Curso 1994/95

HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

ROSA MARÍA LORENZO ALEGRÍA

Valoración de opciones: una contrastación del modelo de difusión con saltos de Merton

Director

FRANCISCO PÉREZ CALATAYUD

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS

Serie Tesis Doctorales

AGRADECIMIENTOS.

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor y director de esta investigación Francisco Pérez Calatayud. Además de supervisar en todo momento este trabajo, me ha permitido iniciarme en el conocimiento de los nuevos instrumentos financieros. Su visión analítica y más formal de la teoría económica, junto con sus aspectos más intuitivos y prácticos, me ha servido en todo momento para profundizar en el estudio del contenido que se desarrolla en esta memoria. Sin su apoyo y ánimo constantes no hubiera podido llevar a buen término este trabajo.

Quiero destacar también la ayuda que he recibido de mis compañeros del Área de Fundamentos del Análisis Económico, sustituyéndome en las tareas docentes en diversas ocasiones. Estoy en deuda con ellos por la ayuda que me han ofrecido siempre. En especial, quiero hacer mención a los profesores Manuel Navarro Ibáñez, por sus comentarios, así como por su apoyo continuo desde que entré en la Universidad de La Laguna, y a Juan Acosta Ballesteros, por su asistencia en aspectos informáticos.

Agradezco los comentarios y sugerencias que he recibido de Analistas Financieros Internacionales, fundamentalmente de Amadeo Reynés, Emilio Ontiveros Baeza, y en especial, de Francisco J. Valero, que me permitió enmarcar el objeto de estudio de este trabajo, así como cuestionar la metodología y resultados que se exponen en el mismo. Les agradezco también la acogida que me han dado en Madrid, en diferentes ocasiones, resolviéndome cuantas dudas me surgían y suministrándome toda la bibliografía y datos de que disponían.

Agradezco también la ayuda recibida de los compañeros y profesores José Ignacio González Gómez y Néstor Bruno Pérez, ambos del Departamento de Economía Financiera y Contabilidad, por su asesoramiento a nivel informático, resolviéndome cuantas dificultades se me presentaron en el manejo de los programas.

También quiero agradecer a los compañeros de la Subárea de Estadística y Econometría del Departamento de Economía Aplicada y a la profesora de Matemáticas para Economistas Concepción González Concepción, quienes siempre han estado dispuestos a aclarar todas aquellas dudas referidas a los conceptos estadísticos y matemáticos que exigía esta investigación.

Como un capítulo aparte, referido al suministro de los datos necesarios para la realización de los aspectos empíricos de este trabajo, quiero destacar en especial la colaboración inestimable de Mª José Torino, Directora Comercial de MEFFSA Renta Variable, de Arturo Rojas Parada, de Analistas Financieros Internacionales y de Jorge Yzaguirre Scharfhausen de la Sociedad de Bolsas. A todos ellos doy las gracias.

Por último, agradezco la comprensión y el ánimo que he recibido de mi esposo Jose Luis Rodríguez Cabrera.

...La máxima "Si debes predecir, predice a menudo" no es ni un chiste ni una confesión de impotencia. Es un reconocimiento de la primacía del hecho en bruto sobre la bella teoría. La parte del futuro que no puede relacionare con el pasado del presente es precisamente lo que la ciencia no puede aspirar a capturar...

Paul A. Samuelson

INDICE GENERAL

CAPÍTULO 0: INTRODUCCIÓN.

La construcción de modelos que permitan predecir el precio de las opciones ha sido una tarea que ha preocupado a matemáticos y economistas desde principios del presente siglo.

Las técnicas tradicionales basadas en actualizar los flujos futuros con una tasa de descuento no sirven para valorar ni las opciones, ni instrumentos financieros que contengan opciones (tales como obligaciones redimibles o rescatables, obligaciones y bonos convertibles, derechos de suscripción, etc). Ello se debe a las características propias de estos contratos. Así, la posibilidad de ejercitar o no, y por tanto el derecho y no la obligación de realizar el contrato al que se refiere la opción, no queda recogido ni valorado en las técnicas tradicionales basadas en actualizar los flujos futuros con una tasa de descuento (VAN, TIR).

El modelo de Black-Scholes (1973)[B-S en adelante] tiene en cuenta estos aspectos, resolviendo el problema de valoración de activos derivados. Este modelo ha constituido una aportación fundamental en la Economía Financiera, a la altura de modelos tan aceptados como el modelo de valoración de activos de capital (CAPM). El modelo de valoración de opciones de B-S significa una innovación realizada por economistas y utilizada hoy en día por los operadores en los propios mercados. Por el contrario, en la mayoría de las ocasiones los economistas únicamente han contribuído a difundir las innovaciones tecnológicas de otros (Faulhaber y Baumol, 1988).

Aunque el modelo más aceptado dentro de la problemática de la valoración de activos derivados es el que proponen Black y Scholes (1973), su validez empírica no es, en ningún modo, absoluta, ya que se han detectado determinados sesgos a la hora de su contrastación. En concreto, se ha observado que el modelo infravalora opciones que están sin dinero (out-of-the-money) y próximas a su vencimiento. Su aceptación se explica, en gran medida, por su sencillez tanto formal como práctica: su utilización únicamente exige la estimación de un parámetro -la volatilidad de la rentabilidad del subyacente de la opción -, mientras que las demás variables (precio del subyacente, precio de ejercicio de la opción, tipo de interés y tiempo hasta el vencimiento) se pueden observar directamente.
No obstante, en torno a este modelo inicial de B-S se han ido añadiendo, relajando o extendiendo supuestos que, con el objetivo último de mejorar la

predicción y recoger todos los posibles activos y sus modalidades en la práctica, han engrosado una extensa y compleja literatura, que hace difícil su análisis y comprensión. Entre esas extensiones se encuentran la introducción de tipos de interés variables en el tiempo, la consideración de volatilidades estocásticas y la modificación del proceso que describe la dinámica de la rentabilidad del subyacente.

Además, algunas de esas extensiones o modelos no se han contrastado empíricamente. De esa manera no se ha comprobado si aquellas mejoran la predición del valor de estos instrumentos financieros, sirviendo entonces como herramientas prácticas para los operadores en estos mercados.

La importancia del supuesto que se establezca para describir la rentabilidad de un activo se pone de manifiesto en Cox y Ross (1976, pp. 154) quienes afirmaron que "el problema que plantea la valoración de opciones es realmente equivalente al problema de determinar la distribución del activo subyacente de la opción, cuyos movimientos están gobernados por un proceso estocástico determinado. Esto establece una importante conexión entre la problemática de la valoración de opciones y los fundamentos de los procesos estocásticos".

El proceso estocástico que mayor tratamiento teórico y empírico ha recibido es el proceso de difusión lognormal, constituyendo el supuesto básico del modelo de B-S. Bajo este proceso, la rentabilidad del activo subyacente tiene una trayectoria constante, que se recogen en la tendencia, con pequeñas modificaciones en intervalos de tiempo relativamente cortos, que se modelizan por un proceso de Wiener.

Como un proceso alternativo al clásico lognormal que suponen B-S, en este trabajo de investigación se desarrolla el proceso de difusión con saltos, supuesto básico del modelo de Merton (1976). En éste se obtiene una solución para valorar opciones, utilizando dicho proceso.

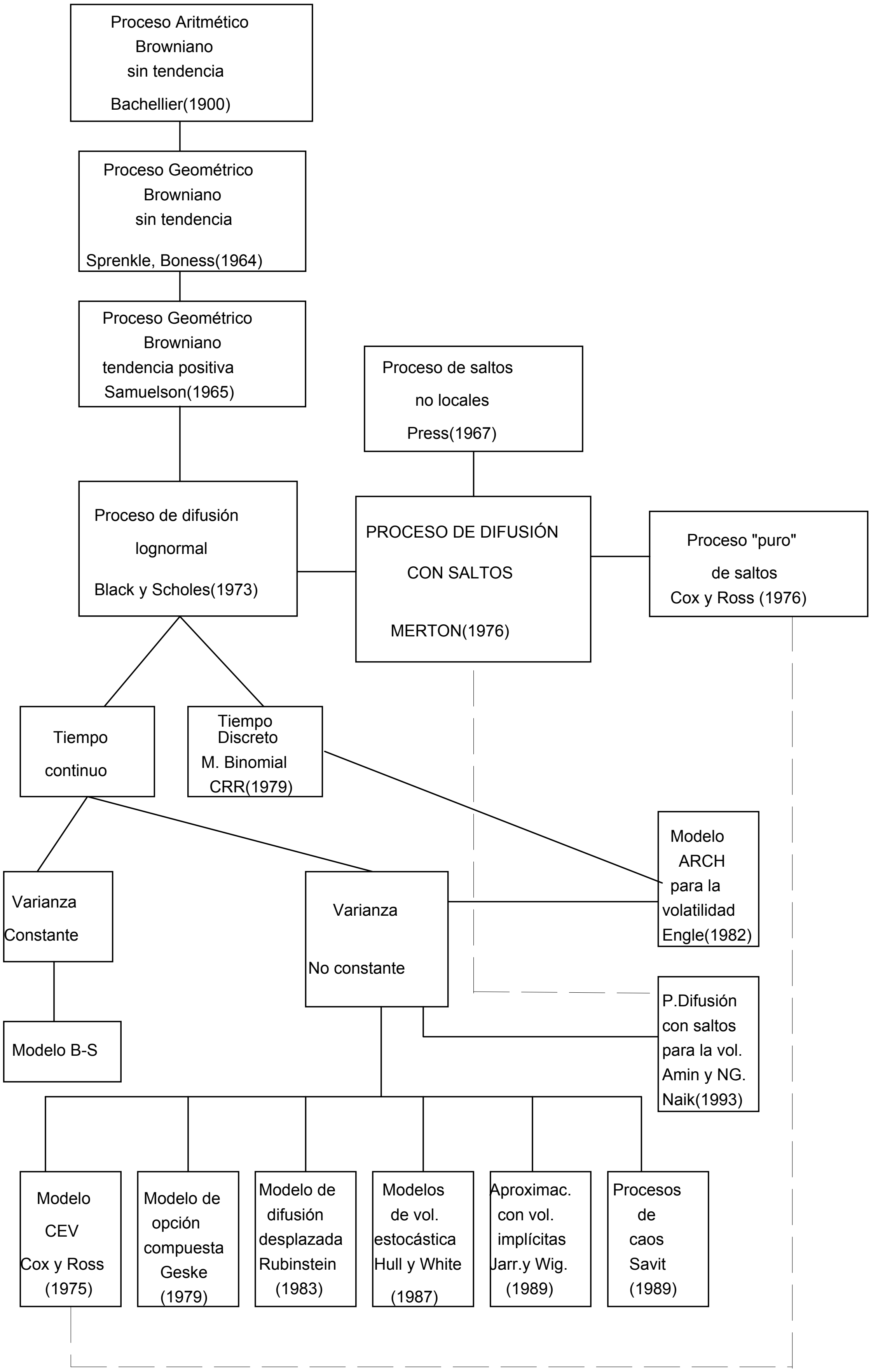
El desarrollo del modelo de Merton exige obligatoriamente un conocimiento extenso del proceso de difusión con saltos. En síntesis, este tipo de proceso implica la posibilidad de que la rentabilidad de un título experimente, de vez en cuando, modificaciones sustanciales, seguidas de períodos de reducida variación. Analíticamente, la tasa de variación de los precios del título se compone de dos términos: el correspondiente a variaciones reducidas se modeliza como un proceso de difusión, similar a B-S, mientras que el término que describe esas modificaciones importantes, denominadas como saltos, se representa mediante un proceso de Poisson. Esta dinámica parece más "real", intuitiva y sugerente que aquella otra que establece la posibilidad de sólo pequeños cambios en períodos de tiempo relativamente cortos, como se hace con el proceso clásico de difusión.

No obstante, esta mayor intuición no se ha visto acompañada de un importante desarrollo teórico y/o tratamiento empírico. Este trabajo intenta suplir esta laguna extendiéndose tanto en los aspectos más formales y metodológicos del modelo, como en su contrastación empírica.

Un primer paso en el conocimiento del proceso de difusión con saltos de Merton empieza por fijar el marco teórico en el que se encuadra. Ello permite estudiar tanto las relaciones, como las diferencias respecto a las demás propuestas sobre la dinámica de la rentabilidad de un título que se han hecho en la literatura financiera. De hecho, el capítulo 1 se centra en estos aspectos, que se resumen en el esquema presentado en la página siguiente. El proceso de difusión con saltos se relaciona, fundamentalmente, con los dos más próximos: por un lado, el proceso denominado "puro" de saltos, en el que todas las variaciones de la rentabilidad del título se consideran saltos, y, por otro lado, el proceso de difusión lognormal, en el que no hay saltos y las variaciones en intervalos de tiempo cortos son de escasa importancia. Este último proceso se relaciona, a su vez, con procesos anteriores, aquelloos que significaron los primeros intentos de modelizar la rentabilidad de un título.

Dentro de este marco, se hace una clasificación fundamental en torno al supuesto elegido para la volatilidad del activo subyacente, es decir, si es constante o si, por el contrario, es variable, en cuyo caso se abre un amplio abanico de modelizaciones, que se abordan en el capítulo 2. En un primer bloque se sitúan los modelos de varianza no constante, pero con un comportamiento definido y en un segundo bloque están los modelos de varianza no constante, pero estocástica, es decir, con un comportamiento totalmente aleatorio.

RELACIONES ENTRE EL PROCESO DE DIFUSIÓN CON SALTOS Y OTROS PROCESOS



Dada la importancia de la volatilidad en la determinación del precio de las opciones, se hace una revisión, tanto de los diferentes modelos que consideran la volatilidad como estocástica, como de los distintos procedimientos que se han propuesto para su estimación.

Después de realizada la revisión tanto de las diferentes propuestas para valorar opciones, como de los diversos modelos que consideran un comportamiento variable para la volatilidad, la presente investigación se centra en el modelo de Merton (1976), al que se dedican los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se desarrolla a nivel teórico el modelo de difusión y saltos, propuesto por Merton (1976). Igualmente, se presentan las aportaciones y estudios posteriores que se han planteado a partir del modelo inicial.

A diferencia del modelo de B-S, en el que sólo hay que estimar un parámetro (la volatilidad), la contrastación del modelo de Merton exige la estimación de cuatro parámetros, en especial, el parámetro λ, que recoge la frecuencia de saltos por unidad de tiempo. Los diferentes procedimientos de estimación se han utilizado, también se abordan en el capítulo 3, proponiéndose el método de los cumulantes, como un procedimiento de estimación sencillo y alternativo al tradicional de máxima verosimilitud, mucho más complicado. Además este método permitiría su implementación a nivel informático, para un fácil tratamiento por parte de los operadores en estos mercados.

El modelo de difusión con saltos de Merton, haciendo uso de este método de estimación, se convierte en un firme y válido contrincante del modelo clásico B-S, para la predicción del valor de las opciones.

En el capítulo 4 se realiza el contraste empírico del modelo de difusión y saltos de Merton (1976) en el reciente mercado español de opciones sobre acciones (MEFFSA Renta Variable) y con los datos del contrato más negociado de 1993, referente a opciones "call" sobre acciones de Telefónica. Las muestras utilizadas fueron seis, correspondientes a dos precios de ejercicio para los tres vencimientos considerados (septiembre y diciembre de 1993 y marzo de 1994).

No obstante, para poder llevar a cabo la contrastación del modelo de Merton se hace preciso comprobar en primer lugar si efectivamente se cumplen sus supuestos básicos. Ello exige, por una parte, que los saltos observados en la serie de rentabilidades del activo sean específicos a la empresa en cuestión, es decir, diversificables, no sistemáticos, (según la denominación del modelo C.A.P.M.). Además, por otra parte, sólo cuando la distribución de los saltos, (medidos éstos en términos de rentabilidad), es normal se puede aplicar la solución analítica que propone Merton. Ambos aspectos se resuelven en el capítulo 4.

Una vez llevada a cabo la contrastación, se comparan los valores de las opciones que se obtienen con el modelo de Merton con los efectivamente observados, así como los obtenidos con la contrastación del modelo B-S, analizándose también los errores de predicción de ambos modelos.

Los resultados de la contrastación parecen revelar una clara mejora en la predicción del modelo de Merton respecto al de B-S, mejora que se aprecia para todas las muestras analizadas. No obstante, se observan determinados sesgos, similares a los que típicamente cometía el modelo B-S, aunque en menor medida.

Finalmente, el capítulo 5 está dedicado enteramente a la presentación de las conclusiones obtenidas en la presente investigación.

CAPÍTULO 1:
MARCO TEÓRICO DE VALORACIÓN DE OPCIONES.

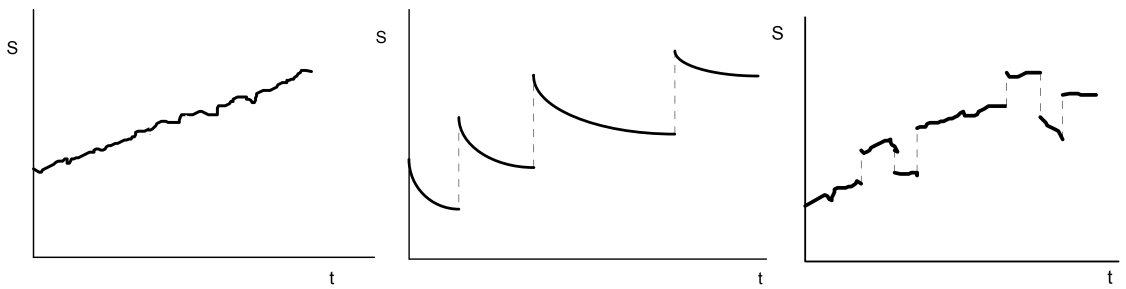
1.1.- PROCESO DE DIFUSIÓN CON SALTOS.

El proceso de difusión con saltos (*difussion-jump process*) es un proceso intermedio, "mezcla" de las dos clases de procesos estocásticos en tiempo continuo, que son los procesos de difusión y los procesos de saltos [1].

Mientras que un proceso de difusión sólo permite pequeñas variaciones del precio del activo subyacente en intervalos de tiempo relativamente cortos, el proceso de difusión con saltos, considera que, de vez en cuando, se producen variaciones significativas en la rentabilidad del subyacente en tiempo discreto, que se intercalan con períodos "pacíficos", de escasa variación.

La diferencia con el proceso "puro" de saltos, es inmediata. En este caso, el precio del activo no experimenta cambios reducidos inesperados en intervalos cortos de tiempo, de manera que todas las variaciones en el precio del activo, excepto las recogidas por la tendencia (variaciones anticipadas), constituyen "saltos".

En base a las consideraciones anteriormente expuestas, el proceso de difusión lognormal y el proceso "puro" de saltos constituyen dos casos, llamémosle "extremos", de referencia obligada cuando analizamos el proceso "mezcla" de difusión con saltos. La siguiente gráfica de Cox y Rubinstein (1985, pag. 369) permitirá visualizar más claramente las diferencias entre los tres procesos.



" puro" difusión "puro" de saltos difusión con saltos

[1] Formalmente, un proceso de saltos tiene trayectorias discontinuas con probabilidad uno, mientras que en los procesos de difusión las trayectorias son continuas con probabilidad uno.

Mientras en el proceso de difusión "puro", sin saltos, hay una trayectoria continua, con pequeñas variaciones en el precio del activo, S, siguiendo una tendencia (positiva y constante en este caso), en el proceso de difusión con saltos, desaparece la continuidad en aquellos momentos del tiempo en que se producen saltos o variaciones importantes en el precio del subyacente, mientras que la tendencia positiva se mantiene. Se observa gráficamente que cuando no hay discontinuidades, la dinámica de S es similar a la del proceso "puro" de difusión. La diferencia con el proceso "puro" de saltos es aún más clara a la vista de la gráfica anterior, pues los tramos de continuidad (sin saltos) están descritos únicamente por la tendencia, que recoge las variaciones anticipadas y esperadas en S.

La utilización por primera vez del proceso de difusión con saltos como supuesto fundamental en la valoración de opciones se encuentra en el trabajo de Merton (1976a), al que le siguieron extensiones y aplicaciones que analizamos en el Capítulo 3. El proceso de difusión para la rentabilidad del precio del activo, definida como el logaritmo neperiano del cociente de sus precios, o más conocido como *proceso de difusión lognormal*, es el supuesto básico en el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes (1973), mientras que Cox y Ross (1976) plantean, entre otros, procesos "puros" de saltos como válidos para la representación de la dinámica del precio del subyacente.

A continuación desarrollaremos con más detalle el tratamiento analítico y las características de ambos procesos, difusión lognormal y "puro" de saltos, para finalmente profundizar en el proceso de difusión con saltos, que contrastaremos empíricamente con los datos del mercado español de opciones sobre acciones, y cuyos resultados se expondrán en el capítulo 4.

1.2.- PROCESO "PURO" DE SALTOS.

El proceso puro de saltos (*pure jump process*) es una alternativa desarrollada inicialmente por Cox y Ross (1976) y que, como ya se ha comentado, presupone que el precio del stock puede experimentar grandes cambios en un reducido período de tiempo. Es decir, hay períodos continuos, en los que se intercalan variaciones importantes en el precio del activo en tiempo discreto. No hay pequeñas variaciones aleatorias en el precio del activo, que no sean las recogidas en la tendencia de su trayectoria. Esta última observación es la que lo diferencia del proceso de difusión y saltos, que al igual que el proceso de difusión lognormal, también permite pequeñas variaciones en el precio del activo.

El planteamiento de un proceso de estas características es básico, no tanto por su mayor o menor realismo, sino más bien como un punto de referencia extremo, válido para establecer comparaciones con otros procesos.

Un proceso de saltos simple puede ser expresado del siguiente modo:

$$dS / S = \mu dt + (k-1)d\pi = \mu dt + \begin{cases} (k-1) \text{ con probabilidad } \lambda \text{dt} \\ 0 \text{ con probabilidad } 1 \text{ - } \lambda \text{dt} \end{cases} \quad [1]$$

donde S=S(t) es el precio del activo subyacente, μ es la tasa media esperada de rentabilidad de S, π es un proceso Poisson en tiempo continuo, λdt representa la probabilidad instantánea de recibir información que haga que la rentabilidad de S experimente una modificación importante, (que se produzca un salto) y k - 1 es la amplitud del salto.

Esta expresión refleja que el porcentaje de variación del precio de la acción (dS/S) está compuesto de un término de tendencia, μdt, y un término, dπ, que recoge la probabilidad, λdt, de que el porcentaje de cambio de la acción salte en k - 1 (pase a kS) o que no salte, con probabilidad 1- λdt. Cuando k es positiva y constante se denomina a este proceso como *proceso simple de saltos*, en la medida en que hay una única dirección del salto (positivo) y la amplitud del mismo está dada.

Cox y Ross añaden otros procesos estocásticos de salto alternativos más complejos, donde, por ejemplo, la amplitud del salto no es fija, sino que es proporcional al precio de la acción (*birth and death processes*, Cox y Ross, [1976, pág 148-149]) o, por ejemplo, cuando la intensidad del proceso, λ, es constante y donde la amplitud del salto también es constante (*absolute process*, Cox y Ross, [1976, pág 150-151]).

Cox y Ross (1976) demuestran que, bajo el supuesto de un proceso "puro" de saltos para la rentabilidad del activo subyacente y cuando la amplitud del salto es fija, puede también crearse una cartera cubierta, sin riesgo, con el activo subyacente, S, y la opción, C, con argumentos de arbitraje similares a los que utilizan B-S, obteniendo como valor de una opción [2]:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \int h(S_T) dF(S_T, T \mid S_t, t) \quad [2]$$

donde C es el valor de una opción call europea sobre la acción, S, con tiempo hasta el vencimiento T, $F(S_T, T \mid S_t, t)$ es la distribución de probabilidad del precio de la acción en el tiempo T, S_T, condicionada a la información disponible de precios históricos S_t, para t<T y h(S) es el valor al vencimiento [Máx[0, S_T]] de una opción call europea. No obstante, una solución analítica a la expresión anterior [2] se obtiene únicamente cuando se conoce la distribución de probabilidad del valor del activo al vencimiento. Para determinados casos, Cox y Ross obtienen soluciones, que pueden ser utilizadas a nivel empírico.

Cox y Ross (1976) finalmente demuestran que en el límite (cuando $k^+ \to 1$ y $k^- \to 1$ y $\lambda \to \infty$) un proceso de saltos se aproxima a un proceso puro de difusión.

1.3.- PROCESO DE DIFUSIÓN LOGNORMAL.

Constituye la alternativa más utilizada respecto a la dinámica de la rentabilidad del subyacente cuando se intentan valorar opciones. Por esta razón, vamos a dedicar el resto del capítulo a su análisis y a las extensiones más importantes que le siguieron en torno a la versión inicial.

En la literatura existente sobre esta clase de procesos se distinguen dos grandes grupos de modelos y, por consiguiente, dos metodologías claramente diferenciadas: de un lado, estarían aquellos modelos, más teóricos, pero también

---

[2] Para la demostración de esta fórmula de valoración de opciones, bajo el supuesto de un proceso puro de saltos para el activo subyacente, Cox y Rubinstein (1985) dan una explicación basada en el método binomial.

susceptibles de un más asequible tratamiento matemático, en los que se supone que la negociación en los mercados se produce de un modo continuo. En este caso, las dinámicas de los precios de los diferentes instrumentos financieros se expresan mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. En el otro lado, se inscriben aquellos modelos, más realistas, en los que las transacciones se distribuyen de un modo discreto en el tiempo. En este caso, la metodología de las ecuaciones estocásticas en diferencias finitas es la adecuada para describir las dinámicas de las diferentes variables involucradas en la valoración de opciones.

1.3.1.- TIEMPO CONTINUO.

Un supuesto fundamental que ha de considerarse a la hora de analizar el proceso de difusión lognormal es la consideración de la varianza de la rentabilidad del activo subyacente bien como constante bien como variable, no constante, dando lugar a dos grandes grupos de modelos, que pasamos a analizar.

1.3.1.1.- Varianza constante.

Parece interesante comenzar realizando un seguimiento histórico de cómo empezaron a plantearse los procesos de difusión para la rentabilidad del activo subyacente, y de cómo, modelo a modelo, se han ido logrando mejoras hasta llegar al clásico lognormal, supuesto fundamental del modelo más aceptado de valoración de opciones, el modelo de Black-Scholes (1973).

El punto de partida se encuentra en el *Proceso Aritmético Browniano sin tendencia* [3], planteado inicialmente por Bachellier en 1900 [4] y extendido más tarde por Osborne (1959), que introduce el concepto de movimiento Browniano. Según este proceso, el precio de la acción es una variable aleatoria, cuyos cambios son independientes y están idénticamente distribuídos y que

$$\Pr ob\left[\tilde{S}^* \leq S^* \middle| \tilde{S} = S\right] = F(S^* - S; T) \qquad [3]$$

---

[3] sin tendencia significa que la probabilidad de que el precio de la acción suba o baje en una cantidad determinada es igual, independientemente del nivel del precio de la acción.
[4] Cfr. en Smith (1976).

donde F es la función de distribución que recoge los cambios de precios de la acción y $\tilde{S}$ representa los precios corrientes. La ecuación [3] expresa que la probabilidad de que el precio de la acción dentro de T períodos, $\tilde{S}*$, sea menor que o igual que un número dado, $S*$, condicionada a que el precio corriente de la acción, $\tilde{S}$, sea S, puede ser expresada como una función de la distancia ($S*-S$) y de T.

La idea que subyace en esta expresión es que el precio futuro de la acción es más o menos constante (sin tendencia), donde las variaciones medidas por la diferencia entre el precio medio y el precio corriente de la acción, se modelizan mediante una función de distribución, F, que también depende del tiempo hasta la expiración de la opción, T.

Implicaciones importantes que se derivan de la consideración de este proceso es que las variaciones en el precio de las acciones presentan una varianza finita, que se corresponde a la de una distribución normal, rechazando el resto de las distribuciones miembros de la familia Pareto- estables, que suponen varianzas infinitas. Adicionalmente, y como destacan Jarrow, Oldfield y Rogalski (1977), esas variaciones y para pequeños intervalos de tiempo, deben estar distribuídas de manera uniforme a través del tiempo. Si además fuesen independientes, las rentabilidades para intervalos de tiempo más largos estarán distribuídas normalmente de manera asintótica.

Esta observación es la que ha suscitado una mayor polémica en tanto que el intervalo de tiempo entre las transacciones, en ningún modo, es constante, es más, las transacciones de una acción concreta ocurren en instantes aleatorios a lo largo del día, por lo que no existe uniformidad en los intervalos de tiempo entre las mismas. Además, el número de transacciones es distinto cada día. El supuesto de independencia entre las rentabilidades tampoco es real, puesto que algunos test empíricos, como el que llevan a a cabo Neiderhoffer y Osborne (1966) evidencian una significativa dependencia de las rentabilidades respecto a las anteriores, concretamente una significativa correlación de signo negativo entre las mismas.

Como concluye Smith (1976), las principales objeciones al modelo de Bachellier son dos:

1.- El supuesto de Movimiento Aritmético Browniano, como descriptor de los movimientos esperados de los precios, tal y como aparece definido por la función de distribución [3], implica, por un lado, una cierta probabilidad de precios negativos para el activo subyacente y por otro lado, existe la posibilidad de que el precio de la opción sea superior al precio del activo subyacente (cuando T, tiempo que falta hasta la expiración de la opción, es grande). Esta última observación hace invalidar totalmente el proceso de Bachellier en base al resultado de Merton (1973), que demuestra que dado que una acción es equivalente a un "warrant" americano perpetuo ($\tau=\infty$) con un precio de ejercicio igual a cero (E=0), se deduce que el valor de una acción ha de ser mayor o igual que una opción americana sobre este valor. Además, esta posibilidad descartaría a largo plazo el mercado de opciones ya que su precio podría llegar a ser superior al del propio subyacente.

2.- El supuesto de que la media del cambio esperado en el precio del activo subyacente es cero, es decir, sin tendencia, implica una tasa media de rentabilidad igual a cero, dando lugar a tasas de descuento también iguales a cero. Además, no se toma en consideración las diferentes estructuras de preferencias frente al riesgo de los inversores, por lo que no es un modelo de equilibrio general.

El siguiente avance se produjo con la utilización del *Proceso Geométrico Browniano sin tendencia*, en el que el proceso definido para las variaciones de los precios de la acción vienen recogidas por la siguiente expresión:

$$\mathrm{dS/S} = \sigma \mathrm{dZ} \qquad [4]$$

donde dZ es un proceso Wiener definido como:

$$\mathrm{dZ} = \varepsilon\sqrt{\mathrm{t}} \qquad [5]$$

donde ε es N(0,1) y no exhibe autocorrelación.

El precio de la acción es una variable aleatoria, cuyos cambios son independientes y están idénticamente distribuídos y

$$\Pr ob\left\{\widetilde{S}^* \leq S^* \middle| \widetilde{S} = S\right\} = F(S^*/S;T) \qquad [6]$$

donde F es la función de distribución de los precios relativos de la acción.

De igual manera que para un proceso Aritmético Browniano, este proceso asigna mayor probabilidad a menores variaciones del precio de la acción, pero esta vez, la función de distribución recoge no las diferencias de los precios entre dos momentos del tiempo, sino sus precios relativos, es decir, el precio medio esperado de la acción, que se supone constante, respecto al precio corriente.

Este proceso es utilizado por Sprenkle (1962) y Boness (1964) [5]. Con él se evitan algunos errores que cometía el modelo de Bachellier, pues entre otras cosas, el precio de la acción no puede tomar valores cero ni negativos. No obstante, se aleja de la realidad de los mercados financieros, ya que al asumir un valor fijo medio para el precio de la acción (sin tendencia) y por tanto, no considerar una rentabilidad media positiva, tampoco admite la posibilidad de tipos de actualización positivos. Además ignora los diferentes niveles de riesgo para la acción y la opción que como ya veremos, serán importantes para la obtención del proceso para la rentabilidad del subyacente.

Hacemos especial hincapié en el modelo de Sprenkle, pues como afirma el propio Black (1989) su trabajo es el fundamento para la obtención de la fórmula de Black y Scholes (1973). Black y Scholes, en un primer borrador, utilizan la fórmula de Sprenkle (1962), pero usando el tipo de interés en lugar de la tasa de rentabilidad esperada de las acciones (tomando ρ = r en la fórmula de Sprenkle) para descontar el valor terminal esperado de la acción y también como tasa de descuento del valor de la opción, para obtener el valor actual de la opción.

Sprenkle [1962] define el valor esperado de un warrant al día de expiración (valor terminal) como:

$$E(P_W) = \int_0^\infty (x-a).f(x)dx \qquad [7]$$

[5] Cfr. en Smith (1976).

donde P_W es el precio de un warrant, x es el precio de la acción, de manera que x- a es el valor de un warrant, si x > a y 0 si x < a. f(x) es la función de densidad lognormal (que considera más apropiada que la normal para describir la dinámica de los precios de las acciones) y a es el precio de ejercicio del warrant. Si f(x) es continua, o puede ser aproximada por una función continua, entonces el valor esperado de un warrant para un inversor será la suma de todos los posibles resultados por sus respectivas probabilidades de ocurrencia, dadas por la función f(x) [6].

Sobre la distribución del valor final de las acciones, Sprenkle trunca el valor del warrant en el precio de ejercicio y así obtiene su valor esperado dado un valor concreto para el precio corriente de la acción, P_s:

$$\mathrm{E}[P_w; P_s] = \int_a^\infty \frac{(x-a)}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left[\frac{\ln x - \ln P_s - \ln k + 1/2\sigma^2}{\sigma}\right]^2} dx \qquad [8]$$

En general, Sprenkle supone que el inversor piensa que el valor medio esperado para el precio de la acción es k veces su precio corriente, siendo k una constante, es decir, $E[x]=kP_s$. La rentabilidad esperada para los warrants podría ser cualquiera, pero siempre superior a la del subyacente, debido al mayor riesgo de los warrants respecto al de la acción, una vez que un cambio porcentual dado en el precio de la acción resultará en un cambio porcentual superior en el precio del warrant, (apalancamiento).

El siguiente eslabón de esta evolucion teórica fue modelizar la dinámica de la rentabilidad del subyacente y del warrant como un *Proceso Geométrico Browniano con tendencia positiva,* proceso estocástico que queda definido del siguiente modo:

$$\mathrm{dS/S} = \alpha \mathrm{dt} + \sigma_1 \mathrm{dz}_1$$

[6] Para la obtencion de la formula final para el valor de un warrant, Sprenkle hace uso de un teorema que proporciona soluciones integrales cuando la función de densidad es lognormal. Este teorema aparece demostrado en el apéndice de Sprenkle (1962).

$$dPw / Pw = \beta dt + \sigma_2 dz_2 \qquad [9]$$

donde dz_1 y dz_2 son procesos de Wiener, α y β son las tasas de rentabilidad media esperada del subyacente y del warrant, respectivamente y σ_1 y σ_2 son sus desviaciones típicas.

Esta tendencia positiva para la acción, α, implica tipos de actualización positivos y primas de riesgo (siempre que $\alpha \neq r$, donde r es la tasa de interés sin riesgo). Es el primer modelo que introduce la posibilidad de que haya agentes con diferentes preferencias respecto al riesgo, es decir, que haya aversidad al riesgo, preferencia por el riesgo, o simplemente, neutralidad al riesgo (cuando α=r). Este modelo fue introducido por Samuelson (1965) y retomado, con escasas modificaciones, por Black y Scholes (1973), pero al igual que los modelos anteriores incluye varios parámetros, como son α y β, que habría que estimar y que, por tanto, le restan capacidad de predicción.

Con el supuesto adicional de que la distribución de los precios terminales de la acción es lognormal, Merton y Samuelson (1969), para obtener la fórmula final, actualizan a la tasa β, que suponen constante, el valor esperado de la distribución de los posibles valores del warrant en el momento en que éste se ejercita.

A pesar de que este modelo parecía acercarse en mayor medida que los anteriores al comportamiento observado tanto de las acciones como de los warrants, se presentaron algunas críticas. Por ejemplo, Smith (1976) argumenta que el procedimiento de Samuelson de suponer que la tasa de rentabilidad media esperada del warrant, β, es constante es inapropiado sobre la base de una teoría de valoración de opciones bajo equilibrio en los mercados financieros, mientras no se plantee una razón válida para tal consideración. El procedimiento para la obtencion del valor del warrant tampoco esta totalmente definido, pues el propio Samuelson plantea que será otra teoría más profunda y amplia la que deduzca el valor de α para cada categoría de stock. Aún más, según los valores que se asignen para la rentabilidad media esperada del subyacente, se estarán introduciendo implícitamente determinadas funciones de utilidad respecto al riesgo para el inversor típico, por lo que la fórmula final que se obtenga no sera indiferente de las preferencias del inversor representativo, no será, por tanto, neutral al riesgo.

Finalmente, se llega al *Proceso de difusión lognormal* para el precio del activo, como lo define Smith (1976). Merton (1976a) se refiere a él como un proceso o movimiento Geométrico Browniano para las variaciones en el precio a través del tiempo. En ese caso, la rentabilidad sigue un proceso simple de Itô. Black y Scholes (1973) lo denominan como paseo aleatorio en tiempo continuo y al igual que Samuelson (1965), Sprenkle (1962) y Boness (1964), suponen que los precios del stock se generan por un proceso de difusión lognormal, con la diferencia fundamental de que B-S limitan la arbitrariedad en el valor de los parámetros en base a un argumento de arbitraje dinámico sobre el que nos extenderemos más adelante.

Este proceso se especifica del siguiente modo:

$$dS/S= \mu dt + \sigma dz \qquad [10]$$

donde μ es la rentabilidad esperada instantánea del precio de la acción, S, ^{2}es la varianza instantánea de la rentabilidad del precio de la acción y dz es un proceso Wiener, definido igual que en [5].

Como indica Rubio (1989), la ecuación [10] representa un proceso simple de Itô, donde el primer término es el cambio esperado, mientras que el segundo término es el componente incierto, no anticipado de la rentabilidad de S. Además, si dS sigue un proceso Geométrico Browniano y dz es un proceso de Wiener, se demuestra que S(t) está distribuída de forma logarítmico normal [7].

La diferencia fundamental de este proceso con el anterior de Samuelson (1965) está en que mientras en el de Samuelson se han de utilizar diferentes tasas de descuento para la acción y para la opción, en el procedimiento de arbitraje que introducen B-S para la obtención del valor de una opción, esta tasa de descuento es la misma e igual al tipo de interés sin riesgo, como ya se explicará más adelante. De hecho, tomando ß=α=r en el modelo denominado α-ß de Samuelson (1965), se obtiene la solución de B-S.

---

[7] Para su demostración, ver Rubio (1989) apéndice.

No tardaron en aparecer las primeras críticas y Merton (1973) en el mismo año plantea que el análisis en tiempo continuo de B-S es inválido en cuanto que la negociación se produce en momentos discretos de tiempo. Esta crítica se resuelve más tarde una vez que Merton y Samuelson (1974) [8] demuestran que la solución de negociación continua de Black-Scholes es una aproximación asintótica válida de la solución de negociación discreta, que Merton y Samuelson suponen más real. Bajo esas mismas condiciones en tiempo discreto, la rentabilidad de la cartera de arbitraje sin riesgo de Black-Scholes tendría algún riesgo, el cual estará limitado y será una función continua de la longitud del intervalo de negociación, y valdrá cero cuando este intervalo tienda a su límite continuo. Así, siempre que el intervalo no sea grande, la diferencia entre el precio de la opción de Black-Scholes con negociación continua y el precio correcto de negociación discreta no diferirá mucho, sin crear posibilidades de arbitraje.

Más tarde, Merton afirma que la solución de B-S tampoco es válida, incluso en el límite continuo, cuando la dinámica del precio de la acción no puede ser representada por un proceso estocástico continuo en tiempo continuo. Manifiesta textualmente: "la validez de la fórmula de B-S depende de si los cambios en el precio de la acción satisfacen una clase de propiedad local de Markov, por ejemplo, de si en un corto intervalo de tiempo, el precio del stock puede sólo cambiar en pequeñas cuantías" (Merton [1976a], pag 126).

El proceso de difusión lognormal para el precio del subyacente es el supuesto básico del modelo de Black-Scholes (1973) que constituye el trabajo pionero en la derivación del valor de las opciones y otros activos derivados, lo que ha venido en llamarse Teoría de Valoración de Opciones, y por tanto, nos detendremos en los aspectos más destacados de su obtención.

La metodología utilizada en la derivación de la fórmula de B-S radica básicamente en la idea de que es posible formar una cartera compuesta por acciones/opciones de tal forma que se elimine el riesgo, cuando se producen variaciones con el tiempo en el precio de dichos activos.

[8] Referenciado en Merton (1976a).

Como expresan B-S, el concepto de cartera cubierta frente al riesgo ya había sido planteado por Kassouf y Thorp (1967) para valorar los warrants. Esta cartera acciones/opciones sin riesgo se formará mediante una posición "larga" en uno de los activos y una posición "corta" en el otro activo, en unas proporciones que eliminen el riesgo de variación de mercado en el valor de los fondos propios de la cartera, y por tanto, esta cartera esté "cubierta".

Para mejor comprensión pongamos un ejemplo. Supongamos que la opción sube aproximadamente 50 ptas cuando las acciones suben 100 ptas, y baja 50 ptas cuando las acciones bajan 100 ptas. En estas condiciones se puede crear una posición sin riesgo vendiendo dos contratos de opciones e invirtiendo en una acción. Esta posición está prácticamente desprovista de riesgo. Para pequeños movimientos de las acciones a corto plazo, las pérdidas por un lado serán en gran parte compensadas con los beneficios en el otro lado. Si las acciones suben, se pierde con las opciones, pero se gana con las acciones. Si las acciones bajan, se pierde con las acciones, pero se gana con las opciones.

Sin embargo, cuando el precio de la acción cambia o la opción se acerca a su vencimiento, cambiará el ratio acciones/opciones necesario para mantener una posición sin riesgo, lo que exigirá cambios continuos de la cartera, bien en la posición en acciones, en opciones o en ambas.

La aportación fundamental de B-S al problema de valoración de opciones se encuentra en afirmar que, en equilibrio, la rentabilidad esperada de dicha posición "cubierta" ha de ser igual a la rentabilidad del activo sin riesgo. De lo contrario, habría posibilidades de arbitraje entre tal cartera y el activo sin riesgo, arbitraje que eliminaría en un corto plazo de tiempo el desequilibrio.

Como argumenta el propio Black (1989), si se hiciese el supuesto de que las acciones tienen una rentabilidad esperada igual al tipo de interés sin riesgo, también lo debe tener la opción. Después de todo, si todo el riesgo de las acciones pudiese diversificarse, también podría diversificarse el riesgo de la opción. Haciendo uso de la terminología de los modelos CAPM, si la beta de las acciones fuese cero, la beta de la opción también debería ser cero. Concretamente, B-S (1973) al construir la cartera obtienen un activo sintético que replica al activo sin riesgo, y que podemos descontar a la tasa de interés sin riesgo, porque los componentes de riesgo sistemático de la dinámica de la rentabilidad de la acción y de la opción se han eliminado por compensación.

Según Black (1989), había que evitar complicaciones, por lo que B-S plantearon los supuestos más sencillos e ideales para los mercados de activos, de modo que con la condición de equilibrio anterior y esos supuestos, se obtuvo, finalmente, la fórmula de valoración de opciones. Esos supuestos son los siguientes:

-El tipo de interés a corto plazo es conocido y constante a lo largo del tiempo.

-El precio futuro de la acción, activo subyacente, se distribuye como una variable aleatoria logarítmico-normal, donde la tasa de varianza de la rentabilidad de la acción es constante. Expresado de otro modo, las variaciones en el precio de la acción siguen un Movimiento Geométrico Browniano en tiempo continuo.

-La acción no recibe dividendos, tampoco existen costes de transacción en la compra o venta de la acción, ni en la opción y no existe ninguna penalización a las ventas al descubierto.

-La opción es europea, sólo puede ejercitarse a su vencimiento.

-Tanto el prestar como el pedir prestado se puede hacer a una tasa de interés a corto plazo constante.

De otro modo y como aparece en Merton (1973), B-S suponen, en términos generales, que se cumple la forma estándar del modelo de valoración de activos CAPM de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), para transacciones a lo largo de varios períodos de tiempo y que estas transacciones tienen lugar de forma continua en el tiempo.

Una demostración de cómo el modelo CAPM con contratación continua es una condición suficiente para obtener la fórmula B-S se muestra en Merton (1982) y Rubio (1989).

La derivación de la fórmula de B-S comienza con la definición del valor de la cartera cubierta (Vh), que será el producto de las cantidades de los instrumentos por sus respectivos precios, es decir:

$$Vh = S.Q_s + C.Q_c \qquad [11]$$

donde S es el precio de las acciones que componen la cartera, C es el precio de las de las opciones y Q_s y Q_c son las cantidades de acciones y opciones que componen la cartera, siendo negativas si se trata de posiciones cortas.

El cambio en el valor de esta cartera, producido por cambios en el precio de sus activos, lo obtendremos diferenciando:

$$dVh = Q_s.dS + Q_c.dC \qquad [12]$$

Dado que el precio de la opción depende a su vez y entre otras cosas del precio de la acción, y dado que se supuso que las variaciones en el precio de la acción siguen un movimiento Geométrico Browniano, B-S hicieron uso del cálculo estocástico y del Lema de Itô para obtener la siguiente expresión:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S}.dS + \frac{\partial C}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.\sigma^2.S^2 dt \qquad [13]$$

donde σ^2 es la tasa de varianza de la rentabilidad de la acción.

Si se impone que las cantidades elegidas de los activos se ajusten continuamente para que la cartera no tenga "riesgo", y así esté cubierta, esto es que:

$$\frac{Q_s}{Q_C} = -\frac{\partial C}{\partial S} \qquad [14]$$

entonces la rentabilidad de la cartera será la tasa de interés sin riesgo. Si, por ejemplo, la cartera está formada por una posición larga en una acción ($Q_S = 1$), el número de opciones que deben venderse en descubierto por cada acción poseída vendría dado por la expresión :

$$Q_c = -\frac{1}{\partial C / \partial S} \qquad [15]$$

A medida que las variables tiempo y precio de la acción cambian de valor, el número de opciones a vender en descubierto para crear la posición cubierta con una acción también varía.

Una vez ajustada la cartera no tendrá riesgo, o de otra forma, su rentabilidad será la tasa de interés sin riesgo [9]:

$$\frac{dVh}{Vh} = r.dt \qquad [16]$$

Sustituyendo [12], [13] en [16] se obtiene la ecuación diferencial para el valor de la opción:

$$\frac{dC}{dt} = r.C - r.S.\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}.\sigma^2.S^2.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \qquad [17]$$

Esta ecuación diferencial está sujeta a la condición de contorno de que en la fecha de expiración, el precio de la opción de compra debe ser como máximo la diferencia entre el precio de la acción y el precio de ejercicio o cero cuando esta diferencia se hace negativa, es decir:

$$C^* = \max[0, S^* - X] \qquad [18]$$

Para resolver la ecuación diferencial [17] sujeta a la condición de contorno [18], se observa que se puede transformar fácilmente a la ecuación física de transmisión de calor, de la que Churchill (1963, pag. 155) ya obtuvo su solución. Este resultado permite obtener, finalmente, la ecuación de valoración de opciones de compra de B-S, dada por:

$$C(S, t) = S.N(d_1) - X.e^{r(t-t^*)}N(d_2)$$

9 Para entender esta relación entre riesgo y rentabilidad esperada, ver, por ejemplo, Sharpe (1970).

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(S/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}} \\
d_2 &= \frac{\ln(S/X) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}}
\end{aligned}
\qquad [19]
$$

donde C es el valor de la opción de compra, X es el precio de ejercicio de la opción call, r es la tasa de interés a corto plazo, t* - t es el tiempo que falta hasta la expiración de la opción y N(d) es la función de distribución normal evaluada en d.

El análisis de la fórmula de B-S permite hacer las siguientes observaciones:

-El valor de la opción no depende de la rentabilidad esperada de las acciones, o activo subyacente, ni, por tanto, de las preferencias por el riesgo de los inversores. Esta observación podemos constatarla al detectar que en la fórmula de valoración de opciones de B-S no aparece como variable independiente la rentabilidad esperada de la acción, es decir, la tasa a la que descontaríamos los flujos de ingresos obtenidos con la acción, que informa sobre el nivel de riesgo esperado deseado por el invesor.

-El valor de la opción sí depende de la varianza de la rentabilidad de las acciones o activo subyacente, del tipo de interés, y demás variables todas observables, excepto la varianza, que habrá que estimar.

Es interesante analizar en este punto el problema de las preferencias y la consideración de la variable de estado. Así, el modelo de valoración de B-S es atractivo porque es independiente de las preferencias. Esta independencia es posible debido al hecho de que se supone que los activos derivados, como pueden ser las opciones, están condicionados a otros activos negociados o "variables de estado" que son negociadas. Por ejemplo, una opción call europea es un activo condicionado al valor del correspondiente stock subyacente, el cual es negociado. Para mantener esta independencia de los activos respecto a las preferencias, sin embargo, algunas variables han de ser descartadas o consideradas como constantes. Por ejemplo, la tasa de interés, que es una variable de estado no negociada, se considera constante en mucha literatura (B-S [1973], Merton [1973] e Ingersoll [1977]).

Aunque el supuesto de tipos de interés constantes no causa importantes discrepancias en el caso de valoración de los pasivos de una empresa y opciones sobre esos pasivos, sí que afecta al proceso de valoración de los bonos libres de riesgo de insolvencia y a las opciones sobre dichos bonos, dado que estos pasivos dependen fundamentalmente del tipo de interés.

Esta observación, por tanto, nos lleva a exponer los problemas que se plantean al utilizar la metodología de B-S para valorar opciones sobre deuda, que son principalmente tres:

1.- El supuesto B-S de varianza constante de la tasa de rentabilidad del activo subyacente no es razonable cuando el activo subyacente es un bono (con maduración finita), ya que el precio de un bono forzosamente converge a su valor nominal al vencimiento. De esta manera, la volatilidad de los precios de los bonos no puede ser, por construcción, constante sino que tiende a aumentar con el tiempo hasta el vencimiento a causa de la volatilidad de los tipos de interés, pero tiende a disminuir a medida que se aproxima el vencimiento del bono.

2.- El supuesto B-S de tipo de interés conocido y constante durante la vida de la opción es inconsistente con las rentabilidades estocásticas de los instrumentos de deuda. Es decir, el supuesto de independencia entre el precio del activo subyacente y los tipos de interés no puede mantenerse en la valoración de opciones sobre instrumentos de deuda, dado que se requiere una visión dinámica de la estructura temporal de los tipos de interés.

3.- El supuesto de distribución lognormal de los precios permite que el precio del activo baje hasta casi cero o suba indefinidamente en el tiempo. El comportamiento del precio de los bonos es muy distinto a causa del denominado efecto de "anclaje" que provoca el pago fijo y conocido al vencimiento del bono.

No obstante, el modelo B-S ha sido usado frecuentemente en la práctica para valorar opciones sobre deuda debido a su simplicidad en comparación con otras aproximaciones alternativas más complejas, como pueden ser los modelos de equilibrio de la estructura temporal de tipos de interes (modelo Cox, Ingersoll y

Ross [1985] [10]) (en adelante CIR), que requieren el conocimiento de las funciones de utilidad del inversor representativo o los modelos de arbitraje libre de preferencias (modelo de Ho y Lee [1986]), que toma como dada la estructura temporal de tipos de interés inicial.

La sensibilidad del valor de una opción de compra ante pequeñas variaciones de las cinco variables de las que depende viene dada por las siguientes expresiones, recogidas en Cox y Rubinstein (1985):

$$\begin{gathered}\partial C/\partial S = N(x) > 0 \\ \partial C/\partial K = -r^{-t}N(x-\sigma\sqrt{t}) < 0 \\ \partial C/\partial t = (S\sigma/2\sqrt{t})N'(x) + Kr^{-t}(\log r)N(x-\sigma\sqrt{t}) > 0 \\ \partial C/\partial \sigma = S\sqrt{t}N'(x) > 0 \\ \partial C/\partial r = tKr^{-(t+1)}N(x-\sigma\sqrt{t}) > 0\end{gathered} \tag{20}$$

donde $N'(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$. y r=1+r´, donde r´es la tasa de interés.

De los resultados anteriores extraemos las siguientes observaciones en relación al comportamiento de estas variables, [Valero, 1988]:

- Un mayor valor de la acción, dará lugar a un mayor valor de la opción call, que tiene valor sólo cuando el precio de la acción es superior al precio de ejercicio, K.

- Por el contrario, un mayor precio de ejercicio significará menor valor de la opción de compra, por el mismo razonamiento anterior.

- Cuanto mayor es el tiempo hasta el vencimiento, mayores posibilidades de que el precio de la acción se incremente y la opción tenga un valor intrínseco positivo (se convierta "en dinero") y por tanto aumente el valor de la opción call.

- Respecto al tipo de interés, su efecto sobre el valor de la opción es inverso al del precio de ejercicio de la opción. De esta manera, un mayor tipo de interés, significa un menor precio actualizado o efectivo de ejercicio, y así un mayor valor para la opción.

---

[10] El modelo CIR (1985) ha sido utilizado por Bailey y Stulz (1989) para valoración de opciones sobre índices de acciones en un marco de equilibrio general, cuando la volatilidad del índice cambia de forma estocástica.

- El efecto de la volatilidad sobre el valor de la opción se puede entender en la medida de que una mayor volatilidad significa una mayor incertidumbre y dispersión de los precios futuros de la acción en relación a su valor medio esperado, y por tanto, una mayor probabilidad de que los precios de la acción superen al precio de ejercicio y de esa manera aumente el valor de la opción.

Es interesante analizar la aplicación de la metodología de B-S a un caso práctico, como puede ser calcular el valor de un Fondo de Inversión, tal y como se expone en Calatayud (1993). En este trabajo se describe un ejemplo de la estructura dinámica del valor de la cartera neutral, donde el tenedor es un Fondo de Inversión con un activo constituido por un título de renta variable, el cual ha sido financiado con fondos ajenos procedentes de un préstamo denominado en opciones de compra sobre ese título. Esta será, en este ejemplo, la cartera "cubierta" que definen B-S que, en la medida en que el valor de sus activos o pasivos vaya variando en el tiempo, habrá que ir haciendo los correspondientes ajustes para que la rentabilidad de esta cartera sea constante y cierta. La misión de los gestores del Fondo será no tanto obtener resultados esporádicamente elevados para su rentabilidad, sino más bien que mantenga una tasa de rentabilidad cierta y constante, que permita eliminar su aleatoriedad, su riesgo.

En el Gráfico 1 [Calatayud (1993a)] se ilustran de una manera sencilla y muy intuitiva los componentes elementales de la dinámica del precio de la opciones, a saber:

-Variación del valor de la opción como consecuencia del paso del tiempo, pero manteniendo constante el precio del activo subyacente, denominado "efecto tiempo" y que gráficamente se corresponde con el segmento AD.

-Variación del precio de la opción respecto a la volatilidad del activo subyacente, denominado "efecto volatilidad", segmento AB.

-Variación del precio de la opción debido a variaciones en el precio del activo subyacente, si la volatilidad relativa de la opción y el subyacente es constante, denominado "efecto precio del activo", segmento BC.

En este gráfico, el valor de una opción call en el instante inicial, t_0, viene dado por la curva $c(x, t_0)$. En un instante posterior, $(t_1 = t_0 + dt)$, el precio de la acción habrá variado a $x_1 = x_0 + dx$ y el precio de la opción a $c_1 = c(x_0 + dx, t_0 + dt)$, correspondiente a la curva $c(x, t_0 + dt)$.

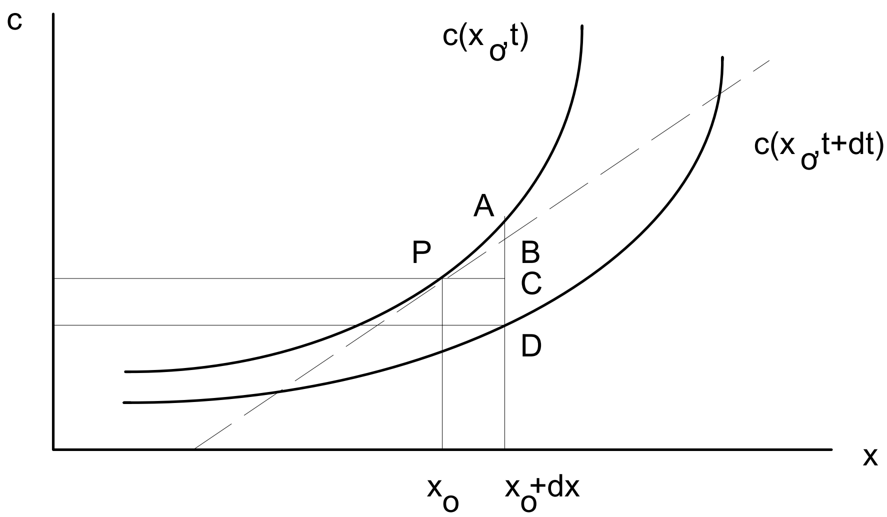


GRÁFICO 1

Alternativas al modelo B-S para la valoración de activos derivados, son el método de las martingalas de Harrison y Kreps (1979) y el procedimiento de Jarrow y Rudd (1982).

El método de las martingalas aunque ha sido atribuído tradicionalmente a Harrison y Kreps (1979) fue desarrollado inicialmente en Ross (1976) y extendido en Ross (1978).

Es una metodología distinta a la de Black-Scholes para la valoración de activos derivados, ya que no está basada en el arbitraje, y, muy brevemente, muestra que, en determinadas condiciones, el valor de un activo derivado es el valor neto esperado, con respecto a una determinada probabilidad, denominada "medida de probabilidad martingala única y equivalente", de los flujos futuros a los que da derecho el activo derivado, en un mundo indiferente al riesgo.

Es decir, en una economía donde no hay arbitraje, existe una medida "martingala" y su operador esperanza matemática asociado, E, tal que:

$$p_0 = E(e^{-rt} p_t | I_0)$$

donde p_0 es el precio corriente, actual del activo a valorar, p_t es el precio del activo en el instante t futuro, I_0 es la información disponible en el momento inicial y r es el tipo de interés, que se supone constante. Además, los errores de predicción, si existen, son independientes en el tiempo, es decir, si μ_t es el error de predicción, tal que

$$\mu_t = p_0 - e^{-rt} p_t$$

entonces $E[\mu_t]=0$ y $E[\mu_t \mu_{t-j}]=0$, $\forall j$.

La ecuación anterior muestra la valoración de un activo que no realiza pagos en el intervalo [0,t] y en forma diferencial esta ecuación revela que los activos deben ser valorados de forma neutral respecto al riesgo cuando se cumple la hipótesis de la martingala,

$$E(\frac{dp}{p}) = rdt$$

Dependiendo de las características del activo a valorar, a veces es posible dar soluciones en forma cerrada [11] del valor de los mismos; mientras que en otras ocasiones ha habido que hacer diversas aproximaciones.

Los supuestos que plantean Harrison y Kreps son los habituales en la economía de Black-Scholes. Sin embargo, añaden una estructura de información, concretamente una sub-σ álgebra que recoge los sucesos distinguibles en el período de tiempo de vida del activo, T, los cuales ocurren con una probabilidad P. Esta información I_t en un momento concreto de tiempo "t" es la que revelan los precios del activo subyacente hasta ese momento.

Harrison y Kreps (1979) de forma adicional, proponen un teorema [12], que luego aplican para obtener el valor de diferentes activos derivados, tales como opciones europeas [13], opciones call donde el precio de ejercicio es el valor del activo

[11] Una solución en forma cerrada o analítica es computable directamente, mientras que una solución en forma abierta sólo es computable mediante aproximaciones numéricas, como pueden ser por diferencias finitas, método de Monte Carlo, integración numérica o método binomial.

[12] Véase Ariño (1992), para una traducción al castellano del teorema y sus aplicaciones a la valoración de activos derivados.

[13] En este caso, llegan al mismo resultado que B-S.

subyacente en una fecha futura, opciones asiáticas [14], opciones de compra al mínimo precio y de venta al máximo, y, finalmente, opción a intercambiar un activo por otro (swap options).

La teoría de las martingalas de Harrison y Kreps ha sido aplicada a la valoracion de opciones sobre tipos de interes. Un ejemplo se encuentra en el trabajo de Heath, Jarrow y Morton (1992) (en adelante HJM). HJM plantean un proceso estocastico tanto para los tipos de interes spot como los forward, con múltiples factores estocásticos que influyen en la estructura temporal, generalizando a tiempo continuo el modelo en tiempo discreto de Ho y Lee (1986) para valoración de opciones sobre tipos de interés. Para demostrar la consistencia del proceso propuesto por HJM para una economía sin arbitraje hacen uso de la idea de Harrison y Kreps (1979) al caracterizar las condiciones de los procesos de los tipos forward de manera que exista una medida de probabilidad martingala única y equivalente. Bajo esta condición, los mercados son completos y la valoración de activos derivados es entonces una sencilla aplicación de los métodos de Harrison y Pliska (1981), que los autores describen con varios ejemplos en el texto.

Otro ejemplo de la utilización de la teoría de las martingalas lo encontramos en el trabajo de El Karoui y Rochet (1989) para valoración de opciones sobre deuda y que analizaremos más adelante.

Un procedimiento alternativo a los modelos que utilizan diferentes supuestos sobre el proceso generador del activo subyacente, es estimar la distribución del activo subyacente y entonces usar técnicas de integración numérica para obtener el precio de la opción [15]. Muchos de estos modelos calificados "de segunda generación" se han revelado como explicativos, al menos parcialmente, de los sesgos del modelo original de B-S. Un modelo representativo de esta clase es el que proponen Jarrow y Rudd (1982).

Jarrow y Rudd, plantean un método de valoración de opciones que aproxima la distribución del activo subyacente a otra distribución alternativa más tratable, mediante el uso de las series de expansión generalizadas de Edgeworth. Esta

[14] En las opciones asiáticas el precio de ejercicio es la media aritmética de los últimos "n" precios de cierre del activo subyacente anteriores a la fecha de expiración de la opción.
[15] Por ejemplo el método de Gastineau y Madansky, presentado por Gastineau (1975).

aproximación tiene la propiedad deseable de que los coeficientes de la expansión son funciones simples de los momentos de las dos distribuciones (de la verdadera y de la aproximada). Las series de expansión generalizadas de Edgeworth dan entonces un valor esperado de la opción al vencimiento en términos de la distribución aproximada.

El valor de la opción resultante se expresa como la suma del precio de B-S más tres términos de ajuste: el primero corrige la diferente varianza entre la distribución aproximada y la verdadera, el segundo y tercer término corrigen las diferentes asimetrías y curtosis respectivamente. También y por último, aparece un término de error residual. Este error fue examinado numéricamente cuando se supuso que la verdadera distribución del precio del activo subyacente en la opción seguía un proceso de difusión con saltos y un proceso de difusión de varianza de elasticidad constante.

Los resultados de esta simulación sugieren que si se elige de forma correcta la distribución aproximada, entonces el valor de la opción de B-S más los tres términos de ajuste están, por término medio, dentro de los 4 céntimos del verdadero valor de la opción. La mejora debida a los términos de ajuste sobre la fórmula B-S depende de la magnitud del error entre el modelo B-S y el precio real de la opción. Si este error es grande (más de 5 céntimos) en este caso la técnica de aproximación, en términos medios, mejora la estimación.

Otra ventaja que presenta esta técnica de aproximación para valorar opciones es que permite evaluar el impacto sobre el precio de la opción de la asimetría y curtosis de la distribución del activo subyacente.

La consideración del tipo de interés como una variable a tener en cuenta a la hora de valorar las opciones ya aparecía en Boness (1964), que actualizaba el precio "terminal" esperado de la opción call usando la tasa esperada de rentabilidad del stock [16].

De igual manera que ocurre con la volatilidad, y en un intento de acercarse al comportamiento observado del tipo de interés, se han planteado supuestos

[16] que habría que estimar.

alternativos al respecto, que van desde el supuesto más sencillo (su invariabilidad o constancia) hasta suponer procesos estocásticos cada vez más complejos, que incorporan uno tras otro características adicionales a su dinámica. El comportamiento estocástico para los tipos de interés, y cuando se valoran opciones sobre deuda, en muchos casos se ha establecido en términos de la dinámica de la rentabilidad de un bono cupón cero libre de insolvencia y con un período de maduración similar al plazo del tipo de interés que se está considerando, como por ejemplo en Merton (1973).

Para Black y Scholes (1973) tanto el prestar como el pedir prestado puede hacerse a una tasa de interés a corto plazo constante y además los tipos de interés a corto y largo plazo son iguales, esto es, suponen una estructura temporal "plana" de tipos de interés. Por el contrario, Merton (1973) incluye la posibilidad de que el tipo de interés pueda variar a lo largo de la vida de la opción, cuando supone que la rentabilidad de un bono cupón cero puede ser expresada como un proceso de Itô.

Para Merton (1973), el cambio en el precio del bono, esto es, su dinámica, vendría dada por:

$$\frac{dB}{B(T)} = \tilde{r}dt + \sigma_B(T)dz(t,T) \qquad [21]$$

donde $\tilde{r}$ es la rentabilidad instantánea del bono, $\sigma_B^2(T)$ es la varianza instantánea de rentabilidad del bono y dz(t,T) es un proceso estándar Gauss-Wiener para tiempo hasta el vencimiento T. Dado que B(T) es un bono libre de riesgo de insolvencia, B(0)=1. σ_B será una función de T con $\sigma_B(0) = 0$. En el caso especial de tipos de interés constantes $\bar{r} = r$, $\sigma_B = 0$ y $B(T) = e^{-rT}$.

Para la derivación de su fórmula, Merton hace uso de la técnica de B-S, estableciendo una cartera cubierta con tres activos: la opción call, el activo subyacente y el bono. Suponiendo que el precio de la call es ahora función del precio del bono, del precio del activo y del tiempo hasta la maduración de la opción, aplica el lema de Itô, obteniendo una ecuación en derivadas parciales, que con cuatro restricciones y dos condiciones de contorno, resuelve obteniendo la siguiente fórmula de valoración para opciones call europeas con tipos de interés estocásticos:

$$c = S.N\left\{\frac{\ln(S/X) - \ln B(T) + (\hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right\}$$

$$-B(T)X.N\left\{\frac{\ln(S/X) - \ln B(T) - (\hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right\}.$$

Dado que se supone que no hay pago de dividendos ni cambios en el precio de ejercicio, esta solución también es aplicable a opciones call americanas [17].

Se han planteado supuestos alternativos para la dinámica de los tipos de interés, como pueden ser procesos Geométricos Wiener (Brennan y Schwartz [1977a], Dothan [1978], Bartter y Rendleman [1980]) o procesos que revierten en media (Courtadon [1982], Brennan y Schwartz [1980], Cox, Ingersoll y Ross [1985][en adelante CIR), aplicados fundamentalmente para la valoración de opciones sobre deuda.

Planteamientos alternativos también pueden encontrarse en Langetieg (1980) que propone una estructura temporal multivariante para los tipos de interés, derivando el modelo de Merton (1973) como un caso especial.

Extensiones en torno a la versión inicial de Merton (1973) las encontramos en Ball y Torous (1983) y Schaefer y Schwartz (1987) para valorar opciones sobre bonos al descuento libres de riesgo de insolvencia. La extensión que hacen Ball y Torous (1983b) consiste en definir un proceso browniano, denominado por los autores como proceso "bridge", que si bien permite que el valor del bono converja a su nominal al vencimiento, desafortunadamente obliga a la consideración de una varianza constante para la tasa de rentabilidad del bono. Sin embargo, pueden obtener bajo este proceso, una solución en forma cerrada al problema de la valoración.

[17] demostrado por Merton (1973).

Para solventar el problema de la varianza de rentabilidad constante, Schaefer y Schwartz (1987), desarrollan un modelo sencillo para valorar opciones sobre deuda teniendo en cuenta otra característica importante del bono subyacente: la desviación estándard es proporcional a la duración [18] del bono. Este supuesto significa que a diferencia del modelo B-S y Ball y Torous (1983) que no consideran esta característica, los valores de la opción reflejan el hecho de que la dinámica del precio del bono cambia cuando el bono se aproxima a la maduración, concretamente, refleja el hecho de que la varianza de las rentabilidades de un bono tiende a reducirse cuando el bono se aproxima a la maduración (las volatilidades del bono son dependientes del tiempo y tienden a cero con el tiempo a la expiración).

El supuesto de tipos de interés estocásticos también es planteado en Rabinovith (1989), Turnbull y Milne (1991) y Amin y Jarrow (1992).

Rabinovith (1989) obtiene fórmulas para la valoración no sólo de opciones sobre bonos, sino también de opciones sobre acciones, haciendo uso de la aproximación de Merton (1973) para acciones y del modelo de valoración de bonos de Vasicek (1977) para los bonos.

Mediante análisis numérico, supone que el tipo de interés sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck, que revierte en media, que también ha sido utilizado por Merton (1971), Vasicek (1977), Brennan y Schwartz (1977a), Dothan (1978) y Courtadon (1982) y que se define de la siguiente manera:

$$dr = q(m - r)dt + vdz \qquad [22]$$

donde q (m - r) es el cambio esperado instantáneo del tipo de interés a corto plazo, v^2 es la varianza instantánea del tipo de interés y dz es un proceso Wiener. El parámetro m representa la media del tipo de interés a largo plazo al cual revierte r, tipo de interés a corto plazo, a una velocidad proporcional a q.

[18] Duración entendida como la elasticidad del precio del bono a las variaciones de la tasa de interés (Bierwag [1987], Calatayud [1993b] y Calatayud y Calero [1994].

En la obtención de la fórmula final destaca el papel importante que juega μ, el coeficiente de correlación entre el cambio no anticipado del tipo de interés a corto plazo y las rentabilidades no anticipadas del stock, observación que hasta ahora no había sido tenida en cuenta en anteriores trabajos. Tanto q, m, v y μ se suponen constantes.

El principal inconveniente que plantea el proceso Ornstein-Uhlenbeck es que implica una posibilidad a largo plazo de tipos de interes negativos [19]. Esta posibilidad no presenta problemas en la medida en que la mayoría de las opciones negociadas en mercados organizados expiran en menos de nueve meses y, como demuestra Rabinovitch (1989), con unos tipos de interés iniciales positivos y unos valores razonables para los parámetros, el período de tiempo esperado a partir del cual los tipos de interés podrían volverse negativos sería más largo que nueve meses.

La utilización del proceso de Rabinovitch (1989) es válido como aproximación al de tipos de interés a corto plazo, pudiendo ser utilizado en la valoración de opciones con vencimiento próximo. En cambio, el uso de este proceso no está justificado en la valoración de opciones con vencimientos lejanos.

Los supuestos de valoración de bonos de Rabinovitch fueron utilizados en el trabajo posterior de Hilliard, Madura y Tucker (1991) referido a la valoración de opciones sobre divisas con tipos de interés, domésticos y extranjeros, estocásticos.

Milne y Turnbull (1991) presentan una aproximación, relativamente simple, a la valoración de opciones con tipos de interés estocásticos, tomando la estructura temporal inicial como dada, y obtienen soluciones analíticas para una amplia variedad de opciones europeas sobre tipos de interés (letras y bonos del Tesoro, contratos forward y futuros de tipos de interés, etc.) e incluso opciones compuestas sobre acciones, etc. Para la derivación de su fórmula utilizan una extensión del modelo de equilibrio general de Rubinstein (1976) y Brennan (1979), donde se suponía que los tipos de interés eran determinísticos.

[19] a diferencia del proceso que proponen Cox, Ingersoll y Ross (1985) que excluye los tipos de interés negativos. Rabinovitch no lo utiliza en su trabajo porque resultaría una varianza estocástica para el precio del bono al descuento libre de riesgo de insolvencia, por lo que resultaría inaplicable la aproximación de Merton.

