Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

José Airán Santana Rivero

El Teorema de Frobenius y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden

Frobenius' Theorem and first order partial differential equations

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, junio de 2022

Dirigido por
Juan Carlos Fariña Gil
Manuel T. Flores Mederos

Juan Carlos Fariña Gil
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Manuel T. Flores Mederos
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Ferdinand George Frobenius

(1849 – 1917)

Agradecimientos

Para todos aquellos que han aportado su granito de arena a mi formación como matemático, a los que hicieron que me enamorara de esta área y a mis amigos y familia que me han presado un apoyo incondicional. También a Juan Carlos y a Manolo por esta gran oportunidad y aportarme su experiencia.

José Airán Santana Rivero
La Laguna, 22 de mayo de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo recogemos el ahora resultado clásico sobre integrabilidad de distribuciones geométricas conocido como Teorema de Frobenius. El primer Capítulo está dedicado a los enunciados y demostraciones de este resultado mediante el uso de campos de vectores y el cálculo exterior usando formas diferenciales. También consideramos alguna de sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden via el método de Lagrange-Charpit. Por otro lado, el método geométrico usado para estudiar esas ecuaciones en derivadas parciales (segundo Capítulo) requiere la integración de distribuciones que no son integrables en el sentido de Frobenius, que se posicionan en el lado opuesto y dan lugar a distribuciones completamente no integrables conocidas como distribuciones de contacto.

Palabras clave: *Álgebra exterior – Campos de vectores – Distribuciones de hiperplanos – Ideales diferenciales – Teorema de integrabilidad de Frobenius – Método de Lagrange-Charpit – Ecuaciones de Pfaff – Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.*

Abstract

In this memoir we collect the by now classical result about the integrability of geometric distributions known as Frobenius' Theorem. The first Chapter is devoted to the statements and proofs of both versions of this result, by means of vector fields and by using the exterior calculus of differential forms. We also consider some of its applications to non linear first order partial differential equations via the Lagrange-Charpit's method. On the other hand, the geometric approach to study these partial differential equations (second Chapter) requires an integration of distributions which are not integrable in Frobinius sense, that lie at the opposite extreme and yields to completely non integrable distributions known as contact distributions.

Keywords: *Exterior algebra – Vector fields – Hyperplane distributions – Differential ideals – Frobenius' integrability Theorem – Lagrange-Charpit's method – Pfaffian equations – First order partial differential equations.*

Contenido

Introducción

En su forma más elemental, el Teorema de Frobenius trata el problema de encontrar una colección maximal de soluciones de un sistema regular homogéneo de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Sean a_{ij}, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le n$ una colección de funciones C^1 con $p < n$ tal que la matriz $A = (a_{ij})$ tenga rango p y considérese el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\begin{cases} X_1[u] := a_{11}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_{1n}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \\ X_2[u] := a_{21}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_{2n}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \\ \qquad\vdots \\ X_p[u] := a_{p1}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{p2}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_{pn}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

El objetivo es dar condiciones para la existencia de $n - p$ soluciones $u_1, u_2, \ldots, u_{n-p}$ funcionalmente independientes de ($*$), es decir, tales que $\nabla u_1, \nabla u_2, \ldots, \nabla u_{n-p}$ sean linealmente independientes.

El Teorema de Frobenius establece que este problema tiene soluciones locales siempre que los campos X_i satisfagan ciertas condiciones de integrabilidad, a saber

$$X_i X_k u(x) - X_k X_i u(x) = \sum_{m=1}^{p} c_{ik}^m(x) X_m u(x)$$

para $1 \le i, k \le p$ y toda función $u \in C^2$. En otras palabras, el conmutador $[X_i, X_k]$ debe pertenecer al espacio lineal generado por los X_i.

Desde el punto de vista geométrico, los campos X_i deben ser tangentes a los conjuntos de nivel de cualquier solución del sistema ($*$). En particular, los conjuntos de nivel deben ser independientes de la solución considerada y por tanto, una vez conocidos, cualquier solución se podrá expresar en términos de una función arbitraria de $n-p$ variables.

Al contrario de lo que ocurre con ecuaciones diferenciales ordinarias, no disponemos de una teoría unificada para las ecuaciones en derivadas parciales: algunas ecuaciones tienen su propia teoría[(1)] pero otras no se pueden enmarcar en ninguna. Esto se debe a que su geometría es más complicada. En el caso de ecuaciones ordinarias, cualquier campo de vectores determina localmente sus curvas integrales (este es precisamente el contenido del Teorema Fundamental de existencia y unicidad para ecuaciones ordinarias que hemos estudiado en el Grado), pero cuando se trata de (ciertas) ecuaciones en derivadas parciales, hemos de considerar distribuciones de subespacios de dimensión mayor que 1 que, como muestra el Teorema de Frobenius, genéricamente no son integrables.

Parte de la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (aquella que se refiere a una sola ecuación escalar de primer orden) se puede reducir al estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto es posible, físicamente hablando, porque los sistemas de partículas sin interacciones se pueden describir por la ecuación diferencial en derivadas parciales del campo o por las ecuaciones ordinarias de las partículas.

En el segundo Capítulo, consideraremos el caso en el que existe una teoría completa, a saber, el caso de ecuaciones de primer orden. Desde el punto de vista físico, este es el caso de la dualidad que ocurre cuando se trata de describir un fenómeno usando ondas o partículas. El campo satisface cierta ecuación de primer orden en derivadas parciales, la evolución de las partículas se describe mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y existe un método que reduce la ecuación en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias: de esta forma se puede reducir el estudio de propagación de ondas al de evolución de partículas.

La integración de la ecuación en derivadas parciales no lineales de primer orden sigue argumentos geométricos relacionados con la estructura de contacto canónica en el espacio de 1-jets. Por ejemplo, es sencillo ver que el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{$**$}$$

sólo posee soluciones triviales (constantes) y que, de hecho, su distribución de planos asociada $\varrho_{a,\lambda} \equiv z = \lambda - ay$ no es integrable en sentido de Frobenius. De hecho corresponde a la estructura de contacto de la 3-esfera $\mathbb{S}^3 : |z|^2 + |w|^2 = 1 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donde los conjuntos de nivel de las soluciones de ($**$) representan variedades analíticas en $\mathbb{S}^3$. Pero resulta que por motivos de 'convexidad' tales variedades son triviales (sus componentes conexas se reducen a puntos aislados).

(1) Como las ecuaciones elípticas modeladas por la ecuación de Laplace.

1

El Teorema de Frobenius

1.1. Antecedentes

Para un campo de vectores suave (C^∞) $X = \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial/\partial x_i$ definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, una constante del movimiento o *integral primera* de X es una función no constante que permanece constante sobre las curvas integrales de X. Existen $n-1$ integrales primeras funcionalmente independientes de X que se pueden obtener resolviendo las ecuaciones diferenciales totales

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)}.$$

Para varios campos

$$X_k = \sum_{i=1}^n a_{ki}(x)\partial/\partial x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

que satisfacen ciertas condiciones de integrabilidad (Definición 1.6), Deahna en [4] ha probado que existen $s := n - p$ funciones cuyos conjuntos de nivel comunes contienen sus trayectorias. El problema consiste en encontrar soluciones independientes para el sistema lineal homogéneo sobre-determinado de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} a_{11}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_{1n}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \\ a_{21}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_{2n}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{p2}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + a_{pn}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

El Teorema 1.12 que llamamos de Frobenius fue probado primero por Clebsch [3] mientras que Frobenius es responsable de aplicarlo a los llamados *sistemas de Pfaff*, lo que permitió pavimentar el camino para su uso en Topología Diferencial. También fue el primero en usar la diferencial exterior d en el estudio de estos sistemas, lo que le permitió expresar el teorema en términos de formas diferenciales y sus derivadas exteriores.

Ejemplo 1.1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Inmediatamente podemos observar que dos integrales primeras independientes son $\imath_1 = x - y$ e $\imath_2 = z$ para la primera ecuación y $\jmath_1 = z - y$ y $\jmath_2 = x$ para la segunda. Así, cualquier solución de (1.1) debe ser de la forma $u = \alpha(x - y, z) = \beta(x, z - y)$ para algún par de funciones (de dos variables) α y β. Si hacemos $y = 0$ encontramos que $\alpha = \beta$ y por tanto $\alpha(x - y, z) = \alpha(x, z - y)$ que, a su vez, implica (haciendo $z = 0$) que $\alpha(x, -y) = \alpha(x - y, 0)$, es decir, $\alpha(x, y) = \phi(x + y)$ para alguna función ϕ de una variable. Consecuentemente $u = \phi(x - y + z)$. Geométricamente esto significa que la 'distribución' de los planos tangentes a las superficies de nivel de u son paralelos entre sí y perpendiculares al vector $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Obsérvese ahora que los campos involucrados en el sistema (1.1), $X = \partial/\partial x + \partial/\partial y \equiv \vec{i} + \vec{j}$ e $Y = \partial/\partial y + \partial/\partial z \equiv \vec{j} + \vec{k}$ son perpendiculares a $\vec{v}$ y por tanto generan esta distribución de planos.

Considérese ahora el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

En este caso, la primera ecuación implica que $u = u(y, z)$ es independiente de x y, puesto que x es arbitrario, de la segunda $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ y (1.2) solo posee soluciones triviales (las constantes).

La diferencia geométrica entres los sistemas (1.1) y (1.2) es la siguiente: mientras que la distribución $\{\pi_\lambda \equiv x - y + z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ asociada a (1.1) está formada por planos paralelos, la asociada a (1.2) $\{\varrho_{a,\lambda} \equiv z = \lambda - ay,\ a, \lambda \in \mathbb{R}\}$ no. Por ejemplo, empezando con el plano $\varrho_{0,0} \equiv z = 0$, si nos movemos en la dirección $\vec{i}$ hasta el punto $(a, 0, 0)$ los planos $\varrho_{a,0} \equiv z = -ay$ experimentan una rotación horaria de ángulo $\operatorname{arc\,tg} a$ cuyo plano límite cuando $a \nearrow +\infty$ es $y = 0$ (una rotación de 90°). En la dirección opuesta, cuando $a \searrow -\infty$, los planos rotan en sentido anti-horario hacia el mismo plano límite $y = 0$ (figura 1.1). De hecho, los flujos asociados a los campos $V = \frac{\partial}{\partial x}$ y $W = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$ son $\varphi_t^V(x, y, z) = (x + t, y, z)$ y $\varphi_t^W(x, y, z) = (x, y + t, z + tx)$ por lo que

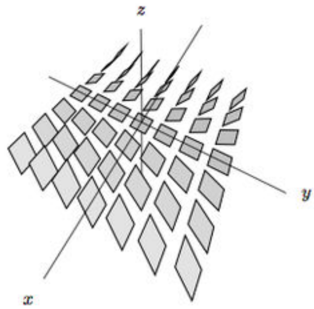


Figura 1.1. Distribución de planos asociados al sistema (1.2)

$$\varphi^W_{-s} \circ \varphi^V_{-t} \circ \varphi^W_s \circ \varphi^V_t (x, y, z) = (x, y, z + st).$$

Esto quiere decir si viajamos t unidades de tiempo siguiendo la trayectoria de V que empieza en el punto (x, y, z), luego seguimos aquella de W durante s unidades de tiempo, para regresar siguiendo V y W (también durante t y s unidades de tiempo) terminaremos en el punto $(x, y, z + st)$ que es distinto del punto de partida y por tanto no cerramos el rectángulo correspondiente. Esto sucede porque el conmutador $[V, W] = \frac{\partial}{\partial z} \neq 0$(1) (Teorema 1.5).

Observación 1.2. El ejemplo (1.2) admite una interpretación geométrica en el espacio euclídeo complejo $\mathbb{C}^2$. Consideremos la hipersuperficie $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,/\, \mathrm{Re}\, w = (\mathrm{Re} z)^2/2\}$. M es una subvariedad real de $\mathbb{C}^2$ de dimensión real 3 y es inmediato observar que, de hecho, es difeomorfa a $\mathbb{R}^3$ haciendo $z = x + iy$ y $w = x^2/2 + it$ con $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. Ahora bien, el campo complejo $\bar{L} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{ix}{2}\frac{\partial}{\partial t}$ (cuidado, no confundir con un índice, ahora $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria) satisface $\bar{L}z = \bar{L}w = 0$ y por tanto anula a las restricciones a M de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^2$ (simplemente aquellas funciones $f = f(z, w)$ holomorfas en cada variable por separado). Además,

$$\bar{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{ix}{2}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}\right)\right],$$

es decir, los campos V y W en (1.2) coinciden (salvo por el factor 1/2) con la parte real e imaginaria de $\bar{L}$ respectivamente (allí la variable z aquí es la variable t)(2). No es difícil ver que en cada punto $p \in M$ el espacio tangente $T_pM = T_p^{\mathbb{C}}M \oplus \langle \partial/\partial t \rangle$ donde $T_p^{\mathbb{C}}M = T_p(M) \cap iT_p(M) = \mathrm{span}\{V, W\}$(3) es un subespacio complejo de $\mathbb{C}^2$

(1) Obsérvese que el desplazamiento final ha sido en la dirección del conmutador $[V, W] := VW - WV = \frac{\partial}{\partial z} \equiv \vec{k}$.

(2) Perdón por la confusión que esto pueda causar, pero ya sabemos que ¡en variable compleja la letra z tiene un uso privativo!

(3) Si $w = s + it$, las curvas coordenadas $y = $ cte, $t = $ cte corresponden a $y = $ cte, $t = $ cte, $s = x^2/2$ en M y por tanto V corresponde a $\widetilde{V} = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial s}$. De la misma forma, W corresponde a $\widetilde{W} = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}$. Como $i\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ e $i\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}$, vemos que $i\widetilde{V} = \widetilde{W}$.

y, por tanto, los conjuntos de nivel de cualquier solución de (1.2) serán subvariedades complejas de M. Así, que (1.2) sólo tenga soluciones constantes significa que no existen subvariedades complejas contenidas en M (exceptuando los puntos, por supuesto). En particular esto implica que si $f, g\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ son holomorfas y $\mathrm{Re} f = (\mathrm{Re} g)^2/2$ entonces f y g deben ser constantes (de lo contrario la imagen de $\mathbb{U}$ por la aplicación (f, g) sería un 'disco analítico'[(4)] no trivial contenido en M). Evidentemente, esto se puede probar con técnicas estándar de variable compleja: si $\mathrm{Re} f = (\mathrm{Re} g)^2/2$ entonces $(\mathrm{Re} g)^2$ es armónica en $\mathbb{U}$ pero, $\Delta(\mathrm{Re} g)^2 = 2|g'|^2$ por lo que g debe ser contante y de aquí que f también. Esta identidad sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann; si $g = \alpha + i\beta$ entonces

$$\Delta\alpha^2 = 2\big(\alpha\Delta\alpha + |\nabla\alpha|^2\big) = 2|\nabla\alpha|^2 = 2\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right) = 2\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right) = 2|g'|^2$$

ya que $g' = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\beta}{\partial x}$. Alternativamente, también haciendo uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, como

$$\frac{\partial\alpha^2}{\partial\bar z} = \frac{1}{4}\frac{\partial\big(g+\bar g\big)^2}{\partial\bar z} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(g^2 + 2g\bar g + \bar g^2\right) = \frac{1}{2}\left(g\overline{g'} + \bar g\overline{g'}\right) = \frac{1}{2}\left(g + \bar g\right)\overline{g'}$$

tenemos que

$$\Delta\alpha^2 = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\alpha^2}{\partial\bar z}\right) = 2\overline{g'}\frac{\partial\big(g+\bar g\big)}{\partial z} = 2g'\overline{g'} = 2|g'|^2.$$

Nota. Respecto a la nota al pie [(3)], el espacio tangente complejo $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ se puede describir de la siguiente forma. Bajo la identificación considerada de M, el campo $\frac{\partial}{\partial x}$ corresponde al campo $\frac{\partial}{\partial x}(z, w) = \frac{\partial}{\partial x}(x + iy, x^2/2 + it) = (1, x)$ en $\mathbb{C}^2$, $\frac{\partial}{\partial y}$ corresponde a $\frac{\partial}{\partial y}(x + iy, x^2/2 + it) = (i, 0)$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial t}(x + iy, x^2/2 + it) = (0, i)$. Así, un campo general $T = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial t}$ corresponde a $\widetilde{T} = (a + ib, ax + ic) \in \mathbb{C}^2$ y puesto que $i\widetilde{T} = (-b + ia, -c + axi)$, $\widetilde{T} \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ si, y sólo si, $c = bx$. Por tanto $\widetilde{T} = (a + ib, (a + ib)x)$ y

$$T_p^{\mathbb{C}}(M) = \big\{(a + ib)(1, x) \;\big/\; a, b \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\big\{\widetilde{V}\big\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\big\{\widetilde{V}, \widetilde{W}\big\}$$

donde $\widetilde{V} = (1, x) = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial s}$ para $a = 1$, $b = 0$ y $\widetilde{W} = i(1, x) = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}$ si $a = 0$, $b = 1$. Por último, nótese que bajo la identificación anterior, $\widetilde{V}$ corresponde a $V = \frac{\partial}{\partial x}$ y $\widetilde{W}$ a $W = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}$.

