Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Carlos Javier Díaz Martín

Teoremas de reordenación de Riemann

Riemann's rearrangement theorems

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2023

Dirigido por
Teresa de Jesús Bermúdez de León

Teresa de Jesús Bermúdez de León
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A Tere por la confianza depositada en mi desde el principio de este viaje. Nunca olvidaré tu cara de sorpresa y alegría cuando en mis primeros días como estudiante del grado, más concretamente, al comienzo de *Fundamentos Matemáticos* $\mathcal{I}$, levanté la mano para resolver una cuestión de la cual, sorprendentemente dí con la respuesta adecuada, y tú te encargaste en tutoría de dejarme claro lo sorprendida que te había dejado y el potencial que habías visto en mí. Es un momento que me ha marcado bastante y me ha hecho sentir especial académicamente como nunca me he sentido.

A mi familia, mis padres y Alba, en especial a mi padre por tanta predispocisión para ayudarme y facilitarme el camino tratando de hacerme reflexionar y relacionar lo aprendido, has sido fundamental. Me habéis brindado tanto consejos para una distribución más adecuada y eficaz del tiempo, como vuestra ayuda siempre que la he necesitado. Sin ustedes esto no podría haber sido posible.

A mis amigos, cyberamigos y primos por hacerme salir de la rutina de estudio en muchos momentos de frustración. Gracias por tu apoyo y preocupación Rodrigo.

A ti, por ser y estar.

Carlos Javier Díaz Martín
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

El Teorema de reordenación de Riemann asegura que "toda serie numérica real convergente pero no absolutamente convergente, se puede reordenar de tal forma que la serie reordenada converja a cualquier valor prefijado de entemano, ó incluso diverger." El objetivo de este trabajo es estudiar el conjunto de todas las reordenaciones que hacen que la serie reordenada sea convergente, en diferentes contextos de trabajo. Es decir, estudiar las reordenaciones de una serie con valores reales, complejos, en un espacios de dimensión finita e incluso en espacios de dimensión infinita.

Abstract

Riemann's Rearrangement Theorem states that "every convergent but not absolutely convergent series of real numbers can be rearranged in such a way that the rearranged series converges to any predetermined value or even diverges." The objective of this study is to examine the set of all rearrangements that make the rearranged series converge, in different working contexts. In other words, we aim to study the rearrangements of a series with real or complex values, in finite-dimensional spaces, and even in infinite dimensional spaces.

Contenido

Introducción

El Teorema de reordenación objeto del presente trabajo se debe al célebre matemático alemán del siglo XIX Bernhard Riemann (1826 - 1866). Sostiene que:

Si una serie numérica real es convergente pero no lo es absolutamente, entonces podemos reordenar sus términos de tal forma que la serie resultante converge a cualquier valor prefijado de antemano, o incluso diverger.

En un lenguaje más directo esto significa que "la conmutatividad no se conserva cuando hay infinitos sumandos".

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotamos $S(\sum a_n)$ el conjunto de los valores de cualquier reordenación convergente de la serie $\sum a_n$. El Teorema de reordenación de Riemann asegura que si $\sum a_n$ es convergente y no absolutamente convergente (o lo que es equivalente $\sum a_n$ converge condicionalmente), entonces $S(\sum a_n)$ es el conjunto de los número reales, $\mathbb{R}$. Este fenómeno de que una serie numérica real pueda cambiar de suma cuando se reordenan sus términos es un hecho sorprendente por el cambio de suma y además porque se puede encontrar una reordenación que sume cualquier valor real. Este fascinante resultado, tiene una demostración bastante sencilla. Parece natural preguntarse lo siguiente:

> Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en un espacio normado. Si la serie $\sum a_n$ es convergente pero no lo es absolutamente (es decir $\sum \|a_n\|$ no es convergente), ¿qué se puede decir del conjunto $S(\sum a_n)$?

El resultado "esperado" podría "parecer" que es análogo y simple como es el Teorema de reordenación de Riemann para series numéricas reales. Sin embargo, en este trabajo presentaremos un estudio del problema en diferentes contextos de trabajo como es el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, en espacios de dimensión finita y finalmente en espacios de dimensión infinita.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primer capítulo, se presenta el origen y evolución histórica del Teorema de reordenación de Riemann y sus variantes. Además recopilamos algunos resultados previos necesarios sobre la convergencia en espacios normados que serán necesarios a lo largo del trabajo. El capítulo dos se centra en el caso real, concretamente se estudia diferentes tipos de convergencia de una serie numérica (convergencia absoluta, condicional, incondicional y perfecta) y el Teorema de reordenación de Riemann en $\mathbb{R}$. En el tercer capítulo consideramos el estudio en $\mathbb{C}$, presentando las dificultades que se encuentran con su posible generalización. Proporcionamos algunos ejemplos que aportan cierta luz, sobre la situación en el plano complejo. En el cuarto capítulo se encuentran los resultados principales de esta memoria y se centra en espacios de dimensión finita. En particular estudiamos:

- convergencia condicional,
- convergencia incondicional (cualquier reordenación es convergente),
- el Teorema de Lévy-Steinitz, que asegura que en espacios finito dimensionales el conjunto $S(\sum a_n)$ para series condicionalmente convergentes es un subespacio afín, es decir el trasladado de un subespacio.

En el quinto capítulo se presentan resultados sobre reordenamiento en espacios de dimensión infinita. En este caso, la teoría tanto de convergencia incondicional como absoluta dejan de ser equivalentes, aportando ejemplos que lo ratifican. La versión del Teorema de Lévy-Steinitz falla estrepitosamente. Concretamente, el conjunto de todas las reordenaciones de una serie condicionalemnte convergente deja de ser un subespacio afín. Finalizamos con un Apéndice donde hemos incluido algunos resultados necesarios.

1

Preliminares

En este capítulo presentamos el origen y evolución del Teorema de reordenación de Riemann. Además recopilamos algunos resultados previos necesarios sobre la convergencia en espacios normados que serán necesarios a lo largo del trabajo.

1.1. Contexto histórico

La referencia principal en esta sección es [1]. Véase también [5, 7, 8, 11, 14].

La primera noción de serie infinita es muy antigua. Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), ya comentaba que la suma de una serie infinita podía ser finita. Aunque la definición de convergencia de una serie numérica real se debe a Gauss (1777 - 1855).

Dirichlet (1805 - 1859) fue el primero en dar reordenaciones con suma distinta, concretamente con la serie armónica alternada, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. En 1833, Cauchy (1789 - 1857) se da cuenta de que las series convergentes de números reales con términos no todos positivos podía tener subseries divergentes. Posteriormente, en 1854, Riemann prueba su Teorema de reordenación.

Desde la época en que Riemann demostró su Teorema de reordenación, comenzaron las investigaciones de reordenamientos de series condicionalmente convergentes. Entre los matemáticos que llevaron a cabo dichas investigaciones están Sierpinski (1882 - 1969), Agnew (1900 - 1986), Borel (1871 - 1956), Levi (1875 - 1961), Schlomilch (1823 - 1901) y Pringsheim (1850 - 1941).

Una primera generalización del Teorema de reordenación de Riemann fue obtenida por Lévy [9] en 1905 para $\mathbb{C}$, más tarde, Steinitz [13] en 1913 la consiguió para $\mathbb{R}^m$. La versión dada por Lévy estaba incompleta y fue arreglada por Steinitz. Posteriormente, Justice obtiene resultados muy relacionados al Teorema de reordenación de Riemann tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$, con un enfoque diferente al realizado por Lévy y Steinitz, [7].

A lo largo de todo este tiempo han aparecido muchas versiones por diferentes autores sobre este teorema. Sin embargo, destaca la aproximación dada por Rosenthal en 1987 [12] donde da una demostración más asequible al resultado de Lévy y Steinitz para $\mathbb{R}^m$. De hecho esta es la versión que presentamos en este trabajo. Rosenthal comenta en su artículo

> *"What is the corresponding theorem for series of complex numbers?*
>
> *Our informal survey has shown that surprisingly few mathematicians know the answer to this question...*
>
> *... The purpose of this article is to make this beautiful result more widely known."*

En 1929 - 1930, Orlicz comienza el estudio de series en espacios de dimensión infinita. En esta misma época en Lwów, Polonia un grupo de matemáticos excepcionalmente brillantes como Ulam, Banach, Mazur, Steinhauss entre otros se reunían asiduamente en un café escocés. El objetivo principal era compartir, colaborar e interesarse en los problemas de los demás, sobre todo en análisis funcional, pero el área era lo de menos. Dichos problemas se escribían en una libreta que custodiaba el camarero y que fue rescatada y publicada por Ulam (1909 - 1984) después de la segunda guerra mundial, [14]. La mayoría de los problemas tenían un premio por su solución, que podía ser una botella de vino de medida positiva, un pato, una taza de café, ... Uno de esos problemas está relacionado con el estudio de este trabajo y es el siguiente:

> "**Problem 106: Banach**
>
> *Prize: One bottle of wine, S. Banach*
>
> *Let $\sum x_i$ be a series (x_i are elements of a Banach space) with the property that under a certain ordering of its terms the sum is equal to y_0, under some other ordering, equals y_1. Prove that for every real number ℓ there exists an ordering of the given series such that the sum of it will be $\ell y_0 + (1-\ell)y_1$."*

1.2. Resultados previos

Esta sección está basada en el libro de Kadets y Kadets [8].

A partir de ahora, cuando hablemos de X, haremos referencia a un espacio normado y denotaremos $||\cdot||$ la norma definida en él.

Definición 1.1. *Una sucesión en X, es una aplicación $a:\mathbb{N}\longrightarrow X$, tal que a cada $n\in\mathbb{N}$ le asociamos $a(n)=a_n$, que representaremos de la siguiente manera, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$. Diremos que el término general de la sucesión es $a_n=a(n)$.*

Definición 1.2. *Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ es una sucesión de Cauchy si,*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\, n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0,\ ||a_{n+p}-a_n||<\varepsilon, \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

Definición 1.3. *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ es convergente si existe un elemento a de X que satisface la siguiente propiedad:*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\, n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0,\ ||a_n-a||<\varepsilon.$$

Definición 1.4. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$. La n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ es la suma de sus primeros n términos, $S_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k$. Se dice que la serie $\sum a_k$, es convergente si la sucesión de sus sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la norma del espacio a un elemento $S\in X$. El límite de dicha sucesión se llama suma de la serie: $S=\lim_{n\to\infty}S_n$. Cuando escribimos $S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ queremos decir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge y su suma es igual a S.*

Una primera consecuencia de la definición es,

Observación 1.5. Si una serie $\sum a_n$ es convergente en X, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Definición 1.6. *Un espacio de Banach X es un espacio normado X tal que toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un elemento del espacio X.*

El siguiente resultado nos da una caracterización de la convergencia de una serie en espacios de Banach.

Teorema 1.7. ***(Condición de Cauchy).*** *Sea X un espacio de Banach y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$. La serie $\sum a_n$ converge sí y sólo sí, para cada $\varepsilon>0$ existe un entero positivo $n_0=n_0(\varepsilon)$ tal que, para todo $n>n_0$ se tiene que:*

$$||a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}||<\varepsilon, \qquad \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

Definición 1.8. *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones en* X*. Dadas las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$*, diremos que una es una reordenación de la otra sí y sólo sí:*

$$b_n = a_{f(n)}, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde f *es una función biyectiva de* $\mathbb{N}$ *en sí mismo. Entonces se dice que* $\sum b_n$ *es una reordenada de* $\sum a_n$*.*

Definición 1.9. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$*. Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es:*

1. *Absolutamente convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n||$ *converge.*
2. *Incondicionalmente convergente si para toda* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *biyectiva, se tiene que* $\sum a_{f(n)}$ *es convergente, es decir, cualquier reordenación de la serie es convergente.*
3. *Condicionalmente convergente si* $\sum a_n$ *converge pero no absolutamente.*
4. *Perfectamente convergente si para toda* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, con* $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$*, la serie* $\sum \varepsilon_n a_n$ *es convergente.*

Es claro que la convergencia incondicional implica la convergencia.

A continuación damos una caracterización de ser espacio de Banach.

