{y_n^*|_Y \ / \ n = 1, 2, \dots\} \subset C_{\mathbb{K}}(Y)$. Pretendemos probar que A es relativamente compacto. Para ello haremos uso del teorema de Ascoli-Arzelà 1.18, por lo que tendremos que probar que el conjunto A es equicontinuo y acotado.
Por un lado, como Y es compacto entonces está acotado. Luego existe un $M > 0$ tal que $\|y\| < M$, para cualquier $y \in Y$. Como los y_n^* tienen norma inferior o igual a 1 tenemos que $|y_n^*(y)| \leq \|y\| < M$, para cualquier $y \in Y$. Por consiguiente, A está acotado. Sean $y_1, y_2 \in Y$ y $n = 1, 2, \dots$. Se tiene que:

$$|y_n^*(y_1) - y_n^*(y_2)| = |y_n^*(y_1 - y_2)| \leq \|y_n^*\| \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Luego A es equicontinuo. Por el teorema de Ascoli-Arzelà, tenemos que A es relativamente compacto, lo que significa que existe una subsucesión $(y_{n_k}^*)$ de (y_n^*) para la cual $(y_{n_k}^*|_Y)$ converge en $C_{\mathbb{K}}(Y)$. Veamos que $(T^* y_{n_k}^*)$ converge en E^*. Sea $\epsilon > 0$. Como $(y_{n_k}^*|_Y)$ converge, existe un K natural para el cual, si $j, k > K$ se tiene que $\left|y_{n_k}^*(y) - y_{n_j}^*(y)\right| < \frac{\epsilon}{2}$, para cualquier $y \in Y$. Por tanto, recordando que si $x \in B$ entonces $Tx \in Y$:

$$\left|(T^* y_{n_k}^* - T^* y_{n_j}^*)x\right| = \left|T^* y_{n_k}^*(x) - T^* y_{n_j}^*(x)\right| \leq \left|y_{n_k}^*(Tx) - y_{n_j}^*(Tx)\right| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $x \in B$. Como B es la bola unidad de E, se obtiene que $\|T^*y^*_{n_k} - T^*y^*_{n_j}\| < \epsilon$. Así, $(T^*y^*_{n_k})$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach E^* y por tanto convergente, como queríamos probar.

Demostremos ahora la otra implicación. Tenemos que $T^* \in K(F^*, E^*)$. Aplicando la implicación ya demostrada de este teorema, se tiene que $T^{**} \in K(E^{**}, F^{**})$. Sean $\Phi_E : E \to E^{**}$ y $\Phi_F : F \to F^{**}$ las inyecciones canónicas. Para $f \in F^*$ y $x \in X$ obtenemos:

$$(T^{**}\Phi_E(x))f = \Phi_E(x)(T^*f) = (T^*f)x = f(Tx) = (\Phi_F(Tx))f.$$

Por consiguiente, $T^{**}\Phi_E(x) = \Phi_F(Tx)$. Consideremos $\Phi_F^{-1} : \Phi_F(F) \to F$. Se obtiene que, $T = \Phi_F^{-1}T^{**}\Phi_E$. Así, del quinto apartado del teorema 2.2, obtenemos que $T \in K(E, F)$. ■

2.2. La propiedad de aproximación

Existe una estrecha relación entre los operadores compactos y los operadores de rango finito, es decir, aquellos cuya imagen tiene dimensión finita. Así, en esta sección se demostrará que el límite uniforme de una sucesión de operadores de rango finito es un compacto. Esto plantea la interesante pregunta de si el recíproco es cierto. Es decir, si para todo operador compacto existe una sucesión de operadores de rango finito que converja uniformente a él. Los espacios en los que se cumple esto se dicen que tienen la propiedad de aproximación. En [5], Per Enflo demostró que no todos los espacios de Banach cumplen esta propiedad, ni siquiera los espacios de Banach separables. En esta sección, demostramos que en los espacios de Hilbert, en cambio, sí se tiene la propiedad de aproximación. Este tema será aquí tratado brevemente, pero en [11] se puede encontrar un estudio mucho más profundo del problema.

Definición 2.4. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es un operador de rango finito o que tiene rango finito si $T(X)$ tiene dimensión finita.*

Ejemplo 2.5. Todo funcional lineal y acotado es un operador de rango finito.

Teorema 2.6. *Sea $T \in L(E, F)$ un operador de rango finito. Entonces T es compacto.*

Demostración. Sea $A \subset E$ acotado. Como T es un operador acotado, entonces $T(A)$ está acotado. Ahora, como $T(E)$ tiene dimensión finita, entonces $T(A)$ es un subespacio cerrado de F y por tanto $\overline{T(A)} \subset T(E)$. Luego, $\overline{T(A)}$ es un conjunto cerrado y acotado en un espacio vectorial de dimensión finita. Por el teorema de Borel-Lebesgue 1.9, tenemos entonces que $\overline{T(A)}$ es compacto. Consecuentemente T es un operador compacto. ■

Corolario 2.7. *Sea $T \in L(E, F)$ donde E o F tienen dimensión finita. Entonces T es compacto.*

Demostración. Si E tiene dimensión finita, se tiene que $T(E)$ también, al ser T lineal. Por otro lado, si F tiene dimensión finita entonces $T(E)$ también, puesto que $T(E) \subset F$. Por tanto, aplicando el teorema anterior, T es compacto. ■

Proposición 2.8. *Sean E y F espacios normados y $T : E \to F$ un operador lineal. Si T es límite uniforme de una sucesión de operadores de rango finito entonces T es compacto.*

Demostración. Sea $(T_n) \subset L(E, F)$ una sucesión de operadores de rango finito que converge a T. Por el teorema 2.6, tenemos que todo operador de rango finito es compacto, por lo que $(T_n) \subset K(E, F)$. Además, por el sexto apartado del teorema 2.2, tenemos que $K(E, F)$ es un espacio cerrado. Por tanto, T es un operador compacto, al ser límite uniforme de una sucesión de operadores compactos. ■

Más interesante, es el siguiente resultado, que nos da una caracterización de los operadores compactos en los espacios de Hilbert.

Teorema 2.9. *Sean E un espacio normado, F un espacio de Hilbert y $T : E \to F$ un operador lineal. Entonces T es compacto si y solo si es límite uniforme de una sucesión de operadores de rango finito $T_n : E \to F$.*

Demostración. La implicación hacia la izquierda la tenemos por la proposición anterior. Demostremos el recíproco. Sea $T \in K(E, F)$ y B la bola unidad cerrada en E. Para demostrar que T es límite de una sucesión de operadores de rango finito, basta con demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un operador de rango finito T_ϵ tal que $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Como T es compacto, se sigue que $T(B)$ es relativamente compacto. Con lo cual, al ser F un espacio cerrado, se deduce del corolario 1.7 que $T(B)$ está totalmente acotado. Luego, existe $y_1, \dots, y_n$ una $\frac{\epsilon}{2}$-red finita de $T(B)$. Consideremos G el espacio generado por los y_i y $P_G : F \to G$ la proyección ortogonal de F en G. Nótese que $\|P_G\| \leq 1$, al ser P_G una proyección ortogonal en un espacio de Hilbert. Como G tiene dimensión finita, entonces el operador $J : E \to G$ definido como $J := P_G \circ T$ tiene rango finito. Tomemos ahora un $x \in B$ arbitrario y un y_j tal que $\|Tx - y_j\| < \epsilon$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tx - Jx\| &\leq \|Tx - y_j\| + \|y_j - Jx\| = \|Tx - y_j\| + \|P_G y_j - P_G Tx\| \\ &= \|Tx - y_j\| + \|P_G\| \|y_j - Tx\| \leq (1 + \|P_G\|) \|y_j - Tx\| \\ &\leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $\|T - J\| \leq \epsilon$.

■

Nótese la importancia de que F sea de Hilbert. Si no fuese el caso, no podríamos garantizar que la proyección tiene norma menor o igual a 1. Dado un subespacio de dimensión finita N en un espacio de Banach X, uno siempre puede encontrar un subespacio M tal que $M \oplus N = X$. Es decir, para cada $x \in X$ existen únicos $m \in M$ y $n \in N$ tales que $m + n = x$. De esta forma se define naturalmente un operador lineal $P_N : X \to N$ definido tal que $P_N(x) = P_N(n+m) = n$. Es más, el lema de Auerbach ([10, Proposition 1.c.3]) nos dice que P_N es un operador acotado. El problema es que la cota de la norma que nos da dicho lema viene en función de la dimensión del espacio N, concretamente, $\|P_N\| \leq dim\ (N)$. Como es fácil de comprender, esta cota nos impide realizar cálculos como los de la demostración anterior.

El siguiente resultado nos dice que en espacios de Banach con una base de Schauder también es cierto que los operadores compactos son límite de operadores de rango finito. Además, da específicamente una construcción de una sucesión de operadores de rango finito que converge a un operador compacto dado.

Teorema 2.10. *Sea $T \in K(E)$, donde E es un espacio de Banach con una base de Schauder $\{x_1, x_2, \dots\}$. Representemos cada $x \in E$ como $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$, donde $f_i \in E^*$ y consideremos $P_n x := f_1(x)x_1 + \cdots + f_n(x)x_n$. Se tiene que $\|T - P_nT\| \longrightarrow 0$. Consecuentemente, en espacios dotados de una base de Schauder todo operador compacto es límite de operadores de rango finito. Además, si $P_n^*(x^*)$ converge puntualmente a x^* para todo $x^* \in X^*$, se tiene que*

$$\|T - TP_n\| \longrightarrow 0 \ \ y \ \ \|T - P_nTP_n\| \longrightarrow 0.$$

Demostración. Como $(x_1, x_2, \dots)$ es base de Schauder, es claro que $P_n x \longrightarrow x$ para todo $x \in E$. Por tanto, $P_nTx \longrightarrow Tx$ para todo $x \in X$. Sea ahora $B \subset E$ la bola unidad cerrada. Se tiene que

$$\|T - P_nT\| = \sup\{(T - P_nT)x \ \ / \ \ \|x\| \leq 1\} = \sup\{(I - P_n)y \ \ / \ \ y \in T(B)\}.$$

Por tanto, si comprobamos que P_n converge uniformente a la identidad en $T(B)$ hemos acabado. En primer lugar, recordemos que como los P_n son proyecciones de una base de Schauder, tenemos que convergen puntualmente a la identidad. Entonces, para todo $x \in E$, se tiene que

$$\sup\{\|P_n(x)\| \ \ / \ \ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Con lo cual, debido al teorema de Banach-Steinhaus, existe un $M > 0$ tal que $\|P_n\| \leq M$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, T es un operador compacto, luego $T(B)$ es un conjunto relativamente compacto y por tanto, al ser E un espacio de Banach, $T(B)$ está totalmente acotado. Sea $\epsilon < 0$ y $\{y_1, \dots, y_r\}$

una ϵ-red de $T(B)$. Ahora, como $P_n y_j \longrightarrow y_j$, para $1 < j < r$ tenemos que para cierto $n_j \in \mathbb{N}$ se tiene que si $n > n_j$, entonces $\|P_n y_j - y_j\| < \epsilon$. Para $n > \text{máx}\{n_1, \dots, n_r\}$:

$$\begin{aligned}\|P_n y - y\| &\leq \|P_n(y - y_j)\| + \|P_n y_j - y_j\| + \|y - y_j\| \\ &\leq (1 + \|P_n\|)\|y_{yj}\| + \|P_n y_j - y_j\| \leq (2 + M)\epsilon.\end{aligned}$$

Con lo cual, P_n converge uniformemente a la identidad en $T(B)$.

Supongamos ahora que $P_n^*(x^*) \longrightarrow x^*$ para todo $x^* \in X^*$. Por el teorema de Schauder 2.3 tenemos que T^* es un operador compacto. Por tanto:

$$\|T - TP_n\| = \|(T - TP_n)^*\| = \|T^* - P_n^* T^*\| \longrightarrow 0$$

por la parte ya demostrada del teorema. Además:

$$\begin{aligned}\|T - P_n T P_n\| = \|T - P_n T P_n - P_n T + P_n T\| &\leq \|T - P_n T\| + \|P_n(T - TP_n)\| \\ &\leq \|T - P_n T\| + \|P_n\|\|T - TP_n\|\end{aligned}$$

que tiende a cero porque los $\|P_n\|$ están acotados y $\|T - P_n T\|$ y $\|T - TP_n\|$ tienden a cero. Por lo que queda demostrado. ■

2.3. Operadores que alcanzan su norma

Es bien conocida que la norma de un operador T se puede caracterizar como $\|T\| = \sup_{x \in B}\|Tx\|$, siendo B la bola unidad cerrada. Es interesante preguntarse cuándo dicho supremo es de hecho un máximo. Cuando se da el caso, se dice que T alcanza su norma. En espacios de dimensión finita es claro que todos los operadores alcanzan su norma, puesto que B será un conjunto compacto, pero como se verá más adelante esto no siempre se da. En esta sección estudiaremos la relación que existe entre los operadores compactos y los operadores que alcanzan su norma. Una parte importante de los resultados de esta sección se basan en la referencia [3].

Definición 2.11. *Sea $T \in L(E, F)$ con E y F espacios normados. Se dice que T alcanza su norma si para algún $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$ se tiene que $\|Tx\| = \|T\|$.*

Resulta trivial el hecho de que existen operadores que alcanzan la norma, siendo la identidad en E un ejemplo obvio. Es por tanto interesante comprobar si hay de hecho algún operador que no alcance su norma. El siguiente ejemplo nos indica que efectivamente es posible.

Ejemplo 2.12. Sea $\alpha = (a_n)$ una sucesión positiva real, estrictamente creciente y convergente a cierto $a \in \mathbb{R}$. Consideremos $T_\alpha : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ definida como sigue para $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$:

$$T_\alpha(x_n) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots)$$

Se tiene que $T_\alpha \in L(\ell^1(\mathbb{N}), \ell^\infty(\mathbb{N}))$ y T_α no alcanza su norma.