1.2. Preliminares

1.2.1. Campos vectoriales

Un *campo de vectores* X en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación

(4) Que obviamente es un ejemplo particular de variedad compleja.

$$\begin{aligned} X: U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow X_x \end{aligned} \tag{1.3}$$

En esta memoria supondremos que X es suave en el sentido que la aplicación (1.3) es de clase $C^\infty(U)$. El conjunto de los campos de vectores en U será denotado por $\mathfrak{X}(U)$ y resulta ser un módulo sobre $C^\infty(U)$ respecto a las operaciones

(a) $(X+Y)_x = X_x + Y_x$,
(b) $(fX)_x = f(x)X_x$

si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$ y $x \in U$.

Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ dos abiertos y $F\colon U \to V$ un difeomorfismo. Si $X \in \mathfrak{X}(U)$, el campo $Y \in \mathfrak{X}(V)$ determinado por la relación

$$Y_{F(x)} = F_{*_x} X_x, \qquad x \in U$$

se denota por $Y = F_* X$ y se denomina *pushforward* de X bajo F. Aquí $F_{*_x}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota la diferencial de F en $x \in U$. La aplicación $F_*: \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(V)$ es lineal y

$$F_*(fX) = f \circ F^{-1} F_* X$$

si $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$.

Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^n$, los campos (constantes) $\vec{e}_i(x) = \vec{e}_i$ generan $\mathfrak{X}(U)$ para cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ ya que todo $X \in \mathfrak{X}(U)$ se puede escribir de forma única como

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \vec{e}_i$$

donde $X^i \in C^\infty(U)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Desde el punto de vista analítico, los campos se pueden interpretar como operadores diferenciales: $X \in \mathfrak{X}(U)$ proporciona el operador lineal $\mathscr{L}_X\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ denominado *derivada de Lie* a lo largo de X dado por

$$\mathscr{L}_X f = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

si $f \in C^\infty(U)$. $\mathscr{L}_X$ es una derivación en $C^\infty(U)$: es lineal y satisface la regla de Leibnitz

$$\mathscr{L}_X(fg) = f\mathscr{L}_X g + g\mathscr{L}_X f.$$

Además es evidente de (1.4) que $\mathscr{L}_X$ es C^∞–lineal en X, es decir, $\mathscr{L}_{X+Y} = \mathscr{L}_X + \mathscr{L}_Y$ y $\mathscr{L}_{fX} = f\mathscr{L}_X$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$. Nótese que $\mathscr{L}_X f$ no es más que la derivada direccional de f en la dirección de X. Identificando X con $\mathscr{L}_X$, de (1.4) podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathscr{L}_{\vec{e}_i}$.

Como operadores, dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, el conmutador $[X, Y] = XY - YX$ resulta ser un operador de orden uno (y no de orden dos como cabría esperar). Para ver esto, si $f, g \in C^\infty(U)$ entonces

$$[fX, Y] = (fX)Y - Y(fX) = (fX)Y - (Y(fX) + (fY)X) = f[X, Y] - (Yf)\, X$$

y por ende

$$[X, gY] = -[gY, X] = -g[Y, X] + (Xg)\, Y = g[X, Y] + (Xg)\, Y.$$

Así

$$\begin{aligned} \big[fX, gY\big] &= f[X, gY] - (gY) f X = f\big(g[X, Y] + (Xg)Y\big) - g(Yf)\, X \\ &= fg[X, Y] + (fXg)\, Y - (gYf)\, X, \end{aligned} \tag{1.5}$$

y en particular, si $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i$ entonces

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[\sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i\right] = \sum_{i,j=1}^n [X^i \partial_i, Y^j \partial_j] \\ &\underset{\text{por (1.5)}}{=} \sum_{i,j=1}^n \left(X^i Y^j \cancelto{0}{[\partial_i, \partial_j]} + X^i \partial_i Y^j \partial_j - Y^j \partial_j X^i \partial_i\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)\partial_i = \sum_{i=1}^n (XY^i - YX^i)\partial_i \end{aligned} \tag{1.6}$$

que de nuevo es un campo de vectores. En términos de la derivada de Lie (1.4), esto se puede reescribir como $\big[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y\big] = \mathscr{L}_{[X,Y]}$ donde $[X, Y]$ viene dado por (1.6).

El siguiente resultado muestra que el conmutador es natural con respecto al pushforward.

Proposición 1.3. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación suave. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ son dos campos suaves en U, entonces $F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y]$.*

Demostración. La prueba es sencilla. Si f es una función suave definida en un entorno de $F(U)$, $x \in U$ e $y = F(x)$ y $Z := F_* X$, $W := F_* Y$, entonces

$$\begin{aligned} [Z, W]_y f &= Z_y\big(Wf\big) - W_y\big(Zf\big) = F_{*x} X_x\big(Wf\big) - F_{*x} Y_x\big(Zf\big) \\ &= X_x\big((Wf) \circ F\big) - Y_x\big((Zf) \circ F\big) = X_x\big(Y(f \circ F)\big) - Y_x\big(X(f \circ F)\big) \\ &= [X, Y]_x (f \circ F) = \big(F_{*x}[X, Y]_x\big) f. \end{aligned}$$ ◀

Flujo generado por campos de vectores

Sea $X \in \mathfrak{X}(U)$ un campo de vectores en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in U$, la curva integral de X que pasa por x es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_t(x)}{dt} = X\big(\varphi_t(x)\big) \\ \varphi_0(x) = x. \end{cases} \tag{1.7}$$

En principio, la curva integral por x sólo está definida en un intervalo (que se puede suponer maximal respecto a esta propiedad) $(-a(x), b(x)) \subset \mathbb{R}$ que contiene al origen. La unicidad en el problema de valor inicial implica que

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)) \tag{1.8}$$

donde ambos miembros estén definidos. X se dice *completo* si para todo $x \in U$, $a(x) = b(x) = +\infty$, es decir, cuando la curva integral está definida en toda la recta. En este caso las aplicaciones φ_t forman un grupo uni-paramétrico de difeomorfismos de U (1.8).

De (1.4) y (1.7), si $f \in C^\infty(U)$ tenemos

$$\mathscr{L}_X f(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\varphi_t(x)) \tag{1.9}$$

para todo $x \in U$.

Los flujos asociados a dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, en general no conmutan: si φ_t y ψ_s son los flujos asociados a X e Y respectivamente, en general $\varphi_t \circ \psi_s \neq \psi_s \circ \varphi_t$. Para medir cuantitativamente la falta de conmutatividad considérese la diferencia

$$\Phi^x(t,s) = \varphi_t\big(\psi_s(x)\big) - \psi_s\big(\varphi_t(x)\big)$$

para $x \in U$ fijo. Claramente Φ^x es suave . El desarrollo de Taylor de Φ^x en el punto $(0,0)$ es

$$\begin{aligned}
\Phi^x(t,s) &= \Phi^x(0,0) + \left[\partial_s \Phi^x(0,0)\, s + \partial_t \Phi^x(0,0)\, t\right] \\
&\quad + \left[\partial_s^2 \Phi^x(0,0)\, s^2/2 + \partial_{ts}^2 \Phi^x(0,0)\, st + \partial_t^2 \Phi^x(0,0)\, t^2/2\right] + o(s^2+t^2) \\
&= \partial_{ts}^2 \Phi^x(0,0)\, st + o(s^2+t^2)
\end{aligned}$$

ya que como función de (t,s) es $= 0$ si $t = 0$ ó $s = 0$. Ahora bien

$$\partial_s\big|_{s=0} \psi_s\big(\varphi_t(x)\big) = Y\big(\varphi_t(x)\big)$$

y derivando respecto a t

$$\partial_{ts}^2\big|_{s=t=0} \psi_s\big(\varphi_t(x)\big) = \partial_t\big|_{t=0} Y\big(\varphi_t(x)\big) = \sum_{i=1}^n X_x(Y^i)\partial_i. \tag{1.10}$$

De igual forma

$$\partial_{ts}^2\big|_{s=t=0} \varphi_t\big(\psi_s(x)\big) = \sum_{i=1}^n Y_x X^i \partial_i. \tag{1.11}$$

Restando (1.11) de (1.10) y teniendo en cuenta (1.6) obtenemos

$$\partial^2_{ts}\big|_{s=t=0}\Phi^x(0,0)=\sum_{i=1}^n\big(X_xY^i-Y_xX^i\big)\partial_i=[X,Y]_x.$$

En particular tenemos la siguiente expresión para el conmutador

$$[X,Y]_x=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t\big(\psi_t(x)\big)-\psi_t\big(\varphi_t(x)\big)}{t^2}. \tag{1.12}$$

Por tanto es necesario que el conmutador de dos campos se anule para que sus flujos conmuten. Utilizando el siguiente lema veremos que el recíproco también es cierto (Teorema 1.5).

Lema 1.4 (*de rectificación*). *Sea $X\in\mathfrak{X}(U)$ un campo de vectores suave en un abierto $U\subset\mathbb{R}^n$ y $x_0\in U$ tal que $X_{x_0}\neq 0$. Entonces existen entornos $U_0\subset U$ de x_0 y V de $0\in\mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\Psi\colon U_0\to V$ tal que $\Psi_*X=\partial_1$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_0=0$ y $X_{x_0}=\vec{e}_1$. Por el Teorema de existencia y unicidad para el problema (1.7) existe un entorno $U_0\subset U$ de x_0 y $\varepsilon>0$ tal que el flujo $\varphi_t\colon U_0\to\mathbb{R}^n$ está definido para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Si φ^i_t denota la $i^{\text{ésima}}$ componente de φ_t entonces, como $\partial_t\big|_{t=0}\varphi^1_t(x_0)=1\neq 0$, el Teorema de la función implícita proporciona un entorno $U_1\subset U_0$ de x_0 y una función $\tau\colon U_1\to(-\varepsilon,\varepsilon)$ tal que $\varphi^1_{\tau(x)}(x)=0$ para todo $x\in U_1$ y $\tau(x_0)=0$. Sea ahora $\Psi\colon U_1\to V:=\Psi(U_1)\subset\mathbb{R}^n$ dada por

$$\Psi(x)=\big(-\tau(x),\varphi^2_{\tau(x)}(x),\varphi^3_{\tau(x)}(x),\dots,\varphi^n_{\tau(x)}(x)\big).$$

Ψ es inyectiva ya que si $\Psi(x)=\Psi(\bar{x})$ para $x,\bar{x}\in U_1$, entonces $\tau(x)=\tau(\bar{x})=:\tau$ y por tanto $\varphi_\tau(x)=\varphi_\tau(\bar{x})$ por lo que $x=\bar{x}$. Puesto que $\varphi^1_{\tau(x)-t}\big(\varphi_t(x)\big)=\varphi^1_{\tau(x)}(x)=0$, de la unicidad en el Teorema de la función implícita concluimos que $\tau\big(\varphi_t(x)\big)=\tau(x)-t$. Así

$$\Psi\big(\varphi_t(x)\big)=\big(-\tau(x)+t,\varphi^2_{\tau(x)}(x),\varphi^3_{\tau(x)}(x),\dots,\varphi^n_{\tau(x)}(x)\big) \tag{1.13}$$

que implica que $\Psi_*X=\partial_1$ ya que esta última expresión es precisamente el flujo de ∂_1 a tiempo t en $\Psi(x)$. ◀

Teorema 1.5. *Sean φ_t y ψ_s los flujos asociados a dos campos suaves $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$ en un abierto $U\subset\mathbb{R}^n$. Son equivalentes*

(i) $\varphi_t\circ\psi_s=\psi_s\circ\varphi_t$ donde ambos miembros estén definidos.
(ii) $[X,Y]=0$ en U.

Demostración. Por (1.12) sólo hemos de probar que $(ii)\Rightarrow(i)$. En cualquier punto $x\in U$ donde ambos campos se anulen tendremos que $\varphi_t\circ\psi_s(x)=\psi_s\circ\varphi_t(x)$ y por tanto, en algún entorno de cualquier otro punto de U, por el Lema 1.4 podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $X=\partial_1$. Si $Y=\sum_i Y^i\partial_i$ entonces, por (1.6)

$$[X,Y]=[\partial_1,Y]=\sum_{i=1}^n\partial_1Y^i\partial_i$$

y por tanto, $[X,Y]=0$ si, y sólo si, las funciones coordenadas Y^i no dependen de la variable x_1 e Y puede escribirse como un $Y=Y^1(\tilde{x})\partial_1+\tilde{Y}$ donde $\tilde{Y}$ es un campo en $n-1$ variables. Si $\tilde{\psi}_s$ denota el flujo de $\tilde{Y}$ y $x=(x_1,\tilde{x})$ ($\tilde{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$), el de Y vendrá dado por

$$\psi_s(x)=\left(x_1+\int_0^s Y^1\big(\tilde{\psi}_r(\tilde{x})\big)dr,\tilde{\psi}_s(\tilde{x})\right).$$

Puesto que el flujo de X son simples traslaciones en la dirección de $\vec{e}_1$ ($\varphi_t(x)=(x_1+t,\tilde{x})$) deducimos que

$$\begin{aligned}\varphi_t\circ\psi_s(x)=\varphi_t\big(\psi_s(x)\big)&=\varphi_t\left(x_1+\int_0^s Y^1\big(\tilde{\psi}_r(\tilde{x})\big)dr,\tilde{\psi}_s(\tilde{x})\right)\\&=\left(x_1+t+\int_0^s Y^1\big(\tilde{\psi}_r(\tilde{x})\big)dr,\tilde{\psi}_s(\tilde{x})\right)=\psi_s(x_1+t,\tilde{x})\\&=\psi_s\big(\varphi_t(x_1,\tilde{x})\big)=\psi_s\big(\varphi_t(x)\big)=\psi_s\circ\varphi_t(x).\end{aligned}$$

Esto prueba (i). ◀

Integrales primeras

Sea $X\in\mathfrak{X}(U)$ un campo de vectores en $U\subset\mathbb{R}^n$. Recuérdese que (Sección 1.1), una función no constante $u\colon U\to\mathbb{R}$ de clase C^1 se dice que es una *integral primera* (o *constante del movimiento*) de X en U si u es constante a lo largo de las curvas integrales de X, es decir, si $\mathscr{L}_X u=0$ en U.