Teorema 1.10. *Sea* X *un espacio normado. Entonces* X *es un espacio de Banach sí y sólo sí toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Sea X espacio de Banach y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\sum ||a_n|| < \infty$. Veamos que $\sum a_n$ es convergente. Para ello es suficiente con demostrar que $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ es una sucesión de Cauchy.
Sea $n > m$. Tenemos que $||S_n - S_m|| = \left|\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||a_k||$ y como por hipótesis $\sum ||a_n|| < \infty$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} ||a_k|| = 0$. Luego $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.
Para la otra implicación, tomemos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Veamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en X. Elegiremos una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que demostraremos que es convergente. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} := 0$. Entonces para

$$\epsilon = \tfrac{1}{2},\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : ||a_n - a_{n_1}|| < \tfrac{1}{2}, \forall n > n_1$$

$$\epsilon = \tfrac{1}{2^2}, \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : ||a_n - a_{n_2}|| < \tfrac{1}{2^2}, \forall n > n_2 \text{ (con } n_2 > n_1)$$

$$\vdots$$

$$\epsilon = \tfrac{1}{2^k}, \exists\, n_k \in \mathbb{N} : ||a_n - a_{n_k}|| < \tfrac{1}{2^k}, \forall n > n_k \text{ (con } n_k > n_{k-1}).$$

Por tanto, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $||a_{n_k} - a_{n_{k-1}}|| < \frac{1}{2^{k-1}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos que $\sum_{k=1}^{\infty} ||a_{n_k} - a_{n_{k-1}}||$ es convergente, esto es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} ||a_{n_k} - a_{n_{k-1}}|| &= ||a_{n_1}|| + \sum_{k=2}^{\infty} ||a_{n_k} - a_{n_{k-1}}|| \\ &< ||a_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < \infty.\end{aligned}$$

Luego concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} ||a_{n_k} - a_{n_{k-1}}||$ es convergente y por tanto $S_k = \sum_{i=1}^{k} (a_{n_i} - a_{n_{i-1}}) = a_{n_k}$ es convergente. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión suya convergente a un cierto $a \in X$, por el Teorema A.1, se tiene que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

A continuación definimos segmento de una serie, se basa en la suma de un bloque finito de términos consecutivos de la serie.

Definición 1.11. *Llamamos segmento de una serie a la suma finita de términos consecutivos, esto es* $\sum_{k=m+1}^{n} a_k = S_n - S_m$, *con* $n > m$.

Teorema 1.12. ***(Criterio de convergencia de Cauchy).*** *Sea X espacio de Banach y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, es convergente sí y sólo sí, la siguiente sucesión de segmentos converge a cero:*

$$\lim_{n,m\to\infty} \left|\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|\right| = 0.$$

Demostración. Supongamos que la serie converge, es decir existe el límite de la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y es finito. Lo llamamos $S \in X$. Entonces,

$$\left|\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|\right| = ||S_n - S_m|| \leq ||S_n - S|| + ||S_m - S|| \to 0 \ \ (n, m \to \infty).$$

Por otro lado, supongamos que $\lim_{n,m\to\infty} ||S_n - S_m|| = 0$. Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy, y dado que X es espacio de Banach, se obtiene el resultado. □

Veamos que cualquier reordenación, de una serie absolutamente convergente, es convergente.

Proposición 1.13. *Toda serie absolutamente convergente en un espacio de Banach es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con X espacio de Banach. Supongamos que $\sum a_n$ converge absolutamente y veamos que $\sum a_n$ converge incondicionalmente. Sea f una permutación arbitraria, $\sum ||a_{f(n)}||$ converge al ser absolutamente convergente. Por el Teorema 1.10 se obtiene que $\sum a_{f(n)}$ es convergente. $\square$

Dada una serie $\sum a_n$ con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, definimos el conjunto:

$$S\left(\sum a_n\right) := \left\{x \in X : \exists\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textit{ biyectiva tal que } \sum a_{f(n)} = x\right\}.$$

2

Teorema de Riemann en $\mathbb{R}$

En este capítulo estudiamos series numéricas reales, es decir, vamos a considerar series en $\mathbb{R}$ con la norma del valor absoluto. Se presenta el Teorema de reordenación de Riemann, así como algunas consecuencias. Además se obtienen resultados sobre la convergencia incondicional.

2.1. Resultado principal

Si consideramos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, entonces:

$$S\left(\sum a_n\right) = \left\{r \in \mathbb{R} : \exists\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \textit{biyectiva tal que} \ \sum a_{f(n)} = r\right\}.$$

Veamos algunas de sus propiedades. En el capítulo anterior vimos que la convergencia absoluta implica la convergencia incondicional. En el caso real podemos asegurar algo más.

Teorema 2.1. *Sea $\sum a_n$ una serie convergente con $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con $\sum a_n = S$. Entonces cualquier reordenación de dicha serie, converge a S, y por tanto, se tiene que $S(\sum a_n) = \{S\}$.*

Demostración. Denotemos por S_k la suma parcial de la reordenación de la serie de partida, $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_{f(n)}$. Como es de términos positivos, es fácil ver que $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots S_k < \ldots S_n \leq S$. La sucesión $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente, por tanto, es convergente, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \overline{S} \leq S$. Intercambiando los roles entre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ y argumentando de la misma manera con f^{-1}, obtenemos la desigualdad opuesta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \leq \overline{S} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$. Concluimos que, $S = \overline{S}$. $\square$

En el siguiente teorema se prueba un resultado sorprendente sobre $S(\sum a_n)$. Este se debe a Riemann y se encuentra en su tésis de habilitación [5].

Teorema 2.2. ***(Teorema de reordenación de Riemann).***
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Si* $\sum a_n$ *es condicionalmente convergente, entonces* $S(\sum a_n) = \mathbb{R}$.

Demostración. Para todo número real a_n, denotamos

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & si \;\; a_n > 0 \\ \\ 0 & si \;\; a_n \leqslant 0 \end{cases} \qquad y \qquad a_n^- := a_n^+ - a_n.$$

Luego, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.

Consideremos las series de términos positivos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
Vamos a demostrar que ambas series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ deben ser divergentes. Supongamos por *reducción al absurdo* que no lo son. Entonces la casuística es:

Caso 1: Ambas series son convergentes. De ser así, $\sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$ nuestra serie sería absolutamente convergente por el álgebra de series convergentes. Lo cual es absurdo ya que la serie $\sum a_n$ es condicionalmente convergente.

Caso 2: Si $\sum a_n^+ = \infty$ y $\sum a_n^-$ converge, llegamos a un absurdo ya que por el mismo argumento, la serie $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$, sería divergente.

Caso 3: Si $\sum a_n^+$ converge y $\sum a_n^- = \infty$, procedemos como el caso anterior.

Por tanto concluimos que ambas series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son divergentes a ∞.

Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos a construir una reordenación con suma α. El objetivo es el de acorralar a α acercándonos tanto superiormente como inferiormente, tratando de reproducir la idea del *Criterio de Leibniz para series alternadas.*
Construimos las sumas parciales de la siguiente forma, eligiendo m_1 el menor número entero positivo tal que se nos da las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1^+ \leq \alpha \\ &S_2 = a_1^+ + a_2^+ \leq \alpha \\ &\;\vdots \\ &S_{m_1-1} = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1-1}^+ \leq \alpha \\ &S_{m_1} = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1}^+ > \alpha. \end{aligned}$$

Eso lo podemos conseguir dado que $\sum a_m^+ = +\infty$. Utilizando que $\sum a_k^- = +\infty$, podemos ir restando términos a_n^- respetando el orden, hasta quedar por debajo de α:

$$
\begin{aligned}
&S_{m_1+1} = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1}^+ - a_1^- \geq \alpha\\
&S_{m_1+2} = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1}^+ - a_1^- - a_2^- \geq \alpha\\
&\ \vdots\\
&S_{m_1+k_1-1} = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1}^+ - (a_1^- + a_2^- + \cdots + a_{k_1-1}^-) \geq \alpha\\
&S_{m_1+k_1} = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1}^+ - (a_1^- + a_2^- + \cdots + a_{k_1}^-) < \alpha
\end{aligned}
$$

y repetimos el procedimiento.

Observamos que las sumas parciales desde $S_{m_j+k_j}$ a $S_{m_{j+1}+k_j}$ crecen y desde $S_{m_{j+1}+k_j}$ a $S_{m_{j+1}+k_{j+1}}$ decrecen. Por lo tanto, es suficiente controlar los más alejados, es decir, $|S_{m_{j+1}+k_j} - \alpha|$ y $|S_{m_j+k_j} - \alpha|$. Por un lado tenemos que, $|S_{m_{j+1}+k_j} - \alpha| < a_{m_{j+1}}^+$ y $|S_{m_j+k_j} - \alpha| < a_{k_j}^-$. Por otra parte, dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a 0, entonces $(a_m^+)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(a_k^-)_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a 0. Luego concluimos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. □

Corolario 2.3. *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente. Entonces, existen dos subsucesiones $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

(1) $a_{n_k} \geq 0$ *y* $a_{m_k} \leq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cap \{a_{m_k} : k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$,

(3) $\{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{m_k} : k \in \mathbb{N}\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(4) $\sum a_{n_k} = +\infty$ *y* $\sum a_{m_k} = -\infty$.

Demostración. Es consecuencia de la demostración del Teorema 2.2. □

Una observación de la demostración del Teorema 2.2 nos permite afirmar que

Teorema 2.4. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numérica real tal que*

(1) (a_n) *tiende a cero,*

(2) $\sum a_n^+$ *y* $\sum a_n^-$ *son series divergentes,*

entonces $S(\sum a_n) = \mathbb{R}$.

Tomando como ejemplo la serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, y graficando la idea anterior podemos ver que tenemos dos subsucesiones ambas con serie divergente, una situada en el eje de abcisas positivo con argumento 0, y otra en el eje de abcisas negativo con argumento π (La Figura 2.1 que aparece en la siguiente página hace referencia al ejemplo).

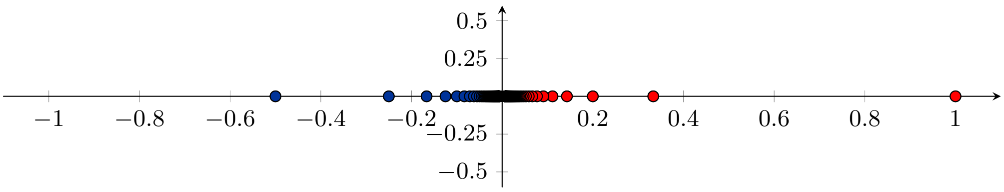


Figura 2.1. Representación gráfica de la sucesión $\frac{(-1)^n}{n}$.

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.1 afirma que si la serie $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $S(\sum a_n) = \{S\}$, donde $S = \sum a_n$. Pero realmente es una caracterización de serie numérica absolutamente convergente.

Teorema 2.5. ***(Teorema de Dirichlet).*** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Entonces la serie $\sum a_n$ converge absolutamente si y sólo si $S(\sum a_n) = \{S\}$.*

Demostración. Veamos que si $S(\sum a_n) = \{S\}$, entonces $\sum a_n$ converge absolutamente. Entonces existe una reordenación f tal que $\sum a_{f(n)}$ converge a S. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\sum a_{f(n)}$ no converge absolutamente, entonces $S(\sum a_{f(n)}) = S(\sum a_n) = \mathbb{R}$. Lo que es un absurdo. La otra implicación es consecuencia del Teorema 2.1. □

En el caso de series condicionalmente convergentes se puede añadir algo más que el Teorema 2.2.

Proposición 2.6. *Si $\sum a_n$ es una serie numérica real condicionalmente convergente, entonces existen reordenamientos f y g tales que $\sum a_{f(n)}$ es divergente a $+\infty$ y $\sum a_{g(n)}$ es divergente a $-\infty$.*

Demostración. Seguiremos la notación a_n^+ y a_n^- utilizada en la demostración del Teorema 2.2. Si la serie es condicionalmente convergente, hemos visto que las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ deben ser divergentes. El reordenamiento que buscamos respetando el orden, será el siguiente. Sea m_1 el menor número natural tal que:

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_i^+ \geq a_1^- + 1.$$

Sea m_2 el menor número natural tal que :

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} a_i^+ \geq a_2^- + 1$$

y repitiendo este procedimiento, definiremos la siguiente reordenación:

$$a_1^+ + a_2^+ + \ldots + a_{m_1}^+ - a_1^- + a_{m_1+1}^+ + \ldots + a_{m_2}^+ - a_2^- + \ldots$$

Con este reordenamiento, conseguimos que la serie diverja a $+\infty$, pues las sumas parciales están preparadas de manera que siempre estemos sumando cantidades positivas.
El otro caso es similar. $\square$

2.2. Reformulación del Teorema de Riemann

Dada una sucesión numérica real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos las siguientes propiedades

(P1$\mathbb{R}$) (a_n) es una sucesión convergente a cero.

(P2$\mathbb{R}$) Si $\sum a_n^+$ es convergente, entonces $\sum a_n^-$ es convergente y viceversa, donde $a_n^+ = max\,\{a_n, 0\}$ y $a_n^- = max\,\{-a_n, 0\}$.

En los Teoremas 2.1 y 2.2 se obtienen condiciones que garantizan tanto que $S(\sum a_n) = \{\sum a_n\}$ como que $S(\sum a_n) = \mathbb{R}$, respectivamente. Veamos que podemos decir sobre la condición $S(\sum a_n) = \emptyset$.

Teorema 2.7. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión numérica real. Entonces $S(\sum a_n) = \emptyset$ sí y sólo sí no se da (P1$\mathbb{R}$) o no se da (P2$\mathbb{R}$) .*

Demostración. Supongamos $S(\sum a_n) = \emptyset$. Es claro que $\sum a_n$ es divergente y se obtiene el resultado.
Veamos el recíproco. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a cero es claro. Supongamos que no se da *(P2$\mathbb{R}$)*, entonces es claro que cualquier reordenación de la serie $\sum a_n$ es divergente. $\square$

El siguiente Teorema nos da una reformulación más completa del Teorema 2.2, en función del conjunto $S\left(\sum a_n\right)$:

Teorema 2.8. *Sea $\sum a_n$ una serie numérica real. Entonces, se tiene una de las siguientes propiedades*

1. *$S(\sum a_n) = \emptyset$ ó*
2. *$S(\sum a_n) = \{r\}$, siendo $r \in \mathbb{R}$ ó*
3. *$S(\sum a_n) = \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.9. La serie armónica alternada, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, es condicionalmente convergente.

