Curso 2003/04
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/7
I.S.B.N.: 84-7756-594-5

RAMÓN ANTONIO DEPOOL RIVERO

La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS)

Director
MATÍAS CAMACHO MACHÍN

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

A Mary Carlota, Jorge y Daniel

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento, por una parte, a mi director de tesis el Dr. D. Matías Camacho Machín por todo el apoyo que siempre me brindó, hasta en los momentos más difíciles, y que estoy seguro que sin su ayuda no se hubiesen logrado los objetivos que nos propusimos.

Por otra, a las personas que de forma directa o indirecta me han ayudado durante la realización de mis estudios doctorales, especialmente a las siguientes personas: Nácere Hayek Calil, Martín Socas Robayna, Mercedes Palarea, Juan Trujillo, Margarita Rivero, Severiano González, Fernando Pérez, Pablo González Vera, Blanca Bonilla, Victorio, Alicia Bruno, Francisco Almeida, Marcos Moreno, Juan José Salazar, José Ángel Dorta, Josefa Hernández, Luis Lluna, José Méndez, José Sabina, Rodrigo Trujillo, Jorge García, Josefa Perdomo, Sebastián Cubas, Trinidad González, Mª Soledad Pérez, Manuel Hernández, Roger Rojas, Domingo Hernández, Pablo Alonso, Marcelino Santana.

A Michèle Artigue, Víctor Hernández, Carmen Azcárate, Fernado Hitt, Manuel Santos Trigo, Rosa Páez Murillo.

Luis Cardenas, José Valdivé, Roger Acosta, Antonio Martínez, Douglas Jiménez, Edgar Gudiño, Wilfredo Vargas, Pablo Pérez, Dióscoro Monasterio, La señora Norma.

A todos los estudiantes que participaron en las actividades realizadas en cada etapa de la investigación.

Finalmente, a todas aquellas personas que, aunque no las he mencionado, han contribuido de alguna manera al éxito de mis estudios.

A mi hija Mary Carlota, mis padres, hermanos, sobrinos, compadres y ahijados.

ÍNDICE

Páginas

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

CAPÍTULO IV. ESTUDIO EXPLORATORIO

CAPÍTULO V. EL ESTUDIO EXPERIMENTAL. PRIMERA FASE

INTRODUCCIÓN

El uso de las nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y en particular, el uso de los ordenadores, se empieza a vislumbrar en esta década como un medio de enseñanza que puede crear entornos de aprendizaje útiles para la enseñanza de las Matemáticas, sobre todo en los niveles de Enseñanza Secundaria y Universitaria. En general, las primeras investigaciones, basadas en secuencias de aprendizaje desarrolladas con ordenadores, no toman en cuenta que los aspectos afectivos podrían tener una relación con aquéllos que están exclusivamente implicados en la adquisición de los conocimientos matemáticos, que se imparten con determinados programas informáticos. No obstante, en los últimos años se han realizado distintas investigaciones en las que algunas de las componentes afectivas, tales como las actitudes, creencias o concepciones hacia las Matemáticas, han pasado a ser consideradas como elementos de análisis importantes de distintos conceptos matemáticos enseñados mediante diferentes medios tecnológicos, que influyen en el éxito o fracaso en términos de aprendizaje. Investigaciones desarrolladas por Artigue (1997a), Gómez (1997), Mayes (1998) y Galbraith y Haines (1998), entre otras, destacan tanto la importancia de los aspectos del dominio afectivo de los estudiantes hacia las matemáticas como la relación existente con el uso de nuevas tecnologías, para el aprendizaje de algunos conceptos determinados de la Matemática escolar.

Es sabido que la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Cálculo Infinitesimal poseen una problemática que surge paralelamente con su aparición en los programas de la enseñanza media y primeros cursos universitarios. El Cálculo siempre ha sido considerado un tema complejo difícil de enseñar.

El trabajo que se presenta constituye una investigación que se realiza conjuntamente entre la Universidad de La Laguna (España) y la Universidad Nacional Experimental Politécnica “Antonio José de Sucre” UNEXPO (Venezuela), mediante la cual se pretende, de una parte, analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción del software *DERIVE* en los cursos de Cálculo para los estudiantes de Ingeniería, y de otra, analizar las actitudes de los estudiantes de ingeniería hacia el uso de las tecnologías de la información y la comunicación para el aprendizaje del Cálculo. Se ha elegido como tópico concreto el concepto de Integral Definida, elaborándose a tal efecto un Programa de Utilidades (PU) sustancialmente diferente al que viene incorporado en *DERIVE*, con el objetivo de introducir el concepto de Integral Definida partiendo del problema clásico de las cuadraturas y mostrando cómo aproximar el área limitada por una curva. Se pretende con ello, de una parte, que el estudiante asimile tanto la perspectiva gráfica como numérica del concepto de Integral Definida y de otra, que el cálculo de la Integral Definida de una función (continua o no) no sea visto exclusivamente como la diferencia de una primitiva evaluada en los extremos del intervalo de integración $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ primitiva}\right)$, tal y como se muestra en algunas investigaciones (Orton 1983; Eisenberg y Dreyfus, 1991).

Resultan frecuentes las incoherencias que surgen en los estudiantes al tener que resolver la Integral Definida de una función de la que no pueden encontrar su primitiva. Recientemente se han propuesto modificaciones al curriculum, por ejemplo, Azcárate (1996) sugiere introducir el concepto de Integral Definida a partir de la integración numérica, independientemente de la derivada.

En esta línea, en nuestra investigación, se pretende, con la utilización de Prácticas de Laboratorio basadas en el PU elaborado, que el estudiante comprenda el significado de la integración aproximada como un medio para encontrar respuestas a situaciones que modelizan la realidad (Weigand y Weller 1998), las cuales son susceptibles de ser resueltas mediante el cálculo de integrales definidas.

Desde la inclusión de las materias de Cálculo en las carreras de Ingeniería ha habido diferentes enfoques de los métodos para enseñarlo, aunque existe una predisposición al uso casi exclusivo de procedimientos algorítmicos para la resolución de los diferentes problemas que se plantean. Una gran cantidad de libros de texto favorecen esa concepción de la enseñanza dado que en general dedican, tal y como señala Tall (Tall 1997), a la resolución de ejercicios rutinarios una parte importante, entre un 30 y un 50%.

A partir de los años ochenta, con la rápida evolución de las nuevas tecnologías informáticas, empiezan a aparecer en el mercado programas para ordenadores personales, tales como el MACSYMA, MUMATH, etc. -denominados manipuladores simbólicos- que son capaces de resolver fácilmente los ejercicios rutinarios, que, de otro modo, requerirían de una instrucción en técnicas de cálculo muy laboriosas. Comenzó a partir de entonces, principalmente en USA y Canadá, un replanteamiento sobre qué y cómo debe ser enseñado el Cálculo en los últimos cursos de Secundaria y primeros cursos de Universidad. En una sociedad, donde cada vez más el ordenador juega un papel fundamental, la enseñanza del Cálculo debe estar planteada sin obviar esta realidad.

En la década de los noventa y con la aparición de algunos programas más específicos, con más capacidades tanto simbólicas como gráficas (MAPLE, MATEMÁTICA, MATLAB, MATHCAD, *DERIVE*, etc.), el uso de los PCS[*] (Programas de Cálculo Simbólico) o CAS (Computer Algebra System) se ha ido extendiendo, aunque en ningún caso el manejo de éstos puede considerarse como generalizado. Los libros de texto empiezan en estos últimos años a incluir problemas específicos, que para su resolución necesitan utilizar tales programas y utilizan gráficas sugerentes construidas haciendo uso de este software (Thomas y Finney 1992; Edwards y Penney 1996; Bradley y Smith 1998; Stewart 1999). Ahora bien, el uso de estos PCS queda reducido, en general, a desarrollar cálculos directos de las primitivas de funciones, de desarrollos de Taylor, de representaciones de funciones, y no suelen ser utilizados como herramientas de enseñanza y aprendizaje, que permitan construir a los estudiantes los conceptos básicos del Cálculo.

Quizás uno de los PCS que por sus propias características (fácil manejo, economía de memoria, etc.) ofrece más posibilidades didácticas, es el *DERIVE*.

[*] En la literatura anglosajona existe el acuerdo de denominar a estos programas CAS. Sin embargo, en la comunidad de habla hispana, se utilizan varios términos. Ortega (2002) se refiere a *DERIVE* como un SCA (Sistema de Cálculo Algebraico) y otros investigadores hablan de SCF (Sistemas de Cálculo Formal) o PAS (Programas de Álgebra Simbólica). Nosotros a lo largo de toda la Memoria hablaremos de PCS.

Este programa permite, tal vez de modo más elemental que otros, debido principalmente a su concepción con fines educativos:

- Realizar operaciones de cálculo simbólico: operaciones con vectores, matrices y determinantes; resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones; cálculo de derivadas e integrales (definidas e indefinidas), sumas de series, cálculo de límites, obtención de los polinomios de Taylor de una función; representación gráfica de funciones en forma explícitas, implícitas, paramétricas y en coordenadas polares.
- Programar funciones que usen las distintas capacidades del programa antes mencionadas, es decir, definir una serie de funciones que combinen las operaciones básicas que vienen implementadas en *DERIVE*.
- Utilizar ficheros con funciones (Programa de Utilidades-PU) definidos por otros usuarios para propósitos diversos como: resolver ecuaciones diferenciales, trabajar con Álgebra Lineal, etc.

La incorporación del *DERIVE* como apoyo para la enseñanza de las Matemáticas en los últimos cursos de Secundaria y primeros cursos de Universidad, comienza a ser una realidad. Se han desarrollado diferentes proyectos de investigación subvencionados por las instituciones académicas responsables que han tratado de extender el uso de tal software (Artigue et al, 1995; Drijvers et al, 1997; Heugl 1997), aportando resultados bastante alentadores. A pesar del temprano optimismo despertado por el uso de PCS existe un amplio abanico de cuestiones sin responder. Por ejemplo, ¿cuál es la relación entre lápiz-papel y el trabajo en un entorno informático? ¿Cómo afecta el uso de PCS al curriculum? ¿Cómo afectan los PCS a la comprensión de los conceptos? ¿Qué conocimientos previos se requieren para usar un PCS de forma productiva?

El Documento de Discusión del 12 ICMI Study titulado *"The Future of the Teaching and Learning of Algebra"* señaló las siguientes interrogantes como cuestiones básicas que necesitan de respuestas más o menos inmediatas

- ¿Para qué estudiantes y cuándo es apropiado introducir el uso de un PCS?
- ¿Cuándo las ventajas de usarlo sobrepasan el esfuerzo que hay que poner en aprender a utilizarlo? ¿Hay actividades en los que pueden ser realizados con provecho por estudiantes más jóvenes?
- ¿Qué intuiciones algebraicas y "sentido simbólico" necesita el usuario de un PCS y a qué intuiciones conlleva el uso de éste?

- Una de las potencialidades de los PCS es que favorecen múltiples representaciones de conceptos matemáticos. ¿Cómo se puede utilizar esto correctamente? ¿Pueden ser “sobreutilizados”?
- ¿Cuáles son las relaciones e interacciones entre distintas aproximaciones y filosofías de la enseñanza de las Matemáticas con el uso de PCS?
- Los estudiantes que utilizan distintas herramientas informáticas resuelven los problemas y piensan en los conceptos de forma distinta. Los profesores tienen más opciones para cómo enseñar. ¿Qué impacto tiene esto en la enseñanza y el aprendizaje? ¿Qué tipos de sistemas favorecen qué tipos de aprendizaje? ¿Pueden ser caracterizadas teóricamente estas diferencias?
- ¿Cómo debería ser un curriculum de Álgebra en un país donde los PCS están disponibles libremente? ¿Qué habilidades manipulativas deberían retenerse? (Chick et al, 2001)

Es claro que la integración de los Programas de Cálculo Simbólico en la educación matemática hace emerger muchas cuestiones que aún están por responder; y en nuestra investigación trataremos de aportar algunas respuestas parciales a las mismas.

La investigación que se presenta cubre dos aspectos principales:

Un primer aspecto, que se relaciona con el currículo habitual del Cálculo. Tratamos de introducir, previo al estudio del cálculo de primitivas, el concepto de Integral Definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica partiendo de la idea de aproximación y utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS), ***DERIVE.*** Se pretende analizar la viabilidad de esta modificación del currículo, las potencialidades y dificultades que surgen en su implementación y, finalmente, analizar cómo adquieren los estudiantes el concepto de Integral Definida.

El segundo aspecto, que denominaremos “afectivo”, consiste en analizar las actitudes de los alumnos hacia el uso de los ordenadores para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, en general y de los PCS en particular. Se utilizarán instrumentos que permitan, tanto antes como después del desarrollo de la secuencia didáctica, estudiar si existen modificaciones de las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y sobre el uso del PCS.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores es por lo que la investigación que se desarrollará en esta Memoria Doctoral tiene como objetivos generales:

1. Diseñar, implementar y evaluar un módulo instruccional, basado en un conjunto de Prácticas de Laboratorio, utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE* para la enseñanza del concepto de Integral Definida, para estudiantes de un primer curso de ingeniería.

2. Analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico, en el que se enfatizan los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica, en la comprensión de la Integral Definida.
3. Analizar las actitudes hacia las matemáticas, el uso de los ordenadores y el aprendizaje con *DERIVE* de los estudiantes, cuando son inmersos en un plan de enseñanza que utiliza herramientas tecnológicas como elemento básico para su aprendizaje.

La Tesis Doctoral que se presenta, se estructura en siete capítulos que describiremos a continuación:

En el capítulo I, después de situar el marco general en el que se desarrolla la investigación, se presentan los resultados de la revisión de la literatura científica que configura los tres campos donde se enmarca nuestro trabajo: el ámbito afectivo, el uso de los PCS para la enseñanza y aprendizaje de los diferentes conceptos del Cálculo y, finalmente, se analizan las distintas investigaciones relacionadas, fundamentalmente, con la enseñanza y aprendizaje del concepto de Integral Definida.

Terminaremos este capítulo, estableciendo el problema y justificación de investigación y los objetivos generales y específicos de nuestro estudio.

El capítulo II se dedica a la configuración del marco teórico que guiará nuestro trabajo de investigación. Se describen los distintos componentes que intervienen, tanto para el ámbito afectivo (creencias y actitudes) como para aquéllos que tienen que ver con los aspectos cognitivos curriculares (Los sistemas de representación semióticos, la visualización matemática, los PCS en el aprendizaje de las Matemáticas), que convergen en el establecimiento de un modelo de competencia cognitivo para el aprendizaje del concepto de Integral Definida.

En el capitulo III se presenta el enfoque metodológico utilizado en la investigación, que resulta ser una metodología descriptiva y cualitativa que utiliza diferentes técnicas e instrumentos para la recogida de la información.

Se describen además en este capítulo, el diseño general y las fases de la investigación, así como los módulos instruccionales utilizados para la enseñanza del concepto de Integral Definida. También describiremos en detalle las distintas escalas de actitudes utilizadas en el estudio.

Se incluye además, la descripción global de los distintos cuestionarios de conocimientos que se utilizaron, así como la descripción y uso de las redes sistémicas que se emplearon para facilitar nuestro análisis.

El capítulo IV se dedica a la presentación, análisis y discusión de los resultados del primer estudio desarrollado, el estudio exploratorio, el cual constituyó el primer acercamiento hacia la investigación que se desarrolló posteriormente, sirviendo principalmente de validación de los instrumentos de análisis que darían lugar a nuestro posterior trabajo de investigación.

Se organiza en tres partes principales, cuyos resultados aparecen publicados en distintas revistas de carácter nacional e internacional. En relación con el estudio sobre las actitudes (Camacho y Depool, 2000a, 2001b; Depool y Camacho, 2001) y en el estudio sobre el concepto de Integral Definida (Camacho y Depool, 2000b).

En el capítulo V se describe la primera la primera fase del estudio experimental. Se incluyen en él los resultados del estudio definitivo sobre actitudes hacia: las Matemáticas, el uso de los ordenadores y el uso del *DERIVE* (Camacho y Depool, 2001a, 2002b) así como el análisis y discusión de los resultados de un segundo estudio sobre el aprendizaje del concepto de Integral Definida (Camacho y Depool, 2002a, 2003d, 2003e), después de que los estudiantes utilizaron el material curricular (Módulo Instrucccional) elaborado por los investigadores (Camacho y Depool, 2003b).

Finaliza el capítulo con la presentación de las conclusiones, obtenidas a partir del uso de los distintos instrumentos y técnicas.