Obsérvese que cualquier función que se obtenga por relación funcional de integrales primeras sigue siendo una integral primera, es decir, si $u_1,u_2,\dots,u_m$ son m integrales primeras de X en U, $V\subset\mathbb{R}^m$ es un abierto que contiene a $(u_1,u_2,\dots,u_m)(U)$ y $\Phi\colon V\to\mathbb{R}$ es C^1 entonces $u\colon=\Phi(u_1,u_2,\dots,u_m)$ también es una integral primera de X en U puesto que $\mathscr{L}_X u=\sum_{k=1}^m\partial_{u_k}\Phi\,\mathscr{L}_X u_k=0$. A este respecto, también podemos observar que si u es una integral primera de X en U y $\Psi\colon U\to V$ es un difeomorfismo, entonces $u\circ\Psi^{-1}\colon V\to\mathbb{R}$ es una integral primera para el campo Ψ_*X en V.

Es consecuencia del Lema de rectificación (1.4) que cualquier campo posee localmente $n-1$ integrales primeras funcionalmente independientes en algún entorno de cualquier punto no singular (las $n-1$ últimas componentes en (1.13)).

1.3. Distribuciones y el Teorema de Frobenius

En esta sección presentaremos el Teorema de Frobenius como se recoge en [8].

Definición 1.6. *Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto y $1\le p<n$. Una distribución $p-$diemsional $\mathscr{D}$ es una elección para cada $x\in U$ de un subespacio lineal $\mathscr{D}_x\subset\mathbb{R}^n$ de dimensión p (figura 1.2). $\mathscr{D}$ se dice suave (C^∞) si para todo punto $x\in U$ existe un entorno $V\subset U$ de x y p campos $X_1,X_2,\dots,X_p$ de clase C^∞ en V que generan $\mathscr{D}$ en cada punto de V. Un campo*

X en U se dice tangente (o que pertenece) a la distribución ($X \in \mathscr{D}$) si $X_x \in \mathscr{D}_x$ para todo $x \in U$.

Una distribución suave $\mathscr{D}$ se dice involutiva (o completamente integrable) si $[X,Y] \in \mathscr{D}$ para todo par de campos tales que $X, Y \in \mathscr{D}$.

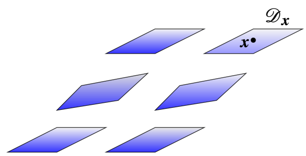


Figura 1.2. Distribución de planos en $\mathbb{R}^3$

Definición 1.7. *Una subvariedad Σ de U es una variedad integral de una distribución $\mathscr{D}$ en U si $T_x\Sigma = \mathscr{D}_x$ para todo $x \in \Sigma$.*

Observación 1.8. El término “completamente integrable”, que a veces se usa en lugar “involutiva”, necesita algunas palabras de explicación. En la Definición 1.7 hemos supuesto que las variedades integrales de una distribución deben ser subvariedades cuyos espacios tangentes coinciden con los determinados por la distribución. Esta condición se podría haber relajado y exigir solamente que los espacios tangentes sean subespacios y no necesariamente coincidir con los dados por la distribución. En este sentido es posible que una distribución posea “variedades integrales” de dimensión menor que su dimensión sin ser completamente integrable. De hecho, las curvas integrales de cualquier campo tangente a una distribución $\mathscr{D}$ son “curvas integrales” de $\mathscr{D}$. En lo que sigue, las variedades integrales serán siempre de dimensión máxima.

Proposición 1.9. *Si $\mathscr{D}$ es una distribución en U que posee variedades integrales por cualquier punto de U, entonces $\mathscr{D}$ es involutiva.*

Demostración. Sean X e Y dos campos tangentes a $\mathscr{D}$ (que supondremos tiene dimensión p) y $x \in U$. Sea Σ es una variedad integral de $\mathscr{D}$ que pasa por x, $\psi\colon D \subset \mathbb{R}^p \to \Sigma$ una parametrización local de Σ y $a \in D$ tal que $\psi(a) = x$. Puesto que $\psi_{*a}\colon \mathbb{R}^p \to \mathscr{D}_x$ es un isomorfismo, existen campos V y W en D tales que $\psi_{*a} V_a = X_x$ y $\psi_{*a} W_a = Y_x$. Pero, por la Proposición 1.3, $[X,Y]_x = \psi_{*a}[V,W]_a \in \mathscr{D}_x$. ◀

El Teorema de Frobenius establece que el recíproco de esta proposición también es válido. Para su demostración usaremos el siguiente análogo al Lema 1.4.

Lema 1.10. *Sean $X_1, X_2, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(U)$ p campos suaves que conmutan en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, es decir, $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1,2,\dots,p$. Entonces, para cada $x \in U$ existe un entorno V de 0 en $\mathbb{R}^p$ y una única aplicación suave $F\colon V \to U$ tal que $F(0) = x$ y $F_*\partial_i = X_i$ para todo $i = 1,2,\dots,p$.*

Demostración. Sean $\varphi_t^1, \varphi_t^2, \dots, \varphi_t^p$ los flujos respectivos asociados a $X_1, X_2, \dots, X_p$. Observemos que $F_*\partial_i = X_i$ implica que $F \circ \psi_t^i = \varphi_t^i \circ F$ donde $\psi_t^i(x) = x + te_i$ es el flujo del campo canónico ∂_i y por tanto $F \circ \psi_{t_1}^1 \circ \psi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \psi_{t_p}^p = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p \circ F$. Puesto que

$$\begin{aligned}
&\psi_{t_1}^1 \circ \psi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \psi_{t_p}^p(0) = \psi_{t_1}^1 \circ \psi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \psi_{t_{p-1}}^{p-1}(0,0,\dots,t_p)\\
&= \psi_{t_1}^1 \circ \psi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \psi_{t_{p-2}}^{p-2}(0,0,\dots,t_{p-1},t_p) = \dots = \psi_1^1(0,t_2,\dots,t_{p-1},t_p)\\
&= (t_1,t_2,\dots,t_p)
\end{aligned}$$

definimos F como

$$F(t_1,t_2,\dots,t_p) := \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x).$$

F está bien definida en algún entorno V de 0, $F(0) = x$ y puesto que los campos $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1,2,\dots,n$, por el Teorema 1.5, $F(t_1,t_2,\dots,t_p) = \varphi_{t_1}^{\sigma_1} \circ \varphi_{t_2}^{\sigma_2} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^{\sigma_p}(x)$ si σ es cualquier permutación de $\{1,2,\dots,p\}$. En particular

$$\begin{aligned}
\left(F_*\partial_i\right)_{F(t)} &= F_{*\,t}\partial_{i\,t} = \frac{d}{dt_i}F(t_1,t_2,\dots,t_n) = \frac{d}{dt_i}\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x)\\
&= \frac{d}{dt_i}\varphi_{t_i}^i \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \varphi_{t_{i+1}}^{i+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x)\\
&= X_{i\,\varphi_{t_i}^i \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \varphi_{t_{i+1}}^{i+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x)} = X_{i\,\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x)} = X_{i\,F(t)}.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que para cada $i = 1,2,\dots,p$, $F_*\partial_i = X_i$. Obsérvese que la unicidad de F sigue de su propia construcción. ◀

Ejemplo 1.11. En $U = \mathbb{R}^2$ consideremos los campos $X_1 = \partial/\partial x$ y $X_2 = (1+x)\partial/\partial y$. El flujo de X_1 es $\varphi_t^1(x,y) = (x+t,y)$ mientras que para X_2 es $\varphi_t^2(x,y) = (x, y+(1+x)t)$ y, siguiendo la receta usada en la demostración del Lema anterior, con $F(0,0) = (0,0)$

$$F(s,t) = \varphi_s^1 \circ \varphi_t^2(0,0) = \varphi_s^1(0,t) = (s,t).$$

Sin embargo $\partial_s F = \partial_x = X_1$ pero $\partial_t F = \partial_y \neq X_2$. Obsérvese que si integramos primero respecto a X_1 y luego a X_2 no obtenemos el mismo resultado: en su lugar se tiene que $F(s,t) = (s,(1+s)t)$. Respecto al lema anterior, nótese que $[X_1,X_2] = \partial_y \neq 0$.

Teorema 1.12 (*Teorema de Frobenius*). *Sea $\mathscr{D}$ una distribución suave $p-$dimensional en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\mathscr{D}$ es completamente integrable si, y sólo si, es involutiva.*

Para ser más precisos, si $\mathscr{D}$ es involutiva, para todo $x \in U$ existe un entorno $V \subset U$ de x y $n-p$ funciones suaves $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-p} : V \to \mathbb{R}$ funcionalmente independientes tal que los conjuntos de nivel

$$\varrho_j = c_j \,(= cte) \quad j = 1, 2, \ldots, n-p$$

son variedades integrales de $\mathscr{D}$ en U (recuérdese que las funciones ϱ_j se dicen funcionalmente independientes en V si para cualquier $x \in V$, sus gradientes $\nabla\varrho_1(x), \nabla\varrho_2(x), \ldots, \nabla\varrho_{n-p}(x)$ son linealmente independientes).

Demostración. Seguiremos la demostración dada en [7]. Por el Lema 1.10 será suficiente probar que, alrededor de cualquier punto de U existen bases locales $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de $\mathscr{D}$ tal que $[X_i, X_j] = 0$. Para ello, si expresamos cualquier base local $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ para $\mathscr{D}$ en la base canónica

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j,$$

la matriz $\left(a_{ij}\right)_{p\times n}$ tendrá rango p. Por tanto reordenando el sistema de coordenadas podemos suponer que la submatriz cuadrada $A = \left(a_{ij}\right)_{p\times p}$ no es singular. Ahora, si $A^{-1} = \left(\tilde{a}_{ij}\right)_{p\times p}$ denota la inversa de A, la nueva base

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_{ij} Y_j$$

de $\mathscr{D}$ tendrá la forma

$$X_i = \partial_i + \sum_{j=p+1}^{n} b_{ij}\partial_j.$$

Ahora observemos que $[X_i, X_j] \in \left\langle \partial_{p+1}, \partial_{p+2}, \ldots, \partial_n \right\rangle$ y puesto que $\mathscr{D}$ es involutiva

$$[X_i, X_j] \in \langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle \cap \langle \partial_{p+1}, \partial_{p+2}, \ldots, \partial_n\rangle = \{0\}. \qquad \blacktriangleleft$$

Observación 1.13.
1. Nótese que el Teorema 1.12 puede verse como un resultado de rectificación local de distribuciones en el sentido que si $\mathscr{D}$ es una distribución $p-$dimensional involutiva, entonces alrededor de cada punto existe un sistema de coordenadas $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ donde $\mathscr{D}$ está generada por los campos canónicos $\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, \ldots, \partial/\partial y_p$.
2. El Teorema clásico de Frobenius aparece en una forma bastante diferente y puede ser enunciado como sigue: sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ dos abiertos y usemos coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea

$$\Theta\colon U \times V \longrightarrow \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \tag{1.14}$$

una aplicación C^∞ de $U \times V$ en el espacio de las matrices reales de orden $m \times n$ y sea $(x_0, u_0) \in U \times V$. Si

$$\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Theta_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^{m} \left(\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial u_\ell}\Theta_{\ell k} - \frac{\partial \Theta_{ik}}{\partial u_\ell}\Theta_{\ell j} \right) = 0 \tag{1.15}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j, k = 1, 2, \ldots, n$ en $U \times V$, entonces existen entornos $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ de x_0 y u_0 respectivamente y una única aplicación suave $u \colon U_0 \to V$ (que también es regular con respecto a los datos iniciales $(x_0, u_0) \in U_0 \times V_0$) tal que

$$\begin{cases} \partial_x u = \Theta(x, u)^{(5)} \\ u(x_0, u_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

La ecuación (1.16) es un ejemplo de una *ecuación diferencial total*: usamos (1.14) para especificar cual debe ser la diferencial de la aplicación u sobre su grafo, y en (1.15) se recogen las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de u.

Se puede probar que esta versión es equivalente al Teorema 1.12. Por ejemplo, si empezamos con una distribución $p-$dimensional involutiva $\mathscr{D}$ en una abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $x_0 \in U$, podemos obtener el Teorema 1.12 si partimos de su versión clásica como sigue: primero elegimos un entorno $W = U \times V \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de x_0 con coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en el que $\mathscr{D}$ esté generada por los campos

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{n-p} f_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_{p+j}} \tag{1.17}$$

donde $f_{ij} \in C^\infty(W)$. Ahora se puede definir una aplicación matricial como en (1.14) poniendo

$$b(x, u) = \left(f_{ij}(x, u)\right)^t, \quad y = (x, u) \in W = U \times V. \tag{1.18}$$

Resulta que la involutibilidad de $\mathscr{D}$ implica las condiciones (1.15) y la solución u permite construir sus superficies integrales. De forma similar se puede obtener la versión clásica a partir del Teorema 1.12.

Ejemplo 1.14. 1. El caso $n = 2$ y $m = 1$ con

$$\Theta(x, y, u) = \begin{pmatrix} \phi(x, y, u) \\ \psi(x, y, u) \end{pmatrix}^T$$

se reduce al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \phi(x, y, u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \psi(x, y, u) \end{cases} \tag{1.19}$$

y las condiciones (1.15) a

(5) Para ser mas explícitos, esto significa que el gradiente $\nabla_x u_i$ es la $i^{\text{ésima}}$ fila de la matriz Θ, es decir, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \Theta_{ij}(x, u)$ y las condiciones de integrabilidad (1.15) siguen de la conmutatividad de las parciales. (1.15) representan $m\binom{n}{2}$ condiciones sobre Θ (las condiciones son relevantes solo para $j < k$).

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi \frac{\partial \psi}{\partial u}. \tag{1.20}$$

Nótese que en el caso particular en el que las funciones ϕ y ψ no dependan de la variable u, la condición de integrabilidad (1.20) se reduce a aquella para la existencia de potencial para el campo $\phi\partial_x + \psi\partial_y$.

2. Con $n = 3$ y $m = 1$ el sistema resultante es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \phi(x, y, z, u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \psi(x, y, z, u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \chi(x, y, z, u), \end{cases} \tag{1.21}$$

y las condiciones de integrabilidad (1.15) ahora son

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi \frac{\partial \psi}{\partial u}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \phi \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

es decir, la condición (1.20) en cada subsistema de dos ecuaciones en el sistema (1.21).

1.4. Ideales diferenciales

El objetivo de esta Sección es el de dar una versión del Teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales. En este apartado trabajaremos con el álgebra exterior en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ denotada por $\bigwedge U = \bigoplus_q \bigwedge^q U$. Los elementos de $\bigwedge U$ se llaman *formas* en U y son, por tanto, sumas de $q-$formas multilineales antisimétricas suaves en U: una forma $\omega \in \bigwedge U$ se escribe de forma única como $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$ donde $\omega_q \in \bigwedge^q U$ se llamará la componente homogénea de grado q de ω (para una breve discusión ver el Apéndice D en [6]). La operación de multiplicación exterior denotada por $\wedge$ junto a la suma dota a $\bigwedge U$ con una estructura de álgebra.

