

Néstor Navarro Rodríguez

*Principios del máximo para ecuaciones
elípticas*

Maximum principles for elliptic equations

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2023

DIRIGIDO POR
Begoña Barrios Barrera

Begoña Barrios Barrera
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mis padres y mis tíos, por levantarme cuando me caía y enderezarme cuando me desviaba del camino. Gracias por enseñarme a ser constante, humilde y sacar lo mejor de mí en todo momento.

A mis amigos, la familia que realmente uno escoge. Les estaré eternamente agradecido por estar ahí y comprenderme como nadie más lo hacía, escucharme y apoyarme. Siempre estaré con ustedes.

A Carolina, por llegar a mi vida y ser ese farol que me ilumina cuando más oscuras veo las cosas. Espero que sigas siéndolo mucho tiempo.

A Inma, por haber despertado en mí esas ganas de aprender matemáticas y disfrutar de ellas. Sin duda no habría estado aquí de no haber sido por ti.

A Begoña, por haber confiado en mí incluso antes que yo mismo. Gracias por la enorme paciencia que has tenido conmigo durante este proceso (incluso con mis vaivenes en los correos electrónicos).

Por último, me gustaría agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado a crecer, mejorar como persona y como estudiante. A todos los libros y películas que me han servido de inspiración para seguir adelante y sobre todo a los numerosos fracasos que he tenido, cada uno me ha servido como enseñanza y ha hecho que sea más fuerte.

Néstor Navarro Rodríguez
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se estudiarán los principios del máximo y sus aplicaciones. Se comenzará desde una perspectiva simple, el caso unidimensional, y se avanzará hacia propiedades más generales. Para ello se utilizarán herramientas como el conocido Lema de Hopf y la propiedad de la Media para demostrar principios del máximo fuertes en diferentes situaciones. Una vez desarrollada la teoría clásica se abordará una versión más refinada, el principio del máximo de Alexandrov con hipótesis menos restrictivas y su aplicación para dominios pequeños. Por último, se analizarán las propiedades de simetría que poseen las soluciones de cierto problema elíptico utilizando estos resultados.

Palabras clave: *Principio del máximo fuerte – Lema de Hopf – Propiedad de la Media – Principio del máximo de Alexandrov – Principio del máximo para dominios pequeños.*

Abstract

In this work, the maximum principles and their applications will be studied. We start from a simple perspective, the one-dimensional case, and we progress towards more general properties. To do this, tools such as the well-known Hopf's Lemma and the Mean Value Property will be used to prove strong maximum principles in different situations. Once the classical theory is developed, a more refined version, Alexandrov's maximum principle with less restrictive hypotheses, will be addressed along with its application to small domains. Finally, the symmetry properties of solutions to a certain elliptic problem using these results will be analyzed.

Keywords: *Strong maximum principle – Hopf's Lemma – Mean Value Property – Alexandrov's maximum principle – Maximum principle for small domains.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	VIII
1. Notaciones y algunos preliminares sobre EDP's	1
2. Principios del máximo en dimensión $n = 1$	5
2.1. Principios del máximo fundamentales	5
2.2. Inclusión de términos de orden cero	8
3. Principios del máximo para el Laplaciano	11
4. Principios del máximo para operadores elípticos de segundo orden generales	16
4.1. Principios del máximo	17
4.1.1. Principio del máximo débil	18
4.1.2. Principio fuerte del máximo	20
4.2. Aplicaciones	23
5. Principio del Máximo de Alexandrov	27
5.1. Notación y resultados preliminares	27
5.2. Principio del máximo de Alexandrov	29
5.3. Principio del máximo para dominios pequeños	32
6. Simetría y propiedades relacionadas a través del principio del máximo	34
Bibliografía	43
Poster	45

Introducción

Los principios del máximo para operadores elípticos han sido y siguen siendo un tema de estudio importante en las matemáticas y, por ende, en la física, con una rica historia de investigación y aplicaciones. Este estudio se remonta a la Guerra Fría, a mediados del siglo XX, cuando matemáticos rusos liderados por Lev Semenovich Pontryagin buscaron una alternativa al tradicional problema del “tiempo mínimo de ascenso”, que es la piedra angular del Cálculo de Variaciones y en el que trabajaron destacados matemáticos como los hermanos Bernoulli, Jacob y Johann, Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi, Weierstrass, Hilbert y Carathéodory, entre otros. Los nombres de todos los miembros de la esquina roja siempre estarán asociados con el principio del máximo, ya que su demostración marcó el nacimiento de un nuevo campo en las matemáticas aplicadas como es el llamado control óptimo. Este campo ha tenido y continúa teniendo un gran impacto en la teoría de la optimización y emocionantes aplicaciones en casi todos los campos de las ciencias.

Además de su interés intrínseco matemático y la belleza de las herramientas necesarias para desarrollar esta teoría asociada a los principios del máximo, la misma es fundamental para obtener múltiples aplicaciones, como puede ser la unicidad de soluciones de una amplia variedad de ecuaciones que modelen fenómenos físicos, como la difusión del calor, la mecánica de fluidos y el electromagnetismo. Esto es, la importancia de los principios del máximo radica en su capacidad para establecer propiedades cualitativas y cuantitativas de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Estos principios permiten comprender el comportamiento de las soluciones, como la existencia o no de máximos y mínimos locales, así como la regularidad y estabilidad de las soluciones además de la ya mencionada unicidad de soluciones.

La estructura de este trabajo será la siguiente:

En el Capítulo 1 se proporcionan notaciones básicas y se presentan conceptos elementales sobre la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales, junto con la definición de una de las ecuaciones más importantes abordadas en esta memoria.

En el Capítulo 2 se establece el concepto del principio del máximo en su forma más simple, enfocándose en espacios de dimensión uno.

En el siguiente capítulo, se toma el operador Laplaciano como ejemplo concreto para aplicar los principios del máximo. Se introducen los conceptos de función armónica, subarmónica y superarmónica y se obtienen las demostraciones fundamentales usando la propiedad de la Media.

En el Capítulo 4, se generalizan estos conceptos al trabajar con operadores elípticos de segundo orden generales usando en ese caso el Lema de Hopf como la herramienta imprescindible para obtener los objetivos planteados.

El Capítulo 5 se dedica a la presentación del principio del máximo de Alexandrov y el principio del máximo para dominios pequeños.

Finalmente, en el Capítulo 6, se usarán dichos principios del máximo generalizados para demostrar la simetría de soluciones de cierto problema de contorno elíptico haciendo uso del método de planos móviles.

Esta estructura organizada del trabajo proporciona una progresión lógica y detallada, abordando diferentes aspectos del principio del máximo, desde su forma más simple hasta sus generalizaciones y aplicaciones específicas.

Notaciones y algunos preliminares sobre EDP's

Como la presente memoria tiene como objeto de estudio las ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) comenzaremos recordando algunos conceptos propios de este campo. De manera imprecisa, una EDP es una ecuación en la que la incógnita es una función de dos o más variables independientes, y tal que en dicha ecuación aparecen derivadas parciales, respecto a las variables independientes, de la función incógnita. Se denomina orden de una EDP al mayor de los órdenes de las derivadas parciales que aparecen en la misma. De manera formal, atendiendo a lo anterior, llamamos ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden a una ecuación de la forma

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0, \quad (1.1)$$

donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n+1+n^2} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}$, x_1, \dots, x_n son las variables independientes y $u = u(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ es la función incógnita suficientemente regular ($u \in C^2$).

A lo largo de toda la redacción de este trabajo consideraremos que Ω es un conjunto abierto, acotado y conexo. Para simplificar la notación anterior, denotamos

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad u = u(x), \quad \nabla u := Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

el denominado gradiente, y

$$D^2 u := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right),$$

el Hessiano, pudiendo así escribir la EDP (1.1) de manera unificada como

$$F(x, u, Du, D^2 u) = 0.$$

En dimensión dos, una EDP lineal de segundo orden con coeficientes variables es una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x \\ + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si definimos la cantidad

$$\mathbf{D}(x, y) := (b^2 - ac)(x, y),$$

podemos establecer la siguiente clasificación de las ecuaciones de tipo (1.2).

1. Si $\mathbf{D}(x, y) > 0$, la ecuación es hiperbólica,
2. si $\mathbf{D}(x, y) < 0$, la ecuación es elíptica,
3. si $\mathbf{D}(x, y) = 0$, la ecuación es parabólica.

Ejemplo 1.1 *La ecuación de Tricomi*

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0,$$

es decir, $a(x, y) = y$, $b = 0$, $c = 1$. Se tiene que en el eje OX es de tipo parabólico, pues $y = 0$ y por tanto $\mathbf{D}(x, y) = y = 0$. En el semiplano superior la EDP es de tipo hiperbólica, pues $\mathbf{D}(x, y) > 0$ y en el semiplano inferior es elíptica, ya que $\mathbf{D}(x, y) < 0$.

Como comprobar el criterio de clasificación anteriormente explicado puede ser complicado, es útil recordar que existen cambios de variable que transforman las ecuaciones del tipo (1.2) a otras con una forma más simplificada, que conocemos como la forma canónica, en la que algunos coeficientes de las derivadas de segundo orden son cero. Dichos cambios de variable no alteran la naturaleza de la EDP original. Dependiendo de dicha naturaleza su forma canónica asociada será la que viene dada en los siguientes

Teorema 1.1 (Forma canónica de una EDP de tipo hiperbólico) *Sean la ecuación (1.2) de tipo hiperbólico en una región Ω del plano y el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces, existe un cambio de variable $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ en un abierto del punto (x_0, y_0) tal que la ecuación (1.2) la podemos llevar mediante el cambio (ξ, η) a la siguiente ecuación*

$$w_{\xi\eta} + 2D(\xi, \eta)w_{\xi} + 2E(\xi, \eta)w_{\eta} + F(\xi, \eta)w = G(\xi, \eta).$$

Teorema 1.2 (Forma canónica de una EDP de tipo parabólico) *Sean la ecuación (1.2) de tipo parabólico en una región Ω del plano y el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces, existe un cambio de variable $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ en un abierto del punto*

(x_0, y_0) tal que la ecuación (1.2) la podemos llevar mediante el cambio (ξ, η) a la siguiente ecuación

$$w_{\xi\xi} + 2D(\xi, \eta)w_{\xi} + 2E(\xi\eta)w_{\eta} + F(\xi, \eta)w = G(\xi, \eta).$$

Teorema 1.3 (Forma canónica de una EDP de tipo elíptico) *Sean la ecuación (1.2) de tipo elíptico en una región Ω del plano y el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces, existe un cambio de variable $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ en un abierto del punto (x_0, y_0) tal que la ecuación (1.2) la podemos llevar mediante el cambio (ξ, η) a la siguiente ecuación*

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + 2D(\xi, \eta)w_{\xi} + 2E(\xi\eta)w_{\eta} + F(\xi, \eta)w = G(\xi, \eta).$$

Realizando ciertos cambios de variable, las ecuaciones canónicas dadas en los teoremas anteriores pueden transformarse en los ejemplos canónicos de EDP's de segundo orden lineales hiperbólico, parabólico y elíptico como son, respectivamente, la ecuación de ondas

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

la del calor

$$u_t - K u_{xx} = 0, \quad 0 < K < \infty, \quad (1.4)$$

y la ecuación de Laplace que merece una mención especial en este trabajo. En efecto, como el título de esta memoria indica, de las anteriores mencionadas, nos centraremos en las ecuaciones elípticas. Entre las más importantes de todas ellas indudablemente es la *ecuación de Laplace*, que es la más sencilla de las que involucra al operador Laplaciano, ejemplo canónico de operador diferencial elíptico de segundo orden, que está presente en la mayoría de las ecuaciones de la física matemática como, por ejemplo, las que aparecen en la electrostática y en la mecánica cuántica. Este operador se define mediante la siguiente

Definición 1.1 *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un dominio y $u \in C^2(\Omega)$. El Laplaciano de u en Ω , que denotamos como Δu , es la función*

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x), \quad x \in \Omega.$$

La célebre ecuación de Laplace, en \mathbb{R}^n , es la dada por

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

(que en dos dimensiones corresponde con $u_{tt} + u_{xx} = 0$, compárese con las mencionadas ecuaciones (1.3) y (1.4)). En el Capítulo 3 nos centraremos en la

ecuación (1.5) y en otros operadores elípticos generales en capítulos posteriores.