En el capítulo VI, se presentan, analizan y discuten los resultados del último estudio realizado, centrado en el aprendizaje del concepto de Integral Definida. Los resultados de las investigaciones anteriores (estudio exploratorio y estudio experimental, primera fase) dieron lugar a diferentes modificaciones del módulo instruccional y al Programa de Utilidades (Camacho y Depool, 2003b) que facilitaron la estructuración de nuestro estudio definitivo. Se desarrolló la instrucción en tres fases que permitieron analizar, mediante un estudio de casos y poniendo en juego un modelo de competencia cognitivo (Camacho y Depool, 2003a, 2003c), el grado de comprensión alcanzado por los estudiantes después del periodo de formación que cubrieron.

Finalmente, en el capítulo VII aparecen recogidas las conclusiones de la Memoria Doctoral organizadas en torno a los tres objetivos principales de la investigación, los aspectos afectivos, centrados en las actitudes y los de ámbito cognitivo-curricular, centrados en la comprensión del concepto de Integral Definida adquirido por los estudiantes, cuando el plan de formación que siguen se estructura, tomando como elemento básico un módulo de instrucción que considera el software *DERIVE* como elemento central en su desarrollo.

Consideramos, finalmente, que los resultados de esta investigación podrán ser de utilidad para la estructuración de un primer curso de Cálculo de Ingeniería en las Universidades Latinoamericanas, que tome en consideración el uso de los Programas de Cálculo Simbólico para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Cálculo, así como de ayuda a la toma de decisiones de los profesores de Matemáticas de estos niveles. De otra parte, creemos que nuestra investigación puede ayudar al diagnóstico de diferentes aspectos afectivos que influyen en la actitud que pueden tener los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores y que, tomándolos en consideración, contribuirán a la mejora de su enseñanza y aprendizaje.

La Memoria finaliza con las referencias bibliográficas que han sido utilizadas en el desarrollo de la investigación.

Para completar la memoria, se incluye un volumen de Anexos en los que se recogen los módulos de instrucción utilizados, las distintas escalas, de actitudes, los cuestionarios de conocimientos y las redes sistémicas utilizadas, así como también las transcripciones de las videograciones realizadas en los diferentes estudios desarrollados.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este Capítulo expondremos una visión general de área problemática y del tema específico de investigación. Está dividido en tres partes.

En la primera parte daremos la visión general del contenido de la investigación.

La segunda parte, se dedica al análisis y revisión de distintas investigaciones sobre las actitudes, el uso de los Programas de Cálculo Simbólico en la enseñanza de las Matemáticas y el estudio del concepto de la integral.

En la tercera parte se expone la delimitación del problema de investigación y la justificación del estudio.

1.1. EL ÁMBITO Y CONTENIDO DE LA INVESTIGACIÓN

En los últimos veinte años es indudable que las Tecnologías de la Información y la Comunicación han empezado a jugar un importante papel en la enseñanza de las Matemáticas. En particular el uso de los ordenadores y software específico están surgiendo en esta década como elementos que crean entornos de aprendizaje que pueden ser útiles para la enseñanza de las Matemáticas, sobre todo en los niveles de formación Secundaria y Universitaria. En general, se puede afirmar que las investigaciones, basadas en secuencias de aprendizaje desarrolladas con ordenadores, no suelen distinguir los aspectos actitudinales de aquéllos que están exclusivamente relacionados con la adquisición de los conocimientos matemáticos que se imparten con determinados programas informáticos. No obstante, en los últimos años se han desarrollado algunas investigaciones que tienen que ver con el dominio afectivo de los estudiantes. Investigadores tales como McLeod (1992), Artigue y Lagrange (1997), Gómez (1997), Mayes (1998), Galbraith y Haines (1998), destacan tanto la importancia de los aspectos del dominio afectivo de los estudiantes hacia las Matemáticas como la relación existente con el uso de nuevas tecnologías para el aprendizaje de algunos conceptos determinados de la Matemática escolar.

La investigación que se presenta se desarrolla en el campo conceptual del Cálculo (o Análisis Matemático) y en su enseñanza y aprendizaje, cubriendo dos aspectos principales:

Un primer aspecto, de ámbito cognitivo mediante el cual se trata de preparar material curricular con la finalidad de introducir previamente al estudio del cálculo de primitivas, el concepto de Integral Definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica, partiendo de la idea de aproximación y utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE.* Se pretende analizar la viabilidad de esta modificación del currículo, las posibles potencialidades y dificultades que surgen en su implementación, así como la comprensión de los alumnos del concepto de Integral Definida.

El segundo aspecto, que denominaremos “afectivo”, consiste en analizar las actitudes de los alumnos hacia el uso de los ordenadores para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, en general y de los PCS en particular. Se utilizarán instrumentos que permitan estudiar, tanto antes como después del desarrollo de la secuencia didáctica, si existen modificaciones de las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y sobre el uso del PCS.

En esta investigación tendremos en cuenta en relación con el primer ámbito de estudio los siguientes aspectos: El concepto de Integral Definida y los procesos que intervienen en la adquisición de dicho concepto.

Un número importante de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas se centran en los problemas sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Entre las posibles motivaciones de ello, Dreyfus y Eisenberg (1990) señalan que el Cálculo constituye la rama de la Matemática Avanzada que más tiempo ocupa en la enseñanza institucionalizada actual, y que su aprendizaje posee un gran número de problemas no triviales que requieren su estudio.

Muchas son las nociones propias del campo conceptual del Cálculo (número real, funciones, límites de sucesiones y funciones, continuidad, derivabilidad, integración, ecuaciones diferenciales, variable compleja,...), en las que las investigaciones han identificado dificultades y errores persistentes en estudiantes con rangos diferentes de habilidad. En la mayoría de éstas, los conceptos aparecen asociados a imágenes del concepto (concept image, en el sentido de Vinner, 1991) débiles y son utilizados en un nivel exclusivamente algorítmico. Todas ellas denotan la escasa visualización de los conceptos involucrados y la ausencia de conexiones cognitivas entre lo visual y lo analítico, lo gráfico y lo algebraico.

En esta investigación nos centraremos, como ya se ha indicado, con el concepto de integral y pondremos nuestro énfasis en las relaciones de este concepto con el de área. Para ello, consideraremos principalmente los aspectos numéricos y gráficos de la Integral Definida.

Los aspectos fundamentales que vamos a tener en cuenta en el desarrollo de la Investigación son:

1. La problemática de la definición del concepto de integral como área bajo una curva.
2. La dualidad del concepto de Integral Definida, considerada a su vez como proceso y objeto.
3. La visualización del concepto de Integral Definida.

La definición representa, más que cualquier otro aspecto, el conflicto entre la estructura de la propia Matemática y los procesos cognitivos necesarios para la adquisición del concepto. Habitualmente, la forma en que se presenta la Matemática en los textos y las distintas publicaciones científicas no reflejan el proceso de su creación y lleva a los profesores a plantear sus clases mediante secuencias del tipo Definición-Teorema-Aplicación, obviando así los procesos que aparecen involucrados en el aprendizaje. Todo esto presupone que los conceptos se adquieren a partir de sus definiciones y que los estudiantes las usarán al demostrar teoremas y resolver cualquier tipo de problemas. Sin embargo, la realidad empírica demuestra lo contrario (Vinner, 1991).

Cuando se percibe el nombre de un concepto matemático, la memoria evoca algo que no es generalmente la definición del concepto, sino lo que Vinner y Tall denominan “concept image” (que denominamos imagen del concepto), que consiste en “toda la estructura cognitiva del sujeto asociada al concepto”. Se trata inicialmente de un aspecto no verbal, asociado mentalmente al nombre del concepto y formado por representaciones visuales, recuerdos de experiencias con el concepto, registro de ejemplos, procedimientos asociados al concepto en cuestión, sus propiedades, etc.

Cuando se propone a un estudiante una tarea con relación a un concepto matemático, el profesor supone generalmente que la definición es activada, sin embargo, eso no es lo que ocurre, usualmente el estudiante ignora la definición y responde de acuerdo a su imagen del concepto.

El carácter, adecuado o no, de las imágenes, propiedades y procesos que integran la imagen del concepto asociada a un concepto conduce a la aparición de errores e inconsistencias. Si las inconsistencias presentes en la mente de un estudiante le son puestas en evidencia, algunos de ellos las podrán resolver de la manera deseada, pero, la explotación de las inconsistencias como estrategia de trabajo en el aula no asegura resultados positivos.

Con relación a la investigación que se presenta, se tratará en todo momento de desarrollar una imagen del concepto de Integral Definida, lo más completa posible, en el sentido de obtener una perspectiva amplia que permita integrar sus diferentes tipos de representaciones semióticas (en el sentido de Duval (1993, 1995).

Los conceptos matemáticos en general pueden ser considerados según el contexto como procesos o como objetos (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991).

Como procesos son una forma dinámica de comprensión de un concepto matemático, obtenido a partir de acciones y transformaciones mentales sobre él mismo.

El concepto matemático puede ser a su vez entendido como un objeto, en el que las transformaciones mentales ya han sido ejecutadas con anterioridad.

A menudo, estudiantes que han asimilado el proceso de estimar el área bajo una curva, mediante rectángulos apropiados a los que luego se someten a un paso al límite, tienen dificultades cuando hacemos variar uno de los extremos del intervalo, dando lugar a una nueva función $\left(F(x)=\int_a^x f(x)dx\right)$dado que es aquí donde se le exige al estudiante que establezca relaciones entre el proceso del Cálculo de un área y el objeto función integral. Esa necesidad queda evidenciada por el Teorema Fundamental del Cálculo, lo que se corresponde con la construcción del objeto matemático, Integral Definida.

Al referirnos a la visualización la entenderemos como un proceso que incluye, tanto la interpretación y la comprensión de modelos visuales, que reflejan la estructura matemática del concepto de Integral Definida y el proceso de integración como el cálculo de un área bajo una curva, como la habilidad de traducir en imágenes visuales la información presentada en forma simbólica; esto es, los aspectos de codificación y decodificación del concepto. Además, incluiremos bajo esta denominación el procesamiento directo de la información en forma visual (Dreyfus y Eisenberg, 1990).

Las representaciones tienen una importante función en Matemática, las hay de dos tipos:

Representaciones simbólicas, que involucran relaciones entre los signos y sus significados. Son representaciones externas y con finalidad comunicativa.

Representaciones mentales, que son aquéllas que recogen la generación de imágenes, ejemplos o aspectos de un cierto objeto. Son representaciones internas y propias de cada individuo.

Según lo anterior, la visualización constituye un proceso íntimamente ligado a este último tipo de representaciones. Para poder entender un concepto matemático, en nuestro caso el concepto de Integral Definida, es esencial poseer representaciones mentales del concepto que incluyan varios aspectos del mismo; relacionados entre sí. Distintas representaciones simbólicas, gráficas, numéricas y algebraicas, permiten flexibilidad en el pensamiento a partir de la evocación de los diferentes aspectos del concepto de Integral Definida dependiendo del contexto utilizado. Esto es, consideraremos que adquirir el concepto de Integral Definida es entendido como "poseer el control sobre la representación que se evoque del mismo", siendo la coordinación mental de las distintas representaciones simbólicas lo que permite la flexibilidad deseada y no la mera existencia de la variedad de estas representaciones.

Dreyfus y Eisenberg (1990) señalan que, tanto la visualización como la integración de las diferentes representaciones de un concepto, han resultado ser aspectos muy problemáticos para el estudiante, que no se aprenden automáticamente como se había supuesto en el pasado, sino que necesitan ser enseñados explícitamente e integrados a los distintos tópicos del currículo.

Diferentes investigaciones, entre ellos Hernández (1995), han mostrado el predomino del modo algebraico sobre el gráfico a la hora de resolver tareas propias de los cursos de Cálculo, lo que puede ser explicado por un desequilibrio, a nivel de enseñanza, entre el énfasis puesto sobre los procedimientos algorítmicos frente al punto de vista conceptual, y, por una prematura algoritmización de los procesos diferenciales e integrales.

Artigue (1991) señala, que la introducción al Cálculo presenta dificultades a los estudiantes, que la enseñanza tradicional del cálculo resuelve en una excesiva algebrización: manipulación de fórmulas más que de funciones, énfasis en el cálculo de derivadas más que en la teoría de aproximaciones lineales, cálculo de primitivas más que la búsqueda de significado para la integral, “recetas” de resolución de ecuaciones diferenciales más que el desarrollo de sus soluciones por aproximaciones numéricas y gráficas.

Zimmermann y Cunnigham (1991) sugieren un listado de conocimientos y destrezas relacionadas con la visualización que debiera alcanzar un estudiante durante un curso de Cálculo, que, de alguna manera, podemos adaptar a nuestra propuesta:

- Entender los lenguajes analíticos y gráficos como diferentes alternativas para la expresión del concepto de Integral Definida.
- Entender las reglas y convenciones asociadas con las representaciones gráficas del área bajo una curva.
- Entender la estimación y la aproximación en un contexto geométrico.
- Disponer de un repertorio amplio de imágenes visuales.

En relación con la visualización de los conceptos matemáticos, el ordenador puede jugar un papel importante. Por una parte, permite establecer en el estudiante imágenes visuales de los fundamentos que enriquecen el repertorio de las imágenes mentales, que dan lugar a una interpretación de la Matemática como una actividad constructiva y, por otra, los problemas de la formalización pueden ser simplificados con un lenguaje de computación adecuado.

Las investigaciones sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos muestran la importancia de la construcción por parte del estudiante de su propio conocimiento, las cuales pueden ser inducidas por el uso de un Programa de Utilidades (PU) que permita manipular ideas matemáticas y reflexionar sobre ellas, o, mediante la programación de construcciones matemáticas en un lenguaje computacional que actúe paralelamente a la construcción de los procesos matemáticos subyacentes. ***DERIVE*** se encuentra entre los primeros y es por eso que lo hemos elegido para el desarrollo de nuestra investigación.

Tall (1991c) señala que el ordenador puede ser usado durante el aprendizaje con un objetivo muy preciso: llevar a cabo los procedimientos y conceder al estudiante concentrarse en sus productos. Permitiría así un cambio en la encapsulación de procesos pues, en vez de forzar al estudiante a aprender e interiorizar en primera instancia el proceso, le permitiría centrarse en las propiedades del producto, en sus relaciones a más alto nivel. Surge así, lo que Tall denomina "principio de construcción selectiva del conocimiento", mediante el cual el estudiante es alentado a centrarse separadamente en los procesos matemáticos y en los productos de tales procesos. El ordenador facilita que no siempre se focalice el proceso como paso previo al producto. Es justamente en este sentido en el que el uso del ordenador brinda nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje, que no elimina la necesidad de pasar la información por una estructura del tipo Definición- Teorema- Demostración-Aplicación.

La cuestión radica, tal y como señala Tall (1991a), en encontrar el punto de equilibrio entre la presentación del brillante edificio de la Matemática Avanzada y la presentación del rango completo del Pensamiento Matemático Avanzado que sostiene la construcción de tal edificio.

1.2. INVESTIGACIONES SOBRE EL DOMINIO AFECTIVO

En relación con nuestro segundo ámbito de investigación esto es el ámbito afectivo, cabe señalar que a partir de la década de los setenta se ha desarrollado un amplio campo de investigación en torno a las actividades, creencias y emociones hacia las Matemáticas. Numerosos trabajos se han llevado a cabo estudiando la validez de estas componentes afectivas y se han venido utilizando variados instrumentos y diversas variables que se han mostradas correlacionadas principalmente con la actitud, tales como el género, la condición de estudio (alumnos de nuevo ingreso y repetidores) y el rendimiento académico.

Podemos considerar, basándonos en la bibliografía consultada, que existe un ámbito diverso de análisis de este campo de investigación. En nuestro caso, seguiremos principalmente las aportaciones realizadas en este campo por Mandler (1989), McLeod (1992), Artigue (1997a, b), Mayes (1998), y otros. Dado que el estudio que realizamos, se enmarca dentro de la influencia de las TIC en el uso de los ordenadores, las trabajos de Galbraith y Haines (1998), Galbraith (2002), Artigue y Lagrange (1997) y Artigue (1997a, b), resultan significativos, para lo que vamos a considerar en la línea de los trabajos anteriores. Vamos a tener en cuenta en nuestra investigación las siguientes dimensiones: Confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia él, compromiso con el mismo y, uso del ordenador en las actividades matemáticas, que constituirán los elementos básicos de nuestro análisis y que en el siguiente capítulo se desarrollarán en detalle. Vamos a considerar las actitudes referidas a respuestas afectivas que poseen cierta intensidad y relativa estabilidad.

A continuación aportamos una serie de investigaciones relacionadas con las actitudes hacia las Matemáticas y hacia los ordenadores y el uso de los PCS.

Ernest (1976) menciona que en los grados del noveno al duodécimo (15-18 años de edad), el 32% de la muestra percibe que los varones son mejores en Matemáticas que las hembras, mientras que un 16% opina lo contrario.

Wolleat et al (1980) obtienen como resultado que los varones son medianamente superiores a las hembras en cuanto a habilidades, y las hembras medianamente superiores a los varones en cuanto a esfuerzo.