Definición 1.15. *Sea $\mathscr{D}$ una distribución $p-$dimensional en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que una $q-$forma $\omega \in \bigwedge^q U$ anula a $\mathscr{D}$ si*

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_q) = 0$$

siempre que $X_1, X_2, \ldots, X_q \in \mathscr{D}$. Una forma $\omega \in \bigwedge U$ anula a $\mathscr{D}$ si cada una de sus componentes homogéneas la anula. En lo que sigue

$$\mathscr{I}(\mathscr{D}) = \left\{\omega \in \bigwedge U \;/\; \omega \text{ anula a } \mathscr{D}\right\}. \tag{1.22}$$

Proposición 1.16. *Sea $\mathscr{D}$ una distribución suave $p-$dimensional en U. Entonces*

(a) *$\mathscr{I}(\mathscr{D})$ es un ideal en $\bigwedge U$.*
(b) *$\mathscr{I}(\mathscr{D})$ está localmente generado por $n-p$ $1-$formas, esto es, para todo $x \in U$ existe un entorno $V \subset U$ de x y $n-p$ $1-$formas $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_n$ independientes en V tales que:*
  (i) Si $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{D})$, entonces $\omega\big|_V$ pertenece al ideal generado por $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_n$ en $\bigwedge V$.
  (ii) Si $\omega \in \bigwedge U$ y existe algún recubrimiento abierto de U tal que, para cada V en el recubrimiento, $\omega\big|_V$ pertenece al ideal generado por $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_n$, entonces $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{D})$.
(c) *Si $\mathscr{I}$ es un ideal de $\bigwedge(U)$ localmente generado por $n-p$ $1-$formas independientes, entonces existe una única distribución suave $p-$dimensional $\tilde{\mathscr{D}}$ en U tal que $\mathscr{I} = \mathscr{I}(\tilde{\mathscr{D}})$.*

Demostración. (a) sigue inmediatamente de la definición de $\mathscr{I}(\mathscr{D})$ en (1.22) y de la definición del producto exterior $\wedge$.

Sea $x \in U$. Puesto que $\mathscr{D}$ tiene dimensión p, existen p campos suaves $X_1, X_2, \ldots, X_p$ que generan $\mathscr{D}$ cerca de x. Podemos completar esta colección de campos a una base $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_n$ en un entorno V de x en U y sea $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ su base dual, esto es

$$\omega_j(X_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{(delta de Kronecker).}$$

Entonces las $1-$formas $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_n$ tienen las propiedades deseadas en (b). En efecto, son independientes y si $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{D})$ es tal que $\omega\big|_V = \sum_\gamma a_\gamma \omega_{\gamma_1} \wedge \omega_{\gamma_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\gamma_k}$ donde γ varía en subconjuntos $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $a_\gamma = 0$ salvo que $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\} \cap \{p+1, p+2, \ldots, n\} \neq \emptyset$. Así, $\omega\big|_V$ pertenece al ideal generado por $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_n$ en $\bigwedge V$. Recíprocamente, si ω es una forma tal que para todo V en algún recubrimiento abierto de U $\omega\big|_V$ pertenece al ideal generado por $\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \ldots, \omega_n$ en $\bigwedge V$, entonces claramente $\omega \in \mathscr{I}(\mathscr{D})$. Esto prueba ($b$).

Para probar (c), sea $x \in U$ y $\omega_{p+1}, \omega_{p+2} \ldots, \omega_n$ $1-$formas independientes que generan $\mathscr{I}$ en un entorno V de x. Entonces

$$\tilde{\mathscr{D}}_x = \left\{v \,/\, \omega_j\big|_x(v) = 0,\ j = p+1, p+2, \ldots, n\right\}$$

define una distribución $p-$dimensional suave en U tal que $\mathscr{I} = \mathscr{I}(\tilde{\mathscr{D}})$. La unicidad es inmediata. ◀

Definición 1.17. *Un ideal $\mathscr{I}$ en $\bigwedge U$ se dice diferencial si es cerrado bajo diferenciación exterior, esto es*

$$d\mathscr{I} \subset \mathscr{I}.$$

Así, un ideal $\mathscr{I}$ generado por las $1-$formas ω_j, $j = p+1, p+2, \ldots, n$, será diferencial si existen $1-$formas α_{jk} $(p+1 \leq j, k \leq n)$ tales que

$$d\omega_j = \sum_{k=p+1}^{n} \alpha_{jk} \wedge \omega_k,$$

o equivalentemente

$$\omega_{p+1} \wedge \omega_{p+2} \wedge \ldots \wedge \omega_n \wedge d\omega_j = 0 \tag{1.23}$$

para todo $j = p+1, p+2, \ldots, n$.

Los ideales diferenciales son precisamente aquellos asociados a distribuciones involutivas, es decir,

Proposición 1.18. *Una distribución suave $\mathscr{D}$ en U es involutiva si, y sólo si, $\mathscr{J}(\mathscr{D})$ es un ideal diferencial.*

Esto sigue inmediatamente del siguiente resultado:

Lema 1.19. *Si ω es una 1-forma de clase C^1 y X, Y dos campos de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \tag{1.24}$$

Demostración. Puesto que (1.24) es lineal en ω podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $\omega = g\,df$. En este caso, $d\omega = dg \wedge df$ y por tanto

$$d\omega(X, Y) = \det\begin{pmatrix} dg(X) & dg(Y) \\ df(X) & df(Y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Xg & Yg \\ Xf & Yf \end{pmatrix} = Xg\,Yf - Yg\,Xf. \tag{1.25}$$

Pero, por otro lado

$$X\omega(Y) = X\big(g\,df(Y)\big) = X\big(g\,Yf\big) = Xg\,Yf + g\,X\,Yf, \tag{1.26}$$

e intercambiando los papeles de X e Y

$$Y\omega(X) = Yg\,Xf + g\,Y\,Xf. \tag{1.27}$$

Si ahora restamos (1.26) y (1.27) y tenemos en cuenta (1.25) obtenemos

$$\begin{aligned} X\omega(Y) - Y\omega(X) &= Xg\,Yf - Yg\,Xf + g\big(X\,Yf - Y\,Xf\big) = Xg\,Yf - Yg\,Xf + g\,[X, Y]f \\ &= d\omega(X, Y) + \omega([X, Y]) \end{aligned}$$

que es precisamente (1.24). ◀

Definición 1.20. *Una subvariedad $\Sigma \subset U$ es una variedad integral de un ideal $\mathscr{J} \subset \bigwedge(U)$ si $\omega\big|\Sigma = i_\Sigma^*\omega = 0$ para toda $\omega \in \mathscr{J}$ ($i_\Sigma \colon \Sigma \hookrightarrow U$ denota la inclusión e i_Σ^* su pull-back).*

Inmediatamente se obtiene la versión del Teorema de Frobenius (1.12) en términos de ideales diferenciales.

Teorema 1.21. *Sea $\mathscr{J} \subset \bigwedge U$ un ideal diferencial localmente generado por $n-p$ $1-$formas independientes. Entonces, para cada $x \in U$ existe una única subvariedad integral de $\mathscr{J}$ de dimensión p que pasa por x.*

1.5. Aplicaciones

1.5.1. El método de Lagrange-Charpit

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^5$ abierto y $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty(\Omega)$. Considérese la ecuación diferencial general en derivadas parciales de primer orden en dos variables

$$\Phi(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = 0. \tag{1.28}$$

El método de Lagrange-Charpit proporciona una técnica para el cálculo de una 'integral completa' para esta ecuación[(6)].

Si (x, y, u, p, q) denotan las coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^5$, el campo característico para la ecuación (1.28) es (ver (2.10) en §2.2.3 o §2.2.4 en el Capítulo 2)

$$V_\Phi = \partial_p\Phi\,\partial_x + \partial_q\Phi\,\partial_y + \big(p\partial_p\Phi + q\partial_q\Phi\big)\partial_u - \big(\partial_x\Phi + p\partial_u\Phi\big)\partial_p - \big(\partial_y\Phi + q\partial_u\Phi\big)\partial_q.$$

El método consiste en lo siguiente: supongamos que se dispone de una integral primera Ψ para el campo V_Φ '$(p,q)-$independiente' con Φ, es decir,

$$\frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(p,q)} = \det\begin{pmatrix}\partial_p\Phi & \partial_q\Phi\\ \partial_p\Psi & \partial_q\Psi\end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces, por el Teorema de la función implícita, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ apropiado, el sistema

$$\begin{cases}\Phi(x, y, u, p, q) = 0\\ \Psi(x, y, u, p, q) = \lambda\end{cases} \tag{1.29}$$

define $p = \phi(x, y, u, \lambda)$ y $q = \psi(x, y, u, \lambda)$ como funciones C^∞ de las variables $(x, y, u) \in U$ en algún abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. Para cualquier característica $\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big)$ de (1.28) (una curva integral de V_Φ) se tendrá

$$\Psi\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big) = \lambda = \text{cte}$$

y por tanto, cualquier solución de (1.28) debe satisfacer sobre ellas

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \phi(x, y, u, \lambda)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \psi(x, y, u, \lambda).\end{cases} \tag{1.30}$$

que es una versión paramétrica de (1.19) para el que debemos verificar la condición de integrabilidad (1.20). En tal caso, los campos $X = \partial_x + \phi\partial_u$ e $Y = \partial_y + \psi\partial_u$ satisfacen

$$[X, Y] = [\partial_x + \phi\partial_u, \partial_y + \psi\partial_u] = [\partial_x, \partial_y] + [\partial_x, \psi\partial_u] + [\phi\partial_u, \partial_y] + [\phi\partial_u, \psi\partial_u]$$

---

(6) Todo sea dicho, estas integrales completas se pueden usar para construir soluciones de la ecuación (1.28) (ver ejemplo 1.24).

$$= \big(\partial_x \psi - \partial_y \phi + \phi \partial_u \psi - \psi \partial_u \phi\big)\partial_u$$

y, por tanto, $[X, Y] = 0$ equivale a (1.20). Del Teorema 1.5 sabemos entonces que sus flujos φ_t y ψ_s conmutan y los campos son tangentes a la superficie parametrizada por $(t, s) \to \varphi_t \circ \psi_s(x_0, y_0, u_0)$ para cada $(x_0, y_0, u_0) \in U$. Además, puesto que las proyecciones de X y Y sobre el plano XY son independientes, esta superficie corresponde (atendiendo al Teorema de la función implícita) al grafo local de alguna función u que será por tanto solución de (1.30).

Por último no es difícil probar que la condición de integrabilidad (1.20) se satisface automáticamente ya que Ψ es una integral primera para el sistema característico de la ecuación (1.28). Este es el contenido de la siguiente Proposición

Proposición 1.22. *Las funciones ϕ y ψ definidas implícitamente por el sistema* (1.29) *satisfacen la condición de integrabilidad* (1.20).

Demostración. Puesto que Ψ es una integral primera para el sistema característico, debe ser constante sobre las curvas características y por tanto, su gradiente perpendicular al campo característico V_Φ, es decir,

$$\partial_p \Phi \partial_x \Psi + \partial_q \Phi \partial_y \Psi + \big(p\partial_p \Phi + q\partial_q \Phi\big)\partial_u \Psi - \big(\partial_x \Phi + p\partial u \Phi\big)\partial_p \Psi - \big(\partial_y \Phi + q\partial u \Phi\big)\partial_p \Psi = 0. \tag{1.31}$$

Derivando en (1.29) respecto a x

$$\begin{cases} \partial_x \Phi + \partial_p \Phi\, \partial_x \phi + \partial_q \Phi\, \partial_x \psi = 0 \\ \partial_x \Psi + \partial_p \Psi\, \partial_x \phi + \partial_q \Psi\, \partial_x \psi = 0, \end{cases}$$

y por tanto,

$$\partial_p \Phi\, \partial_x \Psi - \partial_p \Psi\, \partial_x \Phi + J \partial_x \psi = 0 \tag{1.32}$$

donde

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial_p \Phi & \partial_q \Phi \\ \partial_p \Psi & \partial_q \Psi \end{pmatrix}.$$

Igualmente, derivando respecto a y y a u,

$$\partial_y \Phi \partial_q \Psi - \partial_y \Psi \partial_q \Phi + J \partial_y \phi = 0, \tag{1.33}$$

$$\partial_p \Phi \partial_u \Psi - \partial_p \Psi \partial_u \Phi + J \partial_u \psi = 0, \tag{1.34}$$

y

$$\partial_u \Phi \partial_q \Psi - \partial_u \Psi \partial_q \Phi + J \partial_u \phi = 0. \tag{1.35}$$

Evaluando (1.31) para $p = \phi$, $q = \psi$ y restando (1.32), sumando (1.33), restando (1.34) multiplicada por ϕ y sumando (1.35) multiplicada por ψ a (1.31) obtenemos

$$\big(-\partial_x \psi + \partial_y \phi - \phi \partial_u \psi + \psi \partial_u \phi\big) J = 0,$$

de donde (1.20) sigue inmediatamente supuesto que $J \neq 0$. ◀

Ejemplo 1.23. Consideremos la ecuación

$$u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.$$

La función que define esta ecuación es $\Phi = p+q-upq$ por lo que la ecuación orbital para sus características es

$$\frac{dx}{1-uq}=\frac{dy}{1-up}=\frac{du}{p+q-2upq}=\frac{dp}{p^2q}=\frac{dq}{pq^2}.$$

De la última igualdad $\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$ por lo que $\Psi = p/q$ es una integral primera. Para el sistema

$$\begin{cases} p+q=upq \\ p=\lambda q \end{cases}$$

tenemos dos opciones: $\phi=\psi=0$ (que manifiesta que las constantes son soluciones de la ecuación dada) o $\phi=\frac{1+\lambda}{u}$ y $\psi=\frac{1+\lambda}{\lambda u}$. Para esta última solución hemos de integrar la ecuación

$$du=\frac{(1+\lambda)}{u}dx+\frac{(1+\lambda)}{\lambda u}dy$$

que al multiplicar por u separa variables y se transforma en

$$udu=(1+\lambda)\left(dx+\frac{dy}{\lambda}\right).$$

Tras integrar esto proporciona la integral completa

$$\lambda u^2=2(1+\lambda)(\lambda x+y)+\mu.$$

A continuación presentamos un ejemplo donde resolvemos un problema de valor inicial mediante el uso combinado de los métodos de Lagrange-Charpit y de la envolvente.

Ejemplo 1.24. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=1}=1. \end{cases}$$

La función que define la ecuación es $\Phi = p^2+q^2-u^2$ por lo que las ecuaciones de las trayectorias características son

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=\frac{du}{2u^2}=\frac{dp}{2up}=\frac{dq}{2uq}.$$

Así $du/u = dp/p$ y $\Psi = p/u$ es una integral primera. Esto, junto con la ecuación $\Phi = 0$ proporciona $p = \lambda u$ y $q = \sqrt{1-\lambda^2}\,u$. El método de Lagrange-Charpit asegura que la 1−forma

$$\theta = du - p\,dx - q\,dy = du - \lambda u\,dx - \sqrt{1-\lambda^2}\,u\,dy$$

satisface la condición de integrabilidad de Frobenius (1.23): $\theta \wedge d\theta = 0$. La ecuación $\theta = 0$ equivale a

$$\frac{du}{u} = \lambda\,dx + \sqrt{1+\lambda^2}\,dy \quad \Leftrightarrow \quad d\big(\ln u\big) = d\big(\lambda x + \sqrt{1-\lambda^2 y}\big)$$

de donde encontramos la integral completa

$$u = \mu e^{\lambda x + \sqrt{1-\lambda^2}\,y}.$$

Puesto que los conjuntos de nivel de u representan rectas, ninguna elección de los parámetros λ y μ proporcionará la solución al problema considerado. Parametrizando la circunferencia unidad (donde se presenta el dato inicial) mediante $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y sustituyendo, de las relaciones

$$\begin{cases} \mu e^{\lambda \cos t + \sqrt{1-\lambda^2}\operatorname{sen} t} = 1 \leftarrow \text{condición inicial} \\ -\lambda \operatorname{sen} t + \sqrt{1-\lambda^2}\cos t = 0 \leftarrow \text{condición de contacto tangencial} \end{cases}$$

vemos que su solución es $\lambda = \cos t$ y $\mu = 1/e$. La integral completa proporciona entonces la familia uniparamétrica de soluciones

$$u = e^{x\cos t + y \operatorname{sen} t - 1}$$

Por último calculamos la envolvente de esta familia: derivando respecto a t encontramos que $\operatorname{tg} t = y/x$ con lo que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \dfrac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\big(\frac{y}{x}\big)^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\big(\frac{y}{x}\big)^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

y la solución buscada será

$$u = e^{\sqrt{x^2+y^2}-1}.$$

1.5.2. Ecuaciones de Pfaff

El método de Lagrange-Charpit descrito en el apartado anterior requiere de la resolución de ecuaciones del tipo $\omega = 0$ para una 1-forma ω, es decir,

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0. \tag{1.36}$$

Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones de Pfaff*. Las soluciones de (1.36) son superficies de nivel de funciones $u(x,y,z) = $ cte donde $du \neq 0$ es proporcional a ω, es decir,

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{R}. \tag{1.37}$$

Por el Teorema 1.21, (1.36) tiene soluciones si, y sólo si, el ideal generado por ω es un ideal diferencial, es decir, si $\omega \wedge d\omega = 0$.
Si $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ es el campo dual a la 1-forma ω, geométricamente (1.37) significa que el vector normal a las superficies $u = $ cte es paralelo a $\vec{v}$ y por tanto, de (1.36) la familia $u = $ cte representan superficies ortogonales a las trayectorias de $\vec{v}$.