Notación: Denotaremos a lo largo de esta redacción

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}, \quad r > 0,$$

como la bola de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio r . Además, si $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ y $\partial B(0, 1) = \mathbb{S}^{n-1}$ es la superficie de la esfera unidad (respecto de la norma euclídea) de \mathbb{R}^n , escribiremos

$$|\partial B(0, 1)| =: w_{n-1},$$

y

$$|B(0, 1)| =: w_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}. \quad (1.6)$$

De lo anterior se deduce claramente que

$$|B(z, R)| = R^n w_n, \quad (1.7)$$

y

$$|\partial B(z, R)| = n w_n R^{n-1} = R^{n-1} w_{n-1},$$

donde hemos usado que $w_{n-1} = n w_n$.

Principios del máximo en dimensión $n = 1$

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, el principio del máximo es una de las herramientas más útiles en el estudio de las ecuaciones diferenciales debido a que nos permite obtener información de la solución de una ecuación diferencial sin conocerla explícitamente; por ejemplo, obtener la unicidad de estas soluciones y obtener a priori cotas o aproximaciones de soluciones. Este principio no es más que la generalización del siguiente hecho elemental del cálculo: Dada cualquier función u que satisface la desigualdad $-u'' \leq 0$ sobre un intervalo (a, b) alcanza su valor máximo en los extremos del intervalo. De forma más general, diremos que una función u cumple el principio del máximo si ésta satisface una desigualdad diferencial en un dominio Ω y alcanza su máximo en su frontera $\partial\Omega$.

2.1. Principios del máximo fundamentales

En primer lugar recordaremos la siguiente propiedad fundamental

Propiedad 2.1.1 *Sea $u \in C^2(a, b)$.*

1. *Si u tiene un máximo local en un punto $c \in (a, b)$, entonces:*

$$u'(c) = 0 \quad y \quad u''(c) \leq 0.$$

2. *Si u está definida en $[a, b]$ y en a hay un máximo local, entonces $u'(a) \leq 0$.*
3. *Si u está definida en $[a, b]$ y en b hay un máximo local, entonces $u'(b) \geq 0$.*

Sea ahora $u \in C^2(a, b)$. Definimos

$$L[u] := -u'' + g(x)u' < 0, \tag{2.1}$$

para cierta función g . Atendiendo al resultado anterior se tiene

Propiedad 2.1.2 *Supongamos que $u(x) \in C^2(a, b)$ satisface la desigualdad diferencial anterior donde $g(x)$ es una función acotada. Entonces $u(x)$ no puede alcanzar su valor máximo en un punto interior del intervalo $[a, b]$. Esto es, si (2.1) se cumple entonces la función u alcanza su máximo o bien en $x = a$ o bien en $x = b$.*

Podemos enunciar ahora el primer teorema relativo al operador L .

Teorema 2.1.1 (Lema de Hopf) *Supongamos que $u(x)$ es una función no constante tal que $L[u] \leq 0$ en (a, b) y tiene derivadas laterales en a y en b . Supongamos además que g es una función acotada en cada subintervalo cerrado de (a, b) . Entonces*

1. *Si el máximo de u se alcanza en un punto $x = a$ y g está acotada a la izquierda de $x = a$, entonces $u'(a) < 0$.*
2. *Si el máximo de u se alcanza en un punto $x = b$ y g está acotada a la derecha de $x = b$, entonces $u'(b) > 0$.*

Demostración. Sea $M = u(a)$ y $u(x) \leq M$, para $a \leq x \leq b$ y que además existe un punto $d \in (a, b)$ para el cual $u(d) < M$. Sea z la función auxiliar definida de la siguiente manera

$$z(x) = (x + c)^\alpha,$$

con $\alpha > 0$ y c constantes a determinar. Nuestro objetivo será en primer lugar elegir un α tal que $L[z] < 0$, es decir

$$L[z] = -z'' + g(x)z' = -\alpha(\alpha - 1)(x + c)^{\alpha-2} + g(x)\alpha(x + c)^{\alpha-1} < 0.$$

Tomando

$$\alpha > 1 + g(x)(x + c),$$

que siempre es posible porque $g(x)$ es acotada en cada subintervalo cerrado de (a, b) , se obtiene la desigualdad buscada. Definimos ahora la función auxiliar

$$w(x) = u(x) + \epsilon z(x),$$

con $\epsilon > 0$ otra constante que determinaremos a continuación. Observamos que por la elección de α anteriormente realizada y la linealidad del operador L llegamos a que $L[w] \equiv L[u] + \epsilon L[z] < 0$. Por tanto, por la *Propiedad 2.1.2* se sigue que el máximo de la función w se alcanza en a o en d . Observamos que podemos elegir ϵ tal que

$$w(a) = u(a) + \epsilon z(a) > u(d) + \epsilon z(d) = w(d).$$

En efecto, como $u(a) = M$ basta tomar

$$0 < \epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Por tanto, como $w(a)$ es el máximo en el intervalo $[a, d]$, por la *Propiedad 2.1.1* sabemos que

$$w'(a) = u'(a) + \epsilon z'(a) \leq 0.$$

La anterior desigualdad nos permitiría concluir si garantizamos que $z'(a) > 0$. Para ello basta observar que

$$z'(a) = \alpha(a + c)^{\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow a + c > 0.$$

Esto es, escogiendo por ejemplo $c = -a + 1$ podemos concluir que

$$u'(a) < 0,$$

tal y como queríamos demostrar.

Si el máximo ocurre en $x = b$, se demuestra de manera similar. \square

Teorema 2.1.2 (Principio del Máximo en una dimensión) *Supongamos que u satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv -u'' + g(x)u' \leq 0, \quad \text{para } a < x < b,$$

donde g es una función acotada. Si el máximo M de la función u se alcanza en un punto interior c de (a, b) , entonces u es constante, es decir, $u \equiv M$.

Demostración. Es una consecuencia directa del teorema anterior. Supongamos que u es una función no constante y que toma su máximo M en un punto $c \in (a, b)$. Aplicando el apartado 1 del *Teorema 2.1.1* al intervalo (c, b) tenemos que $u'(c) < 0$.

De igual forma, aplicando el apartado 2 del mismo teorema al intervalo (a, c) obtenemos que $u'(c) > 0$ obteniendo así una contradicción. Por lo tanto, la función u no puede alcanzar su máximo en un punto interior del intervalo (a, b) . \square

Teorema 2.1.3 (Principio del Mínimo en una dimensión) *Supongamos que u satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \geq 0, \quad \text{en } (a, b),$$

donde g es una función acotada. Si el mínimo m de la función u se alcanza en un punto interior c de (a, b) , entonces u es constante, es decir, $u \equiv m$.

Demostración. Basta con aplicar el Teorema 2.1.1 a la función $-u$. \square

Nota 2.1.1 En los teoremas anteriores es necesario que la función $g(x)$ sea acotada pues si, por ejemplo tomamos el siguiente problema

$$u'' - \cot gx \cdot u' = 0$$

en el intervalo $(-1, 1)$, cuya solución está dada por $u = \cos x$. Vemos que a pesar de que satisface una desigualdad diferencial del tipo $Lu \leq 0$ en $(-1, 1)$, el máximo de la función $u = \cos x$ se alcanza en $x = 0$, lo que contradice el Teorema 2.1.2. El mismo problema ocurre para el Teorema 2.1.1 sobre el intervalo $[0, 1]$, ya que $u'(0) = 0$.

2.2. Inclusión de términos de orden cero

A continuación, definiremos el operador diferencial de segundo orden de manera más general que incluye términos de orden cero, esto es,

$$(L + h)[u] = -u'' + g(x)u' + h(x)u. \quad (2.2)$$

La presencia del término h implica que el principio del máximo es falso en general para $L + h$. Usemos por ejemplo la función $u = \sin x$. Tomando $h(x) = -1$ tenemos que cumple que

$$-u'' - u = 0, \quad \text{en } (0, \pi).$$

Observamos que u alcanza el máximo en un punto interior $x = \frac{\pi}{2}$ y, sin embargo, no es constante.

Supondremos entonces para demostrar nuestros resultados que $h \geq 0$ en (a, b) y que h es una función acotada. Se cumple en primer lugar el análogo a la Propiedad 2.1.2 para el operador $L + h$. Es decir, se tiene la siguiente

Propiedad 2.2.1 Supongamos que $u \in C^2(a, b)$ cumple

$$(L + h)[u] < 0 \quad \text{en } (a, b),$$

donde $h \geq 0$ es una función acotada. Entonces u no puede alcanzar máximos locales en $c \in (a, b)$ tales que $u(c) \geq 0$.

Demostración. Supongamos que en el punto $c \in (a, b)$ hay un máximo local. Como

$$-u''(c) + g(x)u'(c) + h(x)u(c) < 0,$$

y $u'(c) = 0$, es claro que

$$u''(c) > h(x)u(c) \geq 0,$$

dado que $u(c) \geq 0$. Luego

$$u''(c) > 0,$$

obteniendo así a una contradicción con el hecho de que en $x = c$ la función tiene una máximo local (ver *Propiedad 2.1.1*). \square

Al igual que ocurría en el caso del operador L ahora podemos demostrar el siguiente

Teorema 2.2.1 (Lema de Hopf con términos de orden cero) *Supongamos que $u = u(x)$ es una función no constante la cual satisface la desigualdad diferencial (2.2) y tiene derivadas laterales en a y en b , y supongamos además que g, h son funciones acotadas en cada subintervalo cerrado de (a, b) , con $h(x) \geq 0$.*

1. *Si u tiene un máximo no negativo en a entonces $u'(a) < 0$.*
2. *Si u tiene un máximo no negativo en b entonces $u'(b) > 0$.*

Demostración. Usaremos ideas muy similares a la utilizadas en el *Teorema 2.1.1*.

