

Hugo José González García

Teoría Global de Curvas Planas
Global Theory of Plane Curves

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2023

DIRIGIDO POR
David Baldomero Iglesias Ponte

David Baldomero Iglesias Ponte
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa.
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutor David, sin su guía hubiera sido imposible la realización de este trabajo. A mi familia, por acompañarme durante esta experiencia, y a mi gato Grey por aguantar sentado a mi lado durante la redacción de esta memoria.

Hugo José González García
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen

En este trabajo recogemos los resultados más clásicos de la teoría global de curvas planas, como son el teorema de la curva de Jordan, el teorema de rotación de las tangentes, el teorema de los cuatro vértices y la desigualdad isoperimétrica en sus versiones para curvas parametrizadas de una cierta suavidad, que nos permitirá aplicar los conceptos propios de la geometría diferencial de curvas una vez particularizados para el plano. En este sentido, logramos establecer relación entre conceptos locales tales como el vector tangente, el vector normal o la curvatura con aspectos topológicos y geométricos de las curvas a las que describen. Acompañamos los resultados de un poco de la historia que los rodea, tanto del surgimiento de los problemas, como de sus demostraciones, generalizaciones y extensiones.

Palabras clave: *Curva de Jordan – Vector tangente – Curvatura plana.*

Abstract

This dissertation collects some of the classic results of the global theory of plane curves, namely the Jordan curve theorem, the turning tangents theorem, the four vertex theorem and the isoperimetric inequality, in their variations for sufficiently smooth parametrized curves, which allow us to apply the most known results of the differential geometry of space curves, after particularizing them to the plane. In this way, we establish relations between the local aspects of curves, mainly their tangent and normal versors, as well as their curvature, with topological and geometric properties of the curves they describe. The results are accompanied by a brief discussion of the history that surrounds them, their proofs, and their possible generalizations and extensions.

Keywords: *Jordan curve – Tangent versor – Plane curvature.*

Contenido

Agradecimientos	III
Introducción	IX
1. Curvas parametrizadas	1
2. Teorema de la curva de Jordan	7
3. Teorema de rotación de las tangentes	17
4. Teorema de los cuatro vértices	21
5. Desigualdad isoperimétrica	27
A. Apéndice	35
Bibliografía	37
Poster	39

Introducción

La teoría global de curvas pretende dar resultados que nos hablen de la naturaleza de ser propia de las curvas. Si bien esta teoría, al igual que la teoría local de curvas puede ser desarrollada desde un punto de vista espacial, o incluso vista como una particularización de resultados más generales, para superficies y entes de dimensión superior, el objetivo de este trabajo se ha fijado en los resultados para curvas planas. En este sentido daremos los cuatro teoremas más clásicos de la teoría global de curvas planas, en sus versiones para curvas de una cierta diferenciabilidad, lo que nos permitirá acercarnos a ellas desde la geometría diferencial de curvas. Resulta por tanto emocionante obtener resultados globales sobre el comportamiento de las curvas planas a partir de conceptos locales de las mismas como son el vector tangente, el vector normal o la curvatura.

En el primer capítulo, a modo de introducción, y también con la intención de fijar notación, repasaremos algunos conceptos de la geometría diferencial de curvas y la particularizaremos al ámbito del plano. En un segundo capítulo, daremos el que probablemente sea el resultado más conocido para curvas planas, el teorema de la curva de Jordan, que afirma que una curva cerrada y sin autointersecciones divide el plano en dos regiones, del que recogemos la demostración para curvas de clase C^2 . Este teorema podría ser considerado algo obvio, pero lo cierto es que requiere de demostración, y en su versión original, esta demostración no es cuanto menos sencilla. De hecho, la demostración de original de Jordan ha estado mucho tiempo sepultada bajo críticas ya sea por asumir sin demostrar parte de la demostración, o por según ciertas voces, ni siquiera ser ni una demostración válida, ni ser la idea para la demostración válida. [8]

En un segundo capítulo, daremos el teorema de rotación de las tangentes, un resultado de carácter topológico que asegura que el grado del vector tangente a una curva, si se considera este como un lazo en la circunferencia, es ± 1 , en función de la orientación. El tercer capítulo contiene el teorema de los cuatro vértices, que nos permite conocer el carácter de la función curvatura de una curva plana al afirmar que ha de tener al menos cuatro puntos en los que se anule su derivada, así como la interpretación propia frente a la curvatura espacial

definida en la geometría diferencial de curvas. Concluiremos con un problema histórico, surgido en la antigüedad clásica como es la desigualdad isoperimétrica, el problema de hallar la curva que, fijado el perímetro, maximiza el área que encierra. Daremos en este sentido una versión poligonal, análoga a lo demostrado por los matemáticos de la antigua Grecia, y siguiendo con nuestra aproximación, una versión para curvas de clase C^2 a trozos. Se ha añadido un apéndice con algunos resultados que si bien no son forman parte de la teoría global de curvas planas, han sido necesarios para la demostración de algunos lemas previos a los resultados principales.

Curvas parametrizadas

Aunque este trabajo está centrado en las curvas planas, el hábitat natural de las curvas es el espacio. En este capítulo daremos algunas de sus propiedades básicas. Para una construcción más pormenorizada, se puede consultar [1].

Definición 1.1. Llamamos *curva parametrizada de clase C^k* a una aplicación $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^k , donde $I = (a, b)$ es un intervalo abierto, con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definición 1.2. Dada una curva parametrizada $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, se define el vector velocidad de σ en el punto $s \in I$ como $\dot{\sigma}(s) = (\dot{\sigma}_1(s), \dot{\sigma}_2(s), \dot{\sigma}_3(s))$, y se llama velocidad de σ a $\|\dot{\sigma}(s)\|$. Si la velocidad de σ es constante e igual a 1, decimos que σ es unitaria.

Definición 1.3. Dada una curva parametrizada $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, decimos que σ tiene un punto singular en $s_0 \in I$ si $\dot{\sigma}(s_0) = 0$. De lo contrario, decimos que el punto es regular. Decimos que una curva es regular si todos sus puntos son regulares, es decir, $\dot{\sigma}(s) \neq 0$, para todo $s \in I$.

Definición 1.4. En un punto regular $P = \sigma(s_0)$ de una curva parametrizada σ , se define el vector tangente a σ en s_0 como el vector unitario en la dirección de $\dot{\sigma}(s_0)$

$$T(s_0) = \frac{\dot{\sigma}(s_0)}{\|\dot{\sigma}(s_0)\|}$$

Definición 1.5. Se define la longitud de arco de una curva parametrizada σ en el intervalo $[c, d] \subset I$ como

$$L_c^d(\sigma) = \int_c^d \|\dot{\sigma}(s)\| ds$$

Definición 1.6. Sean $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas parametrizadas. Decimos que γ es reparametrización de σ si existe un difeomorfismo $h : J \rightarrow I$ tal que $\gamma = \sigma \circ h$. La reparametrización se dice directa si $h' > 0$ en J , e inversa si $h' < 0$ en J .

Proposición 1.7. Sea $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular y sea $s_0 \in I$. Entonces

$$h(s) = \int_{s_0}^s \|\dot{\sigma}(\xi)\| d\xi$$

define un difeomorfismo $h : I \longrightarrow h(I)$

Teorema 1.8. Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización directa y unitaria.

Demostración. Por la proposición 1.7, $h : I \longrightarrow h(I)$ es un difeomorfismo. Sea $g = h^{-1} : h(I) \longrightarrow I$ su difeomorfismo inverso. Entonces $g(h(s)) = s$ para todo $s \in I$, y derivando $g'(h(s))h'(s) = 1$ de donde $g'(h(s)) = 1/h'(s) = 1/\|\dot{\sigma}(s)\| > 0$. Tomamos la reparametrización directa $\gamma = \sigma \circ g : h(I) \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Como $\sigma(s) = (\gamma \circ h)(s)$, para todo $s \in I$, derivando obtenemos $\dot{\sigma}(s) = \dot{\gamma}(h(s))h'(s) = \dot{\gamma}(h(s))\|\dot{\sigma}(s)\|$. Tomando módulo obtenemos $\|\dot{\sigma}(s)\| = \|\dot{\gamma}(h(s))\|\|\dot{\sigma}(s)\|$, por lo que $\|\dot{\gamma}(u)\| = 1$, para todo $u \in h(I)$. Luego γ es reparametrización directa y unitaria. □

Nota. La reparametrización anterior se denomina parámetro arco dada su relación con el difeomorfismo que da la longitud de arco.

Proposición 1.9. Decimos que dos curvas parametrizadas $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ están relacionadas si existe una reparametrización $h : I \longrightarrow J$ tal que $\sigma = \gamma \circ h$. Esta relación es de equivalencia.

Definición 1.10. A cada clase de equivalencia dada por la relación de equivalencia anterior se la denomina curva geométrica. A las propiedades que verifican todas las parametrizaciones de una curva geométrica se las denomina invariantes geométricos.

Los resultados que trataremos involucran conceptos que no dependan de la parametrización elegida porque nos darán información propia de la curva que tratemos, no solo de como la hayamos descrito. Además nos permitirán simplificar expresiones al poder asumir parametrización por el parámetro arco sin que esto altere su carácter.

Proposición 1.11. La regularidad de una curva, y su vector tangente salvo sentido son invariantes geométricos. La longitud de arco también es un invariante geométrico.

Proposición 1.12. Sea $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Definimos la curvatura de σ en el punto $s \in I$ como

$$\kappa(s) = \frac{\|T'(s)\|}{\|\dot{\sigma}(s)\|}$$

Si σ es unitaria, $\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\ddot{\sigma}(s)\|$. La curvatura es un invariante geométrico.

Definición 1.13. Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Decimos que σ es birregular si los vectores $\dot{\sigma}(s)$ y $\ddot{\sigma}(s)$ son linealmente independientes, para todo $s \in I$. Esta propiedad resulta equivalente a que σ sea regular y tenga curvatura no nula en todo punto de I .

Definición 1.14. Dada $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada birregular. Llamamos vector normal a σ en $s \in I$ a

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|\dot{\sigma}(s)\|\kappa(s)}$$

Llamamos vector binormal a σ en $s \in I$ a

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Proposición 1.15. El vector normal se conserva por reparametrizaciones, y el binormal se conserva salvo signo.