Mura (1987) reportó que un 51% de las hembras y un 61% de los varones poseían una autoestima alta, de su capacidad para desarrollar actividades matemáticas; y un 23% de las hembras y un 18% de los varones, una autoestima baja.

Gairín (1987), expresa que en el aula debe existir un ambiente positivo hacia la enseñanza, un clima que favorezca las actitudes que se requieren consolidar en los alumnos. Puntualiza en que el trato y la comprensión profesional del profesor son fundamentales para esos propósitos. Destaca algunos indicadores de esos logros en los estudiantes, tales como: dedicación de mayor tiempo de estudio a la materia, petición de bibliografía complementaria, nivel de asistencia a clase, mayor participación en clase, mejoramiento de los resultados escolares, presentación esmerada de sus trabajos.

Millán (1988), estudiando la opinión de alumnos de Secundaria, concluyó que ellos están de acuerdo en que las Matemáticas les producen un desarrollo mental.

Brown et al (1988) señala que un 85% de los alumnos de séptimo grado y un 80% de los de undécimo grado (13-17 años de edad) manifiestan la necesidad de sentirse bien en las clases, para poder desarrollar las actividades propias de Matemáticas.

Depool (1991) en un estudio que llevó a cabo con estudiantes de educación básica (EB), 12-15 años de edad, y ciclo diversificado (CD), 16-17 años de edad, concluye que los alumnos de sexto grado de EB poseen una autoestima mayor que los de noveno grado de EB y los de segundo año de CD. Los alumnos de sexto grado de EB tienen un mayor valor actitudinal que los de noveno grado de EB y los de segundo año de CD en cuanto a agrado hacia las Matemáticas. Los alumnos de sexto grado de EB tienen un mayor valor actitudinal que los de noveno grado de EB y los de segundo año de CD en cuanto a la predisposición para realizar trabajos matemáticos.

Ponte et al (1992) muestran evidencia que existe una relación entre las visiones y las actitudes de los profesores y las de los estudiantes, es decir, cuando los profesores son negativos hacia algo, de igual manera se manifestarán sus alumnos. Por otra parte, el estudio reveló que los alumnos prefirieron los materiales de enseñanza elaborados por sus propios profesores. De esto se deduce que el profesor debe tener competencias en el diseño y elaboración de unidades didácticas. Indica que los autores sugieren un nuevo currículo con una aproximación más intuitiva a los conceptos matemáticos con énfasis en representaciones gráficas y situaciones del mundo real, recomendando el uso de calculadoras y el trabajo en grupo.

Ganguli (1992) realizó una investigación llevada a cabo con 110 estudiantes de cuatro secciones de un curso de Álgebra, en la que participaron dos instructores (incluido el investigador), a cada instructor se le asignó un curso experimental y otro, control. Las cuatro secciones usaron el mismo libro de texto, con las mismas tareas para la casa y el contenido enseñado fue el mismo. La diferencia estuvo en que las secciones experimentales utilizaron el ordenador y las de control siguieron un curso tradicional. En la primera clase aplicó un pretest para medir el conocimiento algebraico. Los estudiantes fueron asignados al azar de acuerdo al promedio obtenido en el pretest. En la segunda clase se aplicó una prueba de actitudes, conteniendo seis escalas. La misma prueba fue aplicada al final del curso. Al grupo experimental de le aplicó un cuestionario adicional relativo al ordenador. Los contenidos tratados fueron: (1) ecuaciones cuadráticas e inecuaciones, (2) la recta, (3) sistemas de ecuaciones lineales, y (4) funciones. De los resultados concluye: el uso del ordenador influye favorablemente sobre las actitudes de los estudiantes. El grupo control muestra un decrecimiento en las actitudes en cuatro de las escalas. Los estudiantes del grupo control dieron una mejor valoración que el grupo control al responder que “el profesor hace las Matemáticas más interesantes”, “el profesor presenta el material de una manera más clara” y “el profesor domina las Matemáticas”. Teniendo el ordenador en el salón de clases y usándolo en la enseñanza pudo permitir ver a su profesor como un experto en Matemáticas. Por la experiencia de los dos instructores, se detectó que estaba claro que las gráficas generadas por el ordenador permitieron discusiones más activas en el salón de clases, en las secciones experimentales, y, consecuentemente, crearon más interacción entre el profesor y el alumno que en el grupo control. Los estudiantes del grupo experimental exhibieron menos ansiedad que los del grupo control.

Los resultados de este estudio resultan prometedores en cuanto a la integración de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Mallam (1993) en su artículo presenta una investigación llevada a cabo en escuelas de Nigeria. La muestra era de 240 mujeres de dos tipos de escuelas: mixta (varones y hembras) y unisexo. El instrumento utilizado era un escala tipo Likert con 20 ítems, 10 enunciados de forma positiva y 10, negativa. Entre las conclusiones menciona que las mujeres de la escuela unisexo tienen una actitud más positiva que las de la escuela mixta, tal vez por no tener que competir con los varones por la atención que brindan los profesores de Matemáticas a todo el grupo.

Ponte (1994) desarrolló una investigación realizada en Portugal, en la cual se describen las actitudes de profesores y estudiantes que participaron en un programa piloto organizado por el Ministerio de Educación. Los datos fueron extraídos de entrevistas (audiograbadas), observaciones y análisis de documentos. La muestra fue de siete profesores y 19 estudiantes de séptimo y décimo grados (13-16 años de edad). Concluye que la experiencia muestra que los estudiantes de preparatoria pueden ser afectados notoriamente por los cambios del plan de estudios en la Matemática. En relación a las actitudes se tiene que los estudiantes tenían una actitud generalmente positiva hacia la Matemática, aunque había diferencias entre ellos; los de séptimo grado se adhirieron a la nueva forma de trabajo y les agradó que la Matemática fuese más desafiante, aun cuando eso implicara más trabajo y mayor razonamiento. Los de décimo grado no consideraron los cambios significativos, pero expresaron su preocupación por el progreso académico.

Kissane et al (1995), aplicaron una escala tipo Likert para recolectar información sobre las actitudes hacia la innovación de los estudiantes de un curso de pregrado (segundo ciclo), en el cual se usaron calculadoras gráficas para complementar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, concluyeron que, en general, las actitudes fueron favorables. Las respuestas de los estudiantes indicaron una actitud positiva hacia el uso de la calculadora gráfica hacia todos los aspectos de la enseñanza del curso y una respuesta positiva al uso permanente de la calculadora gráfica en otros cursos de la universidad.

Lagrange (1996) realizó una investigación relacionada con las actitudes de los estudiantes hacia el uso de *DERIVE* en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. A una muestra de 459 estudiantes de bachillerato les aplicó una escala de actitudes. Los estudiantes habían utilizado *DERIVE* en sus clases habituales, unos centrados en *DERIVE* una herramienta, otros como soporte para resolver problemas reales y otros centrados en el estudio de conceptos matemáticos. Analiza las actitudes de los estudiantes, mediante un método estadístico multidimensional (Análisis implicativo) (Glas, 1992), para establecer relaciones entre las respuestas dadas a una escala tipo Likert y opiniones expresadas en respuestas abiertas (p. 95). Indica que las actitudes están ligadas a las concepciones de las Matemáticas que tienen los estudiantes. Entre los resultados obtenidos señala que los profesores deben tener en cuenta que si los estudiantes encuentran dificultades en el uso *DERIVE* tenderán a pensar que han perdido el tiempo. Los que perciben a *DERIVE* como una herramienta eficiente pueden pensar que es inútil para aprender Matemáticas; incluso quienes lo ven como una herramienta valida para realizar cálculos y, aunque les agraden los cambios para aprender Matemáticas, no necesariamente pensarán que realmente mejora su aprendizaje. La mayoría de los estudiantes perciben a *DERIVE* como una herramienta de cálculo, algunos consideran que es una herramienta usada para casos elementales y otros, como una importante herramienta cuando es utilizada de manera flexible. Menciona que otros importantes resultados, de las influencias de *DERIVE* en las condiciones en las cuales se utiliza son que una buena comprensión de las capacidades del PCS resulta imperativo; algunos sobrestiman las capacidades de *DERIVE* y no perciben cómo les puede ayudar en su aprendizaje de las Matemáticas. El uso fácil de *DERIVE* es otro factor importante en la creación de una actitud positiva hacia él; si un PCS es fácil de usar, permite que el estudiante se concentre en comprender y aprender las Matemáticas y usar el software de manera flexible. Familiarizarse con el software parece ser esencial al considerar que *DERIVE* puede ayudar a los estudiantes a comprender y aprender las Matemáticas. Finalmente concluye que es necesario planificar con mucho cuidado las lecciones cuando se utiliza *DERIVE.*

Artigue y Lagrange (1997), continuando con la investigación de Lagrange (1996), seleccionaron 30 estudiantes de dos secciones de noveno grado de bachillerato, éstos participaron en un curso especial dictado por el mismo maestro que incluía sesiones de Prácticas de Laboratorio, en donde se utilizó *DERIVE* y CABRI- Geómètra; los estudiantes trabajaron en parejas. Al finalizar el curso se aplicó la escala de actitudes utilizada por Lagrange, así como también se realizaron observaciones de clases. Los resultados obtenidos tienden a confirmar lo mencionado por Lagrange, es decir, a través de actividades bien planificadas, el uso de un PCS puede apoyar el aprendizaje de las Matemáticas y motivar interesantes actividades matemáticas, incluso para estudiantes con pocos conocimientos en Álgebra.

Gómez (1997) investigó sobre los efectos del uso de las calculadoras gráficas en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas. El estudio se realizó con tres grupos diferentes de estudiantes de precálculo de un primer ciclo de universidad. El primer grupo, denominado grupo control, cursó la asignatura de manera tradicional. El segundo, denominado grupo experimental, cursó la misma asignatura, un semestre más tarde, con la misma profesora, pero, en esta ocasión, cada uno de los estudiantes tuvo a su disposición una calculadora gráfica que podía utilizar en cualquier momento, excepto en las evaluaciones. Un tercer grupo cursó la asignatura un año más tarde, con un profesor diferente, los cuales podían utilizar la calculadora incluso en las evaluaciones. Se utilizaron tres instrumentos: la prueba de actitudes de Fennema y Sherman (Fennema y Sherman, 1976), entrevistas clínicas (Ginsburg, 1981) y un ensayo escrito con tres preguntas abiertas "¿Qué son las Matemáticas? ¿Cómo se aprenden las Matemáticas? ¿Qué papel juegan las calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas?" A los dos primeros se les aplicó al comienzo y al final la prueba de actitudes y la entrevista clínica; al tercero se le pidió al final del semestre que respondieran a las preguntas del ensayo. De los resultados de la entrevista y el ensayo concluye que la utilización de las calculadoras gráficas afecta significativamente a las actitudes de los estudiantes, estas diferencias no se manifestaron en la prueba de actitudes. Los estudiantes que utilizaron las calculadoras gráficas piensan que si trabajan intensamente, podrán tener éxito en el curso; perciben los problemas matemáticos como un reto que pueden afrontar con tranquilidad y seguridad; destacan la importancia de comprender los temas en contraposición con memorizar procedimientos y reconocen que aprender Matemáticas significa ser capaces de establecer relaciones entre los conceptos matemáticos; destacan la importancia de la representación gráfica en su visión de las Matemáticas.

Galbraith y Haines (1998) realizaron un estudio sobre las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el impacto de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Para ello aplicó un cuestionario de actitudes a 156 estudiantes de un primer curso de ingeniería, Matemáticas y Ciencias Actuariales. El instrumento constó de seis escalas para medir la confianza y motivación en Matemáticas y en los ordenadores, interacción de ordenador-Matemáticas y compromiso con las Matemáticas. Concluye que los estudiantes con alta confianza en Matemáticas creen que ellos obtienen valor mediante su esfuerzo, no se preocupan por tener que aprender temas complicados, esperan conseguir buenos resultados, y se sienten bien con las Matemáticas como materia; estudiantes con confianza baja están nerviosos al aprender nuevos contenidos, esperan que todas las Matemáticas sean difíciles y se preocupan más por las Matemáticas que por cualquier otra materia. Indican que los estudiantes con alta motivación matemática disfrutan haciendo Matemáticas, insisten en los problemas hasta que los resuelven, continúan pensando sobre sus ideas confusas fuera de la clase, y llegan a estas absortos cuando resuelven actividades matemáticas; los estudiantes con baja motivación no disfrutan con los desafíos matemáticos, se frustran teniendo que pasar tiempo resolviendo problemas, prefieren que les den las respuestas en lugar de pensar sobre ellas, y no pueden entender a las personas que se entusiasman con las Matemáticas. Señalan que el ordenador influye de manera dominante en cuanto a la interacción ordenador-Matemáticas y es de esperar que tenga un impacto significativo al integrar el uso del ordenador y las calculadoras gráficas al plan de estudio. Prefieren trabajar utilizando ejemplos más que aprender la materia teórica, les gusta probarse razonando mediante ejercicios y problemas, les agrada relacionar sus nuevos conocimientos con los que ya tenían, les gusta elaborar apuntes de las materias, y repasan su trabajo regularmente; los estudiantes con baja actitud tratan las ideas en Matemáticas como unidades separadas que deben ser posteriormente recordadas, no toman apuntes y usualmente no comprueban sus cálculos y les gusta revisar la materia toda de una vez. Tienen una alta confianza y seguridad en el uso del ordenador, desarrollan actitudes positivas a la hora de realizar actividades matemáticas utilizándolo. Tal actitud genérica hace esperar un importante impacto cuando estas herramientas sean integradas en la enseñanza.

Philippou y Christou (1998) afirman que la mayoría de las investigaciones han confirmado la hipótesis que las variables afectivas, tales como concepciones, creencias o actitudes hacia las Matemáticas juegan un rol determinante en el desarrollo de las prácticas de enseñanza. El estudio de estos autores estuvo dirigido a un programa que fue diseñado para mejorar las actitudes de futuros profesores hacia las Matemáticas. Mencionan que las actitudes negativas de los profesores tienen impacto negativo sobre las actitudes de estudiantes en ese sentido, consideran que la formación inicial del profesor debe marcar la diferencia, dado que, durante ese período los estudiantes son expuestos a experiencias bajo el liderazgo de expertos en el campo de la educación matemática.

Muñoz (1994) desarrolló una investigación con 32 maestros y 541 estudiantes. Se aplicaron dos cuestionarios, uno para los maestros y otro para los alumnos; la escala fue de tipo Likert. Para los estudiantes se consideraron las variables sexo, edad, expectativas profesionales y antecedentes escolares. Las conclusiones relacionadas con los estudiantes fueron: Más del 80% de los estudiantes considera que las Matemáticas son importantes, útiles, interesantes, y sólo un poco más de 50% considera que son fáciles y comprensibles. Encontró una tendencia mayor en los alumnos de sexo masculino hacia el estudio de las Matemáticas y a tener empleos en donde utilicen las Matemáticas. No encontró actitudes distintas en grupos de edad diferente. El principal rechazo de las Matemáticas por los alumnos se manifiesta principalmente hacia la práctica docente y hacia el seguir estudiándolas o aplicándolas.

Mohammad y Tall (1999) en un estudio relacionado con un programa de formación, desarrollaron un curso de treinta horas en diez semanas en la Universidad de Warwick (UK). En clase se monitorearon las actitudes de los estudiantes y se les aplicó un cuestionario. Se infirió que la resolución de problemas debería causar un cambio de actitudes de los estudiantes en la dirección deseada, aunque cabe esperar que esos cambios se reviertan cuando los alumnos regresen a la enseñanza tradicional. Se concluyó que los métodos de enseñanza tradicional en la universidad pueden causar cambios de actitudes, en los alumnos, que a veces son contrarios a los que los profesores desean.

Ortiz (2000) realizó una investigación en la que participaron ocho estudiantes de quinto curso de Matemáticas (profesores en formación) los cuales cursaron un seminario especial utilizando calculadoras gráficas, en donde se modelaban problemas reales en el campo del Álgebra Lineal. Uno de los aspectos a medir fue las actitudes de los profesores en formación hacia la utilización de las calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje de las

Matemáticas; para ello se aplicó al principio y al final del curso una prueba de actitudes tipo Likert. Con respecto a este aspecto concluye que la actitud favorable hacia el uso de las calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas pudiera revelar que los profesores en formación consideran pertinente su utilización, por parte de los alumnos de bachillerato, para aprender Matemáticas.

Noguera (2001) realizó un estudio sobre el impacto del avance tecnológico en el ambiente educativo. Éste proporciona una descripción cualitativa de las actitudes de los estudiantes de décimo grado de bachillerato, al utilizar un PCS en el aprendizaje del Álgebra. Se seleccionaron 6 estudiantes de un total de 38, los cuales participaron en un curso especial con el uso de un PCS por espacio de 6 semanas. Para medir las actitudes se utilizó una escala tipo Likert, aplicada al principio del curso a la totalidad de los estudiantes y al final del curso a los 6 estudiantes seleccionados; además se hicieron observaciones de clases tanto individuales como de grupo. Los estudiantes tenían poca experiencia en el uso de calculadoras gráficas. Reporta que los estudiantes experimentaron un cambio positivo en cuanto a las actitudes hacia las Matemáticas.