Finalmente, Amin y Jarrow (1992) proponen un modelo de valoracion de opciones sobre acciones bajo tipos de interes estocasticos, que viene a suponer una generalizacion del trabajo de Merton (1973).

Un análisis de los trabajos que hasta ahora se han expuesto en relación a la consideración del tipo de interés como estocástico, permiten clasificarlos, principalmente en dos grupos:

- Aquellos que obtienen el precio de la opción como una función de los precios de los activos básicos (en general, el bono subyacente y un bono cupón cero con el mismo vencimiento que la opción). En este grupo englobaríamos los trabajos de Merton (1973), la extensión de este trabajo de Ball y Torous (1983) y una extensión más del anterior hecha por Schaefer y Schwartz (1987), que añade más características relevantes del bono, pero que como ya se comentó, no obtiene soluciones analíticas.
- Aquellos otros que obtienen el precio de la opción como una función de variables de estado (en general, el tipo de interés a corto y, en algunos casos, el tipo de interés a largo plazo). El punto de partida consiste en la determinación completa de la estructura temporal de tipos de interés como una función de esa/s variable/s de estado. Excepto en pocos casos, las ecuaciones en derivadas parciales que plantean como expresiva de la dinámica del precio de la opción, no tienen soluciones analíticas.

En relación a esta clasificación, El Karoui y Rochet (1989) adoptan una tercera aproximación, iniciada por Harrison-Kreps (1979), y desarrollada más tarde por CIR (1985a), Duffie (1985) [20] y Duffie-Huang (1985) [21]. La esencia de esta aproximación, como anteriormente se expuso, se centra en que cuando los mercados son perfectos y completos, entonces existe una única (ajustada al riesgo) distribución de probabilidad Q, tal que los precios de equilibrio descontados de todos los activos son Q- martingalas. No se hacen supuestos sobre la dinámica a seguir por los tipos de interés, sino que sólo se supone que los bonos cupón cero tienen volatilidades dependientes del tiempo de modo determinístico, de manera que la dinámica de los tipos de interés viene completamente determinada

[20] Cfr. en El Karoui y Rochet (1989).
[21] Cfr. en El Karoui y Rochet (1989).

por la estructura temporal inicial y por la función de volatilidad de los bonos cupón cero.

La fórmula general que se obtiene en base a esta aproximación plantea que el precio de una opción sobre un bono con cupón se puede expresar como el promedio de la suma descontada de los pagos determinísticos que se obtienen cuando la opción call es ejercitada. Lo más interesante en este resultado es que los promedios se corresponden con las probabilidades de ejercitar la opción ajustadas por el riesgo y el tiempo. El único supuesto que se ha requerido para este resultado es que los mercados sean completos y que haya difusión de la información sin coste.

Una característica importante de esta aproximación es que recoge todas las fórmulas conocidas para valorar opciones sobre bonos cupón cero, como, por ejemplo, la obtenida por el modelo CIR (1985b), que solamente es válida para opciones sobre bonos cupón cero.

1.3.1.2 Varianza estocástica.

La mayor parte de la literatura reciente en Economía Financiera considera un comportamiento aleatorio y estocástico para la varianza de la rentabilidad del activo subyacente de una opción, supuesto que parece más realista que el supuesto de varianza constante de B-S.

Este mayor realismo se sustenta en una considerable evidencia empírica que encuentra un comportamiento aleatorio en el tiempo para la volatilidad, en el que destacan los trabajos de Rosenberg (1972), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1975), Latané y Rendleman (1976), Schmalensee y Trippi (1978), Castanias (1979), Macbeth y Merville (1979) y Christie (1982).

En un intento de recoger esta evidencia empírica se han propuestos diferentes modelizaciones para la volatilidad, que van desde planteamientos que suponen una dependencia de la volatilidad respecto al precio del subyacente (Modelo de elasticidad de sustitución constante, CEV), pasando por otros modelos, donde el precio del subyacente sigue un paseo aleatorio no estacionario, con una volatilidad que se incrementa cuando el precio del activo aumenta (Modelo de opción compuesta).

Planteamientos alternativos para la volatilidad también los encontramos en el modelo de difusión desplazada y en los modelos que hemos denominado de "volatilidad estocástica", que recogen comportamientos no incorporados en los anteriores, y que han acaparado la atención de muchos investigadores en el área de las Finanzas. Las últimas tendencias para la dinámica de la varianza de la rentabilidad de un activo se encuentran en los procesos de caos y en los procesos de difusión con saltos, que al igual que para el subyacente, también pueden ser válidos para su volatilidad. Por otro lado, también se incluye la metodología ARCH para el comportamiento de la volatilidad en tiempo discreto

Las propuestas de cada uno de estos modelos para el comportamiento de la volatilidad, así como las diferencias entre ellos serán analizadas con profundidad en el capítulo 2, que dedicamos enteramente a esta variable, fundamental en la determinación del precio de las opciones. Además se presenta en este capítulo un amplio listado de los diferentes procedimientos que se han utilizado para su estimación a lo largo de toda la literatura financiera.

1.3.2. TIEMPO DISCRETO.

En tiempo discreto no es posible, en términos generales, formar una cobertura sin riesgo y por tanto, se hace imposible derivar una ecuación de valoración que sea independiente de las preferencias por el riesgo por parte de los inversores.

Sin embargo, como Ross (1976) y Cox, Ross y Rubinstein (1979) [CRR en adelante] demuestran, la cobertura sin riesgo es posible en tiempo discreto con tal que el número de activos disponibles abarque todos los posibles estados de la naturaleza. En particular, si el precio del activo subyacente sigue un proceso binomial en un espacio de dos estados, entonces sólo tres activos (el activo subyacente, la opción y el bono sin riesgo) son necesarios para formar una cobertura sin riesgo, obteniéndose una fórmula de valoración de opciones de compra neutral al riesgo, sin exigir restricciones o supuestos sobre las preferencias de los individuos.

Cuando la negociación es discreta, pero el conjunto de variación de precios del activo subyacente es continuo, entonces será necesario establecer restricciones sobre las preferencias al riesgo para obtener una relación de valoración de opciones call neutral al riesgo, la cual por definición es independiente de la tasa esperada de rentabilidad del activo subyacente y de las consideraciones de riesgo del mercado. Específicamente, Merton (1973) plantea que si:

a) Hay un inversor individual que exhibe aversión al riesgo proporcional constante (funciones de utilidad CPRA),
b) El activo subyacente de la opción lo constituye la riqueza nacional agregada, o sus tasas de variacion estan perfectamente correlacionadas con las tasas de variacion de la riqueza nacional agregada.
c) Las rentabilidades de la riqueza nacional están distribuidas lognormalmente,

entonces el precio de la opción call de B-S es un precio de equilibrio general bajo negociación discreta.

Rubinstein (1976) obtiene la fórmula de B-S bajo condiciones de contratación discreta y relaciona los modelos tradicionales de valoración de opciones. Concretamente, demuestra que el precio del modelo de B-S sigue siendo válido para supuestos menos restrictivos que los de Merton (1973). Se relaja el supuesto de Merton del inversor individual, poniendo en su lugar a un inversor representativo, cuando las condiciones de agregación son satisfechas.

El segundo y tercer supuesto de Merton también se puede relajar sustituyéndolo por el requerimiento de que la variable aleatoria bidimensional rentabilidad del activo subyacente y rentabilidad de la riqueza agregada sea lognormal bivariante. Las funciones de utilidad logarítmicas, como señala Rubinstein (1976) tienen la característica de que las carteras óptimas son escogidas por los agentes económicos independientemente de las oportunidades que tengan dichos agentes de revisarlas en el futuro. En este caso sin embargo, es preciso mantener el primer supuesto.

El supuesto de funciones de utilidad de aversión al riesgo proporcional constante (CPRA) de Merton-Rubinstein es ampliamente analizado por Brennan (1979), refiriéndose a él como "modelo Rubinstein-Brennan" [22], y que también desarrolla Gonzalo Lozano Arnica (1993).

Finalmente y ya como resumen, se puede concluir que se han derivado relaciones de valoración neutrales al riesgo bajo dos especificaciones bastante diferentes:

1) No se introducen restricciones en las funciones de utilidad (excepto la no saciedad). Se suponen oportunidades de negociación continua y dinámicas del precio relativo descritas por procesos Itô (B-S), o posibilidades de negociación discreta y dinámicas del precio del activo descritas por un proceso binomial (CRR, [1979]).

2) Se introducen restricciones más fuertes sobre las funciones de utilidad. Se supone que la negociación es en intervalos discretos y las rentabilidades de los activos están distribuidas o de forma lognormal (funciones de utilidad CPRA de Rubinstein-Brennan) o de forma normal (funciones de utilidad CARA [23]).

Para Gonzalo Lozano Arnica (1993), esta segunda especificación presenta una justificación alternativa de la fórmula de B-S, sin utilizar argumentos de arbitraje. Añade que aunque el modelo de Rubinstein-Brennan es un modelo de equilibrio, está basado en condiciones bastante restrictivas y de contrastación problemática, ya que se trata de determinar la función de utilidad de los inversores que haga que las opciones de compra se valoren como si los inversores fueran neutrales al riesgo y se obtenga así la fórmula de B-S. El resultado de este planteamiento, como ya se expuso con anterioridad, concluye que esas funciones de utilidad son aquellas que presentan aversión al riesgo de proporcionalidad constante.

Una generalización de los trabajos anteriores se presenta en Auchmuty, Lee y Rao (1981), que suponiendo negociación discreta en los mercados financieros donde las rentabilidades de los activos están lognormalmente distribuidas, derivan una nueva relación de valoración de opciones para la clase de funciones de utilidad cóncavas con tercera derivada estrictamente positiva (con aversión decreciente al riesgo), que incluyen el caso especial de preferencias CPRA constitutivas del marco de preferencias de Rubinstein-Brennan. Esta aproximación, bajo el supuesto de que los precios de los activos están lognormalmente distribuidos, no

[22] Ver Rubinstein (1976) y Brennan (1979).

[23] Funciones de utilidad de aversión absoluta al riesgo constante.

requiere a un inversor representativo (como en Rubinstein-Brennan), y tampoco restringe a cada individuo a tener funciones de utilidad con aversión constante y proporcional al riesgo (CPRA).

1.3.2.1. Modelo binomial.

Fue planteado de forma simultánea por CRR (1979) y por Rendleman y Bartter (1979). Constituye un modelo simple en tiempo discreto y presenta como casos límites el modelo en tiempo continuo de B-S y el modelo puro de saltos de Cox y Ross (1976).

La obtención de la fórmula de valoración de opciones se hace sólo por argumentos de arbitraje y de forma algebraica, constituyendo así un método numérico eficiente y de fácil computación para valorar opciones.

Bajo el supuesto de que el precio del activo sigue un proceso binomial multiplicativo a lo largo de períodos en tiempo discreto, este modelo parte de la premisa de que el precio del activo a lo largo de cada período puede tomar dos valores posibles, con una determinada probabilidad para cada valor.

Se hacen supuestos similares a los de B-S, es decir, el factor de capitalización, $r = 1 + r'$, es constante (siendo r´ el tipo de interés), no hay costes de transacción, ni impuestos, ni requerimientos de margen. La acción puede tomar para el período siguiente dos valores, o bien uS o bien dS. Para que no se den oportunidades mediante el arbitraje tiene que ser u>r>d, ya que si esta desigualdad no se mantiene se podrían dar oportunidades de beneficios mediante el arbitraje. Por ejemplo, si u>d>r, tomando un préstamo al tipo de interés r-1 se podrían obtener beneficios ciertos comprando la acción.

$$S\begin{cases} uS & \text{con probabilidad } q \\ dS & \text{con probabilidad } 1 - q. \end{cases}$$

Cuando sólo hay un período hasta el vencimiento de la opción call, su valor respecto al precio del subyacente, S, y al precio de ejercicio, K, se iguala a:

$$C\begin{cases} C_u = \max[0, uS - K] & \textit{con probabilidad q} \\ C_d = \max[0, dS - K] & \textit{con probabilidad 1 - q.} \end{cases}$$

Para que no sea posible obtener beneficios del arbitraje, el valor de la opción debe ser igual al valor de una cartera formada por participaciones en el activo y bonos sin riesgo. Si no se da esta igualdad, se podrían obtener beneficios sin riesgo mediante la compra o venta de la opción o de la cartera.

Si se forma una cartera con Δ participaciones del activo y una cantidad B en bonos sin riesgo, su coste será, por tanto, $\Delta S+B$, de manera que al final del período, el valor de esta cartera será:

$$\Delta S + B\begin{cases} \Delta uS + rB & \textit{con probabilidad q} \\ \Delta dS + rB & \textit{con probabilidad 1 - q.} \end{cases}$$

La igualdad del valor de la opción y el de la cartera al final del período y para los dos posibles valores que tomará el activo nos lleva a las dos expresiones siguientes:

$$\Delta uS + rB = C_u$$
$$\Delta dS + rB = C_d$$

De la que obtenemos las proporciones que debemos elegir del activo y de los bonos sin riesgo para que el valor de la opción se iguale al valor de la cartera, y de ese modo no pueda haber beneficios derivados del arbitraje :

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \qquad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r}$$

Por lo que se concluye que para que no haya beneficios derivados del arbitraje, el valor de la opción ha de ser igual al valor de la cartera, es decir,

$$C = \Delta S + B =$$

$$= \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r}$$

$$= \left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)C_d\right] / r \qquad \text{si } C>S\text{-}K$$

en caso contrario, C=S-K. .

Haciendo la siguiente simplificación:

$$p \equiv \frac{r-d}{u-d} \qquad \text{y} \qquad 1-p \equiv \frac{u-r}{u-d} \qquad [24]$$

se obtiene el valor de una opción call que vence en el siguiente período, dado por:

$$C = \left[pC_u + (1-p)C_d\right]/ r$$

Esta idea fundamental se extiende mediante un procedimiento recursivo cuando faltan "n" períodos hasta el día de expiración de la opción, resultando así la fórmula binomial de valoración de opciones, dada por:

$$C = S\Phi\left[a; n, p'\right] - Kr^{-n}\Phi\left[a; n, p\right]$$

donde $p \equiv (r-d)/(u-d)$, $p' \equiv (u/r)p$, a es el entero más pequeño no negativo mayor que $\log(K/Sd^n)/\log(u/d)$ y $\Phi\left[a; n, p\right]$ es la función de distribución binomial, de manera que si a>n, C=0.

Esta fórmula tiene interesantes características:

1º No depende de q, de manera que incluso cuando los inversores tengan diferentes probabilidades subjetivas respecto a la evolución futura del precio del activo, se mantendrá la relación dada en la fórmula [24] anterior.

2º El valor de la opción no depende de la actitud del inversor respecto al riesgo, de manera que se utilizará la misma fórmula para un inversor que sea averso, indiferente al riesgo, o por el contrario, que prefiera el riesgo. Por lo tanto, y al igual que el modelo de B-S, la fórmula binomial de valoración de opciones es neutral al riesgo.

3º La única variable aleatoria de la cual depende el precio de la opción es el precio del subyacente.

4º Dado que $p \equiv (r-d)/(u-d)$ es siempre mayor que cero y menor que uno, tiene todas las propiedades de una probabilidad. Para el caso concreto en que los inversores fueran neutrales al riesgo y por tanto, la tasa esperada de rentabilidad para el activo fuera el tipo de interés sin riesgo, entonces,

$$q(uS) + (1-q)(dS) = rS$$

de donde

$$q = (r-d)/(u-d) = p$$

Por lo que podemos concluir que p sería el valor que tomaría q en equilibrio cuando los inversores son neutrales al riesgo. En este caso, el valor de la opción call puede interprerse como la expectativa de su valor futuro descontado en un mundo neutral al riesgo.

Este resultado no implica que, en el equilibrio la tasa esperada de rentabilidad de la opción call sea la tasa de interés sin riesgo. Lo que se ha demostrado es que, en equilibrio, mantener una opción call un período es exactamente equivalente a mantener la cartera anterior. De esa manera, el riesgo y la tasa esperada de rentabilidad de la opción call deben ser iguales a los de la cartera.

CRR (1979) así como Bartter y Rendleman (1979) demuestran que este modelo converge al resultado del modelo de B-S cuando "t" es dividido en más y más subintervalos [24] y las demás variables se elijan de modo que la distribución de

[24] cuando el intervalo de negociación se aproxima a cero.

probabilidad binomial multiplicativa de los precios del activo converja a una distribución lognormal.

El trabajo de Hsia (1983) presenta una demostración general y simple de esa convergencia entre el proceso binomial y el proceso de difusión lognormal que se supone en el modelo de B-S.

La fórmula binomial de valoración de opciones proporciona una explicación alternativa a los resultados de Macbeth y Merville (1979), pues en efecto, aparentemente corrige los sesgos sistemáticos que produce la fórmula de B-S.

Otra aplicación del modelo binomial es la inclusión de otro caso límite, el proceso de saltos en tiempo continuo definido por Cox y Ross (1976) y examinado en las primeras páginas de esta tesis. Para determinados valores de u, d y q, se llega a la fórmula de valoración de opciones bajo un proceso "puro" de saltos, dada por:

$$C = S\psi[x; y] - Kr^{-t}\psi[x; y/u], \qquad [25]$$

donde

$$y \equiv (\log r - \zeta)ut/(u-1),$$

x el entero más pequeño no negativo

mayor que (log(K / S) - t) / log u.

$$\psi[x; y] \equiv \sum_{i=x}^{\infty} \frac{e^{-y} y^{i}}{i!}$$

Adicionalmente, Nelson y Ramaswamy (1990) hacen un estudio exhaustivo de la convergencia que se establece entre el proceso binomial simple y el proceso de difusión lognormal que subyace en la metodología de B-S [25]. Presentan las condiciones bajo las que una secuencia de procesos binomiales converge

[25]Además, demuestran que el uso de esta aproximación binomial se restringe para aquellas situaciones donde el precio del activo subyacente sigue un proceso lognormal en tiempo continuo, ya que para otros procesos, como por ejemplo el de varianza de elasticidad constante (que se expone en el Capítulo 2), la convergencia se hace muy compleja.

débilmente a un proceso de difusión y además muestran cómo emplear una transformación relativamente sencilla para producir procesos binomiales que son simples en tratamiento computacional.

Stapleton y Subrahmanyan (1984) y Boyle (1988) logran diferentes extensiones del modelo binomial original que denominan "modelo de estado simple de CRR (1979)".

En Stapleton y Subrahmanyam (1984) se valoran opciones sobre activos, cuyas rentabilidades a lo largo de un único período de tiempo, se generan por un proceso binomial "de estados múltiples". A diferencia del modelo binomial "de estado simple", este modelo permite que el precio del activo tome múltiples valores y no sólo dos, como se suponía en el modelo de estado simple. Un ejemplo es el modelo binomial de dos estados (n=2), en el cual se permiten tres posibles valores en el precio del activo: que suba, que baje o que permanezca inalterado.

A diferencia del trabajo de B-S, basado en el establecimiento de coberturas sin riesgo entre el activo subyacente y la opción, Stapleton y Subrahmanyan (1984) al igual que Rubinstein (1976) y Brenan (1979), resuelven el problema de valoración de opciones mediante una aproximación basada en las preferencias y que supone el establecimiento de relaciones de valoración neutrales al riesgo, que no están basadas en consideraciones de arbitraje. Obtienen de ese modo, y para el caso de sólo un estado, un modelo análogo al modelo binomial de CRR (1979), que sí está basado en condiciones de arbitraje y no exige ningún tipo concreto de preferencias respecto al riesgo.

Finalmente, Stapleton y Subrahmanyan (1984) extienden los resultados de Rubinstein (1979) y Brennan (1979) al caso de un proceso binomial de n-estados para el caso de distribución continua. Así, cuando la cobertura no es posible, sus precios se aproximan para un número finito de estados a los precios de Rubinstein de la misma forma que los precios de CRR (1979) se aproximan a los de negociación continua de B-S cuando la cobertura sí es posible.

Otra extensión, similar a la anterior, del algoritmo binomial "lattice" (rejilla) [26] de CRR (1979) para valorar opciones sobre un activo aparece en el trabajo de Boyle (1988), en el que se desarrolla un procedimiento para valorar opciones cuando hay más de una variable de estado subyacente, supuesto que ha sido también analizado en los trabajos anteriores de Johnson (1981), Stulz (1982), Schwartz (1982) y Boyle y Kirzner (1985) [27]. Muy brevemente, esta técnica consiste en sustituir el proceso binomial de estado simple de CRR (1979), por un proceso de dos estados (three-jump).

Los modelos de tres saltos han sido usados antes en la literatura para analizar problemas de valoración de opciones, pero planteaban alguna dificultad: Stapleton y Subrahmanyan (1984) comentado anteriormente, que plantearon un modelo de tres saltos, pero no examinaron ni su eficiencia numérica ni obtuvieron soluciones relacionadas con las probabilidades de salto; Parkinson (1977) empleaba un modelo de tres saltos para valorar opciones put americanas, pero su aproximación parecía difícil de generalizar a situaciones que contienen más de una variable de estado; Brennan y Schwartz (1978) simplemente aportaban las relaciones entre los coeficientes de la ecuación diferencial transformada de B-S y las probabilidades de un proceso de tres saltos.

La aportación de Boyle (1988) respecto a trabajos anteriores es la obtención de un procedimiento para calcular las probabilidades y las amplitudes de los saltos cuando hay dos variables de estado, que, a su vez, tienen una distribución lognormal conjunta. Una vez obtenidas las probabilidades y amplitudes de los saltos y con la matriz de varianza-covarianza de la distribución lognormal bivariante de los valores de los activos al final del período de tiempo hasta el vencimiento, llega a un sistema de ecuaciones, que en base a unas restricciones, permite obtener la fórmula de valoración.

El procedimiento de aproximación sugerido por Boyle puede, según el propio autor, ser usado en diferentes casos:

- Para la valoración de opciones americanas y cuando hay pago de dividendos.

[26] como lo denomina Boyle.
[27] Cfr. en Boyle (1988).

- Para la valoración de deuda subordinada, cuando la empresa subyacente consiste en dos activos con riesgo con una distribución conjunta lognormal. Este caso fue examinado con anterioridad por Stulz y Johnson (1985), quienes usan una aproximación numérica para resolver la ecuación diferencial resultante.

- Como otro procedimiento alternativo a la valoración de opciones con volatilidades estocásticas [28].

Este primer trabajo de Boyle culmina con un posterior artículo de Boyle, Evnine y Gibbs (1989), en el que se desarrolla un método de aproximación numérica para la valoración de activos derivados multivariantes, basado en una extensión n-dimensional del método binomial reticular de CRR (1979). La idea clave es elegir tamaños y probabilidades de salto de manera que la función característica de la distribución discreta converja a la de la distribución continua.

Para llevar a cabo la extensión del modelo de CRR (1979) para varios activos, Boyle, Evnine y Gibbs (1989) proceden de la siguiente manera:

1º Construyen una distribución de probabilidad discreta para aproximar la distribución lognormal multivariante. La distribución discreta converge a la distribución lognormal cuando la longitud del tiempo de cada paso tiende a cero. El procedimiento es similar al método unidimensional de CRR (1979), excepto que ahora tenemos n activos. Suponen que al final del tiempo de cada paso el precio del activo se puede mover arriba o abajo, de modo que después del paso del tiempo habrá 2^n estados.

2º Valoran el activo derivado en este marco de tiempo discreto, descontando su valor esperado terminal a la tasa de interés sin riesgo.

3º Obtienen el valor del activo derivado con el grado de exactitud deseado reduciendo el tamaño del intervalo de tiempo.

Más ampliaciones al modelo original binomial de CRR (1979) las encontramos en Amin (1991). En un marco probabilístico Amin plantea una variedad de modelos alternativos en tiempo discreto, de manera que aproximando a su límite en tiempo

[28] problema ampliamente analizado en el capítulo siguiente.

continuo, los valores de las opciones que se obtienen convergen a sus respectivos valores en tiempo continuo. Este trabajo se extiende en tres caminos diferentes:

1.- Permite funciones de volatilidad que varían en el tiempo y que pueden capturar la persistencia y la reversión en media de la varianza de los activos. Estas funciones también fueron usadas por Merton (1973) y Grabbe (1983) y pueden ser utilizadas en los modelos de estructura temporal de tipos de interés de Vasicek (1977) y Heath, Jarrow y Morton (1990). Las técnicas numéricas existentes tales como la sugerida por Boyle (1988) y Nelson y Ramaswamy (1990) comentadas anteriormente no pueden ser usadas cuando la volatilidad depende del tiempo.

2.- Se construyen modelos discretos multivariantes, que son más exactos y más consistentes que los planteados por los modelos en tiempo continuo de Boyle (1988) y Boyle, Evnine y Gibbs (1989).

3.- Se estudian numerosas y diferentes especificaciones de los modelos discretos (con 3, 4 y hasta 5 bifurcaciones) y se compara su exactitud numérica relativa.

Los resultados de la contrastación, para el caso de un estado, no permiten concluir que, dentro del conjunto de modelos alternativos propuestos por el procedimiento de Amin (1991), un modelo sea más eficiente que otro. No obstante y para el caso multivariante se presentan recomendaciones específicas respecto a su exactitud relativa.

1.3.2.1.1 Aplicaciones del método binomial.

El método binomial, dada su característica de análisis en tiempo discreto, presenta enormes aplicaciones prácticas en la resolución de problemas de valoración que los modelos en tiempo continuo, como el modelo de B-S, no resuelven.

Un primera aplicación está en la valoración de opciones de tipo americano y una segunda aplicación es cuando la acción paga dividendos que, dada la relación implícita que hay entre ellas, analizaremos conjuntamente. Finalmente, una tercera aplicación se encuentra en la valoración de opciones sobre tipos de interés.

Las opciones americanas son más difíciles de valorar que las europeas dado que hay una probabilidad positiva de ejercicio prematuro, antes de la expiración de la opción. Esa posibilidad de ejercitar anticipadamente una opción cuando es americana, es la razón por la que su valor es superior a una equivalente de estilo europeo. No obstante y tal y como demuestra Merton (1973), su valor se iguala a una europea cuando no hay pago de dividendos o pagos a la acción a lo largo de la vida del contrato o cuando el contrato está protegido [29] frente a esos pagos, en cuyo caso no se ejercitará la opción antes del vencimiento.

Un dividendo pagado durante la vida de la opción call reduce el precio de la acción en el instante del pago del dividendo (ex-dividend), y así reduce la probabilidad de que el precio de la acción exceda del precio de ejercicio el día de la expiración. Esta circonstancia deberá ser tenida en cuenta a la hora de valorar este tipo de opciones.
Por estas razones, la fórmula de B-S, que se planteó inicialmente para valorar opciones europeas (put y call), también es válida para opciones call americanas cuando no hay pago de dividendos, pero en ningún caso sirve para valorar opciones call americanas cuando hay pago de dividendos o para put americanas [30].

Por tanto, se han de resolver dos cuestiones: por un lado, cómo valorar opciones sobre acciones call de tipo americano cuando hay pago de dividendos y por otro lado, lo mismo para el caso de opciones put americanas con y sin dividendo. Además, en esta doble clasificación, también se deberá tener en cuenta la posibilidad de ejercicio anticipado de la opción que en determinados casos puede

[29] Se dice que una opción está protegida frente a pagos distributivos, como pueden ser los dividendos, cuando el valor de la opción se mantiene inalterado una vez que se han producido esos pagos.
[30] Merton (1973) deriva una fórmula para opciones put americanas perpetuas, es decir, cuando el tiempo hasta el vencimiento es infinito.

ser óptimo. Es importante resaltar que el ejercicio anticipado de las opciones americanas en presencia de dividendos se haría en las fechas inmediatamente anteriores al pago de dividendos y evidentemente, si están "en dinero".

Se han dado razonamientos diferentes para presentar las condiciones bajo las cuales el ejercicio prematuro, antes de la expiración de la opción call puede ser óptimo. Mientras que Smith (1976) lo analiza a través del valor de dos carteras alternativas, CRR (1979) hacen uso del método binomial, y Roll (1977) lo resuelve una vez que obtiene las cantidades que percibiría el poseedor de la opción si decide mantener la opción (S-X) o si, por el contrario, decide ejercitarla anticipadamente (en cuyo caso recibiría S+αD-X [31]. Haciendo uso de la fórmula de B-S se llega a la restricción del valor límite que puede tomar la opción cuando el subyacente se incrementa, dada por:

$$\lim_{S \to \infty} c(S, T-t, X) = S_t - Xe^{-r(T-t)}$$

donde c es el valor de la opción de compra, T-t es el tiempo que falta para la expiración de la opción, X es el precio de ejercicio y S es el precio de la acción.

Con esta restricción, Roll llega a la condición que establece que si $\alpha D > X\left[1 - e^{-r(T-t)}\right]$, entonces existe algún valor para el precio de la acción en el instante antes del pago del dividendo, S_t*, por encima del cual la opción americana debería ser ejercitada justo antes de t, momento del pago del dividendo. El Gráfico 2 muestra estos resultados.

[31] En esta expresión, α es el porcentaje de reducción en el precio de la acción en el instante antes del dividendo, definida como una proporción del mismo.

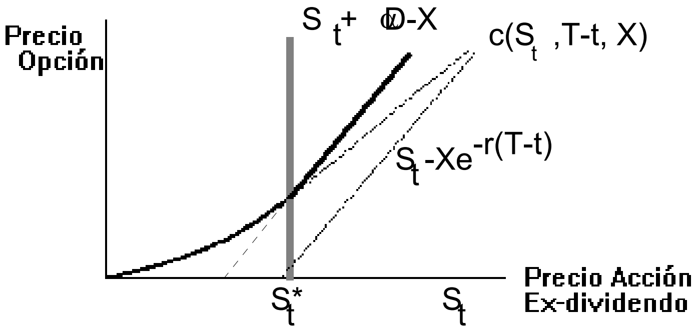


GRÁFICO 2

Además, este ejercicio prematuro es más probable que se produzca cuanto mayor sea el dividendo, cuanto más alto sea el precio de la acción respecto al precio de ejercicio (cuanto más "deeply-in-the-money")) y más corto sea el período de tiempo entre la expiración y el día del pago del dividendo.

En relación a las opciones put americanas, se puede producir el ejercicio anticipado aunque no haya dividendos. Concretamente, se ejercitará anticipadamente una put sin dividendos cuando el valor de una put, por la relación de paridad put-call, en caso de dejarla madurar, sea inferior al valor que se recibiría si se ejercitara inmediatamente, es decir, cuando:

$$C - S + X(1+i)^{-T} < X - S \qquad [26]$$

CRR (1979), al igual que Roll (1977), plantean que hay un valor crítico de la acción, tal que cualquier valor de la acción inferior a ese, indicará que la opción put debe ser ejercitada inmediatamente. Ese valor crítico es tal que:

$$\left[pP_u + (1-p)P_d\right] / \hat{r} = K - S \qquad [27]$$

donde las expresiones para P_u y P_d son similares a C_u y C_d, definidas en la página 45, pero para opciones put, p está definido en [24] y $\hat{r}$ es uno más el tipo de interés para un intervalo de tiempo determinado

Si además introducimos los dividendos, la condición necesaria y suficiente para ejercitar automáticamente la opción put, incluso antes de la distribución del dividendo, es:

$$C - S + X(1+i)^{-T} + \alpha D(1+i)^{-t} < X - S \qquad [28]$$

donde t es el tiempo entre el día del pago del dividendo y el día de expiración de la opción.

Es decir, incluso sin dividendos, y a diferencia de las opciones calls, puede ser óptimo ejercitar una opción put antes de su vencimiento, de manera que una opción put americana sí que tendrá mayor valor que la correspondiente europea. El ejercicio anticipado de las opciones put es más probable que se produzca cuanto máyor sea su valor intrínseco (más "deeply in the money") y mayor sea el tipo de interés. El efecto de los dividendos disminuye las ventajas del ejercicio anticipado, dado que el reparto futuro de dividendos hará aumentar el valor intrínseco de la put para su comprador, en cuyo caso preferirá dejar sin ejercitar dicha opción.

De igual manera, Pablo Fernández (1991a) una vez que demuestra que la fórmula de B-S no sirve para valorar opciones put americanas, calcula el rango de una función concreta S** para el precio de la acción. Los valores de la acción que estén por debajo de esta función indicarían que el ejercicio inmediato de la opción put americana es óptimo. Esta función depende del tipo de interés y de la volatilidad, de manera que cambios en el valor de estas variables produce desplazamientos de dicha función, los cuales se analizan detenidamente en el trabajo.

El metodo binomial, dada su sencillez y aplicabilidad práctica, ha sido el más utilizado para la valoración de opciones americanas sin y con dividendos. Se puede demostrar la utilidad de este método y las mejoras en la valoración respecto a modelos alternativos, como puede ser el de Geske (1979b) que presentaremos más adelante.

La valoración que hace el método binomial para las opciones call cuando hay pago de dividendos por la acción es similar a la que se hace cuando no había dividendos. Se parte del caso más sencillo, que es cuando sólo falta un período para la expiración y, concretamente, al final de este período se producirá el reparto del dividendo, instante en el que el propietario de la acción recibirá un dividendo de δuS o δdS, donde δ es el dividendo definido como porcentaje de la acción, que se supone conocido y constante.

El precio de la acción al final del período será $u(1-\delta)^{v}S$ o $d(1-\delta)^{v}S$, donde v=1, si al final del período se produce el reparto de dividendo y v=0, en los demás casos. Dado que no habrá más reparto de dividendos en el período analizado, una vez que se haya pagado el dividendo establecido, la opción americana y la europea tendrán el mismo valor, y por tanto ya no habrá probabilidad de ejercicio anticipado. El valor de las opciones de compra al vencimiento será:

$$C_u = \max\left[0, u(1-\delta)^{\upsilon}S - K\right]$$
$$C_d = \max\left[0, d(1-\delta)^{\upsilon}S - K\right]$$

Se procede entonces de igual manera con la metodología binomial y se llega al valor de la opción, dado por:

$$\begin{array}{ll} C = \left[pC_u + (1-p)C_d\right]/\hat{r} & \text{cuando es mayor que S - K,} \\ C = S - K & \text{en los demás casos.} \end{array}$$

donde $\hat{r}$ es uno más el tipo de interés a lo largo de un intervalo de tiempo determinado y p aparece definido con anterioridad en [24].

De este resultado, se obtiene que hay siempre un valor "crítico" para la acción, $\hat{S}$ tal que si S $\hat{S}$, la opción call debe ser ejercitada inmediatamente. El valor crítico para S es tal que:

$$\left[pC_u + (1-p)C_d\right]/\hat{r} = S - K$$

Cuando hay n períodos hasta la expiración de la opción, y puede haber más repartos de dividendos, CRR (1979) utilizan un procedimiento numérico secuencial hacia atrás, es decir, se inicia el día de vencimiento de la opción hasta el instante actual en que calculamos el valor de la opción.

También podrían analizarse con el método binomial diferentes políticas de reparto de dividendo, cuando el dividendo dependa del precio de la acción de una determinada manera o relación funcional.

La valoración de las opciones de venta, put, americanas con o sin dividendos por el método binomial es bastante sencilla, y de igual manera que con las calls, se obtiene su valor, cuando falta un período para su expiración, valor que viene dado por:

$$
\begin{aligned}
P &= \left[pP_u + (1-p)P_d\right] / \hat{r} \quad && \text{si es mayor que K - S} \\
P &= K - S && \text{en los demás casos.}
\end{aligned}
$$

Cuando se generaliza el resultado anterior para n períodos hasta el vencimiento de la opcion put y aún con la posibilidad de ejercitarla anticipadamente incluso sin pago de dividendos, CRR (1979) proponen el mismo metodo numérico que para las opciones calls. El único cambio es que, a diferencia de las calls, figure la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de la acción.

Geske (1979b) presenta un método alternativo para valorar opciones call americanas en presencia de dividendo, denominado como "método de la opción seudoamericana". Este método consiste en tomar como valor de estas opciones el mayor valor de los dos siguientes:

-El valor de una opción call europea, del mismo vencimiento que la opción americana a evaluar.

-El valor de una opción call europea, cuyo vencimiento coincide con el día inmediatamente anterior a la distribución del dividendo.

Este método, sin embargo, sólo sirve como una aproximación al verdadero valor de la opción americana (de ahí lo de seudoamericana), ya que se observan sesgos importantes en su valoración exacta; concretamente, las infravalora sistemáticamente. Otro defecto que se observa en este método es que al establecer de antemano unas fechas determinadas de posible ejercicio anticipado, ignora la posibilidad de un cambio significativo en el precio de la acción que, por tanto, modificaría la fecha del posible ejercicio anticipado de la opción.

1.3.2.1.2. Otras técnicas numéricas.

Otras técnicas numéricas, además de la binomial, propuestas para la valoración de opciones de tipo americano o cuando hay pago de dividendos pueden clasificarse en:

- Aproximación por diferencias finitas a la ecuación en derivadas parciales de B-S del valor de la opción, método empleado por Brennan y Schwartz (1978) y Courtadon (1982b).

- Integración numérica, usada por Parkinson (1977).

- Métodos de Monte Carlo, sugerido por Boyle (1977).

- Aproximaciones numéricas de Johnson (1983), Geske y Johnson (1984), MacMillan (1986).

Las técnicas de diferencias finitas analizan la conocida ecuación parabólica en derivadas parciales de B-S o también la transformación más tratable y reducida que tanto B-S (1973) como Merton (1973) han obtenido y que ha sido objeto de un considerable tratamiento numérico y analítico en las ciencias físicas. Esta transformación se recoge del trabajo de Geske y Shastri (1985) y viene dada por:

$$a\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x} \qquad [29]$$

donde a y k son constantes, t es el tiempo hasta la expiración, x es el precio de la acción y u es el precio de la opción.

Este análisis se lleva a cabo para obtener estimaciones discretas de los cambios en el valor de la opción debidos a pequeñas variaciones en el tiempo y en el precio del activo subyacente, formando ecuaciones en diferencias como aproximaciones de las derivadas parciales en tiempo continuo.

Hay una infinidad de formas de estimar estos cambios en el valor de la opción con respecto al tiempo y al precio del activo subyacente [32], pero todas permiten que las soluciones puedan ser clasificadas en explícitas o implícitas. En la clase explícita, cada precio desconocido de la opción en cualquier nudo [33] puede ser obtenido explícitamente en términos de los precios nudos de las opciones anteriores que son conocidos, mientras que en la clase implícita debe resolverse un conjunto de ecuaciones simultáneas.

Una aproximación en diferencias finitas explícita a la ecuación en derivadas parciales de B-S es:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = c\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 + O(\Delta t) \qquad [30]$$

Una aproximación implícita es:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = c\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 + O(\Delta t) \qquad [31]$$

donde i y j especifican diferencias respecto al precio del stock y el tiempo, respectivamente, c es un coeficiente de transformación y O(.) representa el orden de los errores en las aproximaciones del precio del stock y el tiempo.

Schwartz (1977) introduce una técnica numérica, aproximación por diferencias finitas, cuando no es posible encontrar una solución analítica para la valoración de opciones sobre acciones que pagan dividendos discretos en el tiempo.

[32] diferencias forward, centrales, backward,etc.

[33] Como así lo denominan Geske y Shastri (1985). El concepto de nudo se refiere a aquellos puntos donde hay bifurcación.

En este caso, aunque se utiliza la misma ecuación en derivadas parciales de B-S para el caso de no dividendos, las condiciones de contorno cambian cada día de pago de dividendos, debido al hecho de que puede ser óptimo ejercitar las opciones americanas en esos momentos. En el mismo trabajo, Schwartz hace un estudio comparativo entre la solución numérica que propone y el modelo de B-S sin considerar dividendos y considerando un dividendo proporcional al valor del activo, y obtiene los siguientes resultados:

.La solución numérica y el modelo de B-S con dividendo son muy similares.
.La solución B-S sin dividendo se aproxima mejor a los precios observados de mercado.

Del mismo modo que Cox y Ross (1976) demuestran que en el límite el proceso de saltos se aproxima a un proceso de difusión puro, Brennan y Schwartz (1978) se proponen demostrar que la aproximación de la ecuación en derivadas parciales de B-S usando el método de diferencias finitas es equivalente a aproximación del proceso de saltos al proceso de difusión y, de ese modo, la aproximación por diferencias finitas es un tipo de integración numérica, procedimiento empleado por Parkinson (1977).

En particular, Brennan y Schwartz (1978) establecen que la aproximación más simple de diferencias finitas "explícita" es equivalente a la aproximación del proceso de difusión por un proceso de saltos analizado en Cox y Ross (1976) [34], mientras que la aproximación por diferencias finitas "implícita" equivale a la aproximación del proceso de difusión para una clase de procesos de saltos más general [35].

Para simplificar el procedimiento numérico que requieren las demostraciones anteriormente propuestas se hacen transformaciones logarítmicas de la ecuación de B-S.

---

[34] Cox y Ross (1976) analizaban el proceso de saltos de tres puntos, es decir, donde el precio del activo podía saltar a tres posibles valores.

[35] El proceso de saltos general se define cuando el precio del activo puede saltar a una infinidad de posibles valores futuros.

La crítica que se hace a esta técnica de aproximación y que destaca Courtandon (1982b) es que la varianza de la aproximación está sesgada en relación al proceso de difusión aproximado.

Finalmente, Brennan y Schwartz (1978) concluyen que los coeficientes de la aproximación por diferencias finitas a la ecuación en derivadas parciales de B-S se corresponden a las probabilidades de la aproximación de un proceso de saltos a un proceso de difusión

Courtandon (1982b) utiliza también esta técnica e introduce una aproximación que tiene un mayor nivel de exactitud que la técnica de Schwartz. Además, demuestra que el algoritmo presentado en su trabajo suprime el sesgo que Brennan y Schwartz (1978) encontraban en la varianza y que se comentó con anterioridad.

Según Barone-Adesi y Whaley (1987), la mayor limitación de estos métodos de diferencia finita para la valoración de opciones americanas es que son computacionalmente caros.

Parkinson (1977) propone la técnica de la integración numérica, que utiliza inicialmente para calcular el valor de una opción call europea y finalmente la extiende para opciones call y put americanas. De forma muy breve, su técnica consiste en derivar y calcular el valor esperado de la opción en relación a dos variables, tiempo y precio del activo subyacente.

En su análisis supone una distribución lognormal para el precio del activo subyacente a la opción y así obtiene de igual forma la fórmula de una opción call y put americana. Los resultados de la contrastación empírica muestran que los valores obtenidos por la fórmula están la mayoría por debajo de los valores reales en pequeños porcentajes, pero no obstante, hay en algunos casos, grandes discrepancias.

Johnson (1983) desarrolla una expresión analítica aproximada [36] para el valor de una put americana sobre un activo que no paga dividendos. El planteamiento subyacente en su expresión es que la put americana tiene más valor que la put

[36] que el autor llama expresión cuasi-analítica.

europea, pero menos valor que una put europea con un precio de ejercicio constante en términos de valor actual [37]. Esta aproximación requiere además la especificación aproximada del precio "crítico" del stock, por debajo del cual la opción put podría desaparecer inmediatamente. Sin embargo, no se recoge ni la posibilidad de pago de dividendos, ni analiza otras propiedades de la solución propuesta.

Dado que en cada instante hay una probabilidad positiva de ejercitar la opción americana, esta situación, para Geske y Johnson (1984), es equivalente a una secuencia infinita de opciones sobre opciones, es decir, opciones compuestas. Así pues y basándose en el modelo de opción compuesta de Geske (1979), Geske y Johnson (1984) presentan una fórmula analítica que satisface la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno que caracterizan el problema de valoración de put americanas.

La clave de esta solución es que cada decisión de ejercicio es considerada como un suceso discreto. Así, la fórmula que derivan es una solución en tiempo continuo a la ecuación en derivadas parciales en un número infinito de instantes discretos, e implica una duplicación exacta de la cartera para la put americana formada por una posición larga determinada en bonos al descuento y corta en el activo. La fórmula se extiende para considerar opciones put sobre activos que pagan dividendos y presenta además los ratios de cobertura y demás derivadas de la fórmula respecto a sus parámetros (S,r,T,X y σ).

Al igual que las aproximaciones numéricas de Parkinson (1977) y Geske y Johnson (1984), MacMillan (1986) propone una técnica de aproximación que consiste en obtener analíticamente un valor aproximado de la opción put americana, en relación al valor de la opción put europea.

La relación entre ambas opciones put la expresa MacMillan de la siguiente forma:

Opción put americana = opción put europea + valor extra

[37] nótese que cualquier put europea es equivalente a una americana con un precio de ejercicio creciente con el tipo de interés sin riesgo.

Este valor extra lo determina a partir de la ecuación en derivadas parciales de B-S y Merton, que este valor extra deberá satisfacer. Con simples operaciones y sustituyendo la expresión general por una función más simple, concluye:

$$P(S,T) = p(S,T) + (1 - e^{-rT})aS^{q} = p + Kf \qquad [32]$$

donde P(S,T) es el precio de una opción put americana, cuyo valor depende del precio del activo subyacente, S y del tiempo hasta la expiración, T, p(S,T) es el precio de una put europea, r es el tipo de interés sin riesgo, $K(T) = 1 - e^{-rT}$, $f = aS^{q}$, q y a son constantes que hay que determinar. La representación de esta función del valor extra en relación al precio del activo, S, varía en función de los valores que tome el parámetro a.

MacMillan (1986) intenta determinar el precio crítico del activo subyacente, S_c, por debajo del cual se ejercitará automáticamente la opción put americana. De entre las distintas funciones del valor extra para los diferentes valores del parámetro a, MacMillan concluye que el valor crítico del precio del activo subyacente es el punto de tangencia entre la función del valor extra y la función X - S, resultado que se aplicará para la determinación del valor de a. Una vez determinado el valor de a se obtendrá la definitiva forma funcional del valor extra y así el correspondiente valor de la opción put americana.

Finalmente, este resultado es comparado con las soluciones numéricas que plantearon Parkinson (1977) y Geske y Johnson (1984). Los resultados se asemejan bastante a los que presentaron estos trabajos anteriores, con la ventaja de que este modelo permite utilizar programas más rápidos y sencillos.

Una aplicación de la técnica de MacMillan (1986) se encuentra en el trabajo de Barone-Adesi y Whaley (1987) para valorar opciones americanas sobre mercancías y sobre futuros sobre mercancías.

La consideración del dividendo ya había sido analizada antes de la propuesta binomial de CRR (1979). Los primeros trabajos que consideraban el pago de dividendos datan de la primera mitad de los años setenta. El artículo de Merton (1973), sin embargo, sólo analiza el caso en que los dividendos se pagan de forma continua y la tasa del dividendo es constante, proporcional al precio de la acción

($\delta \equiv D / S$). Además establece una condición suficiente para no ejercitar de forma anticipada una opción call americana desprotegida del pago de dividendos, cuando los dividendos futuros y los tipos de interés se conocen con certidumbre:

$$K[1 - B(\tau)] > \sum_{t=0}^{\tau} D_t B(\tau - t) \qquad [33]$$

es decir, cuando el valor actualizado neto de los dividendos futuros sea menor que el valor actualizado de los beneficios obtenidos invirtiendo K dólares durante τ períodos en bonos sin riesgo. En esta desigualdad, K es el precio de ejercicio, τ son los años antes de la expiración, t representa los años que restan desde el día de pago del dividendo t-ésimo al vencimiento, y B (τ - t) es el precio actualizado de un bono sin riesgo de insolvencia que paga un dólar dentro de τ - t años a partir de ahora. Si se pagasen los dividendos de forma continua a una tasa constante de d dólares por unidad de tiempo y el tipo de interés, r, fuese el mismo a lo largo del tiempo, la ecuación anterior se puede reescribir en forma continua como:

$$K > d / r \qquad [34]$$

Black (1975) considera el pago de un dividendo finito, discreto y, a su vez, cierto. La aproximación de Black constituye, por tanto, la base en la consideración del dividendo a la hora de valorar las opciones sobre acciones. Una vez que Smith (1976) demuestra que una opción americana puede generar beneficio para su poseedor si la ejercita anticipadamente, justo el instante antes del pago del dividendo, Black recomienda aproximar el valor de una opción call americana al mayor valor entre los dos siguientes:

a) Una opción call europea donde se sustituye el precio de la acción por el precio de la acción menos el valor actual del dividendo garantizado, es decir:

$$\begin{aligned} &c(S, T, X) \quad \text{donde} \\ &S_\tau = P_\tau - \alpha D e^{-r(t-\tau)} \ \ \text{para } \tau < t \\ &S_\tau = P_\tau \qquad\qquad \text{para} \quad t \le \tau \le T \end{aligned} \qquad [35]$$

donde P es el precio de la acción, αD es la reducción conocida del precio de la acción tras el pago del dividendo, T es el tiempo hasta la expiración de la opción, t es el instante del pago del dividendo y τ es el momento actual (en el que se calcula el valor de la opción).

En la valoración de esta opción se supone que no se va a ejercitar antes de su vencimiento, de forma que la probabilidad de ejercitarla anticipadamente es cero.

b) Una opción call europea donde el tiempo a la expiración T es sustituido por el tiempo hasta el momento del pago del dividendo, que expresaremos como c(P, t, X).

En la valoración de esta opción, a diferencia del caso a), se supone que el ejercicio anticipado, justo en el instante antes del pago del dividendo, es siempre óptimo, de manera que la probabilidad de ejercicio anticipado es uno.

Como resumen, la aproximación de Black (1975) exige calcular la siguiente expresión:

$$\max [c (S, T , X) , c (P, t , X)]$$

De esta manera, en la valoración de una opción americana call sobre una acción que paga un dividendo cierto, no siempre resulta óptimo ejercitarla antes del vencimiento de la opción, ni siquiera el instante antes del pago del dividendo.

La aportación de Roll (1977) a la problemática de la valoración de opciones cuando la acción paga dividendos se basa en la observación de que una opción call americana sobre una acción que paga dividendos conocidos antes de la expiración de la misma equivale a una cartera de tres opciones europeas, de las que sí conocemos su valor. En concreto obtiene que el valor de una opción americana call desprotegida, con precio de ejercicio igual a X y dividendos ciertos, se compone de:

1.-una opción call europea sobre una acción con precio de ejercicio X y vencimiento T.

2.-más una opción call europea sobre una acción con precio de ejercicio S_t*+αD y vencimiento t-ε (ε>0, $\varepsilon\cong 0$), donde S_t *es el precio de la acción para el cual es indiferente ejercitar o no la opción el día ex-dividend.

3.-menos una opción call europea sobre la opción descrita en el punto 1 con maduración t-ε y precio de ejercicio S_t*+αD-X, cuya valoración obtendremos del modelo de opción compuesta de Geske (1976).

Dado que la cartera compuesta de estas tres opciones replican el cash-flow obtenido con una opción call americana sobre una acción que paga dividendos ciertos, su valor debe ser igual.

Geske (1979b) presenta una solución más compacta y mejorada del trabajo de Roll (1977). Si el precio de la acción sigue un proceso de difusión lognormal, existe una probabilidad de que el dividendo no sea pagado.

Será Whaley (1981, 1982) quien finalmente, y basándose en los trabajos anteriores de Roll y Geske, presenta la definitiva solución analítica al problema de valoración de opciones sobre acciones cuando hay pago de dividendos, conocida como "modelo Roll-Geske-Whaley" (RGW), dada por:

$$C(S,T,X) = S\left[N_1(b_1) + N_2(a_1,-b_1;-\sqrt{t/T})\right]$$

$$-Xe^{-rT}\left[N_1(b_2)e^{r(T-t)} + N_2(a_2,-b_2;-\sqrt{t/T})\right]$$

$$+\alpha De^{-rT}N_1(b_2), \qquad [36]$$

donde

$$a_1 = \left\{\ln(S/X) + (r+0.5\sigma^2)T\right\}/\sigma\sqrt{T}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$b_1 = \left\{\ln(S/S_t^*\right\} + (r+0.5\sigma^2)/\sigma\sqrt{t}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t}$$

y $N_2(a,b;\rho)$ es la función de distribución normal bivariante extendida entre a y b, y coeficiente de correlación, ρ. S_t^* es el precio del stock ex-dividend determinado por:

$$c(S_t^*, T-t, X) = S_t^* + \alpha D - X \qquad [37]$$

por encima del cual la opción será ejercitada justo antes del momento de pago del dividendo.

En términos generales, la implementación del modelo RGW requiere la determinación del precio de la acción, S_t^*, al cual el poseedor de la opción será indiferente entre mantenerla o ejercitarla el día "ex-dividend".

Este modelo corrige los errores que cometían los modelos anteriores de Roll y Geske, en los cuales se detectaba correlación entre los errores de predición y:

a) el grado en el cual una opción está en dinero y sin dinero.
b) el tiempo de expiración de la opción.
c) la desviación estándar de la rentabilidad de la acción.

No obstante, este modelo no logra eliminar esa dependencia entre el error de predicción y la desviación estándar de la rentabilidad de la acción, ya que infravalora las opciones sobre acciones con bajo riesgo y sobrevalora las opciones sobre acciones con alto riesgo.

Whaley (1982) contrasta empíricamente las aproximaciones simples de Black (1975) y la más simple (que consiste en sustituir el precio de la acción menos el valor presente de los dividendos garantizados por el precio de la acción en la fórmula de B-S) con la ecuación de valoración RGW que propone y observa que sus resultados mejoran. Sin embargo, para Sterk (1983), no se encuentran diferencias perceptibles entre los tres métodos.

El trabajo de Sterk (1983) es crucial en la comparación del modelo RGW y el modificado de B-S [38], pues no sólo examina cuál de estos modelos ajusta mejor los precios del mercado, sino que además detecta cuándo un modelo obtiene mejores resultados que el otro, y por tanto, es más deseable su utilización. En su

[38] Sterk denomina modelo modificado B-S a la aproximación de Black (1975), comentada con anterioridad.

análisis, introduce el concepto de la "medida del dividendo" para determinar cuándo el modelo modificado de B-S, más simple de calcular, es suficiente. Sus resultados permiten concluir que el modelo RGW es tan bueno o mejor que el modelo modificado de B-S.

La posibilidad de dividendo múltiple es recogida en Klemkosky y Resnick (1992) que presentan una condición superior a la condición de Merton (1973) de no ejercicio anticipado de una opción call americana desprotegida del pago de dividendos. Para Klemkosky y Resnick (1992) la condición de Merton es, en muchos casos, mal entendida y usada de forma incorrecta en la extensa literatura referida a las finanzas cuando se aplica al caso de dividendo múltiple; la condición que proponen es más fuerte que la que proponían Jarrow y Rudd (1983) y corrige los errores de las que proponían ellos mismos en anteriores trabajos de 1979 y 1980. Esta condición formula que con n dividendos que faltan hasta el día de la expiración:

$$K\left[B(t, t_i - t) - B(t, T - t)\right] > \sum_{j=1}^{n} D_j B(t, t_j - t) \qquad i=1,....n. \qquad [38]$$

donde K es el precio de ejercicio de la opción, T son los años que faltan hasta la expiración, t representa los años que faltan desde el día del pago del dividendo D_t hasta la expiración y B es el precio de un bono al descuento sin riesgo de insolvencia que paga un dólar dentro de t años.

Finalmente, una última aplicación de la metodología binomial la encontramos en los modelos de valoracion de opciones sobre deuda, en los que destacamos los trabajos de Ho y Lee (1986), Cattatreya y Fabozzi (1989) , Hull y White (1993) y Stapleton y Subrahmanyam (1993) .

Un primer ejemplo lo encontramos en los modelos de arbitraje libre de preferencias que ya mencionamos anteriormente y que han sido desarrollados específicamente para valorar activos derivados sobre tipos de interés,. El trabajo pionero y representativo de esta clase de modelos es el de Ho y Lee (1986), que concretamente suponen una estructura binomial reticular para los movimientos de la estructura temporal, lo que implica que el precio de los bonos sigue un proceso binomial, pero en función del estado de la naturaleza y del tiempo.

Sin embargo, como argumentan Heath, Jarrow y Morton (1992)[HJM] el modelo de Ho y Lee es un modelo de un sólo factor, de manera que los bonos de todos los vencimientos están perfectamente correlados. Además, para implementar su modelo, se han de estimar los parámetros del proceso binomial en tiempo discreto, incluyendo la probabilidad de neutralidad al riesgo, y es que en algunos casos, como demuestran HJM (1990), estos parámetros no son independientes. Esto crea problemas en la estimación, ya que la dependencia no se ha tenido en cuenta, mientras que la versión en tiempo continuo de este modelo no está sujeta a estos problemas.

Un segundo ejemplo es el modelo que proponen Cattatreya y Fabozzi (1989), que parte de dos condiciones fundamentales:

-La condición de no arbitraje (consistencia interna).

-La calibración del modelo (consistencia externa).

Este modelo monofactorial, utiliza como única variable de estado el tipo de interés en lugar del precio de los bonos. De este modo, el precio de los títulos se deriva de los tipos de interés. Los supuestos del modelo son los siguientes:

- Distribución lognormal de los tipos de interés.

- Como volatilidad utiliza la desviación estandar histórica de la distribución de los tipos de interés a lo largo de un año.

- Estructura binomial de los tipos de interés a corto plazo.

Utilizando un proceso secuencial de promedio y descuento, obtiene los valores del bono cupón cero a un año, y no sólo en el momento actual, sino en cualquier período, para todos los niveles de los tipos de interés, generándose así un árbol de valores para el bono. Una vez obtenidos los valores del bono se comparan con los precios que da el mercado y se procede a ajustar el árbol de tipos de interés (ajuste de tendencias o incremento de los tipos por el procedimiento de tanteo), de manera que el valor implícito del bono cupón cero a un año sea igual a su precio.

Este procedimiento de agregación secuencial se aplica igualmente a la valoración de opciones, obteniendo un árbol para los valores de las opciones al vencimiento. Para el valor de las opciones americanas sobre bonos cupón cero, se determina el valor de la opción (precio del bono menos precio de ejercicio) en cada nudo del árbol de cada nivel y se selecciona el que sea mayor como valor de la opción en dicho nudo, lo cual aconsejará que, en caso de ejercer la opción, se debería ejercer en ese nudo.

Tal procedimiento aconseja la utilización de tipos de descuento más altos (para reflejar menor calidad) a los títulos que no son emitidos por el Estado (como bonos de empresa, etc) y permite además calcular la sensibilidad del precio de un titulo en respuesta a un ligero cambio en el tipo de interés a corto plazo. Esta medida se llama "duración estocástica", distinta del concepto tradicional de duración de un bono, que representa la sensibilidad del precio de un bono a los cambios en la rentabilidad [Bierwag (1987), Calatayud (1993), Calatayud y Calero (1994)].

Otro ejemplo aparece en Hull y White (1993), donde se especifica un proceso de Markov neutral al riesgo para el tipo de interés a corto plazo, que depende de una función no conocida del tiempo, $\theta(t)$.

Un caso particular y sencillo en relación a la especificación planteada es el siguiente:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz(t) \qquad [39]$$

Dado este supuesto, Hull y White desarrollan un procedimiento para elegir esta función del tiempo, de manera que el modelo sea consistente con la estructura inicial de tipos de interés.

Este procedimiento implica utilizar un árbol trinomial para representar los tipos de interés junto a sus respectivas probabilidades, para variaciones de tiempo, Δt, que pueden ser constantes o no.

Otros trabajos anteriores que han usado esta aproximación son los modelos de Vasicek (1977) y CIR (1985) que se extienden en Hull y White (1990) y el modelo de tipos de interés lognormal de Black y Karasinski (1991).

Finalmente, Stapleton y Subrahmanyam (1993) proponen un modelo alternativo para valorar opciones europeas sobre tipos de interés que tiene, entre otras ventajas, su sencillez, ya que es tan fácil de usar como el B-S convencional.

En este modelo, el valor descontado, B_{t+m} de un bono cupón cero que paga un dólar en t+m es lognormal [39] de manera que el precio del bono es simétrico a la izquierda (los tipos de interés, considerados estocásticos en el modelo, serían simétricos a la derecha). Este supuesto, más realista, difiere del clásico propuesto por B-S, de que la variable precio de las acciones es lognormal, y que también fue supuesto por Black et al. (1990), Longstaff (1990), Black y Karzsinski (1991), Briys et al (1991), Milne y Turnbull (1991) y HJM (1992). Este supuesto corrige las desventajas principales del plantemiento B-S, pues, por un lado, el máximo valor del bono se da cuando el descuento es cero, de manera que los tipos de interés negativos quedarían excluídos, y por otro lado, la probabilidad de una caída determinada en el tipo de interés es menor que un incremento similar en el mismo.

El modelo se basa en el comportamiento del precio forward más que en el precio spot, al igual que HJM (1992). De esta manera, si el precio forward de un activo sigue un proceso arbitrario de dos estados, una opción sobre el activo puede ser valorada por arbitraje. El supuesto entonces propuesto es que el descuento de un bono cupón cero sigue un proceso binomial multiplicativo, que permite derivar relaciones de valoración neutrales al riesgo para las opciones sobre los bonos cupón cero, como en Merton (1973), Cox y Ross (1976), Jamshidian (1989), Hull y White (1990), Satchell et al. (1990) [40] y Milne y Turnbull (1991). En el límite, cuando la distribución del descuento del bono es lognormal, es posible valorar las opciones sobre bonos, utilizando una transformación de la fórmula de B-S.

[39] Es decir, los precios forward implícitos se distribuyen de manera lognormal.
[40] Cfr de Stapleton y Subrahmanyam (1993).

Del modelo se pueden obtener los ratios de cobertura para las opciones sobre tipos de interés, que indican el número de contratos forward sobre bonos que se requieren para cubrir la opción.

El modelo se puede utilizar para valorar opciones sobre tipos de interés en general, y caps y floors [41] sobre tipos de interés, en particular, usando una relación que se puede establecer entre estas opciones sobre tipos de interés y opciones sobre bonos cupón cero, ya utilizada por primera vez por Hull y White (1990) y también analizada en Stapleton y Subrahmanyam (1990) y Milne y Turnbull (1991). Otra extensión del modelo permite valorar opciones europeas sobre bonos con cupón y opciones swap [42], a través de la relación que se deriva entre los bonos con cupón y las opciones swap.

A partir de esta revisión histórica cabría destacar, fundamentalmente, la complejidad cada vez mayor de las diferentes propuestas en un intento de recoger lo más cerca posible el comportamiento real, observado de variables relevantes para determinar el valor de las opciones, como pueden ser valor del subyacente, tipo de interés o volatilidad. No obstante, se han obtenido importantes mejoras que apuntan a un mayor conocimiento de dichas variables y de sus relaciones, que se ha visto apoyado, gracias a un paralelo desarrollo matemático e informático, imprescindible para llevar a a cabo su implementación a nivel teórico y empírico.

La mayor complejidad de los modelos en modo alguno significa desechar la importancia de los mismos en aras de un mayor conocimiento del comportamiento de las variables y de su valoración. Lo que queremos resaltar, es que de cara a su aplicabilidad, cada una de las propuestas deberán ir seguidas de procedimientos de estimación de los diferentes parámetros que, aunque complejos, sean fácilmente implantados en soporte informático, para llevar a cabo su contrastación empírica.

[41] Estos contratos son, en sí mismos, carteras de opciones sobre tipos de interés de maduraciones sucesivas.
[42] Una opción sobre un swap es una opción que da el derecho a pagar interés a un tipo fijo k y recibir interés a un tipo flotante i.

CAPÍTULO 2 :
LA VOLATILIDAD: PROBLEMÁTICA Y ESTIMADORES.

La varianza de la tasa de rentabilidad de las acciones, como medida de la volatilidad, es una de las variables cruciales en la teoría moderna de las finanzas. Como dos ejemplos, la varianza es una variable central en el modelo de valoración de activos de capital y análisis de cartera (CAPM) de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) y, de igual manera, juega un papel clave en el modelo de valoración de activos derivados de Black y Scholes (1973).

Existe una abundante literatura empírica que obtiene resultados diferentes y hasta contradictorios tanto en relación a la verdadera distribución del precio del activo subyacente como en su varianza, entre los que destacamos los siguientes:

1) La distribución lognormal estacionaria parece inadecuada y se plantean distribuciones estacionarias alternativas, como por ejemplo, con varianza infinita: Mandelbrot (1963), Fama (1965) y Blattberg y Gonedes (1974).

2) Una mezcla de distribuciones normales puede ser mejor descriptor de las distribuciones leptocúrticas observadas empíricamente que las distribuciones estacionarias alternativas: Hsu, Miller y Wichern (1974), Westerfield (1977) y Kon (1984).

3) Una mezcla de procesos continuos y de saltos, como mejores predictores de las verdaderas distribuciones del precio del activo subyacente: Oldfield, Rogalski y Jarrow (1977), Rosenfeld (1980)[1] y Ball y Torous (1985). Estos saltos aparecen modelizados a nivel teórico como procesos de Poisson: Merton (1976a), Cox y Ross (1976) y Jones (1983).

4) Correlación inversa imperfecta expansiva entre la rentabilidad del activo y cambios en la volatilidad: Black (1976), Schmalensee y Trippi (1978), Beckers (1980) y Christie (1982).

5) Los saltos o shocks en la volatilidad persisten, pero tienden a decaer con el tiempo: Black (1976), Beckers (1983) y Poterba y Summers (1984).

Son numerosos los trabajos empíricos que han observado un comportamiento heteroscedástico para la rentabilidad de las acciones, como por ejemplo, en Clark (1973), Rosenberg (1972), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1975), Epps y Epps (1976) y Kon (1984), resultados que se oponen a los modelos que

[1] Cfr. de Christie (1982).

hasta entonces suponían un comportamiento constante para la volatilidad. Han sido fundamentalmente dos las razones que se han barajado para este comportamiento:

- La llegada de nueva información, Press (1967), Beaver (1968), Merton (1976).
- Cambios en el precio de la acción, Cox (1975), Black (1976), Cox y Ross (1976), Schmalensee y Trippi (1978), Geske (1979), Beckers (1980) y MacBeth y Merville (1980).

Concretamente, Macbeth y Merville (1980) plantean a nivel teórico que las posibles explicaciones para estos cambios en las varianzas de rentabilidades de los activos a través del tiempo son las siguientes:

1º Las empresas pueden cambiar a través de innovaciones tecnológicas y/o fusiones y adquisiciones, lo que puede afectar a la distribución de las rentabilidades de sus acciones.

2º Por argumentos basados en la teoría multiperíodo consumo-inversión: si en cada período el agregado de consumidores-inversores planea su consumo e inversión para múltiples períodos futuros, entonces las varianzas de los activos pueden cambiar a lo largo del tiempo con la llegada de nueva información, que dan lugar a que se modifiquen las preferencias y la oferta de activos con riesgo en los mercados de capital.

Christie (1982) profundiza aún más en las causas que originan el comportamiento cambiante de la volatilidad, de las cuales destaca:

- El nivel de apalancamiento financiero (es decir, la relación deuda/ valor de mercado de los fondos propios): la volatilidad es una función creciente del apalancamiento financiero.
- El valor de las acciones: a través de la relación anterior, Christie calcula la elasticidad de la volatilidad de las acciones, resultando una relación negativa respecto a su valor.
- El tipo de interés sin riesgo: tiene un fuerte efecto positivo sobre la volatilidad, que es consistente con el hecho de que el valor de la empresa es una función inversa del tipo de interés.

Aunque la contrastación de los datos corrobora las relaciones anteriormente expuestas, Christie plantea que hay más variables, aunque de menor importancia, que afectan a la volatilidad y que deberían ser examinadas.

La consideración de la volatilidad como estocástica presenta problemas en la valoración de activos derivados, tales como las opciones, cuando se intenta utilizar la metodología B-S, fundamentalmente, a la hora de lograr la cobertura total de una cartera.

Cuando la varianza es constante, la hipótesis básica de B-S estriba en la posibilidad de formar una cartera cubierta con una fracción w invertida en el activo derivado (por ejemplo, opciones) y una fracción 1-w invertida en el activo subyacente (por ejemplo, acciones). Se elege w de tal modo que la rentabilidad de la cartera sea sin riesgo en un marco de tiempo continuo. Utilizando argumentos puros de arbitraje, esta cartera sin riesgo debe tener un exceso de rentabilidad esperada igual a cero, es decir una rentabilidad igual a la tasa de interés sin riesgo. Esta condición se introduce directamente en el modelo y se obteene la conocida ecuación en derivadas parciales, cuya resolución, sujeta a las condiciones de contorno expresivas del valor de la opción al vencimiento según su valor intrínseco fuese igual o superior a cero, genera una solución analítica o de forma cerrada para el valor del activo derivado.

Sin embargo, cuando la varianza es estocástica, no pueden utilizarse solamente argumentos de cobertura y arbitraje para obtener el valor del activo derivado. En otras palabras, no puede formarse una cartera cubierta sin riesgo sólo con la opción y la acción y el arbitraje. Será necesario, por tanto, introducir argumentos de equilibrio de los precios de los activos, basados en las preferencias de los inversores por el riesgo, para determinar la prima de riesgo (exceso esperado de rentabilidad) requerida sobre una cartera cubierta del activo y la opción.

La razón implícita de incluir supuestos sobre las preferencias por el riesgo de los inversores es que la volatilidad en sí misma, o un activo cuyo precio esté instantánea y perfectamente correlada con la volatilidad, no es un activo negociado (como puede ser el activo subyacente). Si fuera un activo negociado, todas las consideraciones de equilibrio general intertemporal asociadas con el precio del riesgo de volatilidad estarían reflejadas en su precio, y las opciones se podrían valorar con una cartera formada por la opción, el activo subyacente y ese activo correlado con la volatilidad.

No obstante, cuando se dan determinados supuestos, que ya analizaremos más adelante, sí que pueden obtenerse soluciones para la valoración de una opción cuando la volatilidad es estocástica, sólo con argumentos de arbitraje y sin necesidad de introducir supuestos sobre las preferencias por el riesgo de los inversores.

Las diferentes propuestas que se han dado a la hora de modelizar el comportamiento estocástico para la volatilidad, las hemos clasificado del siguiente modo:

- Modelo de elasticidad de sustitución constante (CEV).
- Modelo de opción compuesta.
- Modelo de difusión desplazada.
- Modelos de volatilidad estocástica.
- Aproximación por volatilidades implícitas.
- Modelos con procesos de difusión con saltos para la volatilidad.
- Modelización tipo ARCH para la volatilidad.
- Procesos de caos para la volatilidad.

Mientras que las cinco primeras propuestas son analizadas en tiempo continuo, la modelización tipo ARCH se analiza en tiempo discreto. Un último matiz se puede plantear con los procesos de difusión con saltos, que presentan una trayectoria continua, en la que se intercalan saltos que se producen en instantes discretos del tiempo.

A continuación presentamos un estudio más exhaustivo de cada uno de estos modelos, así como de sus diferencias y de los resultados de su contrastación empírica.

2.1.- MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD NO CONSTANTE.

Como mencionamos en el capítulo anterior, hay una amplia gama de modelos que incluyen como supuesto básico la consideración de la volatilidad de la rentabilidad del activo subyacente como variable, no constante. Dentro de esta amplia gama de modelos , podemos destacar los siguientes:

2.1.1. Modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV).

La alternativa fue planteada por Cox (1975) y desarrollada más tarde por Cox y Ross (1976). La propuesta que se hace con este modelo para la dinámica del precio del activo, así como para su volatilidad es que los precios del activo para un período no son independientes de los precios de períodos anteriores, por lo que no son, en ningún modo, caminos aleatorios, como se suponía en el proceso de difusión lognormal de B-S. La volatilidad, a su vez, depende del precio del activo, destacando un caso especial en el que la relación entre la volatilidad y el precio del activo es tal que su elasticidad es constante, denominándose en este caso *modelo de varianza de elasticidad constante*.