Proposición 1.16. Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada birregular. Entonces $\{T(s), N(s), B(s)\}$ forman una base ortonormal orientada positivamente para todo $s \in I$, denominada triedro de Frenet.

Definición 1.17. Sea σ una curva parametrizada birregular, definimos la torsión de σ en el punto s como

$$\tau(s) = -\frac{B'(s) \cdot N(s)}{\|\dot{\sigma}(s)\|}$$

La torsión es un invariante geométrico.

Teorema 1.18 (Fórmulas de Frenet-Serret). Al expresar las derivadas de los vectores del triedro de Frenet, en función de la base que forman, se obtienen las siguientes relaciones conocidas como fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

Teorema 1.19 (Teorema fundamental de curvas). Sean $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, $\kappa(s) > 0$, para todo $s \in I$. Entonces existe una curva parametrizada regular y unitaria $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que κ y τ son su curvatura y torsión respectivamente. Además, si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada, regular y unitaria con misma curvatura y torsión, entonces es la imagen a través de un movimiento rígido de σ .

Con este resultado, se tiene que las curvas espaciales vienen determinadas por su curvatura y torsión. En el caso de las curvas planas, la determinación vendrá únicamente por su curvatura, sobre la que daremos resultados interesantes.

Proposición 1.20. *Sea σ una curva parametrizada birregular. Entonces σ está contenida en un plano si y sólo si τ es nula, es decir, si y sólo si $B(s)$ es constante. En este caso, decimos que σ es una curva plana.*

A partir de este momento, nos centramos en curvas planas, y para su correcto tratamiento daremos una pocas propiedades más, así como las relaciones entre las propiedades arriba nombradas y sus particularizaciones al plano.

Consideramos una curva plana parametrizada como una aplicación $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua. A diferencia de en la teoría espacial, en la mayoría del trabajo consideramos $I = [a, b]$ un intervalo cerrado, a menudo porque trabajaremos con curvas cerradas, para las que podemos hacer la siguiente construcción:

Definición 1.21. *Decimos que una curva plana $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es cerrada si $\sigma(a) = \sigma(b)$.*

No obstante, el concepto de curva cerrada se define también para curvas dadas en un intervalo abierto de la siguiente manera:

Definición 1.22. *Una curva plana $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es cerrada si es periódica, es decir, si existe un $a > 0$ tal que $\sigma(s + a) = \sigma(s)$, para todo $s \in I$.*

Estas dos definiciones son compatibles gracias al siguiente resultado:

Proposición 1.23. *Toda curva plana cerrada $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede ser extendida a \mathbb{R} de manera periódica.*

Por otra parte, nos interesa hacer uso de lo que ya conocemos de la teoría de curvas en el espacio, para ello podemos ver una curva plana $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como una curva espacial $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, 0) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. De esta manera, la idea de vector tangente en el plano a σ , definido como

$$\vec{t}(s) = \frac{\dot{\sigma}(s)}{\|\dot{\sigma}(s)\|}$$

coincide con la del vector tangente $T(s)$ al considerar σ en \mathbb{R}^3 .

Al igual de lo que sucedía en el espacio, el vector tangente no tiene porqué estar definido en todos los puntos de σ , por lo que introducimos la idea de curva plana regular de manera análoga al caso espacial. Junto con esta idea, siguen las de longitud y velocidad de la curva.

A diferencia del caso espacial, en el que debíamos pedir birregularidad para la buena definición del vector normal, en el plano contamos con un candidato obvio.

Definición 1.24. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular unitaria. Sea $\vec{t} = (\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2)$. Definimos el vector tangente plano a la curva σ en el punto s como

$$\vec{n}(s) = (-\dot{\sigma}_2(s), \dot{\sigma}_1(s))$$

Definido de esta manera, los vectores tangente y normal nos determinan una base ortonormal orientada positivamente en todo punto de σ . Tenemos por tanto un análogo al triedro de Frenet conocido como diedro de Frenet. La orientación la vemos como el signo del determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\sigma}_1 & \dot{\sigma}_2 \\ -\dot{\sigma}_2 & \dot{\sigma}_1 \end{vmatrix} = \dot{\sigma}_1^2 + \dot{\sigma}_2^2 > 0$$

en todo punto donde σ sea regular.

Es importante señalar que el vector normal plano a la curva no necesariamente coincide con el vector normal espacial que le podemos asignar. Esta posible discrepancia se refleja en la definición de la curvatura plana.

Definición 1.25. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana. Definimos la curvatura orientada de σ en un punto regular s como $k(s) = \vec{t}'(s) \cdot \vec{n}(s)$.

A diferencia de la curvatura espacial, la curvatura plana puede tomar valores tanto positivos como negativos, correspondiéndose con su análogo espacial en valor absoluto. Por otra parte, esta definición nos da una versión plana de las fórmulas de Frenet-Serret: $\vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s)$.

Finalizamos este capítulo introduciendo algunas clases de curvas que aparecerán habitualmente en los que siguen.

Definición 1.26. Decimos que una curva $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es simple si es inyectiva al restringirla a $[a, b]$, y también al restringirla a (a, b) .

Definición 1.27. Decimos que una curva plana $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de Jordan si es simple y cerrada.

Definición 1.28. Decimos que una curva plana $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es suave si es regular de clase C^2 .

Definición 1.29. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Se denomina soporte de σ a $G = \sigma([a, b])$.

Extendemos las definiciones dadas para curvas que las cumplan a trozos, de esta manera, decimos que una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es C^k a trozos si existe una partición $\{a = s_0, s_1, \dots, s_n = b\}$ tal que σ restringida a cada intervalo (s_i, s_{i+1}) es de clase C^k . Análogamente nos referiremos a curvas regulares a trozos, o a curvas suaves a trozos.

Teorema de la curva de Jordan

En este capítulo daremos el que es, probablemente, el resultado más conocido en la teoría global de curvas planas: el teorema de la curva de Jordan. Confirma la idea intuitiva de que una curva cerrada y simple (curva de Jordan) divide el plano en dos regiones, la interior a la curva y la exterior.

Aunque este resultado pueda parecer obvio, fue Camille Jordan el primero en plantearse esta cuestión como algo a demostrar, y en demostrarlo. Sin embargo la prueba de Jordan ha sido muy criticada a lo largo de la historia, con alegaciones tanto de incompletitud, como de completa invalidez, siendo a menudo atribuida la primera demostración a Veblen en 1905. Bien es cierto que Jordan asume la demostración para el caso poligonal como trivial, pero la realidad es que un análisis pormenorizado como el que se puede encontrar en [8] muestra la validez de la demostración de Jordan.

En este trabajo, daremos en cambio una versión para curvas suaves siguiendo la demostración que puede encontrarse en [4]. Para esta demostración, será necesario hablar previamente del concepto de entorno tubular.

Definición 2.1. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana simple y regular, con soporte $G = \sigma([a, b])$. Dado un $\varepsilon > 0$ y un punto $p = \sigma(s) \in G$, consideramos $I_\sigma(p, \varepsilon)$ el segmento que une $\sigma(s) + \varepsilon \vec{n}(s)$ con $\sigma(s) - \varepsilon \vec{n}(s)$. Este segmento tiene longitud 2ε , está centrado en p y es perpendicular a $\dot{\sigma}(s)$. Si denotamos ahora por $N_\sigma(\varepsilon)$ a la unión de todos estos segmentos $I_\sigma(p, \varepsilon)$, entonces decimos que $N_\sigma(\varepsilon)$ es un entorno tubular de σ si $I_\sigma(p_1, \varepsilon) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon) = \emptyset$, para todo $p_1 \neq p_2 \in G$.

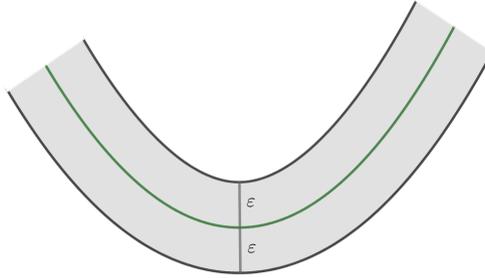


Figura 2.1: Entorno tubular

Los entornos tubulares llevan asociados un resultado que garantiza su existencia, dotándolos de gran utilidad como herramienta matemática. Para probarlo haremos uso del conocido teorema de la función inversa.

Teorema 2.2 (De los entornos tubulares). *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva parametrizada simple, regular, de clase C^2 y sea $G = \sigma([a, b])$ el soporte de σ . Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $N_\sigma(\varepsilon)$ es entorno tubular de σ , para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Demostración. Podemos asumir σ unitaria. Si σ es cerrada la extendemos periódicamente a \mathbb{R} , de lo contrario, la extendemos a un entorno abierto I que contenga a $[a, b]$. Consideramos ahora

$$F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(s, x) = \sigma(s) + x\vec{n}(s)$$

Entonces, como $\sigma \in C^2$, tanto \vec{t} como \vec{n} son de clase C^1 y por tanto, también lo es F . Además, para todo $\varepsilon > 0$, $N_\sigma(\varepsilon) = F([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$. Analizando el jacobiano de F en $(s, 0)$, tenemos

$$J(F)_{(s,0)} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$|J(F)_{(s,0)}| = \left| \begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{n}(s) \end{pmatrix} \right| \neq 0, \forall s \in [a, b]$$

Por el Teorema A.1, para todo $s_0 \in [a, b]$, existen $\delta_{s_0}, \varepsilon_{s_0}$ tales que $F|_{(s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0}) \times (-\varepsilon_{s_0}, \varepsilon_{s_0})}$ es un difeomorfismo. Afirmamos ahora que, para $p_1 = \sigma(s_1), p_2 = \sigma(s_2) \in G$, $p_1 \neq p_2$, con $s_1, s_2 \in (s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0})$, $I(p_1, \varepsilon_{s_0}) \cap I(p_2, \varepsilon_{s_0}) = \emptyset$. Efectivamente, si esto no fuera así,

$$x \in I(p_1, \varepsilon_{s_0}) \cap I(p_2, \varepsilon_{s_0}) \Rightarrow \begin{cases} x \in I(p_1, \varepsilon_{s_0}) \Rightarrow \exists \varepsilon \in (-\varepsilon_{s_0}, \varepsilon_{s_0}) : x = p_1 + \varepsilon \vec{n}(s_1) \\ x \in I(p_2, \varepsilon_{s_0}) \Rightarrow \exists \varepsilon' \in (-\varepsilon_{s_0}, \varepsilon_{s_0}) : x = p_2 + \varepsilon' \vec{n}(s_2) \end{cases}$$