Si $\vec{v}$ es conservativo, es decir, si existe un potencial, $\vec{v}$ se puede escribir como $\vec{v} = \nabla u$ y $u = $ cte es la solución de (1.36) (en este caso se dice que la ecuación (1.36) es exacta). Si $\vec{v}$ no fuera conservativo, en ciertos casos podría existir un factor de escala $\mu \neq 0$ (dado por la proporción común en (1.37)) para el que $\mu\vec{v}$ sí lo sea[(7)]. Al menos localmente, un campo es conservativo si, y sólo si, es irrotacional. Si tal factor existe entonces $\nabla \times (\mu\vec{v}) = \nabla\mu \times \vec{v} + \mu\nabla \times \vec{v} = 0$ que implica $\nabla \times \vec{v} \perp \vec{v}$ ($\Leftrightarrow\ \vec{v} \cdot \left(\nabla \times \vec{v}\right) = 0$) (esta es la forma dual de escribir la condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$). Más explícitamente, como

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{z},$$

esta condición es

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{1.38}$$

Un método para integrar (1.36) es el siguiente: se considera la variable z (o cualquier otra) como un parámetro y se integra la ecuación diferencial resultante, es decir,

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = 0. \tag{1.39}$$

La solución de esta ecuación será de la forma $v(x,y,z) = c(z)$ donde la constante de integración se toma dependiendo del parámetro z para que se satisfaga (1.36). Derivando tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - c'(z)\right)dz = 0$$

cuyos coeficientes deben satisfacer (1.37), esto es

(7) Esta es precisamente la condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$. En este caso, μ se denomina factor integrante para la ecuación (1.36).

$$\frac{\partial v/\partial x}{P} = \frac{\partial v/\partial y}{Q} = \frac{\partial v/\partial z - c'}{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad c' = \frac{\partial v}{\partial z} - \tau R$$

donde $\frac{\partial v}{\partial x} = \tau P$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \tau Q$. Así, se podrá determinar $c = c(z)$ siempre que $\alpha = \frac{\partial v}{\partial z} - \tau R$ solo dependa de z y v. Pero

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\left(\tau R\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\tau P\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\tau R\right)}{\partial x} = \tau\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\frac{\partial \tau}{\partial z} - R\frac{\partial \tau}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial\left(\tau R\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\tau Q\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\tau R\right)}{\partial y} = \tau\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\frac{\partial \tau}{\partial z} - R\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

por lo que

$$\begin{aligned} Q\frac{\partial \alpha}{\partial x} - P\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \tau\left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) - P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\right] + R\left(P\frac{\partial \tau}{\partial y} - Q\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) \\ &\underset{(1.38)}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} R\left[\tau\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \left(P\frac{\partial \tau}{\partial y} - Q\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)\right] = R\left(\frac{\partial\left(\tau P\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\tau Q\right)}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned}$$

ya que $\frac{\partial v}{\partial x} = \tau P$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \tau Q$. Esto implica que

$$\frac{\partial(\alpha, v)}{\partial(x, y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \tau \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ P & Q \end{pmatrix} = \tau\left(Q\frac{\partial \alpha}{\partial x} - P\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) = 0.$$

y significa que efectivamente existe una relación funcional $\Psi(z, v, \alpha) = 0$ entre α y v[8]. Así $c = c(z)$ se puede calcular resolviendo la ecuación diferencial $\Psi\left(z, c, c'\right) = 0$.

Ejemplo 1.25. Para la ecuación de Pfaff

$$\omega = yzdx + 2xzdy + xydz = 0 \tag{1.40}$$

tenemos $\vec{v} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}$ y

$$\nabla \times \vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & xy \end{pmatrix} = -x\vec{i} + z\vec{k}.$$

Por tanto $\nabla \times \vec{v} \perp \vec{v}$ y la ecuación (1.40) es integrable. Considerando z como un parámetro en (1.40) obtenemos la ecuación

---

(8) La variable z aparece en esta relación ya que estamos utilizando una versión paramétrica del Teorema de la dependencia funcional donde z juega el papel del parámetro.

$$yzdx + 2xzdy = 0$$

de donde $z = 0$ (que proporciona una superficie integral de (1.40)) o $ydx + 2xdy = 0$. Esta última ecuación se puede reescribir como $\frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y} = 0$ que se puede integrar inmediatamente

$$d\left(\ln x + 2\ln y\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + 2\ln y = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad xy^2 = c.$$

Ahora buscamos $c = c(z)$ para que

$$xy^2 = c(z) \tag{1.41}$$

sea solución de (1.40). Derivando en (1.41) tenemos $y^2dx + 2xydy - c'(z)dz = 0$ y comparando con (1.40)

$$\frac{y}{z} = -\frac{c'(z)}{xy} \quad \Rightarrow \quad zc'(z) + xy^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad zc'(z) + c(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(z) = \frac{c}{z}.$$

La solución general de (1.40) es por tanto $xy^2z = c = \text{cte}$ (que incluye la solución $z = 0$ aparecida anteriormente para $c = 0$ y que además proporciona otras dos soluciones lineales $x = 0$ e $y = 0$[9]).

Obsérvese que un factor integrate para (1.40) es $\mu = \frac{1}{xyz}$ ya que

$$\mu\omega = \frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = d\left(\ln x + 2\ln y + \ln z\right) = d\left(\ln\left(xy^2z\right)\right).$$

Ejemplo 1.26. Consideremos la ecuación

$$\theta = udu - xdx - \sqrt{u^2 - x^2}\,dy = 0. \tag{1.42}$$

Puesto que

$$d\theta = -\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - x^2}}du - \frac{x}{\sqrt{u^2 - x^2}}dx\right) \wedge dy = \frac{x}{\sqrt{u^2 - x^2}}dx \wedge dy + \frac{u}{\sqrt{u^2 - x^2}}dy \wedge du$$

tenemos

$$\theta \wedge d\theta = \left(\frac{xu}{\sqrt{u^2 - x^2}} - \frac{xu}{\sqrt{u^2 - x^2}}\right)dx \wedge dy \wedge du = 0$$

y la ecuación (1.42) es integrable. Los dos primeros sumando en θ sugieren considerar la variable y como un parámetro y ensayar una solución de la forma $u^2 - x^2 = \varphi(y)$ (aquí $\varphi(y)$ es $c(y)$). Derivando y comparando con (1.42) debemos tener

$$\frac{\varphi'(y)}{\sqrt{u^2 - x^2}} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi'(y) = 2\sqrt{\varphi(y)}.$$

Integrando encontramos que $\varphi(y) = (y + c)^2$ y la solución general de (1.42) es $u^2 = x^2 + (y + c)^2$ donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante real arbitraria.

[9] Todas 'singulares' respecto a la ecuación (1.40).

Observación 1.27. Otra forma de integrar la ecuación (1.40) es observar que los términos en dx y dz suman $yzdx + xydz = yd(xz)$ y por tanto (1.40) es equivalente a $yd(xz) + 2xzdy = 0$. Si ahora hacemos $t = xz$ esta ecuación se reduce a la ecuación ordinaria $ydt + 2tdy = 0$ que podemos integrar inmediatamente pues entonces $dt/t + 2dy/y = 0 \Rightarrow d(\ln t + 2\ln y) = 0 \Rightarrow d(\ln(ty^2)) = 0 \Rightarrow ty^2 = c \Rightarrow xzy^2 = c$. De igual forma, la ecuación (1.42) se puede reescribir como $d(u^2 - x^2) - 2\sqrt{u^2 - x^2}dy = 0$ por lo que, con $t^2 = u^2 - x^2$, se tiene $d(t^2) - 2tdy = 0 \Rightarrow 2tdt - 2tdy = 0 \Rightarrow d(t - y) = 0 \Rightarrow t = y + c \Rightarrow t^2 = (y + c)^2 \Rightarrow u^2 = x^2 + (y + c)^2$.

De la misma manera se puede tratar el caso n-dimensional

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \cdots + \omega_n dx_n = 0 \tag{1.43}$$

donde ω_j son funciones suaves de n variables reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Para $1 \le i < j \le n$, sea $\Omega_{ij} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$. Puesto que

$$d\omega = \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j = \sum_{1\le i<j\le n} \Omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\omega = \left(\sum_{1\le k\le n} \omega_k dx_k\right) \wedge \left(\sum_{1\le i<j\le n} \Omega_{ij} dx_i \wedge dx_j\right) &= \sum_{1\le k<i<j\le n} \omega_k \Omega_{ij} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\
&\quad - \sum_{1\le i<k<j\le n} \omega_k \Omega_{ij} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_j + \sum_{1\le i<j<k\le n} \omega_k \Omega_{ij} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \\
&= \sum_{1\le i<j<k\le n} \left(\omega_i \Omega_{jk} - \omega_j \Omega_{ik} + \omega_k \Omega_{ij}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \\
&= \sum_{1\le i<j<k\le n} \left(\omega_k \Omega_{ij} + \omega_i \Omega_{jk} + \omega_j \Omega_{ki}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k
\end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$. Por tanto, ahora tenemos las $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$ condiciones de integrabilidad

$$\omega_k \Omega_{ij} + \omega_j \Omega_{ki} + \omega_i \Omega_{jk} = 0, \qquad 1 \le i < j < k \le n. \tag{1.44}$$

En general, la idea en la Observación 1.27 proporciona el método de integración de Euler y consiste en la reducción sucesiva que hemos realizado en los ejemplos anteriores.

Supongamos que queremos integrar la ecuación (1.43). Primero consideramos todas las variables excepto dos (digamos x_1 y x_2) como parámetros e integrando la ecuación $\omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 = 0$ obtenemos una solución $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$. Cuando ω satisface las condiciones de integrabilidad (1.44) podemos usar u como nueva variable para eliminar las variables x_1 y x_2 de la ecuación (1.43) que tomará la forma $du + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 dx_4 + \cdots + \alpha_n dx_n = 0$ donde ahora, $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ son funciones de

$u, x_3, x_4, \dots, x_n$. Repetimos este proceso con, por ejemplo, u y x_3 (o con cualquier otro par de variables adecuadas) para encontrar una función $v = v(u, x_3, x_4, \dots, x_n)$ que reduce la ecuación a $dv + \beta_4 dx_4 + \beta_5 dx_5 + \cdots + \beta_n dx_n = 0$ y así sucesivamente. Tras a lo sumo $n-2$ iteraciones conseguiremos integrar (1.43)[10].

Ejemplo 1.28 (El método de Euler para una ecuación de Pfaff en cuatro variables). Es fácil comprobar que la ecuación

$$\omega = z(y+z)dx + z(u-x)dy + y(x-u)dz + y(y+z)du = 0 \tag{1.45}$$

satisface la condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$. Para integrarla, en primer lugar consideramos las variables z y u como parámetros y resolvemos (1.45) en las variables x e y

$$z(y+z)dx + z(u-x)dy = 0.$$

Para $z \neq 0$, esta ecuación es equivalente a

$$\frac{dx}{u-x} + \frac{dy}{y+z} = 0 \;\Leftrightarrow\; d\big(\ln(y+z) - \ln(u-x)\big) = 0 \;\Leftrightarrow\; d\left(\ln\left(\frac{y+z}{u-x}\right)\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \zeta = \frac{y+z}{u-x} = \text{cte.}$$

Ahora eliminamos las variables x e y de (1.45) usando ζ como nueva variable: como

$$d\zeta = \frac{y+z}{(u-x)^2}dx + \frac{dy}{u-x} + \frac{dz}{u-x} - \frac{y+z}{(u-x)^2}du$$
$$\Downarrow$$
$$(u-x)^2 d\zeta = (y+z)dx + (u-x)dy + (u-x)dz - (y+z)du,$$

multiplicando por z y teniendo en cuenta (1.45) se sigue que

$$\begin{aligned} z(u-x)^2 d\zeta &= z(u-x)dz - z(y+z)du - y(x-u)dz - y(y+z)du \\ &= (y+z)(u-x)dz - (y+z)^2 du \end{aligned}$$

y por tanto

$$z d\zeta = \frac{y+z}{u-x}dz - \left(\frac{y+z}{u-x}\right)^2 du = \zeta dz - \zeta^2 du.$$

Así, hemos reducido el problema a otro con tres variables que es de integración inmediata;

$$z d\zeta = \zeta dz - \zeta^2 du \quad\Leftrightarrow\quad du = \frac{\zeta dz - z d\zeta}{\zeta^2} = d\left(\frac{z}{\zeta}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z}{\zeta} - u = c \quad\Leftrightarrow\quad z - u\zeta = c\zeta$$

e insertando la expresión de ζ concluimos que la solución de (1.45) es

$$(x+c)z + (u+c)y = 0$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria.

[10] Este mismo método permite ver que las condiciones de integrabilidad (1.44) son suficientes para la existencia de un factor integrante de la ecuación (1.43).