De forma analítica este proceso se especifica del siguiente modo:

$$dS = \mu S dt + \delta S^{\theta/2} dz \qquad [1]$$

donde dz es un proceso Wiener, la varianza instantánea del precio del stock está dada por $\delta^2 S^\theta$ (se puede ver fácilmente que la elasticidad de esta varianza respecto del precio del stock, [dV/dS].[S/V]=θ) y donde la varianza instantánea de la rentabilidad σ^2 está dada por la ecuación:

$$\sigma^2 = \delta^2 S^{\theta-2} \qquad [2]$$

que es una función decreciente del precio del activo para θ menor que 2, es decir, la varianza de la tasa de rentabilidad del activo variará inversamente con el precio del activo. Este comportamiento ha sido detectado por muchos trabajos, explicado a nivel empírico por los efectos financieros y de apalancamiento en los que incurren las empresas[2]. Cuando, por ejemplo el precio de la acción se reduce (aumenta), el ratio deuda-acciones sube (desciende) y este incremento (descenso) del riesgo se refleja en un incremento (reducción) de la varianza de la rentabilidad de la acción.

2 Para una explicación detallada de estos efectos, véase Beckers (1980, pag. 662]) y Cox y Rubinstein (1985, pag. 280).

Cuando θ es igual a 2 la varianza instantánea de rentabilidad es una constante, δ^2 y el proceso estocástico generador de rentabilidades es un proceso de difusión lognormal igual al planteado por B-S.

Dos casos especiales de este modelo que han sido analizados detenidamente en Beckers (1980), es cuando θ=1, denominándose proceso de raíz cuadrada (square root process) y cuando θ=0, Proceso absoluto (absolute process). Como ya se comentó en el capítulo 1, Cox y Ross (1976) analizan estos dos casos, como dos ejemplos límites del proceso puro de saltos más general.

Aplicaciones empíricas del modelo de varianza de elasticidad constante las encontramos en los trabajos de Macbeth y Merville (1980), Beckers (1980), Emanuel y Macbeth (1982) y Lauterbach y Schultz (1990).

Macbeth y Merville (1980) realizan un análisis empírico con datos de las opciones call de la CBOE (Chicago Board Options Exhange) de seis acciones, durante el período que va del 31 de Diciembre de 1975 al 31 de Diciembre de 1976. En la comparación de los resultados obtenidos con el modelo CEV y el modelo B-S encuentran que, en la mayoría de los casos, los precios de los activos podrían ser generados por procesos de difusión de varianza de elasticidad constante, ya que este modelo predice los precios de las opciones call significativamente mejor que el modelo de B-S.

No obstante, dos cuestiones fundamentales plantean problemas a la hora de llevar a cabo la aplicación empírica del modelo CEV y que destaca Steven Manaster en la discusión a MacBeth y Merville (1980):

- ¿Cuál es el método más útil de estimar los dos parámetros del modelo de Cox, δ y θ ?.

- ¿Se justifica el esfuerzo extra requerido para estimar estos parámetros con los mejores resultados relativos al modelo de B-S, donde sólo hay que estimar uno, σ?.

En cualquier caso, y como ocurre a la hora de utilizar cualquier método de estimación, los resultados deberán ser analizados con cautela, en tanto la modificación del período utilizado para su estimación, momento en que se calculan los valores de las opciones, así como otros aspectos pueden dar lugar a resultados totalmente opuestos.

También Beckers (1980) hace un análisis empírico con 47 acciones de la CBOE, para un período comprendido entre el 18 de Septiembre de 1972 hasta el 7 de Septiembre de 1977. De igual manera, concluye que los resultados de la contrastación del modelo CEV mejoran respecto al modelo tradicional lognormal de B-S, ya que evita los sesgos típicos de B-S (sobrevaloración para opciones in the money y at the money e infravaloración para las out of the money).

Emanuel y Macbeth (1982) obtienen más resultados, en relación al modelo de valoración de opciones de varianza de elasticidad constante basándose en el trabajo anterior de Macbeth y Merville de 1980, pero aumentando su muestra hasta 1978. Entre estos resultados podemos destacar los siguientes:

- En el modelo de varianza de elasticidad constante las predicciones de precios futuros de las opciones call son mejores que las de B-S para períodos menores de un mes.

- El modelo de varianza de elasticidad constante predice mejor cuando θ es menor de dos.

Lauterbach y Schultz (1990) utilizan el modelo de varianza de elasticidad constante[3] para valorar warrants y las predicciones fueron notablemente mejores que las que se obtenían con el modelo B-S.

2.1.2. Modelo de difusión de opción compuesta .

Fue planteado inicialmente por Geske (1979a). Para la obtención de la fórmula de una opción call compuesta se considera que una acción es una opción sobre el valor de la empresa, donde el valor de la empresa sigue un camino aleatorio estacionario. Además, para Geske, la fórmula de B-S da la relación entre el valor de una acción y el valor de una empresa, donde la acción sería la opción y el valor de la empresa sería el subyacente, utilizando la terminología propia de la fórmula de B-S. Esto implica que la acción seguirá un camino

[3] Concretamente, el modelo de raíz cuadrada, cuando $\theta = 1$, mencionado en Beckers (1980) y discutido en Cox y Ross (1976), como caso límite de un proceso puro de saltos de Markov.

aleatorio no estacionario con una volatilidad que se incrementa cuando el precio de la acción decrece, mientras que la volatilidad del valor de la empresa es constante. Desde esta perspectiva, una opción call sobre una acción es una opción sobre una opción, lo que se ha denominado como una opción compuesta.

Un aspecto que habrá que tener en cuenta desde esta perspectiva es la influencia de la estructura de capital de la empresa sobre la distribución de la rentabilidad de la acción, por lo que habrán de incorporarse los efectos de apalancamiento derivados de la existencia de deuda en la empresa. Con este supuesto y los demás propuestos por B-S, Geske (1979a) obtiene la fórmula de valoración siguiente:

$$C = VN_2(h+\sigma_V\sqrt{\tau_1}, k+\sigma_V\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) - Me^{-r_F\tau_2}N_2(h,k;\sqrt{\tau_1/\tau_2}) - Ke^{-r_F\tau_1}N_1(h),$$

donde [3]

$$h = \frac{\ln(V/\overline{V}) + (r_F - \frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau_1}{\sigma_V\sqrt{\tau_1}}$$

$$k = \frac{\ln(V/M) + (r_F - \frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau_2}{\sigma_V\sqrt{\tau_2}}$$

$\overline{V}$ = aquel valor de V tal que

$S_\tau - K = VN_1(k+\sigma_V\sqrt{\tau}) - Me^{-r_F\tau}N_1(k) - K = 0$ donde τ = T - t*.

donde C es el valor de la opción de compra, $N_2(.)$ es una función de distribución normal bivariante con h y k como límites de la integral doble y $\sqrt{\tau_1/\tau_2}$ es el coeficiente de correlación, donde $\tau_1 = t^* - t$ y $\tau_2 = T - t$, $_V$ es la desviación estándar instantánea de la rentabilidad de los activos de la empresa por unidad de tiempo, r_F es el tipo de interés sin riesgo, M es el valor facial de la deuda, T es el tiempo de vencimiento de la deuda, V es el valor de mercado corriente de la empresa, K es el precio de ejercicio y t* es tiempo de vencimiento de la opción.

Geske demuestra que este modelo es más general, pues recoge como un caso especial el de B-S, concretamente cuando M=0 o T=∞. Además, aunque en el modelo de opción compuesta la elasticidad de varianza no es constante, sin embargo, si la elasticidad del precio del activo con respecto al valor de la empresa se supone igual a una función determinada del precio del activo (S) [4], entonces el modelo de opción compuesta se convierte en un modelo de varianza de elasticidad constante.

El análisis comparativo con el modelo de B-S que realiza Geske (1979a) concluye que su modelo tiene un fuerte potencial para corregir varios e importantes sesgos del modelo B-S. El ratio de cobertura entre la opción y el stock que obtiene en base a esta metodología es diferente al que obtienen B-S, llegando a igualarse sólo cuando la empresa no tiene deuda, por lo que la cobertura que plantean B-S no es, de ningún modo, sin riesgo cuando la empresa tiene deuda, está apalancada, sino que por el contrario, lleva un exceso de inversión en call y un defecto de inversión en el stock.

2.1.3. Modelo de difusión desplazada.

Propuesto por Rubinstein (1983), este modelo parte del supuesto de una empresa que mantiene dos activos, uno con riesgo, en una proporción α, y otro sin riesgo, en una proporción (1-α) del valor total de la empresa, V. En cualquier instante de tiempo anterior al pago de dividendos, k, donde k<t se producirá el pago de dividendos correspondiente a la porción sin riesgo del valor de la acción, como porcentaje del valor de la acción, dS, y, de igual manera, se pagará un dividendo determinado debido a la parte con riesgo del valor de la acción, δ.

De esta observación, Rubinstein obtiene el valor de la acción al final del tiempo t, dividido en dos componentes, un componente de riesgo, $ae^{y}S$, y un componente sin riesgo, bS, donde y es una variable aleatoria normal, con una volatilidad instantánea, $\sigma_R \sqrt{t}$ [5].

Con argumentos de arbitraje sin riesgo, y con el razonamiento de Cox y Ross (1976), que consiste en obtener el valor de una opción call europea descontando el valor esperado futuro, bajo neutralidad al riesgo, Rubinstein (1983) obtiene la expresión para el valor de una opción con precio de ejercicio K y tiempo hasta la expiración t, dada por:

---

[4] En particular, si
$\varepsilon_S = (\partial S/\partial V)(V/S) = S^{-\gamma(V)}$, donde $0 < \gamma(V) < 1$.

[5] Las expresiones para a y b pueden recogerse de Rubinstein (1983, pag 214).

$$C = aSN(x) - (K - bS)r^{-t}N(x - \sigma_R\sqrt{t})$$

$$\text{donde } x \equiv \frac{\log(aS/(K-bS)r^{-t}}{\sigma_R\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma_R\sqrt{t} \qquad [4]$$

La fórmula, por tanto, es la de B-S, $C(S,K,t,r,\sigma)$, excepto que la opción call es evaluada en $C(aS,K\text{-}bS,t,r,\sigma_R)$.

Esta fórmula de difusión desplazada tiene varias ventajas, respecto a la de B-S:

1º.- Contiene la fórmula de B-S, como un caso especial, concretamente, cuando a=b=0.

2º.- Tiene en cuenta la estructura de capital de la empresa, al igual que el modelo de opción compuesta de Geske (1979a). La diferencia con éste, es que en en este modelo, la volatilidad del valor de la empresa no es constante, sino estocástica.

3º.- Los supuestos del modelo son adecuados, tanto desde el punto de vista analítico, como empírico. Por ejemplo, el supuesto de sólo un activo con riesgo, aunque simple es válido, ya que la existencia de varios activos con riesgo plantea muchos problemas, como por ejemplo, argumentos de arbitraje más complejos, necesidad de utilizar técnicas de integración numérica para resolver la ecuación diferencial resultante, incremento en el número de parámetros a estimar, etc.

De otro lado, la existencia de deuda, y sin riesgo [6], tiene sentido desde el punto de vista empírico. Si no hubiera deuda, entonces la volatilidad de la acción tendería a incrementarse cuando se produjeran incrementos importantes y rápidos en el precio de la acción. Sin embargo, la existencia de deuda, al igual que ocurría en el modelo de opción compuesta, actúa en sentido opuesto. El que la volatilidad de la acción se incremente o reduzca con incrementos en el precio de la acción dependerá conjuntamente de la influencia de la composición de los activos, α, y del ratio deuda-acciones, β Adicionalmente, el supuesto de que la deuda sea sin riesgo es razonable para muchas empresas que negocian con opciones, ya que estudios iniciales del modelo de opción compuesta mostraban que el nivel de riesgo de la deuda que se observaba era tan bajo que tenía poco impacto en el valor de las opciones.

[6] Se trata de deuda sin riesgo de insolvencia.

4º.-El modelo de difusión desplazada admite diferentes políticas de dividendos más realistas, como puede ser el pago de un dividendo constante, no dependiente del precio de la acción.

Con datos simulados, Rubinstein demuestra que el modelo de difusión desplazada puede corregir los sesgos que comete el modelo B-S. No obstante, su contrastación presenta problemas adicionales, como puede ser la estimación de los parámetros α y σ_R, suponiendo en el mejor de los casos, que $\beta = 0, \text{y } \delta = d = 0$.

Un completo análisis empírico comparando este modelo con otros alternativos, (como por ejemplo, el clásico B-S, el modelo de opción compuesta, el modelo de difusión absoluta, el modelo puro de saltos y el modelo de difusión y saltos) se encuentra en el trabajo de Rubinstein (1985), utilizando una muestra de las 30 opciones más activas de la CBOE desde el 23 de Agosto de 1976 hasta el 31 de Agosto de 1978. Sus resultados no permiten decantarse por un modelo en particular, ya que ninguno de ellos recoge el comportamiento observado en los datos para toda la muestra, sino, por el contrario, apuntan a la validez de cada uno para un período concreto y reducido.

2.1.4.- Modelos más generales de volatilidad estocástica.

Tanto el modelo de Cox (1975) como el de Geske (1979a) y Rubinstein (1983) analizados anteriormente, derivan sus fórmulas a partir del supuesto de que la varianza de la rentabilidad del activo es estocástica, pero dependiente del precio del activo.

Sin embargo, como se expone en la introducción de este capítulo, esta es una de las diferentes posibilidades que se suponen para el comportamiento de la volatilidad, según resulta de diferentes trabajos empíricos.

Los trabajos que se engloban en este epígrafe intentan incorporar todas las regularidades empíricas detectadas respecto al comportamiento cambiante de la volatilidad, por lo que son modelos más generales a los anteriores, que incluyen comportamientos totalmente aleatorios, estocásticos para la volatilidad.

Dentro de esta clase hemos incluido los trabajos de Wiggins (1987), Scott (1987), Johnson y Shanno (1987) y Hull y White (1987), considerado este último como el más importante y pionero en la obtención de una solución, aunque no analítica, al problema de valoración de opciones con volatilidades estocásticas.

En realidad, la consideración de la volatilidad como estocástica se remonta al trabajo preliminar de Johnson (1979), que ya estudiaba el caso más general en el que la varianza instantánea del precio del activo seguía procesos estocásticos alternativos. Sin embargo, para derivar la ecuación diferencial que la opción debe satisfacer, suponía la existencia de un activo, cuyo precio estaba perfectamente correlado de forma instantánea con la varianza estocástica. La existencia de este activo es suficiente para derivar la ecuación diferencial, pero Johnson fue incapaz de resolverla para determinar el precio de la opción.

Hull y White (1987), sin embargo, sí que resuelven la ecuación diferencial resultante cuando se considera un comportamiento estocástico para la volatilidad, por lo que pasamos a comentar más detenidamente el procedimiento para su resolución.

Los siguientes procesos estocásticos se suponen para el precio del activo, (S) y su varianza (σ^2=V):

$$dS = \phi S\,dt + \sigma S dw$$
$$dV = \mu V dt + \xi V\,dz \qquad [5]$$

donde ϕ es un parámetro que puede depender de S, σ y t. Las variables μ y ξ pueden depender de σ y t, pero se supone que no dependen de S. Los procesos dw y dz son procesos Wiener, con coeficiente de correlación ρ.

En contraste a los modelos de Cox (1975), Geske (1979a) y Rubinstein (1983), en esta expresión se recoge la posibilidad de que la volatilidad no esté perfectamente correlada con el precio del activo. Este modelo puede ser reducido a cualquiera de aquellos otros modelos, ($\rho = \pm 1$) y permitiendo que ξ sea una función no estocástica del precio del activo.

Esta dinámica también recoge el caso especial de que haya una dependencia intertemporal en la volatilidad, como puede ser la tendencia a revertir en media, que analiza Scott (1987), y que se da cuando ξ y μ dependen de σ y t.

La solución al problema de valoración de opciones cuando la volatilidad es estocástica exige la utilización de una ecuación que propone Garman (1976), cuya solución es indiferente al riesgo, o independiente de las preferencias por el riesgo de los inversores. No obstante, se podría obtener esa solución, como ya hemos comentado con anterioridad, si existiera un activo que estuviera perfectamente correlado con la volatilidad (ya que la volatilidad no es un activo negociado) o, como demuestran Hull y White (1987), si la volatilidad estuviera incorrelada con el consumo agregado. Si ninguna de estas dos condiciones se mantiene, no hay forma de obtener una solución a la ecuación diferencial de Garman.

La posibilidad de que haya un activo que esté de forma clara, perfecta e instantáneamente correlado con la volatilidad y que analiza Johnson (1979), es rechazada por Hull y White (1987), por lo que pasan a considerar la segunda condición a la que hacíamos referencia con anterioridad.

Para obtener el valor de la opción, Hull y White hacen uso de la ecuación diferencial, introducida por Garman (1976), y que puede ser aplicada cuando la volatilidad es estocástica. Esta ecuación plantea que para un activo f, cuyo precio depende de unas variables de estado determinadas, θ_i, se debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}-rf=\sum_i\theta_i\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\left[-\mu_i+\beta_i(\mu^*-r)\right] \qquad [6]$$

donde σ_i es la desviación estándard instantánea de θ_i, ρ_{ij} es la correlación instantánea entre θ_i y θ_j, μ_i es la tendencia (media) de θ_i, β_i es el vector de las betas para la regresión de las variables de estado "rentabilidades" ($\partial\theta/\theta$) sobre la cartera de mercado y las carteras más cercanamente correladas con las variables de estado, μ* es el vector de rentabilidades esperadas instantáneas de la cartera de mercado y las carteras más cercanamente correladas con las variables de estado y r es el vector donde sus elementos son el tipo de interés sin riesgo, r.

La aplicación de esta ecuación diferencial para la resolución de la problemática de valorar opciones cuando la volatilidad es estocástica empieza transformando las variables al caso que nos ocupa. En este caso, las dos variables de estado consideradas son S, precio del activo, y V, su volatilidad, donde únicamente S es una variable que se negocia. La ecuación diferencial [6] se transforma en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\left[\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+2\rho\rho^3\xi S\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial V}+\xi^2 V^2\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right]-rf=\\&-rS\frac{\partial f}{\partial S}-\left[\mu-\beta_V(\mu^*-r)\right]\sigma^2\frac{\partial f}{\partial V}\end{aligned} \qquad [7]$$

donde las variables se identifican de modo similar a las de la ecuación anterior de Garman, pero con las variables de estado S y V. Por ejemplo, la variable β_V es el vector de las betas obtenidas de regresiones múltiples entre las rentabilidades de la varianza (dV/V) sobre la cartera de mercado y las carteras más cercanamente correladas con las variables de estado.

Se puede notar que dado que estas rentabilidades esperadas dependen de las preferencias por el riesgo de los inversores, esto significa que el precio de la opción que se obtenga de la resolución de la ecuación diferencial anterior dependerá de las preferencias por el riesgo de los inversores.

Sin introducir determinadas funciones de utilidad respecto al riesgo no es posible obtener soluciones a esta ecuación, en cuyo caso no sería una solución neutral al riesgo. La introducción de la condición a la que hacíamos referencia anteriormente, es decir que la volatilidad esté incorrelada con el consumo agregado, permite simplificar la ecuación anterior, puesto que el término $\beta_V(\mu^*-r)$ sería cero. Esto significaría que la volatilidad no presentaría riesgo sistemático, por lo que todo el riesgo sería diversificable.

Esta última condición, sin embargo, es insuficiente para resolver la ecuación diferencial, por lo que se ha de introducir el supuesto adicional de que la volatilidad esté incorrelada con el precio del activo subyacente[7] ($\rho = 0$). Este

[7] Como expresan Lamoureux y Lastrapes (1993), Hull y White suponen que el riesgo de volatilidad no afecta al precio de la opción, de manera que el coeficiente de correlación entre dw y dz es cero.

último supuesto es equivalente a suponer que no hay apalancamiento y que la volatilidad del valor de la empresa es constante, supuestos que también utilizaba Geske (1979) en el modelo de opción compuesta que hemos desarrollado anteriormente, dos supuestos simplificadores que también son recogidos en Scott (1987).

Dado que se han eliminado todos los términos que reflejan algún tipo de supuestos respecto al riesgo, se podrá utilizar un procedimiento de valoración de una opción bajo consideraciones de cobertura y arbitraje neutral al riesgo, simplemente descontando su valor terminal esperado a la tasa de interés sin riesgo.

No obstante, Hull y White (1987) expresan el resultado final que obtuvieron para el valor de una opción, en términos de una variable, $\overline{V}$, que definen como la varianza media a lo largo del intervalo (0,T), es decir:

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(t)dt \qquad [8]$$

Con la demostración de un lema [8] y su aplicación obtienen la expresión en forma cerrada del valor de la opción, cuando la volatilidad es estocástica, dada por:

$$f(S_t, \sigma_t^2) = \int C(\overline{V})h(\overline{V}|\sigma_t^2)d\overline{V}. \qquad [9]$$

donde

$$C(\overline{V}) = S_t N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2),$$
$$d_1 = \frac{\log(S_t/X) + (r + \overline{V}/2)(T-t)}{\sqrt{\overline{V}(T-t)}}$$
$$d_2 = d_1 - \sqrt{\overline{V}(T-t)}.$$

Esta solución expresa que el precio de la opción es la media del precio B-S, evaluada sobre la distribución condicional de la varianza media, $\overline{V}$. Además, presenta la característica de que, igual que la de B-S, es indiferente respecto al riesgo, neutral al riesgo, por lo que el uso de esta solución es válida para

[8] Este lema muestra que la distribución log[S(T)/S(0)] y condicionada sobre $\overline{V}$ es normal, donde la media es rT-VT/2 y varianza es VT.

cualquiera que fuesen las funciones de utilidad respecto al riesgo de los inversores que se consideren.

Utilizando datos simulados para los valores de la distribución normal, los resultados que obtuvieron Hull y White (1987) de la contrastación de esta solución fueron favorables, en tanto que se redujo el sesgo típico que comete la fórmula B-S [9].

La propuesta que plantea Wiggins (1987) para la dinámica del precio del activo y su volatilidad es similar a la de Hull y White (1987). A diferencia de éstos, Wiggins no introduce, (los menciona como un caso especial), los dos supuestos simplificadores, por lo que la ecuación en derivadas parciales resultante de su modelo contiene dos términos (μ - r) precio del riesgo de la acción y ϕ(.) precio de mercado del riesgo de la cartera cubierta, que dependen de las preferencias del inversor, lo cual hace necesario introducir supuestos en relación a las funciones de utilidad de los inversores.

Dando distintos valores a los términos (μ -r) y ϕ(.) se pueden valorar múltiples opciones sobre la acción dadas unas determinadas funciones de utilidad para los inversores o parámetros de preferencias del inversor representativo.

Con el teorema de Cox, Ingersoll y Ross (1985), por el que se obtiene el exceso sobre la rentabilidad esperada del activo y la opción, cuando sólo la volatilidad es la variable de estado además de la riqueza, Wiggins obtiene la expresión de ϕ(.), dada por:

$$\varphi(.) = (J_{W\sigma}/J_W)\xi\xi\sigma(-\rho^2)^{1/2} \qquad [10]$$

donde $J(W,\sigma,t)$ es la utilidad derivada de la riqueza del agente representativo y los subíndices expresan derivadas parciales.

Esta expresión toma diferentes valores según las funciones de utilidad del inversor representativo, que en algunos casos, no permiten obtener soluciones en forma cerrada para ϕ(.). Wiggins escoge para su trabajo funciones de utilidad logarítimicas, las cuales sí permiten solución en forma cerrada para ϕ(.). Para un activo individual (no el mercado) y cuando la función de utilidad del inversor representativo es logarítmica, ϕ(.) toma la expresión siguiente :

[9] Ver gráfico Hull y White (1987, pag. 293).

$$\varphi(.) = \frac{\sigma_M\left[\rho_{Ms}\rho_{s\sigma} - \rho_{M\sigma}\right]}{(1-\rho_{s\sigma}^2)^{1/2}} \qquad [11]$$

donde los subíndices M, s y σ de los coeficientes de correlación, ρ, se refieren al mercado, a la acción y a la volatilidad de la propia acción, respectivamente. En el caso especial en que no hay correlación entre la rentabilidad del mercado y la volatilidad del activo individual, entonces la cartera cubierta tendrá una $\beta = 0$ y $\varphi(.) = 0$. Esta propìedad se puede dar sólo cuando se supone que el activo subyacente es la cartera de mercado ($\sigma = \sigma_M$) y $\mu - r = \sigma_M^2$ [10] (es decir, la prima de riesgo del activo subyacente es igual a la varianza del mercado).

Este supuesto, como ya comentamos, simplifica la ecuación en derivadas parciales inicial, que puede resolverse directamente cuando se trata de una opción sobre la cartera de mercado, pero para opciones sobre activos individuales la especificación de equilibrio para el precio del riesgo requiere una variable de estado adicional, la varianza del mercado.

La posibilidad de una correlación constante entre las tasas de cambio de volatilidad y el consumo agregado (varianza de mercado constante) se analiza en Wiggins (1987) y en Hull y White (1987), aunque éstos últimos no examinan ni las restricciones sobre las preferencias ni el espacio de estados que se requiere.

A diferencia de Wiggins (1987) y Hull y White (1987), Scott (1987) forma la cartera cubierta con dos opciones call de diferentes maduraciones y una acción como activo subyacente, análisis que ya había sido examinado antes por otros autores como Jones (1984) y Eisenberg (1985). Los supuestos para la obtención de la solución analítica, así como la expresión final del valor de una opción es similar a la de Hull y White (1987).

La principal desventaja de estos modelos generales de volatilidad estocástica, es que son difíciles de estimar por máxima verosimilitud. Concretamente y como mencionan Melino y Turnbull (1990, 1991), es que, dado que es bastante

---

[10] Tanto β como σ_M son la notación para los modelos CAPM de Sharpe, de manera que $\beta_{ip} \equiv C_{ip}/V_p$, donde C_{ip} es la covarianza entre la rentabilidad del activo i y la rentabilidad para la cartera p y V_p es la varianza de la cartera p. Por otro lado, σ_M es la desviación estándard de la cartera de mercado. Para más detalles, ver W. Sharpe (1981, 2ª Edición).

complicado determinar de forma analítica la función de densidad de $\overline{V}$, no es posible obtener una solución analítica o de forma cerrada para el valor de la opción y se han de utilizar técnicas numéricas, como por ejemplo la técnica de simulación de Monte Carlo (Hull y White, [1987], Johnson y Shanno, [1987] y Scott [1987]) o diferencias finitas (Wiggins, [1987]).

Por ejemplo, el procedimiento de simulación de Monte Carlo que aplican Johnson y Shanno (1987) es el siguiente. Se comienza con valores iniciales para el precio de la acción (S(0)) y la desviación estándar (σ(0)), valores que se van incrementando de acuerdo a las expresiones de los procesos estocásticos definidos por el modelo teórico cuando se incrementa el tiempo, t y continuando hasta el día de expiración de la opción, T. Se calcula luego la expresión del valor terminal descontado de la opción como:

$$e^{-rT}\text{Max}\left[0, S^* - X\right] \quad [12]$$

donde r, X y S* son el tipo de interés sin riesgo, el precio de ejercicio de la opción call y el precio de la acción obtenido al tiempo T, respectivamente. Se repite este procedimiento un número de veces suficientemente grande y se promedia el valor terminal descontado de la call para obtener el valor de la opción, c.

La contrastación empírica de estos modelos, aunque ha dado resultados que apuntan a una mejora en la predicción de los valores de la opción (Scott, [1987], Wiggins, [1987]), dan lugar a varias recomendaciones. Por ejemplo, Wiggins (1987) con datos de ocho activos de la CBOE con sus respectivas opciones y dos opciones sobre índices, desde Julio 1962 hasta Diciembre de 1984, recomienda el uso de estos modelos, sólo para valoración de opciones sobre índices, ya que el modelo de B-S tiene ventajas empíricas significativas que deben ser tenidas en cuenta para valorar otras opciones.

Melino y Turnbull (1990, 1991) demuestran que estos modelos de volatilidad estocástica también son válidos para explicar los precios de las opciones sobre divisas.

Otros trabajos que también suponen un comportamiento estocástico para la volatilidad son el de Eisenberg y Jarrow (1991) y de Stein y Stein (1991), en los que se supone que la volatilidad está incorrelada con el precio spot del activo y obtienen como solución al valor de la opción, una media de los valores de la fórmula de B-S para las diferentes trayectorias de la volatilidad.

El principal problema que se plantea con los modelos que suponen que la volatilidad está incorrelada con el precio del activo, es que no se recogen importantes efectos asimétricos que se han detectado entre ambas variables y sí que se pueden dar cuando el riesgo de volatilidad sí es valorado, es decir, cuando la volatilidad está correlada con el precio spot del activo, posibilidad que sí aparece recogida en el modelo que propone Heston (1993).

Un coeficiente de correlación positivo afecta a la simetría de la rentabilidad del activo, ya que da lugar a una varianza elevada cuando el precio del activo se incrementa, por lo que la función de densidad sería asimétrica a la derecha, con colas anchas a la derecha y estrechas a la izquierda. Esto hará incrementar el precio de las opciones sin dinero y reducirá el precio de las in-the-money, respecto al modelo de B-S. Lo contrario sucede con un coeficiente de correlación negativo, que hará decrecer el precio de las out-of-the-money respecto a las in-the-money.

Mediante simulación, Heston (1993) muestra que, además de recoger esos efectos asimétricos, la existencia de correlación entre la volatilidad y el activo, explica los sesgos de precios de ejercicio que produce el modelo B-S.

La importancia del trabajo de Heston (1993) radica en que obtiene una solución analítica, en forma cerrada, para el valor de una opción sobre activos con volatilidad estocástica, igualmente válido para opciones sobre bonos, acciones, e incluso divisas, centrándose, fundamentalmente en el análisis de la varianza en los distintos modelos de valoración de opciones con diferentes asimetrías y curtosis. Además, se puede aplicar a múltiples problemas, por lo que su utilización no está limitada a problemas de volatilidad estocástica o para diferentes procesos de difusión.

Así, por ejemplo, el modelo B-S genera precios casi idénticos a los modelos de volatilidad estocástica para opciones at the money. Esto ocurre con los modelos de valoración de opciones. Estos resultados muestran que parece razonable considerar la correlación entre la volatilidad y el precio spot del activo para explicar los sesgos en las in-the-money y las out-of-the-money.

Aproximaciones más recientes centran la discusión en torno a supuestos adicionales hasta entonces no tenidos en cuenta, como es, considerar dentro del comportamiento estocástico para la volatilidad, un componente sistemático y uno idiosincrático. Dentro de esta aproximación destaca el trabajo de Amin y NG (1993), que obtiene soluciones analíticas al problema de la valoración de opciones sobre acciones cuando la volatilidad de la rentabilidad de la acción subyacente es estocástica con un componete sistemático, que está relacionado con la volatilidad también estocástica del crecimiento del consumo (o cartera de mercado), y un componente "idiosincrático" o no sistemático.

Esta nueva aproximación se encuentra avalada por una gran cantidad de trabajos que explican la evidencia empírica de que la volatilidad de la rentabilidad de las acciones no sólo es estocástica, sino que además está altamente correlada con la volatilidad del mercado (Wiggins,[1987])

La consideración de la volatilidad del crecimiento del consumo (o cartera de mercado) como estocástica significa que el tipo de interés spot, el cual es determinado por la volatilidad del consumo en equilibrio, sea en general también estocástico. De esta manera, este modelo incorpora de forma simultánea un tipo de interés estocástico y procesos estocásticos para la volatilidad del cambio de precios de las acciones en la valoración de opciones, lo cual constituye, una novedad.

Amin y NG (1993) suponen para la evolución conjunta del precio de la acción y del consumo agregado los siguientes procesos:

$$dS = \mu_{s,t} - 1/2\, h_{s,t} + \varepsilon_{s,t}$$
$$dC = \mu_{c,t} - 1/2\, h_{c,t} + \varepsilon_{c,t} \qquad [13]$$

donde S y C representan el precio de la acción y el consumo agregado respectivamente. Como se puede observar, se considera que los procesos para S y C revierten en media en una proporción que depende de la volatilidad.

Las variables que aparecen en las expresiones anteriores se definen del siguiente modo:

- $\mu_{s,.t}$ y $\mu_{c,t}$ son la tasa media de rentabilidad del proceso de rentabilidad de la acción y la tasa media del proceso del crecimiento del consumo agregado, respectivamente.

- $h_{s,t}$ y $h_{c,t}$ son la varianza del proceso para la acción y la varianza para el proceso del consumo agregado, respectivamente.

- $\varepsilon_{s,t}$ y $\varepsilon_{c,t}$ son los términos aleatorios en los procesos para la acción y para el consumo agregado.

Un segundo supuesto es que la media y la varianza de la rentabilidad de la acción y del consumo agregado en un momento t no se verán afectadas por los valores de las variables futuras de estado realizadas después de t, es decir que son independientes de los valores futuros de las variables de estado consideradas.

El proceso estocástico para la varianza de la rentabilidad de la acción vendría dado por la siguiente expresión:

$$h_{s,t} = \beta . h_{c,t} + h_{d,t}, \qquad [14]$$

donde β es una constante, que refleja el grado de correlación o sensibilidad entre la varianza de la rentabilidad de la acción y la varianza del crecimiento del consumo, $h_{c,t}$ y a través de esta última, con el tipo de interés de equilibrio. De esta manera, $\beta . h_{c,t}$ es, por tanto, el componente sistemático de la varianza de la rentabilidad de la acción y $h_{d,t}$ es el componente "idiosincrático" o no sistemático.

Si los procesos para la media, varianza y covarianza son predecibles [11], la fórmula de valoración de opciones que obtienen es independiente de las preferencias por el riesgo de los inversores. Sin embargo, cuando estos procesos no son predecibles, la fórmula incorpora, en la mayoría de los casos, algún parámetro que define el tipo de preferencias del inversor representativo.

La primera fórmula que obtienen se refiere al caso más general, donde se describe el valor de una opción call sobre una acción, cuando los procesos referidos a la media, varianza y covarianza son impredecibles. Cuando estos procesos son predecibles, la solución, que sería ahora independiente de las preferencias, se simplifica bastante y resulta la siguiente ecuación dada por:

[11] Esto ocurre cuando $\mu_{c,t}, \mu_{s,t}, h_{c,t}, h_{s,t}$ y $\sigma_{cs,t}$ son sólo funciones de datos de períodos anteriores de las variables de estado .

$$\Pi_0 = E_0\left\{S_0.N\left[d_1(G_T)\right] - K.\exp(-R(G_T)T).N\left[d_2(G_T)\right]\right\} \qquad [15]$$

donde

$$d_1(G_T) = \frac{\ln\left[S_0/K.\exp(-R(G_T)T)\right] + \frac{1}{2}.\overline{h}_s(G_T)T}{\left[\overline{h}_s(G_T).T\right]^{1/2}}$$

$$d_2(G_T) = d_1(G_T) - \overline{h}_s(G_T)T,$$

$$R(G_T) = \sum_{t=0}^{T-1} r_t/T,$$

$$\overline{h}_s(G_T) = \sum_{t=1}^{T} h_{s,t}/T.$$

donde Π_0 es el precio de una opción de compra sobre una acción (S), con precio de ejercicio igual a K y maduración el día T. Además, se supone que $G_T \equiv \sigma(\underline{Y}_\tau, \underline{U}_\tau; \tau \leq T)$ es la σ-álgebra generada para $(\underline{Y}_\tau, \underline{U}_\tau; \tau \leq T)$, donde $\underline{Y}_\tau$ es el vector de los valores pasados de las variables de estado sistemáticas, $\underline{U}_\tau$ es el vector de los valores ya realizados de las variables de estado específicas de la empresa, las cuales determinan la parte idiosincrática, de manera que ambos vectores constituyen el componente predecible de la varianza de la acción y del consumo.

La fórmula anterior es más general, pues recoge otras fórmulas propuestas en la literatura sobre valoración de opciones, como las siguientes:

- Modelo de Black-Scholes (1973), que analiza la valoración de opciones cuando la varianza y el tipo de interés son constantes .
- Modelo de Merton (1973), de Milne y Turnbull (1991) y de Amin y Jarrow (1992) que analizan la valoración de opciones con tipos de interés estocásticos con volatilidad de la acción constante, y que obtienen soluciones independientes de las preferencias por el riesgo.
- Modelo de Hull y White (1987) que analiza la valoración de opciones con volatilidades estocásticas, pero con tipos de interés constantes.
- Modelo de Bailey y Stulz (1989), que analiza la valoración de opciones sobre índices cuando el activo subyacente es la cartera de mercado y con varianza estocástica.

Para la contrastación de esta fórmula Amin y NG (1993) realizan experimentos de simulación, construyendo un modelo dinámico para los procesos de la varianza y tipo de interés. Se presentan los resultados de este experimento, comparando los precios que se obtienen con la fórmula de B-S y los precios con este modelo para opciones call a seis meses y opciones call a un año. Este análisis diferencia entre precios con baja varianza sistemática (β=0,1) y con alta varianza sistemática (β=0,9) y además para diferentes valores de α_m y α_d, (constantes que reflejan la rapidez en que el proceso revierte en media[12]), lo cual permite comparar el efecto de la reversión en media en los componentes sistemático e idiosincrático, respectivamente, de la varianza, es decir, la medida del grado de persistencia de los dos componentes de la varianza.

Los resultados de este experimento muestran que la dirección del sesgo inherente en los precios B-S es diferente entre acciones con un fuerte componente sistemático para la varianza y aquellas con un fuerte componente idiosincrático. Además, el efecto de la reversión en media en la varianza sobre los precios de las opciones depende de si la reversión en media está relacionada con el tipo de interés o si la reversión en media es para el componente idiosincrático, el cual no está relacionado con el tipo de interés.

2.1.5. Aproximación mediante volatilidades implícitas.

Una aproximación diferente para valorar opciones con volatilidades estocásticas consiste en utilizar volatilidades implícitas en la fórmula de B-S. Este método es el que proponen Jarrow y Wiggins (1989), como alternativo a otros modelos, como por ejemplo el modelo de difusión de varianza de elasticidad constante (CEV) y las aproximaciones de Hull y White (1987), Wiggins (1987) y Johnson y Shanno (1987), que incluyen muchos parámetros y, por tanto, son más difíciles y caros de estimar.

Incluso a sabiendas de que se están violando los supuestos de B-S, en el que la volatilidad se supone constante [13], Jarrow y Wiggins consideran que por razones de simplicidad en el cálculo, el modelo B-S usando volatilidades

[12] A medida que esta constante se aproxima a cero, más rápida es la reversión en media del proceso.

[13] También analizan el supuesto de tipos de interés estocásticos y fricciones de mercado (impuestos,, requerimientos de márgen, costes de transacción, dividendos y ejercicio antes del vencimiento de la opción).

implícitas, parece preferible a las fórmulas alternativas más complejas de valoración de opciones para volatilidades estocásticas que ya comentamos.

Concretamente, la aproximación del modelo B-S con volatilidades implícitas que proponen estos autores se basa en el trabajo de Jarrow y Rudd (1982), que fue comentado en el capítulo anterior. De forma muy breve, este trabajo usaba las series de expansión generalizadas de Edgeworth para demostrar que podía aproximarse el valor de la opción al valor que daba el modelo de B-S más un término de error, pero donde la volatilidad se modificaba en función del proceso específico al que se creía se ajustaba el precio del activo subyacente. Es decir :

$$C_t(S_t, K, T) = BS_t(S_t, e^{-r(T-t)}, \sigma(adj)) + \varepsilon_t \qquad [16]$$

donde ε_t es un término de error, BS es el valor de la opción según la fórmula de B-S, donde S es el precio de la acción, r es el tipo de interés sin riesgo, K es el precio de ejercicio de la opción, T-t es el tiempo hasta la expiración de la opción y σ(adj) es el parámetro de la volatilidad ajustada.

Si, por ejemplo, el proceso estocástico para la acción fuera el proceso de difusión CEV, entonces el parámetro utilizado para esa volatilidad ajustada sería la del proceso CEV , es decir, $\sigma(adj) = \sigma\, S_t^{\psi-1}$.

Dado que es difícil la estimación de esta volatilidad ajustada usando directamente las rentabilidades del activo subyacente, Jarrow y Wiggins (1989) usan el procedimiento de estimación de la volatilidad implícita. Concretamente, este método consiste en encontrar aquel valor de σ que iguale el precio de mercado al valor B-S.

2.1.6. Modelos de difusión con saltos para la volatilidad.

Aproximaciones alternativas no recogidas en trabajos anteriores para reflejar un comportamiento estocástico para la varianza de la rentabilidad de un activo se encuentra en los procesos de difusión y saltos. Bajo este proceso, el comportamiento de la volatilidad se representa por un proceso de difusión en tiempo continuo, intercalándose en instantes discretos variaciones importantes en la volatilidad, que se denominan saltos, que a su vez, pueden considerarse o sistemáticos o no sistemáticos. Este comportamiento es el que se supone en los trabajos de Amin y NG (1993) y Naik (1993), que analizamos detenidamente en el capítulo 3 de esta tesis.

2.1.7. Modelos ARCH para la volatilidad.

Todas las aproximaciones que hemos desarrollado analizan un comportamiento estocástico para la volatilidad en tiempo continuo. El análisis en tiempo discreto aparece recogido en los modelos de varianza condicional heteroscedástica (modelos ARCH). Estos modelos constituyen, por tanto, aproximaciones en tiempo discreto de los procesos estocásticos en tiempo continuo que se suponen para la volatilidad en los diferentes modelos teóricos de valoración de opciones que hemos analizado con anterioridad[14].

La principal ventaja de estos modelos es que los parámetros se pueden estimar fácilmente, mediante aproximaciones de máxima verosimilitud, a diferencia de los modelos anteriores.

El comportamiento estocástico en el tiempo de la volatilidad se intenta modelizar en tiempo discreto y de ahí la utilización de los modelos de varianza condicional heteroscedástica (ARCH), que se definen como modelos autorregresivos no lineales donde la varianza condicionada a la información disponible en el instante t -1 (varianza condicional) no es constante, sino que depende de la información disponible en cada instante y de ahí su variabilidad en el tiempo (heteroscedasticidad). De ese modo:

$$\sigma_t^2 \equiv \mathrm{Var}(y_t | F_{t-1}) \qquad [17]$$

donde y_t es la tasa de rentabilidad de un activo desde t -1 hasta t y σ_t^2 se define como la varianza condicionada a toda la información pasada, contenida en los valores realizados de todas las variables relevantes, en el instante t -1 (F_{t-1}).

[14] El trabajo de Nelson (1990) presenta las condiciones bajo las que las ecuaciones en diferencias estocástica ARCH convergen en distribución a un proceso de Ito, cuando la longitud de los intervalos de tiempo discretos tiende a cero, a la vez que introduce una clase de modelos ARCH que puede ser aproximada a una amplia variedad de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Si suponemos que $m \quad E(y_t|F_{t\ 1})$, entonces la rentabilidad no explicada en el momento t , $_t \quad y_t \quad m_t$ [15].

Dado que muchos estudios econométricos, tales como Officer (1972), Black (1976), Engle y Bollerslev (1986) y French, Schwert y Stambaugh (1987) han contrastado ese comportamiento heteroscedástico en los datos observados de la volatilidad de los activos financieros, la utilización de estos modelos para predecir el riesgo y, en consecuencia, para la valoración de activos ha proliferado en la mayoría de los trabajos de investigación en el área de las finanzas. Muestra de ello son los recientes trabajos de Duan (1991), Engle y Mustafa (1992) y Poon y Ho (1992), que utilizan modelos GARCH para valorar opciones, modificando el modelo de Black-Scholes [16].

El enfoque que se utiliza para el cálculo de los estimadores clásicos de la volatilidad se hacía en relación al comportamiento temporal de los datos, comportamiento que obedecía a una tendencia a la agrupación de la volatilidad (heteroscedasticidad). Tradicionalmente, para modelizar la volatilidad y teniendo en cuenta la observación de Maldelbrot (1963) de que los cambios importantes de precios en los activos financieros iban seguidos de grandes cambios de cualquier signo y lo mismo con cambios pequeños, se usaban medidas del tipo:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{t-1}^2$$

donde p es el número de observaciones y $_t$ son los errores de predicción de algún modelo ajustado a los datos o los rendimientos.

Sin embargo, estos estimadores presentaban el inconveniente de que daban igual peso a la información reciente que a la más antigua (la elección de p era arbitraria), no teniendo en cuenta las características específicas de cada serie.

Para superar este inconveniente, Engle (1982) propone los modelos ARCH, en el que serán los datos, y no "a priori", los que determinen el número de retardos (peso relativo de cada observación) y la volatilidad inicial, parámetros que serán estimados usando procedimientos maximoverosímiles.

---

[15]Concretamente, en el trabajo de Engle y NG (1993), $_t$ es considerado como un promedio de las nuevas noticias en el momento t, innovaciones, que hacen que la rentabilidad observada difiera de su valor esperado y se produzca ese término de error.

[16]para una explicación detallada, véase Peña, I. (1993, pag, 11).

La expresión analítica del modelo ARCH (p) para la varianza condicional (σ_t^2) sería la siguiente:

$$\sigma_t^2 = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \varepsilon_{t-i}^2 \qquad [18]$$

Es de esperar que

$$\sigma_i \leq \sigma_{j,} \text{ para } i < j,$$

es decir, los errores de retardos más antiguos, tendrán menos efecto sobre la volatilidad actual. En el modelo ARCH(p), los errores que se produjeron antes de los "p" períodos o retardos, no tienen ningún efecto en la volatilidad actual.

Como una generalización del modelo ARCH (p), Bollerslev (1986) propone los modelos GARCH (p,q), que se expresan del siguiente modo:

$$\sigma_t^2 = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad [19]$$

Este modelo añade al modelo ARCH (p) inicial un término que tiene en cuenta el efecto de la volatilidad de períodos anteriores en la volatilidad actual.

El modelo GARCH (p,q) es un modelo ARCH (p) de orden infinito y como puede observarse, la varianza condicional depende sólo de la magnitud de ε_t y no de su signo. Concretamente en el modelo GARCH (1,1) [17] el efecto de una innovación sobre la volatilidad actual se reduce de forma geométrica a lo largo del tiempo [18].

Tanto los modelos ARCH como GARCH imponen restricciones a sus parámetros para garantizar que la varianza sea positiva, que son,

$$\sigma_0, \sigma_i \text{ y } \beta_j > 0.$$

[17] El modelo GARCH (1,1) es el modelo preferido en la mayoría de los casos por Bollerslev *et al.*(1992).
[18] El trabajo de Akgiray (1989) presenta los estimadores para la varianza condicional bajo un proceso ARCH y un proceso GARCH de forma analítica, pero para la varianza mensual, con datos diarios de las tasas de variación de los precios del activo.

Además, una condición adicional para garantizar la estabilidad o estacionariedad:

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i < 1$$

Cuando esta última condición no se cumple, de manera que las innovaciones tienen influencia permanente, surgen los modelos GARCH integrados (IGARCH).

A pesar del aparente éxito de estas parametrizaciones simples, los modelos ARCH y GARCH no pueden capturar algunas importantes características de los datos, además de que presentan restricciones en los parámetros, como su no negatividad, que algunas veces no se satisface en el análisis empírico [19].

La más importante característica no recogida por esos modelos es el efecto de apalancamiento o "efecto asimétrico" detectado por Black (1976) y confirmado por los resultados de los trabajos de Christie (1982), French, Schwert y Stambaugh (1987), Wiggins (1987), Nelson (1990) y Schwert (1990), entre otros, que demuestran que los rendimientos de los activos están negativamente correlacionados con los cambios en su volatilidad, de manera que el riesgo previsto varía según el signo de la innovación (ε_t). Estadísticamente, este efecto ocurre cuando una caída inesperada en el precio (debida a malas noticias), incrementa la predición de volatilidad más que un incremento inesperado de similar magnitud en el precio (debido a buenas noticias) .

Para tener en cuenta este efecto, Nelson (1990) propone el modelo GARCH exponencial o EGARCH, donde la varianza es una función asimétrica de las innovaciones, de forma que un EGARCH (1,0) se expresaría :

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \beta \log(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha_1 \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{2/\pi} \right] \quad [20]$$

donde α_0, β, γ y α_1 son parámetros constantes.

Tal y como expresa Peña (1993), "esta formulación tiene la ventaja de garantizar que la varianza es positiva, no impone restricciones en los

[19] Véase Nelson (1991).

parámetros y permite efectos asimétricos y no lineales de las innovaciones sobre la varianza de la serie (lineales sobre el logaritmo)".

El trabajo de Engle y NG (1993) destaca dos importantes diferencias entre el modelo EGARCH y el GARCH, que expone así:

- El modelo EGARCH permite que malas noticias y buenas noticias tengan un impacto diferente en la volatilidad, mientras que el modelo GARCH no.
- El modelo EGARCH permite que grandes noticias (buenas o malas) tengan un impacto mayor sobre la volatilidad que el modelo GARCH.

Este trabajo introduce y define la "Curva del impacto de las innovaciones", que mide cómo la llegada de nueva información o innovación es incorporada en las estimaciones de volatilidad de un modelo concreto. Con un análisis exhaustivo de estos modelos, Engle y NG (1993) presentan las gráficas de esta curva, para diferentes modelos para la varianza condicional heteroscedástica.

Formulaciones alternativas de modelos para la varianza condicional heterocedástica, que recogemos de forma breve, serían las siguientes:

-ARCH en media (ARCH-M) : Propuesto por Engle, Lilien y Robins (1987), incorpora el supuesto adicional de que la varianza condicional del término de error influye en cada período sobre el nivel de la variable que se pretende explicar, por lo que representa un nivel de generalidad superior respecto a los modelos ARCH y GARCH analizados con anterioridad. La inclusión de este supuesto fue planteada a raíz de la observación de Merton (1980), que muestra una relación entre los rendimientos esperados de una cartera y su varianza condicional.

Este supuesto es muy apropiado en los mercados financieros que tratan de caracterizar las primas de riesgo de los tipos de interés (y_t), definidas como la diferencia entre el tipo forward (F_1) y el valor esperado actual del tipo futuro ($E_t r_{t-1}$). La idea es que siendo la varianza condicional una medida de la incertidumbre existente en el período t acerca de y_t, un mayor valor de $^{2}_{t}$ supone, en el caso de los mercados financieros un mayor riesgo, que podría aparecer reflejado en una mayor prima al riesgo. Ello generaría una mayor diferencia entre el valor esperado del tipo futuro y el tipo forward, con el resultado, por tanto, de que y_t F_t $E_t r_t$ $_1$, dependerá, en general, de ^2_t. El modelo ARCH-M quedaría especificado del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
&y_t = \alpha + \beta g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t \\
&\varepsilon_t \big| F_{t-1} \approx N(0, \sigma_t^2) \qquad [21] \\
&\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \sum_{i=1}^{p} wi\, \varepsilon_{t-i}^2
\end{aligned}
$$

donde g es una función continua y suele ser lineal o logarítmica, con la varianza condicional especificada de modo adecuado.

Otros modelos tipo ARCH son el ARCH Semiparamétrico (SPARCH) de Engle y González (1991), el ARCH Estructural (STARCH) de Harvey, Ruiz y Sentana (1992), el ARCH no lineal de Engle y Bollerslev (1986), el ARCH multiplicativo de Mihoj (1987), Geweke (1986), Pantula (1986), el modelo CJR de Glosten, Jagannathan y Runkle (1989), el modelo de desviación estándard autorregresiva de Schwert (1990), el GARCH Asimétrico (AGARCH) de Engle (1991), el GARCH no lineal asimétrico, el VGARCH [20], el A-PARCH (Asymmetric Power ARCH) de Ding, Granger y Engle (1993), el GARCH-M de Engle y Bollerslev (1986), el Log-GARCH de Pantula (1986) y Geweke (1986), entre otros.

Es de destacar también la aparición de la formulación tipo ARCH para modelizar la volatilidad respecto a un vector de N variables aleatorias, lo que constituye los modelos ARCH- multivariantes, los cuales aparecen definidos en Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), como también el modelo GARCH-M multivariante.

En relación a la valoración de opciones, Duan (1991) propone el modelo de valoración de opciones OGARCH que, de forma muy breve, estima el valor de una opción actualizando el valor esperado a la expiración de la opción, donde la varianza sigue una estructura GARCH.

Otros modelos en tiempo discreto para describir el comportamiento de la volatilidad se encuentra en *los modelos de volatilidad estocástica* (ARV), propuestos por Taylor (1986) y que, a diferencia de la metodología tipo ARCH, es el logaritmo de la varianza, ^2_t, el que sigue un proceso lineal estacionario,

[20] Un estudio detallado de las diferentes especificaciones de estos modelos para la varianza condicional heretoscedástica, es Engle y NG (1993).

(generalmente un proceso autorregresivo), que para el concreto ARV(1) viene dado por:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \qquad\qquad \varepsilon_t \approx IID(0,1)$$

$$\log \sigma_t^2 = \gamma + \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \eta_t \qquad\qquad \eta_t \approx NID(0, \sigma_\eta^2) \qquad [22]$$

donde los residuos $_t$ son independientes de $_t$.

En cuanto a los resultados de la contratación de las formulaciones tipo ARCH, destacaremos los trabajos de Akgiray (1989), Engle y NG (1993), Peña (1993) y Ruiz (1993) y Alegría y Calatayud (1989).

Para Akgiray (1989), los modelos ARCH y GARCH simulan mejor los valores reales de la volatilidad que las formulaciones alternativas (volatilidad histórica y volatilidad media ponderada exponencial, que presentamos más adelante). Comparadas con estas dos últimas, la formulación GARCH es superior y más aún en períodos de alta volatilidad y cuando los cambios en volatilidad tienden a ser persistentes Este efecto queda recogido en el modelo GARCH en el parámetro β que acompaña a la varianza realizada de períodos anteriores.

Las estimaciones de la volatilidad según las distintas formulaciones se comparan y evalúan normalmente a través de cuatro estadísticos:

- Error medio (ME).
- Raíz cuadrada del error medio (RMSE).
- Error absoluto medio (MAE).
- Porcentaje de error absoluto medio (MAPE) [21].

Akgiray (1989) concluye que, aunque ninguna de las estimaciones es tan exacta como sería deseable (el más pequeño MAPE es mayor del 30%), las estimaciones GARCH constituyen una mejora sustancial respecto a las estimaciones tradicionales, como por ejemplo la media histórica muestral.

[21] Estos estadísticos aparecen expresados de forma analítica en Akgiray (1989), y son también utilizados por Lamoureux y Lastrapes (1993).

Los resultados de este trabajo deben analizarse con cautela, pues en el análisis de la serie de precios ha utilizado datos diarios (el autor demuestra que con datos semanales y mensuales, se encuentran notables diferencias) al tiempo que no considera formulaciones tipo ARCH más sofisticadas (como los modelos EGARCH, IGARCH o modelos de volatilidad estocástica ARV).

Otras aplicaciones empíricas de las formulaciones ARCH dan un buen balance para los modelos EGARCH, que parecen proporcionar mejores ajustes que los modelos GARCH [22], incluso cuando no se presenta el comportamiento asimétrico.

En relación a la problemática de la valoración de opciones, el trabajo de Poon y Ho (1992) compara el modelo OGARCH y el clásico B-S, concluyendo que el OGARCH reduce los sesgos de valoración que comete la fórmula de B-S, pero ese sesgo se sigue obteniendo.

El trabajo de Esther Ruiz (1993) es innovador pues hace un contraste entre formulaciones alternativas de la metodología ARCH y el modelo autorregresivo de varianza aleatoria (ARV) propuesto por Taylor (1986). Para este estudio, utilizó los datos de los tipos de cambio diarios de cuatro monedas (franco suizo, yen, libra y marco) frente al dólar, y los modelos utilizados para el contraste empírico son el GARCH(1,1), EGARCH(1,0) y el ARV(1).

Aunque estas tres formulaciones pueden recoger las propiedades observadas en la serie de datos, ninguno de ellos puede concluirse que sea superior al resto. Sin embargo, tanto para estimaciones dentro y fuera de la muestra, el modelo ARV(1) genera estimaciones con menor sesgo, dada su capacidad de usar volatilidades futuras para estimar la volatilidad, ya que las formulaciones tipo ARCH parecen poner más peso a los valores observados.

Engle y NG. (1993) contrastan diversas formulaciones tipo ARCH, incluso algunas no definidas con anterioridad, para lo cual utilizan los datos de la serie de rentabilidades diarias del índice TOPIX japonés, desde el 1 de enero de 1980 al 30 de Septiembre de 1987. Con esta serie de rentabilidades, llevan a cabo la estimación de los modelos ARCH(1,1), EGARCH(1,1), Asimétrico-GARCH(1,1), VGARCH(1,1), No lineal Asimétrico GARCH(1,1) y el modelo

[22] Ver Pagan y Schwert (1990) , Higgins y Bera (1992) y Engle y NG (1993).

Glosten-Jagannathan-Runkle (GJR) (1989), que recogen ese comportamiento asimétrico ya explicado.

Los resultados indican que en la mayoría de los casos, el comportamiento asimétrico simple no es el adecuado y el mejor modelo para capturar ese efecto asimétrico "parsimonioso" es el GJR, propuesto por Glosten-Jagannathan-Runkle (1989).

2.1.8. Procesos de caos determinísticos.

Estos procesos constituyen una alternativa para explicar las fluctuaciones económicas o de alguna variable en cuestión, como puede ser la volatilidad de la serie de rendimientos de un activo.

Como define Brock (1986), el proceso de caos determinístico surge de un proceso dinámico no lineal, que es determinístico respecto a las condiciones iniciales, pero donde los errores producidos de la estimación de los parámetros y condiciones iniciales pueden acumularse dentro de los errores de predicción y parecer que el proceso es aleatorio. Los procesos determinísticos que parecen estocásticos son denominados procesos de caos determinísticos.

Savit (1989) propone que las rentabilidades de un activo pueden no seguir un proceso estocástico, sino más bien un proceso de caos determinístico, que además de recoger la leptocurtosis, también tiene en cuenta la dependencia (lineal o no lineal) y, por tanto, la correlación detectada empíricamente en la serie de rendimientos de un activo. Y es que un proceso caótico, aparentemente puede parecer aleatorio, sin embargo, la dinámica subyacente tiene, al menos, parcialmente un carácter determinista.

La consideración de un proceso de caos para los movimientos del activo se analiza en Savit (1989), que estudia los efectos de este supuesto para el valor de una opción, y concluye que aunque las funciones de autocorrelación para este proceso y el clásico lognormal de B-S son las mismas, la consideración de un proceso de caos supone una reconsideración de las técnicas de cobertura y arbitraje de cara a obtener un resultado que sea neutral al riesgo.

Un trabajo empírico en relación a este proceso se encuentra en B. Wade Brorsen y Seung-Ryong Yang (1993), quienes comparan el proceso GARCH(1,1) y el de caos determinístico para una muestra de cambios diarios de precios de futuros de mercancías. Los resultados muestran la existencia de heteroscedasticidad condicional, pero aún así el modelo GARCH(1,1) no es totalmente adecuado. No se rechaza ni acepta la posibilidad de procesos de caos determinístico, aunque para alrededor de la mitad de las mercancías examinadas, los resultados son consistentes con caos determinísticos.

2.2.- ESTIMADORES DE LA VOLATILIDAD.

Las diferentes técnicas que se han utilizado para la estimación de la volatilidad, único parámetro no observable en la fórmula de B-S, han sido una de las razones que se han atribuido, según French y Martin (1988) a los diferentes, y en muchos casos, contradictorios resultados a la hora de contrastar dicha fórmula.

Los diferentes estimadores de la volatilidad son simplemente un reflejo de la variabilidad que se espera (futura) en el movimiento de los precios. El problema se produce cuando hay elevada inestabilidad temporal en la volatilidad [23], en cuyo caso su estimación en base a la información pasada no es muy correcta.

Como se expone en Alegría y Calatayud (1989), se han presentado diferentes técnicas de estimación de este parámetro, que pasamos a desarrollar a continuación:

[23] Peiró (1992) presenta evidencia de la fuerte variabilidad de la volatilidad a lo largo del tiempo en el mercado de acciones español.

2.2.1. Volatilidad histórica o muestral [24]:

Se define como la desviación estándard de la distribución del logaritmo de precios relativos del activo subyacente (tasa de rentabilidad del activo), con una muestra de precios observados correspondiente a un período anterior concreto. Esta desviación estándard se calcula por las técnicas estadísticas ya conocidas:

$$\sigma = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n}(\ln R_k - \mu)^2} \qquad [23]$$

donde R_k son los precios relativos del activo subyacente en el momento k (S_k / S_{k-1}) y μ es la media de la distribución, cuyo valor es:

$$\mu = (1/n)\sum_{k=1}^{n}\ln R_k \qquad [24]$$

Este podría ser el mejor estimador si las series de rentabilidades del activo fueran "estricto ruido blanco" [25] y además sería un estimador insesgado para períodos de tiempo relativamente largos. Este estimador fue propuesto, en un principio, por B-S (1972) para su modelo. Fue utilizado también por Galai (1977) y Finnerty (1978). No obstante, B-S comprobaron que con esta medida de la volatilidad, su modelo tendía a sobrevalorar opciones con volatilidades altas e infravalorar aquellas con volatilidades bajas.

2.2.2. Volatilidad histórica o muestral corregida:

Para garantizar que las estimaciones de la media y la desviación estándard tienen las propiedades deseadas de parámetros insesgados, Cox y Rubinstein (1985), proponen este estimador, también utilizado por Rogalski (1978), Analistas Financierosn Internacionales (1992) y Chamorro (1993). Este estimador sólo añade a la volatilidad histórica unos factores de correción para

---

[24] El trabajo de Akgiray (1989) denomina a este estimador "Benchmark forecast", denominación que utilizan otros autores.

[25] Para Akgiray un proceso "estricto ruido blanco" se define cuando la variable X_{t+s} está incorrelada con sus valores pasados, X_t y además dichos valores son independientes.

la varianza y para la desviación estándard. Así, estos estimadores insesgados para la varianza y la desviación estándard son:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\ln R_k - \mu)^2$$

$$\sigma = \left[\frac{(\frac{1}{2}n)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}n-\frac{3}{2})!}{(\frac{1}{2}n-1)!}\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln R_k - \mu)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad [25]$$

2.2.3.- Volatilidad histórica con precios altos y bajos.

El cálculo de la volatilidad histórica con los precios de cierre de los activos, aunque muy sencillo, no permite incorporar toda la información disponible y relevante del comportamiento observado de la volatilidad, por lo que reduce su nivel de eficiencia. A lo largo de un día de negociación, el precio de un activo parte de un valor concreto, precio de apertura (O), experimenta diferentes cambios, que oscilan entre un valor máximo (H) y un valor mínimo (L), para terminar en el último precio del día, que se denomina "precio de cierre" (C).

La incorporación de los precios máximos y mínimos del día (precios intradía) en el procedimiento de estimación de la volatilidad es planteada por Parkinson (1980) y Garman y Klass (1980), que estiman la volatilidad histórica, pero usando los precios más altos y bajos del día de negociación. Para estos autores estos precios contienen más información referente a la volatilidad que los precios de apertura y cierre del día.

Para Parkinson (1976, 1980), el estimador usado para la volatilidad diaria debe ser el siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{0{,}361}{n}\sum_{i=1}^{n}(H_i - L_i)^2 \qquad [26]$$

donde H_i y L_i son los precios máximos y mínimos correspondientes a cada día de negociación, n . Este estimador, según demuestran Garman y Klass (1980) es cinco veces más eficiente que el clásico que utiliza sólo los precios de cierre. De otro modo, produce estimaciones equivalentes a la utilización de precios de cierre con una muestra cinco veces mayor.

Garman y Klass (1980) mejoran el estimador de Parkinson añadiendo los precios de cierre de cada día, proponiendo entonces el siguiente:

$$\sigma^2 = 0.511(H_t - L_t)^2 - 0.019\left[(C_t - C_{t-1})(H_t + L_t - 2C_t) - 2(H_t - C_t)(L_t - C_t)\right] - 0.383(C_t - C_{t-1})^2$$

que incluye los valores de C, que representa los precios de cierre de cada día.

Garman y Klass (1980) demuestran que este estimador es casi ocho veces más eficiente que el estimador clásico que usaba tan solo la diferencia de los precios de cierre de cada día. Otra mejora respecto al estimador inicial de Parkinson se presenta en Kunitomo (1992) [26].

No obstante, Beckers (1983) considera que en la práctica el estimador propuesto por Garman y Klass (1980) es una media ponderada entre el estimador de Parkinson (1980) y el tradicional de los precios de cierre.

2.2.4. Volatilidad implícita (ISD):

Utilizada por primera vez por Latané y Rendleman (1976), se define como aquel valor de la volatilidad que iguala el valor de mercado de la opción (valor observado) al valor teórico de dicha opción haciendo uso de un modelo de valoración, como por ejemplo, el modelo de B-S. Por tanto, conociendo el valor observado de la opción y el resto de las variables que intervienen en la formación del precio de estos activos derivados (precio de ejercicio, tipo de interés, tiempo hasta la expiración y precio del activo subyacente), el modelo de valoración produce un único valor para la volatilidad, valor que se denominará " volatilidad implícita" o como denominan Cox y Rubinstein (1985) "estimación de mercado de la volatilidad". La volatilidad así obtenida hace referencia, de alguna manera, a la volatilidad futura que se intenta estimar. Por tanto, se trata de encontrar σ, tal que:

$$C_j = C_j\ (\ \sigma\ )$$

---

26 Una explicación detallada del método clásico, del de Parkinson y de Kunitomo, se presenta en Chamorro (1993), en el que además se calculan los tres estimadores para la determinación de la prima de garantía de los depósitos en los bancos españoles más grandes en el período que va desde el 1 de Julio de 1990 al 30 de Junio de 1992.

donde C_j es el precio de mercado de la opción j y $C_j(\sigma)$ es el valor que produce el modelo de la opción j, utilizando como volatilidad la implícita σ.

La volatilidad implícita dependerá, fundamentalmente, de los cambios en las expectativas que los flujos de información provoquen en el mercado. Las principales fuentes de información que afectan a las expectativas sobre el precio de los activos provienen de anuncios sobre determinadas variables económicas o financieras, acontecimientos de divesa índole o decisiones de política monetaria o fiscal. Entre otros factores, los cambios de la volatilidad histórica parecen influir en los cambios en las expectativas sobre la volatilidad implícita, según se muestra en Analistas Financieros Internacionales (Marzo,1992).

El cálculo de la volatilidad implícita no se puede hacer de forma analítica y algunos investigadores han utilizado métodos numéricos, tales como el método de Newton-Raphson y sus variantes, para su obtención. Además, hay otras opciones, donde no pueden encontrarse valores para la varianza implícita que justifiquen los precios observados de las opciones. En relación a esta observación, el trabajo de Manaster y Koehler (1982) presenta las condiciones necesarias y suficientes para que exista una varianza implícita positiva; concretamente se presenta un algoritmo [27] que converge al valor único de la varianza implícita, cuando ésta existe.

2.2.5. Desviación estándard implícita ponderada (WISD).

En la medida en que puede haber diferentes opciones sobre el mismo activo con diferentes vencimientos en un momento del tiempo, se obtendrán diferentes volatilidades implícitas según sea el vencimiento [28]. Por esta razón, Latané y Rendleman (1976) proponen la WISD como estimador de la volatilidad.

[27] Ver Manaster y Koehler (1982), pag. 228.

[28] Cox y Rubinstein (1985) plantean que diferentes opciones sobre el mismo activo pueden tener diferentes volatilidades implícitas, incluso para opciones con el mismo día de expiración: puede existir alguna diferencia que haga que el ejercicio anticipado sea óptimo, por lo que el tiempo de vida de esa opción no es el mismo. Por ejemplo, si una call está "muy en dinero" y el día más próximo de pago de dividendos es dentro de un mes, en el que se ejercitará probablemente, la volatilidad implícita reflejará la estimación de mercado de la volatilidad para sólo un mes, aunque el día de expiración sea dentro de más meses.

Si hay "n" opciones sobre una acción en un momento del tiempo, habrá que proceder al cálculo de las correspondientes desviaciones estándard implícitas para los diferentes vencimientos de las opciones sobre el mismo stock, σ_j, donde j = 1,2,......,n, siguiendo el cálculo que se proponía con anterioridad para la obtención de la volatilidad implícita.

Si esas estimaciones se ponderan y promedian del siguiente modo:

$$\hat{\sigma} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \sigma_j / \sum_{j=1}^{n} \omega_j \qquad [27]$$

donde ω_j es la ponderación aplicada a la j-ésima estimación, se obtiene la desviación estándard implícita ponderada (WISD).

La problemática surge en relación a cuáles deben ser los valores que tomen las ponderaciones a utilizar en el cálculo de esta volatilidad. No sería correcto utilizar como ponderación $_{j}\ 1/n$ para $j = 1,2\ldots n.$, tal y como hacen Schmalensee y Trippi (1978) y Patell y Wolfson (1979), pues hay algunas opciones que son más sensibles a σ que otras, por lo que deberían de tener más peso.

Por otro lado, se sabe que los valores de las opciones call "at-the-money" son más sensibles a la volatilidad que las "out-of-the-money" y las "in-the-money", por lo que en lugar de estudiar las ponderaciones, se utilizaría como volatilidad implícita la correspondiente a aquellas opciones que están "at-the-money".

Mejor aún, y como hacen Latané y Rendleman (1976) y Rogalski (1978), es ponderar de acuerdo a la derivada parcial del valor de la opción call que da la ecuación B-S respecto a cada desviación estándard implícita, la "vega" η de la opción, es decir:

$$\omega_j = \partial C_j / \partial \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

de manera que las opciones más sensibles a la desviación estándard son ponderadas más fuertemente que aquellas que no lo son.

Concretamente, la expresión usada por Rogalski (1978) para la varianza implícita ponderada (WIV) fue:

$$WIV = \left[\sum_{i=1}^{N} IV_i(di)\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{N} di\right]^{-1/2} \qquad [28]$$

donde, utilizando la misma notación que Rogalski, WIV es la varianza implícita ponderada sobre N opciones diferentes sobre el stock, IV es la varianza implícita para la opción i y di es la derivada parcial de la opción i respecto a su varianza implícita.

Chiras y Manaster (1978) y Resnick, Sheikh y Song (1993), siguiendo un razonamiento similar, utilizan como ponderación la elasticidad del precio de la opción call de B-S con respecto a cada desviación estándard implícita, es decir:

$$\omega_j = (\partial C_j \,/\, \partial\sigma_j)(\sigma_j / C_j),\ j = 1, \ldots, n \qquad [29]$$

Latané y Rendleman (1976), después de una importante evidencia empírica, concluyen que la desviación estándard implícita ponderada (WISD) es, generalmente, un mejor predictor de la volatilidad futura del activo que las predicciones de desviaciones estándard basadas en datos históricos .

La crítica más común que se hace a la varianza implícita ponderada como estimador de la volatilidad y que se menciona en Rogalski (1978) es que, la media de WIV es una función inversa del vencimiento. Es decir, cuando el tiempo a la maduración se incrementa, la WIV en media declina. Esto es contrario al supuesto intuitivo de volatilidad creciente para más amplios intervalos de tiempo y también viola el modelo B-S que mantiene que la tasa de varianza debe estar positivamente relacionada con el precio de la opción.

Una posible explicación que da Rogalski (1978) a esta crítica es que la medida de varianza de WIV implícita en su fórmula es una estimación de la valoración de mercado de la incertidumbre de la opción respecto al tiempo que queda hasta la maduración. De manera que el mercado asigna a las opciones a corto plazo mayor grado de incertidumbre que a las de largo plazo.

Su trabajo concluye que de las estimaciones para la varianza analizadas (actual, histórica y WIV) la varianza implícita es mejor predictor de la futura volatilidad que el resto, aunque ninguna valora correctamente las opciones cuando se utiliza el modelo B-S, ya que todas producen sesgos sistemáticos.

Plantea por tanto, el estudio de las diferentes distribuciones o procesos estocásticos para la rentabilidad de la acción, en lugar del clásico lognormal, como explicaciones de los sesgos que comete la fórmula.