Y como F es inyectiva, $s_1 = s_2 \Rightarrow p_1 = p_2$, alcanzando así un absurdo. Si llamamos ahora $U_{s_0} = (s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0})$, tenemos que $\sigma(U_{s_0})$ es abierto en G , pues $[a, b] \setminus U_{s_0}$ es compacto, y $G \setminus \sigma(U_{s_0}) = \sigma([a, b] \setminus U_{s_0})$ si σ no es cerrada. Si σ es cerrada, y a o b pertenecen a U_{s_0} , basta con quitar la imagen en el complementario. Sea ahora $\{U_s\}_{s \in [a, b]}$ un recubrimiento abierto de $[a, b]$. Como $[a, b]$ es compacto, extraemos un subrecubrimiento finito $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_n}\}$. Entonces $\{\sigma(U_{s_1}), \dots, \sigma(U_{s_n})\}$ es recubrimiento abierto de G , que es compacto, y por lo tanto podemos tomar δ el número de Lebesgue A.3 asociado al recubrimiento. Eligiendo ahora $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_n}, \frac{\delta}{2}\}$, comprobamos que $N_\sigma(\varepsilon)$ es entorno tubular, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Efectivamente, sea $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, y sean $p, q \in G$, $p \neq q$, supongamos que $I_\sigma(p, \varepsilon) \cap I_\sigma(q, \varepsilon) \neq \emptyset$. Existe entonces un $x \in I_\sigma(p, \varepsilon) \cap I_\sigma(q, \varepsilon)$ y se tiene que

$$\|p - q\| \leq \|p - x\| + \|q - x\| < 2\varepsilon \leq 2\varepsilon_0 \leq 2\frac{\delta}{2} = \delta$$

Concluyéndose entonces la existencia de un s_i con $p, q \in \sigma(U_{s_i})$, pero al ser F inyectiva en $U_{s_i} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, se tiene que $p = q$ lo que es un absurdo.

Finalmente, veamos que $N_\sigma(\varepsilon)$ es entorno abierto de G . Tenemos que F es inyectiva en $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, así como en $(a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Efectivamente, si $(s_1, \varepsilon'), (s_2, \varepsilon'') \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ son tales que $x = \sigma(s_1) + \varepsilon' \vec{n}(s_1) = \sigma(s_2) + \varepsilon'' \vec{n}(s_2)$, se tiene que

$$x \in I_\sigma(p_1, \varepsilon) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon)$$

y, por tanto, $p_1 = p_2$ con lo que $s_1 = s_2$, y $\varepsilon' = \varepsilon''$. Análogamente para el caso $(a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Con esto tenemos que, salvo extremos, F es un homeomorfismo de $(a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ en su imagen, que resulta ser $N_\sigma(\varepsilon)$. Por lo tanto, $N_\sigma(\varepsilon)$ es entorno abierto de σ . □

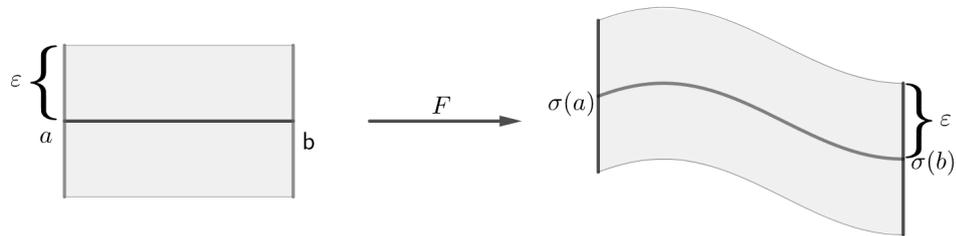


Figura 2.2: Homeomorfismo F

La existencia de los entornos tubulares nos permiten dar una primera cota para el número de componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Lema 2.3. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular y de clase C^2 . Sea $G = \sigma([a, b])$. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tiene como mucho dos componentes conexas, con G la frontera de ambas.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $N_\sigma(\varepsilon)$ es un entorno tubular de σ . Consideramos ahora las dos mitades de $N_\sigma(\varepsilon)$ con G entre ellas.

$$T^+ = \{x \in N_\sigma(\varepsilon) : x = \sigma(s) + \delta \vec{n}(s), \delta > 0\} \quad (2.1)$$

$$T^- = \{x \in N_\sigma(\varepsilon) : x = \sigma(s) + \delta \vec{n}(s), \delta < 0\} \quad (2.2)$$

Entonces, tanto T^+ como T^- son conexas por caminos y por lo tanto, conexas. Sea ahora K una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Entonces, dado que \mathbb{R}^2 es conexo, $\partial K \neq \emptyset$ en \mathbb{R}^2 . Se deduce que $\partial K \subset G$. Si esto no fuera así, existiría un $x \in \partial K, x \notin G$, y como $x \in \mathbb{R}^2 \setminus G$, existe $K_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus G$ la componente conexa que contiene a x . Tenemos dos posibilidades:

- 1) Si $K_0 = K$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap K \neq \emptyset$, y $K, B(x, \varepsilon)$ son conexas por caminos, pero K es el mayor conexo por caminos que contiene a x , luego $B(x, \varepsilon) \subset K$, y es absurdo pues al x estar en la frontera, también debe tener intersección con el complementario de K .
- 2) Si $K_0 \neq K$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap K \neq \emptyset$, $B(x, \varepsilon) \cap K_0 \neq \emptyset$, y los tres son conexas, luego $K \cup B(x, \varepsilon) \cup K_0$ es conexo, lo que es, de nuevo, absurdo.

Consideremos ahora un punto $p \in G$. Entonces existe una bola $B \subset G \cup T^+ \cup T^- = N_\sigma(\varepsilon)$ que contiene a p . B debe tener intersección no vacía con K , de lo contrario, B tendría intersección no vacía tanto con T^+ como con T^- , pero al no tener intersección con K , tampoco intersecarían ni T^+ ni T^- a K . En este supuesto, $N_\sigma(\varepsilon)$ y K serían disjuntos, y no podría darse lo probado anteriormente. Luego B tiene intersección con K , G no tiene intersección con K , y por tanto la intersección debe caer en T^+ o T^- (o ambos). Se tiene entonces que

$$\left\{ \begin{array}{l} T^+ \cap K \neq \emptyset \Rightarrow T^+ \subset K \\ \vee \qquad \qquad \qquad \vee \\ T^- \cap K \neq \emptyset \Rightarrow T^- \subset K \end{array} \right\}$$

Y por tanto, toda bola que contenga a p , que debe de tener intersección con T^+ y T^- , tiene entonces intersección no vacía con K , concluyéndose que $G \subset \partial K$.

Ahora, si $T^+, T^- \subset K$, hay una sola componente. Si $T^+ \subset K$ o $T^- \subset K$, pero no los dos, entonces hay dos componentes. No pueden haber tres componentes, pues en ese caso T^+ o T^- tendrían que estar en dos de ellas a la vez. \square

Con este resultado, solo falta probar que las componentes son exactamente dos. En lo que resta de capítulo, $i_p(\sigma)$ simbolizará el índice de rotación de la

curva σ alrededor del punto p . En el apéndice puede consultarse la definición de índice que manejaremos, así como la definición de la función ϕ que aparecerá a continuación. [A.4](#)

Lema 2.4. *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y sea $G = \sigma([a, b])$. Dada una componente K de $\mathbb{R}^2 \setminus G$, entonces:*

- i) $i_{p_1}(\sigma) = i_{p_2}(\sigma)$, para todo par de puntos $p_1, p_2 \in K$.*
- ii) $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tiene exactamente una componente no acotada K_0 , e $i_p(\sigma) = 0$, para todo $p \in K_0$.*

Demostración. i) Consideramos $\eta : [0, 1] \rightarrow K$ camino que une $\eta(0) = p_1$ con $\eta(1) = p_2$. Podemos definir entonces

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] \times [a, b] &\longrightarrow S^1 \\ \Phi(x, s) &= \frac{\sigma(s) - \eta(x)}{\|\sigma(s) - \eta(x)\|} \end{aligned}$$

Nótese que no hay problemas de definición pues $\eta(x) \in K, \forall x \in [0, 1]$ y $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus G$. Además, como η y σ son continuas, también lo es Φ . Además,

$$\begin{aligned} \Phi(0, s) &= \frac{\sigma(s) - p_1}{\|\sigma(s) - p_1\|} = \phi_{p_1}(s) \\ \Phi(1, s) &= \frac{\sigma(s) - p_2}{\|\sigma(s) - p_2\|} = \phi_{p_2}(s) \end{aligned}$$

Por lo que Φ es una homotopía entre ϕ_{p_1} y ϕ_{p_2} , por lo que sus grados son iguales, y por tanto $i_{p_1}(\sigma) = i_{p_2}(\sigma)$ como queríamos demostrar.