Es convergente, ya que satisface el *Criterio de Leibniz para series alternadas*, esto es, $a_n = \frac{1}{n}$ es monótona decreciente y su límite es cero. Sin embargo, la serie de valores absolutos $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, ya que por el *criterio de convergencia*

para las series-p, $\sum \frac{1}{n^p}$ es convergente sí y sólo sí $p > 1$.
Como ilustración del Teorema de reordenación de Riemann (Teorema 2.2), reordenaremos la serie de forma ingeniosa de manera que su suma converja a $\frac{\ln(2)}{2}$:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right].$$

Por tanto, $\sum a_{f(n)} = \frac{ln(2)}{2}$ para la reordenación definida anteriormente.

2.3. Convergencia incondicional

Según la definición de serie incondicionalmente convergente nos planteamos estudiar el conjunto $S\left(\sum a_n\right)$ para dichas series, obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 2.10. *Todas las reordenaciones de una serie numérica real incondicionalmente convergente tienen la misma suma. Es decir, si $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente, entonces $S(\sum a_n) = \{S\}$ donde S es la suma de la serie $\sum a_n$.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Sea $\sum a_n$ una serie numérica real incondicionalmente convergente. Supongamos que existe f y g aplicaciones biyectivas de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tal que:

$$\sum a_{f(n)} = s \neq \overline{s} = \sum a_{g(n)}.$$

Entonces, por el Teorema 2.1, se tiene que $\sum |a_n|$ es divergente pues existen dos reordenaciones de la serie cuya suma es distinta.
Luego por la Proposición 2.6, existe una reordenación φ tal que $\sum a_{\varphi(n)} = +\infty$.
Absurdo pues partimos de una serie incondicionalmente convergente. $\square$

En la Definición 1.9 introducimos los conceptos de serie absolutamente convergente, incondionalmente convergente y perfectamente convergente. En el siguiente resultado probaremos que en $\mathbb{R}$ dichos conceptos son equivalentes.

Teorema 2.11. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

(2) $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente.

(3) $\sum a_n$ es perfectamente convergente.

Demostración. Probaremos que (1) $\Leftrightarrow$ (2) y (1) $\Leftrightarrow$ (3).
(1) $\Rightarrow$ (2) Es consecuencia del Teorema 2.1.

(2) $\Rightarrow$ (1) Por el Teorema 2.10 sabemos que toda reordenación de una serie incondicionalmente convergente tiene la misma suma. Supongamos primero que la serie es divergente, esto sería absurdo pues no cumple las hipótesis. Supongamos ahora que la serie es condicionalmente convergente, por el Teorema 2.2, se llega a un absurdo. Finalmente, nuestra serie debe de ser absolutamente convergente.

(1) $\Rightarrow$ (3) Partimos de una serie $\sum a_n$ que es absolutamente convergente, y queremos ver que la serie $\sum \varepsilon_n a_n$ es convergente para toda $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Tomando valor absoluto, llegamos a que $\sum |\varepsilon_n a_n| = \sum |a_n|$ que es convergente, y por el Teorema 1.10, $\sum \varepsilon_n a_n$ es convergente.

(3) $\Rightarrow$ (1) Por hipótesis, la serie $\sum \varepsilon_n a_n$ es convergente para toda $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$.
Tomemos ε_n de tal manera que $\varepsilon_n a_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si $a_n \geq 0$, entonces $\varepsilon_n = +1$, y si $a_n < 0$, entonces $\varepsilon_n = -1$. Luego obtenemos que la serie de términos positivos $\sum |a_n|$ es convergente. $\square$

Observación 2.12. La serie armónica alternada (Ejemplo 2.9) no converge incondicionalmente.

3

Teorema de Riemann en $\mathbb{C}$

El objetivo de este capítulo es estudiar el Teorema de reordenación de Riemann en el contexto más cercano a los números reales, como es el conjunto de los números complejos. Siendo tan natural el planteamiento del problema, no es tan conocida su respuesta.

Las referencias principales de este capítulo son la tesis [7] y el artículo [16].

Antes de comenzar a estudiar el problema recordemos algunas definiciones y propiedades, análogas a las empleadas en el caso real.

Diremos que una serie $\sum z_n$ con $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ es convergente si la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas parciales $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} Re(z_k) + i\sum_{k=1}^{n} Im(z_k)$ es convergente, donde $Re(z_k)$ e $Im(z_k)$, denotan la parte real y la parte imaginaria de z_k, respectivamente. Además tenemos que:

- $\sum z_n$ es convergente si, y sólo si, las series $\sum Re(z_n)$ y $\sum Im(z_n)$ son series convergentes,
- si $\sum z_n$ converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

La convergencia de una serie compleja y las de su parte real e imaginaria están estréchamente relacionadas.

Teorema 3.1. *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Si la serie $\sum z_n$ es absolutamente convergente, entonces se tiene las siguientes propiedades:*

(1) $\sum Re(z_n)$ *y* $\sum Im(z_n)$ *son absolutamente convergentes.*

(2) $\sum z_n$ *converge.*

Demostración. Sabemos que:

$$|Re(z_n)| \leq |z_n| = \sqrt{Re(z_n)^2 + Im(z_n)^2} \geq 0 \Rightarrow \sum |Re(z_n)| < \infty,$$

$$|Im(z_n)| \leq |z_n| = \sqrt{Re(z_n)^2 + Im(z_n)^2} \geq 0 \Rightarrow \sum |Im(z_n)| < \infty.$$

Como las series $\sum |Re(z_n)|$ y $\sum |Im(z_n)|$ son de términos reales, por el Teorema 2.1, tenemos que las series $\sum Re(z_n)$ y $\sum Im(z_n)$ son convergentes, y por tanto, la serie $\sum z_n = \sum (Re(z_n) + iIm(z_n))$ es convergente.

En el Capítulo 2 se demostró que todas las reordenaciones de una serie numérica real absolutamente convergente, es un único valor (Teorema 2.1). En el siguiente resultado vemos que esta propiedad se conserva para series complejas.

Teorema 3.2. *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de números complejos tal que $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Entonces se tiene que $S(\sum z_n) = \{z_0\}$, donde z_0 es el valor de la suma de la serie $\sum z_n$.*

Demostración. Tenemos que $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Por el Teorema 3.1 sabemos que $\sum Re(z_n)$ y $\sum Im(z_n)$ son absolutamente convergentes. Aplicando ahora el Teorema 2.1, tenemos que $S(\sum Re(z_n)) = \{x_0\}$, donde $x_0 := \sum Re(z_n)$ y $S(\sum Im(z_n)) = \{y_0\}$, donde $y_0 := \sum Im(z_n)$. Luego $S(\sum z_n) = \{x_0 + iy_0\} = \{z_0\}$, siendo z_0 el valor de la suma de la serie $\sum z_n$.

El objetivo principal es estudiar la siguiente cuestión:

> ¿Qué se puede decir del conjunto $S(\sum z_n)$ cuando $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$?

Evidentemente, si z_n no converge a cero, entonces $S(\sum z_n)$ es el conjunto vacío. Además por Teorema 1.13, se tiene que si $\sum z_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie es incondicionalmente convergente y por tanto $S(\sum z_n) = \{\sum z_n\}$.

Ejemplo 3.3. Sea $z_0 := x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ fijo. Entonces para $z_n := \frac{x_0}{2^{n-1}} + i\frac{y_0}{2^{n-1}}$, la serie $\sum z_n$ es absolutamente convergente, pues son absolutamente convergente tanto la parte real como la imaginaria. Luego $S(\sum z_n) = \{z_0\}$.

Planteamos el siguiente problema:

> ¿Qué se puede decir del conjunto $S(\sum z_n)$ cuando $\sum z_n$ es una serie condicionalmente convergente en $\mathbb{C}$?

Como consecuencia del Teorema 2.2, tenemos algunos casos sencillos:

1. si $\sum z_n$ es condicionalmente convergente y $\sum Im(z_n)$ es absolutamente convergente, entonces $S(\sum z_n)$ es una recta paralela al eje OX.
2. si $\sum z_n$ es condicionalmente convergente y $\sum Re(z_n)$ es absolutamente convergente, entonces $S(\sum z_n)$ es una recta paralela al eje OY.

Ejemplo 3.4. Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Entonces para $z_n := \frac{(-1)^n}{n} + i\frac{y_0}{2^{n-1}}$ se tiene que $S(\sum z_n) = \{x + iy_0 \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$, es decir es la recta $y = y_0$.

Ejemplo 3.5. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces para $z_n := \frac{x_0}{2^{n-1}} + i\frac{(-1)^n}{n}$. se tiene que $S(\sum z_n) = \{x_0 + iy \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$, es decir la recta $x = x_0$.

Como hemos visto, no resulta tan simple. Este primer intento de generalización tiene algunas complicaciones, no es posible una demostración análoga al Teorema de reordenación de Riemann (Teorema 2.2). Más aún, los casos sencillos comentados anteriormente, prueban que no es posible obtener un resultado "totalmente análogo" o sin alguna modificación. Es decir, no siempre que $\sum z_n$ sea condicionalmente convergente, vamos a tener que $S(\sum z_n) = \mathbb{C}$.

Ya estamos en condiciones de presentar el resultado principal. No incluimos la demostración ya que en el próximo capítulo estudiaremos un caso más general, los espacios finito dimensionales e incluye este en particular. Para profundizar en el caso complejo ver [7].

Teorema 3.6. *[7, Theorem 9] Si $\sum z_n$ es una serie condicionalmente convergente de números complejos, entonces $S(\sum z_n)$ es todo el plano complejo o una recta.*

Veamos algunos ejemplos interesantes.

Ejemplo 3.7. [11, Pag 28] Sea

$$z_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n} i & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces se tiene que tanto $\sum z_{2n}$ como $\sum z_{2n+1}$ son series condicionalmente convergentes. Por el Teorema 2.2, se tiene que:

1. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe f_α tal que $\sum z_{f_\alpha(2n)} = \alpha$, donde $f_\alpha : \{2n : n \in \mathbb{N}\} \to \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, y
2. para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe f_β tal que $\sum z_{f_\beta(2n+1)} = \beta$, donde $f_\beta : \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \to \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$.

Luego, existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección tal que $\sum z_{f(n)} = \alpha + i\beta$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con lo que se prueba que $S(\sum z_n) = \mathbb{C}$.

Motivados por el ejemplo dado por Weber en [16, Example 5] obtenemos la siguiente familia de ejemplos.

Ejemplo 3.8. Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $z_n(k) := \frac{e^{\frac{2\pi n i}{k}}}{n}$. Entonces $\sum z_n(k)$ es condicionalmente convergente para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Además,

$$S\left(\sum z_n(k)\right) = \begin{cases} \mathbb{R} \ \text{ si } k = 2 \\ \\ \mathbb{C} \text{ si } k > 2 \end{cases}$$

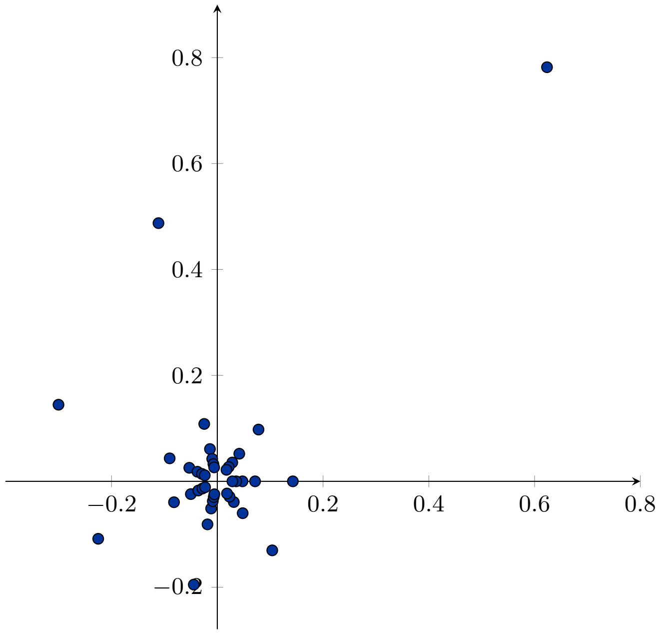


Figura 3.1. Representación gráfica de la sucesión $z_n(7) := \frac{e^{\frac{2\pi n i}{7}}}{n}$.

4

Teorema de Riemann en espacios de dimensión finita

En este capítulo estudiamos algunos de los resultados trabajados en los capítulos anteriores pero ahora en espacios finito dimensionales arbitrarios. Este es el capítulo principal de la memoria, donde abordamos el Teorema de reordenación de Riemann en espacios de dimensión finita. Además presentamos algunas cuestiones interesantes sobre el Teorema principal (Teorema de Lévy-Steintz).

