

Guillermo Herrera Báez

# *Trigonometría en $p$ -normas*

Trigonometry in  $p$ -norms

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, julio de 2021

DIRIGIDO POR

*María Isabel Marrero Rodríguez*

*María Isabel Marrero Rodríguez*  
*Departamento de Análisis Matemático*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

A mi familia, gracias por el apoyo incondicional que me han dado siempre. Por no soltarme nunca de la mano y por confiar en mí. No olvidéis que sois mi motor. Y a mi tutora, por guiarme para alcanzar la meta. Fue mucho más fácil con su ayuda.

Guillermo Herrera Báez  
La Laguna, 1 de julio de 2021



---

## Resumen • Abstract

### *Resumen*

---

*La circunferencia es una de las primeras formas geométricas con las que nos encontramos. Se trata de un objeto «perfecto», y nuestra familiaridad con ella puede hacernos perder de vista su relevancia. Las funciones seno y coseno surgen de modo natural cuando intentamos describirla.*

*En este trabajo nos proponemos desarrollar una trigonometría análoga para objetos geométricos que no son exactamente una circunferencia. Nuestro modelo primario es la  $p$ -circunferencia o « $p$ -squirele», una superelipse definida como el conjunto de los puntos  $(x, y)$  del plano que satisfacen la ecuación  $|x|^p + |y|^p = 1$  para algún número real  $p \geq 1$ . La circunferencia unidad del plano euclídeo se obtiene para  $p = 2$ , y nuestro estudio generaliza este caso.*

*De la investigación realizada se deriva una consecuencia importante, y es que las posibilidades de generalización son múltiples, si bien no todas ellas retienen las mismas propiedades deseables, por lo que es necesario elegir la que más convenga al uso que se les pretenda dar.*

**Palabras clave:** *Funciones trigonométricas – curvas de Lamé –  $p$ -normas –  $p$ -laplaciano – squirele – squigonometría.*

## *Abstract*

---

*The circumference is one of the first geometric shapes that we come across. It is a «perfect» object, and our familiarity with it can make us lose sight of its relevance. The sine and cosine functions arise naturally when we try to describe it.*

*In this work we propose to develop an analogous trigonometry for geometric objects that are not exactly a circle. Our primary model is the  $p$ -circumference or « $p$ -squirele», a superellipse defined as the set of points  $(x, y)$  in the plane that satisfy the equation  $|x|^p + |y|^p = 1$  for some real number  $p \geq 1$ . The unit circumference of the Euclidean plane is obtained for  $p = 2$ , and our study generalizes this case.*

*An important consequence of the research performed here is that the possibilities for a generalization are multiple, although not all of them retain the same desirable properties, so it is necessary to choose the one that best suits the use intended.*

**Keywords:** *Trigonometric functions – Lamé curves –  $p$ -norms –  $p$ -Laplacian – squirele – squigonometry.*

---

# Contenido

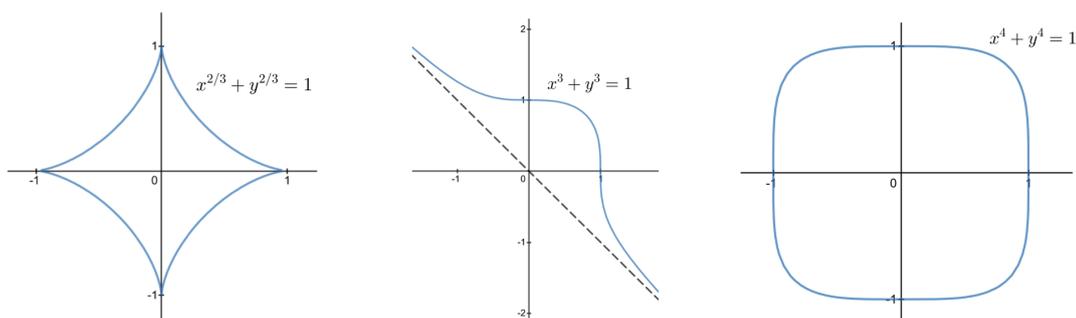
<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Las funciones trigonométricas usuales</b> .....	1
1.1. Funciones trigonométricas sobre la circunferencia unidad .....	1
1.2. Definición de una función a través de un PVI .....	2
1.2.1. Ejemplo: función exponencial .....	3
1.2.2. Ejemplo: función logarítmica .....	5
1.3. Definición de funciones a través de un PVIA .....	7
1.3.1. Funciones seno y coseno .....	7
1.3.2. Funciones arcoseno y arcocoseno .....	9
1.4. Las funciones trigonométricas vía ecuaciones integrales .....	11
<b>2. Funciones <math>p</math>-trigonométricas</b> .....	13
2.1. Definición mediante un PVIA .....	14
2.2. Los nuevos valores de $\pi$ .....	15
2.2.1. Funciones $p$ -arcoseno y $p$ -arcocoseno .....	15
2.2.2. Simetría y periodicidad .....	20
2.2.3. La función $p$ -arcotangente .....	20
<b>3. Geometría de las <math>p</math>-circunferencias</b> .....	23
3.1. La $p$ -norma en $\mathbb{R}^2$ .....	23
3.2. Parametrización en términos del área .....	25
3.3. La $p$ -longitud de arco .....	27
3.3.1. De nuevo, $\pi$ .....	28
3.3.2. Conjugación .....	31
3.3.3. Parametrización en términos de la longitud de arco .....	35

<b>4. Funciones <math>p</math>-hiperbólicas</b> .....	37
4.1. Funciones $p$ -seno hiperbólico y $p$ -coseno hiperbólico .....	37
4.2. Funciones $p$ -hiperbólicas inversas .....	38
4.3. $p$ -cónicas .....	39
4.4. La función $p$ -exponencial .....	40
<b>5. Conclusiones y prospectiva</b> .....	41
5.1. Conclusiones .....	41
5.2. Prospectiva .....	41
5.2.1. Funciones biparamétricas y el $p$ -laplaciano .....	42
5.2.2. Curvas algebraicas .....	43
5.2.3. Otras conexiones .....	43
<b>Bibliografía</b> .....	45
<b>Lista de Figuras</b> .....	47
<b>Póster</b> .....	49

---

## Introducción

La familia de curvas de ecuación cartesiana  $(x/a)^p + (y/b)^p = 1$ , con  $a, b, p > 0$ , fue estudiada por el matemático francés Gabriel Lamé (1795-1870) en 1818, como generalización de la ecuación de la elipse ( $p = 2$ ). Si  $p$  es racional la curva es algebraica (su ecuación cartesiana es de la forma  $f(x, y) = 0$ , donde  $f$  es un polinomio), pero si  $p$  es irracional, la curva es no algebraica o trascendente. Cuando  $p$  es par la curva se aproxima a un rectángulo a medida que  $p$  crece, y cuando  $p$  es impar, la curva tiene una forma similar al caso par en el primer cuadrante, pero se va a infinito en el segundo y cuarto cuadrantes. Hablamos de hiperelipse si  $p > 2$ , y de hipoelipse si  $0 < p < 2$ . Para algunos valores de los parámetros, las curvas de Lamé tienen nombre propio: astroide si  $a = b$  y  $p = 2/3$ , bruja de Agnesi si  $a = b$  y  $p = 3$ , y «squircle» (a medio camino entre un cuadrado y un círculo, respectivamente *square* y *circle* en inglés, cf. [27]), si  $a = b = 1$  y  $p = 4$  (fig. 0.1).



**Figura 0.1.** De izquierda a derecha: astroide ( $a = b = 1$ ,  $p = 2/3$ ), bruja de Agnesi ( $a = b = 1$ ,  $p = 3$ ) y *squircle* ( $a = b = 1$ ,  $p = 4$ ).

Al margen de la curiosidad que toda generalización despierta en matemáticas, el interés más reciente por este tipo de curvas proviene de la arquitectura y el diseño. La superelipse, curva cerrada de ecuación

$$\left| \frac{x}{a} \right|^p + \left| \frac{y}{b} \right|^p = 1, \quad a, b > 0, \quad (0.1)$$

con  $p > 2$ , se convirtió en un modelo para el diseño arquitectónico y de mobiliario escandinavo a lo largo de la década de 1960 después de que el polímata danés Piet Hein (1905–1996) aplicara al trazado de una rotonda en una plaza rectangular de Estocolmo, Sergels Torg, el caso en que  $p = 2.5$ ,  $a = 6$  y  $b = 5$  (fig. 0.2). Al planificar la forma de esta plaza se desechó la elipse porque sus extremos puntiagudos dificultarían el flujo del tráfico a su alrededor y, además, no encajaba armoniosamente en el espacio rectangular disponible. Fue entonces cuando Hein propuso la superelipse. A medida que  $p$  disminuye de 2 a 1 en (0.1), los óvalos (Hein los llamó subelipses) se vuelven más puntiagudos en los extremos; cuando  $p = 1$ , la curva es un rombo; cuando  $p < 1$ , los cuatro lados del rectángulo se transforman en curvas cóncavas, cuya concavidad aumenta a medida que  $p$  tiende a 0, y para  $p = 0$  degeneran en dos líneas rectas perpendiculares; cuando  $p > 2$  tiende a infinito, el óvalo se aplana cada vez más hasta que en el límite se convierte en un rectángulo. La página web [26] permite comprobar interactivamente este comportamiento. Hein ajustó la razón  $a/b$  en (0.1) a las dimensiones de la plaza y se decidió por el exponente  $p$  que, bajo su consideración, hace esta curva más estética y agradable a la vista, aunque otros arquitectos han sugerido tomar  $p = e \approx 2.7$  [9, 10].

Hein también exploraría el sólido de revolución obtenido al girar la superelipse alrededor de su eje mayor. Denominado «superhuevo» («*superegg*», en inglés), este sólido, que ha sido reproducido a muy distintos tamaños, como objeto de regalo y como escultura [29], tiene curvatura cero en sus extremos y, a diferencia de un elipsoide, puede ser puesto de pie sobre una mesa sin caerse.

Es oportuno mencionar aquí que Apple utiliza igualmente superelipses en sus diseños a partir del iOS7 (anteriormente usaba cuadrados con esquinas redondeadas; véase, por ejemplo, [28] y las referencias que allí se enlazan).

La circunferencia es una de las primeras formas geométricas con las que nos encontramos. Se trata de un objeto «perfecto», y nuestra familiaridad con ella puede hacernos perder de vista su relevancia. Las funciones seno y coseno surgen de modo natural cuando intentamos describirla. En este trabajo nos proponemos desarrollar una trigonometría análoga a la de la circunferencia para la  $p$ -circunferencia o « $p$ -squircle», la superelipse definida como el conjunto de los puntos  $(x, y)$  del plano que satisfacen la ecuación  $|x|^p + |y|^p = 1$  para algún número real  $p \geq 1$ . La circunferencia unidad del plano euclídeo se obtiene para  $p = 2$ , y nuestro trabajo generaliza este caso.

Como guía básica para nuestra exploración hemos seguido la recientísima referencia [24], donde se proponen desde ejercicios hasta pequeños proyectos a nivel de grado para incentivar la investigación en matemáticas y la consulta de bibliografía. Los autores consideran los efectos sobre las funciones trigonométricas clásicas cuando se cambia la definición de distancia euclídea por una  $p$ -distancia, con  $p \geq 1$  arbitrario. Además de parametrizar de forma natural la circunferencia unidad, las funciones trigonométricas usuales, seno y coseno, están relacionadas



**Figura 0.2.** Sergels Torg (Plaza Sergel) en Estocolmo, Suecia. Foto: A. Bengtsson, <https://www.flickr.com/people/barracuda666/> (CC BY-SA 2.0).

geoméricamente con magnitudes como el área de un sector circular, la longitud del arco y la medida del ángulo subtendido; se pretende estudiar de qué forma la variación en la distancia afecta a las funciones trigonométricas y al valor de  $\pi$ , así como obtener nuevas funciones y constantes que desempeñen papeles análogos en el  $p$ -contexto.

A medida que estudiemos las correspondientes funciones trigonométricas usando únicamente cálculo elemental, apreciaremos la importancia y el papel de  $\pi$  y tendremos ocasión de conectar nuestra investigación, siquiera someramente, con las integrales elípticas, las funciones especiales, la geometría no euclídea, la teoría de números, el análisis complejo y las ecuaciones en derivadas parciales.



## Las funciones trigonométricas usuales

Comenzamos recordando las definiciones de las funciones trigonométricas usuales a partir de las razones trigonométricas sobre la circunferencia unidad. A continuación, definiremos las funciones trigonométricas mediante ecuaciones diferenciales. Nos apoyaremos en dos teoremas fundamentales sobre la existencia y unicidad de soluciones, tanto de problemas de valores iniciales como de problemas acoplados en los que intervienen dos ecuaciones diferenciales. Tras introducir las funciones trigonométricas como solución de problemas de este tipo, las definiremos a través de integrales.

### 1.1. Funciones trigonométricas sobre la circunferencia unidad

Esta definición surge con la necesidad de establecer una unidad para medir ángulos. En  $\mathbb{R}^2$ , la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  corresponde a la circunferencia de radio 1 centrada en  $(0, 0)$ . Cualquier recta que pase por el origen interseca a la circunferencia unidad en un punto situado a  $t$  unidades del punto  $(1, 0)$ , medidas a lo largo del arco de circunferencia. Definimos el radián como la medida del ángulo que subtiende un arco de longitud 1 sobre la circunferencia unidad. De este modo, la recta que pasa por nuestro punto subtiende un ángulo de  $t$  radianes, e introducimos  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$  como la abscisa y la ordenada, respectivamente, del punto de intersección. Tenemos así que  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Puesto que una vuelta completa alrededor de la circunferencia subtiende  $2\pi$  radianes, cada punto de la circunferencia es identificable con una cantidad numerable de ángulos, que difieren entre sí en un múltiplo de  $2\pi$  radianes. En particular, esto significa que las funciones  $\sin(t)$  y  $\cos(t)$  son periódicas, de periodo  $2\pi$  radianes:

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t), \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El parámetro  $t$  especifica simultáneamente la longitud de arco, el ángulo y el área del sector de amplitud  $t$ . En efecto, un sector determinado por un ángulo

de  $t$  radianes tiene un área igual a  $t/2\pi$  veces el área de todo el círculo unidad, es decir, un área igual a

$$\frac{t}{2\pi} \pi = \frac{t}{2}.$$

Por consiguiente, las parametrizaciones en términos del ángulo, de la longitud de arco y del área conducen todas a las mismas funciones. Estas características son propias de la geometría euclídea y, como veremos, se pierden al trabajar con las geometrías correspondientes a  $p$ -normas, con  $p \neq 2$ , que exploraremos en el próximo capítulo.