Demostración. Es claro que T_α es una aplicación bien definida y lineal. La continuidad se obtiene de lo siguiente. Para $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$:

$$\|T_\alpha(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|a_n x_n|) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n|x_n| \leq a\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = a\|(x_n)\|_1.$$

Con lo cual $\|T_\alpha\| \leq a$. Consideremos $e_k \in \ell^1(\mathbb{N})$ tal que e_k vale 0 en toda posición excepto la k-ésima, donde vale 1. Entonces tenemos que $\|(T_\alpha e_k)\|_\infty = a_k$. Esto significa que $\|e_k\|_1 = 1$ y $\lim_{k\to\infty}\|T_\alpha e_k\| = a$. Hemos por tanto demostrado que $\|T_\alpha\| = a$. Veamos que es imposible que alcance su norma. Sea $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ tal que $\|(x_n)\|_1 = 1$. Resulta inmediato que:

$$\|T_\alpha(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|a_n x_n|) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n|x_n| < a\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = a\|(x_n)\|_1 = a.$$

Por lo que T_α no alcanza su norma. ■

Un ejemplo no trivial de un operador que alcanza su norma es el siguiente:

Ejemplo 2.13. Consideremos el espacio normado de funciones reales $C([0,1])$ con la norma del supremo. Sea $L : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ la aplicación definida como $L(f) := \int_0^1 f(t)dt$. Se tiene que L es un operador acotado que alcanza su norma.

Demostración. En primer lugar, que L es un operador lineal se tiene de inmediato por la linealidad de la integral. Sea ahora $f \in C([0,1])$ con $\|f\| = 1$. Entonces $|f(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto $|L(f)| = |\int_0^1 f(t)dt| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1$. Por consiguiente $\|L\| \leq 1$. Consideremos $c_1 \in C([0,1])$ la función constante 1. Se tiene que $\|c_1\| = 1$ y que $|L(c_1)| = 1$. Consecuentemente, $\|L\| = 1$ y L alcanza su norma. ■

La relación entre la compacidad de un operador y el hecho de que alcance su norma es estrecha, si bien algo sutil. Por ello para introducirnos en este estudio es necesario demostrar algunos resultados sobre la convergencia débil y la reflexividad en espacios normados.

Definición 2.14 (Convergencia débil). *Sea X un espacio normado y $(x_n) \subset X$ una sucesión. Se dice que (x_n) converge débilmente a cierto $x \in X$ si, para cualquier $f \in X^*$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$. La convergencia débil se denota como $x_n \rightharpoonup x$.*

Las siguientes son propiedades básicas de la convergencia débil y se estudian en cualquier curso de análisis funcional, por lo que prescindiremos de demostrarlas.

Proposición 2.15. *Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y $(x_n) \subset X$ una sucesión. Se tiene que:*

1. Si (x_n) converge a x entonces (x_n) converge débilmente a x.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \rightharpoonup y$, entonces $x = y$.
3. Si X es de dimensión finita, entonces (x_n) converge a x si y solo si, (x_n) converge débilmente a x.
4. Si $x_n \rightharpoonup x$ y $T \in L(X,Y)$, entonces $Tx_n \rightharpoonup Tx$

Teorema 2.16. *Sea X un espacio normado y separable. Entonces toda sucesión acotada $(x_n^*) \subset X^*$ tiene una subsucesión puntualmente convergente.*

Demostración. En primer lugar, como X es separable, consideremos $(x_n) \subset X$ una sucesión densa en X. Además, como (x_n^*) está acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leq M$, para todo n natural. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de X. Como (x_n^*) está acotada, luego la sucesión $x_n^*(x_1) \subset \mathbb{K}$ está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que existe una subsucesión $(x_{n_1}^*)$ de (x_n^*) tal que $(x_{n_1}^*(x_1))$ converge. Similarmente, $(x_{n_1}^*(x_2)) \subset \mathbb{K}$ es una sucesión acotada, por lo que por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $(x_{n_2}^*)$ de $(x_{n_1}^*)$ tal que $(x_{n_2}^*(x_2))$. Nótese que al ser $(x_{n_2}^*)$ subsucesión de $(x_{n_1}^*)$ se sigue que $(x_{n_2}^*(x_1)$ también converge. Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos subsucesiones

$$(x_n^*) \supset (x_{n_1}^*) \supset (x_{n_2}^*) \supset \dots$$

tales que $(x_{n_i}^*(x_j))$ converge para $1 \leq j \leq i$. Sea ahora $x \in X$ arbitrario. Queremos ver que la sucesión $(x_{n_k}^*(x)) \subset \mathbb{K}$ converge. Para ello, demostremos que es una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Como (x_n) es denso en X, existe cierto $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_j - x\| < \frac{\epsilon}{3M}$. Por otro lado, para $r, s > j$ se tiene que $(x_{n_r}^*(x_j))$ y $(x_{n_s}^*(x_j))$ son subsucesiones de la sucesión convergente $(x_{n_j}^*(x_j))$. Por tanto, existe un $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $r, s > K_0$ entonces

$$|x_{n_r}^*(x_j) - x_{n_s}^*(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sean $p, q > max\{j, K_0\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
|x_{n_p}^*(x) - x_{n_q}^*(x)| &\leq |x_{n_p}^*(x) - x_{n_p}^*(x_j)| + |x_{n_p}^*(x_j) - x_{n_q}^*(x_j)| + |x_{n_q}^*(x) - x_{n_q}^*(x_j)| \\
&\leq \|x_{n_p}^*\|\|x - x_j\| + |x_{n_p}^*(x_j) - x_{n_q}^*(x_j)| + \|x_{n_p}^*\|\|x - x_j\| \\
&< M\frac{\epsilon}{3M} + \frac{\epsilon}{3} + M\frac{\epsilon}{3M} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $(x_{n_k}^*(x))$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $\mathbb{K}$ para todo $x \in X$ y por tanto converge.
Definamos ahora $x^* : X \to \mathbb{K}$ tal que $x^*(x) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*(x)$, para todo $x \in X$. Es claro que x^* es una aplicación bien definida y lineal. Veamos que está acotada:

$$|x^*(x)| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k}^*(x)| \leq \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}^*\|\|x\| \leq M\|x\|.$$

■

El siguiente resultado muestra que toda sucesión acotada en un espacio reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente.

Teorema 2.17. *Sea X un espacio reflexivo y $(x_n) \subset X$ una sucesión. Si $(x_n) \subset \overline{B}(0,r)$ para algún $r > 0$, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$, para algún $x \in \overline{B}(0,r)$.*

Demostración. Sea $(x_n) \subset \overline{B}(0,r)$ con $r > 0$ y consideremos $X_0 = \overline{\langle\{x_1, x_2, \dots\}\rangle}$. Como X es reflexivo y X_0 es un subespacio cerrado de X, tenemos que X_0 es también reflexivo. Sea $\Phi : X_0 \to X_0^{**}$ la inyección canónica. Entonces como Φ es un homeomorfismo lineal se sigue que $X_0^{**} = \Phi(X_0) = \Phi(\overline{\langle\{x_1, x_2, \dots\}\rangle}) = \overline{\langle\{\Phi x_1, \Phi x_2, \dots\}\rangle}$. Por consiguiente, X_0^{**} es separable. Esto implica que a su vez X_0^* es separable.

Recordemos que Φ es una isometría, luego que (x_n) sea una sucesión acotada implica que la sucesión (Φx_n) está acotada. Estamos por tanto en condiciones de aplicar el teorema anterior. Obtenemos que existe (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) tal que $\Phi(x_{n_k})$ converge puntualmente a cierto $x^{**} \in X_0^{**}$. Por ser X_0^{**} reflexivo, tenemos que $x^{**} = \Phi(x)$, para algún $x \in X_0$. Con lo cual, para cualquier $x^* \in X^*$:

$$\lim_{k\to\infty} x^*(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (\Phi x_{n_k})x^* = (\Phi x)x^* = x^*(x).$$

Es decir, la sucesión (x_{n_k}) converge débilmente a x. Ahora, para cualquier $x^* \in X^*$ es claro que $|x^*(x_{n_k})| \leq \|x^*\|\|x_{n_k}\| \leq \|x^*\|r$. Luego $|x^*(x)| = \lim_{k\to\infty} |x^*(x_{n_k})| \leq \|x^*\|r$. De aquí se obtiene finalmente que

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| \ / \ x^* \in X^* \ , \ \|x^*\| \leq 1\} \leq r.$$

■

Proposición 2.18. *Sea X un espacio reflexivo. Se tiene que todo funcional $f \in X^*$ alcanza su norma.*

Demostración. Supongamos que X es reflexivo y sea $f \in X^*$. Consideremos $B \subset X$ la bola unidad cerrada. Por definición de la norma de f, tenemos que existe una sucesión $(x_n) \subset B$ tal que $|f(x_n)| \to \|f\|$. Por el teorema anterior, tenemos que existe (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) que converge débilmente a cierto $x \in X$. Consecuentemente, por el apartado 4 de la proposición 2.15, tenemos que $f(x_{n_k}) \rightharpoonup f(x)$. Y, por el tercer apartado de la misma proposición, tenemos que $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Finalmente, por definición de (x_n), tenemos que $|f(x)| = \lim |f(x_{n_k})| = \|f\|$.

■

La anterior proposición puede extenderse al siguiente teorema, como demostró Robert C. James en [8, Theorem 5]. Sin embargo, la demostración de la implicación que resta excede los objetivos de este trabajo, así que no será presentada.

Teorema 2.19 (James). *Un espacio normado X es reflexivo si y solo si, todo funcional $f \in X^*$ alcanza su norma.*

Un resultado interesante que se obtiene de este teorema es el que sigue.

Teorema 2.20. *Sean X e Y espacios normados. Si todo operador $T \in L(X,Y)$ alcanza su norma, entonces X es reflexivo.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y $f \in X^*$. Consideramos $T : X \to Y$ definido tal que $T(x) := f(x)y$. Claramente $T \in L(X,Y)$. Luego por hipótesis tenemos que T alcanza su norma. Esto implica de inmediato que f alcanza su norma. Luego todo funcional $f \in X^*$ alcanza su norma. Por último, obtenemos del teorema de James 2.19 que X es reflexivo. ■

Proposición 2.21. *Sean X e Y espacios normados con $\dim Y < \infty$. Entonces X es reflexivo si y solo si, todo operador $T \in L(X,Y)$ alcanza su norma.*

Demostración. En primer lugar, la implicación hacia la izquierda se tiene por el teorema anterior. Veamos la implicación hacia la derecha. Sea $T \in L(X,Y)$ arbitrario y consideremos $B \subset X$ la bola unidad cerrada. Afirmo que $T(B)$ es un conjunto compacto. Sea $T(x_n) \subset T(B)$ una sucesión arbitraria con $(x_n) \subset B$. Como (x_n) está acotada y X es reflexivo, tenemos del teorema 2.17 que existe $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ que converge débilmente a cierto $x \in B$. Por tanto, del cuarto apartado de la proposición 2.15, se sigue que $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Y por el tercer apartado de la misma proposición, obtenemos que $T(x_n) \to T(x)$.
Con esto, tenemos que $T(B)$ es un compacto en Y, por lo que por el corolario 1.12, la norma alcanzaría máximo en dicho conjunto. Es decir, existe $x \in B$ tal que $\|T(x)\| = \|T\|$. ■

Teorema 2.22. *Sean X e Y espacios normados, $T \in K(X,Y)$ y $B \subset X$ la bola unidad cerrada. Si X es reflexivo entonces $T(B)$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $B \subset X$ la bola unidad cerrada. Queremos ver que $T(B)$ es compacto. Como B está acotado, tenemos que $T(B)$ es relativamente compacto por ser T compacto. Por tanto, si demostramos que $T(B)$ es cerrado hemos acabado. Sea $(Tx_n) \subset T(B)$ una sucesión tal que $Tx_n \to y$ para cierto $y \in Y$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(x_n) \subset B$. Del teorema 2.17 se obtiene que existe (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) que converge débilmente a cierto $x \in B$. Por el cuarto apartado de la proposición 2.15 tenemos que $Tx_n \rightharpoonup Tx$. Finalmente, por el primer apartado de la misma proposición, $y = Tx \in T(B)$, puesto que $Tx_n \rightharpoonup y$ y $Tx_n \rightharpoonup Tx$. ■

Corolario 2.23. *Sean X e Y espacios normados y $T \in K(X,Y)$. Si X es reflexivo, entonces T alcanza su norma.*

Demostración. La prueba es inmediata por la proposición anterior. ∎

3

Ejemplos de Operadores Compactos

En este capítulo, daremos un serie de ejemplos de operadores compactos y no compactos que consideramos ilustrativos.

3.1. Primeros ejemplos de operadores compactos

Empecemos dando unos primeros ejemplos simples de operadores compactos.

Ejemplo 3.1. Sea $T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definido tal que $T_n(x_1, x_2, \dots) := (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Entonces T_n es un operador compacto.

Demostración. Es claro que $T_n(\ell^2(\mathbb{N})) = \langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle$ donde e_i es la sucesión que vale 1 en la i-ésima posición y 0 en cualquier otro lado. Entonces, como la imagen de T_n tiene dimensión finita, tenemos por el teorema 2.6 que T es compacto. ■

Ejemplo 3.2. Sea $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Consideramos para $1 \leq p$ el operador $T_\alpha : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ definido como $T_\alpha(x_1, x_2, \dots) := (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$. Se tiene que T es un operador compacto si y solo si α converge a 0.

Demostración. Supongamos que α converge a 0. Para cada n natural, definimos el operador $T_\alpha^{(n)} : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ como $T_\alpha^{(n)}(x_1, x_2, \dots) := (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n, 0, 0, \dots)$. Se tiene que $T_\alpha^{(n)}$ es un operador de rango finito. Por la proposición 2.8 sabemos que si $T_\alpha^{(n)}$ converge uniformemente a T_α, entonces T_α es un operador compacto.
Sea $\epsilon > 0$. Como α converge a 0 existe un N natural tal que $|\alpha_n| < \epsilon$ si $n > N$. Entonces, para $x = (x_k) \in \ell^p(\mathbb{N})$ arbitrario y $n > N$ tenemos que

$$\|T_\alpha x - T_\alpha^{(n)} x\| = \|(0, \dots, 0, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \alpha_{n+2} x_{n+2} \dots)\| \leq \|(\epsilon x_1, \epsilon x_2, \dots)\| = \epsilon \|x\|.$$

Por consiguiente, $\|T_\alpha - T_\alpha^{(n)}\| \leq \epsilon$, es decir, $T_\alpha^{(n)}$ converge a T_α.