Nos volveremos a apoyar en la referencia [8] y especialmente en el artículo de Rosenthal [12]. Véase también [10].

4.1. Convergencia incondicional

En el Capítulo 1 se ha visto que todas las reordenaciones de una serie absolutamente convergente coinciden (Proposición 1.13). El objetivo es plantear dos cuestiones naturales sobre la convergencia incondicional:

(1)¿Qué se puede decir de las reordenaciones de una serie incondionalmente convergente?

(2)¿Toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente?

En los Capítulos 2 y 3 vimos que la convergencia incondicional es equivalente a la convergencia absoluta en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, respectivamente.

El siguiente resultado da la respuesta a la primera cuestión en cualquier espacio de Banach.

Teorema 4.1. *Todas las sumas de reordenaciones de una serie incondicionalmente convergente en un espacio de Banach coinciden.*

Demostración. Veamos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\sum a_n$ es una serie incondicionalmente convergente en X a cierto $s \in X$ y que la reordenación de la serie $\sum a_{f(n)}$ para una permutación f dada, tiene como

suma $\tilde{s} \in X$ con $\tilde{s} \neq s$. Como aplicación del Teorema de Hahn-Banach sabemos que el espacio dual X^* de X separa puntos de X, [15, Theorem 2.8]. En particular, para $s, \tilde{s} \in X$ como $s \neq \tilde{s}$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(s) \neq x^*(\tilde{s})$. Consideramos la serie numérica (real o compleja) $\sum x^*(a_n)$ que sabemos que es convergente ya que $\sum a_n$ lo es.
Si $\sum |x^*(a_n)|$ es convergente, entonces $S(\sum x^*(a_n)) = \{x^*(s)\}$ por el Teorema 2.1 o el Teorema 3.2, por lo que llegamos a un absurdo. Si $\sum |x^*(a_n)|$ es divergente, entonces $\sum |Re(x^*(a_n))|$ ó $\sum |Im(x^*(a_n))|$ son divergentes. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\sum |Re(x^*(a_n))|$ es divergente, entonces por el Teorema 2.2 se tiene que existe una permutación g tal que $\sum Re(x^*(a_{g(n)}))$ es divergente, entonces $\sum x^*(a_{g(n)})$ es divergente. Consecuentemente tenemos una permutación g tal que $\sum a_{g(n)}$ es divergente lo que lleva a un absurdo ya que $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente. □

A continuación se proporcionan condiciones que caracterizan la convergencia incondicional.

Teorema 4.2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con X un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente.

(2) todas las subseries de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de la forma $a_{n_1} + a_{n_2} + a_{n_3} + \dots$, donde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, son convergentes.

(3) $\sum a_n$ es perfectamente convergente.

Demostración. Probaremos que (1) $\Leftrightarrow$ (2) y (2) $\Leftrightarrow$ (3).
(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que no se cumple (1), es decir, existe una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ para la cual la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ diverge. Entonces, por el criterio de Cauchy, existen un $\epsilon > 0$ y términos $m_1 < r_1 < m_2 < r_2 < \dots$ tales que $||\sum_{i=m_k}^{r_k} a_{n_i}|| \geq \epsilon$. Denotemos los términos de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ que no aparecen en ninguno de los segmentos $\{a_{n_i}\}_{i=m_k}^{r_k}$ por $y_1, y_2, \dots$. Ahora reordenaremos la serie de la siguiente manera, primero escribiremos el segmento $\{a_{n_i}\}_{i=m_1}^{r_1}$ seguido de y_1, luego el segmento $\{a_{n_i}\}_{i=m_2}^{r_2}$ seguido de y_2, y así sucesivamente, es decir

$$a_{n_{m_1}} + a_{n_{m_1+1}} + \dots + a_{n_{r_1}} + y_1 + a_{n_{m_2}} + a_{n_{m_2+1}} + \dots + a_{n_{r_2}} + y_2 + \dots.$$

Por la condición de Cauchy (Teorema 1.7), la serie diverge, esto contradice la incondicionalidad de la convergencia de la serie de partida.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que no se cumple, es decir, sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$ una reordenación divergente de nuestra serie de partida. Por la condición de Cauchy (Teorema 1.7), existen segmentos finitos y disjuntos Δ_i, $i \in \mathbb{N}$, de la serie reordenada tal que $||\sum_{a_j \in \Delta_i} a_j|| \geq \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$, para cierto $\epsilon > 0$.

Reordenemos cada bloque $\Delta_i := \{a_{\pi(i_1)}, a_{\pi(i_1+1)}, \ldots, a_{\pi(i_1+n_i)}\}$ con los términos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir $\Delta_i \subset \{a_{m_i}, a_{m_i+1}, \ldots, a_{r_i}\}$ donde

$$m_i := min\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_1+n_i)\} \quad \text{y} \quad r_i := max\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_1+n_i)\}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego $\sum_{j\in\mathbb{N}}(\sum_{a_j\in\Delta_j} a_j)$ es una subserie de $\sum a_n$ que diverge. Entendiendo con $\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{a_j\in\Delta_j} a_j)$ que comenzamos con los términos de Δ_1 escritos en el orden de la serie $\sum a_n$ y no de la serie $\sum a_{\pi(n)}$ y continuamos con Δ_2 y así sucesivamente.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria con $\alpha_i \in \{-1,1\}$. Dividamos los números naturales de la siguiente manera: $\mathbb{N} = A \cup B$, donde $A = \{n_1, n_2, \ldots\}$ es el conjunto de los índices n para los cuales $\alpha_n = 1$ y $B = \{m_1, m_2, \ldots\}$ es el conjunto de los índices n para los cuales $\alpha_n = -1$. Entonces por hipótesis, ambas series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j}$ convergen, y por tanto, se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j}$ converge.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sean $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ índices arbitrarios. Queremos demostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ es convergente. Definamos $A := \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ y $B := \mathbb{N} \setminus A$. Consideremos dos sucesiones $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\alpha_i := 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\beta_i := -1$ para $i \in B$. Por hipótesis, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i a_i$ convergen, y como consecuencia $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\alpha_i a_i + \beta_i a_i)$ es convergente. $\square$

En $\mathbb{R}$ demostramos que los conceptos de incondicionalmente convergente y absolutamente convergente son equivalentes (Teorema 2.11). En el siguiente resultado veremos que esta propiedad es cierta en cualquier espacio normado finito dimensional.

Teorema 4.3. *Sea X un espacio normado finito dimensional. Toda serie incondicionalmente convergente es equivalente a ser absolutamente convergente.*

Demostración. Por la Proposición 1.13 tenemos que toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Veamos el recíproco.
Sea X un espacio normado finito dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de X. Cada elemento $x \in X$ lo podemos escribir como $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ o bien $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Como todas las normas son equivalentes en espacios normados finito dimensionales, vamos a tomar la norma $||\cdot||_1$ dada por

$$||x||_1 = ||x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n||_1 = ||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos el funcional lineal y acotado $f_i : X \to \mathbb{K}$ definido por $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) := x_i$. Sea $\sum a_k$ una serie incondicionalmente convergente en X. Entonces es claro que $\sum_{k=1}^{\infty} f_i(a_k)$ es incondicionalmente convergente en $\mathbb{K}$. Por un razonamiento análogo al realizado en la prueba del Teorema 4.1 se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_i(a_k)|$ es convergente para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ||a_k||_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{n} |f_i(a_k)|)$ es convergente y por tanto $\sum a_k$ es absolutamente convergente. □

4.2. Resultados previos

A continuación daremos algunos resultados previos necesarios para poder obtener toda la información sobre $S(\sum a_n)$ donde $(a_n)_{n \geq 1}$ está en un espacio normado finito dimensional, que para simplificar trabajaremos en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.4. ***(El teorema del confinamiento poligonal).***
Sea $\{v_i : i = 1, \ldots, m\}$ *un conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\sum_{i=1}^{m} v_i = 0$ *con* $||v_i|| \leq 1$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *entonces existe una constante* C_n *y una permutación* P *de* $(2, \ldots, m)$ *tal que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right\| \leq C_n \tag{4.1}$$

para todo $j \in \{2, \ldots, m\}$ *donde* $C_1 = 1$ *y* $C_n \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ *para todo* n.

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción sobre n.
Veamos el caso $n = 1$. La prueba en este caso se parece bastante a la idea general de la prueba del Teorema 2.2. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 > 0$.
El objetivo es encontrar una permutación P de $(2, \ldots, m)$ que satisfaga la desigualdad (4.1) con $C_1 = 1$. Elegimos $P(2)$ tal que $v_{P(2)} < 0$ y continuamos tomando vectores negativos hasta que la suma de v_1 con el bloque elegido sea negativa, es decir

$$v_1 + (v_{P(2)} + \ldots + v_{P(k)}) < 0, \text{ con } k < m.$$

El siguiente vector que tomaremos será positivo, y seguiremos tomando un bloque de vectores positivos hasta que la suma de todos los vectores elegidos sea positiva de manera análoga al anterior paso, es decir

$$v_1 + (v_{P(2)} + \ldots + v_{P(k)}) + (v_{P(k+1)} + \ldots + v_{P(l)}) > 0, \text{ con } k < l < m.$$

Continuando de esta manera, como por hipótesis sabemos que $|v_i| \leq 1$ para todo i, está claro que el valor absoluto de cada suma parcial está comprendida entre 0 y 1. Por tanto,

$$\left| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(2)} \right| \leq 1,$$

para todo $j \in \{2, \ldots, m\}$.
Supongamos que la propiedad es cierta para $n-1$, es decir existe C_{n-1} tal que para cualquier familia de vectores finita $\{v_i,\ 1 \leq i \leq m\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ se tenga que $\sum_{i=1}^{m} v_i = 0$, con $||v_i|| \leq 1$, existe una permutación P de $(2, \ldots, m)$ tal que

$$\left|\left| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right|\right| \leq C_{n-1} \text{ para todo } j \in \{2, \ldots, m\}\,.$$

Veamos que la propiedad es cierta para n, para lo cual la hemos dividido en varias etapas con el fin de aclarar la demostración. Sea $V = \{v_i\ :\ 1 \leq i \leq m\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{m} v_i = 0$, con $||v_i|| \leq 1$. Consideramos la norma de todas las posibles sumas parciales que contengan a v_1 y elegimos como L a aquella cuya norma sea la mayor. Sea $L = v_1 + u_1 + \ldots + u_s$ donde $\{u_1, \ldots, u_s\} \subset V$ y sean $w_1, \ldots, w_t$ el resto de vectores de V que no han sido escogidos. Por hipótesis se tiene que $L + w_1 + \ldots + w_t = 0$ ya que $\sum_{i=1}^{m} v_i = 0$, y despejando llegamos a que $v_1 + w_1 + \ldots + w_t = -L + v_1 = u_1 + \ldots + u_s$.
Comenzaremos viendo que los vectores $\{u_i\}_{i=1}^{s}$ y v_1 tienen la misma dirección que L, mientras que los $\{w_i\}_{i=1}^{t}$ tienen dirección opuesta, que hemos dividido en las Etapas 1, 2 y 3.

Etapa 1 $\langle u_i, L\rangle \geq 0$ para $i = 1, \ldots, s$.
Supongamos lo contrario, es decir existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\langle u_i, L\rangle < 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
||L - u_i|| &\geq \left| \left\langle (L-u_i), \frac{L}{||L||} \right\rangle \right| = \left| \left\langle L, \frac{L}{||L||} \right\rangle - \left\langle u_i, \frac{L}{||L||} \right\rangle \right| \\
&= \left| \frac{||L||^2}{||L||} - \left\langle u_i, \frac{L}{||L||} \right\rangle \right| = \left| ||L|| - \frac{1}{||L||} \langle u_i, L\rangle \right| \\
&= ||L|| - \frac{1}{||L||} \langle u_i, L\rangle > ||L||.
\end{aligned}$$

El absurdo viene de haber concluido que L no es la suma parcial de mayor norma.

Etapa 2 $\langle v_1, L\rangle \geq 0$.
Supongamos lo contrario, es decir $\langle v_1, L\rangle < 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
||v_1 + w_1 + \ldots + w_t|| &\geq \left| \left\langle \frac{-L}{||L||}, v_1 + w_1 + \ldots + w_t \right\rangle \right| = \left| \left\langle \frac{-L}{||L||}, -L + v_1 \right\rangle \right| \\
&= \left| \frac{||L||^2}{||L||} - \left\langle \frac{L}{||L||}, v_1 \right\rangle \right| = \left| ||L|| - \frac{1}{||L||} \langle L, v_1\rangle \right| \\
&= ||L|| - \frac{1}{||L||} \langle L, v_1\rangle > ||L||.
\end{aligned}$$

El absurdo viene de haber concluido que L no es la suma parcial de mayor norma.