Sea $u(a) = M > 0$ y $u(x) \leq M$, para $a \leq x \leq b$ y que además existe un punto $d \in (a, b)$ para el cual $u(d) < M$. Sea z la función auxiliar definida de la siguiente manera

$$z(x) = (x - a + 1)^\alpha, \quad \text{con } \alpha > 0.$$

Como sabemos que g y h son funciones acotadas, podemos elegir $\alpha > 0$ suficientemente grande de manera que $(L + h)[z] < 0$ para $a \leq x \leq d$. Observamos que de la misma forma que en el *Teorema 2.1.1* podemos escoger α porque $g(x)$ y $h(x)$ son acotadas en cada subintervalo de (a, b) . Además, dada la función definida por

$$w(x) := u(x) + \epsilon z(x),$$

donde ϵ es una constante que satisface la desigualdad

$$0 < \epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)},$$

por linealidad tenemos que $(L + h)[w] < 0$ para $a \leq x \leq d$ y, por la *Propiedad 2.2* y la elección de $\epsilon > 0$, sabemos que el máximo de la función se alcanza en a . De esta forma, la derivada por la derecha de a de la función w debe ser no positiva. Esto es

$$w'(a) = u'(a) + \epsilon z'(a) \leq 0.$$

Usando ahora que $z'(a) = \alpha > 0$ concluimos

$$u'(a) < 0,$$

tal y como queríamos demostrar.

Si el máximo ocurre en $x = b$, se demuestra de manera similar. \square

Teorema 2.2.2 (Principio del Máximo con términos de orden cero) *Sea u una función que satisface la desigualdad diferencial $(L + h)[u] \leq 0$ en el intervalo (a, b) con $h \geq 0$, g y h acotadas. Si u alcanza un máximo no negativo en un punto interior al intervalo (a, b) , entonces u es constante.*

Se sigue utilizando las ideas de la demostración del *Teorema 2.2.1*.

Nota 2.2.1 *La condición de signo $h \geq 0$ puede relajarse asumiendo otras hipótesis como veremos en el Capítulo 3 en dimensión $n \geq 1$ general.*

Principios del máximo para el Laplaciano

Una función armónica es aquella que satisface la ecuación de Laplace dada en (1.5) en todo su dominio, mientras que una función subarmónica (superarmónica) cumple una desigualdad débil de la ecuación de Laplace (desigualdad débil inversa). De manera formal este tipo de funciones atienden a la siguiente

Definición 3.1 a) Diremos que u es una función armónica en Ω si satisface

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.1)$$

b) Diremos que u es una función subarmónica en Ω si cumple

$$-\Delta u(x) \leq 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.2)$$

c) Diremos que u es una función superarmónica en Ω si satisface

$$-\Delta u(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.3)$$

El principio del máximo que veremos en este capítulo establece propiedades importantes para este tipo de funciones en dominios acotados y es una herramienta clave para comprender su comportamiento y regularidad.

A pesar de que el principio del máximo, objetivo principal de esta sección, se puede demostrar de igual forma que en la sección anterior (utilizando el Lema de Hopf), en este apartado utilizaremos la denominada *propiedad de la Media* para ello. Dicha propiedad afirma que en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si u es armónica entonces $u(x)$ es igual tanto al promedio de u sobre la esfera $\partial B(x, R)$ como al promedio de u sobre toda la bola $B(x, R)$, siempre que $B(x, R) \subset \Omega$. Para ello serán de utilidad las siguientes fórmulas que generalizan la integración por partes en varias variables y que recordaremos a continuación mediante la siguiente

Proposición 3.1 (Fórmulas de Green) Sean $u, v \in C^2(\bar{U})$. Entonces

$$1) \int_U \Delta u \, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma,$$

$$II) \int_U \nabla v \cdot \nabla u \, dx = - \int_U u \Delta v \, dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, d\sigma,$$

$$III) \int_U u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

Demostración. Recordamos en primer lugar la expresión para la integración por partes en dimensión n . Para ello tomamos $u, v \in C^2(\bar{U})$. Se tiene que

$$\int_U u_{x_i} v \, dx = - \int_U u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial U} u v \nu^i \, d\sigma, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Usando (3.4) con u_{x_i} en lugar de u , y $v = 1$ observamos que

$$\int_U u_{x_i x_i} \, dx = \int_{\partial U} u_{x_i} \nu^i \, d\sigma,$$

de donde sumando en $i = 1, \dots, n$ tenemos I).

Para obtener II), empleamos de nuevo (3.4), sustituyendo v_{x_i} por v . Escribiendo II) reemplazando u por v y restando ambas ecuaciones obtenemos III). \square

Introducimos ahora el siguiente teorema que será, como hemos comentado antes, el fundamental para demostrar el principio del máximo para el Laplaciano.

Teorema 3.1 (Propiedad de la Media para la ecuación de Laplace) *Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función dada. Si u es armónica en Ω , entonces*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, R)} u(y) d\sigma(y).$$

Demostración. Observamos en primer lugar que

$$\phi(R) := \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, R)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + Rz) d\sigma(z).$$

Entonces

$$\phi'(R) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + Rz) \cdot z \, d\sigma(z),$$

de donde, deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\phi'(R) = \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, R)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{R} \, d\sigma(y).$$

Como el dominio de integración es $\partial B(x, R)$, $\nu(y) = \frac{y-x}{R}$ es el vector normal unitario que apunta hacia fuera de $\partial B(x, R)$ en el punto y . Por tanto

$$\phi'(R) = \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, R)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(y),$$

que, por la *Proposición 3.1 I)* resulta

$$\begin{aligned}\phi'(R) &= \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{B(x, R)} \Delta u(y) dy \\ &= \frac{1}{|B(x, R)|} \cdot \frac{R}{n} \int_{B(x, R)} \Delta u(y) dy = 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde hemos usado una vez más que $w_{n-1} = nw_n$ donde w_n fue definido en (1.6). De lo anterior se deduce que ϕ es una función constante, y entonces

$$\phi(R) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B(t, R)|} \int_{\partial B(t, R)} u(y) d\sigma(y).\tag{3.6}$$

Para concluir veamos que el límite anterior es igual a $u(x)$. Efectivamente, tomando

$$M_t = \max\{u(x) : x \in \partial B(x, t)\},$$

y

$$m_t = \min\{u(x) : x \in \partial B(x, t)\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} m_t d\sigma(y) &\leq \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} u(y) d\sigma(y) \\ &\leq \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} M_t d\sigma(y),\end{aligned}$$

de donde

$$m_t \leq \frac{1}{|\partial B(x, t)|} \int_{\partial B(x, t)} u(y) d\sigma(y) \leq M_t.\tag{3.7}$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} m_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} M_t = u(x)$, de (3.6) y de (3.7) obtenemos que $\phi(R) = u(x)$ tal y como queríamos demostrar. \square

Varios resultados directos del teorema anterior son los siguientes

Corolario 3.1 *Si u es una función armónica en Ω , entonces para cada $x \in \Omega$ y cada $R > 0$ tales que $\bar{B}(x, R) \subset \Omega$ se tiene que*

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, R)|} \int_{B(x, R)} u(y) dy.$$

Demostración. Si $x \in \Omega$ y $R > 0$ son tales que $\bar{B}(x, R) \subset \Omega$, entonces, como u es armónica en Ω , por el *Teorema 3.1* sabemos que para todo $r \in (0, R]$ se tiene que $u(x) = \phi(r)$. Esto es

$$nw_n r^{n-1} = |\partial B(x, r)| u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y), \quad r \in (0, R],$$

de donde, integrando en $[0, R]$ se sigue que

$$w_n R^n = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y) \right) dr,$$

llegando al resultado deseado. \square

A partir del resultado anterior se obtienen los siguientes

Corolario 3.2 *Sea $u(x) \in C^2(\Omega)$ una función subarmónica en Ω . Entonces*

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, R)} u d\sigma.$$

Demostración. Siguiendo la prueba del *Teorema 3.1*, como u es subarmónica, de (3.5) se tiene que

$$\phi'(R) \geq 0,$$

por lo que ϕ es monótona creciente en R . Es decir

$$\phi(R) \geq \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, t)} u(y) d\sigma(y).$$

Se concluye por tanto razonando de manera análoga al final de la demostración de la propiedad de la Media. \square

Corolario 3.3 *Sea $u(x) \in C^2(\Omega)$ una función superarmónica en Ω . Entonces*

$$u(x) \geq \frac{1}{|\partial B(x, R)|} \int_{\partial B(x, R)} u d\sigma.$$

Demostración. Se sigue de manera análoga al corolario anterior. \square

Podemos obtener ahora el principio del máximo fuerte

Teorema 3.2 (Principio del máximo fuerte) *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ subarmónica en Ω . Si Ω es un abierto conexo y existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u,$$

entonces u es constante en Ω .

Demostración. Haremos la demostración usando que, como Ω es conexo no puede expresarse como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. En efecto, supongamos que existe un punto $x_0 \in \Omega$ con $u(x_0) = M$, siendo $M := \max_{\Omega} u$.

Por tanto el conjunto $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ es no vacío.

Además, Ω_1 es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . En efecto, si $y \in \Omega_1$, tomamos $R > 0$ tal que $\bar{B}(y, R) \subset \Omega$, de donde, por el *Teorema 3.1*, se tiene

$$M = u(y) \leq \frac{1}{|\partial B(y, r)|} \int_{\partial B(y, r)} u d\sigma \leq M,$$

es decir

$$0 = u(y) - M \leq \frac{1}{|\partial B(y, r)|} \int_{\partial B(y, r)} (u - M) d\sigma \leq 0,$$

para todo $r \in (0, R]$. Esto último implica que $u - M$ es idénticamente nula en $\partial B(y, r)$ cualquiera que sea $r \in (0, R]$, es decir, $\bar{B}(y, R) \subset \Omega_1$.

Como por otro lado el conjunto $\Omega_2 = \{x \in \Omega; u(x) < M\}$ es abierto, y claramente $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, usando que Ω es conexo, concluimos que necesariamente $\emptyset \neq \Omega_1 = \Omega$. Esto es, si existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$, entonces $u(x) = M$ para todo $x \in \Omega$. \square

Principios del máximo para operadores elípticos de segundo orden generales

En este capítulo investigaremos principios del máximo para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden uniformemente elípticas, que son una generalización de la ecuación de Laplace estudiada en el capítulo anterior.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función regular. Definimos al operador diferencial parcial de segundo orden lineal L como

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad (4.1)$$

para ciertos coeficientes a^{ij}, b^i, c , $i, j = 1, \dots, n$, acotados. Además, de ahora en adelante asumiremos la condición de simetría

$$a^{ij} = a^{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Definiremos a continuación los conceptos de operador elíptico y uniformemente elíptico.