Supongamos ahora que α no converge a 0. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ para el cual hay una sucesión de índices $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_{n_k}| > \epsilon_0$. Consideremos la sucesión $x^{(k)} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ definida como $x^{(k)} = e_{n_k}$. Se sigue que:

$$\|T_\alpha x^{(r)} - T_\alpha x^{(s)}\| = \|T_\alpha e_{n_r} - T_\alpha e_{n_s}\| = \|\alpha_{n_r} e_{n_r} - \alpha_{n_s} e_{n_s}\| = |\alpha_{n_s}| + |\alpha_{n_r}| \geq 2\epsilon_0 -$$

Por lo tanto, $(T_\alpha x^{(k)})$ no tiene subsucesiones convergentes, al ser $\epsilon_0 > 0$. Consecuentemente, como $(x^{(k)}$ es una sucesión acotada, T_α no es compacto. ■

Ejemplo 3.3. Sea $\alpha = (\alpha_n)$ una sucesión que converge a cero y $p \geq 1$. Entonces los operadores $R_\alpha, L_\alpha \in L(\ell^p(\mathbb{N}))$ definidos de la siguiente como
$L_\alpha(x_1, x_2, \dots,) := (\alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots)$ y $R_\alpha(x_1, x_2, \dots,) := (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$ son compactos.

Demostración. Sea T_α el operador definido en el ejemplo anterior. Sean $R, L \in L(\ell^p(\mathbb{N}))$ los operadores definidos como $R(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ y
$L(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$. Se tiene que $R_\alpha = RT_\alpha$ y que $L_\alpha = LT_\alpha$. Del ejemplo anterior obtenemos que T_α es un operador compacto. Por tanto, por el quinto apartado de la proposición 2.2, tenemos que R_α y L_α son operadores compactos. ■

3.2. Ejemplos de operadores no compactos

Si bien nos es útil conocer algunos operadores compactos, igual de conveniente es tener ejemplos de operadores que no son compactos.

Ejemplo 3.4. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Entonces la identidad $I_E : E \to E$ no es un operador compacto.

Demostración. Por el primer apartado del teorema 2.2, tenemos que si existe algún conjunto acotado en E cuya imagen por I_E no es relativamente compacta, entonces I_E no es compacto. Consideremos B la bola unidad cerrada. Tenemos que $\overline{I_E(B)} = \overline{B} = B$, lo cual no es un conjunto compacto puesto que la dimensión de E no es finita. Por tanto, $I_E(B)$ no es relativamente compacto y I_E no es un operador compacto. ■

Una consecuencia interesante de este ejemplo, es que la sucesión de los T_n definida en el ejemplo 3.1 no converge en norma puesto que la identidad en $\ell^2(\mathbb{N})$ no es compacta.

Ejemplo 3.5. Sea $M_t : C([0,1]) \to C([0,1])$ definido como $M_t f(t) := tf(t)$. Considerando la norma del máximo en $C([0,1])$, se tiene que es un operador acotado pero no es compacto.

Demostración. Claramente M_t es un operador acotado. Para ver que no es compacto pensemos en la sucesión $(f_n) \in C([0,1])$ definida como $f_n(t) := t^n$. Se tiene que $\|f_n\| = 1$ para todo n y que $M_t f_n(t) = t^{n+1}$. Luego, $(M_t f_n)$ converge puntualmente a la función f definida como $f(t) := 0$, si $0 \leq t < 1$ y $f(1) := 1$. Consideremos $(M_t f_{n_k})$ una subsucesión cualquiera. Como $(M_t f_n)$ converge puntualmente a la función f, entonces $(M_t f_{n_k})$ también converge puntualmente a f. Pero una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función discontinua no tiene límite uniforme. Por tanto, $(M_t f_n)$ no tiene subsucesiones convergentes. Como (f_n) es una sucesión acotada, se sigue que M_t no es un operador compacto. ■

Ejemplo 3.6. Sea $p \geq 1$. Los operadores $R, L \in L(\ell^p(\mathbb{N}))$ definidos como $R(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ y $L(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ no son compactos.

Demostración. Supongamos que R o L es un operador compacto. Por el quinto apartado del teorema 2.2, tenemos que $LR = I$ es un operador compacto. Pero esto contradice el ejemplo 3.4. Por consiguiente, ni R ni L son operadores compactos. ■

3.3. Operador integral de Fredholm

Los operadores integrales de Fredholm son una familia de operadores que suele encontrarse en el estudio de ecuaciones integrales y muy relacionada con la historia de los mismos. Una propiedad importante de estos operadores es que son operadores compactos.

Definición 3.7 (Operador Integral de Fredholm). *Sea k una función continua definida en $[a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Se denomina el operador integral de Fredholm de núcleo k en $C_{\mathbb{C}}([a,b])$ a la aplicación $K : C_{\mathbb{C}}([a,b]) \to C_{\mathbb{C}}([a,b])$ donde*

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s,t) f(t) dt.$$

Ejemplo 3.8. Todo operador integral de Fredholm en $C_{\mathbb{C}}([a,b])$ es compacto.

Demostración. Una prueba de que K es efectivamente un operador lineal y acotado puede encontrarse en [2, Theorem 6.1.4]. Veamos que es un operador compacto:
Sea K un operador integral de Fredholm en $C_{\mathbb{C}}([a,b])$ y k su núcleo. Consideremos B la bola unidad cerrada en $C_{\mathbb{C}}([a,b])$. Queremos demostrar que $K(B)$ es relativamente compacto, por lo que por el teorema 2.2 obtendremos que K es un operador compacto. Para demostrar esto haremos uso del teorema de Ascoli-Arzelà 1.18. En primer lugar, como K es un operador acotado, tenemos que

$K(B)$ está acotado. Falta comprobar que es equicontinuo.
Sea $f \in B$ y $\epsilon > 0$. Como $[a, b] \times [a, b]$ es compacto, tenemos que k es uniformemente continua. Luego, existe $\delta > 0$ para el cual, para todo $s_1, s_2 \in [a, b]$ tales que $|s_1 - s_2| < \delta$ y para cualquier $t \in [a, b]$ se tiene que $|k(s_1, t) - k(s_2, t)| < \epsilon(b - a)^{-1}$. Por tanto, para $s_1, s_2 \in [a, b]$ tales que $|s_1 - s_2| < \delta$:

$$\begin{aligned} |(Kf)(s_1) - (Kf)(s_2)| &= \left| \int_a^b k(s_1, t)f(t) - k(s_2, t)f(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |(k(s_1, t) - k(s_2, t))| \, |f(t)| \, dt < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $K(B)$ es equicontinuo. ■

3.4. Operadores con potencia compacta

Vimos en el teorema 2.2 que al componer cualquier operador con un operador compacto, el operador resultante es también compacto. Es importante saber que el recíproco no es cierto. Es decir, aunque tengamos $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$ y $C \in K(E, G)$ tales $BA = C$ esto no significa que A o B tengan que ser operadores compactos. Un ejemplo de este hecho es el siguiente.

Ejemplo 3.9. Sea m un natural y $p \geq 1$. Sea $\alpha = (\alpha_n)$ la sucesión que vale $\alpha_n = 0$ si $n \equiv 0 \pmod{m}$ y $\alpha_n = 1$ en otro caso. Sea $L, T_\alpha \in L(\ell^p(\mathbb{N}))$ definidos como en los ejemplos 3.6 y 3.2 respectivamente. Considérese $S := LT$. Entonces se tiene que el operador S^k no es compacto para $1 \leq k < m$ pero S^m es compacto.

Demostración. En primer lugar, visualicemos cómo actúan las potencias del operador S.

$$\begin{aligned} &Sx = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \dots) \\ &S^2 x = (\alpha_1 \alpha_2 x_3, \alpha_2 \alpha_3 x_4, \dots) \\ &\vdots \\ &S^m x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n x_{m+1}, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m+1} x_{m+2}, \dots) = (0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Siendo la última igualdad cierta porque en $\alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+m}$ tiene que haber algún múltiplo de m independientemente de k. Por tanto, $S^m = 0 \in K(\ell^p(\mathbb{N}))$.
Veamos que las potencias anteriores no son compactas. Sea $1 \leq k < m$ y considérese $(e_{mn+k})_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ donde e_n es la sucesión que vale 1 en la posición n-ésima y 0 en el resto. Se tiene que (e_{mn+k}) es una sucesión acotada. Además, $Se_{mn+k} = \alpha_{mn+k} e_{mn+k-1}$. Luego, $S^k e_{mn+k} = \alpha_{mn+1} \dots \alpha_{mn+k} e_{mn}$. Por lo tanto, $(S^k e_{mn+k})$ no tiene subsucesiones convergentes y por tanto S^k no es un operador compacto. ■

4

Teoría Espectral de los Operadores Compactos

Este capítulo trata algunas importantes propiedades espectrales de los operadores compactos. En primer lugar, dado un operador $T \in K(E)$, se tratarán las propiedades de los subespacios $\mathcal{N}(I-T)$ y $\mathcal{R}(I-T)$ y otros subespacios asociados. Después se especificará como es el espectro de un operador compacto en un espacio de dimensión infinita, resaltando el hecho de que este es siempre o un número finito de puntos que incluye al 0 o es el propio 0 junto a una sucesión de puntos que converge a 0. También se verá una aplicación práctica de los resultados del trabajo mediante la resolución de un problema numérico. Más adelante, se hallará la distancia de los operadores compactos a los operadores de traslación, por motivos que serán expuestos más adelante. Finalmente, veremos que los operadores compactos proporcionan una respuesta parcial al conocido problema del subespacio invariante.

4.1. Teoría de Riesz-Schauder

Es sabido que si $T \in L(E)$, entonces $\mathcal{N}(I-T)$ es un subespacio cerrado de E y $\mathcal{R}(I-T)$ es un subespacio vectorial. Sin embargo, si T es un operador compacto, podemos garantizar unas propiedades mucho más interesantes para estos espacios. A lo largo de esta sección, E será un espacio normado de dimensión infinita sobre $\mathbb{K}$ y T será un operador compacto en E. Además, denotaremos $\mathcal{N}_n := \mathcal{N}(I-T)^n$ y $\mathcal{R}_n := \mathcal{R}(I-T)^n$, donde $\mathcal{N}(I-T)^n$ es el núcleo del operador $(I-T)^n$ y $\mathcal{R}(I-T)^n$ su imagen.

Lema 4.1. *El conjunto $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(I-T)$ es un subespacio vectorial cerrado de dimensión finita de E.*

Demostración. En primer lugar, como $\mathcal{N}_1 = (I-T)^{-1}(\{0\})$ e $I-T$ es continua, se tiene que $\mathcal{N}_1$ es cerrado. Consideremos B la bola unidad cerrada en el espacio

$\mathcal{N}_1$. Pretendemos demostrar que B es un conjunto compacto en $\mathcal{N}_1$ y, por el teorema de Riesz 1.11, tendríamos que $\mathcal{N}_1$ es finito dimensional.
Sea $(x_n) \subset B$ una sucesión cualquiera. Como $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(I-T) = \{x \in E \ / \ x = Tx\}$, entonces tenemos que $x_n = Tx_n$, para todo n natural. Pero como T es un operador compacto y (x_n) es una sucesión acotada, tenemos que $(Tx_n) = (x_n)$ tiene una subsucesión convergente (x_{n_k}) en el conjunto cerrado B. Luego el límite a su vez pertenece a B. ■

Lema 4.2. *Sea $M \subset E$ un subespacio cerrado tal que $M \cap \mathcal{N}_1 = \{0\}$. Entonces $(I-T)|_M$ tiene inversa acotada.*

Demostración. En primer lugar, como $M \cap \mathcal{N}_1 = \{0\}$, entonces tenemos que $\mathcal{N}((I-T)|_M) = \{0\}$. Esto implica que $(I-T)|_M : M \to (I-T)M$ es un operador biyectivo y, por tanto, tiene un operador inverso.
Por reducción al absurdo, supongamos que el inverso de $(I-T)|_M$ no está acotado. Entonces existe una sucesión $(x_n) \subset M$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $(I-T)x_n \to 0$. Como T es compacto y (x_n) es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión (Tx_{n_k}) convergente. Sea x el límite de tal sucesión. Ahora, $x_{n_k} = Tx_{n_k} + (I-T)x_{n_k}$, luego $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} + \lim_{k\to\infty}(I-T)x_{n_k} = x$. Consecuentemente, como $(x_{n_k}) \subset M$ y M es cerrado, entonces $x \in M$. Tenemos a su vez que $0 = \lim_{k\to\infty}(I-T)x_{n_k} = (I-T)x$, así que $x \in \mathcal{N}_1$. Por tanto $x \in M \cap \mathcal{N}_1 = \{0\}$. Pero $\|x\| = \lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}\| = 1 \neq 0$, lo cual es absurdo. ■

Lema 4.3. *El espacio $\mathcal{R}_1$ es cerrado.*

Demostración. Sea $(y_n) \subset \mathcal{R}_1$ una sucesión convergente a cierto $y \in E$. Aplicando el lema anterior, obtenemos que para cierto $M > 0$ se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $(I-T)x_n = y_n$ y $\|x_n\| \leq M\|y_n\|$. Como (y_n) es convergente, entonces es una sucesión acotada. Esto implica que (x_n) también lo es. Consecuentemente (Tx_n) tiene una subsucesión convergente (Tx_{n_k}) ya que T es compacto. Como $x_n = y_n + Tx_n$, la sucesión (x_{n_k}) también converge. Sea x el límite de (x_{n_k}). Entonces $(I-T)x = \lim_{k\to\infty}(I-T)x_{n_k} = y$, lo que demuestra que $y \in \mathcal{R}_1$. ■

El siguiente lema será de utilidad para generalizar los lemas 4.2 y 4.3 a $\mathcal{R}_n$ y $\mathcal{N}_n$.

