Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Javier Díaz Cabrera

Una introducción a la Teoría de Categorías y a sus aplicaciones

An introduction to Category Theory and its applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Mayo de 2023

Dirigido por
José Manuel García Calcines

José Manuel García Calcines
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres que siempre me han apoyado.

Javier Díaz Cabrera
La Laguna, 20 de mayo de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

La Teoría de Categorías fue introducida a mediados del siglo XX por los matemáticos Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane como una herramienta para estudiar la Topología Algebraica. En particular, buscaban abstraer propiedades comunes de las diversas teorías de homología que habían surgido hasta el momento. En resumen, la Teoría de Categorías estudia los espacios (ya sean espacios topológicos, espacios vectoriales, grupos, etc.) en términos de las relaciones entre ellos, mediante las llamadas propiedades universales y obviando la estructura interna de estos. Esta perspectiva permite alcanzar un alto nivel de generalidad. En este Trabajo de Fin de Grado estudiaremos las nociones fundamentales de esta teoría y veremos algunos resultados clásicos. Este estudio será complementado con numerosos ejemplos provenientes de diversas áreas de las matemáticas así como con una introducción a las aplicaciones de la Teoría de Categorías fuera de este campo.

Palabras clave: *categoría – funtor – transformación natural – Lema de Yoneda – límite – colímite – funtor adjunto – conexión de Galois – extensión de Kan – bases de datos.*

Abstract

Category Theory was introduced in the mid-20th century by mathematicians Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane as a tool to study Algebraic Topology. In particular, they aimed to abstract common properties from various homology theories that had emerged up until that point. In summary, Category Theory studies spaces (such as topological spaces, vector spaces, groups, etc.) in terms of the relationships between them, using the so-called universal properties and disregarding their internal structure. This perspective allows for a high level of generality. In this undergraduate thesis, we will study the fundamental notions of this theory and explore some classic results. This study will be complemented with numerous examples coming from various areas of mathematics and an introduction to applications of Category Theory outside of this field.

Keywords: *category – functor – natural transformation – Yoneda Lemma – limit – colimit – adjoint functor – Galois connection – Kan extension – databases.*

Contenido

Introducción

La Teoría de Categorías tiene su origen en el artículo *"General Theory of Natural Equivalences"*, publicado por los matemáticos Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1945. Este artículo pretendía generalizar ciertas construcciones que los autores habían introducido en el contexto del estudio de grupos de homología durante trabajos previos. En un principio, gran parte de la comunidad matemática creía que los conceptos definidos en el mencionado artículo no trascenderían más allá de un lenguaje conveniente y, de hecho, esa fue su función durante más de una década. Buen ejemplo de esto son los libros *"Foundations of algebraic topology"* (1952) de Eilenberg y Steenrod o *"Homological Algebra"* (1956) de Cartan y Eilenberg, fundamental en álgebra homológica. Sin embargo, el panorama cambió radicalmente gracias a un artículo publicado por el matemático Alexander Grothendieck en 1957 titulado *"Sur quelques points d'algèbre homologique"*. Este trabajo utilizaba categorías de manera intrínseca para construir teorías generales que luego aplicaría a otros ámbitos, especialmente a la Geometría Algebraica. Poco después, el americano David Kan hizo importantes contribuciones a la Teoría de Categorías y a partir de entonces esta se ha constituido como un área de estudio propia.

Las categorías están compuestas por una clase cuyos elementos llamamos objetos y por flechas entre pares de objetos. Una vez definida esta noción, se pueden definir flechas entre categorías, los funtores. Posteriormente se definen flechas entre funtores, las transformaciones naturales. Estos son los conceptos más fundamentales en Teoría de Categorías. En pocas palabras, esta teoría estudia los espacios (ya sean espacios topológicos, espacios vectoriales, grupos, etc.) en términos de las relaciones entre ellos, mediante las llamadas propiedades universales y obviando la estructura interna de estos. Esta perspectiva permite alcanzar un alto nivel de generalidad.

En las últimas décadas del siglo XX, las categorías fueron ampliamente utilizadas por matemáticos de distintas áreas. El alto grado de abstracción permite que un teorema en Teoría de Categorías pueda ser aplicado en una gran cantidad de contextos, desde el Análisis Funcional hasta el Álgebra Abstracta. La matemática Emily Riehl da varios ejemplos de estas aplicaciones al principio de [12]. Además, podemos utilizar este nivel de abstracción para generalizar conceptos definidos en ámbitos particulares, dando lugar a teorías axiomáticas como la Teoría de Homotopía descrita en [11]. Sin embargo, las aplicaciones de la Teoría de Categorías no se restringen únicamente a las matemáticas. En particular, las llamadas *categorías cartesiano cerradas* han demostrado tener relaciones directas con la Lógica y muchas áreas de las Ciencias de la Computación utilizan Teoría de Categorías. De hecho, las aplicaciones fuera de las matemáticas son un tema de actualidad, pues la mayoría de ellas se han desarrollado en los últimos años.

Para poder aplicar una teoría primero se debe conocer bien. Por este motivo, la naturaleza de este Trabajo de Fin de Grado es principalmente teórica, relegando las aplicaciones a un segundo plano. El objetivo principal es introducir los conceptos más relevantes en Teoría de Categorías, así como demostrar los resultados de mayor importancia. Este estudio será complementado con ejemplos provenientes de diversas áreas de las matemáticas, especialmente de Topología, Álgebra y Teoría de Conjuntos. Finalmente, se dará una breve introducción a las aplicaciones fuera de las matemáticas.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos:

- El primer capítulo está dedicado a las nociones fundamentales de Teoría de Categorías: las categorías, los funtores y las transformaciones naturales. También se definen otros conceptos relevantes como la equivalencia de categorías, se demuestran algunos resultados sencillos y se introduce el principio de dualidad.
- El segundo capítulo tiene una naturaleza más técnica y esta dividido en dos partes. En la primera se dan construcciones como las categorías comma, las categorías libres generadas por un grafo o las categorías cociente. En la segunda se introducen las flechas universales y los funtores representables. También se enuncia y prueba el relevante Lema de Yoneda.
- El tercer capítulo se dedicará a los límites y los colímites, que son construcciones universales de especial importancia.
- El cuarto y último capítulo es el más variado y está dividido en cuatro secciones. La primera parte desarrolla la noción de adjunciones entre funtores, demostrando algunos resultados como la conservación de límites y profundizando en un caso particular: las conexiones de Galois. En la segunda sección veremos la interesante noción de extensión de Kan, la cual nos permite demostrar resultados muy útiles gracias a su alto nivel de generalidad. La penúltima sección consistirá en una pequeña introducción a las aplicaciones prácticas de la Teoría de Categorías, desarrollando un ejemplo en el contexto de las bases de datos. El capítulo finaliza con unas conclusiones a este Trabajo de Fin de Grado.

1

Categorías, funtores y transformaciones naturales

Este primer capítulo tiene como objetivo introducir los conceptos fundamentales de la Teoría de Categorías: las nociones de categoría, funtor y transformación natural. Dedicaremos una sección a cada uno de estos tres conceptos, y empezaremos cada una de ellas dando las definiciones y ejemplos relevantes en diversas áreas de las matemáticas, especialmente en Teoría de Conjuntos, Álgebra y Topología. El resto del capítulo se dedicará a aspectos más particulares de cada una de estas nociones. La bibliografía consultada para desarrollar este capítulo ha sido principalmente [6], aunque también se han utilizado otras fuentes como [7], [12] o [11].

1.1. Categorías

Informalmente, las categorías son estructuras compuestas por objetos y flechas entre ellos que verifican ciertas propiedades. En los ejemplos motivadores que presentamos, los objetos son conjuntos dotados de cierta estructura y las flechas son aplicaciones que conservan parte de esa estructura.

1.1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1 *Una **categoría** $\mathscr{A}$ consiste en:*

- *Una clase $ob(\mathscr{A})$ cuyos elementos llamaremos **objetos**.*
- *Para cada par de objetos A, B en $ob(\mathscr{A})$, un conjunto $\mathscr{A}(A,B)$ cuyos elementos serán llamados **morfismos** o **flechas** de A en B, verificando que $\mathscr{A}(A,B)$ y $\mathscr{A}(A',B')$ son disjuntos siempre que $(A,B) \neq (A',B')$.*
- *Para cada A, B y C en $ob(\mathscr{A})$, una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \circ\colon & \mathscr{A}(A,B) \times \mathscr{A}(B,C) & \to & \mathscr{A}(A,C) \\ & (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

  *llamada **composición** verificando:*

I) *Existencia de morfismo identidad: Para cada objeto A de $\mathscr{A}$, existe 1_A un morfismo de A en A de manera que para todo objeto B de $\mathscr{A}$, y para todo f morfismo de A en B, se cumple $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$. A este morfismo (que es único) se le llama **identidad** de A.*

ii) *Asociatividad: Si A, B, C y D son objetos de $\mathscr{A}$, $f \in \mathscr{A}(A,B), g \in \mathscr{A}(B,C)$ y $h \in \mathscr{A}(C,D)$ son morfismos, se tiene que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Nota 1.1.1 *Al definir la noción de categoría, hemos dicho que sus objetos forman una* clase *en lugar de decir que forman un* conjunto. *Esta nomenclatura no es casual, y es que una clase no es necesariamente un conjunto. Por ejemplo, si recordamos la paradoja de Russell sabremos que la colección de todos los conjuntos no forma un conjunto. Las clases son una generalización de los conjuntos que nos permiten hablar de conceptos como* la clase de todos los conjuntos. *El problema de las clases es que no nos permiten realizar algunas de las operaciones que solemos aplicar a conjuntos. Cuando los objetos de una categoría formen un conjunto, hablaremos de* ***categoría pequeña***. *En realidad, nosotros hemos definido como categoría lo que se suelen denominar por algunos autores categorías* localmente pequeñas, *es decir, con conjuntos de morfismos entre dos objetos en lugar de clases arbitrarias. Para el fin de este trabajo será suficiente así.*

Tomaremos como notación $A \in \mathscr{A}$ para decir que A es un objeto de la categoría $\mathscr{A}$ y $f\colon A \to B$ o $f \in Hom(A,B)$ para decir que $f \in \mathscr{A}(A,B)$. En este caso, decimos que A es el **dominio** de f y B su **codominio**. Además, diremos que dos categorías son *iguales* si tienen la misma clase de objetos, se tiene igualdad en los conjuntos de morfismos para todo par de objetos y todas las composiciones coinciden.

Ejemplo 1.1.1

i) *El ejemplo motivador más sencillo es la categoría* ***Set***, *en la que los objetos son los conjuntos y los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos. La composición y la identidad son los usuales. Este es además un ejemplo de categoría no pequeña, pues no se puede hablar del conjunto de todos los conjuntos.*

ii) *Muchos de los ejemplos interesantes son conjuntos dotados de estructura, aplicaciones que respetan las estructuras y la composición inducida por la de aplicaciones. Lo único que se debe cumplir es que las identidades y la composición de morfismos sean morfismos. La asociatividad es consecuencia de la asociatividad en aplicaciones. Algunos ejemplos básicos:*

   a) ***Grp*** *la categoría de grupos y homomorfismos de grupos.*

   b) ***Rng*** *la categoría de anillos y homomorfismos de anillos.*

   c) $\mathbf{Vect_K}$ *la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo K y aplicaciones lineales.*

   d) ***Top*** *la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas.*

   e) $\mathbf{Top_*}$ *la categoría de espacios topológicos con punto base asociado, con morfismos las aplicaciones continuas que conservan el punto base.*

iii) *Dada una clase de objetos $\mathcal{C}$, se puede definir la* ***categoría discreta*** *con objetos $\mathcal{C}$ como la categoría cuya clase de objetos es $\mathcal{C}$ y que tiene como únicos morfismos las identidades.*

iv) *Dado un conjunto equipado con un preorden $(S, \leqslant)$, podemos definir una categoría $\mathscr{A}$ con objetos los elementos de S y*

$$\mathscr{A}(a,b) = \begin{cases} \emptyset, & a \nleqslant b \\ \{*_{(a,b)}\}, & a \leqslant b \end{cases}$$

La propiedad reflexiva garantiza la existencia de morfismo identidad y la transitiva permite la composición. Un caso particular interesante es cuando se cumple también la propiedad antisimétrica, es decir, el caso de los conjuntos parcialmente ordenados.

v) *Una categoría $\mathscr{A}$ con un solo objeto X es básicamente un conjunto $\mathscr{A}(X,X)$ con una identidad y una ley de composición interna que es asociativa. Esto es, dicha categoría es equivalente a un **monoide**.*

vi) *Una categoría interesante es la siguiente: Dado un anillo A consideramos la categoría $\mathbf{Mat_A}$ cuyos objetos son los números naturales y los morfismos entre dos números a y b las matrices de orden $a \times b$ con coeficientes en A. La composición se define como el producto de matrices. Está bien definida porque el producto de una matriz de orden $a \times b$ por una $b \times c$ es una matriz de orden $a \times c$.*

Dado que en una categoría tenemos objetos y morfismos parece natural definir la noción de isomorfismo:

Definición 1.1.2 *Se dice que un morfismo $f\colon A \to B$ en una categoría es un **isomorfismo** si existe otro morfismo $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. En este caso, el morfismo g se denota como f^{-1} y se le denomina el **inverso** de f. Cuando existe un isomorfismo de A en B, se dice que A y B son **isomorfos**, y se denota $A \cong B$.*

Claramente, tanto las identidades como el inverso de un isomorfismo, que es único, son isomorfismos.

Ejemplo 1.1.2

i) *Los isomorfismos en **Set** son las aplicaciones biyectivas. Nótese que una aplicación f tiene inversa si, y solo si, es biyectiva.*

ii) *En **Grp**, los isomorfismos son los homomorfismos de grupos biyectivos, es decir, los isomorfismos de grupos.*

iii) *En **Top**, los isomorfismos son los homeomorfismos. Nótese que en este caso no son simplemente las aplicaciones continuas y biyectivas. Esto se debe a que la inversa de una aplicación continua no es necesariamente continua.*

Un interesante caso particular de categoría es el siguiente:

Definición 1.1.3 *Una categoría $\mathscr{G}$ en la que todos los morfismos son isomorfismos se denomina **grupoide**.*

Es claro que de todo grupoide se pueden obtener grupos $Hom(X,X)$ definiendo como operación la composición de morfismos. Por otro lado, también es obvio que de todo grupo se obtiene un grupoide con un único objeto.

Podemos definir ahora el producto de dos categorías, que será por definición una nueva categoría:

Definición 1.1.4 *Dadas dos categorías $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, definimos la **categoría producto** $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ de manera que $ob(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$ son los pares (A,B) con $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$ y $(\mathscr{A} \times \mathscr{B})((A,B),(A',B')) := \mathscr{A}(A,A') \times \mathscr{B}(B,B')$ el producto cartesiano. La composición se define de manera natural por $(f,g) \circ (h,k) := (f \circ h, g \circ k)$*

1.1.2. Dualidad. Objetos iniciales y finales

En esta subsección introduciremos el concepto de categoría dual, que nos conduce al valioso principio de dualidad y dará pie a introducir las nociones de objeto inicial y objeto final.

Definición 1.1.5 *Dada una categoría $\mathscr{A}$, definimos su* ***categoría dual*** *u* ***opuesta****, como la categoría que tiene por objetos los mismos de $\mathscr{A}$ y conjuntos de morfismos $\mathscr{A}^{op}(A,B) = \mathscr{A}(B,A)$, para todos A,B objetos. Dados objetos A,B,C y morfismos $g \in \mathscr{A}^{op}(C,B)$, $f \in \mathscr{A}^{op}(B,A)$, se define la composición $f \circ g \colon C \to A$ en $\mathscr{A}^{op}$ como $g \circ f \colon A \to C$ en $\mathscr{A}$. Las identidades son las mismas que en $\mathscr{A}$.*

De manera más coloquial, la categoría dual de $\mathscr{A}$ se obtiene cambiando de sentido las flechas de $\mathscr{A}$. Con esta definición es claro que se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría, entonces $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^{op})^{op}$.*

El principio de dualidad es fundamental en Teoría de Categorías. Nos dice que cada definición, teorema o demostración en una categoría tiene su contraparte dual, duplicando los resultados. Para ilustrar esto introducimos las siguientes definiciones:

Definición 1.1.6 *Un objeto $A \in \mathscr{A}$ se dice un* ***objeto inicial*** *si para todo $B \in \mathscr{A}$ existe un único morfismo $f \colon A \to B$. Análogamente, A se dice un* ***objeto final*** *si para todo $B \in \mathscr{A}$ existe un único morfismo $g \colon B \to A$. Además, A se dice un* ***objeto cero*** *si es simultáneamente un objeto inicial y final.*

Ejemplo 1.1.3

i) *En la categoría de conjuntos* ***Set*** *el conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto inicial, mientras que todos los conjuntos unitarios son objetos finales.*
ii) *En $\mathbf{Vect_K}$, el espacio vectorial trivial $\{0\}$ es un objeto cero.*

Como habíamos adelantado, el concepto de *objeto final* es el dual a *objeto inicial*, como afirma la siguiente proposición cuya demostración es inmediata.

Proposición 1.1.2 *Un objeto A es final en una categoría $\mathscr{A}$ si, y solo si, es objeto inicial en la categoría opuesta $\mathscr{A}^{op}$.*

Esta técnica es habitualmente utilizada en Teoría de Categorías. A partir de una construcción en una categoría $\mathscr{A}$, podemos repetirla en $\mathscr{A}^{op}$ obteniendo así una nueva construcción en $\mathscr{A}$. Además, cualquier proposición en la primera construcción tendrá su análogo en la segunda, como por ejemplo:

Proposición 1.1.3 *Los objetos iniciales son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean $A, A' \in \mathscr{A}$ objetos iniciales. Existirá entonces un único morfismo $f \colon A \to A'$ y también un único morfismo $g \colon A' \to A$. Entonces $g \circ f = 1_A \colon A \to A$ es el único morfismo existente por ser A objeto inicial. Análogamente, $f \circ g = 1_{A'}$. □

Corolario 1.1.1 *Los objetos finales son únicos salvo isomorfismo.*

1.1.3. Tipos especiales de morfismos

Existen morfismos que verifican propiedades interesantes, como ya hemos destacado para los isomorfismos. A continuación, exploraremos otros tipos de morfismos y las relaciones que existen entre ellos.

Definición 1.1.7 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Entonces, un morfismo $f \in \mathscr{A}(A_1, A_2)$ se dice* ***epimorfismo*** *si para todo $B \in \mathscr{A}$ y para todo par de morfismos $h_1, h_2 \colon A_2 \to B$, se tiene que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ implica $h_1 = h_2$.*

Ejemplo 1.1.4

i) *Es sabido que una aplicación entre conjuntos es cancelable por la derecha si, y solo si, es sobreyectiva. Esto es equivalente a afirmar que los epimorfismos en* ***Set*** *son precisamente las aplicaciones sobreyectivas.*
ii) *Los epimorfismos no son siempre lo que se espera. Por ejemplo, en la categoría de anillos conmutativos y unitarios,* ***CuRng****, consideramos la inclusión $i \colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Esta no es sobreyectiva y, por tanto, no es un epimorfismo de anillos. Sin embargo, sí que es un epimorfismo en el sentido categórico. En efecto, sean $h_1, h_2 \colon \mathbb{Q} \to R$ homomorfismos de anillos conmutativos y unitarios tales que $h_1 \circ i = h_2 \circ i$ y veamos que $h_1 = h_2$. En efecto, sea $q = a/b \in \mathbb{Q}$. Entonces,*

$$\begin{aligned} h_1(a/b) = h_1(i(a) \cdot i(b)^{-1}) &= (h_1 \circ i)(a) \cdot (h_1 \circ i)(b)^{-1} \\ &= (h_2 \circ i)(a) \cdot (h_2 \circ i)(b)^{-1} = h_2(a/b) \end{aligned}$$

Proposición 1.1.4 *Toda identidad es epimorfismo y la composición de epimorfismos es epimorfismo. Además, si $g \circ f$ es un epimorfismo entonces g también lo es.*

Demostración. Es claro que la identidad es epimorfismo. Por otro lado, si $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to C$ son epimorfismos, y $h_1, h_2 \colon B \to C$, entonces $h_1 \circ (g \circ f) = h_2 \circ (g \circ f)$ implica $h_1 \circ g = h_2 \circ g$ por asociatividad y por ser f epimorfismo. Como g también es epimorfismo, esto implica $h_1 = h_2$, luego $g \circ f$ es epimorfismo. Ahora, si $g \circ f$ es epimorfismo, componiendo por la derecha f con $h_1 \circ g = h_2 \circ g$ se obtiene $h_1 \circ (g \circ f) = h_2 \circ (g \circ f)$. Aplicando la hipótesis esto implica $h_1 = h_2$. □

Pasamos ahora a definir el concepto dual, teniendo en cuenta la definición de composición en la categoría opuesta.

