

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

ESTUDIO FOTOMETRICO DE LA PENUMBRA
DE UNA MANCHA SOLAR

MEMORIA

presentada por el Licenciado
JOSE ANTONIO BONET NAVARRO
para acceder al Grado de
Doctor en Ciencias Físicas

INSTITUTO DE ASTROFISICA DE CANARIAS

JUNIO 1980

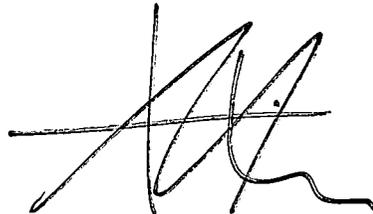


a mis padres

D.FRANCISCO SANCHEZ MARTINEZ, Dierector del Instituto de Astrofísica y del Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos de la Universidad de La Laguna

CERTIFICA: que el presente trabajo sobre "Estudio Fotometrico de la Penumbra de una Mancha Solar" ha sido realizado en el Instituto de Astrofísica desde 1976 por el Licenciado D.José Antonio Bonet Navarro, para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Físicas, bajo la dirección del que suscribe y del Dr.D.Manuel Vázquez Abeledo.

Y para que conste, firmo el presente certificado en La Laguna a veintitrés de Mayo de mil novecientos ochenta.

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a horizontal line, likely belonging to D. Francisco Sanchez Martinez.

En primer lugar quisiera manifestar mi agradecimiento al Prof. Francisco Sánchez Martínez, Director del Instituto de Astrofísica de Canarias, que posibilitó mi salida a Alemania y de quien siempre recibí orientación y estímulo.

Al Dr. Manuel Vázquez Abeledo, compañero inseparable desde el comienzo de nuestra carrera de investigación, que con tanto entusiasmo ha colaborado en la dirección de este trabajo.

A mi esposa María Inés que como especialista ha supervisado infatigablemente todos los aspectos de índole matemático de la presente memoria y que me ha sacrificado muchas horas de descanso para hacer posible su culminación.

Al Prof. W. Mattig, del Kiepenheuer Institut de Freiburg (R.F.A) que me proporcionó el material fotográfico estudiado así como múltiples orientaciones .

Al Dr. A. Wittmann, del Universitäts-Sternwarte de Göttingen (R.F.A) que desinteresadamente puso a mi disposición su amplia experiencia en trabajos de fotometría fotográfica.

A mis compañeros del I.A.C., y en especial a los de su sección solar, que de alguna forma han contribuido al desarrollo del trabajo; muy especialmente a J.D. Ponz; Pedro Alvarez y Remigio Gómez con los que he intercambiado puntos de vista, recibiendo ideas provechosas para encauzar esta investigación.

Asimismo quisiera expresar mi reconocimiento al Dr. J. Casanovas bajo cuya dirección científica inicié mis primeros pasos en la Física Solar.

Finalmente a Eloy Rodríguez y Juan Ángel Rodríguez que con todo entusiasmo han contribuido al mecanografiado y edición del trabajo.

I N D I C E

| | | |
|--------|---|----|
| 0 .- | LA PENUMBRA DE UNA MANCHA SOLAR : | |
| 0.0. | Introducción | 5 |
| 0.1. | Estructura morfológica | 6 |
| 0.2. | Campo magnético..... | 7 |
| 0.3. | Efecto Evershed | 9 |
| 0.4. | Efecto Wilson | 11 |
| 0.5. | Movimientos oscilatorios | 12 |
| 0.6. | Modelos de la penumbra | 13 |
| 0.7. | Fotometría de la penumbra | 14 |
| I .- | MATERIAL DE OBSERVACION, INSTRUMENTACION Y MEDIDAS : | |
| I.1. | Material de observación | 19 |
| I.2. | Telescopio | 21 |
| I.3. | Microfotómetro | 24 |
| I.4. | Medidas | 33 |
| I.5. | Algunos datos sobre el eclipse del 30 de Junio de 1973 | 34 |
| II .- | CALIBRACION : | |
| II.1. | Introducción | 37 |
| II.2. | Método del filtro medio | 38 |
| III.- | FUNDAMENTOS MATEMATICOS DEL PRESENTE TRABAJO : | |
| III.1. | Introducción | 49 |
| III.2. | Algunas definiciones y teoremas básicos. | 49 |
| III.3. | Tratamiento de las señales en cálculo digital | 60 |
| III.4. | La transformada de Fourier en dos dimen- siones | 74 |
| III.5. | La transformada rápida de Fourier o FFT. | 75 |

IV .- LA FUNCION DE DISPERSION :

| | | |
|-------|--|-----|
| IV.1. | La función de dispersión; esbozo del problema de la restauración de una imagen extensa | 76 |
| IV.2. | Una propiedad interesante de la función "Escalon unidad de Heaviside"..... | 78 |
| IV.3. | El eclipse de Sol situación idonea para la estimación de la Función de Dispersión..... | 80 |
| IV.4. | Obtención de la Función de Dispersión: proceso operativo | 87 |
| IV.5. | Dos propiedades de interés sobre la Función Gaussiana | 101 |
| IV.6. | Discusión sobre las funciones de dispersión obtenidas..... | 110 |

V .- RESTAURACION DE LAS IMAGENES FOTOGRAFICAS :

| | | |
|------|--|-----|
| V.1. | Introducción | 112 |
| V.1. | La presencia del ruido complica el problema de la restauración | 113 |
| V.2. | Definición de filtro óptimo de ruido..... | 115 |
| V.3. | Filtrado del ruido fotográfico..... | 117 |
| V.4. | Restauración de la señal filtrada: discusión de los resultados | 137 |
| V.5. | Restauración optima | 141 |

VI .- ANALISIS DE LOS RESULTADOS :

| | | |
|-------|--|-----|
| VI.1. | Descripción del proceso de medida de los parámetros físicos penumbrales..... | 164 |
| VI.2. | Resultados | 178 |
| VI.3. | Modelo fotométrico de la penumbra..... | 195 |
| VI.4. | Análisis comparativo de nuestros resultados. | 199 |
| VI.5. | Conclusiones..... | 204 |

BIBLIOGRAFIA

APENDICE

CAPITULO_0

LA PENUMBRA DE UNA MANCHA SOLAR

0.0.-INTRODUCCION:

Observaciones con telescopio de la fotosfera solar, con calidad de imagen media, permiten apreciar en las conocidas manchas solares dos estructuras perfectamente diferenciadas. Una región central llamada sombra, casi homogénea en cuanto a brillo, y caracterizada por un intenso campo magnético y una temperatura inferior a la de la fotosfera. Rodeando dicha zona en prácticamente todos los tipos de manchas (salvo en las fases iniciales de evolución), tenemos la penumbra con una estructura claramente inhomogénea de tipo filamentario. El estudio fotométrico de la penumbra constituye el objetivo de esta memoria.

Pasemos a continuación a realizar un breve resumen de las investigaciones efectuadas hasta la fecha sobre los diversos aspectos de la penumbra de las manchas solares. Un hecho a destacar es la relativa escasez, comparando con otros temas, de trabajos efectuados sobre esta materia, especialmente en los cinco últimos años. Esto puede, quizá, atribuirse por un lado a los problemas derivados de la naturaleza inhomogénea de la penumbra (exigencias de alta resolución en la observación y dificultad de generar modelos teóricos inhomogéneos), y por otro la falta de ocasiones propicias, tales como eclipses que coincidan con buenas condiciones de observación, que permitan realizar las correcciones necesarias sobre los datos fotometrados en las estructuras penumbrales finas.

0.1.-ESTRUCTURA MORFOLOGICA:

La estructura inhomogénea que caracteriza la penumbra de las manchas solares consta de filamentos oscuros y brillantes que se alinean, en la mayor parte de los casos, radialmente. Para varios autores (Schröter (1962); Muller (1973 a,b) Krat y Vyalshin (1978)) la verdadera penumbra está constituida por los filamentos brillantes que se ven sobre un fondo oscuro, estando resueltos dichos filamentos en gránulos individuales similares a la granulación fotosférica (Muller (1973 a)); otros autores, sin embargo, opinan que la verdadera penumbra la forman los filamentos oscuros (Casanovas (1973)), siendo los brillantes una prolongación de la fotosfera. En cierta forma, y a falta de pruebas evidentes, subyace en todo esto un problema de pronunciamiento sobre si considerar la penumbra como una invasión de la fotosfera en la mancha solar (filamentos brillantes) o una invasión de la mancha en la fotosfera no perturbada (filamentos oscuros).

En cuanto al papel de la penumbra en la evolución de las manchas, estas nacen como poros sin ningún tipo de estructura penumbral; al cabo de pocos días comienza a formarse una estructura penumbral rudimentaria que suele desaparecer en pocas horas (Bray y Loughhead 1964) dando lugar con posterioridad a la penumbra normal. Como señalaron Casanovas et al. (1974) y Kuenzel (1969), la penumbra parece originarse entre porciones de sombra con distinta polaridad magnética.

En manchas ya desarrolladas, la forma y disposición de los filamentos penumbrales suele variar produciéndose en muchos casos entrecruzamientos y asociaciones que aparecen como filamentos aislados incluso en fotografías de alta resolución. En las últimas fases de evolución (H y J de la clasificación de Zürich), cuando la mancha en su conjunto muestra una forma regular, los filamentos se disponen radialmente manteniéndose estables en su configuración global.

Krat y Vyalshin (1978) observaron, sobre fotografías - obtenidas en la estratosfera, gránulos brillantes que parecen corresponderse con los de Muller (1973 a).

Prácticamente no se ha hecho ningún estudio sistemático de la evolución de los filamentos considerados individualmente, debido a la dificultad de obtener secuencias, en tiempo, de alta resolución; no obstante se estima su tiempo de vida media en aproximadamente 1 hora y su anchura media en unos 300 Kms. (Allen 1973).

0.2.-CAMPO MAGNETICO:

Para medir campos magnéticos solares y más concretamente en las manchas se hace uso del efecto Zeeman que consiste en que las líneas espectrales se desglosan en varias componentes con diferente polarización cuando hay un campo magnético en la región de formación de la línea. Excelentes resúmenes sobre el particular se pueden encontrar en la literatura (Beckers (1971); Beckers (1976); Stenflo (1978)).

El principal problema para la determinación de los campos magnéticos proviene del hecho de que lo que en realidad miden los llamados magnetógrafos solares es la polarización de la radiación. Posteriormente y haciendo uso de la teoría de formación de líneas espectrales en un campo magnético, los registros pueden interpretarse en términos de intensidad del campo magnético. Hoy en día hay varios factores que hacen todavía inseguras tales determinaciones:

a) Por limitaciones instrumentales, en el Sol, los campos magnéticos a pequeña escala no se resuelven espacialmente. Esto repercute particularmente en la penumbra de las manchas cuya estructura filamentaria fina necesita para su detección de al menos una resolución espacial del orden de la anchura de los filamentos ($\sim 0.4''$).

b) La teoría de formación de líneas espectrales en campos magnéticos no está todavía muy desarrollada.

c) La polarización instrumental afecta a la polarización lineal más intensamente que a la circular. Esto hace más inseguras las medidas de la componente transversal del campo en relación a las de la componente longitudinal que están basadas en medidas de la polarización circular.

Por todo ello las medidas de campos magnéticos en la penumbra han sido escasas y confinadas a aquellos observatorios que aparte de estar dotados de la instrumentación adecuada -- disponen de algunos momentos en los que se puede al menos alcanzar resoluciones espaciales de 1" ó mejores. De estas medidas parece concluirse la siguiente descripción magnética de la penumbra:

a) El campo magnético es más intenso en los filamentos oscuros de la penumbra (Schröter-Beckers(1969)).

b) El campo magnético es casi horizontal en los filamentos oscuros aumentando el grado de horizontalidad con la distancia a la sombra (Bray-Loughhead(1964); Nishi(1962)).

c) En los filamentos brillantes el campo se puede considerar vertical, siendo su intensidad más débil que en los oscuros (Beckers-Schröter(1969); Mamadazimov(1972)). El resultado de Mattig y Mehlretter(1968) al respecto es contrario; para estos autores el campo es más intenso en los filamentos brillantes que en los oscuros (tal vez esta conclusión se deba a una insuficiente resolución espacial en sus observaciones). Recientemente Abdusamatov(1976) ha observado campos intensos (del orden de 1000 Gauss) en los filamentos brillantes si bien confirma anteriores medidas de campos todavía más intensos en los oscuros.

0.3.-EFECTO EVERSHERD;

Si situamos la rendija de entrada de un espectrógrafo, en dirección radial con respecto al disco solar, sobre una mancha preferentemente de forma redondeada, tendremos el siguiente resultado: la posición de las líneas espectrales -- originadas a nivel fotosférico, se ve desplazada hacia el rojo en la parte del espectro que corresponde al lado de la penumbra más próximo al borde solar; por el contrario se señala un desplazamiento hacia el azul en la parte del espectro correspondiente a la penumbra en su lado más próximo al centro del disco. Este fenómeno fué primeramente observado por Evershed en 1909 que lo interpretó, basándose en el efecto Doppler clásico, como una consecuencia de flujos de materia, hacia afuera de la mancha, en la penumbra. Beckers y Schöeter (1969), Stellmacher y Wiehr (1970) entre otros, indicaron que dichos movimientos materiales parecen tener lugar a lo largo de los filamentos oscuros. Para tener un compendio sobre este problema y en general sobre movimientos materiales en las manchas ver Lamb (1975).

Debido a que en la mayor parte de los casos los espectros obtenidos no permiten resolver espacialmente los filamentos oscuros ni los brillantes, Stellmacher y Wiehr (1971) recurrieron a trabajar en líneas espectrales con diferente sensibilidad a la temperatura pudiendo así atribuir el origen de los perfiles observados, fundamentalmente, a los filamentos oscuros ó brillantes según la línea utilizada. Para evitar perturbaciones adicionales, las líneas más adecuadas para estos propósitos son aquellas no sensibles al campo magnético.

En base a este tipo de observaciones, se han medido velocidades para los desplazamientos de materia en la penumbra comprendidas entre 0.5 y 2 Km/seg. en los filamentos brillantes y entre 5 y 10 Km/seg. en los filamentos oscuros. Asimismo observando líneas que se originan a diferentes alturas en

la atmósfera solar, se deducen gradientes de velocidad de signo contrario en ambos tipos de filamentos (Stellmacher y Wiehr (1980)).

St. John (1913), Beckers (1962) y Haugen (1969) realizaron estudios sobre este tipo de flujos materiales a nivel cromosférico encontrando un movimiento opuesto al fotosférico y del orden de 20 Km/seg. Maltby (1975), utilizando el método de subtracción de Leighton, en filtrogramas de H α con 1/8 Å de ancho de banda, confirmó los resultados anteriores señalando además que este tipo de desplazamientos a nivel cromosférico afecta a mayores extensiones que ^{en} el nivel fotosférico. Bones y Maltby (1978) detectaron también este llamado efecto Evershed inverso mediante el análisis de perfiles en la línea MgIb₁ que se origina en la zona de transición Fotosfera-Cromosfera.

Volviendo al efecto Evershed propiamente dicho, existen discrepancias sobre en qué zona de la penumbra se sitúa el máximo de velocidad. Abetti (1932) lo situó en el borde próximo a la sombra; Kinman ⁽¹⁹⁵²⁾ y Holmes (1961) dan el máximo en la zoma media, mientras que Maltby (1960;1964) lo sitúa en el borde exterior de la penumbra en la zona próxima a la fotosfera. Gran parte de estas discrepancias son atribuibles a la insuficiente resolución de los espectrogramas, si bien se pueden descartar diferencias debidas a la observación de manchas en diferentes estados de evolución.

Casanovas (1973) señala haber observado desplazamientos materiales de los filamentos oscuros en fotografías tomadas en luz integrada.

Muller (1973,a) ha observado movimientos en los gránulos que constituyen los filamentos brillantes estimando su velocidad en 0.5 Km/seg.

0.4.-EFEECTO WILSON:

Descubierto en 1774 por A. Wilson, se caracteriza por el hecho de que en manchas próximas al borde solar la anchura aparente de la penumbra en el lado más cercano al centro del disco es más pequeña que en el lado más próximo al borde lo contrario que cabría esperarse de un efecto de perspectiva. Asimismo la separación sombra-penumbra se vuelve difusa en el lado más cercano al centro, desapareciendo la penumbra de dicho lado a 5-10" del borde solar (Bray y Loughhead (1964)).

Las medidas más completas sobre el efecto Wilson proceden de Chystyakov (1962) y Bray-Loughhead (1964) que estudiaron la variación de anchura de la penumbra en ambos lados en función a la distancia al borde.

Fundamentalmente existen dos explicaciones sobre este fenómeno:

- a) La altura geométrica es diferente para la fotosfera, penumbra y sombra. Zwaan (1965), Jensen et al. (1969) y Mattig (1969) apoyan esta interpretación mediante diferentes análisis. Los valores que se dan sobre la diferencia de profundidad están comprendidos entre 400 y 800 Kms.
- b) A partir del modelo de mancha solar de Michard (1953), que asignaba distinta opacidad a la mancha que a la fotosfera, Chystyakov (1962) interpretó que el efecto Wilson se podía explicar como una consecuencia de que la mancha fuera más transparente que la fotosfera.

Debido a que el modelo de Michard no se sostiene hoy en día, la explicación a) es la que recibe más apoyo. De todas formas para sostener firmemente esta hipótesis se necesitarían nuevas observaciones de alta resolución de manchas regulares (tipo H, clasificación de Zürich), especialmente en posiciones muy próximas al borde solar, así como perfiles fotométricos de intensidades en diversos ángulos heliocéntricos, con objeto de obtener información sobre la transparencia diferencial mancha-fotosfera.

0.5.-MOVIMIENTOS OSCILATORIOS:

Maltby y Erikssen (1967) intentaron explicar las asimetrías observadas en el perfil de algunas líneas espectrales en la penumbra como una consecuencia de la propagación de ondas acústicas en la dirección de los filamentos. Zirin-Stein (1972) y Giovanelli (1972) descubrieron dicho fenómeno ondulatorio, respectivamente, a través de fluctuaciones de intensidad a lo largo del tiempo, en filtrogramas tomados en el centro de $H\alpha$, y en filtrogramas de banda estrecha ($1/8 \text{ \AA}$) obtenidos en posiciones simétricas respecto al centro de la línea $H\alpha$ (para utilizar el método de sustracción de Leighton). Los resultados de dichas observaciones proporcionan los siguientes valores: velocidades de propagación comprendidas entre 15 y 25 Km/seg., amplitud máxima de 1 Km/s., y periodos de oscilación entre 210 y 270 segundos.

Junto a estas ondas ("running penumbral waves") Moore y Tang (1975) observaron unas estructuras difusas (que denominaron "smoke Puffs"), que partían de la sombra y se adentraban en la penumbra oscilando con igual periodo que las ondas penumbrales y en fase con ellas. Debido al carácter difuso de estas estructuras y a su superposición con las ondas penumbrales se supone que son nubes absorbentes que se encuentran en la cromosfera a mayor altura que las ondas penumbrales.

Nye y Thomas (1974) estudiando la propagación de ondas en la penumbra encontraron que los periodos y velocidades observados en las ondas penumbrales corresponden con los de ondas magnetoacústicas modificadas por la gravedad que se transmiten horizontalmente confinadas a nivel fotosférico. Sugieren asimismo que dichas ondas penumbrales son generadas por oscilaciones en la sombra, del tipo de las observadas por Beckers y Schultz (1972). Posteriormente (1976), los mismos autores llegan a la misma conclusión basándose en un modelo teórico penumbral de dos capas con un campo magnético horizontal.

Recientemente Antia et al. (1978) identificaron las ondas penumbrales como modos magnetoacústicos rápidos propagándose a lo largo de un campo magnético horizontal.

0.6.-MODELOS DE LA PENUMBRA:

Un modelo de una estructura en una atmósfera estelar - (en este caso la penumbra de las manchas solares) consiste en especificar la variación con la profundidad (óptica ó geométrica) de los parámetros físicos que caracterizan la evolución y estabilidad de dicha estructura.

En la construcción de un modelo se parte de unos datos observacionales que según su contenido en información y posterior tratamiento teórico nos permiten alcanzar modelos más o menos completos. Así pues veamos las vías típicas seguidas en la elaboración de modelos penumbrales:

a) Observaciones en el continuo

A partir de estas observaciones se puede construir un modelo que nos proporcione la variación de la temperatura (T) y presión (p) en función de la profundidad óptica (τ). Para la determinación de $T(\tau)$, Makita (1963) y Moe-Maltby (1969) parten de estimaciones de la intensidad luminosa media en la penumbra, lo cual les lleva a un modelo homogéneo poco realista. Un modelo más perfecto se obtiene a partir de medidas de la intensidad de los filamentos brillantes y oscuros respecto de la fotosfera circundante (Moe y Maltby (1974)); será pues fundamental para este caso, el disponer de medidas en alta resolución y corregirlas de todo efecto de deterioro en el mayor grado posible.

Para completar el modelo se puede calcular $p(\tau)$ a partir de $T(\tau)$, bien suponiendo equilibrio hidrostático en la penumbra (Moe y Maltby (1969)), o bien suponiendo una presión adicional debida al campo magnético (Makita (1963) y Wilson (1968)).

b) Observaciones de líneas espectrales

Ya hemos señalado la información que sobre el campo de velocidades en la penumbra se podía obtener observando con alta resolución espacial las distorsiones producidas en las líneas espectrales. El estudio de las asimetrías del perfil de una línea espectral requiere del conocimiento de su perfil teórico para tomarlo como referencia. Dicho perfil teórico se obtendrá mediante el auxilio de un modelo, de los señalados en el apartado a), que nos proporcione $T(\tau)$ y $p(\tau)$ (ver p.ej. Stellmacher y Wiehr (1980)); asimismo, para la interpretación de los perfiles observados se requiere del conocimiento de las fracciones de área ocupadas respectivamente por filamentos brillantes y oscuros.

c) Modelos teóricos

Basándose en el aspecto que ofrecían los filamentos penumbrales en las fotografías de alta resolución obtenidas en el Proyecto Stratoscope (1959), Danielson (1961) desarrolló el modelo teórico, hasta ahora, más consistente de la penumbra. Danielson argumenta que el aspecto filamentario de la penumbra podría ser debido a un proceso de convección en rollos ("convection rolls"). Esta hipótesis tiene apoyo observacional (Beckers y Schöter (1969)), y teóricamente es justificable basándose en la fuerte desviación, con respecto a la vertical, que sufren las líneas de campo en la zona penumbral. Galloway (1975) completa este modelo dando, asimismo, una interpretación del efecto Evershed.

0.7.-FOTOMETRIA DE LA PENUMBRA:

El objetivo de la fotometría de estructuras solares es determinar la verdadera distribución de intensidades $I_\lambda(x,y,t)$ en la estructura bajo estudio. Ahora bien, debido al hecho de que la información procedente del Sol ha de atravesar diversos medios que actúan como filtros, llega a nosotros muy deteriorada. En la

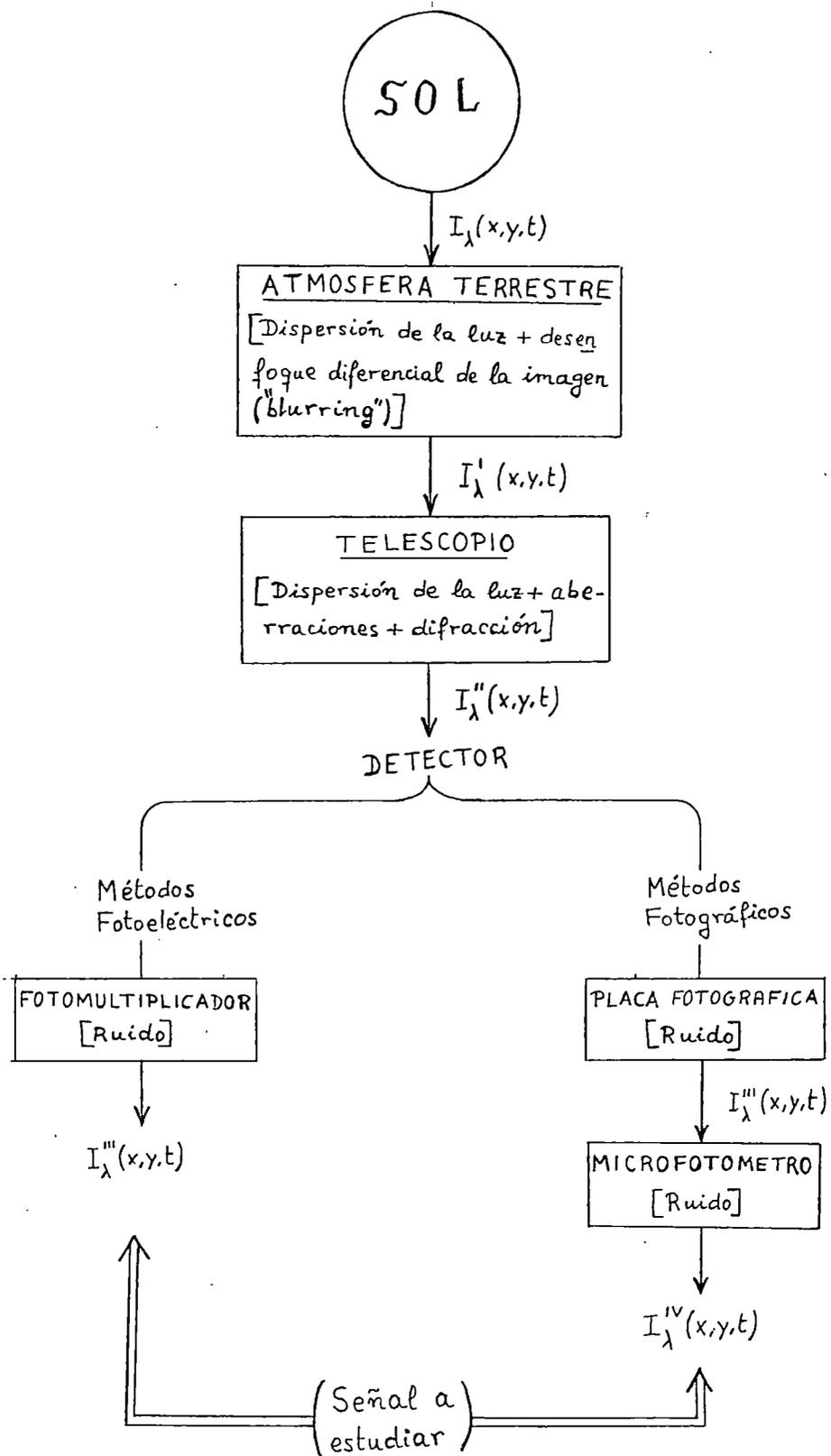


Fig. (0.1)

Fig.(0.1) se representan esquemáticamente los distintos medios que atraviesa la luz procedente del Sol, así como las fuentes de perturbación que cada uno aporta.

El arte de la fotometría consiste en descontaminar, la señal observada, en el grado en que sea posible, de todos estos efectos de deterioro. El problema se hace más delicado cuando pretendemos obtener un alto grado de resolución espacial, como ocurre en el caso de las estructuras filamentosas penumbrales. Además, puesto que son varias las fuentes de perturbación, hay que tratar "a priori" de que se manifiesten de la forma más atenuada posible, es decir, hay que procurar buenas condiciones atmosféricas de observación y disponer de un telescopio de alta resolución (y placa de grano fino en el caso de fotometría fotográfica). De otra forma cualquier intento de restauración de la información resultaría vano. El cúmulo de dificultades que se presentan a la hora de hacer una buena fotometría de estructuras finas explica la escasez de trabajos publicados sobre fotometría de la penumbra de las manchas solares. A continuación hacemos un breve resumen de las principales medidas realizadas al respecto.

a) Valores promedio.

Se trata de valores medios de intensidad penumbral referidos a la intensidad de la fotosfera circundante. Las principales medidas proceden del grupo de Oslo utilizando métodos fotoeléctricos (Jensen y Ofstad (1963); Roedberg (1966)). No detectan variaciones significativas de intensidad de una mancha a otra (Maltby y Mykland (1968)), observándose ligeras fluctuaciones a lo largo de la penumbra. Utilizando dicho sistema foteléctrico, Maltby (1972) estudió la dependencia de la intensidad con la longitud de onda encontrando valores que aumentan, aunque no linealmente, desde 0.64 para 3870 Å hasta 0.936 a 3.8 μ en el infrarrojo.

b) Valores inhomogéneos

Se trata de valores de intensidad de los filamentos penumbrales brillantes y oscuros separadamente, con respecto a la fotosfera. Las observaciones de más alta calidad proceden de los vuelos del globo estratosférico soviético (Krat et al. (1972); Krat y Vyalshim (1978)) y las observaciones realizadas en Pic du Midi (Muller (1973 a,b)). Ambos utilizan métodos -- fotográficos.

A partir de los datos un tanto confusos de Krat et al. (1972), Moe y Maltby (1974) deducen unos valores medios para los filamentos brillantes (I_b/I_{fot}) de 0.78, mientras que -- Muller (1973 a,b) obtiene 0.95 para las regiones externas de la penumbra y 0.90 para las interiores. Es de destacar que a partir de las observaciones citadas, Muller (1973 b) y Krat-Vyalshin (1978) encuentran en los filamentos brillantes estructuras granulares (gránulos penumbrales) algunas de las - cuales tienen intensidad superior que la fotosfera circundante. Estos últimos autores señalan que el brillo de los filamentos brillantes parece depender de si los filamentos oscuros esten presentes o ausentes bajo ellos. En lo que se refiere a los filamentos oscuros las observaciones rusas dan un valor medio de 0.62 mientras que Muller obtiene 0.60 para las - partes exteriores y 0.52 para las interiores de la penumbra.

El trabajo de la presente memoria se encuadra en este apartado referente a medidas de valores de intensidad en los filamentos brillantes y oscuros de la penumbra. Las medidas -- las medidas las hemos realizado en base de fotografías de alta resolución tomadas durante el eclipse parcial del 30 de -- Junio de 1973 en Izaña (Tenerife). Nuestro trabajo tiene una doble vertiente: 1) Describir un proceso de descontaminación de las medidas realizadas, aprovechando información obtenida por la circunstancia del eclipse; 2) Estimar valores de parámetros físicos sobre los datos fotométricos ya corregidos. - Así pues, en el Capitulo I damos información sobre las características y material de observación. En el Capitulo II describimos detalladamente el proceso de calibración utilizado.

En el Capitulo III expondremos una miscelánea de la herramienta matemática de Fourier en que se basa fundamentalmente nuestro método para descontaminar de perturbaciones los datos medidos. En los Capítulos IV y V damos una detallada descripción del citado método de descontaminación. Finalmente en el Capitulo VI procedemos a la descontaminación o restauración de los datos y medimos una serie de parámetros físicos que caracterizan la estructura penumbral de una mancha solar: anchura de los filamentos y distribución de intensidades, respecto de la fotosfera circundante, en los filamentos brillantes y oscuros separadamente; damos también valores medios de estos parámetros y finalmente elaboramos un modelo de penumbra basado en los datos obtenidos.

Dados los múltiples aspectos que hay que tratar en este problema fotométrico bajo un punto de vista práctico operacional hemos desglosado el desarrollo del trabajo en varios módulos (ver Fig.(0.2)); cada uno de ellos desempeña un cometido y tiene asociados un conjunto de programas FORTRAN que realizan dicho cometido.

Un Apéndice completa la exposición de esta memoria. En él exponemos las cinco fotografías en que se basa nuestro estudio.

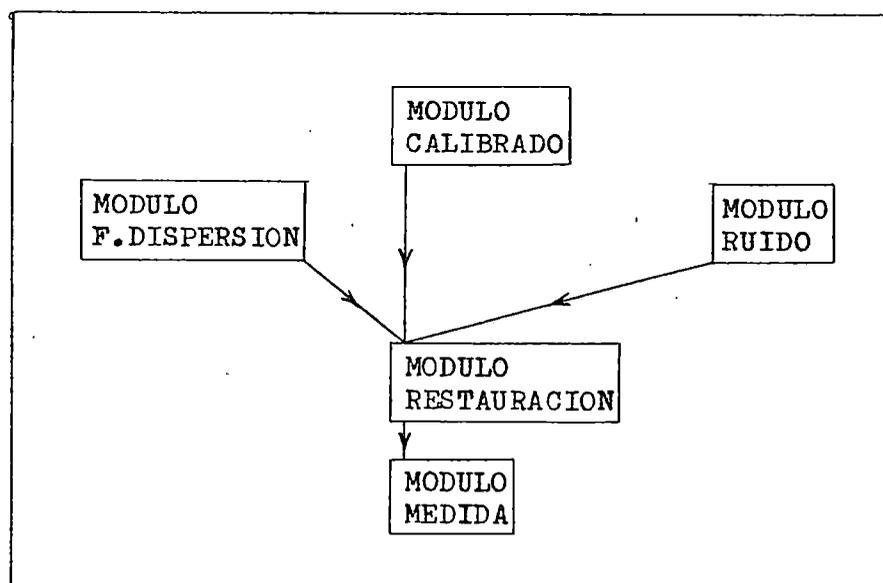


Fig.(0.2)

CAPITULO I

MATERIAL DE OBSERVACION, INSTRUMENTACION Y MEDIDAS

I.1.-MATERIAL DE OBSERVACION:

El presente trabajo se basa en las observaciones realizadas en Tenerife durante el eclipse parcial del 30 de Junio de 1973, por el Profesor W. Mattig del Kiepenheuer Institut - de Freiburg i.Br. (Alemania Federal) a cuyo equipo de observación tuve el honor de pertenecer. Se utilizó un reflector -- Newton a vacío, cuyas características expondremos más adelante, del mencionado Instituto, emplazado en el Observatorio del Teide (2.400 m. sobre el nivel del mar) del Instituto Astrofísico de Canarias (ver Fig.(1.1)).

A lo largo de todo el eclipse se realizaron un total de unas 21000 fotografías en secuencias de 30 segundos a razón de 18 exposiciones/seg., con una cámara Bolex de 16 mm. y utilizando películas Copex-ortho o Copex-pan de la casa Agfa. Las fotos fueron hechas en tres rangos de longitud de onda centrados respectivamente en $\lambda 4220\text{\AA}$, $\lambda 5550\text{\AA}$ y $\lambda 6070\text{\AA}$ utilizando sendos filtros interferenciales de anchura de banda de 200\AA . La ocultación de la mancha, perteneciente a la región activa -- McMath 12417, por la Luna en su tránsito a través del Sol fue registrada a lo largo de una película completa en $\lambda 5550\text{\AA}$ (**).

(**) Nota.- El material restante, en su mayoría correspondiente a fotografías de granulación fotosférica en proceso de ocultación y reaparición por detrás de la Luna, ha sido explotado por F.L.Deubner y W.Mattig(1975), para realizar estudios sobre fluctuaciones en la intensidad granular.

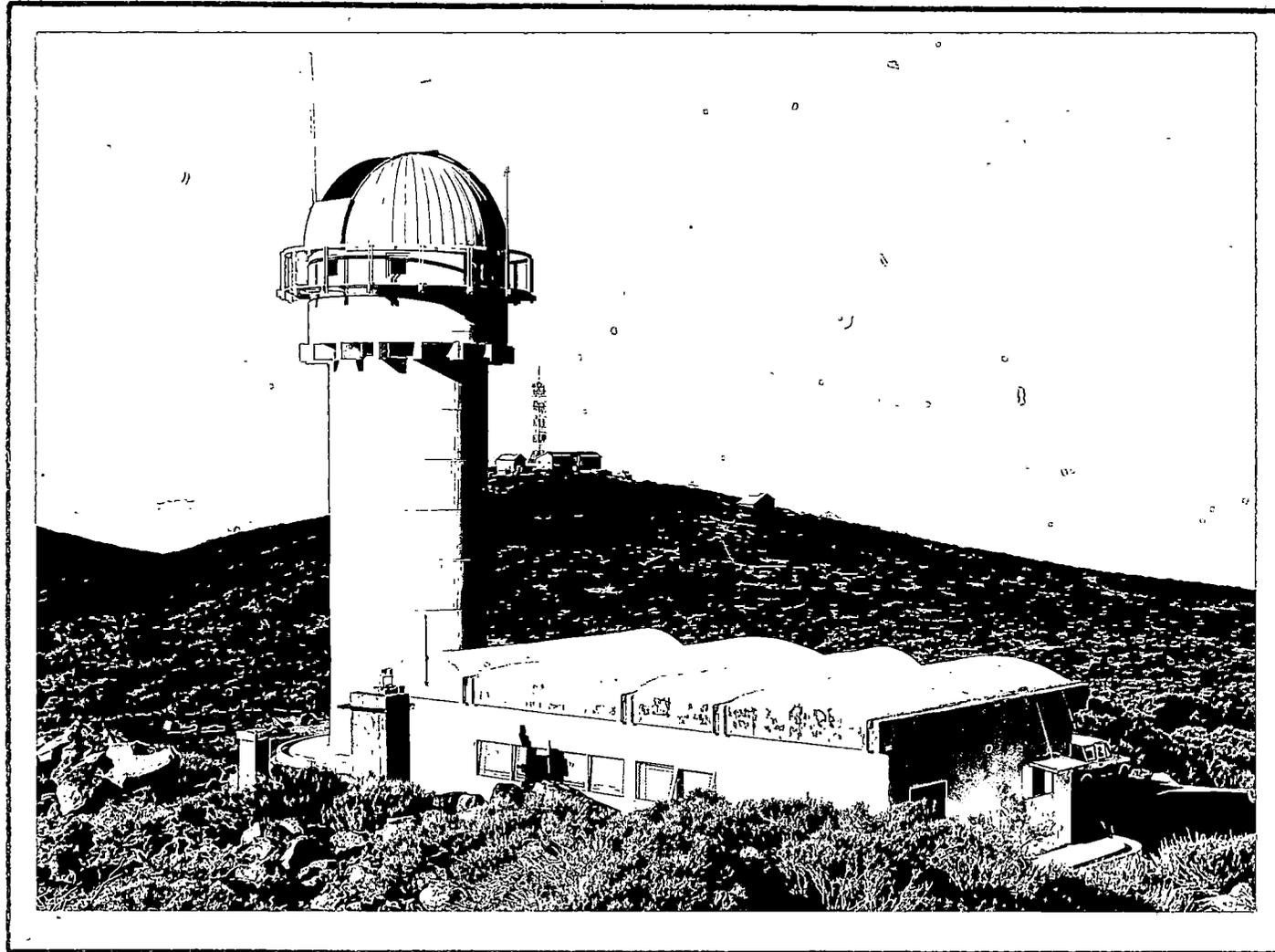


Fig.(1.1) Torre y casa solar
Observatorio del Instituto Astrofísico de Canarias
(Izaña 2400 m. de altitud).

De dicha película , en una preselección, separamos las 29 mejores exposiciones. En una selección final hemos escogido las cinco mejores fotografías, fotometrando varias áreas sobre cada una de ellas (ver Apéndice A).

I.2.-TELESCOPIO:

El telescopio utilizado es un reflector tipo Newton al vacío perteneciente al Kiepenheuer Institut de Freiburg i.Br. (ver Fig.(1.2)). El cuerpo principal del telescopio consta de un tubo cilíndrico herméticamente cerrado (ver Fig.(1.3)). La luz penetra en el interior a través de un vidrio óptico plano muy homogéneo de 3 cm. de espesor y 60 cm. de diámetro (V_1). La apertura del telescopio (diámetro del espejo primario E_1) es de 40 cm. Tras reflejarse la luz en E_1 y E_2 (espejo secundario plano) se forma la imagen del Sol en el foco primario (F) que se encuentra todavía en el interior de la cavidad a vacío. En el foco primario se emplaza un diafragma de campo (DC) que selecciona una pequeña área de la imagen del Sol (4mm. de diámetro). La razón de ser de la cámara de vacío es obvia; por una parte impide que corrientes turbulentas de aire, provenientes del calentamiento del medio que rodea al telescopio, atraviesen el camino óptico hasta el foco primario, con las consiguientes perturbaciones que esto originaría en la imagen primaria. En segundo lugar, la imagen primaria del Sol formada sobre DC supone una gran cantidad de energía calorífica allí concentrada y la ausencia de aire evita problemas de corrientes convectivas que incidirían del mismo modo en un deterioro de la imagen.

La pequeña parte de luz que deja pasar DC sale de la cámara de vacío a través de una ventana V_2 y el área del Sol seleccionada es amplificada por un sistema óptico secundario L_1 y L_2 hasta formar sobre la película (P) una imagen con una escala a razón de 5.5 seg. de arco/mm. Así pues, la distancia focal efectiva del telescopio resulta ser de 37.5 metros. El filtro interferencial (FI), intercambiable, permite la selección de -

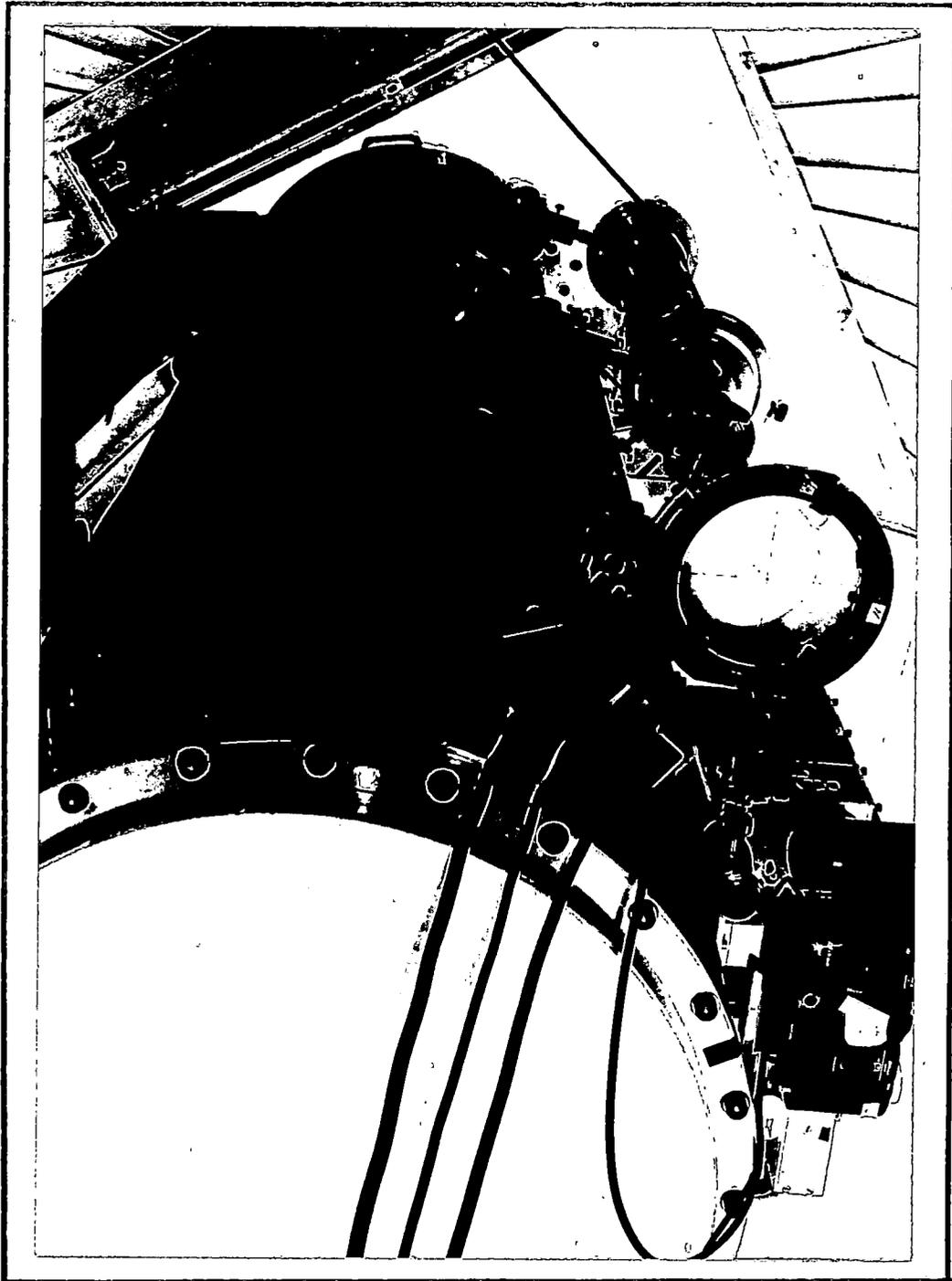


Fig.(1.2) Telescopio Solar
Reflector Newton a vacio de 40 cm de apertura
Propiedad del Kiepenheuer Institut de Freiburg
i.Br.(Alemania Federal).

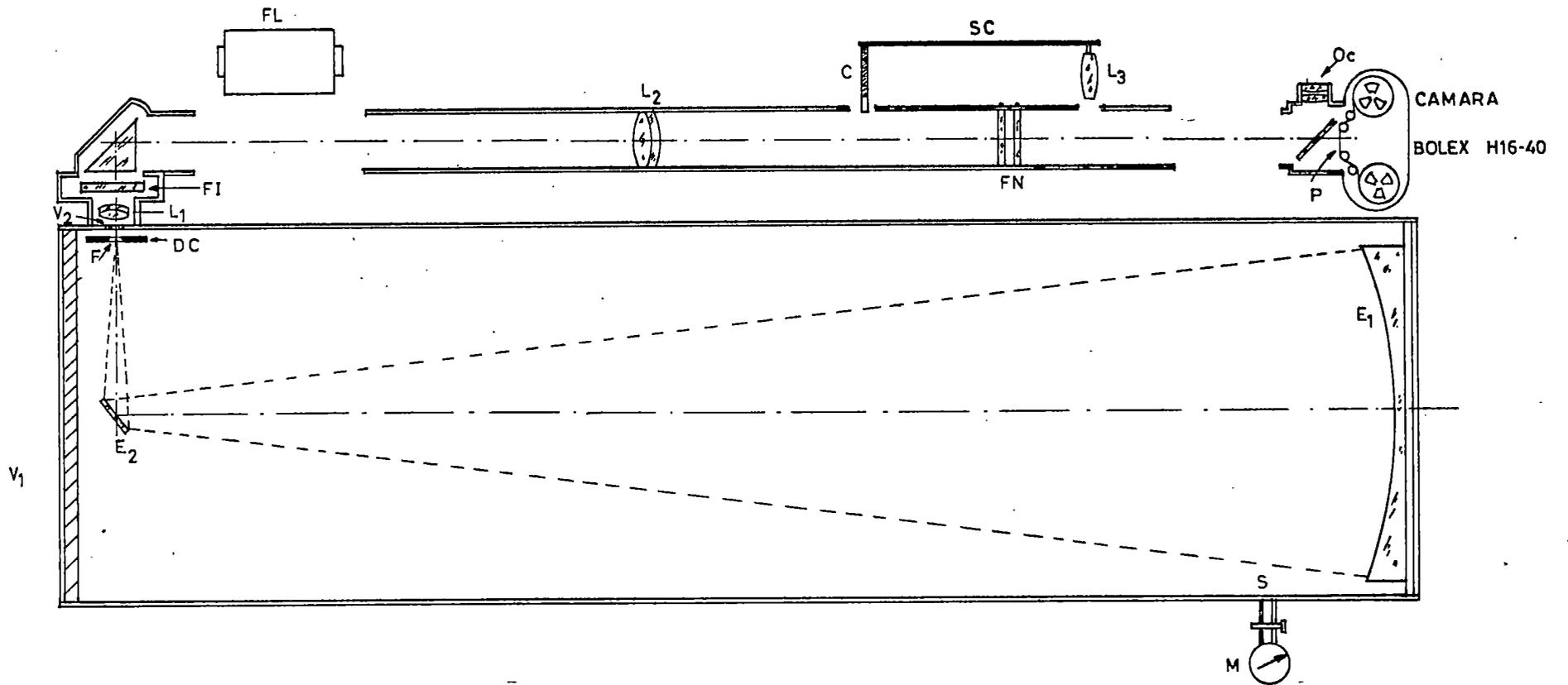


Fig.(1.3) Esquema óptico del Telescopio Solar

longitud de onda y anchura de banda determinadas. Un filtro birrefringente de Lyot (FL) (para H α o K del Ca) se puede interponer en el camino óptico cuando se quieren hacer observaciones cromosféricas. Las lentes L₁ y L₂ desempeñan también un papel colimador y colector respectivamente para que tanto FI como FL trabajen en condiciones óptimas, es decir, con un haz de rayos paralelos. Un sistema de filtros neutros intercambiables (FN) permite controlar el brillo de la imagen final. La observación visual del área del Sol seleccionada se hace mediante el ocular O_c aprovechando el sistema reflex de la cámara. Cuando se desea calibrar la película se desliza el sistema de calibrado (SC) hasta interponerlo en el camino óptico. Dicho sistema consta de una cuña densitométrica (C) y un sistema óptico (L₃) cuya misión es producir la imágen de C sobre P y desenfocar la imágen del Sol para evitar que se superponga a la de la cuña (ver Capítulo II).

La válvula S permite controlar la presión interior del tubo mediante el manómetro M ó, en su caso, conectar la bomba de vacío pudiendose alcanzar en menos de 1 hora un vacío de menos de 0.3 torr.

I.3.-MICROFOTOMETRO:

La fotometría de las áreas seleccionadas la hemos realizado con el microdensitómetro digitalizado de la Universitäts Sternwarte de Göttingen (Alemania Federal) (ver Fig.(1.4)) bajo la supervisión y ayuda del Dr. Wittmann.

I.3.1.-Descripción del esquema óptico (ver Fig.(1.5)):

La rendija principal RP es una ventana rectangular o cuadrada delimitada por los bordes perfectamente rectilíneos de cuatro filtros rojos que se pueden deslizar de manera que sean modificables las dimensiones de dicha ventana. El condensador C forma la imágen del filamento de la lámpara en las proximidades del objetivo M₁, produciendo en RP y los filtros que la de-

limitan una iluminación homogénea. Toda la zona iluminada es proyectada por el objetivo M_1 sobre la placa fotográfica P. Dicha proyección consiste en una mancha circular homogénea de luz roja con una pequeña zona de luz blanca (imagen de RP) en el centro. La imagen de RP sobre P delimita la porción de placa que va a ser fotometrada ya que el fotomultiplicador tiene un prefiltro azul (F) que impedirá el paso de la luz roja.

La placa así iluminada es proyectada por el objetivo de microscopio M_2 y las lentes l_1 y L_1 sobre una pantalla esmerilada donde forma su imagen para ser observada por el operador. La parte de imagen proyectada en rojo nos permite visualizar un gran entorno de la placa, pudiendo de esta forma seleccionar y posicionarnos fácilmente (moviendo la plataforma que soporta la placa) en la zona de interés a fotometrar..

Otra imagen de la placa fotográfica, iluminada^{do} tal como hemos descrito, es proyectada por M_2 y l_2 sobre una pantalla opaca en cuyo centro se encuentra una rendija cuadrada o rectangular también graduable: la llamada rendija secundaria (RS). Las dimensiones de esta rendija se ajustan de modo que en su centro quede enmarcada la imagen del trocito de placa iluminado por luz blanca. Así pues, el haz de luz blanca pasa a través de la RS y después de ser filtrado por F ilumina uniformemente el fotocátodo. Por lo tanto el fotomultiplicador integra toda la información contenida en el trocito de placa que es iluminado por la imagen de la rendija principal. Dicho de otra manera, el tamaño de la rendija principal condiciona la resolución de la medida. La misión de la rendija secundaria es impedir en gran parte el paso de luz parásita que haya penetrado en el interior del instrumento. Para controlar el ajuste de RS introducimos en el camino óptico el espejo E_2 y eliminamos el E_4 , todo ello mediante un conmutador (ver esquema de manejo, punto 18, Fig.(1.7)). En esta situación no llega luz al fotomultiplicador y mediante L_2 , en la pantalla esmerilada vemos las imágenes superpuestas de la placa y de ambas rendijas tal como representa la Fig.(1.6). Para evitar una involuntaria --

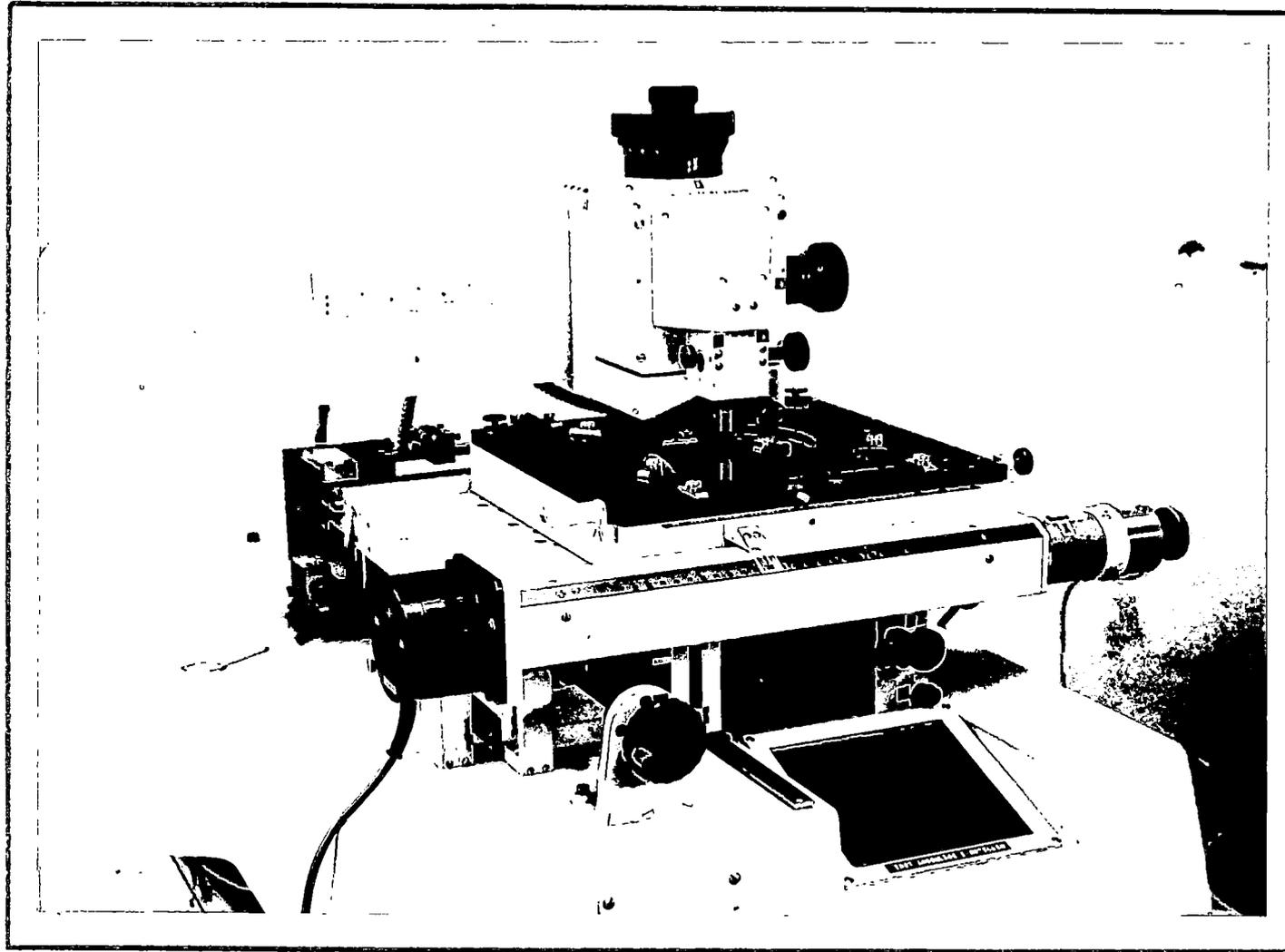


Fig.(1.4). Microfotómetro digitalizado de la Universitäts
Sternwarte de Göttingen (Alemania Federal).

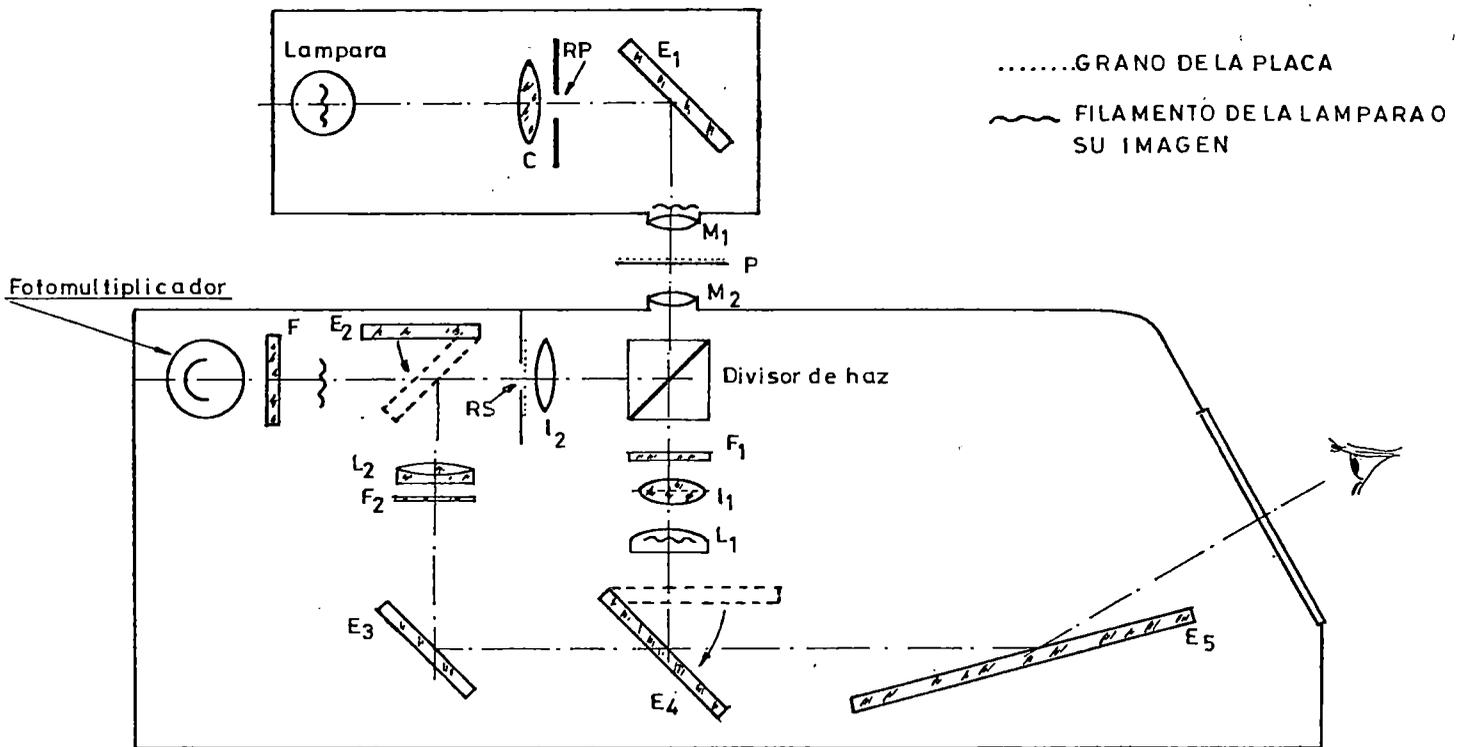
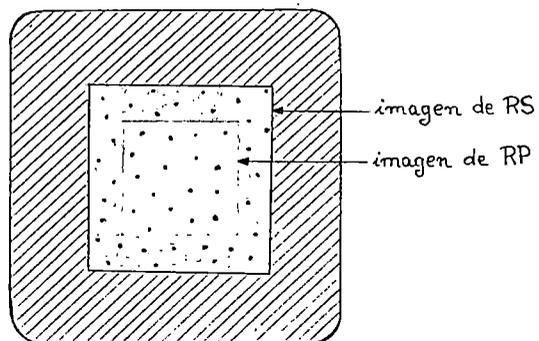


Fig.(1.5)



Fig(1.6)

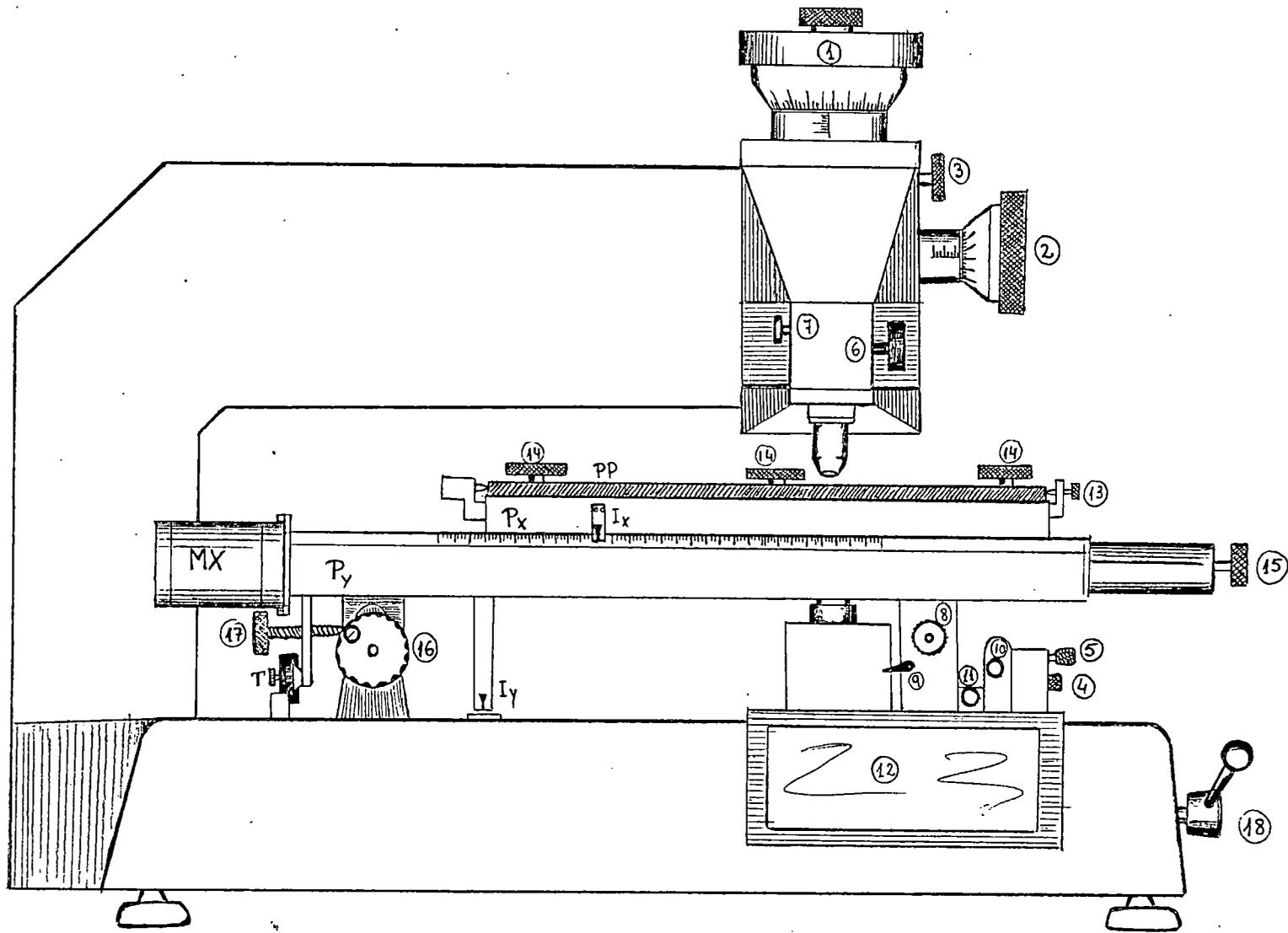


Fig.(1.7)

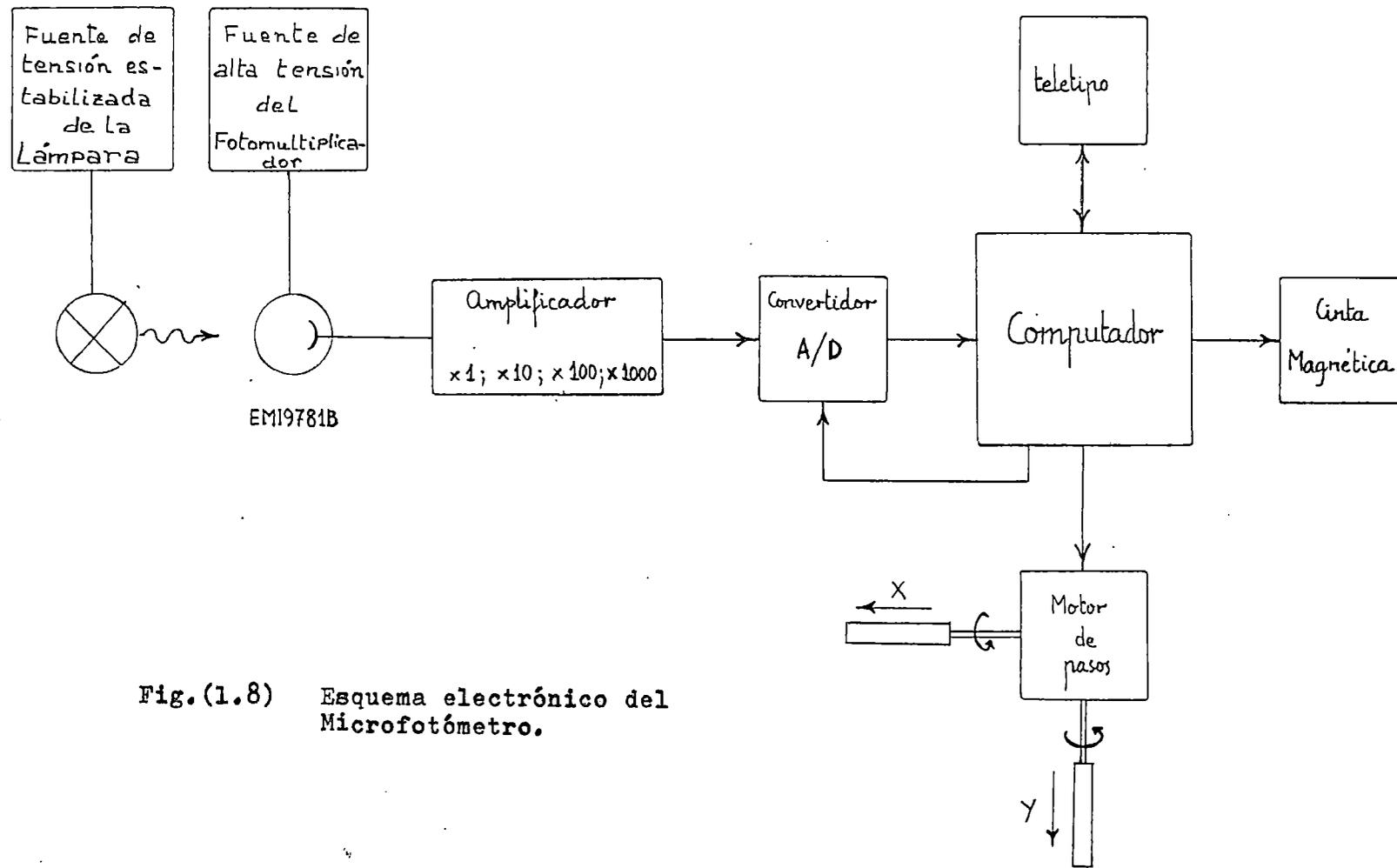


Fig.(1.8) Esquema electrónico del Microfotómetro.

supresión de información, al ajustar RS no ceñimos su tamaño excesivamente al de la imagen RP sino que dejamos a su alrededor un ligero ribete del campo iluminado con luz roja. Esta luz roja que pasará a través de la rendija secundaria no constituye problema alguno ya que será eliminada por el filtro azul F junto con la luz parásita residual de otras partes del espectro.

Finalmente hacemos notar que la misión de los filtros naranja F_1 y F_2 es la de controlar la luminosidad y contraste de la imagen formada sobre la pantalla esmerilada para favorecer la observación visual.

I.3.2.-Descripción del esquema de manejo (ver Fig.(1.7))

- ① Tornillo micrométrico para dimensionar en Y la rendija principal.
- ② Tornillo micrométrico para dimensionar en X la rendija principal.
- ③ Tornillo para rotación de la rendija principal.
- ④ Tornillo para dimensionar en X la rendija secundaria.
- ⑤ Tornillo para dimensionar en Y la rendija secundaria.
- ⑥ Tornillo que permite desplazar el microscopio superior para enfocar la imagen de la rendija principal sobre la placa fotográfica colocada en el portaplacas PP.
- ⑦ Mecanismo para fijar la posición del microscopio superior una vez realizado el enfoque.
- ⑧ Tornillo que permite desplazar el microscopio inferior para enfocar la imagen de la placa iluminada, sobre el plano de la rendija secundaria, definiendo así nítidamente la porción a fotometrar.
- ⑨ Mecanismo para fijar la posición del microscopio inferior - una vez realizado el proceso de enfoque.
- ⑩ y ⑪ Mecanismos para desplazar en X e Y respectivamente el microscopio inferior para alinear su eje óptico con la óptica de la parte superior.
- ⑫ Pantalla esmerilada

- ⑬ Tornillo que libera el portaplacas PP permitiendo su rotación.
 - ⑭ Tres tornillos para nivelación del portaplacas.
 - ⑮ Rueda que permite el movimiento manual de la plataforma P_x en X.
 - ⑯ Rueda que permite el movimiento manual de la plataforma P_y en Y.
 - ⑰ Tornillo de fijación para impedir el movimiento de la plataforma P_y .
 - ⑱ Palanca conmutador que mueve los espejos E_2 y E_4 permitiendo la observación de la rendija secundaria (Fig.(1.5)).
- P_x : Plataforma con movimiento en el eje X (eje contenido en el plano del papel). Esta plataforma desliza sobre P_y y soporta el portaplacas PP.
- P_y : Plataforma con movimiento en el eje Y (eje perpendicular al plano del papel).
- MX: Motor paso a paso que mueve la plataforma P_x . El análogo MY para la plataforma P_y está en el extremo opuesto de la rueda ⑯.
- I_x : Indicador de posición sobre regleta en el eje X.
- I_y : Indicador de posición sobre regleta en el eje Y.
- T : Topes para fijar los márgenes de movimiento de P_y . Los análogos para P_x están detrás.

I.3.3.-Descripción del esquema electrónico (ver Fig.(1.8))

En definitiva nuestra fotometría consiste en medir transparencias en los distintos puntos de una placa(ver epígrafe I.4). Para que las medidas sean comparables entre ellas, la luz incidente sobre la placa ha de tener una intensidad luminosa invariable durante todo el tiempo que dura la medida; este requerimiento exige que la fuente de alimentación de la lámpara esté altamente estabilizada. Aunque dicha fuente tiene un amplio rango de variación en el voltage de salida, las características de la lámpara no permiten trabajar a más de 10 voltios. También el modo de trabajo de un fotomultiplicador exige una alimentación de alto voltage muy estabilizada. El fotomultiplicador utilizado

es un EMI9781B, no pudiendo superarse en el voltage de alimentación el valor de 1115 voltios. El rango de variación en los valores de nuestras medidas aconsejó la elección de un voltage de 810 voltios para alimentación del fotomultiplicador y una intensidad de 6 amperios para alimentación de la lámpara.

La luz incidente sobre el fotocátodo produce una señal de salida del fotomultiplicador que se mide en términos de diferencia de potencial. Dicha señal incide sobre un amplificador de ganancia variable. La selección de la ganancia está, en definitiva, en relación con la transparencia de las distintas zonas de la placa; para fotometrar zonas de alta transparencia hemos utilizado un factor x10 y para zonas de baja transparencia un factor x100.

La señal amplificada es transformada en digital mediante un convertidor A/D cuya resolución es de 10 bits.

El proceso de medida es gobernado por un programa escrito en lenguaje de máquina por el Dr. Wittmann. La computadora utilizada es un HONEYWELL H316 de 4K palabras de 16 bits de longitud. Las características de un proceso particular de medida -- (nº de barridos, longitud de los mismos, longitud de cada paso del motor, etc...) son introducidas en el programa mediante un EDITOR a través de teletipo. La orden de ejecución del programa es dada desde consola.