Definición 4.1 a) *El operador diferencial parcial de segundo orden L dado en (4.1) se dice que es elíptico si para casi todo punto $x \in \Omega$ existe una función $\theta(x) > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta(x)|\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

b) *El operador diferencial parcial de segundo orden L dado en (4.1) se dice que es uniformemente elíptico si existe una constante $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

para casi todo punto $x \in \Omega$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Elipticidad por lo tanto significa que para cada punto $x \in \Omega$, la matriz simétrica $\mathbf{A}(x) := ((a^{ij}(x)))$ de orden $n \times n$ es definida positiva ya que

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j = \xi\mathbf{A}(x)\xi^T = \langle \xi, \mathbf{A}(x)\xi^T \rangle, \quad (4.2)$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, cumple que $\lambda_0 \geq \theta(x) > 0$ para cualquier autovalor λ_0 , ya que

$$\langle w, \mathbf{A}(x)w \rangle = \lambda_0|w|^2 \quad \text{y} \quad \langle w, \mathbf{A}(x)w \rangle \geq \theta(x)|w|^2,$$

con $w \in \mathbb{R}^n$ autovector asociado a λ_0 .

Notamos además que la condición de uniformemente elíptico implica que $a^{ii} \geq \theta$, $i = 1, \dots, n$, $x \in \Omega$. En efecto, tomando $\xi = e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ en (4.2) llegamos a que

$$a^{ii} \geq \theta > 0. \quad (4.3)$$

Los operadores elípticos dados en (4.1) son una generalización del operador Laplaciano que se obtiene cuando $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i = 0$ y $c = 0$, con δ_{ij} la función Delta de Kronecker.

Interpretación física. Como hemos visto la EDP elíptica de segundo orden generaliza la ecuación de Laplace vista en (1.5). Generalmente en aplicaciones, u representa la densidad de cierta cantidad, como por ejemplo, la de una concentración química, en equilibrio dentro de una región Ω . El término de segundo orden $\mathbf{A} : D^2u = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{x_i x_j}$ representa la difusión de u dentro de Ω , donde los coeficientes $((a^{ij}))$ describen la naturaleza heterogénea y anisotrópica del medio. En particular, $\mathbf{F} := \mathbf{A}Du$ es la densidad de flujo difusivo, y la condición de elipticidad implica que

$$\mathbf{F} \cdot Du \leq 0;$$

esto es, el flujo es de regiones de mayor a menor concentración. El término de primer orden $\mathbf{b} \cdot Du = \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i}$ representa el transporte dentro de Ω , y el término de orden cero cu describe el crecimiento local o el agotamiento de la sustancia química.

4.1. Principios del máximo

Los principios del máximo que presentamos se basan en la observación de que si una función u de clase C^2 alcanza su máximo sobre un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en un punto $x_0 \in \Omega$, entonces

$$Du(x_0) = 0, \quad D^2u(x_0) \leq 0,$$

donde la última desigualdad significa que la matriz simétrica $D^2u = ((u_{x_i x_j}))$ es definida negativa en x_0 .

4.1.1. Principio del máximo débil

Primero, identificamos las circunstancias bajo las cuales una función debe alcanzar su máximo (o mínimo) en la frontera.

Teorema 4.1.1 (Principio del máximo débil) *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con L un operador uniformemente elíptico como en (4.1) con*

$$c = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

I) Si

$$Lu \leq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

II) Si

$$Lu \geq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

entonces

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Nota 4.1.1 *Una función que satisface (3.2) se dice que es una subsolución. Por tanto, una subsolución alcanza su máximo en $\partial\Omega$. De manera similar, si se da (3.3) u es una supersolución y alcanza su mínimo en $\partial\Omega$.*

Demostración. Como la prueba de II) se obtiene de manera inmediata de I) (u subsolución implica que $-u$ es supersolución) escribiremos en detalle únicamente la demostración de I). Para ello supongamos primeramente que tenemos la desigualdad estricta

$$Lu < 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{4.4}$$

y que existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u, \tag{4.5}$$

y $u \in C(\bar{\Omega})$ que sabemos que se alcanza ya que Ω es un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n . Así, en x_0 tenemos que

$$Du(x_0) = 0, \quad (4.6)$$

y

$$D^2u(x_0) \leq 0. \quad (4.7)$$

Como la matriz $A = ((a^{ij}(x_0)))$ es simétrica y definida positiva, existe una matriz ortogonal $O = ((o_{ij}))$ de manera que

$$OAO^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad OO^T = Id, \quad (4.8)$$

con $d_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Realizando el cambio de variable $y = x_0 + O(x - x_0)$ obtenemos que $x - x_0 = O^T(y - x_0)$ y de esta forma

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{y_k} o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Evaluando en el punto x_0 , por (4.8) se tiene

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} = \sum_{k=1}^n d_k u_{y_k y_k} \leq 0, \quad (4.9)$$

ya que $d_k > 0$ y $u_{y_k y_k} \leq 0$, $k = 1, \dots, n$, por (4.7). Por tanto, usando (4.6) y (4.9) concluimos que

$$Lu(x_0) = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} \geq 0,$$

que contradice (4.4). Esto es, si x_0 es un punto en que se alcanza el máximo de u en $\bar{\Omega}$, no puede ser un punto interior y por lo tanto $x_0 \in \partial\Omega$. En el caso general en el que $Lu \leq 0$ en Ω usamos la siguiente función auxiliar

$$u^\epsilon(x) := u(x) + \epsilon e^{\lambda x_1}, \quad x \in \Omega,$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro que determinaremos a continuación y $\epsilon > 0$. Por la linealidad del operador es claro que

$$\begin{aligned} Lu^\epsilon(x) &= Lu(x) + \epsilon L(e^{\lambda x_1}) \\ &\leq \epsilon e^{\lambda x_1} [-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1](x) \\ &\leq \epsilon e^{\lambda x_1} [-\lambda^2 \theta + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} \lambda], \end{aligned}$$

donde hemos usado (4.2) y el hecho de que $|b^1(x)| \leq \|\mathbf{b}\|_{L^\infty}$.

Por tanto $Lu^\epsilon < 0, x \in \Omega$ escogiendo un $\lambda > 0$ suficientemente grande de donde, por lo visto anteriormente sabemos que $\max_{\bar{\Omega}} u^\epsilon = \max_{\partial\Omega} u^\epsilon$. Haciendo tender $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$, concluyendo así la prueba. \square

Corolario 4.1.1 *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con L un operador uniformemente elíptico como en (4.1) con*

$$c > 0 \text{ en } \Omega.$$

Si

$$Lu \leq 0 \text{ en } \Omega,$$

entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+, \quad (4.10)$$

siendo $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Demostración. Sea u una subsolución y sea el conjunto $M := \{x \in \Omega | u(x) > 0\}$. Definimos el operador

$$\begin{aligned} Ku &:= Lu - cu \\ &\leq -cu \leq 0, \text{ en } M. \end{aligned}$$

El operador K posee únicamente términos de orden mayor que cero y, por tanto, aplicando el *Teorema 4.1.1*, tenemos que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_M u = \max_{\partial M} u = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Así, si $M \neq \emptyset$ se sigue (4.10). Al mismo tiempo, si $u \leq 0$ en cualquier punto de Ω llegamos a la misma conclusión fácilmente. \square

4.1.2. Principio fuerte del máximo

Abordaremos en esta sección el objetivo principal de este capítulo que es la demostración del principio fuerte del máximo, que afirma que una subsolución no puede alcanzar su máximo en un punto interior de un dominio a menos que u sea una función constante.

Para ello, a diferencia de lo realizado en el capítulo anterior, necesitaremos en primer lugar el siguiente

Teorema 4.1.1 (Lema de Hopf) Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y L un operador uniformemente elíptico con

$$c = 0 \text{ en } \Omega,$$

cumpléndose

$$Lu \leq 0 \text{ en } \Omega.$$

Sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(x_0) > u(x) \text{ para todo } x \in \Omega, \quad (4.11)$$

y supongamos que Ω cumple la condición de bola interior en x_0 ; esto es, existe una bola abierta $B \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \quad (4.12)$$

donde ν es el vector normal unitario de exterior en x_0 . Si

$$c > 0 \text{ en } \Omega,$$

la misma condición es válida siempre que

$$u(x_0) \geq 0.$$

Nota 4.1.1 La importancia de (4.12) reside en la desigualdad estricta, ya que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$ es trivial.

Demostración. Sean $c > 0$ y la bola $B(x^*, r)$ para cierto radio $r > 0$. Definimos

$$0 < v(x) := e^{-\lambda|x-x^*|^2} - e^{-\lambda r^2},$$

donde $x \in B(x^*, r)$ y $\lambda > 0$ un parámetro fijo pero arbitrario que elegiremos más adelante. Usando la condición de uniformemente elíptico para todo $x \in B(x^*, r)$, obtenemos

$$\begin{aligned} Lv(x) &= - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} + cv \\ &= e^{-\lambda|x-x^*|^2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} (-4\lambda^2(x_i - x^*)(x_j - x^*) + 2\lambda\delta_{ij}) \\ &\quad - e^{-\lambda|x-x^*|^2} \sum_{i=1}^n 2b^i \lambda(x_i - x^*) + c(e^{-\lambda|x-x^*|^2} - e^{-\lambda r^2}) \\ &\leq e^{-\lambda|x-x^*|^2} (-4\theta\lambda^2|x-x^*|^2 + 2\lambda \text{tr } \mathbf{A} + 2\lambda\|\mathbf{b}\|_{L^\infty}|x-x^*| + c), \end{aligned}$$

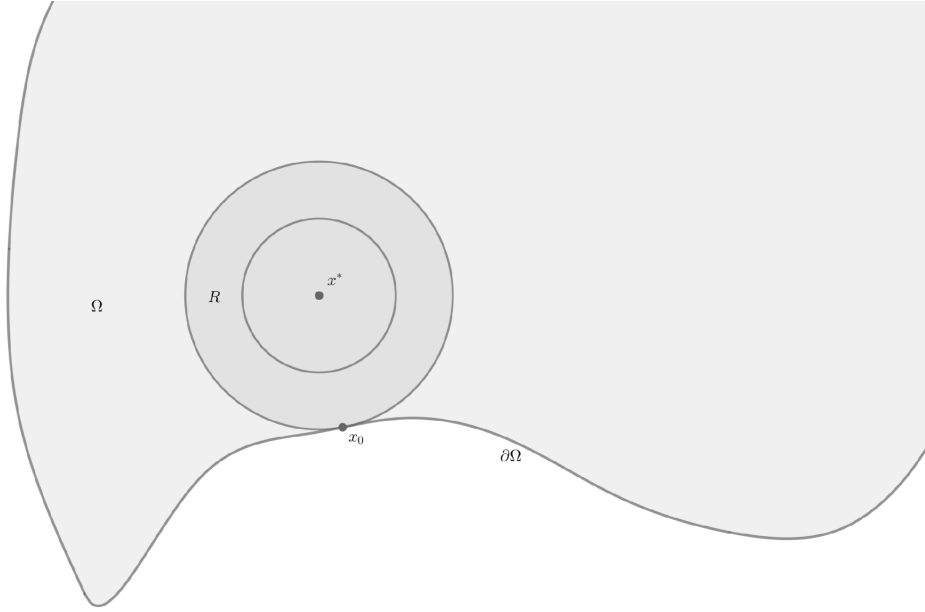


Figura 4.1. Ilustración de la demostración del Lema de Hopf.