Definición 1.1.8 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría. Entonces, un morfismo $f \in \mathscr{A}(A_1, A_2)$ se dice* ***monomorfismo*** *si para todo $B \in \mathscr{A}$ y para todo par de morfismos $h_1, h_2 \colon B \to A_1$, se tiene que $f \circ h_1 = f \circ h_2$ implica $h_1 = h_2$.*

Así, un morfismo en $\mathscr{A}$ es monomorfismo si, y solo si, es epimorfismo en la categoría opuesta $\mathscr{A}^{op}$. Además, aplicando el principio de dualidad a la Proposición 1.1.4:

Corolario 1.1.2 *Toda identidad y la composición de monomorfismos es monomorfismo. Además, si $f \circ g$ es un monomorfismo, entonces g también lo es.*

Ejemplo 1.1.5

i) *En* ***Set****, los monomorfismos son exactamente las aplicaciones inyectivas.*

ii) *A diferencia de los epimorfismos, los monomorfismos en* ***CuRng*** *son exactamente los monomorfismos de anillos. En efecto, sea $f: A \to B$ monomorfismo en el sentido categórico. Recordamos que un homomorfismo $h: \mathbb{Z}[x] \to A$ está únicamente determinado por la imagen $h(x)$ del polinomio x. Sean $r, s \in A$ tales que $f(r) = f(s)$. Consideramos $h_r, h_s: \mathbb{Z}[x] \to A$ los monomorfismos caracterizados por $h_r(x) = r$ y $h_s(x) = s$. Entonces, $f \circ h_1$ y $f \circ h_2$ están completamente determinados por la imagen de x. Luego, $f(r) = f(s)$ es lo mismo que $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$. Como los homomorfismos desde $\mathbb{Z}[x]$ están determinados por la imagen del polinomio x, esto implica $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Como f es epimorfismo, se sigue que $h_1 = h_2$ y por tanto $r = s$, obteniéndose que todo monomorfismo es inyectivo. El recíproco es trivial.*

iii) *No siempre es cierto que los monomorfismos son inyectivos (cuando tiene sentido hablar de inyectividad). Un contraejemplo lo dan los grupos abelianos divisibles.*

Definición 1.1.9 *Un morfismo $r: A \to B$ se dice una* ***retracción*** *si existe $s: B \to A$ tal que $r \circ s = 1_B$. En este caso se dice que s es una* ***sección****.*

Los conceptos de retracción y sección son duales entre sí, es decir, un morfismo r es retracción en una categoría si, y solo si, es sección en la categoría dual. Además, los conceptos de retracción y epimorfismo, así como sus duales, están relacionados de cierta manera.

Proposición 1.1.5 *Toda retracción es epimorfismo y toda sección monomorfismo.*

Demostración. Si $r: A \to B$ es una retracción con sección s y $h_1, h_2: B \to C$, entonces $h_1 \circ r = h_2 \circ r$ implica $(h_1 \circ r) \circ s = (h_2 \circ r) \circ s$. Por asociatividad y aplicando la hipótesis se obtiene que $h_1 = h_2$. La segunda parte es dual. □

Proposición 1.1.6 *Si f es sección y retracción, entonces es isomorfismo.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{A}(A, B)$ sección con retracción r y retracción con sección s. Si vemos que $r = s$ se concluye que f es isomorfismo con inverso $f^{-1} = s = r$. En efecto, tenemos que $s = 1_A \circ s = (r \circ f) \circ s = r \circ (f \circ s) = r \circ 1_B = r$. □

Definición 1.1.10 *Diremos que un morfismo f es* ***bimorfismo*** *si es monomorfismo y epimorfismo.*

Es claro que todos los isomorfismos son bimorfismos. El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, la inclusión $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ no puede ser un isomorfismo de anillos al no ser una aplicación biyectiva, pero hemos visto que es epimorfismo y monomorfismo al ser inyectiva. Esto nos da un contraejemplo para los tres recíprocos: En primer lugar, i es bimorfismo pero no isomorfismo. Además como no es sobreyectiva no puede tener inversa a derecha, y por tanto no es una retracción aunque sea epimorfismo. Por último, esto nos dice que en la categoría $\mathbf{CuRng}^{op}$, $i: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es monomorfismo pero no una sección.

1.2. Funtores

Los funtores son esencialmente morfismos entre categorías. Un ejemplo que ilustra esta idea es el grupo fundamental, construcción que asocia un grupo a cada espacio topológico punteado y un homomorfismo de grupos a cada aplicación continua punteada, conservando identidades y composiciones. Este tipo de construcciones se encuentran muy a menudo en matemáticas y son fundamentales en áreas como la Topología Algebraica, la Geometría Algebraica o incluso la Geometría Diferencial.

1.2.1. Definición y ejemplos

Definición 1.2.1 *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías. Un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ consiste en:*

- *Una ley que asigna a cada objeto A de $\mathscr{A}$ un único objeto $F(A)$ de $\mathscr{B}$.*
- *Para cada par de objetos $A, A' \in \mathscr{A}$, una aplicación $F\colon \mathscr{A}(A, A') \to \mathscr{B}(F(A), F(A'))$.*

Verificando:

i) $F(f \circ f') = F(f') \circ F(f)$ *cuando* $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$.
ii) $F(1_A) = 1_{F(A)}$, *para todo* $A \in \mathscr{A}$.

Nota 1.2.1 *Existe una categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y que tiene por morfismos a los funtores, con composiciones e identidades definidas de forma obvia. Esta categoría se suele denotar por **Cat**.*

Ya hemos visto categorías formadas por conjuntos con estructuras y aplicaciones que conservan parte de esta estructura (**Grp**, **Rng**, **Top**, etc.). En estas categorías tiene sentido definir un tipo especial de funtores denominados *funtores de olvido*, como son los siguientes.

Ejemplo 1.2.1

i) *El funtor de olvido $U\colon$ **Grp** $\to$ **Set** olvida la operación del grupo. Así, ve cada grupo como un conjunto y cada homomorfismo simplemente como una aplicación.*
ii) *Análogamente existen funtores de olvido $U\colon$ **Rng** $\to$ **Set**, $U\colon \mathbf{Vect_K} \to$ **Set** y $U\colon$ **Top** $\to$ **Set**.*
iii) *Desde la categoría de anillos en la de grupos abelianos existe un funtor $U\colon$ **Rng** $\to$ **Ab** que olvida la multiplicación. También desde la categoría de anillos en la de monoides existe otro funtor de olvido $U\colon$ **Rng** $\to$ **Mon** que obvia la operación suma.*
iv) *El funtor de olvido $U\colon$ **Ab** $\to$ **Grp** olvida la conmutatividad de los grupos abelianos.*

Otro tipo interesante de funtores, relacionados con los de olvido, son los *funtores libres*. Presentamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 1.2.2

i) *Dado un conjunto S podemos construir el grupo libre $F(S)$ mediante clases de "palabras" formadas por los elementos de S. Esto da lugar a un funtor $F\colon$ **Set** $\to$ **Grp**, pues cada aplicación $f\colon S \to S'$ induce un homomorfismo de grupos $F(f)\colon F(S) \to F(S')$. Esta construcción se puede encontrar, por ejemplo, en [8].*

II) *Dado un conjunto S, se puede formar el anillo conmutativo libre $F(S)$, que coincide con el anillo de polinomios sobre $\mathbb{Z}$ con variables conmutativas x_s, con $s \in S$. Esto se puede encontrar más detallado en [5].*

III) *Dado un cuerpo K y un conjunto S, también podemos construir el K-espacio vectorial libre sobre S, definido por*

$$F(S) := \{\lambda\colon S \to K \mid \lambda(s) = 0, \text{ para todo } s \in S \text{ excepto un número finito de } s\}$$

o informalmente por $F(S) = \{\sum_{s\in A} \lambda_s s \mid \lambda_s \in K, \text{ todo } s \in A, A \subseteq S \text{ finito}\}$. *La suma y el producto por escalar son los inducidos por la suma y el producto en K. Además, toda aplicación induce una aplicación lineal en los espacios vectoriales libres al extenderla por linealidad.*

Otros ejemplos conocidos de funtores son:

Ejemplo 1.2.3

I) *Como ya comentamos en la introducción de esta sección, en* $\mathbf{Top}_*$ *existe el funtor grupo fundamental* $\pi_1\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ *que asigna a cada espacio topológico punteado (X, x) su grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ y a cada aplicación continua punteada $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ un homomorfismo de grupos $\pi_1(f) = f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$. En efecto, es un resultado básico que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ y $(1_{(X,x)})_* = 1_{\pi_1(X,x)}$.*

II) *Siguiendo con Topología Algebraica, para todo n número natural existe el funtor* $H_n\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ *asignando a cada espacio su n-ésimo grupo de homología singular. Tanto este ejemplo como el anterior están bien detallados en [8].*

III) *En Geometría Diferencial, consideramos la categoría* $\mathbf{Man}_*$ *de variedades diferenciables con punto base asociado y las aplicaciones diferenciables entre ellos que conservan el punto base. En este contexto, se define el funtor* $T\colon \mathbf{Man}_* \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ *asociando a cada variedad M su espacio tangente en el punto x, T_xM, y a cada aplicación diferenciable $F\colon M \to N$ la aplicación tangente a F en x, $T_xF\colon T_xM \to T_{F(x)}N$, que es lineal. Para más información, se puede consultar [2].*

IV) *Entre monoides, un funtor es simplemente un homomorfismo de monoides.*

V) *Un funtor entre conjuntos preordenados vistos como categorías es simplemente una función monótona (que preserva el orden). Esto nos permite ver un ejemplo de categoría donde los objetos son categorías y los morfismos funtores.*

La existencia de un funtor ya nos da cierta información sobre las relaciones entre objetos. Por ejemplo, el resultado clásico en Topología Algebraica que asegura que dos espacios topológicos con distinto grupo fundamental no son homeomorfos es consecuencia, únicamente, de la funtorialidad de π_1. En particular:

Proposición 1.2.1 *La imagen de un isomorfismo por un funtor es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor y $f \in \mathscr{A}(A, B)$ un isomorfismo. Existirá entonces $f^{-1}\colon B \to A$ inversa de f. De la funtorialidad de F, se tiene $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(1_B) = 1_{F(B)}$. Similarmente $F(f^{-1}) \circ F(f) = 1_{F(A)}$, por lo que $F(f)$ es isomorfismo con inversa $F(f^{-1})$. □

1.2.2. Tipos especiales de funtores. Subcategorías

Es posible distinguir distintos tipos de funtores a partir de sus propiedades.

Definición 1.2.2 *Un* ***funtor contravariante*** *de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ es un funtor $\mathscr{A}^{op} \to \mathscr{B}$ (o, equivalentemente, $\mathscr{A} \to \mathscr{B}^{op}$). Para diferenciarlos, a los funtores se les llama también* ***funtores covariantes****.*

Ejemplo 1.2.4 *Dada $\mathscr{A}$ una categoría, habíamos denotado $\mathscr{A}(A, B)$ también por $Hom(A, B)$. Para cada objeto $B \in \mathscr{A}$ se define el funtor contravariante*

$$Hom(-, B)\colon \mathscr{A}^{op} \to \mathbf{Set}$$

que asigna a cada objeto $A \in \mathscr{A}$ el conjunto Hom(A,B) y a cada morfismo $f\colon A \to A'$ la aplicación $f^*\colon Hom(A', B) \to Hom(A, B)$ definida por $f^*(g) := g \circ f\colon A \to B$.
Similarmente, podemos definir el funtor covariante $Hom(A, -)\colon \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$, que asigna a cada objeto B el conjunto $Hom(A, B)$ y a cada morfismo $f\colon B \to B'$ la aplicación $f_*\colon Hom(A, B) \to Hom(A, B')$ definida por $f_*(h) := f \circ h$. Este ejemplo es de especial importancia en Teoría de Categorías y aparecerá más adelante.

Nota 1.2.2 *En capítulos posteriores, usaremos la notación $\mathscr{A}(A, B)$ para referirnos al conjunto de morfismos de A en B y la notación $Hom(-, B)$ o bien $Hom(A, -)$ cuando queramos referirnos a uno de estos funtores.*

Ejemplo 1.2.5

i) *Dado X un espacio topológico, podemos considerar $C(X)$ el anillo de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con la suma y el producto inducidos por la suma y el producto de números reales. Toda aplicación continua $f\colon X \to Y$ induce un homomorfismo de anillos $C(f)\colon C(Y) \to C(X)$ definido por $C(f)(q) := q \circ f$, para todo $q \in C(Y)$, dando lugar a un funtor contravariante $C\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Rng}$.*
ii) *Retomando el ejemplo de $Hom(-, B)$ en espacios vectoriales sobre un cuerpo K, se tiene que el conjunto de aplicaciones lineales entre dos K-espacios vectoriales tiene estructura de K-espacio vectorial. Por tanto, podemos definir el funtor de la forma $Hom(-, W)\colon \mathbf{Vect_K}^{op} \to \mathbf{Vect_K}$. En particular, si $W = K$, $Hom(V, K)$ es el espacio vectorial dual. Luego, tenemos un funtor contravariante $(-)^* = Hom(-, K)$ enviando cada K-espacio vectorial a su dual, $V^* = Hom(V, K)$.*

Un tipo de funtores que se comporta particularmente bien son los que se denominan funtores fieles y plenos.

Definición 1.2.3 *Un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ se dice* ***fiel*** *(respectivamente* ***pleno****) si para todo par de objetos $A, A' \in \mathscr{A}$, la aplicación $F\colon \mathscr{A}(A, A') \to \mathscr{B}(F(A), F(A'))$ descrita por el funtor es inyectiva (resp. sobreyectiva).*

Proposición 1.2.2 *Si $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un funtor fiel y pleno y $f\colon A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, entonces, f es isomorfismo si, y solo si, $F(f)$ es isomorfismo.*

Demostración. Ya hemos visto que la imagen de un isomorfismo por un funtor es un isomorfismo. Supongamos que F(f) es isomorfismo. Entonces, existe $g' \colon F(B) \to F(A)$ inverso de F(f). Como F es fiel y pleno, sigue que existe un único $g \colon B \to A$ con $F(g) = g'$. Por este mismo motivo, para todo objeto X de $\mathscr{A}$, si $F(h) = 1_{F(X)}$ entonces $h = 1_X$. Sigue que $F(f) \circ F(g) = 1_{F(B)}$ implica $f \circ g = 1_B$. Similarmente se cumple $g \circ f = 1_A$. □

Para concluir esta sección definiremos la noción de subcategoría.

Definición 1.2.4 *Una* ***subcategoría*** *$\mathscr{B}$ de una categoría $\mathscr{A}$ consiste en una subclase $ob(\mathscr{B})$ de $ob(\mathscr{A})$, y para cada par de objetos S, S' en $\mathscr{B}$, un subconjunto $\mathscr{B}(S, S') \subseteq \mathscr{A}(S, S')$ cerrado bajo composición e identidades. Si $\mathscr{B}(S, S') = \mathscr{A}(S, S')$ para todo par de objetos S, S' de $\mathscr{B}$, se dice que $\mathscr{B}$ es una subcategoría* ***plena****.*

Hacemos notar que si $\mathscr{B}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$, podemos definir el funtor inclusión $I \colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ de manera natural. Además, podemos observar que la subcategoría es plena si, y solo si, el funtor inclusión es pleno.

Nota 1.2.3 *La imagen de un funtor no es necesariamente una subcategoría de la categoría de llegada.*

1.3. Transformaciones naturales

En las secciones anteriores hemos definido las categorías y los funtores, que pueden considerarse morfismos entre categorías. Cabría preguntarse si es posible definir morfismos entre funtores. La respuesta es afirmativa, y reciben el nombre de transformaciones naturales.

1.3.1. Definición y ejemplos

Definición 1.3.1 *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías y $F, G \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ dos funtores. Una* ***transformación natural*** *$\alpha \colon F \Rightarrow G$ consiste en una familia $(\ F(A) \overset{\alpha_A}{\to} G(A)\ )_{A \in \mathscr{A}}$ de morfismos en $\mathscr{B}$ tal que para todo morfismo $f \colon A \to A'$ en $\mathscr{A}$, el cuadrado*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(A') \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(A')
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.
Cada morfismo $\alpha_A \colon F(A) \to G(A)$ se denomina ***componente*** *de α en el objeto A.*

Nota 1.3.1 *Denotaremos también a la transformación natural α como:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.3.1

I) *Consideramos $\mathscr{A} = \mathbb{N}$ como categoría discreta. Un funtor $F\colon \mathbb{N} \to \mathscr{B}$ es una sucesión $F_0, F_1, F_2, ...$ de objetos de $\mathscr{B}$, por lo que una transformación natural entre dos funtores $F, G\colon \mathbb{N} \to \mathscr{B}$, corresponde con una sucesión de morfismos en $\mathscr{B}$:*

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & F_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & \dots & F_n \arrow[d, "\alpha_n"] & \dots \\ G_0 & G_1 & \dots & G_n & \dots \end{tikzcd}$$

Nótese que la naturalidad siempre se satisface pues los únicos morfismos en $\mathbb{N}$ son las identidades.

II) *Veamos que el determinante se puede ver como una transformación natural. Fijados un número natural n y R un anillo conmutativo y unitario, las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en R, $M_n(R)$, forman un monoide con el producto de matrices. Además, todo homomorfismo $f\colon R \to S$ induce un homomorfismo de monoides $\bar{f}\colon M_n(R) \to M_n(S)$ definido componente a componente. Esto nos define un funtor $M_n\colon$ **CuRng** $\to$ **Mon**. Además, R es también un monoide con el producto, por lo que podemos definir el funtor de olvido $U\colon$ **CuRng** $\to$ **Mon**.*
Observamos que para cada anillo conmutativo y unitario R, $det_R\colon M_n(R) \to U(R)$ es un homomorfismo de monoides pues $det_R(AB) = det_R(A) \cdot det_R(B)$ y el determinante de la identidad es 1. El axioma de naturalidad también se satisface por como está definida $\bar{f}$. Luego, $(\ M_n(R) \overset{\det_R}{\to} U(R)\ )_{R \in \mathbf{CuRng}}$ es una transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{CuRng} \arrow[r, bend left, "M_n"] \arrow[r, bend right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow det"] & \mathbf{Mon} \end{tikzcd}$$

1.3.2. Categorías de funtores

Las transformaciones naturales están formadas por morfismos, así que no es difícil imaginar que podemos componerlas. Dadas transformaciones naturales de la forma siguiente, podemos definir la transformación natural $\beta \circ \alpha\colon F \Rightarrow G$ por
$(\alpha \circ \beta)_A = \beta_A \circ \alpha_A$, para todo objeto A de $\mathscr{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[rr, bend left=60, "F"] \arrow[rr, "G"] \arrow[rr, bend right=60, "H"'] & \arrow[phantom, shift left=4, "\Downarrow\alpha"] \arrow[phantom, shift right=4, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

También se puede definir la transformación natural identidad $1_F\colon F \Rightarrow F$ por
$(1_F)_A := 1_{F(A)}$, para todo objeto A de $\mathscr{A}$.

Definición 1.3.2 *Se llama **categoría de funtores** de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, denotado por $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ o por $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$, a la categoría que tiene como objetos los funtores de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ y como morfismos las transformaciones naturales entre dichos funtores.*

Ejemplo 1.3.2

I) *Denotemos por* $\mathbf{2}$ *a la categoría discreta con dos objetos. Dada una categoría* $\mathscr{B}$*, un funtor* $\mathbf{2} \to \mathscr{B}$ *viene únicamente determinado por un par de objetos de* $\mathscr{B}$ *y una transformación natural es un par de morfismos entre esos objetos. En otras palabras, la categoría de funtores* $\mathscr{B}^2$ *es esencialmente la categoría producto* $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$*, lo cual es coherente con la notación.*

II) *Sean* A, B *conjuntos parcialmente ordenados. Dos funtores* $f, g\colon A \to B$ *son dos funciones monótonas. Al haber, como mucho, un morfismo de* $f(a)$ *en* $g(a)$ *para cada* a *de* A*, hay como máximo una transformación natural* $\alpha\colon f \Rightarrow g$*. Además, que existan todos esos morfismos es equivalente a decir que* $f(a) \leqslant g(a)$*, para todo* $a \in A$*. Luego existe una transformación natural entre* f *y* g *si, y solo si, se da esa condición (nótese que la naturalidad se verifica de forma trivial pues los morfismos entre pares de objetos son únicos). Esto nos caracteriza la categoría de funtores* B^A *como un conjunto parcialmente ordenado: los objetos son funciones monótonas y existe un único morfismo entre* f *y* g *si, y solo si,* $f(a) \leqslant g(a)$ *para todo* $a \in A$*, lo cual podemos denotar por* $f \leqslant g$*.*

Veamos ahora cómo son los isomorfismos en una categoría de funtores, a los que damos un nombre especial:

Definición 1.3.3 *Sean* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *categorías. Un* ***isomorfismo natural*** *entre funtores* $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *es un isomorfismo en* $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$*. Si existe tal isomorfismo, decimos que* F *y* G *son* ***naturalmente isomorfos****, y se denota* $F \cong G$*.*

Proposición 1.3.1 *Sea* $\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathscr{B} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$ *una transformación natural. Entonces,* α *es isomorfismo natural si, y solo si,* $\alpha_A\colon F(A) \to G(A)$ *es isomorfismo para todo* $A \in \mathscr{A}$*.*

Demostración. Supongamos que α es isomorfismo en $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$. Entonces, existe una transformación natural $\beta\colon G \Rightarrow F$ con $\alpha \circ \beta = 1_G$ y $\beta \circ \alpha = 1_F$. Esto es, $(\alpha \circ \beta)_A = \alpha_A \circ \beta_A = (1_G)_A = 1_{G(A)}$ y, de la misma forma, $\beta_A \circ \alpha_A = 1_{F(A)}$. Luego, α_A es un isomorfismo con inversa β_A, para todo $A \in \mathscr{A}$.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha_A\colon F(A) \to G(A)$ es isomorfismo para todo objeto A de $\mathscr{A}$. Queremos encontrar una transformación natural $\beta\colon G \Rightarrow F$ tal que sea la inversa de α. Consideramos β definida por $(\,\beta_A := (\alpha_A)^{-1}\colon G(A) \to F(A)\,)_{A \in \mathscr{A}}$. Si esto fuera una transformación natural, sería claramente inversa de α. Comprobemos que lo es. Sea $f\colon A \to A'$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Queremos ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "(\alpha_A)^{-1}"'] & G(A') \arrow[d, "(\alpha_{A'})^{-1}"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(A') \end{tikzcd}$$

conmuta. De la naturalidad de α, se tiene $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ F(f)$. Componiendo con la inversa de α_A a derecha y con la de $\alpha_{A'}$ a izquierda, obtenemos $(\alpha_{A'})^{-1} \circ G(f) = F(f) \circ (\alpha_A)^{-1}$, que es lo que queríamos probar. □

Dados funtores $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, se dice que $F(A) \cong G(A)$ *naturalmente en* A si F y G son naturalmente isomorfos. Como acabamos de ver, esto implica que $F(A)$ y $G(A)$ son isomorfos.