En un trabajo reciente, Resnick, Sheikh y Song (1993) proponen un cálculo de la WISD que mejora los resultados en la valoración de opciones, respecto a la WISD tradicional (composite) de Latané y Rendleman. La "WISD de vencimiento específico" (expiración-specific WISD) se calcula clasificando la totalidad de opciones que hay sobre un mismo activo en diferentes fechas de expiración para posteriormente calcular las WISD para cada clase de opciones con iguales fechas de vencimiento. Dado que las varianzas no son estacionarias, como en la mayoría de los trabajos empíricos se ha puesto de manifiesto [29], se podrá hacer el análisis de cómo varía la volatilidad para un mismo tamaño de empresa en diferentes meses y para diferentes tamaños de empresa, en un mes dado. En el epígrafe siguiente nos centramos en esta observación.

Este estimador parece reflejar mejor las expectativas de mercado respecto a la volatilidad y recoge, en especial, las diferencias mensuales y según la capitalización de mercado de la empresa que se han detectado en el cálculo de la volatilidad y que la WISD "composite", así como otros métodos de estimación no tenían en cuenta.

El procedimiento de Whaley (1982) para calcular la volatilidad implícita difiere de los anteriores en que en lugar de utilizar ponderaciones ya prefijadas (ad hoc), se calculan ponderaciones "implícitas" que permiten estimar la desviación estándard o volatilidad implícita, pero con un término de error, que se intentará que sea el menor posible. El valor de una opción se expresaría como:

$$C_j = C_j(\sigma) + \varepsilon_j \qquad [30]$$

donde C_j es el precio de mercado de la opción, $C_j(\sigma)$ el precio de la opción que genera el modelo (donde se conocen todos los argumentos excepto σ) y ε_j es el término aleatorio de la perturbación. La estimación de σ se determina por la minimización de la suma de los cuadrados de los residuos, es decir:

[29] B-S (1972), Blattberg y Gonedes (1974), Black (1976), Schmalensee y Trippi (1978) y Christie (1982).

$$\min_{\{\hat{\sigma}\}} \sum_{j=1}^{n} e_j^2$$

donde e_j es el residuo observado y ˆ es la estimación de σ.

Dado que la ecuación que define el valor de la opción no es lineal, se utiliza un procedimiento de estimación no lineal para minimizar la suma de los cuadrados de los residuos [30], que comienza con la expansión del valor de la opción mediante un desarrollo de Taylor, es decir:

$$C_j = C_j(\sigma_0) + \frac{\partial C_j}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma_0}(\sigma - \sigma_0) + ... + \varepsilon_j \qquad [31]$$

donde σ_o es el valor inicial de σ.

Ignorando los términos de más alto orden, para así linealizar la ecuación inicial, se reduce la expresión anterior a:

$$C_j - C_j(\sigma_0) + \sigma_0 \frac{\partial C_j}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma_0} = \sigma \frac{\partial C_j}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma_0} + \varepsilon_j \qquad [32]$$

Aplicando mínimos cuadrados ordinarios (OLS) obtiene la estimación de σ.Para garantizar la tolerancia de esta estimación se debe cumplir que

$$\left|(\hat{\sigma}_1 - \sigma_0)/\sigma_0\right| < k \qquad [33]$$

donde k es una constante positiva pequeña. Si el test de tolerancia falla, la ecuación inicial no lineal se vuelve a linealizar alrededor del parámetro estimado $\hat{}_1$, y a replicar los mínimos cuadrados ordinarios. El proceso es repetido para $\hat{}_i$, i= 2,..hasta que el criterio de tolerancia es satisfecho.

Hay tres importantes diferencias que cita Whaley en relación con este procedimiento y los anteriores:

1º Las ponderaciones son determinadas por los precios de las opciones, y no son "ad hoc", como en los procedimientos anteriores.

[30] concretamente el proceso de linealización de primer orden de Eisner y Pindyck (1973).

2º Se evita el problema de la estimación contemporánea de la volatilidad y valoración de la opción, ya que este procedimiento, en lugar de calcular la desviación estándard implícita en el mismo instante en que la opción es valorada [31], calcula la volatilidad implícita un instante t -1, que utilizará para valorar la opción en cuestión un instante después.

3º Con esta técnica se calcula una desviación estándard para cada fecha de vencimiento de la opción, ya que usa sólo aquellas opciones que tienen la misma fecha de vencimiento.

En cuanto a los resultados, Whaley muestra que su procedimiento permite obtener estimaciones más exactas de la volatilidad futura que los métodos de estimación que ponderan en promedio.

2.2.6. Comportamiento estacional del precio de los activos:

Se ha observado empíricamente que las rentabilidades de los activos alrededor del comienzo del año y en enero son, en media, bastante diferentes que en el resto del año. Aunque, como cita Rubio (1993), fueron Kinney y Rozeff (1976) los primeros en señalar la magnitud de los rendimientos en enero, ha habido numerosos trabajos que han destacado la presencia de este fenómeno, como por ejemplo, Keim (1983), Roll (1983), Rogalski y Tinic (1986), Maloney y Rogalski (1989), Basarrate y Rubio (1990) y Rubio (1993).

Roll (1983), en particular, observa que los mayores rendimientos se producen durante el último día de diciembre y los cuatro primeros días de enero. Por este motivo, esta anomalía recibe el nombre de "turn of the year effect".

Rogalski y Tinic (1986), por ejemplo, encuentran evidencia de que la media total de las rentabilidades es más alta durante este período y que la varianza de estas rentabilidades es también más alta durante el mes de enero. Para el caso español, Basarrate y Rubio (1990) encuentran que la prima por riesgo del mercado español de valores fue del 7,21% en enero desde 1970 a 1987, mientras que dicha prima resulta ser igual a 1,41% incluyendo todos los meses en el análisis e igual, finalmente, al 0,88% cuando todos los meses, excepto enero, se incluyen en el estudio.

---

[31] Aproximación usada por otros autores ,como Latané y Rendleman (1976), Chiras y Manaster (1978) y MacBeth y Merville (1979).

Curiosamente, Rogalski y Tinic (1986) detectan de forma adicional, que esta fuerte estacionalidad está muy relacionada con el nivel de capitalización bursátil de las empresas. Concretamente, demuestran a nivel empírico que en el mes de enero se observan rentabilidades anormalmente altas para empresas con menor capitalización bursátil (las cuales además presentan un mayor grado de volatilidad en sus rendimientos), y, a su vez, rentabilidades anormalmente bajas para empresas con mayor capitalización bursátil. Este fenómeno conocido cómunmente como "efecto tamaño", ya había sido descubierto en el mercado norteamericano por Banz (1981).

También, el trabajo de Keim (1983) concluye que un considerable porcentaje de los rendimientos de las empresas de baja capitalización bursátil se obtenían durante el mes de enero, concentrándose en los cinco primeros días de enero. Por su parte, Rubio (1993) concluye que el efecto tamaño se debe, en un alto porcentaje, a lo que se denomina efecto enero y que dicho efecto se presenta, al menos para el mercado norteamericano, en la primera semana de contratación del año.

Rogalski y Tinic (1986) explican parcialmente la relación entre el efecto tamaño y el efecto enero por diferencias mensuales en el riesgo sistemático, en la medida que encontraban que las empresas de mayor tamaño tenían una menor medida de riesgo sistemático en enero que en otros meses del año y que las empresas de menor tamaño presentaban un mayor medida de riesgo sistemático. Más aún, encuentran diferencias mensuales en la medida del riesgo total o varianza de las rentabilidades de los activos, de manera que las carteras de las empresas de menor tamaño tenían en enero varianzas que eran mayores que las varianzas de otros meses, mientras que empresas de mayor valor de mercado tenían más bajas varianza en enero que en los demás meses del año.

Hay otra hipótesis utilizada en muchos trabajos para explicar de forma parcial el fenómeno estacional y que se debe a Branch (1977), Dyl (1977) y Roll (1983) y que destaca Rubio (1993). Esta hipótesis aplicada por Rubio para el mercado global de activos se basa en la existencia de incentivos fiscales para realizar minusvalías, lo que da lugar a una fuerte presión a la baja de los precios de los activos hacia el final del año. Los inversores, en un intento de beneficiarse de esos incentivos fiscales por pérdidas de capital, presionan a la baja los precios de los activos al final del año. Una vez que el año ha terminado, esta presión desaparece, los precios de los activos volverán a sus valores de equilibrio, con lo que se producirán rendimientos extraordinariamente altos al principio de enero.

Maloney y Rogalski (1989) van más lejos, pues investigan si estos mayores valores de las varianzas de las rentabilidades de los activos detectados por Rogalski y Tinic (1986) se reflejan en los precios de las opciones antes del comienzo del año. Una vez que los precios de las opciones son funciones positivas de la varianza de la rentabilidad del activo subyacente, si los mercados de opciones son eficientes, una mayor incertidumbre (varianza) de las rentabilidades durante el comienzo del año debería ser incorporada en los precios de las opciones antes de ese período de tiempo. Para realizar el análisis empírico hacen uso de la volatilidad implícita y sus resultados son los siguientes:

-Las mayores varianzas de las rentabilidades alrededor del comienzo del año son anticipadas en los mercados de opciones call, observándose mayores valores para la volatilidad implícita, que luego se reducen al comienzo del año.

-Se observan mayores valores de la volatilidad implícita entre mitad de noviembre y mitad de diciembre, que luego decaen durante el comienzo del año . Este efecto es más fuerte para las opciones que expiran en el mes de enero que para aquellas que expiran en el resto de los meses.

2.2.7. Método de Black para la estimación de la volatilidad:

Fue planteado por Fisher Black en 1976, el cual observa una serie de características o propiedades que presenta la volatilidad del subyacente en relación a otras variables, como por ejemplo, el tiempo a la expiración y la volatilidad de la opción. Haciendo uso de estas propiedades define una serie de variables y formula los valores de unas volatilidades que llama "provisionales", que no son sino ajustes según las propiedades que observó inicialmente.

Tal y como apuntan Cox y Rubinstein (1985), el procedimiento de Black genera muy buenas estimaciones de volatilidades futuras. Además, se ha confirmado su superioridad respecto a otras alternativas, como la volatilidad implícita y varias técnicas estadísticas, que no tienen en cuenta los efectos de mercado sobre la volatilidad, ni determinados juicios de valor sobre su comportamiento, ventaja que sí presenta este método.

2.2.8. Estimador media móvil exponencialmente ponderado (EWNA-Exponentially weighted moving average forecast):

Este estimador es planteado por Akgiray (1989) para calcular la varianza mensual con datos diarios de las tasas de variación de los precios del activo y está dado por:

$$\sigma^2_{s,t} = (1-w)\sum_{i=1}^{12} w^{i-1} V_{s-i,t-20i} \qquad [34]$$

donde w es una constante que se obtiene por la minimización de la suma de los errores de estimación al cuadrado, y que en su trabajo se calculó por el algoritmo de Newton-Raphson. Este estimador es consistente con el supuesto de cambios infrecuentes en la varianza [32] y produciría buenos resultados si el proceso que genera las rentabilidades del activo fuera no estacionario.

2.2.9. Aproximación Bayesiana para la estimación de la volatilidad:

Desarrollada por Karolyi (1993), este método estadístico bayesiano hace uso de la información anterior de los datos de corte transversal de las volatilidades de todas las acciones, clasificadas por el tamaño (valor de capitalización de la empresa), nivel de apalancamiento financiero y volumen de negociación. De forma implícita, esta aproximación se basa en el hecho empírico observado por diversos autores, como Black (1976), Epps y Epps (1976), Morgan (1976), Christie (1982) y Pitts y Tauchen (1983), de que la volatilidad está relacionada con esas tres variables mencionadas anteriormente. Un supuesto restrictivo de este método es que los procesos estocásticos que describen la rentabilidad de las acciones deben ser independientes y lineales, que para la mayoría de los

[32] A diferencia de los modelos GARCH donde las varianzas están cambiando continuamente.

activos financieros, como ya detallaremos en epígrafes posteriores, no suele ser frecuente.

Una vez que obtiene las estimaciones bayesianas de la volatilidad, Karolyi (1993) hace uso del modelo de valoración de opciones sobre acciones de Roll (1977), Geske (1979b) y Whaley (1981) (modelo RGW) con otros diferentes estimadores para la volatilidad (varianza implícita, histórica y ex post [33]). Los resultados son esperanzadores, pues la media del error al cuadrado se reduce con la estimación bayesiana, además de que se reducen los sesgos sistemáticos respecto a la volatilidad de la acción. No obstante, se observan pequeños sesgos respecto al tiempo a la expiración y según la opción esté "sin dinero"o "en dinero".

Otros estimadores que se han propuesto para la volatilidad, son el estimador de máxima verosimilitud de Lo (1986), el estimados "encogido" (shrinkage) de Geske y Roll (1984) y el estimador robusto de Geske y Torous (1987).

Un criterio para indicar si las estimaciones de volatilidad están dentro de límites aceptables es el de "conos de volatilidad", introducido por Lane y Burghart (1990).

A lo largo de estos dos capítulos se ha presentado una revisión de la problemática que se deriva a la hora de encontrar un modelo que se ajuste lo más posible al valor observado de las opciones. Mientras que el modelo de saltos de Cox y Ross (1976) y el modelo de difusión con saltos de Merton (1976) no han recibido demasiado tratamiento teórico y empírico, el modelo de B-S (1973) que supone un proceso de difusión lognormal para el cociente de precios del activo subyacente, ha sido desarrollado y contrastado empíricamente en numeros trabajos de investigación.

Este desarrollo ha dado lugar a diferentes versiones y extensiones del modelo original que plantearon B-S, fundamentalmente, en cuanto a su versión en tiempo discreto, denominándose modelo binomial. La consideración de que las negociaciones de estos instrumentos financieros se realizan en instantes concretos del tiempo y no de modo continuo se debe a Cox, Ross y Rubinstein (1979), modelo que además presenta diferentes aplicaciones para la resolución

[33] Para el cálculo de la volatilidad ex post usa las rentabilidades de las acciones disponibles hasta la maduración de la opción.

de problemas de valoración que el modelo en tiempo continuo de B-S no resuelve.

Por otro lado, la consideración que se establezca para la volatilidad es crucial a la hora de obtener un modelo de valoración de opciones, por lo que el capítulo 2 se centra en el estudio de los modelos que se basan fundamentalmente en el supuesto de que la volatilidad no es constante.

Los siguientes capítulos se dedican enteramente al desarrollo de uno de los modelos que citamos en la revisión, concretamente el modelo de difusión con saltos de Merton (1976), que por sus características resulta muy sugerente e intuitivo, y que no ha sido desarrollado tan extensamente en la literatura financiera, como el modelo B-S.

CAPÍTULO 3:
PROCESO DE DIFUSIÓN CON SALTOS.

Uno de los supuestos más discutidos en la metodología B-S es el que exige que la rentabilidad del activo subyacente se distribuya como un proceso de difusión lognormal en tiempo continuo. Tal y como explica Merton (1976a p.126): "Esencialmente la validez de la fórmula de B-S depende de si los cambios en los precios satisfacen una clase particular de propiedad "local" de Markov, esto es, si en cortos intervalos de tiempo, los precios del stock sólo pueden variar en pequeñas cuantías".

No obstante, la evidencia empírica sostiene que el precio de los activos puede experimentar en intervalos de tiempo relativamente cortos, cambios importantes, que van seguidos de períodos continuos de escasa variabilidad. Es más, trabajos como los de Rosenfeld (1982) y Jones (1984) destacan la importancia de cambios sustanciales, es decir, saltos, en los precios de las acciones y, por consiguiente, en las opciones.

El hecho de que dos observaciones consecutivas difieran sustancialmente una de la otra, sugiere la posible inconsistencia de la hipótesis generalmente aceptada de que el proceso estocástico que genera los precios es asintóticamente, (esto es, cuando el intervalo de tiempo entre dos transacciones tiende a cero), un proceso continuo cuyas trayectorias son a su vez continuas.

En base a esa evidencia, se han propuesto modelizaciones alternativas en la dinámica de la rentabilidad del título para capturar la existencia de esos saltos ("outliers"), que podrían generar, concretamente para las acciones, distribuciones empíricas con colas más anchas y más altas en el centro que la normal, es decir, leptocurtosis que se ha detectado en numerosos trabajos empíricos. Parece que esas rentabilidades observadas resultan de procesos estocásticos compuestos de una distribución normal y algún otro proceso que depende del tiempo.

Se abre, por tanto, un amplio abanico de distribuciones, que intentan recoger el comportamiento leptocúrtico detectado empíricamente. Diferentes ejemplos los encontramos en Blattberg y Gonedes (1974), quienes derivan para la rentabilidad del stock una t-Student de una función de densidad normal-gamma, procesos no estacionarios en Cootner (1964), procesos de varianza infinita, Pareto-estables en Mandelbrot (1963), Fama (1965) y Mandelbrot y Taylor (1967), procesos de saltos no locales en Press (1967), procesos lognormales con varianza no estacionaria en Rosenberg (1972), procesos del tipo normal-lognormal subordinados de varianza finita en Clark (1973) y mezcla de distribuciones normales en Kon (1984).

Otras modelizaciones más recientes para explicar estos saltos se encuentra en la familia de modelos ARCH, GARCH, EGARCH, etc, que suponen varianzas estocásticas para las rentabilidades del stock. El propio Merton (1976, pág. 138) indica que el paso de un período donde no hubo variaciones importantes en el precio del subyacente a otro donde efectivamente se produjeron saltos, puede inducir al inversor a considerar que la tasa de varianza del proceso no es estacionaria, sino más bien que podría existir un efecto de "regresión" en la varianza, efecto que B-S (1972, pág. 405-409) han propuesto como una posible explicación a los sesgos que se han detectado en la contrastación empírica de su modelo. En este sentido, el supuesto de varianza condicional heteroscedástica (modelos ARCH), podría ser válido para recoger la existencia de saltos en la trayectoria histórica de la rentabilidad de un título.

En cualquiera de los casos, y después de su contrastación empírica, ninguna de estas modelizaciones parece haber sido aceptada en su totalidad. Como un modelo adicional, sugerente y explicativo de esos "saltos" detectados empíricamente, proponemos y desarrollamos en este capítulo el modelo de Merton (1976a), basado en el supuesto de que el proceso para la rentabilidad del activo subyacente, en nuestro caso una acción, combina un proceso de difusión y un proceso de saltos. Este proceso había sido propuesto inicialmente por Press (1967), sin embargo su trabajo se centraba únicamente en definir las características estadísticas del mismo y en el procedimiento de estimación de los parámetros.

La aportación de Merton es crucial, pues, basándose en que la rentabilidad del subyacente de la opción se compone de un proceso de difusión, que por definición es continuo y un proceso de saltos, saltos que se producen en instantes discretos en el tiempo, es capaz de derivar una solución analítica al problema de valoración de opciones sobre este activo.

Este proceso de difusión y saltos es más general, ya que incluye como un caso especial el proceso de difusión lognormal que se planteaba como supuesto básico en el modelo B-S, y , en principio, parece más realista en la medida que recoge la posibilidad de que, de cuando en cuando, el precio del activo subyacente experimente grandes variaciones (saltos) que, a su vez, producen importantes modificaciones en el precio de las opciones.

Además, y como veremos, la función de densidad de un proceso de difusión con saltos es leptocúrtica [1], por lo que, en principio, podría describir mejor el comportamiento observado de la rentabilidad de un activo, que la distribución lognormal alternativa.

La aplicación de procesos de difusión con saltos no sólo es válida para representar la dinámica de la rentabilidad de las acciones, sino también para otros activos, tales como divisas. Un ejemplo es el trabajo de Ahn, Fujihara y Park (1993).

3.1. CONCEPTO Y FORMALIZACIÓN DEL PROCESO DE DIFUSIÓN CON SALTOS.

De cara a su modelización teórica, el proceso de difusión con saltos (diffusion-jump process) para la rentabilidad del activo subyacente se descompone en dos términos:

-Un término en tiempo continuo, igual al que proponen Black y Scholes (1973) y que se trataría de un Movimiento Geométrico Browniano, con varianza constante por unidad de tiempo t. Este proceso, a su vez, se descompone en dos términos, uno de tendencia, que representaría el término esperado, anticipado del componente continuo, y un término no anticipado, que se modeliza como un proceso de Wiener, y que, en términos de la metodología CAPM, representaría el componente de riesgo sistemático, correlado con el mercado. Este término en su conjunto recogería las "normales" y, a su vez, marginales vibraciones en el precio, como por ejemplo, aquellas debidas a un desajuste temporal entre oferta y demanda, cambios en las tasas de capitalización, cambios en la perspectiva económica, o cualquier otra información que cause cambios reducidos en el valor del título.

[1]Véase Beckers (1981) para ver que de un proceso de difusión con saltos se obtiene leptocurtosis.

-Un término de "salto", de naturaleza discreta, e igualmente no anticipado, y que Merton (1976a) modeliza como un proceso Poisson. Este término toma diferentes valores según el precio del stock salte o no salte y como explica Merton, recogería las "anormales" vibraciones en el precio del stock debidas a la llegada de una importante y nueva información específica del mismo, la empresa o su industria, que tendrá, por tanto, un efecto no marginal en el precio, información que llegará en momentos discretos del tiempo. Siguiendo con Merton, este componente representaría el riesgo "no sistemático", es decir, estaría incorrelado con el mercado.

La parte no anticipada, tanto la correspondiente al término en tiempo continuo (proceso de Wiener), como el término de salto, debe constituir una martingala condición imprescindible para que pueda ser consistente con la hipótesis general de mercado eficiente de Fama (1970) y Samuelson (1965).

Este proceso significaría la posibilidad de grandes cambios en la variación del precio de la acción seguidos de frecuentes y pequeños cambios en dicha variación. Hay, por tanto, una combinación de cambios continuos y discontinuos o discretos, siendo estos últimos de carácter totalmente aleatorio.

Como es sabido, una variable aleatoria ξ se dice que tiene una distribución de Poisson cuando puede tomar todos los valores enteros no negativos n= 0,1,2,... con la probabilidad siguiente:

$$p\left[\xi = n, n \in Z^{+} + \{0\}\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}, \qquad [1]$$

Al ser una distribución discreta, su función de distribución (función de cuantía) es:

$$p\left[\xi \leq x\right] = \sum_{n=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \qquad [2]$$

Sus momentos característicos son:

MEDIA= $E\left[\xi\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} = \lambda,$

$$\text{VARIANZA= } E\left[\xi^2\right] - E\left[\xi\right]^2 = \lambda \qquad [3]$$

por tanto son iguales [2] y se denomina a λ parámetro de la distribución.

De igual manera, un proceso estocástico q(t) se dice que es un proceso de Poisson si un determinado suceso (por ejemplo, la llegada de información importante), se produce n veces en un intervalo de longitud t con una probabilidad dada por:

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \qquad [4]$$

esto es, si $P_n(t)$ sigue una distribución de Poisson de parámetro λt.

En nuestro caso, el suceso en cuestión es la llegada de información específica en el intervalo (t,t+h) sobre el stock, información tan importante que provoca un salto no marginal en su rentabilidad, salto dado por:

$$\frac{S(t+h)}{S(t)} - 1 = Y - 1 \qquad [5]$$

Formalmente, la alternativa que se propone para la variación del precio del activo subyacente es la que se refleja en la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS/S = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ + dq \qquad [6]$$

condicionada a que S=S(t), siendo S(t) el precio en t del activo subyacente, α es la rentabilidad esperada instantánea de la acción, σ^2 es la varianza instantánea de la rentabilidad de la acción, condicionada a la "no" llegada de información nueva e importante que provoque algún salto, dZ es un proceso estándard Gauss-Wiener, q(t) es un proceso de Poisson descrito por:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{si no ocurre el suceso de Poisson} \\ Y - 1 & \text{si ocurre el suceso de Poisson} \end{cases} \qquad [7]$$

[2] Véase Arnaiz (1978, pag. 140-143 y pag. 406-410).

donde dq y dZ se suponen procesos independientes, λ es el número medio de llegadas de nueva información por unidad de tiempo, k $\equiv \zeta$ (Y-1) donde (Y-1) es la variable aleatoria porcentaje de cambio en el precio de la acción si ocurre el evento de Poisson ($Y = S(t+h)/S(t)$), h es la longitud del intervalo en el que existe probabilidad de llegada de nueva información específica susceptible de producir un salto no marginal en los precios del stock y ζ es el operador esperanza matemática calculado en el rango de la variable aleatoria Y.

La integración de [6] proporciona la siguiente expresión:

$$\frac{S(t)}{S(0)} = e^{\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)t + \sigma Z(t)\right] Y(n)} \qquad [8]$$

siendo Z(t) una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza igual a Y(n) definida como sigue:

$$Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{j=1}^{n} Y_j & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

estando las Y_j (las variables que determinan la amplitud del salto) idéntica e independientemente distribuidas y siendo n la variable aleatoria de Poisson de parámetro λt que determina la realización del suceso "generación de una discontinuidad".

En el caso especial en que Y_j esté distribuida de modo lognormal ($\forall$j) y que la media de la amplitud de los saltos (k) sea cero, entonces tomando logaritmos en la expresión [8] resulta,

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} = \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right] t + \sigma Z(t) + \sum_{j=1}^{n} \ln Y_j$$

por lo que S(t)/S(0) será a su vez lognormal con varianza estocástica, distribuída (la varianza) como una variable aleatoria de Poisson.

En cuanto a la opción, la descripción de su dinámica descansa en el hecho observado por Cox y Ross (1976, pág. 146) de que si se cumplen las condiciones de los Teoremas de Modigliani-Miller (esto es, que todos los activos financieros que comportan derechos sobre los resultados futuros de una determinada empresa, por complejos que sean, son equivalentes al más simple de entre todos ellos) entonces, sea cual sea el proceso que gobierne la dinámica de precios de una acción emitida por una determinada empresa, cualquier opción emitida sobre tal acción tendrá un proceso generador de precios perfectamente correlado con el que gobierna los precios de la acción. Esto es, la única fuente de aleatoriedad en el proceso de la opción será el proceso de la acción. Por tanto, si denotamos por w el precio de la opción, w será función de S(t) y de t, es decir, w=F(S, t). La rentabilidad de la opción tendrá, en consecuencia, una dinámica similar:

$$dw / w = (\alpha_W - \lambda k_W)dt + \sigma_W dZ + dq_W \qquad [9]$$

donde las variables con subíndice w tienen la misma descripción para la opción que tenían para el activo.

No obstante y como Merton (1976a) analiza, en presencia de saltos (procesos dq y dq_w), la estrategia consistente en formar una cartera con acciones y opciones en proporciones w_1^* y w_2^* tales que:

$$\begin{cases} \sum w_i^* = 1 \\ w_1^* \sigma + w_2^* \sigma_W = 0 \end{cases} \qquad [10]$$

no será sin riesgo, a diferencia de lo que ocurría con la metodología B-S, cuando no había saltos en la rentabilidad del stock. De esta manera, la técnica de arbitraje de B-S no puede ser empleada, ni siquiera en el límite continuo.

No obstante, y dada la convexidad estricta del precio de la opción en el precio del stock (la "delta" de la opción), si un inversor sigue una cobertura B-S, de manera que esté largo en el stock y corto en la opción ($w_1^* \quad 0$ y $w_2^* \quad 0$, siendo, w_1 la proporción de la cartera invertida en el stock y w_2 en la opción, respectivamente), entonces en la mayoría de las ocasiones, obtendrá con su cartera continuamente ajustable una rentabilidad superior a la del activo sin riesgo. Sin embargo, en aquellas raras ocasiones en las que el precio del stock salta, experimentará comparativamente grandes pérdidas. Lo contrario ocurre cuando el inversor está corto en el stock y largo en la opción ($w_1^* < 0$ y $w_2^* > 0$).

Dado que la llegada de un período "activo" (de saltos) es totalmente aleatoria, no hay forma sistemática de aprovecharse de estos resultados y cubrirse totalmente cuando hay saltos en el precio del stock.

Habría que recalcar que las grandes pérdidas sufridas por los vendedores (writers) durante estos períodos activos no son debidas, en ningún caso, a una estimación de la tasa de varianza por debajo de su valor real, ya que se demuestra que no hay ningún valor finito para la tasa de varianza que utilizado en la fórmula permita protegerse de las pérdidas cuando se produce un salto.

Se pueden plantear tres aproximaciones diferentes para resolver el problema de valoración de opciones bajo el supuesto de procesos de difusión y saltos en el activo subyacente. Una primera aproximación establece que ante la imposibilidad, en consecuencia, de poder construir una cartera sin riesgo, no puede usarse la técnica de resolución de B-S. Se precisa recurrir entonces a la técnica de Samuelson (1965), que consiste en aplicar el lema de Itô a la parte continua de [9] y un lema similar [3] a la parte de salto, obteniéndose las siguientes relaciones:

$$\alpha_W \equiv \left[\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS}(S,t) + (\alpha - \lambda k) S F_S(S,t) + F_t + \lambda \xi \{F(SY,t) - F(S,t)\}\right] / F(S,t),$$

$$\sigma_W \equiv F_S(S,t)\sigma S / F(S,t), \qquad [11]$$

donde los subíndices en F(S,t) indican derivadas parciales, ε es el operador esperanza matemática y F(S,t) es el precio de la opción [4].

De la expresión anterior [11], la función F debe satisfacer:

$$0 = \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (\alpha - \lambda k) S F_S - F_\tau - g(S,\tau)F + \lambda \xi \{F(SY,\tau) - F(S,\tau)\} \qquad [12]$$

sujeto a las condiciones de contorno:

---

[3] Véase Merton (1971, pag. 396) para una descripción del correspondiente lema para procesos de Poisson.

[4] Se trata de una call europea sobre un activo que no reparte dividendos. Los mercados se suponen sin fricciones y, en general, se cumplen todos los supuestos B-S, excepto la lognormalidad de S(t+1)/S(t).

$$F(0,\tau) = 0$$
$$F(S,0) = \mathrm{Max}[0, S - E],$$

donde E es el precio de ejercicio de la opción y $g(S,\tau)$ es la tasa de rentabilidad esperada de equilibrio de la opción, cuando el precio del activo subyacente es S y el tiempo hasta el vencimiento de la opción es τ.

La ecuación [12] es una ecuación mixta en diferencias finitas y derivadas parciales que aunque es lineal, es difícil de resolver. Además precisa conocer las tasas de rentabilidad de ambos, opción y activo subyacente, para su eventual resolución, estimaciones que no se necesitaban en la derivación de B-S (1973).

Una segunda aproximación más sugerente para la derivación del valor de una opción bajo el supuesto de un proceso de difusión con saltos para el activo subyacente se encuentra en el modelo CAPM y en la metodología de valoración por arbitraje de Ross (1976). Dado que la llegada de nueva e importante información (que hace que el precio del stock salte) es específica para la empresa entonces tiene, generalmente, poco impacto en el índice del mercado. Por esta razón, Merton supone que el componente de salto de la rentabilidad del activo representará riesgo no sistemático (el componente de saltos estará incorrelado con el mercado) [5] y sería diversificable.

Un trabajo posterior de Jarrow y Rosenfeld (1984) refuerza aún más este supuesto de Merton, en tanto que obtienen analíticamente que la condición suficiente para que el modelo CAPM pueda ser utilizado para obtener la rentabilidad esperada de equilibrio, cuando el precio del activo sigue un proceso de difusión con saltos, es que justamente el componente de salto de la rentabilidad del activo sea "no sistemático" y diversificable en la cartera de mercado.

Sobre la base de que el modelo CAPM es una descripción válida de las rentabilidades de los diferentes activos en equilibrio, Merton construye una cartera con las proporciones de la cartera cubierta de B-S (w_1^* y w_2^* en [10]). La dinámica de la rentabilidad de esta cartera podrá expresarse como:

[5] Para Merton (1976a), no ha habido todavía estudios empíricos que demuestren que haya correlación entre el componente de saltos de la rentabilidad del activo y la rentabilidad del mercado.

$$\frac{dP^*}{P^*} = (\alpha_P^* - \lambda k_P^*)dt + dq_P^*$$

donde P* denota el valor de la cartera y el resto de variables tienen el mismo sentido que en las ecuaciones [6] y [9] anteriores, pero referidas a esta cartera en particular.

Se puede apreciar que la rentabilidad de esta cartera en su conjunto es un proceso de saltos "puro", donde la parte continua y no anticipada del stock (dz) se ha compensado con la de la opción (dz_w). En efecto, mediante la elección de la proporción activo/opciones igual a la de la cartera sin riesgo de B-S se habrá conseguido compensar y así eliminar, el componente de riesgo (sistemático), originado por la parte continua no anticipada del proceso (dz_P) [6]. El único término de incertidumbre en la rentabilidad de la cartera se encuentra ahora en el término de salto, (dq_P^*).

La cartera en su conjunto, por tanto, presenta sólo riesgo "no sistemático", donde todo el riesgo sistemático ha sido compensado, con la formación de la cartera, y por tanto, en términos de la metodología CAPM, la "β" de esta cartera es cero, y en consecuencia, su rentabilidad debe ser igual a la del activo sin riesgo [7], esto es, ($\alpha_P^* = r$).

En base a este supuesto, y siguiendo un álgebra similar a la de B-S, Merton obtiene una ecuación en derivadas parciales similar a la que resulta con la aproximación de Samuelson que comentamos con anterioridad, [12], con la única diferencia de que se sustituyen las tasas de rentabilidad esperada de la acción, α, y de la opción, $g(S,\tau)$, en el equilibrio por la tasa de interés sin riesgo, r:

$$0 = \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (r - \lambda k)SF_S - F_\tau - rF + \lambda\xi\{F(SY,\tau) - F(S,\tau)\} \qquad [13]$$

sujeto a las mismas condiciones de contorno anteriores.

---

[6] Ya que $w_1 dz = w_2 dz_w$ y la cartera combina una posición larga en el activo y una corta en la opción.

[7] Recuérdese que, en equilibrio, la rentabilidad α_i del activo i se puede expresar como $\alpha_i = r + (\alpha_M - r)\beta_i$, siendo α_M la rentabilidad de la cartera de mercado.

En la ecuación [13] sólo aparece el tipo de interés sin riesgo, por lo que no precisa del conocimiento de la rentabilidad esperada del stock ni de la opción, al igual que la fórmula de B-S. Se puede demostrar que esta ecuación se reduce a la de B-S cuando no hay saltos, es decir, cuando 0 y además, en general, no admite solución analítica (cerrada), precisándose, en cualquier caso, concretar alguna forma específica para la distribución de Y, como veremos a continuación.

Es importante destacar que aunque los saltos no afecten a la rentabilidad esperada de la cartera cubierta, una vez que se han considerado como "no sistemáticos", sí afectan a la valoración de la opción, ya que tanto el tamaño como la frecuencia de los mismos son variables que aparecen en la ecuación que implícitamente describe los precios de las opciones.

La solución general a la ecuación en derivadas parciales obtenida por Merton es la siguiente:

$$F(S,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} \left[\xi_n \left\{ W(SX_n e^{-\lambda k \tau}, \tau; E, \sigma^2, r \right\} \right] \qquad [14]$$

donde F(S,τ) es el precio de una opción cuando el precio del stock es S y el tiempo hasta el vencimiento es τ, X_n es una variable aleatoria que tiene la misma distribución que el producto de n variables aleatorias independiente e idénticamente distribuídas, donde cada una de ellas presenta la misma distribución que la variable aleatoria Y definida con anterioridad, W (S,τ;E,r, ^{2}) es el valor de la opción por la fórmula de B-S para el caso de no saltos y ζ es el operador esperanza matemática para la distribución de X_n.

Merton analiza dos casos especiales, en los cuales la solución anterior se reduce enormemente y es posible obtener una solución analítica o en forma cerrada:

1º Cuando hay probabilidad positiva de ruina inmediata, de manera que si el evento de Poisson ocurre, el precio del stock cae a cero. Este caso fue descrito por Samuelson (1973, pag 16).

2º Cuando la variable aleatoria Y, (S_t / S_{t-1}), tiene una distribución log-normal, siendo ^{2} la varianza de LogY y $\gamma = \mathrm{Log}(1+k)$, Merton (1976a) demuestra que el precio de la opción puede escribirse como :

$$F(S,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n}{n!} W(S,\tau;E,\upsilon_n^2,r_n) \qquad [15]$$

donde (1 k) y W es el valor B-S de la opción evaluado para una varianza ^2_n y una tasa de interés r_n dados por:

$$\upsilon_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau} \qquad [16]$$

$$r_n = r - \lambda k + \frac{n\gamma}{\tau} \qquad [17]$$

es decir, υ_n^2 y r_n son las tasas de varianza y de interés medias por unidad de tiempo, cuando suceden exactamente n saltos de Poisson durante la vida de la opción.

Esto es, $W(S,\tau;E,\upsilon_n^2,r_n)$ es la valoración B-S que realizaría el mercado incorrectamente al observar una volatilidad υ_n^2 en el activo subyacente y estimar que tal volatilidad es la varianza de un proceso de difusión continuo, ^{2}, sin tomar en consideración que en esa volatilidad observada existe un componente debido a la varianza del proceso de saltos. Idéntica interpretación cabe para r_n, esto es, la tasa "observada" de descuento de la cartera compuesta de B-S, en presencia de saltos, no coincide con la tasa sin riesgo, salvo que la distribución de tamaños de saltos se concentre de modo simétrico en torno a cero (k=0 y γ=0) y en este caso $r_n = r$ y $\lambda' = \lambda$.

Claramente, $W(S,\tau;E,\upsilon_n^2,r_n)$ es el valor de la opción, condicionado al conocimiento de que exactamente se producirán n saltos de Poisson durante la vida de la opción. Merton (1976a, pag. 135) concluye que el valor de una opción, F(S,τ) dado por la solución [15], "es una suma ponderada de cada uno de los precios, donde cada ponderación es igual a la probabilidad de que una variable aleatoria de Poisson con parámetro característico, $\lambda\tau$, toma exactamente en el valor n".

La tercera y última aproximación [8] se deriva del modelo de arbitraje para valoración de activos (APT, "arbitrage pricing theory") de Ross (1976). En este caso, Ross supone que los componentes de saltos de las rentabilidades de los stocks son independientes. Supone además, que hay m stocks, de manera que se pueden formar carteras cubiertas con stocks y opciones del tipo B-S con cada uno de los m stock existentes. Con el conjunto de esas carteras cubiertas para los m stocks y el activo sin riesgo, forma a continuación una cartera conjunta H. Cuanto mayor sea el número de stocks (m sea más grande), se irán formando carteras cada vez más diversificadas a las que Ross llama "carteras bien diversificadas", carteras, cuyo riesgo (no sistemático) tenderá a cero, y cuando $m \to \infty$ la cartera H no tendrá riesgo, de manera que su rentabilidad esperada se igualará a la tasa de interés sin riesgo ($\alpha_H = r$). Este resultado lleva finalmente a la misma ecuación en derivadas parciales que se obtuvo en las demás aproximaciones.

En el caso de "no saltos", B-S (1973, pg. 645, eq.14) derivaba el número de acciones que debían de comprarse por cada opción vendida para crear la cartera cubierta. Este ratio de cobertura venía dado por:

$$N = \partial W / \partial S = \phi(d_1) \qquad [18]$$

siendo ϕ(d) la función de distribución normal evaluada en d. Sin embargo, cuando hay saltos, no hay posibilidad de crear una cartera sin riesgo. No obstante, hay una combinación que sí puede eliminar todo el riesgo sistemático. El número de acciones requerida para esta cobertura, N*, es igual a F / S, que se obtiene diferenciando la fórmula [5]. Para el caso especial de la fórmula [6] este ratio viene dado por:

$$N^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n}{n!} \phi[d(n)] \qquad [19]$$

donde $d(n) \equiv [\log(S/E) + (r_n + \sigma^2/2)\tau + n\delta^2/2] \sqrt{(\sigma^2\tau + n\delta^2)}$.

De hecho, cuando λ=0, [19] se reduce a [18].

---

[8] Esta aproximación es la preferida por Jones (1984), ya que la conclusión de una una beta igual a cero para la cartera cubierta no se sustenta en la evidencia empírica. Black , Jensen y Scholes (1972) indican que tales carteras tienen rentabilidades esperadas por encima de la tasa de interés sin riesgo.

Finalmente y haciendo uso de la fórmula [14] y dada la estricta convexidad del precio del stock respecto del valor B-S de la opción, se puede demostrar que, permaneciendo todo lo demás igual, una opción sobre un stock con un componente de saltos tiene más valor que una opción sobre un stock sin el componente de salto [$\partial F / \partial \lambda > 0$ en torno a λ=0].

La metodología de Merton llevada a la práctica presenta innumerables aplicaciones:

- Por un lado esta formulación es capaz de explicar por qué se dan en el mercado precios superiores a los previstos por el modelo B-S para opciones significativamente sin dinero. Y es que, para este tipo de opciones, la circunstancia de que el precio del stock rebase al precio de ejercicio, antes de la expiración, es muy poco probable, bajo la hipótesis de un proceso de difusión continuo para los precios del stock. Ahora bien, si se considera alguna posibilidad efectiva de salto, aquella probabilidad resultará razonablemente incrementada, lo que hará que el mercado la valore por encima de su valor teórico B-S. Idéntica circunstancia ocurrirá en aquellas opciones significativamente con dinero.

Estas reflexiones corroboran los hechos observados en los mercados de que las opciones próximas a su vencimiento y significativamente con o sin dinero se venden más caras que sus correspondientes valores B-S, en tanto que para opciones con valor intrínseco próximo a cero y con vencimientos lejanos, el modelo B-S de valoración produce predicciones por encima de sus precios de mercado.

- Por otro lado y como manifiestan Cox y Ross (1975) la inclusión de procesos de difusión con saltos y "puros" de saltos que ellos proponen, podría solucionar problemas en la valoración de opciones, que son difíciles de resolver utilizando los procesos de difusión lognormal, tales como la posibilidad de quiebra, pago de dividendos, etc. Más recientemente, muchos autores, como Ball y Torous (1985), Jarrow y Rosenfeld (1984) y Jorion (1988), sugieren que el no incorporar los saltos en los modelos de valoración de opciones puede ser la explicación de algunos de los grandes sesgos empíricos que se producen con el modelo B-S.

3.2. EXTENSIONES DEL MODELO INICIAL DE MERTON (1976).

Se han planteado a posteriori diferentes extensiones respecto al modelo original de Merton (1976a), entre las que destacamos la de Jarrow, Oldfield y Rogalski (1977) y la de Amin (1993).

Jarrow *et al.* (1977) proponen un proceso parecido al de difusión con saltos de Merton (1976a), pero que difiere en algunos aspectos. Mientras que para Merton el coeficiente de autocorrelación es cero, este trabajo incorpora la posibilidad de correlación serial entre los saltos. Se elimina el problema de estimar la probabilidad del salto (λ), cuando suponen que el precio del activo salta con cada transacción [9]. Estudios empíricos han detectado que las rentabilidades calculadas con los datos de transacción no son independientes, sino que, por el contrario, presentan correlación negativa de forma significativa [10] (sobre todo para el primer retardo) [11], además de que el intervalo de tiempo entre las transacciones de una acción no es constante [12].

Para incorporar estas observaciones, Jarrow, *et al.* (1977) sugieren modelizar la dinámica seguida por las rentabilidades, mediante un proceso con intervalos de tiempo aleatorios entre las transacciones y correlación serial entre dichas rentabilidades, donde los saltos se distribuyen como variables aleatorias idénticas, con función de densidad gamma (cuando en Merton la función de densidad es Poisson). Este proceso se puede expresar analíticamente como:

$$dP / P = \alpha dt + \beta dW + z d\pi \qquad [20]$$

donde P es el precio de la acción, α es la media instantánea esperada por unidad de tiempo, β es la desviación estándar instantánea por unidad de tiempo, dW es un proceso Wiener con media cero y varianza unitaria, z es el porcentaje de cambio en el precio de la acción resultante de un salto, $Z = z + 1$, es la amplitud del salto y $d\pi$ es un proceso de salto, que toma valor la unidad

[9] No es sorprendente que en base a este supuesto, Jarrow *et al.* (1977) concluyan que hay un componente de salto en todas las muestras de datos que utilizaron.

[10] Según resulta de los trabajos de Niederhoffer y Osborne (1966).

[11] Tinic y West (1971) dan una posible explicación de esta correlación negativa. Brevemente, la llegada de órdenes de compra y venta de acciones, hace que los precios de transacción vibren, y aunque las órdenes con límite y la competencia de los floor broker pueden restringir el tamaño del spread, las fluctuaciones entre los precios efectivos bid y ask crean esa correlación negativa en las rentabilidades.

[12] El supuesto de intervalos de tiempo constantes entre las transacciones se remonta al trabajo de Bachelier (1900) y Osborne (1959).

cuando el salto ocurre y toma valor cero cuando no ocurre. Se supone que $d\pi$ y dW son independientes, que la amplitud del salto, Z, es independiente de dW y de $d\pi$, pero que los saltos pueden estar correlacionados de forma serial.

La expresión definitiva para la rentabilidad de una acción vendría dada por:

$$\ln\left[P(t+s)/P(t)\right] = (\alpha - \beta^2/2)s + \beta\sqrt{(s)}W + \sum_{i=1}^{N} \log Z(i) \qquad [21]$$

donde N es el número de saltos durante el intervalo de tiempo, s, entre dos observaciones de precios de la acción.

De esta forma, la rentabilidad ln[P(t+s)/P(t)] durante el período de tiempo, s, entre los precios observados de la acción se compone de tres partes. Las dos primeras se refieren al proceso de difusión continuo y la última al proceso de salto.

El tercer término desaparece cuando N=0, en cuyo caso ln[P(t+s)/P(t)] se distribuye normalmente con media $(\alpha-\beta^2/2)s$ y varianza $\beta^2 s$. Es de destacar que la covarianza entre los saltos no es cero, sino que toma diferentes valores $\rho_j\sigma^2$. Tal y como apuntan Jarrow, *et al.* (1977), la característica distintiva de la función de densidad conjunta es la autocorrelación entre los saltos.

Este modelo de proceso estocástico es más general, ya que recoge como casos particulares el camino aleatorio simple de B-S (1973) y Merton (1973), el proceso de saltos simple de Cox y Ross (1976), el proceso de difusión con saltos de Merton (1976) y los modelos de procesos subordinados introducidos por Mandlebrot y Taylor (1967), Praetz (1972) y Clark (1973).

Otra extensión importante es la de Jones (1984). En este artículo se critica el planteamiento de Merton (1976a), concretamente respecto a la estimación del parámetro λ (frecuencia media o probabilidad de saltos). El problema es que la estimación de este parámetro está sujeta a, fundamentalmente, dos tipos de errores: por un lado, los que se derivan del propio método de estimación, y por otro lado, el error en el que se incurre alutilizar los precios actuales observados del subyacente para estimar un parámetro que se utilizará para predecir el valor de las opciones en instantes de tiempo futuros o posteriores.

Para evitar este problema, Jones (1984) logra eliminar las probabilidades de salto actuales de la fórmula de valoración, haciendo uso de las técnicas de arbitraje ya conocidas de B-S y de Cox-Ross (1976), e introduciendo los precios de dos opciones, G y H sobre el mismo activo como explicativas del precio de la opción, F, además del precio del subyacente, S, y del tiempo hasta la expiración de la opción, τ.
Con determinadas proporciones en las tres opciones, el subyacente y un activo sin riesgo, Jones (1984) obtiene una cartera cubierta, cuya rentabilidad se iguala a al tipo de interés sin riesgo. Siguiendo el procedimiento de B-S y Merton (1976a), Jones (1984) obtiene finalmente la solución para el valor de una opción, solución que, al igual que la solución B-S, será indiferente al riesgo.
La última aportación de Jones (1984) consiste en proponer un modelo de valoración de opciones en el caso especial de grandes saltos (pricing model for large jumps), y demostrar que la reformulación a tiempo continuo de la hipótesis de varianza infinita que proponían Mandelbrot (1963) y Fama (1965) como explicativa de esos saltos importantes en las series empíricas de precios de las acciones, deriva en el modelo de grandes saltos que propone él mismo.
La aplicación del modelo en tiempo continuo de Merton (1976) a tiempo discreto es analizada en Amin (1993), que desarrolla un modelo simple en tiempo discreto para valorar opciones cuando el activo subyacente sigue un proceso de difusión con saltos.

El modelo teórico se construye superponiendo saltos multivariantes al modelo en tiempo discreto binomial de Cox, Ross y Rubinstein (1979) [en adelante, CRR] para procesos de difusión lognormales. En la sección 2 de su trabajo demuestra además que el proceso en tiempo discreto que propone converge al proceso de difusión con saltos en tiempo continuo, cuando se dan unas circunstancias determinadas.

El espacio de estados para la dinámica del precio del stock para, por ejemplo, dos períodos vendría representado así:

CUADRO 1

Día 0	Día 1	Día 2
	....	....
	$S_4(1)$	$S_4(2)$
	$S_3(1)$	$S_3(2)$
	$S_2(1)$	$S_2(2)$
	$S_1(1)$	$S_1(2)$
$S(0)$	$S_0(1)$	$S_0(2)$
	$S_{\;1}(1)$	$S_{\;1}(2)$
	$S_{\;2}(1)$	$S_{\;2}(2)$
	$S_{\;3}(1)$	$S_{\;3}(2)$
	$S_{\;4}(1)$	$S_{\;4}(2)$
	....	....

El cuadro 1 define el espacio de estados para la distribución del precio del activo para los dos primeros días. Para cada día, el precio del activo puede tomar un valor discreto especificado exógenamente, y que se indica por el subíndice. El precio $S_j(i)$ indica el precio del activo en el estado "j" el día "i".

Para la valoración de la opción y al igual que el modelo CRR (1979), se construye una cartera, formada por la opción, N acciones y B dólares en bonos sin riesgo, de modo que la inversión inicial en esta cartera sea cero.

Para eliminar el riesgo de esta cartera debido a cambios en el precio de la acción, se obtiene el ratio de cobertura, que resulta idéntico en cuanto a su forma funcional al obtenido en el modelo CRR, pero que numéricamente es diferente. Como afirma Amin (1993, pag. 1837): "en el modelo CRR, dado que sólo son posibles cambios de precios del stock locales, la cartera cubierta será, siempre, sin riesgo. Pero en nuestro modelo, no podemos garantizar que la cartera esté sin riesgo cuando un "evento raro" ocurre".

Es decir, la ausencia de arbitraje no es suficiente para garantizar que la variación en el valor de la cartera en el período siguiente sea cero (ganancias o pérdidas de capital nulas). Para cubrirse ante todos los múltiples valores o estados posibles que puede tomar el precio del activo al día siguiente, necesitaríamos tantos activos independientes como el número de esos estados. Dado que no se dispone de tantos activos, un inversor no puede cubrirse y en este caso incurrirá en ganancias o pérdidas inesperadas de capital.

Igual que Merton (1976a), Amin (1993) supone que el riesgo de salto es diversificable (no sistemático), de manera que en un mercado eficiente de capital este riesgo no debería ser valorado en el equilibrio, se anularía, dado que al contener la cartera sólo riesgo diversificable, la expectativa del valor de la cartera para el próximo período con respecto a la distribución de esos saltos (no la distribución global) debe ser cero. Esta observación, retomada de Merton (1976a), constituye la pieza clave para la determinación del precio de la opción, de la que se deriva la expresión siguiente:

$$\hat{r}C(i) = \hat{\lambda}\left[E_Y\left[C_y(i+1)\right] - \left[\frac{C_{+1}(i+1) - C_{-1}(i+1)}{\Delta_{+1} - \Delta_{-1}}\right]\left[E_Y\left[Y\right] - (\hat{r} - \hat{D})\right]\right]$$

$$+ (1-\hat{\lambda})\left[pC_{+1}(i+1) + (1-p)C_{-1}(i+1)\right] \quad . \qquad [22]$$

donde $\hat{}$ es la probabilidad de que ocurra un evento raro en un período de tiempo dado y para un mismo estado, E_Y es el operador esperanza matemática con respecto a la distribución de Y, $C_j(i)$ es el precio de una opción en el instante del tiempo i y estado j, $\hat{r}$ es la tasa de interés sin riesgo, posiblemente estocástica, de cada período, $\hat{D}$ es la rentabilidad por dividendo, p es la probabilidad de un salto hacia arriba y de igual manera, 1-p es la probabilidad de un salto hacia abajo en el precio de la acción, Y es la rentabilidad de la acción cuando el evento raro ocurre, de manera que el precio de la acción pasa a ser S(i)Y. Δ_{+1} y Δ_{-1} es la diferencia del precio del activo,S, respecto al siguiente período y al anterior, respectivamente.

Finalmente, "y" es el estado para el día siguiente cuando se ha producido un salto (evento raro), de manera que por definición, $y \neq \pm 1$. Es decir, dado que el evento raro significa cambios importantes en el precio de la acción, o dicho de otro modo, saltos, significa pasar a estados no próximos, sino, por el contrario, más alejados y como mínimo, en un estado.

La expresión [22] se simplifica bajo el supuesto de que el valor esperado de la opción para el próximo período se realiza respecto a una nueva medida llamada la medida neutral al riesgo (también llamada la medida equivalente martingala), definida inicialmente por Harrison y Kreps (1979). Bajo esta medida, la tasa esperada de rentabilidad de cada activo se iguala a la tasa sin riesgo. Así podemos actuar como si los inversores fueran neutrales al riesgo y la valoración de los activos se hará descontando el flujo de sus pagos (cash flows) a la tasa de interés sin riesgo. Este supuesto permitirá, finalmente, obtener el valor de una opción representado por :

$$C(i) = \text{Max}\left[F(i), \frac{E_{\overline{Q}(i)}\left[C(i+1)\right]}{\hat{r}}\right] \qquad [23]$$

donde F(i) es la función que representa el pago si la opción es ejercitada en el estado y día corriente (i), $\overline{Q}$ es la medida de probabilidad donde $\tilde{q}$ y $\lambda - \tilde{q}$ son las probabilidades de que ocurra un cambio hacia arriba o hacia abajo en el precio de la acción condicionadas a que no ocurran eventos raros o saltos y $\overline{\ }$ es la probabilidad de que ocurrencia de tales saltos. Por último $\hat{r}$ es el tipo de interés sin riesgo.

El análisis numérico de este modelo, considerando el supuesto de Merton (1976a), de que el tamaño del salto es proporcional al precio del activo y tiene una distribución lognormal, lleva a la obtención de la siguiente expresión para el valor de una opción call europea:

$$ECC\left[S(0)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda T)\frac{(\lambda T)^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}b^i(1-b)^{n-i}.BSE\left[S(0)\exp(-\lambda KT + (2i-1)\delta), \sigma\right] [24]$$

donde ECC[.] es el precio de la opción, K=bexp(δ)+(1-b)exp(-δ)-1, b es la probabilidad de que el ln(Y) tome un valor igual a +δ, por lo que 1-b es la probabilidad de que tome un valor igual a -δ y BSE[S(0)exp(-λKT+(2i -1)δ),σ] es el precio B-S de la opción con precio incial del stock S(0)exp(-λKT + (2i -1),δ) y parámetro de volatilidad σ.

Más interesante aún es la extensión de Amin (1993) para incorporar el supuesto de que los saltos observados en los precios del stock sean sistemáticos (no diversificables) y por tanto haya una prima de riesgo asociada a la ocurrencia de tales saltos.

Ya Jarrow y Rosenfeld (1984) y Jorion (1988) encontraban que los saltos observados en los precios del stock eran sistemáticos con la cartera de mercado. Concretamente, Jarrow y Rosenfeld (1984), con una muestra de datos de dos índices de mercado formado con las observaciones diarias de todos los valores de la NYSE (New York Stock Exchange) y ASE (American Stock Exchange) desde Julio de 1962 hasta Diciembre de 1978, obtienen que hay un componente de salto en la rentabilidad de los activos, y que aunque los saltos son pequeños, el riesgo de salto no es diversificable, es decir, es sistemático, con lo cual el modelo CAPM, por las razones ya comentadas, no se mantiene. Para Amin (1993), por ejemplo, las variaciones en la rentabilidad de los activos ocasionadas por los sucesos tales como el crash de 1987 y el mini-crash de 1989 producen riesgo claramente sistemático, de ahí que los modelos que incorporan riesgo del salto sistemático son de enorme interés. Otros autores que también han analizado esta característica son Bates (1988), Lee y Naik (1990), Ahn (1990) y Amin y NG (1993).

Dado que los modelos de valoración de activos por medio del arbitraje no son válidos cuando el riesgo es sistemático, han de utilizarse modelos generales de equilibrio, que exigen imponer restricciones sobre las funciones de utilidad o preferencias del inversor representativo. La posibilidad de utilizar modelos basados en la ausencia de oportunidades de beneficios mediante el arbitraje sólo es válida cuando es posible construir un proceso denominado por Amin (1993) como "proceso de valoración por la teoría de las martingalas" ("martingale-pricing process"), que en esencia, define una medida de probabilidad que es neutral al riesgo, y que, por tanto, es independiente de las preferencias.

Como se demuestra en Dybvig y Huang (1988), la existencia de una medida neutral al riesgo, junto a la restricción de no negatividad para la riqueza, es suficiente para excluir la posibilidad de beneficios mediante el arbitraje en un modelo de negociación continua. Este procedimiento fue el utilizado por Amin (1993) y Naik (1993) para obtener el valor de la opción. La Teoría de las Martingalas, como un procedimiento de derivación alternativo al B-S para la obtención del valor de una opción, ya fue expuesto en el capítulo 1 de esta tesis.

3.3. PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS PARA LA VOLATILIDAD.

De igual manera que con el subyacente, se han planteado procesos de difusión con saltos para la volatilidad de las rentabilidades del activo, donde el componente de salto puede ser no sistemático o sistemático. Por ejemplo, Naik (1993) supone que hay dos estados posibles para el proceso de la volatilidad, de manera que uno de ellos se podría interpretar como el nivel de volatilidad normal (σ_1), y el otro como el nivel de volatilidad que se alcanza con la llegada de importantes y nuevas noticias (σ_H).

El proceso supuesto para el precio del stock en Naik (1993) tiene en cuenta la tendencia observada a nivel empírico de que los cambios en el precio del stock y los cambios en la volatilidad se producen conjuntamente, es decir, hay correlación entre ambas variables, de ahí que :

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \alpha(t)dt + \sigma(t-)dz(t) + [\exp(y_1(t)-1][dN(t)-\lambda(t)dt] \qquad [25]$$

En esta expresión, la variable aleatoria $y_1(t)$ mide el porcentaje de cambio en el nivel del precio del stock si hay un cambio en la volatilidad en el instante t, t- es el instante inmediatamente anterior a t y N(t) es la variable que mide el número de veces que el proceso para la volatilidad ha cambiado de estados hasta el tiempo t. El tercer término de esta expresión permite que los cambios en el precio del stock y en la volatilidad están correlados.

Como se puede observar, la especificación del proceso para el precio del stock de Naik (1993) es una generalización del proceso definido en Merton (1976a) y Jones (1984), ya que en estos modelos tanto la volatilidad como el parámetro característico del proceso de Poisson (λ) se suponían constantes a lo largo del tiempo (no dependen de t), de manera que las demandas de inversión del activo son constantes, mientras que en este modelo esas demandas varían estocásticamente a lo largo del tiempo.

En un primer caso, cuando el riesgo de saltos en la volatilidad es diversificable, no sistemático, Naik (1993) obtiene que el valor de una opción call viene a ser un valor esperado de la fórmula de B-S, donde la esperanza matemática se obtiene integrando a lo largo de la varianza futura media del precio del activo subyacente [13].

$$C(S,\sigma_h,t)=\int_0^{(T-t)} C^*\left[S,K,r,T-t,\sqrt{\frac{s(x)}{T-t}}\right] f(x|\sigma_h)dx \qquad [26]$$

donde C*(.) es la fórmula B-S para opciones call, para $0 \leq x \leq T-t$, $s(x)=\sigma_h^2 x+\sigma_l^2(T-t-x)$, y $f(x|\sigma_h)$ es la función de densidad condicional [14], que indica la probabilidad de que en el momento x la volatilidad esté a un nivel σ_h (alto), si en el instante actual se encuentra en ese mismo estado.

Naik (1993) también analiza el supuesto de que el componente de salto sea sistemático, posibilidad que resulta interesante para los inversores que replican el conjunto de pagos de la cartera de mercado, ya que los cambios de la volatilidad representarán cambios en el riesgo de la economía en su conjunto y llevará a saltos simultáneos en el nivel de output, consumo agregado y, por tanto, en el nivel de precios.

La consideración de procesos de difusión con saltos, como un caso especial de procesos con volatilidad estocástica, para el activo subyacente y para su volatilidad también se analiza en Amin y NG (1993). La idea es que variaciones importantes de la varianza, en general, son simultáneas con grandes variaciones, saltos, en el precio del activo y en el consumo agregado, y, por tanto, en la cartera de mercado.

A diferencia de Merton (1976a) que basa su modelo en la consideración de los saltos no sistemáticos, Amin y NG (1993) determinan el valor de las opciones teniendo en cuenta aquellos saltos que afectan simultáneamente al consumo agregado y al precio del activo, es decir, saltos sistemáticos, no diversificables. Podrían darse saltos en el consumo agregado que no afecten al precio de la acción, sin embargo, no afectarán directamente al valor de la opción, sino de forma indirecta a través de la variable tipo de interés, determinada endógenamente. Por esta razón, Amin y NG. (1993) suponen que cualquier

[13] Nótese que si no hay riesgo de cambio de la varianza, de manera que $_h$ $_l$, la expresión se reduce a la fórmula de B-S para la valoración de opciones call europeas. Como sigue Naik, también puede derivarse la fórmula de B-S haciendo que el proceso de la volatilidad sea persistente infinitamente, esto es quie tanto la probabilidad de que la volatilidad salte de $_h$ a $_l$ o al revés sean nulas.

[14] Para una detallada explicación de esta función de densidad y su expresión analítica, ver Naik (1993, pag 1975).

salto que ocurra en el precio de la acción, cuando el proceso del consumo no ha experimentado saltos se considerará idiosincrático, no sistemático.

Amin y NG. (1993) introducen el proceso de difusión con saltos para la rentabilidad de la acción de Merton (1976a) e igualmente el proceso de difusión con saltos para la rentabilidad del consumo que plantearon Lee y Naik (1990), obteniendo un proceso bivariante de difusión con saltos.

El proceso de difusión con saltos para la varianza, se descompone en dos partes: en cada período, la varianza de la rentabilidad de la acción tiene un componente instantáneo igual a σ^2_{ds}. No obstante, en algunos períodos hay un componente adicional que aparece cuando ocurre algún evento raro que origina un incremento importante de la varianza, componente igual a σ^2_{js}. Un principio similar se aplica a la rentabilidad del consumo, (definiéndose σ^2_{dc} y σ^2_{jc}) y a la correlación entre los dos procesos.

A su vez, introducen la variable aleatoria compuesta , $\underline{\delta_t} \equiv (\underline{Y_t}, \underline{U_t})$, que se define como una secuencia de variables aleatorias de Bernoulli, i.i.d. tal que:

$$\begin{aligned} \underline{\delta_t} &= 1 \text{ con probabilidad } \lambda\Delta \\ \underline{\delta_t} &= 0 \text{ con probabilidad } 1 - \lambda\Delta \end{aligned}$$

donde Δ es el tiempo entre informaciones sucesivas.

Cuando δ_t es igual a 1, significa que se producen saltos tanto en la varianza del consumo como en la varianza de la acción, mientras que en cualquier otro caso no habría saltos y δ_t se igualaría a 0.

La especificación de la tasa media del crecimiento del consumo, $\mu_c(\delta_t)$ y la tasa media de la rentabilidad de la acción, $\mu_s(\delta_t)$ es similar a la varianza, dada por:

$$\begin{aligned} \mu_c(\delta_t) &= \mu_{dc}\Delta + \delta_t.\mu_{jc} \\ \mu_s(\delta_t) &= \mu_{ds}\Delta + \delta_t.\mu_{js} \end{aligned} \qquad [27]$$

El parámetro de descuento, $\gamma(\delta_t)$ se describe también en dos componentes:

$$\gamma(\delta_t) = \gamma\Delta + \delta_t \gamma_j$$

donde

$$\gamma \equiv \beta + b.\mu_{dc} - \frac{b(1+b)}{2}.\sigma^2_{dc}, \qquad [28]$$

$$\gamma_j \equiv b.\mu_{jc} - \frac{b^2}{2}\sigma^2_{jc}$$

donde b es el coeficiente de aversión al riesgo, de manera que cuando b=0, el agente es neutral al riesgo y cuando b 1 se obtienen preferencias logarítmicas, de agentes aversos al riesgo. β es la beta del activo.

En la derivación de la fórmula final del valor de la opción, Amin y NG. (1993) suponen que $\mu_{js}, \sigma^2_{js}, \mu_{jc}, \sigma^2_{jc}, \sigma_{jsc}\ y\ \beta$ son constantes y no varían con la longitud del intervalo de negociación.

La solución final para el valor de la opción call sería la siguiente:

$$\Pi_0(\text{Call}) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda T)\frac{(\lambda T)^n}{n!}.\left[S_0 Q_1(n) N\left[d_1(n)\right] - K Q_2(n) N\left[d_2(n)\right]\right] \qquad [29]$$

donde

$$Q_1(n) = \exp\left\{\left[\mu_{ds} - \gamma - b\sigma_{dsc}\right]T + n\left[\mu_{js} - \gamma_j - b\sigma_{jsc} + \tfrac{1}{2}.\sigma^2_{js}\right]\right\},$$

$$d_1(n) = \frac{\ln\left[S_0 Q_1(n)/(K Q_2(n)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\sigma^2_{ds} + \sigma^2_{js} n/T\right]T}{\left[(\sigma^2_{ds} + \sigma^2_{js} n/T)T\right]^{1/2}}$$

$$d_2(n) = d_1(n) - \left[(\sigma^2_{ds} + \sigma^2_{js} n/T)T\right]^{1/2}$$

La fórmula anterior también podría ser usada para valorar opciones sobre la cartera de mercado, una vez que la cartera de mercado está perfectamente correlada con el consumo agregado, caso especial analizado por Lee y Naik (1990).

Cuando los saltos en las rentabilidades de la acción son idiosincráticos, no hay saltos en la tasa de rentabilidad del crecimiento del consumo y la fórmula general de difusión con saltos propuesta deriva en la fórmula de Merton (1976a), que sólo considera el riesgo de saltos idiosincráticos o no sistemáticos.

Para entender el efecto de los saltos sistemáticos sobre los precios de las opciones, Amin y NG. (1993) concluyen este trabajo presentando una muestra de precios de opciones call europeas para unos valores representativos de los parámetros, utilizando su fórmula y la de Merton (1976a). Muy brevemente, y en relación a la fórmula de difusión con saltos de Merton (1976a), la fórmula propuesta para saltos sistemáticos genera valores más altos para opciones call lejanas al vencimiento y próximas al vencimiento, en dinero (in the money) si los saltos en la rentabilidad de la acción y del consumo agregado están correlados positivamente. Sin embargo, para opciones call próximas al vencimiento, sin dinero (out of the money), la fórmula de Merton da valores más altos, bajo las mismas condiciones. Además, la dirección de este sesgo se invierte cuando los saltos en la rentabilidad de la acción y del consumo agregado están correlados negativamente.

3.4. APLICACIONES EMPÍRICAS DEL PROCESO DE DIFUSIÓN CON SALTOS Y PROCEDIMIENTOS DE ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.

Aplicaciones empíricas del modelo de difusión con saltos de Merton (1976a) las encontramos en Ball y Torous (1983), Ball y Torous (1985) y Kremer y Roenfeldt (1992) para valoración de warrants.

Por ejemplo, Ball y Torous (1985) han investigado si el modelo de difusión con saltos de Merton puede eliminar los sesgos sistemáticos que tantos autores, entre ellos Black (1976), Macbeth y Merville (1979) encuentran al contrastar la fórmula de B-S. Para ello llevan a cabo una estimación de los parámetros del proceso de difusión con saltos por el procedimiento de máxima verosimilitud y con una muestra de 30 acciones de la Bolsa NYSE, confirman la presencia de saltos significativos en la mayoría de las rentabilidades de dichas acciones. Sin embargo las diferencias entre los precios Merton y B-S no son significativas, excepto cuando la rentabilidad del activo presenta grandes saltos que ocurren de manera poco frecuente.

Kremer y Roenfeldt (1992) consideran el ajuste de dividendos y se centran en la valoración de warrants, para finalmente comparar los modelos clásicos de valoración de opciones de B-S, pero ajustado para warrants [15] y el modelo de difusión con saltos planteado inicialmente por Merton (1976a).

En la medida en que los warrant y las opciones, no son exactamente iguales, sino que, presentan algunas diferencias, las técnicas de valoración de ambos instrumentos también experimentan algunas modificaciones, que también se exponen en Kremer y Roenfeldt (1992).

Los warrants, que participan de características comunes a las opciones de compra (por ejemplo, la de ser derechos contingentes para su tenedor) presentan con las opciones, como ya se ha mencionado, algunas diferencias; concretamente, debido a la mayor vida de un warrant en relación a la opción, existe una mayor probabilidad de que el precio de la acción salte y experimente grandes cambios, por lo que el supuesto de B-S de lognormalidad de movimientos pequeños en el precio del activo subyacente no es válido cuando se valoran warrant, proponiendo la utilización del modelo alternativo de difusión con saltos de Merton (1976a).

Entre los distintos procedimientos de ajuste de los modelos de valoración de opciones cuando se aplican a warrants [16] se encuentra el procedimiento de Galai y Schneller (1978), que iguala el valor de un warrant (W) al de una opción (C) del siguiente modo:

$$W = \frac{C}{1+q} \qquad [30]$$

donde q es el ratio entre el número de acciones nuevas que podían ser creadas por el ejercicio de los warrants y el número de acciones corrientes. Esta aproximación es válida como procedimiento de ajuste por el efecto de "dilución" que se produce según se ejerciten todos los warrant en bloque o de manera secuencial.

---

[15] Concretamente, el ajuste para valorar warrants en lugar de opciones se denomina ajuste por dilución.

[16] Se enumeran los procedimientos y resultados de Galai y Schneller (1978), Emanuel (1983), Spatt y Sterbenz (1988), Constantinides(1984) y Hunt (1985), todos referenciados en Kremer y Roenfeldt (1992).

Además, se han propuesto diferentes procedimientos de ajuste por pago de dividendos, según sean dividendos conocidos y finitos o dividendos estocásticos, como por ejemplo el ajuste de Merton (1973) para dividendos estocásticos utilizado por Kremer y Roenfeldt (1992).

La contrastación del modelo de difusión y saltos de Merton es compleja, en tanto que, además de los parámetros ya mencionados para la contrastación del modelo B-S, se habrán de estimar cuatro parámetros adicionales que describen la rentabilidad del activo subyacente, que son:

- El número medio de saltos de Poisson por unidad de tiempo,λ.
- La tasa de rentabilidad esperada instantánea del activo, α.
- La varianza del tamaño del salto de Poisson, ^{2}.
- La varianza del proceso de difusión en ausencia de saltos, ^{2}.

No obstante, se presentan dificultades prácticas enormes a la hora de implementar y verificar empíricamente un proceso de difusión y saltos para la rentabilidad del activo subyacente, como ya apuntan Ball y Torous (1983), Ball y Torous (1985) y Kremer y Roenfeldt (1992) cuando contrastan procesos de este tipo.

Aunque teóricamente la máxima verosimilitud es un procedimiento preferido dado que las estimaciones de los parámetros son eficientes y la distribución asintótica de las estimaciones es conocida, es muy compleja y costosa su utilización ya que las condiciones de primer orden son lineales y contienen una suma infinita de términos. Aún así, y como veremos, algunos trabajos han usado este procedimiento, obteniendo resultados bastante favorables.

Como un procedimiento sencillo y alternativo, cuando no se obtienen estimaciones de máxima verosimilitud, Press (1967) propone el método de los cumulantes, una variante del método de los momentos, que genera estimaciones consistentes.

En un intento de simplificar y reducir el número de parámetros a estimar, Press (1967), supone que la tasa de rentabilidad esperada instantánea del activo es cero, 0. El procedimiento de estimación que empleó fue el procedimiento de los cumulantes ("cumulant matching"). En este procedimiento, como ya veremos más detenidamente, se han de calcular los momentos de la muestra, para obtener lo que se denomina "los cumulantes", relacionados directamente con los parámetros del modelo.