Lema 4.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(I-T)^n = I - S_n$, donde S_n es un operador compacto en E.*

Demostración. Aplicando el binomio de Newton:

$$(I-T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}(-T)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-T)^n =$$
$$= I - T\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-T)^{k-1} = I - S_n.$$

Donde, como T es compacto,entonces $S_n = T\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-T)^{k-1}$ es compacto. ■

Teorema 4.5. *Los espacios $\mathcal{N}_n$ son subespacios cerrados de dimensión finita de E y existe un número natural v para el que se tiene lo siguiente:*

1. $\mathcal{N}_{n-1} \subsetneq \mathcal{N}_n$ *para* $n = 0, 1, \ldots, v$
2. $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+1}$ *para* $n = v, v+1, \ldots$

Demostración. Del lema 4.1 y de la demostración del lema 4.4 se obtiene que $\mathcal{N}_n$ es cerrado y de dimensión finita para todo n. Es inmediato que $\mathcal{N}_{n-1} \subset \mathcal{N}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para todo n tenemos que $\mathcal{N}_n \neq \mathcal{N}_{n+1}$. Entonces por el lema de Riesz 1.10 para cada n podemos tomar un $x_n \in \mathcal{N}_{n+1}$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $d(x_n, \mathcal{N}_n) \geq \frac{1}{2}$. Claramente (x_n) es una sucesión acotada, luego (Tx_n) tiene una subsucesión convergente. Para $\ell > m$

$$\|Tx_\ell - Tx_m\| = \|x_\ell - ((I-T)x_\ell + x_m - (I-T)x_m)\| \geq \frac{1}{2},$$

puesto que $(I-T)x_\ell + x_m - (I-T)x_m \in \mathcal{N}_\ell$ y que $\mathcal{N}_{n-1} \subset \mathcal{N}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto indica que (Tx_n) no tiene subsucesiones convergentes, lo que es absurdo. Por tanto para algún natural u se tiene que $\mathcal{N}_u = \mathcal{N}_{u+1}$. Sea v el menor de tales naturales. Veamos que si $\mathcal{N}_u = \mathcal{N}_{u+1}$ entonces $\mathcal{N}_{u+1} = \mathcal{N}_{u+2}$ y por tanto, se tendría que para todos los naturales mayores que v. Sea $x \in \mathcal{N}_{u+2}$. Entonces $(I-T)x \in \mathcal{N}_{u+1} = \mathcal{N}_u$. Por tanto $(I-T)^u(I-T)x = (I-T)^{u+1}x = 0$, luego $x \in \mathcal{N}_{u+1}$. Esto significa que $\mathcal{N}_{u+2} \subset \mathcal{N}_{u+1}$. Por tanto, como ya sabíamos que $\mathcal{N}_{u+1} \subset \mathcal{N}_{u+2}$, entonces $\mathcal{N}_{u+1} = \mathcal{N}_{u+2}$. ■

Teorema 4.6. *Los espacios $\mathcal{R}_n$ son subespacios cerrados de E y existe un número natural w para el que se tiene lo siguiente:*

1. $\mathcal{R}_{n-1} \supsetneq \mathcal{R}_n$ *para* $n = 0, 1, \ldots, w$
2. $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1}$ *para* $n = w, w+1, \ldots$

Demostración. Del lema 4.3 y de la demostración lema 4.4 se obtiene que $\mathcal{R}_n$ es cerrado para todo n. Supongamos que para todo n se tiene que $\mathcal{R}_n \neq \mathcal{R}_{n+1}$. Es inmediato que $\mathcal{R}_{n-1} \supset \mathcal{R}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el lema 1.10 para cada n podemos tomar un $x_n \in \mathcal{R}_n$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $d(x_n, \mathcal{R}_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Claramente (x_n) es una sucesión acotada, luego (Tx_n) tiene una subsucesión convergente. Para $\ell > m$

$$\|Tx_\ell - Tx_m\| = \|x_\ell - ((I-T)x_\ell + x_m - (I-T)x_m)\| \geq \frac{1}{2},$$

puesto que $(I-T)x_\ell + x_m - (I-T)x_m \in \mathcal{R}_m$ y que $\mathcal{R}_{n-1} \supset \mathcal{R}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto indica que (Tx_n) no tiene subsucesiones convergentes, lo que es absurdo. Por tanto para algún natural u se tiene que $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_{u+1}$. Sea w el menor de tales naturales. Puesto que $\mathcal{R}_{u+1} = (I-T)(\mathcal{R}_u)$, se tiene de inmediato que si se tiene para w se tiene todos los naturales mayores que él. ■

Teorema 4.7. *Sea w el natural referido en el teorema 4.6. Entonces se tiene que:*

1. $\mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w = E$.
2. $T(\mathcal{N}_w) \subset \mathcal{N}_w$ *y* $T(\mathcal{R}_w) \subset \mathcal{R}_w$.
3. $(I-T)|_{\mathcal{R}_w}$ *tiene inversa acotada.*
4. *Los números v y w de los teoremas 4.5 y 4.6 son iguales.*

Demostración. 1. Sea $x \in E$. Por el teorema 4.6 tenemos que $\mathcal{R}_w = \mathcal{R}_{2w}$. Entonces para cierto $y \in E$:

$$(I-T)^w x = (I-T)^{2w} y.$$

Luego $(I-T)^w(x-(I-T)^w y) = 0$ y por tanto $(x-(I-T)^w y) \in \mathcal{N}_w$. De aquí obtenemos que $x = (x-(I-T)^w y) + (I-T)^w y \in \mathcal{N}_w + \mathcal{R}_w$.
Supongamos por reducción al absurdo que existe $z \in \mathcal{N}_w \cap \mathcal{R}_w$ tal que $z \neq 0$. Del teorema 4.6 obtenemos que para todo $m \geq w$ se tiene que $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_w$, luego $z = (I-T)^m u_m$, para algún $u_m \in E$. Por tanto, como $z \neq 0$ y $z \in \mathcal{N}_w$, tenemos que $u_m \in \mathcal{N}_{w+m}$ y que $u_m \notin \mathcal{N}_m$. Esto contradice al teorema 4.5, por lo que tenemos un absurdo y consecuentemente $\mathcal{N}_w \cap \mathcal{R}_w = \{0\}$.

2. Por un lado, si $w = 0$ se tiene que $T(\mathcal{N}_w) = T(\{0\}) = 0 \subset \mathcal{N}_w$. Por otro lado, si $w > 0$, entonces

$$(I-T)(\mathcal{N}_w) \subset \mathcal{N}_{w-1} \subset \mathcal{N}_w.$$

Por lo que

$$T(\mathcal{N}_w) \subset \mathcal{N}_w + (I-T)\mathcal{N}_w \subset \mathcal{N}_w.$$

Demostrar que $T(\mathcal{R}_w) \subset \mathcal{R}_w$ es similar, puesto que el teorema 4.6 implica que $(I-T)\mathcal{R}_w = \mathcal{R}_w$. Por consiguiente

$$T(\mathcal{R}_w) \subset \mathcal{R}_w + (I-T)\mathcal{R}_w \subset \mathcal{R}_w.$$

3. Debido a que $\mathcal{N}_w \cap \mathcal{R}_w = \{0\}$, tenemos que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{R}_w = \{0\}$. Entonces, obtenemos del lema 4.2, que $(I-T)|_{\mathcal{R}_w}$ tiene inversa acotada.

4. Sea $x \in \mathcal{N}_{w+1}$. Por el primer apartado de este teorema, tenemos que $x = y+z$, para ciertos $y \in \mathcal{N}_w$ y $z \in \mathcal{R}_w$. Se tiene que:

$$0 = (I-T)^{w+1}(x-y) = (I-T)^{w+1} z = ((I-T)|_{\mathcal{R}_w})^{w+1} z.$$

Resultando la última igualdad del teorema 4.6. Como el apartado anterior nos dice que $(I-T)|_{\mathcal{R}_w}$ tiene inversa acotada, entonces es inyectiva. Consecuentemente tenemos que $z = 0$. Por tanto, $x = y \in \mathcal{N}_w$. Esto significa que

$\mathcal{N}_w = \mathcal{N}_{w+1}$ y por el teorema 4.5 que $v \leq w$.
Por otro lado, gracias de nuevo al primer apartado, a las definiciones de v y w y a que ya sabemos que $v \leq w$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_v &= (I-T)^v(E) = (I-T)^v(\mathcal{N}_w) + (I-T)^v(\mathcal{R}_w) \\ &= (I-T)^v(\mathcal{N}_v) + (I-T)^v(\mathcal{R}_w) = \{0\} + \mathcal{R}_{w+v} \\ &= \mathcal{R}_w.\end{aligned}$$

Por lo que por el teorema 4.6 se tiene que $v = w$.

■

Los siguientes son resultados bien conocidos de cualquier curso de álgebra lineal, por lo que prescindiremos de la prueba.

Teorema 4.8. *Sea F un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y M un subespacio de F. La relación $\sim_M$ en F definida como $x \sim_M y$ si y solo si $x-y \in M$ es de equivalencia. Además, el conjunto cociente resultante $F/\sim_M$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las siguientes operaciones:*

- *$cl(x) + cl(y) = cl(x+y)$, para todo $cl(x), cl(y) \in F/\sim_M$.*
- *$k * cl(x) = cl(kx)$, para todo $cl(x) \in F/\sim_M$ y para todo $k \in \mathbb{K}$.*

Donde $cl(x)$ denota la clase de equivalencia de $x \in X$.

Definición 4.9 (Espacio cociente). *Sea F un espacio vectorial y M un subespacio de F. Al conjunto cociente $F/\sim_M$ se llama* espacio cociente de M en F *y se denota como F/M. A las clases de equivalencia $cl(x)$ se las denota como $x + M$.*

Definición 4.10 (Codimensión). *Sea F un espacio vectorial y M un subespacio de F. Se dice que M* tiene codimensión finita *si existe $N \subset F$ subespacio de dimensión finita tal que $F = M \oplus N$. A la dimensión de N, se le llama* codimensión *de M y se denota como $codimM$.*

Lema 4.11. *Sean F un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S : F \to F$ una aplicación lineal. Si F tiene dimensión finita, entonces*

$$F = \mathcal{N}(S) \oplus \mathcal{R}(S).$$

Consecuentemente $dim\ F = dim\ \mathcal{N}(S) + dim\ \mathcal{R}(S)$.

Lema 4.12. *Sea F un espacio vectorial y M un subespacio de F. Se tiene que M tiene codimensión n si y solo si $dim\ (F/M) = n$.*

Proposición 4.13. *Sea F un espacio vectorial finito dimensional y S una aplicación lineal en F. Entonces $codim\ \mathcal{R}(S) = dim\ \mathcal{N}(S)$.*

Teorema 4.14. *Para todo natural n, se tiene que $E = \mathcal{N}_n \oplus \mathcal{R}_n$. Consecuentemente, la codimensión de $\mathcal{R}_n$ es finita y coincide con la dimensión de $\mathcal{N}_n$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y w el número usado en el teorema 4.6. Por los teoremas 4.7 y 4.5, tenemos que $E = \mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w$ y que $(I-T)^n \mathcal{N}_w \subset \mathcal{N}_w$. Por lo tanto:

$$\mathcal{R}_n = (I-T)^n E = (I-T)^n(\mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w) = (I-T)^n \mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w. \tag{4.1}$$

Por el teorema 4.1, tenemos que la dimensión de $\mathcal{N}_w$ es finita. Además, sabemos que

$$\mathcal{N}((I-T)^n|_{\mathcal{N}_w}) = \mathcal{N}((I-T)^n) = \mathcal{N}_n,$$

puesto que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_w$. Por el lema 4.11 y la igualdad (4.1) se obtiene que:

$$\begin{aligned} E = \mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w &= \mathcal{N}((I-T)^n|_{\mathcal{N}_w}) \oplus \mathcal{R}((I-T)^n|_{\mathcal{N}_w}) \oplus \mathcal{R}_w \\ &= \mathcal{N}_n \oplus (I-T)^n \mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w = \mathcal{N}_n \oplus \mathcal{R}_n. \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{R}_n$ tiene codimensión finita y *codim* $\mathcal{R}_n =$ *dim* $\mathcal{N}_n$.

■

Definición 4.15 (Espacio anulador). *Sea F un espacio normado, X un subespacio de F e Y un subespacio de F^*. Se define:*

1. *El* espacio anulador *de X como $X^\perp := \{x^* \in F^* \ / \ \forall x \in X,\ x^*(x) = 0\}$.*
2. *El* espacio anulador *de Y como $Y_\perp := \{x \in F \ / \ \forall x^* \in Y,\ x^*(x) = 0\}$.*

Nótese que de la definición se obtiene que $X^\perp$ e $Y_\perp$ son espacios subespacios vectoriales cerrados de X^* y de X, respectivamente. Además $Y \subset (Y_\perp)^\perp$ y $X \subset (X^\perp)_\perp$.

Teorema 4.16. *Sea M un subespacio de un espacio normado E. Entonces existen isometrías lineales $J_1 : E^*/M^\perp \to M^*$ y $J_2 : (E/M)^* \to M^\perp$ definidas como siguen:*

- *$(J_1(x^* + M^\perp))x := x^*(x)$, para $x^* \in X^*$ y $x \in M$.*
- *$(J_2(z^*))x := z^*(x + M)$, para $z^* \in (E/M)*$ y $x \in E$.*

No consideramos la demostración de este teorema especialmente interesante para este trabajo, por lo que no será presentada en el mismo. De todas formas, puede encontrarse una demostración en [2, Theorem 5.4.4, Theorem 5.4.5].