Etapa 3 $\langle w_i, L\rangle \leq 0$ para $i = 1, \dots, t$.
Supongamos lo contrario, es decir existe un $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\langle w_i, L\rangle > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} ||L + w_i|| &\geq \left| \left\langle (L + w_i), \frac{L}{||L||} \right\rangle \right| = \left| \left\langle L, \frac{L}{||L||} \right\rangle + \left\langle w_i, \frac{L}{||L||} \right\rangle \right| \\ &= \left| ||L|| + \frac{1}{||L||} \langle w_i, L\rangle \right| = ||L|| + \frac{1}{||L||} \langle w_i, L\rangle > ||L||. \end{aligned}$$

El absurdo viene de haber concluido que L no es la suma parcial de mayor norma.

Definimos

$$L^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, L\rangle = 0\} = \langle \{L\}\rangle^\perp.$$

Por la Proposición A.2 (del Apéndice) se tiene que $\dim L^\perp = n - 1$ y que para cada $v \in \mathbb{R}^n$ se puede reescribir como $v = P_L v + P_{L^\perp} v$, siendo $P_L v = \left\langle v, \frac{L}{||L||^2} \right\rangle L$, con P_L y $P_{L^\perp}$ las proyecciones ortogonales en $\langle\{L\}\rangle$ y $L^\perp$ respectivamente, donde $L^\perp = \langle\{L\}\rangle^\perp$.

Etapa 4 $P_{L^\perp}(v_1 + u_1 + \cdots + u_s) = P_{L^\perp}(w_1 + \cdots + w_t) = P_{L^\perp}(-L) = 0$.
Esto es claro ya que $L := v_1 + u_1 + \ldots + u_s$ y $L + w_1 + \cdots + w_t = 0$. Entonces $P_{L^\perp}(L) = 0$ y $P_{L^\perp}(w_1 + \cdots + w_t) = P_{L^\perp}(-L) = 0$.

Etapa 5 $||P_{L^\perp}(v_1)|| \leq 1, ||P_{L^\perp}(u_i)|| \leq 1$ para $i \in \{1, \dots, s\}$ y $||P_{L^\perp}(w_j)|| \leq 1$ para $j \in \{1, \dots, t\}$.
Esto es consecuencia de que los vectores u_i y w_j son ciertos vectores v_p que sabemos que son de norma menor o igual que uno y de que el operador $P_{L^\perp}$ tiene norma menor o igual que uno, por la Proposición A.2.

Etapa 6 $\{P_{L^\perp}(v_1), P_{L^\perp}(u_1), \dots, P_{L^\perp}(u_s)\}$ y $\{P_{L^\perp}(w_1), \dots, P_{L^\perp}(w_t)\}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^{n-1}$.
Es claro que $\{P_{L^\perp}(v_1), P_{L^\perp}(u_1), \dots, P_{L^\perp}(u_s)\} \subset P_{L^\perp}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n-1}$ por el apartado (4) de la Proposición A.2. El estudio del conjunto $\{P_{L^\perp}(w_1), \dots, P_{L^\perp}(w_t)\}$ es idéntico al anterior.

Por tanto, podemos aplicar las hipótesis de inducción a

(1) $\{P_{L^\perp}(v_1), P_{L^\perp}(u_1), \dots, P_{L^\perp}(v_s)\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ donde $P_{L^\perp}(v_1 + \sum_{i=1}^s u_i) = 0$ y $||P_{L^\perp}(v_1)|| \leq 1, ||P_{L^\perp}(u_i)|| \leq 1$ para $1 \leq i \leq s$. Entonces existe una permutación Q de $(1, \dots, s)$ tal que

$$\left|\left| P_{L^\perp}(v_1) + \sum_{i=1}^{j} P_{L^\perp}(u_{Q(i)}) \right|\right| \leq C_{n-1} \text{ para todo } j \in \{1, \dots, s\}. \tag{4.2}$$

(2) $\{P_{L^\perp}(w_1), \ldots, P_{L^\perp}(w_t)\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ donde $P_{L^\perp}(\sum_{i=1}^{t} w_i) = 0$ y $||P_{L^\perp}(w_i)|| \leq 1$ para $1 \leq i \leq t$. Entonces existe una permutación R de $(2, \ldots, t)$ tal que

$$\left|\left|P_{L^\perp}(w_1) + \sum_{i=2}^{j} P_{L^\perp}(w_{R(i)})\right|\right| \leq C_{n-1} \text{ para todo } j \in \{2, \ldots, t\}. \tag{4.3}$$

Definimos $R(1) = 1$. A continuación iremos añadiendo bloques de igual forma que en el caso $n = 1$, con $\{\langle v_j, L\rangle : 1 \leq j \leq m\}$ que hagan que la suma sea menor o igual que cero. Una vez conseguido, añadiremos un bloque para que la suma de mayor o igual que cero, y así sucesivamente, utilizando para ello las reordenaciones obtenidas en (1) y (2).
Sabemos por las etapas vistas anteriormente que $\langle v_1, L\rangle \geq 0$ y que $\langle w_i, L\rangle \leq 0$ para $1 \leq i \leq t$. Añadiremos entonces el mínimo número de términos r_1 tal que

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle \leq 0$$

A continuación, elegimos s_1 el mínimo número de términos tal que

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{Q(i)}, L\right\rangle \geq 0.$$

De esta manera, obtendremos una reordenación de los vectores de V, de la siguiente forma,

$$v_1, w_{R(1)}, \ldots, w_{R(r_1)}, u_{Q(1)}, \ldots, u_{Q(s_1)}, \ldots, w_{R(r_1+1)}, \ldots, w_{R(r_2)}, u_{Q(s_1+1)}, \ldots, u_{Q(s_2)}, \ldots$$

Con esta reordenación se tiene que toda suma parcial tenga a lo sumo norma 1. La elección de las reordenaciones Q y R por las desigualdades (4.2) y (4.3), asegura que las componentes ortogonales a L de las sumas parciales tienen como norma máxima $2C_{n-1}$. Por lo tanto, la norma de cada suma parcial es como máximo $\sqrt{(2C_{n-1})^2 + 1}$ y se obtiene así el resultado. □

El siguiente resultado nos será muy útil. Se trata de una aplicación del Teorema del confinamiento poligonal (Teorema 4.4).

Lema 4.5. *Sea $\{v_i : i = 1, \ldots, m\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que satisface que $||\sum_{i=1}^{m} v_i|| \leq \epsilon$ y que $||v_i|| \leq \epsilon$ para todo i, y cierto $\epsilon > 0$. Entonces existe una constante C_n y una permutación p de $(1, \ldots, m)$ tal que*

$$||v_{p(1)} + v_{p(2)} + \ldots + v_{p(r)}|| \leq \epsilon(C_n + 1) \text{ para } 1 \leq r \leq m,$$

con $C_1 = 1$ y $C_n = \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$.

Demostración. Definimos $v_{m+1} = -v_1 - \ldots - v_m$, luego $\sum_{i=1}^{m+1} v_i = 0$. La idea es aplicar el Teorema 4.4 a los vectores $\frac{v_i}{\epsilon} : i \leq 1, \ldots, m+1$. Por lo que existe una permutación p de $(2, \ldots, m+1)$ tal que

$$\left|\left|\frac{1}{\epsilon}v_1 + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{\epsilon} v_{p(i)}\right|\right| \leq C_n \text{ para todo } r \in \{2, \ldots, m+1\}.$$

Luego $\left|\left|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{p(i)}\right|\right| \leq \epsilon C_n$ para todo r. Sea $p(1) = 1$.
Ordenando ahora los $\{v_i\}$ según p, pero omitiendo v_{m+1}, como $||v_{m+1}|| \leq \epsilon$, las sumas parciales tienen como máximo norma $\epsilon(C_n + 1)$. □

Teorema 4.6. ***(El teorema de reordenación.)***
Sea $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que converge a cero. Si existe una subsucesión convergente de la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$ que converge a S, entonces existe una reordenación de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ con suma S.

Demostración. Sea $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$ y $S_m := \sum_{i=1}^{m} v_i$. Supongamos que existe una subsucesión (m_k) tal que (S_{m_k}) converge a S. Debemos de mostrar cómo reordenar los $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para que toda la sucesión de sumas parciales converja a S. La idea es usar el Lema 4.5 para obtener reordenaciones de cada una de las familias $(v_{m_k+1}, \ldots, v_{m_{k+1}-1})$ de modo que todas sus sumas parciales sean pequeñas. Entonces S_m está cerca de S_{m_k} si m está entre m_k y m_{k+1}. Sea $\delta_k := ||S_{m_k} - S||$, con (δ_k) una sucesión que converge a cero. Luego

$$\left|\left|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - \sum_{i=1}^{m_k} v_i - v_{m_{k+1}}\right|\right| < \delta_{k+1} + \delta_k + ||v_{m_{k+1}}||.$$

Para cada k denotamos

$$\epsilon_k := max\left\{\delta_{k+1} + \delta_k,\ sup\{||v_i|| : i \geq m_k\}\right\}.$$

Entonces (ϵ_k) converge a cero ya que (δ_k) y (v_k) convergen a cero y

$$\left|\left|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right|\right| < 2\epsilon_k.$$

Aplicamos el Lema 4.5, a $\{v_i : i = m_k + 1, \ldots, m_{k+1} - 1\} \subset \mathbb{R}^n$ con $\left|\left|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right|\right| \leq 2\epsilon_k$ y $||v_i|| \leq \epsilon_k$ para cada k. Luego existe una permutación p_k de $(m_k + 1, \ldots, m_{k+1} - 1)$ tal que

$$\left|\left|\sum_{i=m_k+1}^{r} v_{p_k(i)}\right|\right| \leq 2\epsilon_k(C_n + 1),\ \text{para } r = m_k + 1, \ldots, m_{k+1} - 1.$$

Reordenaremos de la siguiente manera los elementos (v_i). En primer lugar mantendremos los elementos v_{m_k} en la posición m_k para cada k. A continuación ordenamos los v_i tales que $(m_k + 1) \leq i \leq (m_{k+1} - 1)$ según p_k. En esta reordenación, si $m_k + 1 \leq m \leq m_{k+1} - 1$ se tiene que $S_m - S_{m_k}$ es una suma de la forma $\sum_{i=m_k+1}^{m} v_{p_k(i)}$ con $m < m_{k+1}$ y por lo tanto, tiene norma a lo sumo $2\epsilon_k(C_n + 1)$. Puesto que (S_{m_k}) converge a S y que (ϵ_k) converge a cero, se sigue que la reordenación elegida de (S_m) converge a S. $\square$

A continuación presentamos un ingrediente que necesitaremos para obtener el resultado principal.

Lema 4.7. *Sea* $\{v_i : i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n, w = \sum_{i=1}^{m} v_i$, *$t$ perteneciente a* $(0, 1)$ *y* $||v_i|| \leq \epsilon$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. *Entonces*

$$||v_1 - tw|| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$$

o existe un reordenamiento P de $(2, \ldots, m)$ *y un* $r \in \{2, \ldots, m\}$ *tal que*

$$\left|\left|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw\right|\right| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-1}^2 + 1}.$$

Demostración. Supongamos que $w \neq 0$, de lo contrario ya estaría pues llegaríamos a que $||v_1|| \leq \epsilon < \epsilon\sqrt{C_{n-1}^2 + 1}$. La demostración la realizaremos por el método de inducción sobre n.
Veamos el caso $n = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $w > 0$, pues si $w < 0$, se podría redefinir los vectores $v_i' := -v_i$ y $w' = -w$. Entonces $w' > 0$ y se podría aplicar el resultado.
Veamos que el resultado se da para $n = 1$ con $w > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_0-1} \leq tw \ \text{ y } \ v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_0} > tw.$$

Utilizando que $|v_i| \leq \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que

$$-\epsilon + tw < tw < v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_0} \leq tw + v_{n_0} \leq tw + \epsilon.$$

Con lo que se tiene que $|v_1 + v_2 + \cdots + v_{n_0} - tw| \leq \epsilon$.
Supongamos cierta la propiedad para $n-1$, es decir si $\{u_i : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $w = \sum_{i=1}^{m} u_i$, t perteneciente a $(0, 1)$ y $||u_i|| \leq \epsilon$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, entonces $||u_1 - tw|| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-2}^2 + 1}$ o existe un reordenamiento P de $(2, \ldots, m)$ y un $r \in \{2, \ldots, m\}$ tal que $||u_1 + \sum_{i=2}^{r} u_{P(i)} - tw|| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-2}^2 + 1}$.
A partir de $\{v_i : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ y de $w := \sum_{i=1}^{m}$ se tiene que $\mathbb{R}^n = \langle\{w\}\rangle + \langle\{w\}\rangle^\perp$ siendo $\langle\{w\}\rangle^\perp$ un espacio $(n-1)$-dimensional. Ver la Proposición A.2.
Denotemos $M_w := \langle\{w\}\rangle, M_w^\perp := \langle\{w\}\rangle^\perp$ y $P_w, P_w^\perp$ las proyecciones ortogonales

en M_w y $M_w^\perp$, respectivamente.
Definimos $\tilde{v}_i := P_{w^\perp} v_i \in M_w^\perp$. Entonces

$$||\tilde{v}_i|| = ||P_{w^\perp} v_i|| \leq ||P_{w^\perp}|| \cdot ||v_i|| \leq ||v_i|| \leq \epsilon,$$

y por tanto $\left|\left|\frac{\tilde{v}_i}{\epsilon}\right|\right| \leq 1$, con $\sum_{i=1}^m \frac{\tilde{v}_i}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i = P_{w^\perp} w = 0$.
Luego por el Teorema 4.4, existe una permutación P de $(2, \ldots, m)$ tal que

$$\left|\left|\frac{1}{\epsilon}\tilde{v}_1 + \frac{1}{\epsilon}\tilde{v}_{P(2)} + \cdots + \frac{1}{\epsilon}\tilde{v}_{P(j)}\right|\right| \leq C_{n-1} \text{ para todo } j = 2, \ldots, m. \tag{4.4}$$