No obstante, con una muestra de 10 acciones, negociadas en la Bolsa de Acciones de Nueva York (NYSE) para el período 1926-1960, Press obtuvo en la mayoría de los casos, estimaciones negativas para los parámetros de la varianza del proceso de difusión, ^{2} como para la varianza del proceso de saltos, ^{2}.

Beckers (1981), modifica el procedimiento de Press (1967), ya que supone en lugar de 0, que la media del tamaño del salto es cero, K=0, especificación que parece, según Becker, ser consistente con la tendencia observada en los precios del activo. Este supuesto permite que la rentabilidad del activo experimente saltos positivos o negativos, pero presume que la media de los saltos es cero.

La relación entre los cumulantes (K) y los momentos de la distribución aparece con detalle en Kendall y Stuart ([1977], pag. 72) y viene dada por:

$$\begin{aligned}
K_1 &= m_{1,} \\
K_2 &= m_2 - m_1^2, \\
K_4 &= m_4 - 4m_3m_1 - 3m_2^2 + 12m_2m_1^2 - 6m_1^4, \\
K_6 &= m_6 - 6m_5m_1 - 15m_4m_2 + 30m_4m_1^2 - 10m_3^2 \\
&\quad + 120m_3m_2m_1 - 120m_3m_1^3 + 30m_2^3 \\
&\quad - 270m_2^2m_1^2 + 360m_2m_1^4 - 120m_1^6.
\end{aligned} \qquad [31]$$

Con la relación entre los cumulantes y los momentos, Press (1967) demuestra que la función de distribución "mezcla Poisson de distribuciones normales" es leptocúrtica, dado que el cumulante de cuarto orden es siempre positivo [17].

Usando [31], y con el supuesto de que la media de los saltos es cero, Beckers (1981) muestra que:

[17] La curtosis se mide por m_4 / σ^4 relacionada con K_4 / K_2^2.

$$\begin{aligned}
&\lambda = 25(K_4)^3 / 3(K_6)^2, \\
&\sigma^2 = K_2 - 5(K_4)^2 / 3K_6, \\
&\delta^2 = K_6 / 5K_4, \\
&\alpha = K_1.
\end{aligned} \qquad [32]$$

Aplicando este procedimiento a 47 acciones negociadas en la NYSE, con datos desde el 15 de Septiembre de 1975 hasta el 7 de Septiembre de 1977 (500 observaciones), Beckers obtuvo, pero sólo en algunos casos, estimaciones negativas para las varianzas (σ^2 y δ^2), así como valores positivos para la curtosis. Como puede observarse, el signo de δ^2 depende del signo de K_6 por lo que un comportamiento errático del cumulante sexto de la muestra resulta en estimaciones negativas para la varianza.

No obstante, el procedimiento de estimación dio resultados satisfactorios para los activos con elevada curtosis, dado que sus varianzas fueron siempre positivas. Así y aunque este método puede producir en algunos casos estimaciones ineficientes, es muy sencillo en su aplicación, genera estimaciones que son consistentes, capturan de forma exacta la distribución de la muestra y además, como argumenta Beckers (1981) es un método generalmente aceptable cuando el número de observaciones es grande.

Bajo el supuesto adicional de limitar la probabilidad del salto (λ) a ser la misma para todos los activos, Beckes (1981) finalmente, además de reducir el problema de estimación de los parámetros a sólo tres, obtuvo, en todos los casos, valores positivos para las varianzas. Para obtener ese valor constante para λ ($\hat{}$), Becker supuso una ratio de varianzas constante, es decir,

$$\frac{\delta^2}{\sigma^2} = \eta$$

Otro intento de obtener un procedimiento válido para la estimación de los parámetros de un proceso de difusión con saltos se encuentra en el trabajo de Fehr y Rosenfeld (1979), que alternativamente, consideran estimaciones de máxima verosimilitud, bajo el supuesto simplicador de que el tamaño del salto es una constante fija y conocida. De forma adicional, proponen técnicas numéricas para elegir estimaciones de los parámetros que maximicen la función de verosimilitud. Desafortunadamente, sus resultados no son estadísticamente válidos, ya que los errores estándard de las estimaciones que obtienen son, en general, importantes.

Ball y Torous (1983) proponen el procedimiento de máxima verosimilitud como un método alternativo para la obtención de los valores esperados de los parámetros del proceso de difusión y saltos, pero sustituyendo el proceso de Poisson como descriptivo del salto por un proceso de Bernoulli, más sencillo y aproximado al anterior.

Brevemente, la simplificación se produce en la medida de que el proceso de Bernoulli se caracteriza porque en un período de tiempo fijo, t, o no llega información relevante que impacte sobre el precio del activo, o llega una única información relevante que hace que el precio del activo salte, con probabilidad λt. No se permite que llegue más información importante a lo largo de este período de tiempo.

Esta simplificación es perfectamente válida para el caso de rentabilidades diarias de una acción en la medida de que si suponemos que t se corresponde con un día de negociación, no se espera que en media se produzca la llegada de más de una información "anormal" importante, que haga que el precio del activo salte.

La ventaja de este método de estimación es que permite obtener estimaciones de máxima verosimilitud de manera satisfactoria, ya que los estimadores son asintóticamente insesgados y consistentes y adicionalmente es posible la implementación de un test, cuya hipótesis nula es $\lambda=0$, que detecta si hay un componente de salto en la rentabilidad de un activo. En relación a la muestra que utilizan, este test confirmó la presencia de componente de salto en la mayoría de las rentabilidades de los activos.

En este caso, Ball y Torous (1983) utilizan el método de máxima verosimilitud, para el que precisan la serie de rentabilidades diarias para un activo, y donde la función de densidad, f, es una media ponderada de funciones de densidad gaussianas, ponderadas por las probabilidades de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro λ, descrita de la forma siguiente:

$$f(x) = (1-\lambda)\phi(\alpha,\sigma^2) + \lambda\phi(\alpha,\sigma^2+\delta^2) \qquad [33]$$

donde

$$\phi(\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2).$$

Se puede observar que esta función de densidad, f, es más simple que la derivada por Beckers (1981), b(x), donde las rentabilidades diarias del activo se obtenían igualmente como una media ponderada de funciones de densidad gaussianas, ponderadas, en este caso, por las probabilidades de una variable aleatoria de Poisson, de parámetro λ, la cual viene dada por:

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^n}{n!} \phi(\alpha, \sigma^2 + n\delta^2) \qquad [34]$$

Para pequeños valores de λ, f(x) y b(x) son prácticamente similares. Además, ambos modelos permiten saltos discontinuos intercalados con rentabilidades diarias distribuídas de manera continua. De igual manera, Ball y Torous (1983) derivan los cumulantes para la función de densidad f(x) vista en [33], que relacionan luego con los parámetros a estimar del modelo.

Una vez que demuestran la eficiencia de esta técnica de estimación, Ball y Torous (1983) la aplican a la muestra de acciones que utilizó Beckers (1981). De manera significativa, las estimaciones para la varianza resultaron ser positivas y además se obtuvieron fácilmente los errores estándar de tales estimaciones.

Brevemente, el procedimiento de máxima verosimilitud consiste en maximizar la función de verosimilitud, dada por:

$$\ln L(\bar{x};\bar{\gamma}) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\bar{\gamma}) \qquad [35]$$

donde $\bar{x}$ es el vector de las n observaciones de rentabilidades diarias del activo, $\bar{\gamma} = (\lambda, \sigma^2, \delta^2, \alpha)$ es el vector de parámetros a estimar y f(x) es la función de densidad dada por la ecuación [33], cuando se utiliza la versión Bernoulli.

Las conclusiones que destacan Ball y Torous (1983) cuando analizan los resultados de los diferentes procedimientos utilizados para la estimación de los parámetros son las siguientes:

- Mientras que con el procedimiento de los cumulantes de Beckers (1981), aproximadamente para el 60% de los activos de la muestra, se obtuvieron estimaciones negativas de la varianza, cuando se utilizó el procedimiento de los cumulantes bajo el proceso de Bernoulli, el porcentaje de activos con varianzas negativas se redujo a sólo un 20%.

- El procedimiento de estimación de máxima verosimilitud, no produjo estimaciones negativas para las varianzas, decantándose como el procedimiento que generaba estimaciones más eficientes.

- Cuando el procedimiento de los cumulantes dio valores positivos para las varianzas, las estimaciones que resultaban de los parámetros fueron similares a las estimaciones de máxima verosimilitud.

- Los errores estándard de las estimaciones de máxima verosimilitud fueron extremadamente pequeños, confirmando aún más la mayor eficiencia relativa de esta metodología de estimación.

El procedimiento de máxima verosimilitud bajo el proceso más general de Poisson es propuesto y utilizado en Ball y Torous (1985), que utiliza los datos de una muestra de rentabilidades diarias de 30 acciones de la New York Stock Exchange (NYSE) tomando 500 observaciones para un período muestral que abarca desde el 1 de Enero de 1981 al 31 de Diciembre de 1982.

En este caso la función de verosimilitud a maximizar es más compleja y viene dada por:

$$\ln L(X;\gamma) = \sum_{i=1}^{m} \ln(\sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \phi(x_i;\alpha,\sigma^2 + n\delta^2) \qquad [36]$$

donde X es el vector de m rentabilidades diarias del activo, X $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, la suma de infinitos términos de la función de densidad b(x) se trunca en N, normalmente igual a 10, y ϕ es la función de densidad de la distribución normal , que viene dada por:

$$\phi(x;\mu,\nu^2) = (2\pi\nu^2)^{-1/2} \exp(-(x-\mu)^2 / 2\nu^2). \qquad [37]$$

La implementación en la práctica del procedimiento de estimación de máxima verosimilitud es bastante tediosa y comporta dificultades de cálculo, en la mayoría de los casos, difíciles de superar. De la ecuación [36] podemos observar que se trata de maximizar una función de verosimilitud que viene a ser la suma de m logaritmos neperianos, donde cada uno de ellos es otra suma de infinitas funciones de densidad con cuatro parámetros a estimar, funciones de densidad del proceso más general de difusión con saltos distribuidos como una variable aleatoria de Poisson.

Las condiciones de primer orden de este problema de maximización no son lineales, y, por tanto, requiere la utilización de procedimientos aproximados de resolución, más complejos, tales como el procedimiento iterativo de Newton-Raphson, que utilizan Ball y Torous (1983, 1985), pero que presenta problemas de convergencia en la mayoría de los casos. La elección de los valores de partida para su ejecución, el orden de truncamiento de los infinitos términos, así como los propios datos serán clave para la obtención del máximo de la función de verosimilitud. Por si fuera poco, la propia función de densidad no está estandarizada en los programas que tradicionalmente se han utilizado para obtener estimaciones máximoverosímiles (LINDEP, TSP, SPSS o MATEMÁTICA), por lo que se necesita crear una aplicación informática "ad hoc" para su resolución.

No obstante, y de igual manera que bajo el proceso de Bernoullli, resulta ser un procedimiento de estimación eficiente, ya que, en la mayoría de los casos, se obtienen estimaciones positivas para la varianza. Aún más, es factible la utilización del test para detectar la presencia de saltos en la rentabilidad del activo.

Resumiendo, hasta ahora han sido aplicados cuatro procedimientos para la estimación de los parámetros de un proceso de difusión con saltos:

1º.- Procedimiento de los cumulantes, bajo un proceso de saltos de Poisson: empleado por Press (1967), Beckers (1981), Ball y Torous (1983) y Kremer y Roenfeldt (1992) para valoración de warrants.

2º.- Procedimiento de los cumulantes, bajo un proceso de saltos de Bernoulli: aplicado por Ball y Torous (1983).

3º.- Procedimiento de máxima verosimilitud, bajo un proceso de saltos de Bernoulli: planteado y aplicado por Ball y Torous (1983).

4º.- Procedimiento de máxima verosimilitud, bajo un proceso más general de Poisson: empleado por Ball y Torous (1985).

CAPÍTULO 4:
CONTRASTACIÓN EMPIRICA DEL MODELO DE VALORACIÓN DE OPCIONES DE MERTON CON LOS DATOS DE LAS OPCIONES SOBRE ACCIONES DE TELEFÓNICA.

A lo largo de los capítulos anteriores hemos destacado que el proceso de difusión con saltos para la rentabilidad de un activo, supuesto básico en el modelo de valoración de opciones de Merton (1976a), es un proceso sugerente y más aproximado al comportamiento observado de los precios de los activos que el proceso alternativo de difusión lognormal en el que se basaba el modelo de B-S (1973).

Esta sugerencia nos ha llevado a contrastar empíricamente el modelo de valoración de opciones de Merton, comparando sus predicciones con las que produce el modelo clásico de B-S (1973), analizado en el capítulo 1, que a su vez ha sido extensamente desarrollado y contrastado en la literatura financiera (Black y Scholes [1972], Black [1975], MacBeth y Merville [1979], MacBeth y Merville [1980], Emanuel y MacBeth [1981], Whaley [1982], Geske, Roll y Shastri [1983] [1], Geske y Roll [1984], Rubinstein [1985], entre otros).

El interés general que ha motivado este trabajo de investigación obedece a la necesidad de contrastar los modelos clásicos de valoración de opciones sobre acciones en el mercado español, tal y como se ha hecho en otros mercados internacionales, dado que hasta entonces no tenemos constancia de ningún trabajo empírico, al menos publicado, dedicado a tal labor. Únicamente, tenemos conocimiento del trabajo de E. Fontecha (1994) que utiliza el modelo de B-S para valorar los derechos de sucripción correspondientes a las ampliaciones de capital llevadas a cabo en la Bolsa de Comercio de Madrid durante los años comprendidos entre 1984 y 1987. Otro trabajo es el de A. Bachiller, P. Lechón y R. Santamaría (1993) sobre valoración de opciones sobre el IBEX 35, utilizando el modelo de Black (1976). Un análisis sobre el modelo de B-S y su interpretación empírica a través de un Fondo de Inversión se presenta en el trabajo de F. P. Calatayud (1993).

Los argumentos clásicos en favor del modelo de valoración de B-S se centraban básicamente en la sencillez y facilidad de su contrastación en relación a otros modelos que, aunque más precisos en la estimación, resultaban muy complejos.

[1] Cfr. de Geske y Roll (1984).

En este trabajo de investigación utilizamos el método de estimación de los cumulantes analizado y discutido en el capítulo anterior, que por su sencillez y por los resultados que se derivan de su aplicación, hace que el modelo de Merton, más complejo, sea fácilmente contrastable y de enorme utilidad para los operadores en los mercados de opciones.

Mientras que lo esencial en el modelo de Merton (1976) es que permite valorar opciones para procesos con saltos cuando éstos son diversificables, el supuesto básico de la metodología de B-S es que la rentabilidad del activo subyacente, se distribuya como una variable aleatoria normal en tiempo continuo, lo que en otros términos se define como un proceso simple de Itô, en el que la variación del precio del subyacente sigue un proceso Geométrico Browniano.

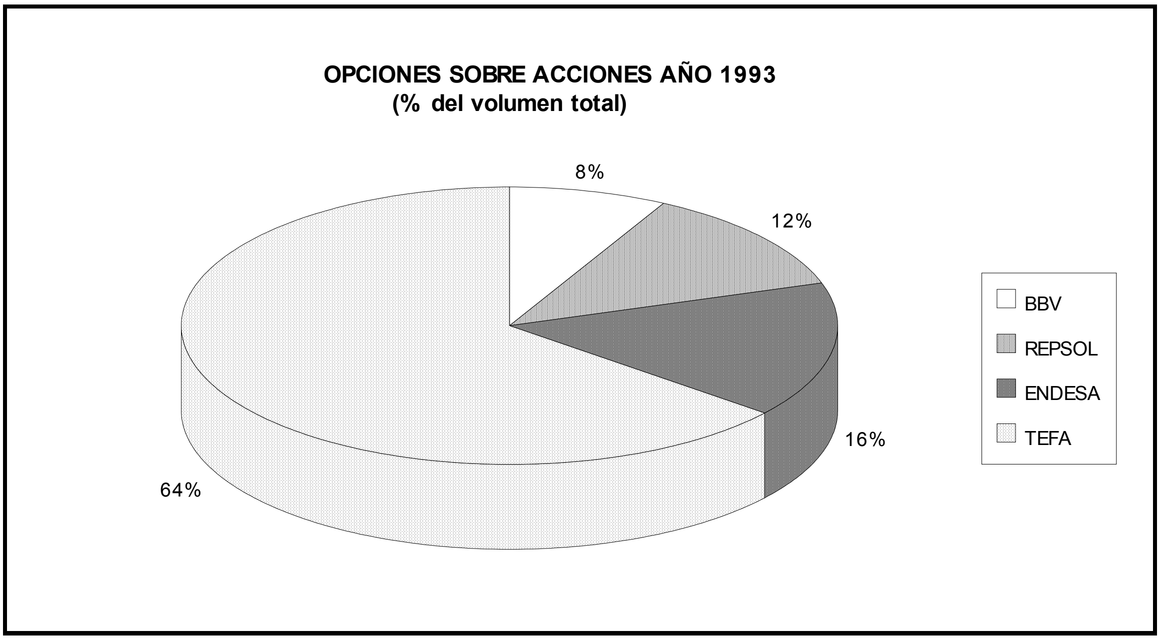
El primer paso del análisis, por tanto, será contrastar si el supuesto lognormal de B-S se cumple con la muestra de datos objeto de este estudio, lo cual exigirá estudiar la distribución y serie temporal de la rentabilidad del activo subyacente de las opciones que intentamos valorar.

En nuestro caso, nos ocupamos de la valoración del contrato de opciones de compra (call) sobre las acciones de Telefónica. Una de las razones determinantes de analizar concretamente este contrato es que es el más negociado en relación a los demás contratos de opciones sobre acciones que se negocian en España, puesto que representa un 64% del volumen total de contratos negociados en el año 1993, como se puede observar del Gráfico 1 [2]. Este mayor volumen de negociación provoca un mayor nivel de liquidez, profundidad y amplitud en este mercado, características básicas para que la información implícita en los precios de los contratos genere eficiencia en este mercado.

Un análisis similar para el resto de las opciones sobre acciones (Endesa, Repsol y BBV) no fue posible, debido a la escasez de observaciones, consecuencia de un muy reducido nivel de negociación.

[2] Este Gráfico se presenta en M. R. Romeo (1993).

GRÁFICO 1



Para el cálculo de la rentabilidad diaria de las acciones (R_t) o, lo que es lo mismo, las tasas de variación de sus precios, se ha aplicado el logaritmo natural a la serie de precios de un día, (S_t),dividido por el del día anterior, (S_{t-1}), es decir,

$$R_t = Ln(S_t / S_{t-1}) \qquad [1]$$

Las características más pormenorizadas, así como las fuentes utilizadas, de la muestra de datos objeto de análisis se presentan en el epígrafe siguiente. En la Tabla 1 aparecen los estadísticos descriptivos para la serie de rentabilidades diarias de las acciones de Telefónica con 1227 observaciones para el período comprendido entre el 5 de abril de 1989 hasta el 17 de marzo de 1994.

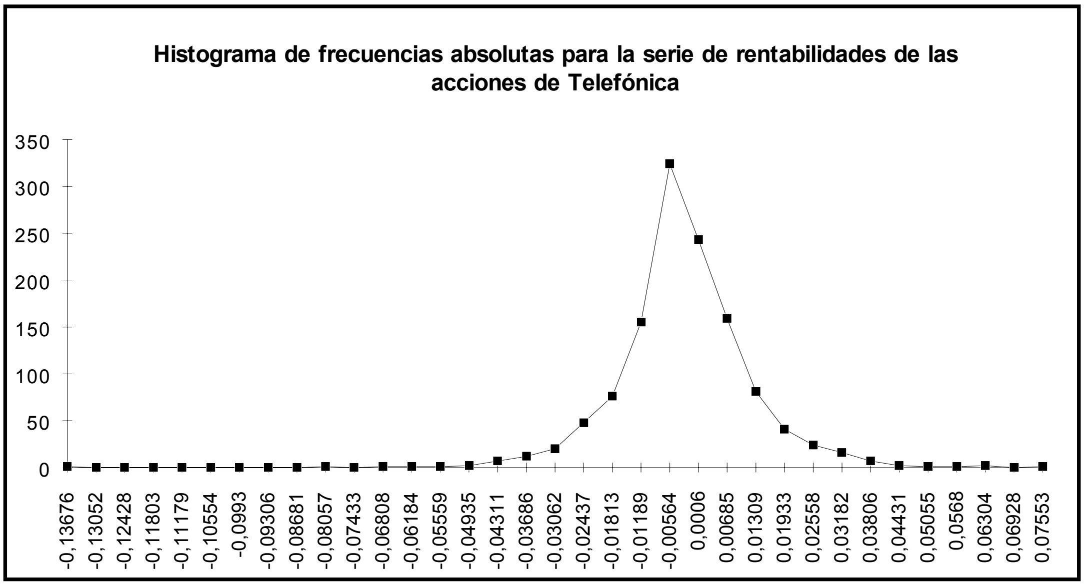
TABLA 1

Media	0.000586	E. S. Media	0.000
Desv. Estánd.	0.014757	Varianza	0.000225
Curtosis	8.68309	E. S. Curtosis	0.140
Asimetría	-0.53247	E. S. Asimetría	0.070
Suma	0.7194	Máximo	0.081
Rango	0.218536	Mínimo	-0.13
Coef de variación	7.4011		

E.S. indica error stándard.

El elevado valor de la curtosis sugiere una distribución con colas más anchas y apuntadas en el centro que las que se obtendrían con una muestra de la distribución normal, mientras que el coeficiente de asimetría negativo indica que los valores de la variable están ligeramente concentrados a la izquierda.

A continuación presentamos el histograma de frecuencias absolutas para la serie analizada, en el que, a pesar de haberse obtenido un coeficiente de asimetría negativo, su valor es próximo a cero, por lo que la serie analizada es prácticamente simétrica. Considerada la simetría, también se detecta de una manera visual el elevado grado de apuntamiento respecto al de una distribución normal. Problemas de escala en el eje de ordenadas no permiten visualizar claramente la anchura de las colas.



Estos resultados coinciden, por tanto, con la mayoría de los trabajos empíricos que analizan las series de rentabilidades de activos financieros (Blattberg y Gonedes [1974], Kon [1984], Alegría y Calatayud [1989a]), que al igual que en este estudio, encuentran un coeficiente de curtosis excesivo, lo que implica el posible rechazo del supuesto de normalidad para la distribución analizada. Más riguroso es el test de Kolmogorov-Smirnov, que para la serie $\{R_t\}$ daba un valor de 2,72, que implica el rechazo de la hipótesis de normalidad.

Igualmente, un estudio reciente de A. Peiró (1994), cuando analiza empíricamente la distribución de las series de rentabilidades diarias de seis índices internacionales de acciones, para un período comprendido entre el 28 de Diciembre de 1987 y el 31 de Diciembre de 1992, rechaza el supuesto de normalidad en todos los casos. Finalmente, entre otras distribuciones analizadas como por ejemplo, las Pareto-Estables de Mandelbrot (1963) y Fama (1963 y 1965), procesos estocásticos subordinados de Mandelbrot y Taylor (1967), Clark (1973) y Blattberg y Gonedes (1974), distribuciones logísticas de Smith (1981), mezcla discreta de distribuciones normales de Kon (1984) y distribuciones exponenciales de Gray y French (1990), A. Peiró propone la t de Student, como mejor descriptor de la distribución de las series de rentabilidades de las acciones.

Sin embargo, A. Peiró no considera la mezcla de una distribución normal y una distribución de Poisson, que, como ya se ha visto en el capítulo anterior, tiene un indudable atractivo intuitivo, cualidad de la que sin embargo no participan el resto de distribuciones propuestas en la literatura por mucho que "espúreamente" puedan ajustar mejor los datos.

El siguiente paso emprendido en nuestro trabajo ha sido la obtención de las funciones de autocorrelación (FAC), que se presentan en la tabla siguiente:

TABLA 2

Retardos	Coeficiente de Autocorrelación	Box-Ljung
1	0.011	0.136
2	0.023	0.810
3	-0.038	2.546
4	-0.047	5.311
5	-0.047	8.042
6	0.013	8.262
7	0.055	11.944
8	-0.005	11.970
9	-0.018	12.386
10	0.014	12.364
11	-0.034	14.047
12	-0.035	15.535
13	-0.028	16.527
14	0.008	16.597
15	0.006	16.639
16	0.016	16.956

Como se desprende del análisis de la Tabla 2, los coeficientes de autocorrelación estimados, son, en la mayoría de los casos, muy pequeños y no significativos, a partir del estudio del estadístico de Ljung-Box ajustado (para 16 retardos), que, por tanto, indican ausencia de correlación serial.

Es un resultado bien conocido en Estadística que para variables aleatorias que tienen una distribución normal, la ausencia de correlación serial implica que las variables son estadísticamente independientes. No obstante, cuando la variable aleatoria no se distribuye normalmente, como puede suceder en el caso que nos ocupa, autocorrelación cero no necesariamente implica que la distribución de probabilidad de la variable rentabilidad de la acción (R_t) sea independiente de los valores realizados de dicha variable (R_{t-1}).

Esta ausencia de correlación serial podría sugerir que se cumple la hipótesis de la martingala, esto es que:

$$R(t) - R(t-1) = E_{t-1}[R(t) - R(t-1)] + \varepsilon_t \qquad [2]$$

siendo E_{t-1} la esperanza de la variación del valor de R en t, condicionada a la información disponible en t-1 y ε_t es la perturbación aleatoria tal que $E_{t-j}[\varepsilon(t)] = 0 \; \forall j = 1,...t.$ En otras palabras, que el mercado valora los títulos correctamente, en el sentido de que la parte no anticipada del cambio, [ε(t)], se distribuye con media cero y de modo independiente. Pero la sospecha de que R(t) no siga una distribución normal (esto es que pudiera no constituir un proceso de Markov) podría invalidar esta conclusión, de manera que la ausencia de correlación serial no significaría independencia.

No obstante, para contrastar si, efectivamente, la serie de rendimientos constituye una variable aleatoria independiente se calcularon las funciones de autocorrelación (FAC) para las series de rendimientos elevada al cuadrado y la de rendimientos en valor absoluto, cuyos valores se presentan en la Tabla 3.

Como se explica en Alegría y Calatayud (1989a), "si las tasas de cambio constituyen una secuencia de variables aleatorias independientes, también serán independientes las secuencias de sus cuadrados y de sus valores absolutos, por lo que, caso de independencia, cabría esperar que los coeficientes de la FAC de $\{Rt^2\}$, así como los coeficientes de la FAC de $\{|Rt|\}$ fuesen cero en todos los retardos". Este procedimiento es también utilizado por Mañas (1988) y Akgiray (1989).

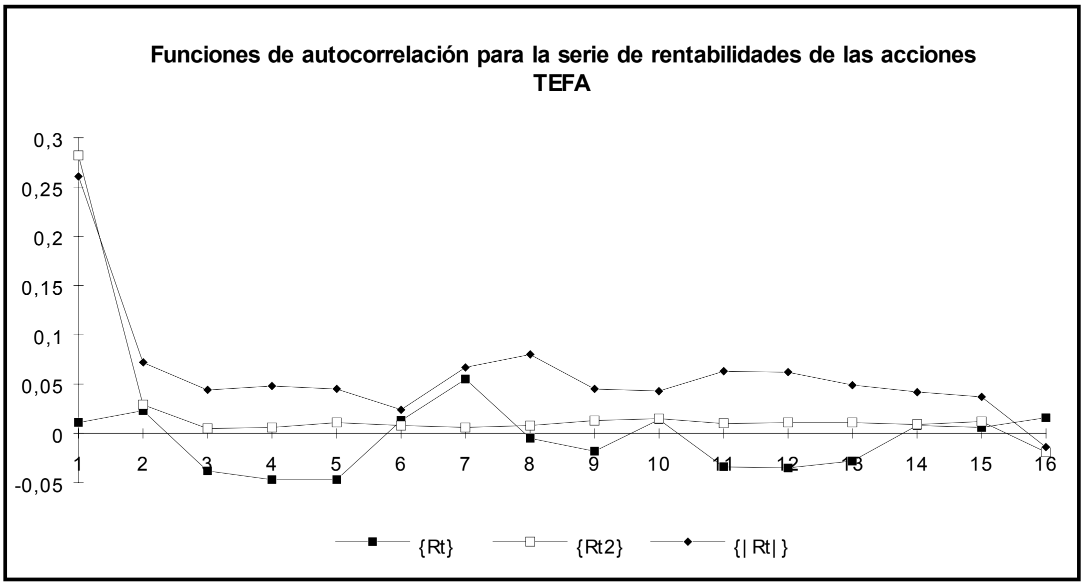
TABLA 3

Retardo	Coeficiente de Autocorrelación para $\{Rt^2\}$	Box-Ljung	Coeficiente de Autocorrelación para $\{\|Rt\|\}$	Box-Ljung
1	0.282	97.787	0.261	84.107
2	0.029	98.804	0.072	90.474
3	0.005	98.836	0.044	92.907
4	0.006	98.888	0.048	95.761
5	0.011	99.045	0.045	98.289
6	0.008	99.132	0.024	99.029
7	0.006	99.172	0.067	104.646
8	0.008	99.271	0.080	112.608
9	0.013	99.460	0.045	115.062
10	0.015	99.738	0.043	117.333
11	0.010	99.859	0.063	122.273
12	0.011	100.020	0.062	126.975
13	0.011	100.175	0.049	129.978
14	0.009	100.266	0.042	132.154
15	0.012	100.449	0.037	133.817
16	-0.019	100.898	-0.014	134.057

Como se puede observar de la Tabla 3 anterior, los coeficientes de autocorrelación de {Rt2} son superiores a los correspondientes a {Rt}, lo que hace que el estadístico de Box-Ljung ajustado (para 16 retardos) pase de 16,956 a 100,898. Por otro lado, los coeficientes de la FAC de {|Rt|} son incluso superiores a los de {Rt2}, lo que constituye una prueba todavía más contundente de la posible falta de independencia de la serie de {Rt}. Para mayor valor del retardo, las funciones de autocorrelación, que se representan en el gráfico 2, decaen lentamente.

A continuación se representan gráficamente las funciones de autocorrelación para las series de $\{R_t\}, \{|R_t|\}\ y\ \{R_t^2\}$:

GRÁFICO 2



La no independencia significa que la rentabilidad de un día influye en la del día siguiente y, por tanto, una rentabilidad alta tenderá a ir seguida por una rentabilidad también alta, de cualquier signo, y por tanto, supone el rechazo de que la serie de rentabilidades analizada sea un ruido blanco, totalmente aleatorio. Este resultado coincide con los obtenidos por Fama (1965) y destacados por Akgiray (1989), de que grandes cambios de precios son seguidos por cambios grandes y, pequeños cambios son seguidos por pequeños, de cualquier signo. De otro modo, se puede afirmar que existe cierto grado de predicibilidad de las rentabilidades de las acciones TEFA, medido por el coeficiente de autocorrelación. Otros trabajos que han obtenido este resultado son el de M. V. Esteban González (1993) en el mercado bursátil español y el de Lo y Mackinlay (1988) en otros mercados internacionales.

Las conclusiones, por tanto, en torno al análisis descriptivo de la serie histórica de rentabilidades de las acciones de Telefónica, serían las siguientes:

-El proceso estocástico que la genera no parece tener una distribución normal.

-No presenta correlación serial.

-No son independientes: existe algún grado de heteroscedasticidad, de manera que la volatilidad de la serie no es constante, sino que puede estar significativamente correlacionada.

Por tanto, parece lógico rechazar la hipótesis básica de lognormalidad para la distribución del precio de las acciones de Telefónica, supuesto que se exige para contrastar el modelo de B-S y, a partir de este resultado, explicar la dinámica de sus series de precios a partir de algunos de los modelos (volatilidad estocástica, difusión con saltos, etc.) presentados teóricamente en capítulos anteriores.

No obstante, y a pesar del rechazo de esta hipótesis básica para aplicar de manera satisfactoria el modelo de valoración de opciones de B-S, procedimos a hacer un análisis comparativo del modelo de difusión con saltos de Merton, tomando como referencia básica el modelo de B-S, al igual que hacen la mayoría de los trabajos empíricos y dada la utilización práctica que de este modelo de hace por parte de los operadores en los mercados de opciones.

4.1. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS.

El período muestral considerado para este análisis empírico empieza con la introducción del Contrato de Opción sobre Acciones Cotizadas en el Mercado

Continuo de las Bolsas Españolas [3], cuya negociación se lleva a cabo en el Mercado Español de Futuros Financieros de Renta Variable (MEFF,RV). Concretamente, las opciones sobre acciones de la compañía de Telefónica (Telefónica de España, S.A.) se lanzan, junto con las de Endesa (Empresa Nacional de Electricidad, S.A.), el 25 de Febrero de 1993, mientras que las opciones sobre acciones de las compañías de BBV y Repsol se lanzan el 4 de Mayo del mismo año.

La muestra de datos que utilizamos en este trabajo de investigación se refiere a las cotizaciones diarias (precios de cierre [4]) de las acciones de la Compañía Telefónica Nacional de España (opciones TEFA) para el período que va desde el 5-4-1989 al 17-3-1994, formando una muestra de 1227 datos, los cuales han sido suministrados en soporte informático por Analistas Financieros Internacionales, S. A.

La circunstancia de que un importante volumen de negociación (30% para Telefónica) en el mercado continuo se realice en las proximidades al cierre [5], cuando simultánemante está abierto el mercado de Nueva York, donde también opera Telefónica, y dado que en término medio Telefónica cotiza sólo 3 o 4 precios en cada sesión, parece suficiente justificación para la utilización de los precios de cierre, como aproximados a los precios medios ponderados, más representativos, pero que son datos que no disponemos.

Por su parte, la muestra de precios de las correspondientes opciones ha sido obtenida directamente de MEFFSA, y en la que figuran, además de los precios mínimos y máximos de cada sesión, los precios de compra (precios c.), y los precios de venta (precios v.). Estos precios de compra, al igual que los de venta, se determinan al cierre del mercado y constituye el mejor precio cotizado de

---

3 Las Condiciones Generales de este contrato aparecen publicadas por MEFF RV el 2 de Febrero de 1993.

4 Por entonces, los precios de cierre de la acciones se correspondían con el último precio negociado de la sesión. A partir del 1-11-94 con la nueva regulación, se modificó el funcionamiento del mercado continuo, de manera que el precio de cierre se determina de entre los precios correspondientes a las últimas 200 acciones negociadas, aquel que más se acerque al precio medio ponderado de la sesión. En caso de igualdad de la diferencia respecto al precio medio ponderado (uno por debajo y otro por encima), se elegirá como precio de cierre el último negociado de entre esos dos. No obstante, cuando el total de acciones negociadas no alcance las 200, aunque es superior a 25, el precio de cierre se obtendrá igual que antes. Pero si es inferior a 25, el precio de cierre será el mismo que el de la sesión anterior.

5 Concretamente, entre las 15:30 p.m. (hora de apertura del mercado de Nueva York) y las 17:00 p.m. horas se negocian acciones de Telefónica, aproximadamente, un 30% del volumen total de cada sesión.

compra y de venta, respectívamente, al cierre del mercado. Debido al nivel tan reducido de negociación de estos instrumentos financieros, sólo en días escasos aparecen los precios últimos [6], y que por tanto, sólo serán utilizados en determinadas partes de nuestro análisis.

Adicionalmente al mercado organizado MEFF RV, los mercados OTC negocian también opciones sobre acciones españolas. Los contratos en este caso se negocian de manera bilateral y el riesgo de incumplimiento es asumido por ambas partes, al no existir Cámara de Compensación. Aunque un volumen importante de negociación de estos contratos se realiza en Madrid, la liquidez la suministra, sobre todo, la plaza financiera de Londres. Que duda cabe que disponer de los datos de estas transacciones hubiese apuntalado las conclusiones que de nuestro análisis se puedan desprender, o las hubiese invalidado. Pero desgraciadamente, al contrario de lo que sucede en otras latitudes [7] este no es el caso.

Al igual que para el resto de las opciones sobre acciones y a raíz del todavía escaso nivel de participación del conjunto de las compañías españolas en este mercado, MEFF RV ha adoptado un único ciclo de vencimientos para estos contratos, que es el de marzo-junio-septiembre-diciembre [8]. Aún así, hay vencimientos todos los meses (concretamente, el tercer viernes del mes de vencimiento), de manera que se negociarán en todo momento, al menos, el vencimiento más próximo y dos vencimientos más del ciclo. La opción es de tipo americana, de manera que se podrá ejercer cualquier día hábil hasta la fecha de vencimiento, incluída.

Aunque el nominal del contrato es de 100 acciones, al igual que en la mayoría de las Bolsas Internacionales de Opciones, la forma de cotización de las Primas (precio de las opciones) es en pesetas por acción. De otro lado, los precios de ejercicio de las series que se introduzcan a negociación tendrán exclusivamente algunos de los valores que se estipulan en una Tabla, según los criterios fijados en las Condiciones Generales establecidas en el Reglamento del Mercado de Productos Financieros Derivados de Renta Variable. Esta Tabla establece

---

[6] Los precios últimos de las opciones se corresponden con el de la última negociación de la sesión.

[7] En el ámbito U.S.A., por ejemplo, el Wall Street Journal dedica todos los días 2 páginas y media a listar los precios cruzados en este tipo de transacciones.

[8] Otras Bolsas de Opciones extranjeras, como la CBOE (Chicago Board Option Exchange) disponen de los tres ciclos posibles.

intervalos para los precios de ejercicio que varían desde 5 , 10, 25, 50, 100, 500, 1000, etc según sea el precio del subyacente. Para la muestra de datos de las opciones de Telefónica, los precios de ejercicio se establecen en intervalos de 50 Ptas.

Las muestras utilizadas para la contrastación fueron seis: las dos primeras formadas por las opciones de compra (call) para dos precios de ejercicio (1250 y 1450) con vencimiento en septiembre (17-9-93), que empiezan a negociarse en el mercado el 1 de marzo de 1993; la tercera y cuarta, con vencimiento en diciembre (17-12-93), para los dos precios de ejercicio (1400 y 1600) con primeros datos disponibles desde el 19 de julio de 1993; las dos últimas, con vencimiento en marzo de 1994 (18-3-94), con los precios de ejercicio 1700 y 1900, empiezan a cotizarse el 18 de noviembre de 1993.

La elección de los precios de ejercicio de la opción a utilizar en la contrastación ha seguido principalmente dos criterios:

-Utilizar aquel precio de ejercicio de la opción con mayor nivel de negociación. Para la contrastación se han usado tanto los datos observados de precios de compra, como el precio último de las opciones.

-Dado el reducido nivel de negociación de la mayoría de las opciones, utilizar el precio de ejercicio más bajo. Este precio de ejercicio más bajo hará que la mayoría de las opciones de compra presenten un valor intrínseco [9] positivo (estén "en dinero"). En general, la mayoría de los modelos de valoración parecen adaptarse mejor en este caso al caso en que la opción está "sin dinero" o sin valor intrínseco. Los datos utilizados en este caso para la constrastación serán los precios de compra, que cotizan los operadores de estos mercados.

Dado que los precios de las acciones experimentaron un aumento prácticamente consecutivo a lo largo del período de contrastación, se fueron introduciendo precios de ejercicio más altos, a la vez que desaparecían los más bajos, según se determina en las Condiciones Generales de los contratos de opciones sobre acciones negociadas relativas a la introducción de nuevas series. Por esta razón

[9] Se entiende como valor intrínseco de una opción de compra a la diferencia entre el precio del activo y el precio de ejercicio, o cero, si el valor anterior es negativo.

se pasó de precios de ejercicio tales como 1250 para las primeras observaciones hasta 2200 para las últimas referidas al mes de marzo de 1994.

Aunque la fórmula de B-S se utiliza para opciones europeas y cuando no hay pago de dividendos por la acción, su aplicación para la valoración de las opciones americanas sobre acciones de MEFFSA es igualmente válida, dado que son opciones de compra "call" y los dividendos pagados durante la vida de la opción se pueden considerar prácticamente nulos [10]. Esta extensión del modelo B-S original (1973) para valorar opciones call americanas cuando no hay dividendos se debe a Merton (1973).

Concretamente, Merton (1973) demuestra [11] que para un precio de ejercicio fijo y cuando no se hacen pagos (por ejemplo, dividendos) a la acción a lo largo de la vida del "warrant" (o, alternativamente, si el "warrant" está protegido frente a esos pagos [12]), entonces, un "warrant" americano nunca se va a ejercitar antes de su expiración, por lo que tendrá el mismo valor que un "warrant" europeo.

A continuación, pasamos en el siguiente epígrafe a comentar el procedimiento que hemos seguido para estimar los diferentes parámetros que exige la contrastación empírica, tanto del modelo de valoración de opciones de Black-Scholes, como el de Merton (1976a).

4.2. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.

La fórmula del modelo de B-S con la que se ha trabajado para el cálculo del precio de una opción de compra sobre una acción y para llevar a cabo la contrastación, ha sido la siguiente:

---

[10] En concreto, y durante el período muestral analizado, sólo hubo un dividendo ("complementario") de 50 ptas. brutas, aproximadamente un 0,25% del valor medio del subyacente.

[11] Esta demostración se explica con los Teoremas 1 y 2 en Merton (1973).

[12] Según Merton (1973), una opción está protegida frente a pagos distributivos (tales como dividendos) si el valor de la opción es invariable con respecto a la política de pagos distributivos que se siga.

$$C = SN(x) - Kr^{-t}N(x - \sigma\sqrt{t})\ \textit{donde}$$
$$x \equiv \frac{log(S/Kr^{-t})}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \qquad [3]$$

Para la contrastación del modelo de B-S, se utilizan, por tanto, cinco variables: S, precio corriente del activo subyacente, K, precio de ejercicio de la opción, r, uno más el tipo de interés sin riesgo, t, tiempo hasta el vencimiento de la opción, expresado en años y σ, varianza anual de la rentabilidad del activo subyacente. Mientras que las cuatro primeras variables son fácilmente observables, se han de utilizar técnicas de estimación para el cálculo de la varianza de la rentabilidad del subyacente. Nótese que se ha considerado capitalización compuesta, siguiendo las pautas de Cox y Rubinstein (1985), supuesto más realista que el de capitalización continua, habitual en los trabajos teóricos.

El primer problema se plantea con la elección del procedimiento a utilizar para el cálculo de la volatilidad, pues, como se comenta en el capítulo 2 de este trabajo, se han utilizado diferentes alternativas para su obtención, en un intento de mejorar la capacidad predictiva del modelo de valoración.

Hemos utilizado, en un primer estadio del análisis, la "volatilidad histórica corregida" calculada con los precios de cierre según se expone en el capítulo 2, como estimador de la variabilidad de las tasas de cambio del precios de las acciones TEFA, siguiendo el procedimiento de Cox y Rubinstein (1985, pág. 261). Este estimador ha sido el que más frecuentemente se ha utilizado en los trabajos empíricos, como por ejemplo, Analistas Financieros Internacionales (1992) y Chamorro (1993).

La volatilidad histórica como estimador de la volatilidad que se prevee en la rentabilidad de las acciones TEFA, recoge la información pasada respecto a los precios de este activo, por lo que se aconseja la utilización del mayor número de observaciones posibles, preferentemente diarias. No obstante, debe tener más peso en la estimación de la volatilidad futura la información más actual que la más antigua, por lo que procedimos a calcular dicho parámetro para tres períodos diferentes dentro de cada vencimiento (septiembre, diciembre y marzo). El primer período comienza con las primeras observaciones que disponemos, concretamente desde el 5 de abril de 1989, hasta el día inmediatamente anterior al que empiezan a cotizarse las correspondientes opciones, el segundo período abarca dos años inmediatamente anteriores a ese día y finalmente el tercer período recoge un año.

En base a este razonamiento, y para las opciones que vencen en septiembre de 1993 y que empiezan a cotizar desde el 1 de marzo de 1993, y para el primer período (967 observaciones), que está comprendido entre el 5 de abril de 1989 y 28 de febrero de 1993, el resultado de la estimación da un valor para la varianza histórica corregida de ^{2}=0,09207 en términos anuales, que equivale a una volatilidad o desviación típica de σ = 0,303442, también anual. La reducción del período muestral a dos años (495 observaciones) resulta en una estimación para la volatilidad anual igual a 0,304461, mientras que con 248 observaciones correspondientes a un año (desde el 28 de febrero de 1992 hasta el 26 de febrero de 1993) la estimación para σ es de 0,31972.

Para las opciones que vencen en diciembre, dado que empiezan a cotizarse el 18 de julio de 1993, utilizamos una primera muestra de 1064 observaciones (desde el 5 de abril de 1989 hasta el 17 de julio de 1993), resultando una estimación para la volatilidad histórica corregida de σ= 0,286008, en términos anuales. Para una muestra de dos años, desde el 18 de julio de 1991 hasta el 16 de julio de 1993 (498 observaciones), este valor se situaba en σ= 0,310511, mientras que para una muestra de un año, 249 observaciones, su valor era de σ= 0,303334.

Para la muestra de opciones de vencimiento en marzo de 1994, y que empiezan a cotizar el 18 de noviembre de 1993, la volatilidad anual corregida para una muestra de 1146 observaciones (desde el 5-4-89 hasta el 17-11-93) σ= 0,283717. Para la muestra de dos años (desde el 15-11-91 hasta el 17-11-93), σ= 0,295624, mientras que para la muestra de un año (desde el 17-11-92 hasta el 17-11-93) σ= 0,262259.

Estos resultados se resumen en la siguiente tabla:

TABLA 4
Valor de la volatilidad histórica corregida anual

	1º período	2º período	3º período	Valor medio
Vto. septiembre 1993	0,3034	0,3044	0,3197	0,3092
Vto. diciembre 1993	0,2860	0,3105	0,3033	0,2999
Vto. marzo 1994	0,2837	0,2956	0,2622	0,2805

De estos resultados se desprende que la modificación del período muestral para estimar la volatilidad no parece afectar de forma significativa su valor. No obstante, procedimos a utilizar la media de los tres períodos considerados, que para las muestras de vencimiento septiembre y diciembre de 1993 se aproxima a 0,30, mientras que para la muestra de vencimiento marzo de 1994 el valor medio de los tres períodos considerados se sitúa en 0,28.

Para determinar el valor de N(x), utilizamos la siguiente aproximación polinómica, que, como afirman Cox y Rubinstein (1985) ha sido usada para la creación de las tablas de la función de distribución normal estándard, disponible en la mayoría de los manuales introductorios de Estadística:

$$N(x) \approx 1-(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}(b_1k+b_2k^2+b_3k^3+b_4k^4+b_5k^5)\ \textit{donde} \quad k \equiv 1/(1+ax) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{y}\ \ b_1 &\equiv 0.319381530 & b_4 &\equiv -1.821255978 \\ b_2 &\equiv -0.356563782 & b_5 &\equiv 1.330274429 \\ b_3 &\equiv 1.781477937 & a &\equiv 0.2316419 \end{aligned}$$

En caso de x < 0, se hace el cálculo anterior para x positiva y luego se resta a uno. Para x = 0, N(x) = 1/2. Esta aproximación genera valores de N(x) exactos dentro de los primeros seis decimales.

La contrastación del modelo de difusión con saltos de Merton (1976a) es más compleja, en tanto, que además de los parámetros ya mencionados para la contrastación del modelo de B-S, se habrán de estimar cuatro parámetros adicionales (λ, el número medio de saltos de Poisson por unidad de tiempo, α, la tasa de rentabilidad esperada instantánea del activo, δ^2, la varianza del tamaño del salto de Poisson y, finalmente, σ^2, la varianza del proceso de difusión en ausencia de saltos), como se mencionó en el capítulo 3 anterior.

Aunque se han planteado diversos procedimientos para la estimación de estos parámetros (método de los cumulantes y máxima verosimilitud, ambos en versión reducida Bernouilli y más general Poisson), tal y como se exponen y desarrollan en el capítulo 3, en este trabajo de investigación se aplica el método más sencillo de estimación de los cumulantes.

Aunque el procedimiento alternativo de máxima verosimilitud genera estimaciones más eficientes y permite obtener los valores de los errores de estimación de los parámetros, que no son disponibles con el método de los cumulantes, no lo hemos utilizado en este trabajo por varias razones. Por un lado, algunos trabajos han demostrado que, para determinados valores de λ (Ball y Torous [1985]) y curtosis (Beckers [1981]), los resultados de ambos procedimientos son bastante similares. La pérdida de eficiencia al utilizar el procedimiento de los cumulantes, se podría compensar con la sencillez de este método, que además posee suficiente robustez tanto teórica como empírica.

Por otro lado, la implementación práctica del método de máxima verosimilitud exige una operatoria matemática bastante compleja, dando lugar a enormes problemas, a veces insuperables. Como ya se ha dicho, el método consiste en maximizar la suma de un número importante de logaritmos neperianos (este número es igual al número de observaciones diarias del título analizado), logaritmos neperianos de funciones de densidad del proceso más general de difusión con saltos distribuidos como una variable aleatoria de Poisson con cuatro parámetros. En la descripción de estas funciones, como hemos visto, aparecen sumas de infinitos términos. El conjunto de condiciones de primer orden del problema de maximización no es lineal y, por tanto, se precisa de algún procedimiento de aproximación para su resolución, siendo el más utilizado el método multidimensional de Newton-Raphson. Este procedimiento, sin embargo, es bastante sensible a la elección de los valores de partida y al orden de truncamiento de la suma de los infinitos términos que antes mencionamos, por lo que en la mayoría de los casos, es un algoritmo que no converge.

Por si aún fuera poco, se precisa de unos programas informáticos muy sofisticados, una vez que la función de verosimilitud a maximizar no viene recogida en los programas que tradicionalmente se han utilizado para obtener estimaciones máximo-verosímiles, tales como el TSP, LINDEP, SPSS o el Matemática.

Antes de entrar de lleno en la aplicación del procedimiento de estimación de los parámetros, volvemos a hacer hincapié en los supuestos del modelo de Merton (1976a), que vamos a contrastar. Como se comentó en el capítulo 3, la formulación de Merton requiere que el componente de salto de la rentabilidad del activo subyacente refleje riesgo no sistemático y, por tanto, diversificable, esto es, que podría ser eliminado construyendo una cartera bien diversificada.

Como representativo de una cartera bien diversificada hemos elegido al Indice General de la Bolsa de Madrid (IGBM). Hemos descartado otro índice, también importante, como el IBEX 35, dado que hubiera exigido incorporar efectos adicionales derivados de la ponderación [13] de las acciones de Telefónica (que ponderan en el IBEX 35, por encima de la ponderación que tienen en el IGBM) en el análisis de los saltos, como veremos a continuación.

Para seguir fielmente los supuestos de Merton, tenemos que "filtrar" qué saltos en el precio del stock son específicos y cuáles siguen un comportamiento general del mercado. La metodología a seguir no consiste, por tanto, en analizar las discontinuidades del subyacente respecto a su media, sino respecto a la tendencia de la cartera de mercado, en nuestro caso, el IGBM.

Si los saltos detectados en la acción igualmente se detectan en el índice, se deberán considerar como sistemáticos, en tanto que no se podrían eliminar con la diversificación. Por el contrario, si las discontinuidades no se detectan en el índice, estaremos en presencia de los saltos diversificables, no sistemáticos, específicos de la propia empresa, a los cuales se refiere Merton (1976a). Por el mismo razonamiento anterior, las variaciones importantes, saltos, en el índice IGBM que

[13] Un coeficiente de ponderación alto de las acciones TEFA respecto al índice, sea IGBM o IBEX 35, podría dar lugar a una modificación importante en su valor cuando lo que ha ocurrido es un salto debido a la llegada de información específica a la empresa, que, por tanto, debería ser incorporado como salto. Sin embargo, la serie en diferencias no permitiría detectarlo.

no se detectan en el activo, obedecen a la llegada de alguna información específica a la propia empresa, que impide a sus precios seguir la tendencia general del mercado, por lo que, igualmente habrán de considerarse como saltos específicos a la empresa, y, por tanto, diversificables.

La interpretación que planteamos de este supuesto de Merton (1976a) podría equipararse a la de la serpiente del Sistema Monetario Europeo, en el que aunque los tipos de cambio son flotantes, y se permite que varíen en torno a una tendencia conjunta, sin embargo, no pueden situarse por encima de unas bandas fijadas en un determinado umbral, en cuyo caso el banco central del país en cuestión tiene que intervenir para mantener su tipo de cambio dentro de estas bandas. En nuestro caso, igualmente se permite que haya un determinado márgen de variación del precio de la acción cuando estas variaciones siguen la tendencia del conjunto de acciones o cartera de mercado, variaciones en el precio que, aunque importantes, serán sistemáticas, no diversificables, pues obedecen a la tendencia general del mercado. Sin embargo, cualquier variación que sobrepase ese márgen o banda respecto a la cartera de mercado, será considerado como salto idiosincrático, específico a la empresa y diversificable.

Para la estimación de los parámetros del proceso de difusión con saltos con la muestra de datos de opciones sobre acciones de Telefónica [TEFA] hemos utilizado además del procedimiento de los cumulantes, más riguroso, uno que podríamos denominar "naive". Con ambos procedimientos hemos trabajado sobre una muestra de 247 observaciones correspondientes a las rentabilidades diarias de las acciones TEFA, calculadas con los precios de cierre correspondientes a todo el año 1993, por lo que las estimaciones que se deriven vendrán expresadas en términos anuales, tal y como se exige en la contrastación de los diferentes modelos de valoración, por ejemplo, el modelo de B-S (1973).

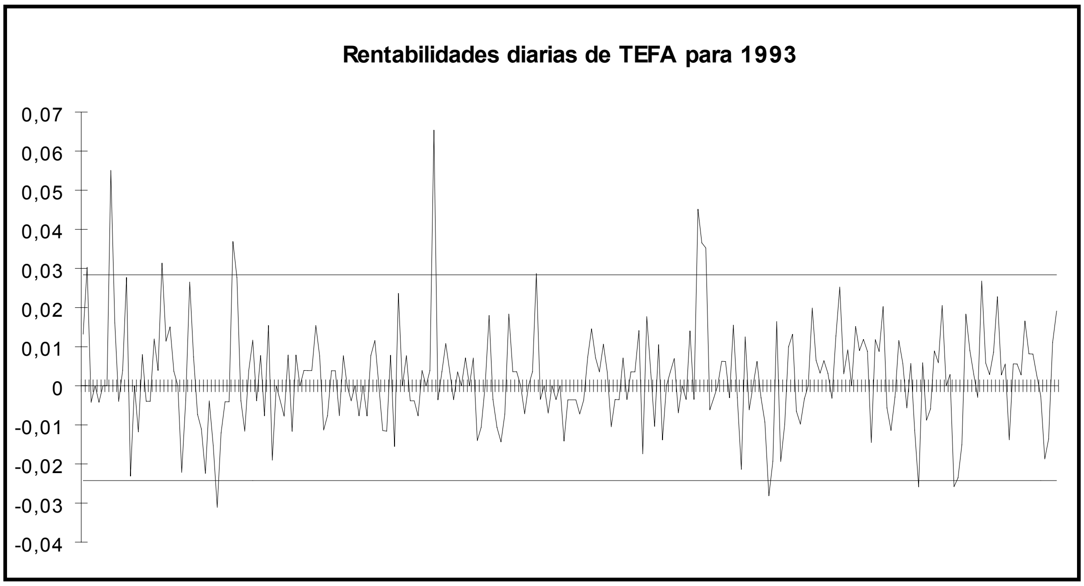
Mención especial exige la estimación del parámetro λ, esto es, la frecuencia media de saltos diversificables, que recoge el número de veces por unidad de tiempo (un día en este caso) que se produce la llegada de información específica sobre la empresa causando una modificación sustancial en la rentabilidad del título, modificación "anormal" siguiendo la denominación de Merton, no correlada con el mercado, y que, por tanto, constituye para su tenedor riesgo diversificable.

El procedimiento "naive" consiste en el cálculo de los momentos (respecto a cero), media y desviación típica de la distribución de rentabilidades diarias de la acción y del índice (cartera de mercado), y en analizar, ayudándose de los gráficos, aquellas observaciones a lo largo del período muestral considerado en las que el logaritmo del cociente de dos precios consecutivos en las acciones TEFA cae fuera del intervalo definido por la media más o menos dos veces la desviación típica.

Si la distribución del cociente de los precios fuese lognormal, fuera del intervalo sólo debería haber en torno al 5% de las observaciones. Cualquier exceso significativo sobre esa cifra (esto es, presencia de curtosis superior a la de la distribución normal) debería significar la presencia de vibraciones o discontinuidades en las tasas diarias de rentabilidad y por tanto, en el contexto del modelo que se trata de validar, presencia de saltos. De esos saltos, luego habría que separar los sistemáticos y los no sistemáticos, diversificables, según el razonamiento anterior. No obstante, algunas observaciones que consideraremos saltos no serán advertidas con este procedimiento. En este caso, nos referimos a los saltos no apreciables en la serie de rentabilidades de TEFA, pero que suponen una tendencia totalmente diferente a la del mercado.

Siguiendo con el procedimiento "naive", el Gráfico 3 que se presenta a continuación muestra la serie de rentabilidades diarias de las acciones TEFA, con las bandas horizontales situadas a la altura de la media más o menos dos veces la desviación típica de la serie. De la observación de este gráfico se confirma un número de observaciones que sobresalen las bandas por encima del 5% que permite la normalidad, por lo que habría indicio de que efectivamente, el proceso que describe la dinámica de la rentanbilidad de estas acciones TEFA podría ser un proceso de difusión con saltos, como propone el modelo de Merton (1976a). No obstante, y de cara a contrastar el modelo de Merton, sólo se considerarán los saltos diversificables, por lo que habría que confirmar todavía la presencia de esos saltos y eliminar los sistemáticos.

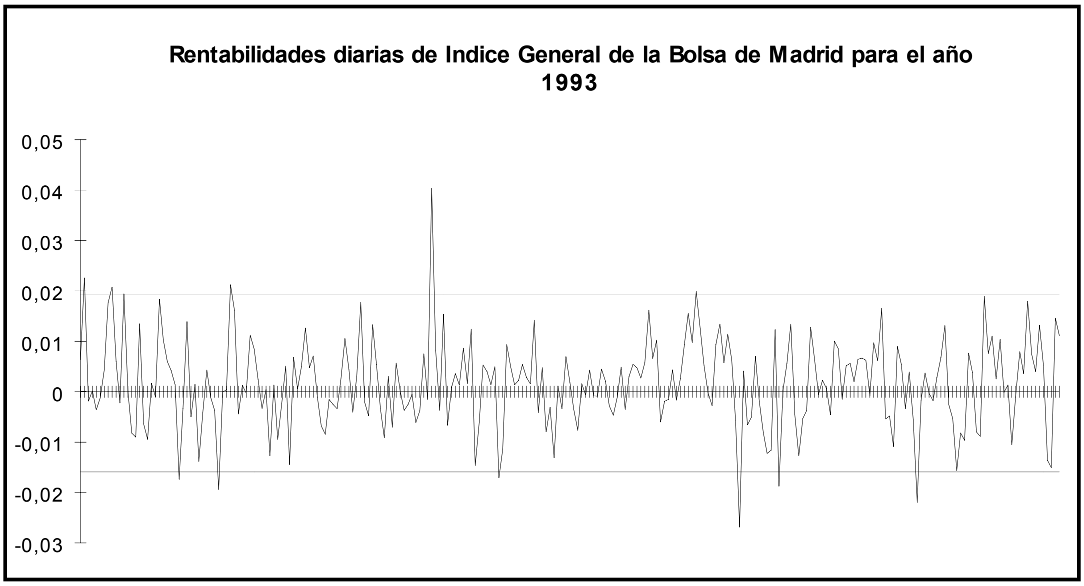
GRÁFICO 3



Por un lado, las observaciones que sobresalen de las bandas, aunque representan variaciones importantes de la acción respecto a la media, en algunos casos se detectan igualmente en la serie del índice IGBM (Gráfico 4), por lo que obedecen a la tendencia general que experimenta el mercado y no habrían de ser incluídos como saltos en la contrastación.

En el Gráfico 4, referente a la serie de rentabilidades diarias del índice IGBM, se puede apreciar la tendencia general del mercado y las discontinuidades que presenta esta serie respecto a su media. Este gráfico permite comprobar si las discontinuidades detectadas en TEFA, se detectan igualmente en el IGBM. No obstante, del análisis de los dos gráficos anteriores no se detectan la totalidad de los saltos, pues faltarían los que, aunque no apreciables en la serie del subyacente, sí aparecen en el índice, serían igualmente diversificables y habrían de ser incluídos.

GRÁFICO 4



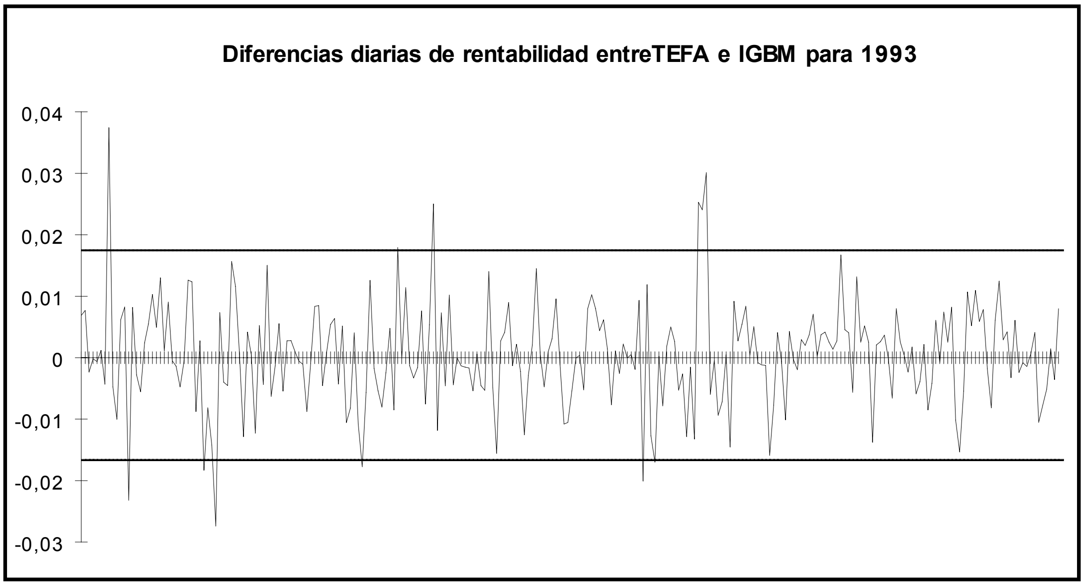
En un intento de recoger sólo los saltos diversificables, construimos la serie de diferencias diarias de rentabilidades entre TEFA y IGBM (es decir, Rentabilidades de TEFA- Rentabilidades del IGBM), que se muestran en el Gráfico 5, junto con las bandas de esta serie. Esta serie, aunque simple, recoge todas las observaciones "anormales", siguiendo la denominación de Merton, que obedecen a la llegada de información específica para la empresa y que por tanto, constituyen saltos diversificables. Además, cuando los saltos o discontinuidades se producen simultáneamente en ambas series sus valores se anularían con la serie en diferencias, y no se apreciarían discontinuidades, ya que los saltos en las rentabilidades de TEFA siguen la tendencia del mercado.

Si, por ejemplo, las rentabilidades de TEFA y de IGBM tomaran valores positivos, la serie en diferencias mostraría "la distancia" entre esos valores, distancia que por encima de un determinado umbral significaría una discontinuidad o salto. Si, por el contrario, las rentabilidades de TEFA y del IGBM tomaran valores negativos, la serie en diferencias mostraría igualmente su distancia.

Una última posibilidad es que los valores de las rentabilidades de TEFA y del IGBM fueran de signo contrario, por ejemplo, la rentabilidad en TEFA de +0,02 y la del IGBM de -0,01, dando lugar a una diferencia de +0,03, valor importante que significaría un salto, aunque en la serie de rentabilidades de TEFA no se aprecie. El que la rentabilidad en TEFA crezca cuando la del mercado experimienta un receso, es debido a alguna información en la propia empresa, específica, que supone una discontinuidad idiosincrática, observación que habría de incorporarse como un salto más.

Convendría resaltar que este procedimiento tan simple, "naive", a pesar de la falta de rigurosidad, puede aproximarnos al comportamiento de las tasas de rentabilidad de las acciones de Telefónica, de cara a poder utilizar adecuadamente la metodología de Merton.

GRÁFICO 5



Además, procedimos a realizar un análisis de sensibilidad en los resultados a la elección de la amplitud de las bandas de "discriminación". Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

TABLA 5

BANDAS	Nº aproximado de Saltos	Valor aproximado de λ
Media±2.Desv. Típica	12	0,048583
Media±0,01	49	0,19838
Media±Desviación Típica	60	0,242914
Media±0,0075	77	0,31174
Media±0,00625	87	0,35222
Media±0,005	117	0,47368

Los valores de la media y de la desviación típica se calculan con la serie de diferencias, es decir, las rentabilidades de TEFA menos las rentabilidades del IGBM. El valor aproximado para λ (frecuencia media de salto por unidad de tiempo) se ha calculado dividiendo el número de saltos por el número de observaciones correspondientes al año 1993, un total de 247 observaciones.

La reducción de las bandas, lógicamente, hace que aparezcan más valores anormales o saltos, y por consiguiente que la frecuencia de los saltos aumente. No obstante, podemos considerar que una variación dentro del intervalo (0,5%, 1%) de la rentabilidad de TEFA respecto a la del IGBM es significativa, por lo que, de la tabla 5, el número aproximado de saltos oscila entre 49 y 117, por lo que λ varía entre 0,2 y 0,5 aproximadamente.

Aunque el número de saltos obtenido pueda parecer excesivo, no lo es tanto, en la medida en que utilizamos observaciones diarias en tiempo discreto, ya que no se dispone de los precios de los activos en todos los instantes de tiempo que exigiría la contrastación en tiempo continuo. De ese modo, las observaciones de rentabilidad de un día a otro puede experimentar, en muchas ocasiones, variaciones significativas. A este respecto, A. W. Lo (1992) advierte que "existen algunas dudas acerca de si los procesos de salto pueden ser identificados a partir de datos muestreados discretamente, ya que el mismo hecho de muestrear de forma discreta destruye la distinción clara entre procesos de difusión y procesos de salto".

Para confirmar que efectivamente los saltos que obtuvimos con el procedimiento "naive" son saltos diversificables, específicos de la propia empresa y no correlados con la cartera de mercado, se hace un análisis de la correlación entre la serie de rentabilidades del índice IGBM y de las acciones TEFA para toda la muestra y para las muestras que resultan de eliminar las observaciones que hemos considerado como saltos, una vez que sobrepasaban las bandas de discriminación.

Coeficientes de correlación entre IGBM y TEFA

Toda la muestra	0,7675
Toda la muestra - 12 saltos	0,81
Toda la muestra - 49 saltos	0,8474
Toda la muestra - 60 saltos	0,8646
Toda la muestra - 77 saltos	0,8951
Toda la muestra - 87 saltos	0,8978
Toda la muestra - 117 saltos	0,9252

La eliminación de las observaciones que hemos identificado como saltos por el procedimiento "naive" ha hecho que se produzca un aumento del coeficiente de correlación entre la rentabilidad de TEFA y la del índice IGBM. Este resultado confirma que estos valores "anormales" o discontinuidades constituían efectivamente riesgo diversificable, específico de la propia empresa una vez que su eliminación produce un mayor acercamiento de la tendencia de la serie de la acción a la del índice o cartera de mercado. La eliminación de saltos que fueran sistemáticos no hubiera supuesto, en modo alguno, un aumento del coeficiente de correlación entre estas series; incluso podría reducirse, una vez que esas observaciones, saltos, son importantes en la descripción de la dinámica del mercado.

Los resultados obtenidos con el método de los cumulantes se resumen en la Tabla 6.

TABLA 6

MOMENTOS CENTRALES Y CUMULANTES

	TEFA	IGBM
m1	0,00140794	0,00112273
m2	0,00012007	5,4245E-05
m3	2,1472E-06	3,3925E-07
m4	1,3616E-07	1,888E-08
m5	5,8907E-09	3,1882E-10
m6	3,5459E-10	1,5974E-11
k2	0,00011809	5,2985E-05
k4	8,3648E-08	9,3403E-09
k6	1,0881E-10	4,2666E-12
λ	0,41195923	0,37302373
¼2	0,00011809	5,2985E-05
$\delta 2$	0,00026016	9,1359E-05

Dado que hemos considerado que IGBM es la cartera de mercado, esto es, una cartera bien diversificada, el número de saltos por unidad de tiempo en la rentabilidad de la misma debería ser inferior al que se obtiene para el activo aislado. En nuestro caso se obtiene por el método de los cumulantes valores de λ de 0,41 para TEFA y 0,37 para IGBM, corroborando la observación anterior.

Ball y Torous (1985), con una muestra de las rentabilidades diarias del índice CRSP (Center for Research Securities Prices) desde el 1 de Enero de 1981 hasta el 31 de Diciembre de 1982, obtenían un valor para λ del índice de 0,9, cuando los valores de este parámetro para una conjunto de 30 acciones incluídas en este índice era, en la mayoría de los casos, inferior. Este resultado les llevaba a concluir que tal índice no es una buena aproximación a la cartera de mercado, ya que no logra eliminar todo el riesgo idiosincrático de sus títulos componentes. En nuestro caso, el valor de 0,37 para la frecuencia de saltos del índice IGBM significa todo lo contrario, es decir, este índice parece ser una buena aproximación (aunque no perfecta) a la cartera de mercado.

En relación con el resultado anterior, Jarrow y Rosenfeld (1984) derivaban teóricamente que la condición suficiente para que el modelo C.A.P.M. permitiera obtener la rentabilidad esperada de equilibrio, cuando la dinámica del subyacente está descrita por un proceso de difusión con saltos, es que el componente de salto del activo en cuestión fuera no sistemático y, por tanto, diversificable en la cartera de mercado. La idea subyacente es que el componente de salto del activo "no recibe compensación" en términos de rentabilidad esperada en el equilibrio, sino que desaparece, se elimina con la diversificación en la cartera de mercado.

El análisis empírico de la dinámica de la cartera de mercado que llevan a cabo Jarrow y Rosenfeld (1984) pretende comprobar si efectivamente tal cartera no contiene componente de salto, lo que significaría que todo el riesgo derivado de los saltos en los activos que constituyen el índice es diversificable y sería, por tanto, consistente con la condición anterior. No obstante, y con rentabilidades diarias, de dos índices (formados de las ponderaciones medias de todas las acciones de la NYSE (New York Stock Exchange) y de la ASE (American Stock Exchange), desde julio de 1962 a diciembre de 1978) sus resultados concluyen que los dos índices contienen un componente de salto, que significaría que los títulos que componen ambos índices contienen riesgo sistemático, ya que no se eliminó con la formación del índice o cartera.

Por el método de los cumulantes hemos obtenido valores positivos para las varianzas, tanto del proceso de difusión en ausencia de saltos, ($\sigma^2 = 0{,}043$), como del proceso de saltos, ($\delta^2 = 0{,}094$). Este resultado permite afianzar más la validez y, por consiguiente, la utilización del método de estimación de los cumulantes, en tanto que, como comentaba Ball y Torous (1983), cuando los valores de la varianza eran positivos, las estimaciones de los parámetros por el método de los cumulantes eran similares a las obtenidas por el procedimiento de máxima verosimilitud, más eficiente.

Además, Beckers (1981) obtiene que el procedimiento de estimación de los cumulantes da resultados satisfactorios (varianzas positivas) para las acciones con un nivel de curtosis positivo, es decir, leptocúrticas, por lo que para la serie de precios de las acciones TEFA, que muestra un nivel de curtosis positivo, la utilización de este procedimiento de estimación se afianza aún más.

Esta observación también se detecta en Ball y Torous (1983), que concluyen que para valores relativamente bajos de λ, en nuestro caso, 0,41, el método de los cumulantes y el de máxima verosimilitud generan estimaciones similares.