Ejemplo 1.3.3 *Veamos un ejemplo clásico: Consideramos la categoría* $\mathbf{FDVect_K}$ *de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo* K*. Habíamos visto que el espacio dual define un funtor contravariante* $(-)^*\colon \mathbf{FDVect_K}^{op} \to \mathbf{FDVect_K}$ *y, por tanto, el doble dual define un funtor covariante* $(-)^{**}\colon \mathbf{FDVect_K} \to \mathbf{FDVect_K}$*. Ahora, para cada espacio vectorial* V*, existe un isomorfismo lineal canónico* $\alpha_v\colon V \to V^{**}$*. En particular, dado* $v \in V$*,* $\alpha_V(v)\colon V^* \to K$ *viene dado por* $(\alpha_V(v))(\phi) := \phi(v)$*, para todo* $\phi \in V^*$*, es decir, es la evaluación en* v*.*
Recordando cómo se define el dual de una aplicación lineal (f^*)*, que es composición por la derecha (Ejemplo 1.2.4), es fácil ver que esto nos define una transformación natural* $\mathbf{FDVect_K} \underset{(-)^{**}}{\overset{1_{\mathbf{FDVect_K}}}{\Downarrow \alpha}} \mathbf{FDVect_K}$ *del funtor identidad en el funtor doble dual.*
Por tanto, podemos decir, por el lema anterior, que el funtor identidad es naturalmente isomorfo a $(-)^{**}$ *o, equivalentemente, que* $V \cong V^{**}$ *naturalmente en* V*. Nótese que no hemos necesitado de ninguna elección de bases para definir este isomorfismo natural. Si hubiéramos intentado buscar un isomorfismo entre un espacio y su dual, habríamos necesitado hacerlo. Esencialmente, por este motivo se dice que el isomorfismo es natural. De hecho, se puede demostrar que* V *y* V^* *no son naturalmente isomorfos en* V*, aunque sí es cierto que* V *y* V^* *son isomorfos al tener la misma dimensión.*

1.3.3. Equivalencia de categorías

Nos preguntamos ahora cuál podría ser una buena noción de equivalencia entre dos categorías. Si las categorías son pequeñas, es natural decir que son equivalentes si son isomorfas en la categoría **Cat**. Esta noción se puede generalizar.

Definición 1.3.4 *Dos categorías* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *se dicen* ***isomorfas****, denotado* $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$*, si existen funtores* $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$ *de manera que* $F \circ G = 1_{\mathscr{B}}$ *y* $G \circ F = 1_{\mathscr{A}}$*.*

Sin embargo, esta definición es muy restrictiva. Lo que haremos es sustituir las igualdades de funtores por la congruencia de funtores vista en la subsección anterior.

Definición 1.3.5 *Una* ***equivalencia*** *entre categorías* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *consiste en funtores* $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$ *junto con un par de isomorfismos naturales* $\eta\colon 1_{\mathscr{A}} \Rightarrow G \circ F$*,* $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathscr{B}}$*. Si existe dicha equivalencia, diremos que* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *son categorías* ***equivalentes****, denotado* $\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$*, y que los funtores* F *y* G *son* ***equivalencias de categorías****.*

Nota 1.3.2 *Es sencillo comprobar que la equivalencia de categorías verifica las propiedades propias de una relación de equivalencia.*

En la Definición 1.2.3, vimos las nociones de funtor fiel y funtor pleno. A continuación, introduciremos otro concepto que nos permitirá caracterizar a las equivalencias de categorías, siempre que supongamos válido el axioma de elección.

Definición 1.3.6 *Un funtor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es* ***esencialmente sobreyectivo en objetos*** *si para todo $B \in \mathscr{B}$, existe un objeto A de $\mathscr{A}$ tal que $F(A) \cong B$.*

Teorema 1.3.1 *Un funtor es una equivalencia de categorías si, y solo si, es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos.*

Demostración. Sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor.
Primero, suponemos que F es una equivalencia de categorías, esto es, que existe un funtor $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ y existen isomorfismos naturales $\eta\colon G \circ F \Rightarrow 1_{\mathscr{A}}$, $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathscr{B}}$.
Veamos primero F que es fiel y pleno. Sean $A, B \in \mathscr{A}$. Queremos ver que $F\colon \mathscr{A}(A,B) \to \mathscr{B}(F(A), F(B))$ es biyectiva. Consideramos la aplicación
$\Delta = (\eta_B)_* \circ (\eta_A^{-1})^* \circ G\colon \mathscr{B}(F(A), F(B)) \to \mathscr{A}(A,B)$ definida por $\Delta(g) := \eta_B \circ G(g) \circ \eta_A^{-1}$ para todo morfismo $g\colon F(A) \to F(B)$. Aplicando la naturalidad de η, sigue fácilmente que Δ es inversa de $F\colon \mathscr{A}(A,B) \to \mathscr{B}(F(A), F(B))$, concluyendo que F es fiel y pleno.
Además, si $B \in \mathscr{B}$, tenemos $\varepsilon_B\colon F(G(B)) \to B$ es isomorfismo, luego existe $G(B) \in \mathscr{A}$ tal que $F(G(B)) \cong B$. Por tanto, F es esencialmente sobreyectivo en objetos.

Recíprocamente, supongamos que F es un funtor fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos. Construyamos un funtor $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $F \circ G \cong 1_{\mathscr{B}}$ y $G \circ F \cong 1_{\mathscr{A}}$.
Como F es esencialmente sobreyectivo en objetos, haciendo uso del axioma de elección, podemos elegir para cada $B \in \mathscr{B}$ un objeto A_B de $\mathscr{A}$ junto con un isomorfismo $u_B\colon F(A) \to B$. Definimos G en objetos como $G(B) := A_B$ de esta manera. Para definir G en morfismos, consideramos la aplicación
$\Gamma = (u_{B'}^{-1})_* \circ (u_B)^*\colon \mathscr{B}(B, B') \to \mathscr{B}(F(G(B)), F(G(B')))$ de manera que si $g\colon B \to B'$ es un morfismo en $\mathscr{B}$, entonces $\Gamma(g) := u_{B'}^{-1} \circ g \circ u_B$. Como F es fiel y pleno, para cada $g\colon B \to B'$ existe un único morfismo, que denotaremos por $G(g)\colon G(B) \to g(B')$, tal que $F(G(g)) = \Gamma(g)$. En otras palabras, definimos $G(g) := F^{-1}(\Gamma(g))$. Veamos que G es un funtor: Sean $f'\colon A' \to B', g'\colon B' \to C'$ morfismos en $\mathscr{B}$. Entonces, $G(1_{A'}) = (F^{-1} \circ \Gamma)(1_{A'}) = F^{-1}(u_{A'}^{-1} \circ 1_{A'} \circ u_{A'}) = F^{-1}(1_{A'}) = 1_A$. Además, por definición de G en morfismos, se verifica $F(G(f')) = \Gamma(f')$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} F(G(g') \circ G(f')) &= F(G(f')) \circ F(G(g')) = (u_{C'}^{-1} \circ g' \circ u_{B'}) \circ (u_{B'} \circ f' \circ u_{A'}) \\ &= u_{C'}^{-1} \circ (g' \circ f') \circ u_{A'} = \Gamma(g' \circ f') = F(G(g' \circ f')) \end{aligned}$$

Como F es fiel, sigue que $G(g') \circ G(f') = G(g' \circ f')$ y concluimos que F es un funtor.
Resta ver que existen isomorfismos naturales $\eta\colon G \circ F \Rightarrow 1_{\mathscr{A}}$ y $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathscr{B}}$.
Consideramos ε definido por $\varepsilon_{A'} = u_{A'}\colon F(G(A')) \to A'$. Como estos morfismos son biyectivos, solo habría que verificar la condición de naturalidad, que es directa.
Tenemos ahora que encontrar η. Sea $A \in \mathscr{A}$. Tenemos definido el isomorfismo $u_{F(A)}\colon (F \circ G)(F(A)) \to F(A)$. Como F es fiel y pleno, existe un único $\eta_A \in \mathscr{A}((G \circ F)(A), A)$ verificando $F(\eta_A) = u_{F(A)}$. Además, como F es fiel y pleno y $u_{F(A)}$ es isomorfismo, sigue de la Proposición 1.2.2 que η_A es isomorfismo. Resta ver que $(\eta_A)_{A \in \mathscr{A}}$ define una transformación natural.

$$\begin{tikzcd} G(F(A)) \arrow[r, "G(F(f))"] \arrow[d, "\eta_A"'] & G(F(B)) \arrow[d, "\eta_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Tenemos $F(G(F(f))) = \Gamma(F(f)) = u^{-1}_{F(B)} \circ F(f) \circ u_{F(A)}$, luego:

$$\begin{aligned} F(f \circ \eta_A) &= F(f) \circ u_{F(A)} = u_{F(B)} \circ F(G(F(f))) \\ &= F(\eta_B) \circ F(G(F(f))) = F(\eta_B \circ G(F(f))) \end{aligned}$$

Como F es fiel, se concluye que el cuadrado anterior conmuta. □

Corolario 1.3.1 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y $\mathscr{B}$ una subcategoría plena conteniendo, al menos, un elemento de cada clase de isomorfismo de $\mathscr{A}$. Entonces, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{A}$ son categorías equivalentes.*

Demostración. El funtor inclusión $I\colon \mathscr{B} \hookrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor fiel (pues es una inclusión) y pleno (por definición de subcategoría plena). Además, la condicion de tener al menos un elemento isomorfo a todo objeto de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ nos dice que I es esencialmente sobreyectivo en objetos. Del teorema anterior, se sigue que $\mathscr{B} \simeq \mathscr{A}$. □

Ejemplo 1.3.4 *Consideramos la categoría $\mathbf{FDVect}^{\mathbf{basis}}_{\mathbf{K}}$, cuyos objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita con base asociada distinguida y cuyos morfismos son todas las aplicaciones lineales, es decir, que no necesariamente tienen que conservar las bases destacadas. Podemos definir el funtor $H\colon \mathbf{FDVect}^{\mathbf{basis}}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{Mat}_{\mathbf{K}}$, asociando a cada espacio vectorial su dimensión y a cada aplicación lineal su matriz asociada. Este funtor es fiel, pleno y sobreyectivo en objetos como consecuencia de resultados básicos de Álgebra Lineal. Luego, $\mathbf{FDVect}^{\mathbf{basis}}_{\mathbf{K}} \simeq \mathbf{Mat}_{\mathbf{K}}$. Además, podemos definir el funtor de olvido $U\colon \mathbf{FDVect}^{\mathbf{basis}}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{FDVect}_{\mathbf{K}}$, que es trivialmente fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos. Concluimos que $\mathbf{FDVect}_{\mathbf{K}} \simeq \mathbf{FDVect}^{\mathbf{basis}}_{\mathbf{K}} \simeq \mathbf{Mat}_{\mathbf{K}}$ son categorías equivalentes.*

1.3.4. Composición horizontal

Hemos definido un tipo de composición entre transformaciones naturales de la forma $\alpha\colon F \Rightarrow G$, $\beta\colon G \Rightarrow H$ que hemos denotado por $\beta \circ \alpha$. A esta se le suele llamar **composición vertical** de transformaciones naturales. Veamos a continuación la noción de composición horizontal de transformaciones naturales.

Definición 1.3.7 *Dadas categorías, funtores y transformaciones naturales de la forma*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{A}' \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha'"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd}$$

definimos la ***composición horizontal*** *de α y α', denotada $\alpha' * \alpha\colon F' \circ F \Rightarrow G' \circ G$, por $(\alpha' * \alpha)_A := \alpha'_{G(A)} \circ F'(\alpha_A)$ $(= G'(\alpha_A) \circ \alpha'_{F(A)}$ por naturalidad de $\alpha')$.*

$$\begin{tikzcd} F'(F(A)) \arrow[r, "F'(\alpha_A)"] \arrow[d, "\alpha'_{F(A)}"'] & F'(G(A)) \arrow[d, "\alpha'_{G(A)}"] \\ G'(F(A)) \arrow[r, "G'(\alpha_A)"'] & G'(G(A)) \end{tikzcd}$$

Usando la naturalidad de α y de α', es fácil comprobar que está composición está bien definida, es decir, que $\alpha' * \alpha \colon F' \circ F \Rightarrow G' \circ G$ es una transformación natural.

Nota 1.3.3

Si α es la identidad, escribimos $\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F'\circ F"] \arrow[r, bend right, "G'\circ F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha' F"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd}$ *con* $(\alpha' F)_A := \alpha'_{F(A)}$.

Similarmente, si $\alpha' = 1_{F'}$, *escribimos* $\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F'\circ F"] \arrow[r, bend right, "F'\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F' \alpha"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd}$ *con* $(F'\alpha)_A := F'(\alpha_A)$.

Proposición 1.3.2 *Sean categorías, funtores y transformaciones naturales de la forma siguiente:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathscr{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{A}' \arrow[r, bend left=60, "F'"] \arrow[r, "G'" description] \arrow[r, bend right=60, "H'"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha'"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta'"] & \mathscr{A}'' \end{tikzcd}$$

Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

I) $(\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha) = (\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha) \colon F \circ F' \Rightarrow H' \circ H$ *(Ley de intercambio)*
II) $1_{F'} * 1_F = 1_{F' \circ F}$

Demostración. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F'(F(A)) \arrow[r, "F'(\alpha_A)"] \arrow[dr, dotted, "(\alpha' * \alpha)_A"'] & F'(G(A)) \arrow[r, "F'(\beta_A)"] \arrow[d, "\alpha'_{G(A)}"] & F'(H(A)) \arrow[d, "\alpha'_{H(A)}"] \\ & G'(G(A)) \arrow[r, "G'(\beta_A)"] \arrow[dr, dotted, "(\beta' * \beta)_A"'] & G'(H(A)) \arrow[d, "\beta'_{H(A)}"] \\ & & H'(H(A)) \end{tikzcd}$$

de cuya conmutatividad se sigue la ley de intercambio. La segunda propiedad es consecuencia directa de las definiciones. □

Proposición 1.3.3 *Si* $\alpha \colon F \Rightarrow G$ *y* $\alpha' \colon F' \Rightarrow G'$ *son isomorfismos naturales, entonces* $\alpha' * \alpha \colon F \circ F' \Rightarrow G \circ G'$ *es un isomorfismo natural.*

Demostración. Recordamos que una transformación natural es isomorfismo natural si, y solo si, todas sus componentes son isomorfismos. Luego, lo que hay que ver es que $(\alpha' * \alpha)_A = \alpha'_{G(A)} \circ F'(\alpha_A)$ es isomorfismo. Los morfismos $\alpha'_{G(A)}$ y α_A son isomorfismos por hipótesis aplicando la misma caracterización. Además, la imagen por un funtor de un isomorfismo es isomorfismo. Luego, $F'(\alpha_A)$ es isomorfismo y el resultado se sigue de que la composición de isomorfismos es isomorfismo. Además, observamos que
$(\alpha' * \alpha)^{-1}_A = (F'(\alpha_A))^{-1} \circ (\alpha'_{G(A)})^{-1} = F'(\alpha^{-1}_A) \circ (\alpha')^{-1}_{G(A)} = ((\alpha')^{-1} * \alpha^{-1})_A$. □

2

Construcciones de categorías. Universales y el Lema de Yoneda

Hay muchas formas de construir categorías a partir de otras categorías o de objetos como los grafos. La primera parte de este capítulo de naturaleza más técnica la dedicaremos a este tipo de construcciones. La segunda parte se dedicará al estudio de las llamadas flechas universales y culminará con la demostración de uno de los teoremas más importantes en Teoría de Categorías: el Lema de Yoneda. La mayor parte de este capítulo tiene como referencia directa [7], a excepción de la demostración del Lema de Yoneda, que parte de [12].

2.1. Construcciones de categorías

En el capítulo anterior ya vimos algunas categorías que se construían a partir de otras previamente definidas, como la categoría opuesta, la categoría producto o las categorías de funtores. En esta sección veremos tres construcciones adicionales: las *categorías comma*, las *categorías libres generadas por grafos* y *las categorías cociente.*

2.1.1. Categorías comma

Las categorías comma son importantes en Teoría de Categorías y las usaremos a lo largo de este trabajo. En máxima generalidad, una categoría comma se construye partiendo de dos funtores. Sin embargo, empezaremos definiendo algunos casos particulares.

Definición 2.1.1 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría y B es un objeto de $\mathscr{A}$, definimos la* ***categoría de objetos bajo B****, denotada $(B \downarrow \mathscr{A})$, como*

- *Los objetos de $(B \downarrow \mathscr{A})$ son los pares de la forma $\langle f, A\rangle$ donde A es un objeto de $\mathscr{A}$ y $f \in \mathscr{A}(B, A)$ es un morfismo de B en A.*
- *Un morfismo $h\colon \langle f, A\rangle \to \langle f', A'\rangle$ en $(B \downarrow \mathscr{A})$ es un morfismo $h\colon A \to A'$ en $\mathscr{A}$ verificando $h \circ f = f'$.*
- *La composicón coincide con la composición en $\mathscr{A}$.*

Nota 2.1.1 *Estamos denotando los pares con $\langle f, A\rangle$ en vez de con (f, A) por evitar el uso de demasiados paréntesis, pero son pares usuales.*

Observamos que podemos identificar los objetos de la categoría $(B \downarrow \mathscr{A})$ con su primera componente, el morfismo $f\colon B \to A$, ya que la segunda es el objeto A que viene implícito en el codominio de la primera. Además podemos identificar los morfismos $h\colon \langle f, A\rangle \to \langle f', A'\rangle$ con triángulos conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & A' \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.1

I) *Si $\{*\}$ es un conjunto unitario y X un conjunto cualquiera, una aplicación $\{*\} \to X$ es la selección de un punto de X. Luego, la categoría $(\{*\} \downarrow \mathbf{Set})$ es precisamente la categoría de conjuntos punteados.*

II) *Similarmente, $(\mathbb{Z} \downarrow \mathbf{Ab})$ es la categoría de grupos abelianos con un elemento destacado, que sería la imagen del 1.*

Podemos también definir el concepto dual.

Definición 2.1.2 *Si $\mathscr{A}$ es una categoría y C es un objeto de $\mathscr{A}$, definimos la **categoría de objetos sobre C**, denotada $(\mathscr{A} \downarrow C)$, como*

- *Los objetos de $(\mathscr{A} \downarrow C)$ son los pares de la forma $\langle f, A\rangle$ de manera que A es un objeto de $\mathscr{A}$ y $f \in \mathscr{A}(A, C)$ es un morfismo de A en C.*
- *Un morfismo $h\colon \langle f, A\rangle \to \langle f', A'\rangle$ en $(B \downarrow \mathscr{A})$ es un morfismo $h\colon A \to A'$ en $\mathscr{A}$ verificando $f' \circ h = f$.*
- *La composicón coincide con la composición en $\mathscr{A}$.*

Ejemplo 2.1.2

I) *Un conjunto unitario $\{*\}$ es final en **Set**, esto es, siempre existe un único morfismo $X \to \{*\}$. Esto nos dice que las categorías $\mathbf{Set}$ y $(\mathbf{Set} \downarrow *)$ son categorías isomorfas.*

II) *$(\mathbf{Rng} \downarrow \mathbb{Z})$ tiene como objetos pares $\langle R, \varepsilon\colon R \to \mathbb{Z}\rangle$ y como morfismos los homomorfismos de anillos que preservan ε:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & R' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Vamos a generalizar un poco esta construcción:

Definición 2.1.3 *Si $S\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ es un funtor y $B \in \mathscr{C}$, definimos la **categoría de objetos S bajo B**, denotada por $(B \downarrow S)$ como:*

- *Los objetos de $(B \downarrow S)$ son los pares de la forma $\langle f, A\rangle$ donde A es un objeto de $\mathscr{A}$ y $f \in \mathscr{A}(B, S(A))$ es un morfismo de B en $S(A)$.*
- *Un morfismo $h\colon \langle f, A\rangle \to \langle f', A'\rangle$ en $(B \downarrow \mathscr{A})$ es un morfismo $h\colon A \to A'$ en $\mathscr{A}$ verificando $S(h) \circ f = f'$.*

- *La composicón coincide con la composición en $\mathscr{A}$.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"] \\ S(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ S(A) \arrow[rr, "S(h)"'] & & S(A') \end{tikzcd}$$

Notemos que la categoría de objetos bajo B es un caso particular de esta, con $S = 1_{\mathscr{A}}$. Dualmente podemos definir la **categoría de objetos S sobre B**, $(S \downarrow B)$.

La siguiente definición tiene a todas las categorías definidas en esta subsección como caso particular, teniendo en cuenta que un objeto $B \in \mathscr{A}$ es lo mismo que un funtor $B\colon \mathbf{1} \to \mathscr{A}$, siendo $\mathbf{1}$ la categoría discreta con un solo objeto.

Definición 2.1.4 *Dadas categorías y funtores $\mathscr{B} \xrightarrow{T} \mathscr{C} \xleftarrow{S} \mathscr{A}$, la **categoría comma**, $(T \downarrow S)$, se define como:*

- *Los objetos de $(T \downarrow S)$ son las tripletas $\langle B, A, f\rangle$ de forma que A es un objeto de $\mathscr{A}$, B es un objeto de $\mathscr{B}$, y $f\colon T(B) \to S(A)$ es un morfismo en $\mathscr{C}$.*
- *Un morfismo de $\langle B, A, f\rangle \to \langle B', A', f'\rangle$ en la categoía comma $(T \downarrow S)$ es un par de morfismos $\langle k\colon B \to B', h\colon A \to A'\rangle$ verificando $f' \circ T(k) = S(h) \circ f$.*
- *La composición viene dada por $\langle k, h\rangle \circ \langle k' \circ h'\rangle := \langle k \circ k', h \circ h'\rangle$.*

$$\begin{tikzcd} T(B) \arrow[r, "T(k)"] \arrow[d, "f"'] & T(B') \arrow[d, "f'"] \\ S(A) \arrow[r, "S(h)"'] & S(A') \end{tikzcd}$$

Una simple comprobación demuestra que esta construcción da lugar a una categoría. Además, dado que las construcciones anteriores son casos particulares de esta, una vez demostrado esto, queda demostrado que el resto también son categorías.