siendo δ_{ij} la Delta de Kronecker y $\mathbf{A} = ((a^{ij}))$, $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n)$. Consideraremos ahora la región abierta $R := B(x^*, r) - B(x^*, r/2)$. De la desigualdad anterior se sigue

$$Lv \leq e^{-\lambda|x-x^*|^2}(-\theta\lambda^2r^2 + 2\lambda\text{tr}\mathbf{A} + 2\lambda|\mathbf{b}|r + c) \leq 0, \quad (4.13)$$

en R , tomando $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Además, por (4.11) sabemos que existe una constante $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña de manera que

$$u(x_0) \geq u(x) + \epsilon v(x), \quad \text{para } x \in \partial B(x^*, r/2). \quad (4.14)$$

Además, como $v = 0$ en $\partial B(x^*, r)$ es claro que

$$u(x_0) \geq u(x) + \epsilon v(x), \quad \text{para } x \in \partial B(x^*, r). \quad (4.15)$$

Por tanto, por una parte, de (4.13) se sigue

$$L(u + \epsilon v - u(x_0)) \leq -cu(x_0) \leq 0, \quad \text{en } R,$$

y de (4.14) y de (4.15) obtenemos

$$u + \epsilon v - u(x_0) \leq 0 \quad \text{en } \partial R.$$

En virtud del Teorema 4.1.1, $u + \epsilon v - u(x_0) \leq 0$ en R . Por tanto, como $u(x_0) + \epsilon v(x_0) - u(x_0) = 0$ se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0.$$

De esta manera

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{\epsilon}{r} Dv(x_0) \cdot (x_0 - x^*) = 2\lambda \epsilon r e^{-\lambda r^2} > 0,$$

concluyendo así la demostración. \square

Como en la Sección 2, usaremos el anterior Lema de Hopf como herramienta fundamental en la prueba del siguiente

Teorema 4.1.2 (Principio fuerte del máximo) *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y*

$$c = 0 \text{ en } \Omega.$$

Si

$$Lu \leq 0 \text{ en } \Omega,$$

y u alcanza su máximo en $\bar{\Omega}$ en un punto interior, entonces u es constante en todo Ω .

Cuando $c > 0$ en Ω llegamos al mismo resultado si

$$u(x_0) \geq 0, \text{ con } x_0 \in \partial\Omega.$$

Demostración. Sea $M := \max_{\bar{\Omega}} u$ y $C := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Entonces si $u \not\equiv M$, definimos

$$V := \{x \in \Omega : u(x) < M\}.$$

Escojamos un punto $y \in V$ tal que $\text{dist}(y, C) < \text{dist}(y, \partial\Omega)$, y sea B la bola más grande con centro y y cuyo interior está en V . Entonces existe un punto $x_0 \in C$ tal que $x_0 \in \partial B$, esto es, V cumple la condición de bola interior en x_0 . Por tanto, si $c = 0$ del Lema de Hopf visto en el *Teorema 4.1.1* obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ llegando a una contradicción, pues como u alcanza su máximo en $x_0 \in \Omega$ tendríamos que $Du(x_0) = 0$.

De la misma manera, si $c > 0$ también por el Lema de Hopf concluimos la demostración pues $M > 0$. \square

4.2. Aplicaciones

A continuación veremos algunas aplicaciones de los principios del máximo enunciados con anterioridad. Empezaremos estudiando un problema de contorno

simple para ecuaciones elípticas. Plantearemos el problema de determinar una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, satisfaciendo el problema

$$(P) := \begin{cases} Lu = F(x_1, \dots, x_n) & \text{en } \Omega, \\ u(s) = g(s) & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con Lu el operador definido en (4.1). A este problema se le conoce como problema de Dirichlet.

Por el principio del máximo es posible demostrar que si existe una solución para el problema de Dirichlet, será única.

Teorema 4.2.1 (Unicidad del problema de Dirichlet) *El problema de Dirichlet (P) admite a lo sumo una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos soluciones diferentes de (P). Definiendo $v = u_1 - u_2$ tenemos que cumple que

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{en } \Omega, \\ v(s) = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por el Principio fuerte del máximo tenemos que

$$\max_{\Omega} |v| = \max_{\partial\Omega} |v| = 0,$$

lo cual implica que $v = 0$ en Ω y, por tanto

$$u_1 = u_2.$$

□

Además se tiene el siguiente

Teorema 4.2.2 (Principio de Comparación) *Sean g_1, g_2, F_1, F_2 tales que*

$$g_1 \leq g_2 \text{ en } \partial\Omega, \quad \text{y} \quad F_1 \leq F_2 \text{ en } \Omega,$$

y sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluciones de

$$\begin{cases} Lu_1 = F_1 & \text{en } \Omega, \\ u_1 = g_1 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} Lu_2 = F_2 & \text{en } \Omega, \\ u_2 = g_2 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Entonces

$$u_1 \leq u_2.$$

Demostración. Observamos que la diferencia $u_2 - u_1$ cumple que

$$\begin{cases} L(u_2 - u_1) = F_2 - F_1 \geq 0 & \text{en } \Omega, \\ (u_2 - u_1) = g_2 - g_1 \geq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego

$$L(u_2 - u_1) \geq 0.$$

Por tanto aplicando "el principio del mínimo" se tiene

$$(u_2 - u_1)(x) \geq \min_{\Omega} (u_2 - u_1) = \min_{\partial\Omega} (u_2 - u_1) = \min_{\Omega} (g_2 - g_1) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

□

Corolario 4.2.1 (Signo de las soluciones) Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es solución de (P) siendo $F \geq 0$ en Ω y $g \geq 0$ en $\partial\Omega$. Entonces

$$u \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.2, tomando como funciones $u_1 \equiv 0$ y $u_2 = u$ obtenemos lo que queríamos demostrar. □

Particularizando en el caso en el que el operador diferencial sea el Laplaciano, tenemos el siguiente

Teorema 4.2.3 (Aproximación de soluciones) Sean F_m, g_m sucesiones tales que $F_m \rightarrow F$ uniformemente en Ω y $g_m \rightarrow g$ en $\partial\Omega$. Sean $u_m, u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta u_m = F_m & \text{en } \Omega, \\ u_m = g_m & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Entonces

$$u_m \rightarrow u \quad \text{uniformemente en } \bar{\Omega}.$$

Demostración. Como F_m converge uniformemente a F y g_m a g , tenemos que dado un $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leq F_n(x_1, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n) \leq \epsilon, & n \geq n_0, & (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \\ -\epsilon &\leq g_n(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) \leq \epsilon, & n \geq n_0, & (x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Escogemos una función w tal que $Lw > 0$ en $\bar{\Omega}$ y $w > 0$ en $\partial\Omega$. Tomamos por ejemplo $w = M - (x_1^2 + \dots + x_n^2)$, con M una constante arbitraria. Esta función cumple

$$-\Delta w = 2n \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

mientras que $w > 0$ en $\partial\Omega$ si $x_1^2 + \dots + x_n^2 < M$ en $\partial\Omega$. Por otro lado, elijamos $K > 0$ tal que

$$w > K > 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Tomando $k = \min\{2n, K\}$ tenemos que la función $\phi = \frac{w}{k}$ cumple

$$\begin{cases} -\Delta\phi \geq 1 & \text{en } \Omega, \\ \phi \geq 1 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por tanto de (4.16)

$$\begin{aligned} -\Delta(-\epsilon\phi) &\leq -\epsilon \leq F_m(x_1, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n) \leq \epsilon \leq -\Delta(\epsilon\phi), & \text{en } \Omega, \\ -\epsilon\phi &\leq -\epsilon \leq g_m(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) \leq \epsilon \leq \epsilon\phi, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

siempre que $m \geq n_0$. De aquí

$$\begin{aligned} -\Delta(-\epsilon\phi) &\leq -\Delta(u_m - u) \leq -\Delta(\epsilon\phi), & \text{en } \Omega, \\ -\epsilon\phi &\leq u_m - u \leq \epsilon\phi, & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

si $m \geq n_0$. Por el Teorema 4.2.2 deducimos

$$-\epsilon\phi \leq u_m - u \leq \epsilon\phi, \text{ en } \bar{\Omega}, \quad m \geq n_0,$$

esto es,

$$|u_m - u| \leq \epsilon\phi \text{ en } \bar{\Omega}, \quad m \geq n_0.$$

Como $\epsilon > 0$ es una cantidad arbitraria, concluimos en que $u_m \rightarrow u$ uniformemente en $\bar{\Omega}$ tal y como queríamos demostrar. \square

Principio del Máximo de Alexandrov

Los resultados vistos hasta ahora son válidos gracias a que hemos tomado la restricción $c(x) \geq 0$ siendo $c(x)$ la función que aparece en el término de orden cero de la definición de operador elíptico (4.1). Cuando no se tiene esa desigualdad hay que imponer por ejemplo una condición de signo de las soluciones como indica el siguiente

Teorema 5.0.1 *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con $u \leq 0$, en Ω . Si*

$$-\Delta u + c(x)u \leq 0, \text{ en } \Omega,$$

con $c \in L^\infty(\bar{\Omega})$, entonces

$$u \equiv 0 \text{ en } \Omega,$$

o bien

$$u < 0 \text{ en } \Omega.$$

Demostración. Si $c(x) \geq 0$ no hay nada que demostrar ya que la conclusión sigue del Teorema 4.1.2.

Si $c(x) < 0$ como $M + c(x) \geq 0$, para cualquier $M \geq \|c\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$, usando que $u \leq 0$ en Ω se tiene que

$$-\Delta u + (M + c(x))u \leq -\Delta u + c(x)u \leq 0,$$

por lo que aplicando el Teorema 4.1.2 obtenemos el resultado deseado. \square

El objetivo de este capítulo será analizar otras condiciones más útiles que no nos exijan conocer a priori el signo de la solución.

5.1. Notación y resultados preliminares

Definiremos primeramente el concepto de *conjunto de contacto superior* de una función u , que informalmente se dice que es el conjunto de puntos en Ω que poseen un hiperplano tangente sobre u . De manera formal se tiene la siguiente

Definición 5.1.1 Para una función $u \in C(\bar{\Omega})$ el conjunto de contacto superior Γ^+ se define como

$$\Gamma^+ := \{y \in \Omega; \exists p_y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \forall x \in \Omega : u(x) \leq u(y) + p_y \cdot (x - y)\}.$$

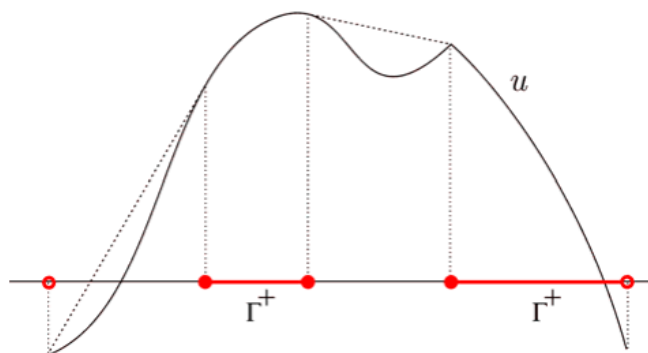


Figura 5.1. Ejemplo de conjunto de contacto superior.

Nota 5.1.1 Si $u \in C^1(\Omega)$ e $y \in \Gamma^+$ tomamos $p_y = \nabla u(y)$ siendo Γ^+ el conjunto de puntos donde la función es cóncava.