El siguiente Teorema justifica los métodos de integración de Natani y Euler[11]

Teorema 1.29. *Sea* ω *una* 1*-forma suave en* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *(con coordenadas* (x,t)*,* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $t \in \mathbb{R}$*) y descompongamos* $\omega = \omega_t + R\,dt$ *donde* ω_c *es la restricción de* ω *al hiperplano* $t = c =$ *cte. Si* ω *satisface la condición de integrabilidad de Frobenius, es decir, si* $\omega \wedge d\omega = 0$*, entonces* ω_t *también y existe una función suave de una variable* $c = c(t)$ *tal que la solución de la ecuación de Pfaff* $\omega = 0$ *viene dada por* $u =$ *cte donde* $u(x,t) = v_t(x) - c(t)$ *y* v_t *es la solución de la ecuación de Pfaff* $\omega_t = 0$ *en* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Si $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j + R\,dt$ entonces $\omega_t = \sum_{j=1}^n \omega_j(\cdot,t) dx_j$ donde $\omega_j = \omega_j(x,t)$ y $R(x,t)$ son dos funciones suaves en $\mathbb{R}^{n+1}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega_t \neq 0$. Derivando tenemos

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{j=1}^n d\omega_j \wedge dx_j + dR \wedge dt = \sum_{j=1}^n \left(d_x\omega_j + \partial_t\omega_j dt\right) \wedge dx_j + dR \wedge dt \\
&= \sum_{j=1}^n d_x\omega_j \wedge dx_j + \left(dR - \sum_{j=1}^n \partial_t\omega_j dx_j\right) \wedge dt = d_x\omega_t + S[\omega] \wedge dt
\end{aligned}
$$

donde

$$
S[\omega] = dR - \sum_{j=1}^n \partial_t\omega_j dx_j.
$$

Por tanto

$$
\omega \wedge d\omega = \left(\omega_t + R\,dt\right) \wedge \left(d_x\omega_t + S[\omega] \wedge dt\right) = \omega_t \wedge d_x\omega_t + \left(\omega_t \wedge S[\omega] - R\,d_x\omega_t\right) \wedge dt
$$

y puesto que en el primer sumando no aparece dt, la condición de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ equivale a $\omega_t \wedge d_x\omega_t = \omega_t \wedge S[\omega] - R\,d_x\omega_t = 0$. En particular, ω_t también satisface la condición de integrabilidad en $\mathbb{R}^n$. Sean entonces μ_t/v_t un factor integrante/integral para ω_t, es decir, $\mu_t\omega_t = d_x v_t$. Si $\mu(\cdot,t) = \mu_t(\cdot)$ y $v(\cdot,t) = v_t(\cdot)$, entonces

$$
\mu\omega = \mu\left(\omega_t + R\,dt\right) = \mu_t\omega_t + \mu R\,dt = d_x v_t + \mu R\,dt = dv - \left(\partial_t v - \mu R\right)dt = dv - T\,dt
$$

donde $T = \partial_t v - \mu R$. Esto implica que

$$
dT \wedge dt = -d(\mu\omega) = -d\mu \wedge \omega - \mu \wedge d\omega \;\Rightarrow\; \omega \wedge dT \wedge dt = d\mu \wedge (\omega \wedge \omega) - \mu(\omega \wedge d\omega) = 0
$$

y por tanto $dT \wedge dv \wedge dt = 0$. Como $dv \wedge dt = \mu\omega \wedge dt = \mu_t\omega_t \neq 0$, por el Teorema de la dependencia funcional existe una función suave ψ tal que $T = \psi(t,v)$. Por último, si $c(t)$ es solución de $\dot{c} = \psi(t,c)$ y $u = v - c$, entonces $du = dv - \dot{c}dt = dv - \psi(t,c)dt$ por lo que existe $\tau = \tau(t,v) \neq 0$ (un factor integrante para la 1-forma $dv - \psi(t,v)dt$) tal que $\tau\left(dv - T\,dt\right) = du$. Así, $\tau\mu\omega = du$ y la solución de $\omega = 0$ es $u = c \;\Leftrightarrow\; v = c(t) + c$ donde $c \in \mathbb{R}$ es una contante arbitraria. ◀

(11) Resulta ilustrativo comparar su demostración con las técnicas de integración en los ejemplos anteriores.

2

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden. Estructuras de contacto

Al contrario de lo que ocurre con ecuaciones diferenciales ordinarias, no disponemos de una teoría unificada para las ecuaciones en derivadas parciales: algunas ecuaciones tienen su propia teoría[(1)] pero otras no se pueden enmarcar en ninguna. Esto se debe a que su geometría es más complicada. En el caso de ecuaciones ordinarias, cualquier campo de vectores determina localmente sus curvas integrales (este es precisamente el contenido del Teorema Fundamental de existencia y unicidad para ecuaciones ordinarias que hemos estudiado en el Grado), pero como hemos visto en el Capítulo anterior, cuando se trata de (ciertas) ecuaciones en derivadas parciales, hemos de considerar distribuciones de subespacios de dimensión mayor que 1. Como muestra el Teorema de Frobenius, incluso las distribuciones de planos en el espacio tri-dimensional genéricamente no son integrables (recuérdese el sistema (1.2) en el ejemplo 1.1 del Capítulo anterior). De hecho, la geometría subyacente en (1.2) corresponde a la *estructura de contacto* canónica de la 3-esfera $\mathbb{S}^3 : |z|^2 + |w|^2 = 1 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$[(2)].

Parte de la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (aquella que se refiere a una sola ecuación escalar de primer orden) se puede reducir al estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto es posible, físicamente hablando, porque los sistemas de partículas sin interacciones se pueden describir por la ecuación diferencial en derivadas parciales del campo o por las ecuaciones ordinarias de las partículas.

En este Capítulo y siguiendo parte de las monografías [1, 2] desarrollaremos esta teoría (que matemáticamente se reduce a la geometría de las llamadas *estructuras de contacto*).

En lo que sigue, consideraremos el caso en el que existe una teoría completa, a saber, el caso de ecuaciones de primer orden. Desde el punto de vista físico, este es

(1) Como las ecuaciones elípticas modeladas por la ecuación de Laplace.

(2) Mas concretamente con la del grupo de Heisenberg en su forma polarizada (Observación 1.2).

el caso de la dualidad que ocurre cuando se trata de describir un fenómeno usando ondas o partículas. El campo satisface cierta ecuación de primer orden en derivadas parciales, la evolución de la partículas se describe mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y existe un método que reduce la ecuación en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias: de esta forma se puede reducir el estudio de propagación de ondas al estudio de evolución de partículas.

Como ya hemos dicho, la integración de ecuaciones diferenciales de primer orden se reduce a la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias llamadas *ecuaciones características*. Esta reducción se basa en un simple argumento geométrico sobre la formación de superficies partiendo de una familia de curvas. Empezaremos con este argumento geométrico para después aplicarlo a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

2.1. Ecuaciones lineales y cuasilineales

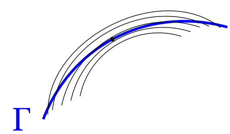
Sea X un campo de vectores

Definición 2.1. *Una subvaridedad* Γ *de* $\mathbb{R}^n$ *se dice que es una variedad integral de* X *si* X *es tangente a* Γ *en cada punto.*

Es inmediato observar que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad integral de X si, y sólo si, Γ contiene, para cada $a \in \Gamma$, un arco de la curva integral de X que pasa por a.

Definición 2.2. *Sea* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *una variedad de dimensión* k. *El* problema de Cauchy *para* X *con variedad inicial* Γ *consiste en encontrar una variedad integral de* X *de dimensión* $k+1$ *que contenga a* Γ.

Nótese que, en general, las curvas integrales de X que pasan por Γ no forman una subvariedad incluso localmente (figura adjunta).



A este respecto

Definición 2.3. *Un punto en una variedad inicial* Γ *se dice característico en la dirección de* X *si en ese punto* X *es tangente a* Γ.

Como consecuencia inmediata del Lema de rectificación 1.4 tenemos

Teorema 2.4. *Sea* X *un campo y* $a \in \Gamma$ *un punto de una variedad inicial de dimensión* k *no característico en la dirección de* X. *Entonces existe una variedad integral de* X *que contiene un entorno de* a *en esta variedad integral. Esta variedad es única en el sentido de que cualquier otra variedad integral que contenga a* a *en su interior coincide con ella en un entorno (relativo) de* a.

2.1.1. La ecuación lineal homogénea de primer orden

Una *ecuación lineal homogénea de primer orden* es una ecuación de la forma

$$\mathscr{L}_X u = 0 \tag{2.1}$$

donde X es un campo de vectores suave.
Si $X = \sum_i X^i e_i$, (2.1) se puede reescribir

$$X^1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X^2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X^n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Definición 2.5. *El campo X se llama* campo característico *de la ecuación* (2.1) *y sus curvas integrales,* curvas características. *La ecuación $\dot{x} = X_x$ se llama* ecuación característica *de* (2.1).

Obsérvese que, de la propia definición, una función u es una solución de la ecuación (2.1) si, y sólo si, es una integral primera de su ecuación característica.

Definición 2.6. *El problema de Cauchy para la ecuación* (2.1) *consiste en encontrar una solución u tal que $u\big|_\Gamma = g$ donde Γ es alguna hipersuperficie suave ($\dim \Gamma = n-1$) y g es una función definida en ella.*

La hipersuperficie Γ se llama *hipersuperficie inicial* y a la función g el *dato o condición inicial.*

En general tal problema no siempre tiene solución: en cada característica la solución u es constante. Sin embargo, una característica puede intersecar la hipersuperficie inicial Γ varias veces (ver la figura tras la Definición 2.2). Si los valores del dato inicial g son diferentes en esos puntos, el correspondiente problema de Cauchy no tiene solución en ningún entorno de la característica en cuestión.

Definición 2.7. *Un punto a en la hipersuperficie inicial Γ se dice no característico si la característica que pasa por este punto es transversal (no tangente) a Γ en a.*

Al igual que para el Teorema 2.4 y de nuevo como consecuencia del Lema 1.4 tenemos

Teorema 2.8. *El problema de Cauchy para la ecuación* (2.1) *tiene solución local única en algún entorno de cualquier punto no característico.*

Observación 2.9. Las soluciones de cualquier ecuación diferencial ordinaria forma una variedad de dimensión finita; cualquier solución viene determinada unívocamente por una colección finita de condiciones iniciales. El Teorema 2.8 muestra que para ecuaciones lineales homogéneas en derivadas parciales de primer orden en n variables 'hay tantas soluciones como funciones de $n-1$ variables'. Este fenómeno es análogo en el caso general de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.

Ejemplo 2.10. Consideremos el problema

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = g(x),\ x > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

La variedad inicial es $\Gamma: y = 0,\ x > 0$ y la ecuación en (2.2) es lineal homogénea con $X = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$.

Su sistema característico es

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \operatorname{sen} t \\ y(t) = x_0 \operatorname{sen} t - y_0 \cos t \end{cases}$$

si $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$. Así, si $y_0 = 0$ y $x_0 > 0$ (para que el punto inicial $(x_0, y_0) \in \Gamma$) y u es solución de (2.2), entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x_0 \cos t, x_0 \operatorname{sen} t) &= -x_0 \operatorname{sen} t \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 \cos t, x_0 \operatorname{sen} t) + x_0 \cos t \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 \cos t, x_0 \operatorname{sen} t) \\ &= \left(x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} \right)(x_0 \cos t, x_0 \operatorname{sen} t) = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, $u(x_0 \cos t, x_0 \operatorname{sen} t) = u(x_0, 0) = g(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, u es radial y por tanto $u(x, y) = g\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$[3].

Obsérvese que el grafo de la solución viene parametrizado por

$$\begin{cases} x = x_0 \cos t \\ y = x_0 \operatorname{sen} t \\ z = g(x_0) \end{cases}$$

y representa la solución incluso si en la condición inicial se suprime la condición $x > 0$ (en tal caso el punto $(0,0)$ es singular[4]).

2.1.2. La ecuación lineal no homogénea de primer orden

La *ecuación lineal no homogénea de primer orden* es

$$\mathscr{L}_X u = f \tag{2.3}$$

(3) Si $x = x_0 \cos t$ e $y = x_0 \operatorname{sen} t$ con $x_0 > 0$, entonces $x_0 = (x^2 + y^2)^{1/2}$. De hecho es un simple ejercicio ver que la expresión polar del campo X es $\partial/\partial\theta$ y las soluciones de la ecuación en (2.2) deben ser independientes de θ, es decir, radiales.

(4) Hecho que es consecuencia de que la ecuación en (2.2) también es singular en $(0,0)$.

donde, como antes, X es un campo de vectores y $f = f(x)$ es una función suave. En coordenadas, si $X = \sum_i X^i$,

$$X^1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X^2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X^n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x).$$

El problema de Cauchy para la ecuación (2.3) se puede formular de la misma forma que para la ecuación (2.1).

Teorema 2.11. *En un entorno suficientemente pequeño de un punto no característico en una hipersuperficie inicial Γ, el problema de Cauchy para (2.3) tiene una única solución. Esta solución viene dada por*

$$u(\varphi_t(x)) = g(x) + \int_0^t f(\varphi_\tau(x))d\tau, \qquad x \in \Gamma$$

donde φ_t es el flujo de X definido en (1.7).

Demostración. De (1.8) y (1.9)

$$\frac{d}{dt}u(\varphi_t(x)) = \mathscr{L}_X u(\varphi_t(x)) = f(\varphi_t(x))$$

si u es solución de (2.3). Así, la ecuación (2.3) significa que la derivada de la solución a lo largo de la característica es la función conocida f y por tanto,

$$u(\varphi_t(x)) = g(x) + \int_0^t f(\varphi_\tau(x))d\tau$$

si u es solución del problema de Cauchy para (2.3) y $x \in \Gamma$. ◀

2.1.3. La ecuación cuasilineal de primer orden

Una ecuación cuasilineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$X^1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X^2(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X^n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x,u) \tag{2.4}$$

es decir, una ecuación lineal en la que los coeficientes pueden depender de la función incógnita u.

Ejemplo 2.12. Consideremos un medio homogéneo que consiste en partículas que se mueven a lo largo de una recta en un sistema inercial (sin interacciones) por lo que la velocidad de cada partícula permanece constante (figura 2.1). Si $v(x,t)$ denota la velocidad de la partícula en el punto x en el instante t, por la ley de Newton, su aceleración es cero. Si $x = x(t)$ denota la posición de la partícula, entonces $\dot{x}(t) = v(x(t),t)$ y $\ddot{x}(t) = \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial t}$, Consecuentemente, el campo de velocidades v de partículas sin interacciones satisface la ecuación cuasilineal

$$v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{2.5}$$

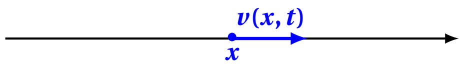


Figura 2.1. Partícula en una recta

2.1.4. Características de las ecuaciones cuasilineales de primer orden

En el Ejemplo 2.12 se puede apreciar la utilidad de pasar del campo de velocidades al movimiento de las partículas para el caso particular de la ecuación cuasilineal (2.5). Algo similar se puede hacer en el caso de la ecuación general (2.4) donde el papel del movimiento de las partículas lo juega ciertas curvas en el producto del dominio y el rango de la función incógnita: estas curvas se llaman *características de la ecuación cuasilineal.*

La ecuación cuasilineal (2.4) para la función $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ significa que si un punto x_0 empieza a moverse en $\mathbb{R}^n$ con velocidad $X_{(x_0,u_0)}$, entonces el valor de la función empieza a cambiar con velocidad $f(x_0,u_0)$. En otras palabras, el campo $\widetilde{X}_{(x,u)} = X_{(x,u)} + f(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$ es tangente al grafo de u. En efecto, en coordenadas $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la función definidora del grafo de u es $\varrho(x,u) = u - u(x)$ y $\widetilde{X}\varrho = f - Xu = 0$ si u es solución de (2.4).

Definición 2.13. *Al campo $\widetilde{X}$ se le llama* campo característico *y a sus curvas integrales* características *de la ecuación* (2.4). *El sistema de ecuaciones diferenciales que determina estas características se denomina* sistema característico de la ecuación (2.4). *Más precisamente, el sistema característico de* (2.4) *es*

$$\begin{cases} \dot{x} = X_{(x,u)} \\ \dot{u} = f(x,u), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X^1(x_1,x_2,\dots,x_n,u) \\ \dot{x}_2 = X^2(x_1,x_2,\dots,x_n,u) \\ \qquad\vdots \\ \dot{x}_n = X^n(x_1,x_2,\dots,x_n,u) \\ \dot{u} = f(x_1,x_2,\dots,x_n,u) \end{cases}$$

si $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, el sistema característico para la ecuación (2.5) es

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{v} = 0 \end{cases}$$

y por consiguiente, sus características son las líneas rectas

$$\begin{cases} x = a + bt \\ v = b. \end{cases}$$

Observación 2.14. Una ecuación lineal es un caso especial de una cuasilineal. Sin embargo, las características de una ecuación lineal no son las mismas que cuando se considera como una ecuación cuasilineal: las características de una ecuación lineal son curvas en $\mathbb{R}^n$ mientras que para ecuaciones cuasilineales son curvas en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Las características de una ecuación lineal son las proyecciones de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ de las características cuando la misma ecuación se considera como cuasilineal.