Además

$$\left\langle v_1, \frac{w}{||w||}\right\rangle + \left\langle v_{P(2)}, \frac{w}{||w||}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{P(m)}, \frac{w}{||w||}\right\rangle$$
$$= \left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(m)}, \frac{w}{||w||}\right\rangle = ||w||,$$

con $\left|\left\langle v_i, \frac{w}{||w||}\right\rangle\right| = \frac{1}{||w||}|\langle v_i, w\rangle| \leq ||v_i|| \leq \epsilon$ para todo i.
Aplicando el caso $n = 1$, se tiene que existe r tal que

$$\left|\left\langle v_1, \frac{w}{||w||}\right\rangle + \left\langle v_{P(2)}, \frac{w}{||w||}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{P(r)}, \frac{w}{||w||}\right\rangle - t||w||\right| \leq \epsilon. \tag{4.5}$$

Como consecuencia de (4.4), (4.5) y Proposición A.2 se obtiene que

$$\begin{aligned}
&||v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw||^2 \\
&= ||P_w(v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw)||^2 + ||P_{w^\perp}(v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw)||^2 \\
&= \left|\left|\left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw, \frac{w}{||w||^2}\right\rangle w\right|\right|^2 + ||\tilde{v}_1 + \tilde{v}_{P(2)} + \cdots + \tilde{v}_{P(r)}||^2 \\
&= \left|\left|\left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw, \frac{w}{||w||}\right\rangle \cdot \frac{w}{||w||}\right|\right|^2 + ||\tilde{v}_1 + \tilde{v}_{P(2)} + \cdots + \tilde{v}_{P(r)}||^2 \\
&\leq \epsilon^2 + \epsilon^2 C_{n-1}^2 = \epsilon^2(1 + C_{n-1}^2).
\end{aligned}$$

Luego

$$||v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw|| \leq \epsilon\sqrt{C_{n-1}^2 + 1}.$$

□

4.3. Teorema de Lévy-Steinitz

En la sección anterior se han probado todos los ingredientes para obtener el resultado principal, el Teorema de Lévy-Steinitz.

Teorema 4.8. ***(El Teorema de Lévy-Steinitz.)***
Sea $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $S(\sum v_m)$ es el conjunto vacío o un subespacio trasladado, también denominado subespacio afín.

Demostración. Sea $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $S(\sum v_m) \neq \emptyset$. Por tanto se tiene que existe una reordenación Q tal que $\sum v_{Q(i)}$ es convergente, luego v_m converge a cero. Tendremos que demostrar que $S(\sum v_m)$ es un subespacio afín, es decir, $S(\sum v_m) = x_0 + M$, para cierto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y M subespacio.
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in S(\sum v_m)$ ya que si no fuese el caso, podríamos modificar la sucesión $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ por $(\tilde{v}_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ donde $\tilde{v_1} := v_1 - x_0$ y $\tilde{v}_m := v_m$ para todo $m > 1$. Supongamos entonces que $0 \in S(\sum v_m)$ y veamos que $S(\sum v_m)$ es un subespacio.

Etapa 1 Si $0, S_1, S \in S(\sum v_m)$, entonces $S_1 + S \in S(\sum v_m)$.

Para demostrar que $S_1 + S \in S(\sum v_m)$, será suficiente con encontrar una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de una reordenación que converge a $S_1 + S$. Veamos que el resultado se obtiene como consecuencia del Teorema 4.6. Sea $(\epsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente positiva tal que (ϵ_m) converge a cero. Elegimos I_1, J_1 y K_1 subconjuntos finitos de índices tales que

(a) $1 \in I_1 \subset J_1 \subset K_1 \subset \mathbb{N}$,

(b) $||\sum_{i\in I_1} v_i - S_1|| < \epsilon_1$,

(c) $||\sum_{i\in J_1} v_i|| < \epsilon_1$,

(d) $||\sum_{i\in K_1} v_i - S|| < \epsilon_1$,

ya que $0, S_1, S \in S(\sum v_m)$. Elegimos ahora I_2, J_2 y K_2 subconjuntos finitos de índices tales que

(a) $2 \in I_2,\ K_1 \subset I_2 \subset J_2 \subset K_2 \subset \mathbb{N}$,

(b) $||\sum_{i\in I_2} v_i - S_1|| < \epsilon_2$,

(c) $||\sum_{i\in J_2} v_i|| < \epsilon_2$,

(d) $||\sum_{i\in K_2} v_i - S|| < \epsilon_2$.

Reiteramos esta elección tal que I_m, J_m y K_m son subconjuntos finitos de índices tales que

(a) $m \in I_m,\ \{1, 2, \ldots, m-1\} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m \subset \mathbb{N}$,

(b) $||\sum_{i\in I_m} v_i - S_1|| < \epsilon_m$,

(c) $||\sum_{i\in J_m} v_i|| < \epsilon_m$,

(d) $||\sum_{i\in K_m} v_i - S|| < \epsilon_m$.

El objetivo es conseguir una permutación P que cumpla que $\sum v_{P(i)} = S_1+S$. Para ello vamos a organizar los elementos de los conjuntos definidos anteriormente. Comenzamos con $m = 1$. Ordenamos J_1 de manera que los elementos que están en I_1 se dispongan al comienzo. A continuación, ordenamos en K_1 tal que los elementos que están en J_1 queden al comienzo concluyendo de esta manera $m = 1$, y dando paso a $m = 2$. Ordenaremos primero los elementos de K_1 y así sucesivamente. Obtenemos así una permutación P y unas sucesiones $(i_m), (j_m)$ y (k_m) tales que $i_m < j_m < k_m < i_{m+1}$ que verifican

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1\right\| < \epsilon_m, \quad \left\|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)}\right\| < \epsilon_m \quad \text{y} \quad \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| < \epsilon_m,$$

siendo i_m, j_m y k_m los cardinales de los conjuntos I_m, J_m y K_m, respectivamente. Además se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - S - \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)}\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)}\right\| \\
&< \epsilon_m + \epsilon_m = 2\epsilon_m,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - (S_1+S)\right\| \leq$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1\right\| + \left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| < \epsilon_m + 2\epsilon_m = 3\epsilon_m.$$

Para cada m, volveremos a reordenar los vectores $\{v_{P(i)} : 1 \leq i \leq k_m\}$, a dicha reordenación la denotaremos como $\{v_{Q(i)} : 1 \leq i \leq k_m\}$ tal que

$$Q(j) := \begin{cases} P(j) & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i_m \\ P(j_m + j - i_m) & \text{si} \quad i_m + 1 \leq j \leq i_m + k_m - j_m \\ P(j - k_m + j_m) & \text{si} \quad i_m + k_m - j_m + 1 \leq j \leq k_m. \end{cases}$$

Llamamos $\ell_m := i_m + k_m - j_m$. Entonces $(S_{\ell_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente a $S_1 + S$, donde $S_{\ell_m} = \sum_{i=1}^{\ell_m} v_{Q(i)}$, ya que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{\ell_m} v_{Q(i)} - (S_1+S)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{Q(i)} - S_1 + \sum_{i=i_m+1}^{\ell_m} v_{Q(i)} - S\right\| \\
&\le \left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1\right\| + \left\|\sum_{i=i_m+1}^{\ell_m} v_{Q(i)} - S\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1\right\| + \left\|\sum_{i=i_m+1}^{\ell_m} v_{P(j_m+j-i_m)} - S\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1\right\| + \left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| \le 3\epsilon_m.
\end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que $(v_{Q(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ converge a cero. Luego como consecuencia del Teorema 4.6 ya estaría, es decir, existe una nueva reordenación R tal que $\sum v_{R(i)} = S_1 + S$.

Etapa 2 Si $S \in S(\sum v_m)$, entonces $tS \in S(\sum v_m)$ para todo $t \in (0,1)$.

Sea $S \in S(\sum v_m)$ y $t \in (0,1)$. Usando la idea de la Etapa 1, se tiene que existe J_m y K_m conjuntos finitos de índices tales que $m \in J_m \subset K_m \subset J_{m+1} \subset \mathbb{N}$ y

$$\left\|\sum_{i\in J_m} v_i\right\| < \epsilon_m, \left\|\sum_{i\in K_m} v_i - S\right\| < \epsilon_m,$$

siendo $(\epsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a cero. Luego existe una permutación P tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)}\right\| < \epsilon_m, \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| < \epsilon_m,$$

siendo j_m y k_m los cardinales de los conjuntos J_m y K_m, respectivamente. De forma similar se obtiene que

$$\left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right\| < 2\epsilon_m. \tag{4.6}$$

Denotemos para cada $m \in \mathbb{N}$, $\delta_m := \sup\{\, ||v_{P(i)}|| : j_m+1 \le i \le k_m \,\}$, $w_m := \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)}$ y $u_m := w_m - S$. Entonces por el Lema 4.7 aplicado a cada w_m se tiene que existe una permutación Q_m de $(P(j_m+1), \ldots, P(k_m))$ y existe r_m tal que

$$\left\|\sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tw_m\right\| \le \delta_m \sqrt{C_{n-1}^2 + 1}. \tag{4.7}$$

Luego, usando (4.6) y (4.7) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS\right|\right| &= \left|\left|\sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tw_m + tu_m\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tw_m\right|\right| + t||u_m|| \\
&\leq \delta_m\sqrt{C_{n-1}^2+1} + t2\epsilon_m < \delta_m\sqrt{C_{n-1}^2+1} + 2\epsilon_m.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS\right|\right| &\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)}\right|\right| + \left|\left|\sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS\right|\right| \\
&\leq \delta_m\sqrt{C_{n-1}^2+1} + 3\epsilon_m.
\end{aligned}
$$

Consecuentemente existe una subsucesión de sumas parciales que converge a tS y aplicando el Teorema 4.6, existe una reordenación de la serie que tiene suma tS. Por tanto se concluye que $tS \in S(\sum v_m)$.

Etapa 3 Si $S \in S(\sum v_m)$, entonces $-S \in S(\sum v_m)$.
Usando la notación de la Etapa 1,

$$
\left|\left|\sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (-S)\right|\right| \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{P(i)}\right|\right| + \left|\left|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - S\right|\right| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m,
$$

y por tanto

$$
\left|\left|\sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-S)\right|\right| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m.
$$

Entonces

$$
\left|\left|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-S)\right|\right| < \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_m.
$$

De igual forma que en las etapas anteriores, por el Teorema 4.6 se tiene que $-S \in S(\sum v_i)$. Con lo que el Teorema queda demostrado.

□

4.4. Cuestiones

En esta sección se incluye algunas preguntas naturales que surgen del Teorema de Lévy-Steinitz (Teorema 4.8).

• **Fijado un subespacio M de $\mathbb{R}^m$ y un vector $v_0 \in \mathbb{R}^m$. ¿Es posible encontrar una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $S(\sum v_n) = M + v_0$?**

Proposición 4.9. *Sea* $v_0 \in \mathbb{R}^m$ *y* M *un subespacio de* $\mathbb{R}^m$*. Entonces existe* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ *tal que* $S(\sum v_n) = v_0 + M$*.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_0 \neq 0$, en otro caso se define el primer vector de la sucesión como v_0. Sea $\{u_1, \ldots, u_{m_0}\}$ una base de M. Definimos, $v_n \in M$ como

$$v_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{n-(m_0+1)}}{n} u_1 & si \quad n = \dot{m_0} + 1 \\ \frac{(-1)^{n-(m_0+2)}}{n} u_2 & si \quad n = \dot{m_0} + 2 \\ \vdots & \\ \frac{(-1)^{n-m_0}}{n} u_{m_0} & si \quad n = \dot{m_0} \end{cases}$$

donde $\dot{k}$ denota los múltiplos de k. Entonces $\sum v_n$ es condicionalmente convergente y utilizando la misma idea que en el Ejemplo 3.7 se tiene que para cada $(d_1, \ldots, d_{m_0}) \in \mathbb{R}^{m_0}$ existe una reordenación f que satisface que $\sum v_{f(n)} = d_1 u_1 + \ldots + d_{m_0} u_{m_0}$. Con lo que queda probado que $S(\sum v_n) = M$ y por lo tanto $S(\sum_{n=0}^{\infty} v_n) = v_0 + M$. □

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ una sucesión. Denotamos

$$\mathcal{F}\left(\sum a_n\right) := \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n, x\rangle^+ < \infty \right\}$$

donde $x(y) = \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i(y_i)$ siendo $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$ y

$$\langle a_n, x\rangle^+ := max\{\langle a_n, x\rangle, 0\} = \begin{cases} \langle a_n, x\rangle & si \quad \langle a_n, x\rangle > 0 \\ 0 & si \quad \langle a_n, x\rangle \leq 0 \end{cases}$$

De forma similar

$$\langle a_n, x\rangle^- := max\{-\langle a_n, x\rangle, 0\} = \begin{cases} -\langle a_n, x\rangle & si \quad \langle a_n, x\rangle < 0 \\ 0 & si \quad \langle a_n, x\rangle \geq 0. \end{cases}$$

Consideremos las siguientes propiedades:

(P1) $a_n \to 0$,
(P2) Si $x \in \mathcal{F}(\sum a_n)$, entonces $-x \in \mathcal{F}(\sum a_n)$.