Si u no es derivable en y podrían existir varios p_y cumpliendo la condición de Γ^+ . Además, si $u \in C^2(\Omega)$ entonces la matriz Hessiana (D^2u) es no positiva en Γ^+ .

Se puede demostrar la siguiente estimación integral usando el concepto anterior.

Lema 5.1.1 Sea $g \in C(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Consideramos

$$M = \frac{\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u}{\text{diam}(\Omega)},$$

donde $\text{diam}(\Omega)$ es la mayor distancia entre dos puntos de Ω . Entonces

$$\int_{B_M(0)} g(z) dz \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u(x)) | \det(D^2u(x)) | dx.$$

Demostración. Si $M = 0$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $M > 0$ y sea el conjunto $\Sigma := \{\nabla u(x) : x \in \Gamma^+\}$. Si la función

$$G : F^+ \rightarrow \Sigma; \quad x \rightarrow \nabla u(x),$$

es biyectiva tenemos, según el cambio de variable $z = \nabla u(x)$, que

$$\int_{\Sigma} g(z) dz = \int_{\Gamma^+} g(\nabla u(x)) |det(D^2u(x))| dx.$$

Si la función es sobreyectiva, como $g \geq 0$ entonces

$$\int_{\Sigma} g(z) dz \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u(x)) |det(D^2u(x))| dx,$$

ya que podría ocurrir que $\nabla u(x_1) = \nabla u(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$ con lo cual, al “recorrer Γ^+ se recorren varias veces algunos trozos de Σ ”. Así, basta demostrar que $B_M(0) \subset \Sigma$, es decir, que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ con $|a| < M$ existe un $y \in \Gamma^+$ tal que $a = \nabla u(y)$. Para ello definamos ahora $L_a(t) := \min_{x \in \bar{\Omega}} (t + a \cdot x - u(x))$. Esta función es continua, positiva para t suficientemente grande y negativa para t suficientemente pequeño. Denotando t_a como su raíz más grande obtenemos que

$$t_a + a \cdot x - u(x) \geq 0,$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$ y

$$t_a + a \cdot y_0 - u(y_0) = 0,$$

para algún $y_0 \in \bar{\Omega}$. Por tanto

$$u(y_0) \geq u(x) + a \cdot (y_0 - x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (5.1)$$

Como $M > 0$ tomamos x_0 tal que $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$, de donde aplicando la desigualdad anterior en x_0 se sigue

$$u(y_0) \geq \sup_{\partial\Omega} u + M \operatorname{diam}(\Omega) + a \cdot (y_0 - x_0) > \sup_{\partial\Omega} u,$$

pues $|a| < M$. Así, $y_0 \notin \partial\Omega$. Esto implica, por la propia definición de Γ^+ , que $y_0 \in \Gamma^+$ y, como $u \in C^2(\Omega)$ entonces $a = \nabla u(y_0)$. Por tanto, $a \in \Sigma$, llegando a lo que queríamos demostrar. \square

5.2. Principio del máximo de Alexandrov

Nuestro objetivo ahora es el de conectar el anterior lema técnico con las ecuaciones elípticas generales objeto de estudio de este trabajo para obtener un principio del máximo general.

Consideramos primeramente el caso en que el problema de Dirichlet viene dado por el operador Laplaciano, es decir

$$(P_1) = \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u = h & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si u es una solución de (P_1) entonces, tomando $g \equiv 1$ en el *Lema 5.1.1* obtenemos que

$$|B_M(0)| \leq \int_{\Gamma^+} |\det(D^2u(x))| dx,$$

lo cual por (1.7) implica

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + \text{diam}(\Omega) \cdot \left(\frac{1}{w_n} \int_{\Gamma^+} |\det(D^2u(x))| dx \right)^{1/n}, \quad (5.2)$$

donde w_n fue dada en el *Capítulo 3*. Ahora debemos relacionar $|\det(D^2u(x))|$ con Δu para poder usar la ecuación del problema de Dirichlet. Para ello, como D^2u es simétrica y diagonalizable con autovalores $\lambda_i(x)$ podemos escribir

$$D^2u = P^{-1} \Lambda P,$$

con Λ la matriz diagonal de autovalores. De esta forma

$$\det(D^2u) = \det(\Lambda) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Sabiendo que $\Delta u = \text{tr}(D^2u)$ y que sobre Γ^+ u es cóncava (los autovalores son negativos) obtenemos que

$$|\det(D^2u)| \leq \left(\frac{-\Delta u}{n} \right)^n, \quad \text{en } \Gamma^+,$$

ya que si $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ se cumple que $(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} \leq \sum_{i=1}^n a_i/n$. Por lo tanto, por (5.2) usando (P) concluimos la siguiente

Proposición 5.2.1 (Prpio del Máximo de Alexandrov para el Laplaciano)

Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, solución de (P_1) con $f \in L^n(\Omega)$. Entonces

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} h + C_0(n) \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

De manera más general

Corolario 5.2.1 Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, solución del problema

$$(P_2) = \begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f & \text{en } \Omega, \\ u = h & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $(a_{ij})(x)$ uniformemente elíptica, h acotada y $f \in L^n(\Omega)$. Entonces

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} h + C_0(n, \lambda) \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Demostración. Siguiendo la idea de la demostración de la proposición anterior partimos de (5.1) y queremos ahora relacionar $|\det(D^2u(x))|$ con el operador diferencial de (P_2) . Podemos observar que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D^2u(x) = \text{tr}(AD)$, donde $A = (a_{ij}(x))$ y $D = (D^2u(x))$. Además, sobre Γ^+ la matriz D es definida negativa y por la elipticidad, A es definida positiva. Por tanto sobre el conjunto Γ^+ usando diagonalización y la elipticidad se tiene que

$$\begin{aligned} |\det(D)| = \det(-D) &= \frac{\det(A(-D))}{\det(A)} \leq \left(\frac{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D^2u(x)}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{\det(A)} \\ &\leq \left(\frac{f}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{\theta^n}, \end{aligned}$$

siendo θ la constante de elipticidad de L , llegando a lo que queríamos demostrar. \square

Para el caso en el que el problema tenga un operador uniformemente elíptico general se tiene el siguiente

Teorema 5.2.1 (Ppo del Máx. de Alexandrov para op. elípticos generales)

Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y L un operador uniformemente elíptico dado en (4.1) con $c \geq 0$. Si

$$Lu \leq f, \text{ en } \Omega,$$

con

$$\frac{|b|}{(\det(a_{ij}(x)))^{1/n}}, \frac{f}{(\det(a_{ij}(x)))^{1/n}} \in L^n(\Omega),$$

entonces

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C_0(n, |b|, (\det(a_{ij}(x)))^{1/n}) \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Hacemos notar al lector que no demostraremos este teorema ya que su prueba se sale de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, como pequeña noción de cómo proceder para obtener la demostración, indicamos al lector que se tendría que tomar una función g adecuada ($g \neq 1$) que tenga en cuenta las funciones $b(x)$ y $c(x)$ a la hora de aplicar el Lema 5.1.1.

Debemos remarcar la importancia de la restricción del signo $c(x) \geq 0$, ya que si no lo tomáramos lo que hemos demostrado carecería de veracidad. Para ello, consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.1 Consideramos el problema en una dimensión

$$\begin{cases} -u'' - u = 0 & \text{en } (0, 2\pi), \\ u(0) = u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Si aplicamos el Teorema 5.2.1 a este problema obtendríamos que el supremo de todas las soluciones es cero, lo cual es falso ya que $u(x) = \sin x$ es una solución y tiene supremo en el dominio estrictamente positivo. No podemos por tanto aplicar el principio del Máximo de Alexandrov ya que c debe ser positivo.

5.3. Principio del máximo para dominios pequeños

Abordaremos ahora una parte fundamental de este capítulo pues ya podremos prescindir de las restricciones de signo en la función $c(x)$. A cambio, se necesitará una condición sobre el tamaño del dominio, como se muestra en el siguiente

Teorema 5.3.1 *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y L un operador uniformemente elíptico dado en (4.1) tal que*

$$\begin{cases} Lu \leq 0 & \text{en } \Omega, \\ u \leq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Existe

$$\delta = \delta(n, \theta, \text{diam}(\Omega), \|b\|_{L^n(\Omega)}, \|c^-\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

siendo θ la constante de elipticidad y c^- la función parte negativa de $c(x)$, tal que si

$$|\Omega| < \delta,$$

entonces

$$u \leq 0 \text{ en } \Omega.$$

Demostración. Escribimos $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$ siendo $c^+(x)$, $c^-(x)$ las partes positiva y negativa de $c(x)$ respectivamente. Si $c^-(x) \equiv 0$ no hay nada que demostrar pues se aplican directamente los Principios del Máximo vistos con anterioridad.

Sea entonces $c^-(x) \not\equiv 0$. A partir de que $Lu \leq 0$ tenemos que

$$L^+u \leq c^-u \leq c^-u^+,$$

donde

$$L^+u := - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c^+(x)u,$$

satisface las condiciones del Teorema 5.2.1. Por tanto, como $\sup_{\partial\Omega} u^+ = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u &\leq C_0 \operatorname{diam}(\Omega) \|c^- u^+\|_{L^n(\Omega)} \\ &\leq C_0 \operatorname{diam}(\Omega) \|c^-\|_{\infty} |\Omega|^{1/n} \sup_{\Omega} u^+. \end{aligned}$$

Tomando $|\Omega|^{1/n} < \delta$ de modo que $C_0 \|c^-\|_{\infty} \operatorname{diam}(\Omega) |\Omega|^{1/n} < 1$ se concluye

$$\sup_{\Omega} u < \sup_{\Omega} u^+.$$

Esta desigualdad estricta implica que $\sup_{\Omega} u \leq 0$ como queríamos demostrar. \square

Simetría y propiedades relacionadas a través del principio del máximo

En este último capítulo probaremos la simetría de soluciones positivas para un caso particular de ecuaciones elípticas de segundo orden que corresponde al primer teorema del célebre trabajo de Gidas-Ni-Nirenberg [6] para el caso particular $f(u) = u^2 \in Lip_{loc}$. Para ello, usaremos los principios del máximo vistos con anterioridad (en particular los obtenidos en el Capítulo 5) y el método conocido como de *planos móviles*.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente

Teorema 6.1 *Sea $u \in C^2(B(0, 1)) \cap C(\overline{B(0, 1)})$, $u > 0$ en $B(0, 1)$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{en } B(0, 1), \\ u = 0 & \text{en } \partial B(0, 1), \end{cases}$$

entonces u es radialmente simétrica, es decir

$$u(x) = u(|x|) = u(r), \quad r > 0,$$

y estrictamente decreciente, esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial r} < 0, \quad 0 < r.$$

Nota 6.1 *Este resultado, que demuestra propiedades cualitativas de las soluciones, ha sido generalizado por varios autores a otra clase de operadores y dominios. Cualquier generalización obtenida se sale de los objetivos de esta memoria.*