Lema 4.17. *Sea E un espacio normado y $f \in L(E)$. Entonces $\mathcal{R}(f)^\perp = \mathcal{N}(f^*)$ y $\mathcal{R}(f^*)_\perp = \mathcal{N}(f)$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathcal{R}(f)^{\perp} = \mathcal{N}(f^*)$. Es claro que:

$$\begin{aligned} x^* \in \mathcal{R}(f)^{\perp} &\iff x^*(y) = 0,\ \forall y \in \mathcal{R}(f) \\ &\iff (f^*x^*)x = x^*(fx) = 0,\ \forall x \in E \iff x^* \in \mathcal{N}(f^*). \end{aligned}$$

La demostración de la otra igualdad se realiza de manera similar. ■

Teorema 4.18. *Los espacios $\mathcal{N}(I-T)$ y $\mathcal{N}(I-T^*)$ tienen la misma dimensión.*

Demostración.

$$\begin{aligned} dim\ \mathcal{N}(I-T) &= codim\ \mathcal{R}(I-T), \text{por el teorema } \textbf{??}, \\ &= dim\ E/\mathcal{N}(I-T), \text{por el lema } 4.12, \\ &= dim\ (E/\mathcal{N}(I-T))^*, \text{por ser de dimensión finita}, \\ &= dim\ \mathcal{R}(I-T)^{\perp}, \text{por el teorema } 4.16, \\ &= dim\ \mathcal{N}(I-T^*), \text{por el lema anterior}. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.19. *Sea E un espacio normado y $T \in K(E)$. Se tiene que $\mathcal{N}(I-T)^{\perp} = \mathcal{R}(I-T^*)$ y que $\mathcal{N}(I-T^*)_{\perp} = \mathcal{R}(I-T)$.*

Demostración. Que $\mathcal{N}(I-T^*)_{\perp} = \mathcal{R}(I-T)$ se obtiene por el lema 4.17. Demostremos la otra igualdad. Del mismo lema, obtenemos que $\mathcal{N}(I-T) = \mathcal{R}(I-T^*)_{\perp}$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(I-T^*) \subset (\mathcal{R}(I-T^*)_{\perp})^{\perp} = \mathcal{N}(I-T)^{\perp}$. Falta comprobar que $\mathcal{N}(I-T)^{\perp} \subset \mathcal{R}(I-T^*)$. En primer lugar:

$$\begin{aligned} dim\ E^*/\mathcal{R}(I-T^*) &= codim\ \mathcal{R}(I-T^*), \text{por el lema } 4.12, \\ &= dim\ \mathcal{N}(I-T^*), \text{por el teorema } \textbf{??}, \\ &= dim\ \mathcal{N}(I-T), \text{por el teorema } 4.18 \\ &= dim\ (\mathcal{N}(I-T))^*, \text{por ser de dimensión finita}, \\ &= dim\ E^*/\mathcal{N}(I-T)^{\perp}, \text{por el teorema } 4.16. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $S : E^*/\mathcal{R}(I-T^*) \to E^*/\mathcal{N}(I-T)^{\perp}$ definida como $S(x^* + \mathcal{R}(I-T^*)) := x^* + \mathcal{N}(I-T)^{\perp}$. Como $\mathcal{R}(I-T^*) \subset \mathcal{N}(I-T)^{\perp}$ tenemos que S es una aplicación bien definida, y es inmediato comprobar que es lineal y sobreyectiva. Ahora, una aplicación lineal y sobreyectiva definida entre dos espacios de dimensión finita que además coinciden en dimensión es necesariamente inyectiva. Con lo cual $\mathcal{N}(S) = \{0\}$. Sea ahora $x^* \in \mathcal{N}(I-T)^{\perp}$. Entonces $S(x^* + \mathcal{R}(I-T^*)) = x^* + \mathcal{N}(I-T)^{\perp} = 0$. Luego $x^* + \mathcal{R}(I-T^*) \in \mathcal{N}(S) = \{0\}$. Consecuentemente obtenemos que $x^* \in \mathcal{R}(I-T^*)$ y que por tanto $\mathcal{N}(I-T)^{\perp} \subset \mathcal{R}(I-T^*)$. ■

4.2. Espectro de un operador compacto

El espectro de un operador es un conjunto que guarda una intensa relación con las propiedades del mismo. Siendo así, se puede esperar que la compacidad del operador se refleje de algún modo en el espectro. Efectivamente, en esta sección demostraremos que el espectro de un operador compacto (en en espacio de dimensión infinita) es un conjunto que contiene al 0 y el resto de elementos son un conjunto finito de autovalores o forman una sucesión de autovalores que converge a 0.

Definición 4.20. *Sea E un espacio normado complejo y $T \in L(E)$. Se define al* conjunto resolvente *de T, $\rho(T)$, como el conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el operador $T - \lambda$ tiene inversa continua y el espacio imagen denso es en E. A los elementos de $\rho(T)$ se les llama* puntos regulares.

Se define el espectro *de T, $\sigma(T)$, como el conjunto números complejos que no pertenecen a $\rho(T)$. A los elementos de $\sigma(T)$ se les conoce como* puntos espectrales *de T. Además, se dice que un $\lambda \in \mathbb{C}$ es un* autovalor *de T si no existe el operador $(T - \lambda)^{-1}$. Si λ es un autovalor de T, al espacio $\mathcal{N}(T - \lambda)$ se le conoce como* autoespacio *asociado a λ y a sus elementos se les llama* autovectores *asociados a λ. Es obvio que si λ es un autovalor de T entonces $\lambda \in \sigma(T)$.*

Teorema 4.21. *Sea E un espacio normado complejo y $T \in L(E)$. Entonces $\sigma(T)$ es un conjunto compacto no vacío.*

Este es un resultado bien conocido y no escribiremos aquí la prueba. Dicha demostración se puede encontrar en [16, Theorem V.3.1, Theorem V.3.2].

Lema 4.22. *Sea E un espacio normado de dimensión infinita y $T \in K(E)$. Entonces $0 \in \sigma(T)$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $0 \in \rho(T)$. Entonces T es un operador con inversa continua. Es decir, $I = T^{-1}T$. Por el segundo apartado del teorema 2.2, tenemos entonces que I es un operador compacto. Pero esto contradice el resultado obtenido en el ejemplo 3.4. Por tanto, $0 \in \sigma(T)$.

Teorema 4.23. *Sea E un espacio normado complejo de dimensión infinita y $T \in K(E)$. Si $\lambda \neq 0$ es un punto espectral de T, entonces es un autovalor.*

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ no es un autovalor de T. Entonces el operador $\lambda - T$ es inyectivo. Es decir, $\mathcal{N}(\lambda - T) = \mathcal{N}(I - \lambda^{-1}T) = \{0\}$. Ahora bien, $\lambda^{-1}T$ es un operador compacto y por tanto podemos aplicar el teorema 4.7. Esto implica que

$$(I - \lambda^{-1}T)|_{\mathcal{R}(I-\lambda^{-1}T)} = (I - \lambda^{-1}T)|_E = I - \lambda^{-1}T$$

tiene inversa acotada. Consecuentemente, $\lambda(I - \lambda^{-1}T) = \lambda - T$ también tiene inversa acotada. Por tanto $\lambda \notin \sigma(T)$. ■

Corolario 4.24. *Sea E un espacio normado complejo de dimensión infinita y $T \in K(E)$. Entonces T y T^* tienen los mismos autovalores no nulos y los autoespacios asociados a un mismo autovalor tienen la misma dimensión.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Por el teorema anterior, λ es un autovalor si $\lambda - T = I - \lambda^{-1}T$ no es inyectiva. Es decir, si $dim \mathcal{N}(I - \lambda^{-1}T) \neq 0$. Aplicando el teorema 4.18 al operador $\lambda^{-1}T$, tenemos que

$$dim\, \mathcal{N}(I - \lambda^{-1}T) = dim\, \mathcal{N}(I - \lambda^{-1}T^*) = dim\, \mathcal{N}(I - T^*).$$

Por tanto λ es autovalor de T si y solo si también lo es de T^*. Se tiene además que los respectivos autoespacios tienen la misma dimensión. ■

El siguiente teorema (y el correspondiente corolario) nos escribir dividir el espacio normado E en una suma directa de espacios profundamente relacionados con el espectro del operador.

Teorema 4.25. *Sea E un espacio normado complejo de dimensión infinita, $T \in K(E)$ y λ un autovalor no nulo de T. Sea w el natural referido en el teorema 4.7 para el operador compacto $\lambda^{-1}T$ y denotemos $\mathcal{N}_n := \mathcal{N}(I - \lambda^{-1}T)^n$ y $\mathcal{R}_n := \mathcal{R}(I - \lambda^{-1}T)^n$. Entonces $T|_{\mathcal{N}_w} : \mathcal{N}_w \to \mathcal{N}_w$ y $T|_{\mathcal{R}_w} : \mathcal{R}_w \to \mathcal{R}_w$ son operadores compactos. Además, $\sigma(T|_{\mathcal{N}_w}) = \{\lambda\}$ y $\sigma(T|_{\mathcal{R}_w}) = \sigma(T)\backslash\{\lambda\}$.*

Demostración. Por el teorema 4.7 tenemos que tanto $T|_{\mathcal{N}_w}$ como $T|_{\mathcal{R}_w}$ están bien definidos. En primer lugar, $\mathcal{N}_w$ es un espacio de dimensión finita (teorema 4.5). Por otro lado, si $(x_n) \subset \mathcal{R}_w$ es una sucesión acotada, entonces $(T|_{\mathcal{R}_w} x_n) = (Tx_n) \subset \mathcal{R}_w$ tiene una subsucesión convergente a un cierto elemento de E, por ser T compacto. Por el teorema 4.6 el espacio $\mathcal{R}_w$ es cerrado, por lo que ese elemento límite tiene que pertenecer a $\mathcal{R}_w$. Por tanto, $T|_{\mathcal{R}_w}$ es un operador compacto.

Veamos que $\sigma(T|_{\mathcal{N}_w}) = \{\lambda\}$. Para $w = 1$, se tiene que $\lambda^{-1}T|_{\mathcal{N}_1} = I|_{\mathcal{N}_1}$. Consecuentemente el único autovalor es λ. Para $w \geq 2$ consideremos $S := (\lambda I|_{\mathcal{N}_w} - T|_{\mathcal{N}_w})$ y μ un escalar no nulo. Sabiendo que por definición $S^w = 0$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mu^w I|_{\mathcal{N}_w} = \mu^w I|_{\mathcal{N}_w} - S^w = (\mu I|_{\mathcal{N}_w} - S)(\sum_{j=1}^{w} \mu^{w-j} S^{j-1})\\ = (\sum_{j=1}^{w} \mu^{w-j} S^{j-1})(\mu I|_{\mathcal{N}_w} - S).\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $(\lambda - \mu)I|_{\mathcal{N}_w} - T|_{\mathcal{N}_w} = -(\mu I|_{\mathcal{N}_w} - S)$ tiene inversa acotada. Por tanto, $\lambda - \mu \notin \sigma(T)$ para cualquier μ no nulo. Es decir, $\sigma(T|_{\mathcal{N}_w}) \subset \{\lambda\}$. Pero como λ es autovalor de T, también lo es de $T|_{\mathcal{N}_w}$, por definición de

$\mathcal{N}_w$. Luego $\{\lambda\} = \sigma(T|_{\mathcal{N}_w})$.
Falta comprobar que $\sigma(T|_{\mathcal{R}_w}) = \sigma(T)\backslash\{\lambda\}$. Sea $S := T|_{\mathcal{R}_w} \in K(\mathcal{R}_w)$. Puesto que $\mathcal{N}_w$ tiene dimensión finita y $\mathcal{N}_w \oplus \mathcal{R}_w = E$, entonces $\mathcal{R}_w$ tiene dimensión infinita. Consecuentemente, podemos aplicar el lema 4.22 para ver que $0 \in \sigma(T)$ y que $0 \in \sigma(S)$. Además, el teorema 4.23 nos dice que el resto de elementos tanto de $\sigma(T)$ como de $\sigma(S)$ son autovalores. Es trivial que todo autovalor de S es también autovalor de T. Por el teorema 4.7, tenemos que $\lambda - T|_{\mathcal{R}_w} = \lambda - S$ tiene inversa continua, por lo que $\lambda \notin \sigma(S)$. Por tanto, si demostramos que todo autovalor no nulo de T distinto de λ es un autovalor de S hemos acabado.

Sea $\mu \in \sigma(T)$ un autovalor no nulo y $x \in E$ un autovector asociado a μ. Entonces $(\lambda - T)x = (\lambda - \mu)x$. Por consiguiente

$$x = (\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - T)x = \cdots = (\lambda - \mu)^{-w}(\lambda - T)^w x \in \mathcal{R}_w.$$

Con lo cual, $Sx = T|_{\mathcal{R}_w} x = \mu x$ y por tanto $\mu \in \sigma(S)$.