Una comparación de la varianza histórica anual utilizada en la contrastación del modelo B-S, (σ^2=0,092 para las de vencimiento septiembre y diciembre y σ^2=0,078 para las de vencimiento marzo de 1994), con la varianza del proceso de difusión en ausencia de saltos, que por el método de los cumulantes se situa en σ^2=0,0431 también anual, confirma la existencia de saltos, es decir, la superposición del proceso de Poisson al proceso de difusión continuo en la muestra que utilizamos, y además, que la diferencia en exceso a favor de la volatilidad histórica observada debe recogerse en el segundo componente de la varianza global, υ_n^2, que añade el riesgo de variación de los precios del activo cuando hay saltos ($\frac{n\delta^2}{\tau}$).

En ambas fórmulas de valoración tanto B-S como Merton (en base a lo que se ha argumentado con anterioridad), el tipo de interés sin riesgo que se ha aplicado para la contrastación ha sido la media del mercado interbancario con letras ("repos" sobre Deuda Pública) en los plazos más similares a los de la vida residual de la opción objeto de valoración hasta su vencimiento [14].

Una segunda consideración en relación a la metodología original de Merton (1976a) es que el modelo de difusión con saltos que hemos utilizado para la valoración de las opciones sobre acciones de Telefónica es una simplificación que hace el propio Merton (1976) del modelo general y que ya desarrollamos en el capítulo anterior, válida cuando la variable aleatoria Y $\left[=\frac{S(t+h)}{S(t)}\right]$, que describe los cambios de precios de la acción cuando hay saltos, tiene una distribución lognormal, es decir, cuando la rentabilidad del activo se distribuye como una normal.

Bajo este supuesto, [siendo δ^2 la varianza de LogY, y k=ζ[Y-1], donde ζ es el operador esperanza matemática calculado en el rango de la variable aleatoria Y,

[14] Para la muestra de vencimiento en septiembre de 1993, el tipo de interés sin riesgo utilizado fue 0,1243, para la de vencimiento en diciembre de 1994 fue 0,0967 y la de vencimiento en marzo de 1994 fue de 0,084.

de manera que k viene a ser la media esperada de los saltos y Log(1+k) [15]], Merton (1976a) llega a una solución en forma cerrada, analítica, para el precio de la opción call, en este caso, dada por:

$$F(S,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^{n}}{n!}f_{n}(S,\tau), \qquad [5]$$

donde F(S,τ) es el precio de la opción de compra, S es el precio del activo subyacente (acción de Telefónica en nuestro caso), $\lambda'=\lambda(1+k)$ y $f_n(S,E,\ ,\ {}^{2}_{n},r_n)$ es el precio Black-Scholes de la opción evaluado para una varianza ${}^{2}_{n}$ y una tasa de interés r_n dados por:

$$\upsilon_n^2=\sigma^2+\frac{n\delta^2}{\tau}$$

$$r_n=r-\lambda k+\frac{n\gamma}{\tau} \qquad [6]$$

es decir, $\upsilon_n^2\ y\ r_n$ son las tasas de varianza y de interés medias por unidad de tiempo, cuando suceden exactamente n saltos de Poisson durante la vida de la opción.

Para hacer uso de esta fórmula analítica se hace preciso, por tanto, demostrar si con la serie de datos de nuestra muestra se cumple el supuesto de normalidad para la distribución de los saltos, medidos en términos de rentabilidad.

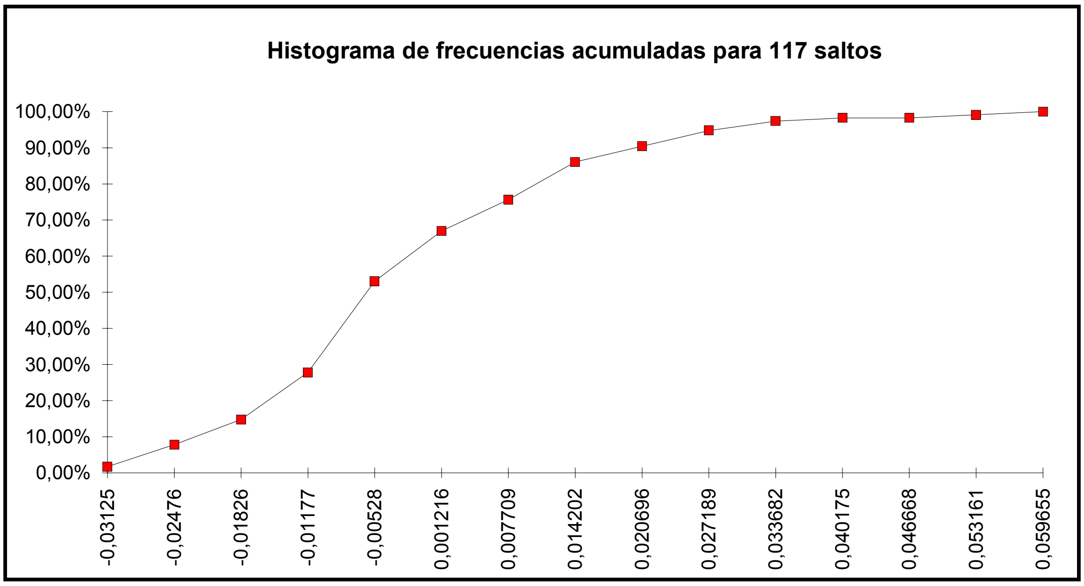
Para demostrar la normalidad en la serie de los saltos, hemos extraído de la muestra de la serie de rentabilidades de las acciones TEFA aquellos valores que tenían la consideración de salto diversificable, que en base a lo comentado con anterioridad, se corresponden con los valores de la serie Rent. TEFA- Rent. IGBM que sobresalen las diferentes bandas que hemos considerado en el análisis de sensibilidad. Según las bandas utilizadas, se detectan un número de saltos, valores fuera de la banda, diferente.

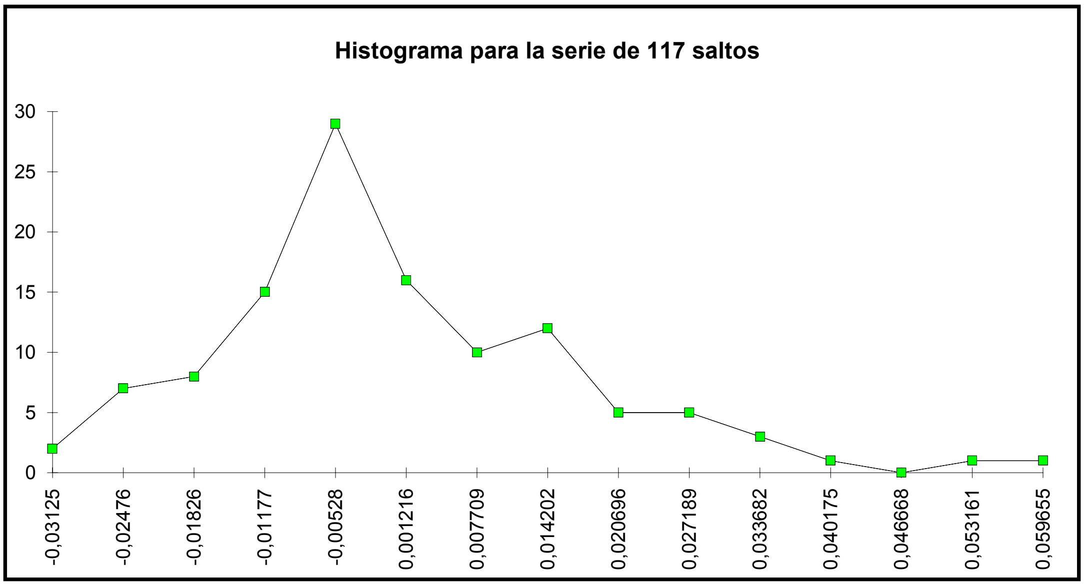
Para cada banda, y con la serie de saltos que genera, procedimos a calcular los estadísticos descriptivos más significativos, como la media, desviación, simetría y

[15] Log (1+k)= Log (1+Y-1)=LogY.

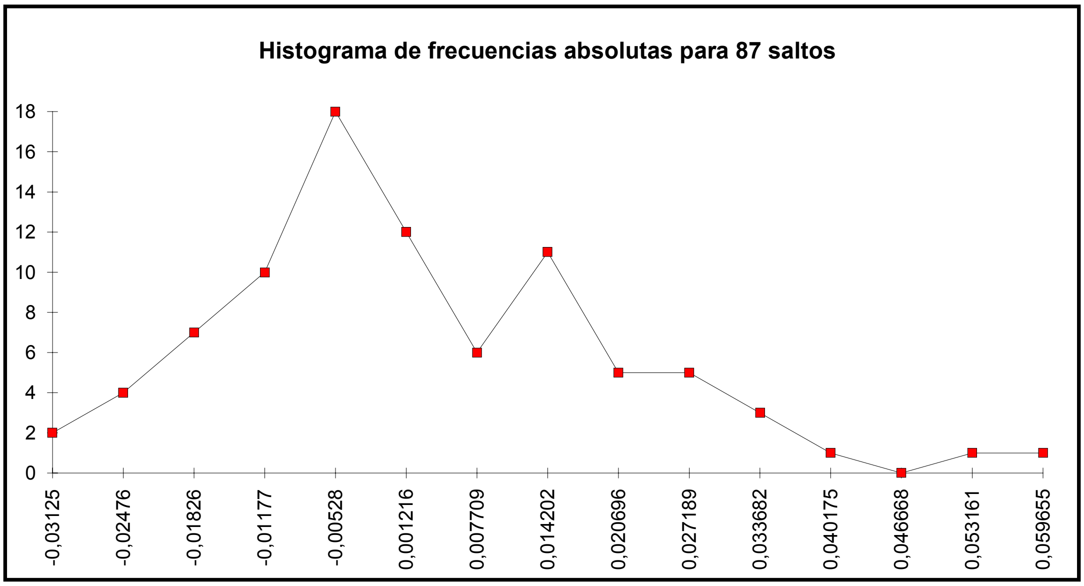
curtosis (Tabla 7). Aún más, obtuvimos el histograma, tanto de frecuencias absolutas como acumuladas, que, para una distribución normal debe presentar la forma campaniforme, cuando utilizamos frecuencias absolutas, y forma de curva logística, cuando utilizamos frecuencias acumuladas. Estos histogramas se obtuvieron igualmente para las diferentes bandas, los cuales presentamos a continuación.

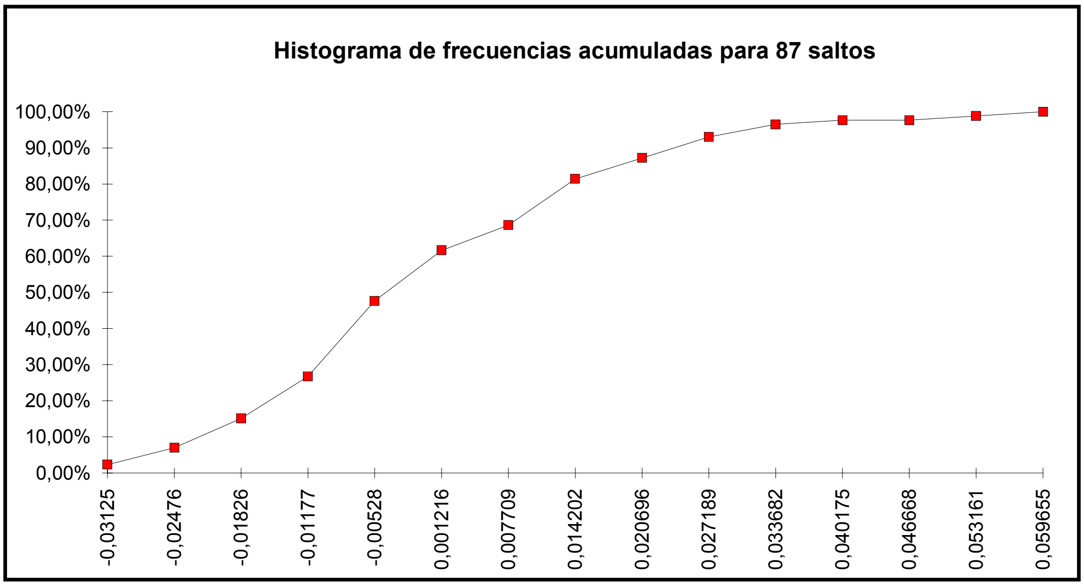
BANDA $[\mu \pm 0,005]$



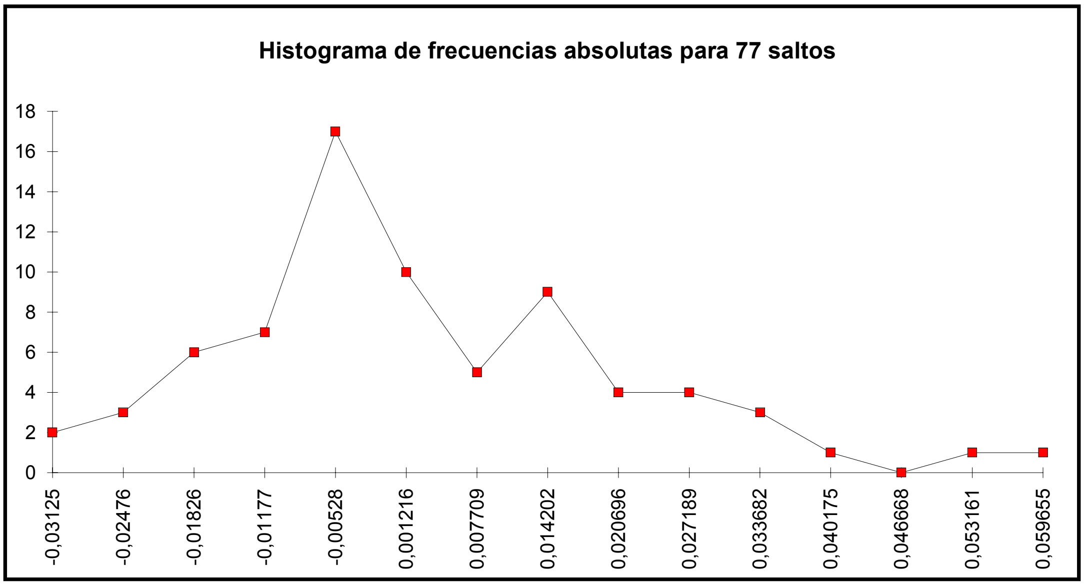


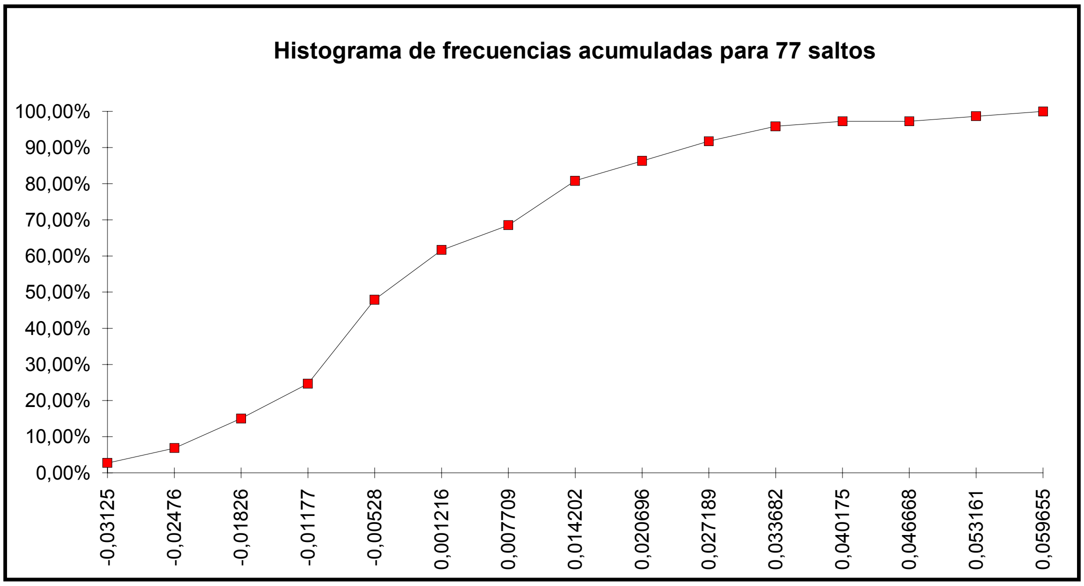
BANDA $[\mu \pm 0,00625]$



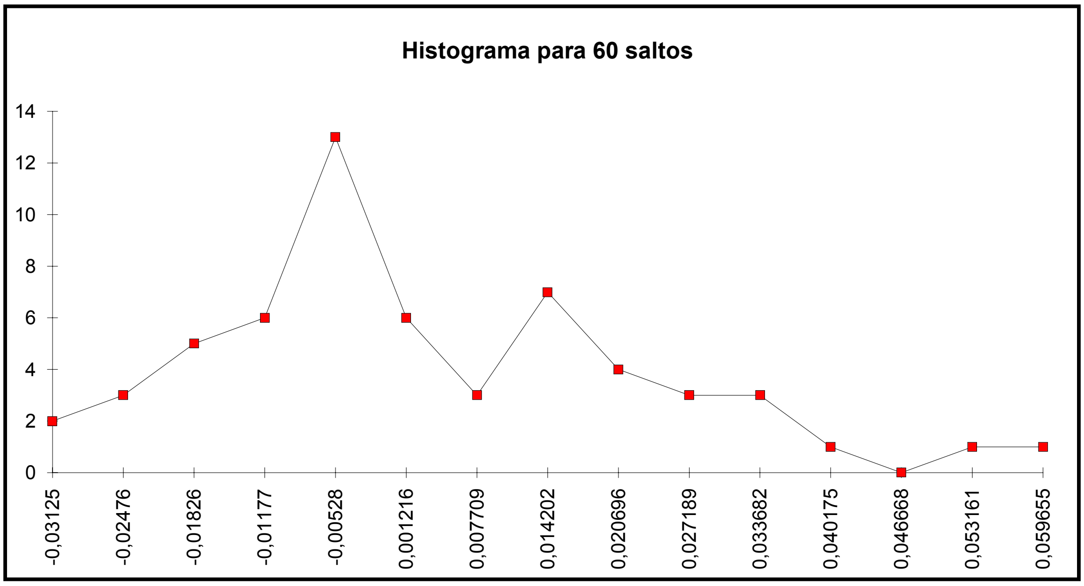


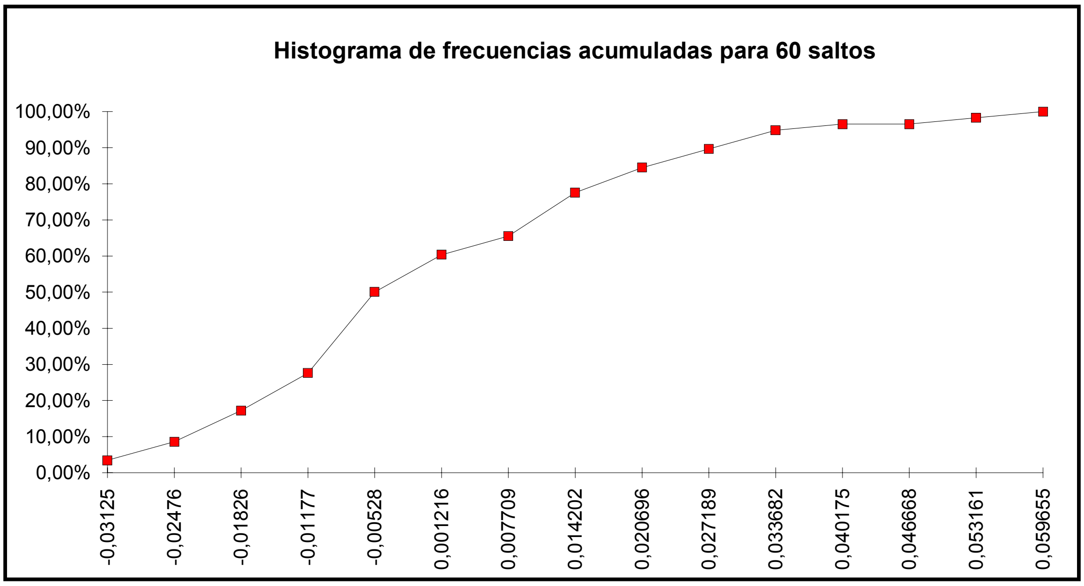
BANDA $[\mu \pm 0,0075]$



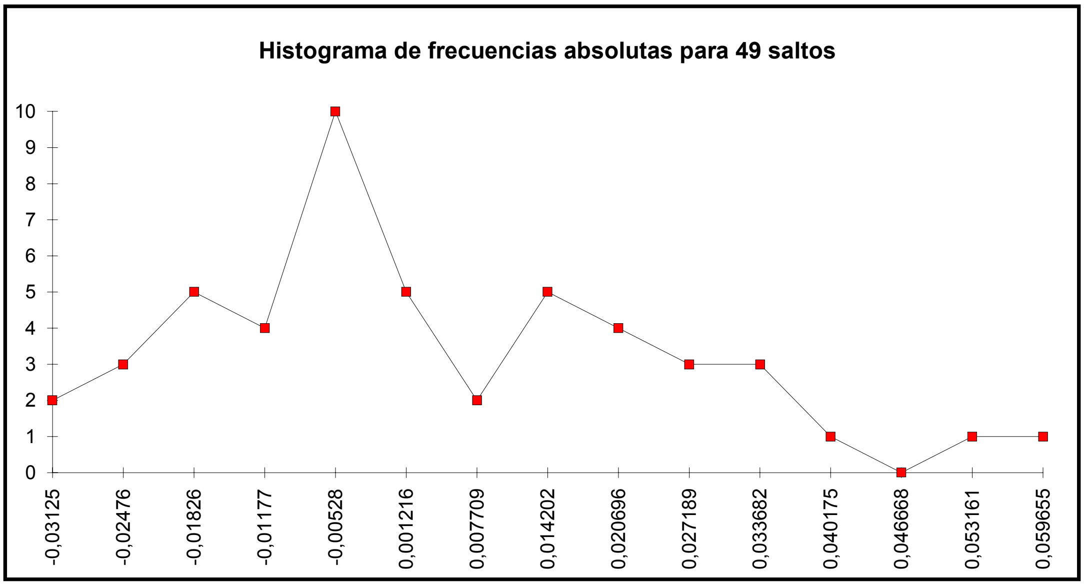


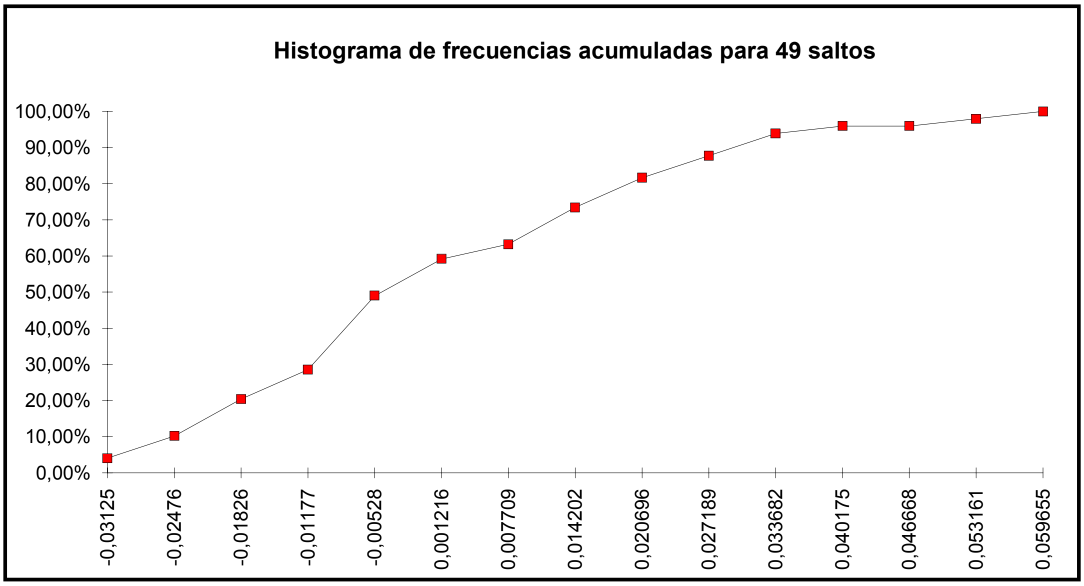
BANDA [$\mu \pm \sigma$]



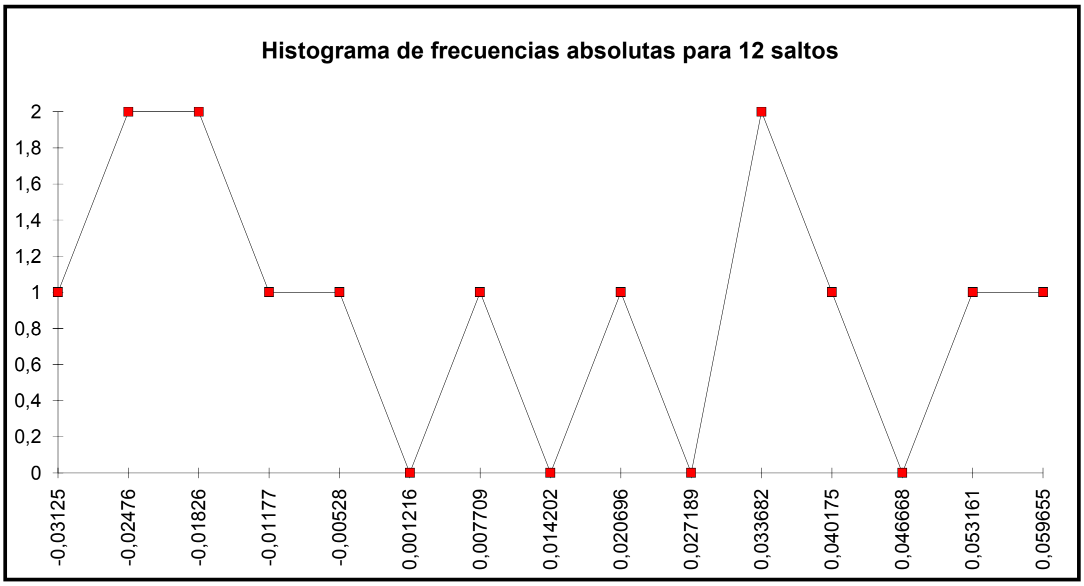


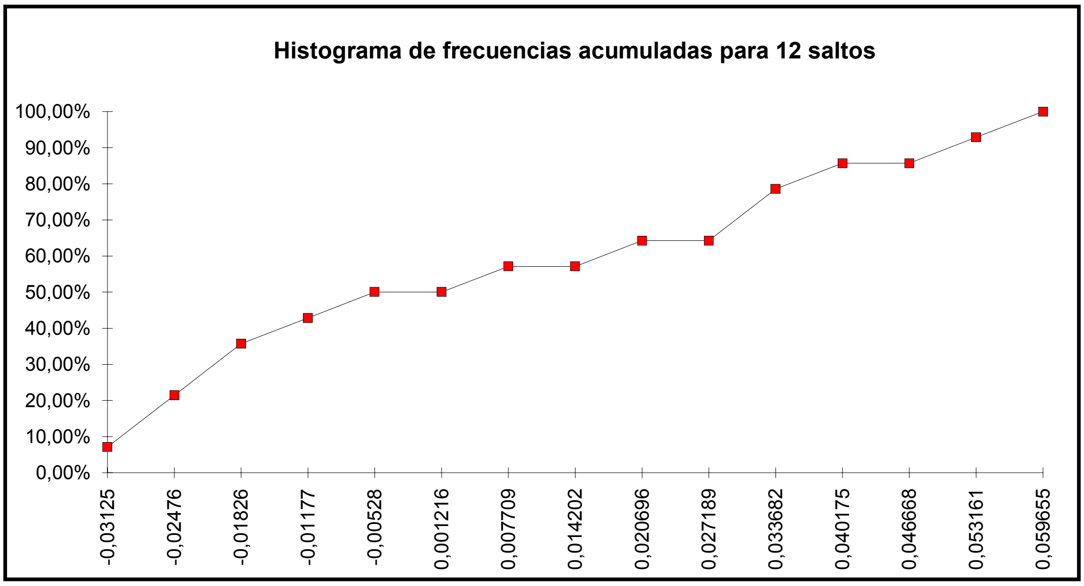
BANDA $[\mu \pm 0,01]$





BANDA $[\mu \pm 2\sigma]$





El análisis de los histogramas muestra en, prácticamente todas las muestras de "saltos" consideradas, la forma campaniforme en el histograma de frecuencias absolutas, así como la forma de curva logística (pendiente creciente y luego decreciente) del histograma utilizando frecuencias acumuladas, ambos gráficos típicos de la distribución normal. Para la muestra de 12 saltos, y en el histograma de frecuencias absolutas no parece detectarse esa forma de campana de Gauss, debido a que el número de observaciones es insuficiente para un análisis de este tipo adecuado.

TABLA 7

BANDAS	Nº de Saltos	Media	Desv. Típ.	Simetría	Curtosis
$\mu \pm 2\sigma$	12	0,015	0,033	0,143	-1,682
$\mu \pm 0{,}01$	49	0,007	0,022	0,549	-0.103
$\mu \pm \sigma$	60	0,005	0,020	0,659	0,244
$\mu \pm 0{,}0075$	77	0,005	0,019	0,696	0,655
$\mu \pm 0{,}00625$	87	0,005	0,018	0,659	0,551
$\mu \pm 0{,}005$	117	0,003	0,017	0,846	1,233

Los valores de μ y σ que figuran en las bandas se corresponden a la media y a la desviación típica de la serie de Rent. TEFA-Rent. IGBM.

Además, se ha procedido a verificar si la media de los saltos habidos en 1993 en las rentabilidades diarias de Telefónica no es significativamente distinta de cero (esto es, si k=$\zeta[\mathrm{Y}-1]=0$), en cuyo caso, $\gamma=0, \lambda'=\lambda \; y \; r_n = \mathrm{r}$.

De la observación de la Tabla anterior se observa claramente que la media, para todas las muestras de saltos, es prácticamente nula, y se aproxima a cero a medida que el número de saltos aumenta, es decir, con bandas más estrechas. De igual manera, la desviación típica parece reducirse con un mayor número de saltos.

Este valor medio de los saltos en torno a cero permite concluir que el tipo de interés a utilizar en la contrastación del modelo de Merton es la tasa sin riesgo, r, igual que en en el modelo de B-S, ya que los demás términos de la expresión de r_n desaparecen una vez que k=0.

Este resultado confirma el supuesto que hace Beckers (1981) y que se observa en esta muestra, de considerar que la media de los saltos debe ser cero (k=0), en lugar de que la media de las tasas de variación de los precios del subyacente sea cero, α=0, como hacía Press (1967).

Los valores de la simetría, aunque positivos, muestran que las distribuciones de las diferentes series son asimétricas a la derecha, aunque ligeramente, ya que dichos valores son muy próximos a cero, valor que se corresponde al de una distribución normal. La única excepción se presenta con la muestra de 117 saltos, en que el valor de la simetría (0,846) muestra que esta distribución es claramente asimétrica a la derecha, por lo que no se podrá desarrollar el análisis posterior de la curtosis, sólo válido para series simétricas.

El análisis de los valores de la curtosis también confirma la normalidad de las series de los saltos, ya que sus valores, aunque positivos (correspondiente a series leptocúrticas) son muy próximos a cero, excepto para la muestra de 12 saltos, en la que se obtiene un valor negativo de la curtosis. Este resultado puede ser debido a la escasez de observaciones en esta muestra.

Por tanto, podemos concluir que, efectivamente, las series de saltos y para las diferentes bandas, se distribuyen como variables aleatorias normales, supuesto que se exigía para la contrastación de la fórmula analítica que deriva Merton (1976a).

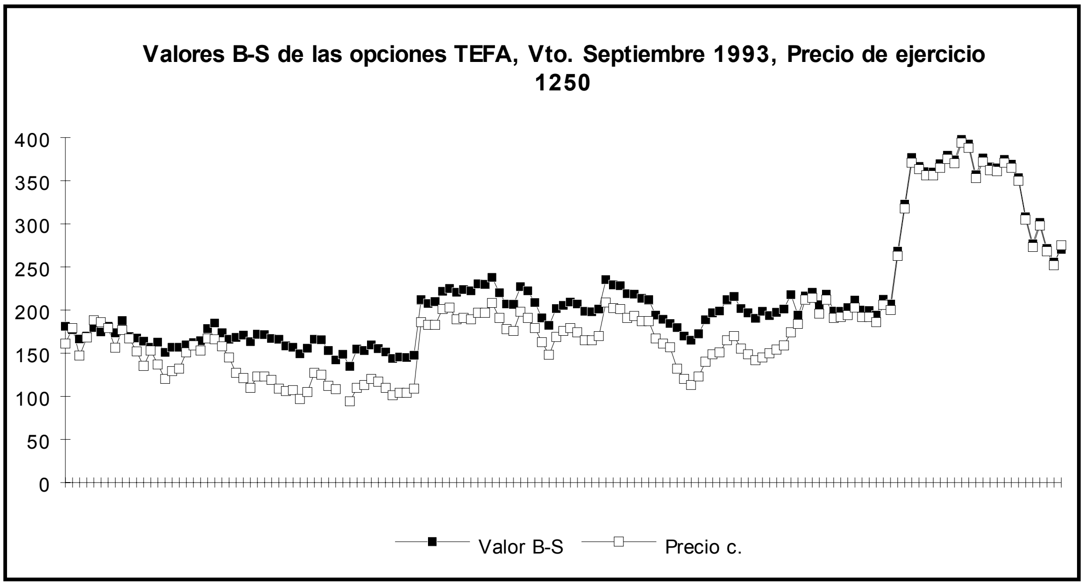
Finalmente, para el cálculo del sumatorio que describe la valoración de Merton, se ha extendido el índice de sumación hasta n=10 ya que, para enteros superiores, el factor $\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}$ es del orden de 10^{-14}, por lo que la incidencia sobre el valor de la opción, F(S,τ), será despreciable.

4.3. RESULTADOS.

Partiendo de la identificación de los parámetros (tanto los observados como los estimados) realizada en el epígrafe anterior se ha procedido a valorar, con el modelo B-S (1973) y el modelo de Merton (1976a), opciones call sobre Telefónica negociadas en MEFFSA, Renta Variable, con vencimiento en septiembre de 1993 y precios de ejercicio 1250 y 1450, con vencimiento en diciembre del mismo año y precios de ejercicio 1400 y 1600 y, por último, con vencimiento en marzo de 1994 y precios de ejercicio 1700 y 1900, en base a los criterios que se comentaron con anterioridad.

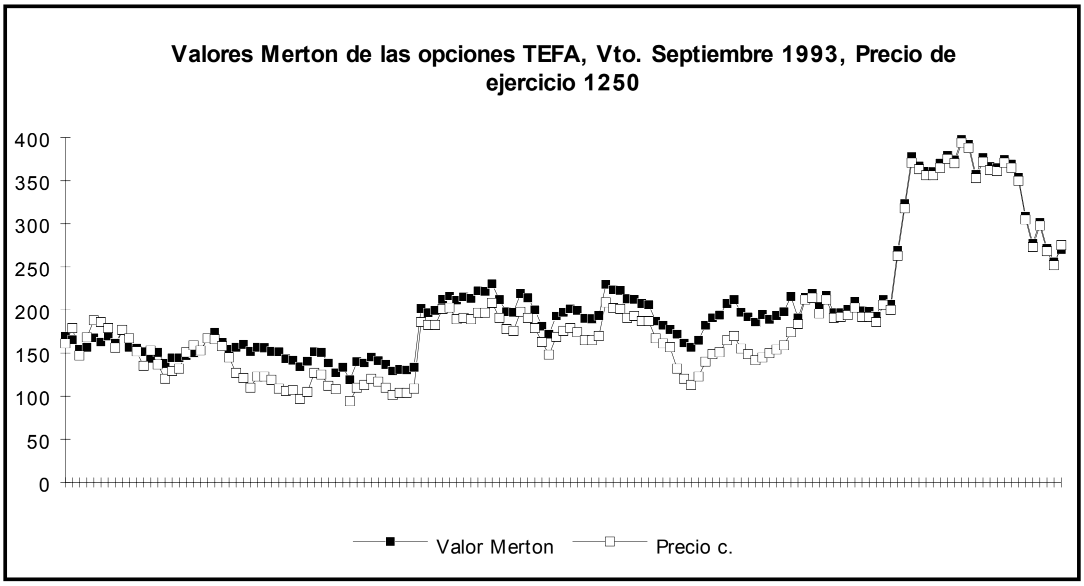
Para la primera muestra de opciones con vencimiento en septiembre y precio de ejercicio 1250, los resultados de la contrastación del modelo de Black-Scholes (B-S) y de Merton, con los datos reales de dichos instrumentos financieros figuran en los gráficos 6 y 7. Adicionalmente, se presentan los gráficos 8 y 9, correspondientes a los errores B-S y Merton relativos, es decir, respecto al valor observado de dichas opciones.

GRÁFICO 6



De la observación del Gráfico 6, podemos destacar la sobrevaloración del modelo B-S respecto a los precios de compra, detectándose de forma adicional que esta sobrevaloración se reduce y prácticamente coinciden los valores B-S con los precios observados, cuando se aproxima el tiempo hasta el vencimiento de la opción.

GRÁFICO 7



Respecto a los valores obtenidos con el modelo de Merton también parece detectarse una sobrevaloración respecto a los valores observados (Gráfico 7), que de igual manera que en el modelo B-S, se reduce cuando se acerca el vencimiento. Sin embargo, para los primeros valores de la muestra (más lejanas al vencimiento) el modelo de Merton genera valores ligeramente inferiores a los precios de compra.

Se hará necesario el estudio de los errores respecto a los valores observados en ambos modelos para analizar qué modelo predice mejor y en qué intervalos del tiempo hasta el vencimiento. En nuestro análisis, entendemos como errores relativos (ER) a la diferencia entre el valor que genera el modelo y el valor robservado respecto a dicho valor, es decir:

$$ER_{BS} \quad \frac{\text{Valor BS - Valor observado}}{\text{Valor observado}}$$

$$ER_M = \frac{\text{Valor Merton - Valor observado}}{\text{Valor observado}}$$

Asimismo, en la Tabla 8 se exponen los estadísticos más significativos del error relativo de esta serie respecto a los precios de compra en ambos modelos, B-S y Merton.

TABLA 8

Vto. Septiembre, Precio de ejercicio 1250

Estadísticos para ER B-S		Estadísticos para ER Merton	
Media	0,17366	Media	0,12088
Mediana	0,14686	Mediana	0,10777
Desv. Stand.	0,15013	Desv. Stand.	0,12106
Varianza	0,02253	Varianza	0,01465
Curtosis	-0,75129	Curtosis	-0,70875
Asimetría	0,57827	Asimetría	0,46692
Rango	0,6020	Rango	0,51340
Mínimo	-0,06139	Mínimo	-0,12607
Máximo	0,54061	Máximo	0,38732
Suma	24,3135	Suma	16,9237
Nº Obs.	140	Nº Obs.	140

En los Gráficos 8 y 9 se representan los errores relativos del modelo B-S y el modelo de Merton por separado, mientras que en el Gráfico 10 se superponen los errores relativos que se producen como resultado de la contrastación de ambos modelos de valoración, de cara a su contrastación visual.

GRÁFICO 8

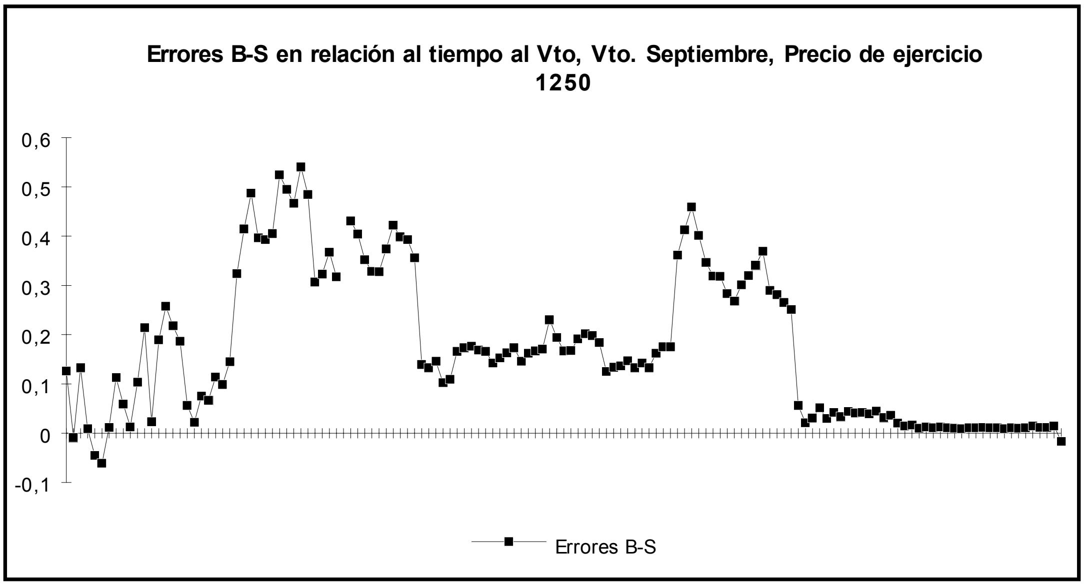


GRÁFICO 9

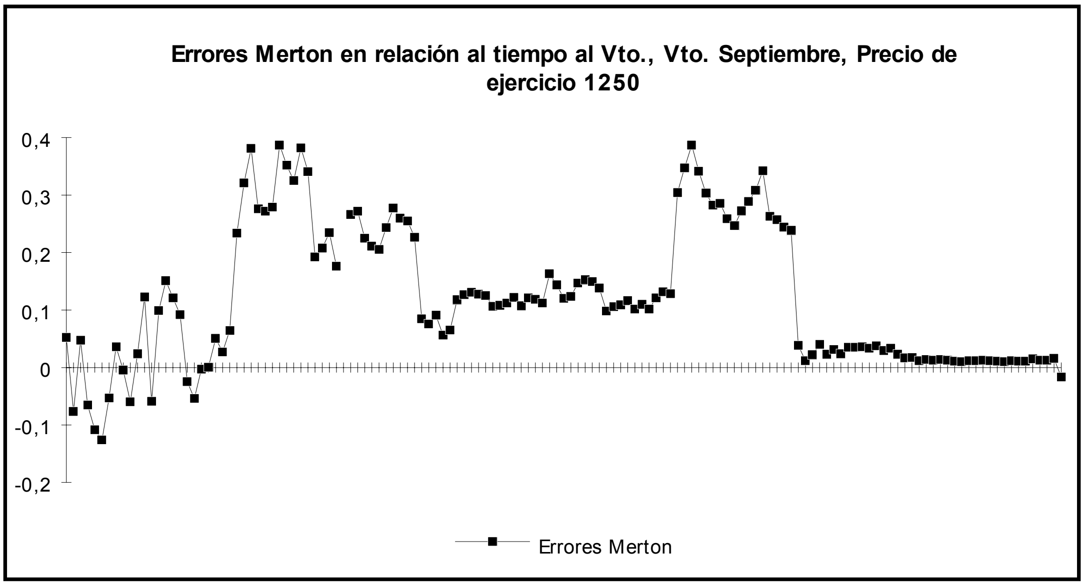
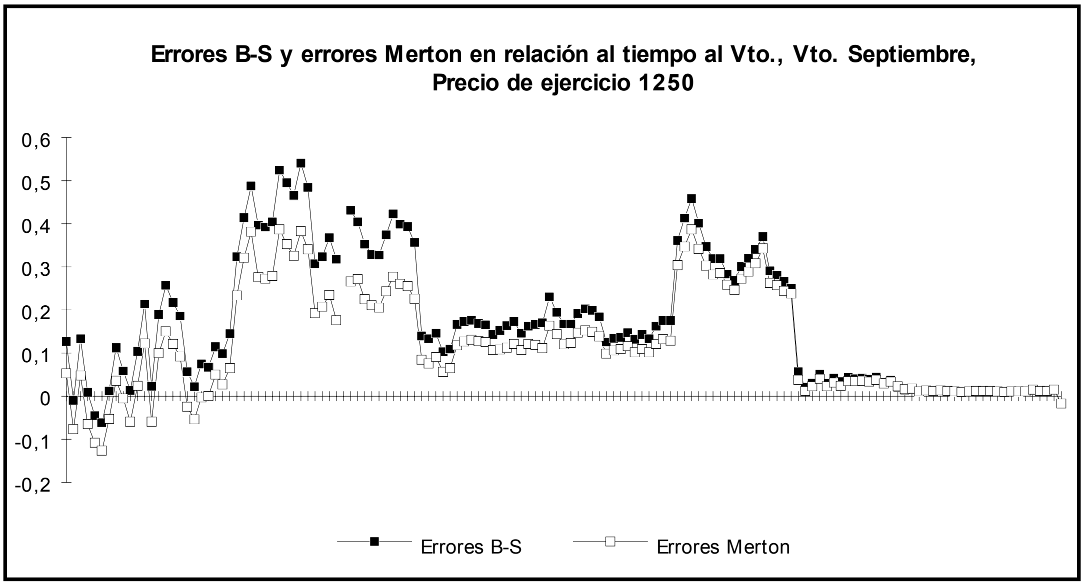


GRÁFICO 10



Del análisis de los errores relativos B-S y Merton, podemos concluir que efectivamente, aunque la dinámica de los mismos para ambos modelos es similar, el modelo de Merton produce errores de predicción inferiores al de B-S. Este resultado todavía se puede observar más claramente en el Gráfico 10, en el que los errores se superponen.

Además de analizar qué modelo, si el de B-S o el de Merton, predice mejor y por tanto, comete menos errores a la hora de estimar el valor de las opciones, también analizamos tres tipos diferentes de sesgos o tendencias sistemáticas que la mayoría de la literatura financiera ha detectado con el tratamiento empírico de los datos reales, que son:

- Sesgo de vencimiento: En este caso, se trata de detectar si hay alguna relación sistemática entre la valoración que da el modelo, sea el de B-S o el de Merton, y el tiempo hasta el vencimiento de las opciones.

- Sesgo de paridad: Se analiza si el hecho de que la opción esté con o sin dinero (in the money , out of the money) influye en la valoración que hace el modelo.

- Sesgo de precio de ejercicio: Hasta qué punto, una modificación del precio de ejercicio para un mismo vencimiento afecta a la valoración y modifica los resultados que se obtuvieron en relación a los dos sesgos analizados anteriormente.

En cuanto al sesgo al vencimiento se puede observar en los Gráficos 8, 9 y 10 que ambos modelos predicen mejor cuanto más próxima está la opción al vencimiento, resultado coincidente con lo observado por MacBeth y Merville (1979) y Guletkin, Rogalsky y Tinic (1982). Los errores relativos de predicción parecen tener un comportamiento sistemático y definido respecto al tiempo hasta el vencimiento de la opción, y adicionalmente parece detectarse este sesgo en ambos modelos.

Este resultado, no obstante, es contrario al de Black y Scholes (1972), quien obtiene que el modelo B-S infravalora opciones próximas a su vencimiento y al de Whaley (1981) que indica que la cuantía del error de predicción del modelo B-S decrece a medida que aumenta el período de tiempo hasta el vencimiento. Rubinstein (1985) explica este conflicto en los resultados imputándolo a las características específicas de las muestras analizadas. En particular, Black y Scholes utilizan datos OTC, por lo que parece que los precios de mercado debieron contener alguna prima por riesgo de incumplimiento (default risk) superior a la posible prima equivalente descontada en mercados organizados, con Cámara de Compensación.

Para el estudio del sesgo de paridad, empezaremos definiendo más exhaustivamente este concepto. Se entiende por "paridad" el cociente entre el precio del stock y el precio de ejercicio (S/E), de modo que valores de este cociente significativamente superiores a la unidad indicarán que la opción está "in-the-money", valores significativamente menores indicarán que la opción está "out-of-the-money" y si el cociente arroja un valor próximo a la unidad indicará que la opción está "at-the-money" [16].

[16] Otros autores,[Ball y Torous (1985)] utilizan S / Er^{-t}, esto es, actualizan el precio de ejercicio, para hacer que ambas cantidades, numerador y denominador, sean financieramente comparables. Los resultados, utilizando este concepto, no difieren sustancialmente con los que aquí se presentan.

Este concepto es similar al de "valor intrínseco", definido como la diferencia entre el precio del stock y el precio de la opción para opciones call y cuyo límite por debajo se encuentro en cero, cuando no hay valor intrínseco, porque el precio de la acción es igual o menor al precio de ejercicio.

En relación a la paridad ("moneyness") se observa en el Gráfico 11 claramente que el modelo B-S mejora en sus predicciones cuanto mayor es el valor intrínseco, aunque para toda la muestra la opción estuvo siempre "en dinero". De igual manera, el Gráfico 12 hace el mismo análisis para el modelo de Merton. No obstante, con el modelo de Merton parecen reducirse los errores relativos, también en relación a la paridad.

GRÁFICO 11

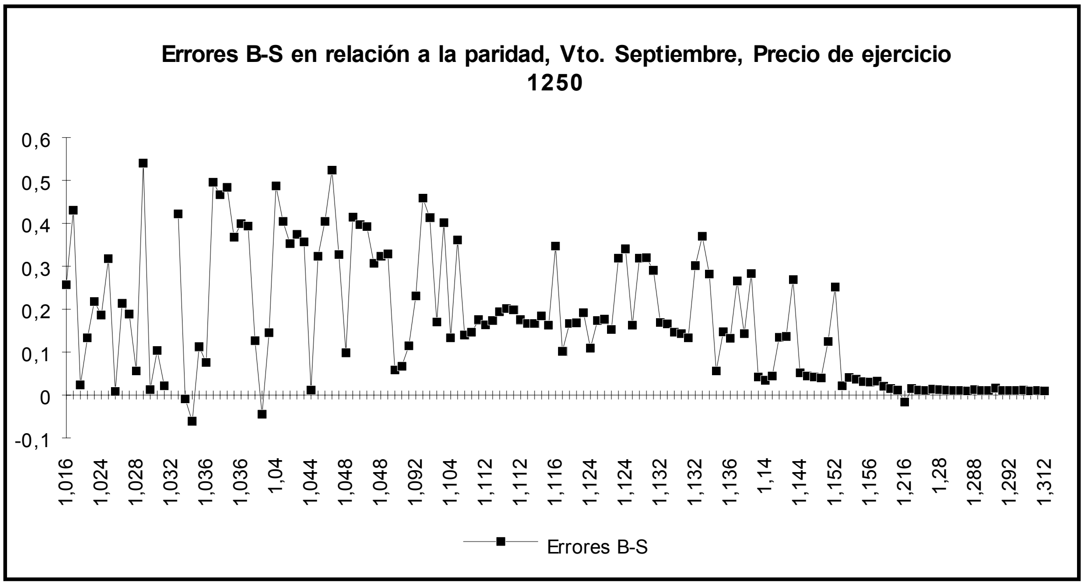
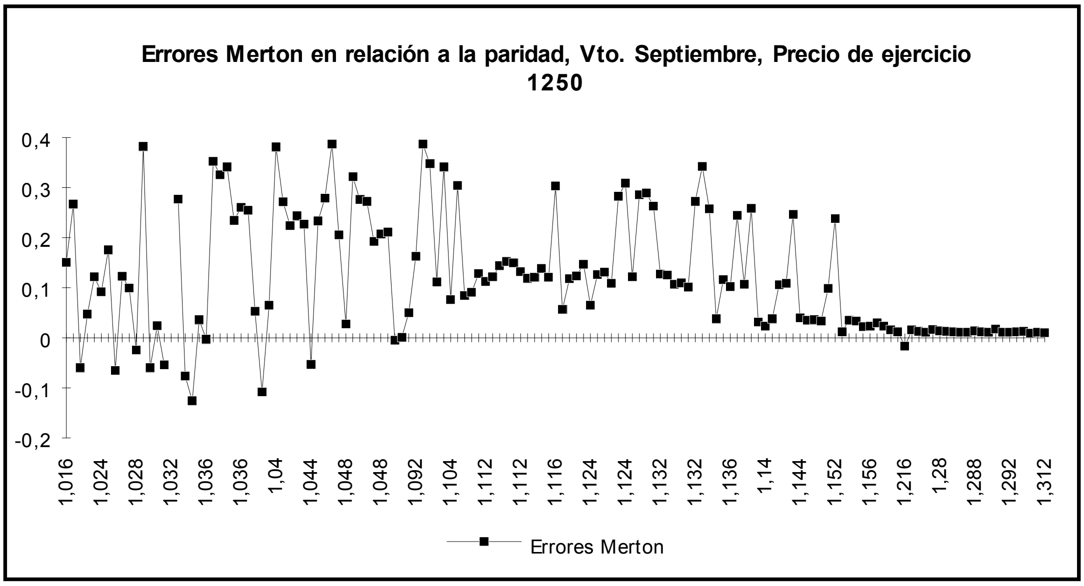


GRÁFICO 12



Este comportamiento parece indicarnos que existe "sesgo de paridad", ya que hay una tendencia definida de los errores del modelo según la opción esté en o sin dinero. Esta tendencia ha sido estudiada en numerosos trabajos, especialmente, Black (1976), Merton (1976b), Macbeth y Merville (1979), (1980), Whaley (1981), Guletkin, Rogalsky y Tinic (1982) y Rubinstein (1985).

Nuestros resultados están parcialmente de acuerdo con los de Black (1976) cuando contrasta el modelo de B-S. Como en nuestro análisis, Black observa una sobrevaloración del modelo B-S respecto a los precios de mercado de las opciones cuando están "muy en dinero" (deep in the money), aunque su observación de que el modelo infravalora cuando la opción está "muy sin dinero" (deep out of the money), no es detectable en nuestro caso.

Por el contrario, Merton (1976b), concluye que los precios B-S se sitúan por debajo de los precios reales para opciones "muy en dinero", como también para opciones "muy sin dinero". Para MacBeth y Merville (1979), el modelo B-S predice precios que, en términos medios, son inferiores a los precios de mercado para opciones con valor intrínseco positivo y mayores para opciones "out of the money". Por contra, Guletkin, Rogalsky y Tinic (1982) detectan sobrevaloración de los precios de las opciones "in the money" e infravaloración de las "out of the money", resultados coincidentes con los de Mañas (1988) para opciones sobre futuros en divisas. Finalmente, Whaley (1981) no encuentra relación sistemática entre el error de predicción y la magnitud del exceso o defecto sobre la paridad.

El mismo análisis que realizamos para la muestra de opciones sobre acciones de Telefónica con vencimiento en septiembre de 1993 para el precio de ejercicio de 1250, lo realizamos para un precio de ejercicio de 1450 y el mismo vencimiento. El objetivo de este segundo análisis es comprobar si la modificación del precio de ejercicio puede variar los resultados obtenidos hasta ahora.

Dado que había cierto nivel de negociación de estos contratos al final del período muestral, disponíamos sólo en algunos días de los precios últimos, que también incluímos en la contrastación.

GRÁFICO 13

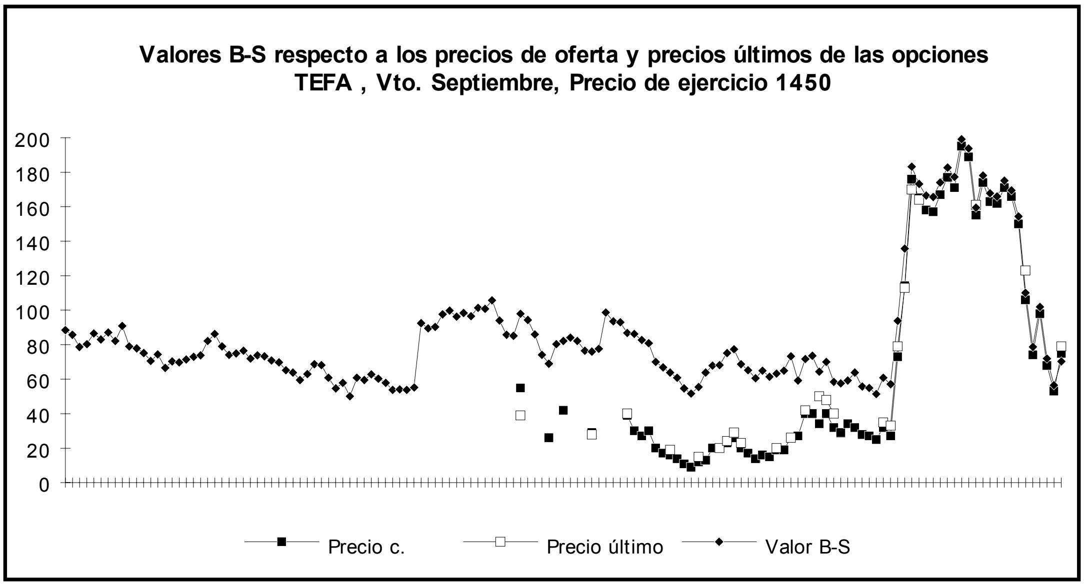
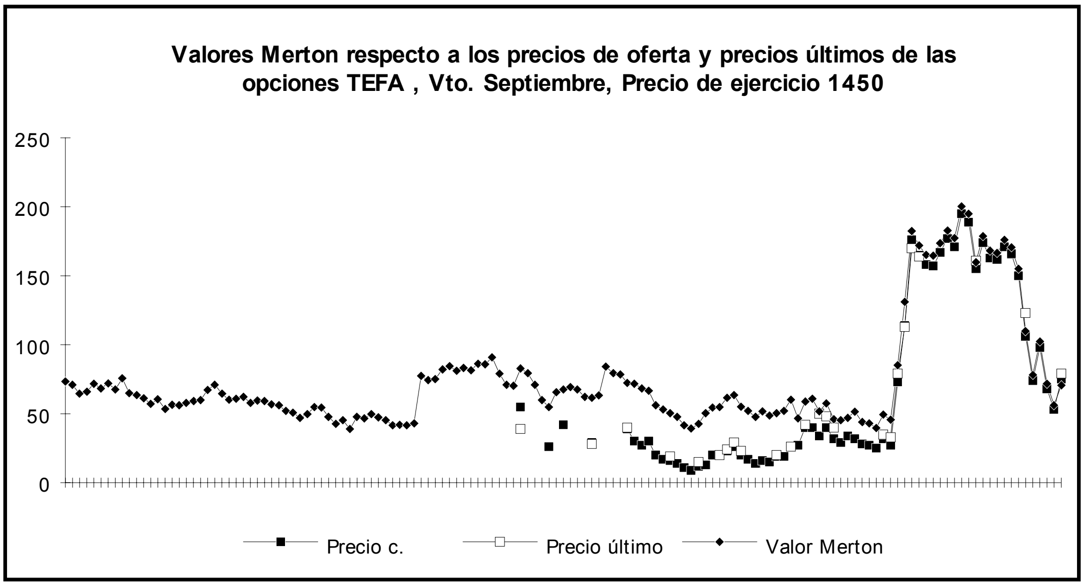


GRÁFICO 14



De la observación de los Gráficos 13 y 14 concluímos que ambos modelos parecen generar valores por encima de los valores reales, incluso respecto a los precios últimos, sobrevaloración que se reduce a medida que se acerca el vencimiento de la opción.

El estudio de los estadísticos de la serie de errores, Tabla 9, así como la observación visual de los errores, Gráficos 15 y 16, de igual manera, nos permite afirmar que el modelo de Merton mejora en la predicción de los precios de compra (precios c.) respecto al de B-S, tanto desde el análisis de la media, como de la varianza, mínimo, máximo y la suma total de los errores.

TABLA 9

Vto. Septiembre, Precio de ejercicio 1450

Estadísticos para ER B-S		Estadísticos para ER Merton	
Media	1,28149	Media	0,89611
Mediana	0,97215	Mediana	0,56716
Desv. Stand.	1,26580	Desv. Stand.	0,91635
Varianza	1,60226	Varianza	0,83971
Curtosis	-0,37637	Curtosis	-0,43284
Asimetría	0,77663	Asimetría	0,82927
Rango	4,81644	Rango	3,42747
Mínimo	-0,06091	Mínimo	-0,05880
Máximo	4,75553	Máximo	3,36867
Suma	84,5788	Suma	59,1434
Nº Obs.	66	Nº Obs.	66

No obstante, respecto a la muestra anterior del mismo vencimiento y para un precio de ejercicio de 1250, se observan valores superiores de la media, varianza así como de la suma de los errores, no sólo en el modelo de Merton, sino también con el modelo de B-S, de lo que parece detectarse un empeoramiento de ambos modelos en la predición de los valores observados de estas opciones. La modificación del precio de ejercicio, de 1250 a 1450, ha resultado en un aumento de los errores de predicción de ambos modelos, es decir, un peor ajuste de los modelos a los datos reales. Parece advertirse la presencia del denominado "sesgo de precio de ejercicio" que intentaremos comprobar en las demás muestras.

GRÁFICO 15

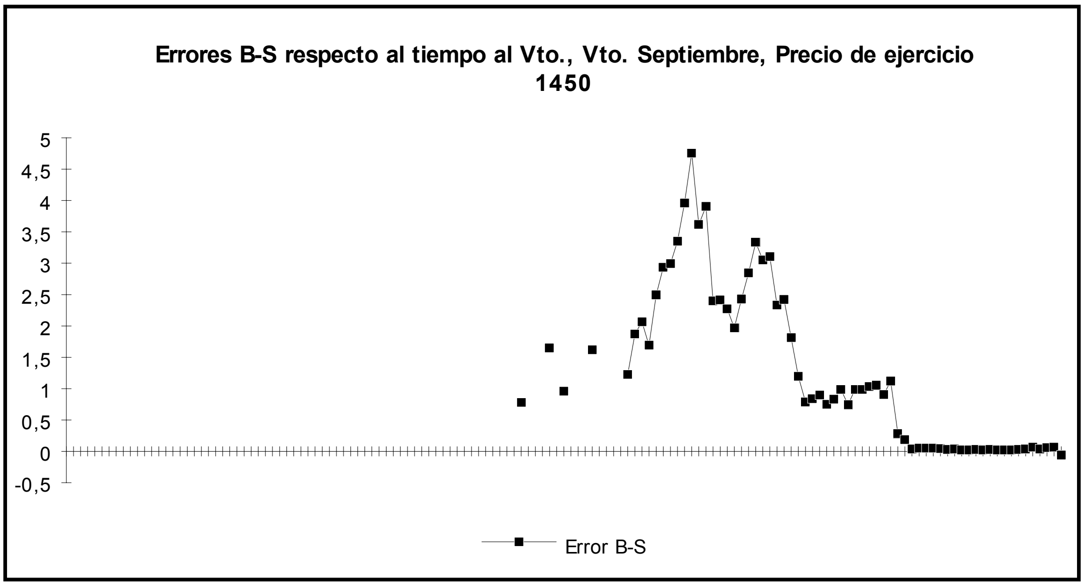
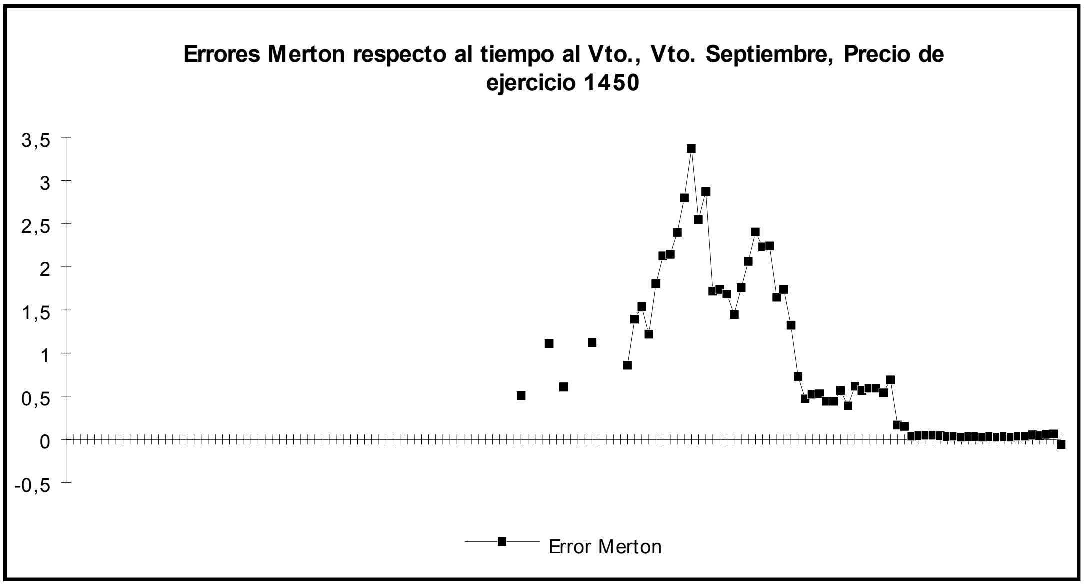
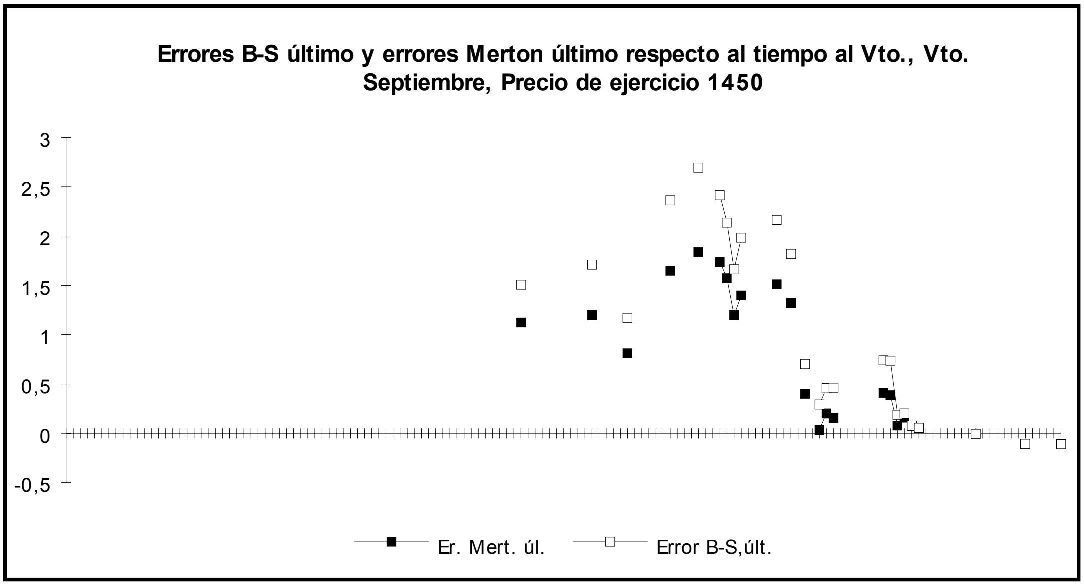


GRÁFICO 16



Los Gráficos 15 y 16 son concluyentes y reflejan que los errores relativos B-S y Merton, calculados respecto a los precios de compra, se reducen a medida que la opción se acerca al vencimiento. A continuación, también añadimos el Gráfico 17, en el que se superponen los errores de ambos modelos calculados respecto a los precios últimos, (Errores B-S último y Errores Merton último) y en el que se puede apreciar claramente que los errores Merton último, al igual que los errores Merton calculados con los precios de oferta, se sitúan para toda la muestra por debajo de los errores B-S.

GRÁFICO 17



Del análisis de los errores B-S y Merton, tanto respecto a los precios de compra como los precios últimos, observamos una sobrevaloración importante y perfectamente visible que se reduce a medida que se acerca el vencimiento de la opción, por lo que, la modificación del precio de ejercicio no ha variado el sentido del "sesgo de vencimiento" que ya aparecía en la muestra de precio de ejercicio de 1250.

Además, se aprecia una mejora significativa del modelo de Merton, respecto al B-S, también desde el análisis de los Errores B-S y Merton últimos, que toman como valor medio en B-S, 1,05415, mientras que en Merton es de 0,71166, valores ligeramente inferiores a los correspondientes a los Errores B-S y Merton, cuando comparamos con los precios de compra (Tabla 9). Parece que ambos modelos predicen mejor los precios últimos, que resultan de la negociación, que los precios de compra cotizados por los operadores.

De igual manera, procedemos a analizar la posibilidad de que exista algún tipo de relación entre el nivel de predicción o estimación de ambos modelos y la paridad. En este caso analizamos conjuntamente los errores B-S y B-S último en el Gráfico 18 y los errores Merton y Merton último en el Gráfico 19.

GRÁFICO 18

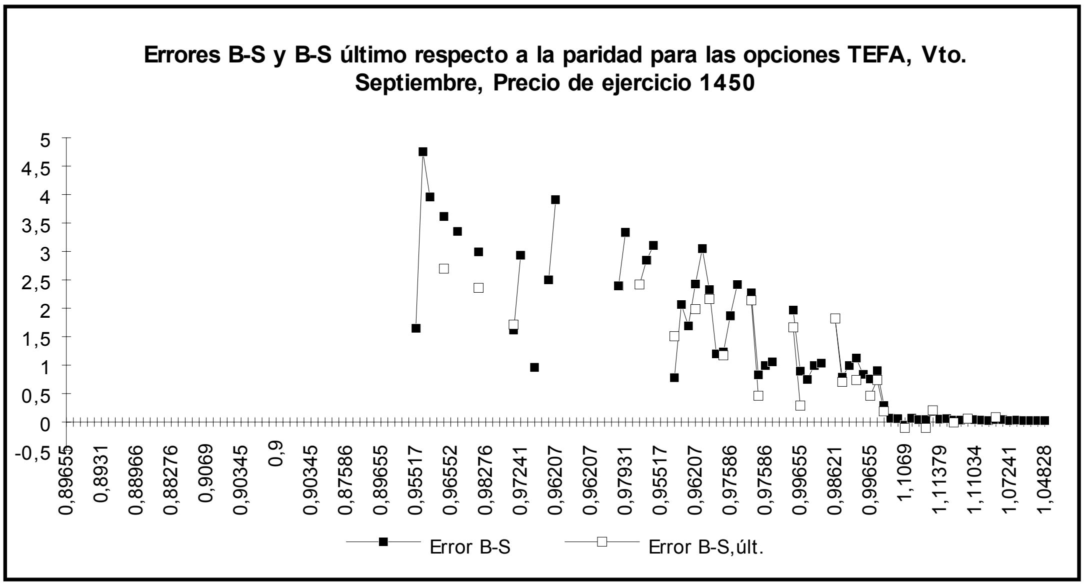
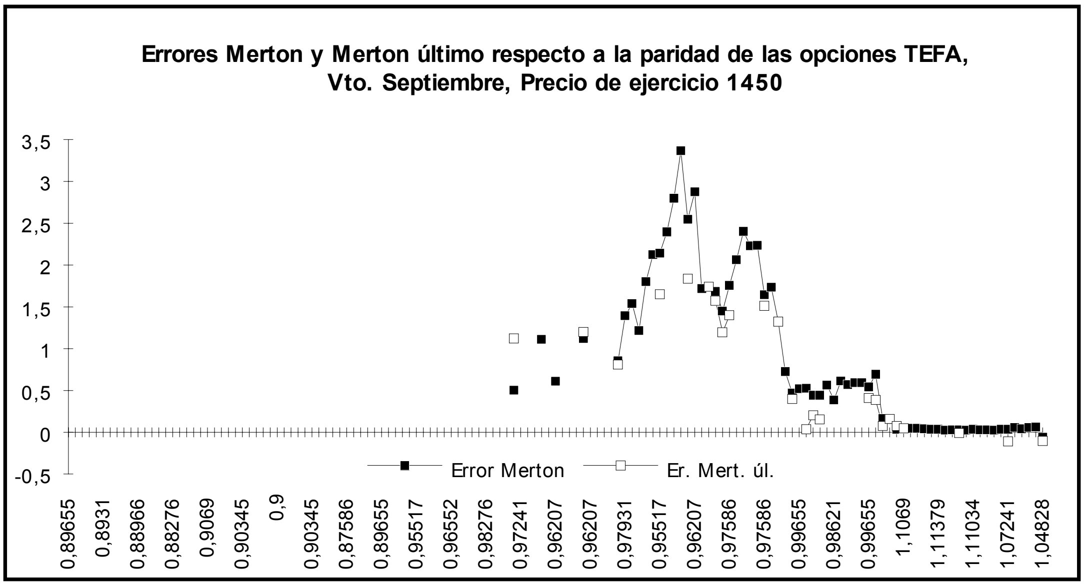


GRÁFICO 19



Del estudio de los Gráficos 18 y 19 se confirma, nuevamente, la existencia de ese sesgo de paridad que ya se detectaba para la muestra anterior, con precio de ejercicio 1250, aunque parcialmente, pues no había opciones sin dinero. En esta muestra, sin embargo, hay opciones sin dinero (out of the money), detectándose que para estas opciones la sobrevaloración de ambos modelos respecto a los valores reales es importante, pero que se va reduciendo a medida que el precio de la acción se incrementa y, por tanto, su valor intrínseco también. Finalmente, cuando la opción está en dinero, la sobrevaloracion de ambos modelos desaparece y prácticamente se ajustan a los datos de mercado. El mismo análisis con los Errores últimos, tanto de B-S como de Merton, es todavía mejor, acercándose sus valores aún más a cero. En la tabla 10 siguiente se presenta un resumen de los resultados obtenidos para las dos muestras con vencimiento en Septiembre de 1993.