2.1.2. Grafos y categorías libres

Los grafos son objetos matemáticos representados por diagramas que conectan puntos por medio de flechas. Si las flechas están dirigidas, estos diagramas nos recuerdan a los que usamos para representar categorías. En esta subsección veremos cómo construir una categoría a partir de un grafo dirigido.

Empezamos recordando algunas nociones básicas de Teoría de Grafos.

Definición 2.1.5 *Un **grafo dirigido** G consiste en un conjunto O de **objetos**, un conjunto A de **flechas** y dos aplicaciones $\delta_0, \delta_1\colon A \to O$, que asignan a cada flecha su **dominio** y su **codominio** respectivamente. En este trabajo, usaremos el término **grafos** para referirnos a grafos dirigidos, ya que no abordaremos grafos no dirigidos.*

También podemos definir la noción de morfismo entre dos grafos.

Definición 2.1.6 *Un **morfismo** de grafos $D\colon G \to G'$ consiste en un par de aplicaciones $(D_O\colon O \to O', D_A\colon A \to A')$ tales que, para todo $f \in A$, se cumple $D_O(\delta_0(f)) = \delta_0(D_A(f))$ y $D_O(\delta_1(f)) = \delta_1(D_A(f))$.*

Los grafos con los morfismos de grafos y la composición componente a componente forman la categoría **Grph**. Se puede definir el funtor de olvido $U\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$, que a cada categoría pequeña le asigna su grafo subyacente, y a cada funtor le asigna un morfismo de grafos de manera natural.

Definición 2.1.7 *Sea O un conjunto. Decimos que un grafo es un* ***O-grafo****, si su conjunto de objetos es O. En este caso, podemos llamar al grafo como su conjunto de flechas. Un morfismo de grafos D entre O-grafos será un* ***morfismo de O-grafos*** *si $D_O\colon O \to O$ es la identidad.*

Nuestro objetivo ahora será definir la categoría generada por un grafo.

Teorema 2.1.1 *Sea $\{ A \overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\rightrightarrows}} O\}$ un grafo pequeño que denotamos por G. Entonces, existe $\mathscr{C} = \mathscr{C}_G$ una categoría pequeña con $ob(\mathscr{C}) = O$, y existe $P\colon G \to U(\mathscr{C})$ un morfismo de O-grafos, tales que para toda categoría $\mathscr{B}$, y para todo morfismo de grafos $D\colon G \to U(\mathscr{B})$, existe un único funtor $D'\colon \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ tal que $U(D') \circ P = D$.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[d, dotted, "\exists! D'"] \\ \mathscr{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "D"'] & U(\mathscr{C}) \arrow[d, dotted, "U(D')"] \\ & U(\mathscr{B}) \end{tikzcd}$$

En particular, si $ob(\mathscr{B}) = O$ y D es morfismo de O-grafos, D' es la identidad en objetos. A la categoría $\mathscr{C}_G$ se le llama ***categoría libre generada por G****.*

Demostración. Definimos $\mathscr{C}$ por $ob(\mathscr{C}) := O$ y, para cada $a_1, a_2 \in O$, definimos los morfismos de a_1 en a_n como las tuplas de la forma $(a_1, f_1, ..., f_{n-1}, a_n)$ con $f_i \in A, \delta_0(f_i) = a_i$ y $\delta_1(f_i) = a_{i+1}$, para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$. Es decir, son las cadenas $a_1 \xrightarrow{f_1} a_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n$ de flechas componibles. Definimos la composición, como es natural, por

$$(a_1, f_1, ..., f_{n-1}, a_n) \circ (a_n, g_1, ..., g_{m-1}, a_{n+m}) := (a_1, f_1, ..., f_{n-1}, g_1, ..., g_{m-1}, a_{n+m})$$

de manera que se verifica la propiedad asociativa. Las identidades las denotamos por (a_i). Así, observamos que todo morfismo es composición de la forma (a_1, f_1, a_2).
Definimos $P\colon G \to U(\mathscr{C})$ tal que si f es una flecha, $P(f) = (\delta_0(f), f, \delta_1(f))$ y extendiendo por composiciones de manera que P sea un morfismo de O-grafos.
Resta comprobar la propiedad universal de P: Sea $D\colon G \to U(\mathscr{B})$ un morfismo de grafos con $\mathscr{B}$ una categoría. Definimos el funtor $D'\colon \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ en morfismos por

$$D'((a_1, f_1, ..., f_{n-1}, a_n)) := D(f_{n-1}) \circ \dots \circ D(f_1)$$

y en objetos como la identidad. Este funtor verifica

$$(U(D') \circ P)(f) = U(D')((\delta_0(f), f, \delta_1(f)) = D(f),$$

para todo $f \in A$. Además, si D'' es otro funtor verificando esto, se tiene

$$\begin{aligned} D''((a_1, f_1, ..., f_{n-1}, a_n)) &= D''((a_{n-1}, f_{n-1}, a_n) \circ \dots \circ D''((a_1, f_1, a_2)) \\ &= D(f_{n-1}) \circ \dots \circ D(f_1) \end{aligned}$$

Luego, $D'' = D'$ en morfismos. En objetos se define como la identidad. □

Proposición 2.1.1 *La categoría libre generada por un grafo es única salvo isomorfismo en **Cat**.*

Demostración. Recordando la Definición 2.1.3 de objetos bajo un funtor, podemos reformular la definición de $\mathscr{C}$. El par $\langle P \colon G \to U(\mathscr{C}), \mathscr{C}\rangle$ es precisamente un objeto de $(G \downarrow U)$. La propiedad universal sobre P nos dice, por la definicion de morfismo en la categoría $(G \downarrow U)$, que para cualquer otro $\langle D, \mathscr{B}\rangle \in (G \downarrow U)$, existe un único morfismo $D' \colon \langle P, \mathscr{C}\rangle \to \langle D, \mathscr{B}\rangle$. Por tanto, hemos visto que $\langle P, \mathscr{C}\rangle$ es precisamente objeto inicial en $(G \downarrow U)$ y sigue que es único salvo isomorfismo en la categoría comma. En particular, $\mathscr{C}$ es único salvo isomorfismo en **Cat**, pues la identidad en $(G \downarrow U)$ coincide con la identidad en **Cat**. $\square$

Ejemplo 2.1.3

I) *Si G es un grafo con un solo objeto A y una sola flecha de A en A, la categoría $\mathscr{C}_G$ tendría un solo objeto A y morfismos $\mathscr{C}_G(A, A) = \{f^k \mid k \in \mathbb{N}, f^0 = 1_A\}$.*

II) *Si G tiene la forma $A \longrightarrow B \longrightarrow C$, entonces el grafo subyacente a la categoría libre generada por G tiene la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[loop above] \arrow[r] & C \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Considerando los conjuntos como grafos de un solo objeto y monoides como categorías de un objeto, tenemos un corolario interesante del teorema anterior:

Corolario 2.1.1 *Para todo conjunto X, existe un monoide M y una aplicación $p \colon X \to U(M)$, tales que para todo monoide L y para toda aplicación $h \colon X \to U(L)$, existe un único morfismo de monoides $h' \colon M \to L$ con $h = U(h') \circ p$.*

Definición 2.1.8 *Si G es un grafo, decimos que un morfismo de grafos $D \colon G \to U(\mathscr{B})$ es un **diagrama de la forma G** en la categoría $\mathscr{B}$.*

Por el Teorema 2.1.1, estos morfismos corresponden en biyección con funtores $D' \colon \mathscr{C}_G \to \mathscr{B}$, esto es, $\mathbf{Cat}(\mathscr{C}_G, \mathscr{B}) \cong \mathbf{Grph}(G, U(\mathscr{B}))$. En Capítulo 4, veremos en detalle el significado de esto.

2.1.3. Categorías cociente

Ahora veremos como construir una categoría a partir de una pequeña categoría previa y que cumpla ciertas relaciones en sus conjuntos de morfismos.

Empezaremos dando unas nociones y propiedades de relaciones en categorías, que nos serán de utilidad para definir las categorías cociente.

Definición 2.1.9 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría pequeña. Se llamará **relación** en $\mathscr{A}$ a toda aplicación R que asigna a cada par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$ una relación binaria $R_{(A,B)}$ en $\mathscr{A}(A, B)$. Además, diremos que R es una **congruencia** si verifica las siguientes propiedades:*

I) *Para todos $A, B \in \mathscr{A}$, $R_{(A,B)}$ es una relación de equivalencia.*

II) *Si* $f, f' \colon A \to B, g \colon A \to A', h \colon B' \to B$ *son morfismos y* $fR_{(A,B)}f'$*, entonces* $(h \circ f \circ g)R_{(A',B')}(h \circ f' \circ g)$.

Lema 2.1.1 *Dada una relación* R *en* $\mathscr{A}$*, existe una congruencia* R' *en* $\mathscr{A}$ *tal que* $R_{(A,B)} \subseteq R'_{(A,B)}$*, para todo par de objetos* $A, B \in \mathscr{A}$*, y es mínima con esa propiedad.*

Demostración. En efecto, recordamos que una relación binaria R en un conjunto S es un subconjunto del producto cartesiano $T \subseteq S \times S$ de manera que $(x, y) \in T$ si, y solo si, xRy. Es directo verificar que si $\{E^i\}_{i\in I}$ es una colección de congruencias en $\mathscr{A}$ entonces Q definida por

$$Q_{(A,B)} = \bigcap_{i\in I} E^i_{(A,B)}$$

forma una congruencia en $\mathscr{A}$. Podemos tomar $\{E^i\}_{i\in I}$ el conjunto de todas las congruencias en $\mathscr{A}$ verificando $R_{(A,B)} \subseteq E_{(A,B)}$, para todo par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$. Este conjunto es no vacío pues $\mathscr{A}(A, B) \times \mathscr{A}(A, B)$ es una congruencia en $\mathscr{A}$. Basta tomar entonces $R' = Q$ definido como arriba. □

Teorema 2.1.2 *Dada una categoría pequeña* $\mathscr{A}$ *y una relación en* $\mathscr{A}$*,* R*, existe una categoría, que denotamos* $\mathscr{A}/R$*, y un funtor* $Q \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}/R$ *verificando:*

I) *Si* $fR_{(A,B)}f'$*, entonces,* $Q(f) = Q(f')$.
II) *Si* $H \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *es un funtor verificando que si* $fR_{(A,B)}f'$ *entonces* $H(f) = H(f')$*, se tiene que existe un único funtor* $H' \colon \mathscr{A}/R \to \mathscr{B}$ *con* $H' \circ Q = H$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "H"'] & \mathscr{A}/R \arrow[d, dotted, "\exists! H'"] \\
& \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

III) Q *es una biyección en objetos.*

En este caso, diremos que $\mathscr{A}/R$ *es una* ***categoría cociente***.

Demostración. Consideramos la congruencia R' dada por el lema anterior. Ahora, definimos $ob(\mathscr{A}/R) := ob(\mathscr{A})$ y, para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$, $(\mathscr{A}/R)(A, B) := \mathscr{A}(A, B)/R'_{(A,B)}$, el conjunto cociente. Definimos también el funtor $Q \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}/R$ como la identidad en objetos y la proyección canónica en morfismos. Q es un funtor gracias a que R' es una congruencia y, por tanto, conserva la composición.

Sea $H \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor verificando que si $fR_{(A,B)}f'$ entonces $H(f) = H(f')$. Es fácil comprobar que los conjuntos $S_{(A,B)} = \{(f, f') \mid f, f' \colon A \to B \text{ y } H(f) = H(f')\}$ forman una congruencia en $\mathscr{A}$. Además, la propiedad que le estamos exigiendo se puede reescribir como $R_{(A,B)} \subseteq S_{(A,B)}$, para todo par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$. De la minimalidad de R', se sigue que S es más fina que R' en todas sus componentes, esto es, si $[f]$ denota la clase de f por R', $[f] = [g]$ entonces $H(f) = H(g)$.
Por tanto, podemos definir $H' \colon \mathscr{A}/R \to \mathscr{B}$ como la identidad en objetos y en morfismos como $H'([f]) = H(f)$. Este funtor H' es único verificando $H = H' \circ Q$. □

Nota 2.1.2 *Como cabría esperar, $\mathscr{A}/R$ también es única salvo isomorfismo. Para evitar una extensión excesiva en lo relativo a este tema, nos abstendremos de dar una prueba aquí. En la subsección anterior vimos que las categorías libres generadas por grafos eran únicas salvo isomorfismo como corolario de la unicidad de los objetos iniciales, y lo mismo podríamos hacer en este caso. También podríamos dar una prueba directa. De hecho, dicha prueba sería muy similar a la de la Proposición 1.1.3. Pruebas de este estilo suelen funcionar para este tipo de construcciones universales, y los cocientes no son una excepción. Veremos más ejemplos de esto en secciones posteriores.*

Ejemplo 2.1.4 *Si $\mathscr{A} = \mathbf{Top}$ y R es la relación de homotopía, la categoría $\mathscr{A}/R$ es la categoría con objetos los espacios topológicos y con morfismos las clases de homotopías. Esta categoría se denota por **hTop** y se suele denominar la* categoría homotópica de espacios topológicos.

Definición 2.1.10 *Si G es un grafo y R es una relación en la categoría libre generada por G, llamamos a $\mathscr{C}_G/R$ la **categoría generada por G y con relaciones R**.*

2.2. Universales y el Lema de Yoneda

Muchas de las construcciones interesantes en Teoría de Categorías vienen dadas por propiedades universales. En esta sección, introduciremos el concepto de flechas universales, que nos ayudará a realizar este tipo de construcciones más fácilmente. Además, también introduciremos a los funtores representables y demostraremos algunas de sus propiedades más interesantes. Finalmente, enunciaremos y demostraremos el Lema de Yoneda.

2.2.1. Flechas universales

Las flechas universales son esenciales en Teoría de Categorías. En esta subsección nos enfocaremos únicamente en dar las definiciones y algunos ejemplos, pero serán utilizadas más adelante en la memoria.

Definición 2.2.1 *Si $S\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ es un funtor y $C \in \mathscr{A}$, definimos una **flecha universal** de C en S como un par $\langle R, u\rangle$, con $R \in \mathscr{B}, u\colon C \to S(R)$, de manera que si $\langle D, f\rangle$ es otro par con $D \in \mathscr{B}, f\colon C \to S(D)$, entonces, existe un único morfismo en $\mathscr{B}$, $f'\colon R \to D$, verificando $S(f') \circ u = f$:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, dotted, "\exists! f'"] \\ D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & S(R) \arrow[d, dotted, "S(f')"] \\ & S(D) \end{tikzcd}$$

Nota 2.2.1 *Equivalentemente, $\langle R, u\rangle$ es universal de C en S si, y solo si, es un objeto inicial en la categoría comma $(C \downarrow S)$. Como consecuencia, R es único salvo isomorfismo en $\mathscr{B}$, es decir, que si $\langle R, u\rangle$ y $\langle R', u'\rangle$ son flechas universales de C en S, entonces R y R' son isomorfos.*

Ejemplo 2.2.1

i) *Observamos que si tomamos* $S = U\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grph}$ *el funtor de olvido, podríamos definir la categoría libre generada por un grafo* G *como la primera componente de la flecha universal de el grafo* G *en* U*, pues la propiedad universal es la misma.*

ii) *Consideramos la categoría* $\mathbf{Vect_K}$ *y el funtor de olvido* $U\colon \mathbf{Vect_K} \to \mathbf{Set}$*. Para cada conjunto* X*, podemos considerar* V_X *el* K*-espacio vectorial generado por los elementos de* X*, definido en el Ejemplo 1.2.2. Consideramos la aplicación inclusión* $j\colon X \to U(V_X)$*. Para cada* K*-espacio vectorial* W*, es una propiedad básica de Álgebra Lineal que toda aplicación* $f\colon V_X \to W$ *se puede extender a una única aplicación lineal* $f'\colon V_X \to W$ *tal que* $U(f') \circ j = f$*. Esto equivalente a que decir que* $\langle V_X, j\rangle$ *es una flecha universal de* X *en* U*.*

iii) *Dado un dominio de integridad* D*, podemos construir su cuerpo de fracciones* $Q(D)$*, junto con un monomorfismo* $j\colon D \to Q(D)$*, que solemos representar por la inclusión. La propiedad universal del cuerpo de fracciones nos dice que si* K *es un cuerpo y* $f\colon D \to K$ *es un monomorfismo, existe un único monomorfismo* $f\colon Q(D) \to K$ *que conserva los elementos de* D *(como referencia, se puede revisar [5]). En nuestro lenguaje de categorías, esto significa que* $\langle Q(D), j\rangle$ *es una flecha universal de* D *en el funtor de olvido* $U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom_m}$*, donde **Fld** es la categoría de cuerpos con homomorfismos (recordamos que todo homomorfismo entre cuerpos es monomorfismo) y* $\mathbf{Dom_m}$ *es la de dominios de integridad y monomorfismos.*

Nótese que si sustituimos $\mathbf{Dom_m}$ *por la categoría* $\mathbf{Dom}$*, que tiene todos los homomorfismos, no es cierto que siempre exista una flecha universal de* D *en* U*. Por ejemplo, tomamos* $D = \mathbb{Z}$*. Para todo número primo* p*, siempre existe el homomorfismo canónico* $f_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$*. Consideramos, por ejemplo,* f_2 *y* f_3*. Que exista una flecha universal* $\langle Q'(\mathbb{Z}), j'\rangle$ *implica que existen* $f_2'\colon Q'(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$ *y* $f_3'\colon Q'(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_3$ *de manera que los siguientes triángulos conmutan:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "Q'"] \arrow[dr, "f_2"'] & Q'(\mathbb{Z}) \arrow[d, hook, "j_2'"] \\ & \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "Q'"] \arrow[dr, "f_3"'] & Q'(\mathbb{Z}) \arrow[d, hook, "j_3'"] \\ & \mathbb{Z}_3 \end{tikzcd}$$

Hemos omitido el funtor U *en el diagrama para simplificar. Del primer triángulo,* $f_2' \circ Q' = f_2$*, se sigue que, como* f' *es inyectiva,* $Q'(\mathbb{Z})$ *tiene como mucho 2 elementos. Además, si tuviera un solo elemento,* $f_2' \circ Q' = f_2$ *sería constante y no lo es. Luego, el cardinal* $\#Q'(\mathbb{Z}) = 2$*. Por un razonamiento similar, de la conmutatividad del segundo triángulo se tiene* $\#Q'(\mathbb{Z}) = 3$*. Por tanto, llegamos a un absurdo proveniente de suponer que existe una flecha universal de* $\mathbb{Z}$ *en el funtor* $U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Dom}$*.*

iv) *En Análisis, se dice que un espacio métrico* X *es completo si todas las sucesiones de Cauchy en* X *convergen en* X*. Dado un espacio métrico, se puede construir el menor espacio métrico completo que lo contiene, su* compleción*. Este nuevo espacio viene definido por una propiedad universal y, de hecho, se puede interpretar como una flecha universal. Para más información sobre este tema véase [4].*

v) *Más generalmente, y de forma poco precisa, la idea de incluir un objeto matemático en uno con alguna propiedad extra se puede interpretar como una flecha universal.*

Veamos ahora el concepto dual.

Definición 2.2.2 *Una* ***flecha universal*** *de un funtor* $S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ *en un objeto* $C \in \mathscr{C}$ *es un par* $\langle R, v\rangle$, *con* $R \in \mathscr{D}, v\colon S(R)$ *y de manera que para todo par* $\langle D, f\rangle$ *con* $D \in \mathscr{D}, f\colon S(D) \to C$, *se tiene que existe un único morfismo* $f'\colon D \to R$ *tal que* $f = v \circ S(f')$.

$$
\begin{tikzcd}
R \\
D \arrow[u, dotted, "\exists! f'"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
S(R) \arrow[r, "v"] & C \\
S(D) \arrow[u, dotted, "S(f')"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 2.2.2 *Consideramos la categoría* ***Set*** *y el funtor diagonal* $\Delta\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ *en el producto, que asigna a un objeto* $C \in \mathbf{Set}$ *el par* (C, C) *y a una aplicación* f *el par* (f, f). *Entonces, si* A *y* B *son dos conjuntos y* $p_B\colon A \times B \to A, p_A\colon A \times B \to B$ *son las proyecciones canónicas, entonces,* $\langle A \times B, (p_A, p_B)\rangle$ *es una flecha universal de* Δ *en* (A, B). *En efecto, es bien sabido que si* $f\colon C \to A, g\colon C \to B$ *son dos aplicaciones, entonces, existe un único morfismo* $h\colon C \to A \times B$ *con* $p_A \circ h = f$ *y* $p_B \circ h = g$, *que es la condición para ser flecha universal. Esta propiedad nos permitirá definir el producto de dos objetos de una categoría en el próximo capítulo.*

2.2.2. Funtores representables

Introduciremos ahora, de manera breve, el concepto de funtor representable. Sin embargo, primero veremos un resultado que nos resultará útil para caracterizarlos y que volveremos a usar más adelante.

Proposición 2.2.1 *Sea* $S\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ *un funtor. Sean* $R \in \mathscr{D}, C \in \mathscr{C}$ *dos objetos y* $u\colon C \to S(R)$ *un morfismo en* $\mathscr{C}$. *Para cada objeto* D *de* $\mathscr{D}$, *definimos el morfismo* $\beta_D\colon \mathscr{D}(R, D) \to \mathscr{C}(C, S(D))$ *por* $\beta_D(f') := S(f') \circ u\colon C \to S(D)$ *para* $f'\colon R \to D$. *Entonces,* $\langle R, u\rangle$ *es una flecha universal de* C *en* S *si, y solo si,* $\beta \equiv (\ \beta_D\ )_{D \in \mathscr{D}}$ *define un isomorfismo natural*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, bend left, "Hom(R,-)"] \arrow[r, bend right, "Hom(C,-)\circ S"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

Además, dados R *y* C, *cualquier isomorfismo natural* ϕ *de la forma anterior se puede definir por* $\phi_D(f') := S(f') \circ u$ *para un único morfismo* $u\colon C \to S(R)$ *tal que* $\langle R, u\rangle$ *es una flecha universal de* C *en* S.