■

Corolario 4.26. *Sea E un espacio normado complejo de dimensión infinita, $T \in K(E)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos y no nulos de T. Sea $\mathcal{N}_i \oplus \mathcal{R}_i = E$ la descomposición resultante de aplicar el teorema 4.7 al operador compacto $\lambda_i^{-1}T$. Entonces se tiene que:*

$$E = \mathcal{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_n \oplus M,$$

donde M es un subespacio cerrado de E tal que $T(M) \subset M$. Además, $\sigma(T|_M) = \sigma(T)\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Demostración. En primer lugar, es conveniente notar que $N := \mathcal{N}_1 + \cdots + \mathcal{N}_n$ es un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y por tanto es posible poner la restricción $T|_N$ en forma de Jordan. Lo que nos interesa es que la forma de Jordan nos divide el espacio N como suma directa de subespacios $J_\lambda = \{x \in E \;\; / \;\; (I - \lambda T|_N)^{k_\lambda} x = 0\}$, donde los λ son los autovalores de $T|_N$ y k_λ sus multiplicidades algebraicas. En el teorema 4.23 vimos que todos los puntos espectrales no nulos de T son autovalores, luego resulta evidente que los J_λ y los $\mathcal{N}_i$ son los mismos espacios. Por tanto, tenemos que $N = \mathcal{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_n$.
La intención es demostrar este resultado mediante el teorema anterior, pero si simplemente lo aplicamos de forma iterativa obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{R}_1 \\ &= \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_{1,2} \oplus \mathcal{R}_{1,2} \\ &= \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_{1,2} \oplus \mathcal{N}_{1,2,3} \oplus \mathcal{R}_{1,2,3} \\ &\;\vdots \\ &= \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_{1,2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_{1,2,\ldots,n} \oplus \mathcal{R}_{1,2,\ldots,n}. \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{N}_{1,2,\ldots,i}$ y $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,i}$ son los espacios resultantes de aplicar el teorema 4.7 al operador compacto $\lambda_i^{-1}T|_{\mathcal{R}_{1,2,\ldots,i-1}}$. Es importante notar que $\sigma(T|_{\mathcal{R}_{1,2,\ldots,n}}) = \sigma(T)\backslash\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$. Si bien la notación resulta algo engorrosa, se puede observar que llamando M a $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,n}$ y demostrando que $\mathcal{N}_{1,2,\ldots,i} = \mathcal{N}_i$ hemos terminado. Procedamos por inducción sobre i. Para $i = 1$, el resultado es obvio. Supongamos para i natural tenemos demostrado para cualquier $j < i$ que $\mathcal{N}_{1,2,\ldots,j} = \mathcal{N}_j$. Queremos demostrar que $\mathcal{N}_{1,2,\ldots,i} = \mathcal{N}_i$. En primer lugar, por simple definición se sigue que $\mathcal{N}_{1,2,\ldots,i} \subset \mathcal{N}_i$. Sea ahora $x \in \mathcal{N}_i$. Por hipótesis, tenemos que:

$$E = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_{i-1} \oplus \mathcal{N}_{1,2,\ldots,i} \oplus \mathcal{R}_{1,2,\ldots,i}.$$

Pero hemos demostrado que $N = \mathcal{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_n$. Por consiguiente, $x \in \mathcal{N}_{1,2,\ldots,i} \oplus \mathcal{R}_{1,2,\ldots,i}$. Como $x \in \mathcal{N}_i$, tenemos que $(I - \lambda_i^{-1}T)^r x = 0$, para algún $r \geq 0$. Con lo cual, como $\mathcal{R}_{1,2,\ldots,i-1} = \mathcal{N}_{1,2,\ldots,i} \oplus \mathcal{R}_{1,2,\ldots,i}$, se sigue que

$$0 = (I - \lambda_i^{-1}T)^r x = (I - \lambda_i^{-1}T|_{\mathcal{R}_{1,2,\ldots,i-1}})^r x.$$

Luego $x \in \mathcal{N}_{1,2,\ldots,i}$. ■

Teorema 4.27. *Sea E un espacio normado complejo infinito dimensional. Entonces el espectro de un operador compacto $T : E \to E$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$. Además, todo punto no nulo del espectro es un punto aislado.*

Demostración. En primer lugar, como T es un operador compacto está acotado. Con lo cual podemos aplicar el teorema 4.21 obtener que $\sigma(T)$ es un compacto no vacío de $\mathbb{C}$.

Veamos que todos los puntos espectrales no nulos son puntos aislados. Sea $\lambda \in \sigma(T)$ con $\lambda \neq 0$. Por el teorema 4.23 tenemos que λ es un valor propio. Aplicando el teorema 4.25, y usando la notación del mismo, obtenemos que $\lambda \notin \sigma(T|_{\mathcal{R}_w})$. Del teorema 4.21 se sigue que $\sigma(T|_{\mathcal{R}_w})$ es un cerrado. Por consiguiente, existe $U \subset \mathbb{K}$ entorno de λ tal que $U \cap \sigma(T|_{\mathcal{R}_w}) = \emptyset$. Pero el teorema 4.25 nos dice que $\sigma(T|_{\mathcal{R}_w}) = \sigma(T)\backslash\{\lambda\}$. Así, se sigue que $\sigma(T) \cap U = \{\lambda\}$. Se concluye entonces que λ es un punto aislado.

■

Corolario 4.28. *El espectro de un operador compacto es, a lo sumo, un conjunto numerable.*

Demostración. El caso finito dimensional del teorema es trivial y el caso de dimensión infinita se obtiene mediante el teorema anterior, sabiendo que en $\mathbb{C}$ no existen conjuntos no numerables donde todos los puntos sean aislados. ■

4.3. Aplicación. Alternativa de Fredholm y soluciones aproximadas

La intención de esta sección es múltiple. En primer lugar, estudiar como son las soluciones del problema propuesto. En segundo lugar, buscar un método para, en caso de ser posible, obtener un punto x_0 arbitrariamente próximo a la solución x. Y, en tercer lugar, implementar un algoritmo para resolver dicho problema dadas ciertas condiciones extra. El contenido de esta sección se ha extraído en su mayoría de [9].

Un problema típico es, dado E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, un operador compacto $T \in K(E)$ e $y \in E$, encontrar $x \in E$ tal que $(I - T)x = y$. Esto por ejemplo puede entenderse como resolver un sistema de ecuaciones lineales, si $E = \mathbb{K}^n$, o como buscar la solución de una ecuación integral, si T es un operador integral de Fredholm (ejemplo 3.8).

Antes de nada, enunciemos formalmente el problema a resolver.

Problema 4.29. Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $T \in K(E)$. Dado $y \in E$, obtener $x \in E$ tal que $(I - T)x = y$.

El siguiente teorema, que nos informa sobre la naturaleza de las soluciones del problema 4.29 es en buena medida una generalización a espacios normados del conocido Teorema de la Alternativa de Fredholm.

Teorema 4.30 (Alternativa de Fredholm). *Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $T \in K(E)$. Se tiene que:*

1. *Se cumple una, y solo una, de las siguientes afirmaciones:*
   (i) Para todo $y \in E$ existe un único $x \in E$ tal que $(I - T)x = y$.
   (ii) Existen soluciones no triviales para $(I-T)x = 0$. En este caso, el número máximo de soluciones linealmente independientes es finito.
2. *Existen soluciones no nulas de $(I-T)x = 0$ si y solo si existen soluciones no nulas de $(I-T^*)x^* = 0$. Además, el número máximo de soluciones linealmente independientes es el mismo en ambos casos.*
3. *Para $y \in E$ fijo, existe una solución para $(I - T)x = y$ si y solo si dado $x_1^*, \dots, x_n^*$ base del espacio de soluciones de $(I - T^*)x^* = 0$, se tiene que*

$$x_1^*(y) = x_2^*(y) = \cdots = x_n^*(y) = 0.$$

Además, dada una solución particular x_0 de $(I-T)x = y$, se tiene que todas las soluciones son de la forma

$$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ y $x_1, \dots, x_n \in E$ forman una base del espacio de soluciones de $(I - T)x = 0$.

Demostración. El lector atento intuirá que ciertamente no estamos diciendo nada nuevo. Este resultado se limita a traducir a un lenguaje más cómodo resultados anteriores. Véase:

1. Consideremos $\mathcal{N}(I-T)$. Si $\mathcal{N}(I-T) \neq \{0\}$ estamos en el caso (ii), y sabemos por el lema 4.1 que $\mathcal{N}(I-T)$ tiene dimensión finita. Si se da que $\mathcal{N}(I-T) \neq \{0\}$ imposibilita que se tenga (i), puesto que para $y=0$ existen varias soluciones. En cambio, si $\mathcal{N}(I-T) = \{0\}$ se tiene que $I-T$ es un operador inyectivo y por el teorema **??** que $E = \mathcal{R}(I-T)$, luego es también sobreyectivo.
2. Equivalente al teorema 4.18.
3. El teorema 4.19 nos dice que $\mathcal{N}(I-T^*)_\perp = \mathcal{R}(I-T)$. Esto implica directamente este apartado.

Por otro lado, sea x_0 solución de $(I-T)x = y$, y $x_1, \dots, x_n \in E$ base de $\mathcal{N}(I-T)$. Entonces el punto $x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, es también solución de $(I-T)x = y$. Recíprocamente, sea $x \in E$ solución de $(I-T)x = y$. Entonces $(I-T)(x-x_0) = y - y = 0$, luego $x - x_0 \in \mathcal{N}(I-T)$. Por tanto, $x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. ∎

Una forma interesante de pensar en este teorema es considerar que generaliza propiedades que ya conocemos de los operadores en espacios de dimensión finita. Consideremos el espacio de dimensión finita $\mathbb{K}^n$, A una matriz cuadrada sobre $\mathbb{K}$ de orden n y f la aplicación lineal asociada a A. Recordemos que se tiene que lo siguiente:

1. f es inyectiva si y solo si f es sobreyectiva.
2. $Ax = 0$ tiene soluciones no nulas si y solo si $A^t x = 0$ tiene soluciones no nulas, donde A^t denota la matriz transpuesta. Esto se debe a que la matriz A tiene inversa si y solo si A^t la tiene también.
3. $Ax = y$ si y solo si $Ran(A) = Ran(A|y)$, donde $Ran(A)$ denota el rango de A y $A|y$ denota la matriz ampliada. Pero $Ran(A) = Ran(A|y)$ si y solo si y es combinación lineal de columnas de A. Esto último es equivalente a decir que para cualquier funcional lineal g que anule a las columnas de A se tiene que $g(y) = 0$.

Aunque quizá de forma algo enrevesada, lo que estamos diciendo es que a los operadores en espacios de dimensión finita les sucede los mismo que describíamos con el teorema anterior. Es aquí fundamental la hipótesis de que el operador sea compacto. El siguiente ejemplo puede resultar ilustrativo.

Ejemplo 4.31. Sea $R \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ el operador traslación a la derecha visto en el ejemplo 3.6. Entonces, para $T = I - R$ el teorema anterior no se cumple.

Demostración. El operador R definido como $Rx := (0, x_1, x_2, \dots)$ es un operador inyectivo por lo que $\mathcal{N}(I-T) = \mathcal{N}(R) = \{0\}$. Con lo cual no se puede dar

(ii). Además, es obvio que la igualdad $Rx = (1, 0, \dots)$ no se cumple para ningún $x \in \ell^2(\mathbb{N})$. Por tanto no se da (1).

Normalmente aquí se acabaría la demostración, pero es que además tampoco se da (2). Como R es inyectivo, tenemos que $(I - T)x = Rx = 0$ no tiene soluciones no nulas. En cambio, sí se tienen soluciones para $(I - T^*)x^* = 0$. Sea $x^* \in (\ell^2(\mathbb{N}))^*$ el funcional definido por $x^*(x) := x_1$, para todo $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Entonces tenemos que para cualquier $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ se tiene que:

$$((I - T^*)x^*)x = x^*(I - T)x = x^*Rx = x^*(0, x_1, x_2, \dots) = 0.$$

Por tanto $(I - T^*)x^* = 0$ tiene soluciones no nulas. ■

Una vez garantizada la existencia de soluciones, es preciso buscar como hallarlas. Encontrar una solución exacta es un problema formidable de por sí y más allá de nuestras capacidades. Por ello tratamos de encontrar una solución aproximada. Es decir, dado $\epsilon > 0$ y un $x \in E$ tal que $(I - T)x = y$ buscamos $x_0 \in E$ tal que $\|x - x_0\| < \epsilon$. Para realizar esta labor nos valdremos del siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en [9, Theorem 20.1].

Teorema 4.32. *Sea E un espacio de Banach y $T \in K(E)$ tal que $\mathcal{N}(I - T) = \{0\}$. Consideremos $T_0 \in L(E)$ tal que $\epsilon := \|(T - T_0)(I - T)^{-1}\| < 1$. Entonces, para $y, y_0 \in E$ dados, existen únicos $x, x_0 \in X$ tales que*

$$x - Tx = y, \; x_0 - Tx_0 = y_0.$$

Además, se tiene que:

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\|(I - T)^{-1}\|}{1 - \epsilon}(\epsilon\|y\| + \|y - y_0\|).$$

Este teorema nos confirma que de obtener un operador aproximado T_0 lo suficientemente cercano, podemos obtener una "buena solución" x_0, siempre y cuando seamos capaces de resolver $x_0 - T_0x_0 = y_0$. Con el teorema 2.10 demostramos que es posible obtener un T_0 de rango finito y arbitrariamente cercano a T en espacios dotados de una base de Schauder, y además nos da un método para obtener tales operadores. Lo único que resta demostrar es que si T_0 es de rango finito, entonces $x_0 - T_0x_0 = y_0$ puede resolverse explícitamente.

Teorema 4.33. *Sea $T \in L(E)$ un operador de rango finito definido como $Tx := f_1(x)x_1 + \dots + f_m(x)x_m$, con $f_i \in E^*$ y $x_i \in E$. Consideremos la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1) & \dots & f_m(x_m) \end{pmatrix}.$$

Entonces, para $y \in E$ *y* $v = (f_1(y), \ldots, f_m(y))$ *se tiene que*

$$x - Tx = y \text{ si y solo si } u - Mu = v,$$

donde $u = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ *y* $x = y + u_1x_1 + \cdots + u_mx_m$*. Además, los autovalores no nulos de* M *y de* T *coinciden.*

Demostración. Sea $x - Tx = y$ y $u = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Entonces

$$\begin{aligned} u - Mu &= (f_1(x) - \sum_{i=1}^m f_1(x_i)f_i(x), \ldots, f_m(x) - \sum_{i=1}^m f_m(x_i)f_i(x)) \\ &= (f_1(x) - f_1(\sum_{i=1}^m x_if_i(x)), \ldots, f_m(x) - f_m(\sum_{i=1}^m x_if_i(x))) \\ &= (f_1(x) - f_1(Tx), \ldots, f_m(x) - f_m(Tx)) = (f_1(y), \ldots, f_m(y)) = v. \end{aligned}$$

Además, es inmediato comprobar que $x = y + u_1x_1 + \cdots + u_mx_m$, puesto que $x = y + Tx$.

Supongamos ahora que $u - Mu = v$ y $x = y + u_1x_1 + \cdots + u_mx_m$. Entonces:

$$\begin{aligned} x - Tx &= y + \sum_{i=1}^m u_ix_i - \sum_{i=1}^m f_i(x)x_i = y + \sum_{i=1}^m (u_i - f_i(x))x_i \\ &= y + \sum_{i=1}^m (u_i - f_i(y + \sum_{j=1}^m u_jx_i))x_i = y + \sum_{i=1}^m (u_i - v_i - (Mu)_i)x_i \\ &= y + \sum_{i=1}^m (v_i - v_i)x_i = y. \end{aligned}$$

Y de forma similar, es sencillo comprobar que $u = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ mediante $u = v + Mu$.