Ortiz (2002) en su investigación se propuso, entre varios, el objetivo de analizar las actitudes manifiestas hacia los componentes de un programa de formación denominado Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra Lineal (MCA), dirigido a futuros profesores de Matemáticas. Entre sus conclusiones se tiene que los futuros profesores estuvieron de acuerdo en que la inclusión de las actividades de modelización contribuye a dar significado al aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas tal como la señala Blum (1991). Esto significa que los profesores en formación percibieron que los alumnos se podrían sentir atraídos hacia el estudio de las Matemáticas cuando se recurre a la modelización. Añade que, el moderado impacto del programa en las actitudes de los participantes hacia la calculadora gráfica en el aprendizaje del alumno podría indicar que algunos participantes conservan temores a que los alumnos pierdan habilidades algebraicas con papel y lápiz. Puntualiza que, esto se podría mejorar ampliando en el programa MCA la reflexión sobre el papel de la calculadora en el aprendizaje del alumno, sus alcances y limitaciones.

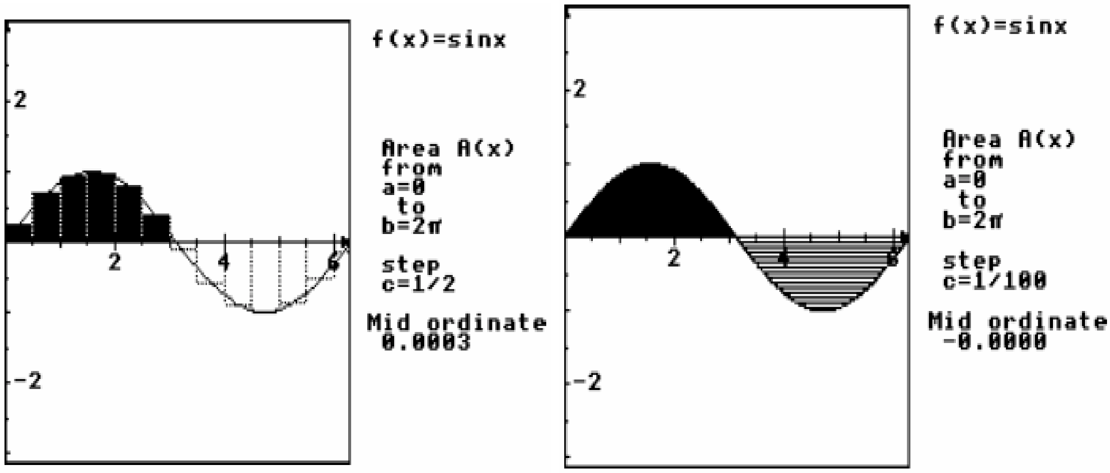
Hannula (2002) reporta una investigación en donde evalúa cuatro procesos que identifica como aspectos de las actitudes: emociones reflejadas en situaciones, emociones asociadas con estímulos, consecuencias esperadas y relaciones de situaciones y valores personales. Los alumnos considerados fueron de séptimo a noveno grados; éstos fueron observados en clase y entrevistados, con la finalidad de establecer los cambios actitudinales, creencias y conductas. Esta actividad se desarrolló durante dos años. Presenta un estudio de casos con los resultados de una alumna. Menciona que hay tres conclusiones: la más importante es que las emociones, asociaciones, expectativas y valores pueden ser usados para describir y precisar los cambios en las actitudes. La segunda, las actitudes pueden cambiar dramáticamente en un tiempo relativamente corto. La tercera, las actitudes negativas hacia las Matemáticas pueden ser una estrategia de la defensa con éxito de un mismo-concepto positivo.

1.3. INVESTIGACIONES SOBRE LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Se referencian una serie de investigaciones llevadas a cabo por varios autores que han utilizado algún PCS en sus estudios.

Tall (1985) menciona que la llegada del ordenador a las aulas ofrece una buena oportunidad para la enseñanza del Cálculo, el cual permite demostraciones gráficas. En su artículo expone algunas dificultades observadas en los estudiantes al estudiar límites, derivadas e integrales. En este último indica, citando a Orton (1980), que éste notó que los estudiantes tenían dificultades con el concepto de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, cuando $f(x)$ es negativa o *b* es menor que *a*. Interpretado geométricamente que se puede dar una demostración cognoscitiva profunda de las ideas.

Muestra dos gráficos hechos con un PCS, utilizando rectángulos punto medio, explicando la construcción de estos rectángulos, tanto si están sobre el eje OX como debajo de él; menciona que al aumentar el número de rectángulos se puede ilustrar como se aproxima el área de la región. Puntualiza que una aproximación geométrica usando un ordenador no puede considerarse como de bajo nivel matemático; al contrario se puede probar que tiene beneficios directos para la comprensión de las Matemáticas.



Tall (1986) retoma lo mencionado en el artículo anterior y expone una serie de estrategias que se pueden utilizar para explicar gráfica y numéricamente, el cálculo aproximado del área de una región bajo una curva, utilizando el Graphic Calculus II (software creado por él). El software aproxima el área utilizando los extremos izquierdos o derechos de los rectángulos o los puntos medios de la base de cada uno de ellos, sin embargo señala que el programa no estima sumas inferiores y superiores. Si la función es creciente o decreciente no hay problema, pero, si en un intervalo hay un máximo o mínimo, se requeriría una técnica sofisticada para encontrarlos. La teoría de “sumas superiores e inferiores” es construida a partir de un teorema de existencia y por tanto habrá que considerar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función para poder utilizar el software.

Tall (1990) menciona en este artículo que tradicionalmente el cálculo es el estudio de los algoritmos simbólicos para la diferenciación e integración, la relación entre ellos, y su uso para la resolución de problemas. Sólo al final del curso, cuando todo falla, se introducen los métodos numéricos, como el método de Newton-Raphson para resolver ecuaciones, o la regla de Simpson para el cálculo de áreas.

El problema con tal acercamiento es que a menudo los estudiantes están muy bien versados en algoritmos y pueden resolver complicados problemas simbólicos, pero todavía no entienden el significado de lo que están haciendo. Con la llegada del software para el ordenador, el cual puede llevar a cabo estos algoritmos mecánicamente, la pregunta es qué partes del cálculo deben ser estudiadas en futuros planes de estudios. En su opinión debe usarse la tecnología del ordenador para producir un acercamiento más versátil al tema de las representaciones numéricas y gráficas.

Expresa que las ideas fundamentales, en el cálculo, son las de cambio, la razón de cambio, y la acumulación debida al cambio. Simbólicamente éstos se representan por el concepto de la función, la derivada y la integral, respectivamente. En los estudios del Cálculo para el futuro, se necesita ampliar las ideas en estos tres aspectos, para que en la enseñanza del Cálculo no sólo se aplique la abstracción propia del cálculo tradicional, sino también los planteamientos aplicados al mundo real.

Tall (1991a) señala que en los recientes años, la disponibilidad creciente del ordenador con gráficos de alta definición, ha ofrecido la posibilidad de reforzar, en general, la visualización en Matemática y el Cálculo, en particular. El software interactivo para ordenador puede usarse para dar la visión a los estudiantes, maestros y matemáticos profesionales, de una manera que no podría imaginarse hace una década. No obstante, la tecnología trae con ella, el desafío para re-evaluar lo que es importante en el plan de estudios y esto está demostrando ser la tarea más difícil para los matemáticos profesionales con una rica experiencia en tecnología del pre-ordenador.

Tall (1997) destaca que los Programas de Cálculo Simbólico (o manipuladores simbólicos) están siendo ahora más extensivamente usados para enseñar Cálculo, desde cursos basados en libros de software, que incluyen manipulación simbólica y el dibujo de gráficas en *Mathematica* (Brown, Porta y Uhl 1990; 1991a), a cursos de laboratorio añadidos a cursos estándar en *Maple* (Muller 1991) y proyectos de investigación (Heid 1988; Palminter 1991). Brown, Porta y Uhl (1990; 1991b) dan cuenta del uso por parte del estudiante de las facilidades simbólicas proporcionadas en los libros de *Mathematica*, en donde los estudiantes pasan de la manipulación simbólica al software y permiten que se concentren en otros aspectos del problema. Heid (1988) usó un software gráfico para ilustrar conceptos y el antiguo PCS *MuMath* para efectuar manipulaciones simbólicas, practicando las habilidades de lápiz y papel sólo en las últimas tres semanas de un curso de quince semanas. Los estudiantes se desenvolvieron mejor en preguntas conceptuales y no había diferencias significativas con los estudiantes de un grupo control que llevaron un curso completo de quince semanas sobre técnicas estándar. Palmiter (1991) usó el software simbólico MACSYMA para enseñar a un grupo de estudiantes un primer curso de integración durante cinco semanas mientras que un grupo paralelo estudió un curso tradicional durante unas diez semanas. Los estudiantes del MACSYMA usaron el software para efectuar cálculos rutinarios mientras que a los estudiantes tradicionales se les enseñaron técnicas. Al final ambos grupos tuvieron un examen conceptual y un examen computacional. El examen conceptual lo tuvieron ambos grupos bajo idénticas condiciones; a los estudiantes experimentales se les permitió el uso del MACSYMA en el examen computacional pero tuvieron sólo una hora mientras que a los estudiantes de control se les dieron dos horas. Los resultados mostraron que en preguntas conceptuales los estudiantes experimentales lograron un promedio de 89.8 por ciento (± 15.9) comparados con la puntuación promedio del curso tradicional que fue del 72.0% (± 20.4), y sobre preguntas computacionales un promedio del 90.0% (± 13.2) comparado con el 69.6% (± 24.2). Esto da claros indicios de que "estudiante+herramienta de manipulación" puede tener más éxito en tareas conceptuales y computacionales que un estudiante que trabaja de una manera tradicional. Sin embargo, otros experimentos no muestran siempre mejoras importantes en su realización, particularmente en habilidades manipulativas con lápiz y papel. Comparando estudiantes en un laboratorio con ordenadores usando *DERIVE* con un curso tradicional, Coulombe y Mathews (1995) no encontraron diferencias importantes en el conocimiento, manipulación de lápiz y papel, comprensión conceptual o destrezas mentales de orden superior, aunque produzcan un nivel similar de realización mientras que se da una familiaridad adicional a los estudiantes con la tecnología computacional. El uso de software con instalaciones gráficas y manipulaciones simbólicas cambia las concepciones de los estudiantes de Cálculo y sus capacidades para llevar a cabo las destrezas relacionadas. Por ejemplo, teniendo dibujada la gráfica con tecnología que no incluya cálculos explícitos y la división de los valores de la función. Hunter et al. (1993) encontraron que un tercio de los estudiantes de una clase podían contestar la siguiente pregunta, antes de un curso, pero no después: "¿Qué puede decir usted sobre u si $u = v + 3$ y $v = 1$?". Durante el curso ninguno de ellos practicaron la sustitución de valores en las expresiones y la habilidad parece haber retrocedido hasta que no se usó en el postest. Con la misma prueba, Monaghan et al. (1994) encontraron que algunos estudiantes, que usan un PCS para efectuar el proceso de diferenciación, respondían a una explicación solicitada sobre la diferenciación describiendo la sucesión de "secuencia de teclas" que era necesario para conseguir el resultado. Parece que algunos estudiantes pueden simplemente reemplazar un procedimiento que tiene poco significado conceptual por otro. Los cambios en el aprendizaje están ocasionados por una variedad de factores de los que la tecnología es sólo uno. Coston (1995) estudió los efectos sobre distintos grados de aprendizaje cooperativo, con y sin el uso de la tecnología. Los resultados no mostraron diferencias importantes con el solo uso de la tecnología, pero el aprendizaje cooperativo más tecnología produjo una mejora importante en la actitud, mientras que el aprendizaje cooperativo por sí mismo produjo una mejora bastante importante en la resolución de los problemas. En una era tecnológica donde las operaciones de cuentas de los comercios se realizan y se comprueban por ordenador y la tecnología computacional se usa en los negocios y el comercio, la necesidad de poner a prueba a un estudiante con ausencia de la tecnología puede llegar a ser cada vez más cuestionado. Aún mientras algunos cursos "conceptualmente orientados" han mostrado a estudiantes capaces de responder bien a preguntas conceptuales, capaces de realizar mejores manipulaciones usando la tecnología y no realizando peor las habilidades a lápiz y papel con una pequeña práctica, el conocimiento que se obtiene es seguramente diferente y es apropiado para tener nuevas energías y también ocultar los defectos.

Nomiki et al (1997) exponen los resultados de un estudio hecho en la Universidad Estatal de California. En esta Universidad los estudiantes deben presentar una prueba denominada "Entry level Mathematics" (ELM) como requisito para inscribirse en la misma. Están exentos de esta prueba los estudiantes con buenos promedios o los que tengan aprobado en Bachillerato algunos cursos de nivel matemático en otras instituciones. Los que no aprueben el ELM, deben cursar uno de tres cursos de Matemáticas. Los estudiantes para completar la educación general toman un curso de Introducción a la Estadística. En este estudio se comparan tres grupos que tomaron el curso de Introducción a la Estadística. Se refieren a estos grupos como: Colegiados, Tradicionales y Tecnológicos. Los colegiados que no requirieron hacer los cursos eran 1335. Los tradicionales, 109 estudiantes, no aprobaron el ELM y tomaron un curso de Álgebra Básica en el cual no se usó tecnología. Los Tecnológicos, 34 estudiantes, no aprobaron el ELM y tomaron un curso de Álgebra Básica con tecnología. Estos últimos utilizaron *DERIVE* en su curso. Del estudio se concluyó: Los resultados indican que la introducción de tecnología en un curso de Álgebra Básica fue de un gran éxito. La capacidad de los estudiantes, antes que utilizaran *DERIVE,* era peor que la de los otros estudiantes en el curso de Estadística. La incorporación de *DERIVE* les ha dado las habilidades necesarias para nivelarse con los otros estudiantes del curso de Estadística. El éxito de usar la tecnología en el curso de Álgebra Básica es aun más relevante, dado el hecho que en el momento de este estudio los estudiantes en el curso de Estadística no usaron el ordenador. Menciona que utilizar los estudiantes un PCS en el curso de Álgebra Básica ha permitido que los mismos desarrollen sus habilidades matemáticas permitiéndoles centrarse en entender los problemas y hacer Matemáticas. Además, los estudiantes han podido transferir sus nuevas habilidades analíticas al curso de Estadística y probablemente también a otros cursos.

Mann y Zehavi (1998) presentan una serie de programas de utilidades, distintos a los que vienen incorporados en la "librería" de *DERIVE,* para el cálculo de valores extremos de una función. Los problemas son resueltos utilizando representaciones gráficas y simbólicas. Indica que:

> Un importante cambio positivo es el uso de un alto lenguaje matemático para interactuar con PCS, el cual facilita a los estudiantes el hacer Matemáticas, y ampliar el rango de los problemas que ellos pueden resolver. Otro importante resultado es que podemos aproximar problemas que eran considerados tabú en años anteriores. Además, los obstáculos en solución de problemas que describimos, nos condujo a crear nuevos algoritmos basados en ideas que pudieron ser aplicadas con los antiguos PCS.

Weigand y Weller (1998) presentan tres problemas que modelan situaciones de la vida cotidiana. El primero se refiere al movimiento periódico del hilo en una máquina de coser; el segundo sobre el movimiento de un pintón en un motor y el tercero sobre el promedio de temperatura en Munich. Utilizan los software Euklid y Cabri para simular el movimiento y *DERIVE* para analizar las representaciones de las curvas. Expone, en cada problema, un programa de utilidades diferente al que viene incorporado en la librería de *DERIVE.* Los problemas son resueltos utilizando representaciones graficas y simbólicas.

Marlewski (1999) presenta un programa de utilidades distinto a los que aparecen en la librería de *DERIVE* para el estudio de las fórmulas de cuadraturas. El programa de utilidades proporciona soluciones gráficas a los problemas de cuadratura.

1.4 INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Se han llevado a cabo diversas investigaciones sobre el estudio del concepto de Integral Definida.

Una de las primeras investigaciones realizadas fue la de Orton (1983), que desarrolló una investigación cuyo propósito fundamental era el estudio de la comprensión, por parte de los estudiantes, de distintos aspectos que tienen que ver con el concepto de Integral de Riemann. Se eligieron 110 estudiantes entre 16 y 22 años, que fueron entrevistados, mediante 38 cuestiones relacionadas con límites, área de rectángulos, aproximación del área bajo una curva, cálculo de integrales y cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

Entre las conclusiones de su investigación, destacamos que:

- Algunos estudiantes consideraron de difícil solución las preguntas que se referían a la comprensión de la integración como límite de la suma, por lo que resulta poco viable introducir las integrales de esta forma, dado que el fin último es que los estudiantes sean capaces de integrar y dar respuesta a simples aplicaciones.
- El concepto de límite parece haber sido descuidado en niveles más elementales, lo que no ayuda a la subsiguiente introducción de las integrales.
- La disponibilidad de calculadoras hace más fácil la integración numérica; en la práctica, los procedimientos pueden ser tediosos y las ventajas de tener una calculadora resultan más obvias en la integración que en la diferenciación (se trata de sumar números decimales); en definitiva las calculadoras facilitan el cálculo aproximado del área bajo una curva.