## 1.2. Definición de una función a través de un PVI

La idea de utilizar ecuaciones diferenciales para definir las funciones trascendentes aparece en varios libros de texto sobre cálculo. Aquí seguiremos la exposición de Cha [6], basada en [4, Chapter 4].

Un problema de valores iniciales (PVI) consiste en una ecuación diferencial junto con un valor concreto, que se da como condición inicial. Consideraremos ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \quad (1.1)$$

donde la función  $F(t, y)$  es de clase  $C^1$ .

Enunciamos ahora, sin demostración, el teorema que constituirá la piedra angular de los argumentos de esta sección.

**Teorema 1.1 (Picard-Lindelöf).** *Todo problema de valores iniciales de la forma*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde la función  $F(t, y)$  es de clase  $C^1$ , tiene una solución única  $y = f(t)$  en algún intervalo abierto que contiene a  $t_0$ .

*Demostración.* Cf. [22, Theorem 2.2]. □

Intuitivamente, este teorema expresa que, en cada punto del plano  $OTY$ , la ecuación (1.1) determina la pendiente de la recta tangente a la curva solución que pasa por dicho punto y, por lo tanto, define un campo de direcciones. El Teorema 1.1 establece que cuando una partícula es liberada en el punto  $(t_0, y_0)$ , la partícula debe viajar a lo largo de la curva solución determinada por este campo de direcciones, al menos durante un breve periodo de tiempo. Una importante consecuencia de este teorema es que en el campo de direcciones no puede haber dos curvas solución distintas que se crucen. De lo contrario, el punto de intersección constituiría una condición inicial, lo que definiría un PVI con dos soluciones diferentes, contradiciendo la afirmación de unicidad del teorema.

### 1.2.1. Ejemplo: función exponencial

Dado el PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y(t) \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (1.2)$$

el Teorema 1.1 asegura la existencia de una solución única para (1.2), la cual vamos a definir como  $y(t) = \exp(t)$ . A partir de esta definición, nos gustaría comprobar que se cumplen las propiedades de la función exponencial con la que siempre hemos tratado: para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ ;
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ ;
- $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$ ;
- $\exp(xy) = (\exp(x))^y$ .

La estrategia para demostrar estas propiedades consiste en construir un PVI apropiado a cada caso, comprobar que ambos miembros de la igualdad son solución del PVI construido, y apelar a la afirmación de unicidad del Teorema 1.1. Llamaremos «prueba al estilo PVI» a esta manera de proceder.

Para verificar que  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ , tomamos  $f_1(t) = \exp(t + a)$  y  $f_2(t) = \exp(t) \exp(a)$ , donde consideramos  $a$  como una constante arbitraria. Ahora derivamos, teniendo en cuenta el problema (1.2) y la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}(f_1(t)) = \frac{d}{dt}(\exp(t + a)) \frac{d}{dt}(t + a) = \exp(t + a) = f_1(t).$$

Además,  $f_1(0) = \exp(a)$ , así que  $f_1(t)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y(t) \\ y(0) = \exp(a). \end{cases}$$

Por otro lado,  $f_2(t)$  también lo satisface, ya que, de nuevo por (1.2),

$$\frac{d}{dt}(f_2(t)) = \exp(a) \frac{d}{dt}(\exp(t)) = \exp(a) \exp(t) = f_2(t),$$

$$f_2(0) = \exp(0) \exp(a) = \exp(a).$$

Consecuentemente, ambas expresiones son solución del mismo PVI, por lo que deben ser iguales. Y como  $a \in \mathbb{R}$  es arbitrario, la identidad  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$  queda probada para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Las demás propiedades de la exponencial se pueden comprobar de manera análoga. Por ejemplo, para la última, sean  $f_1(t) = \exp(at)$  y  $f_2(t) = (\exp(t))^a$ . Es fácil verificar que ambas funciones son solución del PVI siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ay(t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Otra vez gracias a la unicidad, se concluye que  $f_1(t) = f_2(t)$ .

Como consecuencia de las propiedades de la exponencial, se deduce que el rango de la función  $y = \exp(t)$  son todos los reales positivos. En efecto, la recta  $y = 0$  es solución de la ecuación diferencial  $dy/dt = y$ . Por tanto, la gráfica de  $y = \exp(t)$  debe estar siempre por encima del eje  $OT$ , puesto que, de lo contrario, intersecaría a  $y = 0$ . En particular,  $(\exp(t))' = \exp(t) > 0$  para todo  $t$ , de manera que  $y = \exp(t)$  es una función estrictamente creciente. Tomemos  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $\exp(\varepsilon) > 1$ , porque  $\exp(0) = 1$ . Sigue que  $\exp(n\varepsilon) = (\exp(\varepsilon))^n$  se hace arbitrariamente grande cuando  $n$  crece. El teorema del valor intermedio permite inferir entonces que el rango de  $\exp(t)$  contiene a  $(1, \infty)$ . En combinación con la segunda ley exponencial,  $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ , esto implica, a su vez, que dicho rango contiene también al intervalo  $(0, 1)$ , completando la prueba de nuestra afirmación.

Es importante no pasar por alto en el desarrollo del argumento anterior que el Teorema 1.1 es de carácter local, así que, de momento, nada asegura que  $\exp(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . El siguiente Teorema 1.3 garantizará que  $\exp(t)$  no presenta asíntotas verticales. Para demostrarlo, nos apoyaremos en un lema previo.

**Lema 1.2.** *Supongamos que*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\int_{y_0}^{y(T)} f(u)^{-1} du = T$$

para todo  $T$  para el que la integral esté definida.

*Demostración.* Efectuando el cambio de variable

$$u = y(t), \quad \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} = f(y),$$

obtenemos:

$$\int_{y_0}^{y(T)} f(u)^{-1} du = \int_0^T f(y)^{-1} \frac{dy}{dt} dt = \int_0^T dt = T.$$

□

**Teorema 1.3.** *Se considera el PVI (1.2), con  $f(y) > 0$  para todo  $y \geq y_0$ . Entonces,  $y(t)$  posee una asíntota vertical en  $t = T$  si, y sólo si,*

$$\int_{y_0}^{\infty} f(y)^{-1} dy \tag{1.3}$$

converge a  $T$ .

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $y(t)$  tiene una asíntota vertical: existe  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow T^-} y(t) = \infty$ . Utilizando primero la definición de integral impropia y luego el Lema 1.2 encontramos que

$$\int_{y_0}^{\infty} f(y)^{-1} dy = \lim_{t \rightarrow T^-} \int_{y_0}^{y(t)} f(y)^{-1} dy = \lim_{t \rightarrow T^-} t = T.$$

Así pues, la integral (1.3) converge a  $T$ .

Recíprocamente, supongamos que la integral (1.3) converge a  $T \in \mathbb{R}$ . Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  para el que exista  $y(t_0)$ . Utilizando primero el Lema 1.2 y luego que  $f(y) > 0$  para todo  $y \geq y_0$ , resulta la siguiente estimación:

$$t_0 = \int_{y_0}^{y(t_0)} f(y)^{-1} dy < \int_{y_0}^{\infty} f(y)^{-1} dy = T.$$

De este modo,  $t_0 < T$  y, además,  $y(t_0) \rightarrow \infty$  cuando  $t_0 \rightarrow T^-$ . Se concluye que  $y(t)$  presenta una asíntota vertical en  $t = T$ . □

A la luz del Teorema 1.3 podemos ya estar seguros de que nuestra definición de  $\exp(t)$  carece de asíntotas verticales, por cuanto

$$\int_1^{\infty} y^{-1} dy$$

diverge.

### 1.2.2. Ejemplo: función logarítmica

A la hora de intentar definir la función logarítmica a través de un PVI, es conveniente estudiar de qué manera se relacionan dos PVI cuando sus soluciones son inversas la una de la otra.

Supongamos que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  satisfacen, respectivamente, los PVI

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = F_1(t, y_1) \\ y_1(a) = b, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dy_2}{dt} = F_2(t, y_2) \\ y_2(b) = a. \end{cases}$$

Asumimos, además, que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  son inversas la una de la otra.

Un resultado básico de la derivación implícita es el siguiente [21, p. 215]:

**Proposición 1.4.** *Si  $f$  es una función inyectiva y derivable cuya función inversa  $f^{-1}$  también es derivable, entonces*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (1.4)$$

siempre que el denominador no se anule.

*Demostración.* Para comprobarlo, basta advertir que  $f(f^{-1}(x)) = x$  y aplicar la regla de la cadena.  $\square$

Ahora, teniendo en cuenta lo anterior podemos establecer una relación entre  $F_1$  y  $F_2$ :

$$F_2(t, y) = \frac{1}{F_1(y, t)}.$$

Obsérvese que  $F_2$  se obtiene a partir de  $F_1$  sin más que intercambiar las variables y tomar recíprocos.

Bajo este razonamiento y ya que se espera que la función logarítmica,  $\ln(t)$ , sea la inversa de  $\exp(t)$ , se propone definir  $y(t) = \ln(t)$  como la solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}, \\ y(1) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo, la correspondiente versión integral es

$$\ln(t) = \int_1^t \frac{du}{u}. \quad (1.6)$$

A partir de (1.6) se advierte inmediatamente que el dominio de  $\ln(t)$  es  $(0, \infty)$ , porque el integrando,  $1/u$ , es continuo en este intervalo. En particular, vemos que el dominio de  $\ln(t)$  coincide con el rango de  $\exp(t)$ .

Damos a continuación una demostración al estilo PVI del hecho de que  $\exp(t)$  y  $\ln(t)$  son inversas la una de la otra. Definimos  $f_1(t) = (\exp \circ \ln)(t)$  y  $f_2(t) = t$ , para cada  $t > 0$ . Nótese que  $f_1(t)$  está definida para  $t > 0$ , que es el dominio de  $\ln(t)$ . Derivamos  $f_1(t)$  directamente usando (1.2), (1.5) y la regla de la cadena para obtener

$$\frac{df_1(t)}{dt} = \frac{(\exp \circ \ln)(t)}{t} = \frac{f_1(t)}{t}.$$

Además,  $f_1(1) = 1$  por (1.5) y (1.2). Esto demuestra que  $f_1(t)$  es solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Por otra parte, es fácil comprobar que  $f_2(t)$  satisface el mismo PVI. En consecuencia,  $f_1(t) = f_2(t)$ , es decir,  $(\exp \circ \ln)(t) = t$ , para  $t > 0$ . Similarmente, definimos  $f_3(t) = (\ln \circ \exp)(t)$  y  $f_4(t) = t$  para todo  $t$ . Como el rango de  $\exp t$  son los reales positivos,  $f_3(t)$  está definida para todo  $t$ . Además, podemos demostrar mediante un cálculo directo que tanto  $f_3(t)$  como  $f_4(t)$  son soluciones del PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, en virtud de (1.2), (1.5) y la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{df_3(t)}{dt} = \frac{1}{\exp(t)} \exp(t) = 1.$$

Los cálculos restantes son igual de directos y permiten concluir que las funciones  $\ln(t)$  y  $\exp(t)$  son inversas una de la otra, como pretendíamos.

### 1.3. Definición de funciones a través de un PVIA

Un problema de valores iniciales acoplado (PVIA) consiste en una pareja de PVI, de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(t, x, y), \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Al igual que con (1.1), supondremos que las funciones  $F_1(t, x, y)$  y  $F_2(t, x, y)$  son de clase  $C^1$  y enunciaremos, sin demostración, un teorema que garantiza la existencia y unicidad de soluciones para los PVIA (cf. [3, p. 205]).

**Teorema 1.5 (Teorema fundamental de los PVIA).** *Todo PVIA tiene un único par de soluciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  en un intervalo abierto que contiene a  $t_0$ .*

#### 1.3.1. Funciones seno y coseno

Definimos las funciones  $x(t) = \cos(t)$  e  $y(t) = \sen(t)$  como la única solución del PVIA

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Al igual que hicimos con la función exponencial, nos gustaría encontrar una demostración al estilo PVI para la identidad trigonométrica fundamental

$$y^2(t) + x^2(t) = 1 \equiv \text{sen}^2(t) + \text{cos}^2(t) = 1. \quad (1.8)$$

Sea  $f(t) = y^2(t) + x^2(t)$ . En virtud de (1.7) y la regla de la cadena, se tiene que

$$f'(t) = 2y(t)y'(t) + 2x(t)x'(t) = 2(y(t)x(t) - x(t)y(t)) = 0,$$

con  $f(0) = 1$ . Así pues,  $f(t)$  es solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, la función constante  $c(t) = 1$  también es, evidentemente, solución del mismo PVI. Por la unicidad del Teorema 1.5, se cumple (1.8) con nuestra definición.

Pasamos ahora a comprobar las fórmulas para la suma de ángulos:

$$\begin{cases} y(t+a) = y(t)x(a) + x(t)y(a) \\ x(t+a) = x(t)x(a) - y(t)y(a). \end{cases} \quad (1.9)$$

Para ello, usaremos lo que podríamos llamar «prueba al estilo PVIA». Consideremos el par de funciones  $f_1(t) = \text{sen}(t+a)$ ,  $f_2(t) = \text{cos}(t+a)$  y, por otra parte, el par  $f_3(t) = \text{sen}(t)\text{cos}(a) + \text{cos}(t)\text{sen}(a)$ ,  $f_4(t) = \text{cos}(t)\text{cos}(a) - \text{sen}(t)\text{sen}(a)$ . Usando (1.7) y la regla de la cadena advertimos que ambos pares son solución del problema acoplado

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = \text{sen}(a) \\ y_2(0) = \text{cos}(a). \end{cases}$$

La afirmación de unicidad del Teorema 1.5 ya garantiza la verificación de las fórmulas (1.9).