Para demostrar el teorema anterior, como ya hemos adelantado, usaremos la técnica de planos móviles que nos requiere introducir la siguiente notación. Definimos

$$T_\lambda := \{(\lambda, y) : \lambda \in (0, 1)\},$$

$$\Sigma_\lambda := \{(x, y) \in B(0, 1) : \lambda < x < 1\},$$

y, para todo punto $x \in B(0, 1)$, su reflejado

$$x_\lambda = 2\lambda - x,$$

como ilustramos en la *Figura 6.1*

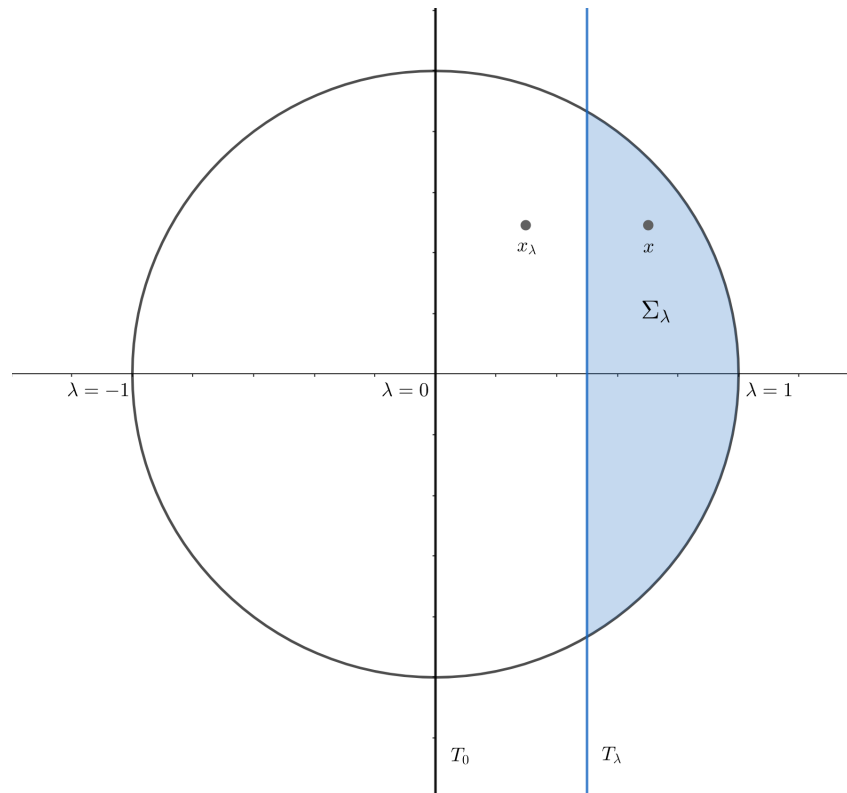


Figura 6.1. Esquema planos móviles.

Definimos también la función diferencia

$$w_\lambda = u(x, y) - u(x_\lambda, y). \quad (6.1)$$

que será nuestro objeto de estudio para todo $\lambda \in (0, 1)$.

Dividiremos la prueba en dos pasos principales. En el primero analizaremos el signo de w_λ si λ es suficientemente grande, esto es próximo a 1, y luego, tal y como el nombre del método indica, iremos moviendo $\lambda \rightarrow 0$, esto es moviendo los planos T_λ , hasta obtener el signo de w_λ para λ próximo a 0. Esto nos permitirá obtener las propiedades de monotonía y simetría de u con respecto a los planos T_λ obteniéndose por tanto la conclusión del *Teorema 6.1* al poder aplicarse esta

técnica para cualquier familia de planos paralelos arbitraria.

Atendiendo a lo anterior veamos entonces la

Demostración. En primer lugar observamos que, para cualquier $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned}
-\Delta w_\lambda(x, y) &= -\Delta u(x, y) - \Delta u(x_\lambda, y) \\
&= u^2(x, y) - u^2(x_\lambda, y) \\
&= (u(x, y) - u(x_\lambda, y))(u(x, y) + u(x_\lambda, y)) \\
&= -w_\lambda(x, y)(-u(x, y) + u(x_\lambda, y)) \\
&:= w_\lambda F_\lambda(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_\lambda,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

siendo $F_\lambda(x, y) \in L^\infty(\Sigma_\lambda)$. Además, como por hipótesis $u > 0$ en $B(0, 1)$ y $u = 0$ en $\partial B(0, 1)$, es claro que

$$\begin{aligned}
w_\lambda(x, y) &= u(x, y) - u(x_\lambda, y) < 0, \quad \text{en } \partial\Sigma_\lambda \setminus T_\lambda, \\
w_\lambda(\lambda, y) &= u(\lambda, y) - u(\lambda, y) = 0, \quad \text{en } T_\lambda.
\end{aligned}$$

Sea ahora λ un valor proximo a 1 de modo que se tiene que $|\Sigma_\lambda|$ es pequeño ($|\Sigma_\lambda| < \delta$, siendo δ el del *Teorema (5.3.1)*). Aplicando el *Teorema 5.3.1* se tiene que

$$w_\lambda \leq 0 \text{ en } \Sigma_\lambda.$$

Además, $w_\lambda \not\equiv 0$ por el *Teorema 5.0.1* por lo que

$$w_\lambda < 0 \text{ en } \Sigma_\lambda, \tag{6.3}$$

siempre que λ esté suficientemente próximo a 1.

Como indicamos anteriormente nuestro siguiente objetivo será reducir el valor de $\lambda > 0$. Para ello definimos

$$\Lambda = \{\lambda \in (0, 1) : w_\lambda < 0 \text{ en } \Sigma_\lambda\},$$

conjunto no vacío gracias a (6.3). Queremos demostrar que

$$\lambda_0 := \inf \Lambda = 0. \tag{6.4}$$

Por reducción al absurdo supondremos que $\lambda_0 > 0$. Esto implica que $w_\lambda < 0$ en Σ_λ , para $\lambda_0 < \lambda < 1$. De esta forma, por la continuidad de w_λ y Σ_λ respecto a λ se tiene que

$$w_{\lambda_0} \leq 0 \text{ en } \Sigma_{\lambda_0},$$

de donde, por el *Teorema 5.0.1* obtenemos

$$w_{\lambda_0} < 0, \text{ en } \Sigma_{\lambda_0}.$$

Sea ahora $K \subset \Sigma_{\lambda_0}$ un compacto tal que

$$|\Sigma_{\lambda_0} \setminus K| < \frac{\delta}{2},$$

siendo δ la constante que aparece en el *Teorema 5.3.1* (ver *Figura 6.2*). Claramente $w_{\lambda_0} < 0$ en K y, por la continuidad de w_{λ_0} se tiene que w_{λ_0} alcanza un máximo estrictamente negativo en K . Esto es, existe un $\eta > 0$ tal que

$$w_{\lambda_0}(x) \leq -\eta < 0, \quad x \in K.$$

Usando de nuevo la continuidad de w_λ respecto a λ sabemos que existe un $\epsilon > 0$ de manera que

$$w_{\lambda_0-\epsilon}(x) \leq \frac{-\eta}{2} < 0, \quad x \in K. \tag{6.5}$$

Observamos ahora que por (6.2)

$$\begin{cases} -\Delta w_{\lambda_0-\epsilon} + F_{\lambda_0-\epsilon} \cdot w_{\lambda_0-\epsilon} = 0 & \text{en } \Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K, \quad F_{\lambda_0-\epsilon} \in L^\infty(\Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K), \\ w_{\lambda_0-\epsilon} \leq 0 & \text{en } \partial(\Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K). \end{cases}$$

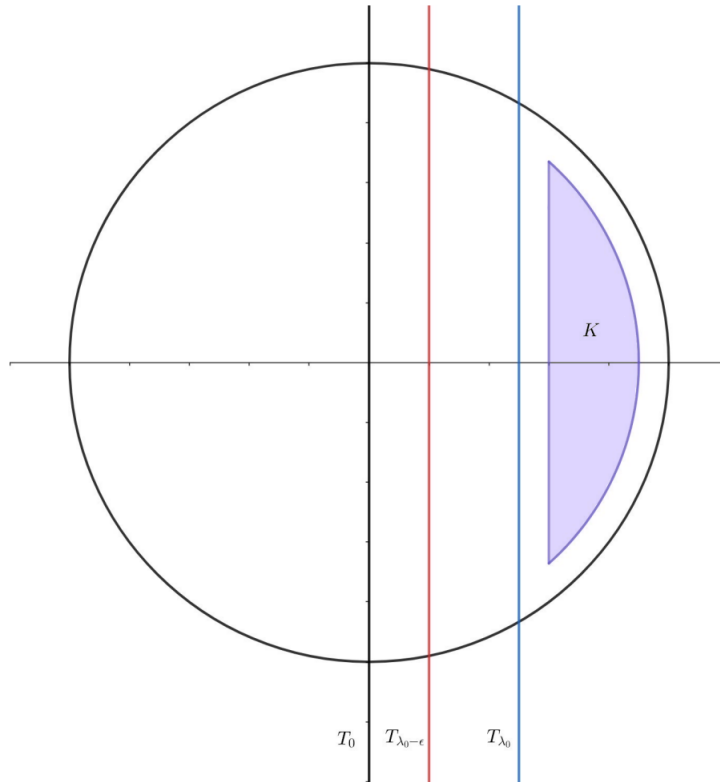


Figura 6.2. Diagrama de la demostración de (6.4).

Por tanto, por el *Teorema 5.3.1* que podemos aplicar de nuevo ya que $|\Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K| \leq \delta$ eligiendo ϵ suficientemente pequeño, obtenemos que

$$w_{\lambda_0-\epsilon} < 0, \text{ en } \Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K,$$

lo cual por (6.5) implica que $w_{\lambda_0-\epsilon} < 0$ en $\Sigma_{\lambda_0-\epsilon}$, contradiciendo así la propia definición de ínfimo ($\lambda_{0-\epsilon} < \lambda_0$), cumpliéndose por tanto (6.4).