- Resulta aconsejable que para la introducción del Cálculo se utilicen diagramas y gráficos.

Mundy (1984) presenta el análisis de un cuestionario cumplimentado por 973 estudiantes que habían seguido un curso de Cálculo, que debían responder a una pregunta de opción múltiple que pedía evaluar la integral $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$, con posibles respuestas 0, 9, 12,13, 14. Solamente el 5.4% de los estudiantes respondió correctamente a la pregunta. El 24% indicó que era 0, el 22% que era 9 y el 48% que era 12. Mundy concluyó que los estudiantes no tenían una comprensión visual de que la integral de funciones positivas puede ser considerada en términos de área bajo una curva.

Dick (citado en Eisenberg y Dreyfus, 1991), basándose en los resultados de Mundy, utilizó una encuesta similar a la anterior con estudiantes que estaban finalizando un curso semestral de Probabilidad y Estadística. Se trataba de evaluar si los estudiantes que representaban gráficamente de forma correcta tales funciones podrían o no, usar su gráfica para resolver la integral. A partir de la función:

$$f(x)=\begin{cases}|x-2| & 1<x<3\\ 0 & x\leq 1 \; y \; x\geq 3\end{cases}$$

Se les pidió lo siguiente:

a) Representar gráficamente la función.

b) Hallar la $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$, donde *X* simboliza una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad dada por *f(x)*.

Su análisis lo realizó basándose en los siguientes puntos:

1. Exactitud de la representación grafica de *f(x).*
2. La formulación de $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$ como

$$\int_{3/2}^{3} |x-2|\,dx$$

3. El cálculo de $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$ a través del análisis de la gráfica o del cálculo de

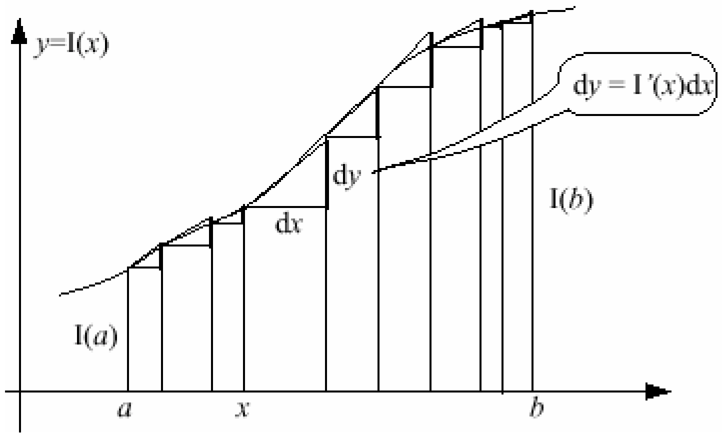
$$\int_{3/2}^{2} -(x-2)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx \; .$$

Dick concluye que, mientras el 92% graficó correctamente la función de densidad y el 89% también dio una formulación correcta para $\mathrm{Prob}(X \geq 3/2)$, solamente el 44% calculó correctamente la integral (72% por integración y 28% mediante el análisis de la gráfica). En relación con sus resultados

> No existe evidencia de interpretación gráfica de ninguna clase... incluso puede esperarse que estudiantes de universidad, con una relativa formación en Matemática avanzada, ignoren el uso de sus propias gráficas, aun cuando éstas podrían ser utilizadas en un problema de Cálculo.

Tall (1991d) menciona que los estudiantes que se inician en la universidad evidencian una confusión en cuanto al significado de las notaciones $\frac{dy}{dx}$ y $\int f(x)dx$. Muchos estudiantes repiten lo que se les ha enseñado, que $\frac{dy}{dx}$ es la derivada de la función $y = f(x)$ y debe considerarse como un símbolo indivisible, no como un cociente. Aquéllos que invariablemente dan un significado al *dx* como una entidad separada hablan de un "cambio muy pequeño de *x*" o un cambio "infinitamente pequeño respecto a *x*" o incluso "el límite de δx como tendiendo a cero". Entretanto el *dx* en $\int f(x)dx$ significa "con respecto a *x*", aunque los estudiantes se muestran deseosos de hacer la sustitución $du = \frac{du}{dx}dx$, para calcular la integral. Muy pocos de ellos podían resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (donde se les había dicho que $\frac{dy}{dx}$ era un símbolo indivisible) por "separación de variables" para conseguir $ydy = -xdx$ (¿qué significado tiene el *dx*?) entonces se coloca delante el signo de integral $\int ydy = -\int x\,dx$ (donde presumiblemente *dx* ahora significa "con respecto a *x*"), para obtener la solución(s) $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$

En el resto del artículo expone la relación entre la diferencial y la integral en el sentido de Leibniz, conecta con la Integral Definida usando el triángulo característico. Define una función $y = I(x)$ donde $I'(x) = f(x)$, ilustra su explicación con el gráfico



Wenzelburger (1993) realiza una propuesta para la enseñanza del Cálculo en donde la introducción no se realiza a través de límites y una definición formal de continuidad, sino por un acercamiento intuitivo a los conceptos fundamentales de una Matemática de los cambios. Con esto, asegura que se sigue el camino histórico que tomó el Cálculo Diferencial; primero se desarrolló una noción intuitiva de la razón de cambio, de la derivada o de la *fluxión*, como la llama Newton. Luego se formalizó y se precisó lo que es límite, continuidad y convergencia.

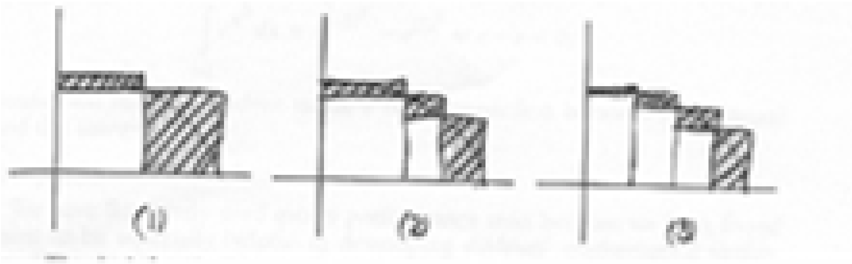
Con respecto al Cálculo Integral propone regresar a sus fuentes, y poner en relieve sus conceptos básicos, sin tomar el camino a través de una fundamentación matemática estricta, tal como el estudio formal de funciones, continuidad y definición de límites con ε y δ. El enfoque es intuitivo y relacionado con aplicaciones. Menciona que de cierto modo se reconstruye didácticamente el desarrollo histórico del Cálculo Integral, ya que se parte de sumas. La Integral Definida se presenta como límite de una suma (interpretado geométricamente como área). Se determinan las sumas con métodos gráficos y numéricos, después, para intervalos dados finitos. Al trabajar con intervalos semiabiertos, resulta una relación funcional entre el valor de la suma y la longitud del intervalo. De tal manera se prepara el concepto de la integral indefinida. Los ejemplos de aplicación tienen que ver con economía y física, con abundantes representaciones gráficas, en donde se utilizan rectángulos para aproximar geométricamente el área bajo una curva.

Masingila y Prus-Wisniowska (1996) reportan un estudio en donde se les pedía a los estudiantes que explicaran por escrito una serie de planteamientos. En relación a la aproximación del área bajo una curva se les planteó

Para una partición *P* de un intervalo $[a, b]$ y una función positiva *f* sobre el intervalo $[a, b]$, pueden formar sumas superiores e inferiores que son aproximaciones particulares del área exacta bajo una curva $y = f(x)$ entre *a* y b. Estas aproximaciones, como estimaciones imperfectas, pueden ser mejoradas adicionando puntos a la partición *P* y obteniendo nuevas sumas superiores e inferiores que se acerquen al área exacta. Explicar por qué esto es así.

Un estudiante, el que llama Pam, da una explicación usando una interpretación visual,

Adicionando puntos a la partición uno hace el área de la región de las regiones entre las sumas superiores e inferiores muy pequeñas como se ilustra. Con más puntos, se acerca esta aproximación al valor real del área bajo la curva



La región más oscura representa el error marginal. Como se puede ver, el gráfico con más puntos-(3)- tiene menos área oscurecida- mostrando mayor exactitud.

Otro estudiante que llama Philip muestra una mayor comprensión de la integral como limitando procesos:

Al incrementar el número de puntos en la partición, el número de rectángulos también se incrementa, lo que hace que se acerque más a la curva. Por tanto, las sumas superiores e inferiores se incrementan, hasta que finalmente, el área bajo la curva es "estampada" entre áreas estimadas, y se cumple la definición.

Menciona que al permitir a los estudiantes expresarse permite al profesor ver de manera natural el sentido de las ideas de los estudiantes.

Al plantearle a los estudiantes que,

1) ¿Es verdadero o falso que si

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

entonces la función *f* es igual a cero en el intervalo $[a,b]$? Si respondes que es verdadero, explica por qué piensas que es así. Si respondes que es falso, da un ejemplo de una función que no sea idénticamente igual a cero sobre $[a,b]$ pero tal que

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

2) ¿Es $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$ positivo, negativo o cero? Justifique su respuesta.

Señala que muchos estudiantes dieron ejemplos de funciones impares y explicaron que daba valor cero cuando ellos integraban sobre un intervalo simétrico cercano a $(0,0)$. No obstante, las respuestas de otros estudiantes revelaron concepciones erróneas y confusión en lo concerniente a la Integral Definida. Por ejemplo, Robert escribe la siguiente respuesta:

> Si la función $f(x)=x^3$ cuando $f(x)$ es integrada entre -1 y 1;
>
> $$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^3}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$
>
> La respuesta es cero, sin embargo esta función tiene algún área bajo la curva entre -1 y 1, pero no puede ser considerada al hacerla de esta manera.

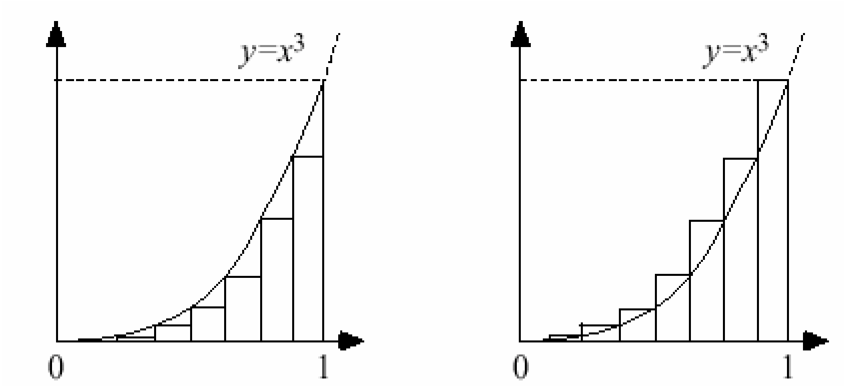
Menciona que la confusión de Robert indica que su comprensión de la integral es la relacionada con el caso de una función positiva y el área bajo su gráfico.

Otras respuestas de los estudiantes revelan que no comprenden la relación entre la integral y el integrando: “ f tiene que ser cero porque se sabe que puede ser cero en $[a,b]$”. Responden a la segunda pregunta “$\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$ debe ser cero porque $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx = e^{(-1)^2} - e^{(1)^2} = -e = 0$”, confirmando que los estudiantes hacen una conexión falsa entre la integral y el integrando.

Calvo (1997) realizó un estudio cuyo objetivo era preparar las bases para una propuesta didáctica que permitiese a los estudiantes de un primer curso de Cálculo la construcción de un esquema conceptual de Integral Definida (concept image, en el sentido de Vinner) (Vinner, 1991), consistente con su definición formal, y rico en relaciones con los esquemas conceptuales de área y derivada. Uno de los instrumentos que utilizó fue un cuestionario de 10 ítems, que fue aplicado a 56 estudiantes.

Entre las conclusiones de esta investigación, Calvo sugiere utilizar como definiciones de integral aquéllas que resulten independientes del concepto de derivada y del conjunto de reglas algorítmicas asociadas a su cálculo. Propone elegir como definición de integral, la versión propuesta por Riemann y reformulada más tarde por Darboux en términos de supremos de sumas inferiores e ínfimos de sumas superiores. En cuanto a las conexiones con el esquema conceptual de área, señala que el éxito en la actividad matemática se relaciona con la posesión, por parte del individuo, de ricos esquemas conceptuales que permitan, no sólo establecer conexiones con otros esquemas conceptuales, sino la existencia (en el propio esquema conceptual) de varias facetas del mismo concepto relacionadas entre sí, de manera que faciliten el paso de una perspectiva a otra según las exigencias del problema que se ha de resolver. En el caso del concepto de Integral Definida, las facetas cuya existencia y conexiones dan riqueza al esquema conceptual son la algebraica, la numérica y la gráfica. Un recurso para sugerir a los estudiantes imágenes visuales enriquecedoras del esquema conceptual de Integral Definida consiste, para Calvo, en explorar su relación con el esquema conceptual de área.

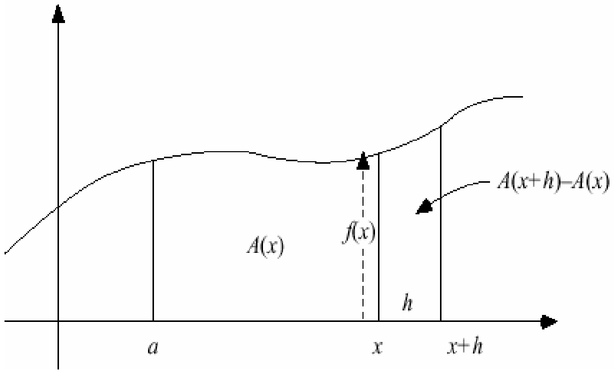
Tall (1997) en relación a la visualización de los conceptos de Cálculo y en particular con respecto al concepto de integral menciona que la integración puede verse como encontrar el área bajo una gráfica, y esto puede visualizarse sumando las áreas aproximadas de franjas delgadas bajo la gráfica. Se evidencia en esto dificultades cognitivas conocidas. Por ejemplo, Schneider (1993) señala que, considerando sumas superiores e inferiores de la función $y = x^3$ desde 0 hasta 1 tomando más y más rectángulos (ver figura),



Sumas superior e inferior

algunos estudiantes piensan que "mientras los rectángulos tienen un grosor, no llenan toda la superficie bajo la curva, y cuando se reducen a líneas, sus áreas son iguales a 0 y no pueden sumarse". El proceso del límite contiene obstáculos conceptuales implícitos (Sierpinska 1985, 1987). Por ejemplo, algunos estudiantes creen que el proceso es potencialmente infinito, continuando siempre, por lo que no pueden alcanzar su conclusión. Dado que el área A(x) desde un punto fijo a un punto variable x puede ser considerada como una función de x (que puede resultar difícil para estudiantes dado que conciben las funciones puramente desde el punto de vista de las fórmulas), el

Teorema Fundamental del Cálculo dice que $A'(x) = f(x)$. Visualmente el área adicional bajo la curva desde x hasta $x+h$ es $A(x+h) - A(x)$

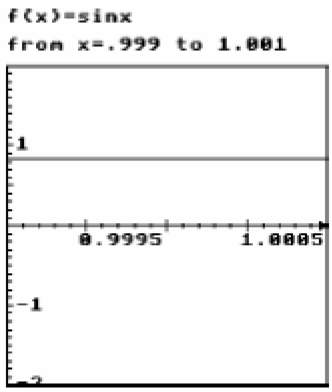


El área bajo la gráfica.

Aquí sólo se puede tratar con *una única* franja y puede ser más visualmente evidente que, bajo condiciones apropiadas, de manera que como $h \to 0$, se tenga que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \to f(x)$$

Una intuición es que una gráfica continua "se aplasta" cuando la escala vertical se mantiene constante y la horizontal se dilata, mientras que visualmente tiene la forma de un rectángulo (Tall 1986; 1991a).



Dilatación horizontal de la gráfica del $sen\, x$

Aquí el área desde x hasta $x+h$ se ve aproximadamente como un rectángulo de altura $f(x)$, ancho h y, cuando h tiende a cero, la aproximación puede imaginarse como "mejorada", así que $(A(x+h) - A(x))/h$ es muy próximo a $f(x)$, como se requiere. Nuevamente existen obstáculos cognitivos claros; por ejemplo tratar de imaginar como una aproximación llega a ser una igualdad en el límite. La propiedad del "aplastamiento" puede suponerse equivalente a la continuidad puntual imaginando el píxel para representar una altura $f(x)\pm\varepsilon$, entonces, si se "aplasta" en la ventana, debe existir un $\delta>0$ tal que la gráfica desde $x-\delta$ hasta $x+\delta$ permanece dentro del píxel de altura $f(x)\pm\varepsilon$. Esto es,

Dado $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que

$x-\delta<t<x+\delta$ implica que $f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon$.