Obsérvese que si proyectamos en el plano  $OXY$  el campo de direcciones generado por (1.7), conseguimos un nuevo campo de direcciones asociado a  $dy/dx$ . En virtud de (1.7) y la regla de la cadena,

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{x}{y}$$

implica

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Resolviendo por variables separadas:

$$\begin{aligned}\int y \, dy &= -\int x \, dx, \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + K, \\ y &= \pm\sqrt{2K - x^2},\end{aligned}$$

y podemos calcular  $K$  con los valores iniciales de (1.7): como  $y(0) = 0$  y  $x(0) = 1$ , se sigue que  $0 = \pm\sqrt{2K - 1}$ , de donde  $K = 1/2$ . Así que, como evidencia (1.8), la proyección de la curva solución en el plano  $OXY$  descansa sobre la circunferencia unidad.

Recordemos que el ángulo  $\theta$  del punto  $(x, y)$  en coordenadas polares viene dado por  $\theta = \arctan(y/x)$ . Un breve cálculo muestra que  $d\theta/dt = 1$ . Además,

$$\theta(0) = \arctan\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right) = 0.$$

Obtenemos así que  $\theta(t) = t$ . En otras palabras, una partícula liberada en el punto  $(1, 0)$  de este campo de direcciones se moverá alrededor de la circunferencia a una velocidad angular constante de 1 radián por unidad de tiempo. Esta propiedad conecta nuestro enfoque PVIA con las definiciones usuales del seno y el coseno.

### 1.3.2. Funciones arcoseno y arcocoseno

Podemos definir la inversa de  $y(t) = \sin(t)$  teniendo en cuenta que  $dy/dt = x(t)$  y apoyándonos en la expresión (1.4).

En efecto, el proceso de definición de  $y^{-1}(t) = \arcsen(t)$  parte de que  $dy/dt = x(t)$  y  $x^2(t) + y^2(t) = 1$  implican

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - y^2(t)}.$$

Utilizando ahora (1.4) encontramos que

$$\frac{d(y^{-1}(t))}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - (y(y^{-1}(t))))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

De aquí, resulta natural proponer la definición de  $y^{-1}(t) = \arcsen(t)$  como la única solución del PVI

$$\begin{cases} \frac{d(y^{-1}(t))}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

No hay que olvidar que es necesario hacer este razonamiento en un intervalo que contenga a  $t = 0$ , sobre el cual  $y = \text{sen}(t)$  sea inyectiva. Tal intervalo existe porque  $y'(0) > 0$ .

Por el primer teorema fundamental del cálculo, la anterior definición vía PVI es equivalente a su versión integral

$$\text{arc sen}(t) = y^{-1}(t) = \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (1.10)$$

Como el integrando  $f(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$  es continuo en  $(-1, 1)$ , el dominio de  $\text{arc sen}(t)$  contiene a este intervalo. Como, además, existen los límites

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \lim_{t \rightarrow -1^+} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

la función  $\text{arc sen}(t)$  puede ser extendida con continuidad al intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Para corroborar que tales límites existen (es decir, que las respectivas integrales impropias convergen), observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(-u\sqrt{1-u^2}) &= -\sqrt{1-u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{2u^2-1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{-2(1-u^2)+1}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= -2\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Despejando ahora  $1/\sqrt{1-u^2}$  e integrando,

$$\int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -t\sqrt{1-t^2} + 2 \int_0^t \sqrt{1-u^2} du.$$

De esta expresión podemos deducir que

$$\text{arc sen}(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \frac{\pi}{2},$$

por cuanto

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$$

es un cuarto del área del círculo de radio 1. De igual manera se obtiene que

$$\text{arc sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

La definición de la función  $x^{-1}(t) = \text{arc cos}(t)$  se puede hacer por traslación de  $\text{arc sen}(t)$ , poniendo

$$\text{arc cos}(t) = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}(t).$$

## 1.4. Las funciones trigonométricas vía ecuaciones integrales

Es posible definir  $\sin(t)$  y  $\cos(t)$  a través de una integral. En efecto, partiendo de la expresión (1.10) y atendiendo a la condición inicial  $y(0) = 0$  de (1.7), obtenemos:

$$t = \int_0^{y(t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (1.11)$$

Definimos entonces como  $\sin(t)$  a la solución  $y(t)$  de esta última ecuación integral. De manera similar, considerando esta vez la condición inicial  $x(0) = 1$  de (1.7), podemos definir  $\cos(t) = x(t)$  como la función que cumple que

$$t = \int_{x(t)}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (1.12)$$

Al igual que se hizo con las definiciones anteriores, se prueba que las que acabamos de dar satisfacen la identidad fundamental de la trigonometría, es decir, que

$$x(t) = \sqrt{1-y^2(t)}. \quad (1.13)$$

Ciertamente, efectuando el cambio de variable  $s = \sqrt{1-u^2}$  en (1.11) encontramos que  $u = \sqrt{1-s^2}$  y  $du = \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} ds$ , y, por lo tanto,

$$\int_0^{y(t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_1^{\sqrt{1-y^2(t)}} \frac{1}{s} \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} ds = \int_{\sqrt{1-y^2(t)}}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = t. \quad (1.14)$$

Comparando (1.14) con (1.12) ya se infiere (1.13).

Las definiciones (1.11) y (1.12) muestran, además, que  $y(0) = 0$  y  $x(0) = 1$ . Finalmente, derivando (1.11) y (1.12) resulta

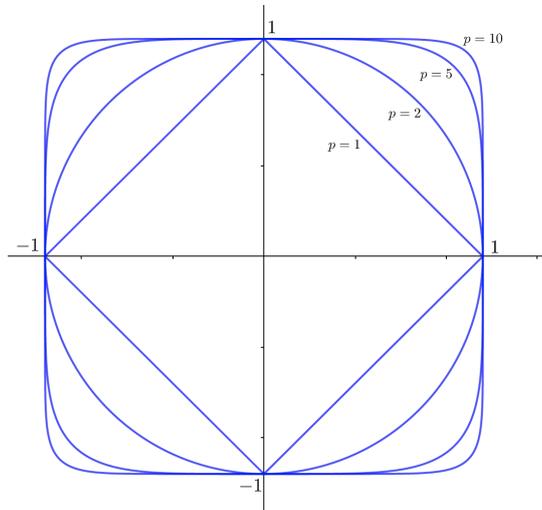
$$1 = \frac{1}{\sqrt{1-y^2(t)}} y'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2(t)}} x'(t),$$

así que  $y'(t) = \sqrt{1-y^2(t)} = x(t)$  y  $x'(t) = -\sqrt{1-x^2(t)} = -y(t)$ . Consecuentemente,  $y(t)$  y  $x(t)$  satisfacen el PVIA (1.7) y deben ser las mismas funciones coseno y seno por él definidas.



## Funciones $p$ -trigonométricas

El desarrollo del capítulo anterior giró en torno a la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Ahora trataremos de hacer un desarrollo análogo para la trigonometría de la  $p$ -circunferencia unidad o « $p$ -squircle», es decir, para los puntos  $(x, y)$  del plano que satisfacen la ecuación  $|x|^p + |y|^p = 1$ , con  $p \geq 1$ . Que la gráfica de este lugar geométrico sea intermedia entre un cuadrado y una circunferencia (fig. 2.1) justifica la denominación *squircle*, contracción de los términos en inglés *square* (cuadrado) y *circle* (circunferencia).



**Figura 2.1.** Gráfica de las  $p$ -circunferencias unidad  $|x|^p + |y|^p = 1$ , para  $p = 1, 2, 5, 10$ .

Observemos, de nuevo, que es necesario tomar valor absoluto en esta ecuación para obtener una curva cerrada (fig. 0.1).

## 2.1. Definición mediante un PVIA

A continuación modificaremos el PVIA (1.7) para definir uno nuevo cuyas soluciones  $x(t)$  e  $y(t)$  hagan que  $g(t) = x^p(t) + y^p(t)$  se mantenga constante; estas soluciones serán las generalizaciones de  $\text{sen}(t)$  y  $\text{cos}(t)$  buscadas. Más precisamente, consideramos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^{p-1}(t) \\ \frac{dy}{dt} = x^{p-1}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Las únicas soluciones,  $x(t)$  y  $y(t)$ , de este PVIA efectivamente consiguen que  $g(t)$  sea constante:

$$\begin{aligned} \frac{d(g(t))}{dt} &= p x^{p-1}(t) \frac{dx}{dt} + p y^{p-1}(t) \frac{dy}{dt} \\ &= -p x^{p-1}(t) y^{p-1}(t) + p y^{p-1}(t) x^{p-1}(t) = 0. \end{aligned}$$

Como, además,  $g(0) = 1$  debido a las condiciones iniciales, necesariamente  $g(t) \equiv 1$ . Por lo tanto, podemos definir las funciones « $p$ -cosquine» o  $p$ -coseno,  $\text{cos}_p(t) = x(t)$ , y « $p$ -squine» o  $p$ -seno,  $\text{sen}_p(t) = y(t)$ , como el único par de soluciones de (2.1).

Cuando  $p$  es un entero positivo par obtenemos el  $p$ -squircle unidad completo a partir de la ecuación

$$\text{cos}_p^p(t) + \text{sen}_p^p(t) = 1, \quad (2.2)$$

pero para otros valores de  $p$  debemos tomar módulos, o bien restringir las soluciones al primer cuadrante y extenderlas por simetría.

Cabe definir otras funciones «squigonométricas» a través de los cocientes habituales:

$$\begin{aligned} \tan_p(t) &= \frac{\text{sen}_p(t)}{\text{cos}_p(t)}, & \sec_p(t) &= \frac{1}{\text{cos}_p(t)}, \\ \cot_p(t) &= \frac{1}{\tan_p(t)}, & \csc_p(t) &= \frac{1}{\text{sen}_p(t)}. \end{aligned}$$

Nombraremos las nuevas funciones haciendo referencia a  $p$ . Por ejemplo, la función  $\tan_p(t)$  será la « $p$ -tanquine» o  $p$ -tangente.

Las definiciones de las funciones  $p$ -trigonométricas cumplen las propiedades de las funciones trigonométricas usuales. A modo de ilustración, esbozaremos la verificación de la paridad del  $p$ -coseno y la imparidad del  $p$ -seno mediante una demostración al estilo PVIA. Para probar que

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t), \end{cases}$$

consideramos, por un lado, el par  $f_1(t) = x(-t)$ ,  $f_2(t) = y(-t)$  y, por otro, el par  $f_3(t) = x(t)$ ,  $f_4(t) = -y(t)$ . Teniendo en cuenta (2.1) y la regla de la cadena, se obtiene fácilmente que ambos pares de funciones satisfacen el PVIA

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2^{p-1}(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1^{p-1}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Ahora basta con aplicar la afirmación de unicidad del Teorema 1.5.

## 2.2. Los nuevos valores de $\pi$

Las figs. 2.2 y 2.3 muestran las gráficas de las funciones  $\text{sen}_4(t)$ ,  $\text{cos}_4(t)$  y  $\text{tan}_4(t)$ . Al igual que ocurre con el 4-*squircle*, dichas funciones presentan la apariencia de las funciones trigonométricas usuales pero con una forma más «achataada». Observamos también que el periodo del 4-seno y el 4-coseno es mayor que  $2\pi$ , y que la asíntota de la gráfica de la tangente es mucho mayor que el valor habitual  $t = \pi/2$ . Nos disponemos a buscar nuevos valores de  $\pi$  en función de  $p$ , que denotaremos  $\pi_p$ , más adecuados para reflejar estas características.

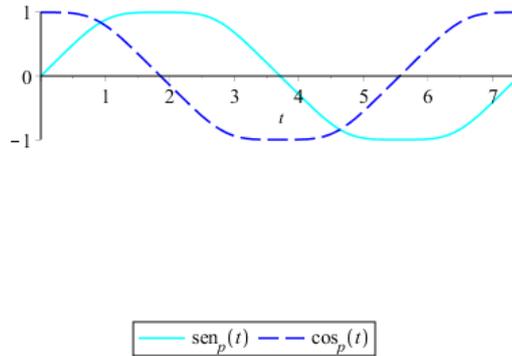
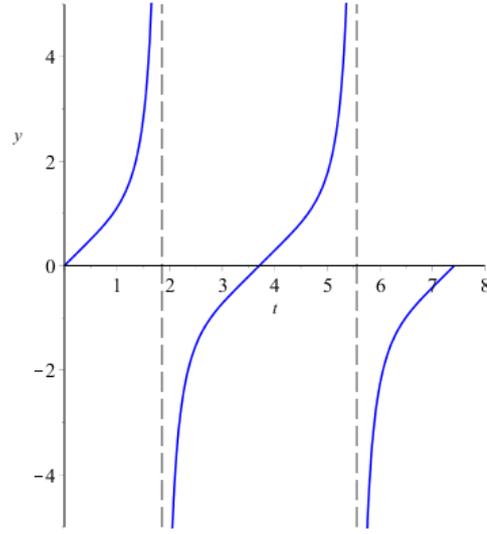


Figura 2.2. Gráfica de las funciones 4-seno y 4-coseno.

### 2.2.1. Funciones $p$ -arcoseno y $p$ -arcocoseno

Definiremos  $\pi_p$  por analogía con el hecho de que  $\pi = 2 \arcsen(1) = 2 \arccos(0)$ . A tal fin, necesitamos introducir las inversas de  $\text{sen}_p(t)$  y  $\text{cos}_p(t)$ .