- ii) Para esta segunda parte de la demostración, recordamos que $[a, b]$ es compacto, por lo que $G = \sigma([a, b])$ es compacto en \mathbb{R}^2 , y por tanto es cerrado y acotado. Con esto último, existe $R > 0$ tal que $G \subset B(0, R) = B$. Tenemos entonces que $\mathbb{R}^2 \setminus B$ es conexo, y está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus G$, por lo que debe de existir una única componente K_0 de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tal que $\mathbb{R}^2 \setminus B \subset K_0$, con lo que ya tenemos la primera parte de la afirmación *ii*). Falta ver que $i_p(\sigma) = 0$, para todo $p \in K_0$, lo que se deduce del hecho de que ϕ_p no recorre toda la circunferencia, tal y como se puede apreciar en la figura [2.3](#):

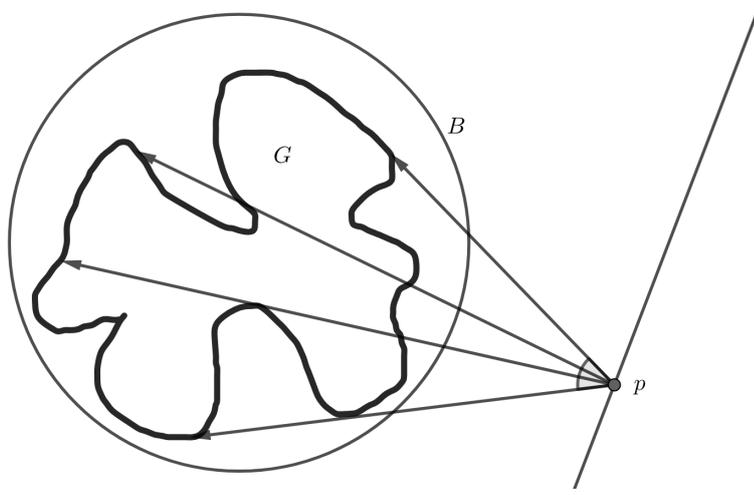


Figura 2.3

□

En estas condiciones, podemos abordar el teorema que da nombre a esta sección, el teorema de la curva de Jordan en su versión para curvas C^2 .

Teorema 2.5 (Teorema de la curva de Jordan para curvas regulares de clase C^2). *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular de Jordan de clase C^2 . Sea $G = \sigma([a, b])$ el soporte de σ . Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tiene exactamente dos componentes con G la frontera común a ambas.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $N_\sigma(\varepsilon)$ es entorno tubular de σ . Sean T^+ y T^- definidas como en (2.1). Hemos probado en el Lema 2.3 que $\mathbb{R}^2 \setminus G$ tiene como mucho dos componentes. Vamos a ver que tiene exactamente dos. Para ello vamos a probar que T^+ y T^- están en componentes distintas. Sean $0 < \delta < \varepsilon$, $s_0 \in (a, b)$, consideramos $p_{\pm\delta} = \sigma(s_0) \pm \delta \vec{n}(s_0)$. Tenemos que $p_\delta \in T^+$ y $p_{-\delta} \in T^-$. Como T^+ , T^- son conexas por caminos, el índice de rotación $i_{p_{\pm\delta}}$ es independiente de δ , y por tanto $\Delta = i_{p_\delta} - i_{p_{-\delta}} \in \mathbb{Z}$ es independiente de δ . Buscamos demostrar que $\Delta \neq 0$. Si asumimos que σ viene parametrizada por el parámetro arco, y hacemos la identificación usual de \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , podemos escribir $\vec{n} = i\dot{\sigma}$. Esta identificación nos permitirá hacer uso de la proposición A.5.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} &= \frac{\dot{\sigma}(s)(\sigma(s) - p_{-\delta}) - \dot{\sigma}(s)(\sigma(s) - p_\delta)}{(\sigma(s) - p_\delta)(\sigma(s) - p_{-\delta})} \\ &= \frac{\dot{\sigma}(s)(p_\delta - p_{-\delta})}{\sigma(s)^2 - \sigma(s)p_{-\delta} - p_\delta\sigma(s) + p_\delta p_{-\delta}} \\ &= \frac{\dot{\sigma}(s)(p_\delta - p_{-\delta})}{\sigma(s)^2 - 2\sigma(s)\sigma(s_0) + \sigma(s_0)^2 + \delta^2\dot{\sigma}(s_0)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2i\delta\sigma(s)\sigma(s_0)}{(\sigma(s) - \sigma(s_0))^2 + \delta^2\dot{\sigma}(s_0)^2}$$

Ahora, por Taylor,

$$\sigma(s) - \sigma(s_0) = (s - s_0)\dot{\sigma}(s_0)(1 + r(s))$$

con $r(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow s_0$. Sustituyendo en la expresión original,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} &= \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} \cdot \frac{(s - s_0)^2 + \delta^2}{(s - s_0)^2(1 + r(s))^2 + \delta^2} \left(1 + \frac{\dot{\sigma}(s) - \dot{\sigma}(s_0)}{\dot{\sigma}(s_0)}\right) \\ &= \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} + R(s) \end{aligned}$$

con $R(s)$ siendo

$$R(s) = \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} \left[u(s) - r(s)(2 + r(s))(1 + u(s)) \frac{(s - s_0)^2}{(s - s_0)^2(1 + r(s))^2 + \delta^2} \right]$$

donde

$$u(s) = \frac{\dot{\sigma}(s) - \dot{\sigma}(s_0)}{\dot{\sigma}(s_0)}$$

y como $\dot{\sigma}$ es de clase C^1 , $u(s)$ tiende a cero cuando s tiende a s_0 . En consecuencia tenemos que $R(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow s_0$. Por tanto, para todo $\eta > 0$, existe un $\lambda > 0$ tal que

$$|R(s)| < \eta \frac{2\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2}, \quad |s - s_0| < \lambda.$$

En particular, tomando $\eta < \frac{1}{8}$, y siendo $\lambda > 0$ el asociado, tenemos,

$$\begin{aligned} \Delta = i_{p_\delta} - i_{p_{-\delta}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{s_0 - \lambda} \left(\frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \right) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 + \lambda}^b \left(\frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \right) ds \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - \lambda}^{s_0 + \lambda} \left(\frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} + R(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Las dos primeras integrales tienden a cero cuando δ tiende a cero. Solo nos preocupa la tercera. Haciendo el cambio de variable $s - s_0 = \delta\xi$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - \lambda}^{s_0 + \lambda} \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\lambda}{\delta}}^{\frac{\lambda}{\delta}} \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi = 1.$$

Por otra parte,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} R(s) ds \right| < \frac{\eta}{\pi} \int_{-\frac{\lambda}{\delta}}^{\frac{\lambda}{\delta}} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi < \eta$$

Tenemos entonces, para un δ suficientemente pequeño, que

$$\begin{aligned} |\Delta - 1| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^{s_0-\lambda} \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{s_0+\lambda}^b \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} ds - 1 \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} R(s) ds \right| \\ &\leq 4\eta < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Y dado que Δ es entero, entonces $\Delta = 1$ y hemos por tanto demostrado que deben existir al menos dos componentes distintas, que junto lo ya demostrado anteriormente, implica lo que queríamos demostrar, la curva divide el plano en exactamente dos componentes. \square

El teorema de Jordan, en su versión más general en el que solo se requiere continuidad, tiene una versión más fuerte que constata el hecho, también intuitivo, de que las curvas de Jordan son topológicamente una circunferencia.

Teorema 2.6 (Teorema de Schönflies). *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan. Entonces $\overline{\text{int}(\sigma)}$ es homeomorfa a un disco cerrado.*

Una demostración de este teorema así como del caso general del teorema de Jordan puede encontrarse en [4].

Nota. El teorema de la curva de Jordan es válido para el plano, pero no así para otras superficies. Un clásico ejemplo de esto se tiene en el toro, tomando como curva una de las circunferencias del anillo. Como se aprecia en la figura 2.4, esta curva no divide al toro en dos componentes, sino en una sola.

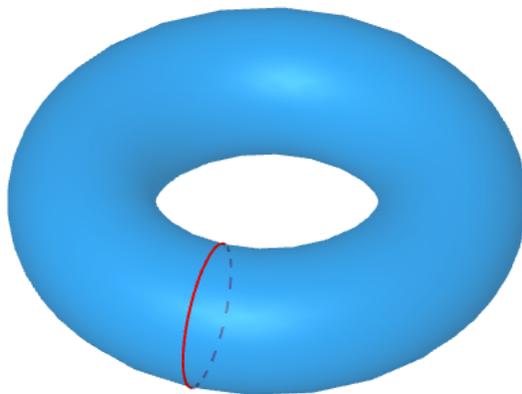


Figura 2.4

Nota. El teorema de la curva de Jordan nos permite dar otra definición (equivalente) de la orientación de una curva. Se dice que la curva está orientada positivamente si se recorre de tal manera que la componente acotada (interior) de la curva queda a la izquierda.

Teorema de rotación de las tangentes

Si consideramos $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada regular, de clase C^2 , podemos ver su vector tangente $\vec{t}(s) = \frac{\dot{\sigma}(s)}{\|\dot{\sigma}(s)\|}$ como una aplicación continua a la circunferencia, de hecho verificando que $\vec{t}(a) = \vec{t}(b)$, por lo que podemos preguntarnos por su grado.

Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, que podemos asumir unitaria. Cambiamos el intervalo de definición de σ por $[0, L]$, $L > 0$ y elegimos tanto el punto en el que comienza como la colocación de los ejes para que que el soporte de σ caiga en la mitad superior del plano, y el vector tangente en $\sigma(0) = \sigma(L) = (0, 0)$ sea horizontal.

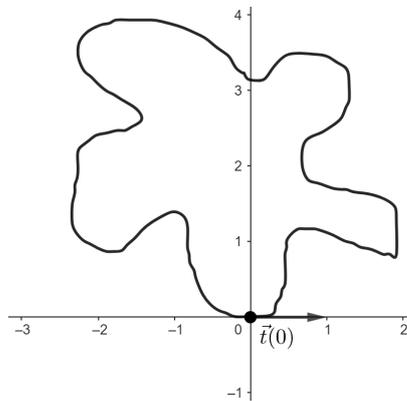


Figura 3.1

Consideramos ahora el ángulo $\theta(s)$ que forma el vector tangente a la curva en cada uno de sus puntos con el vector $\vec{t}(0)$. Si la medición de $\theta(s)$ la hacemos entre 0 y 2π , es posible que $\theta(s)$ no sea una función continua, por eso dejaremos que $\theta(s)$ pueda dar varias vueltas a la circunferencia, acumulando el valor del ángulo, pudiendo entonces tomar valores tanto positivos como negativos. De esta

manera, $\theta(s)$ es una función continua y se tiene que $\vec{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$. Dado que $\vec{t}(0) = \vec{t}(L)$, $\theta(L)$ debe ser múltiplo entero de 2π .

Definición 3.1. Definimos el índice de rotación de una curva $\sigma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada y unitaria, como $i_\sigma = (\theta(L) - \theta(0))/2\pi = \theta(L)/2\pi$.

Esta definición concuerda con la del índice del vector tangente, pues $\theta(s)$ es una elevación de \vec{t} .

Además, si σ es de clase C^2 , podemos derivar su vector tangente y obtenemos que $\vec{t}'(s) = (-\theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s)) = \theta'(s) \vec{n}(s)$, de donde $\theta'(s) = k(s)$. Tenemos aquí otra forma de ver la curvatura. Algunas de las demostraciones del siguiente teorema hacen uso de esta relación, la nuestra en cambio se puede encontrar en [3], producto de una idea de H.Hopf.

Teorema 3.2. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan suave, entonces el índice de rotación de σ es $i_\sigma = \pm 1$.

Demostración. Asumimos σ unitaria y parametrizada como en la construcción anterior. Entonces $i_\sigma = \theta(L)/2\pi$. Definimos la función

$$h : \Delta \rightarrow S^1$$

$$(u, v) \rightarrow \frac{\sigma(v) - \sigma(u)}{\|\sigma(v) - \sigma(u)\|}$$

donde $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq v, 0 \leq v \leq L\}$ es el triángulo de la figura 5.2. Definimos $h(u, u) = \vec{t}(u)$, y $h(0, L) = -\vec{t}(0) = -\vec{t}(L)$. Con estas definiciones h es una función continua, y podemos definir para h una función $\alpha(u, v)$ que mida el ángulo entre $h(u, v)$ y la horizontal, análogamente a como definimos θ .

Tenemos entonces que $h(u, u) = \vec{t}(u)$, y que $\alpha(u, u) = \theta(u)$. Llamando $A = (0, 0)$, $B = (0, L)$, $C = (L, L)$ a los vértices del triángulo, vemos que \vec{t} es un lazo homótopo al que recorre h a lo largo de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} . El problema se convierte entonces en medir la variación total del ángulo a lo largo de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} . A lo largo de \overrightarrow{AB} (figura 5.4) el ángulo abarca media circunferencia, y al recorrer \overrightarrow{BC} (figura 5.5) se abarca la otra mitad, resultando entonces un ángulo de 2π , y por tanto un índice de $i_\sigma = 1$. Si la curva se recorriese en sentido contrario, obtendríamos entonces un índice de $i_\sigma = -1$.

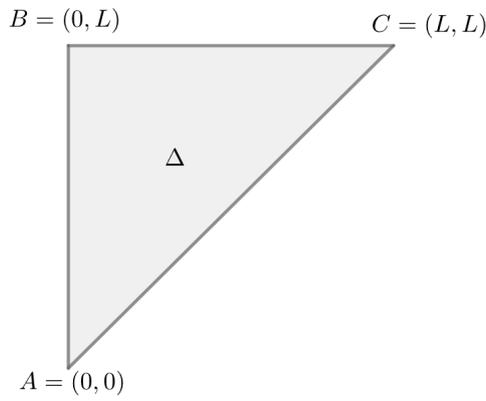


Figura 3.2

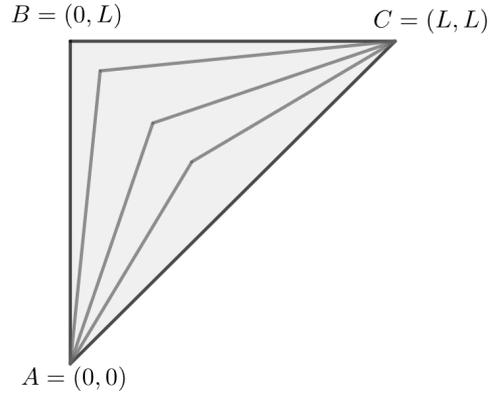


Figura 3.3

□

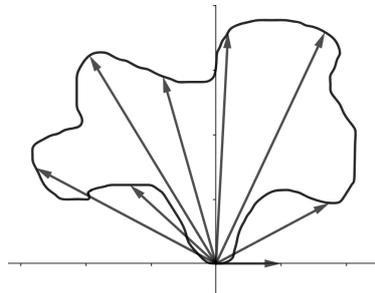


Figura 3.4

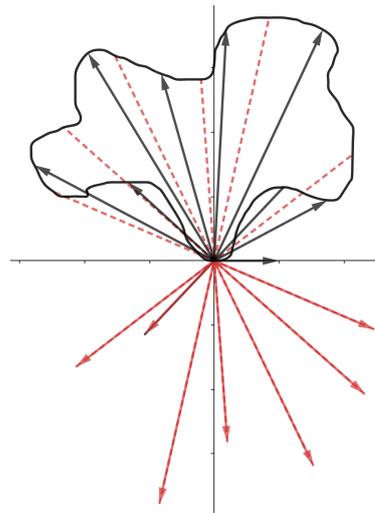


Figura 3.5

Corolario 3.3. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, entonces $\vec{t} : [a, b] \rightarrow S^1$ es sobreyectivo.

Demostración. Inmediata, pues si \vec{t} no fuera sobreyectivo, su grado sería 0, y se acaba de demostrar que es ± 1 .

□

Corolario 3.4. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva de Jordan unitaria, entonces $\int_a^b k(s) ds = \pm 2\pi$

Demostración. Hemos visto ya que $\theta'(s) = k(s)$. Entonces

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \theta'(s) \, ds = \int_a^b k(s) \, ds$$

Por el Teorema 3.2, $\int_a^b k(s) \, ds = \pm 2\pi$, en función de la orientación de la curva. \square

Nota. El teorema de rotación de las tangentes cuenta con una generalización a curvas cerradas, pero no necesariamente simples. Involucra contabilizar el sentido de cruce del vector tangente en las autointersecciones de la curva. Puede encontrarse tanto este teorema como su demostración en [6].

Nota. El teorema de rotación de las tangentes nos da otra forma de definir una orientación para las curvas de Jordan, positivamente si $i_\sigma = 1$, y negativamente si $i_\sigma = -1$.

Teorema de los cuatro vértices

En este capítulo, la noción de vértice de una curva no será la usual, la de un punto en el que la curva pierde su regularidad, sino que vendrá referido a la curvatura de la curva. No cabe confusión, pues se pedirá regularidad y diferenciabilidad al menos de clase C^2 para las curvas de este capítulo.

Definición 4.1. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular de clase C^2 . Sea $G = \sigma([a, b])$. Decimos que un punto $\sigma(s) \in G$ es un vértice de G si $k'(s) = 0$.

Un ejemplo sencillo es el caso de la circunferencia, que al tener curvatura constante tiene infinitos vértices, todos sus puntos. El teorema que da nombre a este capítulo afirma que toda curva de Jordan suave tiene al menos cuatro vértices, y para la demostración se busca relacionar las curvas con las circunferencias que las circunscriben.

Proposición 4.2. Sea G un subconjunto compacto y con más de un punto de \mathbb{R}^2 . Sea C_G la familia de circunferencias en \mathbb{R}^2 tales que sus discos correspondientes contienen a G . Entonces existe la circunferencia $C \in C_G$ única de menor radio a la que nos referiremos como la circunferencia que circunscribe a G .

Nota. Por abuso del lenguaje, durante este capítulo hablaremos casi indistintamente de círculos, circunferencias y discos.

Demostración. Sea

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$F(p) = \max_{x \in G} |x - p|$$

Esta función está bien definida dada la compacidad de G . Además, $F(p) \neq 0$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, de lo contrario, si $F(p) = 0$ entonces tendríamos que $G \subset \{p\}$, pero G no es un conjunto unitario. Por otra parte, sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$|x - q| \leq |x - p| + |p - q| \leq F(p) + |p - q|, \quad \forall x \in G$$

$$|x - p| \leq |x - q| + |p - q| \leq F(q) + |p - q|, \forall x \in C$$

Si tomamos máximo, tenemos

$$F(q) \leq F(p) + |p - q| \Rightarrow F(q) - F(p) \leq |p - q|$$

$$F(p) \leq F(q) + |p - q| \Rightarrow F(p) - F(q) \leq |p - q|$$

Con lo que $|F(p) - F(q)| \leq |p - q|$ de donde concluimos que F es continua. Además, tenemos que si consideramos el disco $C(p, F(p))$ centrado en p y con radio $F(p)$, G está contenido en $C(p, F(p))$, ya que $|x - p| \leq F(p)$, para todo $x \in G$. Tenemos por tanto que $C(p, F(p)) \in C_G$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. No solo eso, sino que $C(p, F(p))$ es el menor disco centrado en p que contiene a G , efectivamente, sea $C = C(p, R)$ con $R > 0$ tal que $G \subset C$. Entonces $\exists x_0 \in G$ tal que $F(p) = |x_0 - p| \leq R$, luego $C(p, F(p)) \subset C$.

Sea ahora $x_0 \in G$ tal que $F(0) = \max_{x \in G} |x| = |x_0|$ y sea $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $|p| \geq 2|x_0|$. Entonces, para cada $x \in G$

$$|p - x| \geq |p| - |x| \geq 2|x_0| - |x_0| = F(0)$$

Tomando máximo, $F(p) \geq F(0)$, para todo $|p| \geq 2|x_0| > 0$. Entonces, al ser F continua, alcanza su mínimo absoluto en algún punto p_0 dentro de la bola centrada en el origen y de radio $2|x_0|$. $C(p_0, F(p_0))$ es por tanto un disco de radio mínimo que contiene a G . Falta ver que es único. En efecto, sean C_1, C_2 dos discos distintos de radio $F(p_0)$ conteniendo a G . Entonces $G \subset C_1 \cap C_2$, y la intersección de dos discos distintos de mismo radio está contenida en un círculo de radio estrictamente menor, lo que nos produce un absurdo con que $F(p_0)$ fuera el radio mínimo.

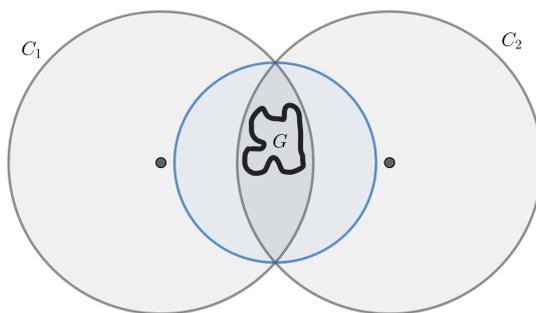


Figura 4.1

□

Ahora que sabemos la existencia de las circunferencias que circunscriben, nos interesa saber de que naturaleza es la relación entre estas y los conjuntos a los que circunscriben.

Proposición 4.3. *Sea G un subconjunto compacto del plano real, con más de un punto y Sea C la circunferencia que lo circunscribe. Entonces G y C se tocan en cada semicircunferencia de C .*

Demostración. Supongamos que el círculo tiene centro en el origen de coordenadas, y radio $R > 0$. Supongamos que no hay intersección entre G y C en el semicírculo superior. Como tanto G como el semicírculo superior son compactos, al no haber intersección, $d(G, C^+) = d > 0$. Entonces existe un círculo con centro en el eje Y de radio menor que contiene a G , lo cual es una contradicción. Este mismo argumento sirve para cualquier otro semicírculo, no solo el superior.

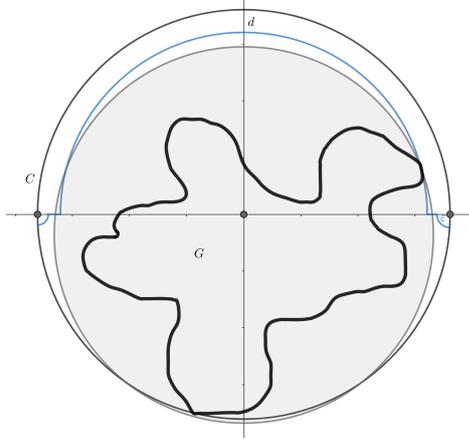


Figura 4.2

□

Corolario 4.4. *Sea G compacto con más de un punto y C el círculo que lo circunscribe como en la proposición 4.3. Entonces $G \cap C$ tiene al menos dos puntos, y si tiene exactamente dos, entonces son antipodales.*

Demostración. Inmediata de la proposición anterior.

□

Necesitamos ahora dos lemas que nos permitirán conocer el comportamiento de la curvatura entre estos puntos en los que ya sabemos que se tocan la curva y la circunferencia que la circunscribe.

Lema 4.5. *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular de clase C^2 , parametrizada por el parámetro arco, con curvatura orientada $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, y sea $G = \sigma([a, b])$. Sea C una circunferencia orientada positivamente con radio $R > 0$, y tal que exista $s_0 \in [a, b]$ tal que $\dot{\sigma}(t_0)$ coincide con el vector tangente a C en $p_0 = \sigma(s_0)$. Entonces:*

- i) Si existe un entorno U de p_0 tal que $U \cap G$ cae dentro del disco cerrado con frontera C , entonces $k(s_0) \geq \frac{1}{R}$.*
- ii) Si existe un entorno U de p_0 tal que $U \cap G$ cae en el complementario del disco abierto con frontera C , entonces $k(s_0) \leq \frac{1}{R}$.*

Demostración. Como el vector tangente a C en p_0 coincide con $\dot{\sigma}(s_0)$, entonces el vector normal de σ es $\vec{n}(s_0) = \frac{x_0 - p_0}{R}$, siendo x_0 el centro de C . Si consideramos ahora la función $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(s) = \|\sigma(s) - x_0\|^2$, tenemos que $h(s_0) = R^2$, y si derivamos, $h'(s) = 2(\sigma(s) - x_0) \cdot \dot{\sigma}(s)$, de donde $h'(s_0) = 0$, y derivando de nuevo, obtenemos $h''(s_0) = 2(1 - k(s_0)R)$. Ahora, como en el caso *i)* s_0 es un máximo de h , aplicando el criterio de la derivada segunda tenemos que $k(s_0) \geq \frac{1}{R}$, mientras que en el caso *ii)* s_0 es un mínimo, y obtenemos $k(s_0) \leq \frac{1}{R}$. \square

Lema 4.6. *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular, orientada positivamente, de clase C^2 , parametrizada por el parámetro arco, con $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la curvatura orientada, y sea $G = \sigma([a, b])$. Sea C la circunferencia que circunscribe a G , con radio $R > 0$. Tomamos $p_1 = \sigma(s_1)$, $p_2 = \sigma(s_2) \in C \cap G$, con $s_1 < s_2$. Entonces o la imagen de $\sigma|_{(s_1, s_2)}$ está contenida en C , o existe un punto $s_0 \in (s_1, s_2)$ con $k(s_0) < \frac{1}{R}$.*

Demostración. Consideramos C orientada positivamente, y con centro en el origen, salvando traslaciones. Considerando $h(s) = \|\sigma(s)\|$, los máximos de h son los puntos que también caen en C . Si derivamos $h'(s) = 2\dot{\sigma}(s)\sigma(s)$, y en los máximos $\dot{\sigma}(s)\sigma(s) = 0$, obteniendo entonces que sus vectores normales coinciden y como ambos están orientados positivamente, $\dot{\sigma}(s)$ coincide con el vector tangente a C en s .

Asumimos ahora que p_1 y p_2 pertenecen a una misma línea vertical l , con p_1 debajo de p_2 . Si esto no fuera así, basta con rotar los ejes. Sea $G_1 = \sigma((s_1, s_2))$. Si G_1 está enteramente contenido en C , hemos terminado. De lo contrario, existirá un punto $q_1 \in G_1$ en el disco abierto con frontera C . Si consideramos ahora la circunferencia que pasa por p_1 , q_1 y p_2 , tiene radio $R' > R$. Trasladamos esta nueva circunferencia hasta que toque a G_1 en un punto $q_0 = \sigma(s_0)$, pero tal que si la trasladásemos más no tocaría a G_1 . Haciendo uso de una función análoga a h es posible ver que la circunferencia trasladada C' es tangente a σ en q_0 , y si consideramos C' orientada positivamente, entonces los vectores tangentes también coinciden. Aplicando ahora el lema anterior, obtenemos $k(s_0) \leq \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}$. \square

Teorema 4.7 (Teorema de los cuatro vértices). *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, regular de clase C^2 , orientada positivamente y parametrizada mediante el parámetro arco y sea $G = \sigma([a, b])$. Entonces σ tiene al menos cuatro vértices.*

Demostración. Sea C la circunferencia que circunscribe a G . Fijamos los ejes de manera que C tenga centro en el origen de coordenadas, con radio $R > 0$ y orientada positivamente. Argumentando como en los lemas anteriores, en $C \cap G$ los vectores tangentes coinciden. Sean ahora $p_0, p_1 \in C \cap G$ cuya existencia tenemos garantizada por el corolario 4.4. Modificando el dominio de σ , podemos suponer que $p_0 = \sigma(a) = \sigma(b)$, $p_1 = \sigma(s_1)$, $s_1 \in (a, b)$. Si $\sigma([a, s_1])$ cae enteramente en C , entonces la curvatura es constante a lo largo de $[a, s_1]$, y por tanto σ tiene infinitos vértices. Si por el contrario esto no es así, combinando ambos lemas, tenemos que $k(a), k(s_1) \geq \frac{1}{R}$, y existe un punto $s_0 \in (a, s_1)$ tal que $k(s_0) < \frac{1}{R}$, por lo que k debe de tener un mínimo s_0 en (a, s_1) , y por tanto un vértice de σ . De manera análoga debe de tener otro mínimo s'_0 , y por tanto otro vértice, en (s_1, b) . Ahora, entre estos dos mínimos, dado que $k(s_1) \geq \frac{1}{R}$, debe existir un máximo en (s_0, s'_0) , y análogamente otro máximo en $(a, s_0) \cup (s'_0, b)$. Tenemos entonces dos mínimos y dos máximos que son los cuatro vértices buscados. \square

Definición 4.8. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular y sea $G = \sigma([a, b])$ el soporte de σ . Decimos que σ es convexa si al considerar la recta tangente a cualquiera de sus puntos, G cae enteramente en uno de los lados de la recta.

Las curvas convexas forman una clase de curvas con numerosas propiedades interesantes, entre las más destacadas, se encuentra el hecho de que su función de curvatura es no negativa. Por eso fue que el teorema de los cuatro vértices fue dado originalmente para este tipo de curvas. Posteriormente, Osserman [7] extendió este teorema para curvas no necesariamente convexas con la idea de circunscribirlas, razón por la que en este capítulo no nos hemos tenido que centrar en las curvas convexas. No obstante, una versión de la demostración para curvas convexas puede encontrarse en [2]

Corolario 4.9. Para que una función $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sea la función curvatura de una curva de Jordan suave, debe tener al menos dos máximos y dos mínimos.

Nota. El corolario anterior puede da lugar a la pregunta de si cualquier función con al menos dos máximos y dos mínimos es la función curvatura de alguna curva de Jordan suave. Esto es conocido como el inverso al Teorema de los cuatro vértices, y fue respondido positivamente por Björn Dahlberg poco antes de morir en 1998, siendo su demostración publicada póstumamente. Se puede acceder a la misma en [9]

Desigualdad isoperimétrica

Aunque los resultados que hemos tratado hasta ahora, así como las técnicas, son modernas, haremos un inciso y retrocederemos hasta la antigüedad clásica.

Dice la leyenda de la fundación de Cartago que la reina Dido, obligada a huir de Tiro tras el asesinato de su esposo, buscó refugio en la costa africana y consiguió que le dejaran tanta tierra como pudiese encerrar con la piel de un buey que ella deshilachó. Si ignoramos la forma de la costa, considerando en cambio una superficie plana y sin bordes, surge el problema de qué forma es la que usó Dido para cubrir la mayor área posible. Este problema, cuya nombre moderno da título a este capítulo, fue resuelto por los griegos antiguos dentro del ámbito que ellos manejaban, el de los polígonos, con esa idea de la circunferencia como la mejor de los polígonos regulares, la de más lados y ángulos que cualquier otro (infinitos en cierto sentido). Aunque sería fascinante pensar en los métodos que habrán usado en la antigüedad para demostrar lo que viene a continuación, nosotros seguiremos con el empleo de técnicas basadas en el análisis.

Teorema 5.1. *Un polígono regular de n lados encierra un área mayor que la de cualquier otro polígono de n lados con el mismo perímetro.*

Demostración. Si consideramos triángulos del mismo perímetro, y con la misma base, el triángulo isósceles cubre la mayor área. Este hecho puede verse considerando la elipse que tiene como focos los extremos de la base, pues el vértice restante para la determinación del triángulo es un punto de la elipse, y tratar de maximizar el área con una base fija, se reduce al problema de maximizar la altura, o de manera equivalente a buscar el punto de distancia máxima al eje definido por la base del triángulo.

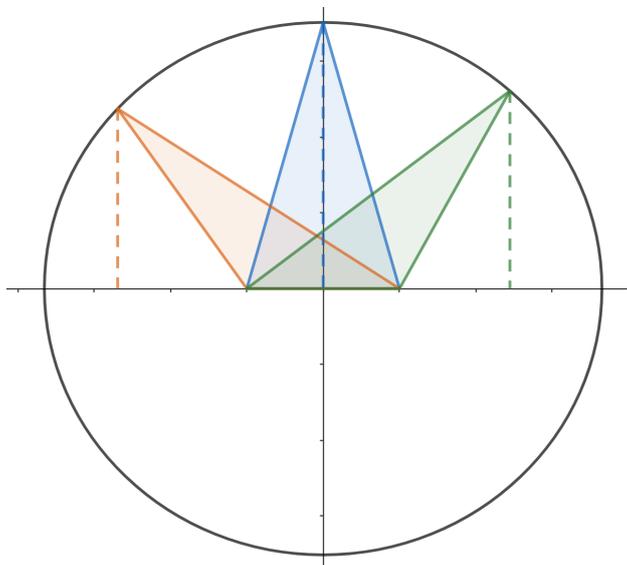


Figura 5.1

Tomando ahora un polígono de n lados, podemos someterlo al proceso de dividirlo en triángulos, y volver cada uno de estos triángulos isósceles, aumentando el área y resultando en un polígono equilátero (Ver figuras).

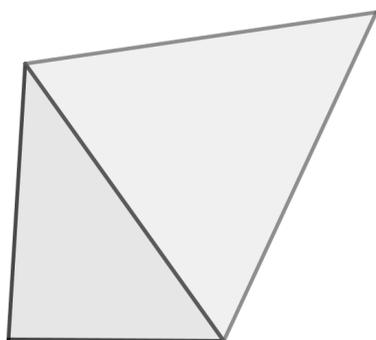


Figura 5.2: Dividimos en triángulos.

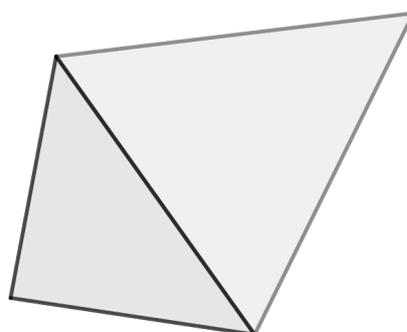


Figura 5.3: Hacemos los triángulos isósceles.

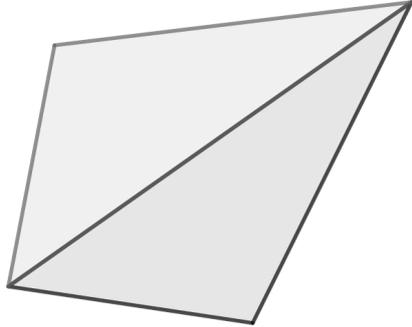


Figura 5.4: Reiteramos.

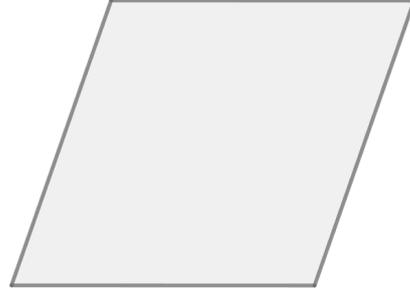


Figura 5.5: Obtenemos un polígono equilátero.

Este proceso, para triángulos, nos dice ya que el triángulo con mayor área es el equilátero, que también es equiangular. Si consideramos ahora polígonos equiláteros con cuatro o más lados, y suponemos que no son equiangulares, basta con dividirlo en triángulos como anteriormente y comprobar que el área de cada uno de estos triángulos se hace máxima cuando los ángulos son los correspondientes a los del polígono de n lados regular.

□

El teorema anterior nos permite centrarnos únicamente en los polígonos regulares, y nos lleva la intuición a que según aumenta el número de lados también aumenta el área encerrada, culminando en el límite con la circunferencia. En este caso, la intuición no nos induce a error, y tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.2. *Entre polígonos regulares de mismo perímetro, el de mayor número de lados encierra un área mayor.*

Demostración. Partiendo de que el área de un polígono regular es

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

donde P es el perímetro y a el apotema, fórmula ya conocida por los griegos y fácilmente demostrable, podemos trazar las líneas que unen el centro del polígono con los vértices de estos, formándose triángulos isósceles con el apotema como la altura de estos triángulos.

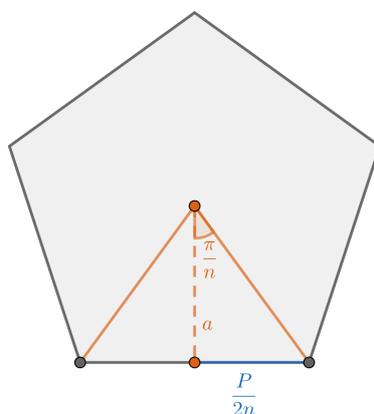


Figura 5.6

Esto nos permite expresar el apotema en términos de razones trigonométricas del ángulo que se forma entre una de estas líneas que unen el centro con los vértices, y el apotema, obteniéndose la siguiente fórmula para el área del polígono:

$$A = \frac{P^2}{4n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Considerando $A(n)$ como una función de n , vemos no solo que es una función estrictamente creciente allá donde tenemos polígonos (de $n = 3$ en adelante), sino que además vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n\pi}{n} = 4\pi$$

por lo que el área de los polígonos regulares converge según vamos aumentando la cantidad de lados a un valor que, fijando el perímetro $P = 2\pi r$ que tendría una circunferencia de radio r , se convierte en πr^2 , nada más y nada menos que el área de la circunferencia. Si acotamos las áreas de los polígonos por el valor límite, obtenemos además que

$$A \leq \frac{P^2}{4\pi} \Rightarrow 4\pi A \leq P^2$$

Esta desigualdad se da no sólo en el ámbito de los polígonos, sino en el mucho más amplio que forman las curvas de Jordan, siendo conocida por el nombre de desigualdad isoperimétrica.

Fue Steiner el que abordó el problema en 1838 con herramientas más modernas, aunque ya con la intuición, correcta, de que la solución era la circunferencia. En ese sentido probó que si había una curva que maximizaba el área,

entonces debía ser la circunferencia. Surgió un problema entonces, Steiner no demostró que tal curva debía existir. Fue posteriormente cuando, demostrando la desigualdad que a nosotros ya nos ha surgido, se completó la demostración de Steiner.

El razonamiento de Steiner se basó en que si había una curva de área máxima, entonces debía ser convexa, de lo contrario, podemos reflejar un trozo de la curva por el que no sea convexa, obteniendo otra curva de mismo perímetro pero de mayor área. Hecho esto, Steiner diseñó un proceso de simetrización que busca conseguir que, fijando cualquier punto, la distancia máxima al resto de puntos de la curva sea la misma. Sabemos que en la circunferencia esto es así, y efectivamente Steiner demostró que siguiendo este proceso se mantiene el perímetro, y se aumenta el área, convergiendo a la circunferencia.

Posteriormente, se han dado numerosas demostraciones de la desigualdad isoperimétrica. La evolución de las demostraciones de la desigualdad isoperimétrica puede consultarse en [5]. La nuestra, tomada de [4] y siguiendo una idea de Peter Lax, se basa en describir el área encerrada por una curva analíticamente haciendo uso del Teorema A.2, para eso pediremos una curva C^2 a trozos, no obstante, el teorema es cierto para una curva de Jordan en general, y una idea de la demostración puede consultarse en [8].

Lema 5.3. *Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular de clase C^2 orientada positivamente. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el interior de σ . Entonces*

$$\text{Área}(D) = \int_a^b \sigma_1 \sigma_2' ds = - \int_a^b \sigma_1' \sigma_2 ds$$

Demostración. Sean $M, N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $M(x, y) = -y$, $N(x, y) = x$. Por el Teorema A.2, tenemos:

$$\text{Área}(D) = \int_D 1 dA = \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \frac{1}{2} \int_a^b = \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_1 \sigma_2' - \sigma_1' \sigma_2) ds \quad (5.1)$$

Si consideramos ahora

$$\int_a^b (\sigma_1 \sigma_2' + \sigma_1' \sigma_2) ds = \int_a^b (\sigma_1 \sigma_2)' ds = \sigma_1(b) \sigma_2(b) - \sigma_1(a) \sigma_2(a) = 0$$

de donde

$$\int_a^b \sigma_1 \sigma_2' ds = - \int_a^b \sigma_1' \sigma_2 ds$$

Regresando a (5.1) tenemos el resultado buscado. □

Teorema 5.4 (Desigualdad isoperimétrica). Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan regular, de clase C^2 a trozos, con longitud L y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el interior de σ . Entonces

$$4\pi \text{Área}(D) \leq L^2$$

La igualdad se alcanza si y solo si σ es una circunferencia.