Veamos ahora que tienen los mismos autovalores no nulos. Sea $\lambda \neq 0$. Mediante la parte que ya hemos demostrado de este teorema y sustituyendo T por $\lambda^{-1}T$ e y por 0 obtenemos:

$$x - \lambda^{-1}Tx = 0 \iff u - \lambda^{-1}Mu = 0.$$

Con lo cual, λ es autovalor de T si y solo si es autovalor de M. ■

Con este teorema ya disponemos de todas las herramientas teóricas necesarias para poder implementar un algoritmo para resolver el problema 4.29. Para esto precisamos saber que solo dependiendo de "inputs" y "outputs" finitos podemos simular un operador de rango finito arbitrariamente próximo al operador compacto T. Es aquí donde usamos el teorema 2.10. Concretamente nos interesa la parte que nos dice que si P_n es una proyección del espacio de Banach X en el espacio generado por los primeros n elementos de una base de Schauder de X, entonces la sucesión de operadores $(P_nT)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norma a T. Como es de esperar, no todos los espacios cumplen con esta propiedad, por lo que nos limitaremos a trabajar en los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, con $1 \leq p \leq \infty$ que sabemos que sí la cumplen para la base de Schauder $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ donde e_i es la sucesión que vale 1 en la posición i-ésima y 0 en el resto. Además, excluiremos del algoritmo el caso $p = \infty$, pues necesitamos conocer la forma de los elementos del espacio dual $\ell^p(\mathbb{N})^*$. Veamos un esquema del procedimiento:

Sea $1 \leq p < \infty$. Consideremos $y = (y_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$ una sucesión cualquiera y $T \in K(\ell^p(\mathbb{N}))$ definido como $T(x) = T(x_1, x_2, \dots) := (f_1(x), f_2(x), \dots)$, con $x = (x_1, x_2, \dots)$ y $f_n \in \ell^p(\mathbb{N})^*$, que representaremos como $f_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}x_j$. Además, sea $P_n \in L(\ell^p(\mathbb{N}))$ definido tal que $P_n(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$. Dado $y \in \ell^p(\mathbb{N})$, vamos a obtener una aproximación de la solución de:

$$x - Tx = y.$$

Esto es, vamos a obtener $x^{(n)} \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que sea solución de:

$$x^{(n)} - P_nTx^{(n)} = P_ny.$$

Esto se debe a que gracias al teorema 2.10 tenemos que P_nT converge en norma a T. Junto al teorema 4.32 esto implica que $\lim_{n\to\infty}\|x - x^{(n)}\| = 0$. Además, del teorema 4.33, se obtiene que: $x^{(n)} = P_ny + u^{(n)}$, donde $u^{(n)}$ es el vector que resuelve

$$u^{(n)} - M_nu^{(n)} = v^{(n)},$$

siendo $M_n = (f_i(e_j))_{1\leq i,j\leq n} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y

$$v^{(n)} = (f_i(P_ny))_{1\leq i\leq n} = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j)_{1\leq i\leq n} = M_n(y_1, \dots, y_n)^t,$$

donde $(y_1, \dots, y_n)^t$ denota la matriz transpuesta. Luego,

$$x^{(n)} = (y_1, \dots, y_n) + (I - M)^{-1}M(y_1, \dots, y_n).$$

Ejemplo 4.34. En $\ell^2(\mathbb{N})$, consideramos $T(x) := (\frac{cos(n)}{n}x_n)$ e $y = (\frac{1}{n})$. Por el ejemplo 3.2 tenemos que T es compacto. Utilizando el método descrito anteriormente obtenemos una matriz de la siguiente forma:

$$M_m = \begin{pmatrix} 0.540302 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0.20807 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -0.33000 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{cos(m)}{m} \end{pmatrix}.$$

Donde m denota el orden de la matriz usada. Como ejemplo, obtenemos las siguientes soluciones aproximadas x_m para $m = 1, 3, 18, 243$:

$$\begin{aligned} x_1 &= (2.17534, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ x_3 &= (2.17534, 0.41388, 0.25063, 0, 0, \dots) \\ x_{18} &= (2.17534, 0.41388, 0.25063, 0.21489, 0.21202, ...) \\ x_{243} &= (2.17534, 0.41388, 0.25063, 0.21489, 0.21202, ...) \end{aligned}$$

Que los elementos de x_m no cambien conforme crece m es un resultado esperable, al ser M_n una matriz diagonal.

Ejemplo 4.35. Sea $\ell^p(\mathbb{N})$, con $1 \leq p < \infty$ y consideramos $T(x) := (\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}x_{k+1})$, donde $x = (x_1, x_2, \dots)$, e $y = (e^{-n})$.
En primer lugar, hace falta ver que T es compacto. Consideremos $(T_m) \subset L(\ell^p(\mathbb{N}))$, tal que $T_m(x) := (\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}x_{k+1}, \dots, \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k}x_{k+1}, 0, \dots)$ para todo n. Es claro que los T_m son operadores de rango finito. Además, para $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ tal que $\|x\| = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|(T - T_m)x\|^p &= \|(0, \dots, 0, \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k}x_{k+1}), \dots\|^p \\ &= \sum_{r=m}^{\infty} |\sum_{k=r+1}^{\infty} 2^{-k}x_{k+1}|^p \leq \sum_{r=m}^{\infty} (\sum_{k=r+1}^{\infty} 2^{-k})^p \\ &= \sum_{r=m}^{\infty} 2^{-pr} = \frac{2^{-p(m-1)}}{2^p - 1} \leq (2^{1-m})^p \end{aligned}$$

Con lo cual, T_m converge a T en norma. Por tanto, al ser (T_m) una sucesión de operadores de rango finito, tenemos por el teorema 2.8 que T es un operador compacto. Utilizando el método antes descrito obtenemos una matriz de la siguiente forma:

$$M_m = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 & \dots & 2^{m-1} \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.0625 & \dots & 2^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0.0625 & \dots & 2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde m denota el orden de la matriz usada. Para $m = 1, 4, 7, 69, 420$ obtenemos las soluciones aproximadas x_m :

$$x_1 = (0.36787, 0, 0, 0, 0, \dots)$$
$$x_4 = (0.41110, 0.14284, 0.05093, 0.01832, 0, \dots)$$
$$x_8 = (0.41149, 0.14316, 0.05120, 0.01857, 0.00679, ...)$$
$$x_{69} = (0.41149, 0.14316, 0.05121, 0.01858, 0.00679, ...)$$
$$x_{420} = (0.41149, 0.14316, 0.05121, 0.01858, 0.00679, ...)$$

De querer comprobar nuestros resultados, o resolver algún otro problema de este tipo, hemos implementado en Python un breve código para ello. El código puede ser consultado en este enlace.
Además, de no querer instalar Python, puede ejecutarse directamente aquí, aunque les avisamos que el rendimiento que se puede obtener en un navegador dista mucho del ideal.

4.4. Distancia de los modelos universales a los operadores compactos

Los operadores de traslación son una clase de operadores que está íntimamente relacionada con todos los operadores de un espacio de Hilbert separable. La razón de esto, como veremos más adelante, es que todo operador puede escribirse como lo que esencialmente es una parte del adjunto de un operador de traslación. Los operadores con esta propiedad normalmente se conocen como modelos universales. Lo importante es saber que por esto es interesante establecer cuánto distan los operadores compactos de los adjuntos de los operadores de traslación. En esta sección se demostrará que en un espacio de Hilbert separable la distancia entre los y los operadores compactos es como mucho 1. Los resultados de esta sección fueron obtenidos principalmente de [7].

Definición 4.36. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Se dice que T es:*

1. *Un operador* autoadjunto *si $T = T^*$.*
2. *Un operador* no negativo *si para cualquier $x \in H$ se tiene que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$. Se denota como $T \geq 0$. Además, si $U \in L(H)$, para denotar que $U - T$ es no negativo se escribe $U \geq T$.*

3. Raíz cuadrada positiva *de un operador no negativo* $U \in L(H)$ *si* $T^2 = U$ *y* $T \geq 0$.
4. Unitariamente equivalente *a un operador* $S \in L(G)$, *con* G *espacio de Hilbert, si existe un operador* $U \in L(G, H)$ *con* $U^* = U^{-1}$ *tal que* $T = U^*SU$.
5. Parte *de un operador acotado* $S \in L(G)$, *donde* G *es un espacio de Hilbert y* H *es subespacio de* G, *si* $S(H) \subset H$ *y* $S|_H = T$.
6. Un operador traslación *si, dada* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *base ortonormal de* H, *se tiene que* $Te_n = e_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Para las propiedades que siguen, es necesario demostrar que todo operador positivo tiene una única raíz cuadrada positiva. Esta demostración puede encontrarse en [15, $VIII$.4 Theorem].

La siguiente propiedad identifica al adjunto del operador de traslación como modelo universal.

Teorema 4.37. *Sean* $T \in L(H)$, *con* H *espacio de Hilbert separable. Si* $\|T\| \leq 1$ *y* (T^n) *converge puntualmente a* 0, *entonces* T *es unitariamente equivalente a una parte del adjunto de un operador traslación.*

Demostración. Supongamos que $\|T\| \leq 1$ y que (T^n) converge puntualmente a 0. Buscamos construir un espacio de Hilbert $\tilde{H}$ donde pueda residir nuestro operador traslación. Como T es una contracción, se tiene que el operador $\langle I - T^*Tx, x\rangle = \|x\|^2 - \|Tx\|^2 \geq 0$. Luego $I - T^*T$ es no negativo y tiene una única raíz cuadrada $S := \sqrt{I - T^*T}$. Sea $G = \overline{S(H)}$ y definamos $\tilde{H} := \{(x_1, x_2, \dots) \ / \ x_i \in G \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty\}$. Se tiene que $\tilde{H}$ es un espacio de Hilbert con el producto interior definido para $(x_n), (y_n) \in \tilde{H}$ como $\langle (x_n), (y_n)\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n\rangle$.

Definimos ahora $V : H \to \mathcal{R}(V) \subset \tilde{H}$ como $Vx := (Sx, STx, ST^2x, \dots)$. Para afirmar que V está bien definido, solo hace falta garantizar que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|S^n x\|^2 < \infty$, para todo $x \in H$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \|S^n x\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle ST^{n-1}x, ST^{n-1}x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle (I - T^*T)T^{n-1}x, T^{n-1}x\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle T^{n-1}x, T^{n-1}x\rangle - \langle T^n x, T^n x\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T^{n-1}x\|^2 - \|T^n x\| = \|x\|^2 - \lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = \|x\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Esto último porque T tiende puntualmente a 0. Además, de esta última expresión se obtiene que $\|Vx\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|S^n x\|^2 = \|x\|^2$, luego V es una isometría y por tanto una biyección. Nuestra intención es probar que $T = V^*U^*|_{\mathcal{R}(V)}V$, donde $U \in L(\tilde{H})$ es el operador traslación tal que $U(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Si calculamos ahora el adjunto de V, se tiene que para $x \in H$ e $(y_n) \in \tilde{H}$:

$$\begin{aligned}\langle x, V^*(y_n)\rangle &= \langle Vx, (y_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle ST^{n-1}x, y_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, (T^*)^{n-1}Sy_n\rangle \\ &= \langle x, \sum_{n\in\mathbb{N}}(T^*)^{n-1}Sy_n\rangle.\end{aligned}$$

Luego, por la unicidad del operador adjunto, $V^*(y_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(T^*)^{n-1}Sy_n$. Ahora, como (T^n) converge puntualmente a 0, se tiene que $(T^*)^nT^nx$ converge puntualmente a 0, puesto que con $x, y \in H$: $\langle \lim_{n\to\infty}(T^*)^nT^nx, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T^nx, T^ny\rangle = 0$. De lo que se obtiene que para $x \in H$:

$$\begin{aligned}V^*Vx &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(T^*)^{n-1}S^2T^{n-1}x = \sum_{n\in\mathbb{N}}(T^*)^{n-1}(I - T^*T)T^{n-1}x \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(T^*)^{n-1}T^{n-1}x - (T^*)^nT^nx = x - \lim_{n\to\infty}(T^*)^nT^nx = x.\end{aligned}$$

Es decir, $V^* = V^{-1}$, al ser V una biyección. Consecuentemente, probar $T = V^*U^*|_{\mathcal{R}(V)}V$, es lo mismo que probar $VT = U^*|_{\mathcal{R}(V)}V$. Para $x \in H$ se tiene que $VTx = (STx, ST^2x, \dots) = U^*|_{\mathcal{R}(V)}Vx$. Luego $VT = U^*|_{\mathcal{R}(V)}V$. Además, que $U^*(\mathcal{R}(V)) \subset \mathcal{R}(V)$ se sigue de esto mismo, puesto que para $(x_n) \in \mathcal{R}(V)$ se tiene que $U^*(x_n) = VTV^*(x_n) \in \mathcal{R}(V)$. ∎

Proposición 4.38. *Sea T un operador acotado definido en un espacio de Banach complejo E. Entonces si $\lambda \in \sigma(T)$ se tiene que $|\lambda| \le \|T\|$.*

La demostración de esta proposición puede encontrarse en [16, Theorem V.3.1].

El siguiente teorema es el que da sentido a esta sección pues nos dice la distancia de los operadores compactos a los adjuntos de los operadores de traslación.

Teorema 4.39. *Sea H espacio de Hilbert separable y $R : H \to H$ operador traslación definido como $R(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ para cierta base ortonormal $(e_n) \subset H$. Entonces la distancia de R^* al espacio $K(H)$ es exactamente* 1.

Demostración. En primer lugar, nótese que R^* es un operador de norma 1. Definamos $d := d(R, K(H))$. Como el operador 0 es compacto, entonces $d \le \|R - 0\| = \|R\| = 1$. Veamos el otro lado de la desigualdad. Consideremos un $T \in K(\ell^2(\mathbb{N}))$. Claramente, $\|R\| = 1$ y $R^*R = I$. Por tanto, $(R^* - T)R = I - TR$. Por el teorema 2.2, tenemos que TR es un operador compacto. Del lema 4.22 obtenemos que $0 \in \sigma(T)$, por lo que $TR = I - (I - TR) = I - (R^* - T)R$ no tiene inversa acotada. Por tanto, $1 \in \sigma((R^* - T)R)$. Luego, por la proposición anterior, $1 \le \|(R^* - T)R\|$. Además, como $\|R\| = 1$, se sigue que $\|(R^* - T)R\| \le \|R^* - T\| \le d$. Por consiguiente $1 \le d$, como queríamos demostrar. ∎

Nótese que una demostración muy similar puede hacerse para demostrar que la distancia de los operadores de traslación a los compactos es también igual a 1.