TABLA 10
VENCIMIENTO EN SEPTIEMBRE DE 1993

		Precio de ejercicio 1250				Precio de ejercicio 1450			
		Lejanas al vto.		Próximas al vto.		Lejanas al vto.		Próximas al vto.	
		EAM	ERM	EAM	ERM	EAM	ERM	EAM	ERM
Out of the money	B-S					45,911	2,9299		
	Merton					32,377	2,082		
At the money	B-S	29,8	0,2254			46,332	2,0416	28,531	0,9364
	Merton	16,41	0,1191			32,88	1,4606	16,52	0,5424
In the money	B-S	31,32	0,2005	20,55	0,1264			6,1594	0,0507
	Merton	20,21	0,1438	17,58	0,1077			5,6956	0,0443

En la Tabla 10, los términos EAM y ERM son el Error Absoluto Medio y Error Relativo Medio respecto a los precios de compra, respectivamente, y para su obtención se ha calculado, simplemente, la media de los errores absolutos [17] y de los errores relativos de la muestra correspondiente.

Para las dos muestras, ambos modelos generan valores por encima de los precios observados, sobrevaloración que podría argumentarse a la utilización de los

[17] El error absoluto es simplemente la diferencia entre el valor de la opción que da el modelo y su valor observado.

precios de compra para la contrastación, precios que están, en la mayoría de los días, por debajo de los precios últimos, efectivamente negociados. No obstante, para la muestra de precio de ejercicio de 1450, en que disponíamos de los precios últimos, también y para ambos modelos se observaba esa "sobrevaloración", aunque y obviamente, ligeramente reducida.

Para las dos muestras de vencimiento septiembre de 1993 podemos concluir que tanto en términos de errores absolutos como relativos, se observa una mejora significativa de predicción del modelo de Merton en relación al modelo de B-S. Esta mejora puede analizarse tanto si están próximas o lejanas al vencimiento, como si están con o sin dinero. La mejora en la predicción del modelo de Merton respecto al de B-S también se advierte tanto si se analiza respecto a los precios de compra, como respecto a los precios últimos.

Obtenidos estos resultados, procedimos a realizar el mismo análisis a la muestra con vencimiento en diciembre de 1993 y para los dos precios de ejercicio 1400 y 1600, donde la muestra de precio de ejercicio 1400 es la que presenta un mayor número de observaciones, mientras que la de 1600 es la que cuenta con el mayor número de precios últimos de entre todos los precios de ejercicio que aparecen para el Vto. diciembre, aunque, sin embargo, son todavía bastante escasos.

Los resultados que obtuvimos de esta contrastación se muestran en los gráficos 20, 21, 22, 23 y 24 para la muestra de precio de ejercicio 1400 y los gráficos 25, 26, 27, 29 y 29 para la muestra de precio de ejercicio 1600.

Se observa del estudio de los Gráficos 20 y 21 una mejora sustancial en la capacidad predictiva de los dos modelos respecto a las muestras estudiadas anteriormente de vencimiento septiembre, ya que, prácticamente, ambos modelos generan valores que se superponen a los valores observados, con la única excepción de aquellas opciones lejanas al vencimiento, donde se observa una sobrevaloración importante de ambos modelos, más aún en el de B-S.

Igualmente con el análisis de la serie de errores para esta serie (Tabla 11) se confirma la mejora en la predicción de ambos modelos respecto al vencimiento de septiembre, obteniéndose como media de estos errores, un valor de 0,07673 en los Errores B-S y un valor de 0,03867 para los Errores Merton, ambos inferiores a los valores medios obtenidos para las muestras anteriores de vencimiento septiembre.

Este resultado puede verse claramente en el Gráfico 22, en el que se estudian los errores relativos de predición de los dos modelos conjuntamente.

GRÁFICO 20

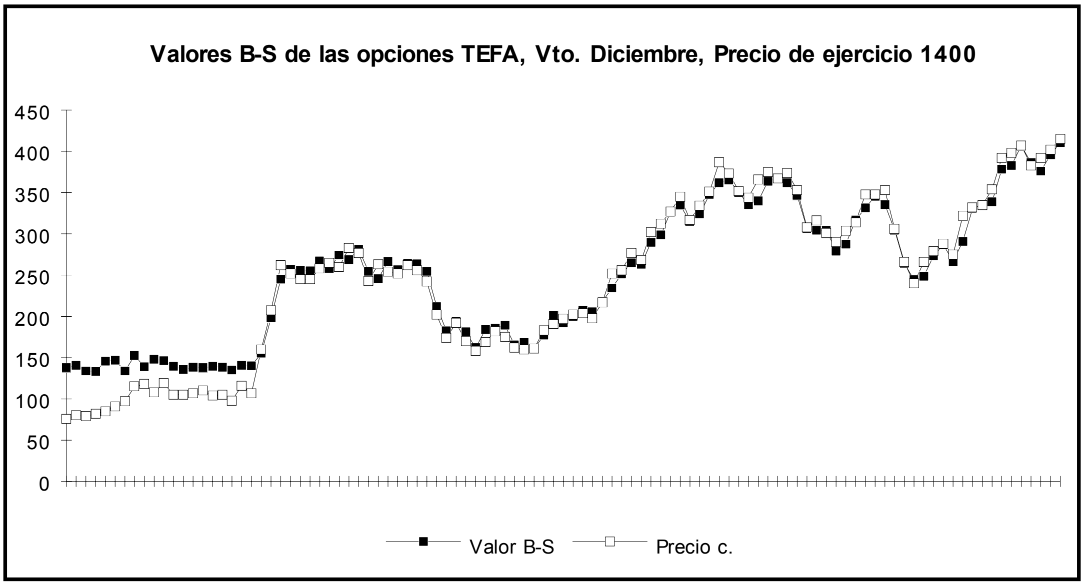


GRÁFICO 21

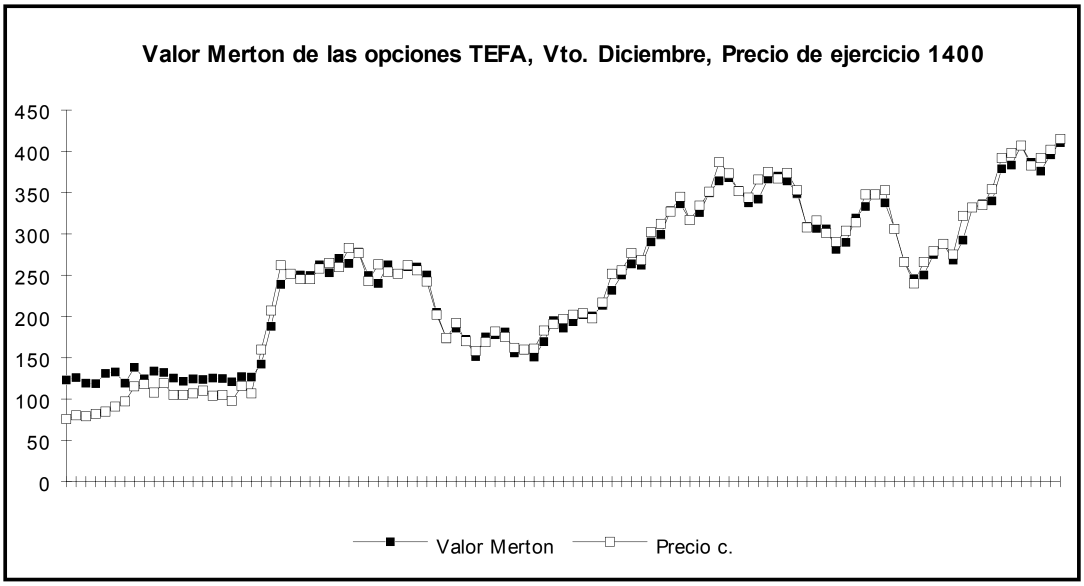
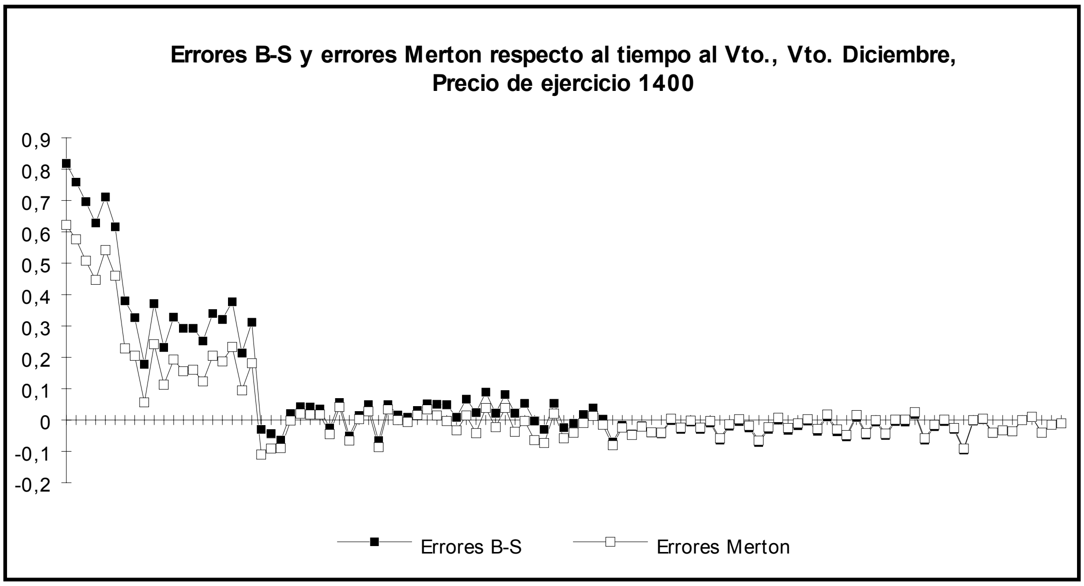


GRÁFICO 22



No obstante y a diferencia de las dos muestras analizadas de vencimiento septiembre, tanto el modelo de B-S como el de Merton llegan incluso a infravalorar, a medida que el tiempo hasta el vencimiento de la opción se reduce. Infravaloración, sin embargo, de escasa importancia.

GRÁFICO 23

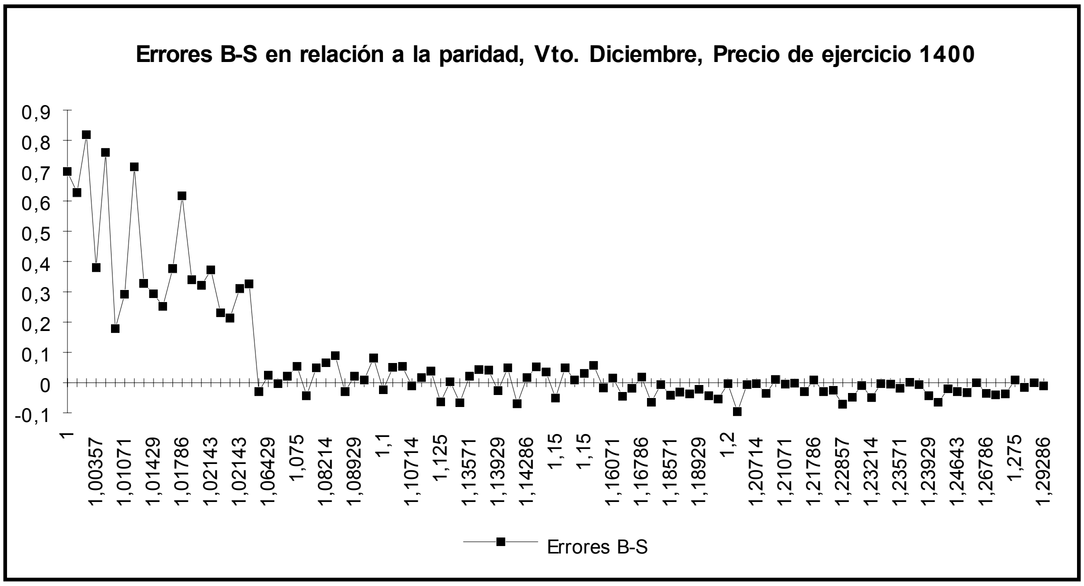
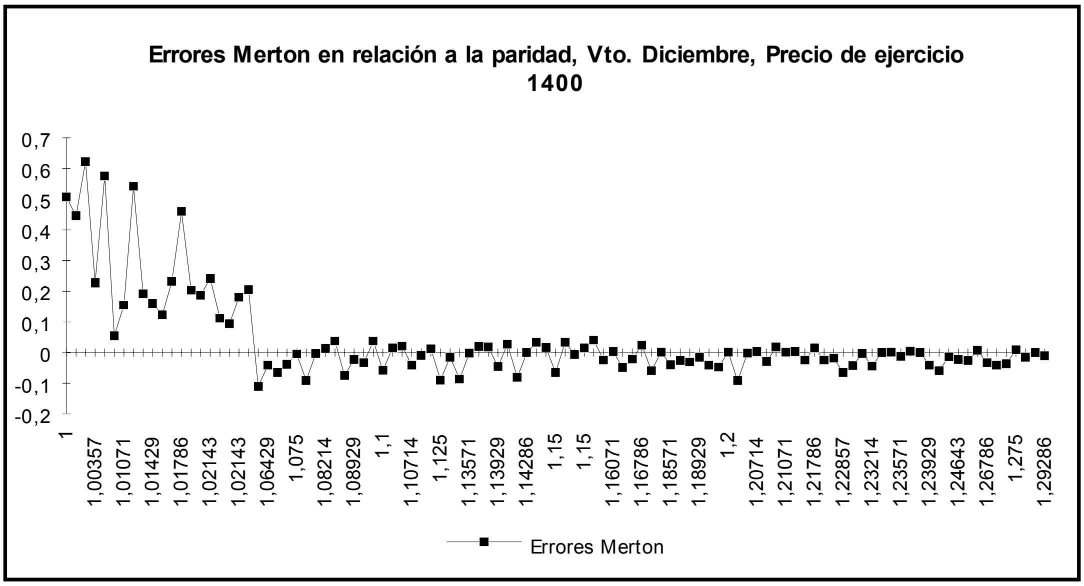


GRÁFICO 24



La presencia del sesgo de paridad es similar al de vencimiento como puede observarse de los Gráficos 23 y 24. Sólo para el caso de opciones con valor intrínseco positivo, pero muy próximo a cero, ambos modelos valoran por encima de los precios reales, mientras que a medida que el valor intrínseco aumenta (más en dinero) los valores que generan ambos modelos parecen coincidir con los valores observados.

Este resultado debe ser analizado con cautela, en tanto que cuando estudiamos modificaciones de la paridad, también se está modificando el tiempo hasta el vencimiento, por lo que el efecto de esta segunda variable puede tener en este caso, más peso que la paridad. Para separar ambos efectos habría que disponer de una muestra de opciones, de diferentes acciones, con un mismo vencimiento y precio de ejercicio y a partir de ahí hacer el análisis de la paridad, tal y como se presenta en el trabajo de MacBeth y Merville (1979).

TABLA 11

Vto. Diciembre, Precio de ejercicio 1400

Estadísticos para ER B-S		Estadísticos para ER Merton	
Media	0,07673	Media	0,03867
Mediana	0,00016	Mediana	-0,00135
Desv.Stand.	0,19421	Desv.Stand.	0,14321
Varianza	0,03771	Varianza	0,02050
Curtosis	4,68532	Curtosis	6,34997
Asimetría	2,26066	Asimetría	2,51472
Rango	0,91385	Rango	0,73310
Mínimo	-0,09608	Mínimo	-0,11045
Máximo	0,81777	Máximo	0,62265
Suma	7,9035	Suma	3,98384
Nº Obs.	103	Nº Obs.	103

Finalmente, del estudio de los estadísticos de la serie de errores, presentados en la Tabla 11, de igual manera podemos concluir que el modelo de Merton mejora en la predicción de los precios de compra de las opciones respecto al de B-S, tanto desde el análisis de la media, como de la varianza, mínimo, máximo y la suma total de los errores, que se sitúan en valores claramente inferiores a los correspondientes a los errores B-S.

A continuación se presentan los Gráficos 25 y 26 correspondientes a los valores que se obtienen de los modelos de valoración para TEFA tanto de B-S como de Merton, con vencimiento diciembre de 1993 y precio de ejercicio 1600, así como el Gráfico 28, correspondiente a los errores de predicción de ambos modelos respecto a los precios de compra.

Igual que con la muestra de vencimiento septiembre y precio de ejercicio 1450, utilizamos los precios últimos para calcular los errores relativos de predicción últimos de ambos modelos, Gráfico 29. También presentamos el gráfico de los valores que generan los dos modelos comparado con los precios últimos, Gráfico 27.

La superioridad del modelo de Merton respecto al de B-S es evidente a la vista de los gráficos y aún más clara que para las muestras anteriores, ya que prácticamente los valores se superponen a los precios de mercado y los errores están muy próximos a cero. Los valores B-S, por el contrario, y para toda la muestra, se sitúan muy por encima de los valores observados, sobrevaloración que parece verse reducida, pero muy ligeramente a medida que el tiempo al vencimiento se reduce.

GRÁFICO 25

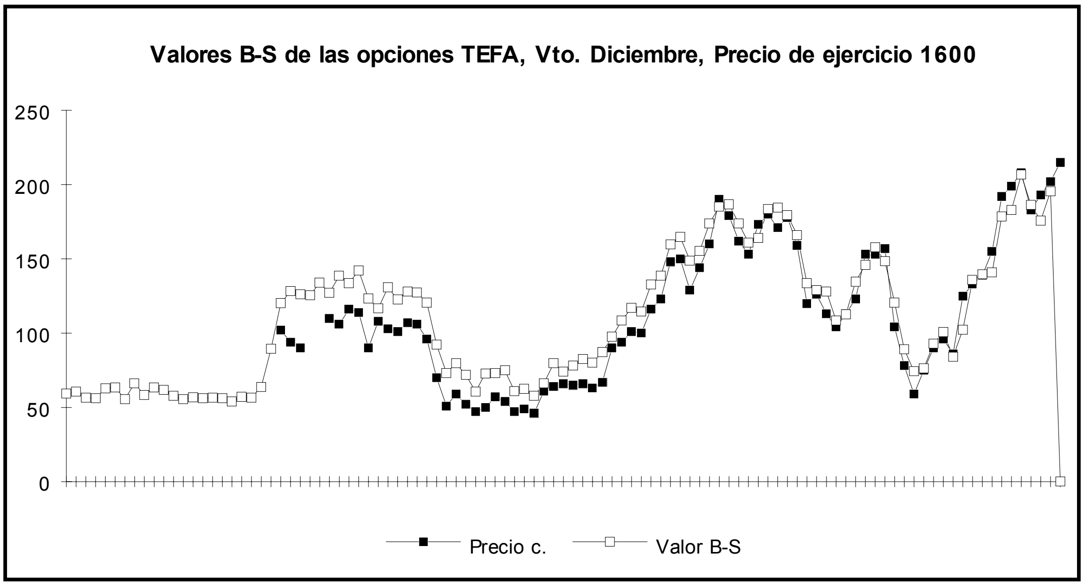


GRÁFICO 26

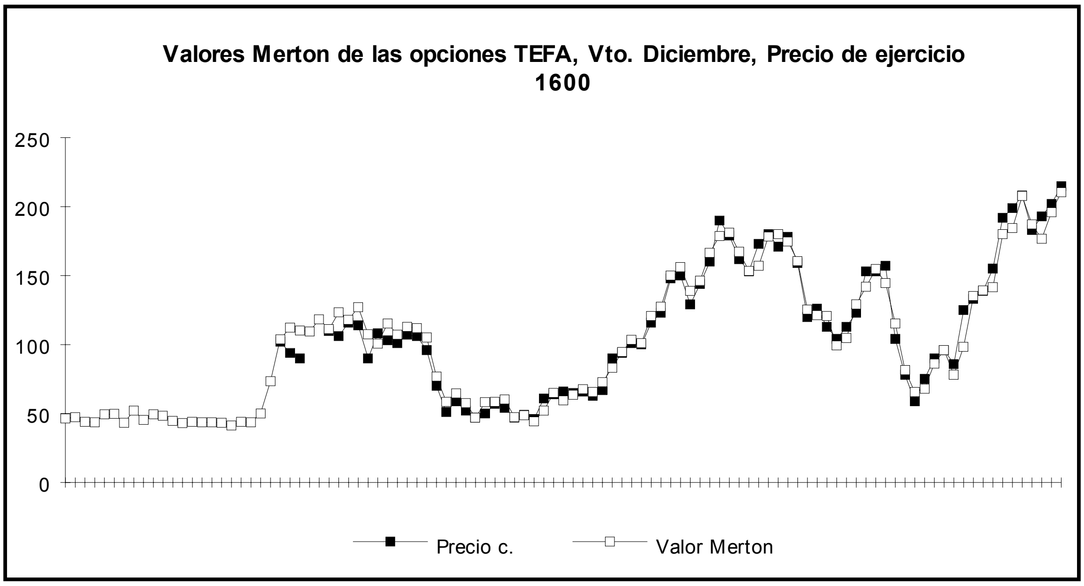


GRÁFICO 27

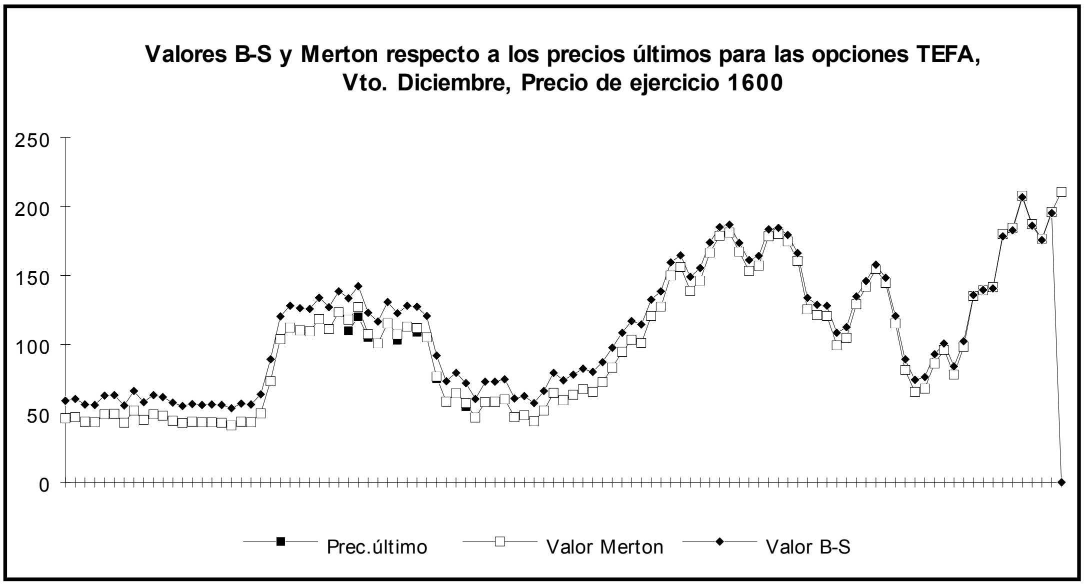


GRÁFICO 28

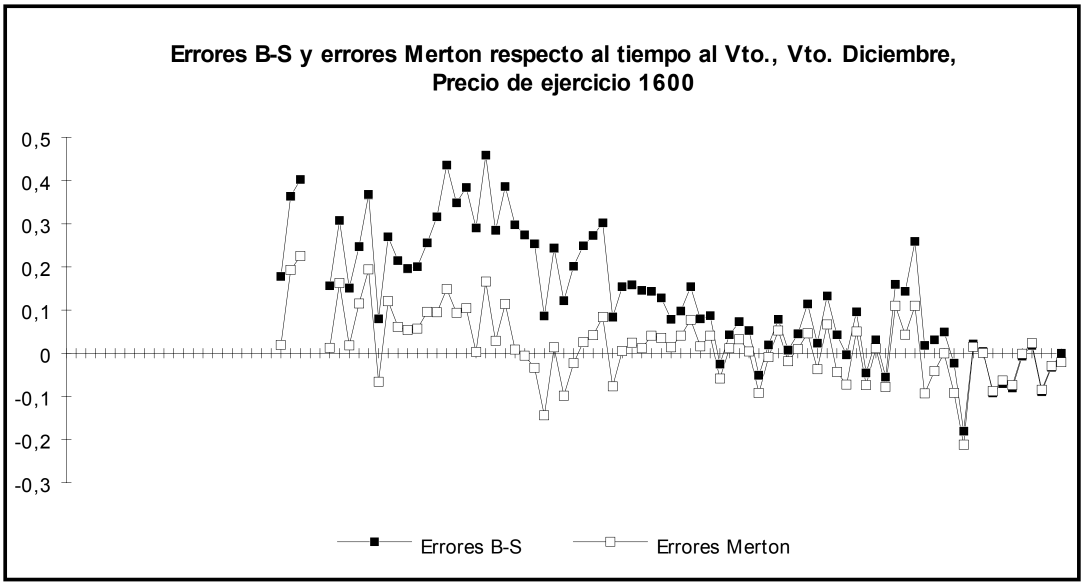
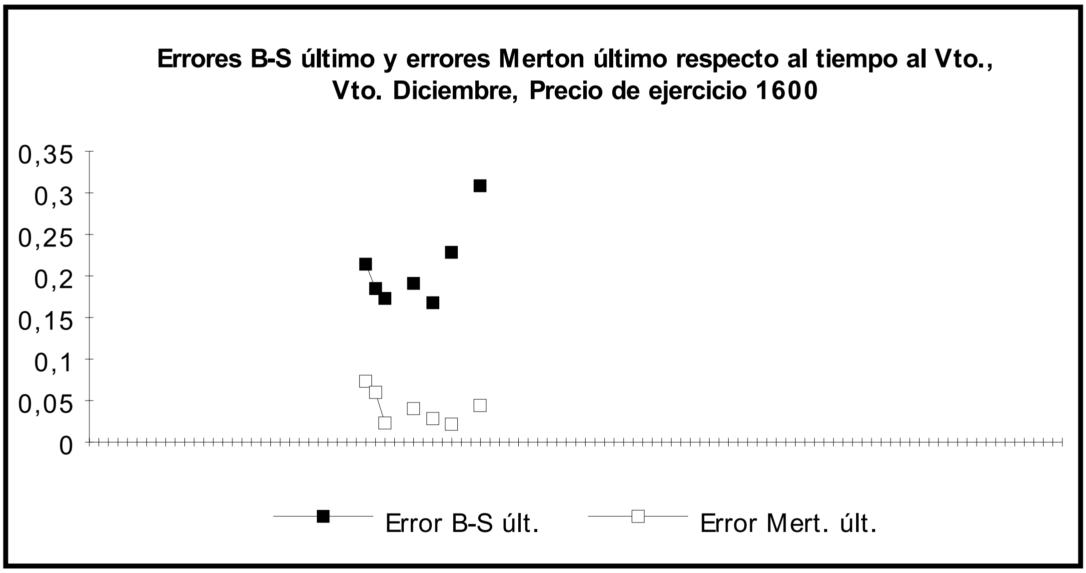


GRÁFICO 29



La existencia del sesgos de vencimiento parece detectarse muy ligeramente, pero es de menor importancia, tanto en B-S como en Merton. De igual manera, para el precio de ejercicio 1600 el "sesgo de paridad" se mantiene ligeramente con el modelo de B-S, mientras que parece diluirse en el modelo de Merton tal y como se observa en los Gráficos 30 y 31.

GRÁFICO 30

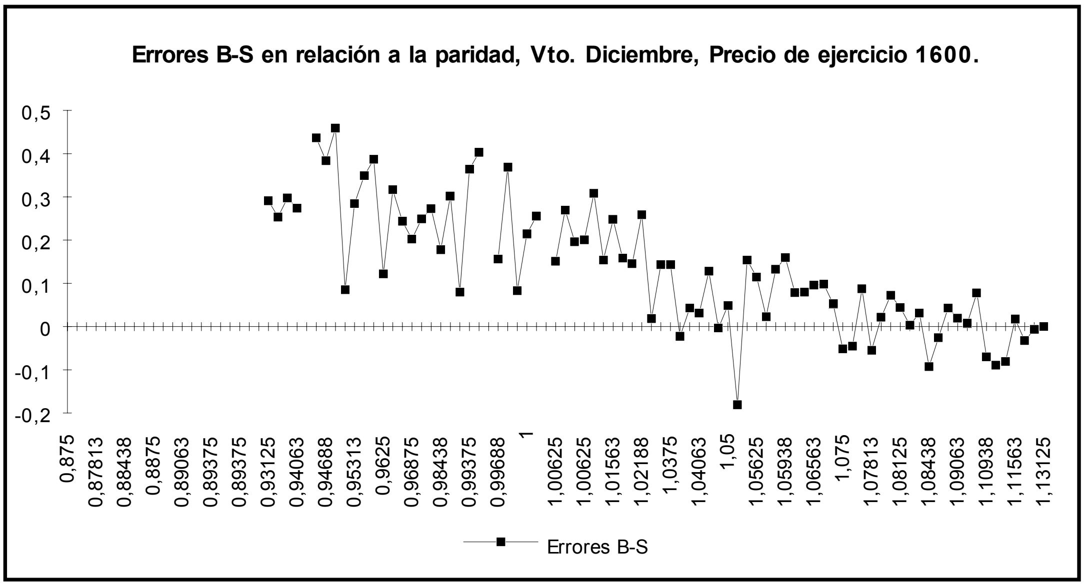
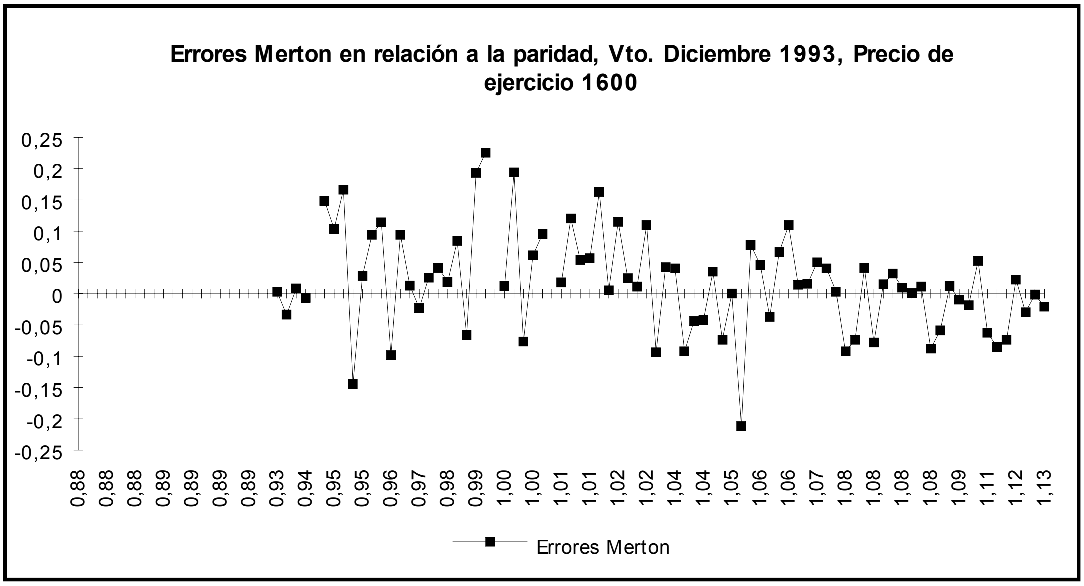


GRÁFICO 31



El mismo análisis anterior respecto a los precios últimos, que se presenta en el Gráfico 32 no es muy relevante, dado un número muy reducido de precios últimos par esta muestra .

GRÁFICO 32

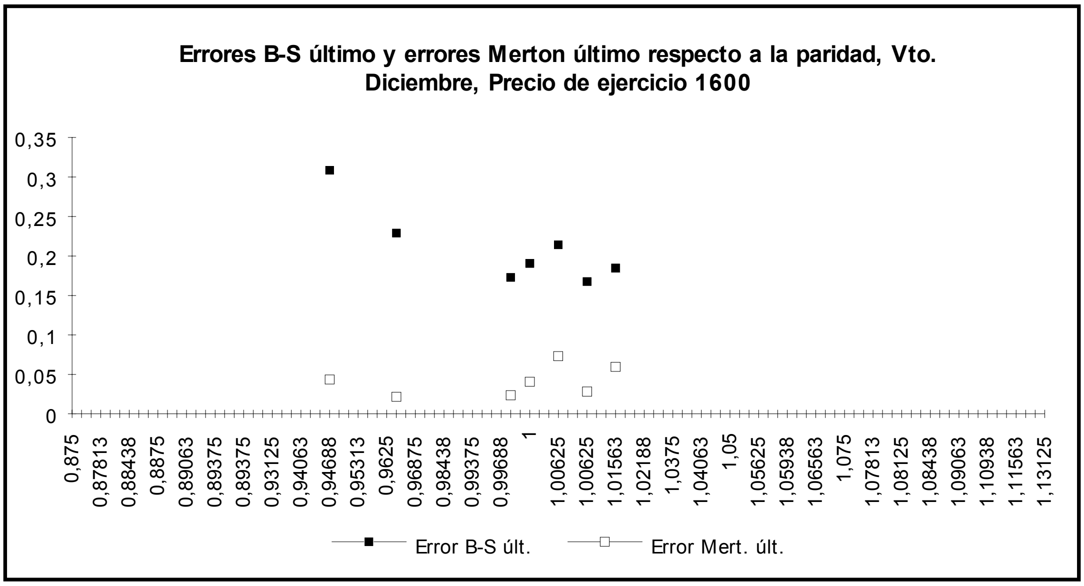


TABLA 12

Vto. Diciembre, Precio de ejercicio 1600

Estadísticos para ER B-S		Estadísticos para ER Mert.	
Media	0,13606	Media	0,01792
Mediana	0,1246	Mediana	0,01418
Desv.Stand.	0,14281	Desv.Stand.	0,07955
Varianza	0,02039	Varianza	0,00632
Curtosis	-0,61572	Curtosis	0,50564
Asimetría	0,26187	Asimetría	0,1239
Rango	0,63992	Rango	0,43662
Mínimo	-0,18133	Mínimo	-0,21160
Máximo	0,4585	Máximo	0,22501
Suma	10,6131	Suma	1,41636
Nº Obs.	79	Nº Obs.	79

Del estudio de la serie de errores podemos concluir que para esta última muestra de precio de ejercicio 1600, el error relativo medio que resulta de la contrastación del modelo de Merton es el más reducido de entre todas las muestras analizadas, tomando un valor concreto igual a 0,01792 para toda la muestra, y respecto a los precios de compra. Este valor se incrementa ligeramente cuando los errores se calculan respecto a los precios últimos, obteniéndose como media del Error B-S ultimo, un valor igual a 0,20961 (respecto a los precios c era 0,13606), mientras que la media del Error Merton último se sitúa en el valor 0,04143.

Este último resultado es totalmente contrario al que obtuvimos para la muestra de vencimiento septiembre y precio de ejercicio 1450, en el que cuando se calculaban los errores respecto a los precios últimos, la media de los errores de ambos modelos se reducía, aunque ligeramente. Parecía que ambos modelos obedecían mejor al comportamiento del mercado y al resultado de las negociaciones.

Una explicación a lo ocurrido con la muestra de diciembre podría estar en la caída drástica en la liquidez del mercado de los meses finales de 1993 debido a las turbulencias monetarias que afectaron a todos los mercados con la casi desaparición del sistema monetario europeo.

Por otro lado, parece invertirse el sentido del sesgo de precio de ejercicio que detectábamos para las muestras de vencimiento septiembre, ya que la predicción de ambos modelos mejora sustancialmente con el aumento del precio de ejercicio de 1400 a 1600, mientras que para las de septiembre la predicción de ambos modelos empeoraba con el aumento del precio de ejercicio.

TABLA 13
VENCIMIENTO EN DICIEMBRE DE 1993

		Precio de ejercicio 1400				Precio de ejercicio 1600			
		Lejanas al vto.		Próximas al vto.		Lejanas al vto.		Próximas al vto.	
		EAM	ERM	EAM	ERM	EAM	ERM	EAM	ERM
Out of	B-S					15,979	0,2922		
the money	Merton					1,6007	0,0313		
At the	B-S	39,86	0,4222			21,362	0,2265	8,3168	0,1385
money	Merton	25,54	0,2763			6,2496	0,0656	-0,265	0,0082
In the	B-S	3,87	0,02	-7,45	-0,022	14,673	0,1119	1,9184	0,0207
money	Merton	-2,84	-0,014	-6,73	-0,021	4,2928	0,0325	-2,671	-0,016

En la Tabla 12 se resumen los resultados obtenidos para las dos muestras, de precios de ejercicio 1400 y 1600, con vencimiento en Diciembre de 1993 y para ambos modelos, de B-S y de Merton, donde los errores, tanto B-S como Merton se han calculado respecto a los precios de compra.

La última muestra que pasamos a contrastar fue la correspondiente al vencimiento de marzo de 1994, para los precios de ejercicio de 1700 y 1900. Siguiendo con los dos criterios que hemos establecido para la determinación de los precios de ejercicio a utilizar en la contrastación, el precio de ejercicio de 1700 es el más bajo que cuenta un mayor número de observaciones (aunque, como veremos en, prácticamente, un mes no hay observaciones), mientras que el precio de ejercicio 1900 es el que presenta un mayor volumen de observaciones de precios últimos.

Los resultados de la contrastación del modelo de B-S con la volatilidad histórica corregida constante y del modelo de Merton se muestran a continuación en los gráficos 33 y 34, en el que para este precio de ejercicio 1700 los valores obtenidos de la contrastación de ambos modelos se hace únicamente respecto a los precios de compra, ya que para este precio de ejercicio no se disponía de suficientes precios últimos

GRÁFICO 33

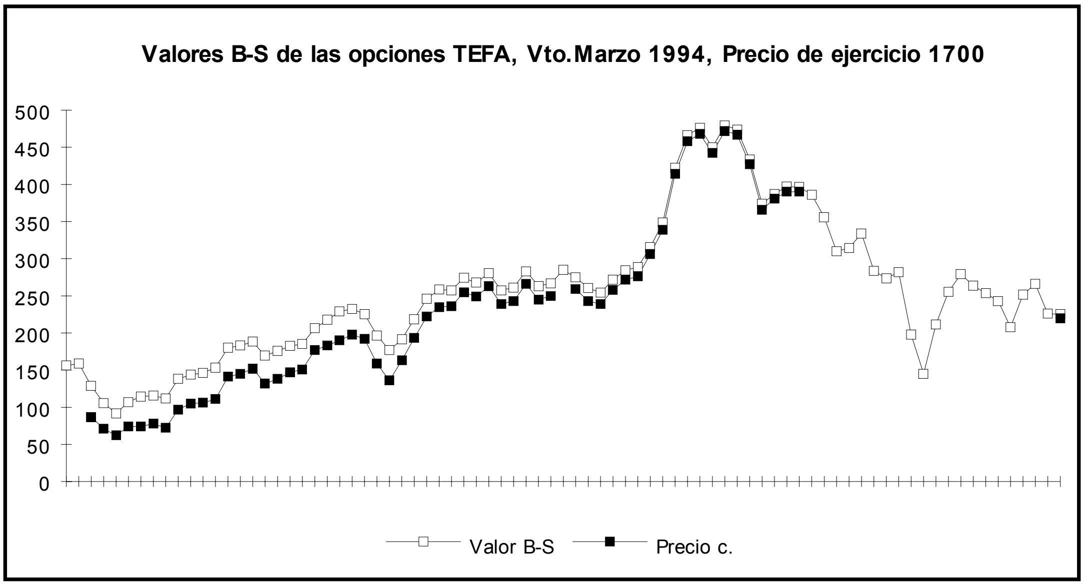
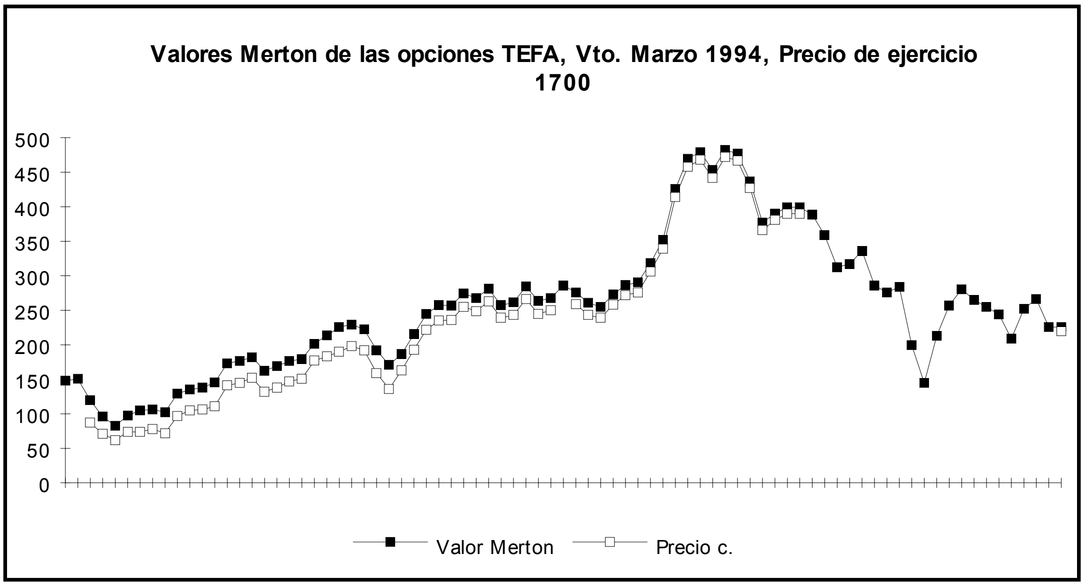


GRÁFICO 34



De la inspección de los gráficos anteriores, observamos una sobrevaloración de ambos modelos respecto a los precios de compra sobrevaloración que se reduce a medida que se acerca el vencimiento de la opción y que es más acusada en el modelo de B-S que en el de Merton.

GRÁFICO 35

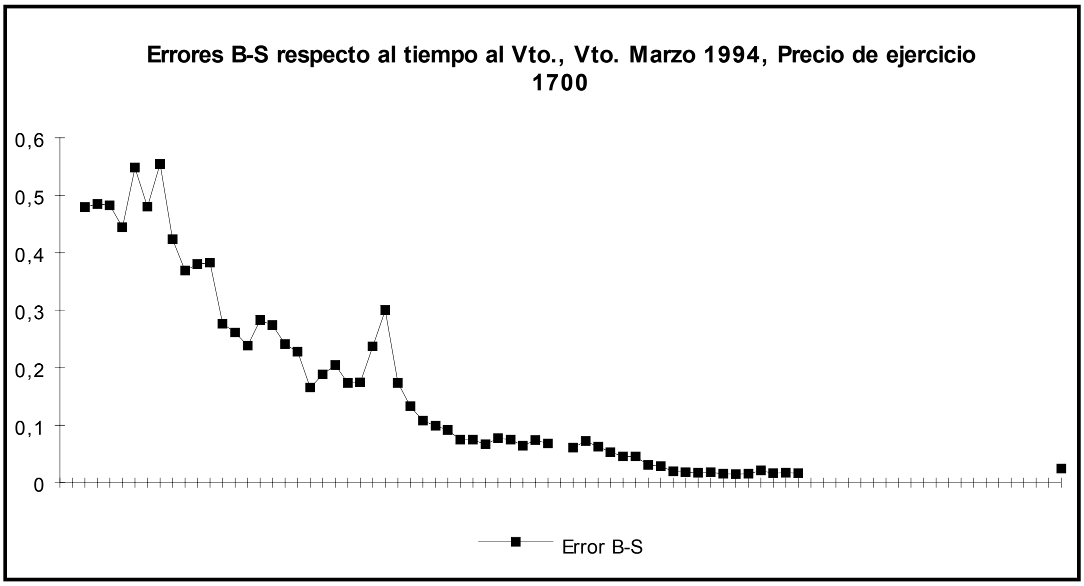


GRÁFICO 36

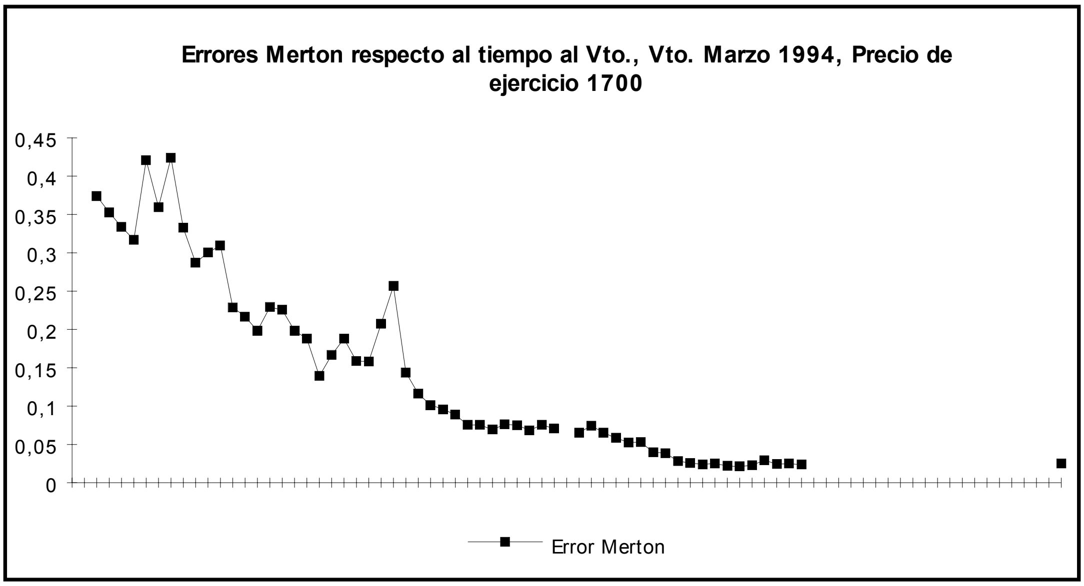
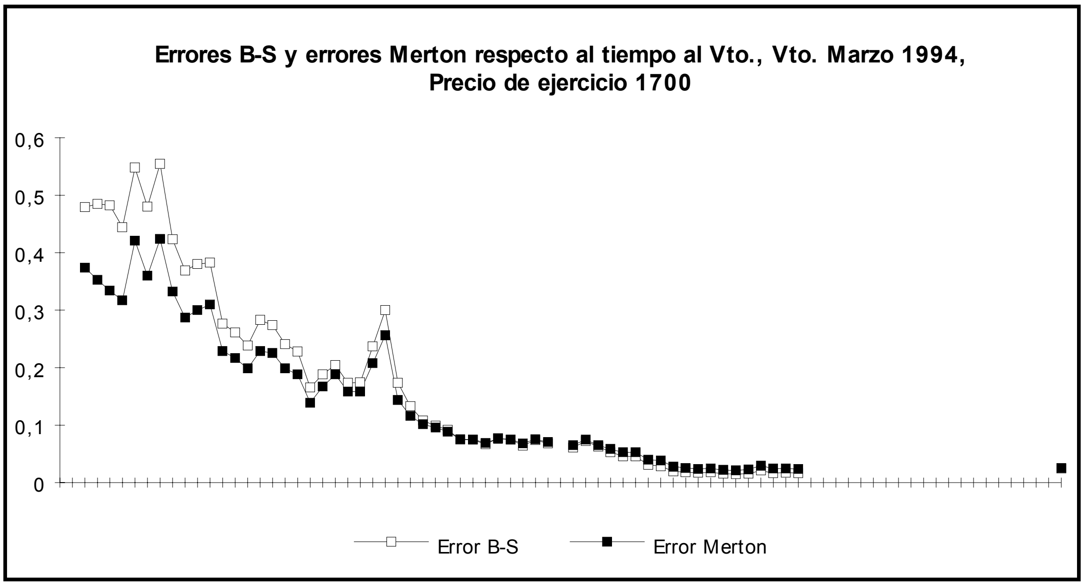


GRÁFICO 37



El análisis de los gráficos anteriores concluye la superioridad del modelo de Merton en la predicción de los valores de las opciones sobre acciones TEFA, una vez que detectamos, tanto individualmente como conjuntamente, unos errores relativos claramente inferiores. El análisis de los estadísticos descriptivos de las series de errores de B-S y Merton, que se muestra a continuación en la tabla 14, confirma aún más la mejora en la predicción del modelo de Merton.

TABLA 14
Vto. Marzo, Precio De Ejercicio 1700

Estadísticos para Er B-S		Estadísticos para Er Mer	
Media	0,17364	Media	0,14564
Mediana	0,09540	Mediana	0,09228
Desv.Stand.	0,1629	Desv. Stand.	0,11905
Varianza	0,02655	Varianza	0,01417
Curtosis	-0,34887	Curtosis	-0,52647
Asimetría	0,93065	Asimetría	0,8128
Rango	0,53971	Rango	0,40278
Minimo	0,01497	Mínimo	0,02125
Máximo	0,55469	Máximo	0,4240
Suma	10,0716	Suma	8,44720
Nº Obs.	58	Nº Obs.	58

Como en las muestras anteriores, procedimos a analizar la relación entre el nivel de predicción de los dos modelos y la paridad. Los resultados de este análisis se muestran en los gráficos 37 y 38.

GRÁFICO 38

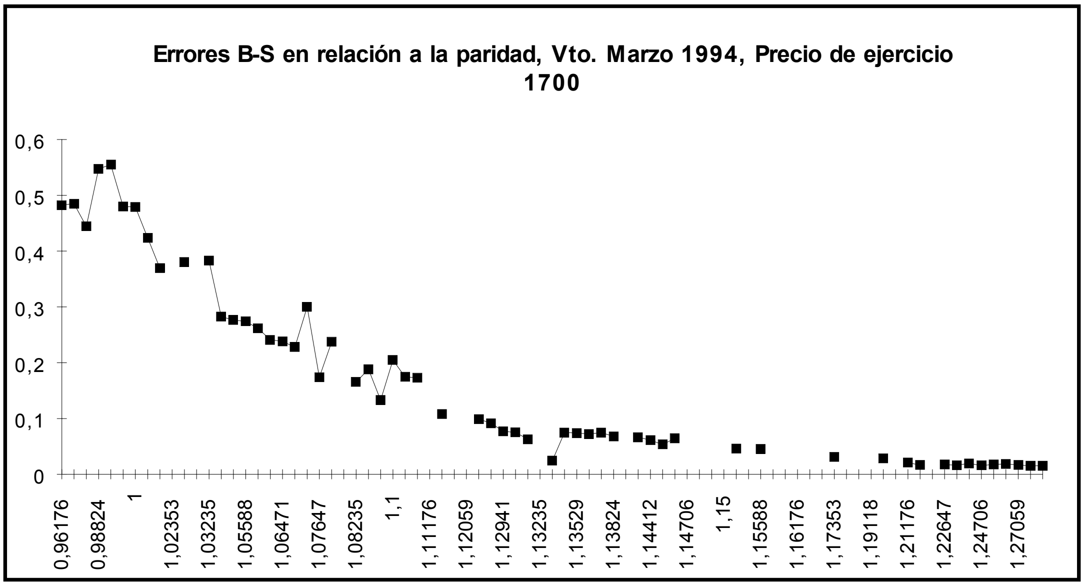
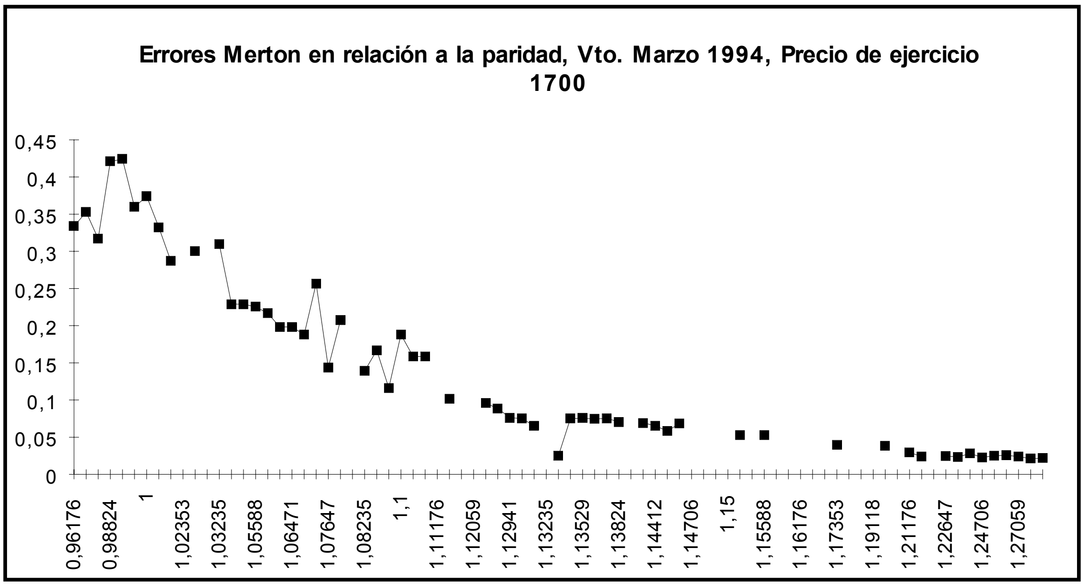


GRÁFICO 39



Se observa claramente el sesgo de paridad al que apuntábamos en las muestras anteriores, en la medida en que la sobrevaloración se va reduciendo a medida que la opción pasa de estar sin dinero a estar en dinero, es decir, a medida que el valor intrínseco pasa de ser nulo a positivo. Además, este sesgo se detecta en los dos modelos. Los resultados obtenidos para la muestra de vencimiento marzo de 1994 con precio de ejercicio 1900 se presentan a continuación.

GRÁFICO 40

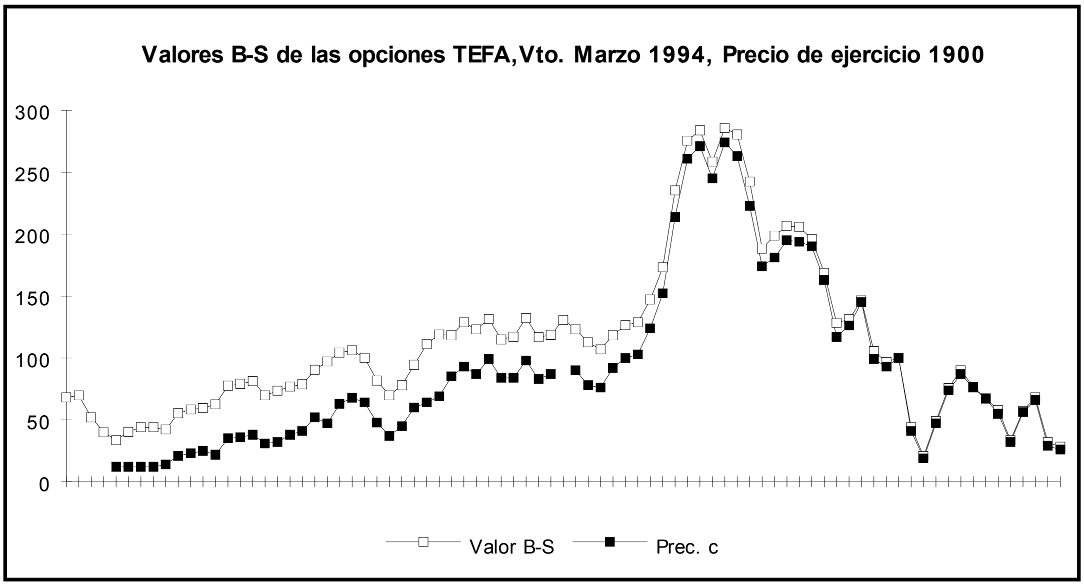
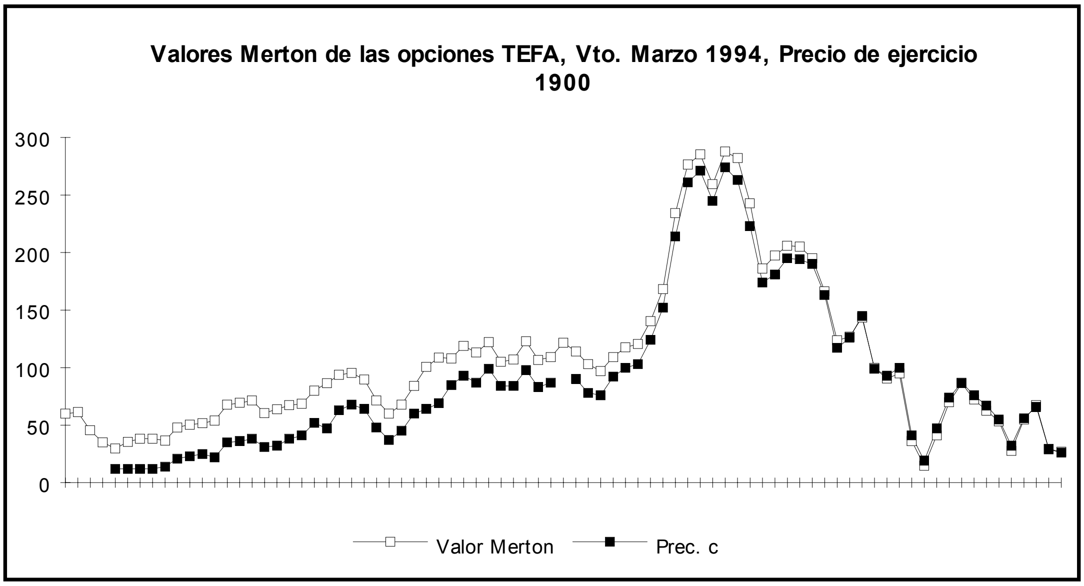


GRÁFICO 41



Para esta muestra, y dada la disponibilidad de un número suficiente de observaciones de precios últimos, hemos representado gráficamente los valores de las opciones obtenidos por los dos modelos contrastados respecto a dichos precios.

GRÁFICO 42

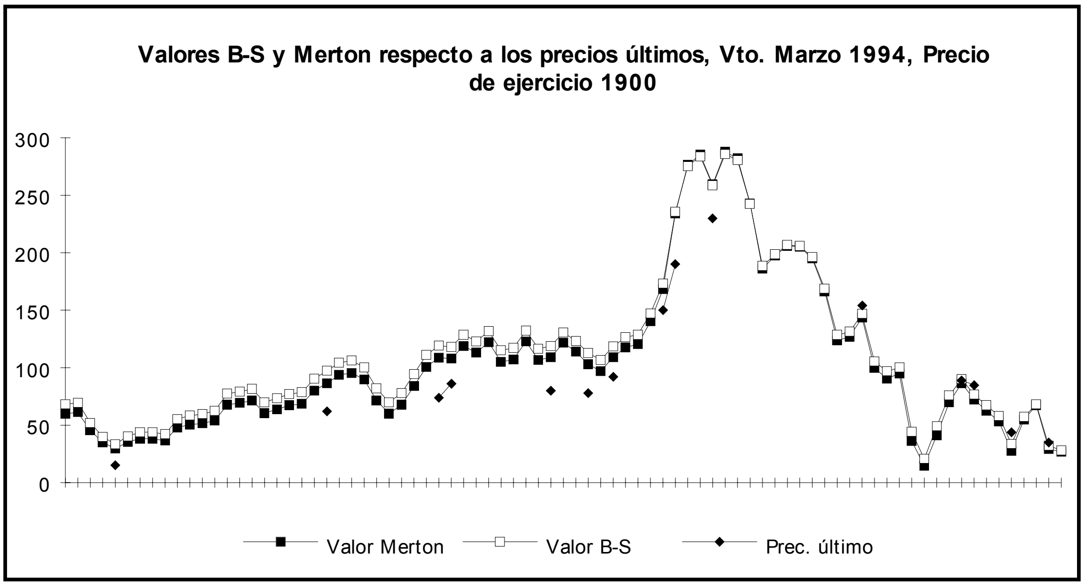
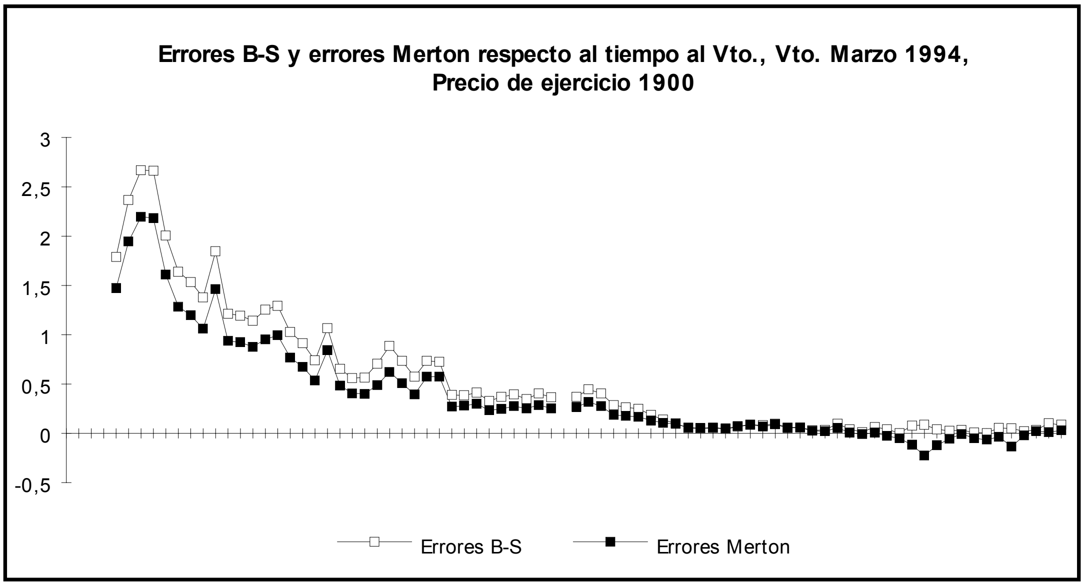


GRÁFICO 43



La tabla 15 muestra los estadísticos decriptivos de las series de errores relativos B-S y Merton, calculados respecto a los precios de compra. Nuevamente, se confirma la mejora del modelo de Merton respecto al de B-S, aunque ambos modelos parecen tener un ajuste peor a los precios observados que para las muestras anteriores.

TABLA 15

Vto. Marzo de 1994, Precio de ejercicio 1900

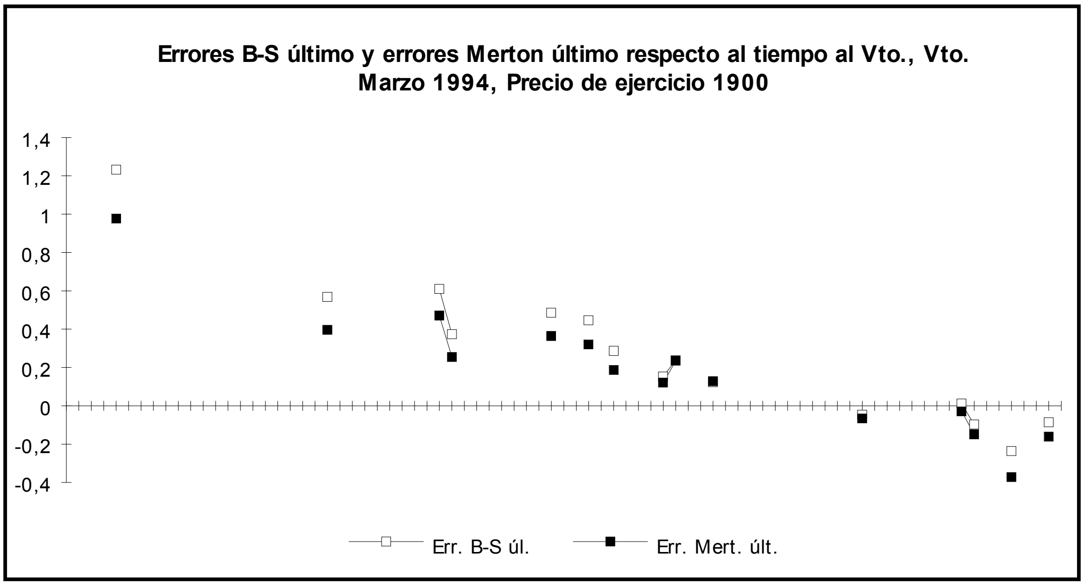
Estadísticos para ER B-S		Estadísticos para ER Mer	
Media	0,54408	Media	0,4005
Mediana	0,33886	Mediana	0,24133
Desv. Stand.	0,65730	Desv. Stand.	0,54423
Varianza	0,43205	Varianza	0,29618
Curtosis	2,10288	Curtosis	2,42996
Asimetría	1,60121	Asimetría	1,65271
Rango	2,66734	Rango	2,42252
Mínimo	0,00182	Mínimo	-0,2242
Máximo	2,6691	Máximo	2,19827
Suma	41,3506	Suma	30,4410
Nº Obs.	76	Nº Obs.	76

Para esta muestra de vencimiento en marzo de 1994, y cuando se calcularon tanto la media de los errores de predicción del modelo de B-S como del modelo de Merton respecto a los precios últimos, se obtuvieron los valores de 0,27077 y 0,18843, respectívamente, cuando se observa de la tabla anterior, que la media de estos errores, pero respecto a los precios de compra, se sitúa en 0,5408 con el modelo de B-S y 0,4005 con el modelo de Merton.

Por tanto, se detecta una reducción de los errores de predicción, cuando éstos se calculan respecto a los precios últimos, al igual que ocurría con la muestra de vencimiento septiembre de 1993 y precio de ejercicio 1450 y contrariamente a lo que ocurría con la muestra de vencimiento diciembre de 1993 (prec.ejerc. 1600).

Además, del análisis de la media de los errores, observamos un empeoramiento de la predicción de ambos modelos una vez que aumentamos el precio de ejercicio de 1700 a 1900. Este resultado es coincidente con lo ocurrido con las muestras de vencimiento septiembre y contrario a lo ocurrido en diciembre. Parece confirmarse entonces, que igual que se ha comprobado en la mayoría de los trabajos empíricos, tanto el modelo de B-S, como el de Merton, mejoran en la predicción cuanto más en dinero está la opción, lo que en términos de opciones call significa un precio de ejercicio inferior.

GRÁFICO 44



Para esta última muestra de precio de ejercicio 1900 se observa claramente la sobrevaloración de ambos modelos respecto a los precios de compra y también respecto a los precios últimos cuando la opción está lejana al vencimiento. No obstante y a diferencia de la muestra anterior del mismo vencimiento, se observa una infravaloración muy ligera, más acusada con el modelo de Merton, cuando la opción se aproxima a su vencimiento. Esta infravaloración también se detectaba en las muestras de vencimiento diciembre.

GRÁFICO 45

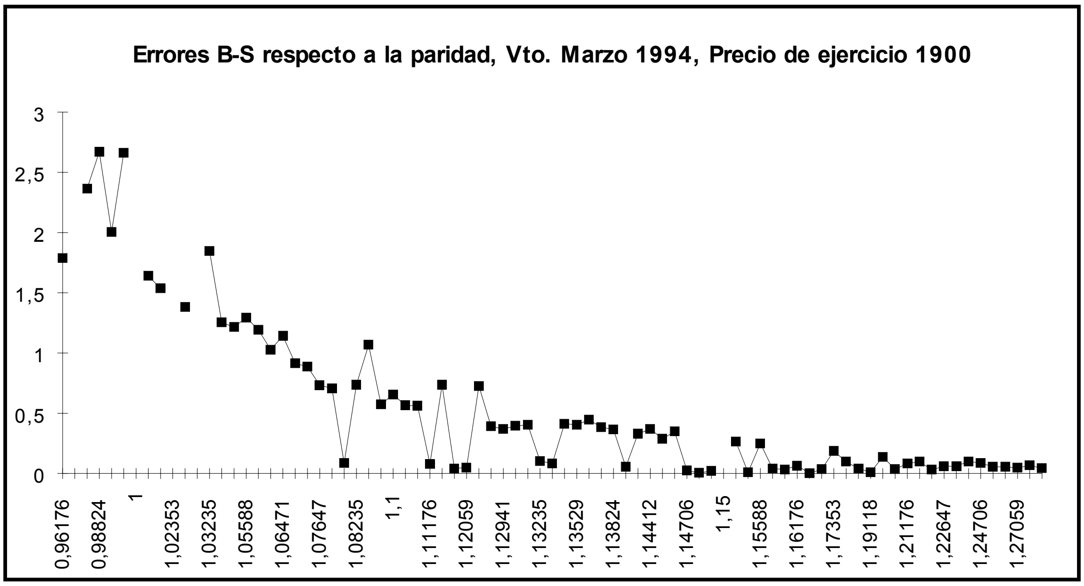
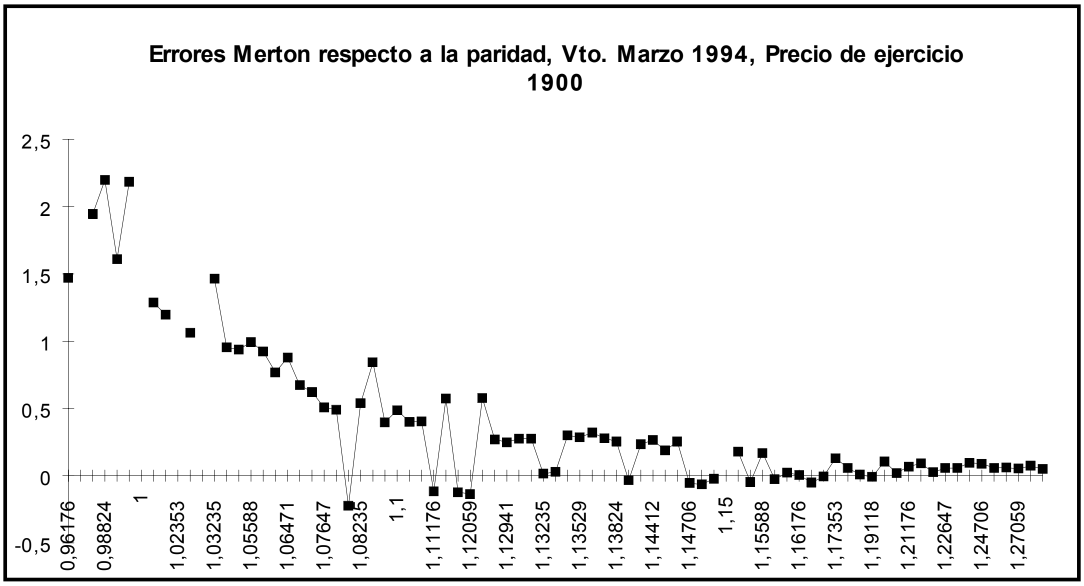


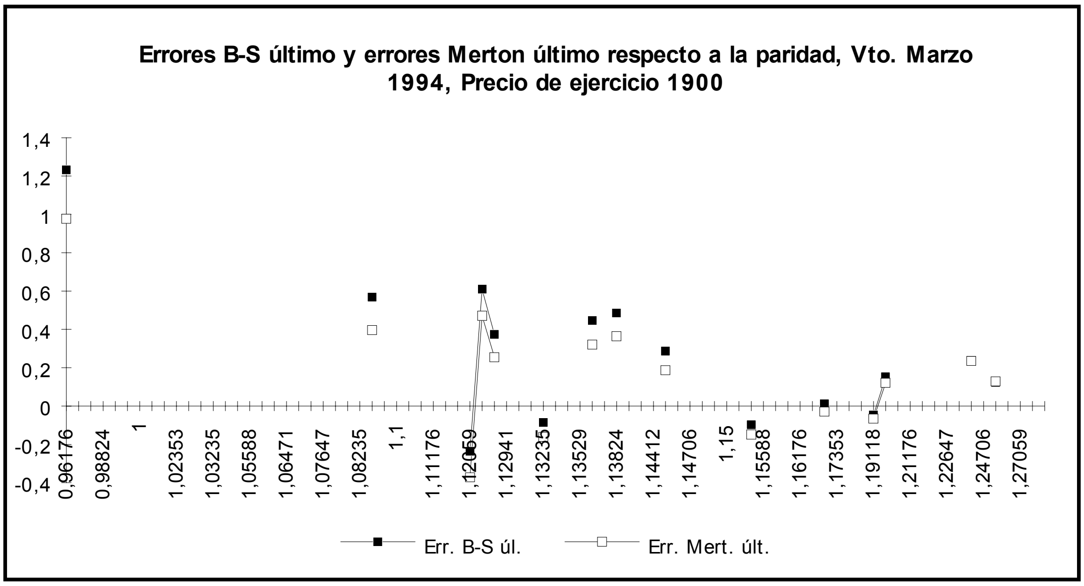
GRÁFICO 46



Respecto a la paridad, se detecta igualmente el sesgo que detectábamos con las muestras anteriores, con la excepción de escasas observaciones obtenidas de la contrastación del modelo de Merton, en las que se aprecia una infravaloración respecto a los precios de compra cuando la opción estaba "at the money".