Demostración. Denotando por σ^r a la imagen de σ por una homotecia de radio $r > 0$, tenemos que σ^r es una curva de longitud rL , y de área $r^2 \text{Área}(D)$. Así, si en lugar de considerar σ consideramos $\sigma^{2\pi/L}$ la desigualdad a probar se transforma en

$$\text{Área}(D) \leq \pi$$

Podemos asumir ahora que σ está parametrizada por el parámetro arco, que tiene por dominio $[0, 2\pi]$ con el punto inicial elegido de tal forma que ni $\sigma(0)$ ni $\sigma(\pi)$ sean vértices y, rotando los ejes adecuadamente, tanto $\sigma(0)$ como $\sigma(\pi)$ pertenecen al eje Y . Por el lema 5.3:

$$\text{Área}(D) = \int_0^{2\pi} \sigma_1 \sigma_2' ds = \int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' ds + \int_\pi^{2\pi} \sigma_1 \sigma_2' ds$$

Buscamos demostrar que cada una de estas integrales es menor o igual que $\pi/2$. De las identidades notables podemos obtener

$$\int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sigma_1^2 + \sigma_2'^2) ds = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \sigma_1^2 - \sigma_1'^2) ds \quad (5.2)$$

Esta última igualdad se debe a que σ está dada por parámetro arco, esto es, $\dot{\sigma}_1^2 + \dot{\sigma}_2^2 = 1$. Como $\sigma_1(0) = \sigma_1(\pi) = 0$, dado que ambos pertenecen al eje Y , podemos considerar σ_1 como una función de la forma

$$\sigma_1(s) = u(s) \operatorname{sen} s$$

con u una función C^1 a trozos. Derivando, $\sigma_1'(s) = u'(s) \operatorname{sen} s + u(s) \cos s$. Sustituyendo en (5.2):

$$\int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - u^2 \operatorname{sen}^2 s + u^2 (\operatorname{sen}^2 s + \cos^2 s) - 2uu' \operatorname{sen} s \cos s) ds$$

Ahora,

$$\int_0^\pi (u^2 (\operatorname{sen}^2 s - \cos^2 s) - 2uu' \operatorname{sen} s \cos s) ds = - \int_0^\pi \frac{d}{ds} (u^2 \operatorname{sen} s \cos s) ds = 0$$

Obtenemos por tanto que

$$\int_0^\pi \sigma_1 \sigma_2' ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - u^2 \operatorname{sen}^2 s) ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 ds = \frac{\pi}{2} \quad (5.3)$$

De manera análoga obtenemos la misma cota para la integral entre π y 2π , logrando así demostrar la desigualdad. Es inmediato comprobar que una circunferencia cumple la igualdad, falta ver que si una curva cumple la igualdad, entonces define una circunferencia, quedando así resuelto el problema de Dido.

Si la igualdad se cumple, se debe cumplir en (5.3), obteniéndose $u' = 0$, y por tanto $\sigma_1(s) = c \sen s$, $c \in \mathbb{R}$. Por otra parte, la igualdad en (5.2), implica $\sigma_1 = \sigma_2'$, con lo que $\sigma_2 = -c \cos s + d$, $d \in \mathbb{R}$, por lo que σ define una circunferencia. \square

Un corolario inmediato es una pregunta inversa a la desigualdad isoperimétrica, que vuelve a tener por solución la circunferencia.

Corolario 5.5. *Fijada el área, el disco es la región interior de una curva de Jordan regular, de clase C^2 a trozos, con perímetro mínimo.*

Demostración. Sea A el área fijada. Por la desigualdad isoperimétrica, $\sqrt{4\pi A} \leq L$. Entonces el disco alcanza el valor de perímetro mínimo, y cualquier otra figura que lo alcance tendría mismo perímetro y misma área, y por la desigualdad isoperimétrica sería otro disco. \square

A

Apéndice

Teorema A.1 (Teorema de la función inversa). Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^k y $P \in \Omega$. Si $|J(F(P))| \neq 0$, entonces existe un entorno $U \subset \Omega$ de P , y un entorno $V \subset \mathbb{R}^n$ de $F(P)$ tal que $F|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo de clase C^k .

Teorema A.2 (Teorema de Green). Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan de clase C^2 orientada positivamente. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el interior de σ . Entonces, si M, N son funciones de clase C^1 en un abierto que contiene a D , tenemos:

$$\int_{\sigma} M dx + N dy = \int \int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

Lema A.3 (Lema del número de Lebesgue). Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea U un recubrimiento abierto de X . Entonces existe un $\delta > 0$ tal que cualquier subconjunto de X con diámetro menor que δ está enteramente contenido en un abierto de U . A ese δ se le conoce como el número de Lebesgue asociado al recubrimiento abierto U .

Haciendo uso de la teoría del grado de un lazo en la circunferencia, es posible definir el índice de rotación de una curva alrededor de un punto como sigue:

Definición A.4. Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada. Sea $G = \sigma([a, b])$, y sea $p \notin G$. Definimos

$$\begin{aligned} \phi_p : [a, b] &\rightarrow S^1 \\ t &\rightarrow \phi_p(t) = \frac{\sigma(t) - p}{\|\sigma(t) - p\|} \end{aligned}$$

ϕ_p es una aplicación continua a la circunferencia, y por tanto podemos definir $i_p(\sigma) = \deg(\phi_p)$, al que denominamos índice de rotación de σ con respecto a p .

Por otra parte, en el ámbito de la variable compleja se obtiene la siguiente manera de expresar el índice, como un caso particular de la fórmula integral de Cauchy. Para una demostración de este hecho, puede consultarse [3]

Proposición A.5. *Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva continua cerrada, de clase C^1 a trozos. Sea $p \notin G = \sigma([a, b])$. Entonces*

$$i_p(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\dot{\sigma}(s)}{\sigma(s) - p} ds$$

Bibliografía

- [1] MONTIEL, Sebastián y ROS, Antonio. *Curves and Surfaces*. 2nd edition. Graduate Studies in Mathematics 69, AMS, 2009.
- [2] MILLMAN, Richard S. y PARKER, George D. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1997.
- [3] DO CARMO, Manfredo P. *Differential Geometry of Curves & Surfaces*. Revised & Updated Second Edition, Dover Publications, 2016.
- [4] ABATE, Marco y TOVENA, Francesca. *Curves and Surfaces*. UNITEXT-La Matematica per il 3+2, Springer, 2012.
- [5] BLÅSJÖ, Viktor. *The Isoperimetric Problem*. The American Mathematical Monthly, 112:6, 2005, pp 526–566. [Monthly 112 June-July 2005]
- [6] WHITNEY, Hassler. *On regular closed curves in the plane*. *Compositio Mathematica*, 4, 1937, pp. 276–284.
- [7] OSSERMAN, Robert. *The Four-or-More Vertex Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol 92, No. 5, 1985, pp. 332–337. Published by Taylor & Francis.
- [8] HALES, Thomas C. *Jordan's Proof of the Jordan Curve Theorem*. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric* 10 (23), 2007, pp. 45–60.
- [9] DAHLBERG, BJÖRN E. J. *The Converse of the Four Vertex Theorem*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol 133, No. 7, 2005, pp 2131–2135.

Global Theory of Plane Curves

Hugo José González García

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101317403@ull.edu.es

Abstract

This dissertation collects some of the classic results of the global theory of plane curves, namely the Jordan curve theorem, the turning tangents theorem, the four vertex theorem and the isoperimetric inequality, in their variations for sufficiently smooth parametrized curves, which allow us to apply the most known results of the differential geometry of space curves, after particularizing them to the plane.

In this way, we establish relations between the local aspects of curves, mainly their tangent and normal versors, as well as their curvature, with topological and geometric properties of the curves they describe. The results are accompanied by a brief discussion of the history that surrounds them, their proofs, and their possible generalizations and extensions.

1. Jordan curve theorem

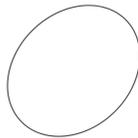


Figure 1: A Jordan curve

ANY CLOSED PLANE curve without self-intersections splits the plane into two regions, the inside of the curve, and the outside of it. This assertion, which could easily be dismissed as being something obvious, is also known as the Jordan Curve Theorem, which proof is not a trivial matter, is the most well-known result in the global theory of plane curves.

The proof given by us is valid for sufficiently smooth curves, which allow us to use results both from differential geometry, and algebraic topology. Some similar obvious theorems, and some surprising results about smooth plane curves are the object of this dissertation.

2. Turning tangents theorem

THE TANGENT VERSOR of a regular plane curve is always defined, and has norm 1. If the curve is of class C^2 , its tangent is both continuous and differentiable. If the curve is also closed, we can effectively view the tangent as a map on the circumference, with same starting and ending points, and so we can wonder about its degree. The turning tangents theorem asserts the degree of the tangent is ± 1 , depending on the orientation of the curve.

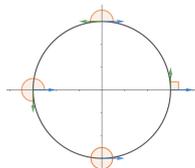


Figure 2: Angle described by the tangent versor at different points of the circumference.

3. Four vertex theorem

THE CURVATURE FUNCTION of a plane curve surprises us with significant properties and interpretations for the curve it describes. One such property comes from it measuring the rate of change of the angle between the tangent versor and the horizontal axis. Another property, the one given by the four vertex theorem, says that the curvature function has at least four vertices, four points where its derivative equals 0.

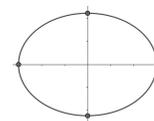


Figure 3: The ellipse. It has four vertices at the points crossed by the axis.

4. Isoperimetric inequality

ANOTHER CLASSIC PROBLEM known since antiquity is that of finding the shape that, with a given perimeter, covers the most area. This problem was resolved by the mathematicians of yore in the context of polygons, giving the answer as the most perfect and mystical polygon, the circumference.

Now expressed in the form of the isoperimetric inequality, the modern version is also answered with the circumference if we extend the possible shapes to all those delimited by a Jordan curve. We cover both the polygonal case, and the smooth case, proving them via calculus techniques.

$$4\pi A \leq L^2$$

The isoperimetric inequality. A represents the area, and L the perimeter. Equality is achieved only by the circumference.

References

- [1] MONTIEL, Sebastián and ROS, Antonio. *Curves and Surfaces*. 2nd edition. Graduate Studies in Mathematics 69, AMS, 2009.
- [2] MILLMAN, Richard S. and PARKER, George D. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1997.
- [3] DO CARMO, Manfredo P. *Differential Geometry of Curves & Surfaces*. Revised & Updated Second Edition, Dover Publications, 2016.
- [4] ABATE, Marco and TOVENA, Francesca. *Curves and Surfaces*. UNITEXT-La Matematica per il 3+2, Springer, 2012.