Es claro que si $\sum a_n$ converge, entonces $S(\sum a_n) \neq \emptyset$. O lo que es equivalente, si $S(\sum a_n) = \emptyset$, entonces $\sum a_n$ no converge.

Una cuestión interesante es:

- **¿Qué condiciones nos aseguran que** $S(\sum a_n) = \emptyset$?

Proposición 4.10. *[6] Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$. *Si no se verifica alguna de las propiedades **(P1)** ó **(P2)** definidas anteriormente, entonces* $S(\sum a_n) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que no se da ***(P1)***, es decir $(a_n)_{n\geq 1}$ no converge a cero, entonces claramente ninguna reordenación de la serie $\sum a_n$ puede ser convergente, o lo que es lo mismo $S(\sum a_n) = \emptyset$.

Supongamos ahora por reducción al absurdo que no se da ***(P2)*** y que además $S(\sum a_n) \neq \emptyset$. Bajo estas hipótesis, existirá una reordenación tal que $\sum a_{f(n)}$ es convergente. Entonces $\sum\langle a_{f(n)}, x\rangle$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Como no se da ***(P2)***, existe $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sum\langle a_n, x_0\rangle^+ < \infty$ y $\sum\langle a_n, x_0\rangle^-$ es divergente. Por tanto, para x_0 se tiene que $\sum\langle a_n, x_0\rangle$ es divergente y consecuentemente $\sum|\langle a_n, x_0\rangle|$ es divergente. De otra manera, cualquier reordenación de $\sum\langle a_{f(n)}, x_0\rangle$ sería convergente y ese no es nuestro caso. Luego $\sum\langle a_{f(n)}, x_0\rangle$ converge condicionalmente y se tiene que $\sum\langle a_{f(n)}, x_0\rangle^+$ es divergente, lo que resulta un absurdo ya que $\sum\langle a_n, x_0\rangle^+$ es convergente. □

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ una sucesión. Denotamos

$$\Gamma\left(\sum a_n\right) := \left\{x \in \mathbb{R}^m : \sum|\langle a_n, x\rangle| < \infty\right\}.$$

Nótese que $\Gamma(\sum a_n)$ coincide con

$$\left\{x^* \in \mathbb{R}^{m^*} : \sum|\langle a_n, x^*\rangle| < \infty\right\}$$

donde $\mathbb{R}^{m^*}$ es el dual de $\mathbb{R}^m$, que coincide con $\mathbb{R}^m$.

Es claro que $\Gamma(\sum a_n)$ es un subespacio para series $\sum a_n$ convergentes. Una reformulación del Teorema 4.8 viene dada por

Teorema 4.11. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$. *Si la serie* $\sum a_n$ *es convergente, entonces*

$$S\left(\sum a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \Gamma\left(\sum a_n\right)^{\perp}.$$

Parte de la demostración de esta versión se puede encontrar en el artículo de Bonet [2] y en las referencias del mismo artículo. La reformulación presentada en el Teorema 4.11 permite dar una respuesta a esta cuestión natural:

• **¿Qué condiciones adicionales a una serie convergente $\sum a_n$, nos aseguran cómo es el conjunto $S(\sum a_n)$?**

Proposición 4.12. *Sea $\sum a_n$ una serie convergente con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$. Entonces*

(1) $\sum a_n$ es absolutamente convergente sí y sólo sí $S(\sum a_n) = \{\sum a_n\}$.

(2) Si para todo $x^* \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $\sum |\langle x^*, a_n\rangle|$ no converge, entonces $S(\sum a_n) = \mathbb{R}^m$.

Demostración. (1) Por la Proposición 1.13, $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente y por el Teorema 4.1 $S(\sum a_n) = \{\sum a_n\}$. Recíprocamente, si $S(\sum a_n) = \{\sum a_n\}$, entonces se obtiene el resultado como consecuencia del Teorema 4.11. Ya que $\Gamma(\sum a_n)^\perp = \{0\}$ sí y sólo sí $\Gamma(\sum a_n) = \mathbb{R}^m$ y esto es equivalente a la convergencia absoluta de $\sum a_n$ ya que estamos en un espacio finito dimensional.

(2) Es consecuencia de [15, Theorem 7.3].

□

5

Teorema de Riemann en espacios de dimensión infinita

En este capítulo presentaremos algunos resultados (sin demostración) relacionados con la convergencia incondicional y el Teorema de Lévy-Steinitz (Teorema 4.8) en espacios de dimensión infinita.

La referencia básica utilizada es el artículo de Bonet [2] y el libro [8].

5.1. Convergencia incondicional

En la Proposición 1.13 se probó que toda serie absolutamente convergente en un espacio de Banach es incondicionalmente convergente. Además, en el Teorema 4.3 se demostró que la convergencia incondicional y absoluta son conceptos equivalentes en espacios normados de dimensión finita. Banach (1892 - 1945) formuló el siguiente problema:
¿En cualquier espacio de Banach, las series incondicionalmente convergentes son exactamente las absolutamente convergentes?
El problema estuvo abierto más de 20 años. En 1950, Dvoretzky y Rogers probaron que un espacio de Banach X es de dimensión finita si y sólo si toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente [4, Pag 59] ó [3, Theorem 1].

Teorema 5.1. ***(Teorema de Dvoretzky-Rogers.)***
Un espacio de Banach X es de dimensión finita sí y sólo sí toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente.

Una consecuencia del Teorema 5.1 también formulada por Dvoretzky-Rogers es la siguiente:

Lema 5.2. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existe en X una serie incondicionalemente convergente que no es absolutamente convergente.*

A continuación damos un ejemplo en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ donde la convergencia incondicional no implica la convergencia absoluta.

Ejemplo 5.3. Sea $X := \ell^2(\mathbb{N})$, donde

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\} \ ,$$

Con el producto interior dado por

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum x_n y_n$$

y la norma $||(x_n)||_2 := \sqrt{\langle (x_n), (x_n) \rangle} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Sea $a_n := \frac{e_n}{n} \in \ell^2(\mathbb{N})$, donde $e_n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (vector nulo con un 1 en la posición n-ésima). Veamos que $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente a $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Sea f una permutación. Veamos que $\sum a_{f(n)}$ es convergente a x. Sea $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \epsilon^2$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{f(1), f(2), \ldots, f(m_0)\} \supset \{1, \ldots, n_0\}$. Entonces

$$\left|\left| x - \sum_{n=1}^{m_0} a_{f(n)} \right|\right| \leq \left(\sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Por tanto, $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente, y es claro que $\sum a_n$ no converge absolutamente ya que $||a_n||_2 = \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n}$ es divergente.

5.2. Teorema de Lévy-Steinitz

Como ya se comentó en el Capítulo 1, Banach planteó el siguiente problema recogido en el "Scottish Book"[14, Problem 106]:

¿Es cierto el resultado análogo del Teorema 4.8 para espacios de Banach de dimensión infinita?

O dicho de otro modo.

¿Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ es tal que $\sum x_n$ es convergente, entonces $S(\sum x_n)$ es un subespacio afín de X?

Marcinkiewicz, dió la respuesta de forma negativa con el siguiente contraejemplo.

Denotaremos por $L^2([0,1])$ el espacio definido por

$$L^2([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } ||f||_2 < \infty\}$$

donde se considera la medida de Lebesgue y

$$||f||_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \cdot d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definimos $f_{i,k} := \chi_{\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]}$ y $g_{i,k} := -f_{i,k}$, con $0 \leq i < +\infty$ y $0 \leq k < 2^i$ enteros y donde $\chi_{\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]}$ es la función característica del intervalo $\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]$, es decir,

$$f_{i,k} := \begin{cases} 1 \;\; en \;\; \left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right] \\ 0 \;\; en \;\; [0,1] \setminus \left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]. \end{cases}$$

Es claro que $||f_{i,k}||^2 = ||g_{i,k}||^2 = \frac{1}{2^i}$ para cada $i, k \in \mathbb{N}$ y además

$$(f_{0,0} + g_{0,0}) + (f_{1,0} + g_{1,0}) + (f_{1,1} + g_{1,1}) + (f_{2,0} + g_{2,0}) + \ldots = 0.$$

Realizando la siguiente reordenación, vemos que

$$f_{0,0} + (f_{1,0} + f_{1,1} + g_{0,0}) + (f_{2,0} + f_{2,1} + g_{2,0}) + (f_{2,2} + f_{2,3} + g_{1,1}) + \ldots = 1.$$

Es más, reordenando los términos siempre obtendremos funciones con valores enteros, por lo que es imposible que un reordenamiento de las $f_{i,k}$ y las $g_{i,k}$ nos de como resultado, por ejemplo, la función $\frac{1}{2} \in L^2([0,1])$. Es decir, el conjunto de las sumas de los reordenamientos de las $f_{i,k}$ y las $g_{i,k}$ no es un subespacio afín de $L^2([0,1])$.

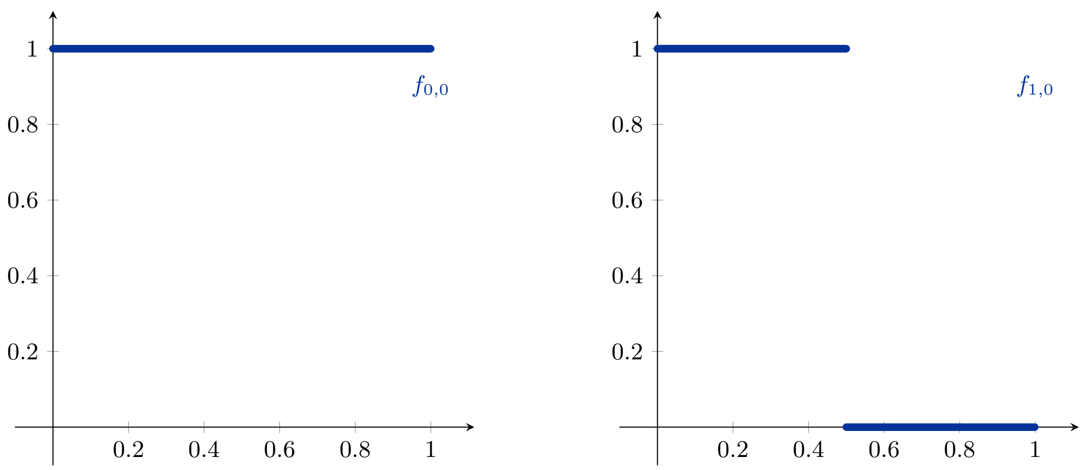


Figura 5.1. Gráficas de $f_{0,0}$ y $f_{1,0}$ respectivamente.

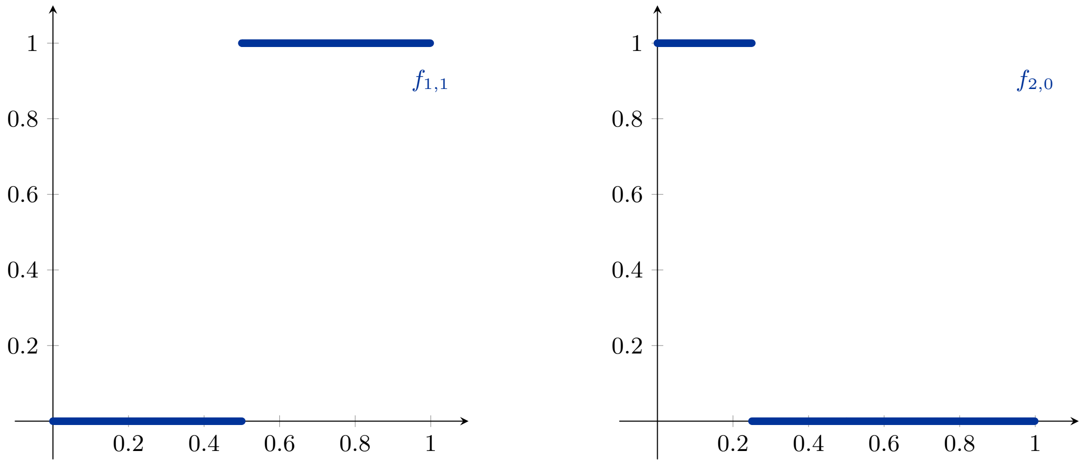


Figura 5.2. Gráficas de $f_{1,1}$ y $f_{2,0}$ respectivamente.