Como consecuencia tenemos

Teorema 2.15. *Una función u es solución de una ecuación cuasilineal si, y sólo si, su grafo contiene (localmente) a las características de la ecuación.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de la tangencia del campo característico al grafo de u (ver la discusión inmediatamente anterior a la Definición 2.13). ◀

Consecuentemente, determinar las soluciones de una ecuación cuasilineal se reduce a encontrar sus características. Conocidas las características, basta usarlas para construir una subvariedad que sea el grafo de una función: la función así construida será una solución de la ecuación cuasilineal y cualquier solución se puede obtener de esta manera.

2.1.5. El problema de Cauchy para ecuaciones cuasilineales de primer orden

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie (una subvariedad de codimensión 1) y $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ una función suave. Análogamente a la definición 2.6, el problema de Cauchy para la ecuación (2.4) con dato g sobre Γ consiste en encontrar una solución u que coincida con g sobre Γ.

Por el Teorema 2.15, la solución de este problema se reduce a la solución del problema de Cauchy para el campo característico: el grafo $\widetilde{\Gamma}$ de g sobre Γ (que es una subvariedad de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de codimensión 2) es la variedad inicial para el dato g sobre Γ. Como para ecuaciones lineales, la condición inicial (Γ, g) se dice *no característica* para la ecuación (2.4) en el punto $x_0 \in \Gamma$ si el vector $X_{(x_0,u_0)}$ $(u_0 = g(x_0))$ no es tangente a Γ en x_0.

Observación 2.16. Si la ecuación es lineal, X no depende de u y esta noción coincide con la considerada para tales ecuaciones (Definición 2.7). Sin embargo, para ecuaciones cuasilineales en general, sólo un punto $(x_0, u_0) \in \widetilde{\Gamma}$ puede ser característico o no pero no podemos hablar de que un punto $x_0 \in \Gamma$ sea característico.

Teorema 2.17. *Para una condición inicial no característica en un punto x_0, el problema de Cauchy para la ecuación cuasilineal* (2.4) *tiene una única solución local.*

Demostración. Si la condición inicial no es característica en x_0 tenemos:

- El campo característico $\widetilde{X}$ no se anula en un entorno del punto (x_0, u_0).
- La dirección característica no es tangente a la variedad inicial Γ en x_0 y por tanto lo será en alguno de sus entornos. Consecuentemente, por el Teorema 2.4, la variedad integral local del campo característico que contiene a la variedad integral Γ existe y es única.
- El espacio tangente en (x_0, u_0) a la variedad integral no es vertical (no contiene el eje u). La variedad integral es localmente el grafo de una función que, por el Teorema 2.15, es solución de (2.4). ◀

Ejemplo 2.18. Sea $\Gamma\colon y = 0$ y consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2 \\ u = g \text{ en } \Gamma. \end{cases}$$

El sistema característico para esta ecuación cuasilineal es

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{u} = u^2 \end{cases}$$

y su solución

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ u = \dfrac{u_0}{1 - u_0 t}. \end{cases}$$

Para $(x_0, y_0) \in \Gamma$, $y_0 = 0$ y $u_0 = g(x_0)$. Eliminando x_0 y t obtenemos

$$u = \frac{g(x_0)}{1 - g(x_0)t} = \frac{g(x-y)}{1 - yg(x-y)}$$

siempre que $yg(x-y) \neq 1$.

2.2. La ecuación no lineal de primer orden

La ecuación no lineal general de primer orden, como las lineales o cuasilienales, pueden ser integradas mediante características. Sin embargo, mientras que para ecuaciones lineales las características están contenidas en $\mathbb{R}^n$ y para ecuaciones cuasilineales en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, las características para la ecuación general están contenidas en el espacio $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de 1-jets de funciones en $\mathbb{R}^n$.

La integración de la ecuación en derivadas parciales no lineal de primer orden sigue argumentos geométricos relacionados con la estructura de contacto canónica en el espacio de 1-jets.

2.2.1. Estructuras de contacto

Una estructura de contacto en una variedad M es una distribución de hiperplanos en M que satisface una condición de *'no integrabilidad maximal'* que, como veremos, es el extremo opuesto a la condición de integrabilidad de Frobenius.

Como sabemos, una distribución de hiperplanos en M se puede representar por una 1-forma α sin ceros en M. Esta 1-forma está determinada salvo multiplicación por una función sin ceros en M: los hiperplanos en la distribución son los núcleos de esta 1-forma (los subespacios del espacio tangente donde la forma se anula).

Ejemplo 2.19. En $M = \mathbb{R}^{2n+1}$ con coordenadas (x, u, p) donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}$, podemos considerar la 1-forma $\alpha = du - p dx = du - \sum_{j=1}^n p_j dx_j$. Esta 1-forma no se anula en ningún punto por lo que define una distribución $\alpha = 0$ de hiperplanos en M.

Definición 2.20. *Una* 1*-forma* α *se dice de* contacto *en una variedad si no se anula en ningún punto y su derivada exterior* $d\alpha$ *define una* 2*-forma no degenerada sobre cada hiperplano* $\alpha_x = 0$[(5)].

Ejemplo 2.21. La 1-forma considerada en el ejemplo 2.19 es una forma de contacto. En efecto, su diferencial exterior es $d\alpha = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dx_j$ y, en el hiperplano $\alpha = 0$, podemos considerar las coordenadas (x, p) en las que la matriz asociada a $d\alpha\big|_{\alpha=0}$ es $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ donde $\mathbb{1}$ denota la matriz identidad de orden n. El determinante de esta matriz es igual a 1 y por tanto, la 2-forma $d\alpha$ no es degenerada en $\alpha = 0$.

Nótese el paralelismo con la estructura compleja J (multiplicar por $i = \sqrt{-1}$) en $\mathbb{C}^n$. Si $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = x + ip$ con $z_j = x_j + ip_j$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, entonces $Jz = iz \Leftrightarrow J\left(\begin{smallmatrix} x \\ p \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -p \\ x \end{smallmatrix}\right)$. Por tanto la matriz asociada a J es precisamente la matriz anterior.

Observación 2.22. Formas bilineales antisimétricas no degeneradas sólo existen en espacios de dimensión par[(6)]. Consecuentemente, las formas de contacto sólo existen en variedades de dimensión impar.

---

(5) Una forma bilineal $\omega\colon E \times E \to \mathbb{R}$ sobre un espacio vectorial real E es no degenerada si para cualquier $\vec{\zeta} \in E \setminus \{0\}$ existe $\vec{\eta} \in E$ tal que $\omega(\vec{\zeta}, \vec{\eta}) \neq 0$.

(6) Con la notación de la nota (5) anterior, la matriz Ω asociada a tal forma debe ser antisimétrica, es decir, $\Omega^\top = -\Omega$ y por tanto $\det\Omega = (-1)^{\dim E} \det\Omega$. Así, $\det\Omega = 0$ si $\dim E$ es impar.

Definición 2.23. *Una* estructura de contacto *en una variedad M es una distribución de hiperplanos tangentes localmente definidos por una* 1*-forma de contacto. Los hiperplanos de la distribución se llaman* hiperplanos de contacto. *Denotaremos por* Π_x *al hiperplano de contacto en el punto* x.

Observación 2.24. Si una distribución de contacto Π está localmente definida por una forma de contacto α, cualquier otra es múltiplo funcional de esta, es decir, debe ser de la forma $\beta = f\alpha$ (f sin ceros). Puesto que $d\beta = df \wedge \alpha + f d\alpha$ y $df \wedge \alpha$ se anula en Π vemos que $d\beta = f d\alpha$ sobre Π y por tanto β es otra forma de contacto asociada a Π. Esto quiere decir que la estructura de contacto está determinada por la distribución Π es sí.

Por otro lado, de la Observación 2.22, las estructuras de contacto sólo pueden existir en variedades de dimensión impar.

Como recoge el siguiente resultado, las variedades integrales de una estructura de contacto deben tener codimensión alta (ver la Observación 2.32(b) para su demostración).

Proposición 2.25. *La dimensión de las subvariedades integrales de una distribución de contacto en una variedad de dimensión* $2n+1$ *es a lo sumo* n.

Para cualquier distribución de contacto en una variedad de dimensión $2n+1$ siempre existen subvariedades integrales de dimensión máxima n. Estas se denominan *subvariedades de Legendre*.

2.2.2. La estructura de contacto en el espacio de 1-jets

Sea Σ una variedad de dimensión n y consideremos el espacio de 1-jets $J^1(\Sigma,\mathbb{R})$ de funciones. El 1-jet de una función u en Σ en un punto $x \in \Sigma$ es la tripleta $(x, u(x), du(x))$ formada por x, el valor de u en x y la diferencial de u en x. Así, la dimensión de $J^1(\Sigma,\mathbb{R})$ es $2n+1$: si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un sistema local de coordenadas en Σ, entonces el 1-jet de u se puede representar por $(x_1, x_2, \dots, x_n; u; p_1, p_2, \dots, p_n)$ con $p_j = \partial u/\partial x_j(x)$[7].

Definición 2.26. *La estructura de contacto estándar en* $J^1(\Sigma,\mathbb{R})$ *viene dada por la* 1*-forma* $\alpha = du - p\,dx$ *donde* $p\,dx = \sum_{j=1}^n p_j\,dx_j$.

Observación 2.27. En el Ejemplo 2.19 y 2.21 ya hemos visto que α es una 1-forma de contacto en $\mathbb{R}^{2n+1}$ y no es difícil ver que α definida localmente de esta forma usando coordenadas no depende de la elección de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir, está globalmente definida.

[7] Obsérvese que el 1-jet de una función u en x se puede identificar con su desarrollo de Taylor de orden 1 en x.

Definición 2.28. *El* 1*-grafo* $\mathscr{G}_u^1$ *de una función* $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *es la subvariedad que consiste en los* 1*-jets de* u *en todos los puntos de* Σ*, es decir,*

$$\mathscr{G}_u^1 = \{(x, u(x), du(x)) \mathbin{/} x \in \Sigma\}.$$

Los 1-grafos de funciones determinan la estructura de contacto estándar en el espacio de 1-jets. El siguiente teorema recoge su relación.

Teorema 2.29. *La estructura de contacto estándar en el espacio de* 1*-jets de funciones en* Σ *se anula en los hiperplanos tangentes a todos los* 1*-grafos de funciones en* Σ*. La unión de los hiperplanos tangentes a todos los* 1*-grafos de funciones en* Σ *coincide con el hiperplano de contacto estándar en* $J^1(\Sigma, \mathbb{R})$ *(en cada uno de sus puntos).*

Demostración. La primera afirmación sigue inmediatamente de la definición de la diferencial $du = p\,dx$ de una función $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}$. La segunda, sigue de existencia de funciones con derivadas parciales prescritas en un punto dado. ◀

Nótese que la Observación 2.27 es un corolario de este Teorema.

2.2.3. Geometría en una hipersuperficie en una variedad de contacto

Sea M^{2n+1} una variedad de contacto y $E^{2n} \hookrightarrow M^{2n+1}$ una hipersuperficie suave en M^{2n+1}.

Definición 2.30. E^{2n} *se dice* no característica *en* M^{2n+1} *si sus hiperplanos tangentes y los hiperplanos de contacto son transversales en todos sus puntos, es decir, su suma vectorial coincide con el espacio tangente a* M^{2n+1}[(8)].

La intersección del hiperplano tangente a una hipersuperficie no característica con el hiperplano de contacto en un punto dado se llama *plano característico* en ese punto

$$\mathscr{P}_x = T_x E \cap \Pi_x, \qquad x \in E. \tag{2.6}$$

En esta situación, los planos característicos definen una distribución en E^{2n} de dimensión $2n-1$. Resulta que la estructura de contacto define una línea, llamada *dirección característica*, en estos planos característicos.

El complemento anti-ortogonal

Para definir la dirección característica, hemos de recordar que, análogamente a lo que se hace con productos interiores, en un espacio vectorial con una forma bilineal no degenerada siempre podemos considerar complementos ortogonales. En este caso, la 'ortogonalidad' de un par de vectores dados se define por anulación de la forma en el par.

(8) Equivalentemente, su intersección es un espacio de dimensión $2n-1$.

- Sea (V, g) un espacio euclídeo (V es un espacio vectorial y g un producto interior en V). A cada vector $\vec{\zeta} \in V$ le corresponde una 1-forma $g(\vec{\zeta}, \cdot)$ (el producto escalar con el vector $\vec{\zeta}$, es decir, el valor de esta 1-forma en el vector $\vec{\eta} \in V$ es igual a $g(\vec{\zeta}, \vec{\eta})$[(9)]. A una línea recta L le corresponde su complemento ortogonal (el núcleo de la 1-forma correspondiente a cualquier vector no nulo en ella). Cualquier subespacio de codimensión 1 es el complemento ortogonal de una línea L (figura 2.2).
- Ahora sea (V, ω) un espacio simpléctico (V es un espacio vectorial y ω una 2-forma no degenerada en V[(10)]). Como antes, a cada vector $\vec{\zeta} \in V$ le corresponde una 1-forma $\omega(\vec{\zeta}, \cdot)$ (el 'producto escalar' con $\vec{\zeta}$), es decir, el valor de esta 1-forma en el vector $\vec{\eta} \in V$ es $\omega(\vec{\zeta}, \vec{\eta})$[(11)]. A una línea recta L le corresponde su complemento anti-ortogonal (el núcleo de la 1-forma correspondiente a cualquier vector no nulo en ella) y cualquier subespacio de codimensión 1 es el complemento anti-ortogonal de una única línea L en V (figura 2.3). Nótese que en este caso, si $W \subset V$ es un subespacio de codimensión 1 y $\vec{\xi} \in L$ es un vector no nulo en su línea anti-ortogonal, entonces $W = \vec{\xi}^{\perp_\omega} := \{\omega(\vec{\xi}, \cdot) = 0\}$ ya que codim(W)=codim($\vec{\xi}^{\perp_\omega}$)=1. Así, $L \subset W$.

Al contrario de lo que sucede con la ortogonalidad respecto a productos interiores, cualquier linea está contenida en su complemento anti-ortogonal. Esto es consecuencia de que $\omega(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}) = -\omega(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}) = 0$ para todo $\vec{\zeta} \in V$ ya que ω es antisimétrica.

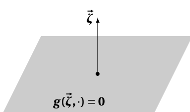


Figura 2.2. Complemento ortogonal

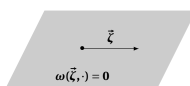


Figura 2.3. Complemento anti-ortogonal

Proposición 2.31. *Si todos los vectores de un subespacio en un espacio simpléctico de dimensión $2n$ son anti-ortogonales unos a otros, entonces su dimensión (la del subespacio) es a lo sumo n.*

Demostración. El complemento anti-ortogonal de un subespacio de dimensión q tiene dimensión $2n - q$[(12)]. Si $q > n$, entonces la dimensión de su complemento anti-ortogonal es menor que n y el subespacio no puede ser anti-ortogonal a sí mismo. ◀

---

(9) Por ejemplo, ∇u es el vector correspondiente a du.
(10) Que llamaremos simpléctica.
(11) El Hamiltoniano de una función h corresponde a dh.
(12) Esto es consecuencia de que la forma simpléctica no es degenerada.