El resto de la muestra toma valores que se sitúan por encima de los valores observados, más aún a medida que el valor intrínseco de la opción se aproxima a cero (a medida que más sin dinero está la opción).

GRÁFICO 47



Parece advertirse una reducción de los errores de ambos modelos respecto a los precios últimos a medida que aumenta el valor intrínseco de la opción, resultado que se producía igualmente en la muestra de septiembre y precio de ejercicio 1450.

Los resultados obtenidos para la muestra de vencimiento en marzo de 1994, de los errores tanto relativos como absolutos respecto a los precios de oferta, según el tiempo hasta el vencimiento y según la paridad se presentan en la tabla 16.

TABLA 16
VENCIMIENTO EN MARZO DE 1994

		Precio de ejercicio 1700				Precio de ejercicio 1900			
		Lejanas al vto.		Próximas al vto.		Lejanas al vto.		Próximas al vto.	
		EAM	ERM	EAM	ERM	EAM	ERM	EAM	ERM
Out of the money	B-S	29,925	0,5547			21,485	1,7904		
	Merton	20,699	0,424			17,651	1,4709		
At the money	B-S	38,557	0,4546			38,509	2,0371		
	Merton	29,443	0,3502			32,016	1,6407		
In the money	B-S	29,617	0,1934	9,9941	0,0391	39,328	0.7732	14,7	0,1079
	Merton	26,258	0,1666	12,268	0,0445	29,396	0,5771	10,509	0,0464

A la vista de estos resultados, los dos modelos parece que obedecen a un mismo comportamiento, es decir, sobrevaloran las opciones lejanas a su vencimiento y sin dinero, mientras que la predicción mejora notablemente cuando se acerca el vencimiento de la opción y ésta se encuentra en dinero.

La explicación a este comportamiento tan similar puede encontrarse en que la serie de rentabilidades de TEFA mostraba saltos frecuentes, pero, en la mayoría de los casos, poco importantes. En estos casos, Ball y Torous (1985) encontraban que diferencias significativas entre el modelo de Merton y el de B-S se daban cuando había saltos importantes, que ocurrían de manera infrecuente, mientras que cuando los saltos ocurrían frecuentemente, pero no eran importantes, como es el caso que nos ocupa, las diferencias entre ambos modelos no eran relevantes. Ball y Torous (1985) destacan una extensa evidencia empírica que sugiere que para muestras de rentabilidades de acciones, a diferencia de otros activos financieros como divisas (en los que los saltos son infrecuentes, pero importantes), los saltos no son importantes, pero sí ocurren de manera frecuente.

En definitiva, ambos modelos sobrevaloran los precios de mercado, aunque para el vencimiento diciembre y marzo, el modelo de Merton predice precios inferiores a los reales para opciones próximas a su vencimiento (sea cual sea la paridad de las mismas) y para opciones in the money lejanas al vencimiento. La superioridad de la capacidad predictiva del modelo de Merton se manifiesta en todas las muestras analizadas y para todo el período muestral. La bondad de los ajustes resulta particularmente interesante en la serie de precio de ejercicio 1600 y vencimiento diciembre, cuando la opción está at the money y próxima al vencimiento, donde el error relativo medio del modelo de Merton se situó en 0,00817, mientras que con el modelo de B-S fue de 0,1385.

4.4. OTROS RESULTADOS OBTENIDOS UTILIZANDO VOLATILIDADES IMPLÍCITAS.

El análisis adicional que presentamos a continuación consiste en calcular el valor de estas opciones con el modelo de B-S, pero usando en lugar de la volatilidad histórica, la volatilidad implícita del día anterior, que, por tanto, no es constante, sino que se modifica con cada observación. La utilización de esta variable, ya definida en el capítulo 2, ha sido considerada como adecuada y más aproximada al valor observado de la volatilidad futura que la histórica, y ha dado mejores resultados en la estimación de los valores de instrumentos financieros, tales como las opciones.

La obtención de la volatilidad implícita se hizo fácilmente mediante el programa de I. Mauleón (1991, pp. 624). No obstante, encontramos enormes problemas respecto a la convergencia, ya que no se encontraban valores positivos de la volatilidad implícita para los precios observados, tanto con los precios de compra como con los precios últimos. Para confirmar este resultado, procedimos a probar la condición que Manaster, E. y Koehler, G. (1982) proponen para asegurar la existencia de un valor positivo para la varianza implícita. Esta condición establece que es posible encontrar un valor positivo para la volatilidad implícita cuando

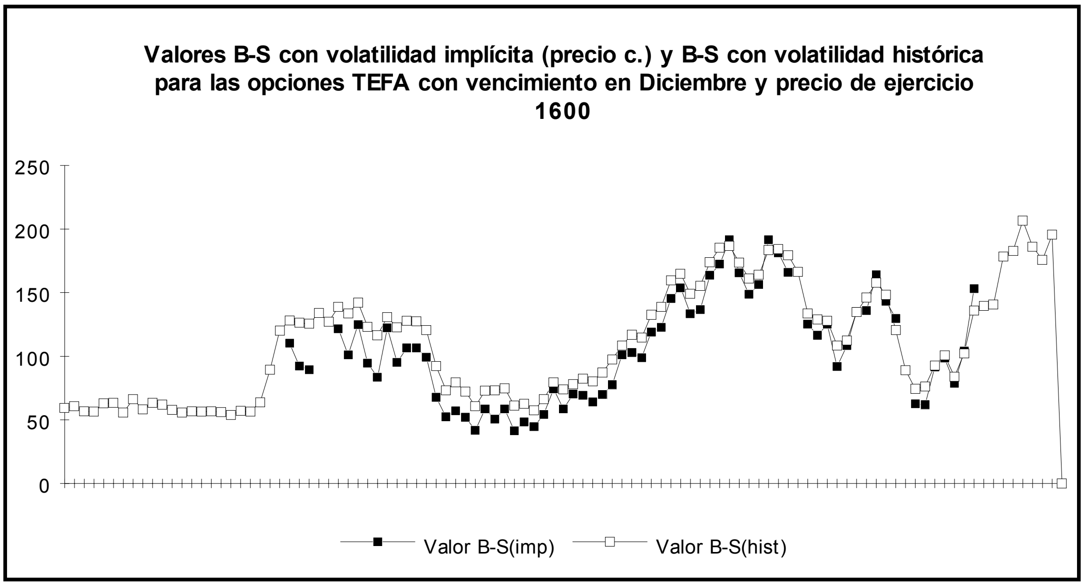
$$\text{Máx}(0, x - ce^{-rt}) < w < x$$

donde x es el precio observado del subyacente, c es el precio de ejercicio, r es la tasa de interés, t es el tiempo hasta el vencimiento de la opción y w es el precio observado de la opción.

Los resultados de esta prueba fueron similares a los obtenidos con el programa de Mauleón. Además, encontrábamos que a medida que se acercaba el vencimiento de la correspondiente opción, se dejaban de obtener los valores de la volatilidad implícita. La muestra de la que se obtuvieron un mayor número de observaciones de la volatilidad implícita fue la de vencimiento Diciembre con precio de ejercicio de 1600, por lo que será la que utilizaremos en este análisis.

Con el valor de la volatilidad implícita, junto con las demás variables, (precio de la opción [16], precio de ejercicio, precio de la acción, tipo de interés y tiempo hasta el vencimiento de la opción) todas observables, se procedió a calcular el valor B-S de las opciones TEFA del día inmediatamente siguiente al del cálculo de la volatilidad implícita. El Gráfico siguiente muestra el resultado obtenido de los valores B-S usando la volatilidad implícita, junto con los valores B-S con la volatilidad histórica, que se obtuvieron con anterioridad.

GRÁFICO 46



Los resultados obtenidos detectaban claramente unos valores de volatilidad implícita inferiores para la mayoría de la muestra que el valor de la volatilidad histórica constante, excepto en determinadas observaciones en las que la volatilidad implícita se situaba por encima. Esta variabilidad de la volatilidad implícita muestra un comportamiento, en ningún modo constante, para la volatilidad de las acciones TEFA. Este comportamiento se traslada directamente al valor de las opciones, como puede verse en el Gráfico anterior.

Del contraste de los valores de las opciones TEFA obtenidos con el modelo B-S, utilizando la volatilidad implícita, (con los precios de compra que fijan los

[16] Como precio de la opción se utilizó el precio de compra, ya que la utilización de los precios últimos, además de que eran insuficientes, se reducía aún más el número de observaciones por los problemas de convergencia ya aludidos.

operadores) se obtuvo como resultado una superposición perfectamente clara de ambos valores. Este resultado es obvio, en tanto que los operadores usan la fórmula de B-S con la volatilidad implícita que obtienen del precio de la opción del día anterior (precio c), para fijar los precios para ese día.

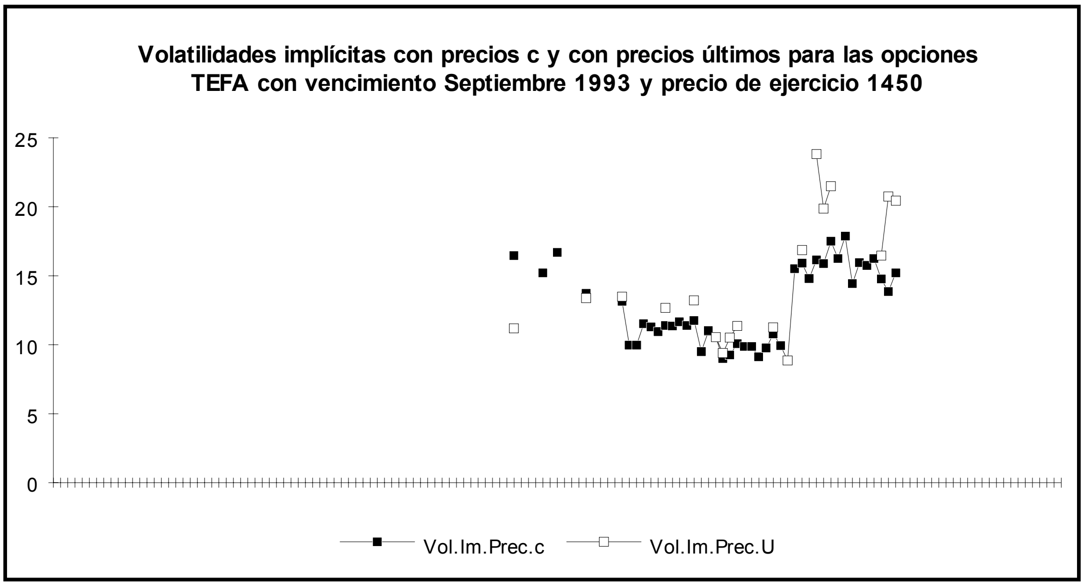
En base a este resultado, realizamos un contraste similar, pero respecto a los precios últimos que resultan de la negociación. Dada la escasa disponibilidad de estos datos, que se reducen aún más cuando calculamos la volatilidad implícita debido a problemas de convergencia, no podemos realizar un estudio global de los valores B-S y Merton, tal y como hacíamos en los análisis anteriores, por lo que simplemente procedimos a comparar los valores de la volatilidad implícita obtenidos con los precios últimos del día anterior, que denominamos "Volatilidad Implícita precio último", (VIPU), con los valores de la volatilidad implícita cuando se utiliza el precio c ("Volatilidad Implícita precio c", VIPC).

Para la muestra de vencimiento septiembre y precio de ejercicio 1450, de la que disponíamos mayor número de observaciones de los precios últimos, obtuvimos, para prácticamente toda la muestra, valores de la VIPU por encima de los valores de la VIPC, donde la media de la diferencia entre ambos valores (VIPU-VIPC) se situaba en 1,73691. Este valor no se repartía de modo, más o menos, regular para toda la muestra, sino que para las opciones lejanas a su vencimiento tenía un valor igual a 0,08344, mientras que para las opciones próximas a su vencimiento era de 3,80375. También, con la muestra de vencimiento diciembre y precio de ejercicio 1600, la media de la diferencia entre VIPU y VIPC se situaba en 1,2378 [17].

El Gráfico siguiente muestra los valores de VIPU y VIPC para la muestra de vencimiento septiembre y precio de ejercicio 1450.

[17] Debido al insuficiente número de observaciones en esta muestra, no se pudo realizar el mismo análisis según la opción esté próxima o lejana al vencimiento.

GRÁFICO 47



La utilización de la fórmula de B-S por parte de los operadores para fijar el precio de compra (precio c) del día siguiente, supone una aceptación del supuesto de proceso de difusión lognormal para el cociente de precios de la acción. La VIPC podría considerarse como la volatilidad implícita del proceso de difusión, mientras que la VIPU sería la volatilidad que se desprende del mercado y de la que se deriva el precio último de negociación, que intentamos estimar y que incluye la varianza estimada del proceso de saltos.

Los resultados anteriores vienen a confirmar los mejores resultados que se desprenden de la metodología de Merton, respecto a la de B-S, en tanto que el mercado trabaja con volatilidades superiores a las de un proceso simple de difusión, volatilidades superiores que pueden ser debidas al proceso de Poisson que se añade al de difusión, como ya desarrollamos en el capítulo 3.

Podemos concluir que, al igual que ocurría cuando utilizábamos la volatilidad histórica, los precios de las opciones TEFA pueden ser perfectamente modelizados por el Modelo de Merton, bajo el supuesto de un proceso de difusión con saltos para el subyacente, según se desprende de los resultados obtenidos utilizando volatilidades implícitas.

CAPÍTULO 5:
CONCLUSIONES.

Desde la introducción de los contratos de opciones, se han venido planteando diferentes modelos que intentan explicar y predecir su valor. No obstante, dos problemas fundamentales se presentan en su valoración: por un lado, los contratos de opciones, se diferencian de otros instrumentos financieros, (como por ejemplo, los futuros), en que su tenencia no significa la obligación, sino simplemente el derecho a ejercitarlo si las condiciones de mercado son favorables. Lás técnicas tradicionales que consisten en actualizar los flujos futuros con una tasa de descuento no sirven para valorar opciones. Por otro lado, una opción es un activo derivado, cuyo valor depende, por tanto, del precio de algún otro activo denominado activo subyacente. Esta dependencia obliga a definir la dinámica que recoge los movimientos del activo subyacente, dinámica que debe explicitarse, constituyendo un supuesto básico para la valoración de las correspondientes opciones.

Por lo tanto, el estudio de los diferentes procesos estocásticos que generan la rentabilidad del activo subyacente de la opción es clave a la hora de plantear una solución a la valoración de activos derivados. Una parte importante de la literatura financiera se ha centrado exclusivamente en esta cuestión, planteando modelizaciones alternativas en un intento de describir el comportamiento observado de las rentabilidades de los activos financieros. En el capítulo 1 de este trabajo de investigación se presenta una revisión de las diferentes modelizaciones, que se resumen en el esquema que se presenta en la introducción.

Los procesos estocásticos pueden ser de dos tipos: procesos de difusión y procesos de saltos. La corriente de la literatura financiera que utiliza procesos de difusión para la rentabilidad de un activo está encabezada, fundamentalmente, por Black y Scholes (1973) [B-S en adelante], cuyo modelo ha constituído una aportación clave en la Teoría de las Finanzas. El modelo de B-S ha sido ampliamente utilizado, aunque suele exhibir determinados sesgos a la hora de la predecir el precio observado de las opciones.

Por otro lado, los procesos de salto, introducidos por Cox y Ross (1976) han tenido una escasa utilización tanto a nivel teórico como empírico, que obedece sobre todo a su menor capacidad de describir la rentabilidad observada de un activo. Este proceso, a diferencia del de difusión, supone que no hay variaciones reducidas en la rentabilidad en períodos de tiempo relativamente cortos, ya que todas las variaciones son importantes.

La importancia del supuesto que se establece para la volatilidad, así como la variedad de modelizaciones, exigió dedicar un segundo capítulo enteramente a su tratamiento. Tanto desde el punto de vista teórico como empírico, muchos trabajos atribuyen un comportamiento cambiante para la volatilidad de la serie de rentabilidades de activos financieros (fundamentalmente acciones), como por ejemplo, Clark (1973), Rosenberg (1972), Blattberg y Gonedes (1974), Epps y Epps (1976), Kon (1984).

No obstante, se han planteado numerosas modelizaciones para describir este comportamiento variable en la volatilidad, que, a su vez, han dado lugar a diferentes soluciones en la valoración de opciones sobre activos financieros. Entre los diferentes modelos destacan el de elasticidad de sustitución constante planteado por Cox y Ross (1975), el de opción compuesta de Geske (1979a), el de difusión desplazada de Rubinstein (1983), los más generales de volatilidad estocástica donde el trabajo pionero se debe a Hull y White (1987), el de aproximación con volatilidades implícitas de Jarrow y Wiggins (1989), los basados en procesos de caos para la volatilidad de Savit (1989), los de difusión con saltos para la volatilidad de Amin y NG (1993) y, finalmente, los basados en procesos tipo ARCH para la volatilidad planteados inicialmente por Engle (1982). Estos últimos, a diferencia de los anteriores, analizan un comportamiento estocástico para la volatilidad en tiempo discreto.

En el mismo capítulo 2 también se presentan los diferentes estimadores que se han propuesto para la volatilidad, variable fundamental en la determinación del valor de las opciones. La utilización de diferentes estimadores para la volatilidad ha sido precisamente una de las razones que se han atribuído a la existencia de los sesgos que se detectan con la utilización del modelo de B-S.

En el capítulo 3 se desarrolla más extensamente el modelo de difusión con saltos para la rentabilidad del subyacente que propone Merton (1976a) y que también implica un comportamiento cambiante para la volatilidad. El supuesto de que la rentabilidad del activo subyacente de la opción puede experimentar cambios importantes, seguidos de períodos de escasa variación, parece un supuesto atractivo a la vez que un mejor descriptor del comportamiento observado de la rentabilidad que otros alternativos.

El proceso de difusión con saltos es una combinación de los procesos estocásticos de difusión y de los procesos de saltos. En términos analíticos, bajo un proceso de difusión con saltos, la rentabilidad del título se divide en tres componentes: los dos primeros recogen las variaciones reducidas de la rentabilidad del título: por un lado, la tendencia o término esperado o anticipado y, por otro lado, el término de incertidumbre que se modeliza como un proceso de Wiener. Estos dos componentes son similares a los de un proceso de difusión, también denominado como proceso simple de Itô, similar al que utilizan B-S. El tercer componente es el que caracteriza este tipo de procesos, ya que recoge, precisamente, la posibilidad de cambios importantes en la rentabilidad del activo. Estos cambios se producen en momentos discretos del tiempo y se distribuyen como una variable aleatoria de Poisson. Es, por tanto, un proceso en tiempo continuo en el que se intercalan variaciones importantes, es decir, discontinuidades o saltos en tiempo discreto.

En el capítulo 3 también se desarrollan las extensiones al modelo inicial de Merton, así como los trabajos empíricos que se han realizado referentes a este tipo de procesos. Además, se presentan los diferentes procedimientos de estimación de los parámetros que exige la contrastación de este modelo.

Previamente a la contrastación del modelo de difusión con saltos, se hace necesario estudiar si la serie de rentabilidades a utilizar presenta un comportamiento cambiante en su volatilidad. Ello se realiza en la primera parte del capítulo 4. La serie elegida se compone de las rentabilidades diarias de las acciones de Telefónica (TEFA), que constituyen el activo subyacente de las opciones de la misma empresa. El mercado de opciones sobre acciones en España es muy reciente, pues empieza a funcionar en el mes de febrero de 1993. Es a partir de esta fecha cuando se comienza con la contrastación; en concreto, con las que vencen en septiembre y diciembre de 1993 y marzo de 1994.

El análisis de la serie de rentabilidades diarias de las acciones TEFA muestra una distribución leptocúrtica, con colas más anchas y apuntadas en el centro que las correspondientes a una distribución normal, lo que implica el posible rechazo del supuesto de normalidad para dicha serie. Para confirmar este resultado, se utiliza el contraste de Kolmogorov-Smirnov, que, efectivamente, rechaza ampliamente la normalidad. Este resultado coincide con la mayoría de los trabajos empíricos que analizan las series de rentabilidades de activos financieros, fundamentalmente acciones, tales como los de Blattberg y Gonedes (1974), Kon (1984), Alegría y Calatayud (1989a) y Peiró (1994).

En el análisis de las funciones de autocorrelación se detecta la ausencia de correlación para la serie de rentabilidades diarias de la acciones TEFA, {Rt}, lo que parece indicar que no existe ningún grado de dependencia entre la observación de un día con la del día anterior. No obstante, una autocorrelación cero no significa independencia, a menos que la variable analizada presente una distribución normal. Como se ha rechazado la normalidad, se debe comprobar la independencia.

Del cálculo de las funciones de autocorrelación para las series de las rentabilidades elevadas al cuadrado, {Rt2}, y en valor absoluto, {|Rt|}, se obtuvieron unos valores superiores (diferentes de cero) para los coeficientes de autocorrelación de estas series respecto a los de la serie inicial. De donde se concluye que la serie analizada no exhibe independencia. Es decir, que parece detectarse la existencia de un cierto grado de dependencia entre la rentabilidad de un día con la del día anterior. Ello supone, por tanto, el rechazo de la hipótesis de que esta serie sea un proceso de ruido blanco, totalmente aleatorio. Esta dependencia podría ser debida a que la volatilidad de la serie analizada no fuera constante.

Una vez comprobado que la serie de rentabilidades diarias de las acciones TEFA presenta un comportamiento cambiante, no constante en su volatilidad, se pasa a contrastar el modelo de difusión con saltos de Merton (1976a). Los resultados se comparan con los obtenidos haciendo uso del modelo de B-S (1973). Como es bien sabido, este modelo supone un comportamiento constante para la volatilidad. Por ello, es errónea su utilización para la contrastación de esta serie. Ahora bien, la utilización tan frecuente del modelo de B-S en la mayoría de los trabajos empíricos, así como en la operativa diaria de los mercados de opciones, lo ha convertido en el modelo de referencia obligada en cualquier contrastación.

Mientras que la contrastación del modelo de B-S no presenta, prácticamente, ningún problema, excepto la estimación de la volatilidad, el contraste del modelo de Merton es más complicado. Por ello, se ha hecho una propuesta en relación al uso del método de estimación de los cumulantes, que parece reducir sustancialmente su complejidad. Para comprobar que, efectivamente, las estimaciones obtenidas por este método son apropiadas, se plantea un procedimiento alternativo de estimación por aproximación que se ha denominado "naive". A pesar de su falta de rigurosidad, este método es muy intuitivo. La igualdad de los resultados que se obtienen mediante la aplicación de los dos métodos- el de los cumulantes y el "naive"- permite asegurar la bondad de las estimaciones realizadas.

El parámetro fundamental en la contrastación del modelo de Merton es λ. Este representa la frecuencia media de saltos "diversificables" por unidad de tiempo (un día en este caso) y a cuya estimación se dedica enteramente el procedimiento "naive". Con este procedimiento se analizan las series, tanto las de las rentabilidades de TEFA, como las de las rentabilidades del Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM). Este último ha sido considerado en este estudio como representativo de la cartera de mercado. Una vez que se comprueba que la serie en diferencias Rentabilidad TEFA- Rentabilidad IGBM permite detectar la presencia de saltos, se procede al recuento de ellos mediante la utilización de diferentes bandas. Por encima de éstas se detecta la existencia de observaciones anómalas o saltos. Según la amplitud de las bandas se observa claramente un número de saltos diferentes, por lo que se necesita definir un intervalo aproximado de valores en el que se sitúa el parámetro λ; en concreto, se obtienen los valores comprendidos en el intervalo entre 0,2 y 0,5.

En primer lugar, se eliminaron de las series de rentabilidades de TEFA y las de IGBM aquellas observaciones que se situaban fuera de las seis bandas consideradas. A continuación, se calculó el coeficiente de correlación entre ambas series para cada uno de los intervalos, aumentando su valor y aproximándose a la unidad a medida que la banda iba estrechándose, esto es, conforme se fuera eliminando un mayor número de saltos. Este resultado permite concluir que, efectivamente, estos saltos son diversificables, no correlados con el mercado.

Si, por el contrario, una parte o la totalidad de esos saltos fuesen sistemáticos, su eliminación de ambas series no hubiera, en ningún modo, aumentado la correlación; es más, se podría incluso reducir su valor, en tanto que son observaciones que representan riesgo sistemático, correlado con el mercado, y que son importantes en la descripción del comportamiento de la cartera de mercado.

Por su parte, las conclusiones más importantes que se extraen de las estimaciones obtenidas por el método de los cumulantes son las siguientes:

a) El valor obtenido para λ (0,41) por este método es aceptable, según se desprende de los resultados alcanzados por el procedimiento "naive", que situaba a este parámetro en un intervalo entre 0,2 y 0,5.

b) Los valores obtenidos para las varianzas están en consonancia con el planteamiento de Merton. La diferencia entre la volatilidad histórica utilizada en la contrastación del modelo de B-S (sin tomar en consideración el proceso del subyacente) y la volatilidad del proceso de difusión en ausencia de saltos, σ, obtenida por el método de los cumulantes, se debe a la superposición de un componente de saltos, cuya volatilidad, δ, debe sumarse a la anterior para obtener la varianza global de la serie.

c) Se comprueba la validez del método de estimación de los cumulantes respecto al alternativo de máxima verosimilitud, ya que cuando los valores de las varianzas son positivos (como ocurre en este caso) y para valores relativamente bajos de λ, Ball y Torous (1983a) demostraron que las estimaciones por ambos métodos eran similares.

d) El valor de λ para la serie de rentabilidad de IGBM, considerado como la cartera de mercado, es próximo a cero. Además, y todavía más importante, su valor es inferior al mismo parámetro para la serie de rentabilidad de las acciones TEFA. Este resultado demuestra que, efectivamente, la cartera IGBM está bien diversificada, aunque no perfectamente, por lo que el número de saltos debe ser claramente inferior a los de la rentabilidad de la acción.

e) La muestra de las discontinuidades o saltos presenta una distribución normal, con media cero (k=0), en términos de rentabilidad esperada. Esto es un requisito imprescindible para la utilización de la solución analítica (o en forma cerrada) que propone Merton (1976a) para la valoración de opciones bajo procesos de difusión con saltos. Es más, la normalidad de la serie de rentabilidades de los saltos se confirma para, prácticamente, todas las bandas. Este resultado se desprende tanto desde el análisis de los histogramas de frecuencias absolutas y acumuladas como mediante el estudio de los estadísticos descriptivos de las series.

Una vez obtenido este resultado, se pasó a contrastar los modelos de valoración de B-S (1973) y de Merton (1976a). Las conclusiones más importantes que se obtuvieron son las siguientes:

1.- Ambos modelos predicen valores superiores a los observados para, prácticamente, todo el período de vida de la opción. Esta sobrevaloración es, sin embargo, inferior con el modelo de Merton. Por el contrario, cuando ambos modelos infravaloran los resultados observados (como ocurre para algunas observaciones de la muestra de vencimiento diciembre de 1993 y precio de ejercicio 1600) el modelo de Merton lo hace de forma más acusada que el de B-S.

2.- La sobrevaloración de los dos modelos se reduce a medida que se acerca el vencimiento de la opción, donde los valores que predicen ambos modelos prácticamente se superponen a los valores observados. Esto sugiere la existencia de sesgos de vencimiento. De hecho, este sesgo es perfectamente visible en las muestras de vencimiento diciembre de 1993 y marzo de 1994. Así se observa un comportamiento singular para la muestras de vencimiento diciembre de 1993, en las que se advierte una infravaloración, más acusada en Merton, cuando la opción está próxima al vencimiento y, simultáneamente, en dinero. Este comportamiento también se advierte en algunas observaciones de la muestra de vencimiento marzo de 1994 y precio de ejercicio 1900, aunque se presenta en días muy próximos al vencimiento.

3.- Se detectan sesgos de paridad en la predicción de los dos modelos de valoración. En concreto, se observa una sobrevaloración importante en las opciones sin dinero (out-of-the-money), que se reduce a medida que aumenta el valor intrínseco de la opción, es decir, conforme pasa a estar en dinero (in-the-money). En contra de este resultado, únicamente se observa una infravaloración del modelo de Merton, pero no en B-S, para opciones in-the-money y lejanas al vencimiento. Esto sólo ocurre con la muestra de vencimiento diciembre y precio de ejercicio 1400.

4.- El aumento del precio de ejercicio para un mismo vencimiento significa un empeoramiento en el ajuste de ambos modelos, advirtiéndose la presencia de sesgos de precio de ejercicio. Este resultado coincide con los obtenidos por la mayoría de los trabajos empíricos dedicados a la contrastación de modelos de valoración de opciones, que concluyen que estos modelos predicen mejor cuanto más en dinero se encuentra la opción. La única excepción se encuentra en la muestra de vencimiento diciembre de 1993 que tuvo un comportamiento contrario, debido probablemente a la caída drástica de la liquidez del mercado en los meses finales de 1993.

5.- La dinámica de los errores de los dos modelos, tanto con respecto al tiempo hasta el vencimiento como con respecto a la paridad, es bastante similar. No obstante, y dado que el precio de la acción crece casi ininterrumpidamente a lo largo de todo el período considerado en la contrastación, cuando la opción se aproxima a su vencimiento tanto mayor es su valor intrínseco, por lo que se mezclan el sesgo de vencimiento y el de paridad. La importancia relativa de un sesgo respecto a otro no puede ser estudiada en este período.

6.- El análisis de los estadísticos de la serie de errores, así como su representación gráfica, confirma la superioridad del modelo de Merton respecto al de B-S. Esta superioridad se manifiesta tanto en términos de una reducción de los errores como, y más importante aún, para todos los vencimientos y precios de ejercicio considerados. La bondad del ajuste a la especificación de Merton se pone de manifiesto preferentemente en la muestra de vencimiento diciembre de 1993 y, en especial, en la de precio de ejercicio 1600, donde la media de los errores relativos de predicción del modelo de Merton fue prácticamente nula (0,017) y la suma de los errores se situó en 1,41. Una explicación de este resultado puede ser la mayor volatilidad registrada en los meses finales de 1993, que a su vez generó un mayor número de observaciones anómalas o saltos que se explican mejor con el modelo de Merton.

7.- La contrastación de ambos modelos respecto a los precios observados últimos confirma la mejor predicción del modelo de Merton respecto al de B-S, para todos los vencimientos y precios de ejercicio. Este contraste se hace únicamente para las muestras de mayor nivel de negociación, que coinciden con las de mayor precio de ejercicio para cada vencimiento. En este contraste se observan sesgos de vencimiento y de paridad, tal y como se manifiestan con los precios de oferta. Aún así, no se advierte el sesgo tan fácilmente, debido a la escasa disponibilidad de observaciones de precios últimos.

8.- Ambos modelos parecen mejorar la predicción de los precios últimos de estas opciones respecto a los de oferta, al menos una vez que se han reducido claramente los errores relativos de predicción, tanto desde el estudio del tiempo hasta el vencimiento como el de la paridad. Nuevamente, la excepción se presenta con la muestra de vencimiento diciembre de 1993 y precio de ejercicio 1600, en la que parece mejorar la predicción respecto a los precios de oferta.

9.- Aunque se demuestra la superioridad del modelo de Merton respecto al de B-S, la dinámica de los errores de predicción de los dos modelos es muy parecida y sus diferencias no son muy significativas. Ello es debido, fundamentalmente, a que la serie de rentabilidades de las acciones TEFA no presentó saltos importantes, aunque sí muy frecuentes. En este caso, Ball y Torous (1985) demostraron que no había grandes diferencias entre ambos modelos. Por el contrario, cuando la serie presenta saltos importantes, aunque de menor frecuencia, como ocurre en otros activos financieros como divisas, las diferencias entre Merton y B-S son más importantes.

10.- La estimación de las volatilidades implícitas con los precios de oferta y con los precios últimos confirmó, nuevamente, la superioridad del modelo de Merton respecto al de B-S. La volatilidad implícita obtenida utilizando el precio de oferta (VIPO) presupone la aceptación del proceso de difusión lognormal para el precio del activo subyacente, mientras que la volatilidad implícita que resulta de utilizar el precio último (VIPU) es la que se desprende del mercado. De las estimaciones de estas volatilidades se obtuvieron valores de la VIPU superiores a los de las VIPO para prácticamente toda la muestra. Este resultado significa que el mercado trabaja con volatilidades superiores a las de un proceso simple de difusión, volatilidades que pueden ser debidas a la existencia de un proceso de saltos de Poisson que se añade al de difusión, es decir, un proceso de difusión con saltos como supone el modelo de Merton.

Estos resultados abren nuevas líneas de investigación en el estudio del proceso generador de las rentabilidades de las acciones a la hora de plantear fórmulas para la valoración de activos derivados. Estas línes deben ir encaminadas, por un lado, a una mayor utilización de procesos diferentes al clásico lognormal, (aplicado frecuentemente), y por otro lado, ir a la búsqueda de métodos de estimación que sean de fácil implementación práctica. Aunque estos procesos resulten más complejos, la mejora en la predicción, así como la utilización de nuevos y sencillos métodos de estimación (incluso fácilmente adaptados en soporte informático), podría significar claramente un avance importante, tanto en el análisis teórico como desde el punto de vista práctico, en el desarrollo de la Economía Financiera.

BIBLIOGRAFÍA

AHN, C. M. (1990): "Option Pricing when Jump Risk is Systematic", Working Paper, University of Texas at Dallas, School of Management.

AHN, C. M., R. FUJIHARA y K. PARK (1993): "Optimal Hedged Portfolios: The Case of Jump-Diffusion Risks", *Journal of International Money and Finance*, 12, pp. 493-510.

ALEGRÍA, R. M. L. y F. P. CALATAYUD (1989a): "Modelos ARMA con errores ARCH aplicados a la valoración de opciones sobre acciones", Documento de Trabajo, Nº 13, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna.

ALEGRÍA, R. M. L. y F. P. CALATAYUD (1989b): "Valoración de opciones: una formulación alternativa", Documento de Trabajo, Nº 19, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna.

AKGIRAY, V. (1989): "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts", *Journal of Business*, 62, Nº 1, pp. 55-80.

AMIN, K. I. (1991): "On the Computation of Continuous Time Option Prices Using Discrete Approximations", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, Nº 4, pp. 477-495.

AMIN, K. I. (1993): "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time", *Journal of Finance*, 48, Nº 5, pp. 1833-1863.

AMIN, K. I. y R. A. JARROW (1992): "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy", *Mathematical Finance*, 2, Nº 4, pp. 217-237.

AMIN, K. I. y V. K. NG (1993): "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", *Journal of Finance*, 48, Nº 3, pp. 881-910.

ANALISTAS FINANCIEROS INTERNACIONALES (1992): "La estimación de la volatilidad en la valoración de opciones: una aplicación al bono nocional en España", *Análisis Financiero Internacional*, febrero-marzo, pp.45-54.

ARNÁIZ, G. (1978): *Estadística Teórica*, Valladolid: Lex Nova.

BACHELLIER, L. (1900): "Theory of Speculation", en *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. P. H. Cootner, Cambridge, Mass.:M.I.T. Press,1967, pp. 17-78.

BACHILLER, A. C., P. F. LECHÓN y R. A. SANTAMARÍA (1993): "Evidencias empíricas en la valoración de opciones sobre el IBEX-35. Una aproximación a través del Modelo Black 76(1)", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Nº 78, pp. 71-88.

BAILEY, W. y R. M. STULZ (1989): "The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, Nº 1, pp. 1-12.

BALL, C. A. y W. N. TOROUS (1983a): "A Simplified Jump Process for Common Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, Nº 1, pp. 53-65.

BALL, C. A. y W. N. TOROUS (1983b): "Bond Price Dynamics and Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, Nº 4, pp. 517-531.

BALL, C. A. y W. N. TOROUS (1985): "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Pricing"; *Journal of Finance*, 40, pp. 155-174.

BANZ, R. (1981): "The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 3-18.

BARONE-ADESI, G. y R. E. WHALEY (1987): "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, 42, Nº 2, pp. 301-320.

BARTTER, J. B. y R. J. RENDLEMAN (1979): "Two-State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34, pp. 1093-1110.

BARTTER, J. B. y R. J. RENDLEMAN (1980): "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, pp. 11-24.

BASARRATE, B. y G. RUBIO (1990): "A Note on the Seasonality in the Risk-Return Relationship", *Investigaciones Económicas*, 14, pp. 311-318.

BATES, D. (1988): "Pricing Options under Jump Diffusion Processes", Working Paper, Wharton School, University of Pennsylvania.

BAUMOL, W. J. y G. R. FAULHABER (1988): "Economists as Innovators: Practical Products of Theoretical Research", *Journal of Economic Literature*, 26, pp. 577-600.

BEAVER, W. H. (1968): "The Information Content of Annual Earnings Announcement", Empirical Research in Accounting; Selected Studies, *Journal of Accounting Research*, 6, pp. 67-92.

BECKERS, S. (1980): "The Constant Elasticity of Variance Model and its Implications for Option Pricing", *Journal of Finance*, 35, pp. 661-673.

BECKERS, S. (1981): "A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Model of Stock Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16, Nº 1, pp. 127-139.

BECKERS, S. (1983): "Variances of Security Price Returns Based on High, Low, and Closing Prices", *Journal of Business*, 56, pp. 97-112.

BERA, A. K. y M. L. HIGGINS (1993): "A Survey of ARCH Models: Properties, Estimation and Testing", *Journal of Economic Surveys*.

BIERWAG, G. O. (1987): *Análisis de la duración: La gestión del riesgo de tipos de interés*. Alianza Economía y Finanzas. Madrid, 1991.

BLACK, F. (1975): "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal,* 31, pp 36-41 y 61-72.

BLACK, F. (1976): "Studies of Stock Price Volatility Changes", *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association*, pp. 177-181.

BLACK, F. (1989): "Cómo obtuvimos la fórmula para valorar opciones", Análisis Financiero, 1991, Nº 53, pp. 12-27.

BLACK, F., E. DERMAN y W. TOY (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysis Journal*, (Enero-Febrero), pp. 33-39.

BLACK, F., M. JENSEN y M. SCHOLES (1972): "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test" en *Studies in the Theory of Capital Markets*, ed. M. C. Jensen, Praeger, Nueva York.

BLACK, F. y P. KARASINSKI (1991): "Bonds and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal", *Financial Analysis Journal*, (Julio-Agosto), pp. 52-59.

BLACK, F. y M. SCHOLES (1972): "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency", *Journal of Finance*, 27, pp. 399-417.

BLACK, F. y M. SCHOLES (1973): " The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

BLATTBERG, R. C. y N. J. GONEDES (1974): "A Comparison of the Stable and Student Distribution of Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, 47, pp. 244-280.

BLOMEYER, E. C. y H. JOHNSON (1988): "An Empirical Examination of the Pricing of American Put Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, Nº 1, pp.13-

BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

BOLLERSLEV, T., R. Y. CHOU y K. F. KRONER (1992): "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics*, 52, pp. 5-59.

BONESS, A. J. (1964): "Elements of a Theory of Stock-Option Value", *Journal of Political Economy,* 72, pp. 163-175.

BOYLE, P. P. (1977): "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, pp. 323-338.

BOYLE, P. P. (1988): "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, Nº 1, pp. 1-12.

BOYLE, P. P., J. EVNINE y S. GIBBS (1989): "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims", *Review of Financial Studies*, 2, Nº 2, pp. 241-250.

BOYLE, P. P. y E. F. KIRZNER (1985): "Pricing Complex Options: Echo-Bay Ltd. Gold Purchase Warrants"; *Canadian Journal of Administrative Sciences*, 2, pp. 294-306.

BRANCH, B. (1977): "A Tax Loss Trading Rule", *Journal of Finance*, 47, pp. 553-575.

BRENNAN, M. J. (1979): "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models", *Journal of Finance*, 34, pp. 53-68.

BRENNAN, M. J. y E. S. SCHWARTZ (1977a): "Saving Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 67-88.

BRENNAN, M. J. y E. S. SCHWARTZ (1977b): "The Valuation of American Put Options", *Journal of Finance*, 32, Nº 2, pp. 449-462.

BRENNAN, M. J. y E. S. SCHWARTZ (1978): "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A

Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, Nº 3, pp. 461-474.

BRENNAN, M. J. y E. S. SCHWARTZ (1980): "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Proceeding Issue, 15, Nº 4, pp. 907-929.

BRIYS, E., M. CROUHY y R. SCHÖBEL (1991): "The Pricing of Default-Free Interest Rate Cap, Floor and Collar Agreements", *Journal of Finance*, 46, pp. 1879-1892.

BROCK, W. A. (1986): "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version", *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 168-195.

BRORSEN, B. W. y S-R. YANG (1993): "Nonlinear Dynamics of Daily Futures Prices: Conditional Heteroskedasticity or Chaos?", *Journal of Futures Markets*, 13, Nº 2, pp. 175-191.

CALATAYUD, F. P. (1993a): "Análisis Financiero de Estrategias de Cobertura con Opciones sobre Índices Bursátiles, Costes y Riesgos", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 2, Nº 2, pp. 51-60.

CALATAYUD, F. P. (1993b): "Duración y riesgo de correlación en coberturas con futuros financieros", *Análisis Financiero*, Nª 61, pp. 78-95.

CALATAYUD, F. P. y F. CALERO (1994): "Duración y estrategias de inmunización de carteras de renta fija", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 23, Nº 78, pp. 9-32.

CASTANIAS, R. P. (1979): "Macroinformation and the Variability of Stock Market Prices", *Journal of Finance*, 34, pp. 439-450.

CHAMBERLAIN, G. y M. ROTHSCHILD (1983): "Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets", *Econometrica*, 51, pp. 1281-1304.

CHAMORRO, J. M. (1993): "Volatilidad de las acciones y garantía de los depósitos", Documento de Trabajo 93.14, Facultad de Ciencias Económicas, Bilbao.

CHIRAS, D. P. y S. MANASTER (1978): "The Informational Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 213-234.

CHRISTIE, A. A. (1982): "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 407-432.

CHURCHILL, R. V. (1963): *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 2ª Edition, New York: McGraw-Hill.

CLARK, P. K. (1973): "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, 41, pp. 135-156.

CONSTANTINIDES, G. (1984): "Optimal Stock Trading with Personal Taxes: Implications for Prices and the Abnormal January Returns", *Journal of Financial Economics*, 13, pp. 65-89.

COOTNER, P. (1964): *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge, Mass. pp. 475-496.

COURTADON, G. (1982a): "The Pricing of Options on Default-Free Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, Nº 1, pp. 75-100.

COURTADON, G. (1982b): "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 17, Nª 5, pp. 697-703.

COX, J. C. (1975): "The Pricing of Options for Jump Processes", Rodney L. White Center Working Paper Nº 2-75. University of Pennsylvania, Philadelphia.

COX, J. C., J. E. INGERSOLL y S. A. ROSS (1981): "The Relation between Forward Prices and Futures Prices", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 321-346.

COX, J. C., J. E. INGERSOLL y S. A. ROSS (1985a): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, Nº 2, pp. 385-407.

COX, J. C., J. E. INGERSOLL y S. A. ROSS (1985b): "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53, pp. 363-384.

COX, J. C. y S. A. ROSS (1976): "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, Enero-Marzo, pp. 145-166.

COX, J. C., S. A. ROSS y M. RUBINSTEIN (1979): "Option Pricing. A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229-263.

COX, J. C. y M. RUBINSTEIN (1985): *Option Markets*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

DATTATREYA, R. y F. J. FABOZZI (1989): "Un modelo simplificado para valorar opciones sobre deuda". *Análisis Financiero*, 1991, Nº 53, pp. 52-62.

DING, Z., W. J. GRANGER y R. F. ENGLE (1993): "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, 1, pp. 83-106.

DOTHAN, L. U. (1978): "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 59-69.

DUAN, J. C. (1991): "The GARCH Option Pricing Model", *Proceedings 18th European Finance Association Conference*, Vol. II. Rotterdam.

DUFFIE, D. (1985): "Stochastic Equilibrium: Existence, Spanning Number and the No Expected Gains from Trade Hypothesis", *Econometrica*, 54, pp. 1161-1184.

DUFFIE, D. (1988): "An Extension of the Black-Scholes Model of Security Valuation", *Journal of Economic Theory*, 46, pp. 194-204.

DUFFIE, D. y C. F. HUANG (1985): "Implementing Arrow-Debreu Equilibrium by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities", *Econometrica*, 53, pp. 1337-1356.

DYBVIG, P. H. y C. F. HUANG (1988): "Non-Negative Wealth, Absence of Arbitrage, and Feasible Consumption Plans", *Review of Financial Studies*, 1, pp. 377-401.

DYBVIG, P. H., J. E. INGERSOLL y S. A. ROSS (1985): "Martingales, Arbitrage y Valuation". Mimeo.

DYL, E. (1977): "Capital Gains Taxation and Year-End Stock Market Behavior", *Journal of Finance*, 32, pp. 165-175.

EISENBERG, L. K. (1985): "Relative Pricing from No-Arbitrage Conditions: Random Variance Option Pricing", Working Paper, University of Illinois, Department of Finance.

EISENBERG, L. K. y R. A. JARROW (1991): "Option Pricing with Random Volatilities in Complete Markets", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 91-16.

EISNER, M. y R. S. PINDYCK (1973): "A Generalized Approach to Estimation as Implemented in the TROLL/1 System", *Annals of Economic and Social Measurement*, 2/1, pp. 29-51.

EL KAROUI, N. y J. ROCHET (1989): "A Pricing Formula for Options on Coupon-Bonds", *Southern European Economics Discussion Series*, D.P. 72, pp.1-25.

EMANUEL, D. C. (1983): "Warrant Valuation and Exercise Strategy", *Journal of Financial Economics*, 12, pp. 211-235.

EMANUEL, D. C. y J. D. MACBETH (1982): "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, pp. 533-554.

ENGLE, R. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.

ENGLE, R. (1991): "Statistical Models for Financial Volatility", Working Paper, Department of Economics, University of California, San Diego.

ENGLE, R. F. y T. BOLLERSLEV (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances", *Econometric Reviews*, 5, pp. 1-50, 81-87.

ENGLE, R. y G. GONZÁLEZ-RIVERA (1991): "Semiparametric ARCH Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, 9, pp. 345-360.

ENGLE, R., D. M. LILIEN y R. P. ROBBINS (1987): "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure. The ARCH-M Model", *Econometrica*, 55, pp. 391-407.

ENGLE, R. F. y C. MUSTAFA (1992): "Implied ARCH Models from Options Prices", *Journal of Econometrics*, 52, pp. 289-311.

ENGLE, R. F. y V. K. NG (1993): "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility", *Journal of Finance*, 48, Nº 5, pp. 1749-1778.

EPPS, T. W. y M. L. EPPS (1976): "The Stochastic Dependence of security Price Changes and Transactions Volume: Implications for the Mixture-of-Distribution Hypothesis", *Econometrica*, 44, pp. 305-321.

ESTEBAN, M. V. (1993): "Estructura de los rendimientos de los activos. Evidencia e implicaciones", Documento de Trabajo 93.15. Facultad de Ciencias Económicas, Bilbao.

FAMA, E. F. (1965): "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, pp. 34-105.

FAMA, E. F. (1970): "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, 25, pp. 383-417.

FERH, D. y B. ROSENFELD (1979): "Maximum Likelihood Parameter Estimation for Stochastic Processes", Harvard University, Mimeo.

FERNÁNDEZ, P. (1991a): "Valoración y Ejercicio Anticipado de la Put Americana", *Análisis Financiero*, Nº 53, pp. 66-70.

FERNÁNDEZ, P. (1991b): *Opciones y Valoración de Instrumentos Financieros*. Ediciones Deusto S.A., Bilbao.

FINNERTY, J. E. (1978): "The CBOE and Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, pp. 29-38.

FONTECHA, E. (1990): "Valoración de los derechos de suscripción utilizando la teoría de opciones", *Revista Española de Economía,* 7, Nº 1, pp. 121-152..

FRENCH, D. W. y L. J. MARTIN (1988): "The Measurement of Options Misspricing", *Journal of Banking and Finance*, 12, Nº 4, pp. 537-550.

FRENCH, K. R., G. W. SCHWERT y R. F. STAMBAUGH (1987): "Expected Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 3-29.

GALAI, D. (1977): "Tests of Market Efficiency of the Chicago Board Options Exchange", *Journal of Business* , 50, pp. 167-197.

GALAI, D. y M. I. SCHNELLER (1978): "Pricing of Warrants and the Value of the Firm", *Journal of Finance*, 33, pp. 1333-1342.

GARMAN, M. (1976): "A General Theory of Asset Valuation Under Diffusion State Processes", Working Paper Nº 50, University of California, Berkeley.

GARMAN, M. B. y M. J. KLASS (1980): "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data", *Journal of Business*, 53, Nº 1, pp. 67-78.

GASTINEAU, G. (1975): *The Stock Options Manual*. McGraw-Hill, New York.

GESKE, R. (1975): "The Pricing of Options with Stochastic Dividend Yield", Working Paper, University of California, Berkeley.

GESKE, R. (1979a): "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 63-81.

GESKE, R. (1979b): "A Note on an Analytical Formula for Unprotected American Call Options on Stocks With Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 375-380.

GESKE, R. y H. E. JOHNSON (1984): "The American Put Option Valued Analytically", *Journal of Finance*, 39, Nº 5, pp. 1511-1524.

GESKE, R. y R. ROLL (1984): "On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula", *Journal of Financ*e, 49, Nº 2, pp. 443-455.

GESKE, R., R. ROLL y K. SHASTRI (1983): "Over-the-Counter Option Market Dividend Protection and Biases in the Black-Scholes Model: A Note", *Journal of Finance*, 38, pp. 1271-1277.

GESKE, R. y K. SHASTRI (1985): "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques"; *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20, Nº 1, pp. 45-71.

GESKE, R. y W. TOROUS (1987): "Volatility and Mispricing: Robust Variance Estimation and Black-Scholes Call Options Pricing", UCLA Finance Working Paper, 10-87.

GEWEKE, J. (1986): "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment", *Econometric Review*, 5, pp. 57-61.

GLOSTEN, L., R. JAGANNATHAN y D. RUNKLE (1989): "Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance*, 48, Nº 5, pp. 1779-1801.

GRABBE, J. O. (1983): "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange", *Journal of International Money and Finance*, 2, pp. 239-253.

GRAY, J. B. y D. W. FRENCH (1990): "Empirical Comparisons of Distributional Models for Stocks Index Returns", *Journal of Business Finance & Accounting*, 17, pp. 451-459.

GULETKIN, N. B., R. J. ROGALSKI y S. M. TINIC (1982): "Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results", *Financial Management*, 12, pp. 58-69.

HANSEN, L. P. y S. F. RICHARD (1987): "The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models", *Econometrica*, 55, pp. 587-614.

HARRISON, J. M. y D. M. KREPS (1979): "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408.

HARRISON, J. M. y S. R. PLISKA (1981): "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, pp. 215-260.

HARVEY, A., E. RUIZ y E. SENTANA (1992): "Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances", *Journal of Econometrics*, 52, pp. 62-74.

HEATH, D., R. JARROW y A. MORTON (1990): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates. A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp. 419-440.

HEATH, D., R. JARROW y A. MORTON (1992): "Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, 60, Nº 1, pp. 77-105.

HESTON, S. L. (1993): "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, 6, Nº 2, pp. 327-343.

HILLIARD, J. E., J. MADURA y A. L. TUCKER (1991): "Currency Option Pricing with Stochastic Domestic and Foreign Interest Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 26, Nº 2, pp. 139-151.

HO, T. S. Y. y S. LEE (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-1029.

HSIA, C-C (1983): "On Binomial Option Pricing", *Journal of Financial Research*, 6, Nº 1, pp. 41-50.

HSU, D-A., R. MILLER y D. WICHERN (1974): "On the Stable Paretian Behavior of Stock-Market Prices", *Journal of the American Statistical Association*, 69, pp. 108-113.

HULL, J. y A. WHITE (1987): "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, Nº 2, pp. 281-300.

HULL, J. y A. WHITE (1990): "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, Nº 4, pp. 573-592.

HULL, J. y A. WHITE (1993): "One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, Nº 2, pp. 235-253.

HUNT, J. (1985): "Warrant Pricing and Exercise Strategies: An Empirical Test Using Common Stock Units", trabajo presentado en the Eastern Finance Association Annual Meeting.

INGERSOLL, J. E. (1977): "A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities", *Journal of Financial Economics*, 4, pp. 289-322.

JAMSHIDIAN, F. (1989): "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance,* 44, pp. 205-209.

JARA-GARCÍA, J. R. (1991): "Valuation of Interest-Rate Derivatives in the Spanish Options Market", Master's Dissertation no publicada. The Management School. Lancaster University.

JARROW, R. A., G. S. OLDFIELD y R. J. ROGALSKI (1977): " An Autoregressive Jump Process for Common Stock Return", *Journal of Financial Economics,* 5, pp. 389-418.

JARROW, R. A. y E. R. ROSENFELD (1984): "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Journal of Business*, 57, Nº 3, pp. 337-351.

JARROW, R. y A. RUDD (1982): "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 347-369.

JARROW, R. y A. RUDD (1983): *Option Pricing*. Irwin, Homewood, IL.

JARROW, R. A. y J. B. WIGGINS (1989): "Option Pricing and Implicit Volatilities", *Journal of Economic Surveys*, 3, Nº 1, pp. 59-81.

JOHNSON, H. E. (1979). "Option Pricing when the Variance Is Changing". Graduate School of Management Working Paper 11-79, University of California, Los Angeles.

JOHNSON, H. E. (1981): "Pricing Complex Options", Mimeo, Dept. of Finance, College of Business Administration, Louisiana State Univ., Baton Rouge.

JOHNSON, H. E. (1983): "An Analytic Approximation of the American Put Price", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, pp. 141-148.

JOHNSON, H. E. y D. SHANNO (1987): "Option Pricing when the Variance Is Changing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, Nº 2, pp. 143-151.

JONES, E. P. (1984): "Option Arbitrage and Strategy with Large Price Changes", *Journal of Financial Economics*, 13, pp. 91-113.

JORION, P. (1988): "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets", *Review of Financial Studies*, 1, pp. 427-445.

KAROLYI, G. A. (1993): "A Bayesian Approach to Modeling Stock Return Volatility for Option Valuation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28. Nº 4, pp. 579-594.

KASSOUF, S. T. y E. O. THORP (1967): *Beat the Market: A Scientific Stock Market System*. New York: Random House.

KEIM, D. (1983): "Size-Related Anomalies and Stock Market Seasonality: Further Empirical Evidence", *Journal of Financial Economics*, 12, pp. 13-32.

KENDALL, M. y A. STUART (1977): *The Advanced Theory of Statistic*, New York: MacMillan Publishing Co.

KINNEY, W. y M. ROZEFF (1976): "Capital Market Seasonality: The Case of Stock Returns", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 379-402.

KLEMKOSKY, R. C. y B. G. RESNICK (1979): "Put-Call Parity and Market Efficiency", *Journal of Finance*, 34, pp. 1141-1155.

KLEMKOSKY, R. C. y B. G. RESNICK (1980): "An Ex Ante Analysis of Put-Call Parity", *Journal of Financial Economics*, 8, pp. 363-378.

KLEMKOSKY, R. C. y B. G. RESNICK (1992): "A Note on the No Premature Exercise Condition of Dividend Payout Unprotected American Call Options: A Clarification", *Journal of Banking and Finance*, 16, pp. 373-379.

KON, S. J. (1984): "Models of Stock Returns: A Comparison", *Journal of Finance*, 39, Nº 1, pp. 147-165.

KREMER, J. W. y R. L. ROENFELDT (1992): "Warrant Pricing: Jump Diffusion vs. Black-Scholes", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, pp. 255-272.

KUNITOMO, N. (1992): "Improving the Parkinson Method of Estimating Security Price Volatilities", *Journal of Business*, 65, Nº 2.

LAMOUREUX, C. G. y W. D. LASTRAPES (1993): "Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities", *Review of Financial Studies*, 6, Nº 2, pp. 293-326.

LANE, M. y G. BURGHART (1990): "How to tell if Options are Cheap", J*ournal of Portfolio Management*, pp. 72-78.

LANGETIEG, T. C. (1980): "A Multivariate Model of the Term Structure", *Journal of Finance*, 35, Nº 1, pp. 71-97.

LATANÉ, H. A. y R. J. RENDLEMAN (1976): "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", *Journal of Finance*, 31, Nº 2, pp. 369-382.

LAUTERBACH, B. y P. SCHULTZ (1990): "Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives", *Journal of Finance*, 45, Nº 4, pp. 1181-1209.

LEE, M. y V. NAIK (1990): "General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns", *Review of Financial Studies*, 3, pp. 493-521.

LEE, W. Y., R. K. S. RAO y J. F. G. AUCHMUTY (1981): "Option Pricing in a Lognormal Securities Market with Discrete Trading", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 75-101.

LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistical*, 47, pp. 13-37.

LO, A. W. (1986): "Statistical Tests of Contingent Claims Asset Pricing Models: A New Methodology", *Journal of Financial Economics*, 17, pp. 143-174.

LO, A. W. (1992): "Aspectos empíricos sobre la determinación del precio de las opciones y otros activos derivados", *Cuadernos Económicos de I.C.E.*, 1, Nº 50.

LO, A. W. y A. C. MACKINLAY (1988): "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test", *Review of Financial Studies*, 1, Nº 1, pp. 41-66.

LONGSTAFF, F. A. (1990): "The Valuation of Options on Yields", *Journal of Financial Economics*, 26, pp. 97-121.

LOZANO, G. (1993): "Reflexiones sobre la validez del modelo de Black-Scholes", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 22, Nº 77, pp. 919-936.

MACBETH, J. D. y L. J. MERVILLE (1979): "An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model", *Journal of Finance*, 34, pp. 1173-1186.

MACBETH, J. D. y L. J. MERVILLE (1980): "Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models", *Journal of Finance*, 35, pp. 285-300.

MACMILLAN, L. W. (1986): "Analytic Approximation for the American Put Option", *Advances in Futures and Options Research*, 1, pp. 119-139.

MALONEY, K. J. y R. J. ROGALSKI (1989): "Call-Option Pricing and the Turn of the Year", *Journal of Business*, 62, Nº 4, pp. 539-552.

MANASTER, S. y G. KOEHLER (1982): "The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model: A Note", *Journal of Finance*, 37, Nº 1, pp. 227-230.

MANDELBROT, B. (1963): "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, pp. 394-419.

MANDELBROT, B. y H. M. TAYLOR (1967): "On the Distribution of Stock Price Differences", *Operations Research*, 15, pp. 1057-1062.

MAÑAS, L. A. A. (1988): "Dinámica a corto plazo de los tipos de cambio: volatilidad y opciones sobre divisas", *Cuadernos Económicos de I.C.E.*, 1, Nº 38, pp. 9-47.

MAULEÓN, I. (1991): *Inversiones y riesgos financieros*, ed. Espasa-Calve, S. A, Madrid.

MELINO, A. y S. TURNBULL (1990): "The Pricing of Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics*, 45, pp. 239-265.

MELINO, A. y S. TURNBULL (1991): "The Pricing of Foreign Currency Options", *Canadian Journal of Economics*, 24, pp. 455-480.

MERTON, R. (1971): "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory*, 3, pp. 373-413.

MERTON, R. (1973): "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-183.

MERTON, R. (1976a): "Option Pricing When Underlying Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 125-144.

MERTON, R. (1976b): "The Impact on Option Pricing of Specification Error in the Underlying Stock Price Returns", *Journal of Finance*, 31, pp. 333-350.

MERTON, R. C. (1980): "On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation", *Journal of Financial Economic*s, 8, pp. 323-361.

MERTON, R. C. (1982): "On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-Time Models", en *Financial Economics: Essays in Honor of Paul Cootner*, eds. Sharpe, W. y C. Cootner. Prentice Hall, Inc., New Jersey.

MERTON, R. C. y P. A. SAMUELSON (1969): "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility", *Industrial Management Review*, 10, pp. 17-46.

MERTON, R. C. y P. A. SAMUELSON (1974): "Fallacy of the Log-normal Approximation of Optimal Portfolio Decision-Making Over Many Periods", *Journal of Financial Economics*, 1, pp. 768-783.

MIHOJ, A. (1987): "A Multiplicative Parameterization of ARCH Models", Working Paper, Department of Statistics, University of Copenhagen.

MILNE, F. y S. M. TURNBULL (1991): "A Simple Approach to Interest-Rate Option Pricing", *Review of Financial Studies*, 4, Nº 1, pp. 87-120.

MORGAN, I. (1976): "Stock Prices and Heteroscedasticy", *Journal of Business*, 49, pp. 496-508.

MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, 34, pp. 768-783.

NAIK, V. (1993): "Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns", *Journal of Finance*, 48, Nº 5, pp. 1969-1984.

NEIDERHOFFER, V. y M.F.M. OSBORNE (1966): "Market Making and Reversal on the Stock Exchange", *Journal of the American Statistical Association*, 61, pp. 897-916.

NELSON, D. B. (1990): "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 45, pp. 7-38.

NELSON, D. B. (1991): "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59, pp. 347-370.

NELSON, D. B. y K. RAMASWAMY (1990): "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models", *Review of Financial Studies*, 3, Nº 3, pp. 393-430.

OFFICER, R. R. (1972): "The Distribution of Stock Returns", *Journal of American Statistical Association*, 67, pp. 211-232.

OSBORNE, M. F. M. (1959): "Brownian Motion in the Stock Market", *Operations Research,* 7, pp. 145-173.

PAGAN, A. R. y G. W. SCHWERTZ (1990): "Alternative Models for Conditional Stock Volatility", *Journal of Econometrics*, 45, pp. 267-290.

PANTULA, S. G. (1986): "Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment", *Econometrica Review*, 5, pp. 71-74.

PARKINSON, M. (1976): "The Random Walk Problem: Extreme value Method for Estimating the Variance of the Displacement (diffusion constant)". Working Paper, University of Florida.

PARKINSON, M. (1977): "Option Pricing: The American Put", *Journal of Business*, 50, pp. 21-36.

PARKINSON, M. (1980): "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return", *Journal of Business*, 53, Nº 1, pp. 61-65.

PATELL, J. M. y M. A. WOLFSON (1979): "Anticipated Information Releases Reflected in Call Option Prices"; *Journal of Accounting and Economics*, 1, pp. 117-140.

PEIRÓ, A. (1994): "The Distribution of Stock Returns: International Evidence", presentado en el II Foro de Finanzas, Instituto de Empresa de Madrid, Noviembre 1994.

PEÑA, I. (1993): "Medidas de volatilidad en mercados financieros", Documento de Trabajo, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid.

PERRY, P. (1982): "The Time-Variance Relationship of Security Returns: Implications for the Return-Generating Stochastic Process", *Journal of Finance*, 37, pp. 857-870.

PITTS, M. y G. TAUCHEN (1983): "The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets", *Econometrica*, 51, pp. 485-505.

POON, S. y T. HO (1992): "The GARCH Option Pricing Model: U.K. Evidence", *Proceedings 19th European Finance Association Conference*, . IV. Lisboa.

POTERBA, J. y L. SUMMERS (1984): "The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations", Working Paper nº 1462, National Bureau of Economic Research, Cambridge.

PRAETZ, P. D. (1972): "The Distribution of Share Price Changes", *Journal of Business*, 40, pp. 317-335.

PRESS, S. J. (1967): "A Compound Events Model for Security Prices", *Journal of Business*, 40, pp. 317-335.

RABINOVITCH, R. (1989): "Pricing Stock and Bond Options when the Default-Free Rate is Stochastic", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, Nº 4, pp. 447-457.

RESNICK, B. G., A. M. SHEIKH y Y-S SONG (1993): "Time Varying Volatilities and Calculation of the Weighted Implied Standard Deviation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28. Nº 3, pp. 417-430.

ROGALSKI, R. J. (1978): "Variances and Option Prices in Theory and Practice", *Journal of Portfolio Management*, pp. 43-51.

ROGALSKI, R. J. y S. M. TINIC (1986): "The January Size Effect: Anomaly or Risk Mismeasurement?", *Financial Analysts Journal*, Noviembre-Diciembre, pp. 63-70.

ROLL, R. (1977): "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 251-258.

ROLL, R. (1983): "Vas ist das?. The Turn of the Year Effect and the Return Premia of Small Firms", *Journal of Portfolio Management*, 9, pp. 18-28.

ROMEO, M.R.G. (1993): "El Mercado Español de Opciones y Futuros sobre la Renta Variable, MEFF R.V.", *Análisis Financiero*, Nº 61, pp.24-32.

ROSENBERG, B. (1972): "The Behavior of Random Variables with Nonstationary Variance and the Distribution of Security Prices", Graduate School of Business, Working Paper Nº 11, University of California, Berkeley.

ROSENFELD, E. (1980): *Stochastic Processes of Common Stock Returns: An Empirical Investigation*. Tesis doctoral no publicada. Sloan School of Management, Massachussets Institute of Technology, Cambridge.

ROSS, S. A. (1976): "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, pp. 341-366.

ROSS, S. A. (1978): "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams". *Journal of Business*, 3, pp. 453-476.

ROSS, S. A. (1989): "Information and Volatility: The No-Arbitrage Martingale Approach to Timing and Resolution Irrelevancy", *Journal of Finance*, 44, Nº 1, pp. 1-17.

RUBINSTEIN, M. (1976): "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options", *Bell Journal of Economics*, 7, pp. 407-425.

RUBINSTEIN, M. (1983): "Displaced Diffusion Option Pricing", *Journal of Finance*, 38, Nº 1, pp. 213-217.

RUBINSTEIN, M. (1985): "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes", *Journal of Finance*, 40, pp. 455-480.

RUBIO, G. (1989): "Una introducción a los procesos de itô: el modelo de valoración de activos de capital como condición suficiente para la valoración de opciones", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, julio-septiembre, pp. 701-731.

RUBIO, G. (1993): "La imposición sobre plusvalías y minusvalías: sus efectos sobre el comportamiento estacional del mercado de valores", Presentado en el I Foro de Finanzas, Bilbao.

RUIZ, E. (1993): "Stochastic Volatility Versus Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", Documento de Trabajo 93-44, Departamento de Estadística y Econometría, Universidad Carlos III de Madrid.

SAMUELSON, P. A. (1965): "Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management Review*, 6 , pp. 13-31.

SAMUELSON, P. A. (1973): "Mathematics of Speculative Price", *SIAM Review*, 15, pp. 1-42.

SATCHELL, S., R. C. STAPLETON y M. G. SUBRAHMANYAM (1990): "Futures, Forwards, and Option Prices in a No-Arbitrage Economy", Working Pape*r*, Julio, New York University Salmon Center.

SAVIT, R. (1989): "Nonlinearities and Chaotic Effects in Options Prices", *Journal of Futures Markets*, 6, pp. 507-518.

SCHAEFER, S. M. y E. S. SCHWARTZ (1987): "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", *Journal of Finance*, 42, Nº 5, pp. 1113-1128.

SCHMALENSEE, R. y R. R. TRIPPI (1978): "Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia", *Journal of Finance*, 33, pp. 129-147.

SCHWARTZ; E. S. (1977): "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach", *Journal of Financial Economics,* 4, pp. 79-93.

SCHWARTZ; E. S. (1982): "The Pricing of Commodity Linked Bonds", *Journal of Finance*, 37, pp. 525-541.

SCHWERT, G. W. (1990): "Stock Volatility and the Crash of 87", *Review of Financial Studies*, 3, pp. 77-102.

SCOTT, L. O. (1987): "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and a Application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, Nº 4, pp. 419-438.

SHARPE, W. F. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, pp. 425-442.

SHARPE, W. F. (1970): *Portfolio Theory and Capital Markets*. New York: McGraw-Hill.

SMITH, C. W. (1976): "Option Pricing: A Review", *Journal of Financial Economics,* 3, pp. 3-51.

SMITH, J. B. (1981): *The Probability Distribution of Market Returns: A Logistic Hypothesis*, Tesis Doctoral, University of Utah.

SPATT, C. S. y F. P. STERBENZ (1988): "Warrant Exercise, Dividends, and Reinvestment Policy", *Journal of Finance*, 43, pp. 493-506.

SPRENKLE, C. M. (1962): "Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences", *Yale Economic Essays*, 1, pp. 172-231.

STAPLETON, R. C. y M. G. SUBRAHMANYAM (1984): "The Valuation of Options When Asset Returns Are Generated by a Binomial Process", *Journal of Finance*, 39, Nº 5, pp. 1525-1539.

STAPLETON, R. C. y M. G. SUBRAHMANYAM (1990): "Interest Rate Caps and Floors", en *Financial Options: From Theory to Practice* eds. S. Figlewski, W. L. Silber and M. G. Subrahmanyam, Business One, Irwin.

STAPLETON, R. C. y M. G. SUBRAHMANYAM (1993): "The Analysis and Valuation of Interest Rate Options", *Journal of Banking and Finance*, 17, pp. 1079-1095.

STEIN, E. M. y J. C. STEIN (1991): "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analityc Approach", *Review of Financial Studies*, 4, pp. 727-752.

STERK, W. E. (1983): "Comparative Performance of the Black-Scholes and Roll-Geske-Whaley Option Pricing Models", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, pp. 345-354.

STULZ, R. M. (1982): "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 161-185.

STULZ, R. M. y H. JOHNSON (1985): "An Analysis of Secured Debt", *Journal of Financial Economics*, 14, pp. 501-521.

TAYLOR, S. J. (1986): *Modelling Financial Time Series*, Jhn Wiley, Chichester, U. K.

TINIC, S. M. y R. R. WEST (1971): *The Economics of the Stock Market*. Praeger, New York.

VALERO, F, J. (1988): *Opciones en instrumentos financieros*, Ariel Economía/ Gesmosa.

VASICEK, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

WESTERFIELD, R. (1977): "The Distribution of Common Stock Price Changes: An Application of Transactions Time and Subordinated Stochastic Models", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 12, pp. 743-765.

WHALEY, R. E. (1981): "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 207-212.

WHALEY, R. E. (1982): "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks: Empirical Tests", *Journal of Financial Economics*, 10, pp. 29-58.

WIGGINS, J. B. (1987): "Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates", *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 351-372.