Sea  $y = \text{sen}_p(t)$ . En virtud de (2.1) y (2.2),



**Figura 2.3.** Gráfica de la función 4-tangente.

$$\frac{dy}{dt} = x^{p-1}(t) = \cos_p^{p-1}(t) = (1 - y^p)^{(p-1)/p}.$$

Obtenemos así una ecuación diferencial de variables separadas, que resolvemos en  $t$ :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dy}{(1 - y^p)^{(p-1)/p}}, \\ t &= \text{arc sen}_p(y) = \int_0^y \frac{du}{(1 - u^p)^{(p-1)/p}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Similarmente, como  $\cos_p(0) = 1$ ,

$$t = \text{arc cos}_p(x) = \int_x^1 \frac{du}{(1 - u^p)^{(p-1)/p}}.$$

De esta manera nos vemos conducidos a la siguiente definición natural de  $\pi_p$ :

$$\pi_p = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t^p)^{(p-1)/p}} = 2 \text{arc sen}_p(1) = 2 \text{arc cos}_p(0). \quad (2.4)$$

En particular,

$$\pi_2 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 2 \text{arc sen}(1) = \pi,$$

y, por ejemplo,

$$\pi_1 = 2 \int_0^1 dt = 2,$$

$$\pi_4 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^4)^{3/4}}.$$

Aunque no es expresable como combinación de funciones elementales,  $\pi_p$  se puede escribir en términos de las funciones eulerianas Gamma y Beta. Recordemos que la función Gamma se define por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

mientras que la función Beta se define como

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt, \quad m, n > 0. \quad (2.5)$$

La relación entre ambas viene dada por

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m, n > 0. \quad (2.6)$$

La función Gamma satisface la ecuación

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0. \quad (2.7)$$

Efectuando el cambio de variable  $u = t^p$ ,  $du = pu^{(p-1)/p} dt$ , en (2.4) obtenemos

$$\pi_p = \frac{2}{p} \int_0^1 u^{1/p-1} (1-u)^{1/p-1} du = \frac{2}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{p} \frac{\Gamma^2(1/p)}{\Gamma(2/p)}. \quad (2.8)$$

Es bien conocido que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  y  $\Gamma(1) = 1$ . Por tanto, de nuevo

$$\pi_1 = 2 \frac{\Gamma^2(1)}{\Gamma(2)} = 2 \frac{\Gamma^2(1)}{1 \cdot \Gamma(1)} = 2\Gamma(1) = 2,$$

$$\pi_2 = \frac{\Gamma^2(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Estamos interesados en explorar el comportamiento asintótico de  $\pi_p$ , cuando  $p \rightarrow \infty$ . A tal efecto será necesario el resultado siguiente, cuya demostración incluimos por completitud.

**Proposición 2.1 (Fórmula de duplicación de Legendre).** *Se verifica:*

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{2^{1-2z}\sqrt{\pi}}, \quad z > 0. \quad (2.9)$$

*Demostración.* Fijemos  $z > 0$ , arbitrario. Haciendo  $x = y = z$  en (2.5) y (2.6), encontramos que

$$\frac{\Gamma^2(z)}{\Gamma(2z)} = B(z, z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt.$$

Si efectuamos en esta integral el cambio de variable  $t = (1+u)/2$ ,  $dt = du/2$ , resulta:

$$\frac{\Gamma^2(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^1 (1+u)^{z-1}(1-u)^{z-1} du = 2^{2-2z} \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du.$$

Por otro lado, el cambio  $t = u^2$ ,  $dt = 2u du$  en (2.5) conduce a

$$B(m, n) = 2 \int_0^1 u^{2m-1}(1-u^2)^{n-1} du, \quad m, n > 0.$$

Comparando esta expresión con la integral precedente y usando (2.6):

$$\frac{\Gamma^2(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} B\left(\frac{1}{2}, z\right) = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)}.$$

Como  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , basta despejar  $\Gamma(2z)$  para concluir (2.9).  $\square$

Quedamos ya en disposición de probar la siguiente:

**Proposición 2.2.** *Se tiene:*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \pi_p = 4.$$

*Demostración.* Sea  $p \geq 1$ . Partiendo de (2.8), aplicamos (2.9) con  $z = 1/p$ , junto con la propiedad (2.7), para obtener:

$$\begin{aligned} \pi_p &= \frac{2}{p} \frac{\Gamma^2(1/p)}{\Gamma(2/p)} \\ &= \frac{2}{p} 2^{1-2/p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma^2(1/p)}{\Gamma(1/p)\Gamma(1/p+1/2)} \\ &= \frac{2^{2-2/p}}{p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p+1/2)} \\ &= 2^{2-2/p} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/p+1)}{\Gamma(1/p+1/2)}. \end{aligned}$$

Pasando al límite, concluimos:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \pi_p = \sqrt{\pi} \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{2-2/p} \frac{\Gamma(1/p+1)}{\Gamma(1/p+1/2)} = 4\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)} = 4.$$

$\square$

También a partir de (2.8), la fórmula de reflexión de Euler,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad 0 < z < 1, \quad (2.10)$$

nos permite registrar algunos casos particulares. Por ejemplo:

$$\pi_3 = \frac{2\Gamma^2(1/3)}{3\Gamma(2/3)} = \frac{\sqrt{3}\Gamma^2(1/3)\Gamma(1/3)}{3\pi} = \frac{\Gamma^3(1/3)}{\pi\sqrt{3}},$$

$$\pi_4 = \frac{\Gamma^2(1/4)}{2\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{2\sqrt{\pi}}.$$

De aquí podemos despejar algunos valores de la función Gamma:

$$\Gamma(1/3) = \sqrt[3]{\pi\pi_3\sqrt{3}},$$

$$\Gamma(1/4) = \sqrt{2\pi_4\sqrt{\pi}}.$$

Le Lionnais [13, p. 46] y Chudnovsky [7], respectivamente, han probado que los números  $\Gamma(1/3)$  y  $\Gamma(1/4)$  son trascendentes.

Otros valores de  $\pi_p$  son expresables en términos de la función Beta. Por ejemplo, para  $p = 5$ , (2.8) proporciona

$$\pi_5 = \frac{2}{5} \frac{\Gamma^2(1/5)}{\Gamma(2/5)}.$$

Como

$$\Gamma(1/5)\Gamma(1-1/5) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/5)},$$

se tiene

$$\pi_5 = \frac{2}{5} \frac{\Gamma(1/5)}{\Gamma(2/5)} \frac{\pi}{\Gamma(4/5)\operatorname{sen}(\pi/5)}.$$

Para evaluar con exactitud  $\operatorname{sen}(\pi/5)$  podemos usar polinomios de Chebyshev [5]:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/5)} = \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

Aplicando (2.7), concluimos finalmente que

$$\pi_5 = 2\pi \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \frac{\Gamma(6/5)}{\Gamma(2/5)\Gamma(4/5)} = \frac{2\pi}{B(2/5, 4/5)} \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

El análisis precedente se ve reflejado en la fig. 2.4, que muestra la gráfica de  $\pi_p$  como función de  $p$ .

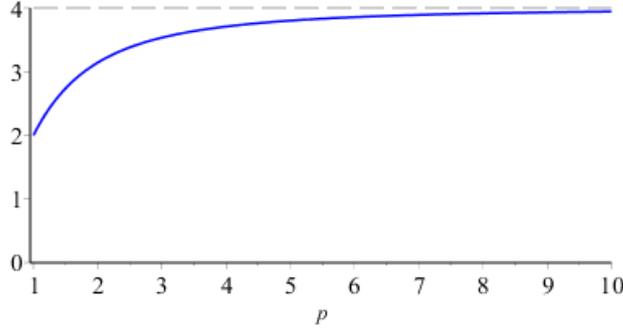


Figura 2.4. Gráfica de  $\pi_p$  como función de  $p$ .

### 2.2.2. Simetría y periodicidad

La consideración de  $\pi_p$  permite restringir los dominios de las funciones  $p$ -trigonométricas al intervalo  $0 \leq t \leq \pi_p/2$  y extenderlas por simetría, primero a  $0 \leq t \leq \pi_p$ , luego a  $0 \leq t \leq 2\pi_p$ , y finalmente, por periodicidad, a cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Más precisamente, simetrizando obtenemos:

$$\operatorname{sen}_p(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}_p(\pi_p - t), & \frac{\pi_p}{2} \leq t \leq \pi_p \\ -\operatorname{sen}_p(2\pi_p - t), & \pi_p \leq t \leq 2\pi_p. \end{cases}$$

$$\operatorname{cos}_p(t) = \begin{cases} -\operatorname{cos}_p(\pi_p - t), & \frac{\pi_p}{2} \leq t \leq \pi_p \\ \operatorname{cos}_p(2\pi_p - t), & \pi_p \leq t \leq 2\pi_p. \end{cases}$$

Por último, extendemos por periodicidad:

$$\operatorname{sen}_p(t + 2k\pi_p) = \operatorname{sen}_p(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y análogamente para el  $p$ -coseno. Con estas definiciones se comprueba que la función  $p$ -seno es impar y la  $p$ -coseno par, cualquiera que sea  $p \geq 1$ .

### 2.2.3. La función $p$ -arcotangente

En la sección 2.2.1 obtuvimos definiciones integrales de  $\operatorname{arc sen}_p(t)$  y  $\operatorname{arc cos}_p(t)$ . Procedemos ahora a deducir una definición integral de  $\operatorname{arctan}_p(t)$ . Esta definición nos conducirá a una nueva expresión para  $\pi_p$ .

Sea  $y = \tan_p(t)$ . Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\operatorname{cos}_p^2(t)}.$$

Por (2.2),

$$1 + \tan_p^p(t) = \frac{1}{\cos_p^p(t)},$$

y se infiere que

$$(1 + \tan_p^p(t))^{2/p} = \frac{1}{\cos_p^2(t)}.$$

Llegamos así a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (1 + y^p)^{2/p}$$

que resolvemos por separación de variables, obteniendo

$$t = \arctan_p(y) = \int_0^y \frac{du}{(1 + u^2)^{2/p}}.$$

Como, por (2.4), se tiene que  $\cos_p(\pi_p/2) = 0$  y  $\text{sen}_p(\pi_p/2) = 1$ , necesariamente

$$\tan_p\left(\frac{\pi_p}{2}\right) = \frac{\text{sen}_p(\pi_p/2)}{\cos_p(\pi_p/2)} = \infty.$$

De aquí,

$$\pi_p = 2 \int_0^\infty \frac{du}{(1 + u^p)^{2/p}}.$$

En particular, cuando  $p = 2$ ,

$$\pi_2 = 2 \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^2} = 2 \arctan(\infty) = \pi.$$

Es posible encontrar aun otra nueva expresión para  $\pi_p$ . Puesto que la  $p$ -circunferencia unidad tiene sólo cuatro ejes de simetría,

$$\cos_p\left(\frac{\pi_p}{4}\right) = \text{sen}_p\left(\frac{\pi_p}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{\pi_p}{4} = \arctan_p(1) = \int_0^1 \frac{du}{(1 + u^p)^{2/p}}$$

implica

$$\pi_p = 4 \int_0^1 \frac{du}{(1 + u^p)^{2/p}}.$$

En particular, cuando  $p = 2$ ,

$$\pi_2 = 4 \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2} = 4 \arctan(1) = \pi.$$



## Geometría de las $p$ -circunferencias

Estudiamos ahora una geometría en la que los *squircles* son realmente circunferencias, es decir, en la que el lugar geométrico descrito por la ecuación  $|x|^p + |y|^p = 1$  representa el conjunto de los puntos del plano que equidistan de otro punto central. Para ello necesitamos repensar el concepto de distancia en el contexto en el que vamos a trabajar.

### 3.1. La $p$ -norma en $\mathbb{R}^2$

Una métrica o distancia en  $\mathbb{R}^2$  es una aplicación  $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple, cualesquiera sean  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ , las siguientes propiedades:

- Es definida positiva:  $d(x, y) \geq 0$  y  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ .
- Es simétrica:  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- Satisface la desigualdad triangular:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Además, las métricas que estudiaremos son invariantes por traslaciones, es decir, para cualquier  $b \in \mathbb{R}^2$  se tiene que

$$d(x, y) = d(x + b, y + b), \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Cuando esto ocurre, podemos estudiar la métrica a través de una norma:

$$\|x\| = d(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

De hecho, la métrica euclídea, definida por

$$d_2(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

cumple las propiedades anteriores y es, desde luego, la más familiar. Consideraremos una generalización de esta métrica, llamada  $p$ -métrica, que definiremos reemplazando, de modo natural, el valor 2 por un número real  $p$  con  $1 \leq p < \infty$  y añadiendo valores absolutos, como anteriormente, para obtener

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

La norma asociada es

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Se comprueba sin dificultad que la  $p$ -métrica es una métrica invariante por traslaciones. En efecto, es definida positiva y simétrica gracias a que su expresión viene dada a través de valores absolutos. Además:

$$\begin{aligned} d_p(x + b, y + b) &= \left( |(x_1 + b_1) - (y_1 + b_1)|^p + |(x_2 + b_2) - (y_2 + b_2)|^p \right)^{1/p} \\ &= (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p} \\ &= d_p(x, y), \quad x, y, b \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad b = (b_1, b_2). \end{aligned}$$

Por último, que  $d_p$  cumple la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Minkowski en  $\mathbb{R}^2$ . Como es bien sabido, esta desigualdad expresa que

$$\left( \sum_{i=1}^2 |\alpha_i + \beta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^2 |\alpha_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^2 |\beta_i|^p \right)^{1/p} \quad (3.1)$$

cualesquiera sean  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $z = (z_1, z_2)$ , para obtener la desigualdad triangular basta con tomar  $\alpha_i = x_i - z_i$  y  $\beta_i = z_i - y_i$  ( $i = 1, 2$ ) en (3.1).

Cabe destacar que si  $p \neq 2$ , la  $p$ -métrica no es invariante por rotaciones. Es decir, cuando dos puntos  $A$  y  $B$  del plano se rotan respecto del origen, la  $p$ -distancia entre ambos no tiene por qué preservarse. Para comprobarlo, consideramos el siguiente contraejemplo. Identificamos  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  para interpretar un giro como la multiplicación por un número complejo unimodular  $e^{i\theta}$ . Sean  $z = (1, 0)$  y  $w = (0, 0)$ , y supongamos que se rota  $z$  mediante un giro de  $\pi/4$  radianes. Lo que se obtiene es que

$$\begin{aligned} d_p(z, w) &= \|z\|_p = 1, \\ d_p(e^{i\pi/4}z, w) &= \|e^{i\pi/4}z\|_p = \left( \frac{2}{2^{p/2}} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

y esta última expresión vale 1 solamente cuando  $p = 2$ .

Además de la métrica euclídea usual ( $p = 2$ ), el caso particular  $p = 1$  también está bien estudiado. La métrica  $d_1$  se conoce como geometría del taxi o métrica de Manhattan, porque modeliza la distancia que recorrería un coche a través de una manzana cuadrículada. Esta geometría se explora en detalle, por ejemplo, en [11]. Su estudio resulta útil como extremo inferior de las  $p$ -métricas

que satisfacen la desigualdad triangular. El extremo superior es  $p = \infty$ , que se define como

$$d(x, y) = \max(|x|, |y|) = \lim_{p \rightarrow \infty} (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \quad (x, y \in \mathbb{R}^2).$$

Un caso suficientemente ilustrativo en el estudio de las  $p$ -métricas es  $p = 4$ , porque el *4-squircle*, aunque no es extremal, sí que es radialmente asimétrico. Además, el valor  $p = 4$  permite que algunos cálculos se simplifiquen [23].