Demostración. La condición para que $\langle R, u\rangle$ sea universal es precisamente que β_D sea biyectiva para todo D. Si vemos que β es una transformación natural, se seguiría de la Proposición 1.3.1 que β es un isomorfismo natural. Recíprocamente no hay que probar nada pues, si β es isomorfismo natural, β_D debe ser biyectiva para todo D (por la misma proposición) y, por tanto, $\langle R, u\rangle$ es una flecha universal. Luego para esta parte solo hay que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(R,D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_D"'] & \mathscr{D}(R,D') \arrow[d, "\beta_{D'}"] \\ \mathscr{C}(C,S(D)) \arrow[r, "S(g)_*"'] & \mathscr{C}(C,S(D')) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo morfismo $g\colon D \to D'$. En efecto, desarrollando la definición de β y de f_* (que recordamos del Ejemplo 1.2.4) y aplicando que S es un funtor, se tiene que, para todo morfismo $f'\colon R \to D$,

$$(\beta_{D'} \circ g_*)(f') = S(g \circ f') \circ u = S(g) \circ S(f') \circ u = (S(g)_* \circ \beta_D)(f').$$

Ahora, sea $\phi\colon Hom(R,-) \Rightarrow Hom(C,-) \circ S$ un isomorfismo natural. Queremos encontrar $u\colon C \to S(R)$ de manera que $\phi_D(f') = S(f') \circ u$ para cada $f'\colon R \to D$. Consideramos $u = \phi_R(1_R) \in \mathscr{C}(C,S(R))$. Este morfismo verifica dicha fórmula. En efecto, como ϕ es transformación natural, se tiene, para todo $f' \in \mathscr{D}(R,D)$, que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(R,R) \arrow[r, "(f')_*"] \arrow[d, "\phi_R"'] & \mathscr{D}(R,D) \arrow[d, "\phi_D"] \\ \mathscr{C}(C,S(R)) \arrow[r, "S(f')_*"'] & \mathscr{C}(C,S(D)) \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, tomando $1_R \in \mathscr{D}(R,R)$, esto nos dice

$$\begin{aligned} \phi_D(f') &= \phi_D(f' \circ 1_R) = (\phi_D \circ (f')_*)(1_R) \\ &= (S(f')_* \circ \phi_R)(1_R) = S(f') \circ (\phi_R(1_R)) = S(f') \circ u \end{aligned}$$

como queríamos probar. Además, u debe ser único pues si u' tambien verificara dicha fórmula, tomando $f' = 1_R$, tendríamos que $S(f') \circ u = S(f') \circ u'$ implica $u = u'$. Faltaría comprobar que $\langle R, u \rangle$ es una flecha universal, pero ya vimos que eso es equivalente a que ϕ_D sea biyectiva para todo D, propiedad que tenemos por hipótesis. $\square$

Veamos entonces cuándo un funtor se dice representable.

Definición 2.2.3 *Sea $\mathscr{D}$ una categoría. Una* ***representación*** *de un funtor $K\colon \mathscr{D} \to$* **Set** *es un par $\langle R, \psi \rangle$, donde R es un objeto de $\mathscr{D}$ y $\psi\colon Hom(R,-) \Rightarrow K$ es un isomorfismo natural. En estas condiciones, a R se le llama el* ***objeto representante****, y se dice que el funtor K es* ***representable*** *cuando tiene alguna representación.*

Las representaciones de un funtor se corresponden con ciertas flechas universales, como indica la siguiente proposición.

Proposición 2.2.2 *Sea $\{*\}$ un conjunto unitario y $\mathscr{D}$ una categoría. Si $\langle R, u\colon \{*\} \to K(R) \rangle$ es una flecha universal de $\{*\}$ en el funtor $K\colon \mathscr{D} \to$* **Set***, entonces $\langle R, \psi \rangle$, con ψ definido por $\psi_D(f) := K(f)(u(*)) \in K(D)$ para todo objeto D de $\mathscr{D}$ y todo morfismo $f\colon R \to D$, es una representación de K:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(R,D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\psi_D"'] & \mathscr{D}(R,D') \arrow[d, "\psi_{D'}"] \\ K(D) \arrow[r, "K(g)"'] & K(D') \end{tikzcd}$$

Además, toda representación de K se obtiene se obtiene mediante este proceso con exactamente una flecha universal de este tipo.

Demostración. Dado un conjunto X y una aplicación $f\colon \{*\} \to X$, tenemos que f está únicamente determinado por la imagen de $*$. Por tanto, para cada conjunto X, tenemos una biyección $\alpha_X\colon X \to \mathbf{Set}(\{*\}, X)$. Estas biyecciones conforman un isomorfismo natural $\alpha\colon 1_{\mathbf{Set}} \Rightarrow Hom(\{*\}, -)$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & Y \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
\mathbf{Set}(\{*\}, X) \arrow[r, "g_*"'] & \mathbf{Set}(\{*\}, Y)
\end{tikzcd}$$

En efecto, dada una aplicación $g\colon X \to Y$, se tiene que $(\alpha_Y \circ g)(x)$ es la aplicación con imagen $g(x)$ y, por el otro lado, $\alpha_X(x)$ es la aplicación con imagen x que, al componerla con g, resulta lo mismo. Estamos pues en la situación

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_K"] & \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "1_{\mathbf{Set}}"] \arrow[r, bend right, "Hom(\{*\},-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

Podemos aplicar composición horizontal y obtenemos una transformación natural $\alpha * 1_K = \phi\colon K \Rightarrow Hom(\{*\}, -) \circ K$, que es un isomorfismo natural gracias a la Proposición 1.3.3. Además, la Proposición 2.2.1 nos asegura un isomorfismo natural $\beta\colon Hom(R, -) \Rightarrow Hom(\{*\}, -) \circ K$. Componiendo en el sentido de composición en la categoría de funtores, resulta un isomorfismo natural $\psi = \phi^{-1} \circ \beta\colon Hom(R, -) \Rightarrow K$. Sus componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\psi_D(f) &= (\phi_D^{-1} \circ \beta_D)(f) = \phi_D^{-1}(K(f) \circ u) = (\alpha^{-1} * 1_K)_D(K(f) \circ u) \\
&= ((\alpha^{-1})_{K(D)} \circ (Hom(\{*\}, -)(1_D)))(K(f) \circ u) = (\alpha^{-1}_{K(D)})(K(f) \circ u)
\end{aligned}$$

Pero $(\alpha^{-1}_{K(D)})(K(f) \circ u)$ es por definición $(K(f) \circ u)(*)$, como queríamos probar.

Resta ver que si ψ es una representación de K exise una única flecha universal $\langle R, u\rangle$ de manera que $\psi_D(f) = K(f)(u(*)) \in K(D)$, $\forall f\colon R \to D$. De nuevo, aplicamos la Proposición 2.2.1 y tenemos que si $\beta\colon Hom(R, -) \Rightarrow Hom(\{*\}, -) \circ K$ es un isomorfismo natural, existe una única flecha universal $\langle R, u\rangle$ de manera que $\beta_D(f) = S(f) \circ u$. Luego, solo hay que ver que existe un único β tal que $\psi = \phi^{-1} \circ \beta$, pero esto es trivial porque se da si, y solo si, $\beta = \phi \circ \psi$. □

2.2.3. El Lema de Yoneda

Esta subsección la dedicaremos exclusivamente a enunciar y probar uno de los teoremas más importantes en Teoría de Categorías: el Lema de Yoneda. Dividiremos el teorema en dos partes.

Antes de enunciar la primera parte del teorema, introducimos la siguiente notación: Si $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ son dos funtores, denotamos por $Nat(F, G)$ al conjunto de transformaciones naturales de F en G.

Teorema 2.2.1 ***(Primer Lema de Yoneda)*** *Sea $K\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$ un funtor, $R \in \mathscr{D}$. Entonces, existe una biyección $y\colon Nat(Hom(R,-),K) \to K(R)$ entre las transformaciones naturales de $Hom(R,-)$ en K y $K(R)$, definida por $y(\alpha) := \alpha_R(1_R)$.*

Demostración. Es claro que la aplicación está bien definida. Para probar la biyectividad, encontraremos un inverso $\psi\colon K(R) \to Nat(Hom(R,-),K)$. Dado $x \in K(R)$, definimos $\psi(x)$ por $(\psi(x)_D)(f) := K(f)(x) \in K(D)$ para todo objeto D de $\mathscr{D}$ y todo morfismo $f\colon R \to D$. Veamos primero que esto define una transformación natural.
Si $g\colon D \to E$ en $\mathscr{D}$, veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(R,D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\psi(x)_D"'] & \mathscr{D}(R,E) \arrow[d, "\psi(x)_E"] \\ K(D) \arrow[r, "K(g)"'] & K(E) \end{tikzcd}$$

Por definición y por funtorialidad de K, tenemos:

$$\begin{aligned}(\psi(x)_E \circ g_*)(f) &= (\psi(x)_E)(g \circ f) = K(g \circ f)(x) = (K(g) \circ K(f))(x) \\ &= (K(g))(\psi(x)_D(f)) = (K(g) \circ \psi(x)_D)(f)\end{aligned}$$

Resta ver que ψ es, en efecto, inverso de y: Por un lado tenemos

$$y(\psi(x)) = \psi(x)_R(1_R) = K(1_R)(x) = 1_{K(R)}(x) = x$$

para todo $x \in K(R)$. Por otro lado, sea $\alpha\colon Hom(R,-) \Rightarrow K$ una transformación natural. Por definición, $\psi(y(\alpha)) = \psi(\alpha_R(1_R))$. Si $f\colon R \to D$, se tiene, por definición de ψ, que $\psi(y(\alpha))_D(f) = \psi(\alpha_R(1_R))_D(f) = K(f)(\alpha_R(1_R))$. Pero, por naturalidad de α, tenemos $K(f)(\alpha_R(1_R)) = \alpha_D(f_*)(1_R) = \alpha_D(f)$. Concluimos que $(\psi \circ y)(\alpha) = \alpha$. □

La segunda parte del Lema de Yoneda se refiere a la naturalidad de y. Para enunciarla, presentamos previamente algunos funtores. Dadas dos categorías $\mathscr{C}, \mathscr{D}$, definimos $Nat\colon (\mathscr{C}^{\mathscr{D}})^{op} \times \mathscr{C}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}$, donde $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ recordamos que es la categoría de funtores de $\mathscr{D}$ en $\mathscr{C}$, con $Nat(F,G)$ siendo el conjunto de transformaciones naturales de F en G, y en morfismos como $Nat(\alpha,\beta)(\phi) := \beta \circ \phi \circ \alpha$.

$$F' \overset{\alpha}{\Rightarrow} F \overset{\phi}{\Rightarrow} G \overset{\beta}{\Rightarrow} G'$$

También definimos el funtor $H\colon \mathscr{D} \to (\mathbf{Set}^{\mathscr{D}})^{op}$ como $H(D) := Hom(D,-)$ para todo objeto D de $\mathscr{D}$ y $H(f) := f^*$ si f es un morfismo de $\mathscr{D}$. Se comprueba fácilmente que f^* define una transformación natural en este contexto.

Finalmente, podemos definir los funtores $E, N\colon \mathscr{D} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}$ de la siguiente forma: E es el funtor evaluación, es decir, $E(D, F\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}) := F(D)$ en objetos y $E(f\colon D \to D', \alpha\colon F \Rightarrow G) := K(f) \circ \alpha_{D'}$ en morfismos. N se define por $N := Nat \circ (H, 1_{\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}})$, de forma que $N(D,F) = Nat(Hom(D,-),F)$ en objetos y $N(f,\alpha) = Nat(f^*,\alpha)$ en morfismos. No es difícil comprobar que todas estas construcciones son, en efecto, funtores.

Para la demostración del Segundo Lema de Yoneda, haremos uso del siguiente lema, cuya demostración es inmediata y, por tanto, omitiremos:

Lema 2.2.1 *Sean $F, G\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ dos funtores. Entonces, $\alpha \equiv (\alpha_{(A,B)}\colon F(A,B) \to G(A,B)\,)_{(A,B)\in \mathscr{A}\times\mathscr{B}}$ es una transformación natural si, y solo si, los cuadrados*

$$\begin{tikzcd} F(A,B) \arrow[r, "F(f{,}1_B)"] \arrow[d, "\alpha_{(A,B)}"'] & F(A',B) \arrow[d, "\alpha_{(A',B)}"] \\ G(A,B) \arrow[r, "G(f{,}1_B)"'] & G(A',B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A,B) \arrow[r, "F(1_A{,}g)"] \arrow[d, "\alpha_{(A,B)}"'] & F(A,B') \arrow[d, "\alpha_{(A,B')}"] \\ G(A,B) \arrow[r, "G(1_A{,}g)"'] & G(A,B') \end{tikzcd}$$

conmutan para todos morfismos $f\colon A \to A'$, $g\colon B \to B'$, y todos objetos $A, A' \in \mathscr{A}$, $B, B' \in \mathscr{B}$.

Finalmente, enunciaremos y probaremos la segunda parte del Lema de Yoneda.

Teorema 2.2.2 ***(Segundo Lema de Yoneda)***

Existe un isomorfismo natural $\begin{tikzcd} \mathscr{D} \times \textbf{Set}^{\mathscr{D}} \arrow[r, bend left, "N"] \arrow[r, bend right, "E"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow Y"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$ *, cuyas componentes son las biyecciones de Yoneda $y\colon Nat(Hom(R,-),K) \to K(R)$. En paticular,*

$$Nat(Hom(R,-),K) \cong K(R)$$

naturalmente en (R,K).

Demostración. El Primer Lema de Yoneda nos dice que las componentes $(Y)_{(D,F)} = y\colon Nat(Hom(R,-),K) \to K(R)$ son isomorfismos en **Set**. Luego, solo hay que probar que Y es natural. Por el lema que acabamos de enunciar, basta ver que los cuadrados

$$\begin{tikzcd} Nat(Hom(A,-),F) \arrow[r, "(f^*)^*"] \arrow[d, "Y_{(A,F)}"'] & Nat(Hom(B,-),F) \arrow[d, "Y_{(B,F)}"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Nat(Hom(A,-),F) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "Y_{(A,F)}"'] & Nat(Hom(A,-),G) \arrow[d, "Y_{(A,G)}"] \\ F(A) \arrow[r, "\alpha_A"'] & G(A) \end{tikzcd}$$

conmutan para todos $A, B \in \mathscr{D}$, $F, G \in \mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, $f\colon A \to B$, $\alpha\colon F \Rightarrow G$. Notemos que $Nat(f^*, 1_F) = (f^*)^*$ es componer f^* por la derecha y $Nat(1_{Hom(A,-)}, \alpha) = \alpha_*$ es componer con α por la izquierda. Sea $\gamma\colon Hom(A,-) \Rightarrow F$ transformación natural.

Para el primer cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned}(Y_{(B,F)} \circ (f^*)^*)(\gamma) &= y(\gamma \circ f^*) = (\gamma \circ f^*)_B(1_B) = \gamma_B(1_B \circ f) \\ &= \gamma_B(f \circ 1_A) = \gamma_B(f_*(1_A)) = (\gamma_B \circ f_*)(1_A)\end{aligned}$$

Por naturalidad de γ, concluimos

$$(\gamma_B \circ f_*)(1_A) = (F(f) \circ \gamma_A)(1_A) = F(f)(y(\gamma)) = (F(f) \circ Y_{(A,F)})(\gamma)$$

Para el segundo diagrama, se tiene que

$$\begin{aligned}(Y_{(A,G)} \circ \alpha_*)(\gamma) &= y(\alpha \circ \gamma) = (\alpha \circ \gamma)_A(1_A) \\ &= \alpha_A(\gamma_A(1_A)) = \alpha_A(y(\gamma)) = (\alpha_A \circ Y_{(A,F)})(\gamma) \;\square\end{aligned}$$

3

Límites y Colímites

Este capítulo lo dedicaremos al estudio de ciertas construcciones universales: los límites y los colímites. La primera sección irá dedicada a los límites y la segunda a los colímites, que son su contraparte dual. Por último, hablaremos de categorías que tienen todos los límites o todos los colímites. Las referencias bibliográficas de este capítulo incluyen [7], [6] o [12], entre otras.

3.1. Límites

Los límites generalizan una gran cantidad de construcciones en matemáticas. El producto de dos espacios topológicos, el núcleo de un homomorfismo de anillos o el ínfimo de un conjunto de números reales son solo algunos ejemplos de límites en el sentido categórico. En esta sección, estableceremos la definición de límite de un diagrama y examinaremos algunos ejemplos destacados.

3.1.1. Definición de límite

Veamos primero una definición previa. Como nomenclatura, a un funtor $D\colon I \to \mathscr{A}$ le diremos un **diagrama** en $\mathscr{A}$ de **forma** I.

Definición 3.1.1 *Sea $D\colon I \to \mathscr{A}$ un diagrama. Un* ***cono*** *en D es un objeto A de $\mathscr{A}$ junto con una familia de morfismos $(\, f_i\colon A \to D(i)\,)_{i\in I}$ en $\mathscr{A}$ tales que, para todo $u\colon i \to j$ en I, el triángulo siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(u)"'] & & D(j) \end{tikzcd}$$

En este caso, se dice que A es el ***vértice*** *del cono y se suele denotar al cono por su vértice, si no existe riesgo de confusión.*

Podemos ahora definir la noción de límite.

Definición 3.1.2 *Si $D\colon I \to \mathscr{A}$ es un diagrama, un* ***límite*** *de D consiste en un cono $(\, p_i\colon L \to D(i)\,)_{i\in I}$ de manera que para cualquier otro cono $(\, f_i\colon A \to D(i)\,)_{i\in I}$, existe un único morfismo $\bar{f}\colon A \to L$ tal que $p_i \circ \bar{f} = f_i$, $\forall i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{f}"] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(u)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

A los morfismos $\{p_i\}_{i\in I}$ se les llama las ***proyecciones*** *del límite L. Por otro lado, al límite se le suele denominar también* ***cono universal*** *del diagrama D.*

Los límites de un diagrama no tienen por qué existir. Sin embargo, si existen, son únicos salvo isomorfismo.

Proposición 3.1.1 *Los límites de un diagrama D, si existen, son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean L, L' dos límites de un diagrama $D\colon I \to \mathscr{D}$, con proyecciones $(\, p_i\,)_{i\in I}$ y $(\, p'_i\,)_{i\in I}$ respectivamente. Como L es un límite y L' un cono, sigue de la propiedad universal de L que existe un único morfismo $\bar{f}\colon L \to L'$ tal que $p_i \circ \bar{f} = p'_i$ para todo i. Análogamente, por la propiedad universal de L', existe un único $\bar{f}'\colon L' \to L$ tal que $p'_i \circ \bar{f}' = p_i$ para todo i. Veamos que $\bar{f}$ es isomorfismo con inversa $\bar{f}'$. En particular, probaremos que $\bar{f} \circ \bar{f}' = 1_L$ y la otra igualdad se prueba de forma análoga. Para ello, aplicamos de nuevo la propiedad universal de L, esta vez respecto del propio L. Esto nos dice que existe un único morfismo $\bar{g}\colon L \to L$ con $p_i \circ \bar{g} = p_i$ para todo i. En particular, 1_L cumple esta propiedad, luego si vemos que $p_i \circ (\bar{f} \circ \bar{f}') = p_i$ para todo i, concluimos el resultado. En efecto, se tiene $p_i \circ (\bar{f} \circ \bar{f}') = (p_i \circ \bar{f}) \circ \bar{f}' = p'_i \circ \bar{f}' = p_i$. $\square$

Además, si L es el límite de un diagrama D y $L \cong L'$, es directo comprobar que L' también es límite de D con proyecciones las proyecciones de L compuestas con el isomorfismo.

Nota 3.1.1 *Por tanto, podemos hablar de* el límite de D, *que denotamos por $limD$.*

Esta demostración recuerda, en cierta manera, a la demostración de unicidad en objetos iniciales. Además, la unicidad de flechas universales también se podía demostrar viéndolas como ciertos objetos iniciales. La unicidad en límites también se puede demostrar de esta manera. De hecho, los límites se pueden ver como flechas universales:

Definimos el funtor diagonal $\Delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}^I$ como sigue: El funtor $\Delta(A)\colon I \to \mathscr{A}$ será constante en A en objetos, y a todos los morfismos los enviará a la identidad de A. Además, si $g\colon A \to A'$, $\Delta(g)\colon \Delta(A) \Rightarrow \Delta(A')$ será la transformación natural con todas sus componentes iguales a g. Es sencillo demostrar que esta construcción constituye un funtor. Entonces, $\langle L, (\, p_i\,)_{i\in I}\rangle$ es precisamente una flecha universal de Δ

en D. En efecto, que L sea un cono es lo mismo que decir que $p \equiv (\ p_i\ )_{i\in I}$ conforma una transformación natural de $\Delta(A)$ en D, pues el cuadrado de naturalidad es

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "p_i"'] & A \arrow[d, "p_j"] \\ D(i) \arrow[r, "D(u)"'] & D(j) \end{tikzcd}$$

Luego, los conos se corresponden a transformaciones naturales. Además, la condición de flecha universal nos diría que si $\tau\colon \Delta(A) \Rightarrow D$ es otra transformación natural, existe un único morfismo $\bar{f}\colon A \to L$ de forma que $\tau = p \circ \Delta(\bar{f})$. En otras palabras, esto es que $\tau_i = p_i \circ \bar{f}$ para todo i.

$$\begin{tikzcd} L \\ A \arrow[u, dotted, "\exists! \bar{f}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta_I(L) \arrow[r, "p"] & D \\ \Delta_I(A) \arrow[u, dotted, "\Delta_I(\bar{f})"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Hemos visto que los límites son casos particulares de flechas universales, las cuales se pueden ver como objetos iniciales o finales. Además, los objetos finales son el primer ejemplo de límite, donde el conjunto I es vacío y, por tanto, el diagrama D también. Ver esto es una simple comprobación.