El esquema de trabajo del programa puede desglosarse en los siguientes puntos:

- a) Controla un motor paso a paso que acciona sobre las plataformas P_x y P_y .
- b) Controla el convertidor A/D, del cual obtiene 64 datos para cada punto de la placa que es sometido a medida, realizando posteriormente su promedio con objeto de atenuar en lo posible el ruido originado en el sistema de medida.
- c) Finalmente almacena el valor promedio en cinta magnética -- (556 bits/pulgada y 7 pistas).

I.4.-MEDIDAS:

La respuesta del fotomultiplicador es directamente proporcional a la cantidad de luz que incide sobre el fotocátodo y esta cantidad es proporcional a su vez a la transparencia de la porción de placa que está siendo iluminada por la imagen de RP formada por M_1 sobre la placa fotográfica. Dicho de otra manera, nuestras medidas son una estimación cuantitativa de la "transparencia" o "transmitancia" (usaremos ambos términos indistintamente) en distintas porciones de la placa fotográfica. Los diferentes valores numéricos obtenidos (T_i) los referimos al número que resulta de medir la transparencia de una zona de la placa no expuesta a la luz (T_v), en donde únicamente existe el llamado "velo fotográfico" (p.ej. borde exterior de la película o la zona de separación entre una exposición y otra). Hecha esta reducción, el rango de variación de los valores numéricos que resultan de la estimación de la transmitancia en los distintos puntos, está comprendida entre 0 y 1.

$$0 \leq \frac{T_i}{T_v} \leq 1$$

(El valor cero se alcanzará en zonas de la placa que sean prácticamente opacas, y el valor 1 en zonas cuya transparencia sea igual a la de la parte de placa no expuesta a la luz).

Normalmente la transmitancia de un punto la referiremos a la del velo en términos de tanto por ciento, es decir:

$$0 \leq \frac{T_i}{T_v} \times 100 \leq 100$$

En el Capítulo V haremos uso del término "densidad fotográfica". La densidad fotográfica en una porción i de la placa se define como:

$$D_i = \lg \frac{1}{T_i/T_v} = \lg \frac{T_v}{T_i} \quad (\text{Log. de la inversa de la transmitancia})$$

El uso de esta nueva magnitud, de definición aparentemente compleja, quedará plenamente justificada en el citado Capitulo V.

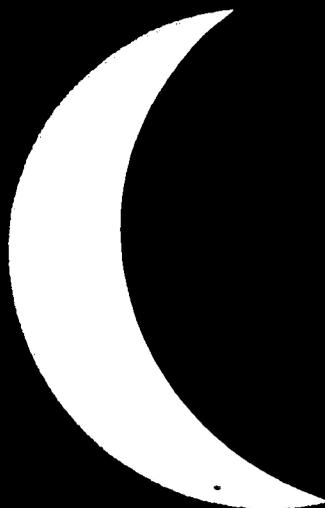
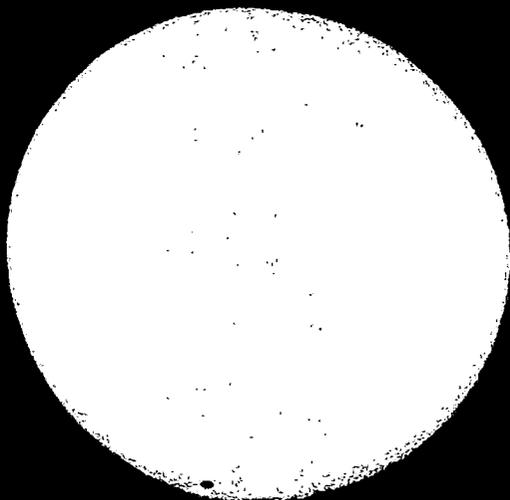
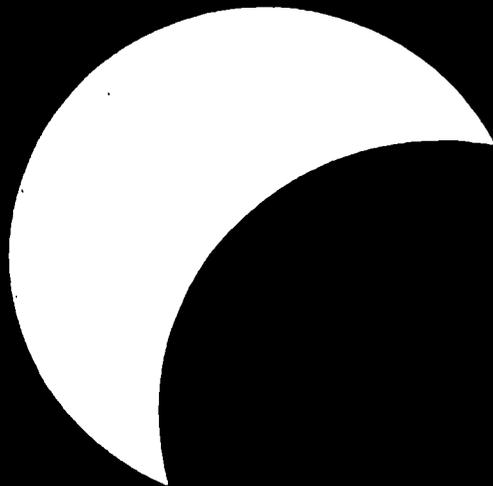
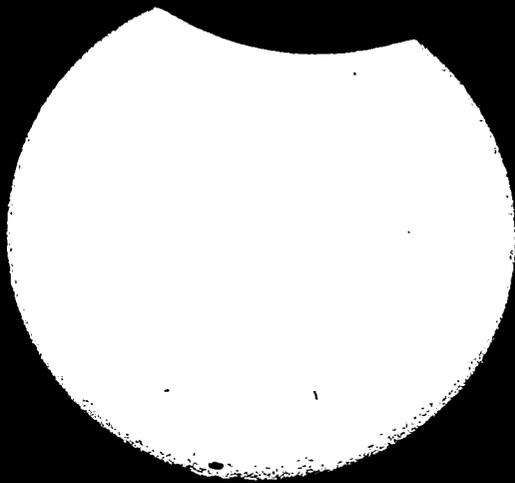
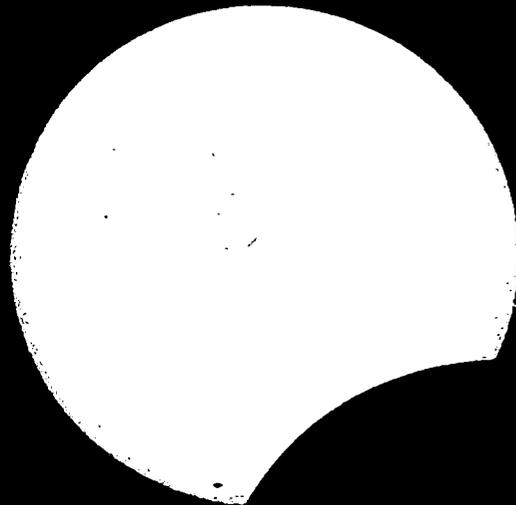
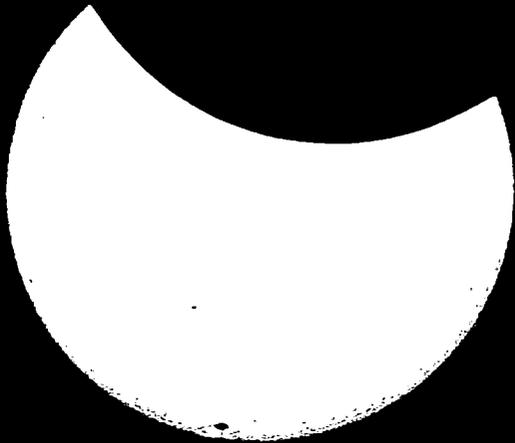
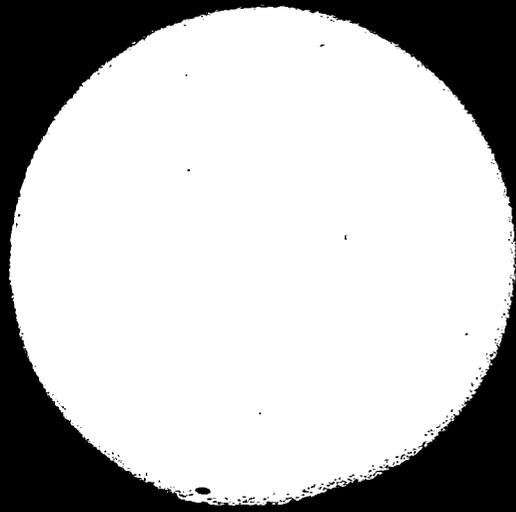
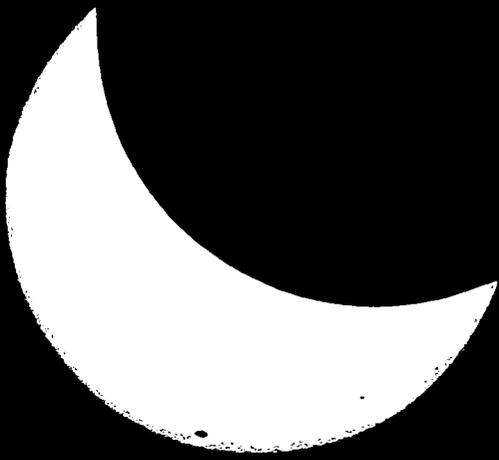
Por otra parte la resolución de nuestras medidas viene condicionada por el tamaño de la imagen de la rendija principal del microfotómetro (ver I.3.1) sobre la placa fotográfica y por la distancia entre dos medidas consecutivas ("paso del barrido"). Normalmente el paso del barrido se escoge inferior o igual a la anchura de la imagen de la rendija principal con objeto de que haya solapamiento entre dos pequeñas áreas medidas consecutivas o en todo caso que no quede ninguna porción de placa a lo largo de un barrido, por ínfima que sea, sin ser sometida a medida. Dado que las estructuras que pretendíamos resolver tienen una anchura media del orden de 0.4 seg. de arco ($\sim 73 \mu\text{m}$ sobre el negativo), hemos escogido una rendija principal cuya imagen sobre la placa tiene unas dimensiones de 0.0825 seg. de arco x 0.0825 seg. de arco ($15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$) y un paso de barrido de 0.066 seg. de arco ($12 \mu\text{m}$ sobre el negativo); es decir, ambas dimensiones son sensiblemente inferiores al valor medio de la estructura a resolver.

La reducción de las medidas la hemos realizado en el ordenador NOVA-4 de DATA GENERAL (34K palabras) del Instituto de Astrofísica de Canarias.

I.5.-ALGUNOS DATOS SOBRE EL ECLIPSE DEL 30 DE JUNIO DE 1973:

Este eclipse es uno de los más importantes de la historia en lo que a tiempo de duración de la fase total se refiere (con un máximo de 7 minutos 4 segundos, cerca de la frontera de Argelia, Malí y Niger). Se observó como total en una franja de unos 250 Km. de anchura desde el norte del Brasil, pasando por la Guayana Británica, Oceano Atlantico, Mauritania, Malí, Sur de Argelia, Niger, Sudán, Kenya, hasta terminar en el Oceano Indico a unos 1800 Km. al NE de Madagascar (F.Herrera (1975)).

Desde el Observatorio del Teide (Tenerife) fué observado como parcial teniendo lugar el primer contacto a las $9^{\text{h}}30,545^{\text{m}}$ en un punto del disco solar situado al suroeste $\text{SW}08^{\circ}$ y el último contacto a las $12^{\text{h}}3,554^{\text{m}}$ en el punto $\text{SE}27^{\circ}$. La máxima fase (sobre las $10^{\text{h}}40^{\text{m}}$), alcanzó un valor de 0.771 (referido al valor del diámetro solar tomado como unidad). El aspecto de evolución del eclipse tal como fué observado desde el observatorio de Maspalomas en la vecina isla de Gran Canaria, queda bien reflejado en la Fig.(1.9) cedida gentilmente por su autor F. Herrera.



CAPITULO II

CALIBRACION

II.1. INTRODUCCION

La respuesta de una emulsión fotográfica ante la incidencia de energía luminosa, sea o no monocromática, no es lineal; ésto complica considerablemente el proceso de medida y se requiere de una calibración previa para obtener en definitiva la curva que represente la respuesta de la placa frente a la energía luminosa incidente (Curva Característica), (Stock Williams (1962)). Básicamente, el método de calibrado consiste en fotografiar un conjunto de fuentes de luz cuyas intensidades relativas son conocidas, y tras medir la respuesta de la placa (también llamada "efecto fotográfico) ante la iluminación producida por cada una de las fuentes, se hace un gráfico en el que representaremos las intensidades de las distintas fuentes de luz frente al efecto fotográfico producido en sus imágenes. Dos matizaciones son necesarias en éste punto: 1) la composición espectral de las fuentes luminosas ha de ser la misma que la de la luz que emite el objeto que pretendemos fotometrar ya que la emulsión fotográfica es un detector selectivo; 2) para evitarnos problemas debido al fallo de la Ley de Reciprocidad el tiempo de exposición utilizado para fotografiar las fuentes de luz ha de ser aproximadamente del orden del utilizado para fotografiar el objeto en estudio.

Una manera de conseguir fuentes luminosas de intensidad relativa conocida e igual composición espectral es depositar sobre un soporte transparente un conjunto de pequeños filtros neutros rectangulares dispuestos paralelamente cuyas transmittancias sean conocidas; dicho conjunto constituye lo que se llama "Cuña Densitométrica". El soporte con los filtros es iluminado por detrás y fotografiado mediante un sistema óptico similar al de la Fig.(2.1).

La intensidad relativa emergente de cada filtro neutro de la cuña, es conocida a partir de la transparencia del mismo. La composición espectral de la lámpara ha de ser análoga a la de -

la energía emitida por el objeto a fotometrar. Obviamente, cuantos más escalones (filtros neutros) tenga la cuña más puntos podremos precisar de la curva de calibrado. El último paso consiste en ajustar una curva a los puntos obtenidos. Este método requiere de un calibrado previo y cuidadoso de la transmitancia de cada uno de los escalones de la cuña.

II.2. METODO DEL FILTRO MEDIO

El calibrado de las películas se ha realizado por el "Método del Filtro Medio" cuyo fundamento radica en un artículo de Kienle (1.937) dedicado a la fotometría fotográfica de magnitudes estelares, y que ha sido adaptado posteriormente para fotometría solar. La ventaja de éste método radica fundamentalmente en que solo se requiere de la calibración (transmitancia T_{FM}) previa de un solo filtro neutro al cual llamaremos "filtro medio" (FM). Dicho filtro se superpone a una cuña densitométrica cubriendo la mitad de ella, perpendicularmente a los escalones (Fig (2.2)).

Desplazando el dispositivo SC de la Fig (1.3) introducimos en el camino óptico el montaje de la cuña descrito, además de una óptica adicional cuya misión es producir la imagen de la cuña y evitar que se forme la imagen solar sobre la placa fotográfica. Por este procedimiento tenemos asegurado que el calibrado lo realizamos con una fuente luminosa de igual composición espectral que el objeto de estudio ya que es la luz solar la que ilumina la cuña.

La imagen obtenida sobre la placa tendrá un aspecto similar al de la Fig (2.3).

No conocemos la relación entre las intensidades emergidas de los distintos escalones del montaje de la Fig(2.2); lo que sí sabemos es la relación entre cada pareja de intensidades emergidas respectivamente de la parte descubierta y de la parte cubierta por FM.

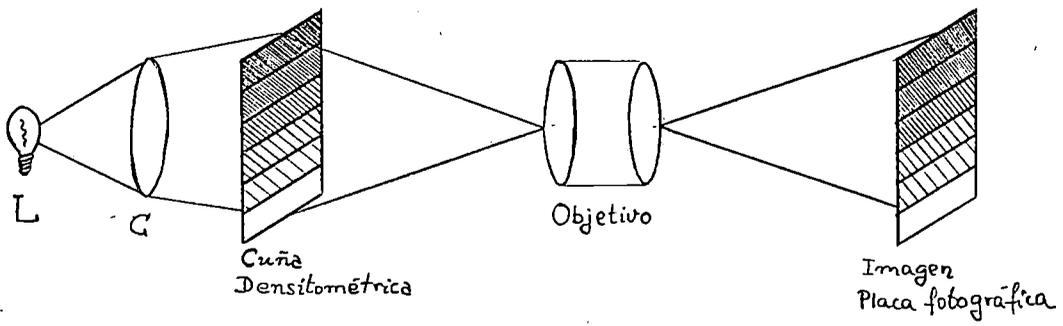


Fig. 2.1

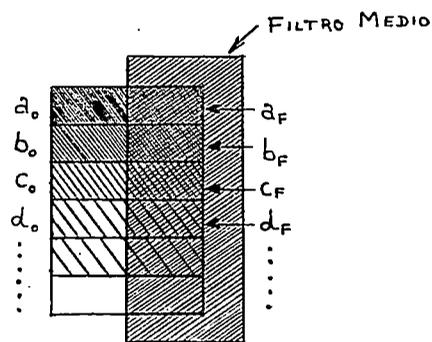


Fig. 2.2

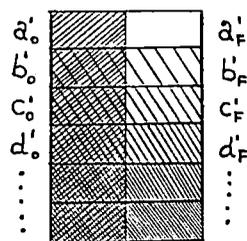


Fig. 2.3

$$I_{a_F} = I_{a_o} \cdot T_{FM}$$

$$I_{b_F} = I_{b_o} \cdot T_{FM}$$

.....

.....

A continuación medimos el efecto fotográfico (en transmitancias) en la imagen de la cuña, obteniendo parejas de valores:

$$T_{a_o} \quad , \quad T_{a_F}$$

$$T_{b_o} \quad , \quad T_{b_F}$$

$$T_{c_o} \quad , \quad T_{c_F}$$

.....

.....

y representamos los valores de la izquierda frente a los de la derecha, obteniendo una nube de puntos a la cual ajustamos una curva que llamaremos "Curva Intermedia" que la podremos representar por

$$T_F = CI(T_o) \quad (2.2)$$

Dado un valor de transmitancia correspondiente a una zona expuesta con una cierta intensidad, la función (2.2) nos permite conocer la transmitancia correspondiente a una zona expuesta con una intensidad de luz menor en un factor T_{FM} .

Siguiendo en líneas generales el método expuesto por -- Grossmann Doerth(1.976), para facilitar el ajuste de la curva a la nube de puntos, hacemos la representación en escala logarítmica; y a continuación, mediante tanteo, ensayamos ajustes polinómicos por mínimos cuadrados (ver Fig (2.4)) . La nube de puntos de la figura proviene de cinco imágenes de la cuña realizadas con tiempos de exposición ligeramente diferentes. Los mejores ajustes se obtienen con un polinomio de grado tres

en la zona de bajas transmitancias y una parábola en la zona superior procurando minimizar el codo en el punto de empalme (que es otro parámetro a tantear) de ambos polinómios (mas detalles sobre el método de ajuste se hallarán en los comentarios del programa "INTERCUR"). Esta función ajustada en escala logarítmica la detonaremos por:

$$\log T_F = LCI (\log T_o)$$

Los resultados del ajuste realizado quedan reflejados en la TABLA 2.1.

TABLA 2.1

| LONG. DE ONDA | POLINOMIO INFERIOR $C_1 + C_2 X + C_3 X^2 + C_4 X^3$ | PARABOLA SUPERIOR $C'_1 + C'_2 X + C'_3 X^2$ | PUNTO DE EMPALME | ERROR TIPICO DE LA ESTIMA DEL AJUSTE - (Escala natural y %) |
|------------------------------|--|--|------------------|---|
| $\lambda_{5550} \text{ \AA}$ | $C_1 = 0.6670585798$ $C_2 = 0.7201436974$ $C_3 = 0.1658576295$ $C_4 = -0.09721479406$ | $C'_1 = 0.5301821077$ $C'_2 = 1.1640907290$ $C'_3 = -0.2145908914$ | 1.9 | 3,29% |

A partir de la Curva Intermedia generamos la Curva Característica en escala logarítmica ($\log I = LCC (\log T)$) - (ver Fig (2.5)) de la siguiente forma (programa "CARCUR2"):

(1^a Etapa) Partimos de un valor de transmitancia de aproximadamente el 20%, es decir en escala logarítmica: $\log T_1 = \log 2 = 0.301030$. A este valor le hacemos corresponder arbitrariamente un cierto valor de intensidad (no pretendemos hacer una -

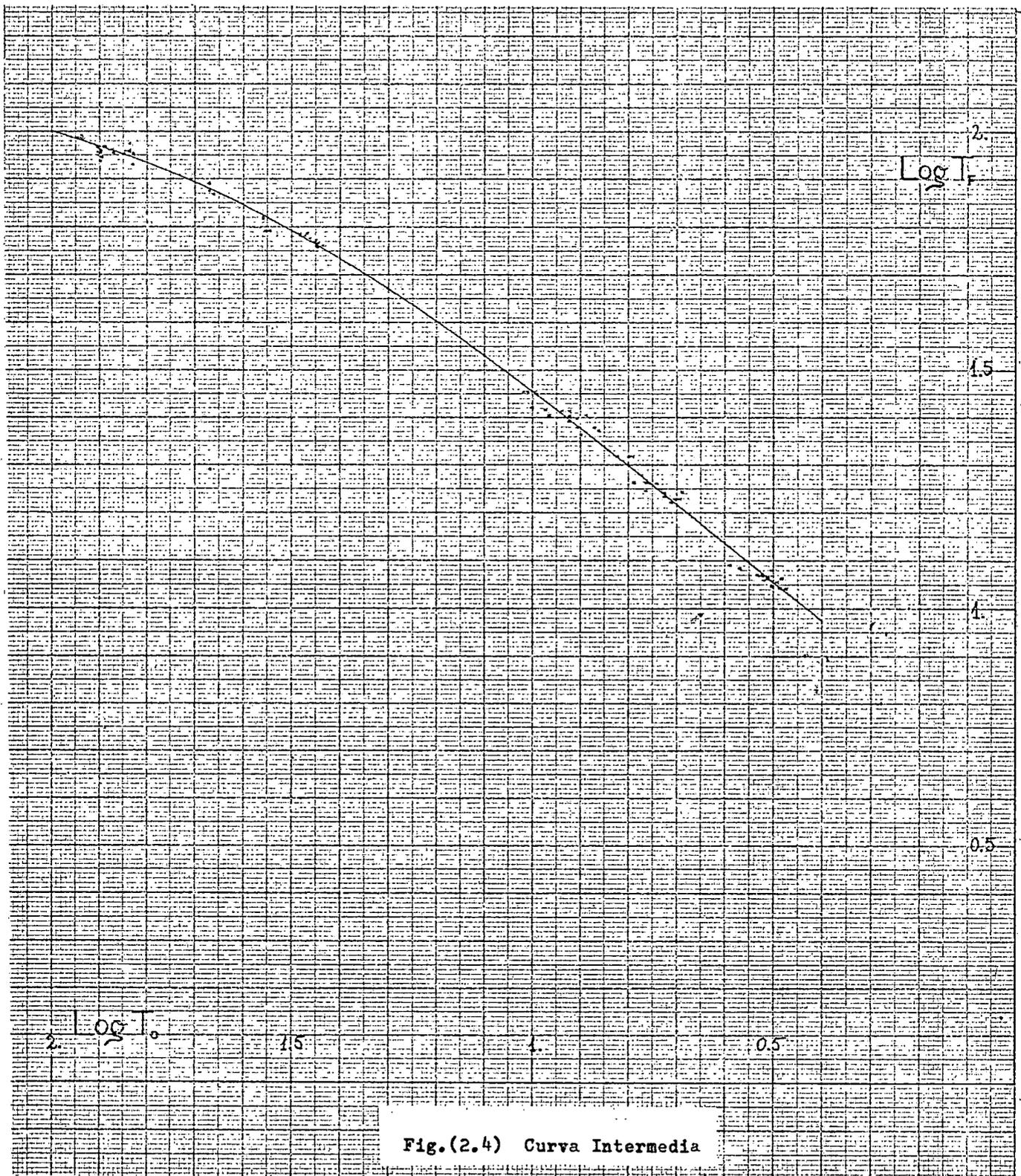


Fig.(2.4) Curva Intermedia

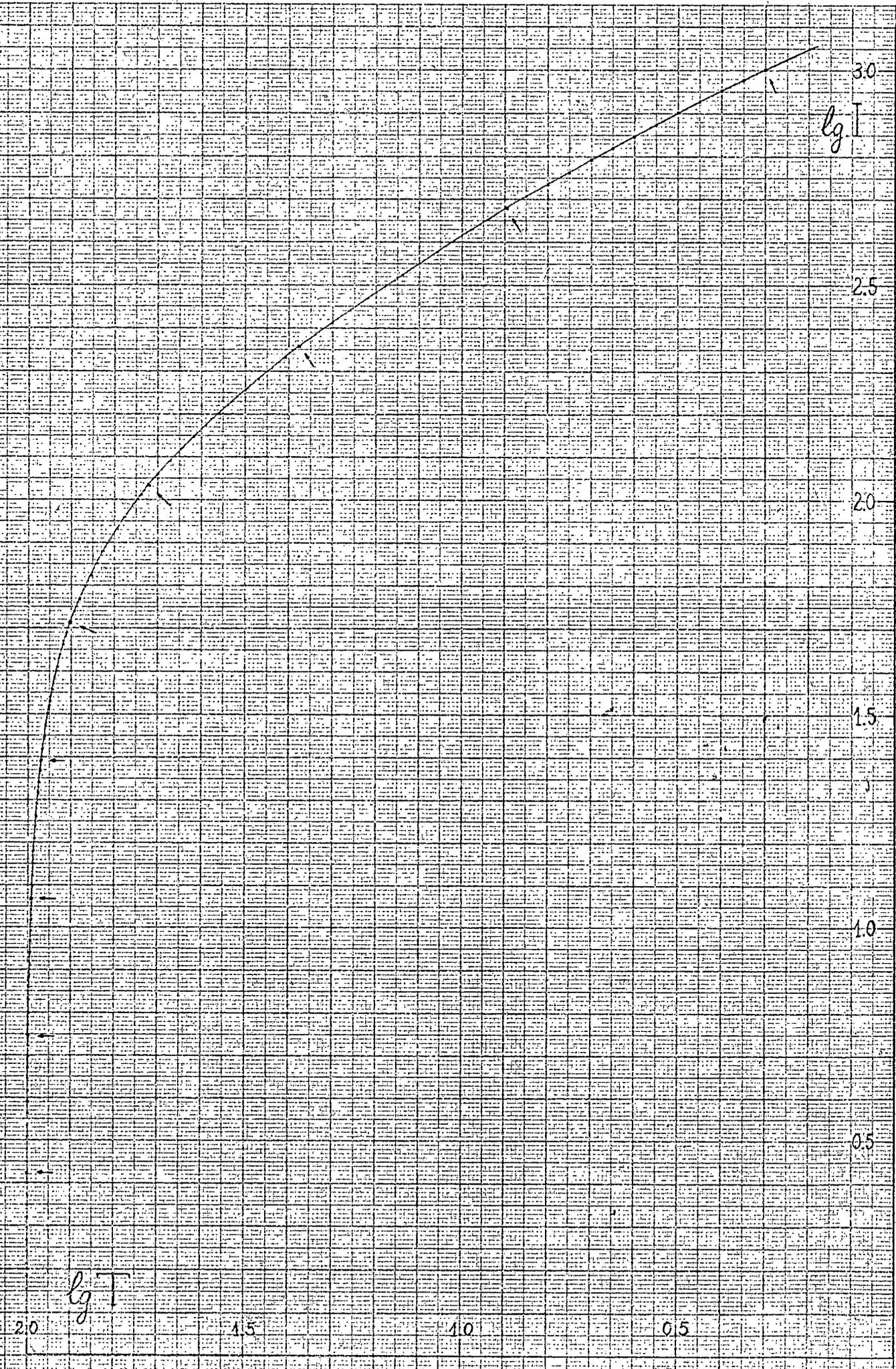


Fig.(2.5) Curva Caracteristica en escala logaritmica

calibración absoluta) por ejemplo $\log I_1 = 3$. Ya tenemos un punto (P_1) de la función LCC. La función LCI nos permite obtener un valor $\log T_2$ correspondiente a una intensidad $I_2 = I_1 \cdot T_{FM}$; o sea $\log T_2$ y $\log I_2 = \log I_1 + \log T_{FM}$ serán las coordenadas del 2º punto (P_2) de la curva LCC. Introduciendo el valor $\log T_2$, en la función LCI, como variable independiente obtenemos un valor $\log T_3$ correspondiente a una intensidad $\log I_3 = \log I_2 + \log T_{FM} = \log I_1 + 2 \log T_{FM}$, obteniendo así el 3^{er} punto (P_3) de la LCC. Repitiendo el proceso sucesivamente obtenemos una primera serie de puntos de la curva LCC (ver puntos señalados en la fig. (2.5)). Esta serie define unos intervalos, de la curva que buscamos, que tenemos que rellenar a continuación.

(2^a etapa) Generación del "arco madre". Hacemos pasar por P_1 , P_2 y P_3 una parábola y asumimos que el arco de parábola $\widehat{P_2 P_3}$ es auténticamente un trozo de la curva LCC (más tarde veremos el alcance y validéz de esta suposición). A este arco, cuya expresión funcional conocemos, le denominaremos "arco madre" ya que a partir de él vamos a generar el resto de la curva.

(3^a etapa) Generación del arco $\widehat{P_1 P_2}$. A cualquier abcisa $\log T$ perteneciente a puntos del arco $\widehat{P_1 P_2}$ la función LCI le hace corresponder un valor $\log T'$ comprendido en $\widehat{P_2 P_3}$, cuya ordenada $\log I'$ es conocida por sustitución en la función parabólica asumida para $\widehat{P_2 P_3}$ (arco madre). De acuerdo con el significado de la función LCI, la ordenada de $\log T$ será $\log I' - \log T_{FM}$. Los puntos cuyas abcisas son inferiores a $\log 2$ se obtienen por el mismo método a partir del arco $\widehat{P_1 P_2}$, pero en este caso como no conocemos expresión funcional de tal arco, hacemos un proceso de interpolación ajustando localmente parábolas.

(4^a etapa) Generación de los arcos $\widehat{P_3 P_4}$ y siguientes. Cualquier punto de abcisa $\log T'$ correspondiente al arco $\widehat{P_3 P_4}$ se puede relacionar mediante LCI con otro punto de abcisa $\log T$ perteneciente a $\widehat{P_2 P_3}$; el valor de $\log T$ se obtiene resolviendo una ecuación

de 2º ó 3º grado : $\text{Log } T' = \text{LCI} (\log T)$. La ordenada de $\log T$ en la curva LCC será $\log I$ que se obtiene por sustitución en la función parabólica que hemos asumido para $\widehat{P_2 P_3}$; y de acuerdo con el significado de la curva LCI, la ordenada de $\log T'$ en la curva LCC será : $\log I' = \log I + \log T_{FM}$.

De forma análoga se obtienen los puntos de los demás arcos $\widehat{P_4 P_5}$, $\widehat{P_5 P_6}$,, siempre a partir del inmediato anterior, aunque con la complicación de que tendríamos que recurrir a procesos de interpolación por la razón ya apuntada anteriormente.

Siguiendo este esquema hemos obtenido la curva característica en escala logarítmica a intervalos $\Delta T = 0.5\%$.

Para constatar si la suposición inicial hecha sobre el arco $\widehat{P_2 P_3}$ (arco madre) ha sido buena, hemos de ver si cualquier serie de puntos obtenidos de la curva LCI por análogo procedimiento al de la 1ª etapa, y a partir de una transmitancia cualquiera, queda superpuesta a la curva generada, con la mínima desviación posible. Realizada la prueba con 12 series diferentes de puntos, hemos obtenido una desviación respecto de la curva generada del 0.137% (en escala natural).

El último paso consiste en transformar LCC a escala natural para obtener finalmente la "Curva Característica" (Fig(2.6)).

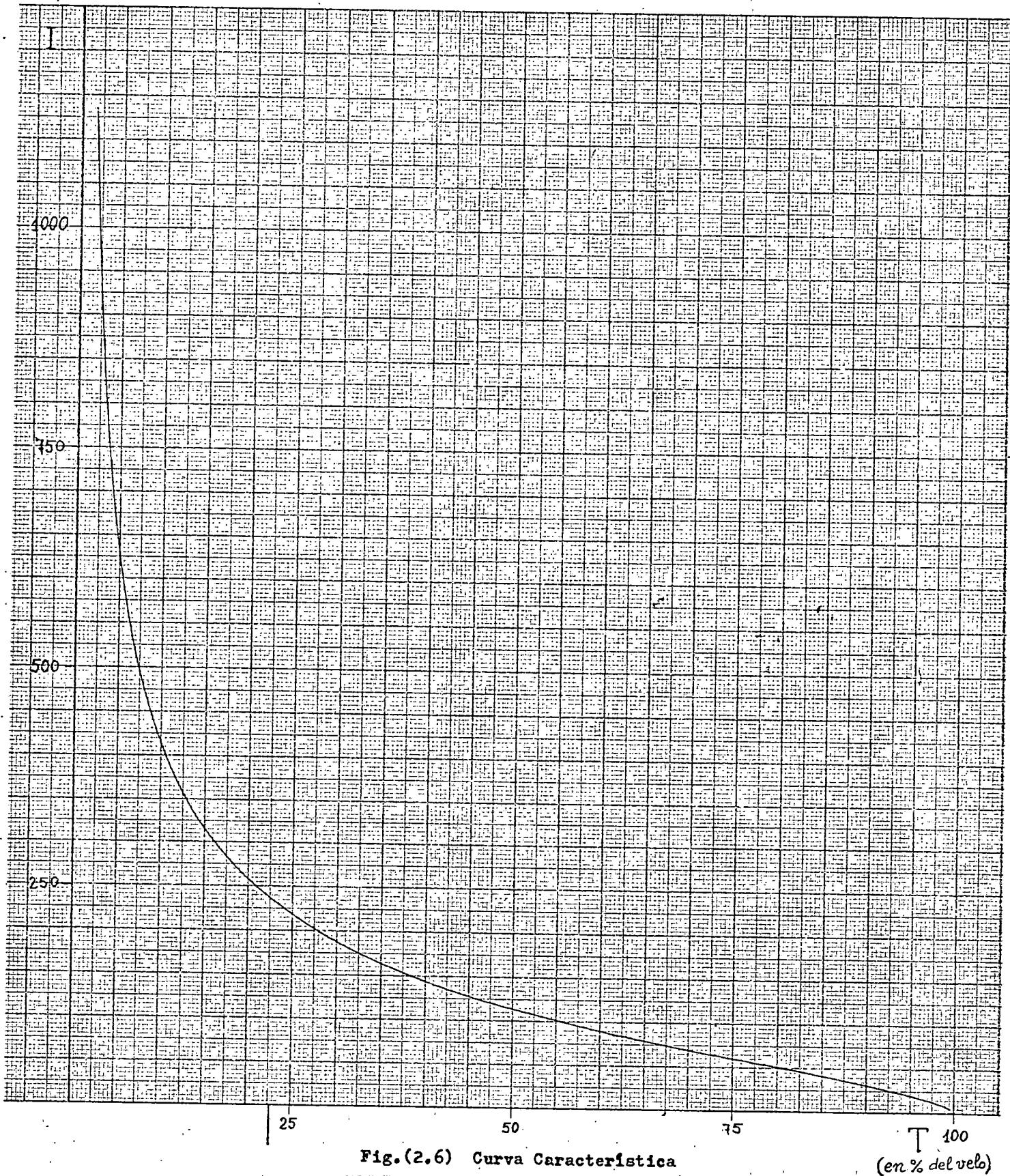
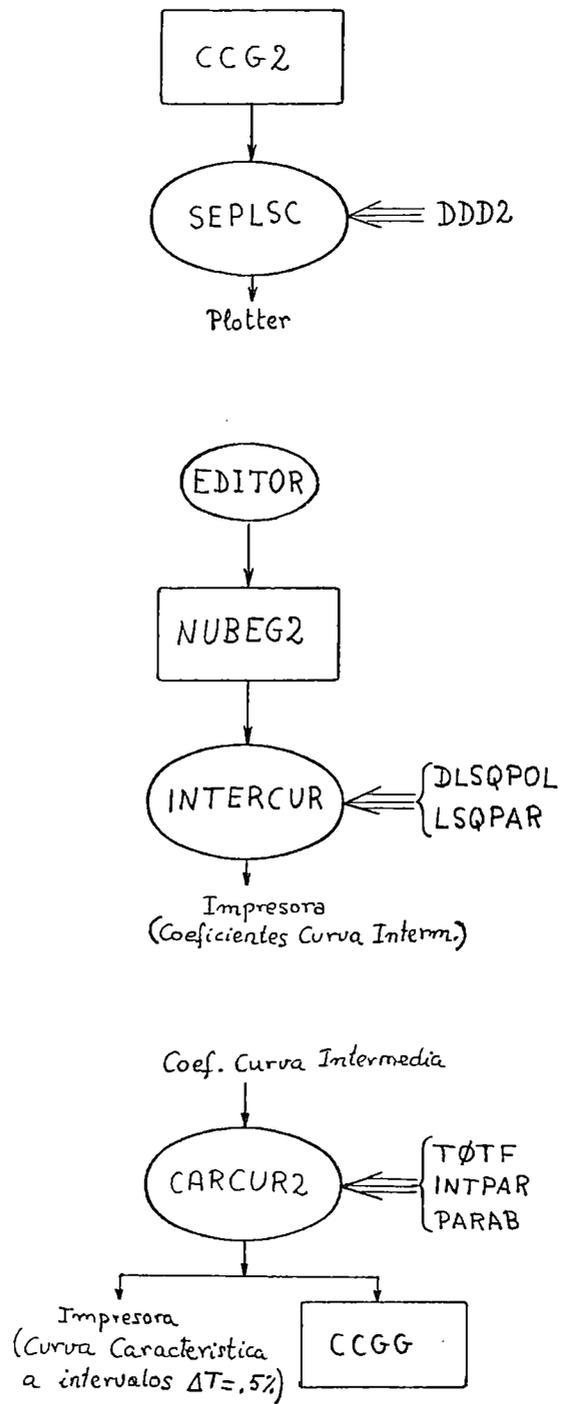


Fig.(2.6) Curva Característica

T 100
(en % del velo)



ORGANIGRAMA DEL "MODULO CALIBRACION"

Fig. 2.7

La Fig (2.7) presenta el organigrama correspondiente al proceso descrito. El conjunto de programas que constituyen dicho proceso lo denominaremos "MODULO CALIBRACION".

El programa "SEPLSC" extrae, del fichero donde están almacenadas, las medidas realizadas sobre las imágenes de la cuña. Transforma los datos de ASCII a BINARIO y dibuja los barridos realizados sobre los escalones de la cuña. De este dibujo obtendremos las parejas (2-1). Con dichas parejas y mediante el EDITOR construimos el fichero NUBEG2 y a partir de aquí comienza el proceso antes descrito: ajuste de una curva (Curva Intermedia) a la nube de puntos contenida en NUBEG2 mediante el programa "INTERCUR", y a partir de la curva intermedia, mediante el programa "CARCUR2" se obtiene la Curva Característica depositada en el fichero CCGG.

CAPITULO III

=====

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DEL PRESENTE TRABAJO

III.1. INTRODUCCION

No es nuestro interés hacer un desarrollo exhaustivo de la teoría de análisis de Fourier que es el principal soporte de éste trabajo. Nos limitaremos a presentar definiciones, - nomenclaturas, interpretaciones y teoremas concernientes al Análisis de Fourier que vamos a aplicar en lo sucesivo, omitiendo en muchos de los casos las demostraciones relativas - a los teoremas. Para desarrollos mas completos remitimos al lector a las obras de Bracewell (1965), Oran Brigham (1974), Hwei P. Hsu (1973) y Taub and Schilling (1971).

III.2. ALGUNAS DEFINICIONES Y TEOREMAS BASICOS

III.2.1.-La integral de Fourier. Teorema de la integral de Fourier:

Sea una función $f(x)$, en general compleja, la integral de Fourier de $f(x)$ se define mediante la expresión

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi sx} dx \quad (3-1)$$

Si esta integral existe para todo s , la función $F(s)$, - en general compleja, recibe el nombre de "Transformada de - Fourier" de la función $f(x)$. El apelativo de transformada que da justificado en el sentido de que la expresión (3-1) indica una serie de manipulaciones a realizar sobre $f(x)$ para obtener otra función $F(s)$.

El "Teorema de la integral de Fourier" establece que si sometemos $F(s)$ a una transformación igual a (3-1) salvo el - signo del exponente de e , recuperamos la función $f(x)$, es decir:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{j2\pi sx} ds \quad (3-2)$$

La transformación indicada en (3-2) recibe el nombre de "Transformada inversa de Fourier". De forma más compacta podemos escribir este teorema de la integral de Fourier así:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi sx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi sx} dx \right] ds$$

Las funciones $f(x)$ y $F(s)$ relacionadas mediante (3-1) y (3-2) constituyen lo que se llama un "par de funciones transformadas". La transformación directa la escribiremos abreviadamente como:

$$F(s) = \mathcal{F} [f(x)]$$

y la inversa como:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} [F(s)]$$

Seguiremos la notación de Oran Brigham (1974) para expresar que dos funciones constituyen un par de funciones transformadas:

$$f(x) \iff F(s)$$

La expresión (3-2) pone de manifiesto cómo una función $f(x)$, que cumple ciertas restricciones, se puede escribir como una sumación de ondas sinusoidales de frecuencia s y amplitudes complejas infinitesimales $F(s)ds$. Los coeficientes $F(s)$ de la sumación se obtienen mediante la expresión (3-1). Las restricciones sobre la función $f(x)$ a que hemos hecho referencia son las llamadas "Condiciones de existencia de la Transformada de Fourier". No es nuestro interés profundizar ahora en este aspecto, y siguiendo a Bracewell (1965), pag.9, diremos que la posibilidad física de una función es condición suficiente para la existencia de su transformada.

El hecho de que conocida $F(s)$ podemos determinar $f(x)$ y viceversa, sin más información adicional, nos lleva a la conclusión de que $f(x)$ y $F(s)$ son dos representaciones distintas

de la misma información. Bajo un punto de vista intuitivo podemos decir que si $f(x)$ es una función dada, $F(s)$ es otra que nos proporciona los coeficientes de las sinusoides de frecuencia s que sumadas nos dan $f(x)$. Cuando trabajamos con la función $f(x)$ y por tanto con la variable x , diremos en general que estamos trabajando en el "dominio de medida" (ya que en general $f(x)$ es susceptible de medida directa), o "dominio temporal" - cuando la variable sea el tiempo. Cuando utilicemos la representación de la información empleando $F(s)$ con la variable s - que es una frecuencia, diremos que trabajamos en el "dominio de frecuencias" o "dominio transformado".

III.2.2.- Teorema de Rayleigh:

"La integral del cuadrado del módulo de una función $f(x)$ es igual a la integral del cuadrado del módulo de su transformada $F(s)$ ".

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds \quad (3-3)$$

Sí, como caso particular, la función medida fuera una diferencia de potencial $v(t)$ entre los extremos de un conductor de resistencia 1Ω , la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt$$

nos proporciona el valor de la energía total disipada - en dicho conductor de resistencia 1Ω . Según el teorema de Rayleigh viene dada también como una sumación ^{de} $|V(s)|^2 ds$ realizada a lo largo de todo el espectro de frecuencias:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V(s)|^2 ds \quad \text{siendo } V(s) = \mathcal{F}[v(t)]$$

Por lo tanto la función $|V(s)|^2$ tiene dimensiones de energía por unidad espectral de frecuencia y por ello le llamaremos "función densidad espectral de energía de la función $v(t)$ ".

Esta nomenclatura cuya justificación vemos en este caso particular expuesto se generaliza al caso más corriente - en que las integrales (3-3) no tengan significado físico de energías, y la función $|F(s)|^2$ la seguiremos llamando densidad espectral de energía de la función $f(x)$.

III.2-3.-Integral de convolución. Teorema de convolución:

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se define la "integral de convolución" de estas dos funciones como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x'-x)dx \quad (3-4)$$

o en notación abreviada $f(x) * g(x)$

Obsérvese que la función $g(x'-x)$ es la reflexión especular de la función $g(x)$ desplazada al punto x' .

Propiedades interesantes de esta operación son:

conmutatividad: $f(x)*g(x) = g(x)*f(x)$

asociatividad: $f(x)*(g(x)*h(x)) = (f(x)*g(x))*h(x)$

distributividad respecto de la suma: $f(x)*(g(x)+h(x)) = f(x)*g(x) + f(x)*h(x)$.

"Teorema de la convolución":

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, cuyas respectivas transformadas son $F(s)$ y $G(s)$. El teorema de convolución establece que

$$f(x)*g(x) \iff F(s) \cdot G(s) \quad (3-5)$$

es decir, la convolución de dos funciones y el producto ordinario de sus respectivas transformadas constituyen un par de funciones transformadas.

III.2.4.- Integral de correlación. Teorema de correlación:

Sean dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Se define la "integral de correlación" de $f_1(x)$ con $f_2(x)$ como

$$R_{12}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\zeta) f_2(x) dx \quad (3-6)$$

Es evidente la analogía de (3-4) con (3-6). Sin embargo la definición (3-6) no incluye el realizar el paso que exigía la convolución de tomar la imagen especular de una de las funciones. A pesar de la mayor simplicidad que encierra la definición (3-6), la integral de correlación no cumple la propiedad conmutativa, verificandose no obstante que

$$R_{12}(\zeta) = R_{21}(-\zeta)$$

"Teorema de correlación":

Sean dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ cuyas transformadas respectivas son $F_1(s)$ y $F_2(s)$. El teorema de correlación establece que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\zeta) f_2(x) dx \quad \Longleftrightarrow \quad F_1(s) \cdot F_2^*(s) \quad (3-7)$$

siendo $F_2^*(s)$ la función conjugada de $F_2(s)$.

En el caso particular de que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ sean la misma función la integral (3-6) se escribirá:

$$R(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\zeta) f_1(x) dx \quad (3-8)$$

y se denominará "integral de autorrelación", y el teorema expresado en (3-7) para este caso particular se denominará "teorema de autocorrelación" y se enunciará así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\zeta) f_1(x) dx \quad \Longleftrightarrow \quad |F_1(s)|^2 \quad (3-9)$$

III.2.5.- Dos funciones interesantes: la función rectángulo y la función sinc x:

A) La función rectángulo de base y altura unidad, centrada en el origen la denotaremos, siguiendo a Bracewell (1965), por $\Pi(x)$ y se define por:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| > 1/2 \\ 1/2 & \text{para } |x| = 1/2 \\ 1 & \text{para } |x| < 1/2 \end{cases} \quad (3-10)$$

Dicha función viene ilustrada en la Fig.(3.1-a).

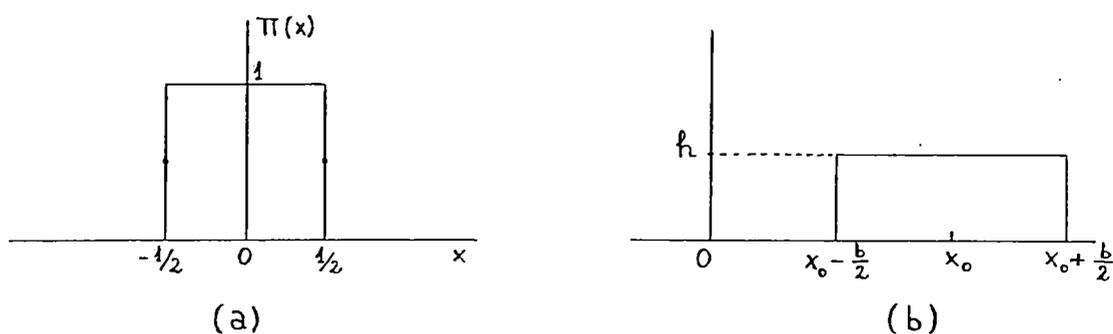


Fig. 3.1

Obviamente, una función rectángulo con base b y altura h , y centrada, no en el origen de coordenadas, sino en x_0 - viene representada por:

$$h\Pi\left(\frac{x - x_0}{b}\right) \quad (3-11)$$

La Fig.(3.1-b) ilustra esta función.

La función rectángulo tiene múltiples aplicaciones físicas; en el dominio de medida se emplea para seleccionar trozos de señal de una longitud dada; en el dominio de frecuencia desempeña el papel de filtro, etc,....

B) La función sinc (x) se define mediante la expresión:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}\pi x}{\pi x} \quad (3-12)$$

Su representación viene en la Fig.(3.2).

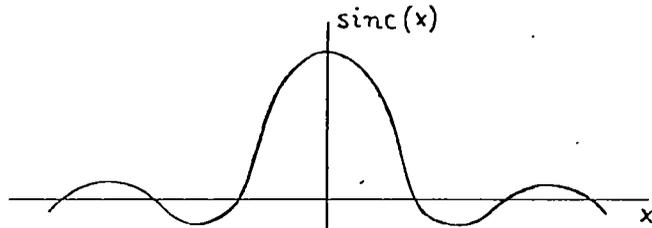


Fig.(3.2)

Análogamente se define:

$$\text{sinc}(cx) = \frac{\text{sen } c\pi x}{c\pi x} \quad (3-13)$$

Una propiedad interesante es que las funciones $\Pi(x)$ y $\text{sinc}(s)$ constituyen un par de funciones transformadas

$$\Pi(x) \longleftrightarrow \text{sinc}(s) \quad (3-14)$$

Análogamente se cumple:

$$\Pi\left(\frac{x}{b}\right) \longleftrightarrow b \text{sinc}(bx) \quad (3-15)$$

III.2.6.- El símbolo impulso y el tren de impulsos:

A) "El símbolo impulso" (o delta de Dirac) se denota por $\delta(x)$ y se define como un ente matemático que cumple las siguientes dos propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \delta(x) = 0, \quad \forall x \neq 0 \\ 2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \end{array} \right. \quad (3-16)$$

Hablando desde un punto de vista intuitivo podemos imaginarnoslo como una señal que encierra un área unidad y cuya anchura o duración tiende a cero, por lo tanto su intensidad ha de tender a infinito.

Dada su definición, este símbolo $\delta(x)$, no es una función en el sentido que esta palabra tiene en Análisis (Dirac

la denominó función impropia). Para ^{que} la integral (3-16) tenga un significado de acuerdo con el Análisis clásico hay que establecer algún convenio para su interpretación; por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) dx = 1 \quad (3-17)$$

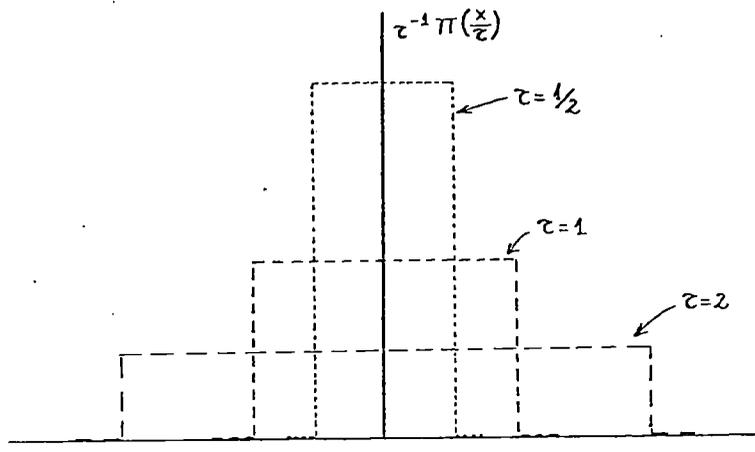


Fig. (3.3)

La función $\tau^{-1} \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)$ es una función rectángulo de altura $\frac{1}{\tau}$ y base τ por lo tanto área unidad. Según se ilustra en la Fig.(3.3), cuando τ tiende a cero se genera una secuencia de funciones rectángulo de anchura decreciente y altura creciente. El límite de esta integral expresado en (3-17) es naturalmente igual a la unidad.

En definitiva, en general, para interpretar las expresiones que contienen el símbolo impulso tenemos que recurrir a ciertas secuencias de pulsos de área unidad y duración breve pero no cero, con alguna forma particular (por ejemplo, $\tau^{-1} \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)$, o bien, $\tau^{-1} \exp(-\pi x^2 / \tau^2), \dots$). Con tales pulsos realizamos las operaciones indicadas en las expresiones (integración, derivación, multiplicación, etc...) y posteriormente se discute el límite cuando la duración o anchura de la secuencia de pulsos tiende a cero.

Gráficamente representaremos $\delta(x)$ como una flecha de longitud unidad colocada en $x = 0$, o bien si la delta está desplazada, $\delta(x-a)$, colocada en $x = a$, según se ilustra en las Figs.(3.4.a y b).

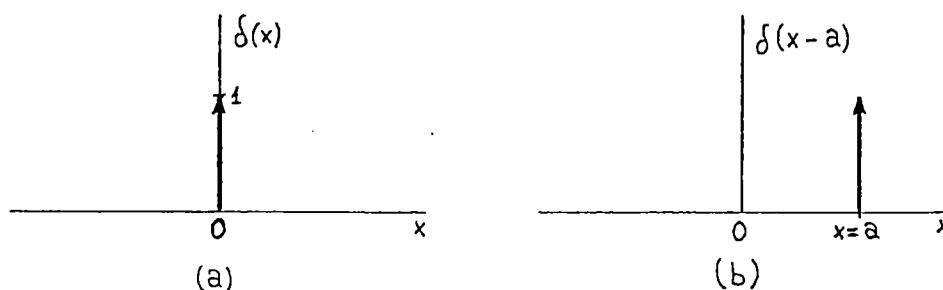


Fig.(3.4)

* "Propiedad selectiva o de tamizado (sifting property) de $\delta(x)$ ".

Esta propiedad se expresa mediante la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \quad (3-18)$$

El nombre asignado a esta propiedad tiene su justificación en el hecho de que al realizar la operación indicada en el primer miembro de (3-18), de todos los valores que toma la función $f(x)$, se selecciona el correspondiente a la abscisa donde se encuentra la función impulso.

De la expresión (3-18) se deduce inmediatamente:

$$f(x) * \delta(x) = f(x) \quad (3-19)$$

* Otra expresión interesante:

Para $f(x)$ continua en $x = a$ se verifica:

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a) \quad (3-20)$$

B) "El tren de impulsos"

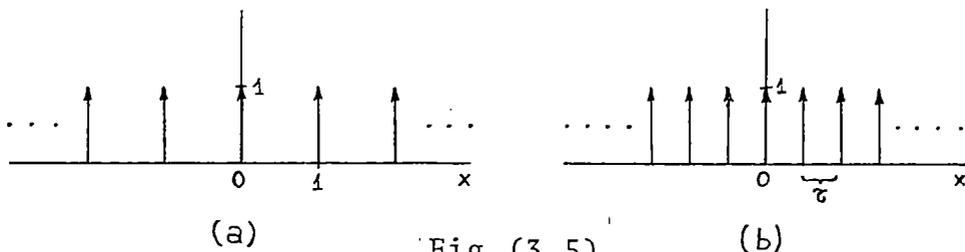
Consideremos para empezar una secuencia infinita de impulsos unidad espaciados a intervalos unidad desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (ver Fig.(3.5.a)).

Matemáticamente esto se representa así:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

Representemos ahora un tren de infinitos impulsos unidad equidistanciados en una cantidad τ (ver Fig.(3.5.b)). Su formulación matemática será:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n\tau)$$



Si la intensidad de los impulsos es A, la correspondiente formulación será:

$$A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n\tau)$$

* "Propiedad de muestreo de un tren de impulsos unidad"

Sean una función $f(x)$ y un tren de impulsos $\Delta(x)$ unitarios equidistanciados una cantidad τ . Hagamos el producto de ambas funciones

$$f(x)\Delta(x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n\tau) =$$

En virtud de (3-20), si $f(x)$ es continua en $x = n\tau$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)\delta(x-n\tau) \quad (3-21)$$

La expresión (3-21) es un tren de impulsos de intensidad variable $f(n\tau)$ con n entero variando desde $-\infty$ a $+\infty$, ciñéndose a la forma de la función $f(x)$ (ver Fig.(3.6.a y b)).

Este proceso se denomina muestreo de la función $f(x)$; la Fig.(3.6.b) representa la función $f(x)$ muestreada.

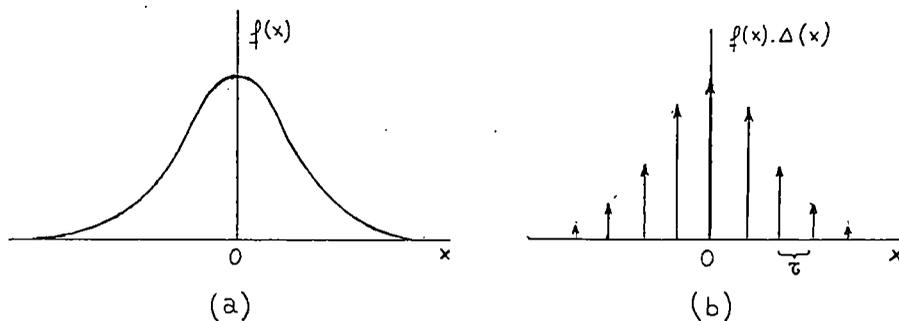


Fig. (3.6)

Esta propiedad es de gran valor para nuestro trabajo - ya que nuestros cálculos están realizados con computadoras digitales y hay que descartar la posibilidad de trabajar con señales continuas teniendo que recurrir al proceso de muestreo.

* "Propiedad de repetición de un tren de impulsos unidad"

Convolucionando una función $f(x)$ tal como la de la Fig. (3.7.a) con un tren de impulsos unidad $\Delta(x)$ equidistanciados una cantidad τ

$$f(x)*\Delta(x) = f(x) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n\tau)$$

Aplicando la propiedad distributiva de la convolución respecto de la suma y en virtud de (3-19) se obtiene:

$$f(x) * \Delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\tau) \quad (3-22)$$

es decir, resulta una función que consiste en la repetición de $f(x)$ a intervalos τ hasta el infinito en ambas direcciones (Fig.(3.7.b)).

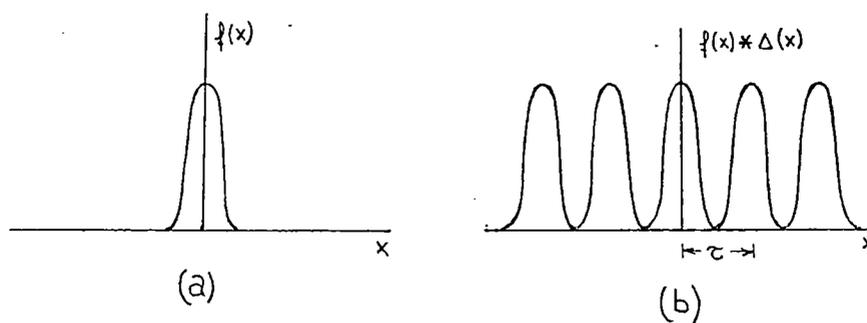


Fig.(3.7)

* "Transformada de Fourier de un tren de impulsos"

Se demuestra que la transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos aunque en general de distinta intensidad y distinta separación (Hwei P. Hsu (1973)).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n\tau) \longleftrightarrow \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{n}{\tau}\right) \quad (3-23)$$

en particular si $\tau = 1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s-n) \quad (3-24)$$

III.3. TRATAMIENTO DE LAS SEÑALES EN CALCULO DIGITAL :

III.3.1.- Muestreo de una señal

En el epígrafe III.2 hemos hecho una exposición somera del Análisis de Fourier (definiciones, nomenclaturas, teoremas y propiedades) concerniente a funciones continuas. Sin embargo nuestro proceso de cálculo mediante computadoras digitales nos impone el que tengamos que introducir la señal muestreada (expresión (3-21)).

En los casos en que el espectro de la señal se hace cero a partir de un cierto valor de la frecuencia, el hecho de muestrear dicha señal no supone merma en la información, siempre que el muestreo se haga de manera adecuada ("teorema de muestreo"). Si el espectro de la señal no es limitado, un muestreo trae consigo forzosamente pérdida de información. Veamos esto con detalle:

Según la propiedad de muestreo de un tren de impulsos, si la señal $f(x)$ es continua en $x = n\tau$ para $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se verifica

$$\hat{f}(x) = f(x)\Delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)\delta(x-n\tau)$$

en donde hemos denotado por $\hat{f}(x)$ a la función muestreada y por $\Delta(x)$ a un tren indefinido de impulsos unitarios equidistanciados a intervalos τ (Fig.(3.8.a.b y c.)).

De acuerdo con el teorema de convolución (3-5), la anterior expresión, en el dominio transformado se refleja como una convolución:

$$\hat{F}(s) = F(s)*\Delta(s) \quad (3-25)$$

De acuerdo con (3-23), (Fig.(3.8.e))

$$\Delta(s) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s - \frac{n}{\tau})$$

y según la propiedad de repetición de un tren de impulsos, (3-25) se puede escribir como:

$$\hat{F}(s) = \frac{1}{\tau} \left[F(s) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{n}{\tau}\right) \right] = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(s - \frac{n}{\tau}\right) \quad (3-26)$$

En conclusión la función $\hat{F}(s)$, es decir la transformada de Fourier de la función muestreada, consiste en la repetición indefinida hacia derecha e izquierda de la función $F(s)$ (transformada de Fourier de la función continua $f(x)$) afectada de un factor $\frac{1}{\tau}$; dicha repetición se verifica a distancias $\frac{1}{\tau}$ (Fig. (3.8.f)).

Esta conclusión es solamente válida si el intervalo de muestreo es suficientemente pequeño. ¿Qué ocurriría si τ fuera excesivamente grande? La Fig.(3.9) nos lo explica. Cuanto mayor es τ , el intervalo entre dos pulsos en el espacio transformado, $\frac{1}{\tau}$, se hace más pequeño (Fig.(3.9.e)) y al realizar la convolución con $F(s)$ resulta una repetición de $F(s)$ con un solapamiento ilustrado en Fig.(3.9.f.).

Esta distorsión respecto de la deseada transformada de Fourier de la función muestreada se denomina "fenómeno de plegamiento del espectro" o más brevemente, utilizando el término inglés, "aliasing".

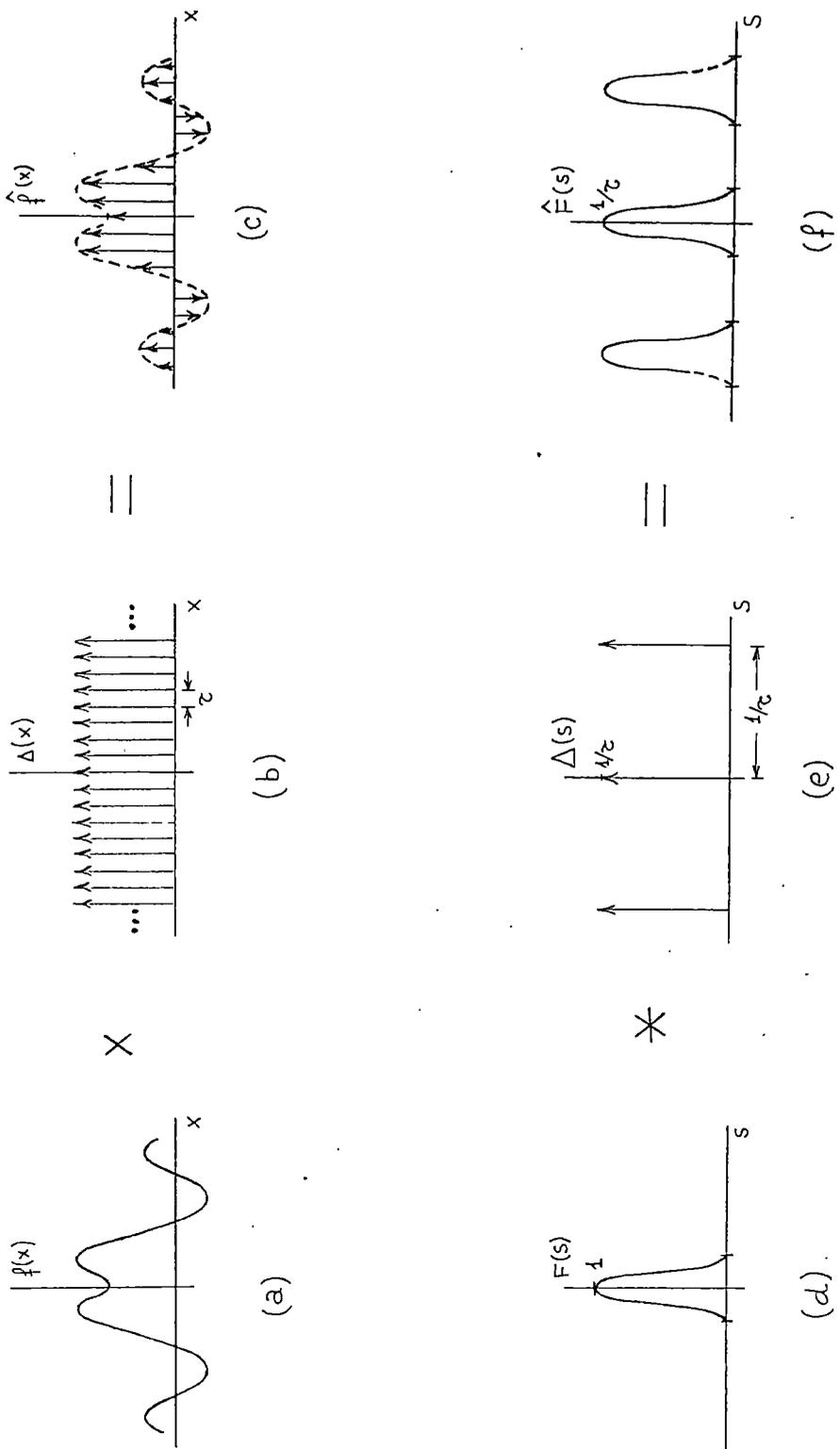


Fig.(3.8)

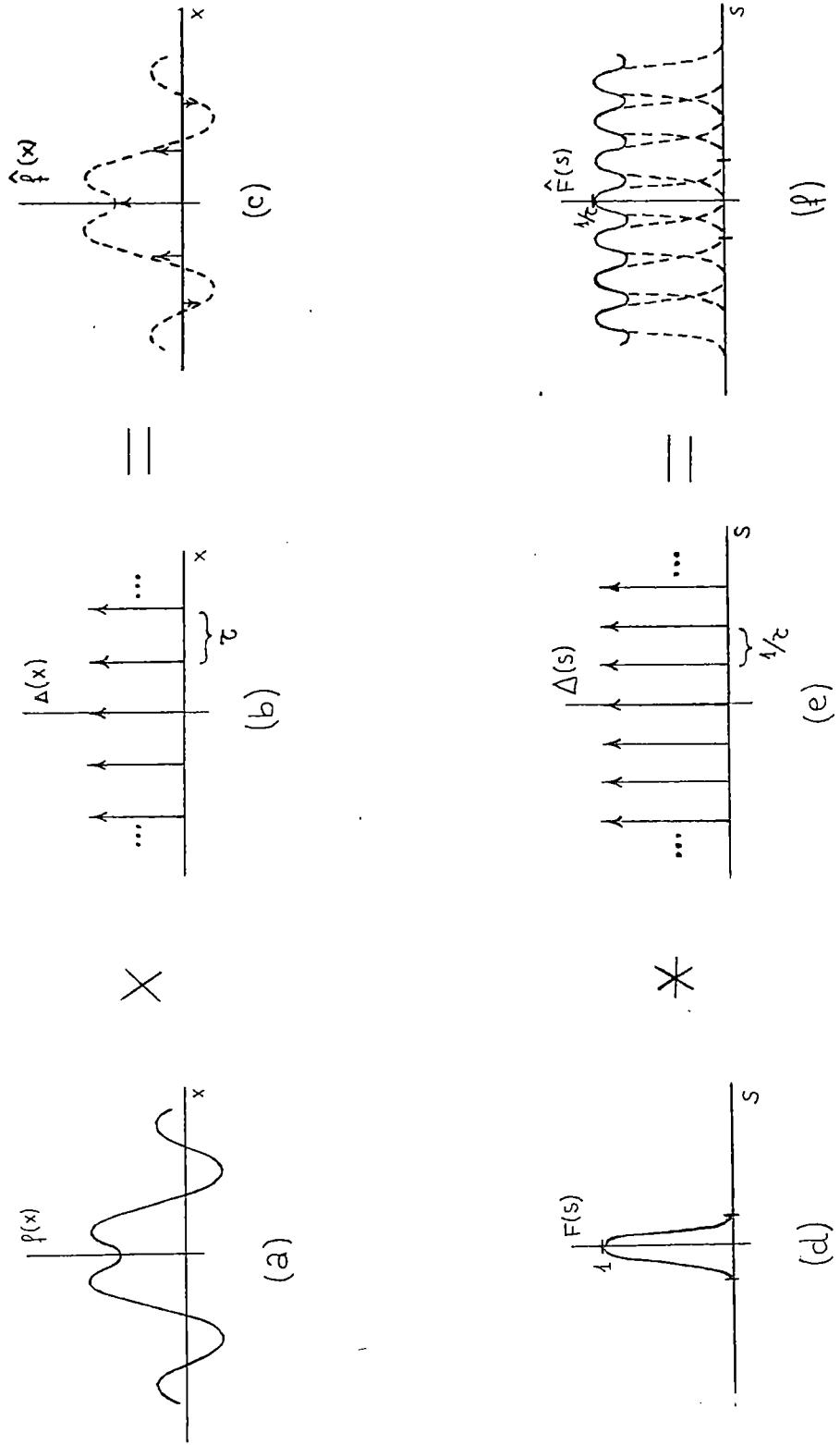


Fig.(3.9)

Un exámen de las Figs.(3.9.d y e) nos señala que el so lapamiento dejará de producirse cuando

$$\frac{1}{\tau} \geq 2s_c \quad (3-27)$$

siendo s_c la frecuencia a partir de la cual la transformada $F(s)$ de la función continua $f(x)$ se hace cero. Dicha frecuencia se denomina de Nyquist.

Si una señal es muestreada de manera que no se produzca aliasing podemos recuperar la señal continua, $f(x)$, sin más que aislar un periodo de la función $\hat{F}(s)$ (Fig.(3.8.f)) y calcular su transformada inversa. Este proceso de recuperación de $f(x)$ a partir de la función muestreada $\hat{f}(x)$ constituye lo que se denomina el "Teorema de muestreo o de Shanon" cuyo enunciado puede escribirse así:

Si una función $f(x)$ es de espectro limitado (es decir $F(s) = 0$ para $s \geq s_c$), entonces la función continua $f(x)$ puede quedar unívocamente determinada a partir del conocimiento de sus valores muestreados

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \delta(x-n\tau)$$

siempre y cuando el intervalo de muestreo verifique $\tau \leq \frac{1}{2s_c}$. En concreto, $f(x)$ viene dada por:

$$f(x) = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \frac{\text{sen } 2\pi s_c (x-n\tau)}{\pi(x-n\tau)} \quad (3-28)$$

Recalcamos que solo es posible reconstruir perfectamente la señal continua a partir de $\hat{f}(x)$, cuando $f(x)$ es de espectro limitado, ya que solo en este caso podemos encontrar valores adecuados de τ finitos. En la práctica esta condición raramente se da y tendremos que recurrir a muestrear con intervalos lo bastante pequeños para que el aliasing sea el menor posible, no obstante resignándonos a perder cierta cantidad de información.

III.3.2.- Limitación de la señal:

Generalmente, en la práctica, una señal física vendrá limitada en duración o longitud debido a restricciones en el proceso de medida o en la capacidad del ordenador o en su velocidad de cálculo.

El hecho de limitar artificialmente la duración o longitud de la señal es, como veremos en breve, una fuente de distorsión.

III.3.3.- La Transformada de Fourier Discreta:

En este punto nos preguntamos: ¿Cómo hemos de proceder para llevar a cabo el proceso de cálculo de la transformada de Fourier de una señal mediante una computadora digital?.- Anticipando la respuesta diremos que la solución es utilizar una fórmula llamada "Transformada Discreta de Fourier"; pero puntualicemos ya desde ahora que dicha transformación, en general, nos produce un resultado con alguna distorsión respecto de la transformada continua que pretendíamos resolver.

La siguiente pregunta que nos formulamos es: ¿En que - consiste la transformada discreta de Fourier?. La respuesta a esta pregunta la hallaremos de una manera lógica, partien- do del concepto de transformada continua e introduciendo las modificaciones pertinentes para salvar las dificultades y restricciones que paso a paso vayan surgiendo debido a la natura leza digital de la computadora, a la limitación en su memoria o a la limitación del registro de la señal en el proceso de medida.

Consideremos la señal $f(x)$ cuya transformada continúa - de Fourier es $F(s)$ (ver Fig.(3.10.a)). Para introducir dicha señal en la computadora digital se impone el muestrearla me- diante producto por un tren de impulsos con intervalo de mues- treo τ (Figs.(3.10.b y c)).

$$\hat{f}(x) = f(x) \Delta_{\tau}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \delta(x - k\tau)$$

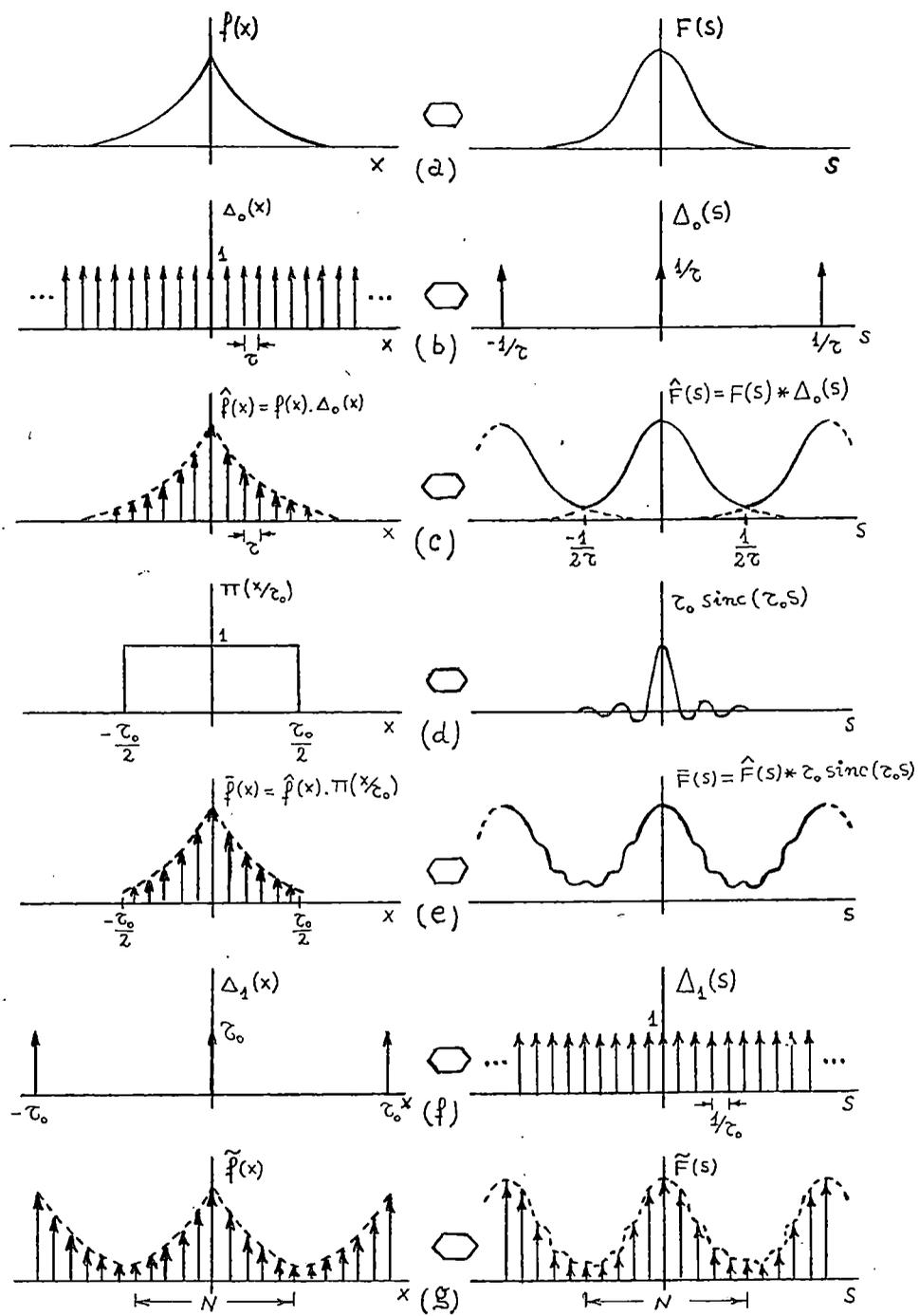


Fig. (3.10)

De acuerdo con lo visto en el apartado III.3.1, la transformada de Fourier $\hat{F}(s)$ de la función muestreada $\hat{f}(x)$ será una función periódica que resulta de la repetición a intervalos $\frac{1}{T}$ de la función $\frac{1}{T}F(s)$. En la Fig.(3.10.c dcha.) se aprecia un ligero efecto de solapamiento (aliasing) que en la mayoría de los casos será inevitable. Así pues, el muestreo en general nos distorsiona algo la transformada de Fourier.

Consideremos ahora que nuestra señal física viene limitada en longitud por restricciones de capacidad en la computadora o en la ejecución del registro. Dicha limitación equivale al producto de la señal muestreada teórica por una función rectangular de altura unidad y base igual a la longitud que nos imponen las limitaciones: τ_0 (Fig.(3.10.d)). El resultado de dicho producto, $\bar{f}(x)$, viene ilustrado en la Fig.(3.10.e). De la infinidad de pulsos que teóricamente tendríamos sólo nos quedamos con N . Por razones que mas adelante discutiremos la longitud τ_0 no solamente comprende los N pulsos sino además, medio intervalo de muestreo por cada uno de los extremos (ver Fig.(3.10.e izq.)), de manera que:

$$N = \frac{\tau_0}{\tau} \quad (3-29)$$

(Obsérvese que N será un número impar ya que la función rectángulo es simétrica respecto al eje de coordenadas y en dicho eje tenemos un pulso).

$$\bar{f}(x) = \hat{f}(x) \Pi\left(\frac{x}{\tau_0}\right) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \delta(x-k\tau) \right] \Pi\left(\frac{x}{\tau_0}\right) = \sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x-k\tau) \quad (3-30)$$

(N' es el entero por defecto que resulta al hacer el cociente $\frac{N}{2}$, donde N es impar; así pues se verificará $2N' + 1 = N$).

La truncación rectangular que supone un producto en el dominio de medida, se traduce en una convolución de la transformada alisada de la Fig.3.10.c dcha.) con la función oscilante $\tau_0 \text{sinc}(\tau_0 s)$ de la Fig.(3.10.d dcha.). Como resultado -

de dicha convolución aparece un nuevo efecto de distorsión - (rizado) en nuestra transformada de Fourier, que queda reflejado en la Fig.(3.10.e. dcha.).

La transformada que hasta ahora hemos obtenido (Fig.- (3.10.e. dcha.)), no es aceptable porque la salida de una computadora digital consta de valores discretos y la función de que disponemos es continua. Se impone por tanto un nuevo proceso de muestreo, ahora en el dominio transformado, utilizando un tren de impulsos con intervalo $\frac{1}{\tau_0}$ (ver Fig.(3.10.f.)) - con objeto de evitar el "aliasing" en el dominio de medida.

De nuevo incidimos en el comentario sobre la elección de la longitud τ_0 . El no tomar τ_0 como la longitud entre dos pulsos extremos, sino agregar por cada extremo $\frac{\tau}{2}$, nos asegura el que no se produzca "aliasing" en el dominio de medida (ver Fig.(3.10.g. izq.)).

El muestreo de la función transformada supone la convolución en el dominio de medida de la señal muestreada y truncada, $\bar{f}(x)$, con el tren de impulsos $\Delta_1(x) = \tau_0 \sum \delta(x - r\tau_0)$

$$\tilde{f}(x) = \left[\bar{f}(x) \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) \right] * \Delta_1(x) = \left[\sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x - k\tau) \right] * \left[\tau_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(x - r\tau_0) \right] =$$

aplicando la propiedad distributiva de la convolución y la propiedad de repetición de un tren de impulsos:

$$\begin{aligned} &= \tau_0 \left[\dots + \sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x + 2\tau_0 - k\tau) + \sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x + \tau_0 - k\tau) + \sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x - k\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x - \tau_0 - k\tau) + \sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x - 2\tau_0 - k\tau) + \dots \right] = \\ &= \tau_0 \sum \left[\sum_{k=-N'}^{N'} f(k\tau) \delta(x - k\tau - r\tau_0) \right] \end{aligned} \quad (3-31)$$

La Fig.(3.10.g.) nos presenta una función muestreada periódica y su transformada también muestreada y periódica. Por ser ambas muestreadas son aptas para trabajar en cálculo digital. Ambas funciones, \tilde{f} y \tilde{F} , constituyen lo que se llama "par de transformadas discretas". En cuanto a la periodicidad de \tilde{F} - hay que hacer notar que el número de muestras que constituye un periodo es también N. En efecto: la longitud de un periodo en el dominio transformado es $\frac{1}{\tau}$ y el intervalo de muestreo $\frac{1}{\tau_0}$ por lo tanto el número de pulsos es $\frac{1/\tau}{1/\tau_0} = \frac{\tau_0}{\tau}$ y de acuerdo con (3-29) esto es igual a N. Las funciones \tilde{f} y \tilde{F} se aproximan, salvo constante y efectos de "aliasing" y rizado, mediante N muestras, a las funciones f y F respectivamente.

De acuerdo con (3-29) la relación entre los intervalos de muestreo en los dominios de medida y frecuencia respectivamente es:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{N}$$

y llamando $\gamma = \frac{1}{\tau_0}$ queda:

$$\tau \cdot \gamma = N^{-1} \quad (3-32)$$

La sumatoria en k planteada en (3-31) está extendida a todas las muestras del intervalo $(-\frac{\tau_0}{2}, \frac{\tau_0}{2})$, y dicha suma es equivalente a sumar las muestras que hay en el intervalo $(-\frac{\tau}{2}, \tau_0 - \frac{\tau}{2})$ dada la periodicidad de $\tilde{f}(x)$. Esto facilita la notación y (3-31) la escribiremos como:

$$\tilde{f}(x) = \tau_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) \delta(x - k\tau - r\tau_0) \right] \quad (3-33)$$

Calculemos ahora la transformada de Fourier de la función $\tilde{f}(x)$ que por ser periódica dará lugar a una secuencia de pulsos equidistantes (una distancia = 1/periodo = $1/\tau_0 \equiv \gamma$) de intensidad V_n :

$$\tilde{F}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \delta(s - n\gamma) \quad (3-34)$$

donde

$$V_n = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\tau_0 - \frac{\tau_0}{2}} \tilde{f}(x) e^{-j2\pi nx/\tau_0} dx, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sustituyendo en ésta expresión $\tilde{f}(x)$ por (3-33) queda:

$$V_n = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\tau_0 - \frac{\tau_0}{2}} \tau_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) \delta(x - k\tau - r\tau_0) e^{-j2\pi nx/\tau_0} dx$$

puesto que la integración es solo sobre un periodo:

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\tau_0 - \frac{\tau_0}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) \delta(x - k\tau) e^{-j2\pi nx/\tau_0} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\tau_0 - \frac{\tau_0}{2}} e^{-j2\pi nx/\tau_0} \delta(x - k\tau) dx = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-j2\pi nk\tau/\tau_0} \end{aligned}$$

y puesto que $\tau_0 = N\tau$:

$$V_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-j2\pi nk/N}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y sustituyendo en (3-34)

$$\tilde{F}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-j2\pi nk/N} \right] \delta(s - n\tau) \quad (3-35)$$

De los pasos hasta aquí realizados no resulta obvio que (3-35) sea una función periódica como ilustra la Fig.(3.10.g. dcha.). Sin embargo veamos que en efecto se trata de una función

periódica; para ello comprobaremos que los coeficientes V_n de (3-34) se repiten a intervalos de N valores, es decir: - para un m entero cualquiera, se verifica que: $V_m = V_{m+N}$.

En efecto:

$$V_{m+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-j2\pi k \frac{m+N}{N}}$$

pero $e^{-j2\pi k(m+N)/N} = e^{-j2\pi km/N}$ por lo tanto

$$V_{m+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-j2\pi km/N} = V_m$$

Con lo que queda de nuevo demostrado, esta vez de manera mas formal, que en el dominio transformado, el período de la función consta de N pulsos lo mismo que el período de la función en el dominio de medida.

Puesto que la expresión (3-35) solo puede generar N valores distintos, no perdemos información si escribimos solamente un periodo

$$\tilde{F}(s) \approx \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-j2\pi nk/N} \right] \delta(s - n\tau), \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (3-36)$$

Esta expresión la denominaremos "Transformada Discreta de Fourier". La razón de dicho nombre radica en que esta expresión relaciona N muestras que se aproximan a la función problema $f(x)$, con N muestras de una función \tilde{F} que se aproxima la función $F(s)$ que es la transformada continua de $f(x)$.

La notación \tilde{F} hace referencia a que esta función se aproxima a F . Pero normalmente, se establece por definición que la Transformada Discreta de Fourier de una función muestreada $g(k\tau)$ es otra función denotada por $G(s)$ tal que

$$G(s) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(k\tau) e^{-j2\pi nk/N} \right] \delta(s-n\gamma) , n=0,1,2,\dots,N-1$$

(3-37)

III.3.4. La Transformada Discreta de Fourier Inversa:

Esta transformada viene dada por:

$$g(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} G(n\gamma) e^{j2\pi nk/N} \right] \delta(x-k\tau) , k=0,1,\dots,N-1 \quad (3-38)$$

Comprobemos que, en efecto, la expresión (3-38) es la transformada inversa de (3-37), es decir, al sustituir (3-37) en (3-38) el resultado obtenido es la función $g(x)$ muestreada introducida en el sumatorio de (3-37).

El valor $G(n\gamma)$ que aparece en (3-38) es una muestra de $G(s)$ para $s = n\gamma$, es decir:

$$G(n\gamma) = V_n = \sum_{r=0}^{N-1} g(r\tau) e^{-j2\pi nr/N}$$

Sustituyendo en (3-38)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{N-1} g(r\tau) e^{-j2\pi nr/N} \right) e^{j2\pi nk/N} \right] \delta(x-k\tau) , (k=0,1,\dots,N-1) = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} g(r\tau) \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nr/N} e^{j2\pi nk/N} \right] \delta(x-k\tau) , (k=0,1,\dots,N-1) \quad (3-39) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{-j2\pi nr/N} e^{j2\pi nk/N} = \begin{cases} N , & \text{si } r=k \\ 0 , & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La expresión (3-39) se puede escribir:

$$\sum_{r=0}^{N-1} g(r\tau) \delta(x-r\tau) = g(x) \quad (3-40)$$

tal como queríamos demostrar

III.4. -LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN DOS DIMENSIONES

En la breve miscelánea que hemos expuesto sobre el Análisis de Fourier hemos supuesto en el dominio de medida una función de una sola variable, como podría ser el tiempo, una coordenada espacial etc... Hemos procedido así siguiendo un criterio de simplicidad de notación y claridad en los desarrollos y gráficos. Sin embargo hay casos en que la función en el dominio de medida depende de dos variables. Una de estas situaciones se nos va a presentar cuando pretendamos expresar el reparto de intensidad en una imagen fotográfica bidimensional; logicamente habrá que asignar un valor de intensidad i a cada punto (x,y) . Por lo tanto en este punto tendríamos que hacer una generalización de las definiciones, no menclatura y teoremas vistos, al caso bidimensional, que será el de más frecuente aparición en nuestro trabajo. A modo de ejemplo generalizaremos la definición de transformada de Fourier y el teorema de convolución.

* Si una función bidimensional $f(x,y)$ tiene una transformada bidimensional $F(u,v)$, entre ambas existen las siguientes relaciones

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

En nuestro caso las variables u y v son frecuencias espaciales y normalmente las expresamos en ciclos/segundo de arco.

* El teorema de convolución

La integral de convolución entre dos funciones bidimensionales $f(x,y)$ y $g(x,y)$ se define como:

$$f(x,y) * g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y') g(x-x',y-y') dx' dy'$$

Obsérvese que la función g es sometida a un giro de 180° alrededor del origen con objeto de invertir el signo de x e y .

III.5.- LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER O FFT (Fast Fourier Transform)

En la realización de este trabajo se nos va a presentar como problema típico el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier directa o inversa de una función bidimensional muestreada en 96×96 pixels. A lo largo del proceso de cada una de las diferentes áreas fotometradas este problema se suscitará en múltiples ocasiones; por lo tanto hemos de disponer de un método eficiente para calcular las series que aparecen en el cálculo de la transformada discreta (ver para el caso unidimensional la expresión (3-37)), en especial para casos como el nuestro en que los sumatorios son dobles y sus límites elevados ($N=96$).

La idea original para desarrollar un método de cálculo rápido fué desarrollado por J.W.Cooley y J.W.Tukey (1965) a instancias de R.L.Garwin que lo necesitaba apremiantemente para su trabajo de investigación. El método ha sido perfeccionado posteriormente por autores como Cooley et al(1965), Bergland (1968), Bergland (1969), Brenner (1967). Para el estudio a fondo del método de transformada rápida de Fourier y en particular del algoritmo de Cooley-Tukey remitimos al texto de Oran Brigham (1974).

En el presente trabajo se ha utilizado la versión de Transformada Rápida de Fourier escrita en FORTRAN IV por N. Brenner (1969).

CAPITULO IV

=====

LA FUNCION DE DISPERSIONIV.1.-LA FUNCION DE DISPERSION; ESBOZO DEL PROBLEMA DE LA RESTAURACION DE UNA IMAGEN EXTENSA:

Llamamos función de dispersión a la que proporciona el reparto de intensidades en la mancha que constituye la imagen de un objeto puntual de intensidad unidad, formada a través de la atmósfera y mediante el telescopio sobre la placa fotográfica. La denotaremos por $\varphi(x-x', y-y')$, siendo (x',y') las coordenadas del punto en donde se debería haber formado la imagen puntual ideal. Por consiguiente la imagen de un objeto puntual de intensidad i , tendrá un reparto de intensidad en los puntos (x,y) del espacio imagen dado por:

$$i(x',y')\varphi(x-x' , y-y') \quad (4-1)$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, es obvio que φ debe encerrar un volumen unidad.

Si fueran nulos los efectos perturbadores de la atmósfera y trabajáramos con un instrumento perfecto, suponiendo además que no actúan fenómenos de difracción y que prescindimos de los procesos de deterioro en la emulsión fotográfica, la imagen ideal que obtendríamos de un objeto extenso tendría un reparto de intensidad totalmente fiel al reparto verdadero $i_v(x,y)$ que existe en el objeto. Sin embargo existe un efecto perturbador que punto a punto viene representado por la función φ . Por lo tanto el reparto de intensidades observado --

$i_o(x,y)$, teniendo en cuenta la expresión (4-1) vendrá dado en realidad por la siguiente integral de convolución:

$$i_o(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} i_v(x',y')\varphi(x-x',y-y')dx'dy' \quad (4-2)$$

Nuestro problema podría plantearse, en su forma más simple, en términos de estimar $i_v(x',y')$ para cualquier punto (x',y') del objeto. Esto lleva consigo el despejar $i_v(x',y')$ en la ecuación integral (4-2), lo cual podría hacerse fácilmente en el espacio transformado de Fourier haciendo uso del teorema de convolución (3-5):

$$I_o(\xi,\eta) = I_v(\xi,\eta)\phi(\xi,\eta) \quad (4-3)$$

siendo I_o, I_v y ϕ las transformadas de Fourier de las funciones i_o, i_v y φ respectivamente.

Así el mecanismo de formación de la imagen adopta una expresión especialmente sencilla en el dominio transformado. Cada componente correspondiente a un par de frecuencias espaciales en el objeto $I_v(\xi,\eta)$ se ve afectada de un coeficiente complejo, $\phi(\xi,\eta)$, para obtener de esta forma la componente en la imagen correspondiente a dichas frecuencias. Dicho coeficiente complejo actúa, realmente, como un filtro en la transferencia de información desde el objeto a la imagen. Los valores que adopta ϕ para las distintas frecuencias espaciales se denominan con varias acepciones tales como "función de transferencia", "factor de transmisión", "factor de contraste", "función de filtrado", etc... (Marechal et Françon, 1970). Normalmente, nosotros nos referiremos a la función ϕ con las siglas de la expresión inglesa con que se la designa: MTF -- ("Modulation Transfer Function"), que es la expresión, hoy en día, de uso más generalizado.

Despejando $I_v(\xi,\eta)$ en (4-3):

$$I_v(\xi,\eta) = \frac{I_o(\xi,\eta)}{\phi(\xi,\eta)}$$

hay que tener en cuenta que esta fórmula sólo es válida para valores ξ, η en que $\phi \neq 0$. No obstante, dada la resolución finita del telescopio hay que esperar que ϕ se haga cero a partir de unos ciertos valores ξ_c, η_c (frecuencias de corte) por lo tanto no podemos esperar recuperar completamente $I_V(\xi, \eta)$

sino que nos tendremos que conformar con obtener una función $I_r(\xi, \eta)$ (el subíndice r hace referencia a la idea de restauración) que coincide con $I_V(\xi, \eta)$ hasta las frecuencias de corte, y que se hace cero a partir de dichas frecuencias. Así pues, la expresión anterior la escribiremos con mas propiedad de la siguiente manera

$$I_r(\xi, \eta) = \frac{I_0(\xi, \eta)}{\phi(\xi, \eta)} \quad \text{para } \xi, \eta \text{ menores que } \xi_c, \eta_c \quad (4-4)$$

y suponiendo que las frecuencias de corte sean muy altas, cabe hacer la aproximación

$$I_V(\xi, \eta) \approx I_r(\xi, \eta)$$

El cálculo de la transformada inversa de Fourier de $I_r(\xi, \eta)$ nos proporciona la función buscada $i_r(x', y') \approx i_V(x', y')$

La resolución de la ecuación (4-2) requiere por tanto del conocimiento previo de la función de dispersión ϕ o de su transformada (MTF) ϕ .

Vamos a centrarnos, pues, en el problema de la estimación de la función de dispersión. En esta línea, vamos a ver primeramente algunos aspectos, cuya aplicación será inmediata, sobre la función "escalón unidad de Heaviside".

IV.2. - UNA PROPIEDAD INTERESANTE DE LA FUNCION "ESCALON UNIDAD DE HEAVISIDE:

Esta función que viene ilustrada en la Fig.(4.1.a) se define como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 1/2 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

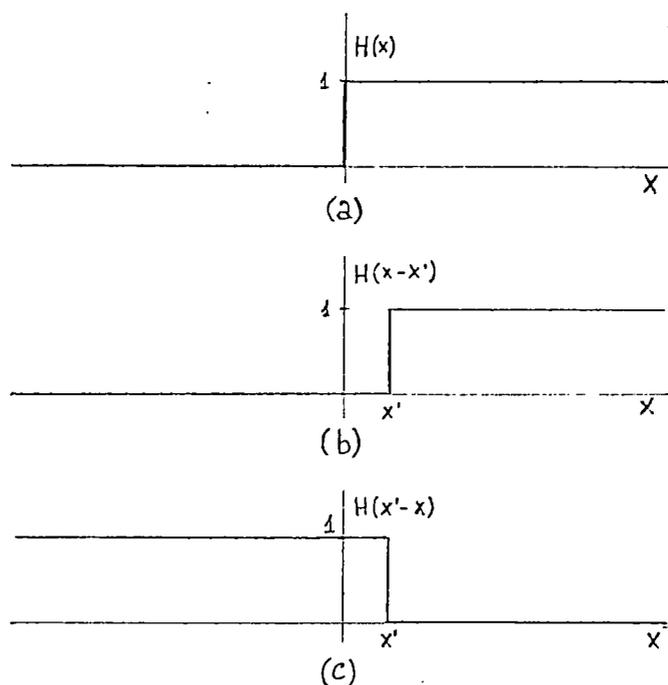


Fig.(4.1)

Un cambio de la variable x por $x-x'$ (siendo x' un determinado valor de x), supone un desplazamiento de la función a lo largo del eje OX en un valor x' (ver Fig.(4.1.b)). Si en lugar de $x-x'$ tomamos como variable $-(x-x')$ la función que resulta $H(x'-x)$ viene representada en la Fig.(4.1.c).

La integral de una función $f(x)$, entre $-\infty$ y x' (área rayada en la Fig.(4.2)) se puede expresar en términos de $H(x'-x)$ según la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{x'} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H(x'-x) dx \quad (4-5)$$

como se concluye fácilmente del significado de la función $H(x'-x)$ y del exámen de la Fig.(4.2).

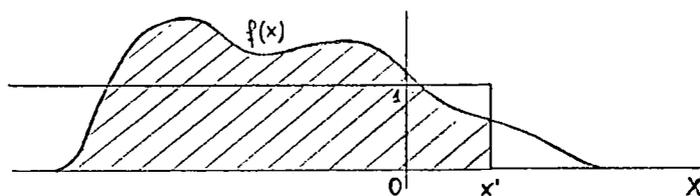


Fig.(4.2)

El segundo miembro de (4-5) es una integral de convolución de $f(x)$ con $H(x)$. Así pues abreviadamente podemos poner con la notación usual:

$$\int_{-\infty}^{x'} f(x) dx = f(x) * H(x)$$

o bien:

$$f(x) = \frac{d}{dx} [f(x) * H(x)] \quad (4-6)$$

Resultado interesante que podemos leer diciendo: "una función $f(x)$ se puede obtener como la derivada respecto a x de su convolución con $H(x)$ ", (Bracewell, 1965).

IV.3.-EL ECLIPSE DE SOL SITUACION IDONEA PARA LA ESTIMACION DE LA FUNCION DE DISPERSION:

La determinación de la función de dispersión φ requiere del conocimiento con certeza de $i_v(x', y')$ en alguna estructura del objeto fotografiado; así pues teniendo como datos $i_v(x', y')$ e $i_0(x, y)$ y mediante la resolución de la ec. (4-2) podemos conocer φ .

En los casos que vamos a estudiar, conocemos con certeza el perfil fotométrico verdadero de una estructura en el objeto que hemos fotografiado; se trata del borde lunar superpuesto a la Fotosfera; una función escalón.

Consideremos el perfil fotométrico verdadero del borde lunar normalizado, y hagamos la suposición de que dicho borde, es prácticamente rectilíneo (dada la escala de la imagen frente al tamaño de la fotografía) y se extiende a lo largo del eje Y (ver Fig. (4.3.a)); en estas condiciones podemos representar dicho perfil fotométrico como una función independiente de Y , del tipo "escalón unidad de Heaviside" (ver Fig. (4.3.b)) que se puede expresar como:

$$i_V^L(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & \text{para puntos de la Fotosfera } (x > 0) \\ 0 & \text{para puntos de la Luna } (x < 0) \end{cases} \quad (4-7)$$

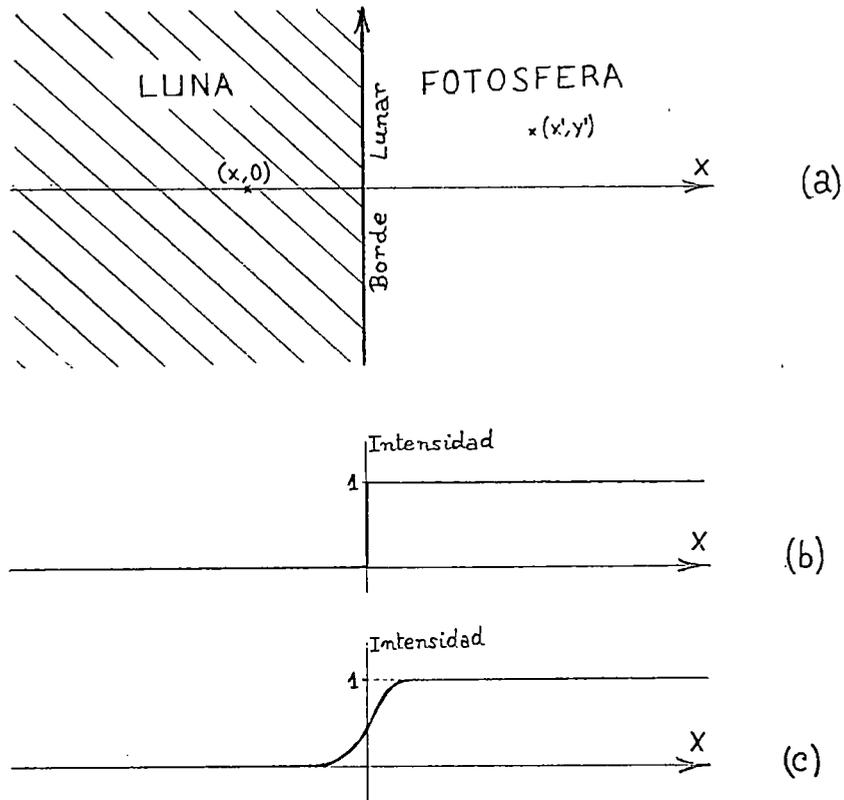


Fig.(4.3)

La Fig.(4.3.c) representa un hipotético perfil fotométrico del borde lunar obtenido de nuestras observaciones y que ha sido normalizado; lo denotaremos por $i_o^L(x)$.

De acuerdo con (4-2) y teniendo en cuenta (4-7) podemos escribir a la vista de la Fig.(4.3.a) para un punto del eje OX

$$\begin{aligned} i_o^L(x) &= \iint_{-\infty}^{\infty} H(x') \varphi(x-x', y-y') dx' dy' = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} H(x-x') \varphi(x', y') dx' dy' = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-x') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', y') dy' \right] dx' \end{aligned}$$

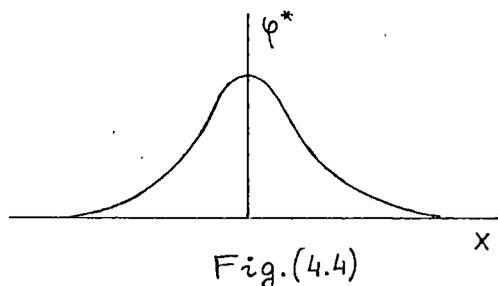
$$\text{y llamando: } \varphi^*(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', y') dy' \quad (4-8)$$

$$\text{nos queda: } i_o^L(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-x') \varphi^*(x') dx' = H(x) * \varphi^*(x)$$

y de acuerdo con (4-6):

$$\varphi^*(x) = \frac{d}{dx} [H(x) * \varphi^*(x)] = \frac{d}{dx} [i_0^L(x)] \quad (4-9)$$

podemos pues obtener $\varphi^*(x)$ mediante un proceso de derivación numérica de nuestro perfil observado $i_0^L(x)$ (ver Fig. (4.4)) (ver **)



Según hemos planteado en IV.1., nuestro interés está centrado en conocer opcionalmente $\varphi(x,y)$ o bien su transformada de Fourier $\phi(\xi,\eta)$. En el punto en que estamos, habiendo determinado $\varphi^*(x)$, nos podemos plantear cual de estas dos funciones resulta mas fácil de determinar. Aparentemente parece sencillo despejar φ de la ec. integral (4-8), pero esta ecuación no tiene solución única (Petrovski, 1971).

Una simplificación razonable nos permitirá relacionar fácilmente $\phi(\xi,\eta)$ con $\varphi^*(x)$. Vamos a suponer que la función de dispersión $\varphi(x,y)$ tiene simetría de revolución, esto es tanto como afirmar que la perturbación producida por el sistema de transmisión y el sistema de detección (atmósfera + telescopio + emulsión fotográfica), sobre la imagen de un punto objeto es isótropa.

(**) Nótese que el área encerrada por $\varphi^*(x)$ es igual a la unidad. En efecto: de acuerdo con (4-8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x',y') dx' dy' = 1$$

En este sentido diremos que $\varphi^*(x)$ es una función normalizada.

La transformada de Fourier de $\varphi(x,y)$ se expresa como:

$$\phi(\xi,\eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) e^{2\pi i(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (4-10)$$

y si, tal como acabamos de apuntar, suponemos que tiene simetría de revolución, es decir

$$\varphi(x,y) = \varphi(r) \quad \text{siendo } r^2 = x^2 + y^2$$

entonces se demuestra (Bracewell, 1965) que su transformada de Fourier tiene también simetría de revolución es decir:

$$\phi(\xi,\eta) = \phi(q) \quad \text{siendo } q^2 = \xi^2 + \eta^2$$

asi pues, conocida $\phi(\xi,0)$ tendremos toda la información sobre la función $\phi(\xi,\eta)$. Calculemos por tanto $\phi(\xi,\eta)$ a lo largo del eje ξ es decir para $\eta=0$ (Levy, 1971) (Fellgett, 1959)

$$\phi(\xi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) dy \right] dx =$$

de acuerdo con la ecuación (4-8):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \varphi^*(x) dx$$

es decir:

$$\phi(\xi,0) = \mathcal{F}^p [\varphi^*(x)] \quad (4-11)$$

Una vez conocido $\phi(\xi,\eta)$ podemos sustituir en la ec. (4-4) tal como nos habíamos propuesto; y si estamos interesados en la forma de la función $\varphi(x,y)$ bastará con calcular:

$$\varphi(x,y) = \mathcal{F}^p^{-1} [\phi(\xi,\eta)] \quad (4-12)$$

* Crítica del método

En general el proceso de obtención de la función de dispersión requiere del conocimiento del perfil fotométrico verdadero de una estructura del objeto, así como del perfil observado de la misma y del uso de la ec. (4-2). Con objeto de simplificar la estimación de φ , en especial cuando las técnicas de cálculo de la Transformada Rápida de Fourier no estaban en uso, muchos autores han presupuesto para sus funciones de dispersión formas analíticas sencillas (por ejemplo gaussianas y combinaciones lineales de ellas), el valor numérico de cuyos parámetros lo han estimado mediante un proceso de tanteo que se puede esquematizar en: a) sustituir en (4-2) φ por la expresión analítica asumida con unos valores dados para sus parámetros; b) resolver la integral de convolución y comparar el resultado con el perfil fotométrico observado; c) repetir el proceso para distintos valores de los parámetros hasta conseguir el mejor ajuste entre el resultado de la integral y el perfil fotométrico observado (Wanders, 1934; Michard, 1953; Stumpff, 1961; Makita y Morimoto, 1960, 1964; Zwaan, 1965; Wittmann y Schröter, 1969; Wittmann, 1971; Levy, 1971; Staveland, 1972; Maltby y Staveland, 1972; Muller, 1973; Iuell y Staveland, 1975; Wittmann y Mehlretter, 1977).

Basándonos en las técnicas de Fourier hemos conseguido una expresión numérica y no analítica de la función de dispersión y de su transformada mediante la resolución directa de la ec. integral (4-2), estimación, por lo tanto, más precisa que la basada en el método de tanteo anteriormente expuesto. No obstante podríamos intentar ajustar a nuestro resultado numérico alguna expresión analítica sencilla con miras a una mayor simplicidad en los cálculos posteriores; sin embargo, tal como sugieren y comprueban Deubner y Mattig (1975) la función de dispersión no se ajusta exactamente a ninguna de las formas analíticas que tradicionalmente se proponen. Por lo tanto, para no restar precisión, en adelante trabajaremos con la función de dispersión numérica sin ningún tipo de ajuste.

Por otra parte nos podemos preguntar: ¿Cuál es el perfil fotométrico verdadero del objeto que los autores dan por ciertamente conocido en los casos en los que no se tiene el oportuno suceso de un eclipse de Sol por la Luna? Con frecuencia se toma como perfil fotométrico verdadero conocido en el objeto, el del oscurecimiento del borde solar, es decir, la llamada función " limb-darkening ". Sin embargo el conocimiento que de este perfil se tiene, basado en observaciones directas y conjeturas teóricas (Minnaert, 1953, Ballario y Godoli, 1955, David y Elste, 1962), no es muy perfecto en la zona más próxima al borde solar, que es por otra parte el rango de curva que más influirá en la estimación del "core" de la función de dispersión. Cabe contrastar esta situación con la del presente trabajo en que se tiene un conocimiento exacto del perfil fotométrico verdadero de la transición Luna-Fotosfera.

El basar la estimación de la función de dispersión en el perfil observado del oscurecimiento del borde solar presenta otra dificultad. Salvo en casos excepcionales el borde solar y la estructura solar de interés fotométrico están lo suficientemente alejados como para no poder ser registrados simultáneamente en la misma exposición fotográfica, dado el reducido campo que abarca el telescopio. Por lo tanto se impone obtener fotografías sucesivas, pero no simultáneas, del borde y de la estructura. Ahora bien, sabemos que las inhomogeneidades atmosféricas, continuamente cambiantes, producen deterioros en la imagen, localmente diferenciados y que varían rápidamente con el tiempo. Por lo tanto no tenemos ninguna garantía de que la función de dispersión obtenida basándose en un registro (ya sea fotográfico o fotoeléctrico) del borde solar sea representativa de la degradación de la imagen de una estructura, fotografiada con intervalo de algunos segundos, tras haber desplazado el telescopio al punto del disco solar en donde está ubicada dicha estructura. Contrastemos de nuevo esta situación con la del presente trabajo. Afortunadamente el borde de la Luna en su tránsito a través del disco solar,

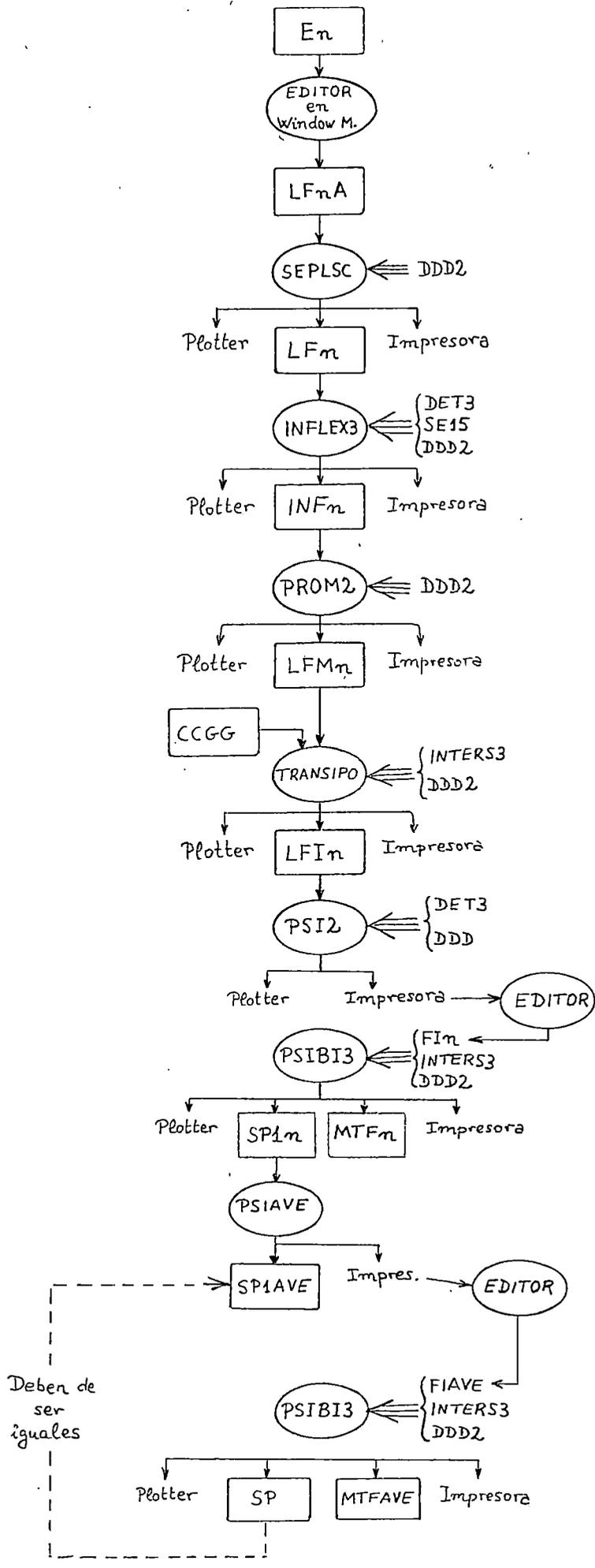
atraviesa la mancha cuyo estudio pretendemos, de manera que en la misma exposición tenemos registrada la estructura de interés a fotometrar y la estructura cuyo perfil fotométrico nos sirve para obtener la función de dispersión (transición Luna-Fotosfera) (ver fotografías Apéndice). El eclipse por tanto, nos proporciona simultaneidad temporal y cierta proximidad espacial entre los registros de ambas estructuras. No obstante a pesar del pequeño campo recogido en la fotografía, se pueden apreciar diferencias, para puntos relativamente próximos, en la calidad de la imagen (ver fotografías). Haciendo esta salvedad, podemos admitir con bastante seguridad, que la función de dispersión - promedio obtenida (basándonos en áreas de transición Luna-Fotosfera de buena calidad de imagen), representa bastante bien la degradación que afecta al área problema (que tiene, a su vez, buena calidad de imagen).

IV.4.-OBTENCION DE LA FUNCION DE DISPERSION: PROCESO OPERATORIO:

El conjunto de programas de ordenador que constituyen los sucesivos pasos requeridos para la obtención de la función de dispersión forman lo que vamos a llamar "MODULO FUNCION DISPERSION", cuyo organigrama está representado en la Fig.(4-5).

El conjunto de medidas de transmitancia realizadas sobre cada placa fotográfica están depositadas en un fichero - cuyo nombre es En, en donde n es el nº de identificación de la placa. Cada fichero En contiene, pues, matrices de medidas correspondientes a diferentes áreas localizadas en distintas zonas de la mancha, estimaciones del velo de la placa, así - como varias series de barridos fotométricos cruzando perpendicularmente el borde lunar y que servirán para hacer una estimación del perfil observado en la transición Luna-Fotosfera (Las zonas fotometradas están indicadas sobre las mascarillas transparentes superpuestas a las fotografías del Apéndice). Estas series de barridos son las que nos interesan en el presente módulo de trabajo que se ciñe a los siguientes pasos según detalla el organigrama:

1º) El EDITOR de nuestro sistema operativo trabajando en "Window Mode", nos permite separar de En las citadas series - de barridos realizados perpendicularmente al borde de la Luna para depositarlos en un nuevo fichero LFnA (la A hace referencia a que los datos están registrados en ASCII). También con el EDITOR sustituimos algunos valores de medida, que suponen una fuerte desviación injustificada respecto de sus colaterales; dichos picos, que aparecen esporádicamente, son debidos a respuestas anómalas del fotomultiplicador o a pequeños deterioros en la emulsión fotográfica.



ORGANIGRAMA DEL MODULO "F, DISPERSION"

Fig.(4.5)

2º) Programa "SEPLSC" : Transforma los valores de LFnA registrados en ASCII a BINARIO y los deposita en LFn; además produce un gráfico de cada barrido en donde se puede apreciar - si queda por corregir algún valor de medida fuertemente erróneo de los antes mencionados.

3º) Programa "INFLEX3" : Con objeto de atenuar el ruido debido al grano de la placa y de obtener una función de dispersión - que represente una estimación media de la degradación producida en la imagen, promediamos los barridos Luna-Fotosfera - realizados en bloques de 10 ó 15 consecutivos y en distintos puntos (en donde la calidad de imagen es diferente), a lo largo del borde lunar. Para realizar dicho promedio superponemos los barridos haciendo coincidir su punto de inflexión. El programa INFLEX3 determina la posición del pto.de inflexión para cada barrido, calculando su derivada segunda y analizando en qué punto se hace cero. Un listado y un gráfico simultáneo permiten visualizar rápidamente la localización del punto de inflexión. Un cometido secundario de este programa es la corrección de los valores erróneos residuales que se han detectado en el paso anterior , depositando finalmente los barridos - en un nuevo fichero denotado por INFn.

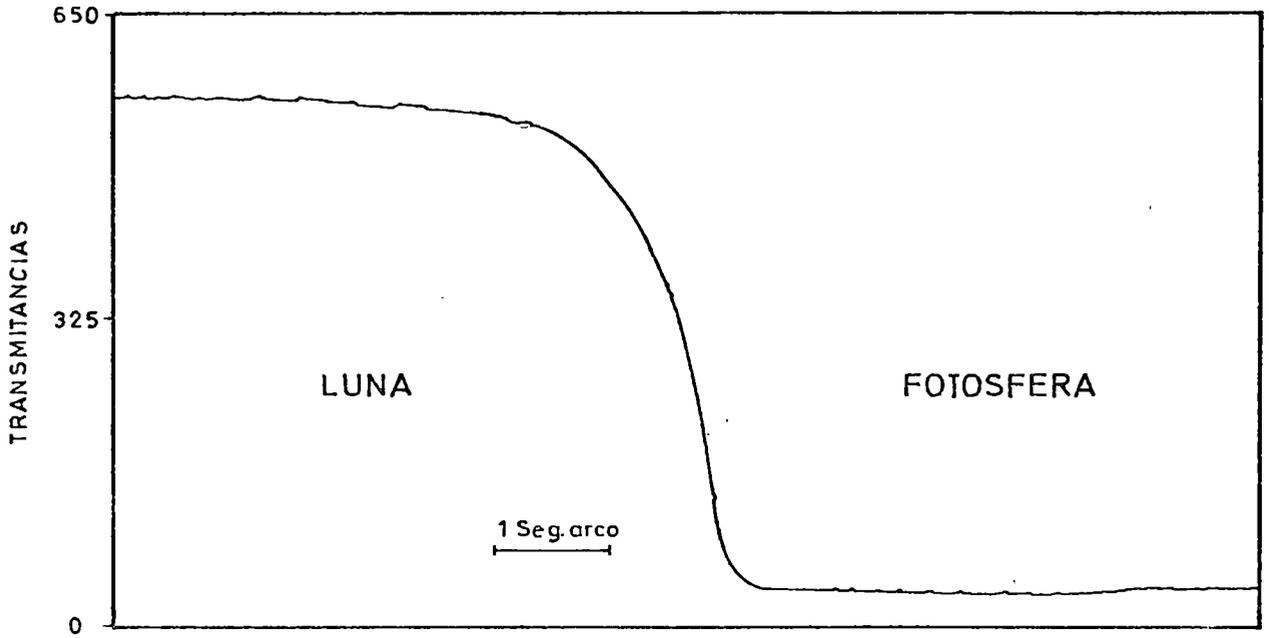
4º) Programa "PROM2" ; Realiza la superposición de barridos - Luna-Fotosfera haciendo coincidir sus puntos de inflexión; y calcula el perfil promedio. El resultado es depositado en el fichero LFMn (la M hace referencia a ."valor medio"), representado gráficamente y listado por impresora. La tabla 4.1 expresa el número de perfiles que se han promediado en cada una de las placas.

TABLA 4.1

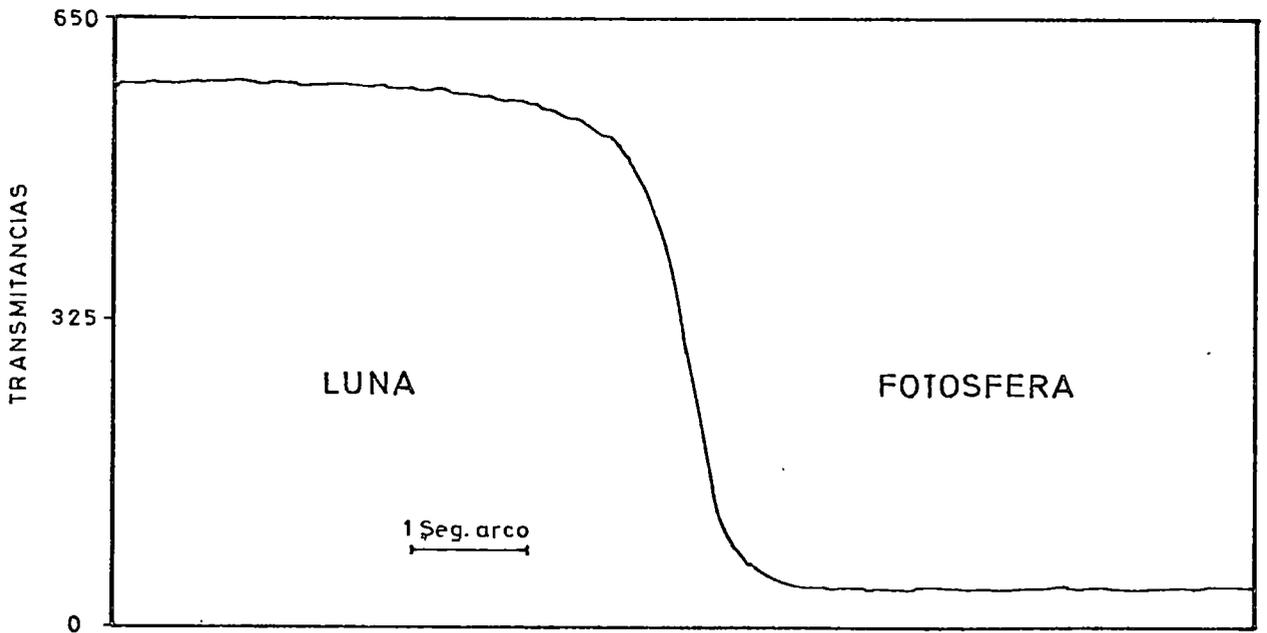
| Longitud de onda (Å) | Nº de referencia de la placa | Nº de barridos promediados |
|----------------------|------------------------------|----------------------------|
| 5550 Å | 10 | 60 |
| | 11 | 50 |
| | 12 | 50 |
| | 13 | 89 |
| | 14 | 112 |

Las Figs (4.6.a,b,c,d y e) muestran los barridos promedio correspondientes a cada una de las placas procesadas (valores correspondientes a medidas de transmitancia).

5º) Programa "TRANSIPO" : Hace la conversión del perfil medio Luna-Fotosfera de transmitancias a intensidades utilizando la curva característica extraída del fichero CCGG para $\lambda 5550 \text{ Å}$. El resultado es depositado en el fichero LFIIn, listado por impresora y representado gráficamente (ver Figs.(4.7.a,b,c,d, y e)). En dichas figuras se pone de manifiesto que el perfil fotométrico de intensidades en la transición Luna-Fotosfera salva distintos desniveles en los diferentes ejemplos. La diferencia la atribuimos a la presencia mas o menos abundante de zonas faculares en la Fotosfera inmediatamente próxima al borde de la Luna, según el estado de evolución del eclipse y sobre todo a discrepancias entre los tiempos de exposición en las distintas placas debidas a imprecisión en el mecanismo de obturación de la cámara de cine. Por otra parte la falta de alisamiento del perfil en la zona correspondiente al barrido de la Fotosfera responde a la presencia de la granulación fotosférica normal o a la de los gránulos faculares.

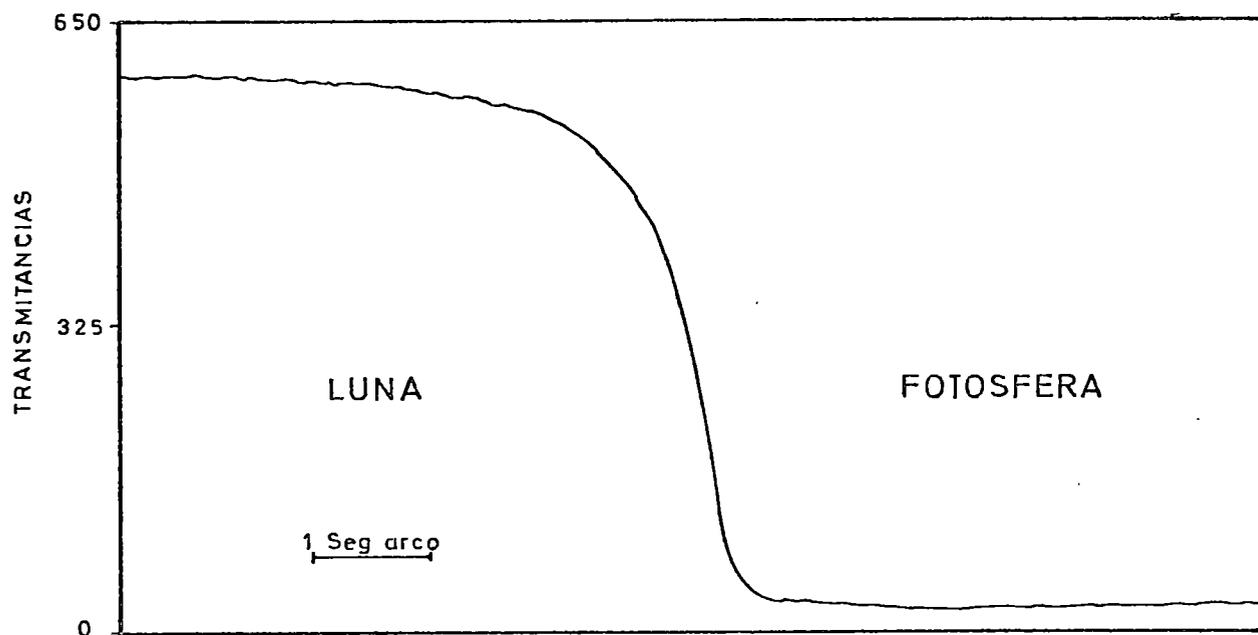


(a) FOTO nº 10

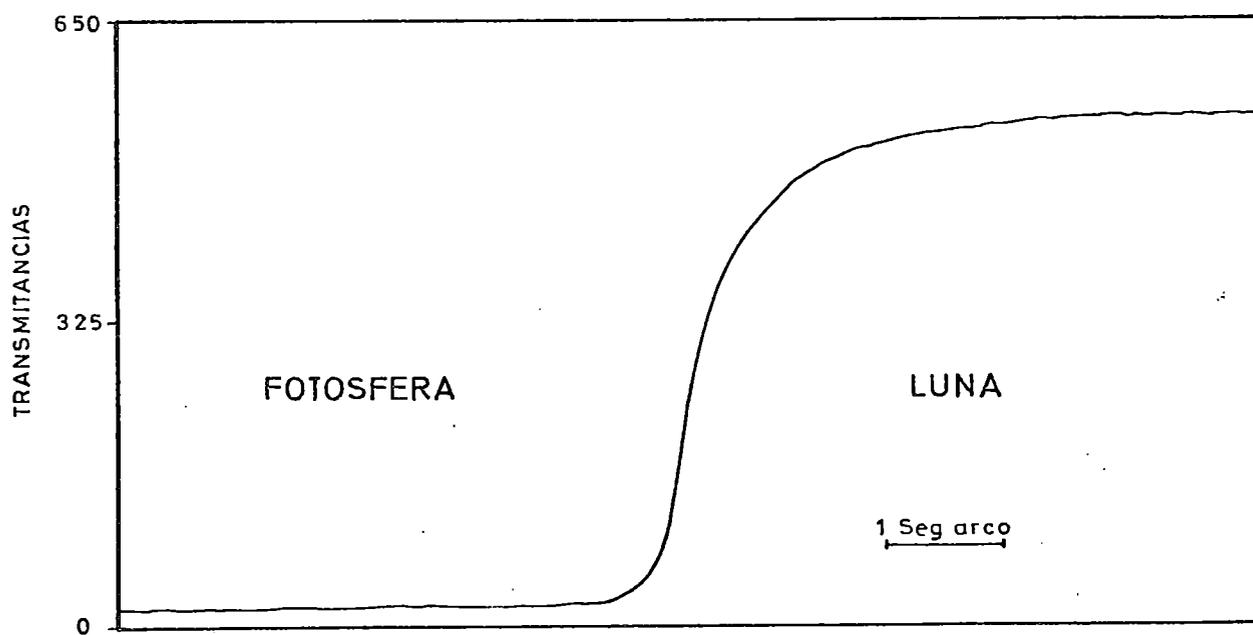


(b) FOTO nº 11

Fig.(4.6) Perfil fotométrico medio (en Transmitancias) de la transición Luna-Fotosfera.



(c) FOTO n° 12



(d) FOTO n° 13

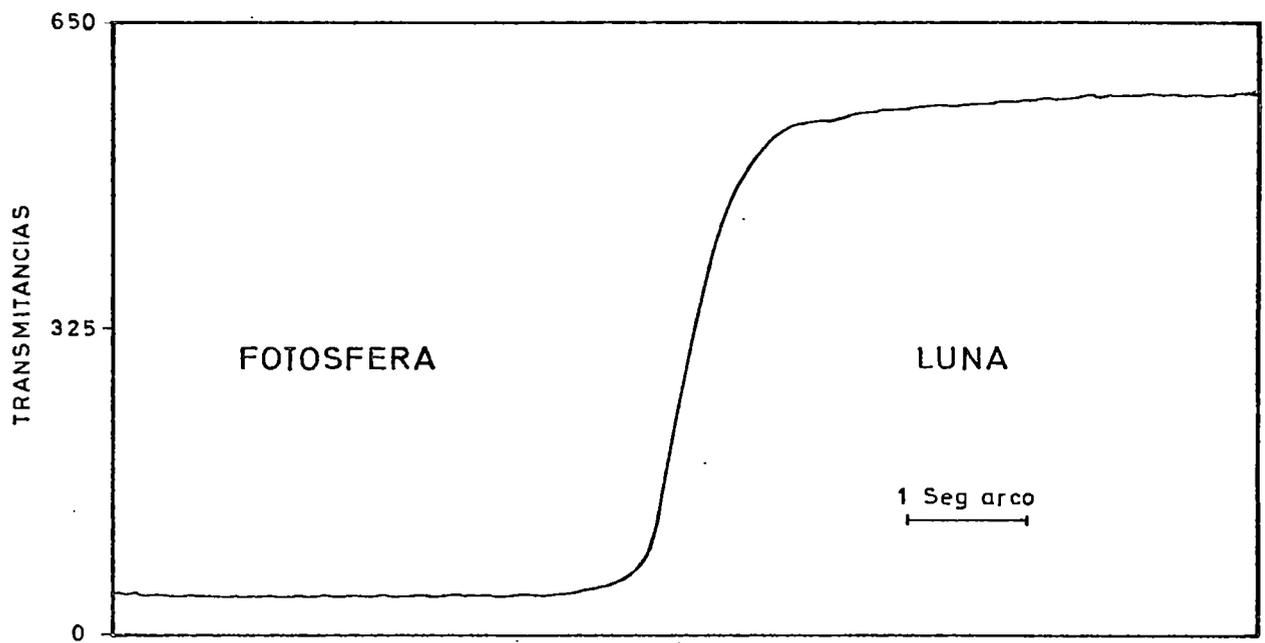
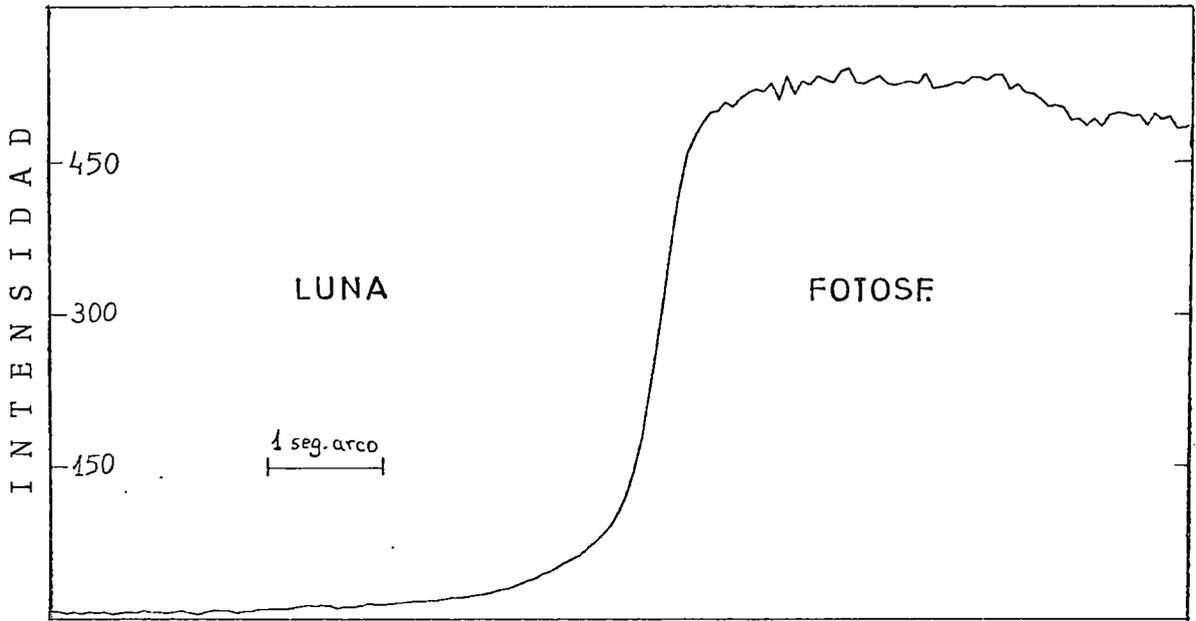
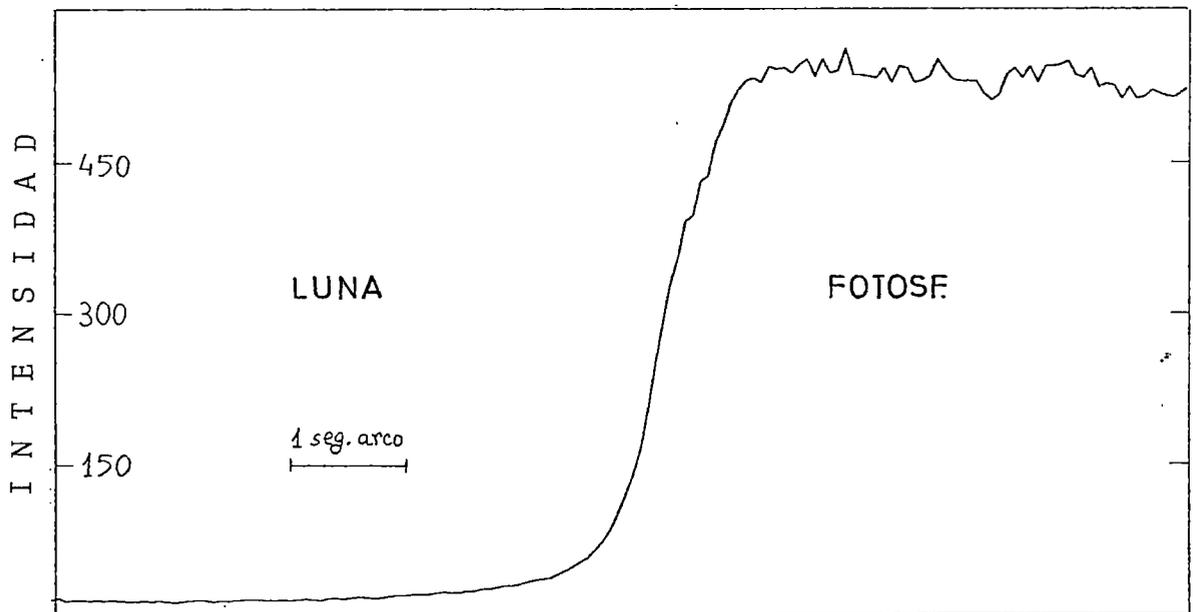
(e) FOTO n^o 14

Fig.(4.6) (Continuación)

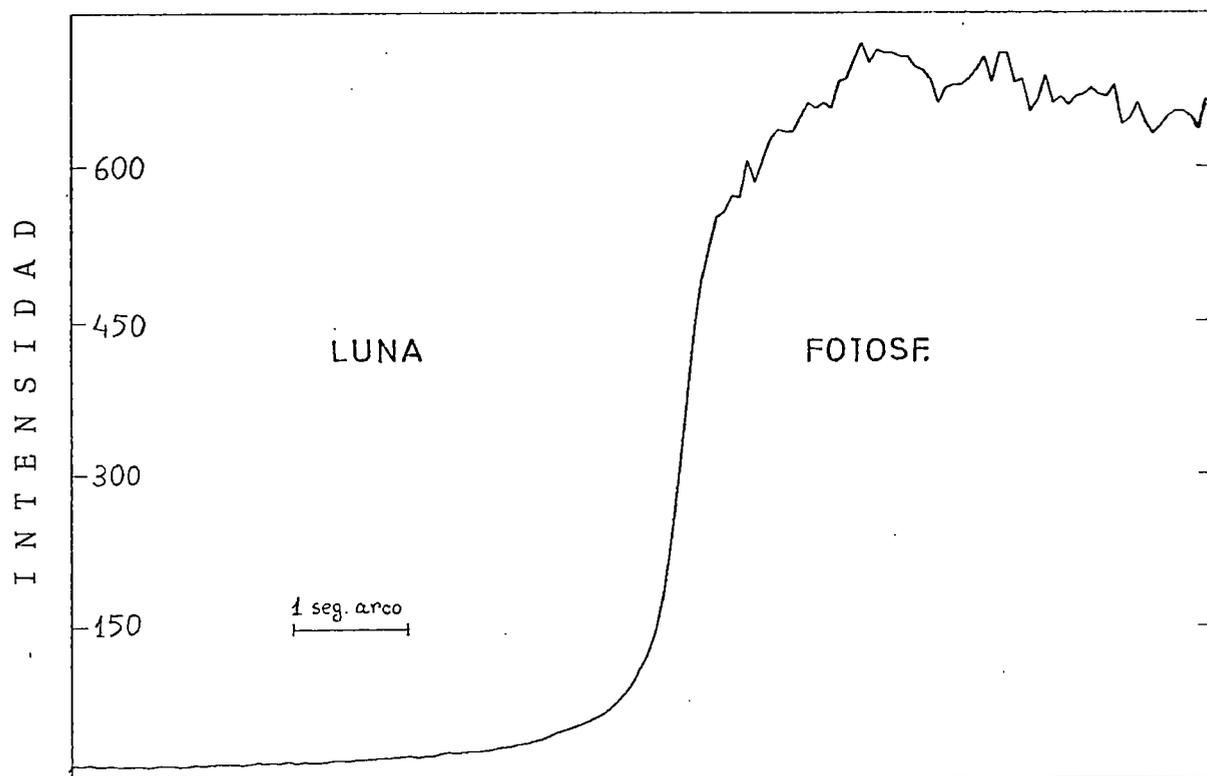


(a) FOTO n°10

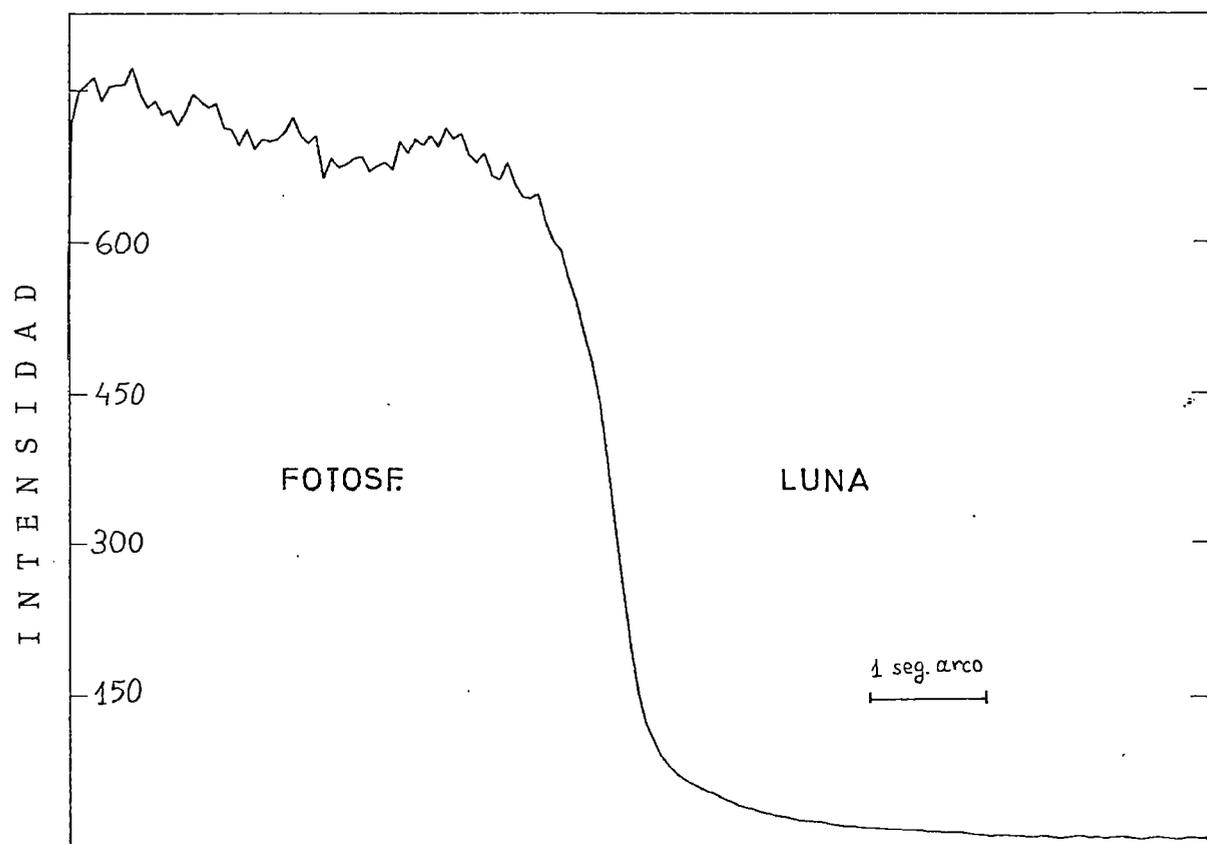


(b) FOTO n°11

Fig.(4.7) Perfil medio observado, en intensidades, de la transición Luna-Fotosfera

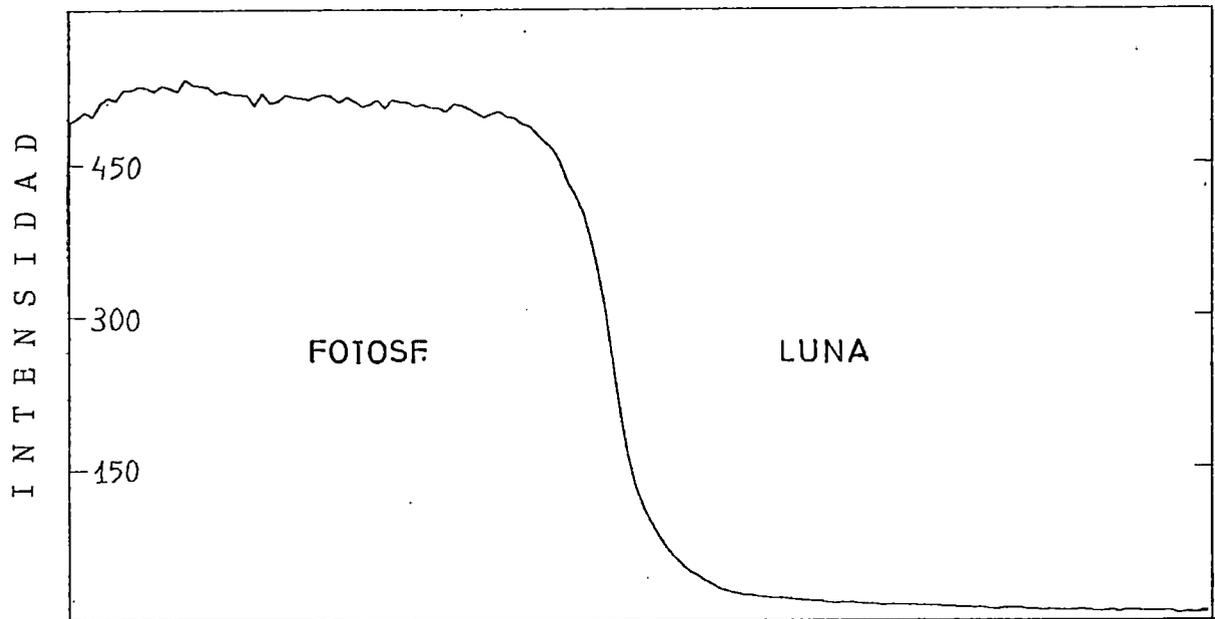


(c) FOTO n°12



(d) FOTO n°13

Fig.(4.7) (Continuación)



(e) FOTO n°14

Fig.(4.7) (Continuación)

6º) Programa "PSI2" : Calcula la derivada respecto de x del perfil fotométrico Luna-Fotosfera expresado en intensidades, imprime el resultado y lo representa gráficamente (ver Figs. (4.8.a,b,c,d, y e)).

La falta de simetría en las alas de estas funciones responde fundamentalmente a la presencia de granulación fotosférica y facular que se ponía de manifiesto en los gráficos de la Fig.(4.7). Como podemos observar la granulación nos está produciendo un efecto de ruido cuya eliminación resulta difícil. Por ello tomaremos como función derivada el ala lisa, correspondiente a la derivada del perfil fotométrico en su parte lunar, y su simétrica respecto al eje de ordenadas. Utilizando la notación del epígrafe IV.3, la función que resulta, llamémosla $f^*(x)$, es $\varphi^*(x)$ salvo un factor de normalización. El proceso de normalización de $f^*(x)$ lo llevaremos a cabo en el dominio transformado (en el siguiente paso de organigrama) dividiendo la transformada de Fourier por su valor para la frecuencia cero, garantizándonos así que la transformada para $n=0$ valga 1 (ver **). La función simétrica y alisada que obtenemos, $f^*(x)$, se introduce en el siguiente programa mediante una subrutina editada en base a la lista de datos de salida en este paso.