Observación 2.32. (a) En cualquier espacio simpléctico de dimensión $2n$ existen subespacios anti-ortogonales a sí mismos de dimensión n. Se denominan *subespacios Lagrangianos.*

(b) La Proposición 2.25 es una consecuencia inmediata de esta Proposición. Sea L una variedad de Legendre de dimensión q en una variedad de contacto M^{2n+1}. Puesto que $\omega = d\alpha$ es un forma simpléctica en el plano de contacto, si X, Y son campos tangentes a L entonces, por el Lema 1.19, $\omega(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]) = 0$ ya que el conmutador $[X,Y]$ sigue siendo tangente a L. Así, q debe ser menor o igual que n (la mitad de la dimensión de la distribución de contacto).

Características sobre una hipersuperficie en un espacio simpléctico

Ahora retomamos la discusión sobre la geometría en hipersuperficies no características en una variedad de contacto M^{2n+1} de dimensión $2n+1$. La *dirección característica* $\mathfrak{l}_x$ en un punto no característico $x \in E^{2n}$ en una hipersuperficie de M^{2n+1} es el complemento anti-ortogonal del plano característico $\mathscr{P}_x^{2n-1} = T_x E^{2n} \cap \Pi_x^{2n}$ en el hiperplano de contacto (la 2-forma en $\alpha_x = 0 \equiv \Pi_x^{2n}$ está definida por $d\alpha|_{\Pi_x^{2n}}$).

Definición 2.33. *La* dirección característica $\mathfrak{l}$ *en un punto no característico en una hipersuperficie de una variedad de contacto es el complemento anti-ortogonal del plano característico en el hiperplano de contacto.*

Obsérvese que, por lo comentado anteriormente, la dirección característica está contenida en el plano característico y que coinciden si $n = 1$.

Definición 2.34. *Las curvas integrales del campo de direcciones características sobre una hipersuperficie en una variedad de contacto se denominan* características *de la hipersuperficie.*

Sea $\Sigma^q \hookrightarrow E^{2n}$ un subvariedad integral de la distribución de contacto(13). Un punto $x \in \Sigma^q$ es no característico si $T_x\Sigma^q$ no contiene a la línea característica que pasa por x, es decir, si $\mathfrak{l}_x \not\subset T_x\Sigma_x^q$ (equivalentemente, la dirección característica es transversal a Σ^q en x).

El problema de Cauchy para el campo de direcciones características

Como antes, sea E^{2n} una hipersuperficie en una variedad de contacto M^{2n+1} y $\Sigma^{n-1} \hookrightarrow E^{2n}$ una subvariedad integral de la distribución de contacto. El *problema de Cauchy* para la hipersuperficie E^{2n} con variedad inicial Σ^{n-1} consiste en encontrar una subvariedad integral de la distribución de contacto $\mathcal{N}^n$ tal que $\Sigma^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{N}^n \hookrightarrow E^{2n}$, es decir, que contenga a Σ^{n-1} y continúe siendo una subvariedad de la hipersuperficie E^{2n}.

Como corolario del Teorema 2.4

(13) Por tanto, $T_x\Sigma^q \subset \mathscr{P}_x^{2n-1} = T_x E^{2n} \cap \Pi_x$ para todo $x \in \Sigma^q$ y Σ^q es una subvariedad integral de la distribución característica.

Teorema 2.35. *Sea x un punto no característico de una una variedad inicial Σ^{n-1}. Entonces existe un entorno U de x tal que el problema de Cauchy con variedad inicial $\Sigma^{n-1}\cap U$ en $E^n \cap U$ existe y es localmente única (cualquier par de soluciones con la misma variedad inicial coinciden en un entorno de x).*

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.4 a Σ^{n-1} y a cualquier campo con dirección característica[14]. ◀

Observación 2.36. La variedad $\mathcal{N}^n$ está 'foliada' por características, es decir, consiste en la unión (disjunta) de las características que pasan por los puntos de la variedad inicial Σ^{n-1}.

Aplicación a la ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden

Una ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden para una función $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ define una hipersuperfice en el espacio $M^{2n+1} = J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ de 1-jets.

La ecuación diferencial general de primer orden es

$$\Phi(x,u,\nabla u) = 0. \tag{2.7}$$

La función Φ determina localmente una hipersuperficie $E^{2n} \hookrightarrow M^{2n+1}$,

$$E^{2n} = \left\{(x,u,p) \in M^{2n+1} \,/\, \Phi(x,u,p) = 0\right\} \tag{2.8}$$

y, por el apartado 2.2.2, resolver (2.7) se reduce a encontrar las variedades integrales de la estructura de contacto en M^{2n+1} contenidas en E^{2n} que sean 1-grafos de funciones.

Sea $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie suave, $g\colon \Gamma^{n-1} \to \mathbb{R}$ una función suave y $E^{2n} \subset J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ la hipersuperficie suave dada por (2.8) que supondremos no característica. Como en los apartados anteriores, el problema de Cauchy para la ecuación (2.7) consiste en determinar una solución $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de (2.7) tal que $u|_{\Gamma^{n-1}} = g$.

Ahora, a partir del dato inicial de Cauchy (Γ, g) construiremos la variedad inicial Σ^{n-1} para el correspondiente problema de Cauchy relativo a la hipersuperficie (2.8). Claramente, los 1-jets en Σ^{n-1} deben satisfacer

- el punto base del jet debe pertenecer a Γ^{n-1},
- el valor de la función en ese punto debe ser el valor de g en ese punto,
- la restricción de la diferencial de la función al plano tangente a Γ^{n-1} en ese punto debe coincidir con la diferencial de g,
- el jet debe pertenecer a E^{2n} (la hipersuperficie (2.8)).

Un punto en la variedad inicial se dice no característico para la ecuación (2.7) si la proyección sobre $\mathbb{R}^n$ de la dirección característica en ese punto es transversal a Γ^{n-1}. Esta noción es distinta a la considerada en la página 39 pero la implica. Así, como consecuencia del Teorema 2.35 (que también proporciona un método de construcción de soluciones) tenemos

(14) Localmente tal campo siempre existe.

Teorema 2.37. *Supongamos que un punto* (x_0, u_0, p_0) *de la variedad inicial en el espacio de* 1*-jets no es característico para la ecuación* (2.7). *Entonces, el problema de Cauchy para la ecuación* (2.7) *tiene solución en algún entorno de* x_0 *y es localmente única (en el sentido que si dos soluciones de la ecuación en un entorno* U *de* x_0 *satisfacen* $u|_{\Gamma^{n-1}\cap U} = g|_{\Gamma^{n-1}\cap U}$, $u(x_0) = u_0$ *y* $\nabla u(x_0) = p_0$, *entonces coinciden en un entorno de* x_0*).*

Expresiones explícitas

A continuación computaremos la expresión explícita del campo característico en términos de la ecuación (2.7). Consideremos (x, u, p) las coordenadas en $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Por definición $(\dot{x}, \dot{u}, \dot{p}) \in T_{(x,u,p)}E^{2n} \Leftrightarrow \partial_x\Phi\dot{x} + \partial_u\Phi\dot{u} + \partial_p\Phi\dot{p} = 0$ (que se obtiene por diferenciación en la ecuación que define E^{2n}, es decir, en $\Phi = 0$). Puesto que el vector característico debe pertenecer al hiperplano de contacto, $\dot{u} = p\cdot\dot{x}$ (recuérdese que la forma de contacto en $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es $\alpha = du - p\cdot dx$ y por tanto, para que $(\dot{x}, \dot{u}, \dot{p})$ pertenezca al hiperplano de contacto $\alpha_{(x,u,p)}(\dot{x}, \dot{u}, \dot{p}) = \dot{u} - p\cdot\dot{x} = 0$). Eliminando $\dot{u}$ en estas relaciones vemos que el plano característico $\mathscr{P}^{2n-1}_{(x,u,p)}$ viene dado por las relaciones

$$\begin{cases} \left(\partial_x\Phi + p\cdot\partial_u\Phi\right)\dot{x} + \left(\partial_p\Phi\right)\cdot\dot{p} = 0 \\ \dot{u} = p\cdot\dot{x}. \end{cases} \tag{2.9}$$

La primera ecuación en (2.9) está escrita en coordenadas (x, p) que se pueden usar como coordenadas en el hiperplano de contacto ya que este proyecta uno a uno sobre el hiperplano (x, p) en $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (la componente intermedia u viene dada por la segunda relación en (2.9)). Resta encontrar el complemento anti-ortogonal de $\mathscr{P}^{2n-1}_{(x,u,p)}$. Para ello primero observamos que el valor de $d\alpha = dx\wedge dp$ en dos vectores $(\dot{x}, \dot{p})$ y $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{p}})$ en el hiperplano de contacto es

$$dx\wedge dp\big((\dot{x}, \dot{p}), (\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{p}})\big) = \dot{x}\cdot\dot{\bar{p}} - \dot{p}\cdot\dot{\bar{x}}$$

y por tanto, el vector característico debe satisfacer $\dot{x}\cdot\dot{\bar{p}} - \dot{p}\cdot\dot{\bar{x}} = 0$. Pero, como la primera ecuación en (2.9) tiene la misma forma que esta última, la dirección característica viene dada por $\dot{\bar{x}} = -\partial_p\Phi$, $\dot{\bar{p}} = \partial_x\Phi + p\cdot\partial_u\Phi$ y, por supuesto, $\dot{\bar{u}} = -p\cdot\partial_p\Phi$. Sucede que es el vector opuesto el que tradicionalmente se considera el vector característico. Así, el sistema diferencial que satisfacen las características de (2.7) es

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_p\Phi \\ \dot{u} = p\cdot\partial_p\Phi \\ \dot{p} = -\partial_x\Phi - p\cdot\partial_u\Phi. \end{cases} \tag{2.10}$$

Ejemplo 2.38. Considérese el problema no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = u \\ u(0, y) = y^2. \end{cases}$$

Para este caso, $\Phi = pq - u$ (aquí usamos la notación estándar en dos dimensiones $p_1 = p$, $p_2 = q$) y el sistema característico (2.10) es

$$\begin{cases} \dot{x} = q \\ \dot{y} = p \\ \dot{u} = 2pq \\ \dot{p} = p \\ \dot{q} = q. \end{cases}$$

Integrando tenemos

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + q_0(e^t - 1) \\ y(t) = y_0 + p_0(e^t - 1) \\ u(t) = u_0 + p_0 q_0(e^{2t} - 1) \\ p(t) = p_0 e^t \\ q(t) = q_0 e^t, \end{cases}$$

donde, atendiendo a la condición de frontera, debemos tomar $x_0 = 0$ y $u_0 = y_0^2$. Ahora debemos determinar p_0 y q_0. Puesto que $u(0, y) = y^2$, $q_0 = \partial u/\partial y(0, y_0) = 2y_0$. Además, de la propia ecuación $p_0 q_0 = u_0 = y_0^2 \Rightarrow 2y_0 p_0 = y_0^2 \Rightarrow p_0 = y_0/2$. Consecuentemente, las relaciones anteriores se convierten en

$$\begin{cases} x(t) = 2y_0(e^t - 1) \\ y(t) = \dfrac{y_0}{2}(e^t + 1) \\ u(t) = y_0^2 e^{2t} \\ p(t) = \dfrac{y_0}{2} e^t \\ q(t) = 2y_0 e^t. \end{cases}$$

Ahora, de las relaciones

$$\begin{cases} x = 2y_0(e^t - 1) \\ y = \dfrac{y_0}{2}(e^t + 1) \end{cases}$$

tenemos $y_0 = \frac{4y-x}{4}$ y $e^t = \frac{4y+x}{4y-x}$ y por tanto

$$u = y_0^2 e^{2t} \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{(x+4y)^2}{16}.$$

2.2.4. Derivación estándar del sistema característico

En este apartado y siguiendo [5, §3.2.1], presentamos la derivación del sistema característico tal y como se recogería en un primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.

Queremos resolver el problema de Cauchy para la ecuación (2.7) bajo la condición $u = g$ en una hipersuperficie $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Como hemos visto, el método reduce este problema al sistema de ecuaciones ordinarias (2.10) que ahora deduciremos de forma 'elemental' sin apelar a la estructura de contacto. La idea es conectar cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n$ cercano a Γ con un punto $x_0 \in \Gamma$ por una curva (una característica) a lo largo de la que se pueda computar la solución u de (2.7). De la condición inicial conocemos u en x_0 y por tanto encontraremos su valor en x.

Sea $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ una curva parametrizada por el parámetro t en algún intervalo de $\mathbb{R}$ y supongamos que u es una solución C^2 de (2.7). Denotemos por

$$z(t) = u(x(t)) \tag{2.11}$$

$$p(t) = \nabla u(x(t)), \tag{2.12}$$

esto es, $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$ donde $p_j(t) = \partial u / \partial x_j (x(t))$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Así, $z(t)$ proporciona los valores de u sobre la curva mientras $p(t)$ los correspondientes valores de su gradiente ∇u. Debemos elegir, si es posible, la curva $x(\cdot)$ de tal forma que permita encontrar $z(\cdot)$ y $p(\cdot)$. Para ello procedemos como sigue: derivando en (2.12)

$$\dot{p}_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x(t))\dot{x}_k(t). \tag{2.13}$$

Aunque esta relación no parece muy prometedora (envuelve derivadas segundas de u), derivando la ecuación (2.7) respecto a x_j

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x, u, \nabla u) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, u, \nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}(x, u, \nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} = 0. \tag{2.14}$$

A la vista de (2.13) y (2.14) podemos, para eliminar los términos 'peligrosos' elegir

$$\dot{x}_k(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}(x(t), z(t), p(t)), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.15}$$

ya que entonces, evaluando (2.14) en $x(\cdot)$ así elegida, obtenemos de (2.13)

$$\dot{p}_j(t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x(t), z(t), p(t)) - \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x(t), z(t), p(t))p_j(t). \tag{2.16}$$

Por último, derivando en (2.11)

$$\dot{z}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(t), z(t), p(t))\dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}(x(t), z(t), p(t)). \tag{2.17}$$

Resumiendo, (2.15)–(2.17) resultan ser de nuevo (2.10).

Observación 2.39. El sistema característico es verdaderamente notable en el sentido que forma un sistema cerrado de ecuaciones para $x(\cdot)$, $z(\cdot) = u(x(\cdot))$ y $p(\cdot) = \nabla u(x(\cdot))$ cuando u es una solución C^2 de (2.7). La idea clave fue nuestra elección de la primera ecuación en (2.15) para eliminar los términos de segundo orden. De este modo cerramos el sistema y no nos vemos forzados a introducir ecuaciones ordinarias de segundo orden (u orden superior).

Bibliografía

[1] ARNOLD, V. I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.* Translated from the Russian by Joseph Szücs [József M. Szucs]. Second edition. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 250. Springer-Verlag, New York (1988).

[2] ARNOLD V. I. *Lectures on Partial Differential Equations.* Translated from the second Russian edition by Roger Cooke. Universitext. Springer-Verlag, Berlin; Publishing House PHASIS, Moscow (2004).

[3] CLEBSCH, A. *Über die simultane Integration lineärer partieller Differentialgleichungen.* J. Reine Angew. Math. (Crelle) 65, 257-268 (1866).

[4] DEAHNA, F. *Über die Bedingungen der Integrabilität lineärer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen.* J Reine Angew. Math. (Crelle) 20, 340-349 (1840).

[5] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* Gaduate Studies in Math. 19. Amer. Math. Soc. (2010).

[6] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna (2013).

[7] LUNDELL, A. T. *A Short Proof of the Frobenius Theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 116(4), 1131-1133 (1992).

[8] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Math. 94. Springer Verlag, New York (1971).