Una vez demostrado que $\lambda_0 = 0$ podemos probar primeramente la monotonía, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\lambda, y) < 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Efectivamente, por (6.2) y por (6.4), es decir, $w_\lambda < 0$ en Σ_λ , $0 \leq \lambda < 1$ y $w_\lambda = 0$ en T_λ , $0 \leq \lambda < 1$, por el Lema de Hopf visto en el *Teorema 4.1.1* obtenemos que

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}(\lambda, y) < 0, \quad 0 < \lambda < 1,$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x}(u(x, y) - u(x_\lambda, y))(\lambda, y) < 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Es decir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(u(x, y) - u(2\lambda - x, y)) \Big|_{(x,y)=(\lambda,y)} \\ &= 2 \frac{\partial u}{\partial x}(\lambda, y) < 0, \quad 0 < \lambda < 1, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Por último estudiaremos la simetría con respecto a T_λ . Tendremos en cuenta nuevamente que se verifica (6.4) y, por tanto,

$$u(x, y) < u(2\lambda - x, y), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Observamos que, por continuidad en λ lo anterior implica (haciendo $\lambda \rightarrow 0$)

$$u(x, y) \leq u(-x, y). \tag{6.6}$$

Usando ahora el hecho de que el problema

$$(P) = \begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{en } B(0, 1), \\ u = 0 & \text{en } \partial B(0, 1), \\ u > 0 & \text{en } B(0, 1), \end{cases}$$

es invariante frente al cambio de coordenadas x por $-x$ se obtiene la simetría con

respecto al plano T_0 , es decir, $u(x, y) = u(-x, y)$. En efecto, sea $u(x, y)$ solución de (P) , definiendo $v(x, y) := u(-x, y)$ tenemos que claramente $v(x, y)$ cumple las condiciones de contorno ya que

$$\begin{aligned} (-x, y) \in B(0, 1) \quad \text{si} \quad (x, y) \in B(0, 1), \\ (-x, y) \in \partial B(0, 1) \quad \text{si} \quad (x, y) \in \partial B(0, 1). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} -\Delta v(x, y) &= -\nabla_{xy}(\partial_x v, \partial_y v) \\ &= -\nabla_{xy}(-\partial_x u(-x, y), \partial_y u(-x, y)) \\ &= -[\partial_{xx} u(-x, y) + \partial_{yy} u(-x, y)] \\ &= -\Delta u(-x, y) = u^2(-x, y) = v^2(x, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando lo visto anteriormente para $v(x, y)$ se tiene que $v(x, y) \leq v(-x, y)$. Esto es $u(-x, y) \leq u(x, y)$, obteniéndose, por (6.6), la simetría deseada con respecto a T_0 .

Como se mencionó anteriormente la propiedad de simetría de la que habla el enunciado del *Teorema 6.1* es cierta ya que todo lo que se ha hecho para planos T_λ se puede hacer para una familia de hiperplanos paralelos que vamos moviendo y que implicaría la simetría en todas las direcciones. \square

Conclusiones

En esta memoria se han desarrollado principios del máximo de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico. En los primeros capítulos, se ha puesto énfasis en la demostración del Lema de Hopf y la Propiedad de la Media como herramientas necesarias para demostrar el principio del máximo fuerte, tanto en dimensiones uno como en dimensiones mayores. Estas demostraciones son además fundamentales para comprender el comportamiento de las sub/super soluciones de las ecuaciones elípticas y además establecer propiedades importantes de las mismas, como pueden ser cotas superiores e inferiores así como el signo de la derivada normal exterior en puntos de la frontera. Se han estudiado aplicaciones del principio del máximo, como puede ser la unicidad de soluciones y se han explorado extensiones del mismo, incluyendo el principio del máximo de Alexandrov, que proporciona condiciones más flexibles en las ecuaciones y que permite, por ejemplo su aplicación en dominios pequeños. Por último, se estudia el primer teorema de la célebre obra de Gidas-Ni-Nirenberg, donde se introduce el método de planos móviles para demostrar la simetría radial y la monotonía de las soluciones en la bola de centro el origen y radio igual a uno. Este resultado ha sido de gran relevancia en el estudio de problemas elípticos y ha abierto nuevas perspectivas en la comprensión de la estructura y comportamiento de las soluciones en dominios simétricos.

En resumen, esta memoria ha abordado el principio del máximo clásico y sus extensiones. Consideramos que la misma puede usarse como una base fundamental que sirva de inicio en la comprensión y posterior estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

No queremos acabar sin recordar que las ecuaciones en derivadas parciales elípticas tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas científicas y tecnológicas. Desde la física y la ingeniería hasta la biología y la economía. Por tanto, disponer de herramientas que proporcionan información de sus soluciones, como lo son los principios del máximo, son cruciales para modelar y

analizar fenómenos complejos y tomar decisiones informadas en diversos campos. Al continuar investigando y refinando los principios del máximo, se podrá mejorar la comprensión de estos fenómenos que resuelven problemas del mundo real.

Bibliografía

- [1] *ApuntesAEDP1213*. Universidad de Sevilla [en línea], [sin fecha]. [Fecha de consulta: 23-11-2022]. Disponible en: <http://departamento.us.es/edan/php/asig/LICMAT/LMAEDP/ApuntesAEDP1213.pdf>.
- [2] BOLTYANSKI Vladimir, MARTINI Horst y SOLTAN, V. *Geometric Methods and Optimization Problems*. Springer, 2013. ISBN 9781461553199.
- [3] CERÓN GÓMEZ, Miller. *El Principio del Máximo*. Revista Sigma. 2008, VIII, 28-34.
- [4] *Ecuación de Laplace*. OCW de la Universidad Politecnica de Madrid [en línea]. [sin fecha]. [Fecha de consulta: 10-03-2023]. Disponible en: http://ocw.upm.es/pluginfile.php/552/mod_label/intro/tema7.pdf.
- [5] EVANS, Lawrence C. *Partial differential equations*. 2nd ed. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2010. ISBN 9780821849743.
- [6] GIDAS, B., Wei-Ming NI y L. NIRENBERG. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Communications in Mathematical Physics [en línea]. 1979 , 68(3), 209–243. ISSN 1432-0916. Disponible en: doi:10.1007/bf01221125.
- [7] GILBARG, David y TRUDINGER, Neil, S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd ed. Berlin:Springer, 1998. ISBN 354013025X.
- [8] GIORDANO, Claudia Marcela. *Ecuaciones diferenciales parciales*. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP) [en línea], 2016. ISBN 9789503413784. Disponible en: <https://doi.org/10.35537/10915/60310>.
- [9] GONZÁLEZ BURGOS, Manuel. *Tema 1. Clasificación de las EDP. Características*. Universidad de Sevilla [en línea]. [sin fecha]. [Fecha de consulta: 20-01-2023]. Disponible en: https://personal.us.es/manoloburgos/wp-content/uploads/2012/01/Ampl_EDP_Capitulo1.pdf.
- [10] LAMPORT, Leslie. *LaTeX: A Document Preparation System, User's Guide and Reference Manual*. 2nd edition. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- [11] PESCH, Hans Josef y Michael PLAIL. *The cold war and the maximum principle of optimal control* [en línea]. En: Optimization Sto-

- ries, p. 331–343. EMS Press, 2012. ISBN 9783936609585. Disponible en: <https://doi.org/10.4171/dms/6/34>.
- [12] Lista completa de símbolos en LaTeX & vert Manualdelatex.com. *Símbolos, tutoriales y recursos para escribir en L^AT_EX* [en línea]. [sin fecha]. [Fecha de consulta: 09-11-2022]. Disponible en: <https://manualdelatex.com/simbolos>.
- [13] PERAZA LUIS, Misael Enrique. *Introducción al Principio del Máximo*. Trabajo de fin de grado, Universidad de La Laguna, 2016.
- [14] SABINA DE LIS, José C. *Ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad de La Laguna, 2022.
- [15] SWEERS, G. *Maximum principles, a start*. Universidad de Colonia [en línea], 2000. [Fecha de consulta: 29-12-2022]. Disponible en: <http://www.mi.uni-koeln.de/~gsweers/pdf/maxprinc.pdf>.

Maximum principles for elliptic equations

Néstor Navarro Rodríguez

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101265452@ull.edu.es

Abstract

In this work, the **maximum principles** and their applications will be studied. We said that a function satisfies a maximum principle if verifies a differential inequality in a domain Ω and attains the maximum (or minimum) at the boundary $\partial\Omega$. We start from a simple perspective, the one-dimensional case, and we progress towards bigger dimensions. To do this, tools such as the well-known Hopf's Lemma and the Mean Value Property will be used to prove strong maximum principles in different situations. Once the classical theory is developed, a more refined version, Alexandrov's maximum principle with less restrictive hypotheses, will be addressed along with its application to small domains. Finally, qualitative properties of solutions to a certain elliptic problem using these results will be analyzed.

1. Maximum principle for the one-dimensional case

Maximum principles for elliptic operators have always been and remain an important topic of study in mathematics. To see how the maximum principle works in a more intuitive way we will first study them in the one-dimensional case. We prove the **Hopf's Lemma** that states that if $u \in C^2(a, b)$ is a non-constant function such that $L(u) := -u'' + g(x)u' + h(x)u \leq 0$ in (a, b) , for some $g, h \in L^\infty(a, b)$ and $h \geq 0$ and has side derivatives at a and b , then we can set a sign to u' at the extremes of the interval depending on where the maximum is attained.

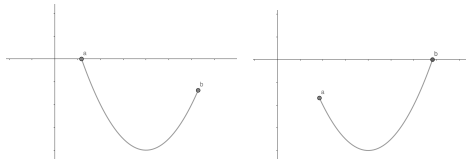


Figure 1: Visual example of Hopf's Lemma.

Thanks to this result it is easy to prove the strong maximum principle in one dimension.

2. The Laplacian and general second order elliptic operators

In order to carry out the study of the maximum principle in greater dimensions, we first address the case of the Laplacian, that is the canonical example of second order elliptic differential operator. Instead of approaching the proof from the well-known Hopf's Lemma, we introduce the so-called **Mean Value Property** for the Laplace equation. This property states that if we have a harmonic function defined on a ball, we can determine the value of the function at the centre of the ball from the average of the values of the function on the surface of the ball.

Later on we address the case of more general **elliptic operators** given by

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

for certain bounded coefficients $a^{ij}, b^i, c, i, j = 1, \dots, n$.

To demonstrate the maximum principle applied to these operators we use the Hopf's Lemma which proof is based on the same ideas as in the one-dimensional case, by applying the restriction that $c(x)$ has to be greater than or equal to zero.

Some of the applications of the maximum principles that we have proved are, for instance

- **Uniqueness of solutions to elliptic Dirichlet problems.**

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de julio, 2023

- **Comparison principle.**
- **Sign of the solutions.**

3. Alexandrov's maximum principle

The aim of this section is to try to remove the restriction we had on $c(x)$ in the previous chapters.

Following on from the above section, we first consider the case where the Dirichlet problem is given by the Laplacian and then we state the **Alexandrov's maximum principle** for general second order elliptic partial differential operators.

This leads us to obtain the **maximum principle for small domains**, imposing a restriction on the size of the domain that will be the key tool to obtain the results of the following section.

4. Maximum principle and symmetry

In this last section we prove the monotonicity and symmetry properties of positive solutions of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B(0, 1), & f(u) := u^2 \in Lip_{Loc}(B(0, 1)), \\ u = 0 & \text{on } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

To do so, we will use the maximum principles seen previously and the method called **moving planes method** that is based on comparing the sign of the difference between $u(x)$ and $u(x_\lambda)$, where x_λ is the reflected point of x with respect to an hyperplane T_λ that will be moved from λ close to 1 to 0.

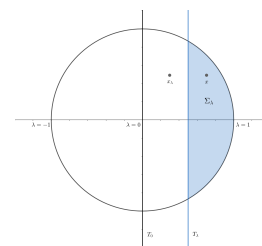


Figure 2: Initial moving planes scheme.

References

- [1] EVANS, Lawrence C. *Partial differential equations*. 2nd ed. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2010. ISBN 9780821849743.
- [2] GIDAS, B., Wei-Ming NI y L. NIRENBERG. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. *Communications in Mathematical Physics*. 1979 , 68(3), 209–243. ISSN 1432–0916.
- [3] GILBARG, David y TRUDINGER, Neil, S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2nd ed. Berlin:Springer, 1998. ISBN 354013025X.