7º) Programa "PSIBI3" : Calcula $\mathcal{F} [f^*(x)] = F^*(u)$. Normaliza $f^*(x)$ dividiendo su transformada por $F^*(0)$, obteniendo:

$$\mathcal{F} [\varphi^*(x)] = \frac{F^*(u)}{F^*(0)} \quad (4-13)$$

(**) De la definición de transformada de Fourier

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i u x} dx$$

se concluye que:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{área encerrada por } f(x)$$

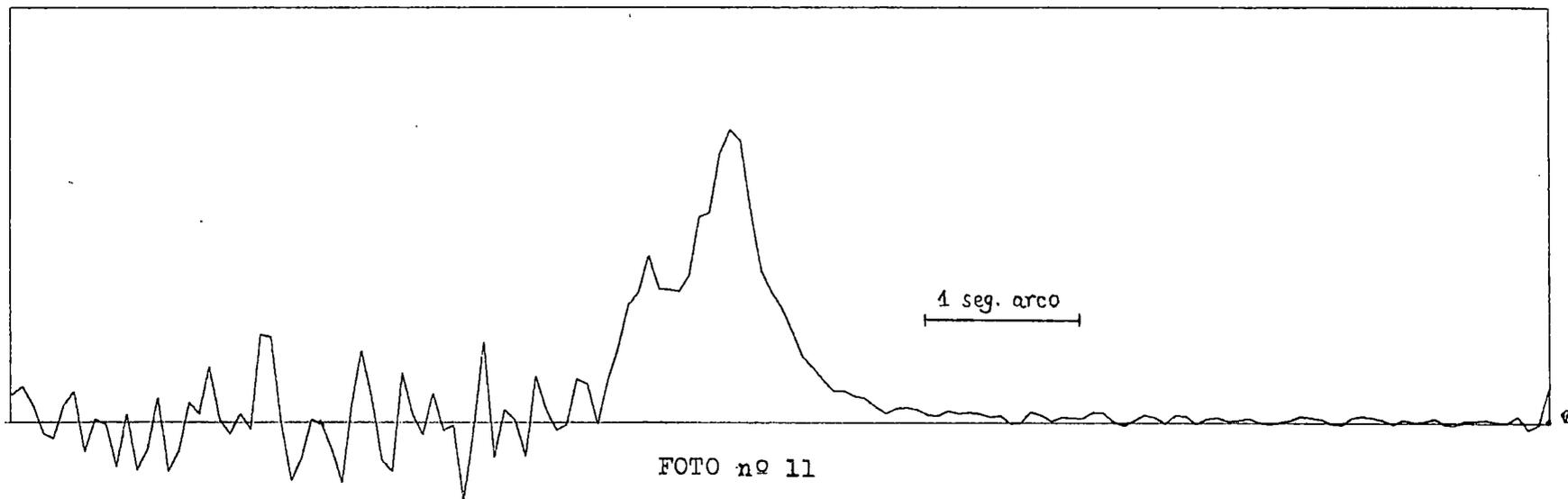
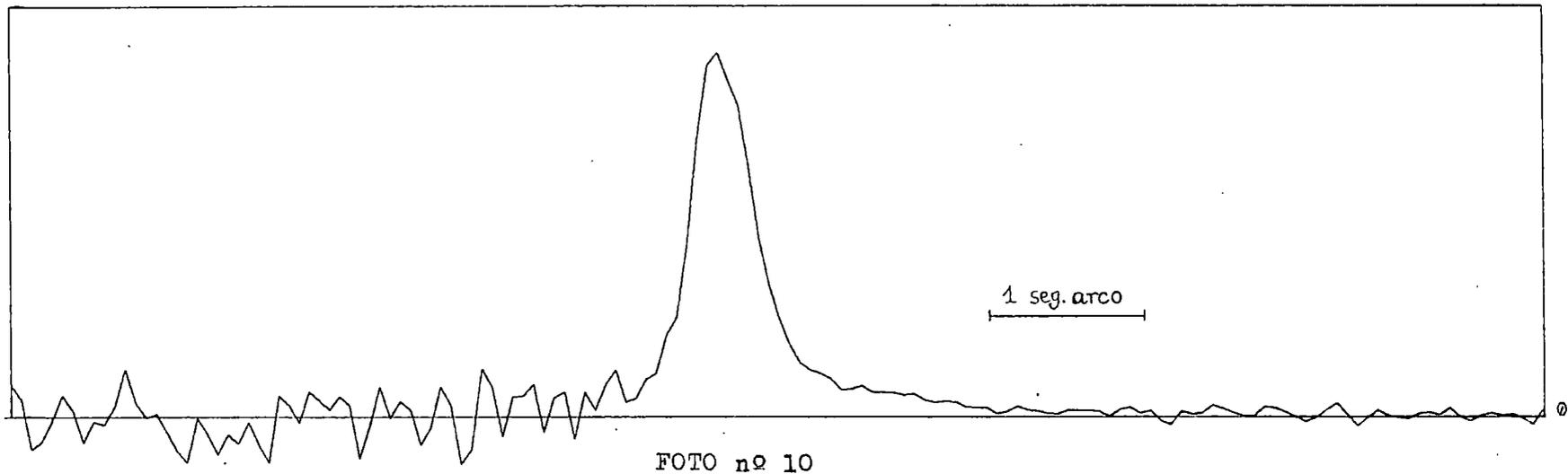


Fig.(4.8) Función derivada del perfil Luna-Fotosfera en intensidades: $\frac{di_o^L(x)}{dx}$

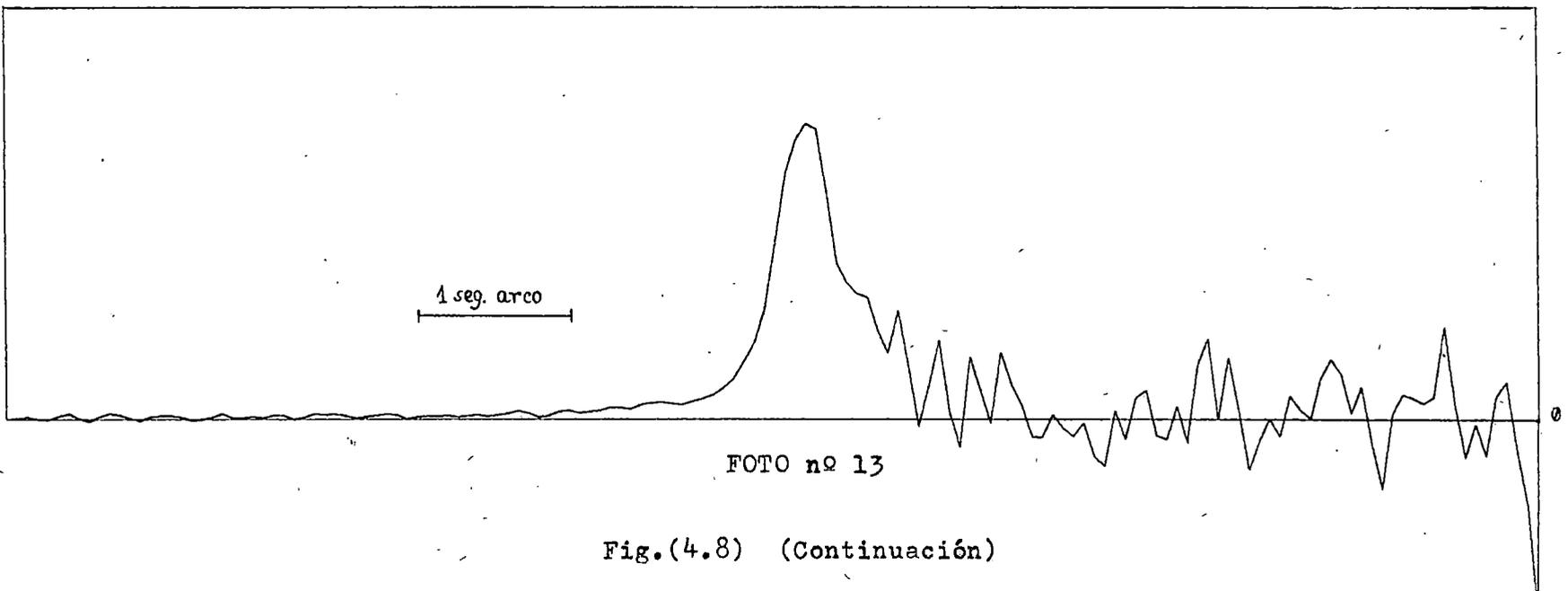
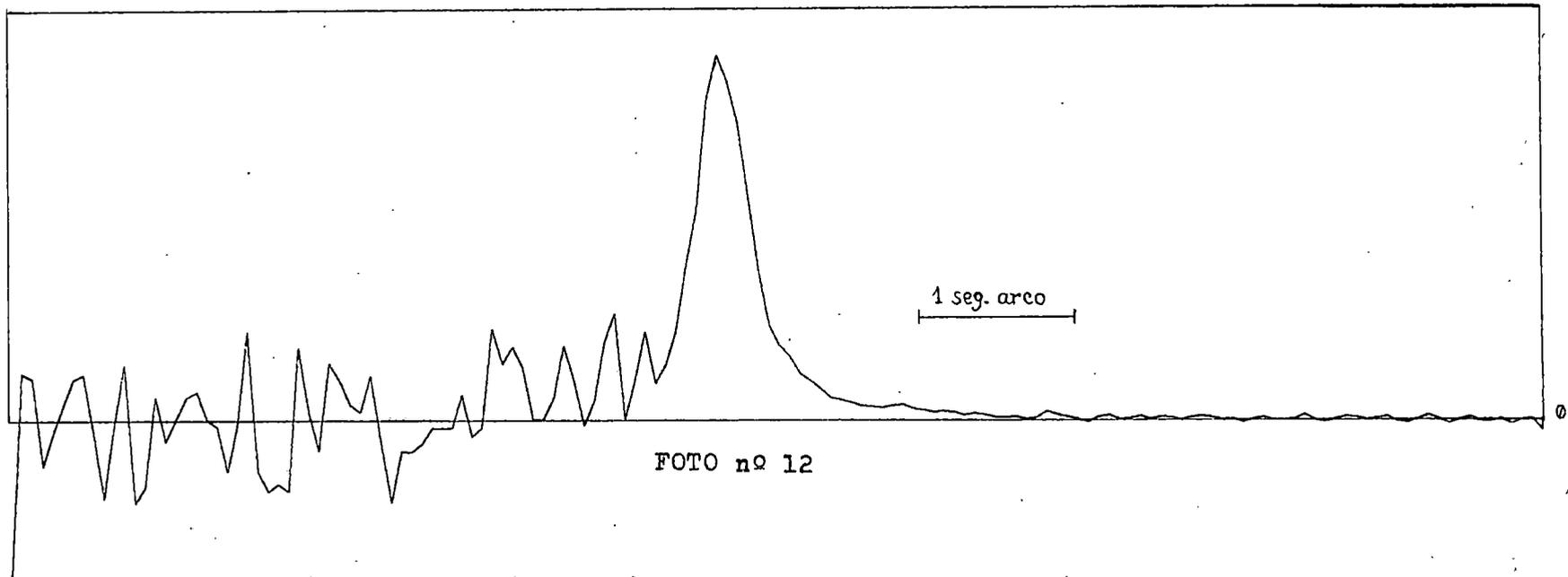


Fig.(4.8) (Continuación)

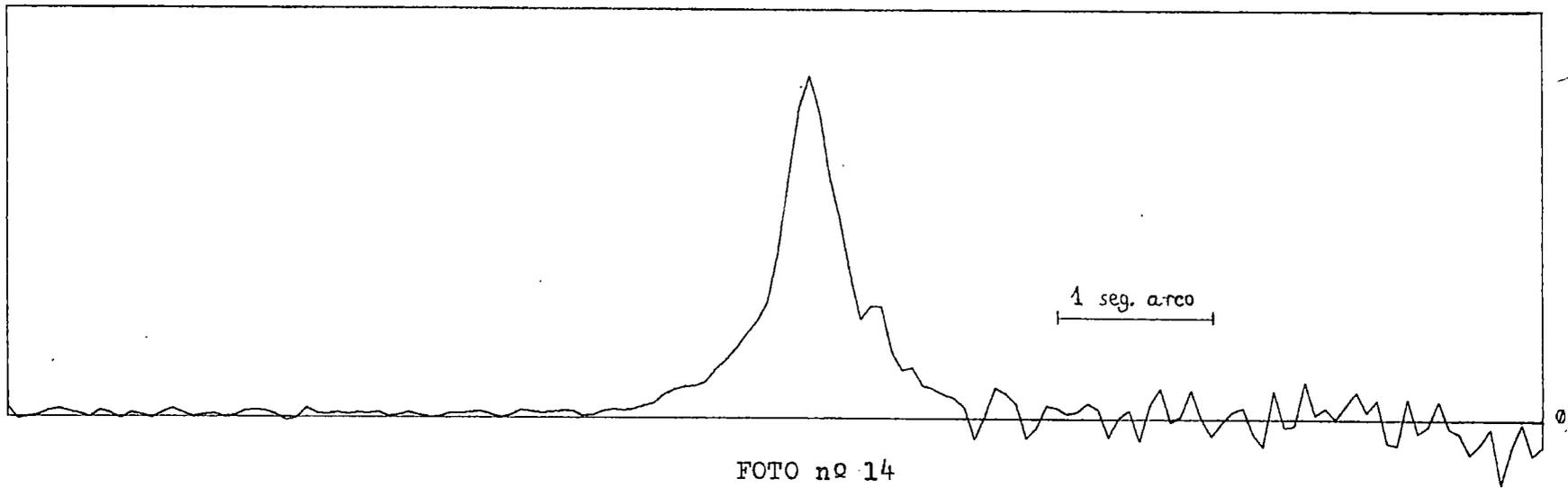


Fig.(4.8) (Continuación)

La transformada inversa de Fourier de este resultado nos proporciona φ^* ; además, de acuerdo con lo expuesto en el epígrafe IV.3. a partir de (4-13) se calcula $\phi(\xi, \eta)$ (MTF del sistema de transmisión + detección). Los resultados $\varphi^*(x)$ y $\phi(\xi, \eta)$ son depositados en los ficheros SP1n y MTFn respectivamente. Las Figs.(4.9.a,b,c,d, y e) muestran $\varphi^*(x)$ y una sección diametral de la función MTFn ($\phi(\xi, \eta)$) para cada uno de los ejemplos.

8º) Programa "PSIAVE" : Calcula, para una longitud de onda determinada, la función $\bar{\varphi}^*(x)$ promedio de las $\varphi^*(x)$ obtenidas para las distintas placas. Los valores correspondientes a la función media, depositados en SP1AVE, son introducidos de nuevo en PSIBI3 a través de la subrutina FIAVE y de esta forma hacemos una estimación de la MTF media (depositada en el fichero MTFAVE) - correspondiente a las placas en estudio dentro de una misma longitud de onda.

Las Figs.(4.10.a y b) representan respectivamente $\bar{\varphi}^*(x)$ y un corte ($\bar{\phi}(\xi, 0)$ para $\eta=0$) de la función MTF media.

IV.5.-DOS PROPIEDADES DE INTERES SOBRE LA FUNCION GAUSSIANA:

IV.5-A. Consideremos una gaussiana bidimensional que supondremos normalizada por condicionamientos de nuestro trabajo posterior

$$g(x,y) = \frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}}$$

por ser una función con simetría circular, podemos escribir también

$$g(r) = \frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (4-14)$$

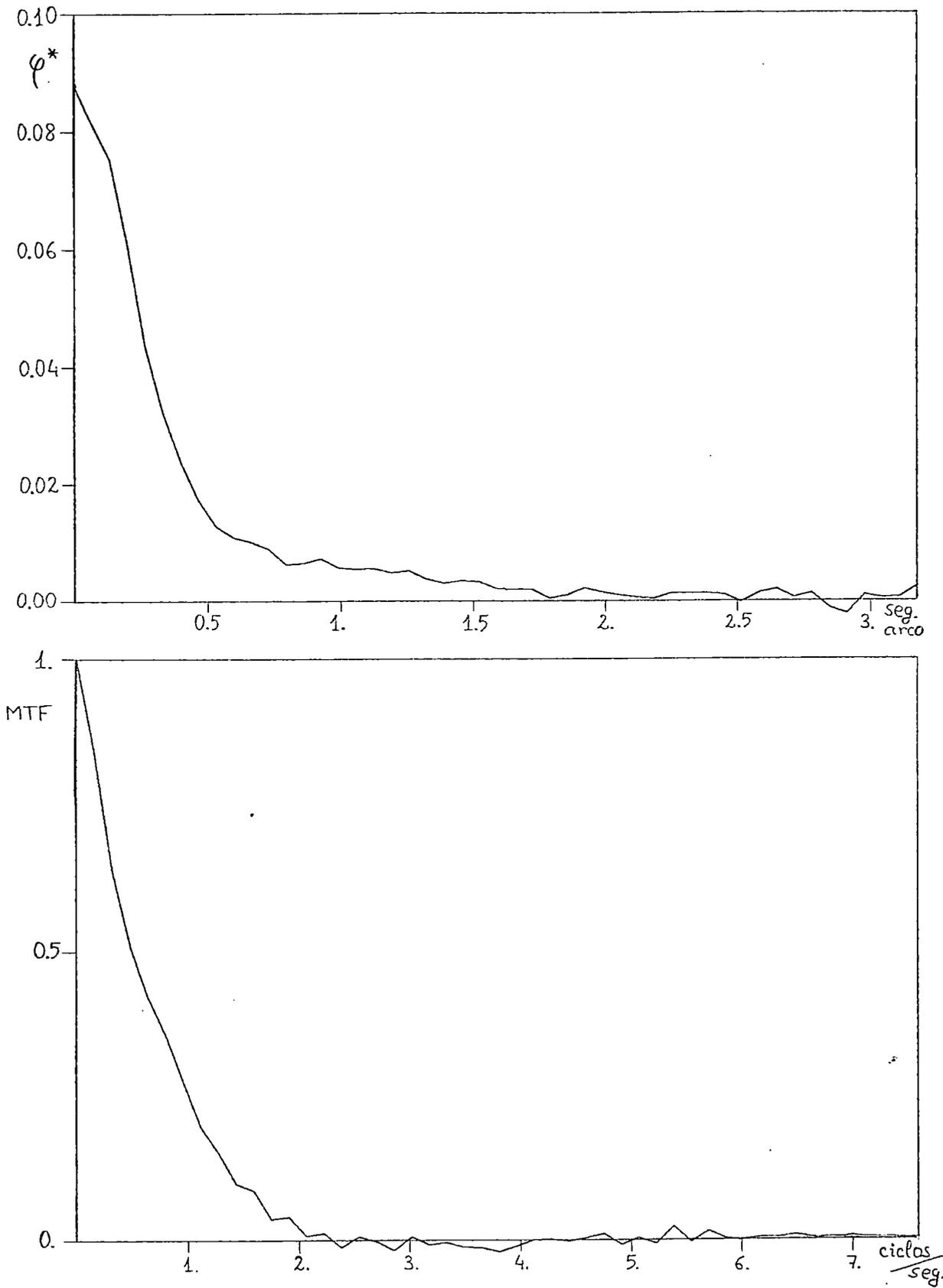


Fig.(4.9.a) (Foto nº 10)

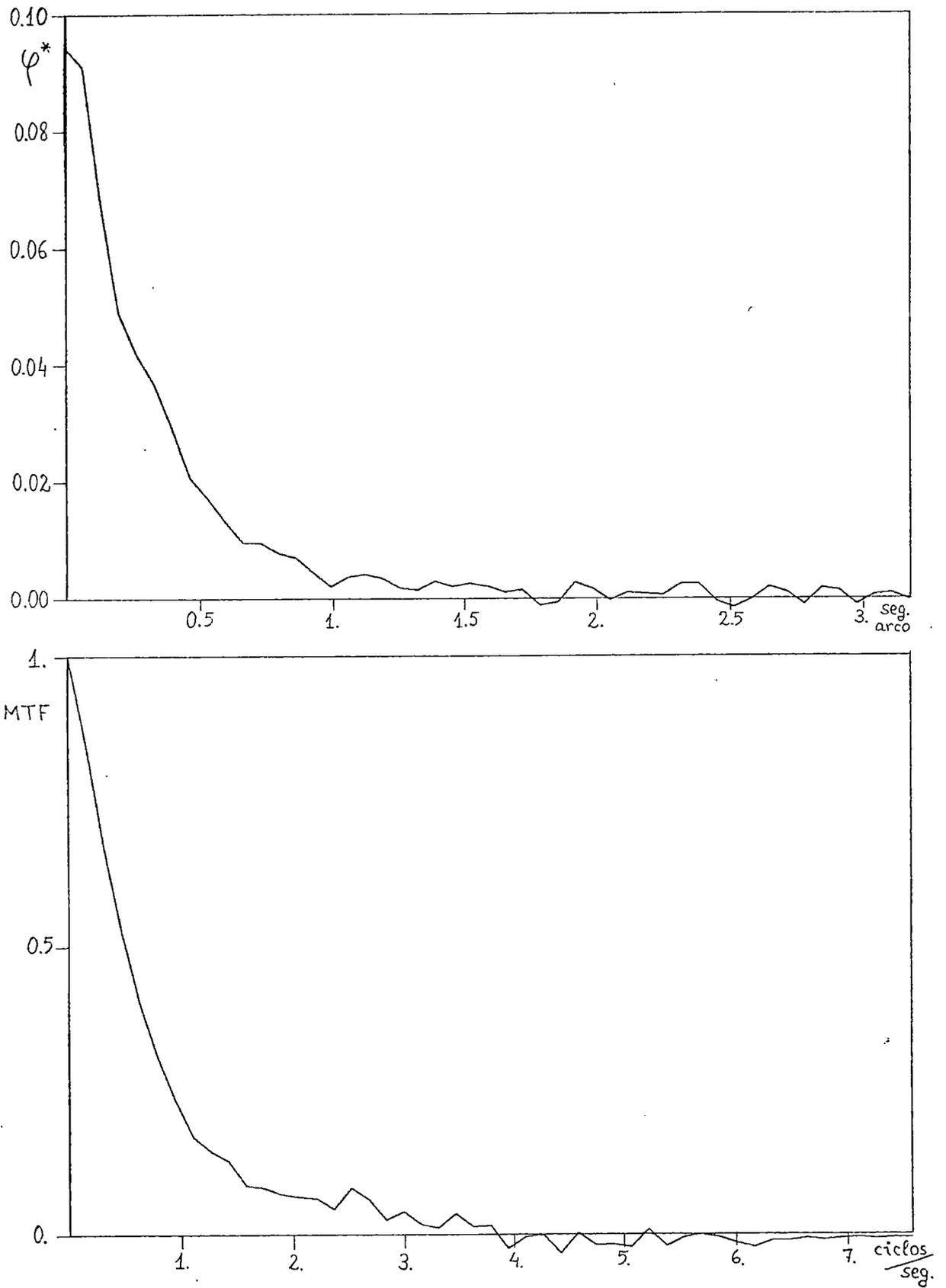


Fig.(4.9.b) (Foto nº 11)

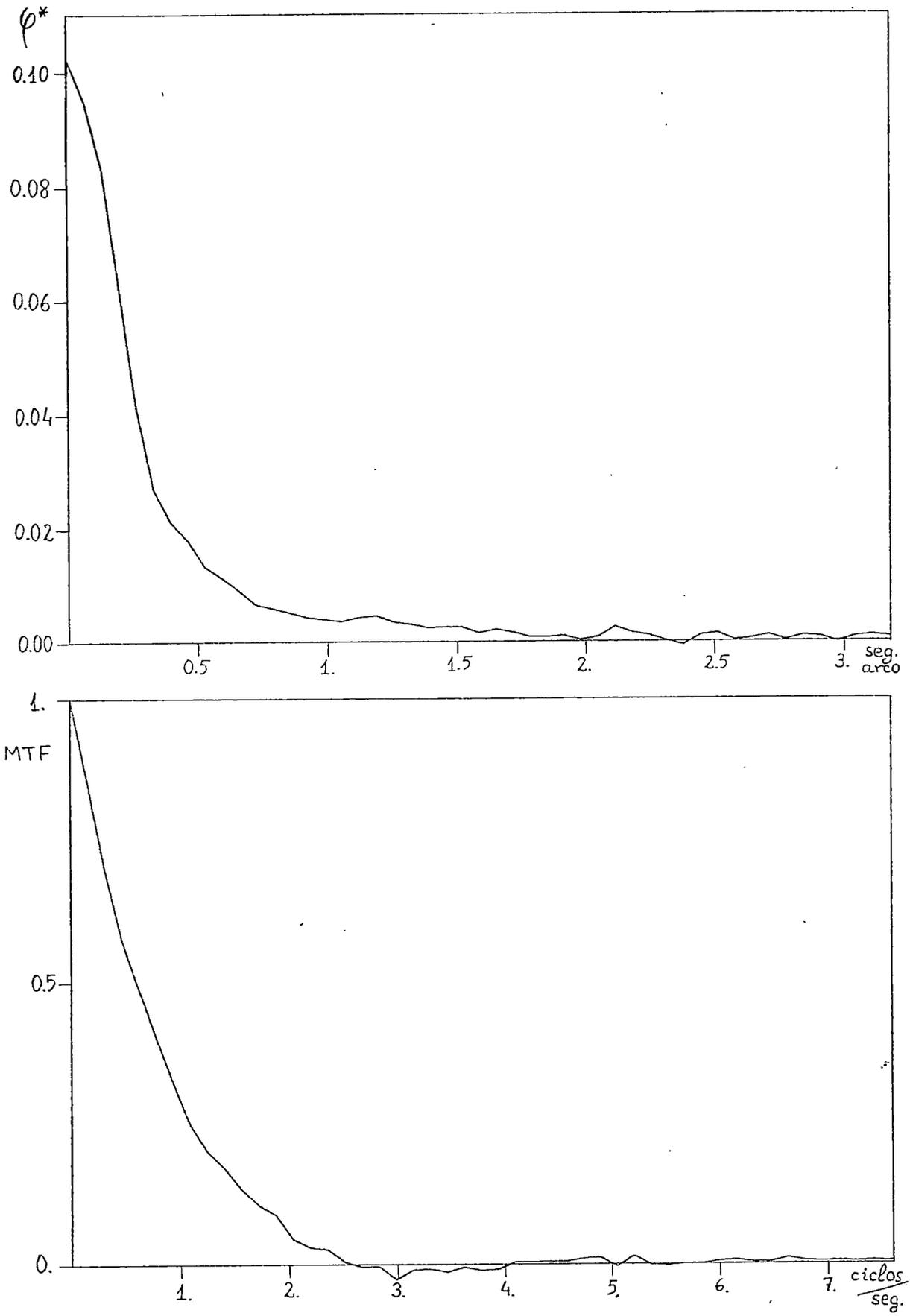


Fig.(4.9.c) (Foto nº 12)

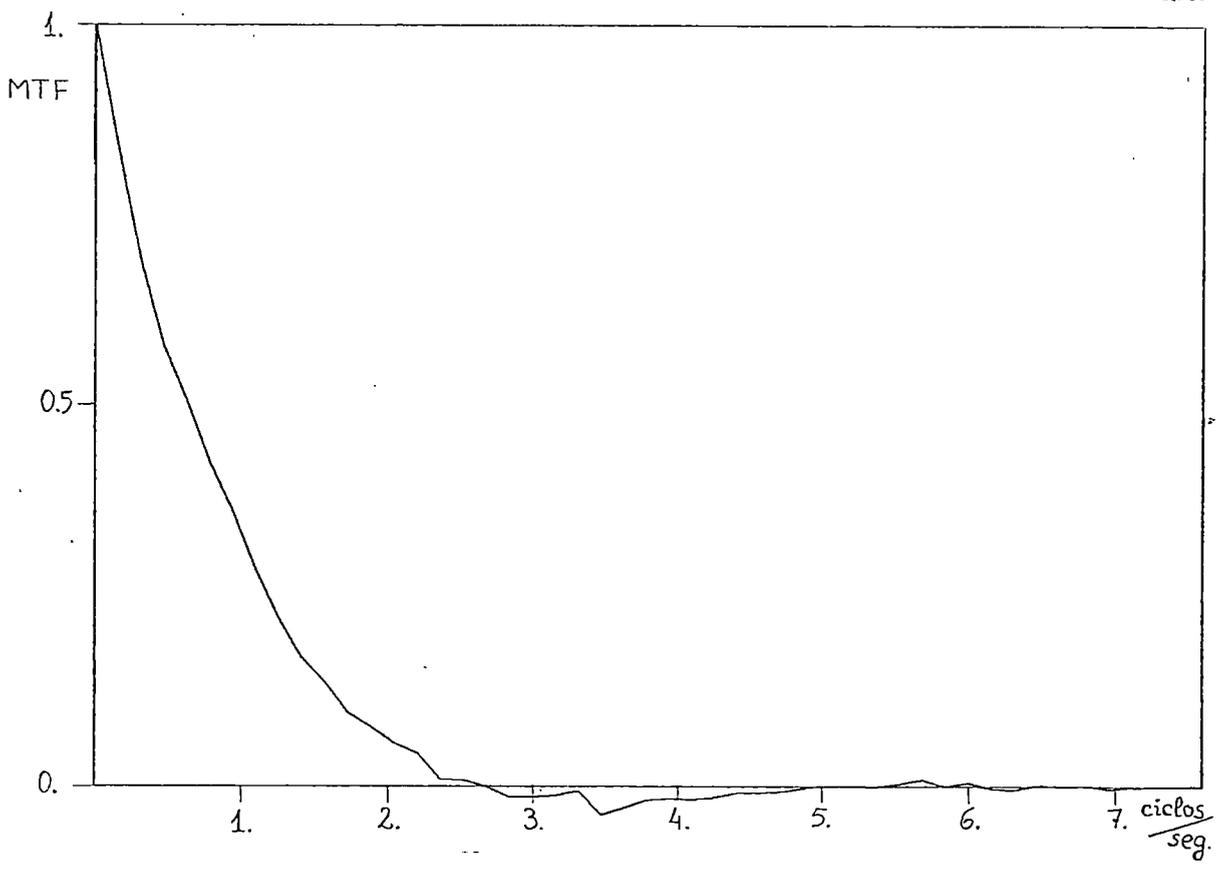
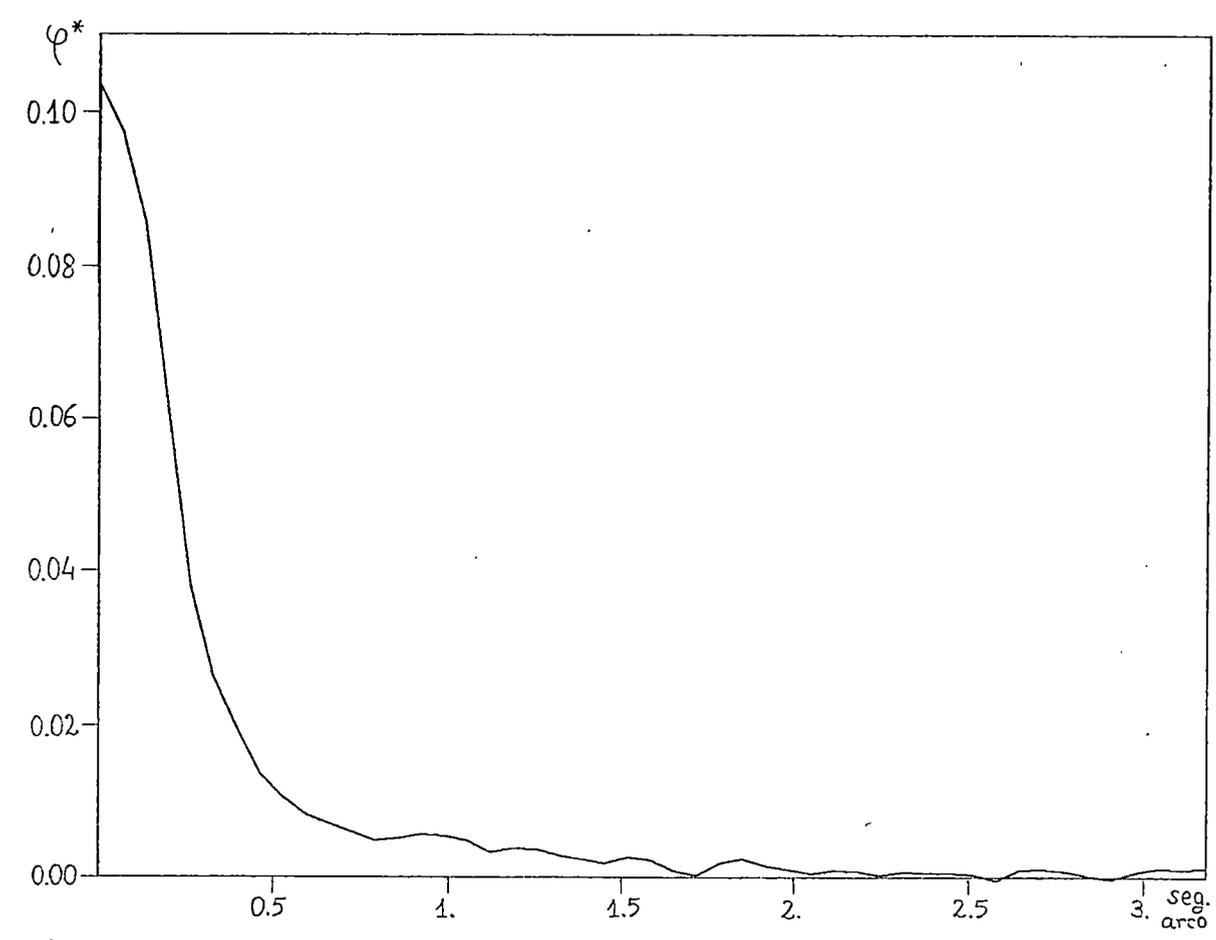


Fig.(4.9.d) (Foto nº 13)

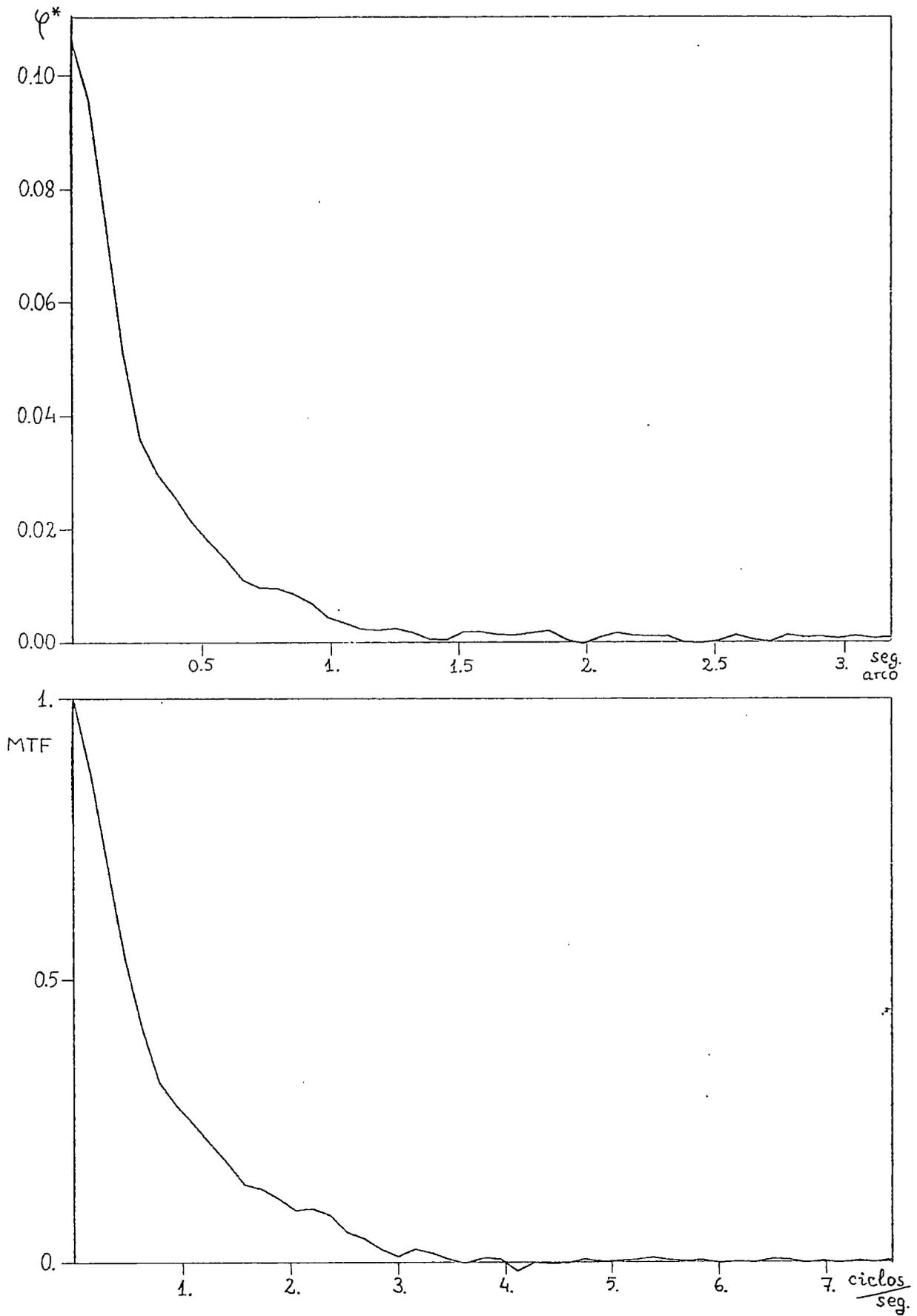


Fig.(4.9.e) (Foto nº 14)

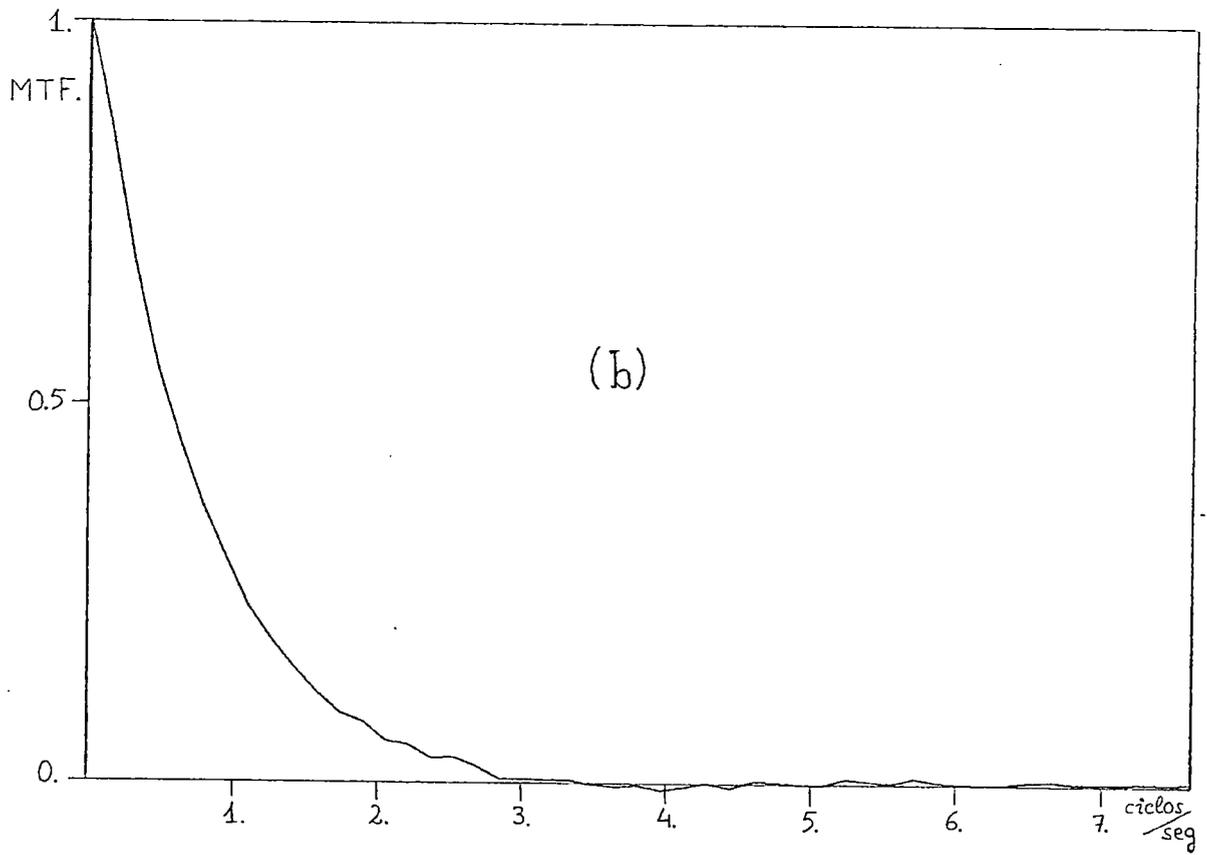
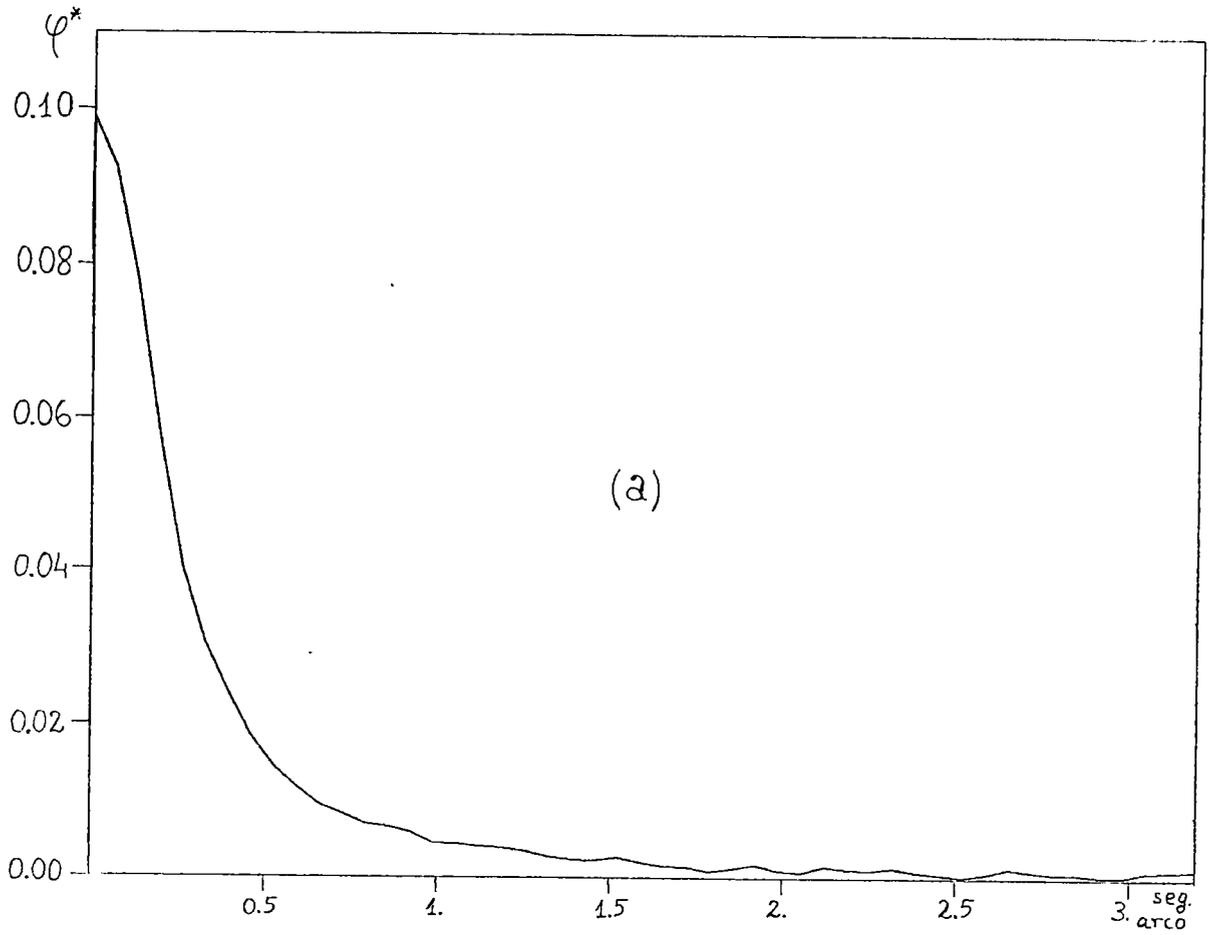


Fig.(4.10)

Consideremos ahora la función:

$$g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}} dy = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad (4-15)$$

La expresión (4-15) resulta ser una gaussiana unidimensional, también normalizada.

Sea x_M un valor tal que $g^*(x_M) = \frac{1}{2} g^*(0)$; y sea r_M un valor tal que $g(r_M) = \frac{1}{2} g(0)$. Los valores x_M y r_M los denotaremos con las siglas FWHM correspondientes a la expresión inglesa que los define (Full Width at Half Maximun).

A partir de (4-14) podemos escribir:

$$\frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{r_M^2}{a^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi a^2} \Rightarrow r_M = a\sqrt{\ln 2}$$

y a partir de (4-15) escribimos:

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_M^2}{a^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \Rightarrow x_M = a\sqrt{\ln 2} \quad (4-16)$$

de estas dos últimas expresiones concluimos que las FWHM de las funciones $g(r)$ y $g^*(x)$ tienen el mismo valor: $x_M = r_M$.

IV.5-B. Sean dos gaussianas unidimensionales y normalizadas $g^*(x)$ y $h^*(x)$

$$g^*(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$$

$$h^*(x) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} e^{-x^2/b^2}$$

Calculemos la convolución de estas dos gaussianas

$$f^*(x) = g^*(x) * h^*(x)$$

La transformada de Fourier de las funciones $g^*(x)$ y $h^*(x)$ calculada por métodos analíticos nos lleva a:

$$\mathcal{F}_p [g^*(x)] = G^*(u) = e^{-\pi^2 a^2 u^2}$$

$$\mathcal{F}_p [h^*(x)] = H^*(u) = e^{-\pi^2 b^2 u^2}$$

Según el teorema de convolución:

$$\mathcal{F}_p [f^*(x)] = F^*(u) = G^*(u) \cdot H^*(u) = e^{-\pi^2(a^2+b^2)u^2}$$

Finalmente la transformada inversa nos proporciona $f^*(x)$

$$f^*(x) = \mathcal{F}_p^{-1} [F^*(u)] = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2+b^2}} \quad (4-17)$$

es decir obtenemos otra función gaussiana unidimensional normalizada. Llamando x_M^g , x_M^h , y x_M^f a las FWHM de las funciones g^* , h^* y f^* respectivamente, llegamos, de acuerdo con (4-16) y (4-17) a la siguiente expresión interesante:

$$x_M^f{}^2 = x_M^g{}^2 + x_M^h{}^2 \quad (4-18)$$

es decir, el cuadrado de la FWHM de la gaussiana resultado de la convolución es igual a la suma de cuadrados de las FWHM de las gaussianas convolucionadas.

IV.6. - DISCUSION SOBRE LAS FUNCIONES DE DISPERSION OBTENIDAS:

La función de dispersión $\varphi(r)$ cuya transformada hemos obtenido en el epígrafe IV.4. representa la perturbación global producida fundamentalmente por el telescopio y la atmósfera. Separando ambos fenómenos de degradación y representándolos mediante sendas funciones de dispersión φ_{tel} y φ_{at} , la relación que existe entre éstas y la función de dispersión global viene dada por la siguiente convolución:

$$\varphi(r) = \varphi_{tel}(r) * \varphi_{at}(r)$$

Para darnos una idea de la influencia de la atmósfera en la degradación de nuestras placas, hagamos una estimación del valor de la FWHM de φ_{at} .

Primeramente tengamos presente que la resolución teórica de nuestro telescopio (dada por el criterio clásico de Lord Rayleigh: $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$) vale:

$$\theta_{\lambda 5550} = 0.35 \text{ " de arco} \quad (4-19)$$

y que esta definición convencional de poder resolutivo se aproxima bastante al valor de la FWHM de la función de dispersión instrumental φ_{tel} .

A continuación vamos a asumir como aproximación y con vistas a la presente discusión, que nuestras funciones de dispersión quedan bien representadas por gaussianas normalizadas de adecuados parámetros, lo cual es bastante correcto en los puntos próximos al origen de la función de dispersión ("core" de la función) (Dubner y Mattig, 1975), (Bonet y Ponz, 1977). Puesto que nuestra discusión se ciñe a valores de FWHM, los cuales se pueden considerar en el "core" de la función, esta aproximación gaussiana resulta útil ya que podemos aplicar los sencillos resultados del epígrafe IV.5. Por ejemplo: el valor

de la FWHM de $\varphi(r)$, lo mediremos sobre los gráficos de $\varphi^*(x)$ representados en la Fig.(4.9 y 10), en virtud de IV.5-A; y de acuerdo con lo expuesto en IV.5-B, el valor de FWHM correspondiente a φ_{at} lo obtenemos a partir de la expresión (4-18) teniendo también presente la información proporcionada en (4-19):

$$\left(\text{FWHM de } \varphi_{at}\right)^2 = \left(\text{FWHM de } \varphi\right)^2 - \left(\text{FWHM de } \varphi_{tel}\right)^2$$

La Tabla II reúne los resultados obtenidos:

TABLA II

| PLACA N° | λ (Å) | FWHM de φ | FWHM de φ_{tel} | FWHM de φ_{at} |
|----------|---------------|-------------------|-------------------------|------------------------|
| 10 | 5550 | 0.53" | 0.35" | 0.40" |
| 11 | 5550 | 0.44" | 0.35" | 0.27" |
| 12 | 5550 | 0.47" | 0.35" | 0.31" |
| 13 | 5550 | 0.45" | 0.35" | 0.28" |
| 14 | 5550 | 0.39" | 0.35" | 0.17" |
| Promedio | 5550 | 0.46" | 0.35" | 0.30" |

A la vista de la Tabla II concluimos que el deterioro producido por la atmósfera es en la mayoría de los casos, inferior al deterioro producido por el telescopio. Si además tenemos en cuenta la comparación de estos valores con los resultados de Levy (1971), la calidad de nuestras imágenes, en lo que a "seeing" se refiere, es evidente.

Nuestros resultados están en perfecta concordancia con los obtenidos por Deubner y Mattig (1975) utilizando otros rollos de película perteneciente a la misma serie que los que aquí estamos procesando (ver epígrafe I.1).

CAPITULO V

RESTAURACION DE LAS IMAGENES FOTOGRAFICAS

INTRODUCCION

En este capítulo completaremos la exposición, iniciada en el anterior, sobre el método de reducción de nuestros datos fotométricos. El problema resolver se puede esquematizar diciendo que tenemos que descontaminar nuestro registro, por una parte del ruido, y por otra, de los efectos de degradación producidos por la atmósfera y telescopio. La resolución de este problema global la denominaremos con el término "restauración de la señal".

El problema de restauración ha sido atacado frecuentemente en los últimos años por varios autores para la reducción de datos correspondientes a registros unidimensionales: espectros de líneas, señales fotométricas estelares, señales en procesos de telecomunicación, etc... . El fuerte desarrollo experimentado por las técnicas de Fourier en el último decenio ha favorecido la resolución de estos problemas.

Sin embargo, el problema de restauración se complica notablemente cuando tratamos con señales bidimensionales, razón por la cual la literatura al respecto es más bien escasa. La complicación surge fundamentalmente bajo un punto de vista - computacional.

Basándose en un método iterativo propuesto por Van Cittert's, Wittmann (1971) ha desarrollado un programa de computadora para la restauración de imágenes bidimensionales. Dicho programa es

el que utiliza Muller (1973) en su estudio de la penumbra de las manchas solares, que junto con el de Krat (1972) son los únicos estudios fotométricos detallados realizados antes que el del presente trabajo sobre el citado tema.

En el método que nosotros propñemos utilizaremos técnicas de Fourier, ampliando el alcance de estas técnicas, ya utilizadas en los casos unidimensionales, al caso bidimensional. La utilización de este método proporciona, frente al anteriormente citado, una mayor precisión en la estimación de la imagen restaurada, así como una mayor velocidad de cálculo.

V.1.-LA PRESENCIA DEL RUIDO COMPLICA EL PROBLEMA DE LA RESTAURACION:

En el capítulo IV hemos descrito los fenómenos de distorsión que la atmósfera y el instrumento producen sobre nuestra imagen. Dichos fenómenos vienen representados por la función de dispersión, y dicha función la podemos conocer para cada placa basándonos en el deterioro del borde lunar simultáneamente registrado; en este sentido podemos afirmar que la perturbación producida por la atmósfera y el instrumento, sobre cualquier estructura de una determinada placa, tiene carácter determinista. Según vimos, el proceso de restauración de la imagen consistía en resolver la ecuación integral (4-2).

$$i_o(x,y) = i_r(x,y) * \varphi(x,y) \quad (4-2)$$

dicha resolución se facilitaba con el auxilio de las técnicas de Fourier, que reducían el meollo del problema a la realización de un cociente (4-4) en el espacio transformado:

$$I_r(\xi,\eta) = \frac{I_o(\xi,\eta)}{\phi(\xi,\eta)} \quad (4-4)$$

El disponer de las subrutinas a las que hemos aludido -

en III.5. para el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier, de una matriz de datos empíricos, en un breve espacio de tiempo, hace muy viable el problema tal como lo tenemos enfocado.

Sin embargo por razones de orden en la exposición no hemos mencionado hasta ahora otra fuente de distorsión que resulta especialmente perniciosa en el proceso de restauración. Se trata de una perturbación que podemos calificar de aleatoria y recibe el nombre genérico de ruido. El origen de esta perturbación lo encontramos fundamentalmente en la distribución aleatoria del grano en la emulsión de las placas fotográficas y más secundariamente en las anomalías en la respuesta del fotomultiplicador durante el proceso de barrido con el microfotómetro. La presencia de ruido en la señal complica extraordinariamente la resolución del problema porque al realizar el cociente (4-4) en el espacio transformado procedemos a la restauración indiscriminada de la señal deteriorada por ϕ y del ruido que la acompaña, con lo cual el resultado es catastrófico. En efecto, con la contribución del ruido podemos expresar

$$i_o(x,y) = i_d(x,y) + n(x,y) \quad (5-1)$$

en donde $i_d(x,y)$ representa la señal perturbada por la función de dispersión (el subíndice d hace referencia a dispersión) y $n(x,y)$ la función aleatoria del ruido. Sustituyendo en (4-4) queda:

$$I_r'(\xi,\eta) = \frac{I_d(\xi,\eta) + N(\xi,\eta)}{\phi(\xi,\eta)} \approx I_v(\xi,\eta) + \frac{N(\xi,\eta)}{\phi(\xi,\eta)} \quad (5-2)$$

La expresión (5-2) pone de manifiesto cómo^a la transformada de la señal verdadera $I_v(\xi,\eta)$ se superpone una componente de ruido aumentada en el proceso de división, sobre todo en las altas frecuencias en donde $\phi(\xi,\eta)$ es muy próxima a cero.

V.2.-DEFINICION DE FILTRO OPTIMO DE RUIDO:

A la vista del resultado del epígrafe anterior trataremos previamente de construir un filtro que elimine el ruido alisando la señal observada, aunque hay que hacer notar que en el proceso de filtrado existe el riesgo de eliminar parte de la información correspondiente a i_d . La construcción del mencionado filtro va a consistir en buscar un procedimiento para separar la información auténtica de la aportación de ruido. En definitiva el filtro será una función $F(\xi, \eta)$ real que pesará las componentes espectrales de $I_o(\xi, \eta)$ según un criterio que establezcamos como óptimo:

$$I_F(\xi, \eta) = I_o(\xi, \eta) \cdot F(\xi, \eta) = [I_d(\xi, \eta) + N(\xi, \eta)] F(\xi, \eta) \quad (5-3)$$

El criterio de optimización lo definiremos en el dominio de medida y va a consistir en imponer que la desviación cuadrática media entre la señal observada no afectada de ruido ($i_d(x, y)$) y la señal filtrada ($i_F(x, y)$) sea mínima (Brault and White (1971))

$$\iint_{-\infty}^{\infty} [i_d(x, y) - i_F(x, y)]^2 dx dy = \text{un mínimo} \quad (5-4)$$

Aplicando el teorema de Rayleigh, (3-3), podemos escribir el criterio de optimización en el dominio transformado como:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |I_d(\xi, \eta) - I_F(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \text{un mínimo} \quad (5-5)$$

Utilizando (5-3) podemos escribir el error

$$\varepsilon(\xi, \eta) = I_d(\xi, \eta) - I_F(\xi, \eta) = I_d(\xi, \eta) - [I_d(\xi, \eta) + N(\xi, \eta)] F(\xi, \eta) =$$

$$= I_d(\xi, \eta) [1 - F(\xi, \eta)] - N(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \quad (5-6)$$

A partir de (5-6) calculamos el integrando de (5-5), es decir el cuadrado del módulo de ε

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| I_d(\xi, \eta) - I_F(\xi, \eta) \right|^2 = \\ &= \left\{ I_d(\xi, \eta) [1 - F(\xi, \eta)] - N(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \right\} \left\{ I_d(\xi, \eta) [1 - F(\xi, \eta)] - N(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \right\}^* = \\ &= \left| I_d(\xi, \eta) \right|^2 [1 - F(\xi, \eta)]^2 + \left| N(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \right|^2 - \\ &- \left[I_d(\xi, \eta) [1 - F] N^*(\xi, \eta) F(\xi, \eta) + I_d^*(\xi, \eta) [1 - F] N(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \right] \end{aligned} \tag{5-7}$$

Si suponemos que el ruido es aleatorio y no correlacionado con la señal, entonces los productos cruzados de señal y ruido que aparecen en el último término de (5-7) no contribuyen en absoluto a la suma $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 d\xi d\eta$ y podemos reescribir (5-5) de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| I_d(\xi, \eta) \right|^2 [1 - F(\xi, \eta)]^2 + \left| N(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \right|^2 \right\} d\xi d\eta = \text{un mínimo}$$

Mediante la resolución típica de un problema de cálculo de variaciones obtendremos la función $F(\xi, \eta)$ que minimiza esta expresión

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial F(\xi, \eta)} = 0 = -2 [1 - F(\xi, \eta)] \left| I_d(\xi, \eta) \right|^2 + 2 F(\xi, \eta) \left| N(\xi, \eta) \right|^2$$

de donde

$$F(\xi, \eta) = \frac{\left| I_d(\xi, \eta) \right|^2}{\left| I_d(\xi, \eta) \right|^2 + \left| N(\xi, \eta) \right|^2}$$

* Discusión de la expresión (5-8)

Así pues, el filtro óptimo para alisar la señal observada queda determinado conociendo únicamente la densidad espectral de la señal observada sin ruido y la densidad espectral de la función de ruido. Sin embargo la única información de que disponemos es del resultado de la suma $i_o(x,y) = i_d(x,y) + n(x,y)$; a partir de nuestros datos, por tanto, podremos calcular la densidad espectral $|I_o(\xi,\eta)|^2$ que, dada la suposición que hemos hecho de la no correlación entre $I_d(\xi,\eta)$ y $N(\xi,\eta)$, coincide con el denominador de (5-8).

La determinación del numerador de (5-8) nos obliga a buscar información sobre la densidad espectral del ruido en nuestra señal para poder así realizar la sustracción:

$$|I_d(\xi,\eta)|^2 = |I_o(\xi,\eta)|^2 - |N(\xi,\eta)|^2 \quad (5-9)$$

En el siguiente epígrafe vamos a aplicarnos en el estudio de nuestro ruido.

V.3.-FILTRADO DEL RUIDO FOTOGRAFICO:

V.3-1) En nuestro problema la principal fuente de ruido es el grano de la emulsión fotográfica. Si expresamos nuestros datos de medida en términos de "densidad fotográfica" (según la definición dada en (I.4)) observamos que la amplitud del ruido es mayor en las zonas de placa de alta densidad (ver Fig. (5-6)), es decir, el ruido es función de la densidad. Esto supone una complicación adicional a nuestro problema, y es que si el filtro (5-8) lo aplicamos a un área en donde haya fuertes gradientes de densidad (por ejemplo transiciones entre filamentos penumbrales brillantes y oscuros, transiciones Luna-Fotofera, etc...), destruiremos información en los niveles de densidad baja y no filtraremos suficientemente en los niveles de

alta densidad. Una solución a este problema es hacer filtra dos locales sobre pequeñas zonas de densidad aproximadamente constante, modificando la función $|N(\xi, \eta)|^2$ que aparece en (5-8) según el nivel de densidad de cada una de las zonas, pero resulta más fácil introducir una transformación en la señal de manera que la amplitud de ruido no dependa del nivel de densidad y la función $|N(\xi, \eta)|^2$ sea válida para toda el área considerada.

La Fig.(5-1) ilustra el método de trabajo que vamos a seguir en el filtrado de ruido, que está inspirado en el pro puesto por Lindgren(1975) para proceder al filtrado unidimensional del ruido en espectrogramas; sin embargo hemos introducido modificaciones notorias en el proceso (al construir el filtro óptimo de ruido) y lo hemos generalizado al caso de una señal bidimensional como es la nuestra. Además, yendo más allá del simple filtrado de ruido realizado por Lindgren(1975) hemos intentado la descontaminación de la señal, una vez aliada, de los efectos degradatorios de la atmósfera y del instrumento.

La transformación \mathcal{C} va a convertir una matriz de datos expresados en densidades en otra matriz imágen en la que el ruido será de amplitud aproximadamente constante; los valores de la matriz transformada los expresaremos, según nomenclatura de Lindgren, en términos de "quasidensidades". Sobre esta matriz aplicamos el filtro óptimo de ruido y a la matriz resultante le aplicamos la transformación inversa \mathcal{C}^{-1} regresando de esta forma al espacio de densidades.

Llegando a este punto, nuestro interés se centra en dos cuestiones: A) Determinar la forma de \mathcal{C} , B) Determinar la función $|N(\xi, \eta)|^2$ a partir de la cual obtendremos fácilmente el filtro óptimo de ruido utilizando (5-9).

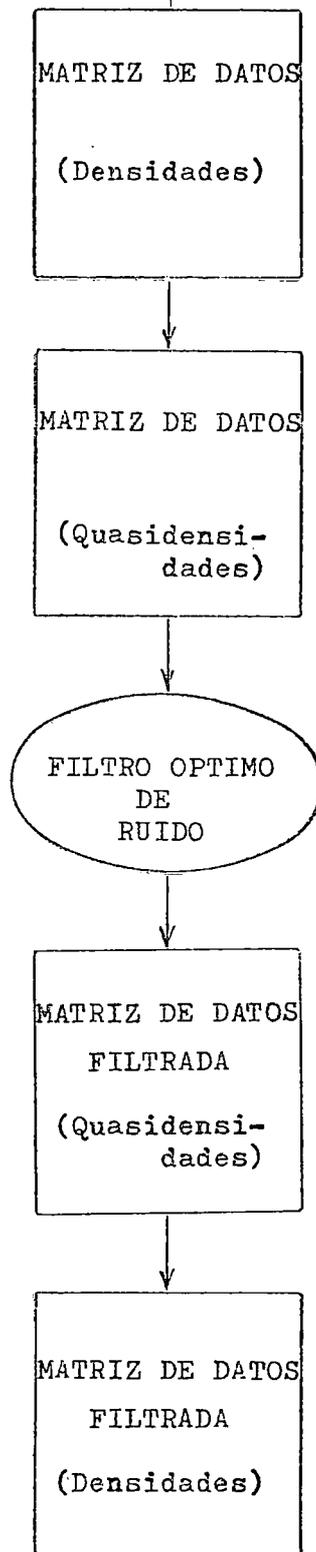


Fig.(5.4)

A) La Transformación \mathcal{C}

Analicemos en primer lugar la dependencia entre la amplitud de ruido y el nivel de densidad. Asumiendo que las fluctuaciones de ruido obedecen a una distribución normal, tomamos como parámetro estadísticamente significativo de su amplitud, la desviación típica $\sigma(\bar{D})$ de los picos de ruido, en una señal de densidad media constante, respecto de dicha media \bar{D} . Experimentalmente observamos la siguiente dependencia lineal (ver Fig.(5-3))

$$\sigma(\bar{D}) = C_1 + C_2 \bar{D} \quad (5-10)$$

Centramos ahora nuestra atención en \mathcal{C} . La transformación que pretendemos:

$$D' = \mathcal{C}(D) \quad (5-11)$$

ha de ser tal que ^{se}verifique:

$$\sigma(\bar{D}') = \text{cte.} \quad (5-12)$$

en donde D' representa valores en el espacio de quasis-densidades. La desviación típica al cuadrado viene expresada por:

$$\sigma^2(\bar{D}') = \frac{1}{n-1} \sum_i (D'_i - \bar{D}')^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i [\mathcal{C}(D_i) - \overline{\mathcal{C}(D)}]^2$$

Se puede considerar dentro de una buena aproximación - (ver ** en pág. siguiente) que

$$\overline{\mathcal{C}(D)} \approx \mathcal{C}(\bar{D})$$

y poner

$$\sigma^2(\bar{D}') \approx \frac{1}{n-1} \sum_i [\mathcal{C}(D_i) - \mathcal{C}(\bar{D})]^2 =$$

y de acuerdo con el Teorema del valor medio

$$= \frac{1}{n-1} \sum_i (D_i - \bar{D})^2 \mathcal{C}'(\xi)^2 \quad \text{en donde } \xi \in (D_i, \bar{D})$$

Bajo la suposición de que la función \mathcal{C} no presenta cambios bruscos de pendiente y considerando que las oscilaciones del ruido $D_i - \bar{D}$ son suficientemente pequeñas, podemos hacer la aproximación $\mathcal{C}'(\xi) \approx \mathcal{C}'(\bar{D})$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$\approx \frac{1}{n-1} \sum_i (D_i - \bar{D})^2 \mathcal{C}'(\bar{D})^2 = \mathcal{C}'(\bar{D})^2 \frac{\sum_i (D_i - \bar{D})^2}{n-1}$$

quedando finalmente al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros

$$\sigma(\bar{D}') \approx \mathcal{C}'(\bar{D}) \sigma(\bar{D})$$

Imponiendo la condición de que $\sigma(\bar{D}') = \phi = \text{cte.}$, obtenemos, teniendo en cuenta (5-10).

$$\mathcal{C}'(\bar{D}) \approx \frac{\phi}{\sigma(\bar{D})} = \frac{\phi}{C_1 + C_2 \bar{D}}$$

(**) Si desarrollamos $\mathcal{C}(D)$ en serie de potencias, en el punto \bar{D} ,

$$\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\bar{D}) + (D - \bar{D}) \mathcal{C}'(\bar{D}) + \frac{(D - \bar{D})^2}{2} \mathcal{C}''(\bar{D}) + \dots$$

A partir de aquí podemos expresar el valor medio como:

$$\overline{\mathcal{C}(D)} = \frac{1}{n} \sum_i \mathcal{C}(D_i) = \frac{1}{n} \left[\sum_i \mathcal{C}(\bar{D}) + \mathcal{C}'(\bar{D}) \sum_i (D_i - \bar{D}) + \frac{\mathcal{C}''(\bar{D})}{2} \sum_i (D_i - \bar{D})^2 + \dots \right]$$

Si suponemos que la aportación de los términos de segundo orden y mayores es despreciable, concluimos finalmente:

$$\overline{\mathcal{C}(D)} \approx \mathcal{C}(\bar{D})$$

e integrando respecto a la variable \bar{D}

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\bar{D}) &= \frac{\phi}{C_2} \ln(C_1 + C_2 \bar{D}) + A_2 = \\ &= A_1 \ln(C_1 + C_2 \bar{D}) + A_2 \end{aligned} \quad (5-13)$$

siendo: $A_1 = \frac{\phi}{C_2}$

$$(5-14)$$

En donde A_2 es una constante arbitraria de integración y A_1 viene definida en función del valor ϕ que podemos elegir a nuestra conveniencia. En definitiva, tanto A_1 como A_2 son arbitrarias y con cualquier valor de ellas obtendremos la transformación deseada que cumple con el requisito expresado en (5-12). La elección de A_1 y A_2 obedece al criterio de tratar de conseguir que el rango de variación de D' se parezca lo más posible al de D . Para realizar dicha elección procedemos por tanteo (ver Fig.(5-4)).

Bajo ciertas suposiciones teóricas y considerando la naturaleza aleatoria del ruido fotográfico se llega a que $\sigma(\bar{D})$ es proporcional a $\sqrt{\bar{D}}/A$ (siendo A la apertura de la rendija del microdensitómetro (Dainty Shaw, pag 98)), es decir, en lugar de la expresión (5-10) tendríamos:

$$\sigma^2(\bar{D}) = C'_1 + C'_2 \bar{D} \quad (5-15)$$

La expresión (5-15) nos llevaría a la siguiente formulación para \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(\bar{D}) = A'_1 \sqrt{C'_1 + C'_2 \bar{D}} + A_2 \quad (5-16)$$

Sin embargo las dificultades de cálculo que surgen con el

empleo de (5-16) nos hacen proseguir con (5-10) considerando la como una buena aproximación de (5-16)

B) Determinación de $|N(\xi, \eta)|$

Una vez que hemos conseguido que la densidad espectral del ruido $|N(\xi, \eta)|^2$ no dependa del nivel de densidad, queda por determinar dicha función densidad espectral. La determinación sería fácil si dispusiéramos de algún área fotográfica extensa uniformemente expuesta de manera que las fluctuaciones observadas en el fotometrado las pudiéramos atribuir exclusivamente al ruido. Las imágenes de los escalones de la cuña fotométrica son áreas uniformemente expuestas pero no suficientemente grandes, y en el mejor de los casos disponemos únicamente de cuatro barridos (de 100 pixels cada uno) realizados sobre cada escalón.

Para superar esta dificultad vamos a hacer una aproximación razonable y es la de considerar que el ruido en nuestras medidas es "blanco" y obedece a una distribución normal. En una buena parte de los casos, un modelo adecuado para el ruido es suponer que su densidad espectral es constante: $|N(\xi, \eta)|^2 = \text{cte}$. Este ruido llamado "blanco" es típico de las variaciones estadísticas del flujo de fotones, fuente dominante del ruido en las medidas fotoeléctricas, y se ajusta bastante bien, según hemos comprobado experimentalmente en barridos unidimensionales al ruido producido por el grano de la placa.

Reducimos así el problema a hacer una estima del valor de la constante que representará la densidad espectral de ruido en el espacio de quasidensidades que es donde vamos a proceder al filtrado. Según (5-14) la elección de A_1 condiciona el valor de la desviación típica ϕ de la distribución de amplitudes de ruido en el espacio de quasidensidades. Utilizando subrutinas FORTRAN que gentilmente nos ha facilitado su autor J.D.Ponz, hemos generado una matriz en dos dimensiones de números aleatorios que responden a una distribución normal con desviación típica ϕ y que

simulan de forma adecuada una señal de ruido blanco (J.D.Ponz (1977)). El cálculo de la densidad espectral de ésta matriz. nos proporciona una función bidimensional cuyos valores oscilan en torno a un nivel medio constante cuya estimación pretendíamos. Conocida dicha constante, que representa en nuestra aproximación la función $|N(\xi, \eta)|^2$, sustituimos en (5-9) para determinar el numerador de la expresión del filtro óptimo.

V.3-2) Descripción del proceso operatorio

El conjunto de programas FORTRAN de que constan los pasos requeridos en el proceso de filtrado de ruido constituyen lo que llamaremos "MODULO RUIDO", cuyo organigrama está representado en la Fig.(5-2). Este organigrama consta de tres submódulos que responden a los tres pasos fundamentales en el desarrollo secuencial del proceso completo.

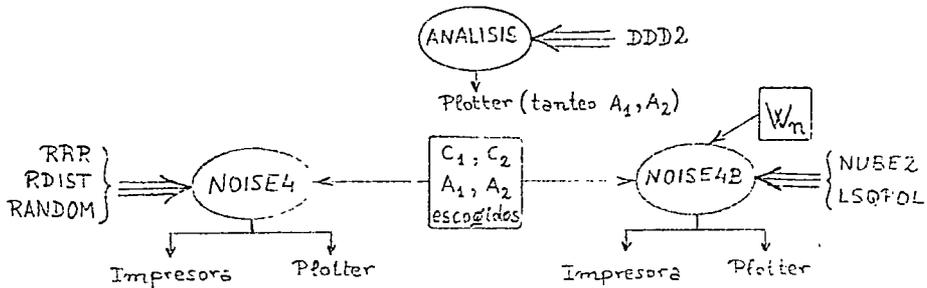
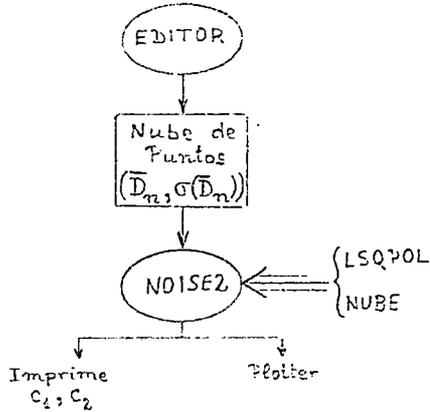
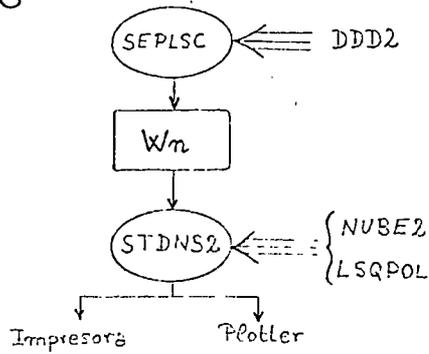
Submódulo (A) : Determinación de \mathcal{C}

A-1) Programa "SEPLSC"

Para analizar la dependencia entre $\sigma(\bar{D})$ y \bar{D} necesitamos tener muestras uniformemente expuestas y suficientemente extensas que nos permitan obtener valores estadísticamente representativos de los citados parámetros. Las imágenes de los escalones de la cuña densitométrica pueden ser muestras, en diferentes niveles de densidad, adecuadas para nuestro propósito. Puesto que hemos fotometrado imágenes de cuña densitométrica tomadas con tiempos de exposición ligeramente diferentes, disponemos de una gran cantidad de niveles de densidad para ser estudiados.

El programa SEPLSC extrae, de la cinta en donde están almacenadas todas las medidas fotométricas, los barridos realizados sobre las imágenes de la cuña; transforma estos registros de ASCII a BINARIO y finalmente los deposita por separado en ficheros W_n (en donde n es el número de identificación de un determinado escalón o nivel de densidad).

(A) Determinación de ζ



(B) Determinación de $|N(\xi, \eta)|$

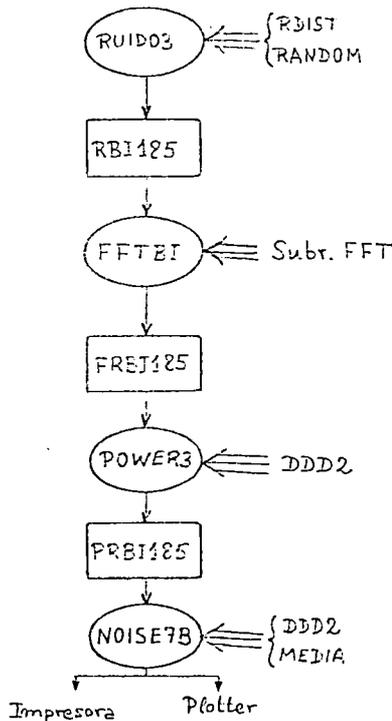
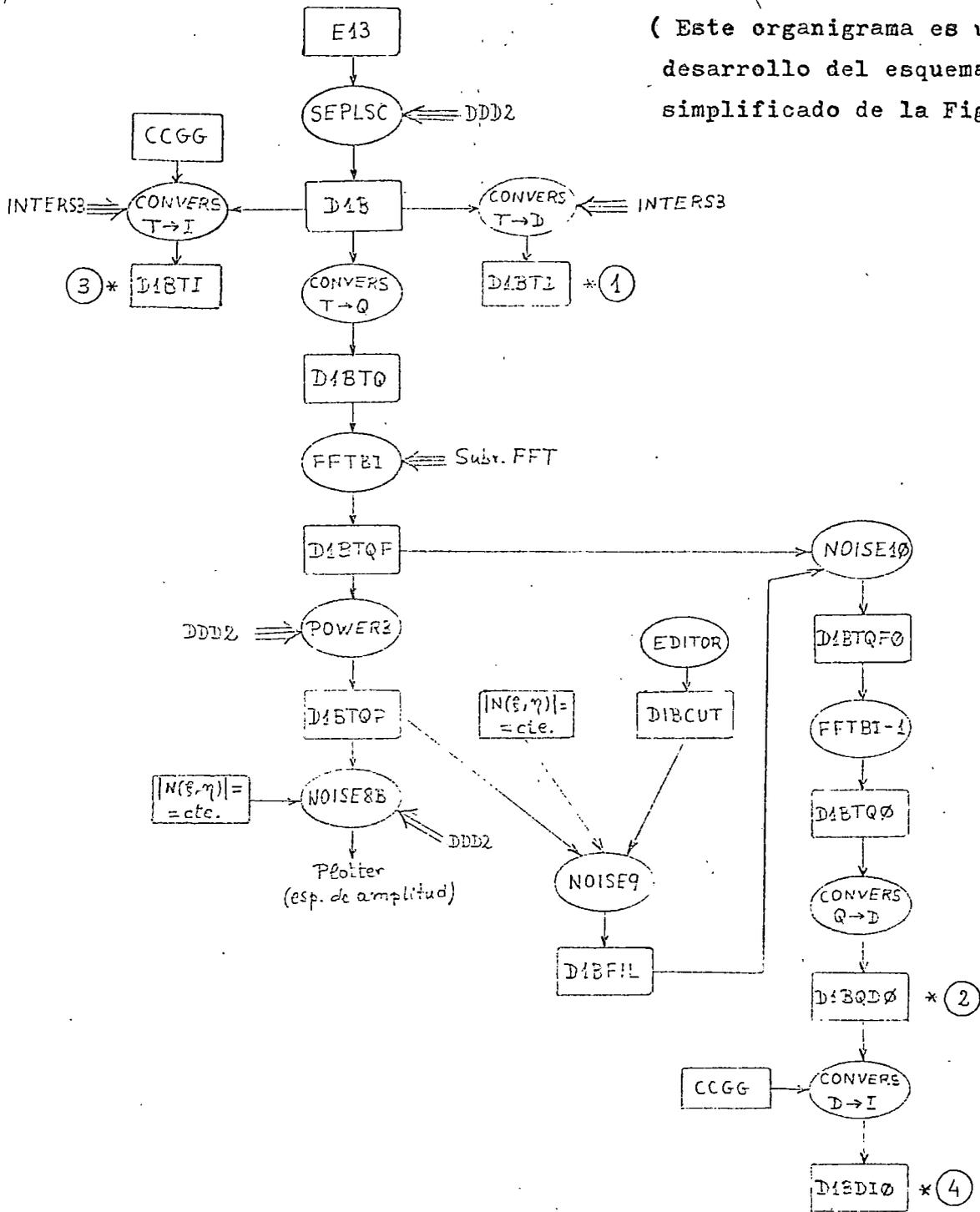


Fig.(5.2). ORGANIGRAMA DEL "MODULO RUIDO" (A) y (B)

(C) PROCESO DE FILTRADO



ORGANIGRAMA DEL "MODULO RUIDO" (C)

Fig.(5.2) (Continuacion)

A-2) El programa "STDNS2"

Este programa extrae el barrido de ruido que en términos de transmitancia está contenido en el fichero Wn; convierte los valores de transmitancias T_i en densidades D_i , calcula el valor medio \bar{D} y la desviación típica $\sigma(\bar{D})$.

La cuña densitométrica que se utilizó en el proceso de observación del eclipse constaba de una serie de pequeños filtros grises pegados con un adhesivo óptico a un soporte de cristal. Por efecto de cambios de temperatura y efectos de humedad la lámina de adhesivo había perdido homogeneidad y se aglutinó en determinadas zonas en detrimento de otras. Como consecuencia de esto la transparencia a lo largo de un escalón era variable y al hacer el registro fotométrico de la imagen de dicho escalón se observa una estructura de baja frecuencia superpuesta a la del ruido. Para descontaminar la señal de este efecto y evitar falsas determinaciones de $\sigma(\bar{D})$, a cada barrido le hemos ajustado por mínimos cuadrados un polinomio de grado optativo según la forma de las ondulaciones peculiares en dicho barrido (que se aprecian en un gráfico realizado por el plotter), y respecto de este polinomio hemos estimado las desviaciones de los picos de ruido. Los valores calculados para \bar{D} y $\sigma(\bar{D})$ salen por impresora.

A-3) EDITOR

Utilizando el Editor generamos un fichero con las parejas de valores (\bar{D} , $\sigma(\bar{D})$) que se han obtenido aplicando reiteradamente el programa anterior a diferentes barridos de ruido (lo hemos hecho para un total de 200 barridos).

A-4) Programa "NOISE2"

Hace una representación gráfica de \bar{D} frente a $\sigma(\bar{D})$ para la nube de puntos contenida en el fichero anterior. A continuación ajusta por mínimos cuadrados a dicha nube de puntos una recta (ver expresión (5-10)): $\sigma(\bar{D}) = C_1 + C_2 \bar{D}$, que viene re-

presentada en la Fig.(5-3).

Los valores obtenidos son: $C_1=0.01041$ y $C_2=0.01687$

La calidad del ajuste viene caracterizada por los siguientes parámetros:

Coeficiente de correlación = 0.944

Error típico de la estima = 0.003130

A-5) Programa "ANALISIS"

Este programa representa la función de transformación (5-13): $\bar{D}' = \mathcal{C}(\bar{D}) = A_1 \ln(C_1 + C_2 \bar{D}) + A_2$, para distintos valores de A_1 y A_2 (ver Fig.(5.4.a)). El criterio que rige este tanteo es el de conseguir que el rango de variación de nuestros datos expresados en quasidensidades coincida aproximadamente con el rango de variación de nuestros datos en densidades (dicho rango está comprendido entre 0 y 1.5). Los valores seleccionados son: $A_1 = 1.1$; $A_2 = 5.1$ (ver Fig.(5.4.b). De acuerdo con la expresión (5-14) la desviación típica constante de la señal expresada en quasidensidades será:

$$\phi = A_1 C_2 = 0.0185 \quad (5-17)$$

A-6) Programas "NOISE4" y "NOISE4B"

El programa NOISE4 genera barridos simulados de ruido blanco con distribución normal para distintos valores de \bar{D} y cuya $\sigma(\bar{D})$ viene calculada mediante la expresión (5-10) para los coeficientes recién calculados. La Fig.(5.5) nos muestra como trabaja la transformación $\bar{D}' = \mathcal{C}(\bar{D})$, generando barridos de quasiruido cuya $\sigma(\bar{D}')$ adopta valores próximos al previsto en (5-17). El valor de los resultados gráficos de NOISE4 es simplemente ilustrativo.

La verdadera comprobación de que la transformación (5-13) trabaja adecuadamente y de que los valores asignados a C_1, C_2 ,

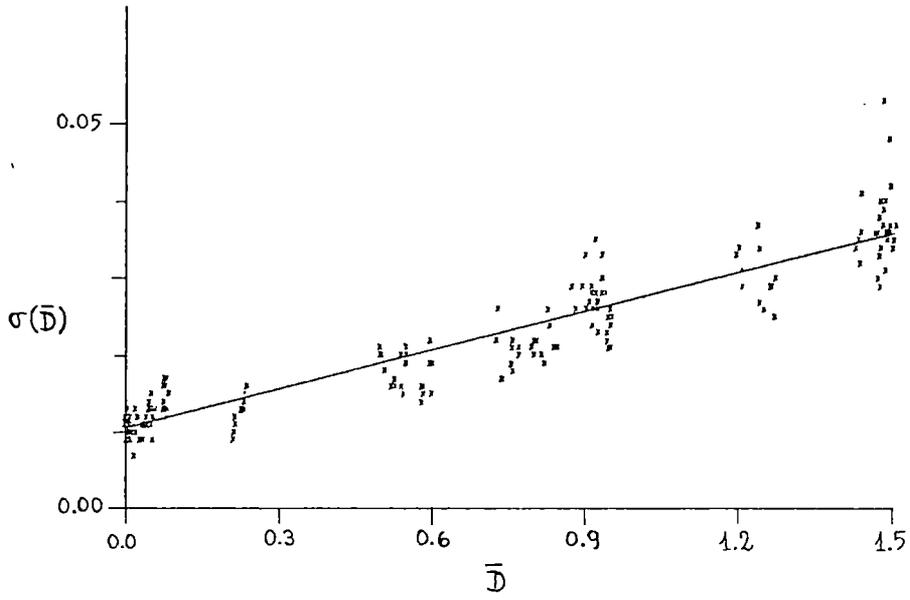


Fig.(5.3)

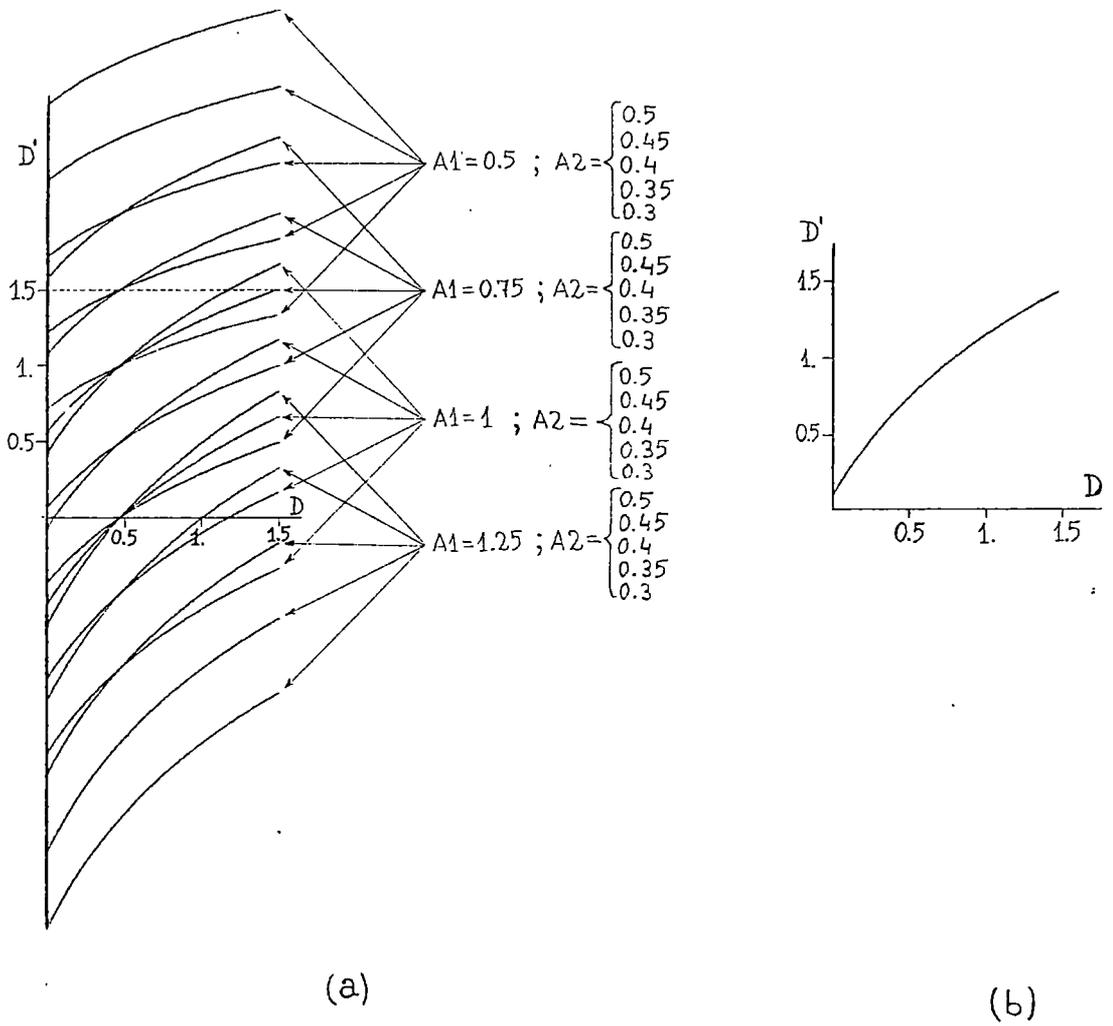


Fig.(5.4)

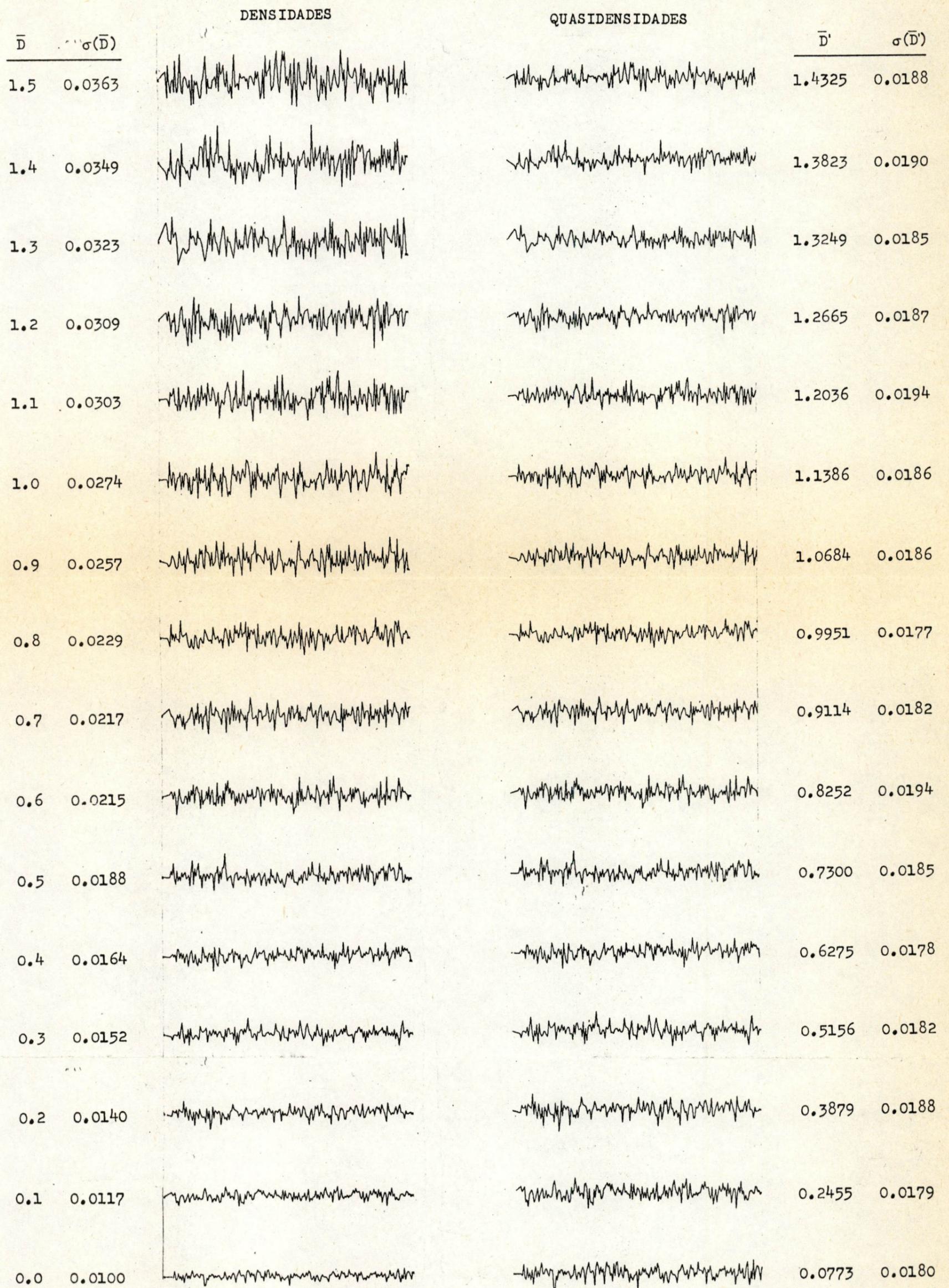


Fig.(5.5)

| DENSIDADES | | | QUASIDENSIDADES | | |
|------------|-------------------|--|-----------------|------------|--------------------|
| \bar{D} | $\sigma(\bar{D})$ | | | \bar{D}' | $\sigma(\bar{D}')$ |
| 1.501 | 0.034 | | | 1.435 | 0.018 |
| 1.488 | 0.036 | | | 1.428 | 0.019 |
| 1.262 | 0.029 | | | 1.303 | 0.017 |
| 1.197 | 0.033 | | | 1.265 | 0.020 |
| 0.953 | 0.026 | | | 1.106 | 0.018 |
| 0.933 | 0.023 | | | 1.091 | 0.017 |
| 0.841 | 0.021 | | | 1.025 | 0.016 |
| 0.798 | 0.019 | | | 0.992 | 0.016 |
| 0.758 | 0.021 | | | 0.960 | 0.017 |
| 0.771 | 0.020 | | | 0.970 | 0.016 |
| 0.552 | 0.016 | | | 0.781 | 0.015 |
| 0.501 | 0.015 | | | 0.732 | 0.018 |
| 0.239 | 0.016 | | | 0.438 | 0.020 |
| 0.081 | 0.011 | | | 0.214 | 0.018 |
| 0.050 | 0.011 | | | 0.164 | 0.017 |
| 0.046 | 0.012 | | | 0.157 | 0.020 |
| 0.029 | 0.009 | | | 0.128 | 0.016 |
| 0.023 | 0.012 | | | 0.118 | 0.021 |
| 0.004 | 0.009 | | | 0.084 | 0.017 |

Fig. (5.6)

, A_1 y A_2 son buenos, nos la brinda el programa NOISE4B. Este programa toma barridos naturales de ruido de los ficheros W_n , los convierte de transmitancias a densidades, calcula su \bar{D} y $\sigma(\bar{D})$, a continuación los somete a la transformación $\mathcal{Z}(D)$ para expresarlos en quasidensidades y finalmente calcula \bar{D}' y $\sigma(\bar{D}')$. Los resultados \bar{D} , $\sigma(\bar{D})$, \bar{D}' y $\sigma(\bar{D}')$ salen por impresora y los barridos son dibujados mediante plotter en los espacios de densidades y quasidensidades respectivamente. La Fig.(5.6) recoge los resultados de este programa.

De la observación de la columna $\sigma(\bar{D}')$ se desprende que en la mayoría de los barridos la desviación típica adopta valores cercanos al esperado 0.0185. Las discrepancias respecto de este valor en algunos de los barridos las achacamos a la influencia, en el cálculo de σ , de estructuras de baja frecuencia debidas a la inhomogeneidad en transparencia de los escalones de la cuña tal como anteriormente hemos descrito.

Submódulo (B) : Determinación de $|N(\xi, \eta)|$

B-1) Programa "RUIDO3"

Genera una matriz de números aleatorios simulando una señal de ruido blanco con distribución normal de media cero y $\sigma = 0.0185$, en el espacio de quasidensidades. Las dimensiones de ésta matriz son 96×96 , las mismas que las de cualquier matriz de datos que sometamos a procesos de filtrado de ruido o de restauración. El hacer coincidir las dimensiones de unas y otras matrices, viene impuesto por el hecho de que el nivel que obtengamos para la densidad espectral de la matriz de ruido es función de las dimensiones de la misma. La elección de dichas dimensiones está condicionada a la capacidad del ordenador y a la simplicidad de la descomposición factorial del número $96 (2^5 \times 3)$, lo cual disminuye considerablemente el tiempo de cálculo de la transformada discreta de Fourier (aproximadamente dos minutos).

La matriz que resulta es depositada en el fichero RBI185

B-2) Programa "FFTBI"

Este programa es un principal cuya misión es llamar a las subrutinas del algoritmo FFT para calcular la transformada directa o inversa. Lee la matriz depositada en RBI185, calcula su transformada y la deposita en el fichero FRBI185.

B-3) Programa "POWER3"

Este programa calcula la densidad espectral de la matriz depositada en FRBI185. El resultado, depositado en PRBI185, es una matriz cuyos valores fluctúan en torno a un nivel constante.

B-4) Programa "NIOSE7B"

Este programa lee la matriz densidad espectral en PRBI185. Obtiene la matriz de amplitudes, cuyos elementos son la raíz cuadrada de los de la anterior. Determina la fila promedio de esta última matriz (ver Fig.(5.7)) y a su vez estima la media de dicha fila promedio desechando los valores fuertemente desviados. El valor que obtenemos representa en nuestra aproximación a la función $|N(\xi, \eta)|$. El resultado numérico obtenido es:

$$|N(\xi, \eta)| = 1.5579$$

Con la determinación de $|N(\xi, \eta)|$ dejamos el terreno preparado para calcular el filtro óptimo de ruido para cualquier matriz de señal que se nos pueda presentar.

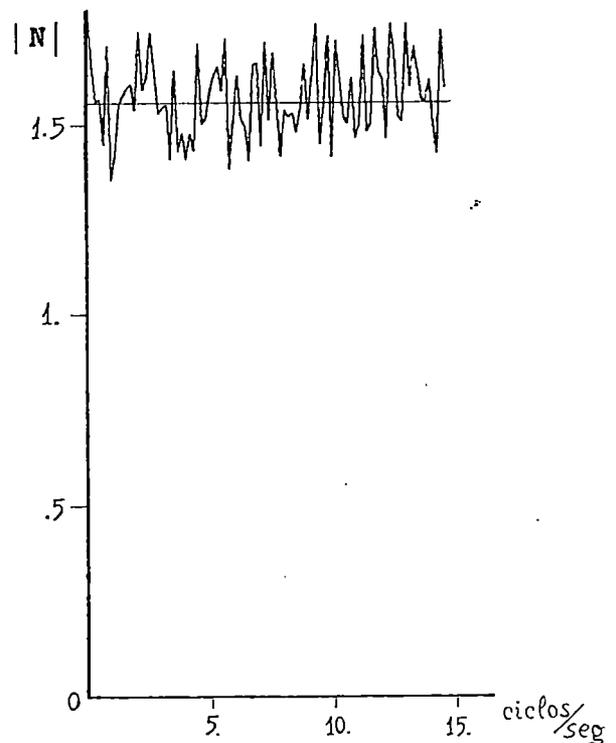


Fig.(5.7)

Submódulo © : Proceso de filtrado del ruido

C-1) Programa "SEPLSC"

Extrae del fichero En, en donde tenemos almacenadas las medidas fotométricas en transmitancias relativas a la placa - número n, la caja de matriz^{de} 96x96 pixels que estamos interesados en filtrar. Además hace la conversión de los datos de -- ASCII a BINARIO y finalmente deposita la matriz en el fichero D1A.

Nota: Se asignó un número a las placas por orden de fotometrado. Las que vamos a procesar son la 10,11,12,13 y 14. Para reducir el número de carecteres en la notación de los ficheros establecemos la siguiente correspondencia 10→A, 11→B, 12→C,.... Además dentro de cada placa se han fotometrado varias áreas que las numeramos 1,2,3... por orden de ejecución. Por limitación de la capacidad de la máquina tenemos que procesar estas áreas por partes o cajas de matriz que las denotaremos por A,B,C,.... (ver Fig.(6.1).

Así por ejemplo el fichero D1B pertenece a la placa nº 13, -- área nº 1, caja de matriz B.

C-2) Programa "CONVERS"

Este programa es de gran versatilidad; tiene cinco opciones diferentes de conversión:

- 1) Transmitancia → Densidad
- 2) Transmitancia → Quasidensidad
- 3) Transmitancia → Intensidad
- 4) Quasidensidad → Densidad
- 5) Densidad → Intensidad

En este paso le hacemos trabajar con las tres primeras - opciones produciendo los ficheros D1BTQ, D1BTI, y D1BTD. Obsérvese que las dos letras finales hacen referencia al tipo de - transformación realizada (por ejemplo TQ corresponderá a Transm^{itancia}→ Quasidensidad) sobre la matriz D1A.

C-3) Programas "FFTBI" y "POWER3"

El primero calcula la transformada de Fourier de la matriz de datos en quasidensidades $D'(x,y)$, depositada en D1BTQ. El resultado es depositado en D1BTQF.

El programa POWER3 calcula la densidad espectral de la matriz $D'(x,y)$ a partir de su transformada. El resultado lo deposita en D1BTQP.

C-4) Programa "NOISE8B"

A partir de la densidad espectral calcula el espectro de amplitudes de la matriz $D'(x,y)$ y dibuja mediante el plotter - fila por fila la matriz que resulta. En el mismo dibujo aparece superpuesta la amplitud de ruido $|N(\xi,\eta)|$ determinada en el anterior submódulo. Los puntos de intersección de ambos gráficos en cada fila nos proporcionan las frecuencias de corte a partir de las cuales lo que queda de señal es considerado exclusivamente como ruido (ver Fig.(5-8)). Con el conjunto de dichas - frecuencias de corte editamos el fichero D1BCUT.

C-5) Programa "NOISE9"

A partir de la densidad espectral de la matriz de datos $D'(x,y)$, de la función $|N(\xi,\eta)| = \text{cte.}$ y del conjunto de frecuencias de corte, este programa construye el filtro óptimo de ruido para la matriz que estamos considerando, utilizando las expresiones (5-8) y (5-9). El filtro es depositado en el fichero D1BFIL.

C-6) Programa "NOISE10"

Ejecuta en el dominio transformado de Fourier el proceso de filtrado expresado en (5-3). El resultado es depositado en el fichero D1BTQFØ.

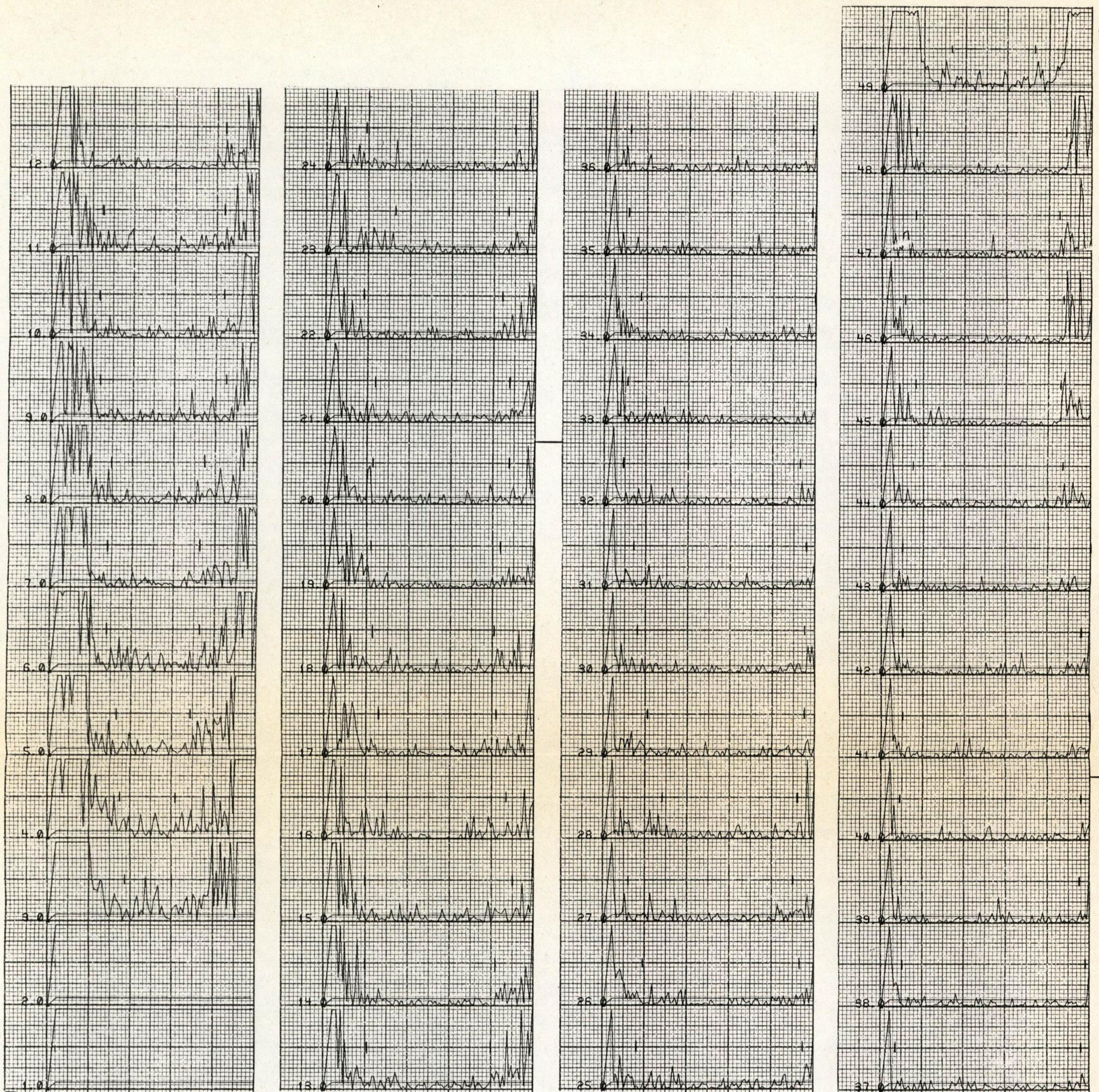


Fig.(5.8) Interpretación de esta figura.- Puesto que nuestra señal es real su transformada será hermitica ($\Rightarrow F(\xi, \eta) = F^*(-\xi, \eta)$) y por tanto su espectro de amplitud cumplirá $|F(\xi, \eta)| = |F(-\xi, \eta)|$, por lo que basta con tener información sobre dicho espectro en el 1º y 2º cuadrantes para conocer el espectro total. La Fig. nos muestra el espectro de amplitud para el 1º y 2º cuadrantes; cada perfil dibujado corresponde con $F(\text{cte.}, \eta)$, teniendo en cuenta que la frecuencia máxima, η_m , se encuentra en el centro de cada perfil y que al recorrerlo de izq. a dcha., en la mitad izq. del perfil η varía creciendo entre $0 \leq \eta \leq \eta_m$ (1er cuadrante) y en la mitad dcha. η crece entre $-\eta_m < \eta < 0$ (2º cuadrante). El nº que consta como etiqueta de cada perfil corresponde a ξ crecientes hasta la frecuencia ξ_m . Superpuesto a cada uno de los perfiles esta representado $|N(\text{cte.}, \eta)| = \text{cte.}$

C-7) Programas "FFTBI" y "CONVERS"

El primero de ellos calcula la transformada inversa de Fourier y nos devuelve al dominio de quasidensidades. El programa "CONVERS" en su opción 4^a nos devuelve al dominio de densidades mediante la transformación.

$$D = \mathcal{C}^{-1}(D') = \frac{e^{\frac{D'-A_2}{A_1}} - C_1}{C_2} \quad (5-18)$$

El resultado es depositado en D1BQDØ. Una nueva aplicación de CONVERS en su 5^a opción nos lleva al dominio de intensidades. El resultado $i_F(x,y)$ es depositado en D1BDIØ.

Las Figs.(5.9.a y b) representan los ficheros marcados en el organigrama con ① y ② respectivamente, es decir, la matriz de datos contaminados de ruido expresados en densidades y la matriz en densidades ya filtradas fruto de todo el proceso que acabamos de describir. Las Figs.(5.10.a y b) representan los ficheros numerados en el organigrama ③ y ④ que son las matrices de datos en intensidades antes y después del filtrado respectivamente. Obviamente las escalas de representación de las figuras (5.9) y (5.10) son diferentes.

V.4.-RESTAURACION DE LA SEÑAL FILTRADA: DISCUSION DE LOS RESULTADOS:

Una inspección visual comparativa de las Figs.(5.9.a y d) ó (5.10.a y b) nos invita a hacer un juicio cualitativo y calificar de aceptable el proceso de filtrado de ruido; en efecto hemos alisado la señal sin perder contraste en las estructuras que consideramos como filamentos penumbrales, como se desprende de la observación por transparencia de la superposición de los citados dibujos.

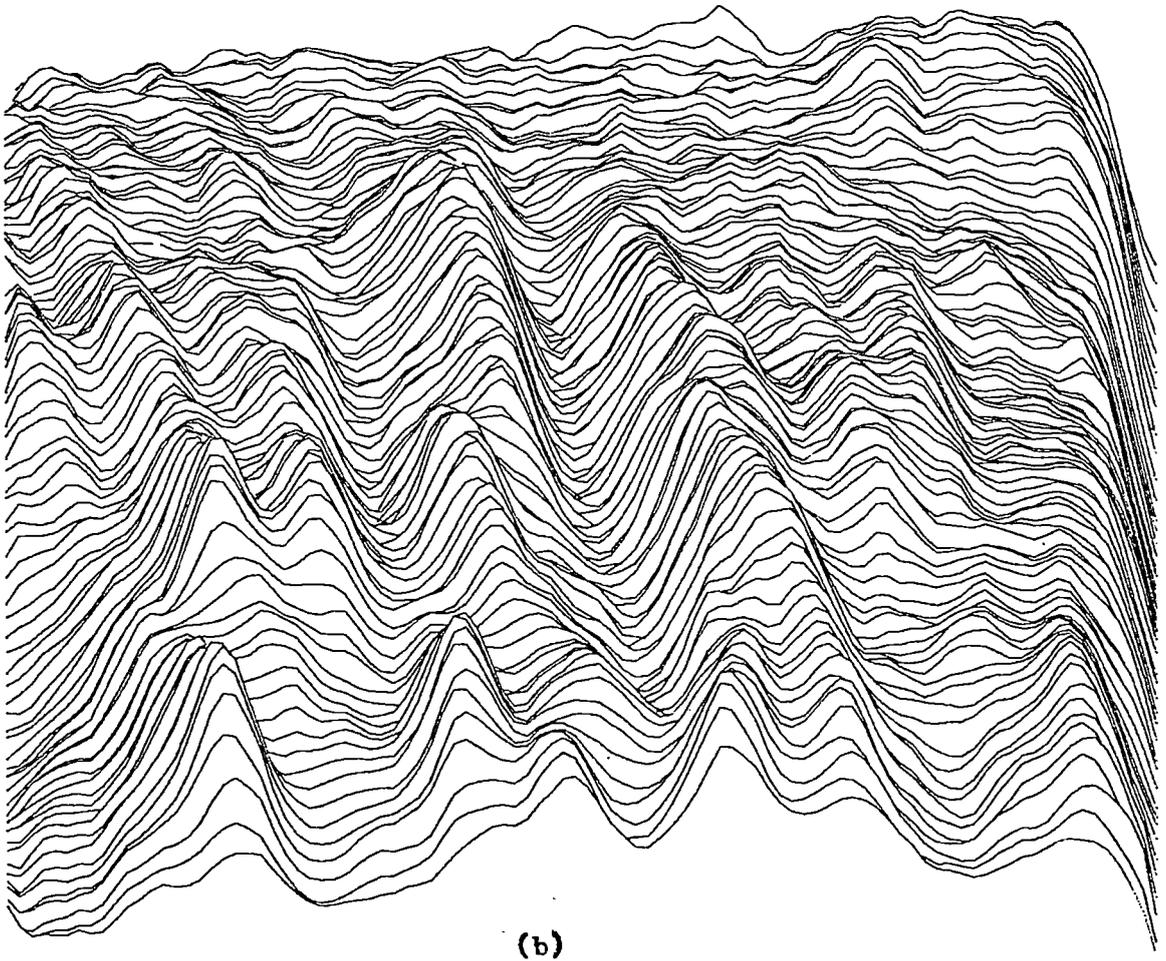
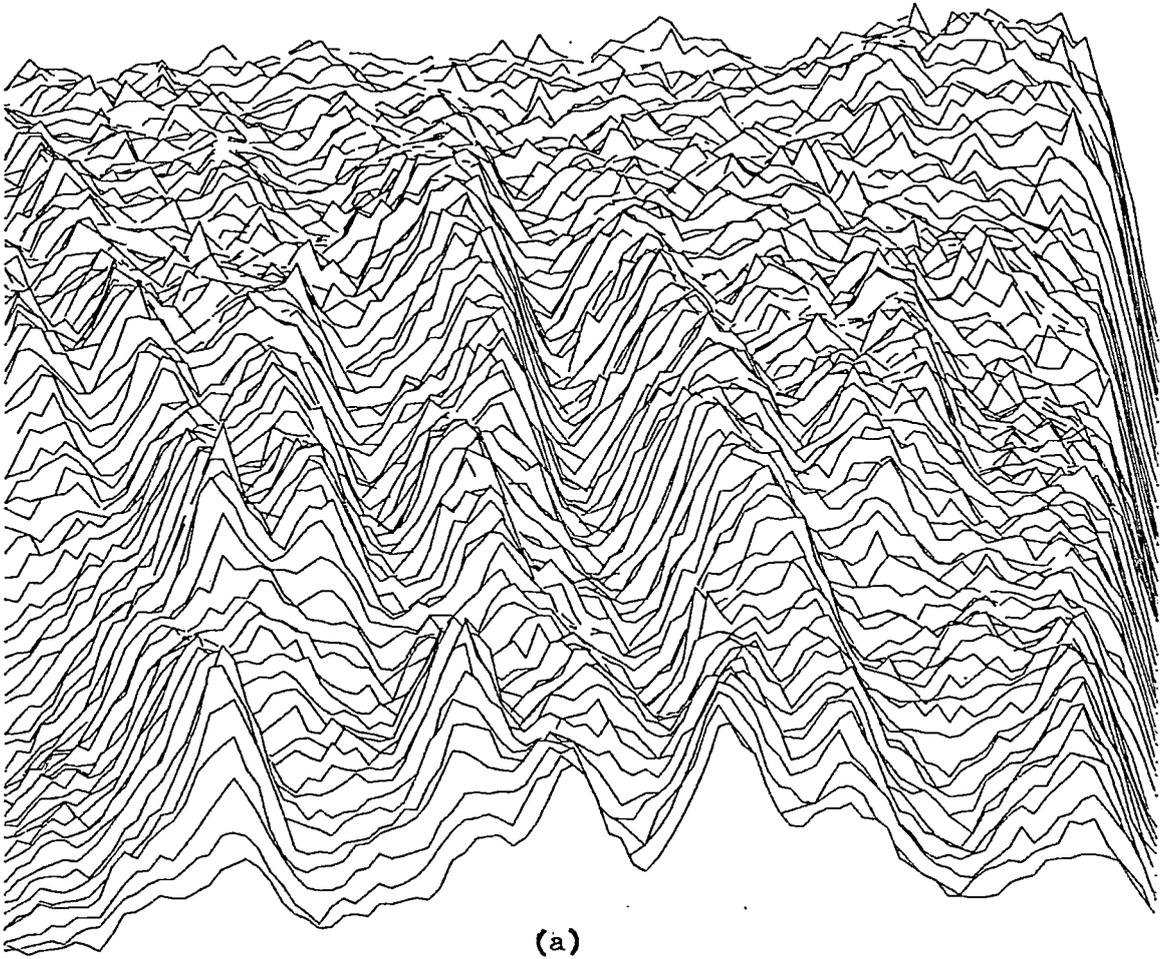
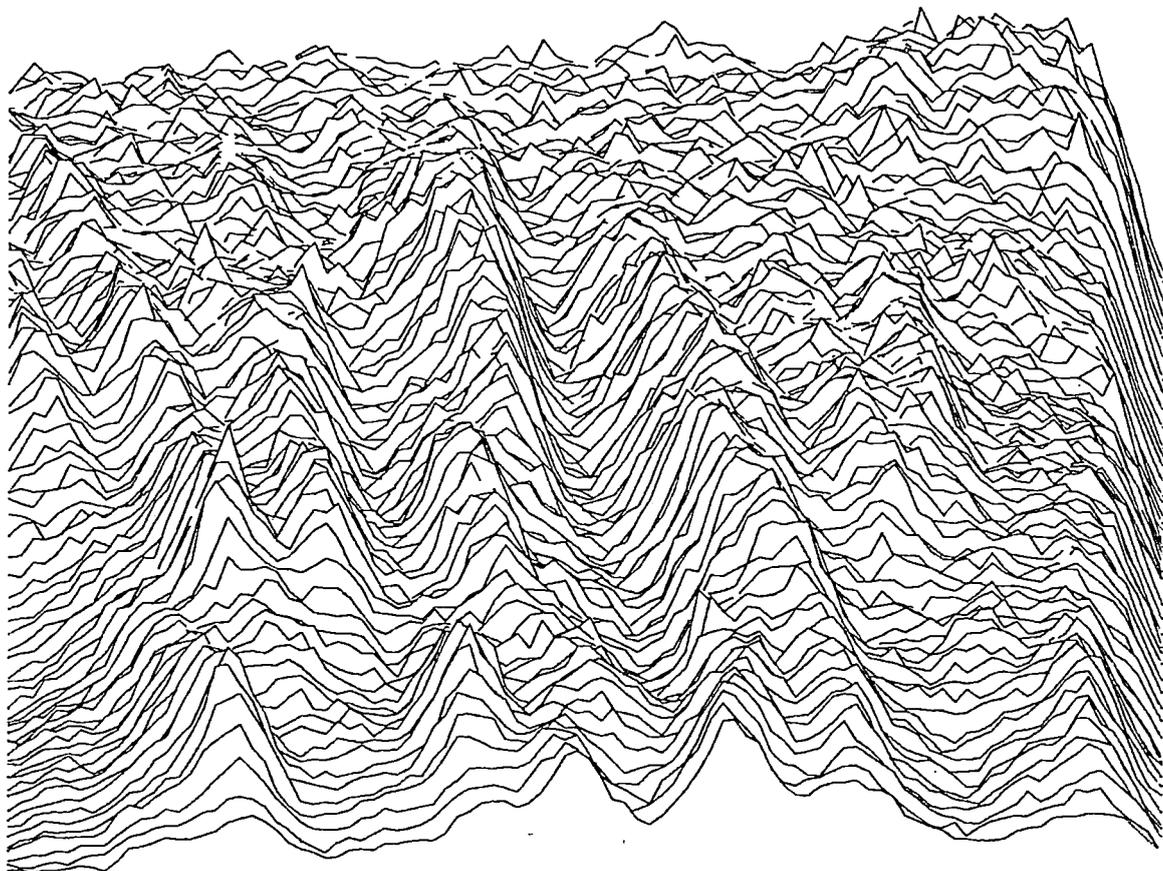
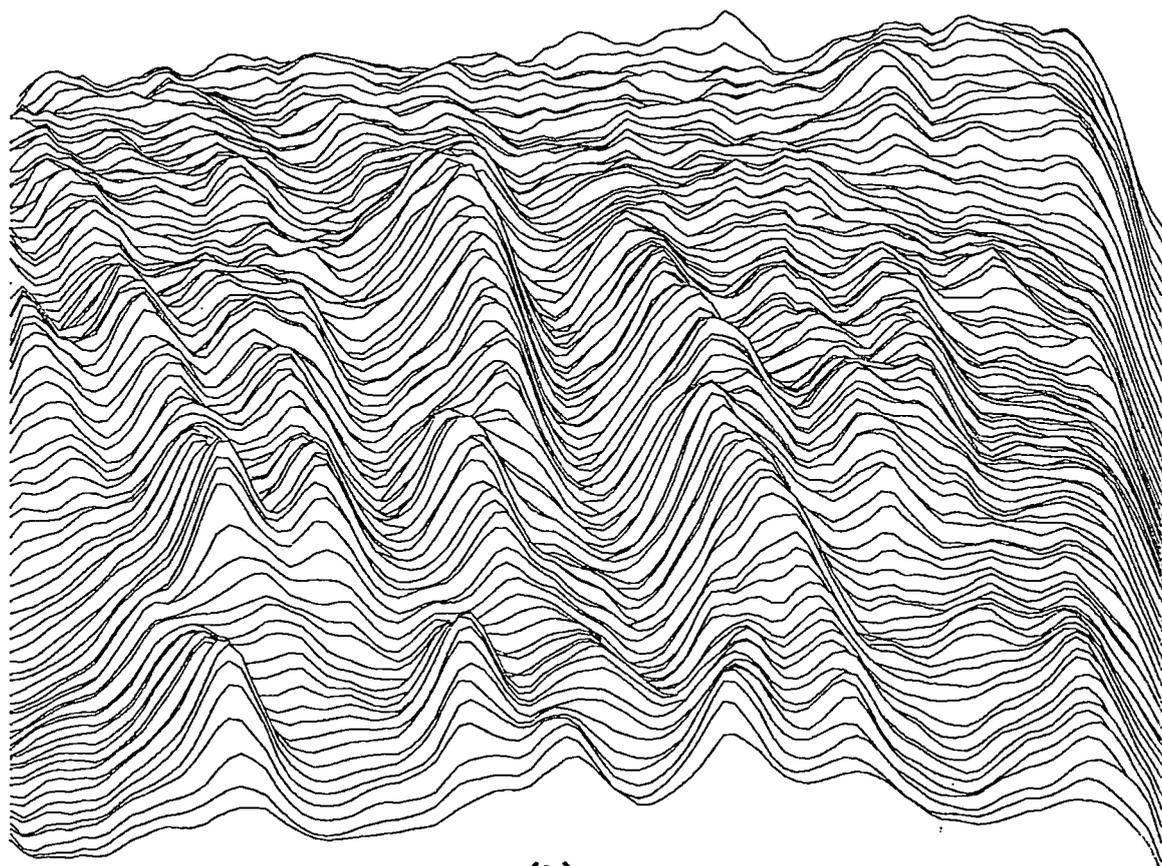


Fig. (5.9)



(a)



(b)

Fig. (5.10)

Damos ahora un nuevo paso e iniciamos un proceso de restauración de la señal filtrada $i_F(x,y)$ para descontaminarla de los efectos de deterioro de la atmósfera e instrumento. -- Para ello aplicamos la expresión

$$I_r(\xi,\eta) = \frac{I_F(\xi,\eta)}{\phi(\xi,\eta)} \quad (5-19)$$

Sin embargo el resultado obtenido al proceder de esta forma no ha sido satisfactorio, ya que se siguen restaurando excesivamente componentes espectrales de frecuencias altas - dando origen a fuertes oscilaciones tipo ruido en $i_r(x,y)$. -- ¿Dónde hay que buscar el origen de éstas perturbaciones?. Para respondernos esta pregunta hemos procedido de la siguiente manera. Mediante los programas POWER3 y NOISE8B hemos calculado el espectro de amplitudes de la señal en densidades después de haber sido filtrada (contenida en D1BQDØ). Sobre el resultado hemos observado que en la zona de frecuencias más altas que las que hemos tomado como de corte (en la Fig.(5.8)), reaparece un cierto nivel de señal. Hemos de concluir por tanto que la transformación \mathcal{C}^{-1} y análogamente la transformación de densidad a intensidades mediante la curva característica - introducen componentes de altas frecuencias en nuestra señal. Además podemos sospechar que la aproximación $|N(\xi,\eta)| = \text{cte.}$ que para altas frecuencias resulta muy razonable como se desprende de la Fig.(5.8), tal vez para bajas frecuencias no se cumple, y al decir para bajas frecuencias hacemos referencia a que basta con que una de las dos variable (ξ,η) sea baja -- para presumir que $|N(\xi,\eta)|$ no valga lo mismo que cuando ambas son altas frecuencias. Por ejemplo al seleccionar las frecuencias de corte en la Fig.(5.8) utilizábamos como referencia los puntos de intersección de la amplitud espectral, supuesta constante, del ruido. Dicho proceder nos ha llevado, por ejemplo, a que en las dos primeras filas (ξ baja) no hemos establecido frecuencias de corte, dado el elevado nivel de la amplitud de la señal incluso para η altas. En definitiva estamos dejando pasar componentes espectrales para altos valores de η ; estas

componentes pueden ser con toda probabilidad el origen de las fuertes oscilaciones en $i_r(x,y)$ al intentar el proceso de restauración.

A la vista de lo anterior expondremos a continuación -- unas cuantas consideraciones. El procedimiento de filtrado de ruido expuesto en V.3 funciona bien cuando se trata únicamente de alisar la señal. Para nosotros resultará de gran utilidad como primer paso en el procesado de un área de la imagen, con objeto de tener una referencia, no perturbada por el ruido, para compararla posteriormente con la señal restaurada y analizar -- por ejemplo la influencia de la función de dispersión en el -- contraste entre los filamentos brillantes y oscuros.

Por otra parte hemos llegado a la conclusión de que cuando vayamos a realizar un proceso de restauración, el filtrado de ruido conviene hacerlo en el mismo dominio de la restauración, es decir en intensidades ya que las transformaciones, \mathcal{C} , curva característica y \mathcal{C}^{-1} introducen modificaciones en el espectro que dan origen, entre otras cosas a componentes espectrales en frecuencias altas. Todo esto está muy bien pero nos falta por contestar a la pregunta más importante: ¿Cómo vamos a realizar el proceso de filtrado y restauración en el dominio de intensidades?. En el siguiente epígrafe damos contestación a esta cuestión.

V.5.- RESTAURACION OPTIMA:

Esquemáticamente podemos visualizar los pasos seguidos en V.3. y V.4. como la aplicación sucesiva a nuestra señal de dos filtros: el primero que suaviza la señal eliminando el ruido según un criterio de optimización, y el segundo que restaura el resultado anterior, de los efectos de deterioro producidos por la atmósfera y el instrumento (ver Fig.(5.11)). Dado que este esquema de trabajo no resulta fructífero en el paso de obtención de la señal restaurada vamos a introducir una variante. Fundiremos ambos procesos en uno solo y sobre lo que resulte

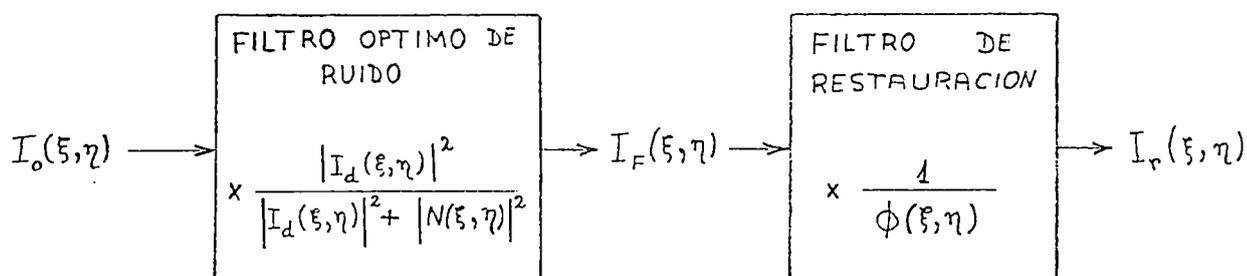


Fig. 5.11

haremos una aproximación. Al nuevo filtro que lo denominaremos de "restauración óptima", lo denotaremos por F_{RR}

$$F_{RR} = \frac{1}{\phi(\xi, \eta)} \frac{|I_d(\xi, \eta)|^2}{|I_d(\xi, \eta)|^2 + |N(\xi, \eta)|^2}$$

y teniendo en cuenta el significado de I_d :

$$I_d(\xi, \eta) = I_v(\xi, \eta) \cdot \phi(\xi, \eta)$$

y la naturaleza de la función $\phi(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} F_{RR} &= \frac{1}{\phi(\xi, \eta)} \frac{|I_v(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta)|^2}{|I_v(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta)|^2 + |N(\xi, \eta)|^2} = \\ &= \frac{\phi(\xi, \eta)}{\phi(\xi, \eta)^2 + \frac{1}{\frac{|I_v(\xi, \eta)|^2}{|N(\xi, \eta)|^2}}} \end{aligned} \quad (5-20)$$

la aplicación de este filtro requiere el conocimiento de $\phi(\xi, \eta)$ para cada placa, cosa de que disponemos, y del conocimiento de la relación entre las densidades espectrales de la señal verdadera y el ruido. Es en este punto donde surge

el escollo: no podemos conocer dicha relación pues si bien $|N(\xi, \eta)|^2$ la hemos obtenido dentro de una cierta aproximación, en V.3., sin embargo $|I_V(\xi, \eta)|^2$ es la densidad espectral de la función que buscamos como resultado de todo el proceso. Por abreviar la notación el término $|I_V(\xi, \eta)|^2 / |N(\xi, \eta)|^2$ lo escribiremos como S/R (haciendo referencia a la expresión utilizada comunmente: "relación señal-ruido").

En particular para las bajas frecuencias, es lógico esperar que la relación S/R sea mucho mayor que la unidad. mientras que $\phi(\xi, \eta)$ es próximo a uno, por lo que en tal rango de frecuencias el término $\phi(\xi, \eta)^2$ domina sobre $1/(S/R)$ y por tanto (5-20) se puede aproximar como:

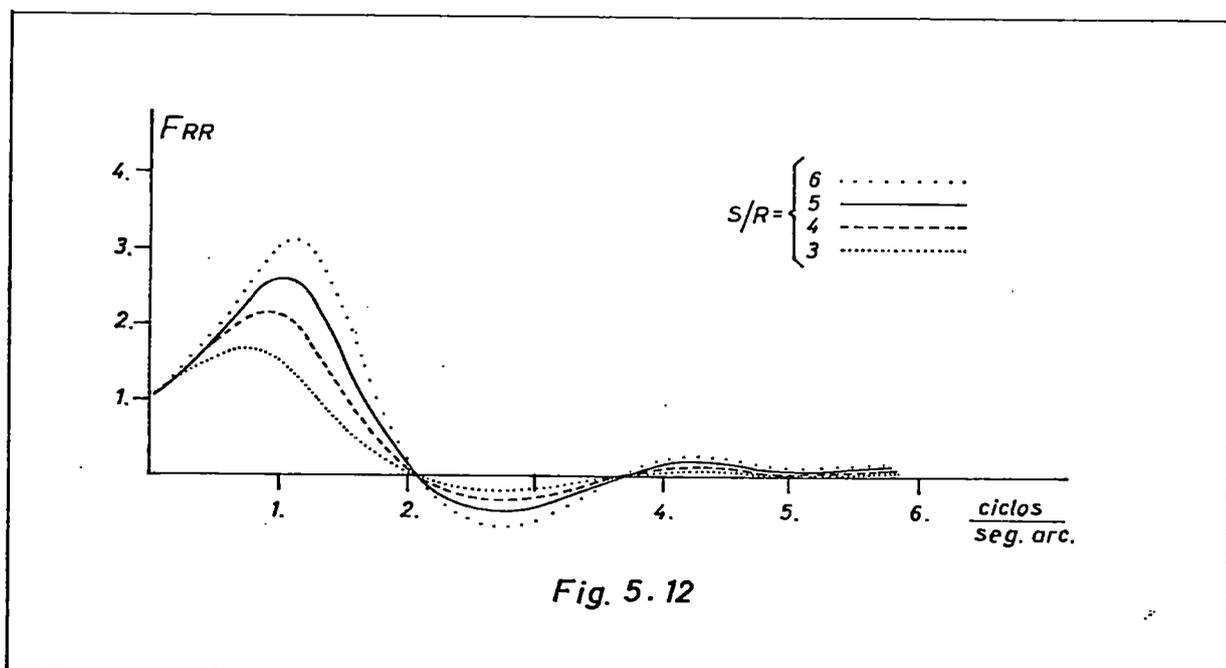
$$F_{RR}(\xi, \eta) \approx \frac{1}{\phi(\xi, \eta)} \quad (\text{para bajas frecuencias}) \quad (5-21)$$

Para altas frecuencias, en donde la relación S/R valdrá alrededor de uno, ocurre que $\phi(\xi, \eta)$ toma valores próximos a cero, por lo que mientras el numerador de (5-20) tiende a cero el denominador es un número finito. Por lo tanto en este rango de frecuencias (5-20) se puede aproximar como:

$$F_{RR}(\xi, \eta) \approx 0 \quad (\text{para altas frecuencias}) \quad (5-22)$$

Vamos a hacer la aproximación de que $S/R = \text{cte.}$ es decir, que dicha relación no dependa de la frecuencia; desde luego el valor de dicha constante habrá de ser mayor que la unidad, de otra manera sería inútil todo intento de filtrado. Pasemos a continuación a criticar el alcance de la aproximación que estamos haciendo. A la vista de las expresiones (5-21) y (5-22) llegamos a la conclusión de que el valor constante que asignamos a S/R influye en la forma del filtro F_{RR} fundamentalmente en las frecuencias medias. Luego, nuestra aproximación se reduce a suponer que la relación S/R es cte. en la zona de frecuencias medias.

La Fig. (5.12) presenta el corte del filtro $F_{RR}(\xi, \eta)$ - mediante un plano coordenado, para distintos valores de S/R (3,4,5 y 6) en el caso particular de la placa nº 13 (Dibujo obtenido en el programa "FILTROS"). Con propósitos únicamente ilustrativos de cómo se comporta el filtro F_{RR} , hemos procedido previamente a suavizar las alas de la función $\varphi(x,y)$, aunque en el proceso de restauración emplearemos la función numérica tal como se ha obtenido en el análisis experimental realizado en el Capítulo IV. Dicho gráfico confirma nuestras especulaciones analíticas. Además en él se aprecia un corrimiento de los máximos y mínimos hacia las altas frecuencias al crecer S/R , es decir, cuanto mayor es S/R se concede mayor peso a frecuencias progresivamente crecientes.



Una vez aplicado y visualizado, mediante la Fig.(5.12), el alcance de esta aproximación, vamos a pasar a la estimación de la constante que representa a S/R según nuestra suposición. Para ello hemos utilizado dos métodos diferentes que nos llevan aproximadamente a las mismas conclusiones.

A) "Primer Método"

De nuevo, en este paso, las observaciones realizadas, durante el eclipse, del borde de la Luna en su transición sobre la Fotosfera, nos resultan de valor inapreciable. En este caso utilizaremos dichas observaciones para hacer una estima del valor de S/R. Procederemos de la siguiente manera: para cada placa estudiada hemos determinado el perfil medio en intensidad de la transición Luna-Fotosfera (Capítulo IV); procederemos a la restauración de dicho perfil medio mediante la expresión (5-20) asignando distintos valores constantes a S/R. Ahora bien, tengamos en cuenta que el perfil medio es una -- función unidimensional $i^L(x)$, cuya transformada podemos representar por $I^L(\xi)$, mientras que el filtro de (5-20) trabaja sobre funciones transformadas bidimensionales. Una solución -- fácil a este problema es construir una matriz bidimensional -- repitiendo sucesivamente el perfil medio paralelamente a sí mismo; dada la forma de cómo hemos construido esta matriz, su transformada diferirá de $I^L(\xi)$ en una constante. Así pues podemos escribir el proceso de filtrado como

$$K I_r^L(\xi) = \frac{\phi(\xi, 0)}{\phi(\xi, 0)^2 + \frac{1}{(S/R)}} K I_o^L(\xi) \quad (5-23)$$

y recordando el significado de $\psi^*(x)$ y el método de obtención de $\phi(\xi, \eta)$ a partir de $\phi^*(\xi) = \mathcal{F}[\psi^*(x)]$ (epígrafe IV.3.) podemos escribir (5-23), dividiendo ambos miembros por K, de la siguiente manera

$$I_r^L(\xi) = \frac{\phi^*(\xi)}{\phi^*(\xi)^2 + \frac{1}{(S/R)}} I_o^L(\xi) \quad (5-24)$$

que es una expresión unidimensional adecuada para restaurar el perfil medio de intensidad Luna-Fotosfera.

Dado que la función $i_0(x)$ presenta una forma muy abrupta, su espectro tendrá contribución de muy altas frecuencias - suponiendo que no sea ilimitado, por lo que cabe esperar que la Transformada de Fourier que calculemos para $i_0(x)$ muestrada, estará afectada de una cierta distorsión por "aliassing". Dicha distorsión se puede decir que consiste en que el espectro queda truncado a partir de una cierta frecuencia, y que las componentes que restan, en especial las correspondientes a altas frecuencias resultan sobrevaloradas. La importancia de esta distorsión es, como sabemos, dependiente del intervalo de muestreo en el dominio de medida (ver apartado III.3-1). Es este espectro distorsionado el que introducimos en la expresión (5-24), por lo tanto no hemos de pretender, como resultado de la restauración, obtener un perfil de intensidad en la transición totalmente vertical y con ángulos rectos en las esquinas, es decir, un auténtico escalón recto, sino que nos van a aparecer oscilaciones en las citadas esquinas (ver Figs.(5.15.a.b.c.d y e). Dichas oscilaciones dificultarán la selección del valor de la constante S/R que estamos tanteando.

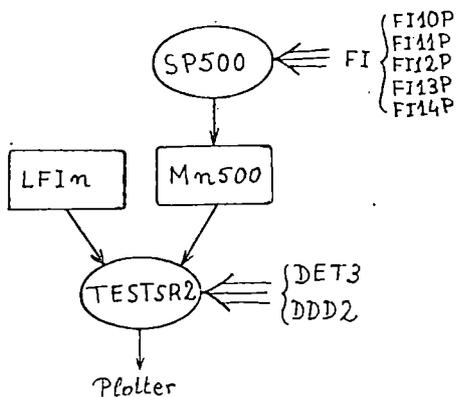
* Proceso operatorio del "Primer Método" y crítica del mismo

El conjunto de programas FORTRAN que constituyen los pasos requeridos para la estimación del valor S/R constituyen lo que denominaremos "MODULO RESTAURACION", cuyo organigrama está representado en la Fig.(5:13). Comentamos a continuación la -- primera parte de este organigrama.

1) Programa "SP500"

Este programa calcula la Transformada de Fourier $\phi^*(\xi)$ del perfil instrumental $\psi^*(x)$ de cada una de las placas en estudio, para poder sustituir posteriormente en (5-24). La función perfil instrumental se introduce en este caso con 500 puntos mediante la subrutina FInP (n= número de identificación de la placa). El resultado es depositado en Mn500.

"Primer Método"



"Segundo Método"

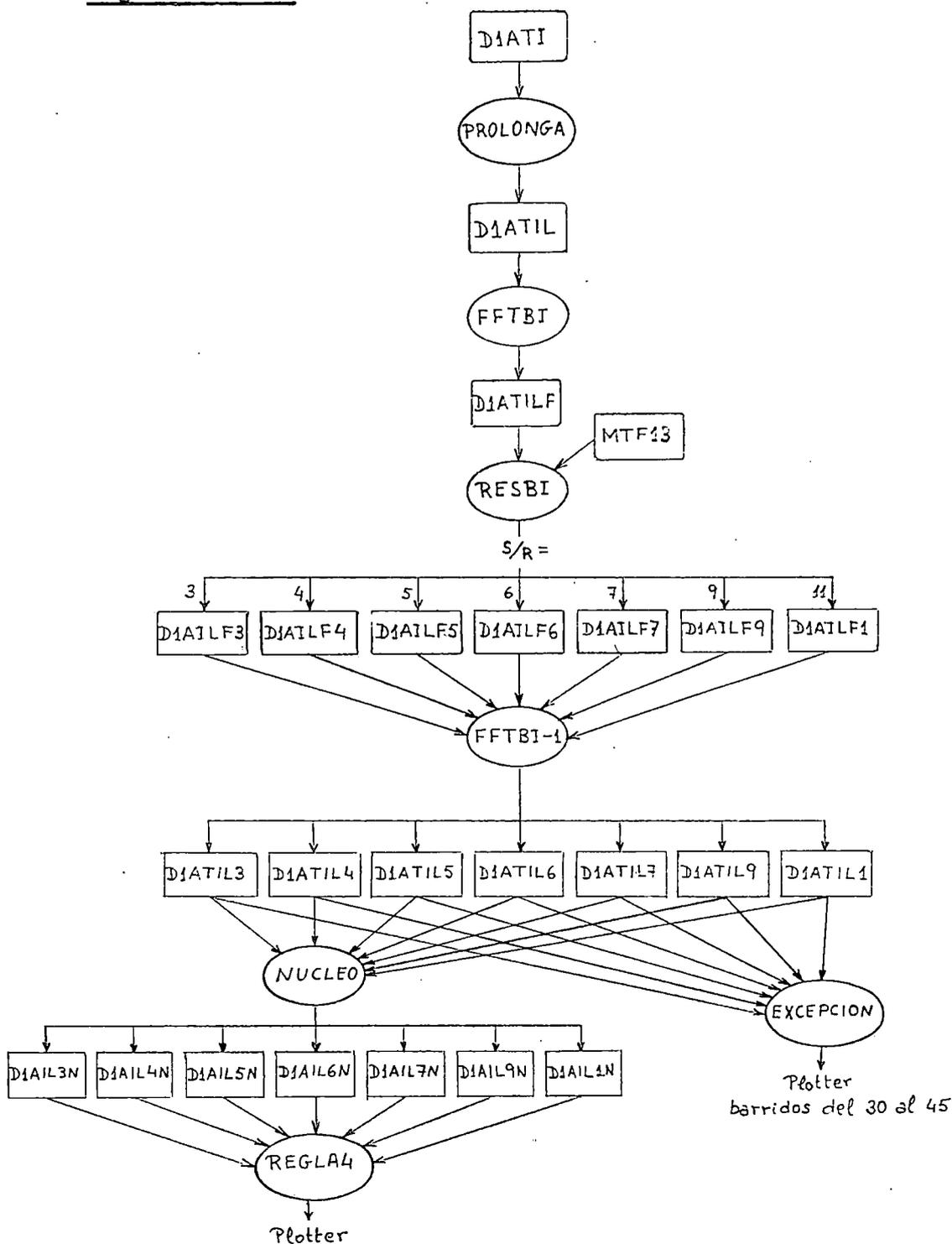


Fig.(5.13) ORGANIGRAMA DEL "MODULO RESTAURACION"

2) Programa "TESTSR2"

Este programa toma del fichero LFI el perfil medio, en intensidad, de la transición Luna-Fotosfera correspondiente a la placa número n (Fig.(5.14.a)); reproduce dicho perfil espejularmente construyendo finalmente una función simétrica que consta de 500 valores (Fig.(5.14.b)). La simetrización viene impuesta por la forma de trabajo de las subrutinas que calculan la Transformada Rápida de Fourier que consideran los valores introducidos como la información correspondiente a un periodo de una función periódica. En caso de no haber simetrizado, la función periódica que resultaría presentaría una discontinuidad en cada periodo (Fig.(5.14.c)) que daría origen en el proceso de restauración a oscilaciones adicionales que se sumarían a las que ya esperamos en el salto más suave de transición Luna-Fotosfera.