3.1.2. Ejemplos notables

Productos

Los productos son límites donde la categoría I es una categoría discreta, es decir, una categoría cuyos únicos morfismos son las identidades. En este caso, decimos que $limD$ es el producto de las imágenes de los objetos de I por el funtor $D\colon I \to \mathscr{A}$, es decir, identificamos D con una familia de objetos de $\mathscr{A}$.

Así, podemos decir que el producto de una familia de objetos (que pueden ser iguales), $(X_i)_{i\in I}$ consiste en un objeto P de $\mathscr{A}$ junto con una familia de morfismos $(\ p_i\colon L \to D(i)\ )_{i\in I}$ de manera que para cualquier otro $A \in \mathscr{A}$ con otra familia $(\ f_i\colon L \to D(i)\ )_{i\in I}$, existe un único $\bar{f}\colon A \to P$ con $p_i \circ \bar{f} = f_i$ para todo i de I.

En el caso de que I solo tenga dos objetos, hablamos del producto de dos objetos X e Y de $\mathscr{A}$, y lo podemos visualizar con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \arrow[ddl, bend right, "f_1"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ & P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

El nombre de producto nos es conocido en otros contextos:

i) En **Set**, el producto de dos conjuntos en el sentido que acabamos de ver coincide con el producto cartesiano con las proyecciones canónicas. Demostrar que esto es cierto, es decir, que el producto cartesiano verifica la propiedad universal es un ejercicio sencillo de Teoría de Conjuntos. Además, el producto cartesiano se puede generalizar a un número arbitrario de conjuntos de manera que esta propiedad se sigue verificando. Formalmente, el producto de una familia de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ se define por
$$\prod_{i\in I} X_i = \{f\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I\}$$
y las proyecciones por $p_j(f) = f(j)$. Luego, podemos decir que **Set** tiene todos los productos.

ii) En **Top**, tenemos la topología producto con las proyecciones estándar, que también verifican la propiedad universal. De hecho, se puede definir la topología producto de dos espacios topológicos X,Y como la menor topología en el producto cartesiano $X \times Y$ que hace continuas las proyecciones. Esta construcción se puede generalizar al caso infinito: se considera sobre el producto cartesiano infinito de los conjuntos subyacentes la menor topología que hace que las proyecciones del producto cartesiano en cada uno de los espacios de partida sean continuas. Esta construcción se puede ver, por ejemplo, en [4].

iii) En $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}$, el producto usual de dos espacios vectoriales es isomorfo a la suma directa de ambos espacios. Ambas construcciones dan el producto en el sentido categórico. Sin embargo, en el caso infinito dichas construcciones difieren, pues un elemento de la suma directa es suma finita de elementos de los espacios de partida, mientras que un elemento del producto infinito no tiene esta restricción. En este caso, el producto en sentido categórico coincide con el producto en este sentido. La demostración de este hecho se puede encontrar en [5].

Igualadores

Igualador es el nombre que se le da al límite de un diagrama $D\colon I \to \mathscr{A}$ cuando I tiene la forma
$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

Podemos escribir el diagrama como $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$, y se suele identificar con los morfismos f y g. Si E es el vértice de un cono para D, debería tener dos morfismos $i\colon E \to X$ y $h\colon E \to Y$ de manera que $f \circ i = h = g \circ i$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

No hay más morfismos no triviales en I, luego para que E sea un cono es suficiente que tenga un morfismo $i\colon E \to X$ que verifique $f \circ i = g \circ i$. La propiedad universal la podemos visualizar con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ A \arrow[u, dotted, "\bar{e}"] \arrow[ur, "e"'] & & \end{tikzcd}$$

En **Set**, si tenemos conjuntos y aplicaciones $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, podemos tomar el conjunto $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, e $i\colon E \to X$ la inclusión. Es claro entonces que $f \circ i = g \circ i\colon E \to Y$. Además, si tenemos otro cono $A \xrightarrow{e} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$, podemos tomar $\bar{e}\colon A \to E$ definido por $\bar{e}(a) = e(a)$, es decir, tal que $i \circ \bar{e} := e$. Está bien definida pues $f(e(a)) = g(e(a))$ implica $f(a) \in E$. Acabamos de probar que **Set** tiene todos los igualadores.

Consideramos ahora la categoría $\mathbf{Vect_K}$. En esta categoría, f y g son aplicaciones lineales. Teniendo esto en cuenta, es directo ver que E construido como en **Set** es un subespacio vectorial de X. Además, la inclusión es lineal y la propiedad universal se da igual que en el caso anterior. Luego, los igualadores en $\mathbf{Vect_K}$ tienen la misma forma que en **Set**. Ahora, tomamos $g = 0$ la aplicación constante en el 0 de X. Observamos que el igualador de f y 0 es precisamente $E = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, es decir, $E = ker(f)$. Esta idea nos permite dar una definición más general del núcleo de un morfismo.

Definición 3.1.3 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con un objeto cero O y sean $A, B \in \mathscr{A}$. Entonces, denotamos por $0\colon A \to B$ al único morfismo $A \to O \to B$. Si f es un morfismo de A en B, definimos el* ***núcleo*** *de f, denotado $ker(f)$, como el igualador de f con 0.*

Esta definición coincide con la del núcleo de un homomorfismo de grupos o la del núcleo de un homomorfismo de anillos. Además, se puede comprobar que el núcleo de un morfismo no depende del objeto cero tomado, salvo isomorfimo.

Otra categoría con objeto cero es $\mathbf{Top}_*$, que es la categoría de espacios topológicos punteados. En efecto, si $\{*\}$ es un espacio de un solo punto, solo pueden llegar a él los morfismos constantes y solo pueden salir los morfismos que lleven a su único punto al punto destacado del espacio topológico de llegada. Con esta definición, podemos hablar del núcleo de una aplicación continua que conserva el punto base (si es que existe).

Pullbacks

Se llama pullback al límite de un diagrama $D\colon I \to \mathscr{A}$ cuando I es de la forma

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Escribimos el diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

y podemos comprobar de manera similar a lo hecho con igualadores que un cono de D es un objeto P junto con morfismos $p_1\colon P \to X, p_2\colon P \to Y$ de manera que el siguiente cuadrado conmuta.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Podemos visualizar la propiedad universal con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"'] \\ & X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

En **Set**, el pullback de f y g es un subconjunto del producto $X \times Y$. En particular, $P = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$, siendo p_1 y p_2 las restricciones de las proyecciones usuales. En este punto, el lector debería poder hacerse una idea de la prueba de estas afirmaciones sin más que analizar los ejemplos anteriores.

Hay algunos casos bien conocidos de esta construcción incluso dentro de la categoría de los conjuntos. Por ejemplo, podemos tomar como diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, hook, "i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde A es un subconjunto de Y e i es la inclusión. Entonces,

$$P = \{(x, a) \in X \times A \mid f(x) = a\} = \{(x, f(x)) \in X \times Y' \mid f(x) \in A\}$$

Es natural establecer una biyección entre el pullback que acabamos de describir y la antiimagen $f^{-1}(A)$. Luego, la antiimagen es un caso particular de pullback.

Ahora, si A, B son subconjuntos de Z y $f = j$, $g = i$ son las inclusiones, entonces la intersección de A con B es exactamente $j^{-1}(B)$. Luego, podemos ver a la intersección de dos conjuntos como una antiimagen y, por tanto, como un pullback.

Una propiedad general que cabe destacar es que si el objeto codominio común a las flechas, Z, es un objeto final, entonces el pullback del diagrama coincide con el producto categórico de X e Y. Esto no es difícil de comprobar teniendo en cuenta la propiedad que define al objeto final.

3.2. Colímites

Dedicaremos esta sección a la construcción dual de los límites, conocida como colímites. Dado que la teoría es dual a la de los límites, abordaremos el tema de manera más concisa al proporcionar la definición y presentar los ejemplos notables. Nos detendremos un poco más al brindar casos particulares de estos ejemplos destacados.

3.2.1. Definición de colímite

Esta vez daremos la definición directamente en términos de flechas universales. Dejamos al lector un enunciado equivalente haciendo uso de coconos universales, que no son otra cosa que un cono universal en la categoría opuesta.

Definición 3.2.1 *Un* ***colímite*** *de un diagrama $D\colon I \to \mathscr{A}$ es un objeto C de $\mathscr{A}$ junto con una transformación natural $\tau\colon D \Rightarrow \Delta(C)$, donde Δ es el funtor diagonal, que es una flecha universal de D en Δ. A las componentes de τ las llamamos* ***coproyecciones****. Denotaremos al colímite de D por $C = colimD$.*

Cuando afirmamos que el colímite es dual al límite, nos referimos a que si L es el colímite de un diagrama $D\colon I \to \mathscr{A}$ con proyecciones $(\, p_i\colon L \to D(i)\,)_{i\in I}$, entonces L es el límite del diagrama $D'\colon I \to \mathscr{A}^{op}$ con las mismas componentes. Esto tiene sentido porque en $\mathscr{A}^{op}$, tenemos $p_i\colon D(i) \to L$. Probar que estas dos definiciones son equivalentes es cuestión de cambiar todas las flechas de sentido, y no nos detendremos mucho en ello. Viendo esto, es claro que los colímites también son únicos salvo isomorfismo.

3.2.2. Ejemplos notables

Coproductos

Es el caso dual a los productos. El coproducto de un conjunto de objetos se suele denotar con el símbolo de la unión disjunta, $\sqcup$. En el caso del coproducto de dos objetos, podemos visualizar la propiedad universal con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
& X \sqcup Y \arrow[u, dashed, "\bar{f}"] & \\
X \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[uur, bend left, "f_1"] & & Y \arrow[ul, "p_2"] \arrow[uul, bend right, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

que, como podemos observar, es igual al del producto invirtiendo todas las flechas.

El hecho de que se use el símbolo de la unión disjunta para el coproducto no es casual. En Teoría de Conjuntos, se define la unión disjunta de una familia indexada de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ como

$$\bigsqcup_{i\in I} X_i := \{(x,i) \mid i \in I, x \in X_i\}$$

Este conjunto es precisamente el coproducto de la colección de conjuntos, con coproyecciones $p_i\colon X_i \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$ definidas por $p_i(x) = (x,i)$, para todo x en X_i.

En $\mathbf{Vect_K}$, teníamos dos candidatos para el producto arbitrario y finalmente desechamos la suma directa. Es un ejercicio de Álgebra Lineal demostrar que la suma directa corresponde con el coproducto. Lo mismo ocurre en las categorías de grupos abelianos o de R-módulos. De nuevo, podemos encontrar una prueba en [5].

En **Top**, se puede definir la unión disjunta de espacios topológicos, que coincide con el coproducto. Esta viene equipada con la topología más fina que hace continuas las coproyecciones definidas como en el caso de **Set**. En $\mathbf{Top}_*$, el coproducto recibe un nombre especial: la suma *wedge*, que intuitivamente consiste en unir dos espacios por su punto base. Esta construcción se puede encontrar desarrollada, por ejemplo, en [13].

Coigualadores

Es el caso dual a los igualadores. Si llamamos Q al coigualador de dos morfismos $f, g\colon X \to Y$, podemos visualizar la propiedad universal de la forma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & Q \arrow[d, dotted, "\bar{p}"] \\ & & A \end{tikzcd}$$

En **Set**, el coigualador de f y g coincide con el cociente Y/R por la relación de equivalencia R en Y generada por las relaciones elementales $f(x)Rg(x), x \in X$. La aplicación q es la proyección en el cociente, haciendo cierta la igualdad $q \circ f = q \circ g$.

En Álgebra se suele definir el conúcleo de un homomorfismo (de módulos, espacios vectoriales, anillos, etc.), $f\colon X \to Y$ como $coker(f) := Y/Im(f)$. Si observamos la construcción del coigualador en **Set** y aplicamos la diferencia de dos homomorfismos de estos tipos, podemos reescribir yRy' como $y - y' \in Im(f - g)$. Si ahora tomamos $g = 0$ el morfismo idénticamente nulo, tenemos que $Q = Y/Im(f) = coker(f)$. Además, la proyección en el cociente es lineal y, por tanto, esta construcción nos da el coigualador de f y 0 en las nuevas categorías. Esto nos permite dar una definición general de conúcleo.

Definición 3.2.2 *Sea $\mathscr{A}$ una categoría con un objeto cero O y sean $A, B \in \mathscr{A}$. Entonces, denotamos por $0\colon A \to B$ al único morfismo $A \to O \to B$. Si f es un morfismo de A en B, definimos el **conúcleo** de f, denotado $coker(f)$, como el coigualador de f con 0.*

Pushouts

Es el caso dual de los pullbacks. El diagrama representativo es

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ X \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & P \arrow[dr, dotted, "\bar{f}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

En **Set**, el pushout de un diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

viene dado por $P = (X \sqcup Y)/R$, donde la relación de equivalencia R es la menor que verifica $(f(z),1)R(g(z),2)$ para todo z de Z. Las coproyecciones son las naturales, es decir, la composición de la coproyecciones en la unión disjunta compuestas con la proyección en el cociente. En particular, si X e Y son subconjuntos de un conjunto W, $Z = X \cap Y$ y f y g son las inclusiones, se tiene que el pushout es la unión $X \cup Y$ con las inclusiones canónicas. En la categoría Top el pushout sigue la misma construcción que en Set considerando las topologías obvias.

En la categoría de grupos **Grp**, el pushout es lo que se denomina el *producto libre amalgamado*. En resumen, si tenemos

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & H \\ G & \end{tikzcd}$$

entonces el pushout es el cociente $(G * H)/N$, donde $G * H$ es el grupo libre generado por G y H y $N = \{\phi(f) \cdot \psi(f) \mid f \in F\}$. Esta operación se utiliza en el Teorema de Seifert-van Kampen, importante en Topología Algebraica. Para más información, véase [8] o [13].

Daremos ahora un ejemplo de distinta naturaleza. Si $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de enteros no negativos, consideramos el monoide $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ visto como categoría de un objeto, que denotaremos por $\bullet$. Un diagrama de forma pushout es entonces equivalente a dar dos enteros positivos n y m (que equivaldrían a los morfismos f y g). Entonces, las coproyecciones del pushout de n y m vienen dadas por $k = \frac{m.c.m(n,m)}{m}$ y $r = \frac{m.c.m(n,m)}{n}$, donde $m.c.m.$ denota el mínimo común múltiplo.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] \arrow[d, "n"'] & \bullet \arrow[d, "k"] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\ \bullet \arrow[r, "r"'] \arrow[drr, bend right, "p"'] & \bullet \arrow[dr, dotted, "u"] & \\ & & \bullet \end{tikzcd}$$

Veamos que esto es cierto: Primero, tenemos que $m \cdot k = m.c.m(n,m) = n \cdot r$, luego el cuadrado conmuta. Ahora, si tenemos enteros positivos p, q tales que $n \cdot p = m \cdot q$, sigue que m divide a $p \cdot n$. Además, es claro que n divide a $p \cdot n$, luego $m.c.m(n,m)$ divide a $p \cdot n$. Si queremos $u \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r \cdot u = p$, no nos queda otra que coger $u = \frac{p \cdot n}{m.c.m(n,m)}$, que es entero por lo que acabamos de ver. Solo nos resta ver $k \cdot u = q$. En efecto, $k \cdot u = \frac{m.c.m(n,m)}{m} \cdot \frac{p \cdot n}{m.c.m(n,m)} = \frac{p \cdot n}{m} = q$.

3.3. Categorías completas y cocompletas

En las secciones anteriores, hemos visto las construcciones de productos, igualadores y pullbacks en la categoría **Set**, así como sus contrapartes duales. Tal como las hemos dado, se puede observar que los pullbacks parecen una combinación entre productos e igualadores y los pushouts una combinación entre coproductos y coigualadores, al menos en este caso. En esta sección veremos una sorprendente generalización de esta idea: todos los límites pueden darse en términos de productos e igualadores y, dualmente, los colímites se pueden dar en términos de coproductos y coigualadores.

Definición 3.3.1 *Una categoría $\mathscr{A}$ se dice* ***completa*** *si para todo diagrama D en $\mathscr{A}$ existe el límite de D. Dualmente, $\mathscr{A}$ se dice* ***cocompleta*** *si para todo diagrama D en $\mathscr{A}$ existe el colímite de D. $\mathscr{A}$ se dice* ***bicompleta*** *si es completa y cocompleta.*

Teorema 3.3.1 *Una categoría es completa si, y solo si, tiene todos los productos y todos los igualadores. Dualmente, una categoría es cocompleta si, y solo si, tiene todos los coproductos y todos los coigualadores.*

Demostración. Los productos e igualadores son casos particulares de límites, luego basta probar que si una categoría $\mathscr{A}$ tiene todos los productos y todos los igualadores, entonces es completa. Sea $D\colon I \to \mathscr{A}$ un diagrama. I es una categoría pequeña, luego $ob(I)$ es un conjunto. Además, $H = \bigcup_{i,j \in I} I(i,j)$ la unión (disjunta) de todos los morfismos de I es otro conjunto. Si $f \in I(i,j)$, definimos $dom(f) = i$ y $cod(f) = j$ el dominio y codominio de f respectivamente. Como $\mathscr{A}$ tiene todos los productos por hipótesis, existen $X = \prod_{i \in ob(I)} D(i)$ e $Y = \prod_{f \in H} D(cod(f))$, con proyecciones respectivas $\pi_i\colon X \to D(i)$ y $\rho_f\colon Y \to D(cod(f))$. Usando la propiedad universal de Y como producto, se tiene que existe un único $\phi\colon X \to Y$ tal que $\rho_f \circ \phi = \pi_{cod(f)}\colon X \to D(cod(f))$ para todo morfismo f en I. Usando de nuevo la propiedad universal de Y, existe un único $\psi\colon X \to Y$ tal que $\rho_f \circ \psi = D(f) \circ \pi_{dom(f)}\colon X \to D(dom(f)) \to D(cod(f))$ para todo f. Consideramos E el igualador de $X \underset{\phi}{\overset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ con proyección $\tau\colon E \to X$. Entonces, se puede comprobar que E es el límite de D con proyecciones $p_i = \pi_i \circ \tau\colon E \to D(i)$, para i en I. El resultado dual se sigue como corolario. □

Por tanto, todos los límites se pueden conseguir a partir de productos e igualadores, independientemente de lo grande o intrincado que sea el diagrama.

En las secciones anteriores vimos la construcción explícita de productos, coproductos, igualadores y coigualadores en **Set**. El resultado anterior nos asegura que, entonces, tiene todos los límites y colímites.

Corolario 3.3.1 *La categoría* ***Set*** *es completa y cocompleta.*

Aunque no hayamos visto todas las construcciones, también es cierto que categorías como **Top**, $\mathbf{Vect_K}$ o **Grp** son completas y cocompletas.

4

Funtores adjuntos. Aplicaciones

Las adjunciones son un concepto básico en teoría de categorías que definió el matemático americano Daniel Kan en 1960. Las adjunciones son un tipo de relación entre funtores y dos funtores se llaman adjuntos si existe una adjunción entre ellos. Parafraseando a [7], *los funtores adjuntos aparecen en todas partes* y además tienen varias propiedades interesantes. Dedicaremos la primera parte de este capítulo a este tema. La segunda parte irá dedicada a las llamadas *extensiones de Kan*, también desarrolladas por Kan años después. Finalmente, haremos una introducción a algunas aplicaciones prácticas de la Teoría de Categorías y utilizaremos los conocimientos y resultados de esta memoria para adentrarnos brevemente en una aplicación a las bases de datos. Adicionalmente, se incluyen en este capítulo unas conclusiones finales de todo el trabajo.

4.1. Adjunciones

Esta sección se dedicará al estudio de las adjunciones y los funtores adjuntos. Empezaremos dando la definición y algunos ejemplos. Luego veremos algunos resultados interesantes como que los funtores adjuntos conservan los límites. Por último, veremos un caso particular: las conexiones de Galois. Las definiciones y los resultados de este capítulo tienen como referencias [7] y [6], mientras que los ejemplos provienen de [6]. Todo lo referente a conexiones de Galois está inspirado en [3].