### 3.2. Parametrización en términos del área

Existen múltiples formas razonables de parametrizar una  $p$ -circunferencia. En el caso  $p = 2$ , todas ellas coinciden: el concepto de ángulo es geoméricamente interpretable, y, por otro lado, el área del sector circular de amplitud  $\theta \in [0, 2\pi]$  es  $\theta/2$  unidades cuadradas, lo que induce a elegir  $\theta$  como parámetro y hace que las definiciones clásicas de las funciones trigonométricas resulten perfectamente naturales. Para otros valores de  $p$ , la elección del parámetro no es tan obvia; tendremos ocasión de explorar algunas de estas variantes.

A continuación se verá que la definición propuesta en la sección 2.2.1,

$$\text{arc sen}_p(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^p)^{(p-1)/p}} dt,$$

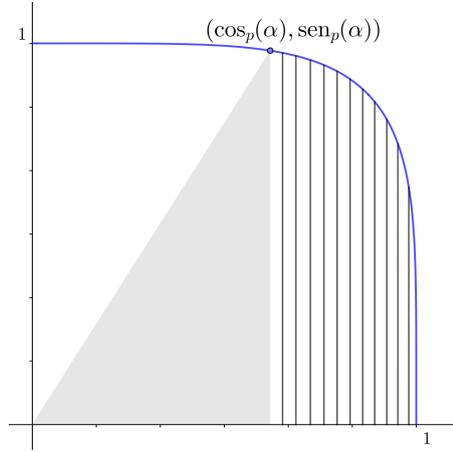
corresponde a una parametrización de la  $p$ -circunferencia en términos del área, esto es, a una parametrización tal que el área del  $p$ -círculo unidad es de  $\pi_p$  unidades cuadradas. El argumento que expondremos se debe a Levin [14].

Supongamos entonces que  $p \neq 2$ , y consideremos una parametrización de la  $p$ -circunferencia de la forma  $(\cos_p(\alpha), \text{sen}_p(\alpha))$ . Se pretende buscar una expresión para el parámetro  $\alpha$ , estableciendo una analogía con lo que sucede en el caso de un sector circular euclídeo. Es decir, que si tomamos  $(\cos_p(\alpha), \text{sen}_p(\alpha))$  como un punto de  $|x|^p + |y|^p = 1$ , el área del  $p$ -sector (región comprendida entre el semieje  $OX$  positivo y el segmento que conecta el origen con  $(\cos_p(\alpha), \text{sen}_p(\alpha))$ ) debe ser igual a la mitad del valor que toma  $\alpha$ . Este sector se divide en un triángulo más la mitad de un segmento  $p$ -circular (véase la fig. 3.1), cuya área combinada vale

$$\frac{\alpha(x)}{2} = \frac{x \sqrt[p]{1-x^p}}{2} + \int_x^1 \sqrt[p]{1-u^p} du.$$

O, si se quiere en términos de la segunda componente:

$$\frac{\alpha(y)}{2} = \frac{y \sqrt[p]{1-y^p}}{2} + \int_{(1-y^p)^{1/p}}^1 \sqrt[p]{1-u^p} du.$$



**Figura 3.1.** Área del  $p$ -sector.

Es posible conseguir una expresión más compacta derivando y volviendo a integrar luego. En efecto, si derivamos resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(\alpha(y)) &= (1 - y^p)^{1/p} - \frac{y}{p}(1 - y^p)^{1/p-1}py^{p-1} + 2 \left[ -\frac{y}{p}(1 - y^p)^{1/p-1}p(-y^{p-1}) \right] \\ &= (1 - y^p)^{1/p} - y^p(1 - y^p)^{1/p-1} + 2y^p(1 - y^p)^{1/p-1} \\ &= (1 - y^p)^{1/p-1}. \end{aligned}$$

Ahora, integrando:

$$\alpha(y) = \int_0^y \frac{d}{du}(\alpha(u)) du = \int_0^y (1 - u^p)^{1/p-1} du = \int_0^y \frac{1}{(1 - u^p)^{1-1/p}} du.$$

Esta es, justamente, la expresión que adopta  $\text{arc sen}_p(y)$ . En particular, cuando  $y = 1$  el parámetro  $\alpha$  vale  $\pi_p/2$ , de manera que el área del  $p$ -círculo es  $\pi_p$ .

Procediendo análogamente a partir de la expresión en función de  $x$ , se obtiene:

$$\alpha(x) = \int_x^1 \frac{1}{(1 - u^p)^{1-1/p}} du = \text{arc cos}_p(x).$$

Así, si tomamos como parámetro la primera componente encontramos que la parametrización de la  $p$ -circunferencia en el primer cuadrante sería

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \times [0, 1] \\ x &\longmapsto \left( x, \text{sen}_p(\text{arc cos}_p(x)) \right). \end{aligned}$$

Para tenerla en el resto de cuadrantes basta extenderla por simetría.

*Observación 3.1.* La  $p$ -circunferencia también puede ser parametrizada mediante coordenadas polares, en términos de la funciones trigonométricas usuales:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta), \end{cases} \quad r^p |\cos(\theta)|^p + r^p |\operatorname{sen}(\theta)|^p = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Entonces

$$r(\theta) = \frac{1}{(|\cos(\theta)|^p + |\operatorname{sen}(\theta)|^p)^{1/p}}.$$

La expresión en polares está basada en funciones bien conocidas e implementadas y, por lo tanto, puede ser útil para estimaciones numéricas y para trazar gráficas. Pero el hecho de que las  $p$ -normas no euclídeas carezcan de una noción natural de ángulo resta utilidad intrínseca a esta parametrización.

### 3.3. La $p$ -longitud de arco

Recordemos que la longitud de arco de una curva parametrizada  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , se puede obtener considerando un arco pequeño de la curva como la hipotenusa de un triángulo euclídeo infinitesimal con lados de longitudes  $dx$  y  $dy$ . Integrando entonces sobre el intervalo  $a \leq t \leq b$ , resulta

$$L_2 = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Para cambiar a la  $p$ -longitud de arco, simplemente ajustamos nuestra medida de la longitud de esta hipotenusa:

$$L_p = \int_a^b \sqrt[p]{\left|\frac{dx}{dt}\right|^p + \left|\frac{dy}{dt}\right|^p} dt.$$

Cuando se dispone de una función  $f \in C^1[a, b]$ , la  $p$ -longitud de arco de la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , puede ser calculada a través de la expresión

$$L_p = \int_a^b \sqrt[p]{1 + |f'(x)|^p} dx.$$

Esta última fórmula también se puede obtener como extensión de la correspondiente a  $p = 2$ : basta adaptar la distancia entre los puntos  $f(x_i)$  y  $f(x_{i+1})$  de una partición  $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  según los valores de  $p$ . Hecha esta adaptación, calculamos las sumas de Riemann apoyándonos en el teorema de valor medio y refinamos la partición para conseguir la expresión integral.

### 3.3.1. De nuevo, $\pi$

Anteriormente definimos  $\pi_p$  mediante la integral (2.4). El valor de  $\pi_p$  es el semiperiodo de  $\text{sen}_p(t)$ , y en la sección 3.2 acabamos de probar que también representa el área del  $p$ -círculo. Pero es posible dar otra definición en términos de la  $p$ -longitud de arco.

La  $p$ -circunferencia unidad

$$C_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_p((x, y), (0, 0)) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = 1\}$$

es simétrica respecto a los ejes coordenados  $OX$ ,  $OY$ . Pretendemos encontrar una nueva versión de  $\pi_p$ , que denotaremos  $\pi_p^{arc}$ , de manera que la longitud de  $C_p$  sea  $2\pi_p^{arc}$ . A tal fin, definimos

$$\pi_p^{arc} = \frac{1}{2} \int_{C_p} \left( \left| \frac{dx}{dt} \right|^p + \left| \frac{dy}{dt} \right|^p \right)^{1/p} dt. \quad (3.2)$$

Para obtener una expresión de  $\pi_p^{arc}$  parametrizamos el primer cuadrante de  $C_p$  mediante  $x = t^{1/p}$ ,  $y = (1 - t)^{1/p}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{p} t^{1/p-1}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{p} (1 - t)^{1/p-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

y, por simetría,

$$\pi_p^{arc} = \frac{2}{p} \int_0^1 [t^{1-p} + (1 - t)^{1-p}]^{1/p} dt. \quad (3.3)$$

Podemos obtener una segunda expresión de  $\pi_p^{arc}$  teniendo en cuenta que, también por simetría, la longitud total de  $C_p$  es 8 veces la longitud de  $C_p$  entre las rectas  $x = 0$  y  $x = y$ . En el primer cuadrante,  $y = (1 - x^p)^{1/p}$  y el punto de corte entre  $C_p$  y  $x = y$  se obtiene para  $x = 2^{-1/p}$ . Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p} (1 - x^p)^{1/p-1} (-px^{p-1}) = -(1 - x^p)^{1/p-1} x^{p-1},$$

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|^p = (1 - x^p)^{1-p} x^{p^2-p} = (x^{-p} - 1)^{1-p},$$

(3.2) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \pi_p^{arc} &= 4 \int_0^{2^{-1/p}} \left( 1 + \left| \frac{dy}{dx} \right|^p \right)^{1/p} dx \\ &= 4 \int_0^{2^{-1/p}} [1 + (x^{-p} - 1)^{1-p}]^{1/p} dx. \end{aligned}$$

Es posible dar una tercera expresión de  $\pi_p^{arc}$  parametrizando el primer cuadrante de la  $p$ -circunferencia mediante  $x(t) = \cos^{2/p}(t)$ ,  $y(t) = \operatorname{sen}^{2/p}(t)$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ , y usando simetría:

$$\pi_p^{arc} = \frac{4}{p} \int_0^{\pi/2} [\cos(t)^{2-p} \operatorname{sen}(t)^p + \operatorname{sen}(t)^{2-p} \cos(t)^p]^{1/p} dt.$$

Se demuestra [1] que  $\pi_p^{arc}$  alcanza su valor mínimo en  $p = 2$ , con

$$\pi_2^{arc} = \pi_2 = \pi.$$

Otra posible versión de  $\pi$  es la que deriva de la longitud de arco euclídea:

$$\begin{aligned} \pi_p^{euc} &= 4 \int_0^{2^{-1/p}} \sqrt{1 + [x^{p-1}(1-x^p)^{1/p-1}]^2} dx \\ &= \frac{4}{p} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos(t)^{4/p-2} \operatorname{sen}(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^{4/p-2} \cos(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Claramente,

$$\pi_p^{euc} = \pi_2^{arc} = \pi_2 = \pi.$$

Como caso particular, cuando  $p = 1$ , sin más que sustituir en las respectivas expresiones integrales obtenemos que

$$\pi_1^{arc} = 4, \quad \pi_1^{euc} = 2\sqrt{2}.$$

Cuando  $p = \infty$ ,

$$\pi_\infty^{arc} = \pi_\infty^{euc} = 4.$$

En efecto, es fácil verificar que

$$\begin{aligned} f_p(x) &= [1 + (x^{-p} - 1)^{1-p}]^{1/p} \chi_{[0, 2^{-1/p}]}(x) \\ &= \left[ 1 + \left( \frac{x^p}{1-x^p} \right)^{p-1} \right]^{1/p} \chi_{[0, 2^{-1/p}]}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \chi_{[0, 1]}(x), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \sqrt{1 + [x^{p-1}(1-x^p)^{1/p-1}]^2} \chi_{[0, 2^{-1/p}]}(x) \\ &= \left[ 1 + \left( \frac{x^p}{1-x^p} \right)^{2(p-1)/p} \right]^{1/2} \chi_{[0, 2^{-1/p}]}(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \chi_{[0, 1]}(x). \end{aligned}$$

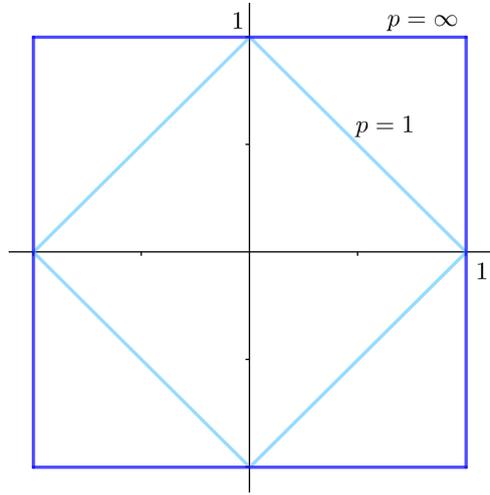
Además, al menos para  $p$  suficientemente grande,

$$|f_p(x)| \leq 2 \quad \text{y} \quad |g_p(x)| \leq \sqrt{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Por tanto, el teorema de la convergencia dominada permite concluir que

$$\begin{aligned}\pi_{\infty}^{arc} &= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 f_p(x) dx = 4 \int_0^1 dx = 4, \\ \pi_{\infty}^{euc} &= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 g_p(x) dx = 4 \int_0^1 dx = 4.\end{aligned}$$

Que  $\pi_1^{euc} = 2\sqrt{2}$  y  $\pi_{\infty}^{euc} = 4$  se puede corroborar geoméricamente, ya que la 1-circunferencia,  $|x| + |y| = 1$ , es el rombo de vértices  $(\pm 1, 0)$  y  $(0, \pm 1)$ , mientras que la  $\infty$ -circunferencia,  $\max\{|x|, |y|\} = 1$ , es el cuadrado unidad de  $\mathbb{R}^2$  (fig. 3.2).



**Figura 3.2.** Gráficas de la  $p$ -circunferencia unidad para  $p = 1$  y  $p = \infty$ .

El análisis precedente se ve reflejado en la fig. 3.3, que muestra las gráficas de  $\pi_p$ ,  $\pi_p^{arc}$  y  $\pi_p^{euc}$  como funciones de  $p$ .

*Observación 3.2.* La introducción de  $\pi_p^{euc}$  permite considerar la razón isoperimétrica de una curva cerrada simple,  $I_p$ , que es el cociente entre el cuadrado de la longitud de la curva y su área. Para la  $p$ -circunferencia,

$$I_p = \frac{(2\pi_p^{euc})^2}{\pi_p} = \frac{4(\pi_p^{euc})^2}{\pi_p}.$$

Cuando  $p = 2$ , donde todas las definiciones de  $\pi$  son equivalentes, se tiene que  $I_2 = 4\pi$ . La circunferencia es la solución del problema isoperimétrico, es decir,  $4\pi$  es el valor mínimo de la razón isoperimétrica tomado entre todas las curvas simples. Dicho de otra manera, el círculo es la forma más eficiente para encerrar la mayor área con el menor perímetro [2].