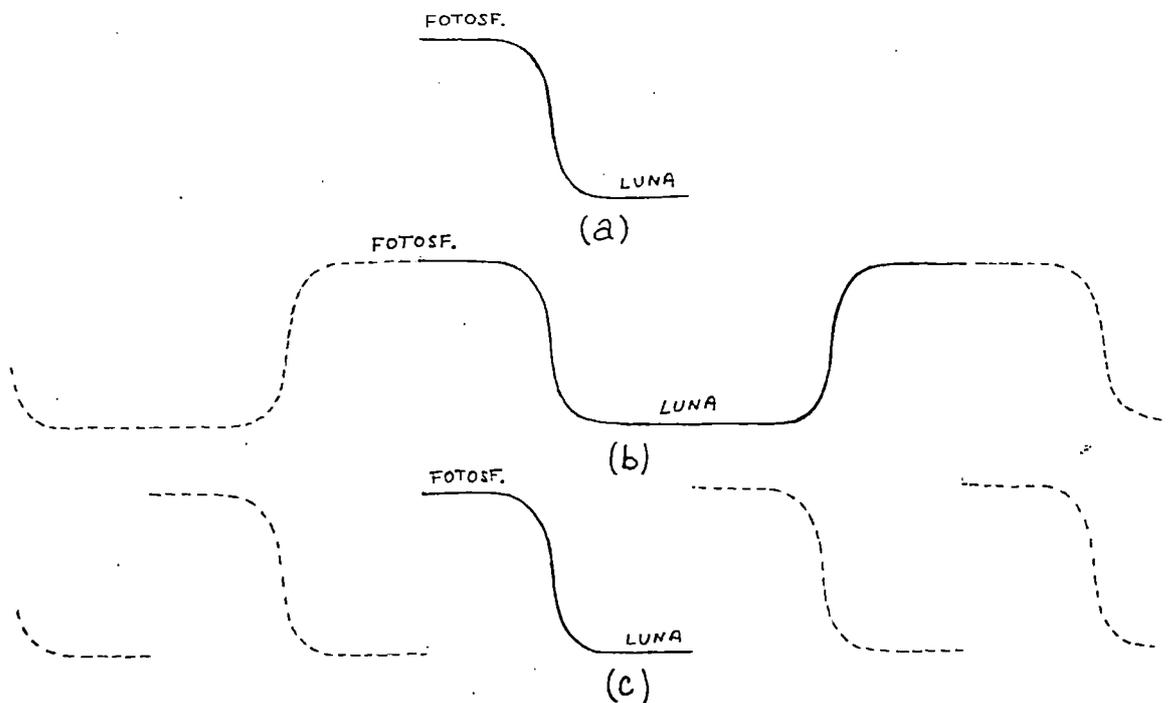
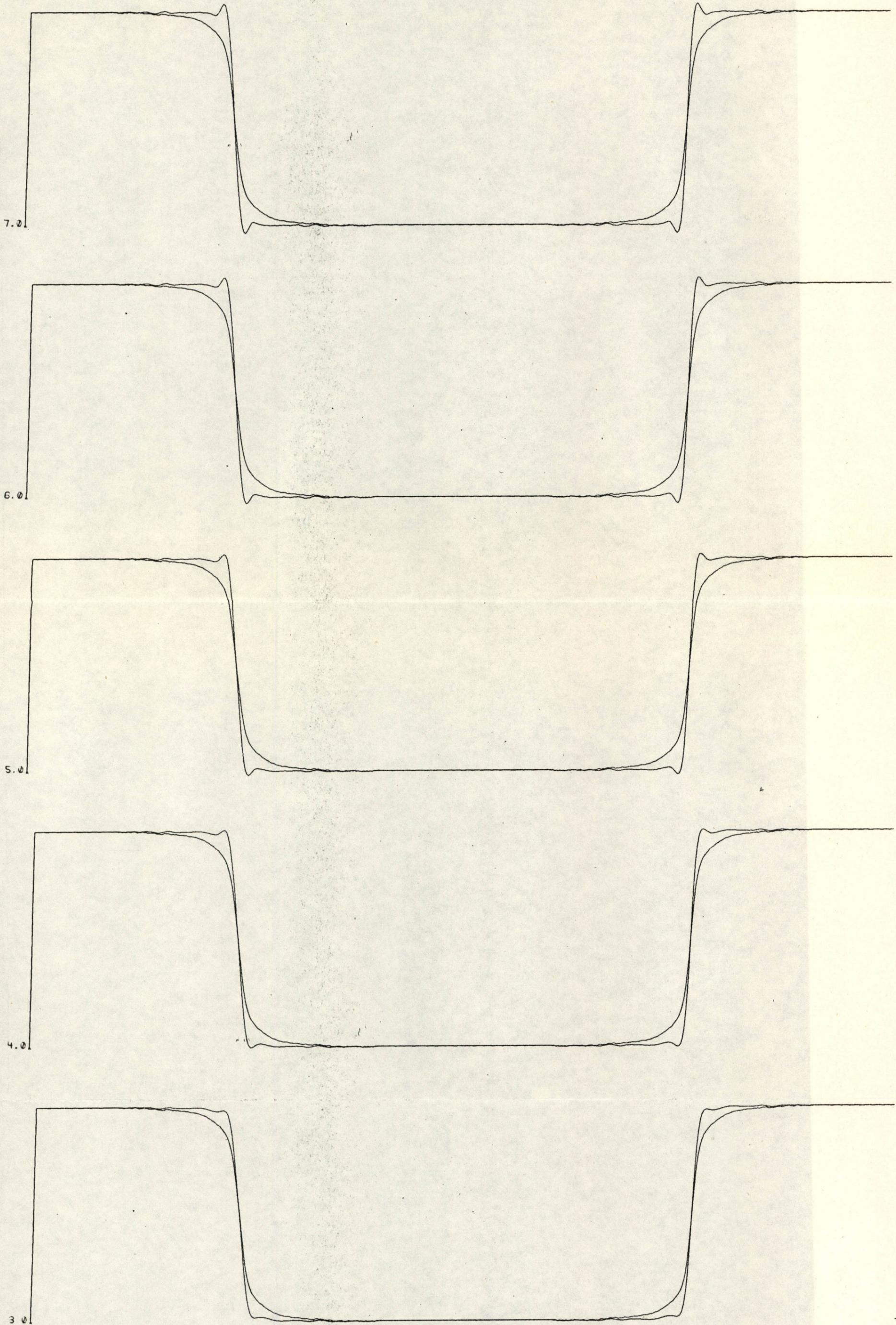


Fig.(5.14)

A continuación, el programa calcula la Transformada de Fourier, $I_o^L(\xi)$ de la función simetrizada, sustituye el resultado en (5-24) y obtiene $I_r^L(\xi)$; finalmente calcula la transformada inversa de $I_r^L(\xi)$ y dibuja mediante plotter el perfil restaurado $i_r^L(x)$; este proceso lo repite para distintos valores de S/R. Las Figs. (5.15.a.b.c.d y e) nos representan los resultados respectivos para cada una de las placas procesadas. En cada lámina presentamos los resultados correspondientes a una placa de las restauraciones realizadas para valores de S/R iguales a 3,4,5,6 y 7. El valor de S/R consta en el extremo inferior izquierdo de cada una de las curvas.

En principio y a la vista de las Figs. (5.15.a,b,c,d y e) el criterio de selección de S/R es bien sencillo: el valor que andamos buscando será aquel que nos proporciona un perfil restaurado lo más parecido posible al escalón recto teórico que constituiría el perfil verdadero Luna-Fotosfera. Pero según observamos, aparece una oscilación en la zona crítica de transición que se agudiza más y más conforme aumentamos S/R. El hecho de que el pico máximo de dicha oscilación supere el nivel fotosférico y el mínimo quede por debajo del nivel lunar no significa forzosamente que estemos sobrerestaurando las altas frecuencias ya que también habíamos previsto la aparición de oscilaciones por efecto de la distorsión producida por el "aliasing". Lo que si podemos concluir es que la restauración realizada para S/R = 3 es deficiente ya que incluso el pico de la oscilación en la zona crítica queda por debajo del nivel fotosférico (ver Figs. (5.15.a,c y d)). Para S/R = 4, el máximo de la oscilación supera ligeramente el nivel fotosférico y el mínimo cae ligeramente bajo el nivel lunar. Para valores mayores de S/R los picos de oscilación se agudizan progresivamente. De todo esto concluimos que el método, si bien no permite determinar exactamente cuál es el valor adecuado de S/R, sin embargo nos proporciona la estimación de una cota inferior para los posibles valores de S/R. Del análisis de las Figs. (5.15.a, b,c y d) deducimos que el valor de S/R no debe ser inferior a 4.



(a) FOTO nº 10

Fig.(5.15) Perfiles restaurados (superpuestos a los observados) Luna-Fotosfera. En el extremo izq. de cada perfil consta el valor de S/R para el que se ha llevado a cabo la restauración.

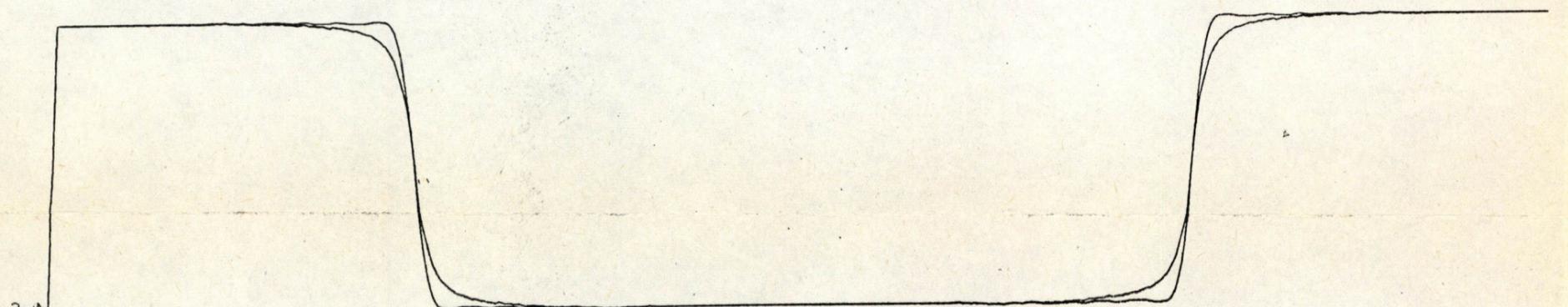
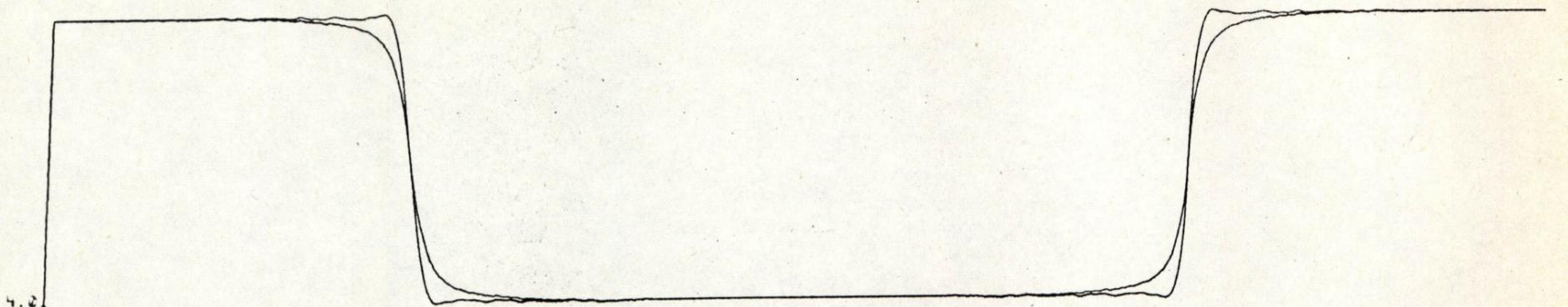
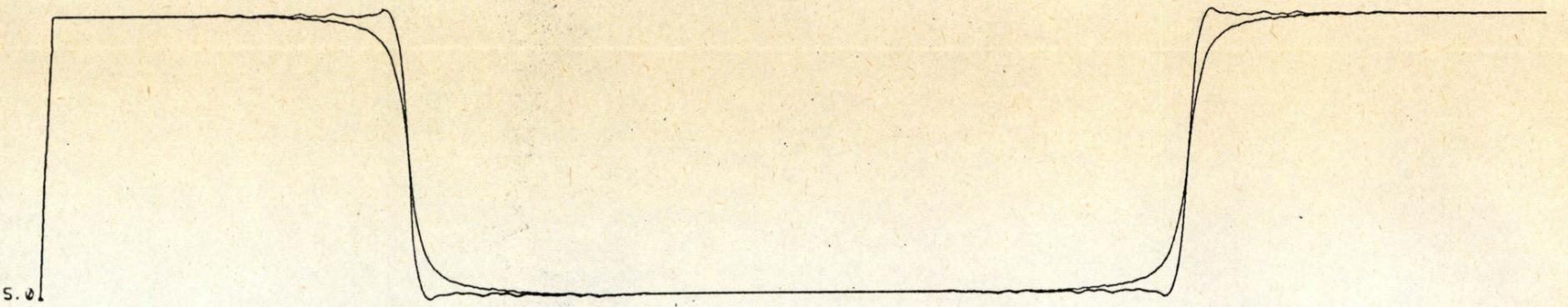
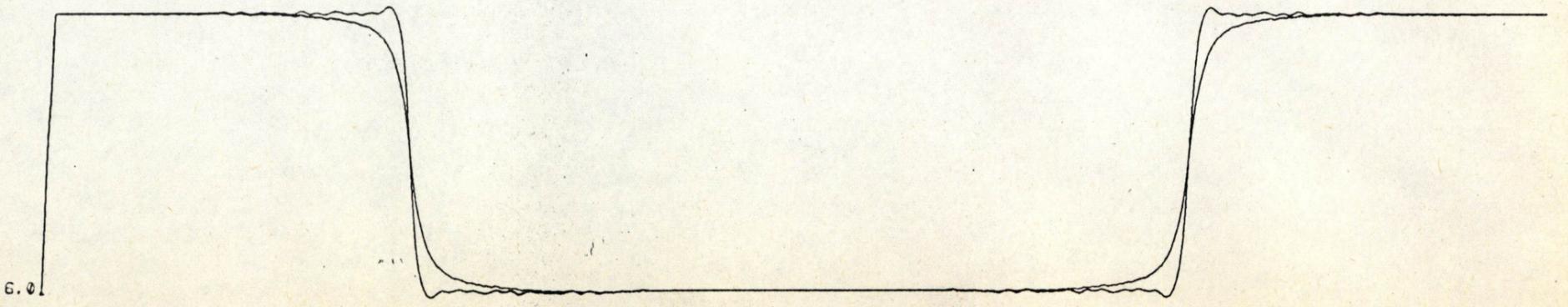
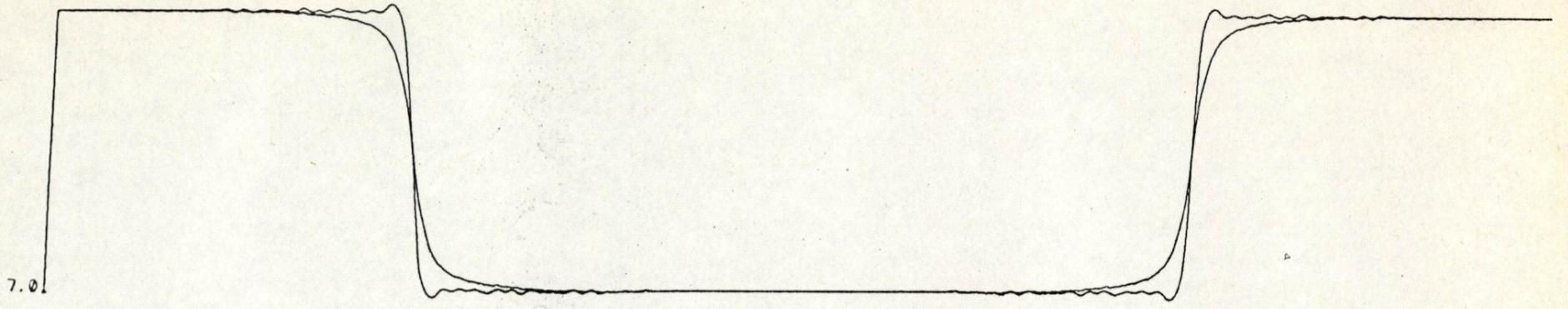
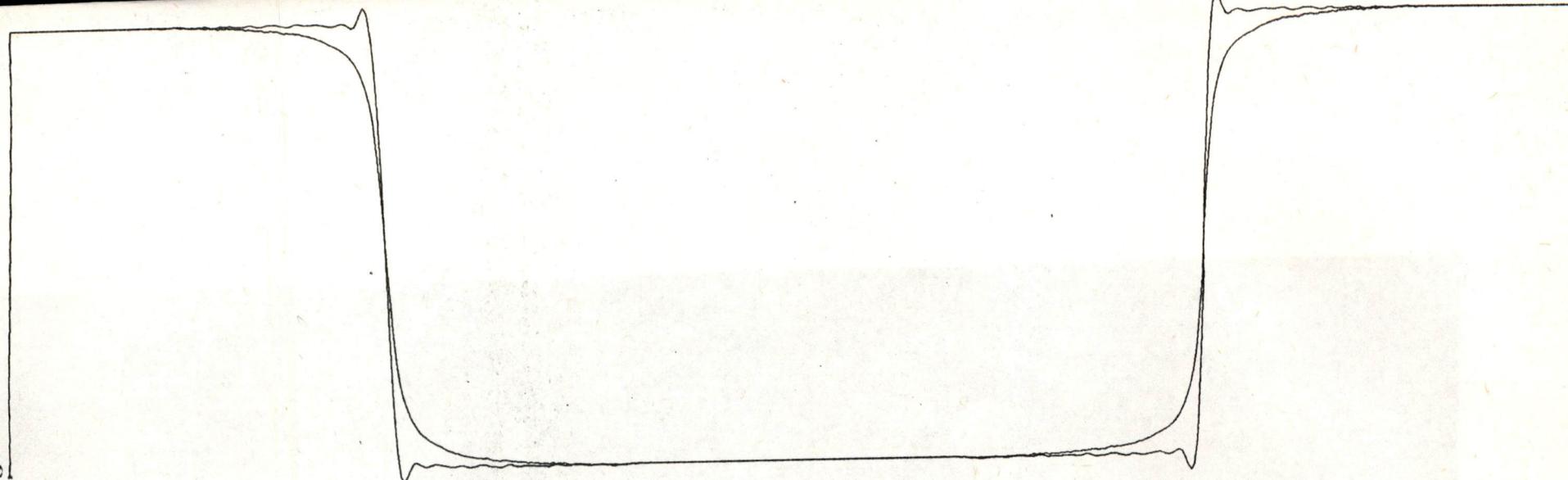
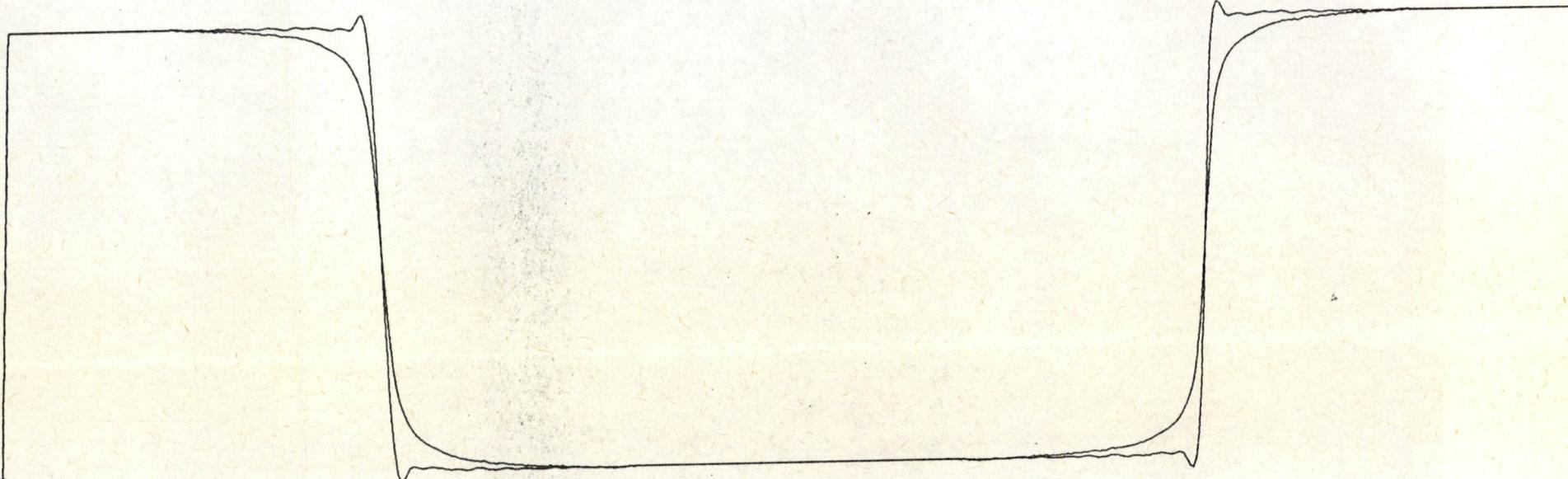


Fig.(5.15) (Continuación) (b) FOTO nº 11

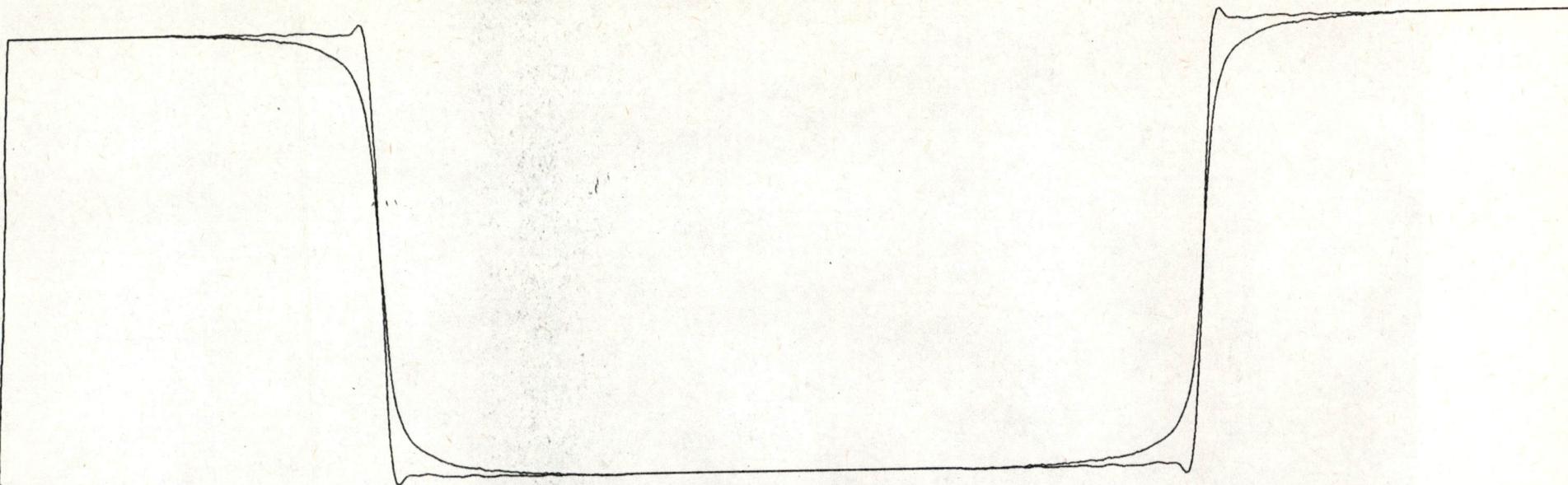
7.0



6.0



5.0



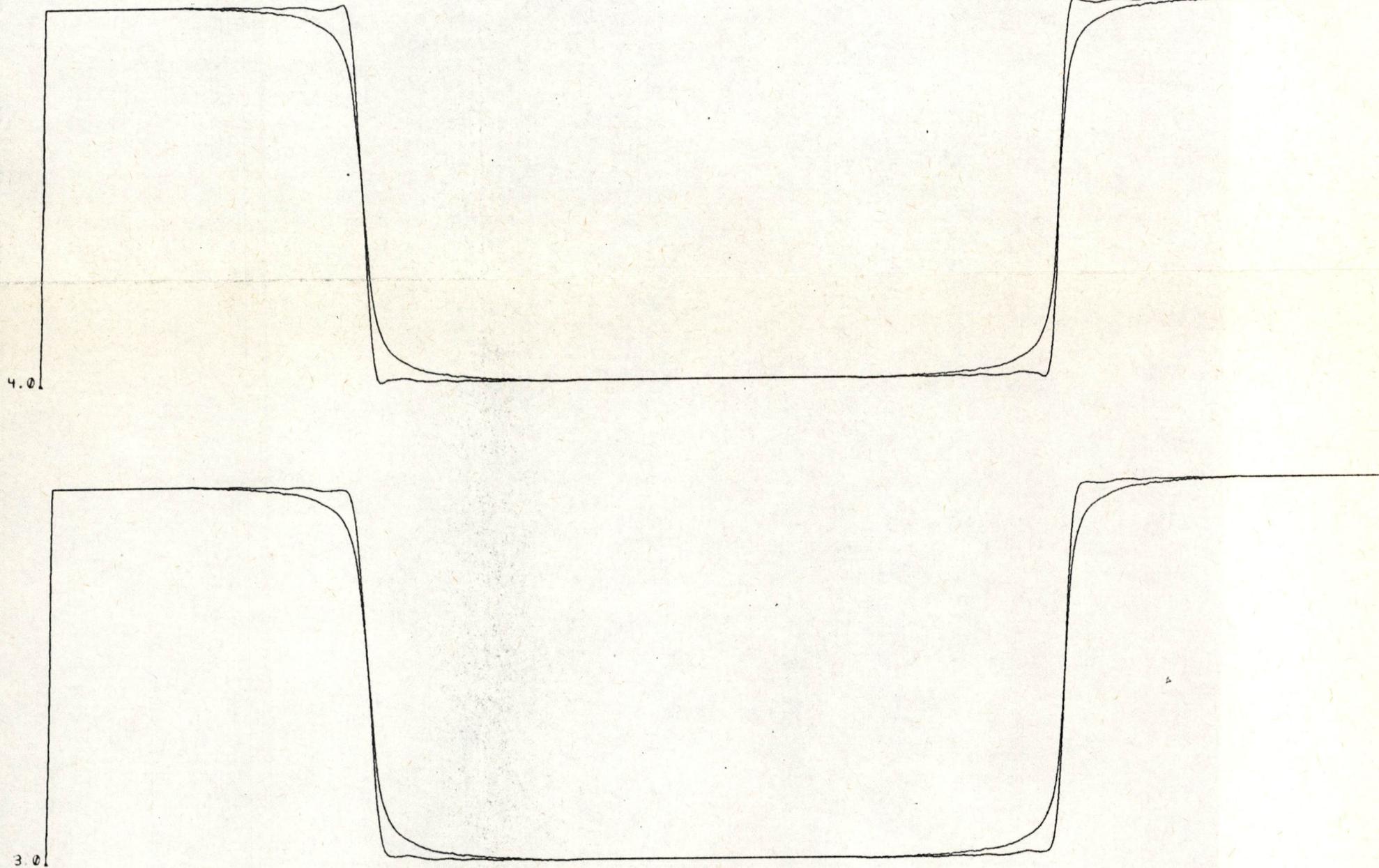


Fig.(5.15) (Continuación) (c) FOTO nº12

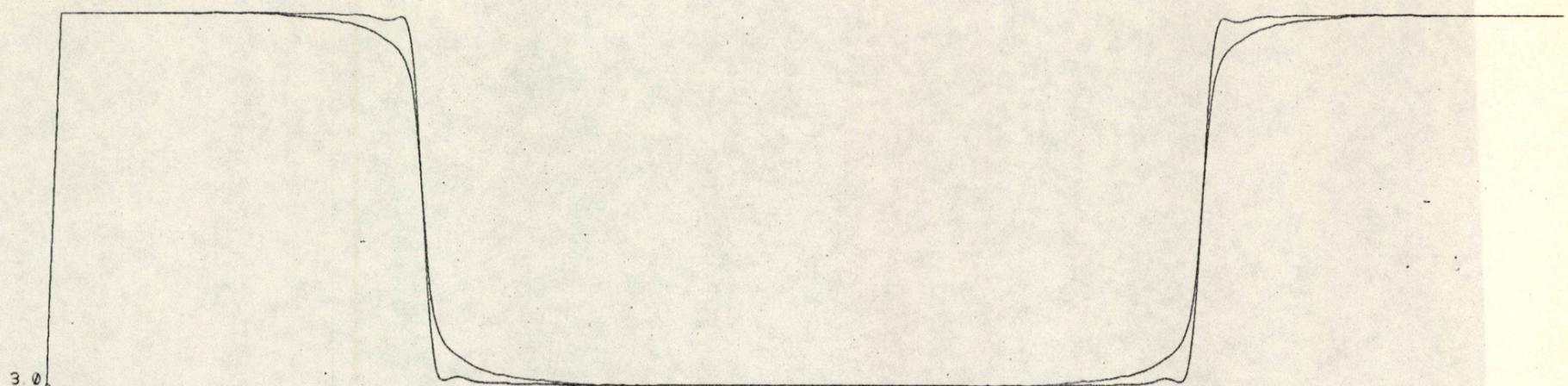
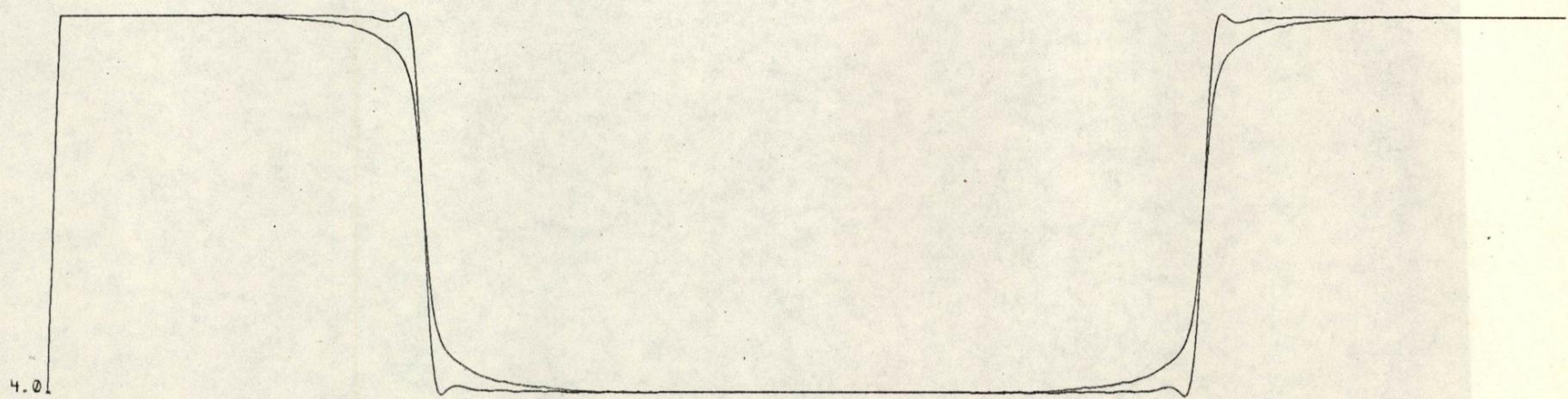
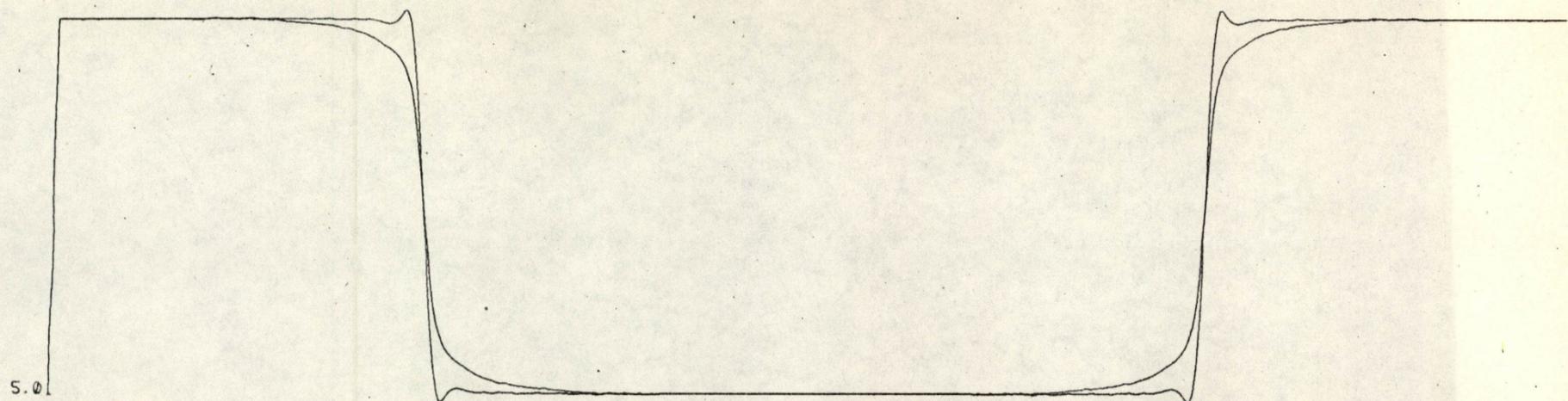
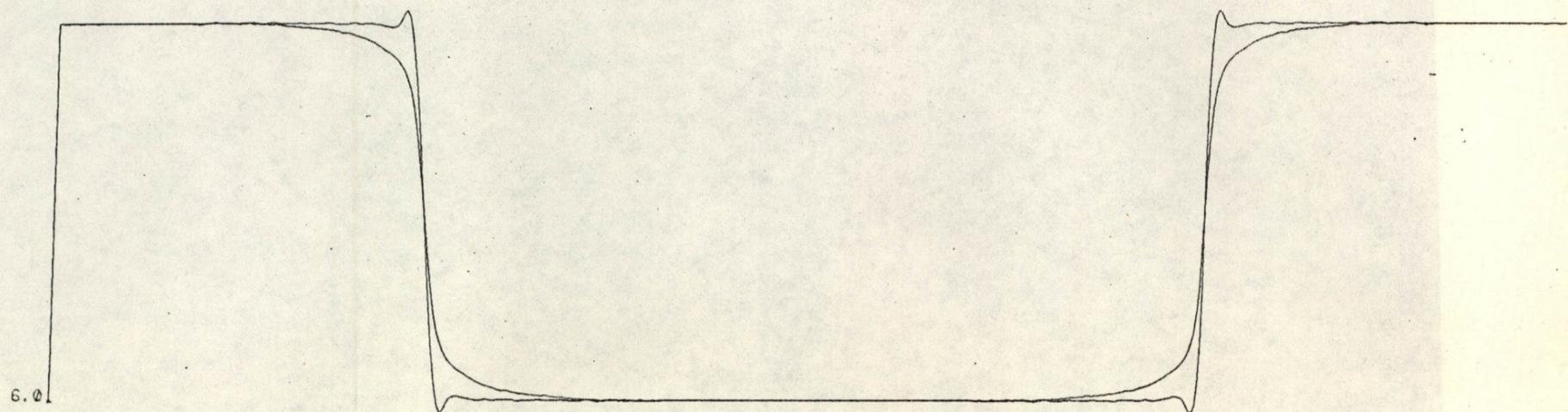
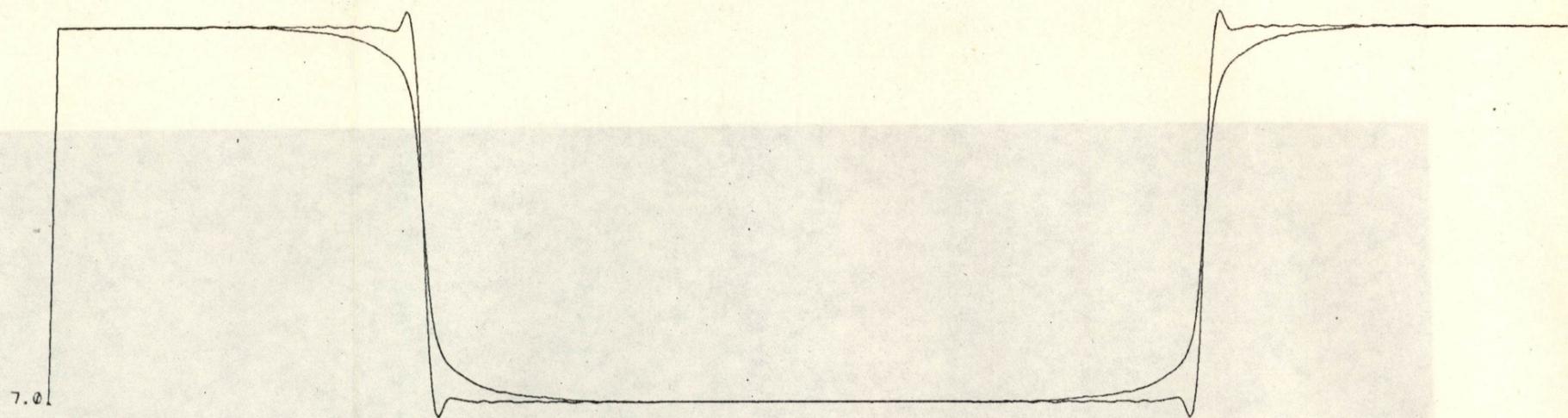


Fig.(5.15) (Continuación) (d) FOTO nº 13

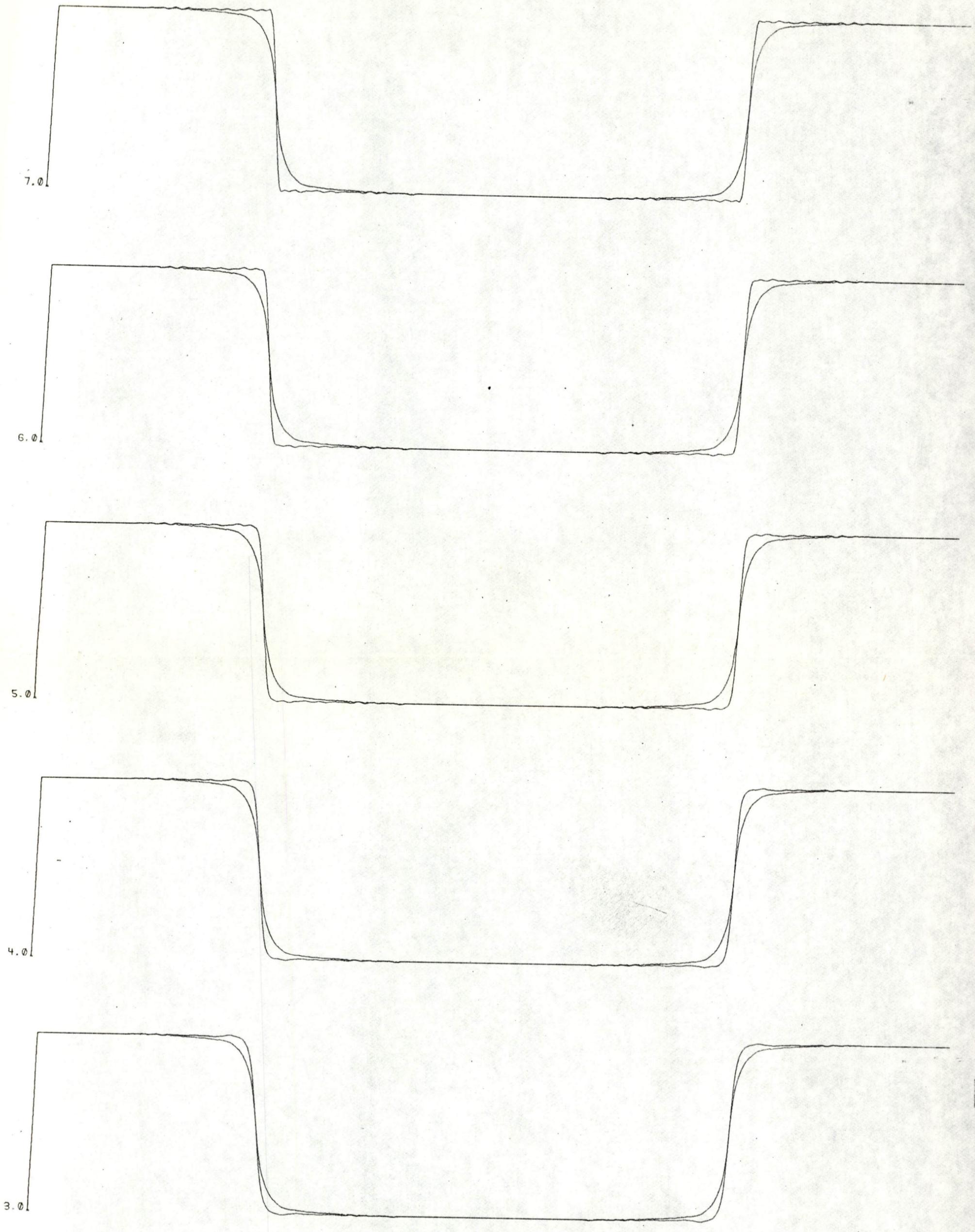


Fig.(5.15) (Continuación) (e) FOTO nº 14

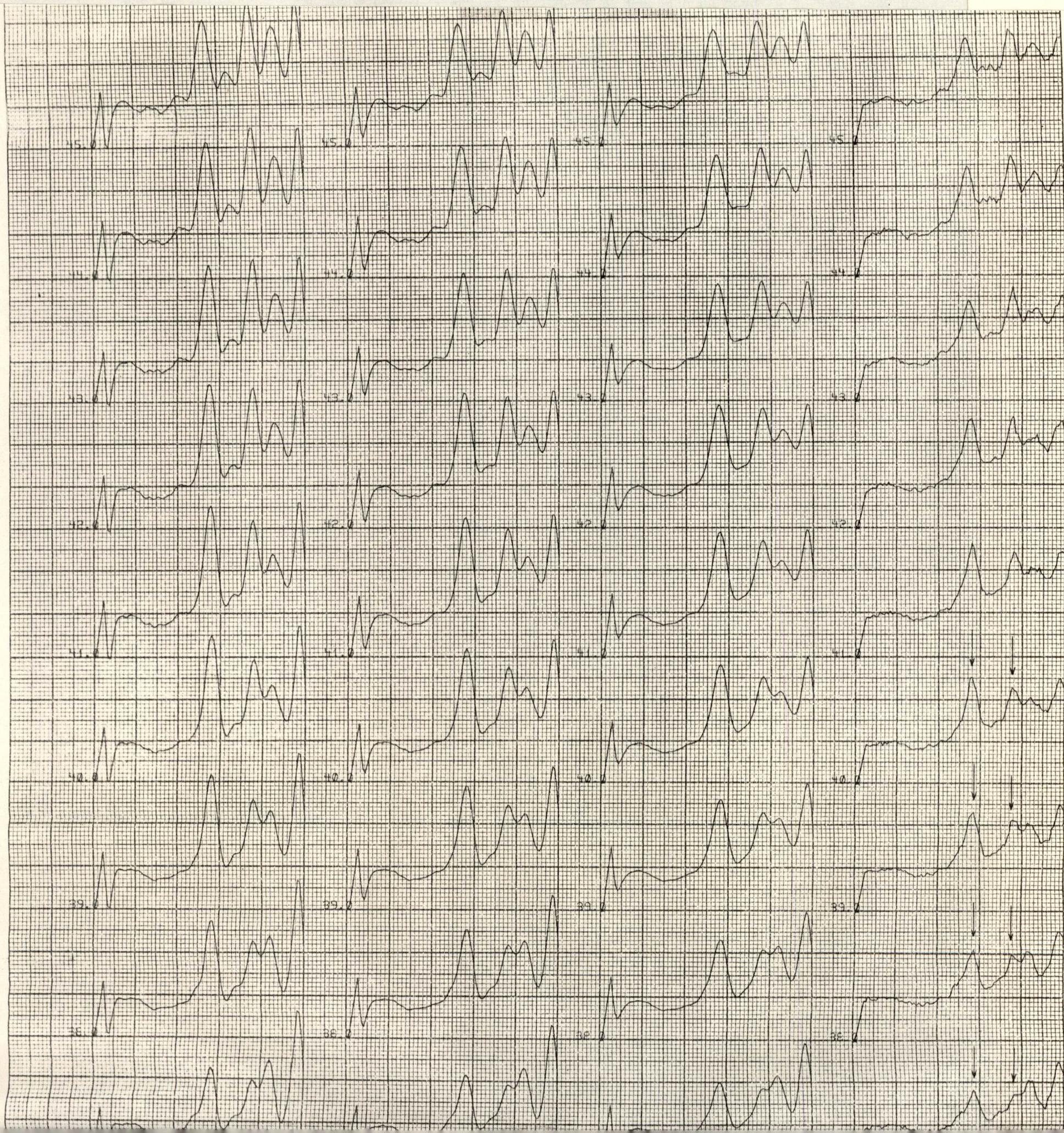
Al margen de la anterior discusión, llegamos también a otra conclusión importante: la semejanza de la forma del perfil restaurado con el perfil teórico esperado es un indicio de que la aproximación de suponer $S/R = \text{cte.}$ es bastante aceptable.

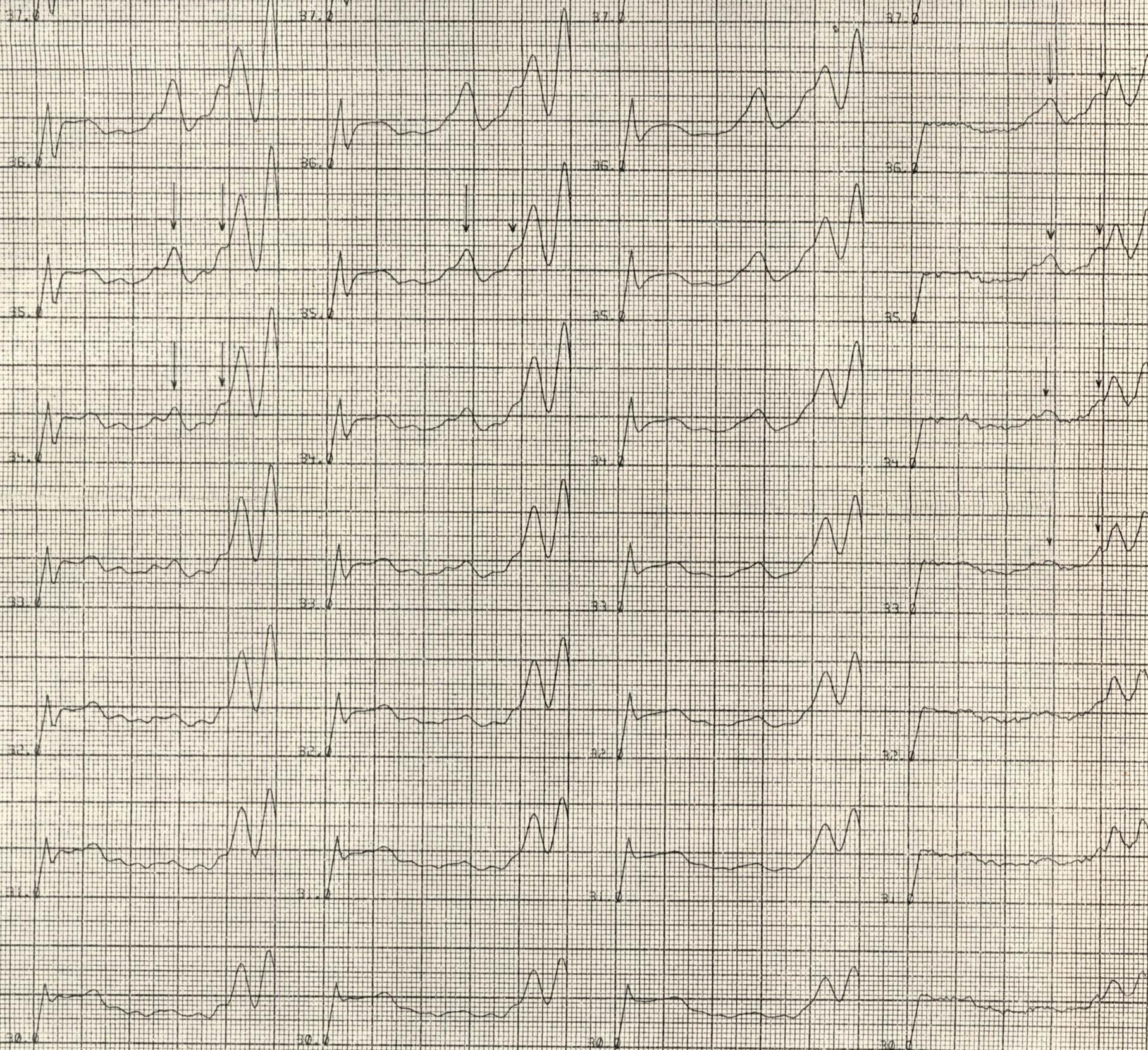
En el que hemos dado en llamar "segundo método", y que expondremos a continuación trataremos de hacer una valoración de una cota superior para S/R con lo cual habremos establecido un rango de posible variación de S/R .

B) "Segundo Método"

En este segundo método para la selección del valor S/R vamos a adoptar un criterio basado en razonamientos sobre Física Solar. En la FOTO nº 13, Area nº 1, Apéndice A, se aprecian los gránulos brillantes (señalados con flechas en la transparencia superpuesta) pertenecientes al extremo de sendos filamentos penumbrales. Aunque no pertenecen a filamentos penumbrales adyacentes, dada su proximidad y el hecho de que entre ambos filamentos haya otros dos extremadamente brillantes cuyo final se pierde en el espacio que separa a los gránulos señalados, nos hace esperar como muy razonable que el brillo en dicha región sea mayor o como mínimo igual al de la sombra de la mancha en una zona más adentrada.

La Fig.(5.16.a) nos muestra barridos(desde el 30 al 45) pertenecientes a la caja de matriz D1A que comprenden dicha zona intergranular (derecha del barrido), así como una zona adentrada en la sombra (centro-izquierda del barrido) y el borde de la penumbra correspondiente al lado opuesto (izquierda del barrido). En la Fig.(5.16.a)(resultado directo de la fotometría sin manipulación alguna), la estructura de los gránulos brillantes destaca nítidamente sobre el fondo de ruido a partir de los barridos núms. 34 y 35 y progresivamente se va haciendo más notoria conforme nos adentramos en la penumbra. Observese que la zona intergranular aparece siempre más brillante que la correspondiente a puntos adentrados en la sombra (parte centro-izquierda del barrido).





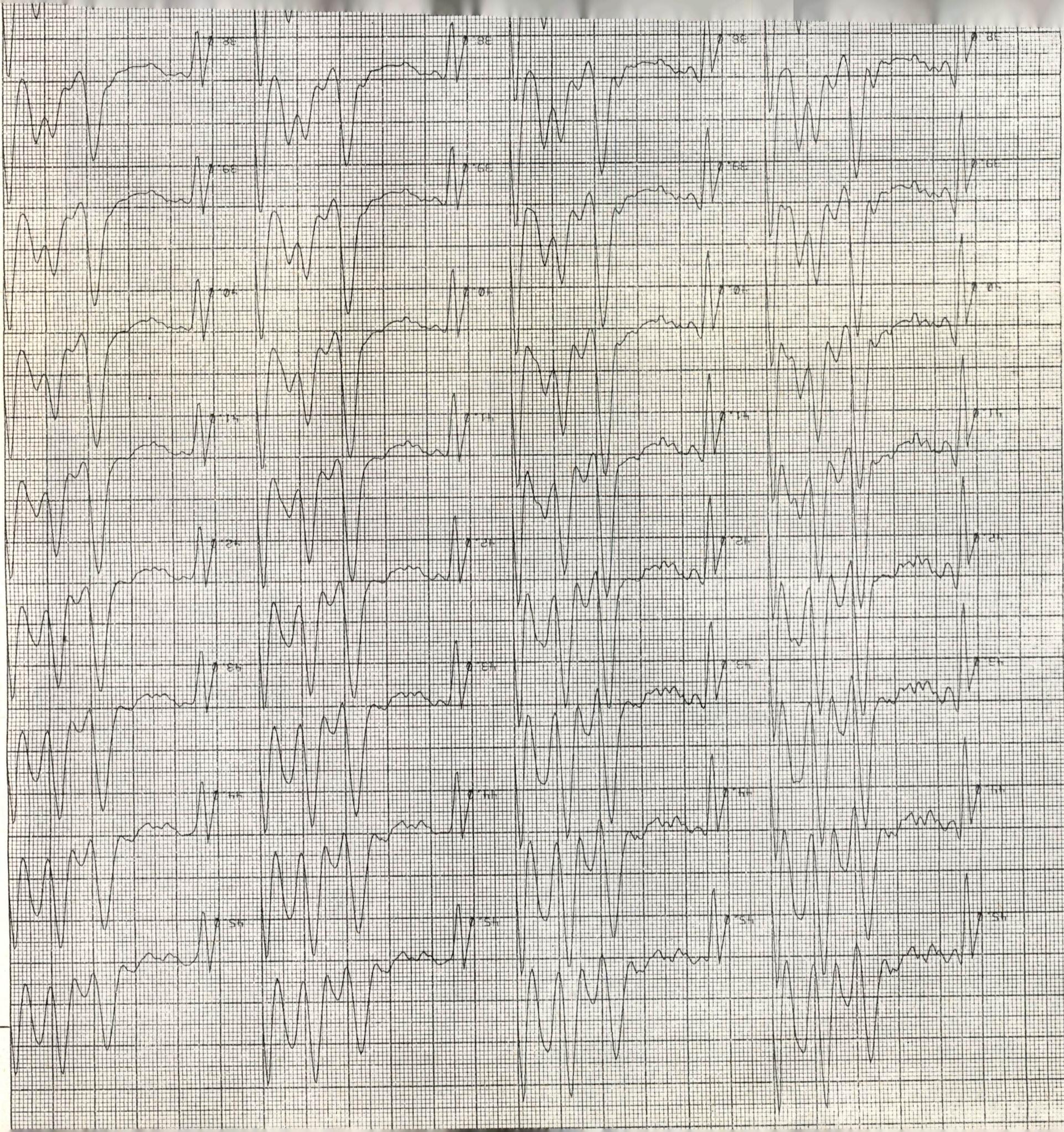
(d) $S/R=5$

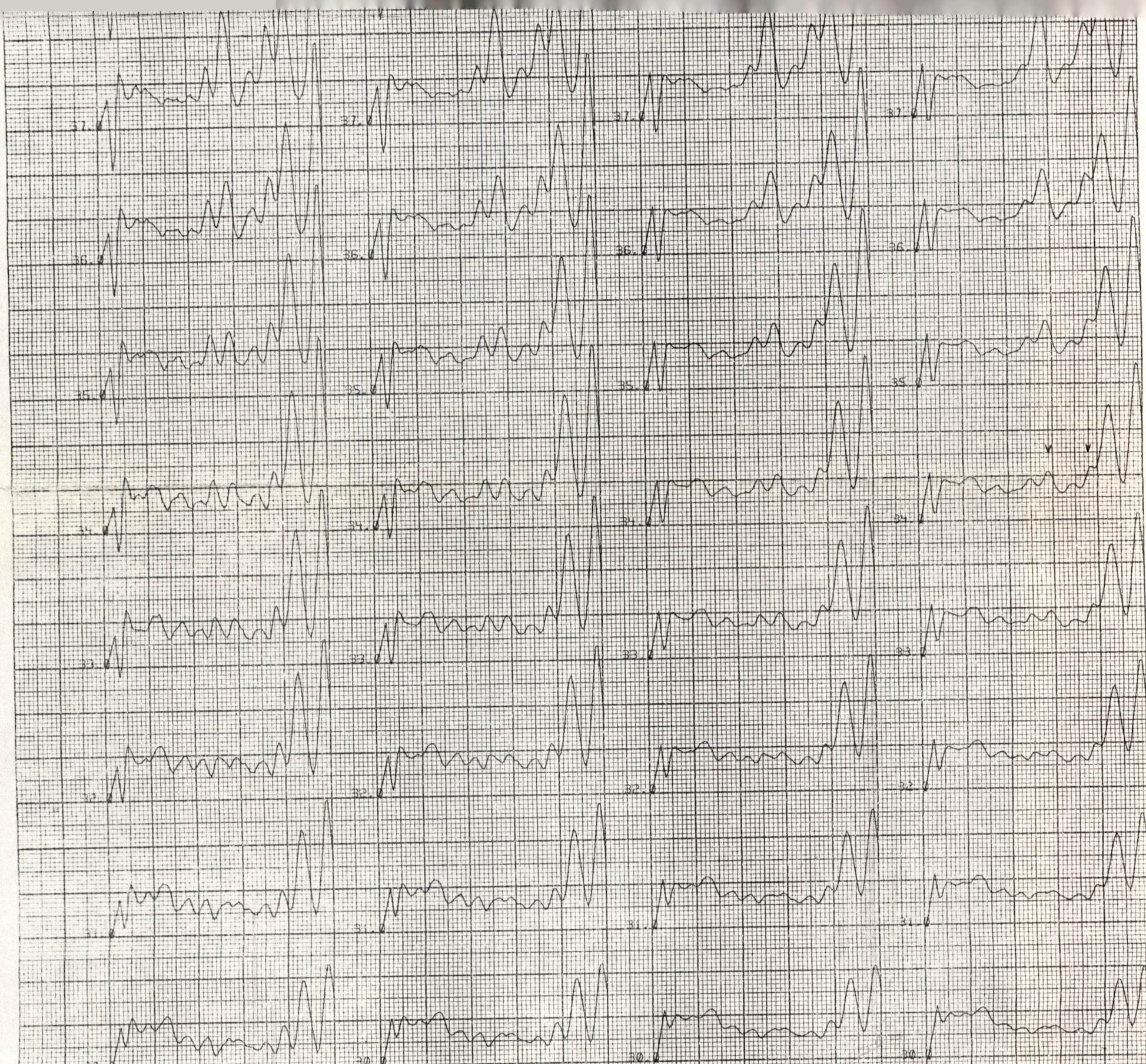
(c) $S/R=4$

(b) $S/R=3$

(a) Señal medida

Fig.(5.16)





(h) S/R=11

(g) S/R=9

(f) S/R=7

(e) S/R=6

Fig.(5.16) (Continuación)

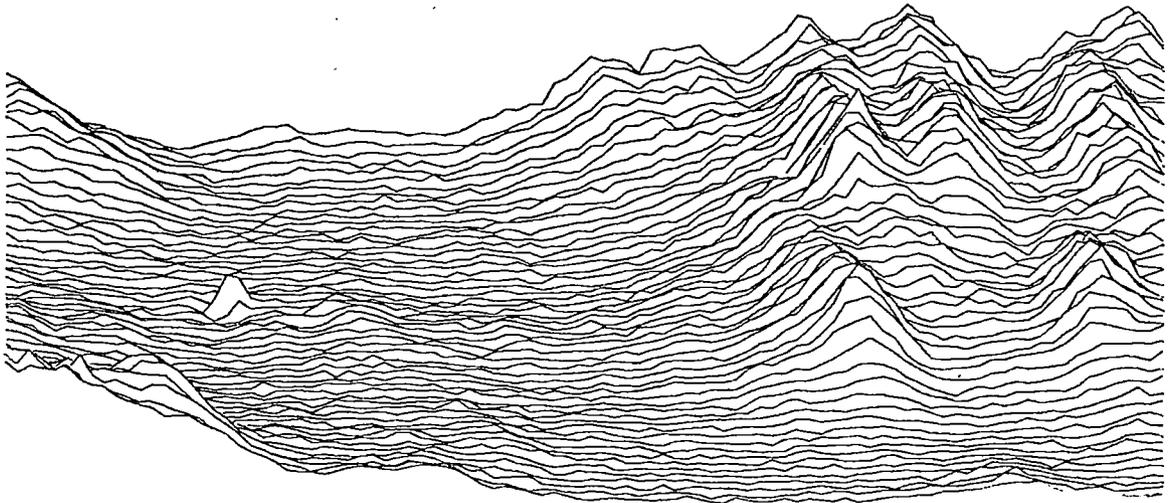
Fijemos nuestra atención en los barridos 34 y 35. En la Fig.(5.16.b) correspondiente a una restauración de D1A con S/R igual a 3, han desaparecido las oscilaciones de ruido y han sido resaltadas las estructuras correspondientes a las bajas frecuencias aunque el mínimo del espacio intergranular todavía no ha alcanzado el valor que corresponde a la zona umbral. Además la estructura correspondiente a uno de los gránulos - (el de la derecha) ha desaparecido prácticamente embebiéndose en otra estructura adyacente de mayor intensidad.

En la Fig.(5.16.c) correspondiente a la restauración con S/R = 4 la intensidad en el espacio intergranular de 34 se iguala a la de la sombra, no así todavía en el del 35. -- Por otra parte la estructura del gránulo de la derecha no queda claramente diferenciada de su adyacente.

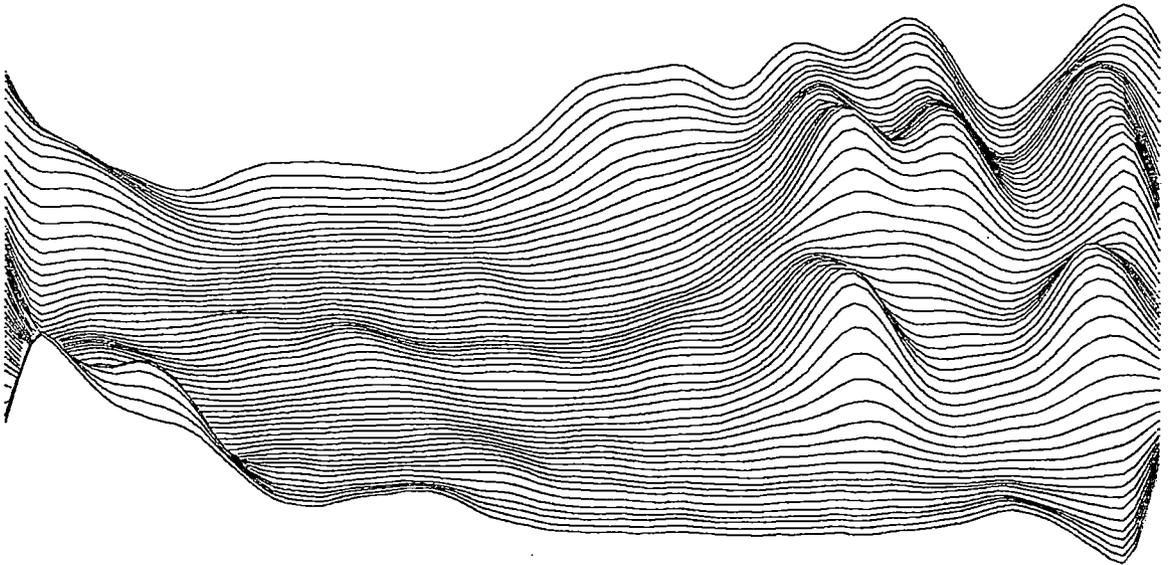
Para el valor S/R = 5, Fig.(5.16.d), se logra prácticamente una igualación del mínimo del espacio intergranular con la intensidad de la sombra en el barrido nº 35. Además el -- gránulo de la derecha comienza a destacarse de su estructura adyacente.

Valores de S/R superiores a 5 no modificarán apenas la citada igualación entre el mínimo de la zona intergranular - y la sombra del barrido 35. Sin embargo, para el valor S/R=6 ya debemos de alertarnos puesto que comienzan a resaltarse - estructuras que en la Fig(5.16.a) podíamos considerar muy -- bien como ruido. Todos estos comentarios extrapolados a las Figs.(5.16.f,g y h) nos llevan a la conclusión de que no parece adecuado sobrepasar el valor S/R = 6.

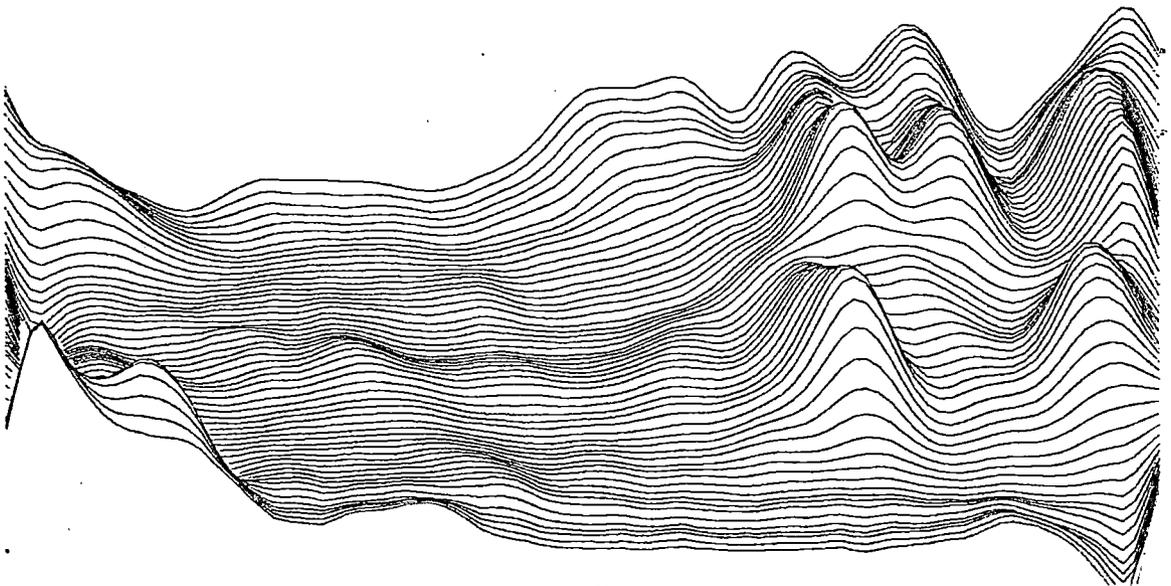
Las Figs.(5.17.a,b,c,d,e,f,g,h), representación tri-dimensional del área que estamos estudiando, nos confirma -- las conclusiones anteriores, si bien alcanzándose bajo un -- punto de vista más subjetivo.



(a)

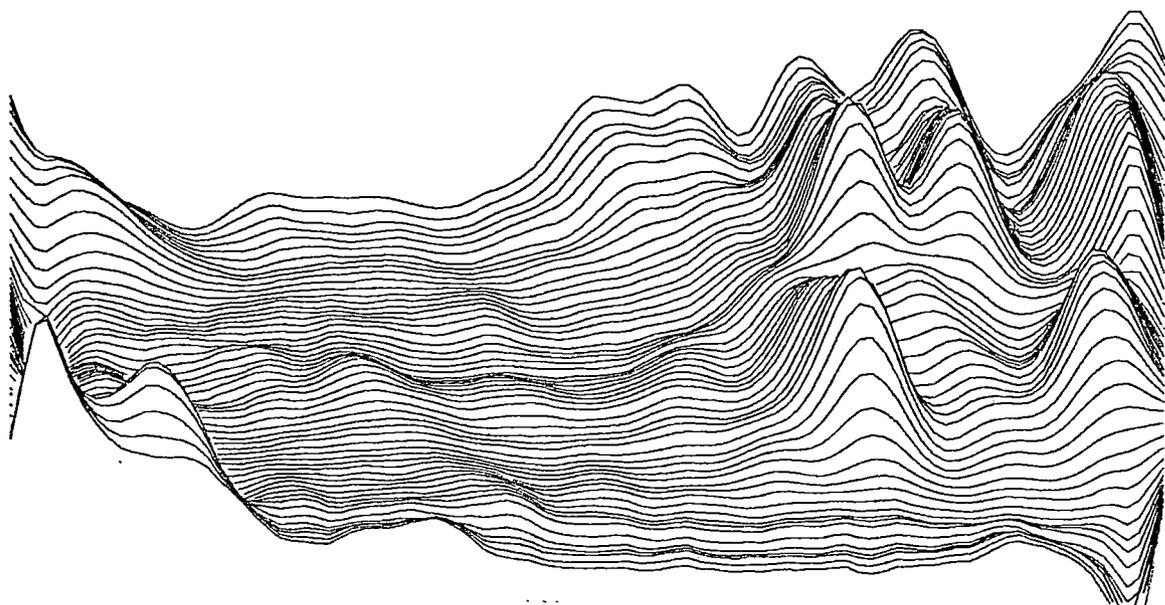


(b)

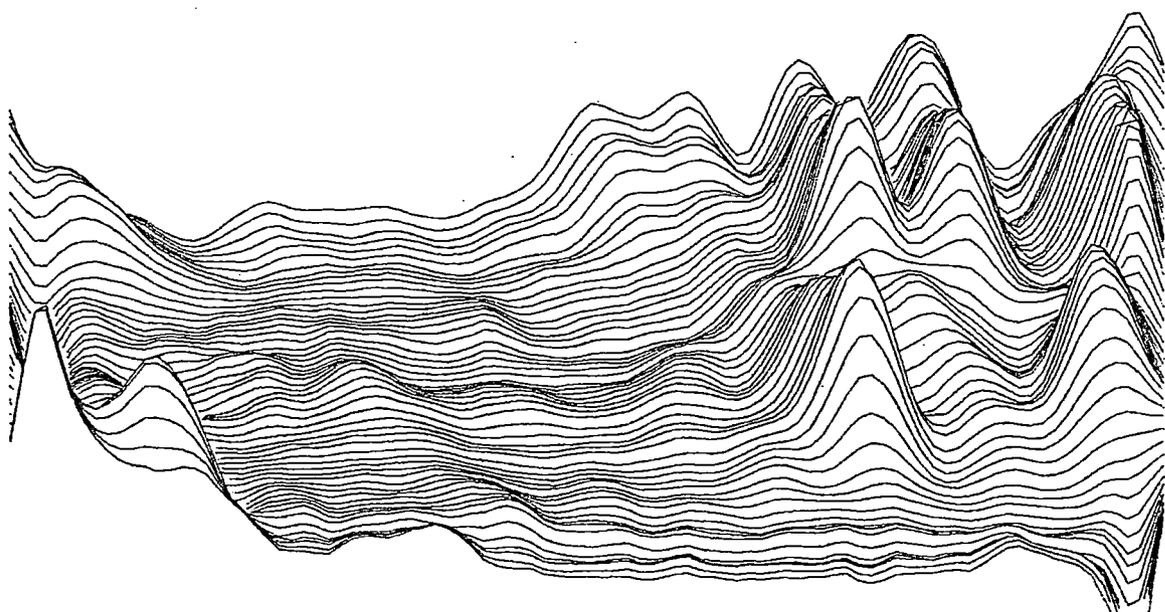


(c)

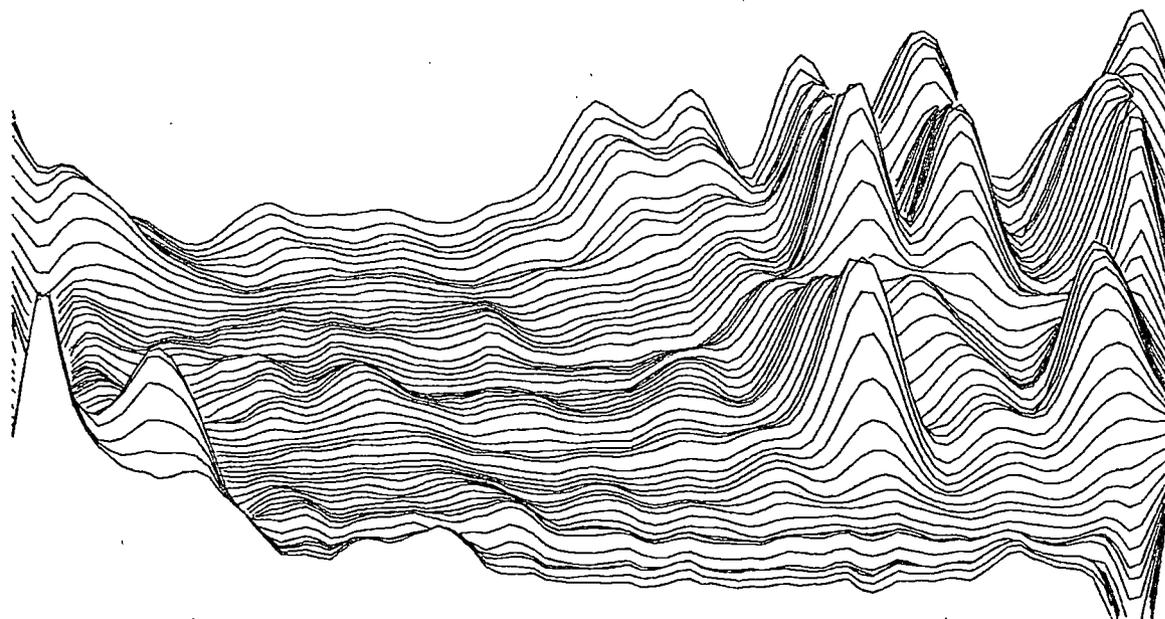
Fig.(5.17) Esta figura nos presenta un area medida y sus restauraciones para diferentes valores de S/R: (a) Señal medida, (b) S/R=3, (c) S/R=4, (d) S/R=5, (e) S/R=6, (f) S/R=7, (g) S/R=9, (h) S/R=11.