Turégano (1998) reporta una investigación enmarcada en lo que se denomina pensamiento matemático avanzado, relacionada con el estudio del concepto de la Integral Definida. Plantea como hipótesis de trabajo que

> Los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos de cálculo sin dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de *Integral Definida* y a sus propiedades mediante la idea de *área bajo una curva* (p. 234).

Señala la importancia del desarrollo epistemológico al mencionar que el conocer el proceso histórico puede ayudar a comprender cómo se produce el proceso de aprendizaje de concepto de Integral Definida, la aparición de dificultades o errores, o a organizar su enseñanza.

Propone que en la enseñanza de la Integral Definida se debe comenzar con la Integral Definida, independientemente de la diferenciación y como primera introducción al concepto de límite; motivado por el problema que está en el origen del cálculo integral: el cálculo de áreas planas. El modelo que propone esta basado en la definición geométrica de la integral de Lebesgue, asociada a la idea de medir una región.

El estudio experimental fue llevado a cabo en tres etapas:

En la primera se tomó una muestra de 87 estudiantes de un primer curso de BUP (14- 16 años) de tres institutos. Se les administraron tres cuestionarios, eligieron 27 de ellos para una entrevista (9 de cada curso). Entre las conclusiones destaca que:

- Cuando se trata de reconocer la igualdad de áreas, la *congruencia* entre regiones diferentes por medio de equidisposición y equicomplementación, o a través de otra magnitud, se revela como el método mejor aceptado por los estudiantes. Estos métodos llevan implícito el reconocimiento de la conservación del área y de la propiedad aditiva.
- Los cortes laminares por planos paralelos o descomposición infinitesimales de las superficies no son procedimientos evocados espontáneamente para el cálculo de áreas por los estudiantes, ni en el caso de figuras rectilíneamente limitadas ni curvilíneas. Quizás esto se debe a tener que romper con la imagen que tienen del área que se cubre.
- La imposibilidad de «ver» un área como límite de una suma de infinitesimales tiene su origen en que «pasan» al indivisible de una dimensión menor antes de sumar

las áreas, y en el paso al límite les «desaparece» el área. Esto pone en evidencia que el cálculo de un área bajo una curva definida por una función crearía problemas al tratar de remitir a los indivisibles de longitud *y = f(x)*.

- Se observa en los estudiantes, tanto en el cuestionario de «infinito» como en el de «área», un empleo tácito del infinitesimal como algo muy pequeño pero distinto de cero, nunca como variable que converge en cero (pp. 237- 238).

En la segunda etapa, considerando los resultados de la primera, elaboró programas para ordenadores.

En la tercera etapa redujo la muestra a un solo grupo de un mismo instituto. En esta etapa se observaron las respuestas espontáneas y debates de los estudiantes en el aula cuando, con la ayuda del ordenador, resuelven por parejas problemas de áreas y exploran el concepto de Integral Definida. Utilizó para ello problemas propuestos y programas para ordenador. Entre las observaciones recogidas en esta etapa menciona:

- Los estudiantes tienen más dificultades en la utilización de la expresión analítica de las funciones que en la visualización de sus gráficos, lo que nos lleva a pensar que tendrán más dificultades en la comprensión del concepto *integral* como antiderivada que en el aspecto geométrico de la misma.
- El proceso de integración seguido para determinar el área es apropiado para inducir a los estudiantes a la discusión de determinados conceptos de cálculo- *sucesión, límite, número real e integral-* en un contexto, que es el del cálculo de áreas bajo una curva, y permite de esta forma organizar la experiencia previa a la formalización de los conceptos de cálculo.
- Los modelos visuales en la enseñanza del cálculo y la eliminación de cálculos algebraicos (mediante el uso del ordenador) favorece la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes que ayudarán posteriormente a la formación de los conceptos de cálculo infinitesimal.
- La clave en la evolución del concepto de *límite* ha estado en presentarles una situación evidente (altura única en un rectángulo) en un marco geométrico-numérico (en el que hay interacción en todo momento), situación que convence al estudiante de que realmente hay un número que mide la altura. La existencia de la integral queda así justificada con la existencia de la altura.
- El uso del ordenador permite que el estudiante pueda simultanear los aspectos psicológicos que se ponen en juego: abstracción, representación, formación de conceptos, inducción y visualización.
- Una visión holística del gráfico favorece la formación de la imagen de *área* bajo una curva y la de la *integral* si se procede posteriormente al análisis de sus partes, no como entidades discretas, aisladas unas de otras, sino relacionadas en un todo.
- Observamos-como ya hemos comentado- dos tendencias distintas en los estudiantes al tratar de justificar las propiedades de las integrales: unos eligen los números que determinan la medida del área, y otros, las regiones cuyas área hay que determinar. Los primeros de la relación numérica, obteniendo, al resolver las integrales, la relación entre las mismas; los segundos, hallan la relación entre las integrales de la relación entre las regiones cuya área hay que determinar. Los primeros sólo pueden obtener esas relaciones en casos concretos y experimentales; los segundos pueden obtener las relaciones en casos generales.
- Es sabido que, cuando la función que se integra viene definida en dominios divididos, es decir, por diferentes reglas en subdominios diferentes, los estudiantes tienen dificultades para hallar el área bajo una curva, y éstas se ven incrementadas si en uno de sus dominios $f(x)=0$. El acercamiento de la integral que hemos

> propuesto tiene la ventaja de que, de forma espontánea, los estudiantes utilizan diferentes dominios para plantear diferentes integrales y asignar área cero cuando $f(x)=0$. Es una transferencia inmediata, una consecuencia natural del enfoque visual de la integral y de la propiedad aditiva del área (p. 240).

Después de la etapa de aprendizaje entrevistó a nueve estudiantes con finalidad de enfrentarlos con problemas que tienen que ver con el área bajo una curva en tres contextos distintos: matemático, área bajo la curva velocidad y probabilidad geométrica. Las tareas presentadas le permitieron verificar cómo aplican los estudiantes sus imágenes del concepto *integral*, como reflejan sus errores, cómo modifican, rompen o restringen su imagen del concepto y el propio concepto para poder continuar, así como también, verificar cómo realizan transferencias a contextos distintos de aquél en que se había desarrollado el aprendizaje.

Como conclusión final menciona que en la secuenciación de contenidos, debe primar su génesis histórica sobre su orden lógico, y que la introducción a los conceptos mediante la resolución de problemas que han estado en el origen del concepto logra realizar la formación de éste. Al utilizar simultáneamente diferentes representaciones, se favorece el establecimiento de conexiones entre ellas, siendo las conexiones las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje en los estudiantes. Aquí es donde el ordenador juega un papel importante debido a su potencia visual, que ayuda a la formación y transformación de intuiciones y a la creación de la imagen del concepto, y debido también a la facilitación para realizar cálculos, eximiendo al estudiante de esta tediosa labor, el estudiante puede centrarse en la exploración y discusión de los conceptos.

Rasslan y Tall (2002) presentan una investigación en la que se explora la imagen del concepto (concept image, (Vinner, 1991)) de Integral Definida que tienen los estudiantes después de haber seguido un currículo basado en el "School Mathematics Proyect A -level" (SMP, 1997). En este caso, la integración se introduce mediante actividades de estimación del área entre una gráfica y el eje de las abscisas, usando para ello figuras y métodos numéricos. Aplicaron un cuestionario de 6 ítems a 41 estudiantes del último año de Bachillerato (17-19 años). De los resultados obtenidos, concluyeron que la mayoría de los estudiantes son incapaces de definir correctamente la Integral

Definida y que además tienen dificultades para interpretar los problemas de cálculo de áreas como integrales definidas en contextos más amplios.

Czarnocha, Dubinsky, et al (2001) realizan un análisis epistemológico de las aportaciones de matemáticos tales como Cavalieri, Wallis y Roberval al desarrollo del concepto de la Integral Definida. Reportan un trabajo sobre el concepto de la Integral Definida, realizado con un grupo de 32 estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas, de los cuales 21 habían completado un curso semestral de cálculo denominado *Cálculo, Conceptos, Computación y Aprendizaje Cooperativo* $\left(C^4L\right)$ en el que participaban 145 estudiantes; 10 habían completado un curso de dos semestres con clases magistrales de un total de 2000 estudiantes; y uno había completado los dos cursos. El método instruccional en $\left(C^4L\right)$ incluyó descubrimiento guiado en las actividades de aprendizaje cooperativo en un ambiente computacional. Se escogieron los estudiantes teniendo en cuenta la variedad de habilidades y que la muestra fuera representativa de la población. Cada uno de los estudiantes completó la *“Entrevista Cálculo Integral”* dirigida por algunos de los investigadores. La entrevista duró un promedio de una hora y las sesiones fueron audiograbadas. De los resultados los investigadores concluyeron que los estudiantes mostraban una visión diferente a la desarrollada en la instrucción recibida. Puntualizaron que pudo deberse a la naturaleza de la instrucción o a la naturaleza visual del desarrollo de los conceptos vía ordenador. Les impresionó observar a los estudiantes imitar, en una pequeña medida, los argumentos lógicos de grandes matemáticos. Indicaron que una intuición fuerte no puede destruirse por la instrucción recibida en el aula, en este caso el de las Sumas de Riemann. Mencionan que frecuentemente los profesores no tienen la oportunidad de mostrar estas concepciones a los estudiantes; la instrucción podría organizarse para que se tuviera en cuenta la intuición natural de los estudiantes en los temas en los que se debe proporcionar un método riguroso de evaluación de la Integral Definida. Tal introducción puede servir como elemento motivante a los estudiantes que tienen inclinaciones hacia las Matemáticas.

Hitt (1998), señala que una errónea utilización de una representación visual puede conducir a interpretaciones incorrectas. Expone, por ejemplo que: A un profesor de educación media superior se le solicitó que propusiera un tema y lo desarrollara para darlo en su clase de Matemáticas. Éste propuso lo siguiente para "la comprensión" del Teorema Fundamental del Cálculo y la aplicación de la propiedad:

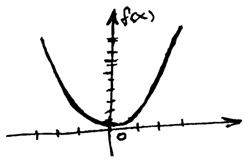
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + \int_x^b f(x)\,dx; \quad con \ x \in (a,b).$$

Propuesta del profesor (transcripción literal)
El estudiante aplicará el Teorema Fundamental del Cálculo (estableciendo la relación entre la diferencial y la integral).
Podremos decir que la Integral es conocida como la primitiva de una Función establecida, siendo está función la Derivada.
Por lo tanto la Diferencial es una secuencia de la Integral.
Analizando ejemplos que se han empleado en temas anteriores. Introduciendo la relación entre la derivada y la Integral en problemas referidos al cálculo de Áreas de una parábola, calculo de la velocidad de un móvil, etc.

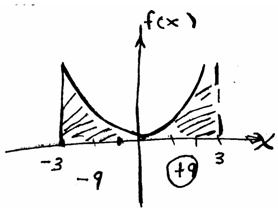
Ejemplo Sea $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ $dy/dx = 2x$ $dy = 2x\,dx$

Si graficamos la primera función de $-3 \leq x \leq 3$, [-3, 3], encontramos que



Podremos observar que se trata de una parábola con vértice en el origen y simétrica, la derivada de está función es 2x por lo tanto la Integral será $f(x) = \int 2xdx$ podremos observar que del Intervalo de [-3, 3] se podrán formar los subintervalos de [-3, 0],[0, 3]; entonces: $\int_{-3}^{3} 2x\,dx = \int_{-3}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 2x\,dx$ Por tal motivo estamos encontrando una serie de Áreas



$$\int_{-3}^{3} 2xdx = x^2]_{-3}^{3} = [3^2]-[-3]^2 = 9-9 = 0$$

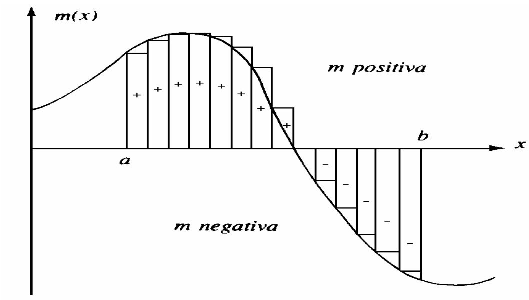
Entonces

$$2\int_{-3}^{3} x\,dx = 2\int_{-3}^{0} x\,dx + 2\int_{0}^{3} x\,dx \ = x^2]_{-3}^{0} + x^2]_{0}^{3} = 0^2 - (-3)^2 + (3)^2 - (0)^2 = -9 + 9 = 0$$

Esto es lo que deseábamos demostrar. Encontrando un método para determinar integrales más complejas.

El profesor representa gráficamente $f(x) = x^2$, señala que $f(x) = \int 2xdx$;

De la segunda gráfica del profesor y del resultado $\int_{-3}^{0} 2x\, dx = -9$, infiere que él le está asignando área negativa al área sombreada del lado izquierdo del eje vertical y positiva a la del lado derecho. Sin darse cuenta que está calculando el área de -3 a 3 de la función 2x. Probablemente, la asignación establecida por el profesor le permite momentáneamente mantener un equilibrio entre su resultado numérico y su representación gráfica. Parece no darse cuenta de su situación contradictoria entre lo algebraico y su idea geométrica con respecto al Teorema Fundamental del Cálculo. El profesor es consistente con la idea intuitiva de "área bajo la curva" conforme a la tradición, no comete errores en sus procesos algebraicos, pero no tiene una articulación coherente, es decir libre de contradicciones, con los aspectos geométricos del concepto en cuestión. Posiblemente no ha reflexionado sobre imágenes como la proporcionada por la figura siguiente



Otro ejemplo que muestra la fuerza de esa idea intuitiva de "área bajo la curva" y que produce problemas de aprendizaje, se refleja en lo que el autor criticando las "errores" de un paquete indica: *"Por ejemplo, la integral de una cosenoide Cos(x), definida en el intervalo 0 a 2*Pi, entrega un valor cero. Al margen de esa falla, Calcula es bastante estable en las cercanías de singularidad"*

González (2002) realizó una investigación relacionada con el estudio de la comprensión del concepto de la integral impropia. Para la misma seleccionó un grupo de estudiantes que cursaban primero de la Carrera de Matemáticas, a los que les aplicó un cuestionario de conocimientos y una entrevista. Previo a la realización de la entrevista elaboró un modelo de competencia cognitivo, adaptado de Socas (2001) con la finalidad de estudiar la comprensión de dicho concepto por parte de los estudiantes. De entre sus conclusiones mencionamos que los estudiantes prefieren procesos algorítmicos y ajustados a lo que se les pide. Asimismo destacamos otra conclusión relativa al empleo de las gráficas; éstas no son usadas de manera habitual y espontánea por los alumnos. La realización coordinada entre registros algebraicos y gráficos, no la consideró el investigador adecuada. Agrega que para la correcta comprensión del concepto de integral impropia es necesario visualizar el cálculo de áreas como un proceso dinámico. Finalmente, menciona que el modelo de competencia que ha elaborado resulta útil para describir el nivel de comprensión cuando entran en juego los registros de representación gráfico y algebraico en el aprendizaje de los conceptos referentes a la integral impropia.

1.5. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. CONTEXTO, OBJETIVOS E HIPÓTESIS

En los últimos veinticinco años ha habido un incremento importante de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que tienen que ver con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en los primeros niveles universitarios. Recientemente, la Comisión Internacional de Instrucción Matemática ha publicado un estudio en el que se pone de manifiesto el interés de esta línea de investigación, así como una gran cantidad de problemas de investigación educativa que van surgiendo en el aprendizaje de las Matemáticas que se imparte en la mayoría de los estudios técnicos en las Universidades (Holton, 2003).

El campo de investigación en el que tal vez se ha puesto un mayor énfasis es en el campo conceptual del Cálculo (o Análisis Matemático), que es una de las áreas de las Matemáticas, que tiene mayor presencia en esos cursos iniciales de Universidad, y en los cuales se han venido constatando niveles importantes de fracaso escolar.

Nuestro problema de investigación aparece delimitado por tres elementos principales: en primer lugar, la problemática surgida con los problemas didácticos que aparecen en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, el uso de los PCS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y, por otra parte, los aspectos que tienen que ver con las actitudes de los estudiantes, tanto hacia las Matemáticas, como hacia los ordenadores.

Un aspecto de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, se ha centrado en la determinación de las dificultades que van surgiendo en el aprendizaje de los conceptos básicos del Análisis. Artigue (1998) agrupa este número de dificultades en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están siempre en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del Análisis.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico (p. 41).