4.5. Problema del subespacio invariante

El problema del subespacio invariante es uno de los problemas abiertos del análisis funcional más conocidos. Esto es probablemente debido a lo sencillo de su enunciado, el cual dicta así: Sea H un espacio de Hilbert y $A \in L(H)\backslash\{0\}$, ¿Existe G subespacio cerrado y propio de H tal que $A(G) \subset G$? Lo cierto es que esta versión del problema ya fue resuelta en espacios de Banach por P. Enflo en [6], donde dio un contraejemplo a esta afirmación. Sin embargo, C. J. Read publicó antes que P. Enflo otro contraejemplo en [14], pero suele considerarse que P. Enflo fue realmente el primero porque fue el primero en mandar el manuscrito a revisión. El problema fue que su artículo tardó varios años en publicarse por la dificultad para revisar su trabajo, por lo que el artículo de C. J. Read terminó siendo publicado antes. Otra razón por la que se considera que fue P. Enflo quien resolvió el problema es porque el propio C. J. Read empleó ideas y técnicas que P. Enflo había expuesto en seminarios durante años.

Un caso elemental es en el que el operador A tiene un autovalor cualquiera. En este caso se tiene que el subespacio $\mathcal{N}(\lambda-A)$ es propio y cerrado y claramente $A(\mathcal{N}(\lambda-A)) \subset \mathcal{N}(\lambda-A)$. Otro caso que merece mención es que H sea un espacio no separable. Se tiene que la clausura del espacio generado por la órbita de A, $\overline{\langle\{x, Ax, A^2x, \dots\}\rangle}$ es un espacio invariante no trivial.

Para los operadores compactos, J. von Neumann demostró en un trabajo que nunca llegó a publicar que todo operador compacto tiene un subespacio invariante cerrado y propio. La primera prueba de este hecho vino de la mano de N. Aronszajn y K. Smith en [1]. Lo cierto es que con los operadores compactos puede asegurarse aún más a este respecto, como muestra el siguiente teorema. La prueba que se presenta fue obtenida de [12]. Pero antes de ello, precisaremos de la siguiente definición y resultado, cuya prueba puede encontrarse en [16, Theorem V.3.5].

Definición 4.40 (Radio Espectral). *Sea X un espacio de normado complejo y $A \in L(X)$. Se denomina radio espectral de A, $r_\sigma(A)$, al siguiente número:*

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proposición 4.41. *Sea X un espacio de normado complejo y $A \in L(X)$. Se tiene que $r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Teorema 4.42 (Lomonosov). *Sea H un espacio de Banach complejo y $T \in K(H)$ un operador no nulo. Entonces todo operador $S \in L(H)$ que conmute con T tiene un subespacio invariante cerrado y propio.*

Demostración. Sea $T \in K(H)$ no nulo y $S \in L(H)$ un operador que conmuta con T. Consideremos en primer lugar el caso de que T tiene algún autovalor λ. En tal caso, ya hemos visto que $\mathcal{N}(\lambda - T)$ es un subespacio invariante cerrado y propio de S. Veamos qué pasa en el caso de que T no tenga autovalores. En este caso, por el teorema 4.23 y el lema 4.22 tenemos que $\sigma(T) = \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que T tiene norma 1. Sea $x_0 \in H$ tal que $\|Tx_0\| > 1$ y sea $\overline{B}(x_0, 1)$ la bola unidad cerrada con centro en x_0 y $V := \overline{T(\overline{B}(x_0, 1))}$. Claramente 0 no pertenece a $\overline{B}(x_0, 1)$. Veamos que tampoco pertenece a V. Sea $y \in (\overline{B}(x_0, 1))$. Se sigue que $\|Ty\| = \|Tx_0 - T(y - x_0)\| \geq |\|Tx_0\| - \|T(y - x_0)\|| \geq \|Tx_0\| - 1 > 0$. Puesto que $\|Tx_0\| > 1$ y $\|T\| = 1$. Por consiguiente, $0 \notin V = \overline{T(\overline{B}(x_0, 1))}$.

Para cada $y \in H$ definimos $M_y := \{Ay \in H \;\; / \;\; A \in L(H) \text{ y } AT = TA\}$. Es claro que $\overline{M_y}$ es un subespacio invariante y cerrado de S. Luego lo único que queda por comprobar es que es un subespacio propio para algún $y \in H$. Puesto que T conmuta consigo mismo y es no nulo se sigue que $\overline{M_y} \neq \{0\}$, cuando $y \neq 0$. Falta comprobar que para algún $y \neq 0$ se tiene que $\overline{M_y} \neq H$.
Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que M_y es denso para todo $y \neq 0$. Para $A \in L(H)$ tal que $AT = TA$, definimos $U_A := \{y \in H \;\; / \;\; \|Ay - x_0\| < 1\} = A^{-1}B(x_0, 1)$. Claramente los U_A son conjuntos abiertos. Además, como M_y es denso para cada $y \in H \backslash \{0\}$ existe un operador acotado B que conmuta con T y tal que $\|By - x_0\| < 1$. Se sigue que los U_A son un recubrimiento abierto de V, que es un conjunto compacto por ser clausura de un conjunto relativamente compacto. Por consiguiente, existen $A_1, \ldots, A_m$ operadores acotados que conmutan con T tales que los U_{A_i} forman un recubrimiento finito de V. Ahora, $Tx_0 \in V$, luego para algún i_1 tenemos que $Tx_0 \in U_{A_{i_1}}$. Por tanto $A_{i_1}Tx_0 \in \overline{B}(x_0, 1)$. Con lo cual $TA_{i_1}Tx_0 \in V$. Este razonamiento puede repetirse n veces para obtener:

$$x_n = TA_{i_n}TA_{i_{n-1}} \ldots TA_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in \overline{B}(x_0, 1).$$

Recordando que los A_i conmutan con T.

$$x_n = A_{i_n}A_{i_{n-1}} \ldots A_{i_2}A_{i_1}T^n x_0 \in \overline{B}(x_0, 1).$$

Por lo que tomando $c := \text{máx}\{\|A_1\|, \ldots, \|A_m\|\}$ se tiene que $\|x_n\| \leq c^n \|T^n\| \|x_0\|$. Luego, por el teorema anterior, tenemos que $\|x_n\|^{\frac{1}{n}} \leq c\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0$. Obtenemos que $\|x_n\| \longrightarrow 0$ y, como $\overline{B}(x_0, 1)$ es cerrado, que $0 \in \overline{B}(x_0, 1)$. Esto es absurdo, puesto que por definición $\|Tx_0\| > 1$ y $\|T\| = 1$. ■

Bibliografía

[1] N. Aronszajn, K. Smith. *Invariant Subspaces of Completely Continuous Operators*. Annals of Mathematics, 60(2), second series, 345-350, (1954). DOI: 10.2307/1969637.

[2] A. L. Brown, A. Page. *Elements of Functional Analysis*. Van Nostrand Reinhond, (1970).

[3] A. Capel Cuevas. *Norm Attaining Operators*. Master thesis (Universidad Autónoma de Madrid), (2015).

[4] J. Dieudonné. *History of functional analysis*. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 77. North-Holland Mathematics Studies, 49. North-Holland Publishing Co, (1981).

[5] P. Enflo. *A Counterexample of the Aproximation Problem in Banach Spaces*. Acta Mathematica, VOL.130, 309-317, (1973). DOI: 10.1007/BF02392270

[6] P. Enflo. *On the invariant subspace problem for Banach spaces*. Acta Mathematica, VOL.158, 213–313, (1987). DOI: 10.1007/BF02392260

[7] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*. Springer-Verlag, 2nd edition, (1982).

[8] R. James. *Weakly Compact Sets*. Transactions of the American Mathematical Society, 113(1), 129-140, (1964). DOI:10.2307/1994094

[9] B. V. Limaye. *Functional Analysis*. New Age International Publishers, 2nd edition, (1996).

[10] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I and II*. Springer-Verlag, (1992).

[11] L. Loureiro. *The approximation property in Banach Spaces*. Master thesis (Lund University), (2005).

[12] A. J. Michaels. *Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem*. Advances in Mathematics, 25, 56-58, (1977).

[13] A, Pietsch. *History of Banach spaces and linear operators*. Birkhäuser Boston Inc, (2007).

[14] C. J. Read. *A Solution to the Invariant Subspace Problem on the Space* ℓ^1. Bulletin of the London Mathematical Society, 17, 305-317, (1985). DOI: 10.1112/blms/17.4.305

[15] J. R. Retherford *Hilbert space: compact operators and the trace theorem.* London Mathematical Society Student Texts, 27, (1993).

[16] A. E. Taylor, D. C. Lay. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley & Sons Inc, 2nd edition, (1980).

Compact operators

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Pablo Rodríguez Flores
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101022574@ull.edu.es

1. Abstract

BOUNDED operators can be understood as operators where the range of every bounded set is a bounded set. In similar way, compact operators are operators such that the range of every bounded set is a set which closure is compact. These operators exhibit numerous and practical properties, applicable to diverse fields beyond functional analysis. This work is an introduction to the study of compact operators, presenting some of their most important results and applications.

2. Introduction

COMPACT operators were first introduced by D. Hilbert in 1912 known as "completely continuous operators". The first systematic works were carried out by F. Riesz and J. Schauder in the first decades of the 20th century in which is now known as Riesz-Schauder theory. Since then, these operators have proven themselves as a powerful tool to solve many problems (for example, they provide a partial solution to the famous problem of the invariant subspace) and as an interesting object of study by itself, given their numerous properties.

Definition 1 (Compact Operator)
Let E be a normed space and $T : E \to E$ be a linear operator. It is said that T is a compact operator if for every bounded set $A \subset E$, the set $\overline{T(A)}$ is a compact set. The set of all compact operators in E is denoted by $K(E)$.

3. Important Results

THE set of all compact operators is, even restraining ourselves to its algebraic and topologic properties, a set worthy of study.

Theorem 1
Let E be a normed space. Then $K(E)$ is a closed bilateral ideal of $L(E)$.

One basic example of compact operator are the finite rank operators, those bounded operators which range has finite dimension. The following theorem states that every Hilbert space has the approximation property.

Theorem 2
Let H be a Hilbert space and $T \in L(H)$. Then T is a compact operator if and only if it is the uniform limit of a sequence of finite rank operators $T_n \in L(H)$.

The norm of an operator T is defined by $\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. It is interesting to know when this supremum is in fact a maximum. This result links this property (known as attaining its norm) with the compacity of the operator.

Theorem 3
Let X be a normed space and $T \in K(X)$. If X is reflexive, then T attains its norm.

The spectral theory of compact operators is rich and can result suprising. The following two theorems are a clear proof of this.

Theorem 4
Let E be a complex normed space of infinite dimension and $T \in K(E)$. Then, for any $n \in \mathbb{N}$, it follows that $\mathcal{N}(I-T)^n$ are subspaces of finite dimension of E and $\mathcal{R}(I-T)^n$ are closed subspaces of E such that:

$$E = \mathcal{N}(I-T)^n \oplus \mathcal{R}(I-T)^n$$

Moreover, there is $w \in \mathbb{N}$ such that:

1. $\mathcal{N}(I-T)^1 \subsetneq \mathcal{N}(I-T)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{N}(I-T)^w = \mathcal{N}(I-T)^{w+1}$
2. $\mathcal{R}(I-T)^1 \supsetneq \mathcal{R}(I-T)^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{R}(I-T)^w = \mathcal{R}(I-T)^{w+1}$

Theorem 5
Let E be a complex normed space of infinite dimension and let $T \in K(E)$. Then the spectrum of T, $\sigma(T)$, is formed by 0 and a set of eigenvalues. Furthermore, if $\sigma(T)$ has any accumulation point, it has to be 0.

4. Applications

THERE are numerous applications for compact operators. One of the most widely known is the next one, which is a partial solution of the invariant subspace problem, maybe the most famous open problem in functional analysis.

Theorem 6 (Lomonosov)
Let H be a complex Hilbert space and $S \in L(H)$. If S commutes with any compact operator in $K(H)$, then S has a proper and closed invariant subspace.

Another application for this class of operators can be found in the resolution of some numerical problems, by applying a generalized version of the Fredholm alternative. Let $1 \leq p < \infty$, $y \in \ell^p(\mathbb{N})$ and $T \in K(\ell^p(\mathbb{N}))$ such that $1 \notin \sigma(T)$. A common problem is to find explicitly a sequence $(x_n) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ such that $x_n \longrightarrow x \in \ell^p(\mathbb{N})$ and $x - Tx = y$.
To this effect, we have implemented an algorithm in Python which, given an operator T and a vector y, returns an approximated solution. For example, for the following compact operator T (defined as an infinite matrix) and $y \in \ell^p(\mathbb{N})$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-4} & \cdots \\ 0 & 0 & 2^{-3} & 2^{-4} & \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-4} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^{-2} \\ e^{-3} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

We obtain (x_n), a sequence in $\ell^p(\mathbb{N})$ which converges to the solution $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ of $x - Tx = y$. As a sample of the results, we give x_n for $n = 1, 4, 8, 69, 420$:

$$x_1 = (0{,}36787, 0, 0, 0, 0, \dots)$$
$$x_4 = (0{,}41110, 0{,}14284, 0{,}05093, 0{,}01832, 0, \dots)$$
$$x_8 = (0{,}41149, 0{,}14316, 0{,}05120, 0{,}01857, 0{,}00679, \dots)$$
$$x_{69} = (0{,}41149, 0{,}14316, 0{,}05121, 0{,}01858, 0{,}00679, \dots)$$
$$x_{420} = (0{,}41149, 0{,}14316, 0{,}05121, 0{,}01858, 0{,}00679, \dots)$$

5. Bibliography

A. L. Brown, A. Page. *Elements of Functional Analysis*. Van Nostrand Reinhond, (1970).

P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*. Springer-Verlag, 2nd edition, (1982).

A. E. Taylor, D. C. Lay. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons Inc, 2nd edition, (1980).