(d)

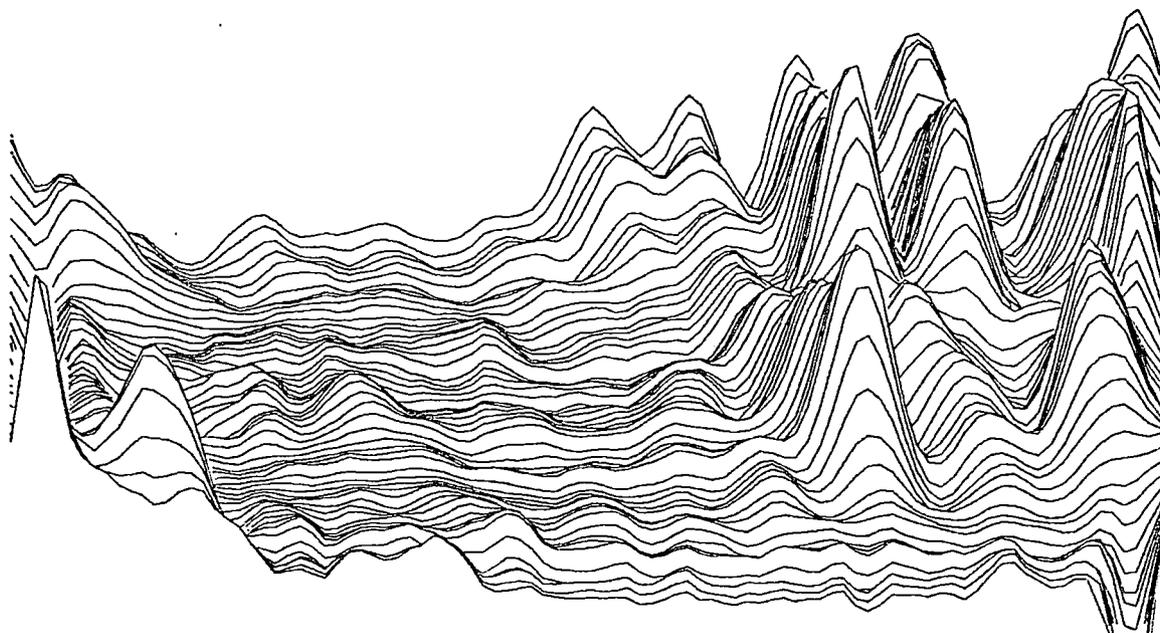


(e)

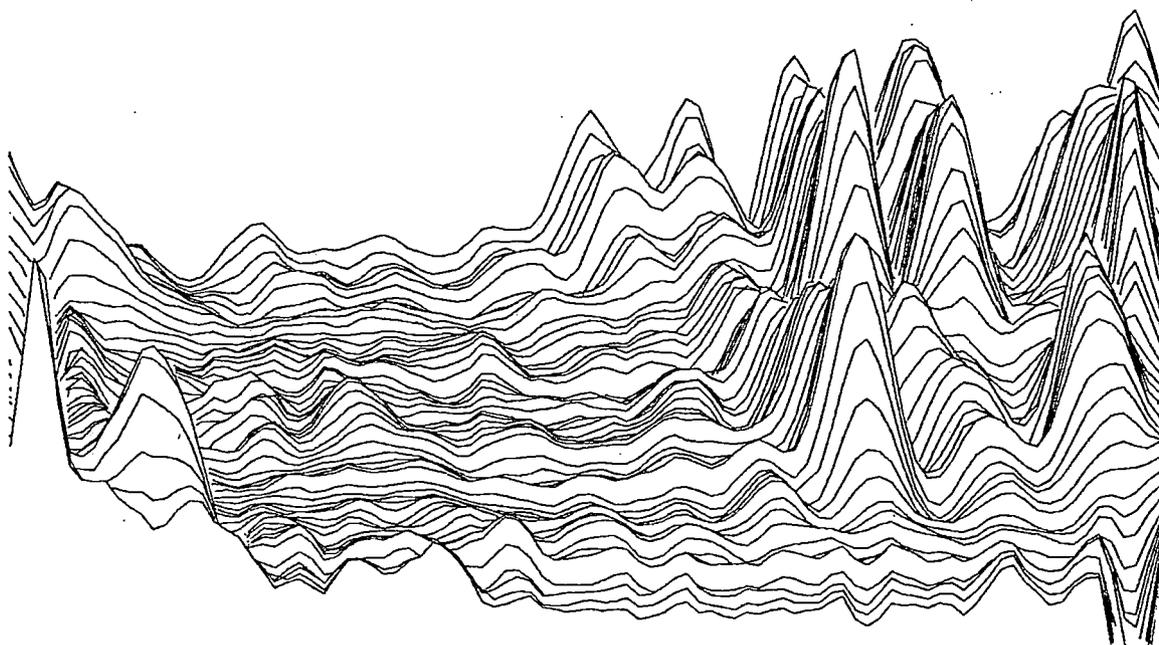


(f)

Fig.(5.17) (continuación)



(g)



(h)

Fig.(5.17) (continuación)

Resumiendo las conclusiones del Primer y Segundo métodos hemos acotado el valor buscado para S/R en el intervalo comprendido entre 4 y 6 por ello hemos decidido proceder a la restauración adoptando el valor S/R=5; hemos comprobado que una variación de ± 0.5 sobre esta estimación de S/R, produce en los valores restaurados variaciones relativas inferiores al 5% (salvo en zonas excepcionales donde el gradiente de intensidad es muy fuerte).

* Proceso operatorio del "Segundo Metodo"

(Segunda parte del organigrama de la Fig.(5.13)).

1) Programa "PROLONGA"

La matriz D1ATI es la caja A del área 1 de la placa nº 13 cuyos datos están expresados en intensidad como resultado del programa "CONVERS". En dicha caja se encuentra la zona intergranular y umbral en las que vamos a basar nuestra discusión. Ahora bien, la extracción de una caja de matriz supone la mutilación de la señal, lo cual trae consigo la aparición de fuertes discontinuidades en los contornos de dicha caja; discontinuidades que en el proceso de restauración darán origen a oscilaciones. Para que estas oscilaciones no contaminen nuestras estructuras de interés, hemos prolongado la matriz alrededor de la zona estudiada para que dicha zona quede alejada de cualquier borde. Este cometido de prolongación lo realiza el programa "PROLONGA" que deposita el resultado en D1ATIL.

2) Programas "FFTBI" y "RESBI"

El programa "RESBI" ejecuta el proceso de restauración óptima en el dominio transformado (ver expresión (5-20)). Por lo tanto previa a la actuación de "RESBI" necesitamos "FFTBI" para calcular la transformada de Fourier. El proceso de tanteo en la restauración se lleva a cabo para los valores S/R = 3,4,5, 6,7,9 y 11 con lo que obtendremos otros tantos ficheros de salida: D1AILFn. El programa FFTBI, nos devuelve de nuevo al dominio de medida depositando los datos en D1ATILn.

3) Programa "EXCEPCION"

Este programa dibuja mediante plotter, uno por uno, los barridos que recogen la zona de interés en discusión, para -- construir la Fig.(5.16)

4) Programa "NUCLEO"

La actuación de este programa es inversa a la del programa PROLONGA. Una vez realizada la restauración elimina los bordes de la matriz que rodean a la zona de interés, suprimiendo por tanto en dicha eliminación los fenómenos de oscilación en los bordes. Los resultados son depositados en D1AILnN, que dando en disposición para que el programa REGLA4 realice los dibujos de la Fig.(5.17).

CAPITULO VI

=====

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

VI.1.-DESCRIPCION DEL PROCESO DE MEDIDA DE LOS PARAMETROS FISICOS PENUMBRALES.

VI.1.1.-Géneralidades:

Daremos primeramente algunos datos geométricos sobre la situación en el disco solar de la mancha, perteneciente a la región activa McMath 12417, en la que se centra nuestro interés. La película de la cual hemos extraído las fotos de nuestro estudio fué realizada sobre las 11^h de la mañana del 30 de Junio de 1973, cuando la Luna procedía a la ocultación de la mancha. A esta hora hemos estimado que las coordenadas heliográficas de la mancha eran: $B=12^\circ$ y $L=70.5^\circ$ siendo el ángulo $B_0=2.68^\circ$; el ángulo heliocéntrico de la mancha lo hemos calculado a partir de la expresión:

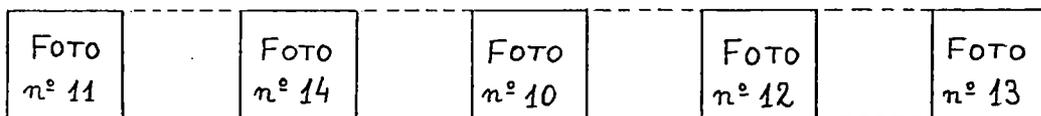
$$\cos \theta = \text{sen}B \cdot \text{sen}B_0 + \cos B \cdot \cos B_0 \cdot \cos L$$

de donde $\cos \theta = 0.335877 \implies \theta = 70.37^\circ$

Como se puede apreciar este valor es bastante elevado lo cual nos supondrá el hacer algún tipo de correcciones que más adelante expondremos.

En el Apéndice podemos ver las cinco fotografías seleccionadas para la fotometría. Como se puede apreciar (obser-

vando la fracción de mancha ocultada por la Luna) el orden en que las hemos dispuesto no se corresponde con el orden cronológico en que fueron tomadas; la disposición, así como los números asignados a las fotos (10,11,12,13 y 14) responde al orden en que fueron realizadas sus respectivas fotometrías, y hemos respetado esta ordenación por razones de índole práctico. No obstante en el siguiente esquema reseñamos el auténtico orden cronológico.



De todas las áreas fotometradas sobre estas cinco placas (un total de nueve áreas), hemos escogido como "principales" las siguientes:

FOTO Nº 11 —————> Área nº 1 , (150x150) pixels
 FOTO Nº 13 —————> Área nº 1 , (180x150) pixels
 FOTO Nº 14 —————> Área nº 5 , (150x150) pixels

Estas áreas reúnen la condición de ser de las más grandes que hemos fotometrado, además presentan una buena resolución y corresponden a zonas diferentes sobre la penumbra. Sobre éstas áreas, después de haber procedido a su restauración, hacemos la medida de los parámetros físicos pertinentes.

Por otra parte hemos seleccionado como "secundarias" las siguientes áreas:

FOTO Nº 10 —————> Área nº 1 , (100x120) pixels
 FOTO Nº 12 —————> Área nº 1 , (140x110) pixels
 FOTO Nº 12 —————> Área nº 2 , (140x150) pixels

Estas áreas corresponden a zonas incluidas dentro de las llamadas áreas principales. Las medidas hechas sobre éstas áreas, tras su restauración, nos servirán para corroborar las realizadas sobre las principales (proporcionándonos así una

manera de comprobar la consistencia de nuestro método y si la estimación de las funciones de dispersión en las distintas placas ha sido correcta).

Todas éstas áreas están reseñadas en las transparencias superpuestas a las fotografías del Apéndice .

En las áreas principales hemos restaurado matrices de 150×150 , es decir la totalidad del área en las FOTOS 11 y 14, y los 150 primeros barridos del área nº 1 de la FOTO 13. Dada la limitada capacidad de nuestro ordenador solamente podemos procesar matrices de 96×96 por lo que cada matriz grande de 150×150 la hemos desglosado en cuatro cajas solapadas de 96×96 (ver Fig.(6.1)).

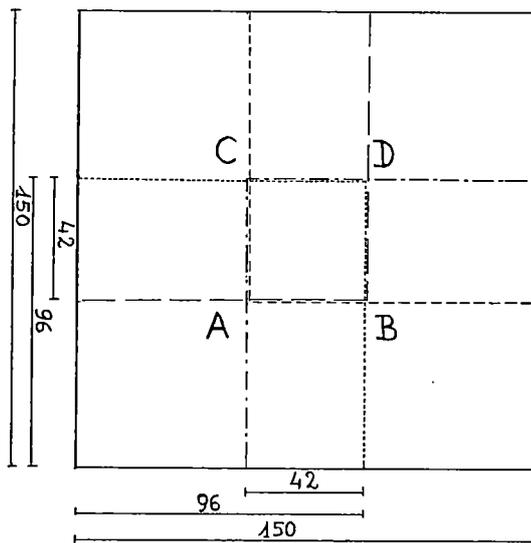


Fig.(6.1)

Según vimos en el Capítulo III la limitación de la señal lleva consigo, al calcular su transformada de Fourier, la aparición de oscilaciones en las zonas de variación abrupta, como pueden ser los bordes de la matriz. De una manera empírica hemos deducido que estas distorsiones afectan a un reborde, alrededor de cada matriz restaurada, constituido por aproximadamente 10 filas y 10 columnas. Puesto que el solapamiento de las cajas de matriz afecta a 42 filas y 42 columnas (ver Fig.(6.1)), el acoplamiento de las cuatro cajas de 96×96 , ya restauradas,

nos permite suprimir holgadamente la distorsión en las zonas centrales de la matriz grande (de 150x150), aunque no podremos eliminar las oscilaciones en los bordes externos de dicha matriz.

VI.1.2.-Definición de los parámetros físicos a medir:

Una vez realizada la restauración de un área problema - dibujamos mediante plotter el perfil de cada una de sus filas (intensidad frente a posición). En base de estos perfiles hemos hecho las siguientes medidas:

a) Intensidad de los filamentos brillantes y oscuros

Sobre el perfil de cada barrido restaurado hemos medido la altura (intensidad) de cada máximo o mínimo relativos. Simultáneamente examinamos un positivo de la mancha optimamente realizado de forma que contenga en el mayor grado posible toda la información del negativo. De los máximos y mínimos medidos solamente hemos considerado los que se corresponden con estructuras reconocibles en el positivo; los demás los hemos desechado como inciertos o posible ruido residual. Así pues, solamente hemos medido valores de brillo en las zonas penumbrales dentro de las áreas principales en donde se aprecia una cierta estructura al examinar el positivo, y hemos eliminado, en nuestro análisis, las zonas borrosas o mal resueltas.

El brillo de las estructuras penumbrales lo hemos referido al de la fotosfera circundante. Las medidas de que disponemos sobre el brillo de la fotosfera son las realizadas en los barridos de transición Luna-Fotosfera para determinar la función de dispersión; estas medidas están realizadas en zonas relativamente alejadas (a veces hasta 15 seg. de arco o más) del área penumbral sobre la que estamos midiendo el brillo. Si la mancha estuviera en el centro del disco solar este alejamiento no plantearía problema, sin embargo siendo $\theta = 70.37^\circ$ el oscurecimiento del borde puede suponer un cierto error a considerar. Para hacernos una idea de la importancia de este error hagámos

una estimación de la variación de intensidad entre dos puntos del disco separados en la imagen 15 seg. de arco y situados en un ángulo heliocéntrico de 70.37° (teniendo en cuenta que el día 30 de Junio de 1973 el radio solar subtendía un ángulo de 945.38 seg. de arco).

De acuerdo con la Fig.(6.2) podemos escribir:

$$\alpha = \frac{L}{R_0} = \frac{\frac{15''}{\cos(70.35^\circ)}}{945.38''} = 0.0472 \text{ rad.} = 2.706^\circ$$

y suponiendo que la variación de la intensidad en el disco solar en función de θ se aproxima bastante a la que correspondería a una atmósfera gris dada por

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right)$$

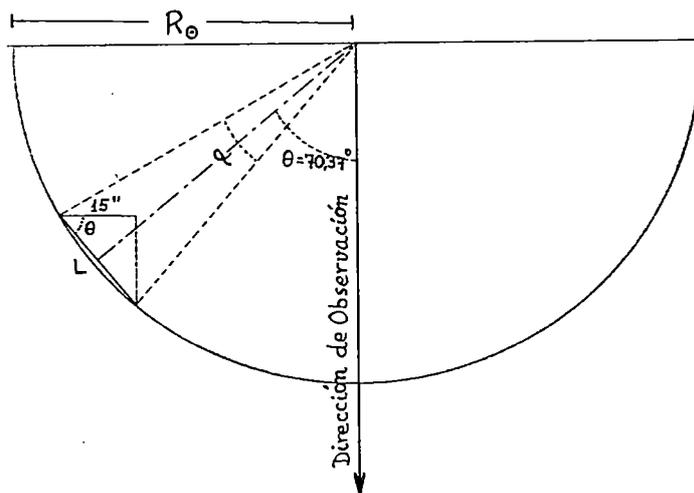


Fig.(6.2)

resulta

$$\frac{I(70.37^\circ)}{I(0)} = 0.601567$$

$$\frac{I(70.37^\circ + 2.706^\circ)}{I(0)} = 0.574661$$

lo cual supone una variación del orden del 4.5%. Así -- pues, para cada placa hemos hecho una estimación de la distancia entre la zona en donde se ha determinado el brillo fotosférico y el centro del área penumbral que estamos estudiando, y en base de esta distancia hemos realizado la oportuna corrección en el brillo fotosférico estimado.

b) Anchura de los filamentos penumbrales

Es prácticamente imposible dar una definición de anchura de un filamento penumbral que responda a la realidad física de su estructura ya que es difícil establecer cual es exactamente esta estructura. Sin embargo en base de nuestras observaciones hemos adoptado un parámetro al cual denominaremos "anchura del filamento". La estimación de estas anchuras ha sido hecha sobre el perfil de cada barrido. Para que nuestra definición de anchura quede suficientemente clara procedemos de manera práctica di bujando un fragmento de perfil de un hipotético barrido (ver - Fig.(6.3)).

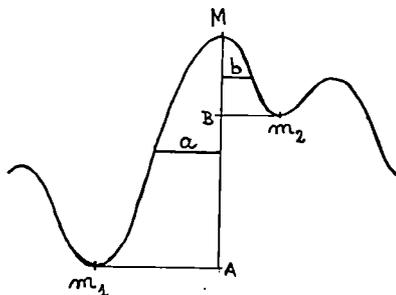


Fig.(6.3)

Sea M uno de los máximos relativos del barrido y m_1 y m_2 sus dos mínimos adyacentes. Trazamos la vertical por M y sendas tangentes a la curva en m_1 y m_2 . Por los puntos medios de los segmentos MB y MA trazamos horizontales hasta que corten la curva. La suma $a + b$ de los segmentos que resultan es lo que definimos por anchura del filamento M , estimada en este barrido en particular.

Hay que tener en cuenta un factor de corrección. La dirección en que se ha realizado el barrido no siempre ha sido perpendicular al filamento, lo cual conlleva una sobrevaloración de la anchura del filamento (ver Fig.(6.4)).

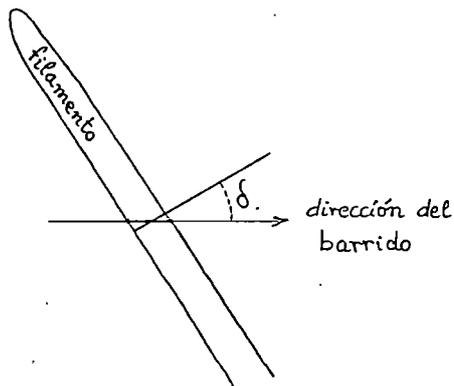


Fig.(6.4)

Afortunadamente en las zonas estudiadas la disposición de los filamentos es prácticamente paralela, por lo cual el ángulo δ diferirá muy poco de unos filamentos a otros dentro de la misma zona. En cada área estudiada hemos medido δ para los principales filamentos y hemos tomado un valor medio. Los resultados son:

| | |
|------------------------|------------------------|
| Area nº 1 (FOTO Nº 11) | $\delta = 0^\circ$ |
| Area nº 1 (FOTO Nº 13) | $\delta = 11.4^\circ$ |
| Area nº 5 (FOTO Nº 14) | $\delta = 27.56^\circ$ |

c) Contraste

La estimación del contraste entre los filamentos claros y oscuros la hemos hecho mediante la expresión:

$$\frac{\bar{I}_b - \bar{I}_{osc}}{\frac{1}{2} [\bar{I}_b + \bar{I}_{osc}]}$$

en donde \bar{I}_b es el valor medio de los máximos e \bar{I}_{osc} el valor medio de los mínimos (promediando sobre un barrido, un área o varias áreas, obteniendo en cada caso respectivamente el contraste en un barrido, área o conjunto de áreas).

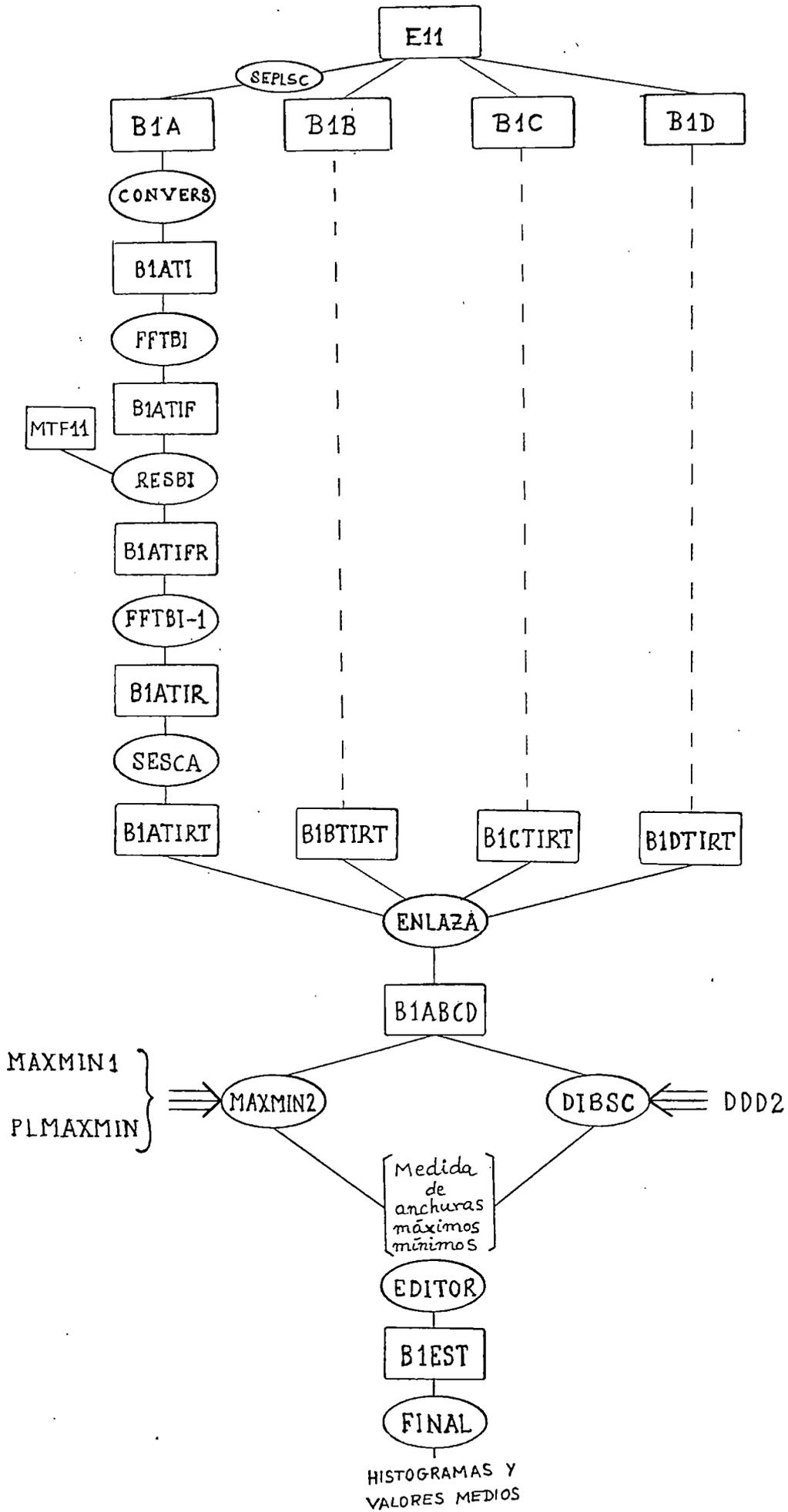
VI.1.3.-Proceso operatorio:

El conjunto de programas Fortran correspondientes a esta fase final del trabajo constituyen un bloque que denominaremos "MODULO MEDIDA" cuyo organigrama está representado en la Fig.(6.5) y que a continuación pasamos a comentar.

1) La primera parte de este organigrama nos resulta ya conocida a través de MODULO RESTAURACION. En ella tomamos del depósito de la fotometría, E_n , las subareas A,B,C, y D (cada una de 96x96 pixels) correspondientes al área en estudio (para fijar ideas, en el histograma, hemos representado el caso concreto de restauración de la FOTO N° 11, área n° 1, que utilizando la nomenclatura introducida en el Capitulo V, la denotaremos por B1). A continuación el programa "CONVERS" -- transforma los datos expresados en transmitancias a intensidades y procedemos a la restauración (para S/R=5) mediante los programas "FFTBI" y "RESBI". Finalmente el programa "SESCA" traspone las matrices resultantes, por conveniencia operativa, resultando las cuatro cajas de matriz que tenemos que ensamblar (en este ejemplo: B1ATIRT,B1BTIRT,B1CTIRT,B1DTIRT). Para ilustrar este proceso, en la Fig.(6.6.a y b), hemos representado, utilizando el programa "REGLA4", una de las cajas antes y después de la restauración. En la Fig.(6.6.b) se aprecian los efectos oscilatorios del borde.

2) Programa "ENLAZA"

Conjunta las cuatro cajas resultantes del paso anterior para componer la matriz (de 150x150) que constituye la restauración del área problema (en el ejemplo del organigrama denotamos la matriz final por B1ABCD, que es la restauración de B1).



ORGANIGRAMA DEL MODULO MEDIDA

Fig.(6.5)

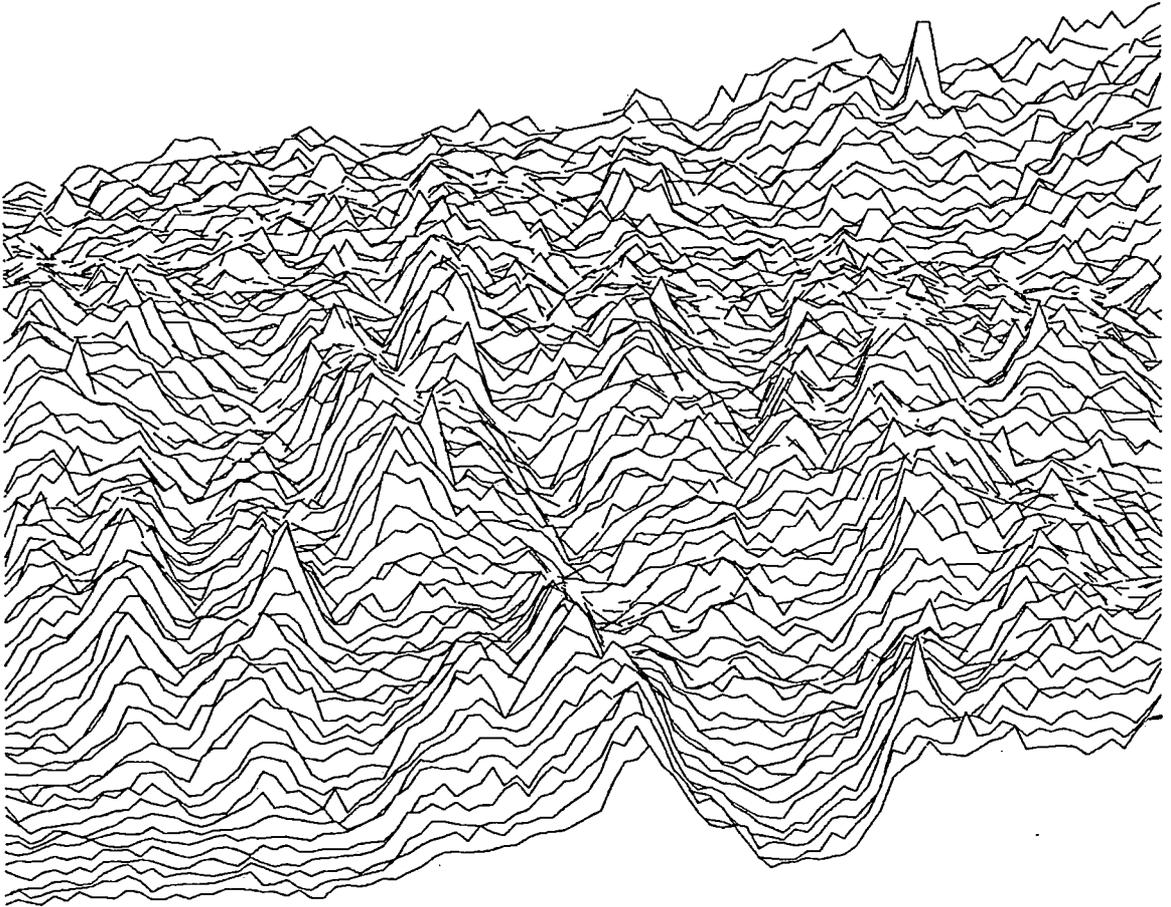


Fig.(6.6.a)

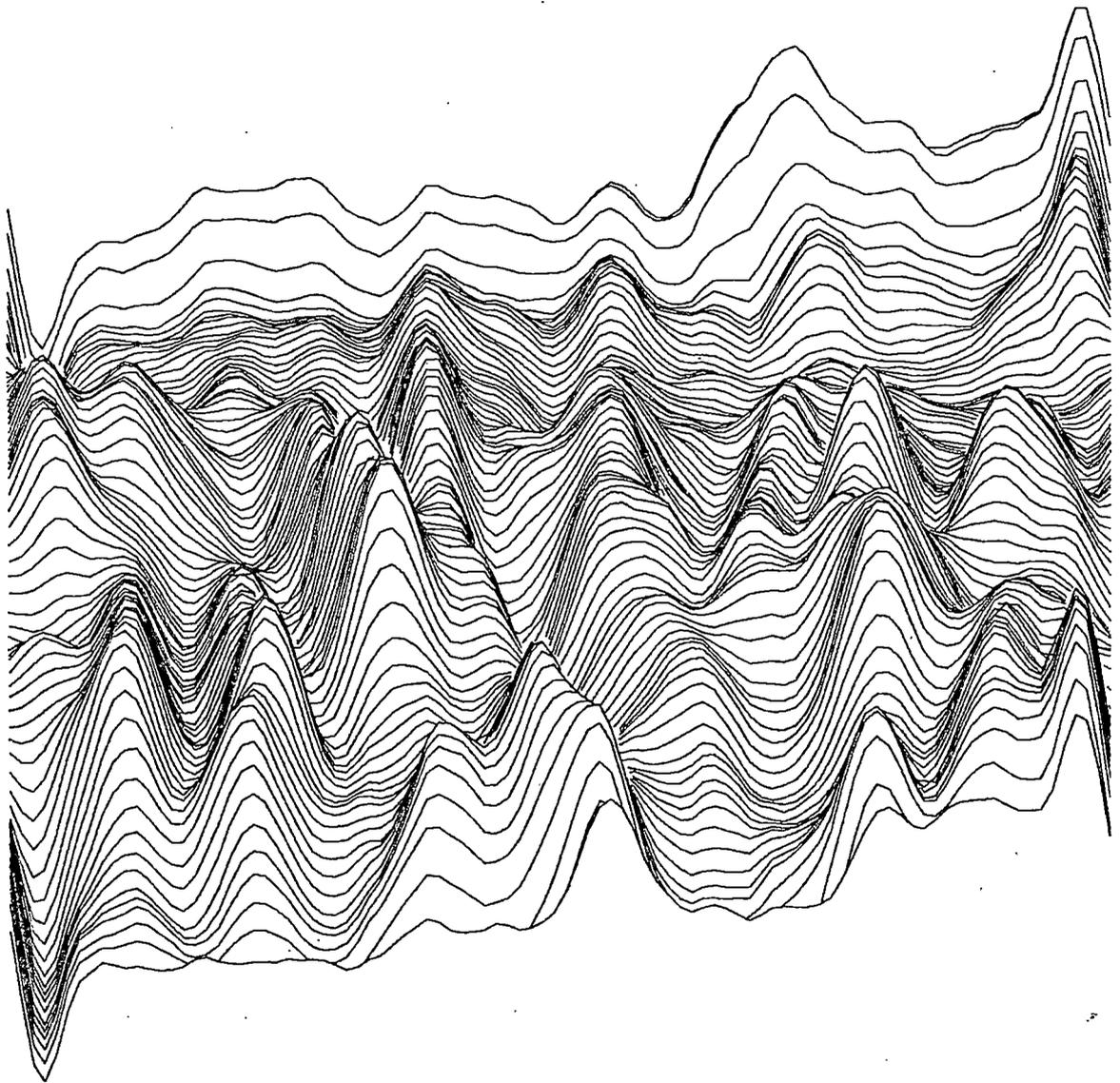
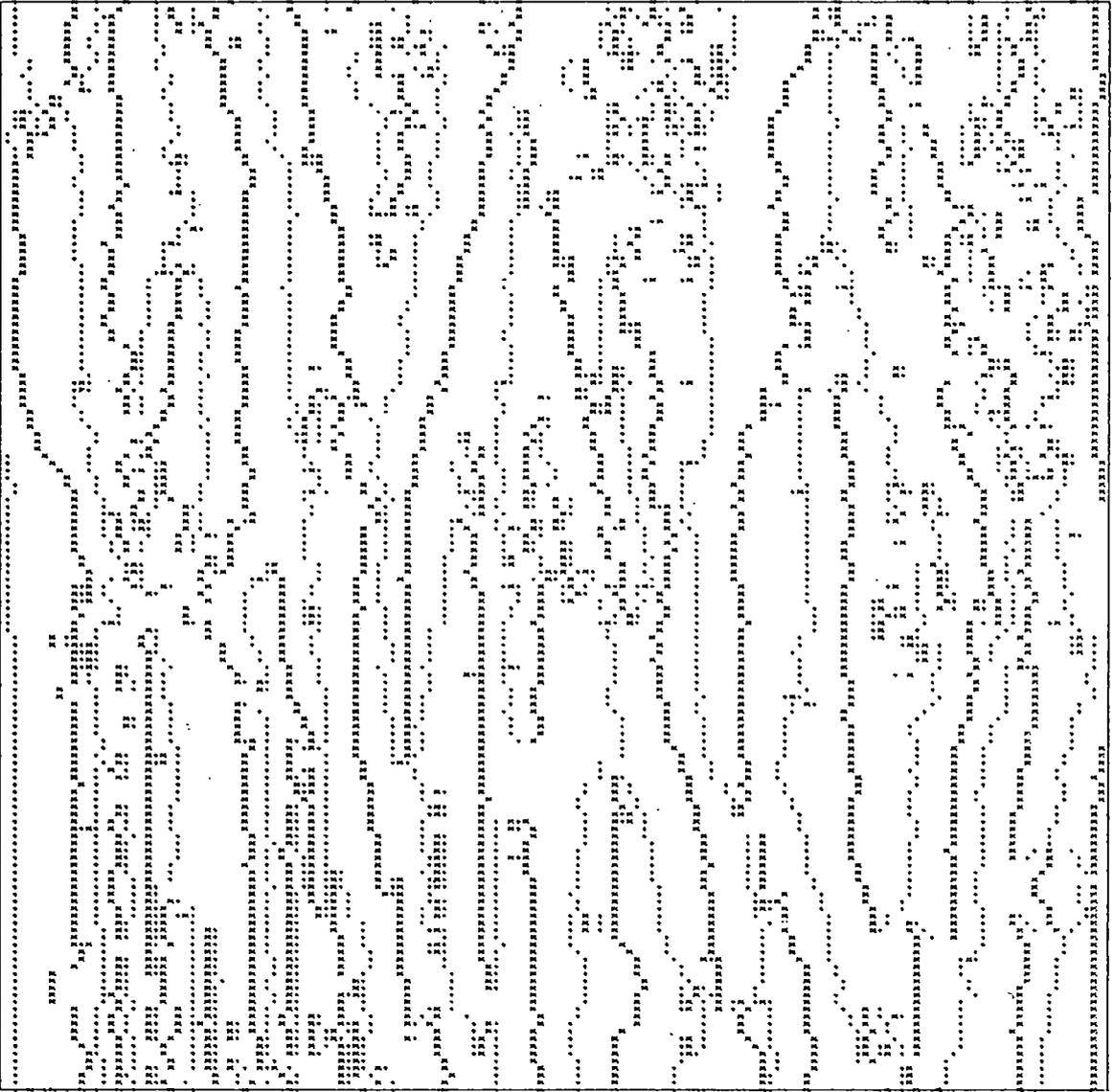
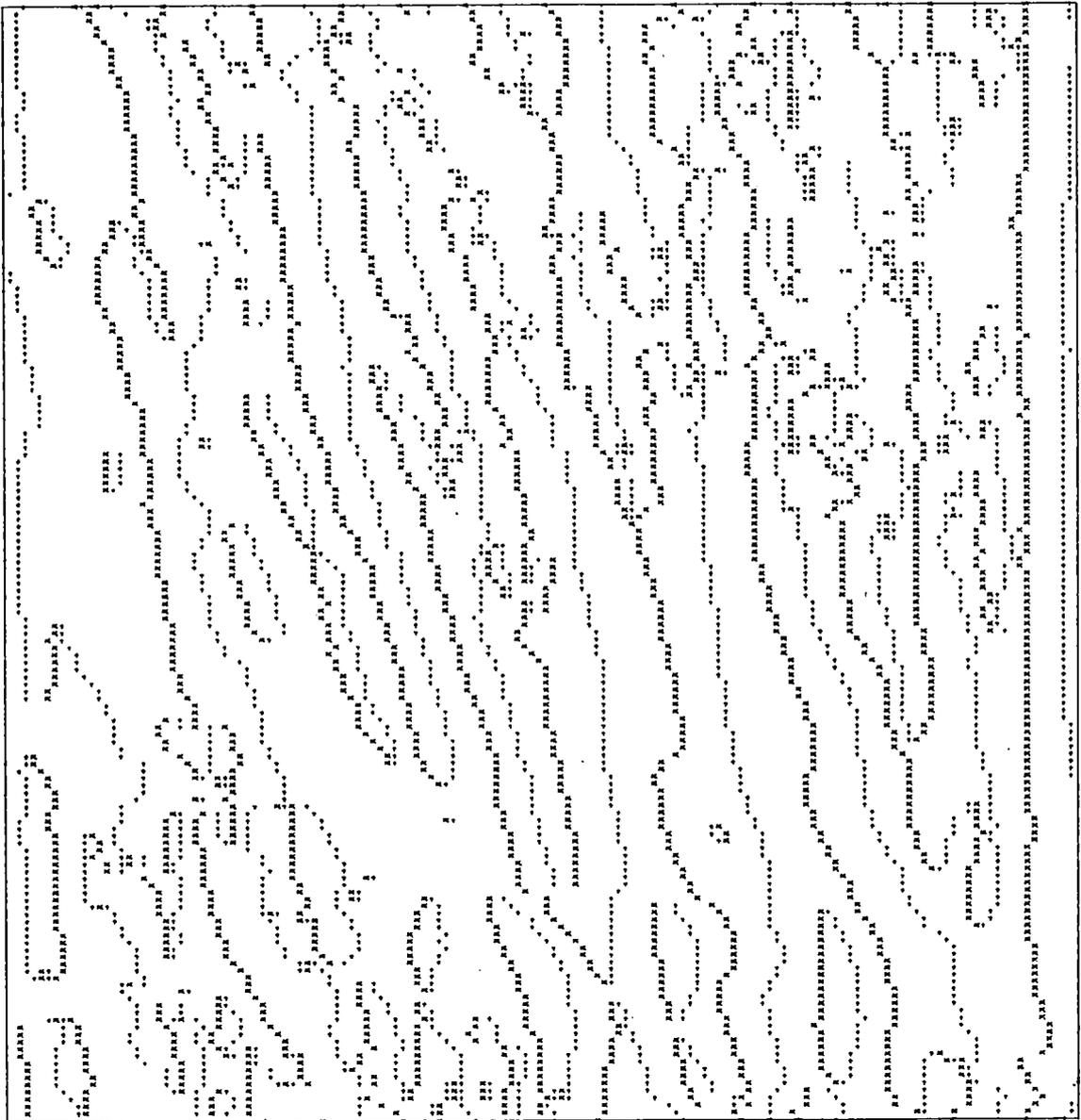


Fig.(6.6.b)



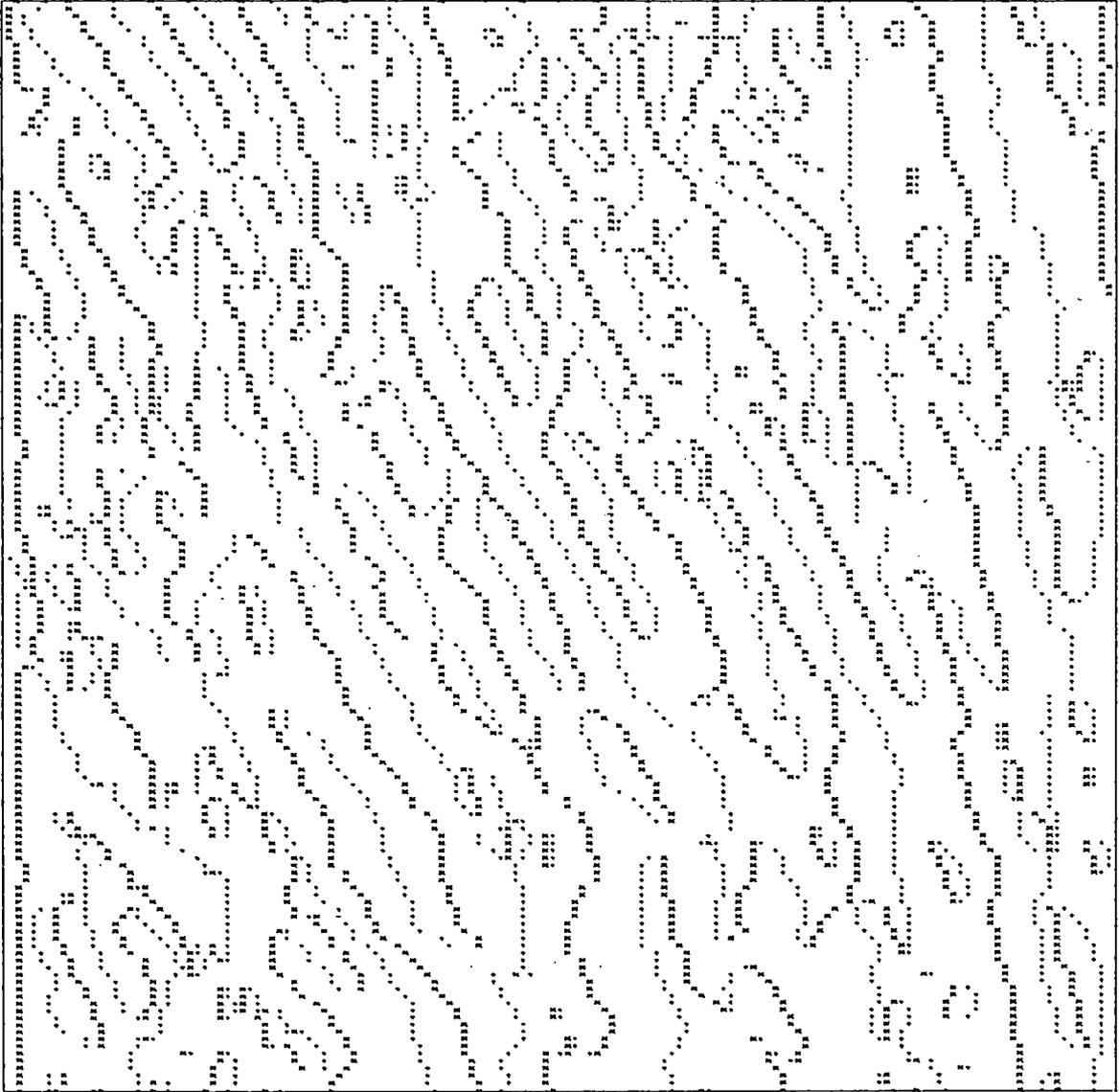
(a) FOTO 11 - AREA n° 1

Fig.(6.7) Mapas de máximos y mínimos



(b) FOTO 13 - AREA nº 1

Fig.(6.7) (continuación)



(c) FOTO 14 - AREA nº 5

Fig.(6.7) (continuación)

3) Programas "MAXMIN2" y "DIBSC"

Sobre la matriz total restaurada actúan estos dos programas elaborando gráficos y listados sobre los que basaremos las medidas de los parámetros físicos de la penumbra. Así, el programa "MAXMIN2" detecta para cada barrido la intensidad y posición de los máximos y los mínimos listando estos valores por impresora y produciendo simultáneamente (a través de plotter) un mapa en donde constan los máximos representados por "x" y los mínimos por "+", quedando perfectamente delineadas las orientaciones de los filamentos (ver Fig.(6.7.a.byc) . Sobre dichos mapas mediremos el valor del ángulo δ de desviación del barrido respecto de la perpendicular al filamento. El programa "DIBSC" dibuja mediante plotter cada uno de los barridos del área reataurada. Sobre éste dibujo mediremos las anchuras de los filamentos en cada uno de los barridos, y también con ayuda del listado elaborado por MAXMIN2 y una fotografía del área, seleccionaremos los valores a considerar como correspondientes a auténticas estructuras penumbrales. Finalmente mediante el EDITOR confeccionaremos sendas listas para máximos, mínimos y anchuras, depositándolas en un fichero en disco (en el ejemplo considerado en el organigrama: B1EST).

4) Programa "FINAL"

Este programa trabaja sobre el fichero elaborado en el paso anterior, produciendo histogramas en donde se representan las anchuras y los valores de brillo en los filamentos brillantes u oscuros frente al número de veces que aparecen dichos valores en nuestras medidas. También calcula los valores medios de estos parámetros físicos medidos, así como el contraste.

VI.2.-RESULTADOS:

En las Tablas I,II y III hemos expresado los resultados correspondientes al análisis realizado respectivamente sobre las áreas nº 1 (FOTO 11), nº 1 (FOTO 13) y nº5 (FOTO 14). Cada una de estas Tablas va acompañada de la correspondiente representación gráfica de sus histogramas. La Tabla IV resume el resultado del análisis conjunto de las tres áreas citadas.

TABLA I

| FOTO 11 - AREA n° 1 | | | | | |
|---|------------|---|------------|--|------------|
| MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MAXIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MINIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE ANCHURAS (en segundos de arco) | |
| Nº de medidas: 979 | | Nº de medidas: 1139 | | Nº de medidas: 979 | |
| Valor medio $\left(\frac{I_b}{I_f}\right) = 0.551$ | | Valor medio $\left(\frac{I_{osc}}{I_f}\right) = 0.426$ | | Valor medio = 0.363 | |
| Histograma Fig.(6.8.a) | | Histograma Fig.(6.8.b) | | Histograma Fig.(6.8.c) | |
| I_b/I_{fot} | Frecuencia | I_{osc}/I_{fot} | Frecuencia | Anchura | Frecuencia |
| 0.250 | 1 | 0.150 | 3 | 0.100 | 3 |
| 0.275 | 3 | 0.175 | 5 | 0.150 | 14 |
| 0.300 | 1 | 0.200 | 3 | 0.200 | 38 |
| 0.325 | 2 | 0.225 | 6 | 0.250 | 61 |
| 0.350 | 5 | 0.250 | 3 | 0.300 | 179 |
| 0.375 | 4 | 0.275 | 3 | 0.350 | 193 |
| 0.400 | 7 | 0.300 | 15 | 0.400 | 203 |
| 0.425 | 7 | 0.325 | 18 | 0.450 | 117 |
| 0.450 | 27 | 0.350 | 49 | 0.500 | 83 |
| 0.475 | 60 | 0.375 | 76 | 0.550 | 48 |
| 0.500 | 135 | 0.400 | 184 | 0.600 | 19 |
| 0.525 | 111 | 0.425 | 206 | 0.650 | 5 |
| 0.550 | 133 | 0.450 | 165 | 0.700 | 5 |
| 0.575 | 145 | 0.475 | 151 | 0.750 | 7 |
| 0.600 | 112 | 0.500 | 135 | 0.800 | 2 |
| 0.625 | 68 | 0.525 | 48 | 0.850 | 1 |
| 0.650 | 62 | 0.550 | 37 | 0.900 | 0 |
| 0.675 | 39 | 0.575 | 20 | 0.950 | 1 |
| 0.700 | 20 | 0.600 | 7 | | |
| 0.725 | 19 | 0.625 | 5 | | |
| 0.750 | 11 | | | | |
| 0.775 | 7 | | | | |
| Contraste medio: 0.256 | | | | | |

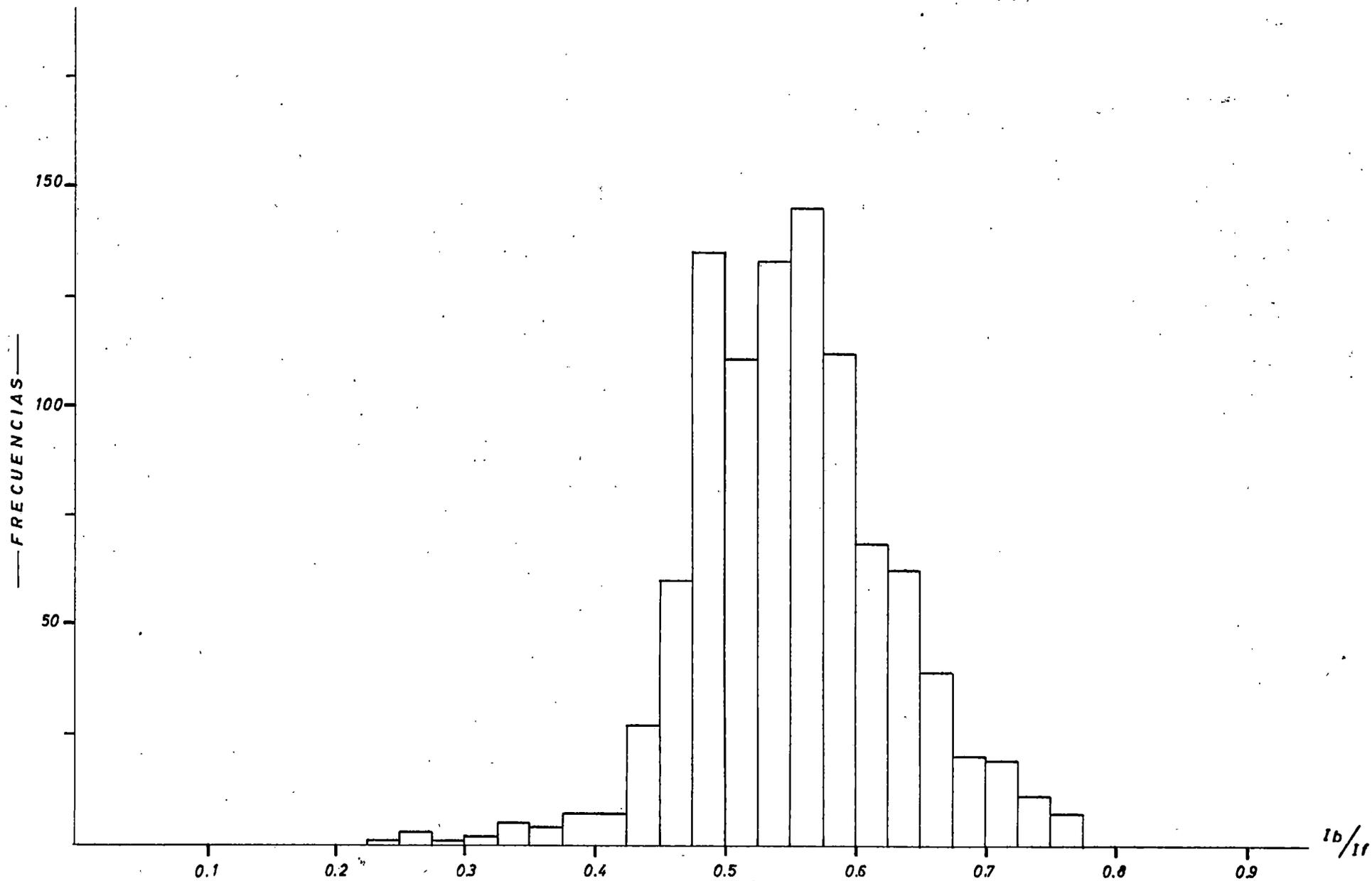


Fig.(6.8.a) FOTO 11 - AREA nº 1. Histograma de intensidad en los filamentos brillantes

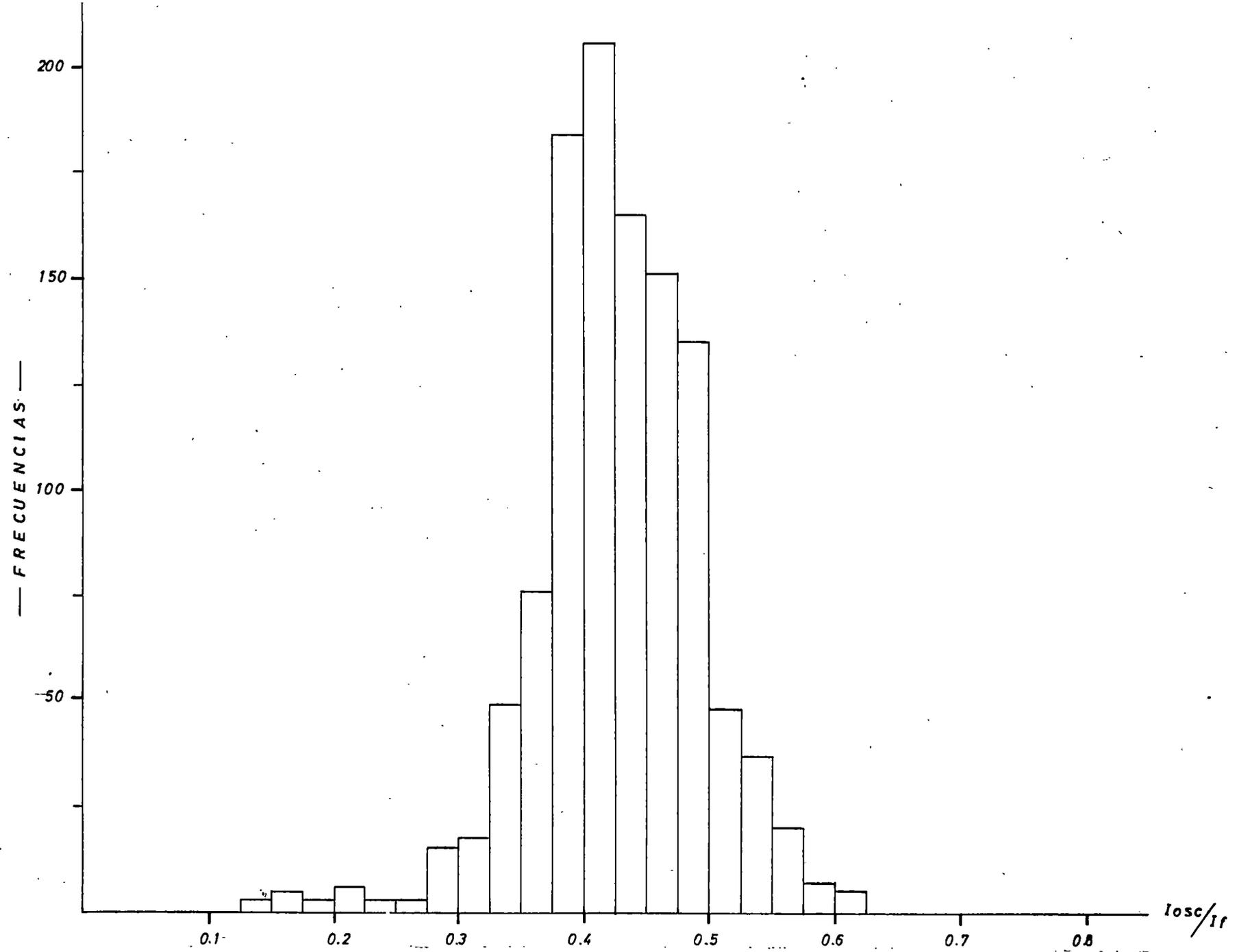


Fig.(6.8.b) FOTO 11 - AREA nº 1. Histograma de intensidad en los filamentos oscuros

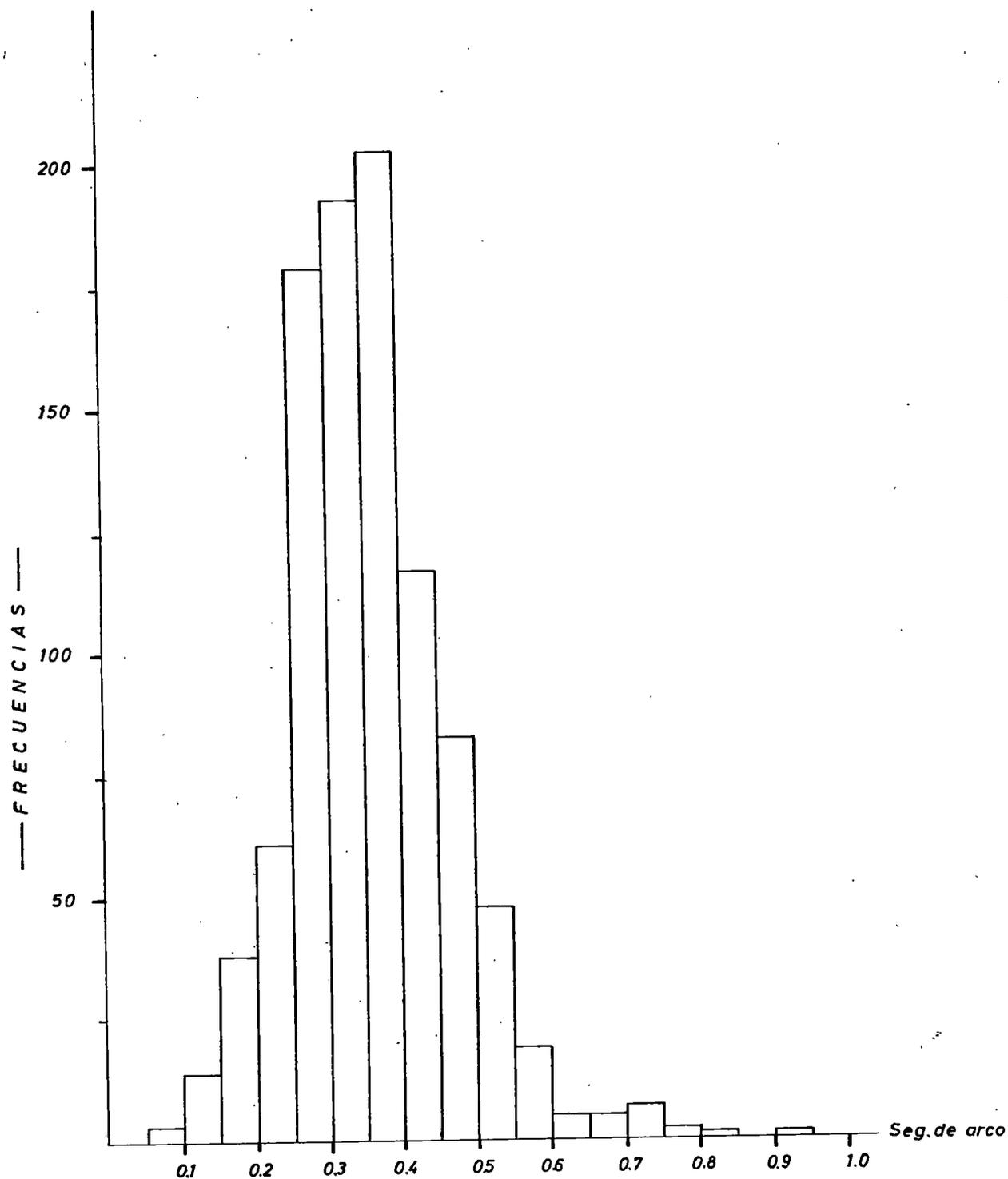


Fig.(6.8.c) FOTO 11 - AREA n° 1. Histograma de anchuras de los filamentos brillantes.

TABLA II

| FOTO 13 - AREA n° 1 | | | | | |
|---|------------|---|------------|--|------------|
| MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MAXIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MINIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE ANCHURAS (en segundos de arco) | |
| Nº de medidas: 999 | | Nº de medidas: 1014 | | Nº de medidas: 999 | |
| Valor medio $\left(\frac{I_b}{I_f}\right) = 0.503$ | | Valor medio $\left(\frac{I_{osc}}{I_f}\right) = 0.375$ | | Valor medio = 0.384 | |
| <u>Histograma</u> Fig.(6.9.a) | | <u>Histograma</u> Fig.(6.9.b) | | <u>Histograma</u> Fig.(6.9.c) | |
| I_b/I_{fot} | Frecuencia | I_{osc}/I_{fot} | Frecuencia | Anchura | Frecuencia |
| 0.100 | 6 | 0.075 | 7 | 0.100 | 4 |
| 0.125 | 6 | 0.100 | 6 | 0.150 | 19 |
| 0.150 | 2 | 0.125 | 19 | 0.200 | 36 |
| 0.175 | 2 | 0.150 | 8 | 0.250 | 65 |
| 0.200 | 3 | 0.175 | 7 | 0.300 | 129 |
| 0.225 | 1 | 0.200 | 22 | 0.350 | 225 |
| 0.250 | 10 | 0.225 | 28 | 0.400 | 192 |
| 0.275 | 5 | 0.250 | 38 | 0.450 | 91 |
| 0.300 | 8 | 0.275 | 57 | 0.500 | 71 |
| 0.325 | 8 | 0.300 | 23 | 0.550 | 39 |
| 0.350 | 25 | 0.325 | 42 | 0.600 | 29 |
| 0.375 | 39 | 0.350 | 72 | 0.650 | 30 |
| 0.400 | 26 | 0.375 | 55 | 0.700 | 16 |
| 0.425 | 40 | 0.400 | 113 | 0.750 | 25 |
| 0.450 | 43 | 0.425 | 142 | 0.800 | 11 |
| 0.475 | 72 | 0.450 | 147 | 0.850 | 10 |
| 0.500 | 128 | 0.475 | 105 | 0.900 | 2 |
| 0.525 | 161 | 0.500 | 80 | 0.950 | 1 |
| 0.550 | 128 | 0.525 | 24 | 1.000 | 1 |
| 0.575 | 86 | 0.550 | 11 | 1.050 | 1 |
| 0.600 | 56 | 0.575 | 8 | 1.100 | 1 |
| 0.625 | 49 | | | 1.150 | 0 |
| 0.650 | 37 | | | 1.200 | 1 |
| 0.675 | 22 | | | | |
| 0.700 | 9 | | | | |
| 0.725 | 4 | | | | |
| 0.750 | 7 | | | | |
| 0.775 | 8 | | | | |
| 0.800 | 8 | | | | |
| Contraste medio: 0.290 | | | | | |

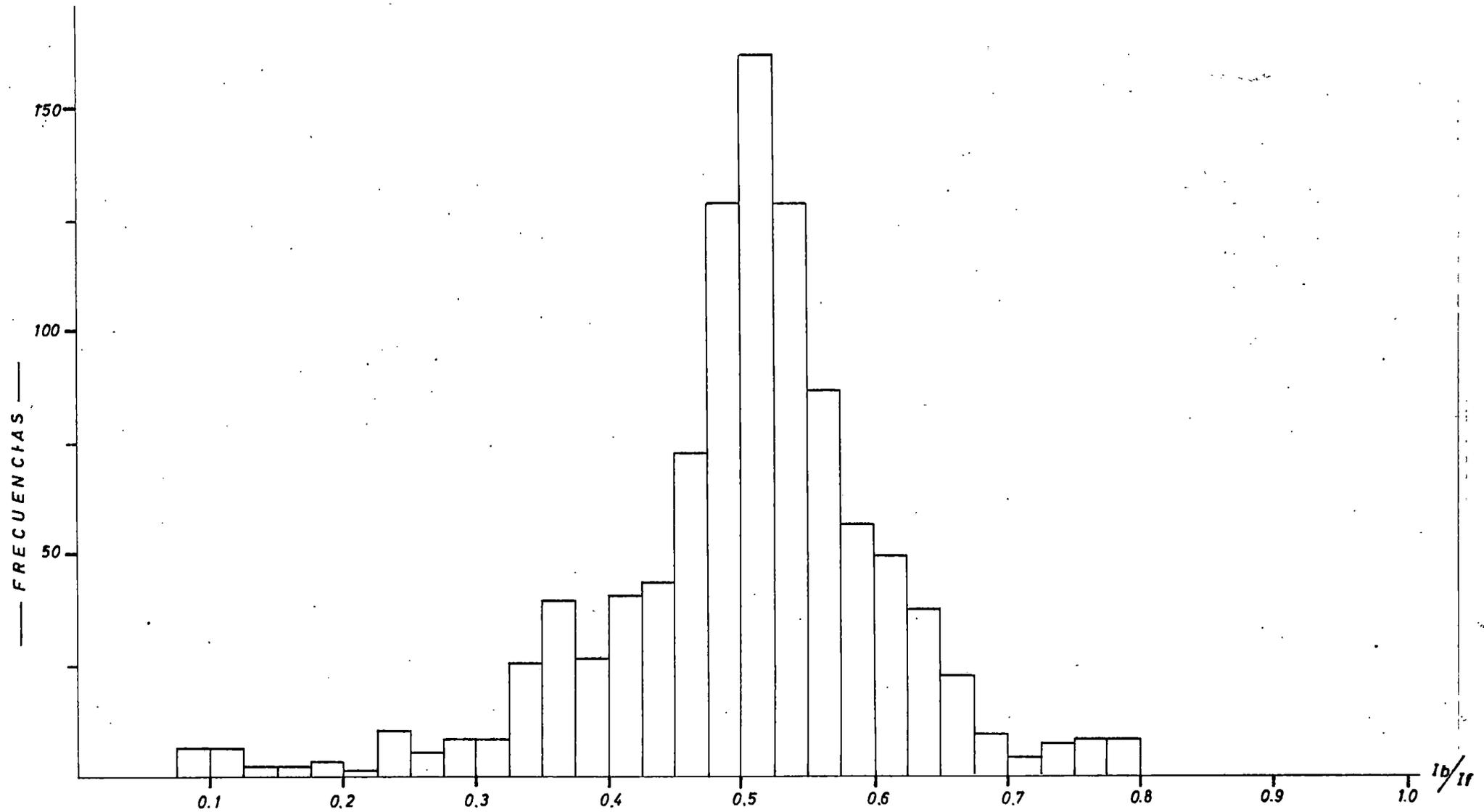


Fig.(6.9.a) FOTO 13 - AREA n° 1. Histograma de intensidad en los filamentos brillantes

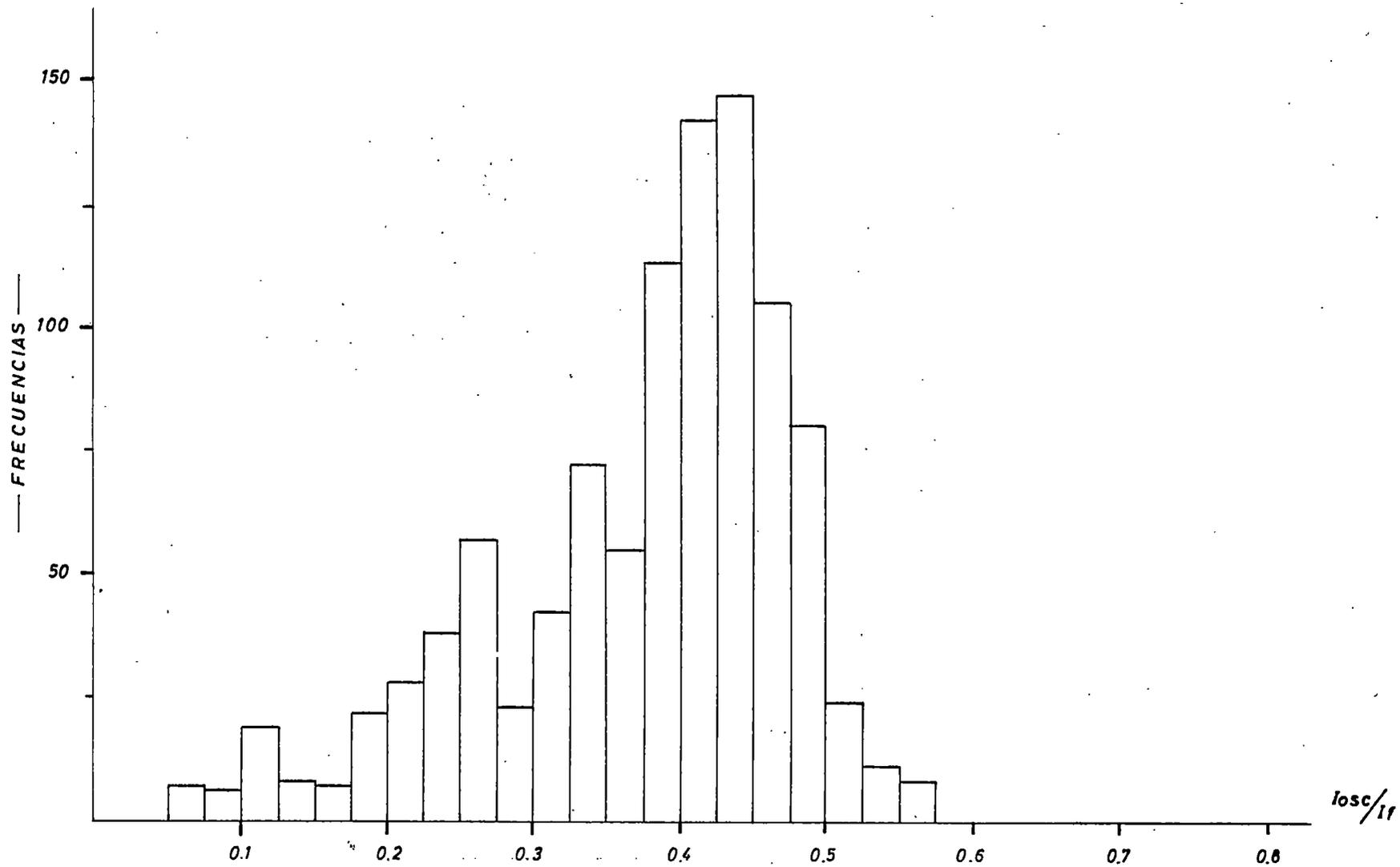


Fig.(6.9.b) FOTO 13 - AREA n° 1. Histograma de intensidad en los filamentos oscuros

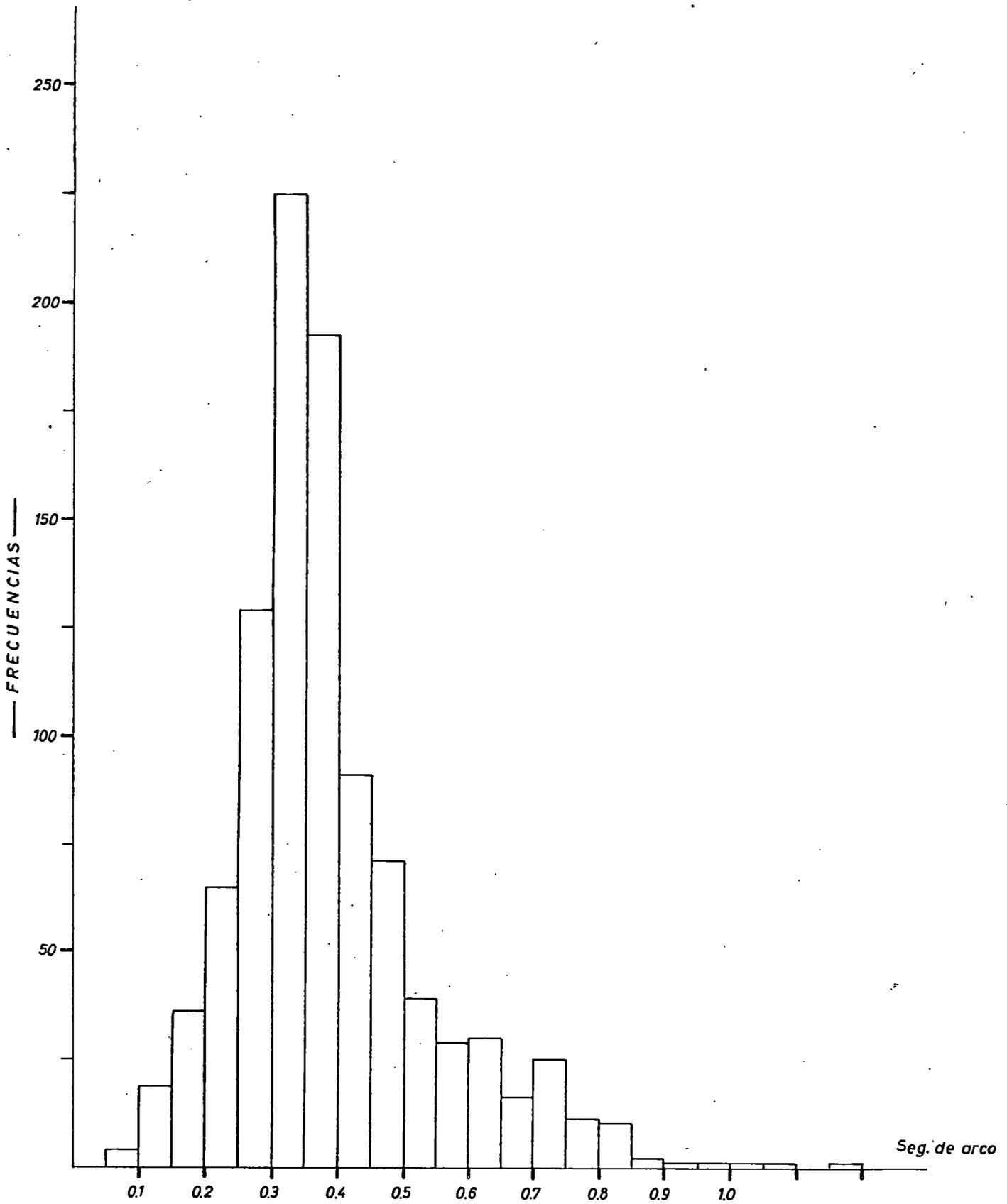


Fig.(6.9.c) FOTO 13 - AREA n^o 1. Histograma de anchuras de los filamentos brillantes