4.1.1. Definición y ejemplos

Definición 4.1.1 *Una* ***adjunción*** *entre funtores* $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ *es una ley que asigna a cada par* $(A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ *una biyección*

$$\phi = \phi_{A,B}\colon \mathscr{B}(F(A), B) \to \mathscr{A}(A, G(B))$$

que es natural en A *y en* B*. En este caso, se dice que* F *es* ***adjunto a izquierda*** *de* G *y que* G *es* ***adjunto a derecha*** *de* F*, y se denota* $F \dashv G$*.*

La naturalidad en A y B se refiere a la conmutatividad de los siguientes cuadrados para todo $k\colon B \to B'$ y todo $h\colon A \to A'$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{B}(F(A), B) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathscr{B}(F(A), B') \arrow[d, "\phi"] \\
\mathscr{A}(A, G(B)) \arrow[r, "G(k)_*"'] & \mathscr{A}(A, G(B'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{B}(F(A), B) \arrow[r, "F(h)^*"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathscr{B}(F(A'), B) \arrow[d, "\phi"] \\
\mathscr{A}(A, G(B)) \arrow[r, "h^*"'] & \mathscr{A}(A', G(B))
\end{tikzcd}$$

En particular, el de la izquierda es el diagrama de la naturalidad en B y el de la derecha es el diagrama de la naturalidad en A. Como consecuencia directa de estos diagramas y de los correspondientes para ϕ^{-1} (que también es natural como vimos en la demostración de la Proposición 1.3.1) tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1.1 *Sea ϕ una adjunción entre $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Entonces, si (A, B) y (A', B') son pares de objetos en $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, para toda tripleta de morfismos $f\colon F(B) \to A, h\colon B' \to B, k\colon A \to A'$, se verifican las siguientes igualdades:*

i) $\phi(k \circ f) = G(k) \circ \phi(f)$
ii) $\phi(f \circ F(h)) = \phi(f) \circ h$
iii) $\phi^{-1}(g \circ h) = \phi^{-1}(g) \circ F(h)$
iv) $\phi^{-1}(f \circ F(h)) = \phi(f) \circ h$

Veamos algunos ejemplos de funtores adjuntos:

Ejemplo 4.1.1 *Vimos en los ejemplos 1.2.1 y 1.2.2 funtores de olvido y funtores libres. Funtores de estos tipos suelen ser adjuntos entre sí. Por ejemplo, consideramos la categoría $\mathbf{Vect_K}$ con K un cuerpo. Tenemos entonces el funtor libre $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect_K}$ es adjunto a izquierda del funtor de olvido $U\colon \mathbf{Vect_K} \to \mathbf{Set}$. En efecto, fijemos S un conjunto y V un espacio vectorial. Si $g\colon F(S) \to V$ es una aplicación lineal, definimos la aplicación $\phi_{S,V}(g) = \phi(g)\colon S \to U(V)$ por $\phi(g)(s) := g(s)$, para todo s de S. Definimos, por otro lado, la aplicación $\psi\colon \mathbf{Set}(S, U(V)) \to \mathbf{Vect_K}(F(S), v)$ dada por*

$$\psi(f)(\sum_{s\in A} \lambda_s s) := \sum_{s\in A} \lambda_s f(s)$$

donde $f\colon S \to U(V)$ es una aplicación y $w = \sum_{s\in A} \lambda_s s$ un elemento del espacio vectorial libre generado por S. Es claro que $\psi(f)$ es lineal, luego la aplicación ψ está bien definida. Además, es directo comprobar que ψ es inversa de ϕ y que los cuadrados de naturalidad son conmutativos. Por tanto, ϕ es una adjunción entre F y U.

Ejemplo 4.1.2 *Si consideramos la categoría **Set** y un conjunto B, ya conocemos el funtor $Hom(B, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. También podemos definir el funtor $-\times B\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, que envía cada conjunto a su producto cartesiano con B y cada aplicación $f\colon A \to A'$ a la aplicación $\bar{f} = (f \times 1_B)\colon A \times B \to A' \times B$, definida por $\bar{f}(a, b) := (f(a), b)$. Veamos que estos funtores son adjuntos, $- \times B \dashv Hom(B, -)$. Dados dos conjuntos A y C, establecemos la adjunción $\phi\colon \mathbf{Set}(A \times B, C) \to \mathbf{Set}(A, \mathbf{Set}(B, C))$ de la siguiente manera: Si g es un morfismo $g\colon A \times B \to C$ y $a \in A$, definimos $\phi(g)(a) = \bar{g}_a \in \mathbf{Set}(B, C)$ por $\bar{g}_a(b) := g(a, b)$. La inversa $\psi\colon \mathbf{Set}(A, \mathbf{Set}(B, C)) \to \mathbf{Set}(A \times B, C)$ de ϕ viene dada por $\psi(f)(a, b) := (f(a))(b)$, donde $f\colon A \to \mathbf{Set}(B, C)$ y $(a, b) \in A \times B$. Todas estas definiciones son las naturales y no es difícil comprobar que ϕ y ψ son inversos uno del otro. Además, ϕ satisface la naturalidad en A y en C. Consideramos ahora el caso particular $A = B = C = \mathbb{R}$. La existencia de esta adjunción implica que podemos ver toda función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como una aplicación desde los números reales en el conjunto de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si f es una superficie, podemos visualizar esta correspondencia como la superficie cortada por planos paralelos, dando lugar a curvas.*

4.1.2. Unidad y counidad. Conservación de límites

En esta subsección veremos dos propiedades importantes de los funtores adjuntos. La primera se refiere a lo que se denomina la unidad y la counidad de la adjunción. La segunda a que los funtores adjuntos conservan los límites o los colímites, según sea adjunto a derecha o a izquierda, respectivamente.

Teorema 4.1.1 *Sean $F : \mathscr{A} \rightleftarrows \mathscr{B} : G$ funtores y ϕ una adjunción entre ellos de modo que $F \dashv G$. Entonces, ϕ determina:*

I) *Una transformación natural $\eta\colon 1_{\mathscr{A}} \Rightarrow G \circ F$ tal que para todo A de $\mathscr{A}$, η_A es una flecha universal de A en G. Además, si $f\colon F(A) \to B$ es un morfismo en $\mathscr{B}$, se tiene que $\phi(f) = G(f) \circ \eta_A\colon A \to G(B)$.*

II) *Una transformación natural $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathscr{B}}$ tal que para todo B de $\mathscr{B}$, ε_B es una flecha universal de F en A. Además, si $g\colon A \to G(B)$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, se tiene que $\phi^{-1}(g) = \varepsilon_B \circ F(g)\colon F(A) \to B$.*

Además, para todo A objeto de $\mathscr{A}$ y todo B objeto de $\mathscr{B}$, se verifica $1_{G(B)} = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)}$ y $1_{F(A)} = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)$. En estas condiciones, llamamos a η la ***unidad*** *y a ε la* ***counidad*** *de la adjunción ϕ.*

Demostración. Sea $A \in \mathscr{A}$. Consideramos $\phi_{A,F(A)}\colon \mathscr{B}(F(A), F(A)) \to \mathscr{A}(A, G(F(A)))$. Definimos $\eta_A := \phi_{A,F(A)}(1_{F(A)})\colon A \to G(F(A))$. $(\ \eta_A\colon A \to G(F(A))\ )_{A\in\mathscr{A}}$ determina una transformación natural η de $1_{\mathscr{A}}$ en $G \circ F$. En efecto, si $h \in \mathscr{A}(A, A')$, entonces, haciendo uso de las dos primeras propiedades de la Proposición 4.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} G(F(h)) \circ \eta_A &= G(F(h)) \circ \phi(1_{F(A)}) = \phi(F(h) \circ 1_{F(A)}) \\ &= \phi(1_{F(A')} \circ F(h)) = \phi(1_{F(A')}) \circ h = \eta_{A'} \circ h \end{aligned}$$

Luego se cumple el axioma de naturalidad. La igualdad $\phi(f) = G(f) \circ \eta_A$ para todo $f\colon F(A) \to B$ es directa aplicando la naturalidad de $\phi_{A,B}$ respecto de B al morfismo $1_{F(A)}$. Además, de esta igualdad, de la Proposición 2.2.1 y haciendo algunas comprobaciones sencillas referentes a la naturalidad en B, se sigue que $\langle F(A), \eta_A\rangle$ es una flecha universal de A en G si, y solo si, $\phi_{A,B}$ es una biyección natural en B, lo cual tenemos por hipótesis. La existencia de la counidad ε se demuestra de manera análoga, definiendo $\varepsilon_B := \phi^{-1}(1_{G(A)})\colon F(G(A)) \to A$. Resta ver que $1_{G(B)} = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)}$ y que $1_{F(A)} = \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)$. Probaremos la primera igualdad y la segunda es análoga, por lo que se deja a lector. En efecto,

$$1_{G(B)} = \phi(\phi^{-1}(1_{G(B)})) = \phi(\varepsilon_B) = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \qquad \square$$

En realidad, se puede establecer una biyección entre adjunciones y transformaciones naturales $(\eta\colon 1_{\mathscr{A}} \Rightarrow G \circ F, \varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow 1_{\mathscr{B}})$ satisfaciendo lo que se llaman las igualdades triangulares. Esto nos dice que si existen tales transformaciones naturales, entonces podemos obtener una adjunción entre F y G. Los detalles de este hecho se pueden encontrar, por ejemplo, en [6].

Teorema 4.1.2 *Todo adjunto a derecha conserva los límites. Dualmente, todo adjunto a izquierda conserva los colímites.*

Demostración. Sea $K\colon J \to \mathscr{B}$ un diagrama con límite L y proyecciones la colección de morfismos $(\ \lambda_j\colon L \to K(j)\ )_{j\in J}$ y sea $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ un funtor adjunto a derecha, con adjunto a izquierda F, y sea ϕ una adjunción entre ambos. Entonces, aplicando la funtorialidad de G, tenemos que $(G(\lambda_j)\colon G(L) \to G(K(j)))_{j\in J}$ es un cono del diagrama $g \circ K\colon J \to \mathscr{A}$. Veamos que $G(L)$ es un límite de $G \circ K$ con proyecciones $G(\lambda_j)$. Sea $(\ \mu_j\colon C \to K(j)\ )_{j\in J}$ otro cono y sea $u\colon i \to j$ morfismo en J. Como μ es un cono, se tiene que $(G \circ K)(u) \circ \mu_i = \mu_j$. Haciendo manipulaciones sencillas y aplicando la primera parte de la Proposición 4.1.1 tenemos

$$\mu_j = (G \circ K)(u) \circ \mu_i = G(K(u)) \circ \phi(\phi^{-1}(\mu_i)) = \phi(K(u) \circ \phi^{-1}(\mu_i))$$

Equivalentemente, podemos afirmar que $K(u) \circ \phi^{-1}(\mu_i)$ es $\phi^{-1}(\mu_j)$. Entonces, para todo $u\colon i \to j$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & F(C) \arrow[ddl, bend right, "\phi^{-1}(\mu_i)"'] \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[ddr, bend left, "\phi^{-1}(\mu_j)"] & \\
 & L \arrow[dl, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\
K(i) \arrow[rr, "K(u)"'] & & K(j)
\end{tikzcd}$$

Es decir, $(\ \phi^{-1}(\mu_j)\colon F(C) \to K(j)\ )_{j\in J}$ es un cono de K y podemos aplicar que L es el límite de K para probar que existe un único morfismo $f\colon F(C) \to L$ haciendo conmutativo el diagrama anterior. Aplicando ϕ y de nuevo la Proposición 4.1.1, se tiene que $\mu_j = \phi(\lambda_j \circ f) = G(\lambda_j) \circ \phi(f)$ para todo j. Luego, se obtiene la existencia de $\bar{f} = \phi(f)\colon C \to G(L)$. Además si $\bar{g}\colon C \to G(L)$ también verifica $\mu_j = G(\lambda_j) \circ \phi(\bar{g})$, podemos probar que $\phi^{-1}(\mu_j)$ es igual a $\lambda_j \circ \phi^{-1}(\bar{g})$ de la misma manera que probamos $\phi^{-1}(\mu_j) = K(u) \circ \phi^{-1}(\mu_i)$. De la unicidad de $f\colon F(C) \to L$, se sigue que $\phi^{-1}(\bar{g}) = f$, es decir, $\bar{g} = \bar{f}$. □

4.1.3. Conexiones de Galois

Veremos ahora un caso particular de adjunciones: las conexiones de Galois. A pesar de que hemos introducido primero los funtores adjuntos, históricamente fue al revés, es decir, las conexiones de Galois son anteriores y generalizan la correspondencia entre subgrupos y subcuerpos del Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, que es de principios del siglo XIX. Las conexiones de Galois tienen aplicaciones no solo en Teoría de Galois sino también en otras áreas del Álgebra, la Topología, la Teoría de Conjuntos, la Lógica o la Programación. Las conexiones de Galois no son el tema de este trabajo presente. Por tanto, los ejemplos de esta subsección no se verán de forma muy detallada y algunas proposiciones quedarán sin demostración completa. Para un mayor detalle, se puede leer el primer capítulo de [3].

Recordemos de los apartados IV y V de los ejemplos 1.1.1 y 1.2.3, respectivamente, que podemos describir un conjunto parcialmente ordenado como una categoría y los funtores entre categorías de este tipo como funciones monótonas entre cada par de conjuntos parcialmente ordenados. Notamos que dos elementos a, b de un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ son isomorfos en el sentido categórico si, y solo si, $a \leq b$ y $b \leq a$. Si el preorden es, en realidad, un orden parcial, dos objetos son isomorfos si, y solo si, son iguales. Para dar definiciones en este caso particular podemos proceder de dos formas: dar las definiciones como casos particulares de las vistas en los capítulos anteriores o bien darlas en términos de ordenes parciales y luego observar la conexión. Para mantener la perspectiva histórica, lo haremos de la segunda manera.

Definición 4.1.2 *Dado un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, definimos el* ***ínfimo*** *de dos elementos a y b de P, denotado por $a \wedge b$, a un elemento c de P que verifica $c \leq a, c \leq b$ y que si d es otro elemento de P verificando esas dos desigualdades, entonces $d \leq c$. Análogamente, definimos el* ***supremo*** *de a y b, denotado $a \vee b$, como un elemento c' de P que verifice $a \leq c', b \leq c'$ y que si d' es otro elemento de P verificando esas dos desigualdades, entonces $c' \leq d'$.*

Nota 4.1.1 *En un conjunto preordenado no tiene que existir siempre el supremo o el ínfimo de dos elementos. Un conjunto parcialmente ordenado que sí verifica dicha propiedad se denomina* retículo.

Es directo verificar que el ínfimo de a y b coincide con su producto en el sentido categórico, y el supremo con su coproducto. Por supuesto, también podemos definir el ínfimo y el supremo de una colección arbitraria $\{a_i\}_{i\in I}$ de elementos de P, los cuales coinciden con el producto y el coproducto arbitrarios. Los denotamos $\bigwedge_{i\in I} a_i$ y $\bigvee_{i\in I} a_i$ respectivamente, si existen. Observamos que debido, a que los conjuntos de morfismos entre dos elementos de P tienen como máximo un elemento, los igualadores no son más que productos, pues la condición extra se hace trivial. Esto, junto con el Teorema 3.3.1 nos dice que todos los límites en un conjunto preordenado son productos, es decir, ínfimos. Dualmente, todos los colímites son supremos.

Como ya hemos mencionado, los funtores en este contexto son funciones monótonas entre conjuntos preordenados. Veamos ahora el concepto del cual los funtores adjuntos son una generalización.

Definición 4.1.3 *Una* ***conexión de Galois*** *entre dos conjuntos preordenados P y Q consiste en un par de funciones monótonas $f\colon P \to Q, g\colon Q \to P$, tales que si p es un elemento de P y q uno de Q se verifica $f(p) \leq q$ si, y solo si, $p \leq g(p)$.*

Es inmediato ver que una conexión de Galois no es más que una adjunción. De hecho, si hay una conexión de Galois entre P y Q como acabamos de describir, también se dice que f es adjunto a izquierda de g y se denota $f \dashv g$. Los teoremas 4.1.1 y 4.1.2 tienen sus versiones en este contexto.

Proposición 4.1.2 *Sean $f\colon P \to Q$ y $g\colon Q \to P$ funciones monótonas. Entonces, f es adjunto a izquieda de g si, y solo si, para todo p de P y q de Q se tiene que $p \leq g(f(p))$ y $f(g(q)) \leq q$.*

En este resultado, la implicación hacia la derecha es la que corresponde al Teorema 4.1.1, ya que las desigualdades vienen dadas por las componentes de la unidad y la counidad de la adjunción. La implicación a la izquierda corresponde al comentario hecho tras la demostración de dicho teorema. Por supuesto, podríamos demostrar esta proposición sin utilizar teoría de categorías y, de hecho, resultaría más sencillo de esta manera. La conservación de límites es, en realidad, una caracterización de las conexiones de Galois, y no solo una propiedad. La conservación de límites en este contexto quiere decir que si existe $\bigwedge_{i\in I} a_i$ entonces existe $\bigwedge_{i\in I} f(a_i)$ y este último es isomorfo a $f(\bigwedge_{i\in I} a_i)$. La conservación de colímites es análoga.

Teorema 4.1.3 *Supongamos que P y Q son conjuntos preordenados y que Q tiene todos los ínfimos y P todos los supremos. Entonces, una función monótona $g\colon Q \to P$ conserva los ínfimos si, y solo si, tiene un adjunto a izquierda. Dualmente, una función monótona $f\colon P \to Q$ conserva los supremos si, y solo si, tiene un adjunto a derecha.*

Demostración. La primera implicación es un corolario del Teorema 4.1.2. Para la segunda implicación daremos la construcción del adjunto a izquierda de g y omitiremos la comprobación de que, en efecto, forman una conexión de Galois puesto que es rutinaria. Definimos el adjunto a izquierda de g por $f(p) := \bigwedge\{q \in Q \mid p \leq g(q)\}$ para todo p en P. La otra parte es dual. □

Veamos algunos ejemplos de conexiones de Galois.

Ejemplo 4.1.3

i) *Dado un número real x, denotamos por $\lceil x \rceil$ al menor entero mayor o igual a x. Consideramos las funciones monótonas $\lceil -/3 \rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, que envía cada número real x al menor entero mayor o igual a $3x$, y $(3 \times -)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, que envía a cada entero a su triple. Es fácil demostrar que, si x es un número real e y es un entero, entonces $\lceil x/3 \rceil \leq y$ si, y solo si, $x \leq 3y$. Luego estas funciones forman una conexión de Galois. Del Teorema 4.1.3 se sigue que $\lceil -/3 \rceil$ preserva los supremos. Esta propiedad se tiene muy en cuenta, por ejemplo, en Análisis Numérico.*

ii) *Dada una aplicación $f\colon A \to B$ entre conjuntos A y B, se obtiene la aplicación antiimagen $f^{-1}\colon P(B) \to P(A)$ de los subconjuntos de B en los subconjuntos de A. Esta aplicación es monótona si consideramos como ordenes en $P(A)$ y $P(B)$ la inclusión. Es bien sabido que la antiimagen se comporta particularmente bien, es decir, que conserva las uniones y las intersecciones. Se observa fácilmente que la unión es lo mismo que el supremo en el orden considerado y que el ínfimo coincide con la intersección. Aplicando el Teorema 4.1.3, esto nos dice que f^{-1} tiene adjunto a derecha y a izquierda. De hecho, el adjunto a izquierda coincide con la aplicación imagen, lo cual tiene sentido pues la imagen sí que conserva las uniones. El adjunto a derecha de f^{-1} lo denotaremos por f_* y viene definido por*

$$f_*(A') := \{b \in B \mid a \in A' \text{ para todo } a \text{ tal que } f(a) = b\}$$

Además de las aplicaciones dentro de las matemáticas también se pueden encontrar aplicaciones fuera de ellas. El primer capítulo de [3] recibe su nombre de una nueva noción: los efectos generativos.

Definición 4.1.4 *Decimos que una función monótona $f\colon A \to B$ tiene un **efecto generativo**, si existen $a, b \in A$ tales que $f(a) \vee f(b) \not\cong f(a \vee b)$.*

El ejemplo principal es sobre el seguimiento de contagios de una enfermedad. El problema se modeliza de la siguiente manera. Se considera X el conjunto ciudadanos de una localidad. Suponemos que hay una persona (paciente 0) infectada de una enfermedad infecciosa, por ejemplo COVID-19, y queremos estudiar si otra persona particular, que podemos llamar Andrés, ha podido ser contagiada. Se considera sobre el conjunto de particiones de X, $\mathscr{P}$, el orden $P \leq Q$ si xPy implica xQy. También consideramos sobre el conjunto de booleanos lógicos $B = \{true, false\}$ el orden $false \leq true$. Ahora, definimos la función monótona $f\colon \mathscr{P} \to B$ por $f(P) = true$ si el paciente 0 y Andrés están en el mismo elemento de la partición P y $f(P) = false$ si no lo están. Lo que representa f es si nuestro paciente 0 y Andrés tienen contacto en un lugar determinado o no. La partición P representa los contactos que ha habido en un lugar determinado y en un periodo de tiempo dado. El problema es que puede darse el caso de que el paciente 0 y Andrés no hayan tenido contacto en ningún lugar pero sin embargo el paciente 0 haya infectado en una ocasión P a otra persona que sí que ha tenido contacto con Andrés en otra ocasión Q. La operación que modela este fenómeno es precisamente el ínfimo de las particiones y lo que acabamos de intuir es $f(P \vee Q) = true$ mientras que $f(P) \vee f(Q) = false$. Esto es un claro ejemplo de efecto generativo.

Sin embargo, notamos que si encontramos un adjunto a derecha de f entonces nos aseguramos de que no puede tener efectos generativos. Tal función no puede existir en el caso que acabamos de describir pero puede que sí exista en otros casos. Más información sobre efectos generativos puede encontrarse en [1].

Otro concepto que aparece en algunas aplicaciones es el de operador clausura.

Definición 4.1.5 *Un **operador clausura** en un conjunto preordenado P es una función monótona $j\colon P \to P$ de manera que para todo p de P, $p \leq j(p)$ y $j(j(p)) \cong j(p)$.*

Existen operadores clausura en campos distintos de las matemáticas. Por ejemplo, en Computación es habitual reescribir ciertas expresiones con otras que suelen ser más sencillas. Las propiedades de operador clausura son importantes para el estudio de la semántica en programas, como podemos ver en [10]. En Lógica, los operadores clausura también juegan un papel importante y reciben el nombre de operadores modales.

4.2. Extensiones de Kan

En esta sección, presentaremos un nuevo concepto junto con una serie de resultados interesantes. Estas ideas no solo son relevantes por sí mismas en Teoría de Categorías, sino que también nos serán de gran utilidad en la siguiente sección, donde exploraremos su aplicación en el contexto de las bases de datos.