Una parte de nuestra investigación tiene que ver principalmente con dos de las categorías citadas por Artigue (1998).

En este sentido, el concepto de Integral Definida necesita tomar en cuenta las dificultades ligadas al concepto de función, por una parte, y por otra, a las dificultades que surgen de la conceptualización del concepto de límite.

Debemos tener en cuenta en nuestro trabajo la necesidad de que los estudiantes consideren las funciones como objetos en lugar de como procesos, dado que estas funciones deben ser incluidas en el proceso de integración que requiere considerar clases de funciones sobre las que puede establecerse la integral Riemann, es decir, debemos analizar las distintas dificultades que pueden surgir cuando se trate de sobrepasar la concepción puramente de tipo proceso, y tal como señalan Tall y Thomas (1991) ser capaces de relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y de objeto para desarrollar una concepción procedimental que facilite el aprendizaje de la Integral Definida.

También se deberá atender a otra clase de dificultades que surgen cuando se trabaja con el concepto de función, que son las que aparecen cuando se trata de relacionar los diferentes registros de representación semiótica (Duval ,1995), que permitirán trabajar tanto con las funciones como con el complejo proceso de integración de tales funciones.

Aunque para la determinación de nuestra investigación no vamos a profundizar en el análisis del proceso límite que interviene en el concepto de Integral Definida, conviene tenerlo en cuenta, por lo que es importante considerar el papel desempeñado por la noción de obstáculo epistemológico introducido por Bachelard (1938), quien considera que el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo sino que resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que constituyen los obstáculos epistemológicos. Hemos de tener en cuenta que en la literatura aparecen determinados tres grupos de obstáculos epistemológicos, que aunque no constituyen la única fuente de dificultades para el aprendizaje, sí que resulta importante tomarlos en consideración. A modo de síntesis, Artigue (1998), resume como resultado de las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos lo siguiente:

- El sentido común de la palabra límite, que introduce concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso, o tienden a restringir la convergencia a la convergencia monótona.
- La sobre-generalización de las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos; en otros términos, la aplicación del principio de permanencia de Leibnitz.
- La fuerza de una geometría de las formas que impide que se identifiquen claramente los objetos involucrados en el proceso de límite y su topología subyacente. Eso, además, hace difícil entender la sutileza del juego entre el marco numérico y el marco geométrico fundamental en el proceso (p. 44).

El segundo aspecto que nos permite delimitar nuestro problema de investigación es el uso del software del cálculo simbólico para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Heid (2002), señala que el uso de los PCS en la enseñanza ha influido notablemente en las teorías que tratan de explicar cómo aprenden los estudiantes las Matemáticas. Para Heid, existen tres elementos importantes que se muestran esenciales cuando los estudiantes aprenden Matemáticas en un entorno computacional, que lo hacen diferente de otros entornos de aprendizaje. Primeramente, el acceso a un PCS ha sido descrito por Pea (1987) como una “tecnología cognitiva”, esto es un medio que ayuda a aprender, a pensar, a la resolución de problemas, trascendiendo las limitaciones de la mente. En segundo lugar, el uso de esta clase de herramientas tecnológicas, afecta a la estructura y al contenido del currículum de Matemáticas especialmente equilibrado entre las Matemáticas formales e informales. La transición de estas Matemáticas formales e informales, los aspectos conceptuales y procedimentales y la progresión de la comprensión de un concepto matemático desde proceso hasta objeto, pasa a tomar un nuevo significado en un entorno de trabajo, basado de manera intensa en el uso de los PCS.

El tercer elemento que interviene es la oportunidad, que dan los PCS a los estudiantes, de generar nuevas representaciones matemáticas que les ayudan a investigar las relaciones que aparecen asociadas con las situaciones y fenómenos de estudio.

Guin y Trouche (2002) introdujeron la idea de génesis instrumental como un proceso complejo que sirve para explicar el proceso de transformar un artefacto (un objeto material) en un instrumento que los estudiantes utilizan para resolver problemas. Este proceso recoge aspectos propios del instrumento (en este caso un PCS) y de los procesos cognitivos que intervienen en la apropiación por parte del estudiante del instrumento para resolver problemas (desarrollo de un esquema de instrumentación). En este contexto, resulta importante poner atención al desarrollo de las limitaciones asociadas al uso del software que podría interferir en el trabajo de los estudiantes. Drijvers (2002) identifica obstáculos locales y globales que encuentran los alumnos cuando trabajan en un entorno de álgebra computacional (PCS). Admitimos la idea de que los obstáculos pueden ser vistos como elementos que facilitan a los estudiantes la reflexión sobre su propio aprendizaje.

Consideramos en esta investigación la importancia de las representaciones en la construcción de los conceptos (Goldin, 1998). En particular, nos centramos en el análisis del tipo de fuentes básicas y estrategias que utilizan los estudiantes cuando se enfrentan y desarrollan una representación particular del problema, analizando su capacidad de transitar entre las distintas representaciones de un mismo problema (gráfica, algebraica y numérica).

Todas estas ideas determinan el diseño que hemos hecho de nuestro módulo instruccional como elemento básico que caracteriza nuestra investigación (ver anexo, 14).

Finalmente, para la delimitación de nuestro problema de investigación hemos de considerar los factores afectivos que influyen tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las Matemáticas y que serán tratados con mayor detalle en el establecimiento del marco teórico presentado en el capítulo 2.

La investigación se propone, entre otros, responder a las siguientes interrogantes

- ¿De qué manera influye el uso de las nuevas tecnologías, en general, y *DERIVE* en particular, en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas?

- ¿Existen modificaciones en las actitudes de los estudiantes cuando son inmersos en un programa de formación con un PCS particular?
- ¿Qué potencialidades y dificultades surgen con la introducción de *DERIVE* como recurso didáctico en los cursos de iniciación al Cálculo?
- ¿Qué obstáculos, dificultades y errores genera la relación del concepto de área asociado al concepto de Integral Definida?
- ¿Qué nivel de comprensión poseen los estudiantes del concepto de integral después de realizar la instrucción utilizando el PCS *DERIVE*?

A la vista de la delimitación del problema de investigación y de los interrogantes anteriores, propusimos los siguientes objetivos generales:

1. Diseñar, implementar y evaluar un módulo instruccional, basado en un conjunto de Prácticas de Laboratorio utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE* en la enseñanza del concepto de Integral Definida para estudiantes de un primer curso de ingeniería.
2. Analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico, en el que se enfatizan los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica, en la comprensión de la Integral Definida.
3. Analizar las actitudes de los estudiantes, hacia las Matemáticas, el uso de los ordenadores y el aprendizaje con *DERIVE,* cuando son inmersos en un plan de enseñanza que utiliza herramientas tecnológicas como elemento básico para su aprendizaje.

En relación a los objetivos generales nos formulamos las siguientes hipótesis o conjeturas

- Las actitudes de los estudiantes hacia el uso de *DERIVE* para la resolución de actividades matemáticas influye de manera positiva en la actitudes de los estudiantes (en particular en su seguridad y confianza, motivación y compromiso), hacia las actividades matemáticas.
- Las escalas de actitudes diseñadas resultan ser instrumentos útiles y fiables para la determinación de las actitudes en torno a las diferentes dimensiones consideradas.
- El módulo instruccional diseñado basado en las Prácticas de Laboratorio contribuye a formar una imagen del concepto de Integral Definida más

flexible, ya que el estudiante tiene la posibilidad de observar paso a paso el desarrollo de todo el proceso de construcción de la integral como área.

- La introducción del concepto de Integral Definida, desde una perspectiva gráfica y numérica con la ayuda del PU elaborado, consigue que los estudiantes aprendan una dimensión menos algorítmica y que en muchas ocasiones permitirá resolver problemas que en otros casos sería demasiado complicadas.
- Los estudiantes que cursan la asignatura Cálculo I, combinando las clases habituales con Prácticas de Laboratorio, mejoran su competencia y comprensión del concepto, lo cual les capacita para resolver problemas relacionados con la Integral Definida.

Los objetivos generales se desglosan en los siguientes objetivos específicos que agruparemos en tres grandes grupos:

Dentro del ámbito afectivo, tendremos que nuestra investigación tratará de:

- Analizar la variabilidad global de las actitudes de los alumnos tanto hacia las Matemáticas como hacia el uso de los ordenadore, teniendo en cuenta el género (Masculino (M), Femenino (F)) y la condición de estudio de los alumnos (Nuevo Ingreso (NI) y Repetidores (R))
- Analizar la variabilidad local de las actitudes de los estudiantes en torno a las cuatro categorías de análisis o dimensiones mencionadas a continuación:
    - Confianza y seguridad en el trabajo matemático.
    - Motivación hacia el trabajo matemático.
    - Compromiso con el trabajo matemático.
    - Uso del ordenador en las actividades matemáticas.
- Analizar la actitud poblacional de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores.
- Establecer relaciones entre el rendimiento académico y la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores.

- Analizar las actitudes de la población hacia el uso de un software para estudiar Matemáticas.
- Analizar la variabilidad global de las actitudes hacia el uso de software para el aprendizaje de las Matemáticas.
- Comparar las actitudes de los estudiantes en relación con las dimensiones, objeto de estudio.
    - Seguridad y confianza en el trabajo con software para ordenadores/ *DERIVE*.
    - Motivación hacia el trabajo con software para ordenadores/ *DERIVE*.
    - Compromiso con el trabajo usando software para ordenadores/ *DERIVE*.

En el ámbito cognitivo, nuestros objetivos generales se desglosan en los siguientes objetivos específicos.

- Analizar cómo influye la idea que poseen los estudiantes de área al interpretar la Integral Definida.
- Caracterizar la idea de área que poseen los estudiantes que han cursado la Secundaria y no conocen aún el concepto de Integral Definida.
- Analizar si existe alguna influencia de la instrucción llevada a cabo con los alumnos, sobre la idea que traen los estudiantes del concepto de área, cuando se desarrolla la enseñanza combinando el método habitual de tiza y pizarra con el uso de las Prácticas de Laboratorio.
- Determinar cómo utilizan los estudiantes los registros gráfico y algebraico, a la hora de resolver situaciones, que involucran tanto el concepto de área de figuras planas, como el de Integral Definida.
- Determinar si utilizan *DERIVE,* en general, y el Programa de Utilidades, en particular, como soporte en la resolución de los problemas que involucran el cálculo integral.
- Comparar la ejecución, por parte del estudiante, de las acciones propias de los procesos de enseñanza/aprendizaje de Integral Definida, con la capacidad de un individuo idealizado para asociar signos y significados que están de acuerdo con los conceptos y

reglas que organizan el campo conceptual referente a la Integral Definida.

Finalmente y dentro del ámbito curricular se tratará de:

- Diseñar un módulo instruccional para la enseñanza de la Integral Definida, el cual se base en un conjunto de Prácticas de Laboratorio con el software *DERIVE*.
- Elaborar un Programa de Utilidades que presente un enfoque de la enseñanza del concepto de Integral Definida, basado en los sistemas de representación gráfico y numérico.
- Analizar la viabilidad de implementación del diseño de instrucción realizado.
- Evaluar los resultados obtenidos al utilizar el módulo instruccional elaborado, en términos de la comprensión de los estudiantes.

1.6. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Una vez presentado en los apartados anteriores, el contenido de la investigación, aportamos nuevos argumentos para el análisis de la racionalidad del estudio y su justificación.

En este apartado mostraremos brevemente aspectos de la racionalidad del estudio y su justificación desde el currículo, desde lo cognitivo y desde el ámbito afectivo.

A nivel curricular

Para justificar a nivel curricular nuestra investigación, analizamos las relaciones entre el Cálculo, los estudiantes y el uso de las nuevas tecnologías.

El Cálculo es uno de los componentes más importantes del currículo de las carreras de ingeniería, en la que creemos que se debe poner mucho énfasis, pues sabemos que su enseñanza y aprendizaje, constituye una parte fundamental de las materias que estudian un buen número de alumnos en las distintas especialidades, a saber: mecánica, eléctrica, química, metalurgia, electrónica e industrial. Pero, al mismo tiempo, se puede considerar como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo de su propia actividad, favoreciendo la intuición y el razonamiento de los alumnos, el razonamiento intuitivo de los mismos y sus métodos. Entendemos que el razonamiento consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales, las relaciones entre ellos y las transformaciones son construidas y manipuladas. También incide de manera especial en la construcción del conocimiento matemático en generalización y formalización, teniendo en cuenta que la formalización, el rigor, la coherencia, la ausencia de ambigüedades y las otras características del conocimiento matemático, no son el punto de partida sino más bien, el punto de llegada de un largo proceso de construcción.

El Cálculo resulta ser, obviamente un contexto privilegiado de planteamiento de problemas y situaciones de investigación que dan lugar al uso de procedimientos y estrategias generales que se desarrollan en la etapa de formación de los futuros ingenieros, por lo que podemos considerar que el Cálculo aparece dotado de una importancia especial en la configuración del currículo de cada carrera.

Al interés tradicional por transmitir los conocimientos científicos se ha unido en los últimos años una preocupación creciente por los métodos de enseñanza/aprendizaje del Cálculo. La razón de ello está, por una parte, en el escaso rendimiento académico que obtienen los estudiantes en esta disciplina y la creciente deserción estudiantil observada en los diferentes cursos, y, por otra, en la incidencia probada que los métodos utilizados para su enseñanza, ejercen en los procesos de aprendizaje.

Las dificultades asociadas a la implementación de un currículo innovador son de naturaleza diversa. Unas son de tipo extracurricular que tienen que ver con aspectos económicos, sociales, sindicales, etc.; otras son de origen macrocurricular que afectan a la institución académica, al profesorado y a los estudiantes, y, otras son de procedencias microcurriculares que afectan a los contenidos y a su organización.

Nuestra investigación pretende aportar una Propuesta Curricular acerca de la enseñanza del Cálculo, muy específicamente del Cálculo Integral en el que se utiliza las Tecnologías de la Información y la Comunicación como mediador didáctico, en el que es posible analizar las dificultades y potencialidades que se dan en su implementación en los primeros cursos de las carreras de ingeniería de las universidades latinoamericanas.

A nivel cognitivo

Nuestro trabajo tratará de establecer unas categorías de análisis que faciliten el análisis de los cambios habidos en ciertos aspectos cognitivos centrados en la actuación de los estudiantes al participar en actividades en donde se combinan clases habituales con Prácticas de Laboratorio, utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE*.

Para tal efecto se han ideado una serie de estrategias de aprendizaje e instrumentos de recogida de información, constituida por cuestionarios de conocimientos, que han permitido categorizar las respuestas dadas por los estudiantes usando redes sistémicas (Bliss 1987) y entrevistas individualizadas que permitieron, aplicando un modelo de competencia cognitivo (Socas 2001), analizar los niveles de comprensión del concepto de la Integral Definida que tienen los estudiantes.

En definitiva se pretende, por una parte, contribuir a mejorar el proceso de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes, vía uso de las Tecnologías, de la Información y la Comunicación estableciendo sus ventajas y limitaciones, y, por otra, aportar luces en cuanto a los factores que influyen en la comprensión de los conceptos de Cálculo.

A nivel afectivo

No cabe duda que el ámbito de afectivo, cifrado en las creencias, actitudes y emociones, ejerce una gran influencia en el aprendizaje de las Matemáticas. Prueba de ello son las distintas investigaciones que últimamente se vienen desarrollando y a las que nos referiremos más adelante. Nuestro estudio trata de elaborar instrumentos que ayuden a valorar y determinar las actitudes de los estudiantes en torno a varios ejes (confianza y seguridad en el trabajo matemático; motivación hacia el trabajo matemático; compromiso con el trabajo matemático; confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador; motivación hacia el trabajo con el ordenador; interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores; seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*, motivación hacia el trabajo con *DERIVE* y compromiso con el trabajo con *DERIVE*), que facilitan la reflexión de los profesores y los estudiantes cuando se trata de enseñar y aprender las Matemáticas, utilizando las herramientas tecnológicas de que se disponen en la actualidad.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En este Capítulo se presentan los aspectos teóricos tanto en el ámbito afectivo como cognitivo-curricular que dan lugar al marco teórico de nuestra investigación. Para el ámbito afectivo se revisan los trabajos de Mandler (1989), Mc Leod (1992), Mayes (1998) en cuanto a las emociones, actitudes y creencias y se establece lo que entenderemos por actitudes. En cuanto al ámbito cognitivo, se exponen las propuestas teóricas de Duval (1993, 1995) sobre los sistemas de representación semiótica, la visualización (Zimmermann, 1991; Steen, 1988; Hitt, 1998), y las dificultades, obstáculos y errores (Socas 1997). En el apartado 2.6 se describen las componentes teóricas relacionadas con el uso de las TIC. Para, finalmente, definir un modelo de competencia cognitivo para la comprensión de la Integral Definida, basado en los trabajos de Socas, et al (1998) y Socas (2001).