TABLA III

| FOTO 14 - AREA nº 5 | | | | | |
|---|------------|---|------------|--|------------|
| MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MAXIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MINIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE ANCHURAS (en segundos de arco) | |
| Nº de medidas: 754 | | Nº de medidas: 901 | | Nº de medidas: 754 | |
| Valor medio $\left(\frac{I_b}{I_f}\right) = 0.625$ | | Valor medio $\left(\frac{I_{osc}}{I_f}\right) = 0.474$ | | Valor medio = 0.347 | |
| Histograma Fig. (6.10.a) | | Histograma Fig. (6.10.b) | | Histograma Fig. (6.10.c) | |
| I_b/I_{fot} | Frecuencia | I_{osc}/I_{fot} | Frecuencia | Anchura | Frecuencia |
| 0.275 | 3 | 0.125 | 2 | 0.150 | 3 |
| 0.300 | 4 | 0.150 | 13 | 0.200 | 18 |
| 0.325 | 5 | 0.175 | 3 | 0.250 | 125 |
| 0.350 | 4 | 0.200 | 12 | 0.300 | 176 |
| 0.375 | 9 | 0.225 | 5 | 0.350 | 122 |
| 0.400 | 7 | 0.250 | 16 | 0.400 | 121 |
| 0.425 | 10 | 0.275 | 24 | 0.450 | 64 |
| 0.450 | 5 | 0.300 | 12 | 0.500 | 58 |
| 0.475 | 8 | 0.325 | 11 | 0.550 | 23 |
| 0.500 | 24 | 0.350 | 19 | 0.600 | 20 |
| 0.525 | 35 | 0.375 | 24 | 0.650 | 3 |
| 0.550 | 55 | 0.400 | 32 | 0.700 | 4 |
| 0.575 | 67 | 0.425 | 37 | 0.750 | 8 |
| 0.600 | 73 | 0.450 | 64 | 0.800 | 3 |
| 0.625 | 69 | 0.475 | 109 | 0.850 | 3 |
| 0.650 | 76 | 0.500 | 108 | 0.900 | 3 |
| 0.675 | 53 | 0.525 | 116 | | |
| 0.700 | 56 | 0.550 | 101 | | |
| 0.727 | 44 | 0.575 | 57 | | |
| 0.750 | 46 | 0.600 | 49 | | |
| 0.775 | 35 | 0.625 | 34 | | |
| 0.800 | 33 | 0.650 | 23 | | |
| 0.825 | 11 | 0.675 | 14 | | |
| 0.850 | 7 | 0.700 | 12 | | |
| 0.875 | 4 | 0.725 | 4 | | |
| 0.900 | 4 | | | | |
| 0.925 | 2 | | | | |
| 0.950 | 3 | | | | |
| 0.975 | 2 | | | | |
| Contraste medio: 0.274 | | | | | |

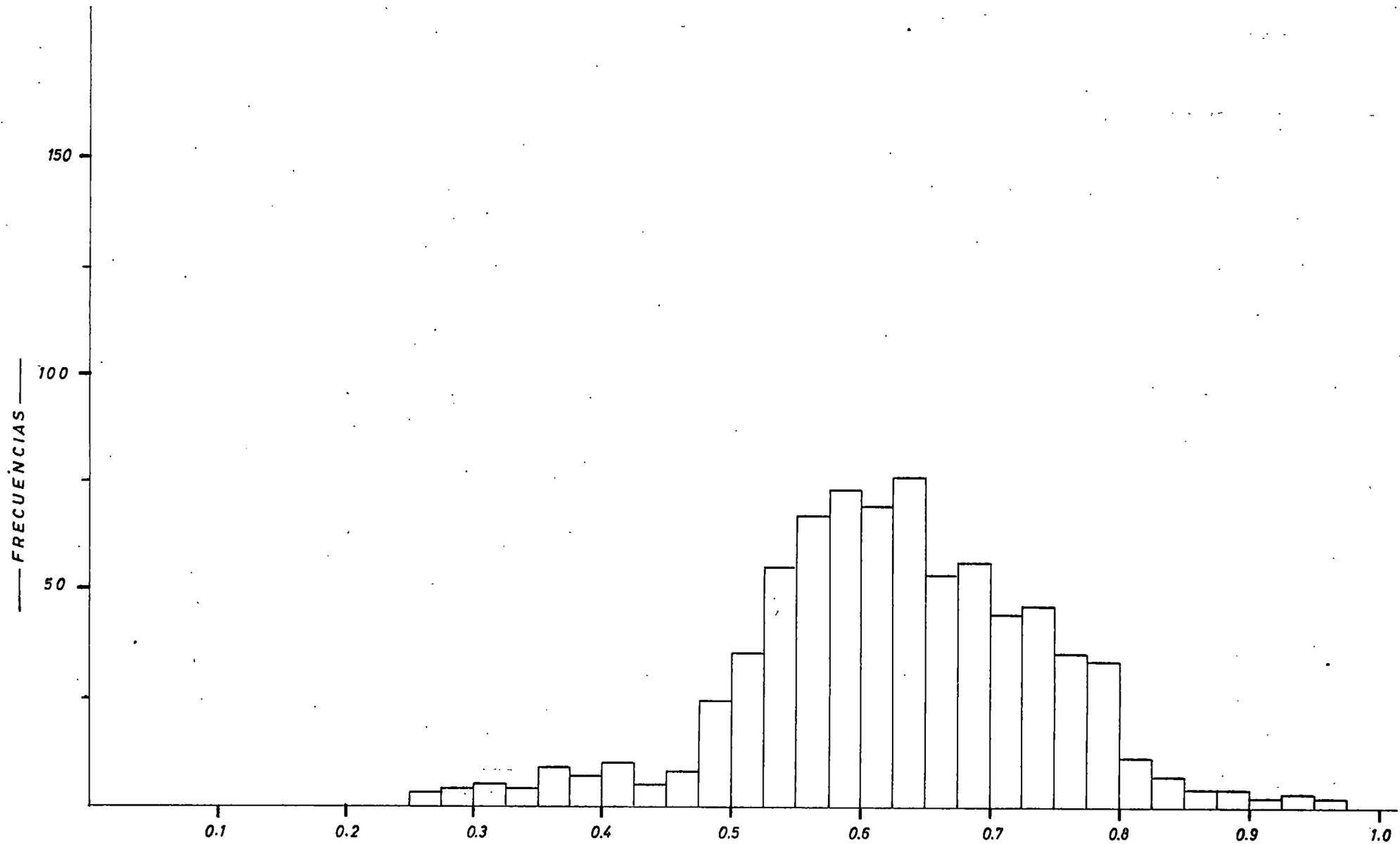


Fig.(6.10.a) FOTO 14 - AREA nº 5. Histograma de intensidad en los filamentos brillantes

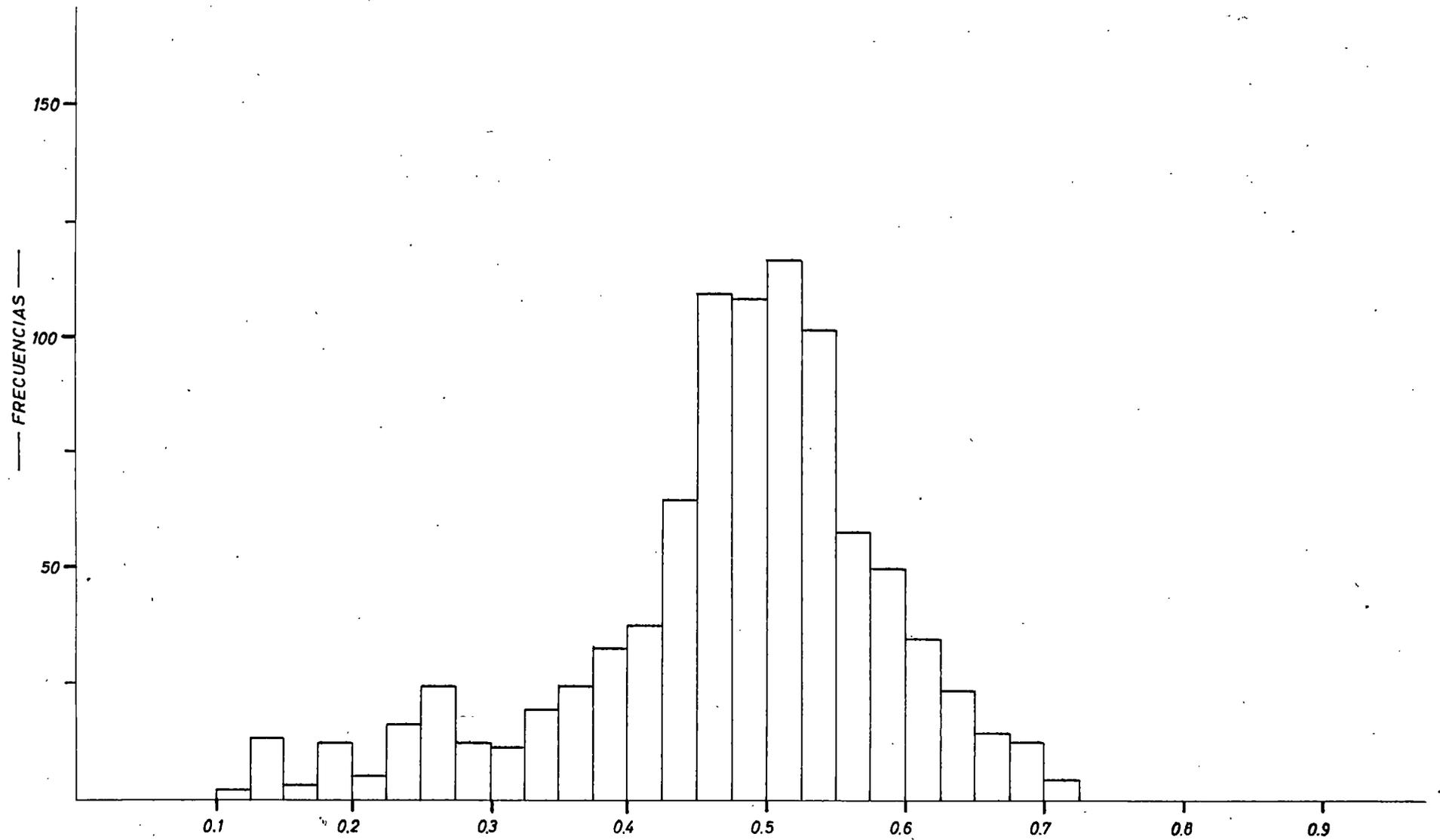


Fig.(6.10.b) FOTO 14 - AREA nº 5. Histograma de intensidad en los filamentos oscuros

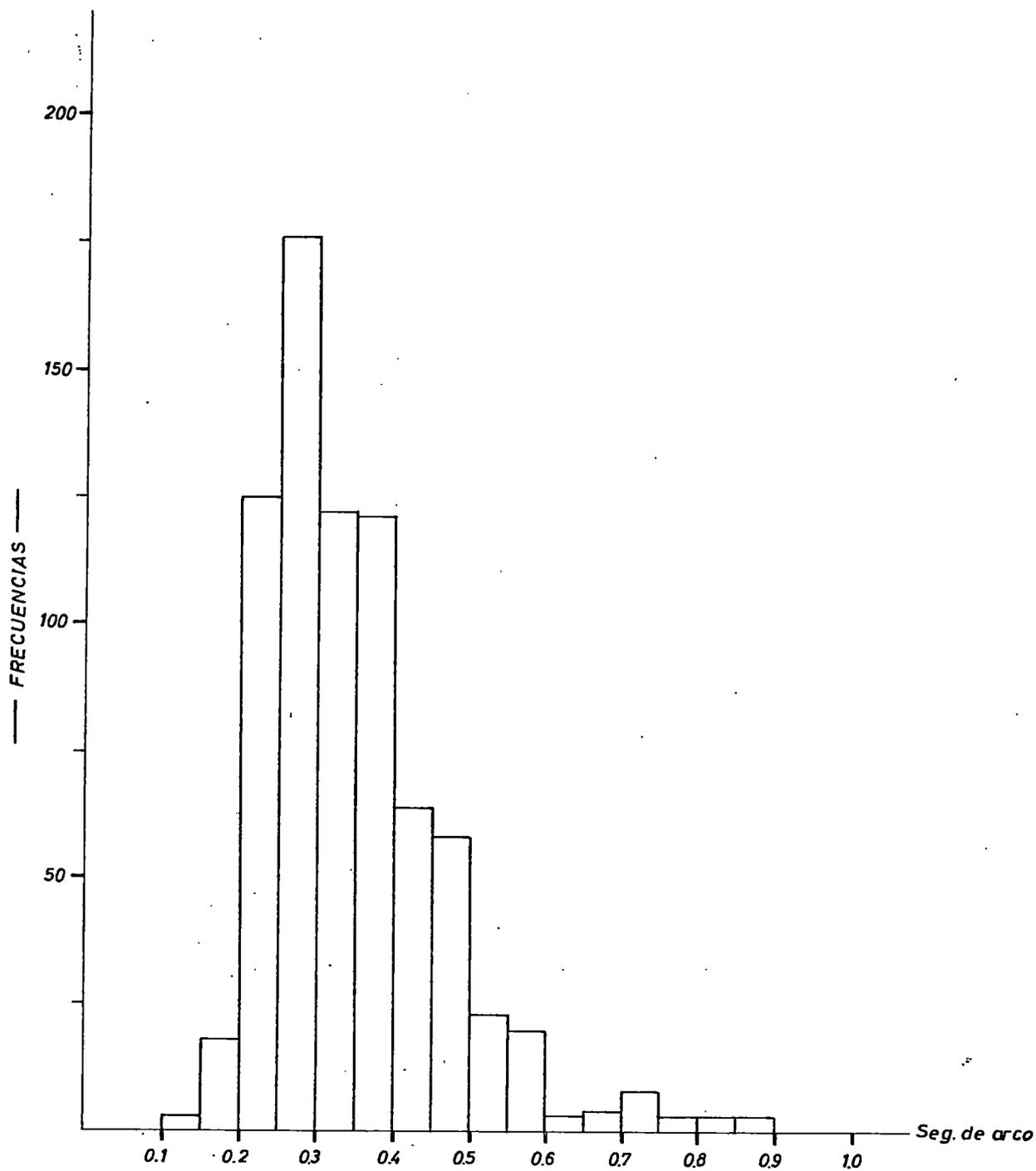


Fig.(6.10.c) FOTO 14 - AREA n° 5. Histograma de anchuras de los filamentos brillantes.

TABLA IV

ANALISIS CONJUNTO DE LAS TRES AREAS

| MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MAXIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE BRILLO EN LOS MINIMOS (referidas a la fotos fera circundante) | | MEDIDAS DE ANCHURAS (en segundos de arco) | |
|---|------------|---|------------|--|------------|
| Nº de medidas: 2732 | | Nº de medidas: 3054 | | Nº de medidas: 2732 | |
| Valor medio $\left(\frac{I_b}{I_f}\right) = 0.554$ | | Valor medio $\left(\frac{I_{osc}}{I_f}\right) = 0.424$ | | Valor medio = 0.367 | |
| <u>Histograma</u> Fig. (6.11.a) | | <u>Histograma</u> Fig. (6.11.b) | | <u>Histograma</u> Fig. (6.11.c) | |
| I_b/I_{fot} | Frecuencia | I_{osc}/I_{fot} | Frecuencia | Anchura | Frecuencia |
| 0.100 | 6 | 0.075 | 7 | 0.100 | 7 |
| 0.125 | 6 | 0.100 | 6 | 0.150 | 36 |
| 0.150 | 2 | 0.125 | 21 | 0.200 | 92 |
| 0.175 | 2 | 0.150 | 24 | 0.250 | 251 |
| 0.200 | 3 | 0.175 | 15 | 0.300 | 484 |
| 0.225 | 1 | 0.200 | 37 | 0.350 | 540 |
| 0.250 | 11 | 0.225 | 39 | 0.400 | 516 |
| 0.275 | 11 | 0.250 | 57 | 0.450 | 272 |
| 0.300 | 13 | 0.275 | 84 | 0.500 | 212 |
| 0.325 | 15 | 0.300 | 50 | 0.550 | 110 |
| 0.350 | 34 | 0.325 | 71 | 0.600 | 68 |
| 0.375 | 52 | 0.350 | 140 | 0.650 | 38 |
| 0.400 | 40 | 0.375 | 155 | 0.700 | 25 |
| 0.425 | 57 | 0.400 | 329 | 0.750 | 40 |
| 0.450 | 75 | 0.425 | 385 | 0.800 | 16 |
| 0.475 | 140 | 0.450 | 376 | 0.850 | 14 |
| 0.500 | 287 | 0.475 | 365 | 0.900 | 5 |
| 0.525 | 307 | 0.500 | 323 | 0.950 | 2 |
| 0.550 | 316 | 0.525 | 188 | 1.000 | 1 |
| 0.575 | 298 | 0.550 | 149 | 1.050 | 1 |
| 0.600 | 241 | 0.575 | 85 | 1.100 | 1 |
| 0.625 | 186 | 0.600 | 56 | 1.150 | 0 |
| 0.650 | 175 | 0.625 | 39 | 1.200 | 1 |
| 0.675 | 114 | 0.650 | 23 | | |
| 0.700 | 85 | 0.675 | 14 | | |
| 0.725 | 67 | 0.700 | 12 | | |
| 0.750 | 64 | 0.725 | 4 | | |
| 0.775 | 50 | | | | |
| 0.800 | 41 | | | | |
| 0.825 | 11 | | | | |
| 0.850 | 7 | | | | |
| 0.875 | 4 | | | | |
| 0.900 | 4 | | | | |
| 0.925 | 2 | | | | |
| 0.950 | 3 | | | | |
| 0.975 | 2 | | | | |
| Contraste medio: 0.267 | | | | | |

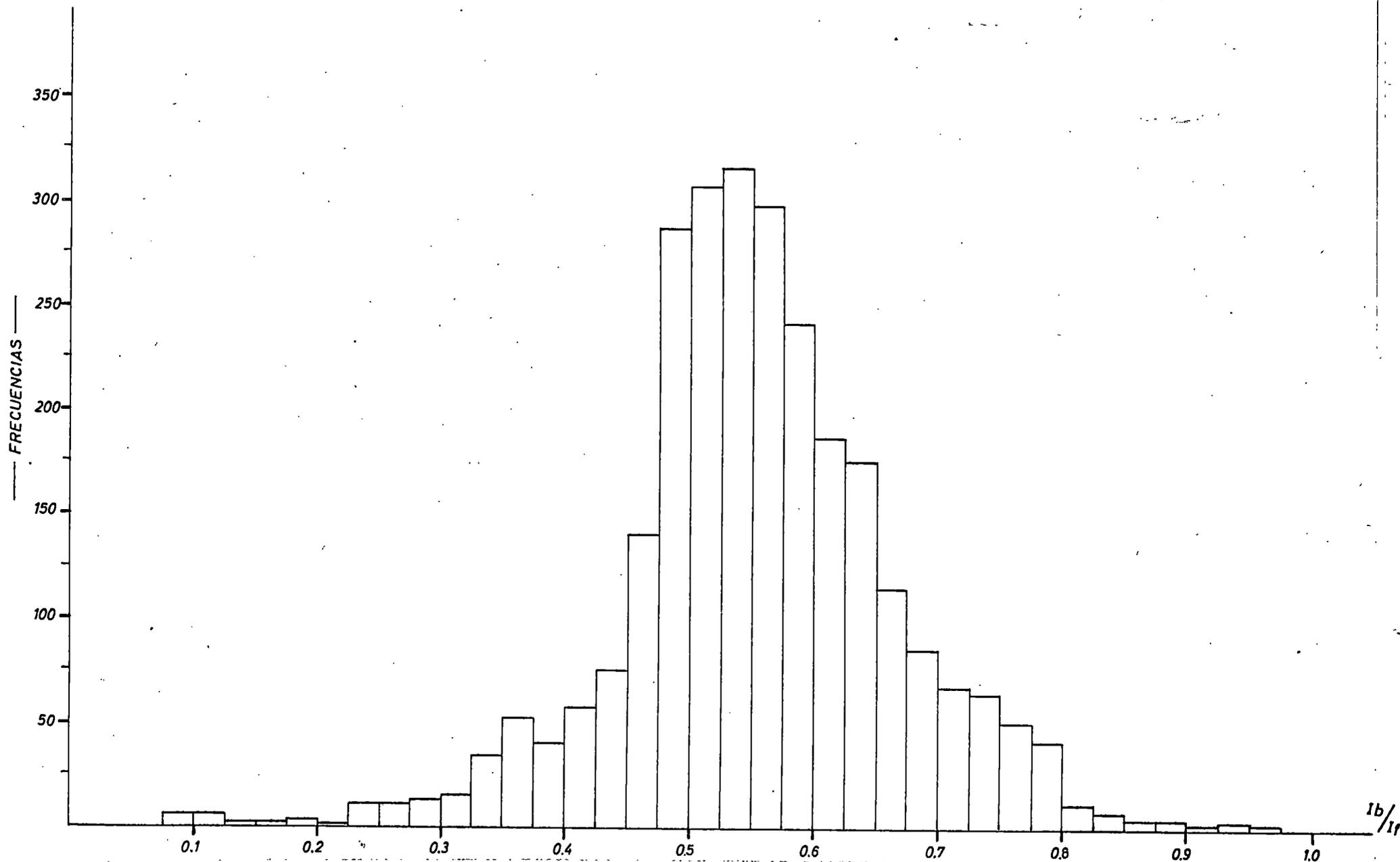


Fig.(6.11.a) Analisis conjunto de las tres areas. Histograma de intensidad en los filamentos brillantes.

I_b/I_r

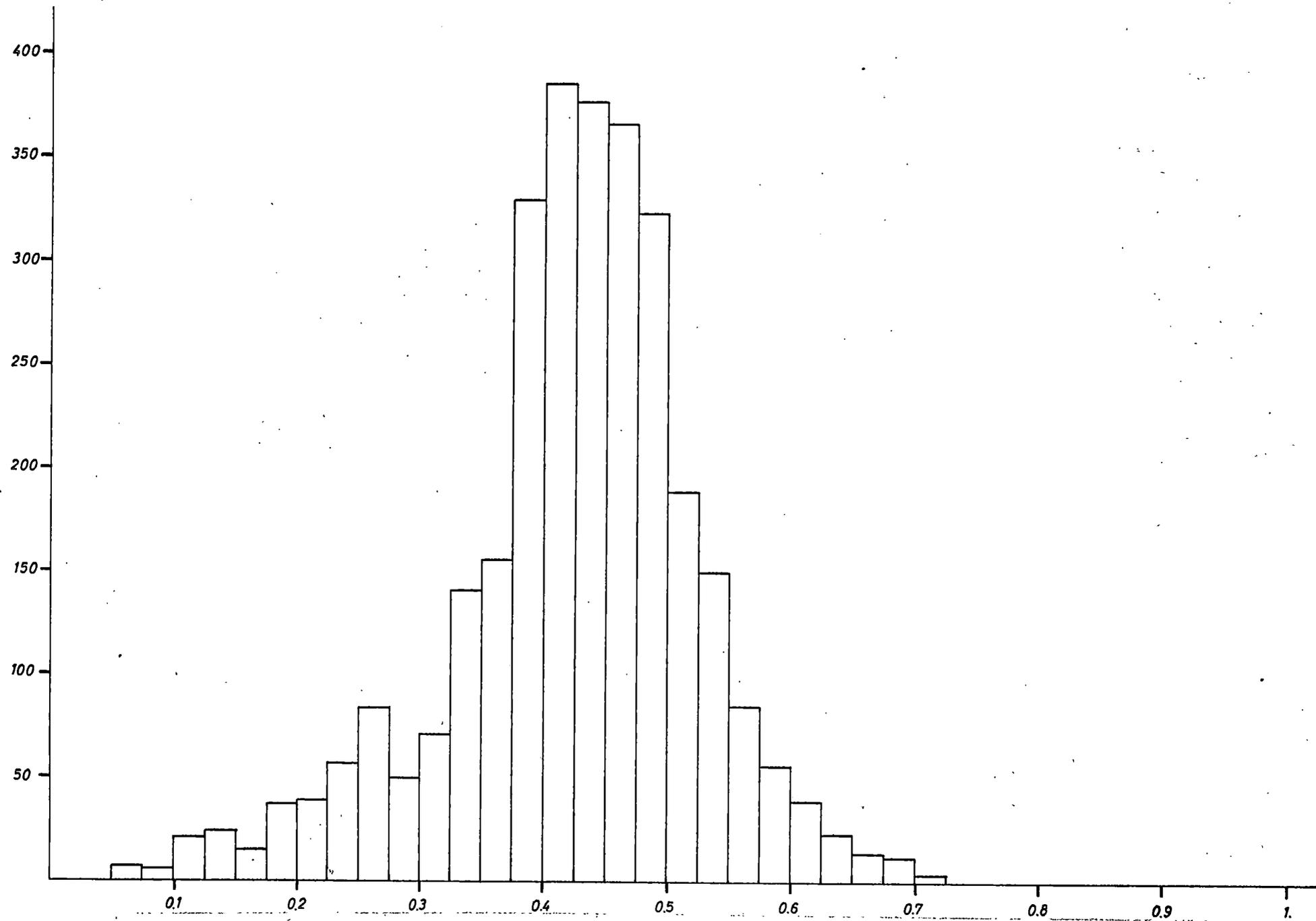


Fig. (6.11.b) Analisis conjunto de las tres areas. Histograma de intensidad en los filamentos oscuros.

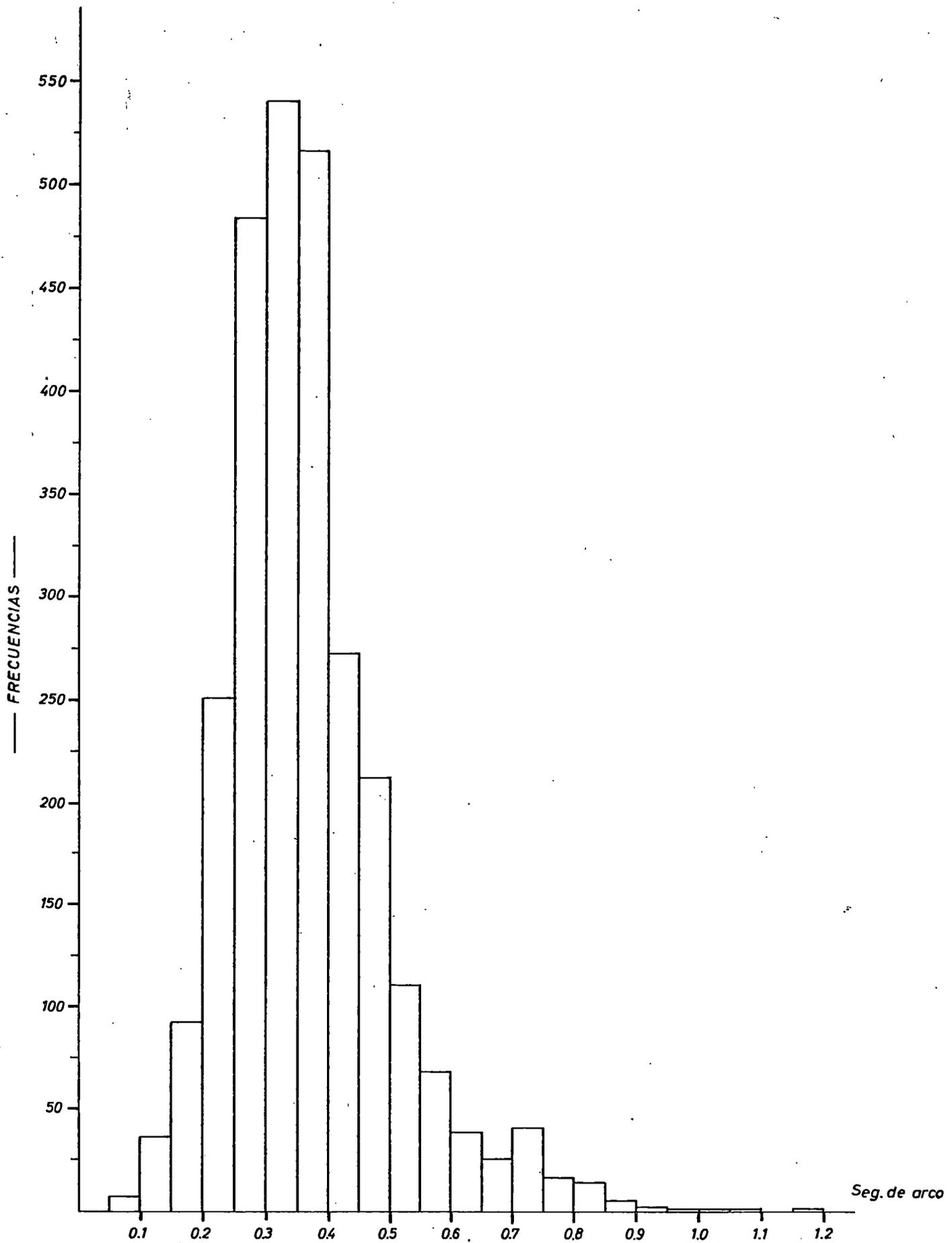


Fig.(6.11.c) Analisis conjunto de las tres areas. Histograma de anchuras de los filamentos brillantes.

VI.3. -MODELO FOTOMETRICO DE LA PENUMBRA:

A partir de los resultados obtenidos para las intensidades de los filamentos penumbrales, con respecto a la fotosfera circundante, vamos a tratar de calcular un modelo de penumbra que nos proporcione la variación de temperatura con la profundidad óptica τ , en ambos tipos de filamentos.

Si hacemos la aproximación de que los filamentos penumbrales radian satisfaciendo las leyes del cuerpo negro

$$\frac{I_{\lambda}^*}{I_{\lambda}} = \frac{B_{\lambda}^*(T^*)}{B_{\lambda}(T)} \quad (B \equiv \text{Función de Plank})$$

siendo I_{λ}^* la intensidad emitida por un filamento penumbral a una temperatura T^* e I_{λ} la intensidad emitida por la Fotosfera a una temperatura T .

Utilizando la aproximación de Wien (lo cual se justifica para nuestro caso en que $\lambda < 6000 \text{ \AA}$ y $T < 7000^{\circ}$) podemos escribir

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T} \quad \text{siendo } C_2 = 1.439 \text{ cm.}^{\circ}\text{K}$$

y la expresión de arriba quedará como

$$\frac{I_{\lambda}^*}{I_{\lambda}} = \frac{\frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T^*}}{\frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-C_2/\lambda T}} = e^{-\frac{C_2}{\lambda} \left[\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right]}$$

tomando logaritmos y considerando una longitud de onda determinada queda:

$$\ln \frac{I^*}{I} = -\frac{C_2}{\lambda} \left[\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right] \quad (6-1)$$

Utilizando el parámetro $\Theta = \frac{5040}{T}$ de uso frecuente en la teoría de atmósferas estelares y teniendo en cuenta que

$$\Delta\Theta = \Theta^* - \Theta = 5040 \left[\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right] \quad (6-2)$$

la expresión (6-1) se podrá escribir:

$$\ln \frac{I^*}{I} = - \frac{C_2}{\lambda} \frac{\Delta\Theta}{5040}$$

o bien:

$$\Delta\Theta = - \frac{5040 \lambda}{C_2} \ln \frac{I^*}{I}$$

Si tomamos como valor de I^*/I el valor medio de la intensidad de los filamentos brillantes u oscuros respecto a la fotosfera, obtendremos dos estimaciones de $\Delta\Theta$, una para los filamentos brillantes y otra para los oscuros.

$$\Delta\Theta_b = - \frac{5040 \lambda}{C_2} \ln \left(\frac{\bar{I}_b}{I_f} \right)$$

$$\Delta\Theta_{osc} = - \frac{5040 \lambda}{C_2} \ln \left(\frac{\bar{I}_{osc}}{I_f} \right)$$

Teniendo en cuenta que $\lambda = 5550 \times 10^{-8}$ cm. y que $\frac{\bar{I}_b}{I_f} = 0.554$ y $\frac{\bar{I}_{osc}}{I_f} = 0.424$ obtenemos

$$\Delta\Theta_b = 0.114802$$

$$\Delta\Theta_{osc} = 0.166787$$

Despejando en la expresión (6-2) obtenemos respectivamente la temperatura en los filamentos brillantes y oscuros en función de la temperatura en la Fotosfera

$$T_b = \frac{5040}{\Delta\Theta_b + \frac{5040}{T_f}} \quad ; \quad T_{osc} = \frac{5040}{\Delta\Theta_{osc} + \frac{5040}{T_f}}$$

Suponiendo que $\Delta\theta$ es constante al variar τ (Moe-Maltby(1974)), y utilizando el modelo fotosférico de Gingerich et al.(1971) que nos proporciona la temperatura fotosférica para diversas profundidades ópticas, podemos hacer una estimación de las variaciones de la temperatura en los filamentos brillantes y oscuros en función de la profundidad óptica τ . La Tabla V resume los resultados de estos cálculos que hemos realizado mediante el programa "MODELO".

TABLA V

| $\log \tau$ | τ | T_f (Modelo de Gingerich et al.) | T_b ($\Delta\theta_b =$ $=0.114802$) | T_{osc} ($\Delta\theta_{osc} =$ $=0.166787$) |
|-------------|-----------|--|--|--|
| -3.0 | 0.001000 | 4380.0 | 3982.7 | 3825.5 |
| -2.9 | 0.001259 | 4405.0 | 4003.3 | 3844.6 |
| -2.8 | 0.001585 | 4430.0 | 4024.0 | 3863.6 |
| -2.7 | 0.001995 | 4460.0 | 4048.7 | 3886.4 |
| -2.6 | 0.002512 | 4490.0 | 4073.4 | 3909.2 |
| -2.5 | 0.003162 | 4525.0 | 4102.2 | 3935.7 |
| -2.4 | 0.003981 | 4550.0 | 4122.7 | 3954.6 |
| -2.3 | 0.005012 | 4575.0 | 4143.2 | 3973.4 |
| -2.2 | 0.006310 | 4600.0 | 4163.7 | 3992.3 |
| -2.1 | 0.007943 | 4630.0 | 4188.3 | 4014.9 |
| -2.0 | 0.010000 | 4660.0 | 4212.8 | 4037.4 |
| -1.9 | 0.012589 | 4690.0 | 4237.3 | 4059.9 |
| -1.8 | 0.015849 | 4720.0 | 4261.8 | 4082.3 |
| -1.7 | 0.019953 | 4750.0 | 4286.2 | 4104.8 |
| -1.6 | 0.025119 | 4790.0 | 4318.8 | 4134.6 |
| -1.5 | 0.031623 | 4840.0 | 4359.4 | 4171.8 |
| -1.4 | 0.039811 | 4895.0 | 4404.0 | 4212.6 |
| -1.3 | 0.050119 | 4950.0 | 4448.4 | 4253.3 |
| -1.2 | 0.063097 | 5010.0 | 4496.8 | 4297.5 |
| -1.1 | 0.079434 | 5080.0 | 4553.1 | 4348.9 |
| -1.0 | 0.100002 | 5160.0 | 4617.3 | 4407.4 |
| -0.9 | 0.125895 | 5240.0 | 4681.3 | 4465.6 |
| -0.8 | 0.158492 | 5330.0 | 4753.0 | 4530.8 |
| -0.7 | 0.199530 | 5430.0 | 4832.3 | 4602.9 |
| -0.6 | 0.251193 | 5540.0 | 4919.2 | 4681.7 |
| -0.5 | 0.316233 | 5650.0 | 5005.8 | 4760.0 |
| -0.4 | 0.398114 | 5765.0 | 5095.8 | 4841.4 |
| -0.3 | 0.501196 | 5890.0 | 5193.3 | 4929.2 |
| -0.2 | 0.630968 | 6035.0 | 5305.7 | 5030.4 |
| -0.1 | 0.794342 | 6200.0 | 5432.8 | 5144.5 |
| 0.0 | 1.000020 | 6390.0 | 5578.1 | 5274.6 |
| 0.1 | 1.258950 | 6610.0 | 5745.0 | 5423.6 |
| 0.2 | 1.584920 | 6860.0 | 5932.9 | 5590.8 |
| 0.3 | 1.995300 | 7140.0 | 6141.2 | 5775.4 |
| 0.4 | 2.511930 | 7440.0 | 6361.9 | 5970.1 |
| 0.5 | 3.162330 | 7750.0 | 6587.2 | 6168.1 |
| 0.6 | 3.981140 | 8030.0 | 6788.4 | 6344.1 |
| 0.7 | 5.011960 | 8290.0 | 6973.2 | 6505.3 |
| 0.8 | 6.309690 | 8520.0 | 7135.3 | 6646.1 |
| 0.9 | 7.943420 | 8710.0 | 7268.0 | 6761.2 |
| 1.0 | 10.000200 | 8880.0 | 7386.0 | 6863.2 |
| 1.1 | 12.589500 | 9050.0 | 7503.3 | 6964.3 |
| 1.2 | 15.849200 | 9220.0 | 7619.7 | 7064.5 |
| 1.3 | 19.953000 | 9390.0 | 7735.5 | 7163.9 |
| 1.4 | 25.119400 | 9560.0 | 7850.5 | 7262.4 |

VI.4.-ANÁLISIS COMPARATIVO DE NUESTROS RESULTADOS:

A continuación comparamos nuestros resultados fotométricos con los obtenidos por Muller (1973) y Krat et al. (1972), -- únicos trabajos fotométricos detallados sobre el tema que nos ocupa.

Muller obtiene los siguientes resultados:

| | | |
|---|---|--------------------------|
| Intensidad media de los gránulos penumbrales.... | { | 0.95 (penumbra exterior) |
| | { | 0.90 (penumbra interior) |
| Intensidad media de la zona oscura interfila- mentaria..... | { | 0.6 (penumbra exterior) |
| | { | 0.52 (penumbra interior) |

Anchura media de los gránulos penumbrales : 0.36" de arco

Como podemos comprobar nuestra estimación de la anchura media de los filamentos penumbrales brillantes (0.367") coincide perfectamente con la anchura media estimada por Muller -- para los gránulos penumbrales. Sin embargo, en cuanto a intensidades se refiere, los resultados de este autor contrastan -- notablemente con los nuestros; por ejemplo, hemos estimado la intensidad media de los filamentos brillantes en 0.554, mientras que los valores medios de Muller para sus gránulos brillantes son de 0.95-0.90, valores que en nuestra fotometría se alcanzan únicamente en la FOTO N° 14, Area n° 5 (ver Fig.(6.10.a). En lo que se refiere a filamentos oscuros nuestra estimación -- del brillo medio es 0.445 valor también inferior al obtenido -- por Muller aunque en este caso la discrepancia es menor que para los filamentos brillantes.

Estas diferencias tan sorprendentes pueden deberse en parte a que, casualmente, la mancha que nosotros hemos analizado -- presente en conjunto una penumbra más oscura que la de la mancha estudiada por Muller; sin embargo entendemos que la mayor fuente de discrepancia debe radicar en la diferencia de método al hacer

las estimaciones de intensidad. Por ejemplo, en su análisis sobre la intensidad de las zonas oscuras, Muller descarta las medidas realizadas en espacios interfilamentares que se encuentran entre dos gránulos penumbrales demasiado próximos o demasiado alejados; nosotros, sin embargo, no hemos descartado tales casos, y hemos considerado como estructura penumbral oscura medible, todas aquellas zonas que aparecen, en cada barrido fotométrico, entre dos máximos, cualquiera que sea la proximidad espacial de los mismos. Siguiendo este criterio hemos realizado 3054 estimaciones, lo cual representa un muestreo suficientemente amplio. En el Area nº 1 de la FOTO Nº 13 se pueden observar (parte inferior izquierda) dos estructuras oscuras bastante anchas que por hallarse plenamente inmersas en la penumbra las hemos considerado como filamentos os cu ros. Obviamente la intensidad de estas dos estructuras es considerablemente más baja que la de los otros filamentos oscuros del área citada.

En lo que se refiere a la intensidad media de las estructuras brillantes, parece desprenderse del artículo de Muller, que las estimaciones las hace tomando grupos de barridos transversales de cada gránulo considerado individualmente; lo que no queda muy claro es cómo considera este autor las zonas de transición entre un gránulo y otro a lo largo de un filamento brillante, y cómo ha analizado aquellos casos en que el filamento brillante no se ve resuelto en gránulos individuales, o si al escoger los gránulos para fotometrar los ha seleccionado indiscriminadamente incluyendo aquellos que no destacan por su intensidad; ¿tal vez ha eliminado de su análisis alguno de estos casos?; esto produciría una sobrevaloración de las estructuras brillantes y justificaría al menos en parte, las discrepancias con nuestras medidas, en las cuales no hemos hecho distinciones sobre si un gránulo estaba bien delimitado como estructura individual, y en las que hemos exigido como condición única y definitoria de lo que constituye una estructura brillante penumbral, el hecho de aparecer como máximo relativo en el perfil de un barrido realizado dentro del área penumbral. Con este criterio hemos hecho 2732 medidas.

Las estimaciones de Krat et al. respecto a los valores de intensidad penumbral son también mayores que las nuestras aunque no tan elevadas como las de Muller. Sin embargo, del artículo de este autor parece desprenderse que las medidas de intensidades han sido realizadas sobre barridos aislados y no sobre áreas o estructuras completas, lo cual resta valor estadístico a sus estimaciones.

En Fig. (6.12) y Fig. (6.13) hacemos una representación comparativa del modelo de penumbra que hemos elaborado, con el que Moe y Maltby (1974) obtuvieron basándose en los resultados de Muller (1973). Se observa en nuestro modelo que los valores de T para una profundidad dada, así como $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ son ligeramente inferiores a los obtenidos por Moe y Maltby.

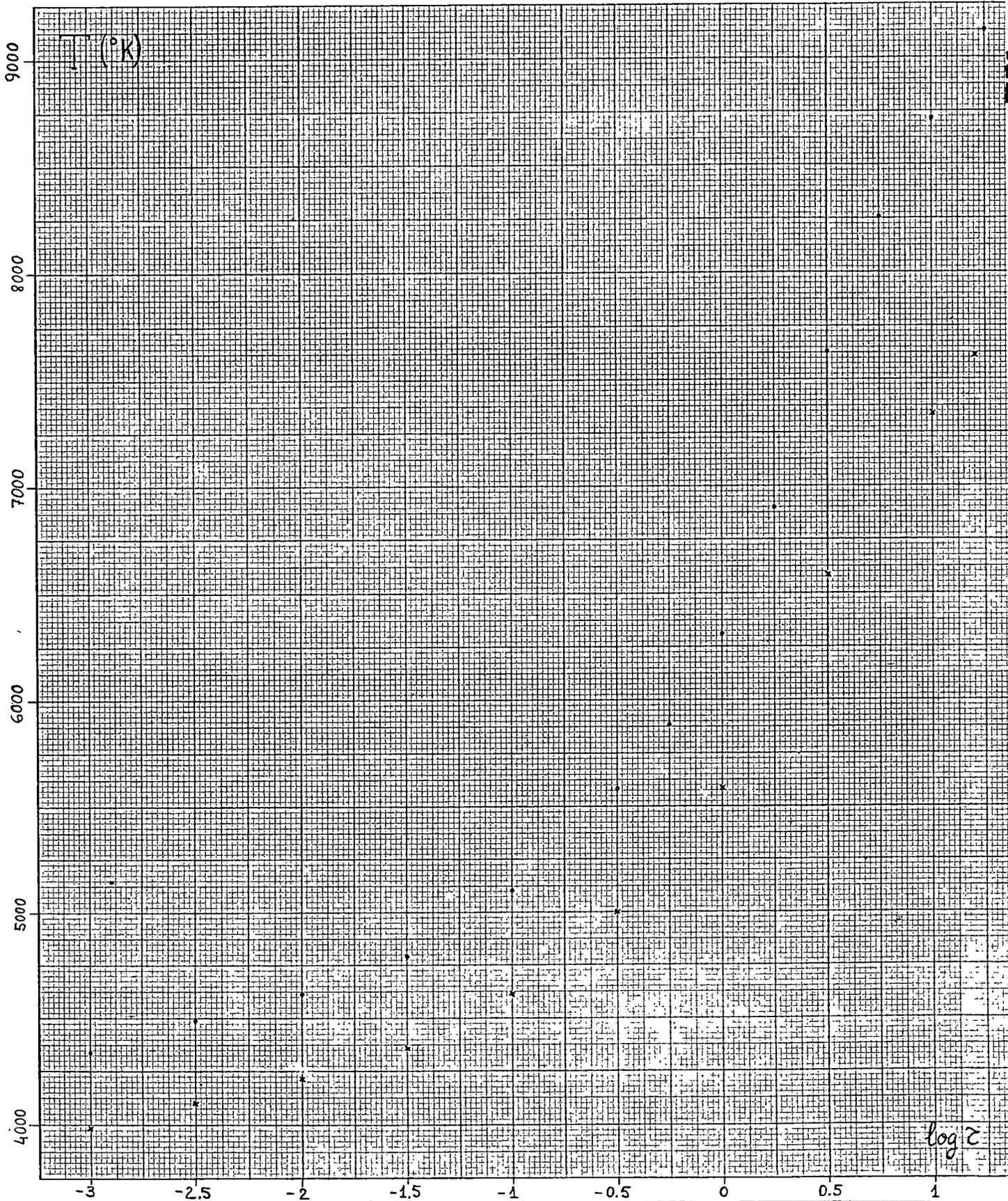


Fig.(6.12) Variación de la temperatura con respecto a la profundidad óptica, para los filamentos brillantes.

Modelo propuesto en el presente trabajo: x x x x x x x x x x
 Modelo propuesto por Moe y Maltby:

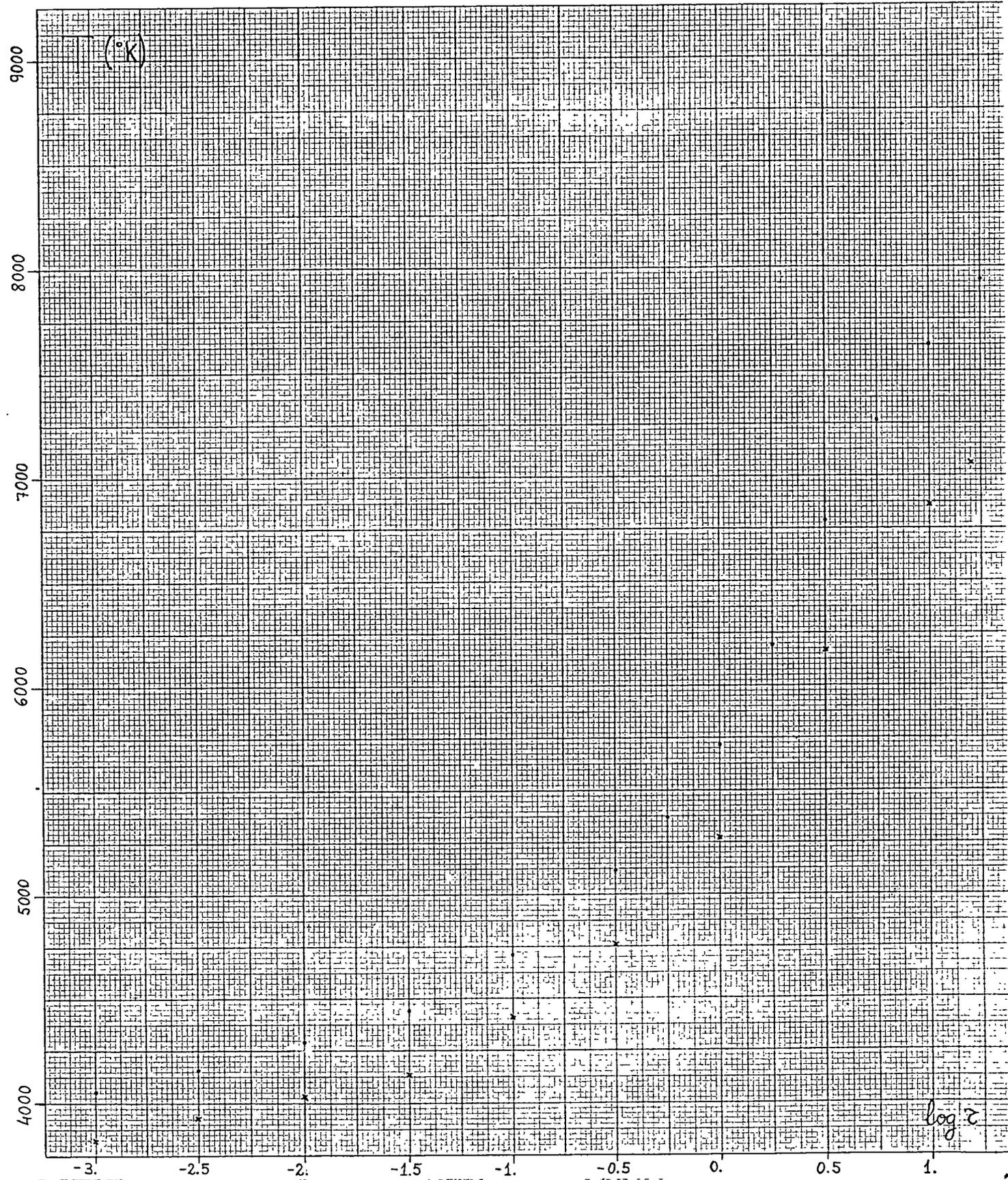


Fig.(6.13) Variación de la temperatura con respecto a la profundidad óptica, para los filamentos oscuros.

Modelo propuesto en el presente trabajo: * * * * *
 Modelo propuesto por Moe y Maltby:

VI.5.- CONCLUSIONES.

Como consideraciones finales resumiremos brevemente los principales resultados obtenidos y expuestos en la presente memoria.

- 1) Es la primera vez que se ha procedido a la restauración de la imagen óptica de filamentos penumbrales utilizando la excepcional información que proporciona un eclipse de Sol, razón por la cual nuestros resultados merecen una especial confianza.
- 2) Se ha diseñado un filtro óptimo de restauración asignándole la relación señal-ruido un valor constante. El buen comportamiento de nuestro filtro se manifiesta al ser aplicado a la restauración del perfil fotométrico Luna-Fotosfera, lo cual pone de relieve, una vez más, la gran ventaja que representa el suceso de un eclipse de Sol para trabajos de este tipo.
- 3) Se pone en evidencia que la simplificación que frecuentemente se hace al asignar al ruido fotográfico el carácter de "blanco", está lejos de ser válida, al menos en lo que a tratamientos bidimensionales se refiere.
- 4) Los valores medios obtenidos (utilizando un amplio muestreo) para los parámetros físicos que caracterizan la estructura penumbral son:

Intensidad media de los filamentos brillantes :
0.554 (En puntos aislados, el brillo casi alcanza el nivel fotosférico).

Intensidad media de los filamentos oscuros : 0.424

Anchura media de los filamentos brillantes : 0.367
 seg. de arco.

Contraste medio : 0.267

Hemos concluido que las discrepancias de nuestras medidas de intensidad en los filamentos brillantes y oscuros respecto de las publicadas hasta el presente (Muller (1973) y Krat et al (1972)), tienen su origen en la diferencia de método al analizar el brillo de los filamentos. Así, mientras nosotros tomamos valores de intensidad en todos los máximos y mínimos de un área penumbral barrida uniformemente, de los artículos de los citados autores se desprende que sus valores están obtenidos sobre estructuras aisladas seleccionadas discriminadamente. Por esta razón pensamos que nuestros resultados son un reflejo más fiel de la estructura media de la penumbra.

- 5) Basándonos en estas medidas más realistas sobre el brillo medio en los filamentos brillantes y oscuros hemos elaborado un modelo de penumbra que proporciona la variación de T con la profundidad óptica, tanto en los filamentos brillantes como en los oscuros.

BIBLIOGRAFIA

ABDUSAMATOV H. (1976) Solar Physics 48, 117
ABETTI G. (1932) Pub. Real Oss. di Arcetri 50, 47
ALLEN C. (1973) "Astrophysical Quantities". Ed. Atlone Press
ANTIA H.M; CHITRE S.M; GOKHALE M.H (1978) Solar Physics 60, 31
BALLARIO M.C; GODOLI G. (1955) Mem. Oss. Astrofis. Arcetri 70, 93
BECKERS J.M (1962) Australian Journal of Physics 15, 327
BECKERS J.M (1971) IAU Symp. n°43. Ed. R. Howard
BECKERS J.M (1976) Publ. Sacramento Peak Observatory n°568
BECKERS J.M; SCHULTZ R.B (1972) Solar Physics 27, 61
BERGLAND G.D (1968) Comm. ACM 11, 703
BERGLAND G.D (1969) IEEE Trans., AU-17, 2, 138
BONES J.; MALTBY P. (1978) Solar Physics 57, 65
BRACEWELL R. (1965) "The FOURIER Transform and its Applications".
Mc.Graw-Hill Inc.
BRAULT J.W; WHITE O.R (1971) Astronomy and Astrophysics 13, 169
BRAY R.J; LOUGHHEAD R.E (1964) "Sunspots". Chapman and Hall Eds.
BRENNER N.M (1967) Lincoln Lab. Techn. Note 1967-2, MIT
BRENNER N.M (1969) IEEE Trans. AU-17
CASANOVAS J. (1973) Tesis. Universidad de Barcelona
CASANOVAS J.; VAZQUEZ M.; BONET J.A (1974) Urania 279, 1
COOLEY J.W; TUKEY J.W (1965) Math. Comput. 19, 297
CHISTYAKOV V. (1962) Soviet Astronomy 6, 363
DANIELSON R.E (1961) Astrophysical Journal 141, 548
DAVID K.H; ELSTE G. (1962) Zeitschrift fuer Astrophys. 54, 12
DEUBNER F.L; MATTIG W. (1975) Astronomy and Astrophysics 45, 16
GALLOWAY D. (1975) Solar Physics 44, 409
GIOVANELLI R.G (1972) Solar Physics 27, 71
GROSSMANN-DOERTH U. (1976) Int. Bericht des Fraunhofer Instituts
HAUGEN E. (1969) Solar Physics 9, 88
HERRERA F. (1975) Astrum n°30
HOLMES J. (1961) Mon. Not. Royal Astron. Society 122, 205
HWEI P. (1973) "Análisis de Fourier". Fondo Educativo Interamericano
IUELL P.; STAVELAND L. (1975) Publ. Inst. Theor. Astrophys. Oslo n°43
JENSEN E.; OFSTAD P. (1963) Publ. Inst. Theor. Astrophys. Oslo n°15
JENSEN E.; BRAHDE R.; OFSTAD P. (1969) Solar Physics 9, 397

- KIENLE H. (1937) Handbuch der Astrophysik, pag.772
- KINMAN R. (1952) Mon.Not.Royal Astro.Society 112,425
- KRAT V.A. KARPINSKY V.; PRADJUK L. (1972) Solar Physics 26,305
- KRAT V.A. VYALSHIN G. (1978). Solar Physics 60,47
- KUENZEL H. (1969) Astron. Nachrichten 291,265
- LAMB S. (1975) Mon.Not.Royal Astr.Soc. 172,205
- LEVY M. (1971) Astron. Astrophs. 14,15
- LINDGREN H.; LYNGA G. (1975) Reports from the Obs.de Lund. N°6.
- MAKITA M. (1963) Publ. Astron.Soc. Japan 15,145
- MAKITA M; MORIMOTO M. (1960) Pub. Astr.Soc.Japan 12,63
- MAKITA M; MORIMOTO M. (1964) Pub. Astr.Soc.Japan 16,1
- MALTBY P. (1960) Ann. D' Astrophys. 23,983
- MALTBY P. (1964) Astrophysica Norvegia Vol VIII,n°8.pg.206
- MALTBY P. (1972) Solar Physics 26,76
- MALTBY P. (1975) Solar Physics 43,91
- MALTBY P.; ERIKSEN G. (1967) Solar Physics 2,249
- MAMADAZIMOV M. (1972) Solar Physics 22,129
- MATTIG W. (1969) Solar Physics 8,281
- MATTIG W.; MEHLTRETTER J. (1968) I.A.U. Symp. n°35
- MARECHAL A; FRANCON M. (1970) "Diffraction" Edit.Masson et Cie.
- MICHARD R. (1953) Ann. Astrophys. 16,217
- MINNAERT M. (1953), "The Sun" Univ. of Chicago Press.
- MOE O.; MALTBY P. (1969) Solar Physics 8,275
- MOE O.; MALTBY P. (1974) Solar Physics 36,109
- MOORE R.; TANG F. (1975) Solar Physics 41, 81
- MULLER R. (1973,a) Solar Physics 29,55
- MULLER R. (1973,b) Solar Physics 32,409
- NISHI K. (1962) Publ. Astron. Soc. Japan 14,325
- NYE A.H.; THOMAS J.H. (1974) Solar Physics 38,399
- NYE A.H.; THOMAS J.H. (1976) Astrophysical Journal 204,582
- ORAN BRIGHAM E. (1974) "The fast fourier transform"; Prentice Hall International, Inc.
- PONZ J.D. (1977) Tesina (Universidad Complutense de Madrid)
- RODBERG H. (1966) Nature 211,394
- SCHROTER E.H. (1962) Zeitschrift fuer Astrophysik 56,183
- SCHROTER E.H.; BECKERS J.M. (1969) Solar Physics 10,384

STAVELAND L.C. (1972) Inst. of Theor. Astroph. of Oslo n°36
STELLMACHER; WIEHR E. (1970) Astronomy and Astrophysics. 7,432
STELLMACHER; WIEHR E. (1971) Astronomy and Astrophysics.17,21
STELLMACHER; WIEHR E. (1980) Astronomy and Astrophysics 82,157
STENFLO J. (1978) Rep. Prog. Phys. 41,865
ST. JOHN C. (1913) Mt. Wilson Contr. n°69 y 74
STOCK J.; WILLIAMS A.D. (1962) "Astronomical Techniques"
Univ. of Chicago Press.
STUMPF P.; (1961) Z. Ap. 51,73
TAUB H.; SCHILLING D. (1971) "Principles of Communication
System". Mc Graw Hill. Inc.
WANDERS A.J.M. (1934) Z. Ap. 8,108
WILSON P.R. (1968) Solar Physics 5,338
WITTMANN A. (1971) Solar Physics 21, 237
WITTMANN A.; SCHROTER E.H. (1969) Solar Physics 10,357
WITTMANN A.; MEHLTRETT J.P. (1977) Astron.Astrophys.61,75
ZIRIN H.; STEIN A. (1972) Astrophys. Journal 178,L85
ZWAAN C. (1965) Rech. Astron. Observatory Utrecht XVII (4)

<: APENDICE :>

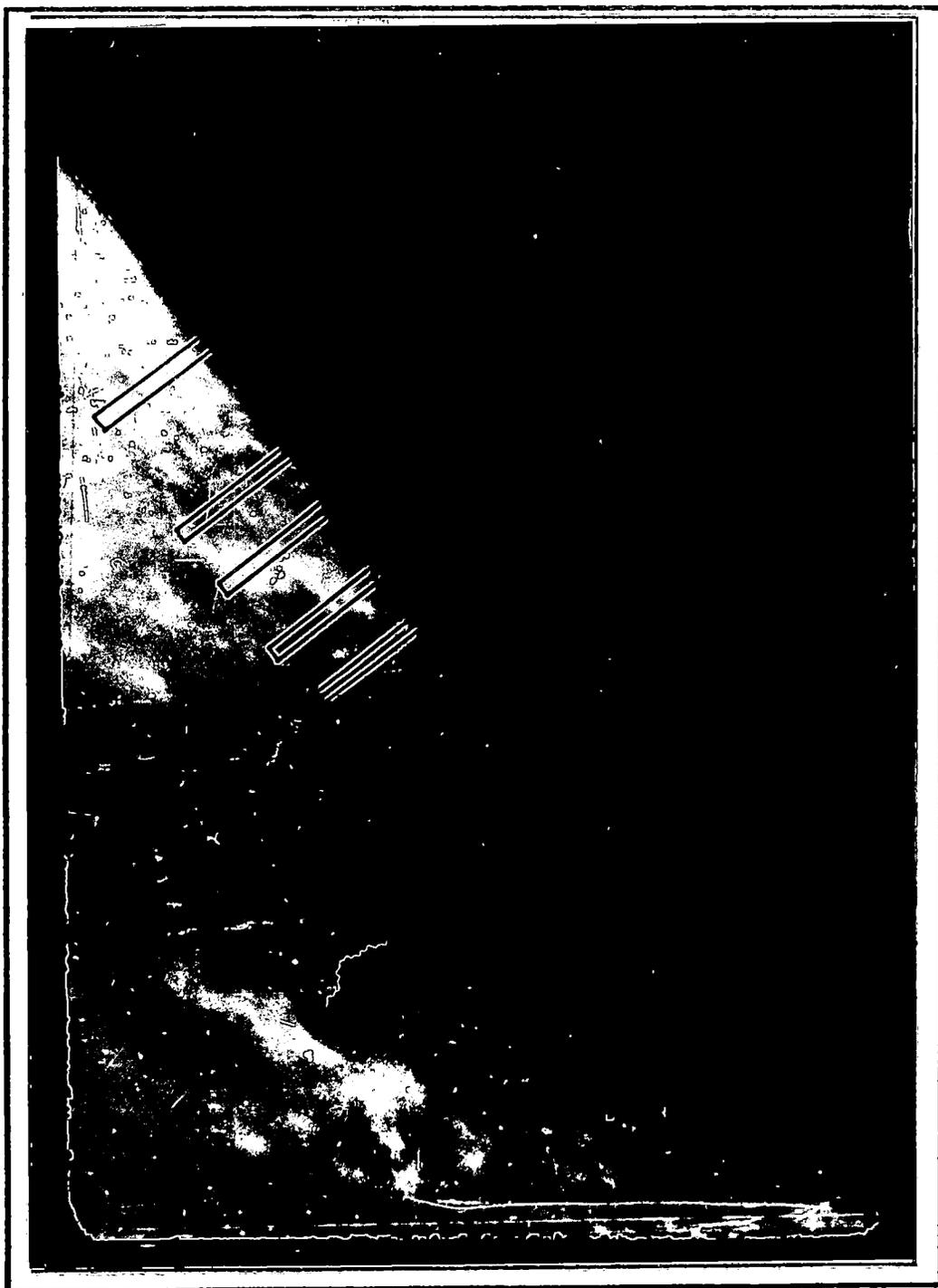


FOTO 10

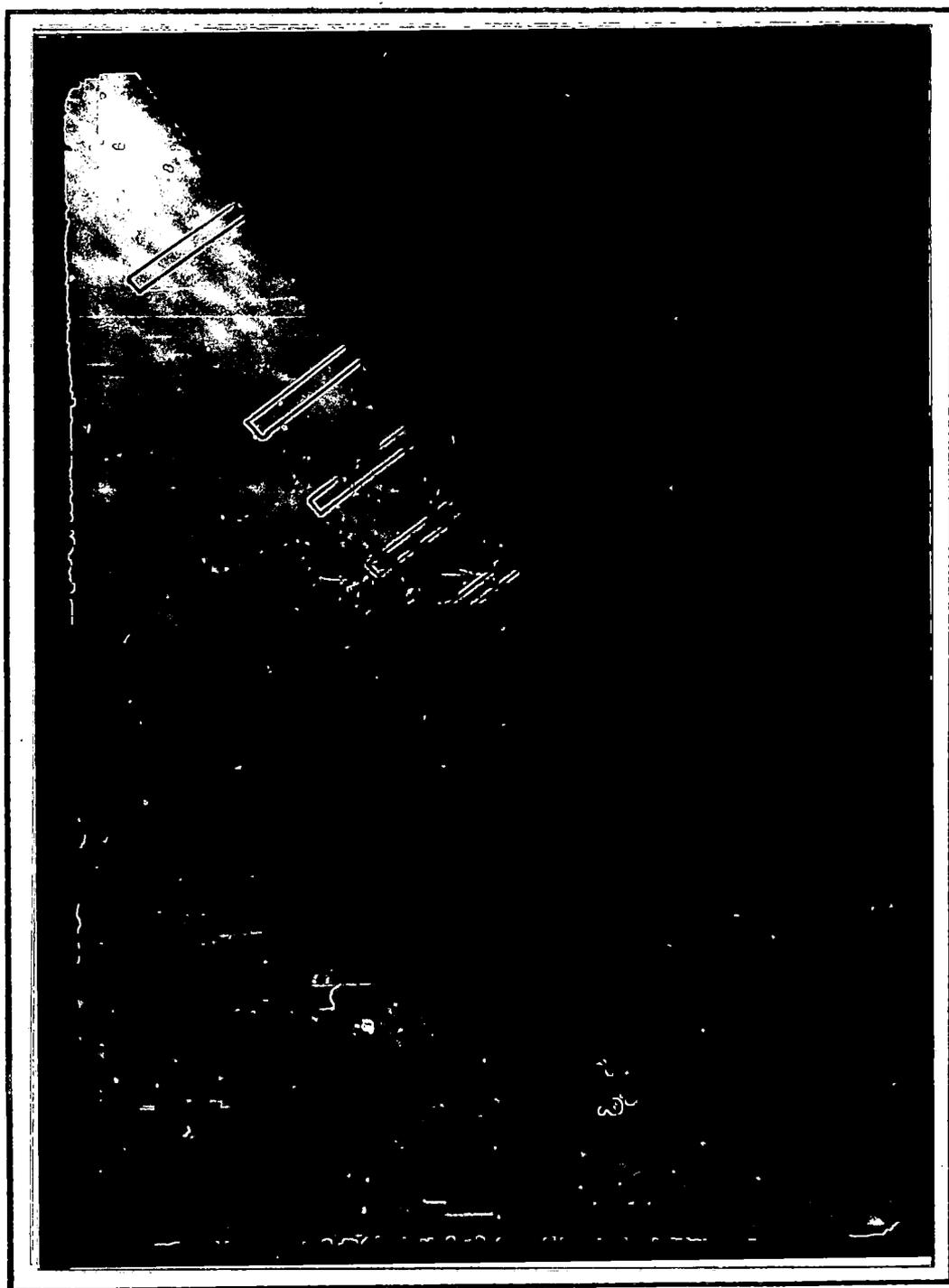


FOTO 11



FOTO 12

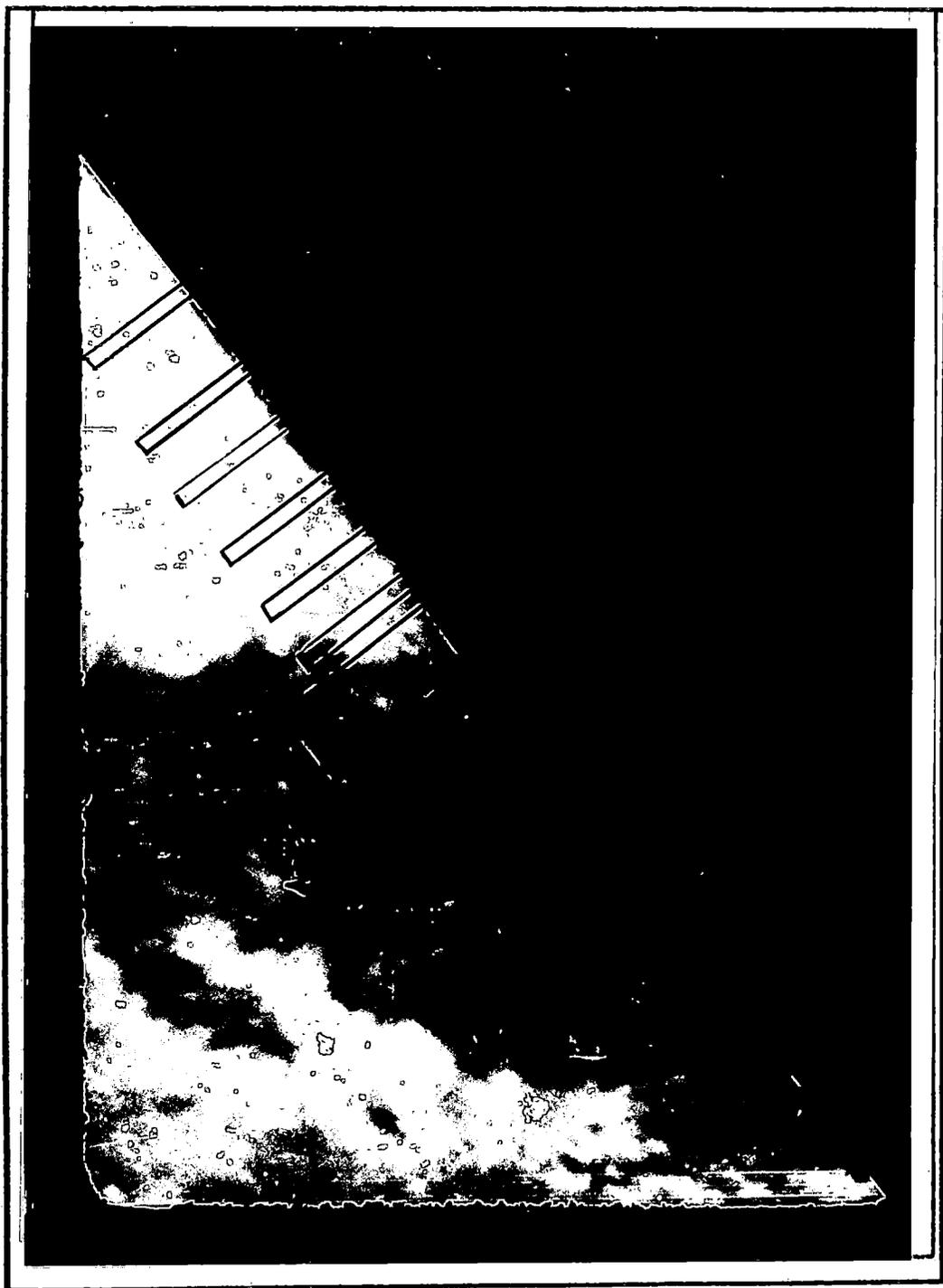


FOTO 13



FOTO 14

presente y con los votos en su mayoría de la Tribunal Permanente.

por

Dr. D. Juan José de Orús Navarro, Presidente

Dr. D. Francisco Paucher Martínez, Vocal

Dr. D. Arturo Harchisson de la Jota, Vocal

Dr. D. Ramon Canal Ulayoret, Vocal

Dr. D. Manuel Rego Fernandez, Secretario

mereciendo la calificación de Sobresaliente "Cum laude."

La Laguna, 20 de Junio de 1940

~~Juan de Orús~~

De

R. Canal

~~Al~~

A. Harchisson de la Jota