Definición 4.2.1 *Sean $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $X\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ funtores. Una **extension a izquierda de Kan** de X a lo largo de F, si existe, consiste en un par (L, α) junto con $L\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ un funtor y $\alpha\colon X \Rightarrow L \circ F$ una transformación natural verificando la* *propiedad universal siguiente: dado otro par* $(L' \colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}, \alpha' \colon X \Rightarrow L' \circ F)$*, existe una única transformación natural* $\gamma \colon L \to L'$ *tal que* $(\gamma F) \circ \alpha = \alpha'$ *(donde* γF *está definida como en la Nota 1.3.3).*

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{B} \arrow[d, "L"] \\ \mathscr{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "X"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Uparrow\alpha"] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Se puede comprobar que si existe extensión de Kan a izquierda, esta es única salvo isomorfismo natural. En estas condiciones, se denota $L = Lan_F X$. Veamos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.1 *Sean* $X \colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$*,* $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *funtores, donde* $\mathscr{A}$ *es una categoría pequeña y* $\mathscr{C}$ *es una categoría cocompleta. Entonces, existe la extensión a izquierda de Kan de* X *a lo largo de* F*.*

Demostración. Daremos una idea de la prueba, omitiendo algunas comprobaciones para no extendernos en exceso. Fijamos un objeto B de $\mathscr{B}$ y consideramos la categoría comma $(F \downarrow B)$. Primero, observamos que al ser $\mathscr{A}$ pequeña y estamos considerando conjuntos de morfismos, la categoría $(F \downarrow B)$ también es pequeña. Consideramos el funtor proyección $\pi^B \colon (F \downarrow B) \to \mathscr{A}$ definido en objetos por $\pi^B(\langle A, u\rangle) := A$ y en morfismos por $\pi^B(f) = f$. Se define en objetos

$$L(B) := colim((F \downarrow B) \xrightarrow{\pi^B} \mathscr{A} \xrightarrow{X} \mathscr{C}) = colim(X \circ \pi^B)$$

que existe pues $\mathscr{C}$ es cocompleta. Queremos ahora definir L en morfismos. Denotamos por $\lambda^B \colon X \circ \pi^B \Rightarrow \Delta(L(B))$ el cocono universal del colímite $L(B)$, es decir, la transformación natural que da lugar a las coproyecciones. Sea $f \colon B \to B'$ un morfismo. Este morfismo nos induce el funtor $f_* \colon (F \downarrow B) \to (F \downarrow B')$ definido en objetos por $f_*(\langle A, u\rangle) := (\langle A, f \circ u\rangle)$ y en morfismos como la identidad. Es claro que $\pi^{B'} \circ f_* = \pi^B$. Esto nos permite aplicar la propiedad universal del colímite $L(B)$ en el siguiente diagrama, afirmando que existe un único $\phi \colon L(B) \to L(B')$ que lo hace conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \circ \pi^B \arrow[r, "\lambda^B"] \arrow[dr, "(\lambda^{B'})*(f_*)"'] & \Delta(L(B)) \arrow[d, dotted, "\Delta(\phi)"] \\ & \Delta(L(B')) \end{tikzcd}$$

Definimos $L(f) := \phi$. Se puede comprobar que L es un funtor gracias a la propiedad universal de ϕ. Solo resta definir la transformación natural $\alpha \colon X \Rightarrow L \circ F$. Dado $A \in \mathscr{A}$, definimos $\alpha_A := (\lambda^{F(A)})_{\langle A, 1_{F(A)}\rangle}$. Para todo $v \colon A \to A'$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "X(v)"'] & L(F(A)) \arrow[d, "L(F(v))"] \\ X(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & L(F(A')) \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, $L(F(v)) \circ \alpha_A = \lambda^{F(A)} * F(v)_* = \lambda^{F(A')}_{\langle A, F(v)\rangle}$ por definición de L en morfismos, lo cual es igual a $\alpha_{A'} \circ X(v)$ gracias a que $\lambda^{F(A')}$ es un cocono. Además, si $(\tilde{L}, \tilde{\alpha})$ es otro par con $\tilde{L}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ y $\tilde{\alpha}\colon X \Rightarrow \tilde{L} \circ F$, podemos construir la tranformación natural $\gamma\colon L \to \tilde{L}$ como sigue. Consideramos para todo $B \in \mathscr{B}$ el cocono $\delta_B\colon X \circ \pi^B \Rightarrow \Delta(\tilde{L}(B))$ definido por $\delta^B_{\langle A,u\rangle} := \tilde{L}(u) \circ \tilde{\alpha}_A$ para todo $\langle A, u\colon F(A) \to B\rangle$. Esto es un cocono gracias a la naturalidad de $\tilde{\alpha}$. Definimos $\gamma_B\colon L(B) \to \tilde{L}(B)$ como el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \circ \pi^B \arrow[r, "\lambda^B"] \arrow[dr, "\delta^B"'] & \Delta(L(B)) \arrow[d, dotted, "\Delta(\gamma_B)"] \\ & \Delta(L(B')) \end{tikzcd}$$

que existe por la universalidad de λ^B. De esta conmutatividad y de las definiciones de α y δ, sigue que $\gamma_{F(A)} \circ \alpha_A = \tilde{\alpha}_A$ para todo A. Además, no es difícil comprobar que

$$(\tilde{L}(g) \circ \gamma_B) \circ \lambda^B_{\langle A,u\rangle} = \tilde{L}(g \circ u) \circ \tilde{\alpha}_A = (\gamma_{B'} \circ L(B')) \circ \lambda^B_{\langle A,u\rangle}$$

para todo morfismo $g\colon B \to B'$ en $\mathscr{B}$ y todo $\langle A, u\rangle \in (F \downarrow B)$. Esto implica que $\tilde{L}(g) \circ \gamma_B = \gamma_{B'} \circ L(B')$ porque $L(B)$ es un colímite con proyecciones λ^B. Luego δ es una transformación natural. Finalmente, la unicidad de γ_B en el último diagrama nos garantiza la unicidad de γ. $\square$

Lo interesante de las extensiones de Kan es que tanto los colímites como los funtores adjuntos a izquierda se pueden ver como extensiones de Kan a izquierda, como afirman las siguientes proposiciones cuyas demostraciones son sencillas y, por tanto, se omiten. Para más detalles referimos al lector a [7]:

Proposición 4.2.1 *Sea $X\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ un funtor con $\mathscr{A}$ una categoría pequeña. Denotamos por $\mathbf{1}$ a la categoría discreta de un solo objeto, y sea $F\colon \mathscr{A} \to \mathbf{1}$ el único funtor de $\mathscr{A}$ en $\mathbf{1}$. Entonces, X tiene colímite si, y solo si, existe la extensión de Kan a izquierda de X a lo largo de F.*

Proposición 4.2.2 *Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Entonces, F es adjunto a izquierda si, y solo si, $1_{\mathscr{C}}$ tiene extensión de Kan a izquierda a lo largo de F.*

Tal y como hemos definido las extensiones de Kan a izquierda podríamos haber definido las **extensiones de Kan a derecha**, que serían pares $(R\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}, \beta\colon R \circ F \Rightarrow X)$ con la correspondiente propiedad universal.

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{B} \arrow[d, "R"] \\ \mathscr{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "X"'] & \mathscr{C} \arrow[ul, phantom, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd}$$

Denotamos $R = Ran_F X$ y todos los resultados anteriores tienen su parte dual con las extensiones a derecha, sustituyendo los colímites por límites y los adjuntos a izquierda por adjuntos a derecha.

Ahora veremos la definición y el resultado que aplicaremos en el siguiente capítulo.

Definición 4.2.2 *Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Dado un funtor $I\colon \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$, podemos obtener el funtor $I \circ F\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$. Además, dada una transformación natural $\alpha\colon I \Rightarrow J$, podemos definir la transformación natural $\alpha_F\colon I \circ F \Rightarrow J \circ F$ por $(\alpha_F)_C = \alpha_{F(C)}$ para todo objeto C de $\mathscr{C}$. Es directo comprobar que α_F es natural. Entonces, el* ***pullback*** *a lo largo de F es el funtor $\Delta_F\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ definido en objetos por $\Delta_F(I) := I \circ F$ y en morfismos por $\Delta_F(\alpha) := \alpha_F$.*

Este pullback no tiene relación con el definido en el Capítulo 3 como ejemplo de límite. Antes de ver el resultado que nos interesa veremos un resultado previo.

Proposición 4.2.3 *Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña, entonces la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ es completa y cocompleta.*

Demostración. Daremos solo una idea de la prueba. Dado un diagrama $A\colon I \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$, podemos definir un diagrama en $\mathbf{Set}$, $\hat{A}(C)\colon I \to \mathbf{Set}$ de manera natural. Entonces, el colímite de A, *colim* $A\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ viene definido en objetos por

$$(colim\ A)(C) := colim\ \hat{A}(C)$$

y en morfismos de forma natural. La demostración es análoga para el límite. □

Finalmente, el resultado que utilizaremos es el siguiente:

Teorema 4.2.2 *Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor entre categorías pequeñas. Entonces, el funtor pullback a lo largo de F, $\Delta_F\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$, tiene un adjunto a derecha $\Pi_F\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ y un adjunto a izquierda $\Sigma_F\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$.*

Demostración. Para probar que Δ_F es adjunto a izquierda podemos hacer uso de la Proposición 4.2.2. Entonces, basta probar que $1_{\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}}$ tiene extensión de Kan a izquierda a lo largo de $\Delta_F\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$. Pero la categoría $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ es pequeña y cocompleta, gracias a que $\mathscr{D}$ es pequeña y a la proposición anterior. Podemos aplicar el Teorema 4.2.1 para concluir el resultado. Además, Δ_F es adjunto a derecha de manera dual. □

4.3. Aplicaciones. Bases de datos y migraciones

Algunas aplicaciones de la Teoría de Categorías fuera de las matemáticas han sido desarrolladas en las últimas décadas. En [3], los autores hacen una buena recopilación de estas aplicaciones. La mayor fuente de ejemplos en este libro hace uso de un tipo especial de categorías, llamadas categorías monoidales, que se usan para modelizar una gran variedad de diagramas: desde esquemas de procesos industriales hasta circuitos electrónicos. Otra aplicación importante es la programación. De hecho, es fácil encontrar en internet cursos de Teoría de Categorías orientados a programadores y hay lenguajes de programación funcional, como *Haskell*, que basan su estructura en la Teoría de Categorías. Todo lo relacionado con este tema se puede encontrar en [9]. Para nuestro propósito de introducir alguna aplicación fuera de las matemáticas en la memoria haremos un pequeño recorrido por las bases y migraciones de datos. Este ejemplo se puede encontrar en el tercer capítulo de [3] y más desarrollado a lo largo de [14], también de David Spivak.

Las bases de datos son una forma de almacenar información en tablas y son imprescindibles para cualquiera que tenga que trabajar con una gran cantidad de datos. Por ejemplo, si queremos almacenar los datos de los trabajadores de una empresa lo podríamos hacer con las siguientes tablas:

Empleado	Nombre	TrabajaEn	Manager
1	Alan	101	2
2	Ruth	101	2
3	Kris	102	3

Departamento	NombreDep	Secretario
101	Ventas	1
102	TIC	3

La primera columna de cada una de las tablas se denomina *columna ID* y no puede tener elementos repetidos. Estas dos tablas forman una pequeña base de datos. Las diferentes columnas se relacionan entres si a través de un diagrama.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[loop left, "Manager"] \arrow[rr, shift left, "TrabajaEn"] \arrow[dr, "Nombre"'] & & D \arrow[ll, shift left, "Secretario"] \arrow[dl, "NombreDep"] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}$$

Como podemos ver, las columnas ID representan objetos del grafo, mientras que el resto de columnas son representadas por flechas. El objeto $\bullet$ representa el tipo *string*, es decir, una cadena de texto. Además, es normal que se tengan relaciones entre las flechas. Por ejemplo, puede ser que el secretario de un departamento siempre tenga que trabajar en ese departamento o que un empleado y su manager tengan que trabajar en el mismo departamento. En lenguaje de aplicaciones, estas dos relaciones las podemos escribir como $TrabajaEn \circ Secretario = 1_E$ y $TrabajaEn \circ Manager = TrabajaEn$. Podemos llamar a esta colección de relaciones entre flechas por R. Por tanto, podemos modelizar la base de datos anterior como la categoría generada por el grafo mostrado y con relaciones R, en el sentido de la Definición 2.1.10. Observamos que esta categoría solo tiene la información de la estructura externa de la base de datos. Sin embargo, es claro que la forma de organizar la información en bases de datos no es única. Este hecho puede suponer un problema. Por ejemplo, se puede dar el caso de que una empresa multinacional guarde sus datos de forma distinta en los distintos países donde opera en función a estándares o legislaciones de dichos países. También puede ocurrir que dos empresas que organizan la información de forma distinta se quieran unir. Por esto, es crucial saber cómo pasar de una base de datos a otra y esta no suele ser tarea fácil en el ámbito empresarial. Este proceso, llamado *migración de datos*, está descrito por un funtor y la Teoría de Categorías nos da un método para saber cuándo una migración está bien hecha.

Veamos un poco mejor a qué nos referimos. Primero, observamos que un conjunto es esencialmente lo mismo que una tabla que solo tiene la columna ID. Además, una función se corresponde a una tabla con dos columnas. Consideramos la categoría $\mathscr{C}$ generada por el grafo de una base de datos y con las relaciones propias de esta. Lo que queremos expresar es que a cada objeto de $\mathscr{C}$, es decir, a cada columna ID se le puede asignar un conjunto y a cada morfismo de $\mathscr{C}$, esto es a cada una de las demás columnas, una aplicación. De hecho, esto nos define un funtor $I\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$. El funtor I es lo que se denomina una $\mathscr{C}$-instancia y definimos la categoría $\mathscr{C}$-Inst como la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$. Observamos que la categoría $\mathscr{C}$ solo tiene información de la estructura externa de la base de datos. Una $\mathscr{C}$-instancia, sin embargo, sí que almacena toda la información interna de nuestra base de datos.

Ahora, supongamos que tenemos dos bases de datos C y D con categorías asociadas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ y queremos migrar los datos de D a C. Como las $\mathscr{C}$-instancias son las construcciones que tienen toda la información de la base de datos, lo único que necesitamos es un funtor $\Delta\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$. Sin embargo, dar un funtor entre estas categorías manualmente puede ser un trabajo inabarcable. En lugar de eso, podríamos dar un funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, que son categorías finitas mucho más asequibles. Ya hemos introducido la forma de pasar de F a un funtor $\Delta_F\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{D}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ de una manera natural, con la Definición 4.2.2. Si conseguimos dar el funtor F, el funtor Δ_F ya nos da una forma de migrar datos de D en C. No obstante, tenemos más que decir sobre este tema, y es que, en este caso, el funtor Δ_F es adjunto a derecha y a izquierda. Esto es consecuencia directa del Teorema 4.2.2, pues F es un funtor entre categorías pequeñas. Este hecho no solo nos dice que esta migración se comporta bien en cierto sentido (que sería el correspondiente a la conservación de límites y colímites), sino que la demostración de dicho teorema nos da la construcción de dos migraciones de datos distintas de la base de datos C en D (es decir, en sentido contrario), que vienen dadas por los funtores adjuntos Π_F y Σ_F. Si el lector desea ver un ejemplo de cómo se vería este método en un caso práctico, puede verlo en la subseción 5.4.1. de [14].

4.4. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos visto una gran cantidad de conceptos que requieren una amplia capacidad de abstracción. Sin embargo, estos esfuerzos han dado sus frutos. La Teoría de Categorías provee al que la estudia con una visión más amplia de las matemáticas pues permite relacionar conceptos de áreas distintas de manera precisa, como hemos ilustrado mediante los ejemplos dados. Además, la generalidad de esta teoría permite su aplicación a prácticamente cualquier área de las matemáticas, a la Lógica o a la Computación y la facilidad de relacionar categorías con grafos también nos proporciona una fuente de aplicaciones. En definitiva, considero que este estudio se ha demostrado bastante enriquecedor.

Hay tres formas principales de continuar con el estudio en Teoría de Categorías. La primera es seguir trabajando con categorías en abstracto. La segunda consiste en trabajar otras áreas de las matemáticas con perspectiva categórica, ya sean campos con mayor relación histórica, como la Topología Algebraica o el Álgebra Homológica, o en otros menos explorados. Finalmente, está la posibilidad de continuar desarrollando aplicaciones más prácticas, nicho que está en auge y al cual nos invita directamente [3]. Cualquiera de estás posibilidades es interesante para alguien que quiera continuar con Teoría de Categorías.

Bibliografía

[1] Adam, E. *Systems, generativity and interactional effects*. 2017. PhD Thesis, MIT.

[2] Boothby, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. 1975. Academic Press.

[3] Fong, B. and Spivak, D. *An Invitation to Applied Category Theory. Seven Sketches in Compositionality*. 2019. Cambridge University Press.

[4] Kelley, J. *General Topology*. 1955. Springer.

[5] Knapp, A. *Basic Algebra*. 2006. Birkhäuser Boston.

[6] Leinster, T. *Basic Category Theory*. 2014. Cambridge University Press.

[7] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician*. Second Edition. 1998. Springer.

[8] Massey, W. *A basic course in Algebraic Topology*. 1991. Springer.

[9] Milewski, B. *Category Theory for Programmers*. 2018. Disponible online: https://github.com/hmemcpy/milewski-ctfp-pdf

[10] Nielson, F., Nielson, H. and Hankin, C. *Principles of Program Analysis*. 1999. Springer.

[11] Richter, B. *From Categories to Homotopy Theory*. 2020. Cambridge University Press.

[12] Riehl, E. *Category Theory in Context*. 2016. Cambridge University Press.

[13] Rotman, J. *An Introduction to Algebraic Topology*. 1988. Springer.

[14] Spivak, D. *Category Theory for Scientist*. 2014. The MIT Press.

An introduction to Category Theory and its applications

Javier Díaz Cabrera
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101315614@ull.edu.es

Abstract

CATEGORY THEORY was introduced in the mid-20th century by mathematicians Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane as a tool to study Algebraic Topology. In summary, Category Theory studies different types of spaces in terms of the relationships between them, using the so-called universal properties and disregarding their internal structure. In this undergraduate thesis, we study the fundamental notions of this theory and explore some classic results. This study is complemented with numerous examples coming from various areas of mathematics and with an introduction to applications outside of this field.

1. Categories, functors and natural transformations

Definition A *category* $\mathscr{A}$ consists of:

- A class $ob(\mathscr{A})$ whose elements are called *objects*.
- For each pair of objects A, B from $ob(\mathscr{A})$, a set $\mathscr{A}(A,B)$ whose elements are called *morphisms* from A to B.
- For each A, B and C from $ob(\mathscr{A})$, a mapping

$$\begin{array}{rccc} \circ\colon & \mathscr{A}(A,B)\times\mathscr{A}(B,C) & \to & \mathscr{A}(A,C) \\ & (f,g) & \mapsto & g\circ f \end{array}$$

called *composition* verifying:

I. Existence of identity morphisms: For each A from $\mathscr{A}$, exists 1_A a morphism from A to A so that for every object B from $\mathscr{A}$, and for every f morphism from A to B, we have $f\circ 1_A = f = 1_B\circ f$.

II. Associativity: If A, B, C and D are objects from $\mathscr{A}$, $f\in\mathscr{A}(A,B), g\in\mathscr{A}(B,C)$ y $h\in\mathscr{A}(C,D)$ are morphisms, we have that $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

Examples of categories are sets with maps, topological spaces with continuous functions or groups with group homomorphisms.

Once this notion is defined, morphisms between categories, called *functors* are defined. A functor $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ consists of a law assigning to each object of $\mathscr{A}$ an object of $\mathscr{B}$ and, for each pair of objects $A, B\in ob(\mathscr{A})$, a mapping $F\colon\mathscr{A}(A,B)\to\mathscr{B}(F(A),F(B))$, preserving composition and identities.

After defining functors, we define a kind of morphism between them known as *natural transformations*.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathscr{B} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Figure 1: *Representation of a natural transformation* α.

2. Some categorical constructions

AFTER DEFINING the fundamental notions, we give several constructions of categories such as *comma categories*, the *free category generated by a graph* or *quotient categories*. We also introduce the notion of *universal arrow* and prove one of the most important theorems on Category Theory: the Yoneda Lemma.

Theorem (Yoneda Lemma) If $K\colon\mathscr{A}\to\mathbf{Set}$ is a functor and R is an object from $\mathscr{A}$, then

$$Nat(Hom(R,-),K)\cong K(R)$$

naturally on K and R.

3. Limits and colimits

THE LIMIT of a diagram $D\colon I\to\mathscr{A}$ consists of an object from $\mathscr{A}$ and a collection of morphisms verifying certain universal property. Mathematical constructions such as the Cartesian product of sets, the kernel of a group homomorphism or the infimum of a set of real numbers are all particular cases of limits.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{f}"] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\ & L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(u)"'] & & D(j) \end{tikzcd}$$

Figure 2: *Universal property of the limit of a diagram* D.

The notion of colimit is dual to the notion of limit. Examples of colimits are the disjoint union of sets, the direct sum of vector spaces or the cokernel of a linear map.

4. Adjoint functors

AN AJUNCTION between functors $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}, G\colon\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ is a law that assigns to each pair $A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}$ a bijection

$$\phi_{(A,B)}\colon\mathscr{B}(F(A),B)\to\mathscr{A}(A,G(B))$$

that is natural on A an B. We explore this notion, giving examples and proving some results like the *Right Adjoints Preserve Limits Theorem*. We also see a particular case of adjunctions in more detail: the *Galois connections*.

Finally, we explore a new concept: the *Kan extension*. This notion has a close relation to adjoint functors and is used in the final part.

5. Applications

AT THE END, we provide a brief introduction to applications outside of mathematics. In particular, we find a way to migrate data between two different databases using Category Theory.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[loop left, "Manager"] \arrow[r, shift left, "TrabajaEn"] \arrow[dr, bend right, "Nombre"'] & D \arrow[l, shift left, "Secretario"] \arrow[d, bend left, "NombreDep"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

Figure 3: *Diagram of a sample database*

References

[1] Fong, B. and Spivak, D. *An Invitation to Applied Category Theory. Seven Sketches in Compositionality*. Cambridge University Press. 2019.

[2] Leinster, T. *Basic Category Theory.* Cambridge University Press. 2014.

[3] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician* 2nd edition. Springer. 1998.

[4] Riehl, E. *Category Theory in Context.* Cambridge University Press. 2016.