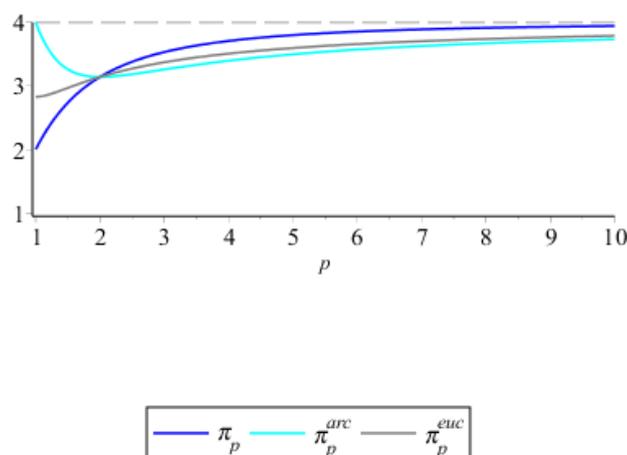


Figura 3.3. Gráficas de  $\pi_p$ ,  $\pi_p^{arc}$  y  $\pi_p^{euc}$  como funciones de  $p$ .

### 3.3.2. Conjugación

Hemos visto que para  $p \neq 2$  se obtienen diferentes definiciones de  $\pi$  que no sólo dependen del valor de  $p$ , sino de las características geométricas que pretendamos retener. En esta sección miraremos más de cerca esta variedad de definiciones y ofreceremos algunas herramientas para establecer conexiones entre ellas.

Dos números reales  $p, q > 0$  se dicen conjugados si  $1/p + 1/q = 1$ . Existen conexiones bien documentadas en la literatura entre la norma  $p$  y la norma  $q$  cuando  $p$  y  $q$  son conjugados, en cuyo caso los espacios normados se dicen duales.

*Propiedades.* Si los números  $p, q > 1$  son conjugados, se verifica:

- (i)  $pq = p + q$ ;
- (ii)  $p = q(p - 1)$ ;
- (iii)  $p = q/q - 1$ ;
- (iv)  $p = q$  si, y sólo si,  $p = q = 2$ .

Nótese que todas estas expresiones continúan siendo válidas si se intercambian  $p$  y  $q$ . Además, es posible extender esta definición y propiedades a  $p = 1$ , considerando que  $q = \infty$ .

La siguiente observación de Lindqvist y Peetre [15] nos permitirá explorar cómo se reflejan estas conexiones en las funciones squigonométricas.

**Teorema 3.3.** *Supongamos que  $p, q > 1$  son conjugados. Entonces la  $q$ -longitud de la  $p$ -circunferencia es  $2\pi_p$ .*

*Demostración.* Usando nuestra parametrización  $p$ -trigonométrica y la simetría de la  $p$ -circunferencia, calculamos directamente que su  $q$ -longitud vale

$$\begin{aligned}
L &= 4 \int_0^{\pi_p/2} \left( \left| \frac{dx}{dt} \right|^q + \left| \frac{dy}{dt} \right|^q \right)^{1/q} dt \\
&= 4 \int_0^{\pi_p/2} \left( \left| \frac{d}{dt} \cos_p(t) \right|^q + \left| \frac{d}{dt} \operatorname{sen}_p(t) \right|^q \right)^{1/q} dt \\
&= 4 \int_0^{\pi_p/2} (|-\operatorname{sen}_p^{p-1}(t)|^q + |\cos_p^{p-1}(t)|^q)^{1/q} dt \\
&= 4 \int_0^{\pi_p/2} (\operatorname{sen}_p^{q(p-1)}(t) + \cos_p^{q(p-1)}(t))^{1/q} dt \\
&= 4 \int_0^{\pi_p/2} (\operatorname{sen}_p^p(t) + \cos_p^p(t))^{1/q} dt \\
&= 4 \int_0^{\pi_p/2} dt = 2\pi_p.
\end{aligned}$$

□

El hecho de que  $p = 2$  sea autoconjugado explica muchas «buenas» propiedades de la geometría euclídea. Por ejemplo, consideremos una partícula que se mueve siguiendo la parametrización euclídea estándar de la circunferencia,  $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ . La velocidad de la partícula,  $(-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$ , también parametriza la circunferencia unidad. Al trabajar en un contexto generalizado encontramos que la velocidad realmente parametriza la circunferencia conjugada, lo cual queda oculto en la geometría euclídea porque en este caso la circunferencia y su dual son indistinguibles.

Considerando la gráfica de  $\pi_p^{\operatorname{arc}}$ , definido por la integral (3.3), como función de  $p$ , se observa que no se trata de una aplicación inyectiva (fig. 3.3). Cuando  $p = 1$  esta función alcanza su máximo,  $\pi_1^{\operatorname{arc}} = 4$ , para luego decrecer hasta  $\pi_2^{\operatorname{arc}} = \pi$  y finalmente crecer de nuevo hasta  $4 = \pi_\infty^{\operatorname{arc}}$ . En particular, para todo  $p \in [1, 2]$ , existe  $q \in [2, \infty]$  de forma que  $\pi_p^{\operatorname{arc}} = \pi_q^{\operatorname{arc}}$ . Como, además,  $1/p + 1/q = 1$  obliga a que  $p \in [1, 2]$  y  $q \in [2, \infty]$  (o viceversa), cabe conjeturar la validez del resultado que, efectivamente, probamos a continuación.

**Proposición 3.4.** *Si  $p, q$  son conjugados, se cumple que  $\pi_p^{\operatorname{arc}} = \pi_q^{\operatorname{arc}}$ .*

*Demostración.* Ya que, como acabamos de observar, se tiene que

$$\pi_1^{\operatorname{arc}} = \pi_\infty^{\operatorname{arc}} = 4,$$

sólo necesitamos establecer la proposición para  $p, q > 1$ . Además, por simetría, es suficiente ver que la  $p$ -longitud del primer cuadrante de  $C_p$  coincide con la  $q$ -longitud del primer cuadrante de  $C_q$ .

A fin de eliminar la dependencia de  $p$  en los límites de integración a la hora de computarla, empezaremos escribiendo la  $p$ -longitud del primer cuadrante de

$C_p$  en términos del parámetro  $t \geq 0$ . Supongamos que las ecuaciones de esta parametrización son  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ . Para darle una expresión conveniente a  $f_1$  y  $f_2$  escogemos al parámetro  $t$  de forma que  $t^{q/p}$  sea la pendiente de la recta que une a  $(f_1(t), f_2(t)) \in C_p$  con el origen de coordenadas:  $t^{q/p} = f_2(t)/f_1(t)$ . Como la ecuación del primer cuadrante de  $C_p$  es  $(x^p + y^p)^{1/p} = 1$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \left( f_1^p(t) + [f_1(t)t^{q/p}]^p \right)^{1/p} &= 1, \\ f_1(t)(t^q + 1) &= 1, \\ f_1(t) &= (t^q + 1)^{-1/p}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

y similarmente

$$f_2(t) = (t^{-q} + 1)^{-1/p}, \quad t \geq 0.$$

Intercambiando los papeles de  $p$  y  $q$  obtenemos para el primer cuadrante de  $C_q$  la parametrización

$$g_1(t) = (t^p + 1)^{-1/q}, \quad g_2(t) = (t^{-p} + 1)^{-1/q}, \quad t \geq 0.$$

Ahora definimos

$$F(t) = -f_1(t)g_2(t) + f_2(t)g_1(t), \quad t \geq 0.$$

Puesto que  $F(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ ,

$$\int_0^\infty F'(t) dt = 0.$$

Se sigue que

$$\int_0^\infty [-f_1'(t)g_2(t) + f_2'(t)g_1(t)] dt = \int_0^\infty [-g_1'(t)f_2(t) + g_2'(t)f_1(t)] dt. \quad (3.4)$$

Comprobaremos ahora que se cumple

$$-f_1'(t)g_2(t) + f_2'(t)g_1(t) = (|f_1'(t)|^p + |f_2'(t)|^p)^{1/p}, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Lo haremos desarrollando los dos miembros de esta igualdad hasta llegar a una misma expresión. En efecto, fijemos  $t \geq 0$ . Para el primer miembro, se tiene:

$$\begin{aligned} -f_1'(t)g_2(t) + f_2'(t)g_1(t) &= \frac{q}{p} t^{q-1} (t^q + 1)^{-(p+1)/p} (t^{-p} + 1)^{-1/q} \\ &\quad + \frac{q}{p} t^{-(q+1)} (t^{-q} + 1)^{-(p+1)/p} (t^p + 1)^{-1/q} \\ &= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-(p+1)/p} (t^p + 1)^{-1/q} [t^{q-1+p/q} + t^{(p+1)q/p-q-1}]. \end{aligned}$$

Al ser  $p$  y  $q$  conjugados se dan las relaciones

$$p - 1 = \frac{1}{q - 1} = \frac{p}{q},$$

así que

$$t^{q-1+p/q} + t^{(p+1)q/p-q-1} = t^{1/(p-1)+p-1} + t^{1/(p-1)-1} = t^{1/(p-1)-1}(t^p + 1)$$

y finalmente, también por conjugación,

$$-f'_1(t)g_2(t) + f'_2(t)g_1(t) = \frac{q}{p} t^{1/(p-1)-1}(t^q + 1)^{-(p+1)/p}(t^p + 1)^{1/p}. \quad (3.6)$$

Por otra parte, en el primer cuadrante,

$$\begin{aligned} (|f'_1(t)|^p + |f'_2(t)|^p)^{1/p} &= \left( \left[ \frac{q}{p} t^{q-1}(t^q + 1)^{-(p+1)/p} \right]^p \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{q}{p} t^{-(q+1)}(t^{-q} + 1)^{-(p+1)/p} \right]^p \right)^{1/p} \\ &= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-(p+1)/p} [t^{p(q-1)} + t^{q(p+1)-p(q+1)}]^{1/p} \\ &= \frac{q}{p} (t^q + 1)^{-(p+1)/p} (t^q + t^{q-p})^{1/p}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$(t^q + t^{q-p})^{1/p} = t^{1/(p-1)-1}(t^p + 1)^{1/p};$$

por tanto,

$$(|f'_1(t)|^p + |f'_2(t)|^p)^{1/p} = \frac{q}{p} t^{1/(p-1)-1}(t^q + 1)^{-(p+1)/p}(t^p + 1)^{1/p}. \quad (3.7)$$

De (3.6) y (3.7) se infiere (3.5).

En virtud de (3.5), la  $p$ -longitud de  $C_p$  es

$$\int_0^\infty [-f'_1(t)g_2(t) + f'_2(t)g_1(t)] dt = L_p.$$

Intercambiando los papeles de  $p$  y  $q$ ,

$$L_q = \int_0^\infty [-g'_1(t)f_2(t) + g'_2(t)f_1(t)] dt.$$

La igualdad (3.4) asegura que  $L_p = L_q$  y, por tanto, que  $\pi_p^{arc} = \pi_q^{arc}$ , como se pretendía.  $\square$

### 3.3.3. Parametrización en términos de la longitud de arco

Podemos usar la definición de  $\pi_p^{arc}$  para presentar analíticamente una parametrización en términos de la longitud de arco del *squircle* unidad.

Definimos una nueva función seno,  $S(t)$ , como la función tal que

$$t = \int_0^{S(t)} \left[ 1 + (u^{-p} - 1)^{1-p} \right]^{1/p} du, \quad (3.8)$$

y una nueva función coseno,  $C(t)$ , como la función tal que

$$t = \int_{C(t)}^1 \left[ 1 + (u^{-p} - 1)^{1-p} \right]^{1/p} du, \quad (3.9)$$

con  $0 \leq t \leq \pi_p^{arc}/2$ .

Afirmamos, en primer lugar, que  $S^p(t) + C^p(t) = 1$ . Para comprobarlo, en la ecuación (3.8) sea  $s = (1 - u^p)^{1/p}$ . Entonces  $u = (1 - s^p)^{1/p}$  y

$$du = \frac{-s^{p-1}}{(1 - s^p)^{(p-1)/p}} ds.$$

Así, (3.8) se convierte en

$$\begin{aligned} t &= \int_1^{[1-S^p(t)]^{1/p}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{1-s^p} - 1 \right)^{1-p} \right]^{1/p} \frac{-s^{p-1}}{(1-s^p)^{(p-1)/p}} ds \\ &= \int_{[1-S^p(t)]^{1/p}}^1 \left[ 1 + \left( \frac{s^p}{1-s^p} \right)^{1-p} \right]^{1/p} \frac{s^{p-1}}{(1-s^p)^{(p-1)/p}} ds \\ &= \int_{[1-S^p(t)]^{1/p}}^1 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{s^p}{1-s^p} \right)^{1-p} \right] \frac{s^{p(p-1)}}{(1-s^p)^{p-1}} \right\}^{1/p} ds \\ &= \int_{[1-S^p(t)]^{1/p}}^1 \left[ \frac{s^{p(p-1)}}{(1-s^p)^{p-1}} + 1 \right]^{1/p} ds \\ &= \int_{[1-S^p(t)]^{1/p}}^1 \left[ \left( \frac{1-s^p}{s^p} \right)^{1-p} + 1 \right]^{1/p} ds \\ &= \int_{[1-S^p(t)]^{1/p}}^1 \left[ (s^{-p} - 1)^{1-p} + 1 \right]^{1/p} ds, \end{aligned}$$

que es (3.9) si  $C(t) = [1 - S^p(t)]^{1/p}$ , probando nuestra afirmación.

Derivando (3.8) respecto de  $t$  encontramos que

$$1 = \left( 1 + [S(t)^{-p} - 1]^{1-p} \right)^{1/p} S'(t).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-S^p(t)}{S^p(t)}\right]^{1-p}\right)^{1/p}} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{C^p(t)}{S^p(t)}\right]^{1-p}\right)^{1/p}} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{S^p(t)}{C^p(t)}\right]^{p-1}\right)^{1/p}} \\
&= \frac{C^{p-1}(t)}{[S^{p(p-1)}(t) + C^{p(p-1)}(t)]^{1/p}}
\end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos

$$C'(t) = \frac{-S(t)^{p-1}}{[S^{p(p-1)}(t) + C^{p(p-1)}(t)]^{1/p}}.$$

De (3.8) y (3.9) se sigue que  $S(0) = 0$  y  $C(0) = 1$ . Llamaremos a  $S(t)$  y  $C(t)$  las funciones seno longitud de arco y coseno longitud de arco, respectivamente, y las denotaremos por  $\text{sen}_p^{\text{arc}}$  y  $\text{cos}_p^{\text{arc}}$ . Obsérvese que son las únicas soluciones en el intervalo  $0 \leq t \leq \pi_p^{\text{arc}}/2$  del PVIA

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y^{p-1}(t) [x^{p(p-1)}(t) + y^{p(p-1)}(t)]^{-1/p} \\ \frac{dy(t)}{dt} = x^{p-1}(t) [x^{p(p-1)}(t) + y^{p(p-1)}(t)]^{-1/p}, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde  $x$  corresponde al coseno longitud de arco e  $y$  al seno longitud de arco. Podemos entonces extender las funciones a toda la recta real por simetría, de la forma usual.

## Funciones $p$ -hiperbólicas

### 4.1. Funciones $p$ -seno hiperbólico y $p$ -coseno hiperbólico

Sea  $1 \leq p < \infty$ . Habiendo definido ya las funciones trigonométricas básicas, podemos adaptar el PVIA que satisfacen para definir las funciones  $p$ -hiperbólicas, buscando ahora que la soluciones de dicho PVIA garanticen que  $h(t) = x^p(t) - y^p(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , se mantenga constante:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^{p-1}(t) \\ \frac{dy}{dt} = x^{p-1}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Este PVIA tiene como solución única al par de funciones  $x(t) = \cosh_p(t)$  ( $p$ -coseno hiperbólico) e  $y(t) = \sinh_p(t)$  ( $p$ -seno hiperbólico),  $t \in \mathbb{R}$ .

Tal como ocurre con las funciones  $p$ -trigonométricas, las funciones  $p$ -hiperbólicas conservan las propiedades de simetría de las correspondientes funciones euclídeas.

**Proposición 4.1.** *Para  $t \in \mathbb{R}$ , se verifica:*

$$\begin{cases} \cosh_p(-t) = \cosh_p(t) \\ \sinh_p(-t) = -\sinh_p(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

*Demostración.* Es suficiente advertir que los pares de funciones del primer y del segundo miembro de (4.1) son solución del siguiente PVIA:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2^{p-1}(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1^{p-1}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

□

Además, las funciones  $p$ -hiperbólicas se pueden relacionar con las  $p$ -trigonométricas como se indica a continuación.

**Proposición 4.2.** Si  $\omega \in \mathbb{C}$  con  $\omega^p = -1$ , entonces

$$\begin{cases} \cosh_p(t) = \cos_p(\omega t) \\ \omega \sinh_p(t) = \sen_p(\omega t), \end{cases} \quad (4.2)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Basta proceder con una prueba al estilo PVIA, comprobando que tanto el par de funciones del primer como del segundo miembro de (4.2) resuelven el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\omega v^{p-1}(t) \\ \frac{dv}{dt} = \omega u^{p-1}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} u(0) = 1 \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

□

Del mismo modo que el par  $(\cos_p(t), \sen_p(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi_p$ , parametriza la  $p$ -circunferencia  $|x|^p + |y|^p = 1$ , el par  $(\cosh_p(t), \sinh_p(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , parametrizará la  $p$ -hipérbola  $|x|^p - |y|^p = 1$  (fig. 4.1).

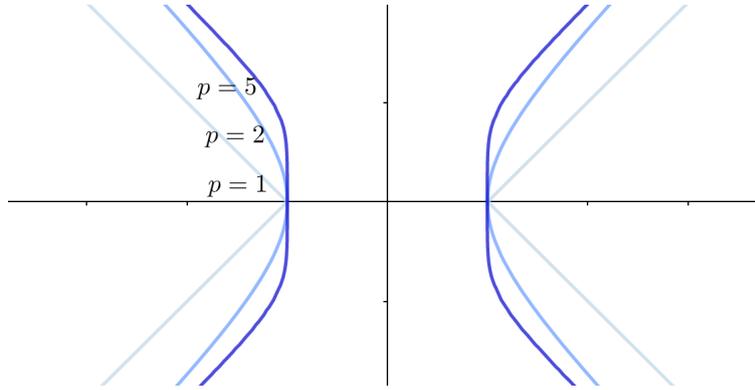


Figura 4.1. Gráfica de  $|x|^p - |y|^p = 1$  para  $p = 1, 2, 5$ .

## 4.2. Funciones $p$ -hiperbólicas inversas

Como ya hicimos con las funciones  $p$ -trigonométricas, podemos construir las inversas de  $\sinh_p(t)$  y  $\cosh_p(t)$  mediante integrales.

Sea  $y = \sinh_p(t)$ . Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \cosh_p^{p-1}(t) = (1 + y^p)^{(p-1)/p}.$$

Por lo tanto,

$$t = \operatorname{argsenh}_p(y) = \int_0^y \frac{1}{(1 + u^p)^{(p-1)/p}} du.$$

Similarmente, partiendo ahora de  $x = \cosh_p(t)$ ,

$$\frac{dx}{dt} = \sinh_p^{p-1}(t) = (x^p - 1)^{(p-1)/p},$$

$$t = \operatorname{argcosh}_p(x) = \int_1^x \frac{1}{(u^p - 1)^{(p-1)/p}} du.$$

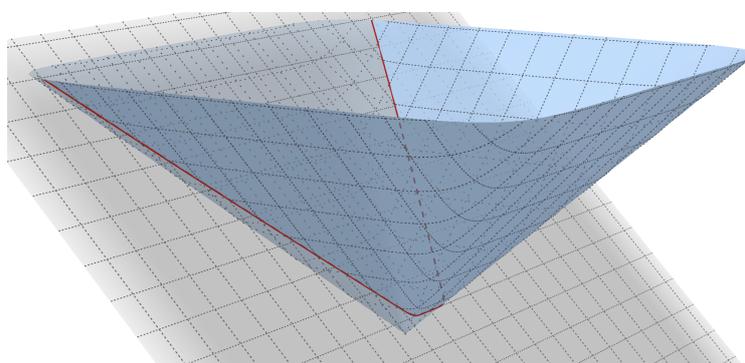
### 4.3. $p$ -cónicas

Se considera la siguiente familia de curvas:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha|x|^p + \beta|y|^p = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Según sean los valores que tomen  $\alpha$  y  $\beta$  resultan  $p$ -hipérbolas o  $p$ -elipses, de manera idéntica a como sucede para  $p = 2$ . Para  $\alpha, \beta > 0$  y  $\alpha \neq \beta$ , obtenemos el conjunto de las  $p$ -elipses centradas en  $(0, 0)$ . En cambio, si alguno de los coeficientes  $\alpha$  o  $\beta$  es negativo, estaremos ante el conjunto de las  $p$ -hipérbolas con centro en el origen. Por supuesto, si  $\alpha = \beta > 0$ , la familia se reduce a la  $p$ -circunferencia de radio  $1/\alpha^p$ .

La construcción de las  $p$ -cónicas cuando  $p \neq 2$  se puede interpretar geoméricamente como la intersección de un  $p$ -cono,  $|x|^p + |y|^p - |z|^p = 0$ , con un plano que no pasa por su vértice (fig. 4.2).



**Figura 4.2.** Ejemplo de rama de una 8-hipérbola obtenida por intersección de un 8-semicono ( $z > 0$ ) con un plano.

#### 4.4. La función $p$ -exponencial

Por último, podemos intentar definir la función  $p$ -exponencial valiéndonos de la relación existente entre las funciones hiperbólicas usuales y la propia exponencial,  $e^t = \cosh(t) + \sinh(t)$ . Proponemos así la siguiente generalización:

$$\exp_p(t) = \cosh_p(t) + \sinh_p(t).$$

Por ejemplo, en el caso  $p = 1$  esta generalización es lineal y se expresaría como sigue. Apoyándonos en la forma integral de las inversas  $p$ -hiperbólicas (sección 4.2),

$$\begin{aligned} \operatorname{argsenh}_1(y) &= \int_0^y du = y, & y &= \sinh_1(t) \\ \operatorname{argcosh}_1(x) &= \int_1^x du = x - 1, & x &= \cosh_1(t), \end{aligned}$$

y aplicando la Proposición 4.1, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sinh_1(t) &= t, & t &\in \mathbb{R} \\ \cosh_1(t) &= \begin{cases} 1 + t, & \text{si } t > 0 \\ 1 - t, & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\exp_1(t) = \begin{cases} 1 + 2t, & \text{si } t > 0 \\ 1, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Véase la fig. 4.3.

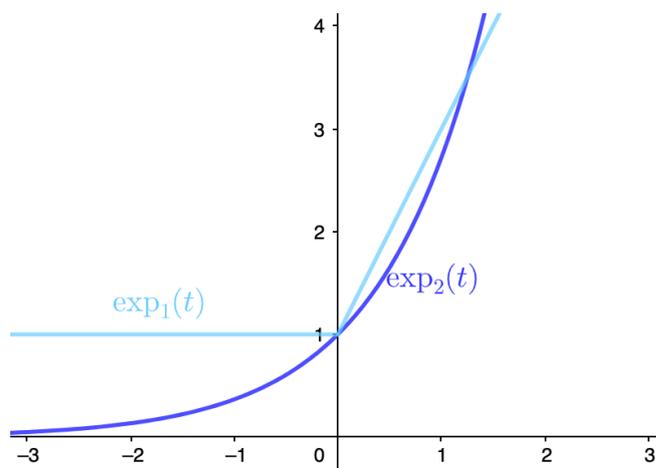


Figura 4.3. Gráfica de la  $p$ -exponencial para  $p = 1, 2$ .

## Conclusiones y prospectiva

### 5.1. Conclusiones

Hemos visto dos parametrizaciones de la  $p$ -circunferencia que dan lugar a versiones completamente diferentes tanto de las funciones trigonométricas como de  $\pi$ . Con (2.1),  $\pi_p$  da el área «correcta» del  $p$ -círculo unidad. Con (3.10),  $2\pi_p^{arc}$  da la longitud de arco «correcta».

Este hecho apunta a una diferencia sustancial entre la circunferencia y la  $p$ -circunferencia, relacionada con la existencia de  $\pi$ . Las funciones trigonométricas se definen de modo que sus periodos reflejan la longitud de arco y las parametrizaciones de área y angular de la circunferencia; pero ninguna parametrización de la  $p$ -circunferencia puede hacer las tres cosas a la vez. En efecto, supongamos que se parametriza la  $p$ -circunferencia unidad mediante el PVIA

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y^{p-1}(t) \zeta(x(t), y(t), t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x^{p-1}(t) \zeta(x(t), y(t), t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

donde  $\zeta(x(t), y(t), t)$  es una función derivable apropiada, y las soluciones se toman sobre un intervalo adecuado. En general, cada una de estas parametrizaciones dará lugar a una extensión de  $\pi$ , que puede o no corresponder a una descripción geométrica de la  $p$ -circunferencia, y producirá funciones trigonométricas generalizadas que no harán mucho más que parametrizar la  $p$ -circunferencia unidad [23].

### 5.2. Prospectiva

La historia de las funciones trigonométricas generalizadas es amplia pero discontinua (cf. [1, 8, 17, 18, 19, 23] y las referencias que allí se citan), y existen múltiples cuestiones abiertas relativas a las funciones especiales asociadas con la

geometría de las  $p$ -normas. Sin pretensiones de exhaustividad, mencionaremos algunas conexiones con otras ramas de las matemáticas que podrían ser objeto de estudio en un futuro.

### 5.2.1. Funciones biparamétricas y el $p$ -laplaciano

La consideración de las expresiones integrales (1.10) y (1.11) sugiere una definición biparamétrica más general, partiendo de

$$\text{arc sen}_{p,q}(x) = \int_0^x (1 - t^p)^{-1/q} dt$$

y definiendo  $\text{sen}_{p,q}(x)$  como la función inversa de  $\text{arc sen}_{p,q}(x)$ .

Con esta definición se tiene que  $\text{sen}_{p,p'}(x) = \text{sen}_p(x)$ , donde  $p$  y  $p'$  son conjugados (cf. (2.3)). Podemos dar entonces una definición alternativa de nuestras funciones trigonométricas generalizadas poniendo

$$\text{sen}_p^*(x) = \text{sen}_{p,p}(x), \quad \text{cos}_p^*(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}_p^*(x),$$

de manera que, como se comprueba fácilmente,  $(\text{cos}_p^*(x), \text{sen}_p^*(x))$  parametriza la  $p$ -circunferencia unidad.

Cabría dar otra versión de  $\pi$  en este contexto, que podemos expresar de forma compacta usando la función Beta y la fórmula de reflexión de Euler (2.10):

$$\begin{aligned} \pi_p^* &= 2 \int_0^1 (1 - t^p)^{-1/p} dt \\ &= \frac{2}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{2}{p} \frac{\Gamma(1/p) \Gamma(1 - 1/p)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{2\pi}{p \text{sen}(\pi/p)}. \end{aligned}$$

Merece ser destacado el hecho de que el problema de Dirichlet para el  $p$ -laplaciano unidimensional  $\Delta_p$ ,  $1 < p < \infty$ , dado por

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= -(|u'|^{p-2} u')' = \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{en } (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

tiene por autovalores a

$$\lambda_n = (p-1)(n\pi_p^*)^p, \quad n \in \mathbb{N},$$

con autofunciones asociadas  $u_n = \text{sen}_p^*(n\pi_p^* t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  [16].

El ejemplo precedente es ilustrativo de la existencia, cuando  $p \neq 2$ , de múltiples opciones razonables para definir las funciones trigonométricas generalizadas, todas ellas relacionadas por dualidad u otras propiedades geométricas. Esa definición se usa en [12], donde se detallan muchas otras propiedades y aplicaciones de la trigonometría generalizada. Que el coseno sea la derivada del seno resulta, desde luego, muy conveniente, si bien el parámetro ya no mide el área. Elegir una u otra versión es mayormente una cuestión de preferencia, pero se debe tener claro qué propiedades retiene cada una.

### 5.2.2. Curvas algebraicas

El estudio de las funciones trigonométricas generalizadas se entrecruza con una amplia variedad de campos. Considérese, por ejemplo, la siguiente propiedad algebraica de las  $p$ -circunferencias:

**Teorema 5.1 ([25]).** *Si  $p > 2$  es un entero, si  $(x, y)$  es un punto de la  $p$ -circunferencia unidad y si  $x, y \in \mathbb{Q}$ , entonces  $x = 0$  o  $y = 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(m_1/n_1, m_2/n_2)$  es un punto racional sobre la  $p$ -circunferencia unidad, donde  $m_1, m_2, n_1, n_2, p$  son enteros no nulos, con  $p > 2$ . Entonces

$$\left(\frac{m_1}{n_1}\right)^p + \left(\frac{m_2}{n_2}\right)^p = 1,$$

o bien

$$(m_1 n_2)^p + (m_2 n_1)^p = (n_1 n_2)^p.$$

Pero esto contradice el último teorema de Fermat [20], el cual, como es bien sabido, asegura que cuando  $p > 2$  es un entero, no existen enteros no nulos  $x, y, z$  que satisfagan la ecuación  $x^p + y^p = z^p$ .  $\square$

Este resultado sugiere contemplar las curvas definidas geoméricamente en la  $p$ -norma del plano como curvas algebraicas, lo que nos dota de nuevos instrumentos con que analizar sus propiedades.

### 5.2.3. Otras conexiones

- En el caso  $p = 4$ , las integrales que describen las funciones trigonométricas inversas son elípticas. Las integrales elípticas gozan de propiedades particulares que pueden conducir a identidades especiales en la 4-norma, incluyendo una fórmula (un tanto complicada) para  $\text{sen}_4(t + u)$  [14]. Esta conexión merecería ser investigada.
- Las funciones squigonométricas también permiten generalizar el análisis de Fourier. El texto de Lang y Edmunds [12] sienta las bases para esa generalización.

- Las geometrías que hemos estudiado constituyen casos particulares de la geometría de Minkowski, la cual ofrece una perspectiva más amplia bajo la que contemplar estos problemas.
- Como el dual de un espacio vectorial con la  $p$ -norma es isométrico a un espacio vectorial provisto de la  $p'$ -norma ( $p'$  el exponente conjugado de  $p$ ), el análisis funcional, bajo la óptica de la dualidad, proporciona otro conjunto de herramientas para el estudio de las funciones trigonométricas generalizadas.
- La consideración de las funciones squigonométricas en dimensiones superiores también abre un territorio, que sepamos, poco explorado.

---

## Bibliografía

- [1] C.L. ADLER, J. TANTON:  $\pi$  is the minimum value for Pi. *College Math. J.*, **31** (2000), No. 2, 102–106.
- [2] V. BLÅSJÖ: The isoperimetric problem. *Amer. Math. Monthly*, **112** (2005), No. 6, 526–566.
- [3] P. BLANCHARD, R. DEVANEY, G. HALL: *Differential equations*, 3rd edition. Brooks/Cole, 2005.
- [4] J. CALLAHAN, D. COX, K. HOFFMAN, D. O'SHEA, H. POLLATSEK, L. SENECHAL: *Calculus in context*. Freeman, 1995.
- [5] J. CASTIÑEIRA *Fórmulas del ángulo múltiple*. Disponible en [http://boj.pntic.mec.es/~jcastine/Trabajosmatematicos\\_archivos/FormulasdeAnguloMultiple.pdf](http://boj.pntic.mec.es/~jcastine/Trabajosmatematicos_archivos/FormulasdeAnguloMultiple.pdf).
- [6] B. CHA: Transcendental functions and initial value problems: A different approach to Calculus II. *College Math. J.*, **38** (2007), No. 4, 288–296.
- [7] G.V. CHUDNOVSKY: Algebraic independence of constants connected with the exponential and elliptic functions. *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*, **8** (1976), 698–701.
- [8] R. EULER, J. SADEK: The  $\pi$ s go full circle. *Math. Mag.*, **72** (1999), No. 1, 59–63.
- [9] M. GARDNER: *Mathematical carnival*. Mathematical Association of America, 1989.
- [10] M. GARDNER: *The colossal book of mathematics*. Norton, 2001.
- [11] E. KRAUSE: *Taxicab geometry: Adventures in non-Euclidean geometry*. Dover, 1987.
- [12] J. LANG, D. EDMUNDS: *Eigenvalues, embeddings and generalised trigonometric functions*. Springer, 2016.
- [13] F. LE LIONNAIS: *Les nombres remarquables*. Hermann, 1979.
- [14] A. LEVIN: A geometric interpretation of an infinite product for the lemniscate constant. *Amer. Math. Monthly*, **113** (2006), No. 6, 510–520.
- [15] P. LINDQVIST, J. PEETRE:  $p$ -arclength of the  $q$ -circle. *Math. Student*, **72** (2003), No. 1–4, 139–145.

- [16] P. DRÁBEK, R. MANÁSEVICH: On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with  $p$ -Laplacian. *Differential Integral Equations*, **12** (1999), No. 6, 773–788.
- [17] A.I. MARKUSHEVICH: *The remarkable sine functions*. Elsevier, 1966.
- [18] R.D. POODIACK: Squigonometry, hyperellipses, and supereggs. *Math. Mag.*, **89** (2016), No. 2, 92–102.
- [19] D. SHELUPSKY: A generalization of the trigonometric functions. *Amer. Math. Monthly*, **66** (1959), No. 10, 879–884. Springer, 2016.
- [20] S. SINGH: *Fermat's last theorem: The story of a riddle that confounded the world's greatest minds for 358 years*. Harper Perennial, 2007.
- [21] J. STEWART: *Calculus: Early transcendentals*, 6th edition. Brooks/Cole, 2008.
- [22] G. TESCHL: *Ordinary differential equations and dynamical systems*. American Mathematical Society, 2012.
- [23] W.E. WOOD: Squigonometry. *Math. Mag.*, **84** (2011), No. 4, 257–265.
- [24] W.E. WOOD, R.D. POODIACK: Squigonometry: Trigonometry in the  $p$ -norm. En P.E. Harris et al. (eds.), *A project-based guide to undergraduate research in Mathematics*, Springer, 2020.
- [25] R.M. YOUNG: *Excursions in calculus: An interplay of the continuous and the discrete*. Cambridge University Press, 1992.
- [26] DESMOS.COM: *Superellipse calculator*, <https://www.desmos.com/calculator/30hltdfack?lang=es>.
- [27] JOHNDCOOK.COM: *History of the «squircle»*, <https://www.johndcook.com/blog/2019/04/02/history-of-the-term-squircle/>.
- [28] MEDIUM.COM: *Rounded corners in the Apple ecosystem*, <https://medium.com/minimal-notes/rounded-corners-in-the-apple-ecosystem-1b3f45e18fcc>.
- [29] PIETHEIN.COM: *Super-egg*, <https://piethein.com/shop/17-super-egg/>.

---

## Lista de Figuras

0.1.	De izquierda a derecha: astroide ( $a = b = 1, p = 2/3$ ), bruja de Agnesi ( $a = b = 1, p = 3$ ) y <i>squircle</i> ( $a = b = 1, p = 4$ ). . . . .	IX
0.2.	Sergels Torg (Plaza Sergel) en Estocolmo, Suecia. Foto: A. Bengtsson, <a href="https://www.flickr.com/people/barracuda666/">https://www.flickr.com/people/barracuda666/</a> (CC BY-SA 2.0). . . . .	XI
2.1.	Gráfica de las $p$ -circunferencias unidad $ x ^p +  y ^p = 1$ , para $p = 1, 2, 5, 10$ . . . . .	13
2.2.	Gráfica de las funciones 4-seno y 4-coseno. . . . .	15
2.3.	Gráfica de la función 4-tangente. . . . .	16
2.4.	Gráfica de $\pi_p$ como función de $p$ . . . . .	20
3.1.	Área del $p$ -sector. . . . .	26
3.2.	Gráficas de la $p$ -circunferencia unidad para $p = 1$ y $p = \infty$ . . . . .	30
3.3.	Gráficas de $\pi_p, \pi_p^{arc}$ y $\pi_p^{euc}$ como funciones de $p$ . . . . .	31
4.1.	Gráfica de $ x ^p -  y ^p = 1$ para $p = 1, 2, 5$ . . . . .	38
4.2.	Ejemplo de rama de una 8-hipérbola obtenida por intersección de un 8-semicono ( $z > 0$ ) con un plano. . . . .	39
4.3.	Gráfica de la $p$ -exponencial para $p = 1, 2$ . . . . .	40



# Trigonometry in $p$ -norms

## Abstract

THE circumference is one of the first geometric shapes that we come across. It is a “perfect” object, and our familiarity with it can make us lose sight of its relevance. The sine and cosine functions arise when we try to describe it as the locus of all points in a plane that keep at a fixed distance from a given center. What happens if the distance is not the Euclidean one?

## 1. Introduction

THE family of curves

$$G = \left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^p + \left( \frac{y}{b} \right)^p = 1 : a, b, p > 0 \right\}$$

was studied by the French mathematician Gabriel Lamé in 1818 as a generalization of the ellipse ( $p = 2$ ). When  $a = b$ , some interesting examples can be retrieved (fig. 1).

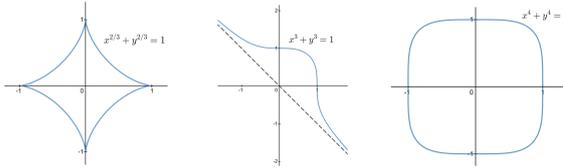


Figure 1: From left to right: astroid ( $a = b = 1, p = 2/3$ ), witch of Agnesi ( $a = b = 1, p = 3$ ) and “squircle” ( $a = b = 1, p = 4$ ).

Here we propose to develop a trigonometry for geometric objects closely related to Lamé curves: the set of points  $(x, y)$  in the plane that satisfy the equation  $|x|^p + |y|^p = 1$  for some real number  $p \geq 1$ . This locus corresponds to the unit circumference in the  $p$ -distance

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p},$$

where  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . The Euclidean unit circumference is obtained for  $p = 2$ ; its length is  $2\pi$ , it encloses an area of  $\pi$ , and the sine and cosine functions emerge naturally when we try to describe it, their argument being the length of the arc which subtends an angle of the same amplitude. We are interested in studying how the choice of other  $p$ -distances affects the definition of the trigonometric functions and the role and value of  $\pi$ . The main conclusion is that, for  $p \neq 2$ , no trigonometric functions can be found whose periods reflect, at the same time, the arclength, the areal and the angular parameterizations of the unit  $p$ -circumference. That is, different generalized trigonometric functions are obtained depending on the properties of the standard ones we want to retain. Generalized values of  $\pi$  which play some of its roles can be accordingly obtained, but none can play them all. Our main tool for this task will be coupled initial value problems (CIVP).

## 2. Areal parameterization

CONSIDER the CIVP

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y^{p-1}(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x^{p-1}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

The parameterization given by its solutions  $x(t) = \cos_p(t)$  and  $y(t) = \sin_p(t)$  leads to a generalization  $\pi_p$  of  $\pi$  which equals the area of the unit  $p$ -circle:

$$\pi_p = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{(p-1)/p}} = 2 \arcsin_p(1) = 2 \arccos_p(0).$$

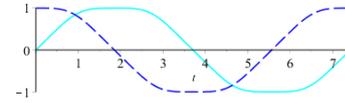


Figure 2: Graphs of  $y = \sin_4(t)$  (solid) and  $y = \cos_4(t)$  (dashed).

## 3. Arclength parameterization

THE solutions  $x(t) = \cos_p^{arc}(t)$  and  $y(t) = \sin_p^{arc}(t)$  of the CIVP

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y^{p-1}(t) [x^{p(p-1)}(t) + y^{p(p-1)}(t)]^{-1/p} \\ \frac{dy(t)}{dt} = x^{p-1}(t) [x^{p(p-1)}(t) + y^{p(p-1)}(t)]^{-1/p} \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

yield a parameterization of the unit  $p$ -circumference which allows to prove that

$$\pi_p^{arc} = \frac{2}{p} \int_0^1 [t^{1-p} + (1-t)^{1-p}]^{1/p} dt$$

equals half its  $p$ -arclength. A remarkable property of this constant is that  $\pi_p^{arc} = \pi_q^{arc}$  whenever  $p$  and  $q$  are conjugate numbers (that is,  $p+q = pq$ ). Since  $p = 2$  is self-conjugate, in the Euclidean case this duality property remains hidden.

## 4. A comparison with the Euclidean arclength

A THIRD version of  $\pi$ , denoted  $\pi_p^{euc}$ , is possible by considering the Euclidean length of the unit  $p$ -circumference:

$$\pi_p^{euc} = 4 \int_0^{2^{-1/p}} \sqrt{1 + [x^{p-1}(1-x^p)^{1/p-1}]^2} dx.$$

Fig. 3 shows a comparison among the three generalizations of  $\pi$  found above, as functions of  $p$ . It can be observed that

$$\pi_2 = \pi_2^{arc} = \pi_2^{euc} = \pi.$$

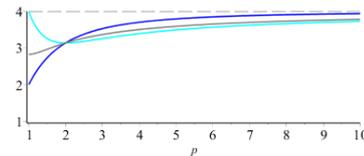


Figure 3: Graphs of  $\pi_p$  (blue),  $\pi_p^{arc}$  (cyan) and  $\pi_p^{euc}$  (gray) as functions of  $p$ .

## 5. Prospective

THERE exist manifold possibilities for generalizing trigonometric (hence, hyperbolic) functions and obtain associated values of  $\pi$ . These generalizations, presently the subject of active research, can be connected with as many areas of mathematics, such as partial differential equations via the  $p$ -Laplacian operator, algebraic curves, elliptic integrals, Minkowski geometry, Fourier analysis, functional analysis via duality, or higher dimensionality.

## References

- [1] C.L. ADLER, J. TANTON:  $\pi$  is the minimum value for Pi. *College Math. J.*, **31** (2000), No. 2, 102–106.
- [2] J. LANG, D. EDMUNDS: *Eigenvalues, embeddings and generalised trigonometric functions*. Springer, 2016.
- [3] W.E. WOOD, R.D. POODIACK: Squigonometry: Trigonometry in the  $p$ -norm. En P.E. Harris et al. (eds.), *A project-based guide to undergraduate research in Mathematics*, Springer, 2020.