En vista de los acontecimientos, naturalmente nos surge la siguiente pregunta, **¿podemos encontrar un resultado análogo al Teorema 2.2 o al Teorema 4.8 en espacios de dimensión infinita?**

En 1973 D.V. Pechersky nos da una posible respuesta a nuestra pregunta.

Teorema 5.4. ***(Teorema de Pechersky.)*** *Sea H un espacio de Hilbert real y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||u_n||^2 < \infty,$$

y que para todo vector unitario $e \in H$, la serie $\sum_{n\geq 1}\langle u_n, e\rangle$ converge condicionalmente. Entonces, para todo $v \in H$ existe una permutación σ de $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = v.$$

Las siguientes observaciones afirman que el Teorema 4.8 en los espacios de dimensión infinita es más complicado de tratar que en los de dimensión finita.

En todo espacio de Banach de dimensión infinita se tiene que es posible encontrar $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que:

1. $S\left(\sum x_n\right) = \{x\}$ siendo la serie $\sum x_n$ no incondicionalmente convergente.
2. $S\left(\sum x_n\right) = \{x, y\}$.
3. $S\left(\sum x_n\right)$ es un conjunto finito.

Con todo esto se ve que el Teorema 4.8 falla estrepitosamente en espacios de Banach de dimensión infinita.

Sin embargo lo que si se puede asegurar es el siguiente resultado.

Teorema 5.5. *Todo espacio de Banach separable contiene una sucesión* $(x_n)_{n\geq 1}$ *tal que* $S(\sum x_n)$ *es todo el espacio.*

Concluimos este capítulo con un problema natural que parece que todavía está abierto.

Según hemos visto en los Capítulos 2 y 3 tenemos que si $\sum a_n$ es una sucesión con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$, entonces $S(\sum a_n)$ es un conjunto cerrado.

Problema Abierto: ¿Existe alguna serie $\sum a_n$ en un espacio de Banach (de dimensión infinita) cuyo conjunto $S(\sum a_n)$ es un subespacio afín no cerrado?

Conclusiones

A lo largo de este trabajo, hemos explorado varios conceptos relacionados con la convergencia de series. Es importante destacar las propiedades y desafíos que este tema plantea. Resulta sorprendente cómo un tema que se aborda en los primeros meses del Grado, con una breve exploración en $\mathbb{R}$, encierra tantos hechos fascinantes.

A medida que avanzaba en mi investigación, descubrí conceptos y resultados olvidados, ampliando así mi conocimiento sobre temas de los que no había oído hablar.

El trabajo se divide principalmente en dos partes, aunque están estrechamente relacionadas entre sí. Por un lado, examinamos las relaciones entre diferentes tipos de convergencia. Este estudio está ligado al contexto en el que se desarrolla, especialmente en espacios de dimensión finita o infinita. Por otro lado, nos enfocamos en establecer propiedades del conjunto $S(\sum a_n)$, que, como sabemos, representa todas las posibles sumas de las reordenaciones convergentes de una serie. En este caso, la dimensión del espacio en el que se encuentra la sucesión es fundamental.

Desde un punto de vista personal, el tema de estudio se volvió cada vez más interesante a medida que avanzaba en el trabajo. El hecho de ver las series como entidades completas y observar cómo los diferentes espacios afectan su comportamiento resulta sumamente fascinante.

A

Apéndice

A.1. Algunos resultados necesarios

En este breve apéndice incluimos algunos resultados que hemos utilizado en el trabajo.

Teorema A.1. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado X. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al mismo límite de dicha subsucesión.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$, para $n_k \geq N_1$, también existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ para $n, m \geq N_2$. Tomando $N := max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $d(x_n, x) \geq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \geq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, para $n > N$. $\square$

Proposición A.2. *Sea H un espacio de Hilbert y $w \in H\backslash\{0\}$. Entonces*

(1) $H = \langle\{w\}\rangle \oplus \langle\{w\}\rangle^{\perp}$, *donde* $\langle\{w\}\rangle$ *denota el subespacio generado por* w *y* $\langle\{w\}\rangle^{\perp}$ *es el subespacio ortogonal a* $\langle\{w\}\rangle$, *es decir* $x \in \langle\{w\}\rangle^{\perp}$ *si* $\langle x, w\rangle = 0$.

(2) Si denotamos $P_w := H \to \langle\{w\}\rangle$ *y* $P_{w^\perp} := H \to \langle\{w\}\rangle^{\perp}$ *las proyecciones ortogonales en* $\langle\{w\}\rangle$ *y* $\langle\{w\}\rangle^{\perp}$ *respectivamente, entonces*

   (a) $P_w(x) = \left\langle x, \frac{w}{||w||^2}\right\rangle w$,

   (b) $P_{w^\perp}(x) = (I - P_w)(x) = x - \left\langle x, \frac{w}{||w||^2}\right\rangle w$,

   (c) $||P_w|| \leq 1$ *y* $||P_{w^\perp}|| \leq 1$.

(3) $\langle\{w\}\rangle^{\perp} = Ker(f)$ *donde* $f := H \to \mathbb{K}$ *es un funcional lineal y acotado definido por* $f(x) = \langle x, w\rangle$.

(4) Si dim $H = n$, *entonces dim* $\langle\{w\}\rangle^{\perp} = n - 1$.

Demostración. *(1)* Es consecuencia inmediata del Teorema de la proyección [15, Theorem 7.2]

(2) *(a)* Supongamos primero que el vector w es unitario. En este caso tendríamos que ver que, $P_w(x) = \langle x, w \rangle w$. Esto es evidente pues, es fácil ver que $x - \langle x, w \rangle w$ se trata de un vector perpendicular a w.
Ahora si w no es unitario, $P_w(x) = \left\langle x, \frac{w}{||w||} \right\rangle \frac{w}{||w||} = \left\langle x, \frac{w}{||w||^2} \right\rangle w$.

(b) Es directo por el apartado *(a)*.

(c) Sea $x \in H$ de la forma $x = y + z$, con $y \in \langle \{w\} \rangle$ y $z \in \langle \{w\} \rangle^{\perp}$ entonces, $P_w(x) = y$ esto implica que $||P_w(x)||^2 = ||y||^2 \leq ||y||^2 + ||z||^2 = ||x||^2$. Por tanto $||P_w(x)||^2 \leq ||x||^2$ y consecuentemente $||P_w|| \leq 1$.
El otro caso es análogo.

(3) $Ker(f) = \{x \in H : f(x) = 0\} = \{x \in H : \langle x, w \rangle = 0\} = \langle \{w\} \rangle^{\perp}$.

(4) Es consecuencia inmediata de *(1)*.

$\square$

Bibliografía

[1] Bagni, G. Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1473-0111 June 2005. Disponible en línea http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/bagni.pdf.

[2] Bonet J. Reordenación de series. El teorema de Lévy-Steinitz, *L*a Gaceta de la RSME, Vol. 16 (2013), Núm. 3, Págs. 449–464.

[3] Dvoretsky A., Rogers C. Absolute and unconditional convergence in normed linear space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36*, 1950, pp. 192–197. http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1063160.

[4] Diestel, J. Sequences and Series in Banach spaces. *Springer. New York.*, 1984.

[5] Hairer, E. Wanner G. Analysis By its History. Undergraduate Text in Mathematics. *Springer*, 1996.

[6] Halperin, I. Sums of a series, permitting rearrangements. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 8 (1986), no. 2, 87–102.

[7] Justice R. *R*earrangements of conditionally convergent infinite series, Ph.D. Thesis, Ohio State University, 1950.

[8] Kadets, M., Kadets, V. Series in Banach Spaces. *B*irkhauser Verlag, 1997, vol 94, pp. 1–9.

[9] Levy, P. Sur les séries semi-convergentes, *Nouv. Ann. de Math.* 5 (1905), 506-511.

[10] Mahillo A. *Sobre un teorema de reordenación de series de Lévy-Steinitz*, Trabajo Fin de Grado, Universidad de la Rioja, 2019.

[11] Remmert, R. *Theory of complex functions.* Translated from the second German edition by Robert B. Burckel. Graduate Texts in Mathematics, 122. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[12] Rosenthal, P. The remarkable theorem of Lévy and Steinitz. *Amer. Math. Monthly*, 1987, vol 94, no. 4, pp. 342–351.

[13] Steinitz E. Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe Systeme, *J.* f. Math., 143 (1913), 128–17.

[14] The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café with selected problems from the new Scottish Book. Second edition. Including selected papers presented at the Scottish Book Conference held at North Texas University, Denton, TX, May 1979. Edited by R. Daniel Mauldin. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

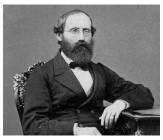
[15] Taylor, A., Lay, D. *Introduction to functional analysis.* Reprint of the second edition. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1986.

[16] Weber B. Generalization of Riemann's rearrangement theorem, May 18, 2016.

Riemann's Rearrangement theorems

Carlos Javier Díaz Martín
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101113210@ull.edu.es

Abstract



Riemann's Rearrangement theorem states that "every convergent but not absolutely convergent series of real numbers can be rearranged in such a way that the rearranged series converges to any predetermined value or even diverges." The objective of this study is to examine the set of all rearrangements that make the rearranged series converge, in different working contexts. In other words, we aim to study the rearrangements of a series with real or complex values, in finite-dimensional spaces, and even in infinite dimensional spaces.

1. Introduction

Reordering's Theorem is the subject of this study. It is attributed to the renowned German mathematician of the 19th century, Bernhard Riemann (1826 - 1866). The theorem states:

> If a real numerical series is convergent but not absolutely convergent, then we can rearrange its terms in such a way that the resulting series converges to any predetermined value or even diverges.

In more straightforward terms, this means that commutativity is not preserved when there are infinitely many terms.
Let X be a normed space with norm $||\cdot||$ and let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in X. A series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, is said to be

- absolutely convergent if $\sum ||x_n|| < \infty$,
- conditionally convergent if it converges, but not absolutely,
- unconditionally convergent if it converges for any rearrangement of its terms.

  Denote $S(\sum x_n)$ the set of $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$ where f is a permutation such that the rearranged series $\sum x_{f(n)}$ converges.

2. On Rearragement Riemann's theorem

Let $\sum a_n$ be a series of real numbers. Then it holds one of the following properties

- $S(\sum a_n) = \emptyset$ or
- $S(\sum a_n) = \{r\}$, being $r \in \mathbb{R}$ or
- $S(\sum a_n) = \mathbb{R}$.

In particular, if $\sum a_n$ is conditionally convergent series, then $S(\sum a_n) = \mathbb{R}$.

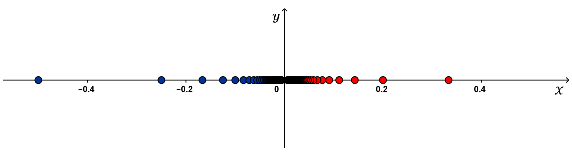


Figure 1: *Graphical representation of the sequence* $\frac{(-1)^n}{n}$.

Given a conditionally convergent series on $\mathbb{C}$, we cannot guarantee that the set $S(\sum z_n)$ is $\mathbb{C}$. For example, any real conditionally convergent series satisfies that $S(\sum z_n) = \mathbb{R}$. However, it is possible to define a series of complex numbers such that $S(\sum z_n) = \mathbb{C}$. See the following example:

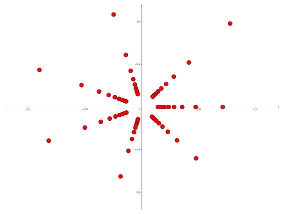


Figure 2: *Graphical representation of the sequence* $z_n := \frac{e^{\frac{2\pi n i}{7}}}{n}$

Lévy-Steinitz's theorem assures that in finite-dimensional spaces the set $S(\sum a_n)$ for conditionally convergent series is an affine subspace.
Does the analogous result of Lévy-Steinitz's theorem hold for infinite-dimensional Banach spaces? In general, the answer is negative.

3. Summary

This work focuses on two crucial topics:

- The relationship between various types of convergence in a series, depending on the context (finite or infinite dimensional space).

Space	Equivalence
Finite dimensional space	✓
Infinite dimensional space	✗

Equivalence between absolute and unconditional convergence of series.

- Description of the set $S(\sum a_n)$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$	$\sum a_n$ absolutly convergent	$\sum a_n$ conditionaly convergent
$X = \mathbb{R}$	$\{\sum a_n\}$	$\mathbb{R}$
$X = \mathbb{R}^m$, with $m > 1$	$\{\sum a_n\}$	affine subspace
X infinite dimensional	$\{\sum a_n\}$	chaos

References

[1] Rosenthal, P. The remarkable theorem of Lévy and Steinitz. *Amer. Math. Monthly*, 1987, vol 94, no. 4, pp. 342–351.
[2] Bonet J. Reordenación de series. El teorema de Lévy-Steinitz, *La* Gaceta de la RSME, Vol. 16 (2013), Núm. 3, Págs. 449-464.
[3] Kadets, M., Kadets, V. Series in Banach Spaces. *B*irkhauser Verlag, 1997, vol 94, pp. 1–9.

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de Julio, 2023

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna