Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Beatriz Amador Medina

El Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

Los pesos A_p

Trabajo Fin de Máster
Máster en Modelización e Investigación Matemática. Estadística y Computación.
La Laguna, julio de 2021

Dirigido por
Víctor Manuel Almeida Lozano
Lourdes Rodríguez Mesa

Víctor Manuel Almeida Lozano
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Lourdes Rodríguez Mesa
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mis tutores, Lourdes y Víctor, por la gran dedicación, el enorme esfuerzo en solventar las dificultades del trabajo y la comunicación a distancia, y por la eterna paciencia con cada una de mis dudas.

Agradezco también a todos los profesores que han pasado por mi vida académica y que han contribuido a mi formación.

Por último, gracias a mi familia y amigos por todo el apoyo recibido. En especial a mi madre, por pasar por alto su cansancio y acompañarme a tomar el aire cuando lo he necesitado, y a mis amigas Ariadna y Alicia, por estar siempre a mi lado.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es el estudio del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia, que nos da desigualdades con peso para cualquier L^p, $1 < p < \infty$, a partir de la correspondiente desigualdad para un único p_0, $1 < p_0 < \infty$. Para ello, se hace necesario abordar previamente tópicos como: espacios L^p (espacios de Lebesgue), operador maximal de Hardy-Littlewood en sus distintas versiones y pesos A_p o pesos de la clase de Muckenhoupt. Se parte del estudio de operadores maximales y sus propiedades más importantes y se trata en particular el operador de Hardy-Littlewood y la maximal diádica. Esto da pie a introducir la teoría de los pesos A_p para, finalmente exponer el algoritmo de Rubio de Francia para generar pesos A_1 y el teorema de extrapolación. En el estudio de este, se presentan varias demostraciones del mismo, en su versión no vectorial, así como alguna versión generalizada donde se sustituye el operador por una familia de pares de funciones, quedando de manifiesto en ellas la importancia de los pesos A_1, que constituyen las piezas claves para la factorización de los pesos A_p.

Palabras clave: *Espacios L^p – Interpolación – Maximal de Hardy-Littlewood – Pesos A_p – Extrapolación.*

Abstract

The main objective of this work is the study of the Rubio de Francia extrapolation Theorem, which gives us weighted inequalities for any L^p, $1 < p < \infty$, from the corresponding inequality for a single p_0, $1 < p_0 < \infty$. It is necessary to deal previously with topics such as: L^p spaces (Lebesgue spaces), Hardy-Littlewood maximal operator in its different versions and A_p weights or weights of the Muckenhoupt class. We start with the study of maximal operators and their most important properties and we deal with the Hardy-Littlewood operator and the dyadic maximal in particular. This allows us to introduce the theory of the weights A_p and, finally, to present the Rubio de Francia algorithm to generate A_1 weights and the extrapolation theorem. In the study of the latter, several demonstrations of it are presented, in its non-vectorial version, as well as some generalised version where the operator is replaced by a family of pairs of functions, showing the importance of the A_1 weights, which are the key pieces for the factorisation of the A_p weights.

Keywords: *L^p spaces – Interpolation – Hardy-Littlewood Maximal Operator – A_p weights – Extrapolation.*

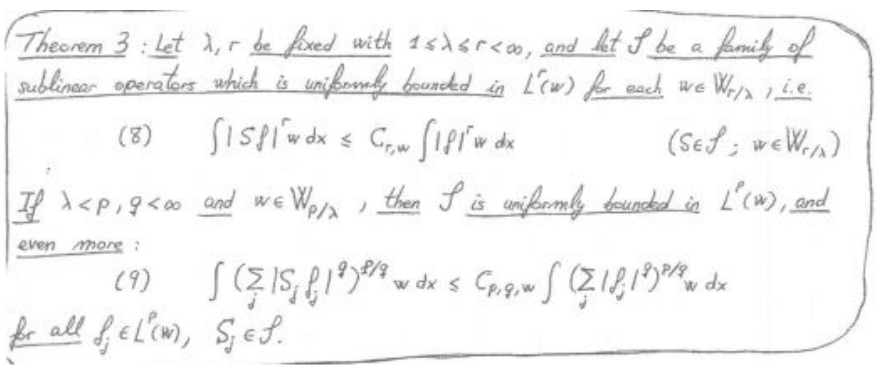
Contenido

Introducción

El estudio de la acotación de operadores sobre los espacios $L^p(X,\mu)$, donde (X,μ) es un espacio de medida, constituye un problema de alto interés en distintas áreas del Análisis Matemático, y no solo por la importancia en sí mismo de demostrar la acotación de ciertos operadores, sino que de este hecho se pueden inferir propiedades del propio espacio X, como por ejemplo en el caso de que X sea un espacio de Banach, ser UMD, ser uniformemente convexo, ser uniformemente liso, etc.

Varias técnicas, que se han convertido en procedimientos estándars, han resultado ser muy útiles a la hora de obtener acotaciones L^p de los operadores objeto de estudio: interpolación, control vía operadores maximales, extrapolación, etc

Es precisamente el estudio y demostración del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia, el objetivo principal de este trabajo. El matemático español José Luis Rubio de Francia (1949-1988) estableció su teorema de extrapolación en los términos que aparecen en la siguiente foto de sus notas, la cual agradecemos a uno de sus alumnos de Tesis Doctoral, el Catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid José Luis Torrea.



Theorem 3: Let λ, r be fixed with $1 \le \lambda \le r < \infty$, and let $\mathcal{S}$ be a family of sublinear operators which is uniformly bounded in $L^r(w)$ for each $w \in \mathbb{W}_{r/\lambda}$, i.e.

$$(8) \qquad \int |Sf|^r w\,dx \le C_{r,w} \int |f|^r w\,dx \qquad (S \in \mathcal{S};\ w \in \mathbb{W}_{r/\lambda})$$

If $\lambda < p, q < \infty$ and $w \in \mathbb{W}_{p/\lambda}$, then $\mathcal{S}$ is uniformly bounded in $L^p(w)$, and even more:

$$(9) \qquad \int \Big(\sum_j |S_j f_j|^q\Big)^{p/q} w\,dx \le C_{p,q,w} \int \Big(\sum_j |f_j|^q\Big)^{p/q} w\,dx$$

for all $f_j \in L^p(w)$, $S_j \in \mathcal{S}$.

Una lectura a las referencias [8] y [11] nos introduce en la vida y el recorrido profesional de Rubio de Francia, mientras que [3], [4], [6], [7], [10], [12], [14] [17] y [18], nos sirven de guía en la búsqueda de resultados y nos muestran los tópicos que necesitamos manejar antes de abordar el propio teorema de extrapolación, los cuales marcarán los distintos capítulos de este trabajo. Algunos de estos tópicos han sido introducidos de forma somera en la asignatura Análisis Funcional y de Fourier del Máster. En los distintos capítulos de esta memoria se desarrollan las demostraciones con detalle y se ponen de manifiesto los dos tipos de técnicas prevalecientes: la axiomática (la adecuada combinación de propiedades ya demostradas conducen a otras nuevas) y la constructiva (selección de cubos o bolas con determinadas características para conseguir probar las desigualdades deseadas, estudio de ejemplos concretos, etc.).

En el capítulo 1 se introducen los espacios L^p y los L^p débiles sobre un espacio de medida (X,μ), y a través del estudio de sus propiedades desembocamos en los teoremas de interpolación de Marcinkiewicz (interpolación real) y de Riesz-Thorin (interpolación compleja). El contenido del mismo sigue el esquema de [13], aunque también se han consultado [1] y [19].

El capítulo 2, ya tomando $X=\mathbb{R}^n$ y μ como la medida de Lebesgue, se dedica al estudio de la función maximal de Hardy-Littlewood, en sus versiones centrada y no centrada, tanto sobre bolas como sobre cubos, demostrándose que son equivalentes. La acotación L^p de la maximal de Hardy-Littlewood se convierte en una herramienta fundamental en el desarrollo de los siguientes capítulos. Las referencias bibliográficas usadas para su elaboración son [6] y [13].

Dado que en el teorema de extrapolación comparecen los denominados espacios L^p con peso, la medida $\mu = w\,dx$, siendo w una función no negativa y localmente integrable, el tercer capítulo está dedicado al estudio de los pesos A_p de la clase de Munckenhoupt y sus propiedades, ya que son esta clase de pesos los que garantizan la veracidad del teorema. La redacción de este capítulo se ha hecho consultando simultáneamente las referencias [6] y [14].

Finalmente, el último capítulo se dedica al objeto que motivó la realización de este trabajo, el Teorema de Extrapolación de Rubio de Francia. La versión que se presenta, inicialmente, del mismo es no vectorial y se incluyen dos demostraciones distintas, aunque comparten como punto clave la generación de pesos de la clase A_1. Además se incluye una versión más actual del mismo en la que desaparece el operador y es sustituido por una familia de pares de funciones. Los libros [4] y [6], han sido las principales referencias seguidas, aunque también han servido de apoyo [2], [12], [14] y [15], entre otras.

A lo largo del trabajo, la constante C que aparece puede cambiar de una línea a otra.

1

Espacios de Lebesgue y espacios L^p-débiles

Los espacios de Lebesgue L^p y los espacios L^p-débiles o de Marcinkiewicz forman parte de las clases de funciones más importantes dentro del contexto del análisis. Miden, en cierto sentido, el "tamaño" de las funciones, por lo que sus propiedades resultan muy útiles en diversos ámbitos. Aparecen como elementos básicos en el marco del análisis funcional, del análisis armónico, ecuaciones en derivadas parciales o en la teoría de probabilidad. También juegan un papel relevante en otras disciplinas como en la física, donde, por ejemplo, proporcionan un marco teórico apropiado para el tratamiento de señales y el análisis de ciertas ecuaciones de la mecánica cuántica.

Estos espacios constituyen la base sobre la que se desarrollará el estudio presentado en esta memoria, por lo que dedicamos este capítulo al estudio de sus características principales.

1.1. Espacios L^p y espacios de Marcinkiewicz

Introducimos primero los espacios de Lebesgue sobre un espacio de medida.

Definición 1.1. *Sea (X,μ) un espacio de medida. Para cada $0<p\le\infty$, denotamos por $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ a la clase de las funciones medibles complejas para las que $\|f\|_{L^p(X,\mu)}<\infty$, siendo*

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0<p<\infty,$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \operatorname{esssup}|f| = \operatorname{ínf}\left\{\alpha>0 : \mu\left(\left\{x\in X : |f(x)|>\alpha\right\}\right)=0\right\}, \quad p=\infty.$$

Cuando no haya confusión, usaremos la notación $\|\cdot\|_p$ para referirnos a $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$.

Las clases $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, $0\le p<\infty$, son espacios vectoriales complejos. Para dotarlas de una estructura adecuada, debemos hacer la siguiente observación. En general, el hecho de que $\|f\|_p = 0$ no implica que f sea la función nula. Para solventar esta circunstancia basta considerar en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ la relación de equivalencia $f \sim g$ si, y solo si, $f = g$ en μ-casi todo punto. El *espacio de Lebesgue* $L^p(X,\mu)$ se define entonces como el conjunto de las clases de equivalencia, esto es, el conjunto cociente $\mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$.

La notación $\|\cdot\|_p$ sugiere que pueda tratarse de una norma para el espacio $L^p(X,\mu)$, pero la aplicación $\|\cdot\|_p$ verifica la desigualdad triangular únicamente cuando $1 \le p \le \infty$, (en este caso, se denomina desigualdad de Minkowski). Como consecuencia la estructura topológica de los espacios $L^p(X,\mu)$ es diferente según los valores de p. Cuando $1 \le p \le \infty$, $L^p(X,\mu)$ es un espacio normado, y si $0 < p < 1$, se tiene que $L^p(X,\mu)$ es un espacio métrico con la distancia

$$d(f,g) = \|f-g\|_p^p, \quad f,g \in L^p(X,\mu). \tag{1.1}$$

Luego, todos los espacios de Lebesgue comparten la estructura de espacio métrico, pero cuando $1 \le p \le \infty$ podemos disponer de una estructura más fuerte, la de espacio normado.

Una de las desigualdades fundamentales cuando se estudian los espacios de Lebesgue es la desigualdad de Hölder, de la que como consecuencia se obtiene la desigualdad de Minkowski. A continuación recogemos la versión más utilizada en la práctica, su versión generalizada y su interpretación cuando $0 < p < 1$.

Para ello introducimos primero el concepto de exponentes conjugados. Sean $0 < p, q \le \infty$. Decimos que p y q son *exponentes conjugados* si verifican la siguiente relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

con la interpretación adecuada cuando $p = 1$ ó $p = \infty$. Queremos hacer notar que la definición habitual de este concepto se hace para valores de p y q en $[1,\infty]$. Pero si $0 < p < 1$ podemos hablar también de su exponente conjugado q cuando se satisface la relación anterior. En este caso, observamos que $q < 0$. Es habitual usar la notación p' para referirnos al exponente conjugado de p, pues así queda más clara su relación con p. Es fácil ver que si $p \ne 1$, entonces $p' = \frac{p}{p-1}$.

Teorema 1.2. *Sean (X,μ) un espacio de medida y $0 < p < \infty$.*

i. Desigualdad de Hölder. Si $1 \le p < \infty$, entonces

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}, \quad f \in L^p(X,\mu),\ g \in L^{p'}(X,\mu)[1].$$

ii. Desigualdad de Hölder generalizada. Si $0 < p_1, \dots, p_m \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k}$, y $\{f_k\}_{k=1}^m$ son funciones tales que $f_k \in L^{p_k}(X,\mu)$, entonces

$$\Big\| \prod_{k=1}^m f_k \Big\|_p \le \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{p_k}.$$

[1] Cuando $p = 2$ esta desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

iii. *Desigualdad de Hölder invertida. Si* $0<p<1$, *y* f,g *son funciones medibles tales que* $f\in L^p(X,\mu)$ *y* $g^{-1}\in L^{|p'|}(X,\mu)$, *con* $g>0$ *en* μ*-casi todo punto, entonces*

$$\|f\|_p\|g^{-1}\|_{|p'|}^{-1}\le \|fg\|_1.$$

A partir de estas desigualdades podemos deducir las siguientes.

Teorema 1.3. *Sean* (X,μ) *un espacio de medida y* $0<p\le\infty$.

i. *Desigualdad de Minkowski. Cuando* $1\le p\le\infty$,

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p,\quad f,g\in L^p(X,\mu).$$

ii. *Desigualdad de Minkowski invertida. Si* $0<p<1$, *y* $f,g\in L^p(X,\mu)$, $f,g\ge 0$, *entonces*

$$\|f\|_p+\|g\|_p\le\|f+g\|_p.$$

iii. *Desigualdad integral de Minkowski.*
Sean (Y,ν) *otro espacio de medida* σ*-finita y* $1\le p<\infty$. *Si* f *es una función medible definida en el espacio producto* $(X,\mu)\times(Y,\nu)$, *se verifica la siguiente desigualdad*

$$\left(\int_Y\left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}d\mu(x).$$

La desigualdad (i) de este teorema nos permite concluir que $\|\cdot\|_p$ es una norma para $L^p(X,\mu)$ cuando $1\le p\le\infty$. Además, con la distancia generada por esta norma, los espacios $L^p(X,\mu)$, $1\le p\le\infty$ son completos por lo que concluimos que $L^p(X,\mu)$ es un espacio de Banach cuando $1\le p\le\infty$. En el caso $0<p<1$ se puede establecer que $L^p(X,\mu)$ dotado de la distancia (1.1) es un espacio métrico completo.

Sea $1\le p\le\infty$. El espacio dual de $L^p(X,\mu)$, $\left(L^p(X,\mu)\right)^*$, está formado por los funcionales lineales y acotados definidos en $L^p(X,\mu)$, esto es,

$$\left(L^p(X,\mu)\right)^*=\left\{T:L^p(X,\mu)\longrightarrow\mathbb{C}: T\text{ lineal y acotado}\right\},$$

sobre el que se define la norma

$$\|T\|=\sup_{f\in L^p(X,\mu)\setminus\{0\}}\frac{|T(f)|}{\|f\|_p}=\sup_{\|f\|_p=1}|T(f)|.$$

Se puede demostrar que el espacio $\left(L^p(X,\mu)\right)^*$ es también un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder (Teorema 1.2 (i)) muestra que si $1\le p\le\infty$ y $g\in L^{p'}(X,\mu)$ entonces el funcional T_g definido por

$$T_g(f)=\int_X fg\,d\mu,\quad f\in L^p(X,\mu),$$

es un funcional lineal acotado en $L^p(X,\mu)$ y $\|T_g\| \le \|g\|_{p'}$. La pregunta natural es si para cualquier elemento T de $(L^p(X,\mu))^*$ existe una función $g \in L^{p'}(X,\mu)$ tal que $T = T_g$ y, en tal caso, si es única. La respuesta a esta pregunta se recoge en el Teorema de representación de Riesz ([19, Theorem 6.16]).

Teorema 1.4. *(Teorema de representación de Riesz) Sean (X,μ) un espacio de medida σ-finita y $1 \le p < \infty$. Dado $T \in (L^p(X,\mu))^*$, existe una única función $g \in L^{p'}(X,\mu)$ tal que*

$$T(f) = \int_X fg\,d\mu, \quad f \in L^p(X,\mu).$$

Además, se tiene que $\|T\| = \|g\|_{p'}$.

Este resultado nos dice que el dual de $L^p(X,\mu)$, $1 \le p < \infty$, es isométricamente isomorfo a $L^{p'}(X,\mu)$. Además, podemos expresar la norma de $f \in L^p(X,\mu)$, $1 \le p < \infty$, mediante

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int_X fg\,d\mu \right|. \tag{1.2}$$

El resultado también es cierto cuando $p = \infty$, si (X,μ) es un espacio de medida σ-finita (ver [9, Proposition 6.13]).

Aunque, como ya hemos comentado, los espacios de Lebesgue tienen un rol relevante en análisis, en ciertas ocasiones es necesario considerar otra manera más precisa de medir el "tamaño" de las funciones. Aparecen entonces los conocidos como espacios de Lorentz, entre los que, en particular, se encuentran los espacios L^p-débiles o espacios de Marcinkiewicz que analizamos a continuación.

Para ello, previamente vamos a introducir y presentar las propiedades fundamentales de la llamada función de distribución.

Definición 1.5. *Sean (X,μ) un espacio de medida y f una función compleja medible en X. La función de distribución d_f se define en $[0,\infty)$ como*

$$d_f(\alpha) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right), \quad \alpha \in [0,\infty).$$

Observamos que la función de distribución d_f, como está definida por medio de una integral, proporciona información general sobre el tamaño de la función f, pero no revela el comportamiento en un punto dado. En particular, si $f = g$ en μ- casi todo punto, entonces $d_f = d_g$.

La función de distribución verifica las siguientes propiedades que pueden probarse fácilmente.

Proposición 1.6. *Sean (X,μ) un espacio de medida y f y g funciones complejas medibles en X. Se tienen las siguientes propiedades:*

i. *d_f es una función decreciente y continua por la derecha. Además, $d_f = d_{|f|}$.*
ii. *Si $|g| \le |f|$ μ-c.t.p., entonces $d_g \le d_f$.*
iii. *Para todo $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se cumple $d_{cf}(\alpha) = d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right)$, $\alpha \ge 0$.*
iv. *$d_{f+g}(\alpha+\beta) \le d_f(\alpha) + d_g(\beta)$, $\alpha, \beta \ge 0$.*
v. *$d_{fg}(\alpha\beta) \le d_f(\alpha) + d_g(\beta)$, $\alpha, \beta \ge 0$.*

La función de distribución nos permite obtener la siguiente expresión para $\|\cdot\|_p$ que será de gran utilidad en lo que sigue.

Proposición 1.7. *Sean (X,μ) un espacio de medida, $0 < p < \infty$ y $f \in L^p(X,\mu)$. Entonces,*

$$\|f\|_p^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha.$$

Demostración. Haciendo uso del Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \mathcal{X}_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}(x)\, d\mu(x)\, d\alpha \\ &= \int_X \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \mathcal{X}_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}(x)\, d\alpha\, d\mu(x) \\ &= \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\, d\alpha\, d\mu(x) = \int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Introducimos ahora la noción de espacios L^p-débiles como sigue.

Definición 1.8. *Sean (X,μ) un espacio de medida y $0 < p < \infty$. Se define el espacio L^p-débil, que denotamos por $L^{p,\infty}(X,\mu)$, como el conjunto de funciones complejas medibles f definidas en X tales $\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} < \infty$, donde*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

El espacio $L^{\infty,\infty}(X,\mu)$ es por definición $L^\infty(X,\mu)$.
Cuando no haya confusión, usaremos la notación $\|\cdot\|_{p,\infty}$ en lugar de $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$.

Como ya comentamos, si $f = g$ en μ-casi todo punto, entonces $d_f = d_g$. Así los espacios $L^{p,\infty}(X,\mu)$ deben ser considerados como espacios de clases de funciones, de la misma manera que se ha hecho para los espacios de Lebesgue, esto es, dos funciones en $L^{p,\infty}(X,\mu)$ serán consideradas iguales si lo son en μ-casi todo punto.

Aunque la notación $\|\cdot\|_{p,\infty}$ sirve por lo general para designar una norma, realmente $\|\cdot\|_{p,\infty}$ no es necesariamente una. De las propiedades de la función de distribución obtenemos el siguiente resultado que nos muestra que $\|\cdot\|_{p,\infty}$ es una cuasinorma.

Proposición 1.9. *Sean f, g funciones complejas medibles en un espacio de medida (X,μ) y $0<p<\infty$. Entonces,*

i. $\|cf\|_{p,\infty} = |c|\|f\|_{p,\infty}, \quad c\in\mathbb{C}.$
ii. $\|f+g\|_{p,\infty} \le c_p\left(\|f\|_{p,\infty}+\|g\|_{p,\infty}\right)$, *donde* $c_p = \text{máx}\{2, 2^{\frac{1}{p}}\}$.
iii. $\|f\|_{p,\infty}=0$ *si y solo si,* $f=0$ *en μ-casi todo punto.*

El espacio L^p-débil es completo con esta cuasinorma ([13, Theorem 1.4.11]). Por tanto, $L^{p,\infty}(X,\mu)$, $0<p<\infty$, es un espacio cuasi-Banach.

El resultado que presentamos a continuación establece que los espacios de Marcinkiewicz son una generalización de los espacios de Lebesgue.

Proposición 1.10. *Sean (X,μ) un espacio de medida y $0<p<\infty$. Se verifica*

$$\|f\|_{p,\infty} \le \|f\|_p, \quad f\in L^p(X,\mu),$$

y, por tanto, $L^p(X,\mu)\subseteq L^{p,\infty}(X,\mu)$.

Demostración. Sabemos que

$$\|f\|_{p,\infty}^p = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha^p d_f(\alpha)\right\}.$$

Basta ver entonces que $\alpha^p d_f(\alpha)\le \|f\|_p^p$, $\alpha>0$. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned}\alpha^p d_f(\alpha) &= \alpha^p\mu\left(\{x:|f(x)|>\alpha\}\right) = \int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}\alpha^p\,d\mu(x) \le \int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}|f(x)|^p\,d\mu(x)\\ &\le \int_X |f(x)|^p\,d\mu(x) = \|f\|_p^p, \quad \alpha>0.\end{aligned}$$

□

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que el contenido $L^p(X,\mu)\subset L^{p,\infty}(X,\mu)$ es estricto.

Ejemplo 1.11. Sea $0<p<\infty$. En $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, consideramos la función $f(x)=|x|^{-\frac{n}{p}}$, $x\in\mathbb{R}^n$.
Observamos que $|f|^p=|x|^{-n}$ no es integrable, por lo que $f\notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, $f\in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, pues

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,\infty} &= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\left|\left\{x:|x|^{-\frac{n}{p}}>\alpha\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\left|\left\{x:|x|<\alpha^{-\frac{p}{n}}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\}\\ &= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\left|B\left(0,\alpha^{-\frac{p}{n}}\right)\right|^{\frac{1}{p}}\right\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\cdot(\alpha^{-p})^{\frac{1}{p}}\right\}|B(0,1)|^{\frac{1}{p}} = |B(0,1)|^{\frac{1}{p}}<\infty.\end{aligned}$$

□

Estamos ya en condiciones de ver un primer resultado de interpolación que involucra a los espacios L^p-débiles. Este resultado generaliza así el correspondiente para espacios de Lebesgue. Recordamos que si $f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$, entonces se verifica que $f \in L^r(X,\mu)$, para cada r, con $p < r < q$ [9, Proposition 6.10].

Proposición 1.12. *Sean $0 < p < r < q \leq \infty$ y $f \in L^{p,\infty}(X,\mu) \cap L^{q,\infty}(X,\mu)$. Entonces, $f \in L^r(X,\mu)$ y, además,*

$$\|f\|_r \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{p,\infty}^{\alpha_{p,q,r}} \|f\|_{q,\infty}^{\beta_{p,q,r}},$$

siendo

$$\alpha_{p,q,r} = \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \quad y \quad \beta_{p,q,r} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

con la interpretación apropiada en el caso $q = \infty$.

Demostración. Asumimos que $f \neq 0$ pues el resultado es trivial en caso contrario.

Suponemos primero $q < \infty$. Ya que $f \in L^{p,\infty}(X,\mu) \cap L^{q,\infty}(X,\mu)$,

$$d_f(\alpha) \leq \text{mín}\left\{\frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{\alpha^q}\right\}, \quad \alpha > 0.$$

Entonces, dado $B > 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|f\|_r^r = r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha)\,d\alpha &\leq r\int_0^\infty \alpha^{r-1}\,\text{mín}\left\{\frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{\alpha^q}\right\} d\alpha \\
&\leq r\|f\|_{p,\infty}^p \int_0^B \alpha^{r-1-p}\,d\alpha + r\|f\|_{q,\infty}^q \int_B^\infty \alpha^{r-1-q}\,d\alpha \\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|_{p,\infty}^p B^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|_{q,\infty}^q B^{r-q}.
\end{aligned}$$

Eligiendo B de manera que

$$\|f\|_{p,\infty}^p B^{r-p} = \|f\|_{q,\infty}^q B^{r-q}, \text{ esto es, } B = \left(\frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{\|f\|_{p,\infty}^p}\right)^{\frac{1}{q-p}},$$

se sigue que

$$\|f\|_r^r \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)\|f\|_{p,\infty}^p B^{r-p} = \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)\left(\|f\|_{p,\infty}^p\right)^{\frac{q-r}{q-p}}\left(\|f\|_{q,\infty}^q\right)^{\frac{r-p}{q-p}},$$

y concluimos

$$\|f\|_r \leq \left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{p,\infty}^{\alpha(p,q,r)} \|f\|_{q,\infty}^{\beta(p,q,r)},$$

donde

$$\alpha(p,q,r)=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \quad \text{y} \quad \beta(p,q,r)=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Analizamos ahora el caso $q=\infty$. Ya que $f \in L^\infty(X,\mu)$, se tiene que $d_f(\alpha)=0$ cuando $\alpha > \|f\|_\infty$. Luego,

$$\begin{aligned}\|f\|_r^r &= r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha)d\alpha = r\int_0^{\|f\|_\infty} \alpha^{r-1} d_f(\alpha)d\alpha \leq r\|f\|_{p,\infty}^p \int_0^{\|f\|_\infty} \alpha^{r-1-p}d\alpha \\ &= \frac{r}{r-p}\|f\|_{p,\infty}^p \|f\|_\infty^{r-p},\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

1.2. Convolución en $\mathbb{R}^n$ y aproximaciones de la identidad

En esta sección tomamos como espacio de medida el conjunto $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue. Nuestro objetivo es establecer algunas propiedades de los espacios de Lebesgue que involucran a la operación de convolución, una operación que, como veremos, dota a $L^1(\mathbb{R}^n)$ de estructura de álgebra de Banach. La convolución también será la base para obtener núcleos de sumabilidad que actúan, en cierto sentido, como elemento unidad.

Definición 1.13. *Sean f y g dos funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. Se define la convolución $f*g$ de f y g mediante*

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

siempre que la integral exista.

Como se deduce del siguiente resultado, si $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f*g<\infty$ en casi todo punto.

Proposición 1.14. *Sean $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se tiene que $f*g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\|g\|_1$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones y aplicando el Teorema de Fubini podemos escribir

$$\|f*g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dydx = \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy = \|f\|_1\|g\|_1.$$

□

Usando la linealidad de la integral y de nuevo la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue y el Teorema de Fubini se pueden probar las siguientes propiedades para la convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.15. *Sean $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se verifica:*

i. $f*g=g*f$.
ii. $f*(g*h)=(f*g)*h$.
iii. $f*(g+h)=f*g+f*h$.

Las propiedades que se describen en las Proposiciones 1.14 y 1.15 ponen de manifiesto que el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con la operación de convolución es un álgebra de Banach conmutativa.

A continuación generalizamos la desigualdad recogida en la Proposición 1.14.

Teorema 1.16 (Desigualdad de Young). *Sean $1\le p,q,r\le\infty$ verificando $\frac{1}{q}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$. Entonces, para cada $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^r(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $f*g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|f*g\|_q\le\|f\|_p\|g\|_r.$$

Demostración. Observamos que, si $p=\infty$ entonces $r=1$ y $q=\infty$ y la desigualdad es trivial. Ocurre igual cuando $r=\infty$, pues en este caso $p=1$ y $q=\infty$. Cuando $q=\infty$ se tiene que p y r son exponentes conjugados, y entonces la propiedad se sigue de la desigualdad de Hölder.

Suponemos entonces $1\le p,q,r<\infty$. Sean $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^r(\mathbb{R}^n)$. De las hipótesis sobre p, q y r y la relación entre dos exponentes conjugados se sigue que

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{p},\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{r},\quad \text{y}\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{r'}=1.$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)|&\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{1-\frac{p}{q}}\left(|f(x-y)|^{\frac{p}{q}}|g(y)|^{\frac{r}{q}}\right)|g(y)|^{1-\frac{r}{q}}\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^{\frac{p}{r'}}\left(|f(x-y)|^{\frac{p}{q}}|g(y)|^{\frac{r}{q}}\right)|g(y)|^{\frac{r}{p'}}\,dy,\quad x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Sea $x\in\mathbb{R}^n$. Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada (Teorema 1.2 (ii)) con exponentes r',q,p' a las funciones $f_1(y)=|f(x-y)|^{p/r'}$, $f_2(y)=|f(x-y)|^{p/q}|g(y)|^{r/q}$ y $f_3(y)=|g(y)|^{r/p'}$, $y\in\mathbb{R}^n$, resulta

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)|&\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^r\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^r\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}\\&=\|f\|_p^{\frac{p}{r'}}\|g\|_r^{\frac{r}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^r\,dy\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Tomando ahora norma L^q y aplicando el Teorema de Fubini, se concluye que

$$\begin{aligned}\|f*g\|_q &\le \|f\|_p^{\frac{p}{r'}}\|g\|_r^{\frac{r}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p|g(y)|^r\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|f\|_p^{\frac{p}{r'}}\|g\|_r^{\frac{r}{p'}}\|f\|_p^{\frac{p}{q}}\|g\|_r^{\frac{r}{q}} = \|f\|_p\|g\|_r.\end{aligned}$$

□

Una versión de este último teorema para espacios L^p-débiles es la siguiente.

Teorema 1.17 (Desigualdad de Young en L^p-débil). *Sean $1 \le p < \infty$ y $1 < q, r < \infty$ tales que $\frac{1}{q}+1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{r}$. Consideramos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f*g$ es una función en $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y, además, existe $C_{p,q,r} > 0$ tal que*

$$\|f*g\|_{q,\infty} \le C_{p,q,r}\|f\|_p\|g\|_{r,\infty}.$$

Demostración. Nuestro objetivo es establecer que existe $C_{p,q,r} > 0$ de manera que

$$\gamma^q d_{f*g}(\gamma) \le C^q_{p,q,r}\|f\|_p^q\|g\|_{r,\infty}^q, \quad \gamma > 0. \tag{1.3}$$

Fijamos $\gamma > 0$. Para cierto valor $M > 0$ que puede depender de γ y que se elegirá adecuadamente más adelante, descomponemos la función $g = g^M + g_M$, donde $g^M = g\mathcal{X}_{|g|\le M}$ y $g_M = g\mathcal{X}_{|g|>M}$. Se tiene que

$$d_{g^M}(\alpha) = \begin{cases} d_g(\alpha) - d_g(M), & \text{si } 0 < \alpha < M,\\ 0, & \text{si } \alpha \ge M,\end{cases} \quad \text{y} \quad d_{g_M}(\alpha) = \begin{cases} d_g(M), & \text{si } 0 < \alpha \le M,\\ d_g(\alpha), & \text{si } \alpha > M.\end{cases}$$

En efecto, basta observar que $|g^M(x)| > \alpha$ si, y solo si, $\alpha < |g(x)| \le M$, y que $|g_M(x)| > \alpha$ si, y solo si, $|g(x)| > \text{máx}\{\alpha, M\}$, por lo que

$$d_{g^M}(\alpha) = \mu\left(\{x : \alpha < |g| \le M\}\right) \quad \text{y} \quad d_{g_M}(\alpha) = \mu\left(\{x : |g| > \text{máx}\{\alpha, M\}\}\right), \quad \alpha > 0.$$

Usando las propiedades en Proposición 1.6 (iv) y Proposición 1.15 (iii) se tiene que

$$d_{f*g}(\gamma) = d_{f*g^M + f*g_M}(\gamma) \le d_{f*g^M}\left(\frac{\gamma}{2}\right) + d_{f*g_M}\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Veamos ahora que podemos elegir M de manera que $d_{f*g^M}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0$. Para ello, establecemos primero que $g^M \in L^s(\mathbb{R}^n)$, para todo $s > r$.

Es claro que $\|g^M\|_\infty \le M$. Sea $r < s < \infty$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.7 y que $g \in L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\|g^M\|_s^s &= s\int_0^\infty \alpha^{s-1}d_{g^M}(\alpha)\,d\alpha = s\int_0^M \alpha^{s-1}\left(d_g(\alpha) - d_g(M)\right)d\alpha\\ &\le s\|g\|_{r,\infty}^r\int_0^M \alpha^{s-r-1}\,d\alpha - s\,d_g(M)\int_0^M \alpha^{s-1}\,d\alpha\\ &= \frac{s}{s-r}M^{s-r}\|g\|_{r,\infty}^r - M^s d_g(M) \le \frac{s}{s-r}M^{s-r}\|g\|_{r,\infty}^r < \infty.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene que $|f*g^M(x)| \le \|f\|_p \|g^M\|_{p'}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, si $p = 1$, se obtiene que

$$|f * g^M(x)| \le \|f\|_1 \|g^M\|_\infty \le M\|f\|_1, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

y podemos tomar $M = \frac{\gamma}{2\|f\|_1}$ para obtener $|f * g^M(x)| \le \frac{\gamma}{2}$ y entonces $d_{f*g^M}(\frac{\gamma}{2}) = 0$. En el caso de que $1 < p < \infty$, tomando $s = p'$ se tiene que $p' > r$ (obsérvese que de las hipótesis para p, q, r se sigue que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$). Luego, de (1.4) se tiene que

$$|f * g^M(x)| \le \|f\|_p \left(\frac{p'}{p'-r} M^{p'-r} \|g\|_{r,\infty}^r\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\frac{q}{r}\right)^{1/p'} M^{r/q} \|f\|_p \|g\|_{r,\infty}^{r/p'}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Elegimos entonces M de manera que el término de la derecha sea igual a $\frac{\gamma}{2}$, esto es,

$$M = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q/r} \left(\frac{r}{q}\right)^{q/(rp')} \|f\|_p^{-q/r} \|g\|_{r,\infty}^{-q/p'}, \tag{1.5}$$

y de esta forma, como antes, se tiene que $d_{f*g^M}(\frac{\gamma}{2}) = 0$.

Analizamos ahora el término $d_{f*g_M}(\frac{\gamma}{2})$ para el valor de M que hemos tomado. Procediendo como en (1.4) podemos probar que $g_M \in L^s(\mathbb{R}^n)$ cuando $1 \le s < r$. En efecto, sea $1 \le s < r$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|g_M\|_s^s &= s\int_0^\infty \alpha^{s-1} d_{g_M}(\alpha)\,d\alpha = s\int_0^M \alpha^{s-1} d_g(M)\,d\alpha + s\int_M^\infty \alpha^{s-1} d_g(\alpha)\,d\alpha \\
&\le M^s d_g(M) + s\|g\|_{r,\infty}^r \int_M^\infty \alpha^{s-r-1}\,d\alpha \\
&\le M^{s-r}\|g\|_{r,\infty}^r + \frac{s}{s-r} M^{s-r} \|g\|_{r,\infty}^r = \frac{r}{r-s} M^{s-r} \|g\|_{r,\infty}^r < \infty.
\end{aligned}$$

Tomando $s = 1$ y aplicando la desigualdad de Young (Teorema 1.16), se sigue que

$$\|f * g_M\|_p \le \|f\|_p \|g_M\|_1 \le \|f\|_p \frac{r}{r-1} M^{1-r} \|g\|_{r,\infty}^r = r' M^{1-r} \|f\|_p \|g\|_{r,\infty}^r.$$

Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}
d_{f*g_M}\left(\frac{\gamma}{2}\right) &\le \frac{2^p}{\gamma^p} \int_{\{x:|f*g_M|>\frac{\gamma}{2}\}} |f * g_M(x)|^p\,dx \le \frac{2^p}{\gamma^p} \|f * g_M\|_p^p \\
&\le \left(\frac{2r'}{\gamma} M^{1-r} \|f\|_p \|g\|_{r,\infty}^r\right)^p.
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de M que consideramos antes según el valor de p se deduce que, cuando $p = 1$,

$$d_{f*g_M}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \le r'\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-r} \|f\|_1^r \|g\|_{r,\infty}^r = r'\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-q} \|f\|_1^q \|g\|_{r,\infty}^q,$$

donde hemos tenido en cuenta que, en este caso, $r = q$.

Cuando $1 < p < \infty$, M viene dada por (1.5), por lo que, en virtud de la relación entre p, q, r se tiene que

$$\begin{aligned} M^{(1-r)p} = M^{-rp/r'} &= \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-pq/r'} \left(\frac{r}{q}\right)^{-pq/(r'p')} \|f\|_p^{pq/r'} \|g\|_{r,\infty}^{pqr/(p'r')} \\ &= \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{p-q} \left(\frac{r}{q}\right)^{(p-q)/p'} \|f\|_p^{q-p} \|g\|_{r,\infty}^{(q-p)r/p'}. \end{aligned}$$

De esta forma, y usando que $rp + (q-p)r/p' = q$, llegamos a que

$$d_{f*g_M}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq 2^q (r')^p \left(\frac{r}{q}\right)^{(p-q)/p'} \gamma^{-q} \|f\|_p^q \|g\|_{r,\infty}^q.$$

Recopilando las estimaciones vistas se concluye que para cierta $c_{p,q,r} > 0$

$$d_{f*g}(\gamma) \leq d_{f*g_M}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{C_{p,q,r}^q}{\gamma^q} \|f\|_p^q \|g\|_{r,\infty}^q,$$

y (1.3) queda establecido. □

Las aproximaciones de la identidad o núcleos de sumabilidad resultan de gran interés cuando tratamos resultados de aproximación en los espacios de Lebesgue, como veremos a continuación.

Definición 1.18. *Una familia de funciones* $\{\mathcal{K}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ *se dice que es una aproximación de la identidad si cumple las siguientes propiedades:*

i. Existe $c > 0$ *constante tal que* $\sup_{\varepsilon>0} \|\mathcal{K}_\varepsilon\|_1 \leq c$.

ii. Para cada $\varepsilon > 0$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

iii. Para todo $\delta > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(x)|\,dx = 0.$$

Una manera muy útil de obtener una aproximación de la identidad es la siguiente. Consideramos una función $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} g(\frac{x}{\varepsilon})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces puede verse fácilmente que $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una aproximación de la identidad.

Veamos ahora que un núcleo de sumabilidad se comporta como la identidad. Como ya fue comentado, el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la operación de convolución. Sin embargo, carece de elemento unitario pues no existe $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de manera que $u * f = f$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Las aproximaciones de la identidad enmiendan, en cierto sentido, esta circunstancia.

Teorema 1.19. *Sea $1 \le p \le \infty$. Consideramos $\{\mathcal{K}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ una aproximación de la identidad y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces,*

i. Si $1 \le p < \infty$, se tiene que $\|\mathcal{K}_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$, cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.
ii. Si $p = \infty$ y f es continua en un entorno de $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathcal{K}_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Demostración. Suponemos primero que $1 \le p < \infty$.
Sea g una función continua de soporte compacto H. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $H \subseteq B(0,1)$. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$|g(x-h) - g(x)|^p \le (2\|g\|_\infty)^p, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h \in B(0,1).$$

Ya que la función constante $G(x) = (2\|g\|_\infty)^p \in L^1(H)$, aplicando el teorema de convergencia dominada ([9, Theorem 2.24]), obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-h) - g(x)|^p dx \longrightarrow 0, \text{ cuando } h \to 0.$$

Consideramos ahora $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Ya que el conjunto de funciones continuas de soporte compacto es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ ([19, Theorem 3.14]) se sigue que también

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx \longrightarrow 0, \text{ cuando } h \to 0.$$

Por tanto, dado $\sigma > 0$, podemos encontrar $0 < h_0 < 1$ de manera que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx < \left(\frac{\sigma}{2c}\right)^p, \quad |h| < h_0,$$

siendo $c > 0$ tal que $\|\mathcal{K}_\varepsilon\|_1 \le c$, para todo $\varepsilon > 0$.
Tomamos $\delta < \sigma$ y escribimos, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}_\varepsilon * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\varepsilon(y) f(x-y)dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{|y|\le\delta} \big(f(x-y) - f(x)\big)\mathcal{K}_\varepsilon(y)dy \\ &\quad + \int_{|y|>\delta} \big(f(x-y) - f(x)\big)\mathcal{K}_\varepsilon(y)dy.\end{aligned}$$

Hemos usado que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\varepsilon(y)dy = 1$. Tomando ahora norma L^p y aplicando la desigualdad integral de Minkowski (Teorema 1.3(iii)), obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{|y|\le\delta} \big(f(\cdot-y)-f(\cdot)\big)\mathcal{K}_\varepsilon(y)dy \right\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|y|\le\delta} \big(f(x-y)-f(x)\big)\mathcal{K}_\varepsilon(y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \int_{|y|\le\delta} \left(|\mathcal{K}_\varepsilon(y)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)-f(x)\big|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\le \frac{\sigma}{2c}\|\mathcal{K}_\varepsilon\|_1 \le \frac{\sigma}{2},
\end{aligned}
$$

y que

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{|y|>\delta} \big(f(\cdot-y)-f(\cdot)\big)\mathcal{K}_\varepsilon(y)dy \right\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|y|>\delta} \big(f(x-y)-f(x)\big)\mathcal{K}_\varepsilon(y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)| \, \big\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\big\|_p dy \\
&\le 2\,\big\|f\big\|_p \int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)| dy < \frac{\sigma}{2},
\end{aligned}
$$

pues, ya que $\int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(x)|dx \longrightarrow 0$, cuando $\varepsilon \to 0$, podemos elegir ε_0 de tal manera que

$$
\int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)|dy < \frac{\sigma}{4\|f\|_p}, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0.
$$

Por tanto,

$$
\|\mathcal{K}_\varepsilon * f - f\|_p < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.
$$

Consideramos ahora $p=\infty$. Sea f una función continua en un entorno de K compacto. Se tiene que f es uniformemente continua en K, luego, dado $\sigma>0$, elegimos $\delta>0$ tal que

$$
|f(x-h)-f(x)| < \frac{\sigma}{2c}, \quad \text{cuando } x\in K,\ |h|<\delta.
$$

Por otro lado, ya que $\int_{|x|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(x)|dx \longrightarrow 0$, cuando $\varepsilon \to 0$, existe ε_0 de tal manera que, si $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$
\int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)|dy < \frac{\sigma}{4\|f\|_\infty}.
$$

Luego, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in K} \big|(\mathcal{K}_\varepsilon * f)(x) - f(x)\big| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)| \sup_{x\in K}\big|f(x-y)-f(x)\big| dy \\
&\le \int_{|y|\le\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)| \sup_{x\in K}\big|f(x-y)-f(x)\big| dy \\
&\quad + 2\|f\|_\infty \int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_\varepsilon(y)| \le \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.
\end{aligned}
$$

□

1.3. Teoremas de interpolación clásicos

Un tema de interés en análisis matemático es el relativo a la acotación de operadores. Los teoremas de interpolación permiten simplificar el estudio de manera considerable. El primer resultado de interpolación aparece en el año 1911 cuando Shur establece que si un operador es lineal y continuo en los espacios de Lebesgue discretos ℓ^1 y ℓ^∞, entonces también es acotado de ℓ^p en sí mismo para todo $p \geq 1$. A partir de este resultado, matemáticos importantes como Riesz, Thorin, Marcinkiewicz ó Zygmund extendieron los resultados anteriores y consiguieron sentar las bases de la teoría de interpolación.

En este apartado analizamos los dos resultados de interpolación clásicos, el Teorema de Marcinkiewicz, que utiliza técnicas reales y el de Riesz-Thorin que aprovecha los métodos de variable compleja. Señalamos que son resultados independientes y, aunque la conclusión en ambos sea la misma, las condiciones son diferentes. Así encontramos que el Teorema de Riesz-Thorin exige unas condiciones más estrictas que el de Marcinkiewicz, ya que se requiere linealidad para el operador, pero a cambio nos da una cota más natural para la norma.

Definición 1.20. *Sean (X,μ) e (Y,ν) espacios de medida y T un operador definido del espacio lineal de funciones complejas medibles en X en el conjunto de funciones complejas medibles en casi todo punto en Y.*

i. Se dice que T es lineal si
- $T(f+g) = T(f) + T(g)$.
- $T(\lambda f) = \lambda T(f)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii. Se dice que T es sublineal si
- $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$.
- $|T(\lambda f)| = |\lambda| |T(f)|$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Cuando se habla de la acotación de operadores entre espacios de Lebesgue ó L^p-débiles se usa la siguiente terminología.

Definición 1.21. *Sean (X,μ) e (Y,ν) espacios de medida y $0 < p, q \leq \infty$. Un operador T definido en $L^p(X,\mu)$ se dice que es de tipo fuerte (p,q) cuando verifica*

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad f \in L^p(X,\mu).$$

Y se dice que es de tipo débil (p,q) si

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad f \in L^p(X,\mu).$$

1.3.1. Teoremas de interpolación de Marcinkiewicz

El enunciado de este teorema en su versión orginal se debe al matemático polaco Marcinkiewicz. Siendo prisionero de guerra de los nazis le envió una carta a su profesor Zygmund con el resultado. Y esto permitió que se pudiera completar el trabajo después de la temprana muerte de Marcinkiewicz en la Segunda Guerra Mundial.

Teorema 1.22 (Marcinkiewicz). *Sean (X,μ) e (Y,ν) espacios de medida y $0<p_0<p_1\le\infty$. Supongamos que T es un operador sublineal definido en el espacio $L^{p_0}(X)+L^{p_1}(X)$ y con valores en el espacio de las funciones medibles en Y, verificando*

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y,\nu)}\le A_0\|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)},\quad f\in L^{p_0}(X,\mu), \tag{1.6}$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y,\nu)}\le A_1\|f\|_{L^{p_1}(X,\mu)},\quad f\in L^{p_1}(X,\mu), \tag{1.7}$$

para ciertas constantes $A_0, A_1>0$. Entonces, para cada $p_0<p<p_1$, y para cada $f\in L^p(X,\mu)$, se tiene que

$$\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)}\le A\|f\|_{L^p(X,\mu)},$$

donde

$$A=2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}}A_0^{\alpha_0}A_1^{\alpha_1},$$

y

$$\alpha_0=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}\quad y\quad \alpha_1=\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}.$$

Demostración. Sean $p_0<p<p_1$ y $f\in L^p(X,\mu)$. Fijamos $\alpha>0$ y definimos, para cierto $r>0$ que será elegido más adelante,

$$f_0^\alpha=f\mathcal{X}_{\{x\in X:|f(x)|>r\alpha\}}\quad \text{y}\quad f_1^\alpha=f\mathcal{X}_{\{x\in X:|f(x)|\le r\alpha\}}.$$

Claramente $f=f_0^\alpha+f_1^\alpha$. Podemos ver además que $f_0^\alpha\in L^{p_0}(X,\mu)$ y $f_1^\alpha\in L^{p_1}(X,\mu)$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\|f_0^\alpha\|_{p_0}^{p_0}&=\int_X|f_0^\alpha|^{p_0}d\mu=\int_{|f|>r\alpha}|f|^{p_0-p+p}d\mu\le(r\alpha)^{p_0-p}\int_{|f|>r\alpha}|f|^p d\mu\\&\le(r\alpha)^{p_0-p}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Y, análogamente, si $p_1<\infty$,

$$\begin{aligned}\|f_1^\alpha\|_{p_1}^{p_1}&=\int_X|f_1^\alpha|^{p_1}d\mu=\int_{|f|\le r\alpha}|f|^{p_1-p}|f|^p d\mu\le(r\alpha)^{p_1-p}\int_{|f|\le r\alpha}|f|^p d\mu\\&\le(r\alpha)^{p_1-p}\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

y es claro que $\|f_1^\alpha\|_{L^\infty(X,\mu)}\le r\alpha<\infty$.
Ya que T es sublineal, se tiene que $|T(f)|\le|T(f_0^\alpha)|+|T(f_1^\alpha)|$ y, en consecuencia,

$$\{x : |T(f)| > \alpha\} \subseteq \left\{x : |T(f_0^\alpha)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{x : |T(f_1^\alpha)| > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Por tanto,

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d_{T(f_1^\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1.8}$$

Por otro lado, de (1.6), se tiene que

$$d_{T(f_0^\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{A_0^{p_0}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p_0}} \int_X |f_0^\alpha|^{p_0} d\mu = \frac{A_0^{p_0}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p_0}} \int_{|f|>r\alpha} |f|^{p_0} d\mu.$$

Por otro lado, cuando $p_1 < \infty$, de (1.7) se sigue que

$$d_{T(f_1^\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{A_1^{p_1}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p_1}} \int_{|f|\leq r\alpha} |f|^{p_1} d\mu.$$

Luego, de (1.8), obtenemos que

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{|f|>r\alpha} |f|^{p_0} d\mu + \frac{(2A_1)^{p_1}}{\alpha^{p_1}} \int_{|f|\leq r\alpha} |f|^{p_1} d\mu.$$

Veamos que $\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)} \leq A\|f\|_{L^p(X,\mu)}$. Usando la Proposición 1.7 y esta estimación escribimos

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)}^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha)\, d\alpha \\
&\leq p\,(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \int_{|f|>r\alpha} |f|^{p_0} d\mu\, d\alpha \\
&\quad + p\,(2A_1)^{p_1} \int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1} \int_{|f|\leq r\alpha} |f|^{p_1} d\mu\, d\alpha \\
&= p\,(2A_0)^{p_0} \int_X |f|^{p_0} \int_0^{\frac{|f|}{r}} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha\, d\mu \\
&\quad + p\,(2A_1)^{p_1} \int_X |f|^{p_1} \int_{\frac{|f|}{r}}^\infty \alpha^{p-p_1-1} d\alpha\, d\mu \\
&= \frac{p\,(2A_0)^{p_0}}{(p-p_0)r^{p-p_0}} \int_X |f|^{p_0+p-p_0} d\mu - \frac{p\,(2A_1)^{p_1}}{(p-p_1)r^{p-p_1}} \int_X |f|^{p_1+p-p_1} d\mu \\
&= p\left(\frac{(2A_0)^{p_0}}{p-p_0}\frac{1}{r^{p-p_0}} + \frac{(2A_1)^{p_1}}{p_1-p} r^{p_1-p}\right)\|f\|_{L^p(X,\mu)}^p.
\end{aligned}$$

Tomando r tal que $(2A_0)^{p_0}\frac{1}{r^{p-p_0}} = (2A_1)^{p_1} r^{p_1-p}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)} &\le \left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} \left((2A_1)^{p_1} r^{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X,\mu)} \\
&= \left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} \left((2A_1)^{p_1}\left(\frac{(2A_0)^{p_0}}{(2A_1)^{p_1}}\right)^{\frac{p_1-p}{p_1-p_0}}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X,\mu)} \\
&= 2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}} A_1^{\frac{p_1(p-p_0)}{p(p_1-p_0)}} \|f\|_{L^p(X,\mu)} = A\|f\|_{L^p(X,\mu)}.
\end{aligned}
$$

Consideramos ahora el caso $p_1=\infty$. De (1.7), tomando $r=\frac{1}{2A_1}$, se tiene que

$$
\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty(Y,\nu)} \le \frac{\alpha}{2}.
$$

Por tanto,

$$
d_{T(f_1^\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \mu\left(\left\{x\in X : |T(f_1^\alpha)(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) = 0,
$$

y, como ya se vio,

$$
d_{T(f)}(\alpha) \le d_{T(f_0^\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{|f|>r\alpha} |f|^{p_0}\, d\mu.
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)}^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha)\, d\alpha \le p\,(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1}\int_{|f|>\frac{\alpha}{2A_1}} |f|^{p_0}\, d\mu\, d\alpha \\
&= p\,(2A_0)^{p_0}\int_X |f|^{p_0}\int_0^{2A_1|f|} \alpha^{p-p_0-1}\, d\alpha\, d\mu \\
&= \frac{p\,(2A_0)^{p_0}\,(2A_1)^{p-p_0}}{p-p_0}\int_X |f|^{p_0+p-p_0}\, d\mu.
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$
\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)} \le 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}} \|f\|_{L^p(X,\mu)}.
$$

□

Observación 1.23 *En el caso $p_0=1$ y $p_1=\infty$, si T además verifica $|T(f)|\le T(|f|)$, la constante puede ser mejorada obteniendo*

$$
\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)} \le \frac{p}{p-1} A_0^{\frac{1}{p}} A_1^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X,\mu)}.
$$

La propiedad que se ha añadido al operador T permite suponer $f\ge 0$. Fijamos $\alpha>0$ y consideramos $\lambda\in(0,1)$. Definimos entonces f_0 y f_1 mediante

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) - \lambda\frac{\alpha}{A_1}, & f(x) > \lambda\frac{\alpha}{A_1}, \\ 0, & f(x) \le \lambda\frac{\alpha}{A_1}, \end{cases}$$

y

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda\frac{\alpha}{A_1}, & f(x) > \lambda\frac{\alpha}{A_1}, \\ f(x), & f(x) \le \lambda\frac{\alpha}{A_1}. \end{cases}$$

No es difícil ver que $f_0 \in L^1(X,\mu)$ y $f_1 \in L^\infty(X,\mu)$. De hecho, se verifica que

$$\|f_0\|_{L^1(X,\mu)} \le 2\Big(\frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big)^{1-p}\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} \quad y \quad \|f_1\|_{L^\infty(X,\mu)} = \frac{\lambda\alpha}{A_1}.$$

Las condiciones del Teorema de Marcinkiewicz para $p_0 = 1$ y $p_1 = \infty$ llevan a que

$$\|Tf_0\|_{L^{1,\infty}(Y,\nu)} \le A_0\|f_0\|_{L^1(X,\mu)} \quad y \quad \|Tf_1\|_{L^\infty(Y,\nu)} \le A_1\|f_1\|_{L^\infty(X,\mu)} \le \lambda\alpha.$$

Además,

$$\big\{x \in X : |T(f)| > \alpha\big\} \subseteq \big\{x \in X : |T(f_0)| > (1-\lambda)\alpha\big\} \cup \big\{x \in X : |T(f_1)| > \lambda\alpha\big\},$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} d_{Tf}(\alpha) &\le d_{Tf_0}((1-\lambda)\alpha) + d_{Tf_1}(\lambda\alpha) = d_{Tf_0}((1-\lambda)\alpha) \le \frac{A_0\|f_0\|_{L^1(X,\mu)}}{(1-\lambda)\alpha} \\ &= \frac{A_0}{(1-\lambda)\alpha}\int_{f\ge\frac{\lambda\alpha}{A_1}}\Big(f(x) - \frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big)dx. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\le p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{A_0}{(1-\lambda)\alpha}\int_{f\ge\frac{\lambda\alpha}{A_1}}\Big(f(x) - \frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big)dx\,d\alpha \\ &= \frac{pA_0}{1-\lambda}\int_X\int_0^{\frac{A_1 f(x)}{\lambda}}\Big(f(x) - \frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big)\alpha^{p-2}\,d\alpha\,dx \\ &= \frac{pA_0}{1-\lambda}\left(\frac{A_1^{p-1}}{(p-1)\lambda^{p-1}}\|f\|_p^p - \frac{A_1^{p-1}}{p\lambda^{p-1}}\|f\|_p^p\right) \\ &= \left(\frac{p}{p-1} - 1\right)\frac{A_0A_1^{p-1}}{(1-\lambda)\lambda^{p-1}}\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Buscamos ahora el valor de $\lambda \in (0,1)$ que minimiza el término $(1-\lambda)^{-1/p}\lambda^{(1-p)/p}$, esto es, el $\max_{\lambda\in[0,1]}(1-\lambda)^{1/p}\lambda^{1/p'}$. Sea $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)^{1/p}\lambda^{1/p'}$, $\lambda \in [0,1]$. Usando el criterio de derivación, obtenemos que el valor máximo de la función φ en [0,1] se alcanza cuando $\lambda = \frac{1}{p'}$ y entonces,

$$\|Tf\|_p \le \frac{p}{p-1}A_0^{\frac{1}{p}}A_1^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

1.3.2. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin

Este teorema tiene su origen en un trabajo de Riesz de 1927 y fue generalizado casi diez años después por Thorin usando técnicas de variable compleja.

La demostración se basa en el conocido como Lema de las tres líneas de Hadamard.

Lema 1.24. *[13, p. 36] Sea F una función analítica en $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re\ z < 1\}$, continua y acotada en $\overline{S}$ tal que $|F(z)| \leq B_0$ cuando $Re\ z = 0$ y $|F(z)| \leq B_1$ en la línea $Re\ z = 1$, con $0 < B_0, B_1 < \infty$. Entonces, para cada $0 \leq \theta \leq 1$,*

$$|F(z)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^{\theta}, \quad \textit{cuando } Re\ z = \theta.$$

Teorema 1.25 (Riesz-Thorin). *Sean (X,μ) e (Y,ν) espacios de medida y T es un operador lineal definido en el conjunto de las funciones simples en X y con valores en el conjunto de las funciones complejas medibles en Y. Suponemos que, para cada función simple f en X,*

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y,\nu)} \leq A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)}, \tag{1.9}$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y,\nu)} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X,\mu)} \tag{1.10}$$

donde $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Entonces, para cada $0 < \theta < 1$ y f función simple en X,

$$\|T(f)\|_{L^{q}(Y,\nu)} \leq A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_{L^{p}(X,\mu)},$$

siendo

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Por densidad, T admite una única extensión acotada de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$, para cada p, q verificando la condición anterior.

Demostración. Sea f una función simple en X, esto es,

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} \mathcal{X}_{A_k},$$

donde $a_k > 0, \alpha_k \in \mathbb{R}$ y $A_k \subseteq X$ son conjuntos medibles disjuntos dos a dos y de medida finita. En virtud de [9, Theorem 6.14] se tiene que

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} = \sup_{g \in S_{q'}} \left| \int_Y T(f) g \, d\nu \right|,$$

donde $S_{q'}$ denota la clase de las funciones $g \in L^{q'}(Y,\nu)$ simples con $\|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)} = 1$. Escribimos

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\beta_j} \mathcal{X}_{B_j},$$

con $b_j > 0, \beta_j \in \mathbb{R}$ y $B_j \subseteq Y$ disjuntos dos a dos y de medida finita.
Consideramos la banda $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < 1\}$ y los polinomios complejos P y Q dados por

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1} z \quad \text{y} \quad Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1} z, \quad z \in \overline{S}.$$

Definimos

$$F(z) = \int_Y T\left(f_z\right) g_z d\nu, \quad z \in \overline{S},$$

donde

$$f_z = \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathcal{X}_{A_k} \quad \text{y} \quad g_z = \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \mathcal{X}_{B_j}.$$

La función F es analítica en S, ya que

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_Y T\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathcal{X}_{A_k}\right) \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \mathcal{X}_{B_j} d\nu \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \int_Y T(\mathcal{X}_{A_k}) \mathcal{X}_{B_j} d\nu \end{aligned}$$

y $a_k, b_j > 0$. Además, F acotada en $\overline{S}$. Observamos que

$$|a_k^{P(z)}| = a_k^{\text{Re}(P(z))} = a_k^{\frac{p}{p_1}\text{Re } z + (1-\text{Re} z)\frac{p}{p_0}} \le C, \quad z \in \overline{S},$$

$$|b_j^{Q(z)}| = b_j^{\text{Re}(Q(z))} = b_j^{\frac{q'}{q'_1}\text{Re } z + (1-\text{Re} z)\frac{q'}{q'_0}} \le C, \quad z \in \overline{S}.$$

Luego, se tiene que

$$|F(z)| \le C \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_k^{P(z)}||b_j^{Q(z)}| \le C, \quad z \in \overline{S}.$$

Calculamos cotas para $F(z)$ en las líneas $\text{Re}\, z = 0$ y $\text{Re}\, z = 1$.

- Sea z verificando $\text{Re}\, z = 0$. Veamos que $\|f_z\|_{L^{p_0}(X,\mu)}^{p_0} = \|f\|_{L^p(X,\mu)}^{p}$. Usando que $\{A_k\}_{k=1}^m$ es una colección disjunta se sigue que

$$\|f_z\|_{L^{p_0}(X,\mu)}^{p_0} = \int_X \sum_{k=1}^{m} \left|a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathcal{X}_{A_k}\right|^{p_0} d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{m} |a_k^{P(z)}|^{p_0} \mathcal{X}_{A_k} d\mu.$$

  Ahora, teniendo en cuenta que $\text{Re}\, z = 0$, $|a_k^{P(z)}| = |a_k|^{\text{Re}\, P(z)} = a_k^{\frac{p}{p_0}}$, $k = 1, \ldots, m$, obtenemos

$$\|f_z\|_{L^{p_0}(X,\mu)}^{p_0} = \int_X \sum_{k=1}^m |a_k|^p \mathcal{X}_{A_k} d\mu = \int_X \Big| \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \mathcal{X}_{A_k} \Big|^p d\mu = \|f\|_{L^p(X,\mu)}^p.$$

Análogamente, obtenemos que $\|g_z\|_{L^{q_0'}(Y,\nu)}^{q_0'} = \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}^{q'}$, ya que $\big|b_j^{Q(z)}\big| = b_j^{\frac{q'}{q_0'}}$, $j = 1,\dots,n$. Luego, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$F(z) = \int_Y T\left(f_z\right) g_z d\nu \le \left\|T\left(f_z\right)\right\|_{L^{q_0}(Y,\nu)} \|g_z\|_{L^{q_0'}(Y,\nu)},$$

y, por la hipótesis del teorema,

$$F(z) \le A_0 \|f_z\|_{L^{p_0}(X,\mu)} \|g_z\|_{L^{q_0'}(Y,\nu)} \le A_0 \|f\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}^{\frac{q'}{q_0'}}.$$

- Sea z tal que $\operatorname{Re} z = 1$. De manera similar al caso anterior, obtenemos que

$$\|f_z\|_{L^{p_1}(X,\mu)}^{p_1} = \|f\|_{L^p(X,\mu)}^p \quad \text{y} \quad \|g_z\|_{L^{q_1'}(Y,\nu)}^{q'_1} = \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}^{q'},$$

ya que ahora, $\big|a_k^{P(z)}\big| = a_k^{\frac{p}{p_1}}$, y $\big|b_j^{Q(z)}\big| = b_j^{\frac{q'}{q_1'}}$, $k = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$. Luego,

$$F(z) \le A_1 \|f\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}^{\frac{q'}{q_1'}}.$$

Por tanto, aplicando el Lema 1.24 a F, obtenemos, para $0 < \theta < 1$,

$$\begin{aligned} |F(z)| &\le \left(A_0 \|f\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}^{\frac{q'}{q_0'}} \right)^{1-\theta} \left(A_1 \|f\|_{L^p(X,\mu)}^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}^{\frac{q'}{q_1'}} \right)^{\theta} \\ &= A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}, \quad \text{cuando } \operatorname{Re} z = \theta. \end{aligned}$$

Sea $0 < \theta < 1$. Observamos que

$$P(\theta) = p\left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right) = 1 \quad \text{y} \quad Q(\theta) =, 1$$

y, por tanto,

$$F(\theta) = \int_Y T\left(f_\theta\right) g_\theta d\nu = \int_Y T(f) g d\nu.$$

De esta forma,

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} = \sup_{g \in S_{q'}} \left| \int_Y T(f) g d\nu \right| \le A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

□

2

Función maximal de Hardy-Littlewood

Las funciones maximales juegan un papel importante en análisis y una de las más destacadas es, sin duda, la función maximal de Hardy-Littlewood. Este operador maximal resulta esencial en el estudio de la acotación con pesos para numerosos operadores y constituye una herramienta primordial en la teoría de diferenciación, donde se usa para obtener convergencia en casi todo punto de los valores medios integrales de una función. Para nuestro estudio, además, tiene especial relevancia porque permite caracterizar a los pesos de la clase de Muckenhoupt que tratamos en el siguiente capítulo. En este tema establecemos la acotación para el operador maximal de Hardy-Littlewood y la utilizamos para establecer la acotación para operadores de convolución, así como para probar el Teorema de diferenciación de Lebesgue. Introducimos asimismo el operador maximal diádico y mostramos la descomposición de $\mathbb{R}^n$ conocida como descomposición de Calderón-Zygmund, que nos permitirá obtener un resultado de acotación con pesos para la función maximal de Hardy-Littlewood.

2.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood

Denotamos por $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ el espacio constituido por las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$. Como es habitual representamos por $B(x,r)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, a la bola de $\mathbb{R}^n$ con centro en x y de radio r, y por $|B(x,r)|$ a su medida. Nótese que $|B(x,r)| = r^n|B(0,1)|$.

Definición 2.1. *El operador maximal centrado de Hardy Littlewood se define sobre el espacio de las funciones localmente integrables como*

$$M_c(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

De la misma forma, el operador maximal no centrado de Hardy-Littlewood en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ viene dado por

$$M(f)(x) = \sup_{B\ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f(z)|dz = \sup_{r>0}\sup_{y\in B(x,r)} \frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} |f(z)|dz, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Observamos que si $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces $M_c f$ y Mf son funciones medibles, no negativas y $M_c(f)\le M(f)$. Además, si para algún $x_0\in\mathbb{R}^n$, $M_c(f)(x_0)=0$, entonces $f=0$ en casi todo punto. Se tiene así que M_c y M son operadores positivos y además, acotados de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo (nótese que $\|M_c\|_{\infty\to\infty}\le\|M\|_{\infty\to\infty}\le 1$).

El operador maximal de Hardy-Littlewood se puede definir de manera equivalente sobre cubos en lugar de bolas como sigue. Dados $x\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$, denotamos por $Q_r(x)$ el cubo de $\mathbb{R}^n$ centrado en x y de lado $2r$.

Sea $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se define la función maximal centrada de Hardy Littlewood sobre cubos $\mathcal{M}_c(f)$ mediante

$$\mathcal{M}_c(f)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{(2r)^n}\int_{Q_r(x)} |f(y)|dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

y la correspondiente función maximal no centrada como

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

donde el supremo se toma sobre los cubos Q que contienen a x.

Todas las definiciones del operador maximal de Hardy Littlewood introducidas son equivalentes. Por un lado, se tienen las siguientes relaciones entre el operador centrado y el no centrado

$$M_c(f)\le M(f)\le 2^n M_c(f) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_c(f)\le\mathcal{M}(f)\le 2^n\mathcal{M}_c(f), \quad f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Veámoslo para el primer caso. Es claro que $M_c(f)\le M(f)$. Sean $x,y\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$ tales que $y\in B(x,r)$. Entonces, $B(y,r)\subset B(x,2r)$, pues si $z\in B(y,r)$,

$$|x-z|\le|x-y|+|y-z|<2r.$$

Luego, ya que $|B(y,r)|=2^{-n}|B(x,2r)|$, se obtiene la estimación

$$\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} f(y)dy \le \frac{2^n}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} f(y)dy,$$

que permite deducir el resultado. De manera similar, se establece la relación para las maximales con cubos.

Por otro lado se tienen las siguientes estimaciones para los operadores definidos sobre cubos y bolas.

$$\frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}|B(0,1)|} \le \frac{M(f)}{\mathcal{M}(f)} \le \frac{2^n}{|B(0,1)|} \quad \text{y} \quad \frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}|B(0,1)|} \le \frac{M_c(f)}{\mathcal{M}_c(f)} \le \frac{2^n}{|B(0,1)|}. \tag{2.1}$$

Basta tener en cuenta que

$$Q_{r/\sqrt{n}}(x) \subset B(x,r) \subset Q_r(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, r > 0,$$

y que $|B(x,r)| = 2^{-n} n^{n/2} |B(0,1)||Q_{r/\sqrt{n}}| = 2^{-n}|B(0,1)||Q_r(x)|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{2^n}{n^{n/2}|B(0,1)||Q_{\delta/\sqrt{n}}(x)|}\int_{Q_{\delta/\sqrt{n}}(x)}|f(y)|dy &\le \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,\delta)}|f(y)|dy \\ &\le \frac{2^n}{|B(0,1)||Q_\delta(x)|}\int_{Q_\delta(x)}|f(y)|dy,\end{aligned}$$

de donde se siguen las estimaciones indicadas.

La equivalencia existente entre los operadores maximales de Hardy-Littlewood hace que podamos enunciar los resultados presentes en esta memoria en términos de cualquiera de ellos, ajustando en cada caso las correspondientes constantes.

Nota:. En el caso $n = 1$, las definiciones con bolas y con cubos coinciden, ya que, en este caso, hablamos de intervalos.

Antes de abordar la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios de Lebesgue vamos a calcular explícitamente la función maximal de una función particular.

Ejemplo 2.2. En $\mathbb{R}$, consideramos el intervalo (a,b) y la función $f = \mathcal{X}_{(a,b)}$. Veamos cuál es la expresión para $M_c(f)$ y $M(f)$.
Observamos en primer lugar que

$$M_c(f)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}\mathcal{X}_{(a,b)}(z)dz = \sup_{r>0}\frac{|(a,b)\cap(x-r,x+r)|}{2r}, \ x \in \mathbb{R},$$

y

$$M(f)(x) = \sup_{r>0}\sup_{y\in B(x,r)}\frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r}\mathcal{X}_{(a,b)}(z)dz = \sup_{r>0}\sup_{y\in B(x,r)}\frac{|(a,b)\cap(y-r,y+r)|}{2r}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Es claro que $M_c(f) \le M(f) \le 1$. Escribimos

$$M_c(f)(x) = \sup_{r>0} I_x(r) \quad \text{y} \quad M(f)(x) = \sup_{r>0}\sup_{y\in B(x,r)} I_x(r,y), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$I_x(r) = \frac{|(a,b)\cap(x-r,x+r)|}{2r} \quad \text{y} \quad I_x(r,y) = \frac{|(a,b)\cap(y-r,y+r)|}{2r}.$$

Como $(a,b)\cap(x-r,x+r)=\emptyset$ cuando $x+r\le a$ ó $x-r\ge b$, se tiene que

$$M_c(f)(x)=\sup_{r\in R_x} I_x(r),$$

donde $R_x=\big\{r>0 : r>\max\{a-x,x-b\}\big\}$. De forma análoga

$$M(f)(x)=\sup_{(r,y)\in R^x} I_x(r,y),\qquad x\in\mathbb{R},$$

siendo $R^x=\big\{(r,y): r>0,\ \max\{x-r,a-r\}\le y\le \min\{x+r,b+r\}\big\}$.

Distinguimos los siguientes casos:

i. $a<x<b$
En este caso podemos encontrar $r_0>0$ e $y_0\in B(x_0,r_0)$ tales que $(x-r_0,x+r_0)\subseteq(a,b)$ y $(y_0-r_0,y_0+r_0)\subseteq(a,b)$. Entonces, se tiene que

$$M_c(f)(x)=\frac{|(x-r_0,x+r_0)|}{2r_0}=1 \quad \text{y} \quad M(f)(x)=\frac{|(y_0-r_0,y_0+r_0)|}{2r_0}=1.$$

ii. $x\ge b$
En esta situación se tiene que

$$R_x=\big\{r>x-b\big\} \quad \text{y} \quad R^x=\big\{(r,y): r>0,\ x-r\le y\le b+r\big\}$$

Además,

$$I_x(r)=\frac{|(\max\{a,x-r\},b)|}{2r}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x-b}{2r}, & x-b\le r\le x-a,\\[2ex] \dfrac{b-a}{2r}, & x-a\le r.\end{cases}$$

Y esta función alcanza el máximo en $r=x-a$ (ver Figura 2.1) por lo que $M_c(f)(x)=\frac{b-a}{2(x-a)}$.

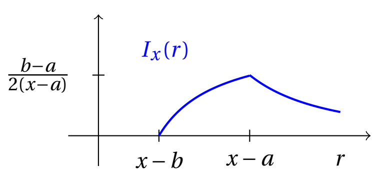


Figura 2.1: $I_x(r)$, $x\ge b$

Por otro lado, para calcular $M(f)(x)$ podemos dividir la región R^x en tres zonas, tal y como se indica en la Figura 2.2. En la región $R_1=\big\{(r,y)\in R^x : x-r\le y\le$

$a+r\}$ se tiene que $I_x(r,y)=(b-a)/(2r)$ y puesto que en esta región $2r \geq x-a$ se sigue que

$$\sup_{(r,y)\in R_1} I(r,y)=\frac{b-a}{x-a}.$$

Por otro lado, cuando $(r,y)\in R_2=\left\{(r,y)\in R^x : r\geq \frac{x-a}{2}, a+r\leq y\leq b+r\right\}$ se tiene que $a\leq y-r\leq b$, y dado que $y\geq x-r$ tenemos que

$$I(r,y)=\frac{b-y+r}{2r}\leq \frac{b-a}{x-a}.$$

Por último en la región $R_3=\left\{(r,y)\in R^x : r\leq \frac{x-a}{2}, x-r\leq y\leq b+r\right\}$ se tiene también que

$$I(r,y)=\frac{b-y+r}{2r}.$$

Puede verse que esta función alcanza el máximo en el punto $Q=(\frac{x-a}{2},\frac{x+a}{2})$ donde toma el valor $\frac{b-a}{x-a}$. Por tanto, $M(f)(x)=\frac{b-a}{x-a}$.

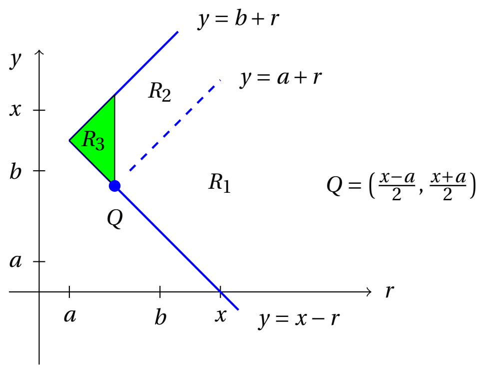


Figura 2.2: $x\geq b$

iii. $x\leq a$. En este caso, se procede de manera análoga al anterior para probar que

$$M_c(f)(x)=\frac{b-a}{2(b-x)} \quad \text{y} \quad M(f)(x)=\frac{b-a}{b-x}.$$

Hemos visto que

$$M_c(f)(x)=\begin{cases} \dfrac{b-a}{2(b-x)}, & x\leq a,\\ 1, & a<x<b,\\ \dfrac{b-a}{2(x-a)}, & x\geq b,\end{cases} \quad \text{y} \quad M(f)(x)=\begin{cases} \dfrac{b-a}{b-x}, & x\leq a,\\ 1, & a<x<b,\\ \dfrac{b-a}{x-a}, & x\geq b.\end{cases}$$

Comparando estas dos funciones, observamos que mientras que $M(f)$ es una función continua, $M_c(f)$ presenta discontinuidades de salto finito (de longitud $\frac{1}{2}$) en $x = a$ y $x = b$.

Asimismo, simples cálculos permiten comprobar que ambas funciones están en $L^p(\mathbb{R}^n)$, cuando $1 < p \leq \infty$. Sin embargo, no son funciones integrables.

Este hecho no es algo excepcional. Esta circunstancia se tiene para cualquier función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ no nula como recogemos a continuación.

Proposición 2.3. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si f es no nula, entonces $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Como f es no nula, existe $r > 0$ verificando

$$\int_{B(0,r)} |f(y)|dy \geq 1.$$

Es fácil ver que $B(0,r) \subset B(x, 2|x|)$, para cualquier x tal que $|x| > r$. En efecto, sean $z \in B(0,r)$ y x verificando $|x| > r$. Entonces, $|z - x| \leq r + |x| < 2|x|$.

Por tanto,

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(0,r)} |f(y)|dy \geq \frac{1}{2^n |B(0,1)| |x|^n}, \quad |x| > r.$$

y, dado que $h(x) = |x|^{-n} \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)}(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Hemos visto que la función maximal de Hardy-Littlewood no está acotada de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, esto es, no es de tipo fuerte $(1,1)$. A continuación, veremos el resultado que nos muestra que el operador es, sin embargo, de tipo débil $(1,1)$.

Establecemos previamente el siguiente lema de cubrimiento cuya importancia reside en el hecho de que podemos conseguir, a partir de una colección finita cualquiera de bolas de $\mathbb{R}^n$, una colección disjunta cuya medida puede compararse con la medida de la colección original.

Lema 2.4. *Sea $\{B_1, \ldots, B_k\}$ una colección finita de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$. Entonces podemos extraer un subconjunto finito de bolas disjuntas dos a dos, $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_\ell}\}$ verificando*

$$\sum_{r=1}^{\ell} |B_{j_r}| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right| \tag{2.2}$$

Demostración. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots \geq |B_k|$. Para encontrar la colección de bolas disjuntas dos a dos procedemos de la siguiente manera. El primer elemento será B_1, luego $B_{j_1} = B_1$. Para elegir el siguiente elemento, buscamos el menor índice $s > 1$ que verifique $B_1 \cap B_s = \emptyset$ y tomamos $j_2 = s$. Repetimos este proceso de manera que si hemos extraído $B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}$, elegimos j_{r+1} como el menor índice que cumpla que $j_{r+1} > j_r$ y $\bigcup_{m=1}^{r} B_{j_m}$ y $B_{j_{r+1}}$ sean disjuntos. Este

proceso acaba tras un número finito de pasos, ℓ, ya que partimos de un conjunto finito.
Probamos ahora que se cumple (2.2). Para ello, veamos primero que

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i \subseteq \bigcup_{r=1}^{\ell} 3B_{j_r}.$$

Si B_m es una de las bolas escogidas, es claro que $B_m \subseteq \bigcup_{r=1}^{\ell} 3B_{j_r}$. Supongamos entonces que B_m no fue elegida. Entonces, $m \notin \{j_1, \ldots, j_\ell\}$ y existe $r \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $B_m \cap B_{j_r} \neq \emptyset$, siendo $j_r < m$. Por tanto, $|B_{j_r}| \geq |B_m|$. Veamos que $B_m \subseteq 3B_{j_r}$. Escribimos $B_m = B(z_1, r_1), B_{j_r} = B(z_2, r_2)$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, $r_1 \leq r_2$, y sea $x \in B_m \cap B_{j_r}$. Si $z \in B_m$, se tiene que

$$|z - z_2| \leq |z - z_1| + |z_1 - x| + |x - z_2| < r_1 + r_1 + r_2 < 3r_2.$$

Luego, la unión de las bolas no seleccionadas está contenida en $\bigcup_{r=1}^{\ell} 3B_{j_r}$. Por tanto, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i \subseteq \bigcup_{r=1}^{\ell} 3B_{j_r}$ y así,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right| \leq \left|\bigcup_{r=1}^{\ell} 3B_{j_r}\right| \leq \sum_{r=1}^{\ell} |3B_{j_r}| = 3^n \sum_{r=1}^{\ell} |B_{j_r}|.$$

□

Finalmente, establecemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.5. *El operador no centrado de Hardy-Littlewood, M, es de tipo débil* $(1,1)$ *y de tipo fuerte* (p,p), $1 < p \leq \infty$. *Más concretamente,*

$$\|M(f)\|_{1,\infty} \leq 3^n \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$
$$\|M(f)\|_p \leq 3^{\frac{n}{p}} \frac{p}{p-1} \|f\|_p, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

El resultado también es cierto para M_c.

Demostración. Veamos que M es de tipo débil $(1,1)$. Recordamos que, para $g \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|g\|_{1,\infty} = \sup\left\{\alpha d_g(\alpha) : \alpha > 0\right\}$$

donde $d_f(\alpha) = \left|\{x : |f(x)| > \alpha\}\right|$, $\alpha > 0$.

Tenemos que ver que

$$\sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \left|\{x : M(f)(x) > \alpha\}\right|\right\} \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{\alpha}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ y $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > \alpha\}$. Se tiene que E_α es abierto.
En efecto, sea $x \in E_\alpha$. Entonces, existe una bola abierta que contiene a x, B_x, tal que

el promedio de $|f|$ sobre B_x es mayor que α. Luego, si $y \in B_x$, también se cumple que $M(f)(y) > \alpha$ y, por tanto, $B_x \subseteq E_\alpha$.

Haremos uso de la medida regular interior para estimar la medida de E_α, esto es, $|E_\alpha| = \sup\{|K| : K \subseteq E_\alpha, K \text{ compacto}\}$.

Sea K un subconjunto compacto de E_α. Dado $x \in K$, existe una bola abierta que contiene a x, $B_x \subset E_\alpha$, tal que

$$\int_{B_x} |f(y)|dy > \alpha |B_x|. \tag{2.3}$$

Como $K \subset \bigcup_{x\in K} B_x$ y K es compacto, encontramos un subrrecubrimiento finito $\{B_{x_1}, \dots, B_{x_k}\}$ de K y, en virtud del Lema 2.4 podemos encontrar $B_{x_{j_1}}, \dots, B_{x_{j_\ell}}$ disjuntas dos a dos verificando

$$\sum_{r=1}^{\ell} |B_{x_{j_r}}| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i} \right|.$$

Luego, teniendo en cuenta (2.3),

$$|K| \leq \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i} \right| \leq 3^n \sum_{r=1}^{\ell} |B_{x_{j_r}}| \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{r=1}^{\ell} \int_{B_{x_{j_r}}} |f(y)|dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{E_\alpha} |f(y)|dy,$$

ya que las bolas son disjuntas y están contenidas en E_α. Entonces llegamos a que

$$\|M(f)\|_{1,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha |E_\alpha| \leq 3^n \|f\|_1.$$

Para ver que M es de tipo fuerte (p,p), usamos el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 1.22) y la Observación (1.23). Se tiene que M está bien definido en $L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y, además se dan las desigualdades $\|M(f)\|_{1,\infty} \leq 3^n \|f\|_1$ y $\|M(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Por tanto, obtenemos

$$\|M(f)\|_p \leq \frac{p3^{\frac{n}{p}}}{p-1} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

La misma estimación se obtiene para M_c pues $M_c \leq M$. □

2.2. Operadores maximales de convolución

Las propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood constituyen una herramienta muy útil para analizar la acotación de otros operadores. Como muestra de ello, en esta sección consideramos operadores de convolución que están controlados por la función maximal de Hardy-Littlewood.

Observamos en primer lugar que la función maximal de Hardy-Littlewood es un operador de convolución. Para cada función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
M_c(f)(x) &= \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon^n |B(0,1)|} \int_{|y|<\varepsilon} |f(x-y)|dy \\
&= \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon^n |B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\mathcal{X}_{B(0,\varepsilon)}(y)dy \\
&= \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon^n |B(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\mathcal{X}_{B(0,1)}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy \\
&= \sup_{\varepsilon>0} \left(|f| * \mathcal{K}_\varepsilon\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

donde $\mathcal{K} = \frac{1}{|B(0,1)|}\mathcal{X}_{B(0,1)}$, y, para cada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{K}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\mathcal{K}(\frac{x}{\varepsilon})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Observamos que $\mathcal{K}$ es una función integrable y su integral vale 1 por lo que la familia $\{\mathcal{K}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una aproximación de la identidad.

Veamos ahora que el operador maximal de Hardy-Littlewood controla a ciertos operadores de convolución con núcleo radial. Recordamos que una función f definida en $\mathbb{R}^n$ es radial si $f(x) = f(y)$ cuando $|x| = |y|$. Una función radial en $\mathbb{R}^n$ es, por tanto, de la forma $f(x) = \varphi(|x|)$, siendo φ una función definida en $[0,+\infty)$.

Teorema 2.6. *Sea $k \geq 0$ una función definida en $[0,+\infty)$ decreciente y continua excepto en un número finito de puntos. Suponemos que $K(x) = k(|x|)$ es una función integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces, si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$,*

$$
\sup_{\varepsilon>0} \left(|f| * K_\varepsilon\right)(x) \leq \|K\|_1 M_c(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que la función k es continua y de soporte compacto. Entonces K una función continua y con soporte, pongamos, en la bola $B(0,R)$. Por otro lado, ya que la medida es invariante por traslaciones, basta ver el resultado para $x = 0$.

Sean $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Usando coordenadas polares y que K es radial se tiene que

$$
\left(|f| * K_\varepsilon\right)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|K_\varepsilon(-y)dy = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |f(r\theta)|K_\varepsilon(re_1)r^{n-1}d\theta dr,
$$

donde $e_1 = (1,0,\ldots,0) \in S^{n-1}$.
Definimos las funciones F y G mediante

$$
F(r) = \int_{S^{n-1}} |f(r\theta)|d\theta, \quad G(r) = \int_0^r F(s)s^{n-1}ds, \quad r > 0.
$$

Entonces, teniendo en cuenta que el soporte de K está contenido en $B(0,R)$ podemos escribir

$$
\left(|f| * K_\varepsilon\right)(0) = \int_0^\infty F(r)r^{n-1}K_\varepsilon(re_1)dr = \int_0^{\varepsilon R} F(r)r^{n-1}K_\varepsilon(re_1)dr.
$$

Ahora, integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(|f|*K_\varepsilon\right)(0)&=G(\varepsilon R)K_\varepsilon(\varepsilon Re_1)-G(0)K_\varepsilon(0)-\int_0^{\varepsilon R}G(r)dK_\varepsilon(re_1)\\&=\int_0^\infty G(r)d\left(-K_\varepsilon(re_1)\right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

pues $G(0)=0, K_\varepsilon(\varepsilon Re_1)=\varepsilon^{-n}k(R)=0$, $K_\varepsilon(0)<\infty$ por ser K continua y $G(\varepsilon R)<\infty$, ya que $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
Si v_n es el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$G(r)=\int_0^r F(s)s^{n-1}ds=\int_{|y|\le r}|f(y)|dy\le M_c(f)(0)v_nr^n,\quad r>0.$$

Luego, de (2.5) e integrando de nuevo por partes, se sigue

$$\begin{aligned}\left(|f|*K_\varepsilon\right)(0)&\le M_c(f)(0)v_n\int_0^\infty r^nd\left(-K_\varepsilon(re_1)\right)=M_c(f)(0)v_n\int_0^\infty nr^{n-1}K_\varepsilon(re_1)dr\\&=M_c(f)(0)\int_0^\infty\int_{S^{n-1}}\frac{r^{n-1}}{\varepsilon^n}k\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)d\theta dr\\&=M_c(f)(0)\int_0^\infty\int_{S^{n-1}}s^{n-1}k(s)d\theta ds\\&=M_c(f)(0)\int_{\mathbb{R}^n}K(y)dy=M_c(f)(0)\|K\|_1.\end{aligned}$$

Hemos probado así el resultado cuando k continua y de soporte compacto.

Para tratar el caso general, bastará establecer que podemos encontrar una sucesión creciente $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones definidas en $[0,\infty)$, no negativas, decrecientes en $[0,\infty)$, continuas y de soporte compacto que convergen a k puntualmente y en $L^1(\mathbb{R})$. Entonces, la sucesión $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, donde $K_j(x)=k_j(|x|)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $j\in\mathbb{N}$, converge a K en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y se tiene, en virtud de lo que probamos anteriormente, que

$$\sup_{\varepsilon>0}\left(|f|*(K_j)_\varepsilon\right)(x)\le\|K_j\|_1M_c(f)(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

De aquí, aplicando el teorema de la convergencia monótona ([9, Theorem 2.14]) y que $K_j\longrightarrow K$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, cuando $j\to\infty$, se deduce el resultado en el caso general.

Veamos entonces cómo podemos construir la sucesión $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con las características indicadas. Como la función k es continua salvo en un número finito de puntos podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que k es continua salvo en $x=a$, con $a>0$ (nótese que si $a=0$, el caso es trivial). Además, puesto que k es no negativa y decreciente, esta discontinuidad es de salto finito.

Elegimos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(0,a)$ tal que $a_j\uparrow a$, cuando $j\to\infty$, y definimos, para cada $j\in\mathbb{N}$ la función g_j mediante

$$g_j(r) = \begin{cases} k(r), & r \notin [a_j, a], \\ k(a) + \dfrac{k(a_j) - k(a)}{a_j - a}(r - a), & r \in [a_j, a], \end{cases}$$

esto es, g_j es igual a la función k salvo en el intervalo (a_j, a) donde los valores que toma g_j representan al segmento que une los puntos $(a_j, k(a_j))$ y $(a, k(a))$.

De esta forma obtenemos una sucesión creciente $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas e integrables que convergen puntualmente a k y también en norma $\|\cdot\|_1$, ya que $\|k - g_j\|_1 \leq C(a - a_j)$, $j \in \mathbb{N}$, con C independiente de j. Nótese que

$$\begin{aligned} \|k - g_j\|_1 &= \int_{a_j}^{a} \left(k(r) - k(a) - \frac{k(a_j) - k(a)}{a_j - a}(r - a) \right) dr \\ &\leq \left(k(a_j) - k(a)\right) \int_{a_j}^{a} \left(1 + \frac{r - a}{a - a_j}\right) dr = \frac{1}{2}(k(a_j) - k(a))(a - a_j) \\ &\leq \frac{1}{2}(k(a_1) - k(a))(a - a_j) = C(a - a_j). \end{aligned}$$

Por otro lado, consideramos la sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, donde $\phi_j(r) = 1$, $r \in [0, j]$, $\phi_j(r) = 0$, $r \in [j + 1, \infty)$ y $\phi_j(r) = -r + j + 1$, $r \in (j, j + 1)$. Es claro que se trata de una sucesión creciente de funciones continuas tal que $\phi_j(r) \longrightarrow \phi(r) = 1$, $r \in [0, \infty)$.

Definimos entonces $k_j = g_j\phi_j$, $j \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones g_j y ϕ_j, $j \in \mathbb{N}$, se observa que la función k_j es no negativa, decreciente en $[0, \infty)$, continua y de soporte compacto. También es claro que para todo $r \in [0, \infty)$, $k_j(r) \longrightarrow k(r)$, cuando $j \to \infty$, y

$$\|k - k_j\|_1 \leq \|k - g_j\|_1 + \|g_j(1 - \phi_j)\|_1 \leq \|k - g_j\|_1 + \int_j^{\infty} k(r)dr, \quad j \in \mathbb{N}.$$

La integrabilidad de k nos permite concluir entonces que $\|k - k_j\|_1 \longrightarrow 0$, $j \to +\infty$.

□

Una generalización de este teorema viene recogida en el siguiente corolario.

Corolario 2.7. *Sean K una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y K_0 una función integrable, no negativa, radial, continua y radialmente decreciente verificando $|K| \leq K_0$. Entonces, para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * K_\varepsilon)(x)| \leq \|K_0\|_1 M_c(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que $|f * K_\varepsilon| \leq |f| * (K_0)_\varepsilon$ y aplicar el teorema anterior. □

2.3. Operador maximal diádico

Analizamos en esta sección otro de los operadores maximales que resultan de gran utilidad: el operador maximal diádico. Utilizaremos las propiedades de acotación de este operador para establecer una acotación con pesos para la función maximal de Hardy-Littlewood. En este estudio la conocida como descomposición de Calderón-Zygmund va a jugar un papel fundamental.

Dado $k \in \mathbb{Z}$, definimos $\mathcal{Q}_k$ como la familia de cubos en $\mathbb{R}^n$ cuyos vértices están en $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$, es decir, cubos de la forma

$$\prod_{j=1}^{n} \left[m_j 2^{-k}, (m_j+1)2^{-k} \right), \quad m_j \in \mathbb{Z}.$$

Los cubos definidos de esta manera se denominan cubos diádicos. La familia $\{\mathcal{Q}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de cubos diádicos verifica las siguientes propiedades:

- Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{Q}_k$ es una partición de $\mathbb{R}^n$.
- Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}$, existe un único cubo $Q_k^x \in \mathcal{Q}_k$ tal que $x \in Q_k^x$.
- Dados dos cubos diádicos, o bien estos son disjuntos o bien, uno de ellos está contenido en el otro.
- Para cada $k \in \mathbb{Z}$, un cubo $Q \in \mathcal{Q}_k$ está contenido en un único cubo de $\mathcal{Q}_j$, $j < k$, y Q contiene 2^n cubos de $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Introducimos ahora los elementos que intervienen en la definición del operador maximal diádico.

Definición 2.8. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos*

$$E_k f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\,dy \right) \mathcal{X}_Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Observación 2.9 *Comentamos algunos aspectos acerca de este concepto.*

i. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}$, sabemos que existe un único cubo diádico de $\mathcal{Q}_k$, Q_k^x, tal que $x \in Q_k^x$. Por tanto, la expresión que define a $E_k f(x)$ está formada por un único sumando, a saber,

$$E_k f(x) = \frac{1}{|Q_k^x|} \int_{Q_k^x} f(y)\,dy.$$

ii. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $E_k f$ es constante en cada cubo diádico de $\mathcal{Q}_k$. Luego si $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n$, y Q_k^x es el único cubo en $\mathcal{Q}_k$ que contiene a x, entonces $E_k f(x) = E_k f(y)$, $y \in Q_k^x$.

iii. Sean $k \in \mathbb{Z}$ y $\Omega = \bigcup_i Q_i^k$, con $\{Q_i^k\}_i \subset \mathcal{Q}_k$. Se verifica

$$\int_\Omega E_k f(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

En efecto, teniendo en cuenta la propiedad en (ii) *y que la colección* $\{Q_i^k\}_i$ *es disjunta podemos escribir*

$$\int_\Omega E_k f(x)dx = \int_{\bigcup_i Q_i^k} E_k f(x)dx = \sum_i \int_{Q_i^k} E_k f(x)dx = \sum_i \int_{Q_i^k} \frac{1}{|Q_i^k|}\int_{Q_i^k} f(y)dydx$$
$$= \sum_i \int_{Q_i^k} f(y)dy = \int_{\bigcup_i Q_i^k} f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Definición 2.10. *Sea* $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$*. Se define la función maximal diádica* $M_d f$ *como*

$$M_d f(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |E_k f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A continuación probamos que el operador maximal M_d está acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y que la familia $\{E_k f\}_{k\in\mathbb{Z}}$ puede verse como el análogo discreto de una aproximación de la identidad.

Teorema 2.11. *Se verifican las siguientes propiedades:*

i. *El operador maximal diádico es un operador de tipo débil* $(1,1)$.
ii. *Si* $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$*, entonces*

$$\lim_{k\to+\infty} E_k f = f \quad \textit{en casi todo punto.}$$

Demostración. (i) Tenemos que ver que para cierta constante $C > 0$ se cumple

$$\|M_d f\|_{1,\infty} \le C\|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y suponemos que f es no negativa. En otro caso, usamos la sublinealidad del operador M_d y descomponemos f en sus partes positiva y negativa, $f = f^+ - f^-$, si f es real, y en el caso de que f sea compleja, en sus partes real e imaginaria.

Es fácil ver que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $E_k f(x) \to 0$, cuando $k \to -\infty$. En efecto, sean $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$, y Q_k^x el único cubo de la familia $\mathcal{Q}_k$ que contiene a x. Entonces,

$$0 \le E_k f(x) = \frac{1}{|Q_k^x|}\int_{Q_k^x} f(y)dy \le \frac{1}{|Q_k^x|}\|f\|_1 = 2^{kn}\|f\|_1 \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.6}$$

Fijamos $\lambda > 0$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos el conjunto Ω_k mediante

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda \text{ y } E_j f(x) \le \lambda, j < k\}. \tag{2.7}$$

Veamos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k.$$

Es claro que si $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k$, entonces $x \in \Omega_{k_0}$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$ y, entonces, $M_d f(x) \geq E_{k_0} f(x) > \lambda$.
Recíprocamente, sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $M_d f(x) > \lambda$. Elegimos $k_1 \in \mathbb{Z}$ de modo que $|E_{k_1} f(x)| = E_{k_1} f(x) > \lambda$. Por otro lado, en virtud de (2.6), existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $E_k f(x) \leq \lambda$, $k \leq k_2$. Es claro que $k_2 < k_1$. Por tanto, existe un único $k_0 \in \mathbb{Z}$, de manera que $k_2 < k_0 \leq k_1$ y para el que

$$E_{k_0} f(x) > \lambda \quad \text{y} \quad E_k f(x) \leq \lambda,\ k < k_0,$$

y se sigue así que $x \in \Omega_{k_0}$.

Por otro lado, es claro que $\Omega_k \cap \Omega_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$, y como consecuencia del apartado (ii) en la Observación 2.9 se tiene que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto Ω_k puede escribirse como unión (disjunta) de cubos de $\mathcal{Q}_k$. Usando además la propiedad (iii) de la Observación 2.9 podemos deducir que

$$\begin{aligned}\left|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}\right| &= \Big|\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k\Big| = \sum_k |\Omega_k| = \sum_k \int_{\Omega_k} dx \leq \sum_k \int_{\Omega_k} \frac{1}{\lambda} E_k f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_k \Omega_k} f(x)\,dx \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1,\end{aligned}$$

concluyendo así que M_d es un operador de tipo débil $(1,1)$.
Veamos ahora (ii). Mostramos, en primer lugar, que el resultado se cumple cuando f es continua en $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y consideramos la colección $\{Q_k^x\}_{k\in\mathbb{Z}}$ donde Q_k^x, $k \in \mathbb{Z}$, es el único cubo de $\mathcal{Q}_k$ que contiene a x. Se tiene

$$\begin{aligned}|E_k f(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{|Q_k^x|}\int_{Q_k^x} f(y)\,dy - \frac{1}{|Q_k^x|}\int_{Q_k^x} f(x)\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{|Q_k^x|}\int_{Q_k^x} |f(y) - f(x)|\,dy.\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que f continua es uniformemente continua en Q_0^x. Luego existe $\delta > 0$ de manera que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, cuando $x, y \in Q_0^x$ y $|x - y| < \delta$. Elegimos $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $2^{-k_0} < \delta$ y $|x - y| < 2^{-k_0}$, para todo $y \in Q_{k_0}^x$. Nótese que esto es posible pues $|Q_k^x| \longrightarrow 0$, cuando $k \to +\infty$. Por tanto,

$$|E_k f(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|Q_k^x|}\int_{Q_k^x} dy = \varepsilon, \quad k \geq k_0.$$

Supongamos ahora que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Puesto que, como vimos en el apartado (i), M_d es un operador de tipo débil $(1,1)$, [6, Theorem 2.2] nos dice que el conjunto

$$A = \left\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{k\to+\infty} E_k f = f \text{ c.t.p.}\right\}$$

es cerrado en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hemos visto que el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto $C_c(\mathbb{R}^n) \subset A$. Y dado que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos escribir $L^1(\mathbb{R}^n) = \overline{C_c(\mathbb{R}^n)} \subseteq \overline{A} = A$, Por tanto, para toda función en $L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{k\to+\infty} E_k f = f \text{ c.t.p.}$$

Por último, asumimos que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Ya que $\mathcal{Q}_0$ es un recubrimiento numerable de $\mathbb{R}^n$, es suficiente establecer que la propiedad se cumple en casi todo punto de Q, para $Q \in \mathcal{Q}_0$. Y para ello, fijado $Q \in \mathcal{Q}_0$ basta considerar la función $g = f\mathcal{X}_Q$ que verifica la propiedad (ii) puesto que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. □

En la prueba que acabamos de ver, la colección de conjuntos $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ juega un papel esencial. Esta descomposición de $\mathbb{R}^n$ tiene nombre propio: la descomposición de Calderón-Zygmund. En el siguiente teorema precisamos sus propiedades.

Teorema 2.12 (Descomposición de Calderón-Zygmund). *Sean $\lambda > 0$ y f una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ no negativa. Existe una familia numerable disjunta $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de cubos diádicos verificando las siguientes propiedades:*

i. $f(x) \le \lambda$, *para casi todo punto* $x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$.

ii. $\left|\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$.

iii. $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\,dx \le 2^n\lambda$, $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, tomamos los conjuntos Ω_k definidos por (2.7). Como se comentó en la prueba del teorema anterior, $\Omega_k = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k$, donde Q_j^k, $j \in \mathbb{N}$, son cubos diádicos en $\mathcal{Q}_k$. Consideramos la familia $\mathcal{Q} = \left\{Q_j^k : k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{N}\right\}$. Veamos que esta es la colección que buscamos. Veamos que cumple las propiedades.

i. Por el Teorema 2.11 (ii) sabemos que $E_k f(x) \longrightarrow f(x)$, cuando $k \to +\infty$, en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, esto es, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, con $|A| = 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ tal que $x \notin \bigcup_{j,k} Q_j^k$. Entonces $E_k f(x) \le \lambda$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y, por tanto,

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} E_k(f)(x) \le \lambda.$$

ii. Basta considerar la prueba del teorema anterior donde se vio que

$$\left|\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^k\right| = \left|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}\right| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1.$$

iii. Por un lado, observamos que ya que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $Q_j^k \subseteq \Omega_k$, $j \in \mathbb{N}$, y por tanto,

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j^k|} \int_{Q_j^k} f(y)\,dy, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Para ver la otra desigualdad, sean $k \in \mathbb{Z}$ y $j \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\widetilde{Q}_j^k$ el único cubo diádico de la generación $k-1$ que contiene a Q_j^k. Entonces, ya que $|\widetilde{Q}_j^k| = 2^n |Q_j^k|$, se sigue que

$$\frac{1}{|Q_j^k|} \int_{Q_j^k} f(x)\,dx \le \frac{1}{|Q_j^k|} \int_{\widetilde{Q}_j^k} f(x) \le \frac{2^n |Q_j^k|}{|Q_j^k|} \frac{1}{|\widetilde{Q}_j^k|} \int_{\widetilde{Q}_j^k} f(x)\,dx \le 2^n \lambda,$$

pues $\widetilde{Q}_j^k \in \mathcal{Q}_{k-1}$. □

La descomposición de Calderón-Zygmund es una herramienta que nos va a permitir obtener el siguiente resultado de acotación con pesos para el operador maximal de Hardy Littlewood.

Teorema 2.13. *Sean $1 < p < \infty$ y w una función definida en $\mathbb{R}^n$ medible y no negativa. Entonces existe $C_p > 0$ de manera que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_c f(x)^p w(x)\,dx \le C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_c w(x)\,dx, \quad f \in L^p(M_c w).$$

Además, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : M_c f(x) > \lambda\}} w(x)\,dx \le \frac{C_0}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_c w(x)\,dx, \quad f \in L^1(M_c w). \tag{2.8}$$

Este teorema asegura así que el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado de $L^p(M_c w)$ en $L^p(w)$ y de $L^1(M_c w)$ en $L^{1,\infty}(w)$.

Demostración. Atendiendo al Teorema de Marcinkiewickz (Teorema 1.22), basta probar que se tiene la desigualdad (2.8) y que se cumple $\|M_c f\|_{L^\infty(w)} \le \|f\|_{L^\infty(M_c w)}$. Veamos en primer lugar que se verifica (2.8).

Sea $f \in L^1(M_c w)$ y supongamos que f es no negativa. En otro caso, como ya fue comentado en la prueba del Teorema 2.11 (i), descomponemos la función en sus partes positiva y negativa, si f es real, y en sus partes real e imaginaria cuando sea compleja.

Podemos observar que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, sea Q un cubo. Teniendo en cuenta (2.1) se tiene

$$\begin{aligned}\int_Q f(x)\,dx = \frac{|Q|}{w(Q)} \int_Q \frac{w(Q)}{|Q|} f(x)\,dx &\le \frac{|Q|}{w(Q)} \int_Q f(x) \mathcal{M} w(x)\,dx \\ &\le C_Q \|f\|_{L^1(M_c w)} < \infty.\end{aligned}$$

Aquí, $w(Q)$ representa $\int_Q w(x)\,dx$. Por tanto, la familia $\{f_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} = \left\{f \mathcal{X}_{B(0,\ell)}\right\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\ell \in \mathbb{N}$. Veamos que f_ℓ satisface la estimación (2.8). Para ello, fijamos $\sigma > 0$ y consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de f_ℓ para σ, $\mathcal{Q} = \{Q_j^\ell\}_{j\in\mathbb{N}}$. Denotamos por $2Q_j^\ell$ el cubo con el mismo centro que Q_j^ℓ y cuyos lados miden el doble. Entonces, se tiene que

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_c f_\ell(x) > 4^n \sigma\right\} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 2Q_j^\ell. \tag{2.9}$$

Para mostrar esta propiedad, denotemos por $Q(x,r)$ al cubo de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y lado $2r$, esto es,

$$Q(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\|_{\text{máx}} = \max_{1\le i\le n} \{|y_i - x_i|\} \le r \right\}.$$

Para probar (2.9) sea $x \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} 2Q_j^\ell$. Nuestro objetivo es probar que $\mathcal{M}_c f_\ell(x) \le 4^n\sigma$. Sea $Q = Q(x, l(Q))$ un cubo centrado en x de lado $2l(Q)$. Tomamos $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $2^{-(k+1)} \le l(Q) < 2^{-k}$.

Entonces se tiene que Q interseca a m cubos diádicos de $\mathcal{Q}_k$, siendo $m \le 2^n$. Denotamos por $R_1^\ell, \dots, R_m^\ell$ a estos cubos. Para ninguno de estos cubos podemos encontrar un cubo en $\mathcal{Q}$ que lo contenga. En efecto, supongamos que para ciertos $i = 1, \dots, m$ y $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $R_i^\ell \subset Q_j^\ell$. Pongamos $R_i^\ell = Q(z_0, r_0)$, con $z_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r_0 = 2^{-k-1}$. Entonces, $2R_i^\ell = Q(z_0, 2r_0)$. Ya que Q interseca a R_i^ℓ, existe $z \in Q \cap R_i^\ell$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|x - z_0\|_{\text{máx}} &\le \|x-z\|_{\text{máx}} + \|z - z_0\|_{\text{máx}} \le \frac{l(Q)}{2} + r_0 \\
&\le 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k} = 2r_0,
\end{aligned}$$

esto es, $x \in 2R_i^\ell$, y por tanto, $x \in 2Q_j^\ell$, lo que contradice la hipótesis.

Como consecuencia, se tiene que $\frac{1}{|R_i^\ell|}\int_{R_i^\ell} f_\ell(y)dy \le \sigma$, $i = 1, \dots, m$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q f_\ell(y)dy &= \frac{1}{|Q|}\sum_{i=1}^m \int_{Q\cap R_i^\ell} f_\ell(y)dy \le \frac{1}{|Q|}\sum_{i=1}^m \frac{|R_i^\ell|}{|R_i^\ell|}\int_{R_i^\ell} f_\ell(y)dy \\
&\le \frac{2^{-kn}}{2^{-(k+1)n}}\sum_{i=1}^m \frac{1}{|R_i^\ell|}\int_{R_i^\ell} f_\ell(y)dy \le 2^n m\sigma \le 4^n\sigma,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\mathcal{M}_c f_\ell(x) \le 4^n\sigma$.

Por otro lado sabemos que $\mathcal{M}_c > C_0 M_c$ (ver (2.1)). Luego, dado $\lambda > 0$ y tomando $\sigma = \frac{\lambda C_0}{4^n}$, se tiene que si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $M_c f_\ell(x) > \lambda$, entonces $\mathcal{M}_c f_\ell(x) > 4^n\sigma$. Por tanto, teniendo en cuenta (2.9), que $|2Q_j^\ell| = 2^n|Q_j^\ell|$ y que $\frac{1}{|Q_j^\ell|}\int_{Q_j^\ell} f_\ell(y)dy > \sigma$

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:M_cf_\ell(x)>\lambda\}} w(x)dx &\le \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\mathcal{M}_cf_\ell(x)>4^n\sigma\}} w(x)dx \le \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{2Q_j^\ell} w(x)dx\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{|2Q_j^\ell|}{|2Q_j^\ell|}\int_{2Q_j^\ell} w(x)dx\\ &\le \frac{2^n}{\sigma}\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{Q_j^\ell} f_\ell(y)\left(\frac{1}{|2Q_j^\ell|}\int_{2Q_j^\ell} w(x)dx\right)dy\\ &\le \frac{2^n}{\sigma}\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)\mathcal{M}w(y)dy \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(y)M_cw(y)dy. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Así, obtenemos (2.8) para f_ℓ.

Veamos por último que también se tiene para f. Las funciones $\{f_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ forman una sucesión monótona creciente de funciones no negativas que converge puntualmente a f. Por tanto, $M_cf_\ell \le M_cf_m$, $\ell\le m$, y entonces,

$$\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_cf_\ell(x)>\lambda\right\}\subseteq\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_cf_m(x)>\lambda\right\},\quad \ell\le m.$$

Además, se tiene que $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}^n : M_cf_\ell(x)>\lambda\} = \{x\in\mathbb{R}^n : M_cf(x)>\lambda\}$. En efecto, si $x\in\mathbb{R}^n$ es tal que $M_cf(x)>\lambda$, existe $r>0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy>\lambda.$$

Además, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $B(x,r)\subseteq B(0,k)$, entonces

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f_k(y)|dy = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy>\lambda.$$

por tanto, $M_cf_\ell(x)>\lambda$. El contenido inverso es claro.

Luego, teniendo en cuenta además (2.10) y usando el teorema de convergencia monótona, obtenemos

$$\begin{aligned} w\left(\{x\in\mathbb{R}^n : M_cf(x)>\lambda\}\right) &= w\left(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}^n : M_cf_\ell(x)>\lambda\}\right)\\ &= \lim_{\ell\to+\infty} w\left(\{x\in\mathbb{R}^n : M_cf_\ell(x)>\lambda\}\right)\le\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)Mw(y)dy.\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\|M_cf\|_{L^\infty(w)}\le\|f\|_{L^\infty(M_cw)}$. Suponemos que $M_cw(x)>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, pues si $M_cw(x)=0$ para algún x, entonces $w=0$ c.t.p.
Si $a>\|f\|_{L^\infty(M_cw)}$,

$$(M_cw)\left(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>a\}\right) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>a\}} M_cw(x)dx = 0,$$

y ya que $M_cw(x)>0$, se sigue $|\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)|>a\}|=0$. Por tanto, se tiene que $|f|\le a$ c.t.p., lo que implica que $M_cf\le a$ c.t.p. y $\|M_cf\|_{L^\infty(w)}\le a$. Así, obtenemos la relación buscada $\|M_cf\|_{L^\infty(w)}\le\|f\|_{L^\infty(M_cw)}$ y concluimos la prueba. □

2.4. Aplicaciones a la teoría de la diferenciación

La acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood permite extraer resultados de convergencia en casi todo punto para ciertas familias de funciones. Dichos resultados se obtienen como consecuencia de la propiedad que se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.14. *Sean $(X,\mu),(Y,\nu)$ espacios de medida y $0<p,q<\infty$. Supongamos que D es un subespacio denso de $L^p(X,\mu)$ y $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ una familia de operadores lineales definidos de $L^p(X,\mu)$ en el espacio de las funciones $\nu-$medibles en Y. Definimos el operador maximal (sublineal)*

$$T_*(f)(y)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon(f)(y)|,\quad y\in Y.$$

Si existe $B>0$ tal que

$$\|T_*(f)\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le B\|f\|_{L^p(X,\mu)},\quad f\in L^p(X),\tag{2.11}$$

y, para toda $f\in D$, existe $\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon(f)(y)=:T(f)(y)$ para casi todo $y\in Y$, entonces, para cada $f\in L^p(X,\mu)$, el límite $\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon(f)$ existe en ν-casi todo punto. De esta manera, existe una única extensión de T a $L^p(X,\mu)$, que seguimos denotando por T, que verifica

$$\|T(f)\|_{q,\infty}\le B\|f\|_p,\quad f\in L^p(X,\mu).$$

Demostración. Sea $f\in L^p(X,\mu)$. Veamos que $\{T_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon>0}$ es de Cauchy para casi todo punto en Y. Para ello probamos que, dado $\delta>0$,

$$\nu\big(\{y\in Y: O_f(y)>\delta\}\big)=0,$$

donde O_f es la oscilación de f definida como

$$O_f(y)=\limsup_{\varepsilon\to0}\limsup_{\theta\to0}|T_\varepsilon(f)(y)-T_\theta(f)(y)|,\quad y\in Y.$$

Fijamos $\delta>0$. Sea $\eta>0$. Ya que D es denso en $L^p(X,\mu)$, existe $g\in D$ tal que $\|f-g\|_p<\eta$. Se tiene que,

$$\begin{aligned}O_f(y)&=\limsup_{\varepsilon\to0}\limsup_{\theta\to0}|T_\varepsilon(f)(y)-T_\varepsilon(g)(y)+T_\varepsilon(g)(y)-T_\theta(g)(y)+T_\theta(g)(y)-T_\theta(f)(y)|\\&\le\limsup_{\varepsilon\to0}\limsup_{\theta\to0}|T_\varepsilon(f-g)(y)-T_\theta(f-g)(y)|+O_g(y)=O_{f-g}(y)+O_g(y),\quad y\in Y.\end{aligned}$$

Además, por hipótesis se tiene que $T_\varepsilon(g)\to T(g)$ en ν-casi todo punto. Por tanto, $\{T_\varepsilon(g)\}_{\varepsilon>0}$ es de Cauchy y $O_g=0$ c.t.p., obteniendo

$$O_f\le O_{f-g}\text{ en casi todo punto.}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\nu\left(\{y\in Y:O_f(y)>\delta\}\right)&\le\nu\left(\{y\in Y:O_{f-g}(y)>\delta\}\right)\le\nu\left(\{y\in Y:2T_*(f-g)(y)>\delta\}\right)\\&\le\frac{2^q\|T_*(f-g)\|^q_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}}{\delta^q}\le\left(\frac{2B}{\delta}\|f-g\|_{L^p(X,\mu)}\right)^q\le\left(\frac{2B\eta}{\delta}\right)^q,\end{aligned}$$

y, cuando $\eta\to 0$, se tiene $\nu\left(\{y\in Y:O_f(y)>\delta\}\right)=0$.
Tenemos que $\{T_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon>0}$ es de Cauchy en ν-casi todo punto y, por tanto, converge c.t.p. a cierto $T(f)$. Además, ya que $|T(f)|\le|T_*(f)|$, se obtiene que

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}\le B\|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

□

Como consecuencia de este último resultado, obtenemos el Teorema de diferenciación de Lebesgue, que nos permite recuperar la función a partir de sus promedios.

Observación 2.15. En las condiciones del teorema anterior se tiene que la extensión T verifica

$$T(f)=\lim_{k\to\infty}T(\phi_k),\quad \text{en } L^{q,\infty}(Y,\nu),$$

donde $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sucesión en D que converge a f en $L^p(X,\mu)$. Obsérvese que puesto que T es lineal en D, el valor del límite anterior es independiente de la sucesión $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ elegida. Además, en virtud de [13, Proposition 1.1.9 (2), Theorem 1.1.11] podemos asegurar que existe una subsucesión $\{\phi_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de manera que

$$T(f)(y)=\lim_{j\to\infty}T(\phi_{k_j})(y),\quad \text{en } \nu\text{-c.t. } y\in Y.$$

Corolario 2.16. *(Teorema de diferenciación de Lebesgue) Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para casi todo punto $x\in\mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}f(y)dy=f(x). \tag{2.12}$$

Así, $|f|\le M_c(f)$ c.t.p.

Demostración. Es claro que basta ver (2.12) para casi todo punto de $B(0,N)$, $N\in\mathbb{N}$, ya que $\{B_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable y $\mathbb{R}^n=\bigcup_{N=1}^\infty B(0,N)$.

Sean $N\in\mathbb{N}$ y $f_N=f\mathcal{X}_{B(0,N+1)}$. Se tiene que $f_N\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f_N(y)=f(y)$, para todo $y\in B(x,\varepsilon)$, cuando $x\in B(0,N)$ y $0<\varepsilon<1$. Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}f(y)dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}f_N(y)dy,$$

por lo que si establecemos (2.12) para cualquier función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = f_N(x) = f(x), \quad \text{c.t. } x\in B(0,N).$$

Nuestro objetivo entonces es probar que, para toda función $h\in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} h(y)dy = h(x), \quad \text{c.t. } x\in \mathbb{R}^n.$$

Para ello haremos uso del Teorema 2.14, considerando los espacios $X=Y=\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, $p=q=1$ y tomando D como el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, $C_c(\mathbb{R}^n)$, que sabemos que es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la familia de operadores lineales $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ como

$$T_\varepsilon(f) = f*\mathcal{K}_\varepsilon, \quad \varepsilon>0,$$

donde $\mathcal{K}=|B(0,1)|^{-1}\mathcal{X}_{B(0,1)}$. Puesto que $\mathcal{K}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, en virtud de la desigualdad de Young (ver Teorema 1.16, con $p=q=r=1$), se sigue que, para cada $\varepsilon>0$,

$$\|T_\varepsilon(h)\|_1 = \|h*\mathcal{K}_\varepsilon\|_1 \le \|\mathcal{K}_\varepsilon\|_1\|h\|_1 \le C\|h\|_1, \quad h\in L^1(\mathbb{R}^n),$$

esto es, T_ε, $\varepsilon>0$, es un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

Teniendo en cuenta (2.4) se obtiene que el operador maximal

$$T_*(h) = \sup_{\varepsilon>0} T_\varepsilon(h), \quad h\in L^1(\mathbb{R}^n),$$

está acotado por el operador maximal de Hardy-Littewood M_c. Del Teorema 2.5 se deduce entonces que

$$\|T_*(h)\|_{1,\infty} \le C\|h\|_1, \quad h\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Veamos ahora que, para cada $\phi\in C_c(\mathbb{R}^n)$, existe $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\phi)(x)=\phi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Sean $\phi\in C_c(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $B(0,r)$ para cierto $r>0$ y $x\in\mathbb{R}^n$. Es claro que si $x\notin B(0,r)$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\phi)(x) = 0 = \phi(x).$$

Por otro lado, cuando $x\in B(0,r)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\left|T_\varepsilon(\phi)(x)-\phi(x)\right| &= \left|\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}\phi(y)dy-\phi(x)\right| = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\left|\int_{B(x,\varepsilon)}(\phi(y)-\phi(x))dy\right| \\ &\le \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}|\phi(y)-\phi(x)|dy, \quad \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon_0>0$ de manera que $\overline{B(x,\varepsilon_0)}\subset B(0,r)$ y usando que ϕ es uniformemente continua en $\overline{B(x,\varepsilon_0)}$, se obtiene fácilmente que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\phi)(x) = \phi(x) =: T(\phi)(x).$$

Las propiedades vistas nos sitúan en las condiciones del Teorema 2.14 por lo que podemos deducir que T admite una única extensión de $C_c(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$, extensión a la que seguimos denotando por T, de manera que para cada $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$T(h)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} h(y)dy, \quad \text{en c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, teniendo en cuenta la Observación 2.15 si $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que converge a h en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que existe una subsucesión $\{\phi_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ para la que se cumple

$$h(x) = \lim_{j\to\infty} \phi_{k_j}(x) \quad \text{y} \quad T(h)(x) = \lim_{j\to\infty} T(\phi_{k_j})(x), \quad \text{en c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, puesto que $T(\phi) = \phi$, $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, concluimos que, dada $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} h(y)dy = T(h)(x) = \lim_{j\to\infty} \phi_{k_j}(x) = h(x), \quad \text{en c.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Observación 2.17. Procediendo como en la prueba de este corolario, haciendo uso del operador maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}_c$, se puede establecer que (2.12) se verifica si sustituimos las bolas por cubos centrados en x.

3

Los pesos A_p de la clase de Muckenhoupt

En el año 1972, se publica el trabajo de Muckenhoupt [16], en el que presenta condiciones que debe verificar una función no negativa w para que el operador maximal de Hardy-Littlewood esté acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ en sí mismo, para $1 < p < \infty$. Estas condiciones fueron denominadas, condiciones A_p y surgen de forma natural al plantearse como paso previo a la demostración de la condición (p, p) fuerte de la maximal, la condión (p, p) débil, que incluiría el caso $p = 1$.

3.1. Los pesos A_p: acotación (p, p)-débil de la maximal de Hardy-Littlewood

Definición 3.1. *Sea w un peso, esto es, una función localmente integrable y no negativa.*

i. Se dice que w es un peso A_1 si verifica la siguiente condición, denominada condición A_1,

$$\mathcal{M}w(x) \leq Cw(x) \ c.t.p. \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Cw(x) \ c.t.p. \ x \in Q, \tag{3.2}$$

para todo cubo Q, donde $C > 0$ es una constante que no depende de Q y $\mathcal{M}$ es el operador maximal no centrado de Hardy-Littlewood sobre cubos.

ii. Se dice que w es un peso A_p, $1 < p < \infty$, si verifica la condición A_p, a saber,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} \leq C, \tag{3.3}$$

para todo cubo Q y donde $C > 0$ es una constante que no depende de Q.

Nota:. El ínfimo de las constantes C que satisfacen, en cada caso, las desigualdades (3.1), (3.2), ó (3.3) se denomina constante A_p del peso.

Observación 3.2 *Las dos definiciones para la condición A_1 son equivalentes.*
Que (3.1) implica (3.2) es obvio por la definición de la función maximal $\mathcal{M}$. Para establecer el recíproco, veamos que $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}w(x) > Cw(x)\}$ es un conjunto de medida cero.
Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{M}w(x) > Cw(x)$. Entonces, existe un cubo Q con vértices racionales tal que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} > Cw(x),$$

y, por (3.2), $x \in S_Q \subset Q$ con $|S_Q| = 0$. Luego,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}w(x) > Cw(x)\} \subset \bigcup_Q S_Q,$$

y ya que los cubos Q se toman con vértices racionales, tenemos una colección numerable $\{S_Q\}_Q$ de conjuntos de medida nula, que permite concluir, que $|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}w(x) > Cw(x)\}| = 0$.

Nota:. El concepto de peso A_p dado en la Definición 3.1 se puede enunciar, de manera equivalente, sobre bolas.

Previo al trabajo mencionado de Muckenhoupt se había demostrado que en $L^p(\mathbb{R}, |x|^a dx)$ la maximal de Hardy-Littlewood estaba acotada, para $1 < p < \infty$ siempre que $-1/p < a < 1 - 1/p$. En el siguiente ejemplo comprobaremos cómo la condición A_p, nos lleva a una generalización de este resultado en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.3. Consideramos la función $|x|^a$ en $\mathbb{R}^n$. Estudiamos para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $|x|^a$ es un peso A_p, $1 < p < \infty$.
En primer lugar, veamos que $\mu = |x|^a dx$ es una medida doblante cuando $a > -n$, esto es, existe $C > 0$ tal que $\mu(2B) \le C\mu(B)$ para cada bola B.
En efecto, sea $B(x_0, R)$ una bola en $\mathbb{R}^n$. Distinguimos los siguientes casos:

i. $|x_0| \ge 3R$. Tenemos que ver que

$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a dx \le C \int_{B(x_0,R)} |x|^a dx,$$

esto es,

$$\int_{B(0,2R)} |z + x_0|^a dz \le C \int_{B(0,R)} |z + x_0|^a dx.$$

Observamos que

a) Si $z \in B(0, 2R)$

$$|z + x_0|^a \le (|z| + |x_0|)^a \le (|x_0| + 2R)^a, \qquad a \ge 0,$$
$$|z + x_0|^a \le ||x_0| - |z||^a \le (|x_0| - 2R)^a, \qquad a < 0.$$

b) Si $z \in B(0,R)$

$$|z+x_0|^a \geq ||x_0|-|z||^a \geq (|x_0|-R)^a, \qquad a \geq 0,$$
$$|z+x_0|^a \geq (|x_0|+|z|)^a \geq (|x_0|+R)^a, \qquad a < 0.$$

Por tanto,

$$\int_{B(0,2R)} |z+x_0|^a dz \leq 2^n |B(0,1)| R^n \begin{cases} (|x_0|+2R)^a, & a \geq 0, \\ (|x_0|-2R)^a, & a < 0, \end{cases}$$

$$\int_{B(0,R)} |z+x_0|^a dz \geq |B(0,1)| R^n \begin{cases} (|x_0|-R)^a, & a \geq 0, \\ (|x_0|+R)^a, & a < 0. \end{cases}$$

Se tiene lo siguiente

$$|x_0|+2R \leq |x_0| + \frac{2}{3}|x_0| = \frac{5}{3}(|x_0|-R) + \frac{5}{3}R \leq \frac{5}{3}(|x_0|-R) + (|x_0|-R) = \frac{8}{3}(|x_0|-R),$$

$$|x_0|-2R \geq |x_0| - \frac{2}{3}|x_0| = \frac{1}{3}(|x_0|+R) - \frac{1}{3}R \geq \frac{1}{3}(|x_0|+R) - \frac{1}{12}(|x_0|+R) = \frac{1}{4}(|x_0|+R).$$

Concluimos que

$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a dx \leq CR^n (|x_0|-R)^a \leq C \int_{B(x_0,R)} |x|^a dx, \quad a \geq 0,$$
$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a dx \leq CR^n (|x_0|+R)^a \leq C \int_{B(x_0,R)} |x|^a dx, \quad a < 0.$$

ii. $|x_0| < 3R$.
Por un lado, observamos que si $z \in B(x_0,2R)$, entonces $|z| \leq |z-x_0| + |x_0| \leq 5R$. Así,

$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a dx \leq \int_{B(0,5R)} |x|^a dx = C \int_0^{5R} r^{n+a-1} dr = CR^{n+a}, \quad (a > -n).$$

Y, por otro lado, para obtener una cota inferior de $\int_{B(x_0,R)} |x|^a dx$, distinguimos los siguientes casos:

- Cuando $a < 0$, tomamos $B_1 = B(3R\frac{x_0}{|x_0|}, R)$ y escribimos $B = B(x_0,R)$ de la siguiente manera
$$B = (B \cap B_1) \cup (B \setminus B_1).$$
Se tiene que
$$\sup_{z \in B \setminus B_1} |z| \leq \inf_{z \in B_1 \setminus B} |z|,$$
Entonces, puesto que la función $h_a(x) = |x|^a$, $x \in \mathbb{R}^n$, es radialmente decreciente, se sigue que

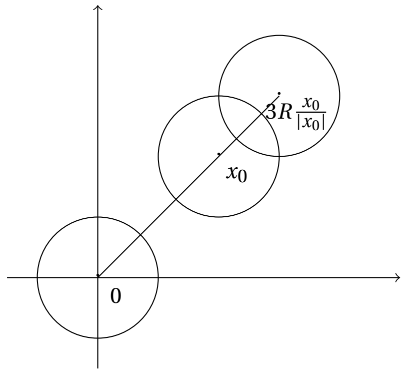


Figura 3.1: Ejemplo 3.3, caso $|x_0| < 3R$

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,R)} |x|^a dx &= \int_{B\cap B_1} |x|^a dx + \int_{B\setminus B_1} |x|^a dx \\ &\geq \int_{B\cap B_1} |x|^a dx + \int_{B_1\setminus B} |x|^a dx = \int_{B_1} |x|^a dx \\ &\geq (4R)^a |B_1| = CR^{n+a},\end{aligned}$$

ya que $|x| \leq 4R$ cuando $x \in B_1$.

- Cuando $a \geq 0$, tomamos $B_2 = B(0,R)$ y escribimos $B = (B\cap B_2)\cup(B\setminus B_2)$. En este caso, se verifica que

$$\inf_{z\in B\setminus B_2} |z| \geq \sup_{z\in B_2\setminus B} |z|.$$

Por tanto, como ahora la función h_a que definimos antes, es radialmente creciente, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,R)} |x|^a dx &= \int_{B\cap B_2} |x|^a dx + \int_{B\setminus B_2} |x|^a dx \\ &\geq \int_{B\cap B_2} |x|^a dx + \int_{B_2\setminus B} |x|^a dx = \int_{B_2} |x|^a dx \\ &= C\int_0^R r^{n+a-1} dr = CR^{n+a},\end{aligned}$$

cuando $a > -n$.

Luego, se deduce que

$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a dx \leq CR^{n+a} \leq C\int_{B(x_0,R)} |x|^a dx$$

y concluimos que la medida $|x|^a dx$, $a > -n$, es doblante.
Procedemos ahora a estudiar en qué casos $|x|^a$ es un peso A_p, $1 < p < \infty$, esto es, para qué valores de a la siguiente expresión es finita

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{-a\frac{p'}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p'}}.$$

Aquí el supremo está calculado sobre las bolas de $\mathbb{R}^n$. Nótese que $\frac{p}{p'} = p-1$ y $\frac{p'}{p} = 1-p'$.
Sea $B = B(x_0, R)$. Distinguimos los siguientes casos:

i. $|x_0| \geq 3R$.
Observamos que si $x \in B$, entonces $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| \leq R$. Por tanto, $|x_0| - R \leq |x| \leq |x_0| + R$, de lo que sigue

$$\frac{2}{3}|x_0| \leq |x| \leq \frac{4}{3}|x_0|,$$

ya que $R \leq \frac{|x_0|}{3}$. Esto es, $|x|$ es comparable a $|x_0|$, $|x| \sim |x_0|$, y por tanto, $|x|^\alpha \sim |x_0|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Así, se tiene que

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^a dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |x|^{-a\frac{p'}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p'}} \sim |x_0|^a \left(|x_0|^{-a\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{p}{p'}} = 1.$$

ii. $|x_0| < 3R$.
En este caso, observamos que las medidas de la bola $B = B(x_0,R)$, $|B| = R^n|B(0,1)|$, y de la bola $B(0,5R)$, $|B(0,5R)| = (5R)^n|B(0,1)|$, son comparables. Además, ya que $B \subset B(0,5R)$ y $|x|^a dx$ es una medida doblante, se tiene

$$\int_B |x|^a dx \leq \int_{B(0,5R)} |x|^a dx \leq \int_{B(x_0,8R)} |x|^a dx \leq C\int_B |x|^a dx.$$

Así, estas integrales son comparables y entonces basta analizar la estimación para $B(0,5R)$. Observamos que el valor

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B(0,5R)|}\int_{B(0,5R)} |x|^a dx\right)\left(\frac{1}{|B(0,5R)|}\int_{B(0,5R)} |x|^{-a\frac{p'}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&= \left(\frac{C}{R^n}\int_0^{5R} r^{a+n-1} dr\right)\left(\frac{C}{R^n}\int_0^{5R} r^{-a\frac{p'}{p}+n-1} dx\right)^{\frac{p}{p'}},
\end{aligned}$$

es finito cuando $-n < a < n\frac{p}{p'}$.
Por tanto, se concluye que si $1 < p < \infty$, la función $w(x) = |x|^a$, $x \in \mathbb{R}^n$, es un peso A_p si, y solo si, $-n < a < n\frac{p}{p'}$.

Siguiendo un proceso análogo se puede comprobar que $w(x) = |x|^a$, $x \in \mathbb{R}^n$, es un peso A_1 siempre que $-n < a \leq 0$.

Los pesos A_1 juegan un papel fundamental en la teoría de los pesos A_p, como veremos más adelante.Veamos a continuación otro ejemplo de un peso A_1.

Ejemplo 3.4. La función $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, definida por

$$u(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x|}, & |x| < \frac{1}{e}, \\ 1, & |x| \geq \frac{1}{e}, \end{cases}$$

es un peso A_1.
Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $B = B(x_0, R)$, $R > 0$. Veamos que

$$\frac{1}{|B|} \int_B u(x)dx \cdot \|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} \leq C.$$

En primer lugar, observamos que si $B \cap B(0, \frac{1}{e}) = \emptyset$, entonces se tiene que

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = \sup_{x\in B} u(x)^{-1} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{1}{|B|} \int_B u(x)dx = \frac{1}{|B|} \int_B dx = 1.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{|B|} \int_B u(x)dx \cdot \|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = 1.$$

Si $B \cap B(0, \frac{1}{e}) \neq \emptyset$, se tiene que

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = \frac{1}{\ln(1/a)}, \quad \text{con } a = \text{máx}\{|x| : x \in \overline{B} \cap \overline{B(0, 1/e)}\}.$$

Además, si $\overline{B} \cap (B(0, 1/e))^c \neq \emptyset$, entonces $\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = 1$.
Consideramos las siguientes situaciones.

i. Si $a < \frac{1}{e}$.
En este caso, $\overline{B} \subseteq B(0, \frac{1}{e})$ y $\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = \frac{1}{\ln(1/a)}$. Distinguimos ahora los siguientes casos:
a) Cuando $|x_0| \leq 3R$. En este caso observamos que $a = |x_0| + R \leq 4R$, y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B u(x)dx\cdot\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} &= \|u^{-1}\|_{L^\infty(B)}\frac{1}{|B|}\int_B \ln\frac{1}{|x|}dx\\
&\le C\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)}\frac{1}{R^n}\int_0^a r^{n-1}\ln\frac{1}{r}dr\\
&= C\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)}\frac{1}{R^n}\left[r^n\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{r}\right)\right]_0^a\\
&= C\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)}\frac{a^n\left(1/n+\ln(1/a)\right)}{R^n}\\
&\le C\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)}(1+\ln(1/a)) \le C\left(\frac{1+\ln(1/a)}{\ln(1/a)}\right)\\
&= C\left(\frac{1}{\ln(1/a)}+1\right)\le C,
\end{aligned}$$

pues $\ln(1/a) > \ln e = 1$, ya que $a < 1/e$.

b) Cuando $|x_0| \ge 3R$. Para cada $x \in B$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|x| &\le |x_0| + R \le |x_0| + \frac{|x_0|}{3} = \frac{4}{3}|x_0|,\\
|x| &\ge |x_0| - R \ge |x_0| - \frac{|x_0|}{3} = \frac{2}{3}|x_0|. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Luego, puesto que $|x_0| < 1/e$,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{|x_0|+R} \ge \frac{3}{4|x_0|} > 1 \quad \text{y} \quad 1 < \frac{1}{|x|} \le \frac{3}{2|x_0|},$$

por lo que,

$$\ln\frac{1}{a} \ge \ln\frac{3}{4|x_0|} > 0 \quad \text{y} \quad 0 < \ln\frac{1}{|x|} \le \ln\frac{3}{2|x_0|}.$$

Por tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B u(x)dx\cdot\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} &\le \left(\frac{1}{|B|}\int_B \ln\frac{3}{2|x_0|}dx\right)\frac{1}{\ln\frac{3}{4|x_0|}}\\
&\le \frac{\ln 2 + \ln\frac{3}{4|x_0|}}{\ln\frac{3}{4|x_0|}} \le \frac{\ln 2}{\ln\frac{3e}{4}} + 1.
\end{aligned}$$

ii. Si $a \ge \frac{1}{e}$.

En este caso, $\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = 1$, y escribimos $B = B_1 \cup B_2$, con $B_1 = B \cap B(0,1/e)$ y $B_2 = B \cap (B(0,1/e))^c$. Entonces, se tiene que

$$\frac{1}{|B|}\int_B u(x)dx\cdot\|u^{-1}\|_{L^\infty(B)} = \frac{1}{|B|}\int_{B_1}\ln\frac{1}{|x|}dx + \frac{|B_2|}{|B|} \le \frac{1}{|B|}\int_{B_1}\ln\frac{1}{|x|}dx + 1$$

y basta acotar $\frac{1}{|B|}\int_{B_1}\ln\frac{1}{|x|}dx$.

Distinguimos ahora los siguientes casos:

i. Cuando $|x_0| \le 3R$. Se tiene que

$$\frac{1}{|B|}\int_{B_1} \ln\frac{1}{|x|}dx \le \frac{C}{|B|}\int_0^{1/e} r^{n-1}\ln\frac{1}{r}dr$$
$$\le \frac{C}{|B|}\left[r^n\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{r}\right)\right]_0^{1/e} = \frac{C}{R^n} \le C,$$

puesto que $\frac{1}{e} < |x_0| + R \le 4R$.

ii. Cuando $|x_0| \ge 3R$. Ya que $|x_0| - R < 1/e < |x_0| + R$, se tiene que $2R \le |x_0| - R < 1/e$. Luego, $R < \frac{1}{2e}$ y entonces,

$$|x_0| > \frac{1}{e} - R \ge \frac{1}{e} - \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e}.$$

Por (3.4) se sigue que,

$$\ln\frac{1}{|x|} \le \ln\frac{3}{2|x_0|} \le \ln(3e), \quad x \in B_1.$$

Se concluye así que

$$\frac{1}{|B|}\int_{B_1} \ln\frac{1}{|x|}dx \le \ln(3e)\frac{|B_1|}{|B|} \le C.$$

En el siguiente teorema presentamos un resultado que involucra al operador maximal de Hardy-Littlewood y a los pesos A_p de la clase de Muckenhoupt, y que pone de manifiesto el sentido de la condición A_p.

Teorema 3.5. *Sean $1 \le p < \infty$ y w un peso. Entonces, se verifica la desigualdad (p, p)-débil, esto es, para toda función $f \in L^p(w)$,*

$$w\big(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}\big) \le \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx, \quad \lambda > 0, \tag{3.5}$$

si, y solo si, $w \in A_p$.

Demostración. Sea w un peso. Supongamos en primer lugar que se verifica la condición (p, p)-débil (3.5). Veamos que entonces $w \in A_p$.
Sea Q un cubo. Supongamos que f es una función no negativa tal que $f(Q) = \int_Q f(x)dx > 0$.
Se tiene que si

$$0 < \lambda < \frac{f(Q)}{|Q|},$$

entonces,

$$Q \subset \big\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(f\mathcal{X}_Q)(x) > \lambda\big\}.$$

Por tanto, de la condición (p, p)-débil, obtenemos

$$\lambda^p w(Q) \leq C \int_Q |f(x)|^p w(x)dx, \quad 0 < \lambda < \frac{f(Q)}{|Q|},$$

por lo que, tomando supremos en λ, se deduce que

$$w(Q)\left(\frac{f(Q)}{|Q|}\right)^p \leq C \int_Q |f(x)|^p w(x)dx. \tag{3.6}$$

Si tomamos ahora $f = \mathcal{X}_S$, donde $S \subset Q$ es un subconjunto medible del cubo Q, con $|S| > 0$, la condición (3.6) nos dice que

$$w(Q)\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \leq C w(S), \tag{3.7}$$

una desigualdad que claramente también es cierta cuando $|S| = 0$.

Veamos que la condición (3.7) implica que $w \in A_p$.

Tratamos primero el caso $p = 1$.
Tomamos $a = \text{essinf}\{w(x) : x \in Q\}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $S_\varepsilon \subset Q$ verificando que $|S_\varepsilon| > 0$ y que, para cada $x \in S_\varepsilon$, $w(x) \leq a + \varepsilon$. Por tanto, de la relación (3.7), tenemos que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C\frac{w(S)}{|S|} = \frac{C}{|S|}\int_S w(x)dx \leq C(a+\varepsilon).$$

La arbitrariedad de ε conduce a

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C\text{essinf}_{x\in Q} w(x),$$

esto es, se satisface la condición A_1 ((3.2)).

Supongamos ahora que $1 < p < \infty$.
Tomando $f = w^{1-p'}\mathcal{X}_Q$ en la relación (3.6), se tiene que

$$w(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^p \leq C\int_Q w(x)^{1-p'}dx$$

esto es, se cumple la condición A_p ((3.3)).

Supongamos ahora que $w \in A_p$. Nuestro objetivo es, entonces, establecer la desigualdad (3.5).

Cuando $p = 1$, haciendo uso del Teorema 2.13, de la equivalencia entre las funciones maximales de Hardy-Littlewood y de que $w \in A_1$ se llega a que

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\mathcal{M}f(x)>\lambda\}} w(x)dx &\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:M_c f(x)>c\lambda\}} w(x)dx \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|M_c w(x)dx\\ &\leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathcal{M}w(x)dx \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x)dx, \quad \lambda>0.\end{aligned}$$

Así, tenemos el resultado para $p=1$.
Sean ahora $p>1$ y $f\in L^p(w)$ que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, no negativa. Usando la desigualdad de Hölder y que $w\in A_p$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right)^p &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|w(x)^{\frac{1}{p}}w(x)^{\frac{-1}{p}}dx\right)^p\\ &\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{-p'}{p}}dx\right)^{\frac{p}{p'}}\\ &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1}\\ &\le \frac{C}{w(Q)}\int_Q |f(x)|^p w(x)dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Si S es un subconjunto medible de Q y $f=\mathcal{X}_S$, obtenemos

$$\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \le C\frac{w(S)}{w(Q)}. \tag{3.9}$$

Fijamos $\lambda>0$ y supongamos que $f\in L^1(w)$. Sea $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la familia de cubos que nos da la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 2.12) para f y parámetro $4^{-n}\lambda$. Entonces,

- En virtud del Teorema 2.12 (iii), $f(Q_j)>4^{-n}\lambda|Q_j|$, $j\in\mathbb{N}$.
- $\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x)>\lambda\}\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}3Q_j$. Basta seguir el razonamiento hecho en (2.9), teniendo en cuenta que ahora se trabaja con la función maximal no centrada.

Usando además las estimaciones (3.8) y (3.9), podemos escribir

$$\begin{aligned} w(\{x\in\mathbb{R}^n:\mathcal{M}f(x)>\lambda\}) &\le \sum_j w(3Q_j)\le C\sum_j w(Q_j)\left(\frac{|3Q_j|}{|Q_j|}\right)^p = C\sum_j w(Q_j)\\ &\le C\sum_j\left(\frac{|Q_j|}{f(Q_j)}\right)^p\int_{Q_j}|f(x)|^p w(x)dx\\ &\le \frac{C}{(4^{-n}\lambda)^p}\sum_j\int_{Q_j}|f(x)|^p w(x)dx\\ &\le \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p w(x)dx. \end{aligned}$$

En el caso general, consideramos la familia $\{f_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}=\left\{f\mathcal{X}_{B(0,\ell)}\right\}_{\ell\in\mathbb{N}}\subseteq L^1$ y seguimos el mismo razonamiento que hicimos en la prueba del Teorema 2.13. □

Observación 3.6 *A partir de la desigualdad* (3.7), *deducimos lo siguiente:*

- *O bien $w = 0$, o bien, $w > 0$ en casi todo punto.*
  En efecto, supongamos que $|\{x \in \mathbb{R}^n : w(x) = 0\}| > 0$. Entonces podemos encontrar un cubo Q_0 de manera que $|\{x \in Q_0 : w(x) = 0\}| > 0$ (nótese que, en caso contrario, dado que el espacio $\mathbb{R}^n$ puede ser recubierto por una colección numerable de cubos, llegaríamos a una contradicción con lo estamos suponiendo). Si $S = \{x \in Q_0 : w(x) = 0\}$, entonces S es un subconjunto de Q_0 con $|S|>0$ y $w(S) = 0$. De la estimación (3.7) obtenemos que $w(Q_0) = 0$ y, también se tendría que $w(Q) = 0$ para cualquier dilatación Q de Q_0. Por tanto se llega a que $w = 0$ en $\mathbb{R}^n$.
- *El peso w es localmente integrable, o bien, $w = \infty$ en casi todo punto.*
  Supongamos que $w \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, esto es, existe un cubo Q_0 tal que $w(Q_0) = \infty$. Usando de nuevo (3.7) se deduce que $w(S) = \infty$, para cualquier subconjunto $S \subset Q_0$ de medida positiva. Entonces, el conjunto $A = \{x \in Q_0 : w(x) < \infty\}$ tiene medida nula pues, de lo contrario, se tendría que $w(A) = \infty$. Como $w(Q) = \infty$, para cualquier dilatación de Q_0 y podemos recubrir $\mathbb{R}^n$ con una unión numerable de cubos, se concluye que $w = \infty$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Como consecuencia, se tiene que $w, w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

3.2. Propiedades de los pesos A_p: desigualdad de Hölder inversa

Algunas propiedades destacables de los pesos A_p, que presentamos en la siguiente proposición, nos muestran que estas clases de funciones constituyen un familia encajada y creciente, donde A_1 es la más pequeña, cómo se relacionan los pesos de una clase con los de la clase con índice conjugado y por último, que podemos generar pesos de cualquier clase a partir de la clase menor A_1.

Proposición 3.7. *Se cumplen las siguientes propiedades*

i. $A_p \subset A_q$, $1 \leq p < q < \infty$.
ii. $w \in A_p$ *si, y solo si,* $w^{1-p'} \in A_{p'}$, $1 < p < \infty$.
iii. Si $w_0, w_1 \in A_1$, *entonces* $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$, $1 < p < \infty$.

Demostración. Veamos (i). Consideramos primero $w \in A_1$ y $1 < q < \infty$. Sabemos que $\mathcal{M}w(x) \leq C w(x)$, en c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que $\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C \operatorname{essinf}_{x\in Q} w(x)$, para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-q'}\right)^{q-1} \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sup_{x\in Q}\left(\frac{1}{w(x)}\right)^{q'-1}\right)^{q-1} = \sup_{x\in Q}\left(\frac{1}{w(x)}\right)^{(q'-1)(q-1)}$$
$$= \sup_{x\in Q} w(x)^{-1} = \left(\inf_{x\in Q} w(x)\right)^{-1} \leq C\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{-1}, \quad Q \subset \mathbb{R}^n \text{ cubo,}$$

esto es, $w \in A_q$. Asumimos ahora que $w \in A_p$, con $p > 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{p'-1}{q'-1}$ (nótese que, al ser $p < q$, se tiene que $p' > q'$ y $(p'-1)/(q'-1) > 1$) tenemos que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-q'}\right)^{q-1} \le \left(\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \left(w(x)^{1-q'}\right)^{\frac{1-p'}{1-q'}} dx\right)^{\frac{1-q'}{1-p'}} |Q|^{1-\frac{1-q'}{1-p'}}\right)^{q-1}$$
$$\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{-1}{1-p'}}$$
$$= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} \le C\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{-1},$$

donde hemos usado que $(1-r')(1-r)=1$, $1<r<\infty$. Se obtiene así que, también en este caso, $w\in A_q$.
Para probar (ii), basta tener en cuenta que para todo cubo Q en $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{(1-p')(1-(p')')}dx\right)^{p'-1}$$
$$= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)^{p'-1}$$
$$= \left(\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\right)^{p'-1}.$$

Luego, $w\in A_p$ si y solo si $w^{1-p'}\in A_{p'}$.

Por último, veamos (iii). Sean $w_0, w_1\in A_1$ y $1<p<\infty$. Fijamos un cubo $Q\subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que

$$w_i^{-1}(x) \le \left(\frac{w_i(Q)}{|Q|}\right)^{-1}, \quad \text{c.t. } x\in Q,\ i=0,1,$$

De nuevo usando que $(1-p)(1-p')=1$ se sigue que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_0(x)w_1(x)^{1-p}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_0(x)^{1-p'}w_1(x)dx\right)^{p-1}$$
$$\le C\left(\frac{1}{|Q|}\left(\frac{w_1(Q)}{|Q|}\right)^{1-p}\int_Q w_0(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\left(\frac{w_0(Q)}{|Q|}\right)^{1-p'}\int_Q w_1(x)dx\right)^{p-1}$$
$$= C\frac{w_1(Q)^{1-p}w_0(Q)}{|Q|^{2-p}}\left(\frac{w_0(Q)^{1-p'}w_1(Q)}{|Q|^{2-p'}}\right)^{p-1} = C.$$

Así, $w_0 w_1^{1-p}\in A_p$.

□

Observación 3.8 *Usando el Ejemplo 3.4 y el apartado (iii) de esta última proposición podemos asegurar que la función*

$$w(x) = \begin{cases} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{2-p}, & |x| < \frac{1}{e}, \\ 1, & |x| \geq \frac{1}{e}, \end{cases}$$

es un un peso de la clase A_p.

Necesitamos establecer el siguiente lema que será utilizado en la demostración de la conocida como desigualdad de Hölder inversa. Esta desigualdad nos permitirá ampliar el conjunto de propiedades de los pesos A_p.

Lema 3.9. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p$. Consideramos un cubo Q, $S \subset Q$ y $\alpha \in (0,1)$ tales que $|S| \leq \alpha |Q|$. Entonces existe $\beta \in (0,1)$ de manera que*

$$w(S) < \beta w(Q).$$

Demostración. Sabemos, en virtud de la prueba del Teorema 3.5, que w verifica la estimación (3.7). Como $|S| \leq \alpha|Q|$ y $\alpha \in (0,1)$, el conjunto $Q \setminus S$ tiene medida positiva. Luego, aplicando (3.7) al conjunto $Q \setminus S$ obtenemos que

$$w(Q)\left(\frac{|Q \setminus S|}{|Q|}\right)^p \leq C w(Q \setminus S),$$

esto es,

$$w(Q)\left(1 - \frac{|S|}{|Q|}\right)^p \leq C\left(w(Q) - w(S)\right),$$

donde C puede tomarse $C > 1$. Usando de nuevo que $|S| \leq \alpha|Q|$, se tiene

$$w(Q)(1-\alpha)^p \leq C(w(Q) - w(S)).$$

Luego, para $\beta = 1 - \frac{(1-\alpha)^p}{C}$, se tiene que $\beta \in (0,1)$, y $w(S) \leq \beta w(Q)$. □

Teorema 3.10 (Desigualdad de Hölder inversa). *Sean $w \in A_p$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces existen constantes $C, \gamma > 0$ que solo dependen de la dimensión, de p y de la constante A_p de w tales que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\gamma}dx\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)dx, \quad \textit{para todo cubo } Q \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Nota:. El nombre que recibe esta estimación es clara si tenemos en cuenta que aplicando la desigualdad de Hölder con exponente $1+\gamma$ al segundo miembro se obtiene

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx \leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q w(x)^{1+\gamma}dx\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}\left(\int_Q dx\right)^{\frac{1}{(1+\gamma)'}} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\gamma}dx\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}.$$

Demostración. Sean Q un cubo y $0 < \alpha < 1$. Sea $\alpha_0 = \frac{w(Q)}{|Q|}$. Definimos la sucesión creciente $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ donde $\alpha_k = (2^n\alpha^{-1})^k\alpha_0$, $k \in \mathbb{N}$.

Construimos la descomposición de Calderón-Zygmund de w respecto al cubo Q de la siguiente manera. Sea $k \geq 1$, seleccionamos los subcubos diádicos R de Q según la condición

$$\frac{w(R)}{|R|} = \frac{1}{|R|}\int_R w(x)dx > \alpha_k. \tag{3.11}$$

Observamos que el cubo Q no cumple esta condición por definición de los α_k, por tanto, no se selecciona. Dividimos Q en 2^n subcubos del mismo tamaño y escogemos aquellos que cumplan la condición (3.11). Repetimos este proceso indefinidamente en cada uno de los subcubos no seleccionados y obtenemos una familia $\{Q_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ de subcubos de Q verificando

$$\frac{w(Q_j^k)}{|Q_j^k|} = \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} w(x)dx > \alpha_k.$$

Además, esta familia tiene las siguientes propiedades:

i. $\alpha_k < \dfrac{1}{|Q_j^k|}\displaystyle\int_{Q_j^k} w(x)dx \leq 2^n\alpha_k.$

En efecto, si $\tilde{Q}$ es el cubo diádico de la generación anterior que contiene a Q_j^k, entonces $\tilde{Q}$ no verifica (3.11) y se tiene que

$$\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} w(x)dx \leq \frac{|\tilde{Q}|}{|\tilde{Q}|}\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{\tilde{Q}} w(x)dx \leq 2^n\frac{w(\tilde{Q})}{|\tilde{Q}|} \leq 2^n\alpha_k.$$

ii. $w(x) \leq \alpha_k$, para casi todo punto $x \notin \Omega_k := \bigcup_j Q_j^k$.

Se tiene

- Si $x \notin \Omega_k$, entonces $\dfrac{1}{|Q_j^k|}\displaystyle\int_{Q_j^k} w(y)dy \leq \alpha_k$, $j \in \mathbb{N}$.
- Por el Teorema de diferenciación de Lebesgue, $\displaystyle\lim_{|Q_j^k|\to 0}\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} w(y)dy = w(x)$ *c.t.p.*

Luego, obtenemos $w(x) \leq \alpha_k$, c.t.p. $x \notin \Omega_k$.

iii. Cada cubo Q_j^{k+1}, $j \in \mathbb{N}$, está contenido en un único cubo Q_ℓ^k, para cierto $\ell \in \mathbb{N}$.

iv. $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, ya que $\alpha_{k+1} > \alpha_k$.

Sea un cubo Q_ℓ^k, se tiene que $Q_\ell^k \cap \Omega_{k+1} = \bigcup_{i=1}^m Q_i^{k+1}$, para cierto $m \leq 2^n$. Luego, usando la propiedad (i) anterior,

$$
\begin{aligned}
|Q_\ell^k \cap \Omega_{k+1}| &= \sum_{i=1}^m |Q_i^{k+1}| \le \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_{k+1}} \int_{Q_i^{k+1}} w(x)\,dx = \frac{1}{\alpha_{k+1}} \int_{\bigcup_{i=1}^m Q_i^{k+1}} w(x)\,dx \\
&\le \frac{1}{\alpha_{k+1}} \int_{Q_\ell^k} w(x)\,dx \le \frac{2^n \alpha_k}{\alpha_{k+1}} |Q_\ell^k| = \alpha |Q_\ell^k|,
\end{aligned}
$$

pues $\alpha = \frac{2^n \alpha_k}{\alpha_{k+1}}$.
Aplicando ahora el Lema 3.9, existe $0 < \beta < 1$ tal que

$$w(Q_\ell^k \cap \Omega_{k+1}) \le \beta w(Q_\ell^k).$$

Luego,

$$\sum_\ell w(Q_\ell^k \cap \Omega_{k+1}) = w(\Omega_{k+1}) \le \beta \sum_\ell w(Q_\ell^k) = \beta w(\Omega_k),$$

de donde obtenemos

$$w(\Omega_k) \le \beta^k w(\Omega_0).$$

Por otro lado, ya que $|Q_\ell^k \cap \Omega_{k+1}| \le \alpha |Q_\ell^k|$,

$$\sum_\ell |Q_\ell^k \cap \Omega_{k+1}| = |\Omega_{k+1}| \le \alpha \sum_\ell |Q_\ell^k| = \alpha |\Omega_k|,$$

y obtenemos que $|\Omega_{k+1}| \le \alpha^k |\Omega_0|$. Tomando límite cuando $k \to \infty$, se deduce que $|\Omega_k| \longrightarrow 0$. Por tanto, como $|\Omega_0| < \infty$,

$$\Big|\bigcap_k \Omega_k\Big| = \lim_{k\to\infty} |\Omega_k| = 0,$$

y podemos escribir Q de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
Q &= (Q \setminus \Omega_0) \cup \Omega_0 = (Q \setminus \Omega_0) \cup ((\Omega_0 \setminus \Omega_1) \cup \Omega_1) = \dots \\
&= (Q \setminus \Omega_0) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^\infty (\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}) \right) \cup \bigcap_k \Omega_k.
\end{aligned}
$$

Ahora, por la propiedad (ii) y la definición de los α_k, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1+\gamma} dx &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q \setminus \Omega_0} w(x)^{1+\gamma} dx + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^\infty \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k+1}} w(x)^{1+\gamma} dx \\
&\le \frac{\alpha_0^\gamma}{|Q|} \int_Q w(x)\,dx + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^\infty \alpha_{k+1}^\gamma \int_{\Omega_k} w(x)\,dx \\
&= \alpha_0^\gamma \frac{w(Q)}{|Q|} + \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^\infty (2^n \alpha^{-1})^{(k+1)\gamma} \alpha_0^\gamma w(\Omega_k) \\
&\le \alpha_0^\gamma \frac{w(Q)}{|Q|} + \alpha_0^\gamma \frac{1}{|Q|} \sum_{k=0}^\infty (2^n \alpha^{-1})^{(k+1)\gamma} \beta^k w(\Omega_0) \\
&\le \alpha_0^\gamma \frac{w(Q)}{|Q|} + \alpha_0^\gamma \frac{w(Q)}{|Q|} \sum_{k=0}^\infty (2^n \alpha^{-1})^{(k+1)\gamma} \beta^k.
\end{aligned}
$$

Observamos que la serie es convergente si $(2^n\alpha^{-1})^\gamma\beta < 1$. Luego, tomando $\gamma > 0$ que verifique esta condición, obtenemos el resultado

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\gamma}dx \leq C\alpha_0^\gamma \frac{w(Q)}{|Q|} = C\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{1+\gamma}.$$

Para concluir la demostración, veamos que tal γ existe. En efecto, si γ es tal que $(2^n\alpha^{-1})^\gamma\beta < 1$, se tiene que

$$0 < \gamma < \frac{-\ln\beta}{\ln 2^n - \ln\alpha}, \text{ ya que } 0 < \alpha, \beta < 1.$$

□

Nota:. Nótese que γ no es único y la desigualdad de Hölder inversa se verifica para cualquier valor en $(0,\gamma]$.

Como consecuencia de la desigualdad de Hölder inversa, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.11. *Se verifican las siguientes propiedades:*

i. $A_p = \bigcup_{q<p} A_p$, $\quad 1 < p < \infty$.
ii. *Si* $w \in A_p, 1 \leq p < \infty$, *entonces existe* $\gamma > 0$ *verificando* $w^{1+\gamma} \in A_p$.
iii. *Sean* $w \in A_p, 1 \leq p < \infty$, Q *un cubo y* $S \subset Q$. *Entonces, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^\delta.$$

Demostración. i. Sea $w \in A_p$, $1 < p < \infty$. Veamos que para algún q, $1 < q < p$, se tiene que $w \in A_q$.
Por la Proposición 3.7 sabemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}$ y, por la desigualdad de Hölder inversa, existe $\gamma > 0$ verificando

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{(1-p')(1+\gamma)}dx\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx.$$

Tomando q de manera que $(q'-1) = (p'-1)(1+\gamma)$, se tiene que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-q'}dx\right)^{\frac{p'-1}{q'-1}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx,$$

y usando ahora que $w \in A_p$ y que $1 = (p-1)(p'-1)$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-q'}dx\right)^{q-1} \leq \left(\frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)^{-1},$$

esto es, $w \in A_q$. Además, $q < p$, pues se tiene $\frac{p-1}{q-1} = 1+\gamma > 1$.

ii. Si $p = 1$, entonces, para cada cubo Q, usando la desigualdad de Hölder inversa y que $w \in A_1$ se tiene

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1+\gamma}dy \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{1+\gamma} \leq Cw(x)^{1+\gamma}, \quad \text{c.t. } x \in Q.$$

Así, $w^{1+\gamma} \in A_1$.
Sea ahora $w \in A_p$, con $p > 1$. Sabemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}$. Tomamos $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, donde γ_1, γ_2 son valores para los que se da la desigualdad de Hölder inversa para w y $w^{1-p'}$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1+\gamma}dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{(1+\gamma)(1-p')}dy\right)^{p-1} \\
&\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{1+\gamma}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1-p'}dy\right)^{(1+\gamma)(p-1)} \leq C,
\end{aligned}$$

ya que $w \in A_p$.

iii. Sabemos que existen $\gamma > 0$ y $C > 0$ tales que se verifica la desigualdad de Hölder inversa para w.
Aplicando la desigualdad de Hölder con exponente $1+\gamma$, se tiene que

$$\begin{aligned}
w(S) &= \int_Q \mathcal{X}_S(x)w(x)dx \leq \left(\int_Q w(x)^{1+\gamma}dx\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}\left(\int_Q \mathcal{X}_S(x)dx\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\right)^{\frac{-1}{1+\gamma}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\gamma}dx\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}|S|^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \leq C\int_Q w(x)dx\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}},
\end{aligned}$$

de donde obtenemos, tomando $\delta = \frac{\gamma}{1+\gamma} > 0$,

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^{\delta}.$$

□

3.3. Acotación (p,p)-fuerte de la maximal de Hardy-Littlewood

Finalizamos este capítulo presentando el teorema que pone de manifiesto que son los pesos de Muckenhoupt los que caracterizan la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$, a los cuales, por simplificar, denotamos por $L^p(w)$.

Teorema 3.12. *Sean $1 < p < \infty$ y w un peso. Entonces, $\mathcal{M}$ está acotado en $L^p(w)$ si, y solo si, $w \in A_p$.*

Demostración. Sea $1 < p < \infty$. Si $\mathcal{M}$ está acotado en $L^p(w)$, se tiene que verifica la desigualdad (p,p) - débil y, por el Teorema 3.5, se tiene que $w \in A_p$.
Recíprocamente, sea $w \in A_p$. Por (i) del Corolario 3.11, existe q, $1 < q < p$, tal que $w \in A_q$ y, por tanto, usando el Teorema 3.5, se tiene la desigualdad (q,q) - débilpara $\mathcal{M}$. Por otro lado, de (3.7) se sigue que $w(S) = 0$ si y solo si $|S| = 0$, luego, $L^\infty(w) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene $\|\mathcal{M}f\|_{L^\infty(w)} \leq \|f\|_{L^\infty(w)}$. Aplicando ahora el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, obtenemos

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(w)} \leq C\,\|f\|_{L^p(w)}.$$

□

4

Teorema de extrapolación de Rubio de Francia

En el capítulo anterior se estableció que si w_0 y w_1 son dos pesos de la clase A_1, entonces $w_0 w_1^{1-p}$ es un peso de la clase A_p (Proposición 3.7(iii)). Este resultado hace que surja de forma natural, una pregunta: ¿será cierto el recíproco? Es decir, ¿todo peso de la clase A_p pude escribirse como producto de dos pesos de la clase A_1? La respuesta es afirmativa y fue establecida por Jones en 1980 ([15]). La demostración presentada en ese trabajo es bastante laboriosa, y la búsqueda de una demostración más sencilla está detrás del germen del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia. En 1983 Coifman, Jones y Rubio de Francia presentan en [2, Theorem II] una demostración del conocido como teorema de factorización, Teorema 4.1, en la que aparece una técnica constructiva de una cierta función, esencial para obtener los deseados pesos A_1 que factorizan al peso A_p, y que recuerda a la técnica que hoy se conoce como el algoritmo de Rubio de Francia y que presentamos en este capítulo en la Proposición 4.3.

4.1. El Teorema de factorización y la generación de pesos A_1

Teorema 4.1. *[Factorización de pesos] Sea $1 < p < \infty$. Si $w \in A_p$, entonces existen $w_1, w_2 \in A_1$ tales que*

$$w = w_1 w_2^{1-p}.$$

Demostración. Veamos primero el caso $p \geq 2$.
Sea $w \in A_p$, $p \geq 2$. Definimos el operador

$$T(f) = \left(w^{-\frac{1}{p}} \mathcal{M}\left(f^{p-1} w^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} + w^{\frac{1}{p}} \mathcal{M}\left(f w^{-\frac{1}{p}}\right), \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Observamos que $Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$. En efecto, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene lo siguiente.

- $w^{\frac{1}{p}}\mathcal{M}\left(fw^{-\frac{1}{p}}\right) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pues ya que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x)w(x)^{-\frac{1}{p}}\right)^p w\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,dx < \infty$$

  y, por tanto, $fw^{-\frac{1}{p}} \in L^p(w)$. Luego, por el Teorema 3.12, se tiene que $\mathcal{M}\left(fw^{-\frac{1}{p}}\right) \in L^p(w)$ y concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(w(x)^{\frac{1}{p}}\mathcal{M}\left(f(x)w(x)^{-\frac{1}{p}}\right)\right)^p dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{M}\left(f(x)w(x)^{-\frac{1}{p}}\right)\right)^p w(x)\,dx < \infty.$$

- $\left(w^{-\frac{1}{p}}\mathcal{M}\left(f^{p-1}w^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Análogamente, ya que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(f(x)^{p-1}w(x)^{\frac{1}{p}}\right)^{p'} w(x)^{1-p'}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,dx < \infty,$$

  esto es, $f^{p-1}w^{\frac{1}{p}} \in L^{p'}(w^{1-p'})$. Además, por la Proposición 3.7 (ii), $w^{1-p'} \in A_{p'}$. Por tanto, el Teorema 3.12 implica que $\mathcal{M}\left(f^{p-1}w^{\frac{1}{p}}\right) \in L^{p'}(w^{1-p'})$ y obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\left(w(x)^{-\frac{1}{p}}\mathcal{M}\left(f(x)^{p-1}w(x)^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)^{1-p'}\mathcal{M}\left(f(x)^{p-1}w(x)^{\frac{1}{p}}\right)^{p'} dx < \infty.\end{aligned}$$

Luego, T está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Además, observamos que si $f,g \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B|}\left(\int_B |f(x)+g(x)|^{p-1}w(x)^{\frac{1}{p}}\,dx\right)\\ &\quad \le \frac{C}{|B|}\left(\left(\int_B |f(x)|^{p-1}w(x)^{\frac{1}{p}}\,dx\right) + \left(\int_B |g(x)|^{p-1}w(x)^{\frac{1}{p}}\,dx\right)\right), \quad B \text{ bola en } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{M}\left((f+g)^{p-1}w^{\frac{1}{p}}\right) \le \mathcal{M}\left(f^{p-1}w^{\frac{1}{p}}\right) + \mathcal{M}\left(g^{p-1}w^{\frac{1}{p}}\right).$$

Por tanto, para $f,g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, T es sublineal, esto es,

$$T(f+g) \le T(f) + T(g), \quad \text{y} \quad T(\lambda f) = \lambda T(f),\ \lambda \ge 0. \tag{4.1}$$

Sea ahora $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f\|_p = 1$. Definimos la función φ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ como sigue

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{T^j(f)}{2^j\,\|T\|_p^j}.$$

Se tiene que φ es una serie convergente en $L^p(\mathbb{R}^n)$, pues

$$\|\varphi\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|T^j(f)\|_p}{2^j \|T\|_p^j} \leq \|f\|_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|T\|_p^j}{2^j \|T\|_p^j} = 1.$$

Definimos

$$w_1 = w^{\frac{1}{p}} \varphi^{p-1} \quad \text{y} \quad w_2 = w^{-\frac{1}{p}} \varphi.$$

Observamos que $w = w_1 w_2^{1-p}$. Veamos que $w_1, w_2 \in A_1$.
Usando (4.1) y que T es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{T^j(f)}{2^j \|T\|_p^j}\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} T\left(\frac{T^j(f)}{2^j \|T\|_p^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{T^{j+1}(f)}{2^j \|T\|_p^j} \\ &= 2\|T\|_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{T^{j+1}(f)}{2^{j+1}} \|T\|_p^{j+1} = 2\|T\|_p \left(\varphi - \frac{T(f)}{2\|T\|_p}\right) \leq 2\|T\|_p \varphi, \end{aligned}$$

ya que T es un operador positivo. Luego,

$$\text{máx}\left\{ w^{-\frac{1}{p}} \mathcal{M}\left(\varphi^{p-1} w^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}, w^{\frac{1}{p}} \mathcal{M}\left(\varphi w^{-\frac{1}{p}}\right\} \leq 2\|T\|\varphi, \quad \text{en c.t.p.} \tag{4.2}$$

Ahora, ya que $w_1 = w^{\frac{1}{p}} \varphi^{p-1}$ y $w_2 = w^{-\frac{1}{p}} \varphi$, se tiene que

$$\varphi = \left(w^{-\frac{1}{p}} w_1\right)^{\frac{1}{p-1}} = w^{\frac{1}{p}} w_2,$$

y sustituyendo en (4.2) obtenemos

$$\left(w^{-\frac{1}{p}} \mathcal{M}(w_1)\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq 2\|T\| \left(w^{-\frac{1}{p}} w_1\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{y}$$
$$w^{\frac{1}{p}} \mathcal{M}(w_2) \leq 2\|T\| w^{\frac{1}{p}} w_2.$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}(w_1) \leq 2\|T\|_p w_1 \quad \text{y} \quad \mathcal{M}(w_2) \leq 2\|T\|_p w_2, \quad \text{en c.t.p.},$$

esto es, $w_1, w_2 \in A_1$.
Sea ahora $w \in A_p$, con $1 < p < 2$.
Se tiene que $w^{1-p'} \in A_{p'}$ (Proposición 3.7 (ii)). Además, como $p' = \frac{p}{p-1} > 2$, existen $v_1, v_2 \in A_1$ tales que

$$w^{1-p'} = v_1 v_2^{1-p'},$$

esto es,

$$w = v_1^{1-p} v_2.$$

□

Los siguientes resultados constituyen los últimos ingredientes que necesitamos para el desarrollo de las demostraciones del Teorema de extrapolación que presentamos en este capítulo.

Lema 4.2. *Sea* $1 < r < \infty$. *Si* $w \in A_r$ *y* $u \in L^{r'}(w)$ *con* $\|u\|_{L^{r'}(w)} = 1$, *entonces existe* $s > 1$ *verificando:*

$i.$ $(uw)^s \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
$ii.$ $\mathcal{M}((uw)^s) < \infty$ $c.t.p.$

Demostración. Veamos en primer lugar (i). Sea Q un cubo y $1 < s < r'$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_Q (u(x)w(x))^s dx &= \int_Q (u(x))^s (w(x))^{s-1} w(x) dx \\ &\leq \left(\int_Q (u(x))^{r'} w(x) dx\right)^{\frac{s}{r'}} \left(\int_Q (w(x))^{(s-1)\left(\frac{r'}{s}\right)'} w(x) dx\right)^{\frac{1}{(r'/s)'}} \\ &\leq \|u\|^s_{L^{r'}(w)} \left(\int_Q (w(x))^{1+(s-1)\left(\frac{r'}{s}\right)'} dx\right)^{\frac{1}{(r'/s)'}},\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Hölder con exponente $\frac{r'}{s}$.
Por el Teorema 3.10, existe $\varepsilon > 0$ tal que (3.10) se verifica para todo $0 < \gamma \leq \varepsilon$. Tomando entonces $s > 1$ tal que $(s-1)\left(\frac{r'}{s}\right)' < \varepsilon$, esto es,

$$1 < s < \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{r}},$$

se sigue que

$$\int_Q (u(x)w(x))^s dx \leq C|Q|^{1-s} \left(\int_Q w(x) dx\right)^{\frac{s}{r}} < \infty.$$

Veamos ahora (ii).
Observamos en primer lugar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(x))^{r'} w(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x)w(x))^{s\frac{r'}{s}} (w(x))^{1-r'} dx < \infty,$$

ya que $u \in L^{r'}(w)$. Por tanto, $(uw)^s \in L^{\frac{r'}{s}}(w^{1-r'})$.
Por otro lado, como $w \in A_r$, por la Proposición 3.7(ii), $w^{1-r'} \in A_{r'}$. Además, del Corolario 3.11(i), se sigue que existe $\delta > 0$ verificando $w^{1-r'} \in A_{r'-\delta}$. Y, de la Proposición 3.7(i), obtenemos que $w^{1-r'} \in A_\eta$, con $r' - \delta \leq \eta$.
Luego, por el Teorema 3.12, se tiene que $\mathcal{M}$ está acotado de $L^\eta(w^{1-r'})$ en $L^\eta(w^{1-r'})$.
Tomando $s = \text{mín}\left\{\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{r}}, \frac{r'}{r'-\delta}\right\}$, concluimos la prueba.

$\square$

A continuación presentamos dos resultados relacionados con la generación de pesos A_1, cada uno de los cuales serán claves, respectivamente, en las dos demostraciones que mostraremos para el Teorema de extrapolación.

Proposición 4.3. *[Algoritmo de Rubio de Francia] Sean p, $1 < p < \infty$, y $w \in A_p$. Para cada $h \in L^p(w)$, el operador definido por*

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}}, \quad k \geq 1, \tag{4.3}$$

donde

$$\mathcal{M}^k = \mathcal{M} \circ \overset{k)}{\cdots} \circ \mathcal{M} \quad y \quad \mathcal{M}^0 h = |h|,$$

verifica las siguientes propiedades

$i.$ $|h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$ii.$ $\|\mathcal{R}h\|_{L^p(w)} \leq 2\|h\|_{L^p(w)}$.

$iii.$ $\mathcal{R}h \in A_1$.

Observamos que, por el Teorema 3.12, $\mathcal{M}$ está acotado en $L^p(w)$.

Demostración. Sea $h \in L^p(w)$.

$i.$ Ya que los términos de la serie son positivos, se tiene que

$$|h(x)| \leq |h(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}} = \mathcal{R}h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$ii.$ Se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}h\|_{L^p(w)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}^k h\|_{L^p(w)}}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}} \leq \|h\|_{L^p(w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}} \\ &= \|h\|_{L^p(w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\|h\|_{L^p(w)}.\end{aligned}$$

$iii.$ Ya que $\mathcal{M}$, es sublineal, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathcal{R}h)(x) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{k+1} h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}} = 2\|\mathcal{M}\|_{L^p(w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{k+1} h(x)}{2^{k+1} \|\mathcal{M}\|^{k+1}_{L^p(w)}} \\ &= 2\|\mathcal{M}\|_{L^p(w)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{L^p(w)}} \leq 2\|\mathcal{M}\|_{L^p(w)} \mathcal{R}h(x).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4. *i. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ verificando $\mathcal{M}f < \infty$ c.t.p.. Si $0 \le \delta < 1$, entonces el peso*

$$w(x) = \mathcal{M}f(x)^\delta$$

es un peso A_1 cuya constante solo depende de δ.

ii. Si $w \in A_1$, entonces existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\delta < 1$ y K verificando $K, K^{-1} \in L^\infty$ y que

$$w(x) = K(x)(\mathcal{M}f(x))^\delta.$$

Demostración. Para probar (i), veamos que para cada f y Q cubo,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}f(y))^\delta dy \le C(\mathcal{M}f(x))^\delta, \quad \text{para casi todo } x \in Q,$$

donde $C > 0$ no depende de Q.
Sean Q un cubo y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Escribimos $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\mathcal{X}_{2Q}$ y $f_2 = f\mathcal{X}_{(2Q)^c}$. Así, $\mathcal{M}f(x) \le \mathcal{M}f_1(x) + \mathcal{M}f_2(x)$ y, si $0 \le \delta < 1$, se tiene que

$$(\mathcal{M}f(x))^\delta \le (\mathcal{M}f_1(x))^\delta + (\mathcal{M}f_2(x))^\delta.$$

Por un lado, ya que $\mathcal{M}$ es $(1,1)$ - débil y $2Q$ tiene medida finita, aplicando el lema de Kolmogorov [6, Lemma 5.16], obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}f_1(y))^\delta dy &\le \frac{C_\delta}{|Q|}|Q|^{1-\delta}\|f_1\|_1^\delta = C_\delta\left(\frac{1}{|Q|}\int_{2Q} f(y)dy\right)^\delta \\ &= C_\delta 2^{n\delta}\left(\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q} f(y)dy\right)^\delta \le 2^{n\delta}C_\delta(\mathcal{M}f(x))^\delta\end{aligned}$$

Por otro lado, para $\mathcal{M}f_2$, observamos que dado $y \in Q$ y R un cubo con $y \in R$ y verificando $\int_R |f_2(x)|dx > 0$, entonces $l(R) > \frac{1}{2}l(Q)$, ya que, en caso contrario, se tendría que $R \subset 2Q$. Por tanto, si $x \in Q$, se tiene que $x \in C_nR$, donde C_n es una constante que no depende de Q. Luego,

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f_2(y)|dy \le C_n^n \frac{1}{|C_nR|}\int_{C_nR} |f_2(y)|dy \le C_n^n\mathcal{M}f(x),$$

y, por tanto, $\mathcal{M}f_2(y) \le C_n^n\mathcal{M}f(x)$, $y \in Q$. Así, obtenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{M}f_2(y))^\delta dy \le C_n^{n\delta}(\mathcal{M}f(x))^\delta.$$

Veamos ahora (ii). Sea $w \in A_1$, entonces por al desigualdad de Hölder inversa, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{1+\gamma}dy\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(y)dy \leq Cw(x), \quad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}^n,$$

ya que $w \in A_1$. Por tanto, se verifica

$$w(x) \leq \left(\mathcal{M}(w^{1+\gamma})(x)\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq Cw(x) \quad c.t.p.\ x \in \mathbb{R}^n,$$

donde hemos usado el Teorema de diferenciación de Lebesgue en la primera desigualdad.
Tomando $f = w^{1+\gamma}$ y $\delta = \frac{1}{1+\gamma}$, obtenemos

$$w(x) \leq (\mathcal{M}f(x))^{\delta} \leq Cw(x),$$

y si $K = \frac{w(x)}{\mathcal{M}f(x)^{\delta}}$, se tiene que $K, K^{-1} \in L^{\infty}$, pues $K(x) \leq 1$ y $K^{-1} \leq C$.

□

4.2. El Teorema de extrapolación

Ya estamos en condiciones de desarrollar dos versiones de la demostración del Teorema de extrapolación de Rubio de Francia, que aunque distintas, se apoyan en un punto común, la generación de pesos A_1.

Teorema 4.5 (Extrapolación). *Sea r, $1 < r < \infty$. Si, para cada peso $w \in A_r$, T es un operador acotado en $L^r(w)$ cuya norma solo depende de la constante A_r de w, entonces para cualquier $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, T está acotado en $L^p(w)$.*

Demostración. Para la demostración del teorema veremos, por un lado, que si $w \in A_1$, entonces T está acotado en $L^q(w)$, $1 < q < r$. Posteriormente, usando esta propiedad, demostraremos que, dado $1 < p < \infty$, T está acotado en $L^p(w)$ si $w \in A_{p/q}$, donde $1 < q < \min\{p, r\}$. Para concluir la prueba, dado $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, sabemos que existe $q > 1$ de manera que $w \in A_{p/q}$, por (i) del Corolario 3.11. Por tanto, usando las propiedades mencionadas, tendremos el resultado.
Sean r con $1 < r < \infty$ y T acotado en $L^r(w)$.
En primer lugar, veamos que si $w \in A_1$ y $1 < q < r$, entonces T está acotado en $L^q(w)$.
Sea $f \in L^q(w)$. Sabemos que $r - q < r - 1$ y $\mathcal{M}f(x) < \infty$ en casi todo punto, pues $w \in A_1 \subset A_q$ y, por tanto, $\|\mathcal{M}f\|_q < \infty$. Luego, por el Teorema 4.4, $(\mathcal{M}f)^{\frac{r-q}{r-1}} \in A_1$. Además, por (iii) de la Proposición 3.7, se tiene que $w(\mathcal{M}f)^{\frac{(r-q)(1-r)}{r-1}} = w(\mathcal{M}f)^{q-r} \in A_r$.
Por tanto, aplicando Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q (\mathcal{M}f(x))^{\frac{-q(r-q)}{r}}(\mathcal{M}f(x))^{\frac{q(r-q)}{r}}w(x)dx\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^r(\mathcal{M}f(x))^{q-r}w(x)dx\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{M}f(x))^q w(x)dx\right)^{\frac{r-q}{r}}\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^r(\mathcal{M}f(x))^{q-r}w(x)dx\right)^{\frac{q}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q w(x)dx\right)^{\frac{r-q}{r}},\end{aligned}$$

ya que T está acotado en $L^r(w)$ y, por el Teorema 3.12, $\mathcal{M}$ está acotado en $L^q(w)$, pues $w \in A_1 \subset A_q$. Ahora, puesto que $|f(x)| \leq \mathcal{M}f(x)$ en casi todo punto y $q-r>0$, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q w(x)dx$$

Veamos ahora la segunda parte de la demostración. Sean $1<p<\infty$ y $1<q<\min\{p,r\}$. Dado $w \in A_{p/q}$, tenemos que ver que T está acotado en $L^p(w)$.
Por dualidad, existe $u \in L^{(p/q)'}(w)$ con $\|u\|_{L^{(p/q)'}(w)}=1$ tal que

$$\begin{aligned}\|Tf\|^q_{L^p(w)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}(|Tf(x)|^q)^{\frac{p}{q}}w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}}\\ &= \|(Tf)^q\|_{L^{(p/q)}(w)} = \int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q w(x)u(x)dx.\end{aligned}$$

Observamos que, para cada $s>1$, se tiene que $wu \leq (\mathcal{M}(wu)^s)^{\frac{1}{s}}$. Además, por el Lema 4.2 y el Teorema 4.4, tomando $\delta=\frac{1}{s}$, obtenemos que $\mathcal{M}((wu)^s)^{\frac{1}{s}} \in A_1$ y, por tanto, T está acotado en $L^q(\mathcal{M}((wu)^s)^{\frac{1}{s}})$.
Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q w(x)u(x)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q(\mathcal{M}(wu)^s)^{\frac{1}{s}}(x)dx\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q(\mathcal{M}(wu)^s)^{\frac{1}{s}}(x)dx\\ &= C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q w(x)^{\frac{q}{p}}(\mathcal{M}(wu)^s)^{\frac{1}{s}}(x)w(x)^{\frac{-q}{p}}dx\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{M}(wu)^s)^{\frac{(p/q)'}{s}}(x)w(x)^{1-(p/q)'}\right)^{\frac{1}{(p/q)'}},\end{aligned}$$

donde hemos aplicado Hölder con índices $\frac{p}{q}$ y $\left(\frac{p}{q}\right)'$. Sabemos, por la propiedad (ii) del Corolario 3.7, que $w^{1-(p/q)'} \in A_{(p/q)'}$, ya que $w \in A_{p/q}$.
Tomando ahora s cerca de 1 tal que $w^{1-(p/q)'} \in A_{(p/q)'/s}$, se tiene que $\mathcal{M}$ está acotada en $L^{(p/q)'/s}(w)$ por el Teorema 3.12. Luego, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q w(x)u(x)dx \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{q}{p}}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (w(x)u(x))^{(p/q)'} w(x)^{1-(p/q)'} dx$$
$$= C\|f\|^q_{L^p(w)} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)^{(p/q)'} w(x)dx$$
$$= C\|u\|^{(p/q)'}_{L^{(p/q)'}(w)} = C\|f\|^q_{L^p(w)}.$$

y, por tanto, T está acotado $L^p(w)$.

□

A continuación veremos otra demostración del Teorema de extrapolación en el que se hace uso del algoritmo de Rubio de Francia para la construcción de pesos A_1.

Demostración. Sean r, $1 < r < \infty$, $w \in A_r$ y T un operador acotado en $L^r(w)$. Dados p, $1 < p < \infty$, y $f \in L^p(w)$, usando el algoritmo de Rubio de Francia descrito en la Proposición 4.3, construimos $\mathcal{R}f$ y $\mathcal{R}'f$, con

$$\mathcal{R}'h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{M}')^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}'\|^k_{L^{p'}(w)}}, \quad \text{donde } \mathcal{M}'f = \frac{\mathcal{M}(fw)}{w} \text{ y } (\mathcal{M}')^0 h = |h|. \tag{4.4}$$

Observamos que $w^{1-p'} \in A_{p'}$ por el Corolario 3.7 y, por tanto, $\mathcal{M}$ está acotado en $L^{p'}(w^{1-p'})$ y $\mathcal{M}'$ en $L^{p'}(w)$, pues se tiene

$$\|\mathcal{M}'f\|_{L^{p'}(w)} = \left\|\frac{\mathcal{M}(fw)}{w}\right\|_{L^{p'}(w)} = \|\mathcal{M}(fw)\|_{L^{p'}(w^{1-p'})}$$
$$\le C\|fw\|_{L^{p'}(w^{1-p'})} = C\|f\|_{L^{p'}(w)}.$$

Además, $\mathcal{R}'$ verifica las siguientes propiedades

i. $|h(x)| \le \mathcal{R}'h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

ii. $\|\mathcal{R}'h\|_{L^p(w)} \le 2\|h\|_{L^p(w)}$.

iii. $\mathcal{R}'hw \in A_1$, verificando $\mathcal{M}'(\mathcal{R}'h)(x) \le 2\|\mathcal{M}'\|_{L^{p'}(w)}$.

Ya que $f \in L^p(w)$, por dualidad, existe una función no negativa $h \in L^{p'}(w)$, con $\|h\|_{L^{p'}(w)} = 1$, tal que

$$\|Tf\|_{L^p(w)} = \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|h(x)w(x)dx$$

y, usando las propiedades de $\mathcal{R}'$, obtenemos

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \le \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|(\mathcal{R}f(x))^{\frac{-1}{r'}}(\mathcal{R}f(x))^{\frac{1}{r'}}\mathcal{R}'h(x)w(x)dx.$$

Además, ya que $\mathcal{R}f, \mathcal{R}'hw \in A_1$, se tiene que $(\mathcal{R}f)^{1-r}\mathcal{R}'hw \in A_r$ por la Proposición 3.7. Por tanto, aplicando Hölder con índices r y r' respecto de la medida $\mathcal{R}'hw$,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^p(w)} &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^r(\mathcal{R}f(x))^{1-r}\mathcal{R}'h(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{R}f(x)\mathcal{R}'h(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\ &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r(\mathcal{R}f(x))^{1-r}\mathcal{R}'h(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{R}f(x)\mathcal{R}'h(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{R}f(x)\mathcal{R}'h(x)w(x)dx,\end{aligned}$$

ya que T está acotado en $L^r(w)$ y $|f| \le \mathcal{R}f$. Ahora, por la desigualdad de Hölder con índices p y p', obtenemos

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^p(w)} &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{R}f(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{R}'h(x))^{p'} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (h(x))^{p'} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ están acotados en $L^p(w)$ y $L^{p'}(w)$ respectivamente. □

El teorema de extrapolación para operadores se puede generalizar para pares de funciones como recoge el siguiente resultado.

Teorema 4.6. *Sea $1 < r < \infty$. Consideramos la familia $\mathcal{F}$ constituida por pares de funciones no negativas (f, g) verificando que, para cada $w \in A_r$,*

$$\|g\|_{L^r(w)} \le C\|f\|_{L^r(w)},$$

donde C solo depende de la constante A_r de w. Entonces, para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$,

$$\|g\|_{L^p(w)} \le C\|f\|_{L^p(w)},$$

con C solo dependiendo de p y de la constante A_p de w, siempre que el término de la derecha sea finito.

Demostración. Sean $w \in A_p$ y $f \in L^p(w)$. Distinguimos los siguientes casos:

i. $p < r$.
Construimos $\mathcal{R}f$ definido en (4.3) usando el algoritmo de Rubio de Francia. Veamos que $w(\mathcal{R}f)^{p-r} \in A_r$, esto es,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}f(x))^{p-r} w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left((\mathcal{R}f(x))^{p-r} w(x)\right)^{1-r'} dx\right)^{r-1} \le K$$

Como $\mathcal{R}f \in A_1$, para cada cubo $Q \in \mathbb{R}^n$, se verifica $\frac{\mathcal{R}f(Q)}{|Q|} \le C\mathcal{R}f(x)$, equivalentemente,

$$(\mathcal{R}f(x))^{-1} \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{R}f(y)dy\right)^{-1}, \quad x \in Q,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}f(x))^{p-r} w(x)dx &\le \frac{1}{|Q|}\int_Q C^{r-p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{R}f(y)dy\right)^{p-r} w(x)dx \\ &= C^{r-p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{R}f(y)dy\right)^{p-r}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right).\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando Hölder con índices $\frac{1-p'}{1-r'}$ y $\left(\frac{1-p'}{1-r'}\right)'$, se tiene que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}f(x))^{(p-r)(1-r')} w(x)^{1-r'} dx\right)^{r-1} \\ &\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}f(x))^{(p-r)(1-r')\left(\frac{1-p'}{1-r'}\right)'} dx\right)^{\frac{r-1}{\left(\frac{1-p'}{1-r'}\right)'}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}\right)^{(r-1)\frac{1-r'}{1-p'}} \\ &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{R}f(x)dx\right)^{r-p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}\right)^{p-1},\end{aligned}$$

pues, usando $(1-p)(1-p') = 1$ y $p' = \frac{p}{p-1}$, se tiene que

$$(p-r)(1-r')\left(\frac{1-p'}{1-r'}\right)' = (p-r)(1-r')\frac{1-p'}{r'-p'} = \frac{(p-r)(1-r')(1-p')}{\frac{r}{r-1}-\frac{p}{p-1}} = 1,$$

y

$$\frac{r-1}{\left(\frac{1-p'}{1-r'}\right)'} = \frac{(r-1)(r'-p')}{1-p'} = \frac{(r-1)\left(\frac{r}{r-1}-\frac{p}{p-1}\right)}{1-p'} = p-r.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}f(x))^{p-r} w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left((\mathcal{R}f(x))^{p-r} w(x)\right)^{1-r'} dx\right)^{r-1} \\ &\qquad \le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}\right)^{p-1} \le K,\end{aligned}$$

ya que $w \in A_p$. Concluimos entonces que $w(\mathcal{R}f)^{p-r} \in A_r$, para toda $f \in L^p(w)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^r(w)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^p w(x)(\mathcal{R}f(x))^{\frac{p(p-r)}{r}}(\mathcal{R}f(x))^{\frac{p(r-p)}{r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^r w(x)(\mathcal{R}f(x))^{(p-r)}dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{R}f(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{(r-p)}{p\cdot r}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^r w(x)(\mathcal{R}f(x))^{(p-r)}dx\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathcal{R}f\|_{L^p(w)}^{\frac{p-r}{r}} \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^r w(x)(\mathcal{R}f(x))^{(p-r)}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(w)}^{\frac{p-r}{r}} \leq C\|f\|_{L^p(w)},
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Hölder con índices $\frac{r}{p}$ y $\left(\frac{r}{p}\right)'$ en la primera desigualdad. Para la segunda, se han usado propiedades de $\mathcal{R}f$ y la hipótesis con el peso $w(\mathcal{R}f)^{p-r}$, y para la última hemos vuelto a aplicar Hölder con índices $\frac{p}{r}$ y $\left(\frac{p}{r}\right)' = \frac{p}{p-r}$.

ii. $p > r$.
Por (1.2), existe una función no negativa $h \in L^{(p/r)'}(w)$, con $\|h\|_{L^{(p/r)'}(w)} = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)^{\frac{p}{p-r}} w(x)dx = 1$, tal que

$$\|g\|_{L^p(w)}^r = \|g^r\|_{L^{(p/r)}(w)} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^r h(x)w(x)dx.$$

Definimos H tal que $H^{p'}w^{1-p'} = h^{\frac{p}{p-r}}w$. De esta manera, se tiene que $H \in L^{p'}(w^{1-p'})$.
Además, como $w \in A_p$, se tiene que $w^{1-p'} \in A_{p'}$ y, por tanto, $\mathcal{M}$ está acotado en $L^{p'}(w^{1-p'})$. Construimos $\mathcal{R}H$ usando el algoritmo de Rubio de Francia y veamos que $w^{\frac{r-1}{p-1}}(\mathcal{R}H)^{\frac{r-1}{p-1}} \in A_r$.
Por un lado, aplicando Hölder con índices $\frac{p-1}{p-r}$ y $\left(\frac{p-1}{p-r}\right)' = \frac{p-1}{r-1}$, se tiene que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}H(x))^{\frac{p-r}{p-1}} w(x)^{\frac{r-1}{p-1}}dx \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \mathcal{R}H(x)dx\right)^{\frac{p-r}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)^{\frac{r-1}{p-1}}. \tag{4.5}$$

Por otro lado, como $\mathcal{R}H \in A_1$ y $\frac{(p-r)(1-r')}{p-1} < 0$, siguiendo un razonamiento análogo al caso $p < r$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}H(x))^{\frac{(p-r)(1-r')}{p-1}} w(x)^{\frac{(r-1)(1-r')}{p-1}}\,dx\right)^{r-1}\\
&\leq \left(C^{\frac{(r-p)(1-r')}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}H(x))dx\right)^{\frac{(p-r)(1-r')}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{1}{1-p}}\,dx\right)\right)^{r-1}\\
&= C^{\frac{p-r}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\mathcal{R}H(x))dx\right)^{\frac{r-p}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{1}{1-p}}\,dx\right)^{r-1}. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (4.5) y (4.6), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)^{\frac{r-1}{p-1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{1}{1-p}}\,dx\right)^{r-1}\\
&= C\left(\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{r-1}{p-1}} \leq C,
\end{aligned}
$$

ya que $w \in A_p$.
Por tanto, para concluir la prueba, observamos que

$$
\begin{aligned}
\|g\|^r_{L^p(w)} &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^r h(x) w(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^r w(x)^{\frac{r-1}{p-1}} H(x)^{\frac{p-r}{p-1}}\,dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^r w(x)^{\frac{r-1}{p-1}} (\mathcal{R}H(x))^{\frac{p-r}{p-1}}\,dx\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^r w(x)^{\frac{r-1}{p-1}} (\mathcal{R}H(x))^{\frac{p-r}{p-1}}\,dx\\
&= C\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^r w(x)^{\frac{r}{p}} (\mathcal{R}H(x))^{\frac{p-r}{p-1}} w(x)^{\frac{r-p}{p(p-1)}}\,dx\\
&\leq C\|f\|^r_{L^p(w)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{R}H(x))^{\frac{p}{p-1}} w(x)^{\frac{1}{1-p}}\,dx\right)^{\frac{p-r}{p}}\\
&= C\|f\|^r_{L^p(w)}\|\mathcal{R}H\|^{\frac{p-r}{p-1}}_{L^{p'}(w^{1-p'})} \leq C\|f\|^r_{L^p(w)}
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la propiedad (i) de $\mathcal{R}H$ en la primera desigualdad, la hipótesis con el peso $w^{\frac{r-1}{p-1}}(\mathcal{R}H)^{\frac{r-1}{p-1}}$ en la segunda, la desigualdad de Hölder con índices $\frac{p}{r}$ y $\left(\frac{p}{r}\right)' = \frac{p}{p-r}$ en la tercera y, en la última, la propiedad (ii) de $\mathcal{R}H$.

□

Esta última versión del Teorema de extrapolación permite demostrar de forma más sencilla, de como se había hecho, tanto una versión tipo débil, como una versión vector-valuada como la formulada originalmente por Rubio de Francia.

Corolario 4.7. *Dado un operador T, supongamos que para algún r, $1 < r < \infty$, y todo $w \in A_r$, T es tipo débil (r,r). Entonces T es tipo débil (p,p) para todo p con $1 < p < \infty$.*

Demostración. Denotemos por E_λ al conjunto

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}.$$

Podemos escribir la desigualdad (r,r) débil de la siguiente manera

$$\|\lambda \mathcal{X}_{E_\lambda}\|_{L^r(w)} \le C\|f\|_{L^r(w)},$$

lo que nos permite aplicar el Teorema 4.6 para deducir que para todo p, $1 < p < \infty$ y todo $w \in A_p$, se tiene que

$$\|\lambda \mathcal{X}_{E_\lambda}\|_{L^p(w)} \le C\|f\|_{L^p(w)},$$

es decir, que T es tipo débil (p,p).

□

Corolario 4.8. *Dado un operador T, supongamos que para algún r, $1 < r < \infty$, y todo $w \in A_r$, T está acotado sobre $L^r(w)$. Si denotamos $f = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y extendemos T a un operador vectorial como $Tf = \{Tf_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces para todo p, q con $1 < p, q < \infty$ se tiene,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |Tf_i(x)|^q\right)^{p/q} w(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^q\right)^{p/q} w(x)dx, \quad f_i \in L^p(w),\ i \in \mathbb{N}.$$

Demostración. En primer lugar, podemos asegurar que T está acotado de $L^q(w)$, para todo $w \in A_q$, sobre sí mismo para todo $1 < q < \infty$ por la aplicación de la extrapolación. Este hecho nos garantiza que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} |Tf_i(x)|^q w(x)dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^q w(x)dx, \quad f_i \in L^q(w),\ i \in \mathbb{N}.$$

Reescribiendo esta desigualdad como

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(\sum_{i=1}^{\infty} |Tf_i(x)|^q\right)^{1/q}\right|^q w(x)dx \\ &\quad \le C \int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^q\right)^{1/q}\right|^q w(x)dx, \quad f_i \in L^q(w),\ i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

y aplicando el Teorema 4.6 a los pares $\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |Tf_i(x)|^q\right)^{1/q}, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^q\right)^{1/q}\right)$, obtenemos el resultado buscado.

□

4.3. Conclusiones

Una mirada general a la prueba del Teorema 4.6, nos hace concluir que los puntos sobre los que se apoya la misma son:

(i) La maximal de Hardy-Littlewood está acotada de $L^p(w)$ en si mismo siempre que $w \in A_p$.
(ii) $L^{p'}(w)$ es el dual de $L^p(w)$.
(iii) El algoritmo de Rubio de Francia.
(iv) La desigualdad de Hölder.
(v) Propiedades de los pesos A_p.

Cuando se pueden establecer estos puntos en otros contextos, con las correspondientes adaptaciones de las definiciones, la demostración de la versión propia del teorema de extrapolación seguirá una argumentación análoga a las presentadas en este capítulo. Sirva como ejemplo el contexto de los denominados espacios de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n, dx)$, donde $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty]$ es una función medible con ciertas condiciones de regularidad. En 2017 Cruz-Uribe y Wang publicaron el trabajo [5] y en él se presenta una generalización del Teorema 4.6 en el marco de los espacios de Lebesgue de exponente variable. Aunque la demostración de este teorema requiere establecer ciertas condiciones propias del contexto, en general su desarrollo se fundamenta en los mismos puntos claves que la del caso del contexto clásico.

Bibliografía

[1] ALEGRÍA, P. Teoría de la medida. Apuntes (Agosto de 2007) .

[2] COIFMAN, R., JONES, P. W., AND RUBIO DE FRANCIA, J. L. Constructive decomposition of BMO functions and factorization of A_p weights. *Proc. Amer. Math. Soc. 87*, 4 (1983), 675–676.

[3] CRUZ-URIBE, D., AND PÉREZ, C. Two weight extrapolation via the maximal operator. *J. Funct. Anal. 174*, 1 (2000), 1–17.

[4] CRUZ-URIBE, D. V., MARTELL, J. M., AND PÉREZ, C. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, vol. 215 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[5] CRUZ-URIBE, DAVID AND WANG, LI-AN DANIEL Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 369 (2) (2017), 1205–1235.

[6] DUOANDIKOETXEA, J. *Fourier analysis*, vol. 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[7] DUOANDIKOETXEA, J. Extrapolation of weights revisited: new proofs and sharp bounds. *J. Funct. Anal. 260*, 6 (2011), 1886–1901.

[8] DUOANDIKOETXEA, J. In memory of José Luis Rubio de Francia (1949–1988): a look at the extrapolation theorem. *Gac. R. Soc. Mat. Esp. 16*, 2 (2013), 227–240.

[9] FOLLAND, G.B̃. *Real Analysis - Modern techniques and their applications*. John Wiley, New York, 1984.

[10] GARCÍA-CUERVA, J. An extrapolation theorem in the theory of A_p weights. *Proc. Amer. Math. Soc. 87*, 3 (1983), 422–426.

[11] GARCÍA-CUERVA, J. José Luis Rubio de Francia (1949–1988). *Collect. Math. 38*, 1 (1987), 3–15.

[12] GARCÍA-CUERVA, J., AND RUBIO DE FRANCIA, J. L. *Weighted norm inequalities and related topics*, vol. 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-

Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[13] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier analysis*, second ed., vol. 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.

[14] GRAFAKOS, L. *Modern Fourier analysis*, second ed., vol. 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2009.

[15] JONES, P. W. Factorization of A_p weights. *Ann. of Math. (2) 111*, 3 (1980), 511–530.

[16] MUCKENHOUPT, BENJAMIN Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc. 165*, (1972), 207–226.

[17] RUBIO DE FRANCIA, J. L. Factorization and extrapolation of weights. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7*, 2 (1982), 393–395.

[18] RUBIO DE FRANCIA, J. L. Factorization theory and A_p weights. *Amer. J. Math. 106*, 3 (1984), 533–547.

[19] RUDIN, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.