2.1. CREENCIAS Y ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS Y HACIA EL USO DE LOS ORDENADORES

El dominio afectivo ha sido tomado en cuenta, como una parte importante de la cognición dentro de la Educación Matemática. Uno de los pioneros en estas investigaciones es Mandler (1989) quien en sus trabajos trata de clarificar a qué debemos referirnos cuando hablamos del dominio afectivo de nuestros estudiantes. McLeod (1992) resume la teoría de Mandler de la siguiente manera:

> Primero, los estudiantes poseen ciertas creencias sobre las Matemáticas y sobre sí mismos que juegan un papel importante en el desarrollo de sus respuestas afectivas a situaciones matemáticas. Segundo, a partir de interrupciones y bloqueos que son una parte inevitable del aprendizaje de las Matemáticas, los estudiantes experimentarán emociones positivas y negativas cuando aprenden Matemáticas, estas emociones se notan más probablemente cuando las tareas a realizar son nuevas. Tercero, los estudiantes desarrollarán actitudes positivas o negativas hacia las Matemáticas cuando encuentran repetidamente situaciones matemáticas iguales o semejantes (p. 578)

Para McLeod (1992) el dominio afectivo en educación matemática aparece dividido en tres categorías principales y varias subcategorías.

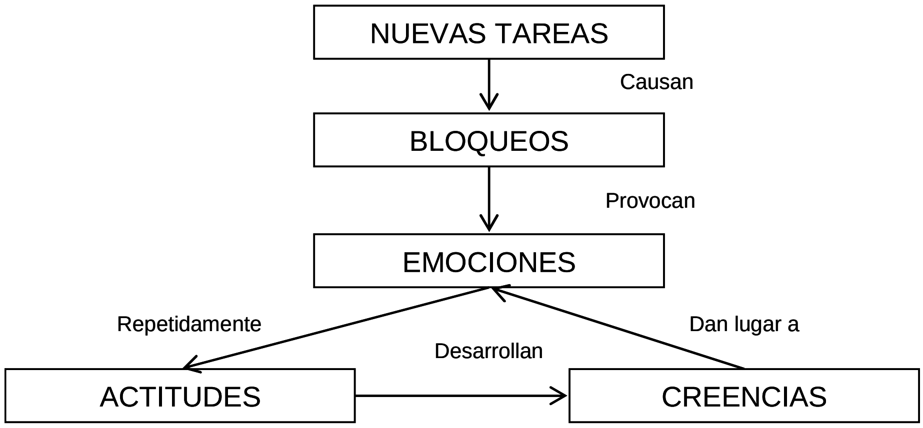
- Creencias
  - Hacia las Matemáticas
  - Hacia uno mismo
  - Hacia la enseñanza de las Matemáticas
  - Hacia el contexto social.
- Actitudes
- Emociones

Al igual que McLeod admitiremos que las creencias son de naturaleza principalmente cognitiva y se desarrollan durante largos periodos de tiempo. Por otra parte, las emociones se consideran con un menor valor cognitivo y pueden aparecer y desaparecer bastante rápidamente, al igual que lo hace, por ejemplo, ese sentido de frustración cuando no podemos resolver un problema que se convierte rápidamente en la alegría de haberlo resuelto al cabo de poco tiempo.

Es difícil, atendiendo a la literatura revisada, separar las investigaciones sobre actitudes de las investigaciones sobre creencias, dado que existe una conexión importante, al menos desde nuestra perspectiva, entre esos tres constructos, y que de acuerdo con Mayer (1998) y Mandler (1989) se relacionan entre sí cuando se desarrollan nuevas tareas matemáticas. De manera que una repetición de las emociones que surgen al experimentar con nuevas tareas, da lugar a actitudes que contribuyen a configurar las creencias sobre las Matemáticas, que a su vez inciden, de una manera o de otra, en lo que se consideran emociones.

Como señala Mayes (1998), su visión sobre el dominio afectivo, planteada desde la psicología del desarrollo, es análoga a la visión constructivista sobre el dominio cognitivo.

Los estudiantes experimentan emociones, que se desarrollan en actitudes, las cuales son usadas para construir sus propias creencias. En el siguiente esquema se sintetiza la idea de Mandler:



Esquema 2.1

Nos basaremos entonces, desde una perspectiva teórica, en este modelo propuesto por Mandler-Hart, considerando como dimensiones del dominio afectivo las creencias, las actitudes y las emociones. De esta manera: *La creencia* refleja un juicio sobre cierto conjunto de conceptos; *la actitud* representa una reacción emocional sobre un objeto, sobre una creencia sobre un objeto o sobre un comportamiento hacia el objeto; *la emoción* significa una reacción intensa creada por algún estímulo.

McLeod sintetiza las dimensiones de creencias, actitudes y emociones como representando una implicación afectiva creciente, una implicación cognitiva decreciente, intensidad creciente y estabilidad decreciente; esto es, si comparamos las actitudes con las creencias, las actitudes tienen una implicación afectiva mayor una implicación cognitiva menor, más intensidad y menos estabilidad, que las creencias.

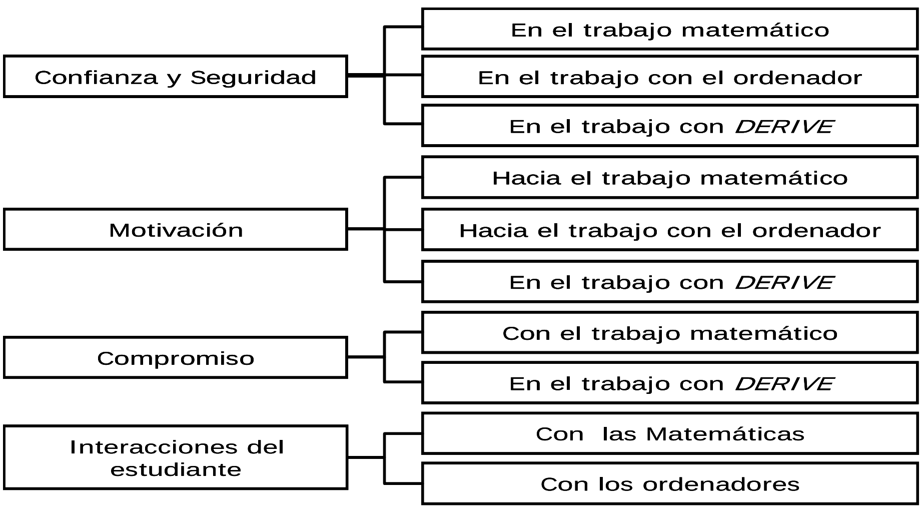
Si comparamos las actitudes con las emociones, las primeras tienen una implicación afectiva menor, una implicación cognitiva mayor, menor intensidad y mayor estabilidad (de ahí la definición de actitud). De esta forma, consideramos las ACTITUDES como ***el resultado de reacciones emocionales que han sido internalizadas y automatizadas para generar sentimientos de intensidad moderada y estabilidad razonable***.

Nosotros no hacemos una separación taxativa entre los distintos constructos que son considerados desde la perspectiva teórica, sino que nos moveremos entre los aspectos de creencias-actitudes de la clasificación anterior, sin considerar las emociones.

Dentro de estas consideraciones teóricas que hemos realizado, la presencia de las TIC en las aulas, en general, y de los ordenadores en particular, pueden ayudar a mejorar el aprendizaje en los términos en que pueden influir en el ámbito afectivo. De este modo, algunos investigadores han considerado relevante los estudios que relacionan las actitudes hacia la tecnología conjuntamente con las actitudes hacia las Matemáticas.

Galbraith, Haines e Izard (1998) estudian las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y sus efectos en el rendimiento escolar y justifican la importancia del estudio de las actitudes hacia la tecnología, por la relevancia de su uso en las actividades relacionadas con la modelización matemática.

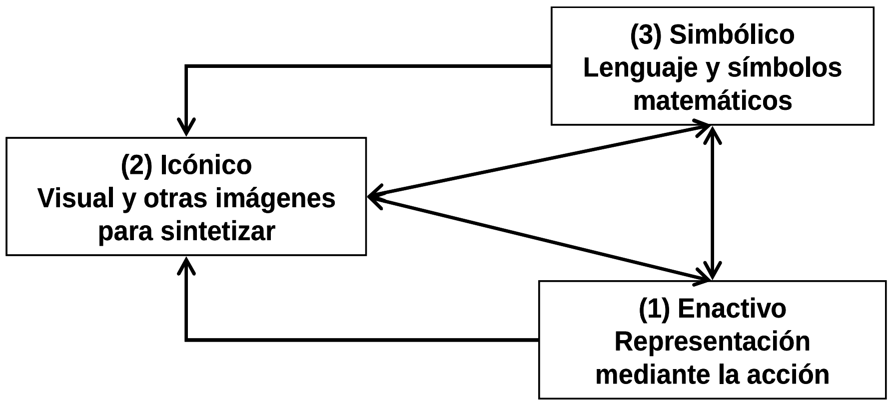
En este mismo sentido, y teniendo en cuenta los resultados de Galbraith y Haines (1998, 2002), que les permiten afirmar que las actitudes hacia el ordenador son más influyentes que las actitudes hacia las matemáticas en facilitar un compromiso activo en las actividades con el ordenador en el aprendizaje de las Matemáticas, es por lo que optamos por incluir en nuestro trabajo las escalas de actitudes utilizadas por estos investigadores y que han sido validadas por sus investigaciones. Con las aportaciones pertinentes que serán descritas con mayor detalle en el capítulo III, los elementos fundamentales que intervienen en las distintas escalas, son los que hemos denominado confianza y seguridad, motivación e interacciones, que dan lugar al conjunto de dimensiones que se analizarán en la parte de la investigación relacionada con el ámbito afectivo. En síntesis, las dimensiones, de análisis que determinan nuestros aspectos teóricos son:



Esquema 2.2

2.2. ESTADIOS DE DESARROLLO COGNITIVO

Tall et al (Gray y Tall, 1994; Tall 1995), a partir de las ideas de Bruner (1966), han elaborado una clasificación de los sistemas de representación matemáticos que resulta útil, dado que permite realizar un análisis de las dificultades cognitivas de los estudiantes, en relación con las características y los niveles de las tareas que se les propone. Al respecto Tall propone tres sistemas de representación matemáticos (ver esquema 2.3):



Esquema 2.3

El primer sistema es el que denomina enactivo, que corresponde a los procesos sensoriales y motores de los experimentos físicos; en este sistema las demostraciones se hacen mediante la predicción y los experimentos físicos (para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, se recortan los ángulos y se superponen, por ejemplo).

El segundo, el icónico, corresponde a las experiencias viso-espaciales que incluyen en las representaciones icónicas el trazado e interpretación dé gráficas y diagramas y los experimentos mentales; en este sistema, se producen demostraciones visuales genéricas sobre imágenes concebidas como prototipos, que no sólo representan un caso particular sino todos los de la misma clase.

El sistema simbólico es el tercer sistema de representación matemático, que se clasifica a su vez en:

- Verbal, que corresponde a las descripciones de objetos ("objects defined", "para enfatizar que el objeto viene antes que la definición", Gray y Tall (1994), en contraposición a los "defined objects" (propios de un sistema formal), y de relaciones entre objetos; en esta categoría se consideran las demostraciones euclidianas que si bien son, en parte, visuales y genéricas, requieren una organización sistemática que permita la demostración ordenada de teoremas, en los que cada uno se demuestra a partir de los ya establecidos.

- Proceptual, que corresponde a los proceptos, entendiéndose por procepto *"un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos."* (Gray y Tall, 1992); a su vez, éstos se clasifican en operacionales, molde y estructurales, en este caso las demostraciones se realizan sobre la base del proceso interno propio de cada procepto.
- Formal o lógico, que corresponde a las definiciones de objetos, a las deducciones de relaciones entre objetos y a las demostraciones formales, base intuitiva para el Cálculo elemental, construido con representaciones numéricas, simbólicas y visuales, pero el análisis matemático requiere un nivel más alto de representación formal.

Cada una de las diversas representaciones tiene sus propias características las cuales ofrecen ventajas y desventajas cognitivas para representar tanto el precepto de límite, por ejemplo, como para "hacer" y "deshacer" cada uno de los proceptos: función, derivada e integral.

Para Castro y Castro (1997), *"la conceptualización actual del conocimiento matemático, basada en la noción de estructura, sostiene que los conceptos y propiedades matemáticas se construyen a partir de relaciones de objetos, fenómenos o conceptos previos"*. Señala además que llegan a convertirse en entidades abstractas y su expresión viene dada por enunciados que requieren de algún sistema de representación. Puntualizan que las representaciones están muy ligadas a los procesos de enseñanza/aprendizaje de los conceptos matemáticos, y que frecuentemente ocasionan problemas de comprensión debidos a su uso simultáneo y no controlado. Expresan que también, se debe ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones internas para que logren relacionar, de manera eficaz, los significados correspondientes a los objetos mentales de las representaciones mentales.

Socas (2001) expresa que los objetos matemáticos se comunican mediante los sistemas de representación semióticos (SRS) (ver apartado 2.3). Existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, no obstante se constata la preocupación entre los matemáticos y los profesores de Matemáticas, para que los estudiantes no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por ello por lo que se ha favorecido los SRS más formales frente a los SRS más visuales o también caracterizados como representaciones más intuitivas. El dominio de un SRS formal es más una meta que un cambio, en la que aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo que se dan, hasta producir competencia, en el uso del SRS formal. Estos estadios cognitivos los han descrito de diversas maneras, extraídos y analizados en el proceso de la culturización matemática, es decir, en la sociogénesis del conocimiento matemático.

Socas, plantea una organización basada en tres estadios de desarrollo cognitivo: semiótico, estructural y autónomo. El primero, el semiótico es aquel en el que el estudiante aprende y usa signos nuevos con los significados que le suministran los antiguos ya conocidos y usados por él. El segundo, el estructural, se caracteriza porque el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo; sin embargo aparecen en este estadio verdaderas dificultades cognitivas para el estudiante, ya que determinados comportamientos de los signos no pueden ser explicados en términos del sistema antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado. El tercer estadio, el autónomo, es aquél en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior. Es éste estadio autónomo el proceso de generalización de las Matemáticas y es una característica de las mismas como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es por tanto el sistema nuevo, una fuente de dificultades para el aprendizaje del estudiante, al encontrarse con elementos que él no controla en términos del sistema antiguo.

2.3. LA ADQUISICIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS DESDE UNA PERSPECTIVA TEÓRICA DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. LA VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA

Para investigar el aspecto cognitivo relacionado con la adquisición de los conceptos matemáticos, consideramos algunos de los elementos de la propuesta teórica de Duval (1993, 1995), los cuales se centran en las representaciones semióticas definidas como “producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación”, el cual tiene sus propias restricciones de significados y de funcionamiento; por lo tanto, se puede considerar que las figuras de tipo geométrico, un enunciado en lengua habitual o una fórmula matemática, pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación. Si se denomina semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis. Para establecer la fuerte relación que existe entre la semiosis y la noesis se deben destacar tres aspectos: las diferentes actividades cognitivas constitutivas de la semiosis, las razones por las cuales la noesis implica la coordinación de varios registros de representación y las condiciones requeridas para favorecer esta coordinación y para organizar una enseñanza que tome en cuenta esta relación entre la semiosis y la noesis.

Para que un sistema semiótico se considere un registro de representación debe permitir:

- **Primero**, la formación de una representación identificable como una representación de un registro dado: enunciando una frase, dibujando una figura, escribiendo una fórmula, etc.
- **Segundo**, el tratamiento de una representación, el cual es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formado, éste representa una transformación interna a un registro.
- **Tercero**, la conversión de la representación, la cual es la transformación de esta representación en una representación de otro

registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial; la conversión es una transformación externa al registro de partida.

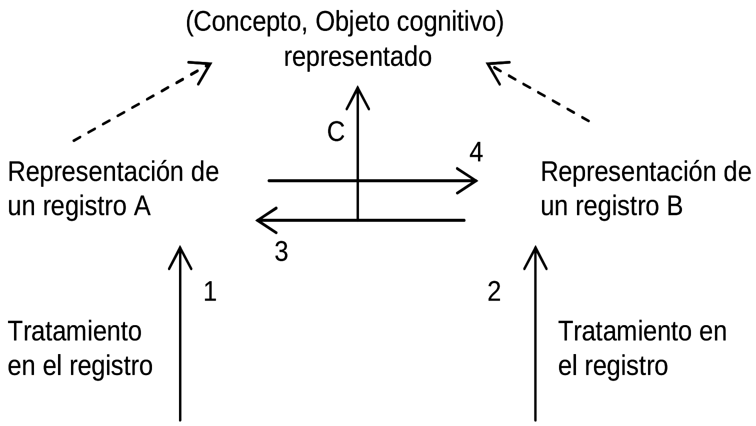
Para lograr la noesis se requiere la existencia de varios registros de representación y que exista entre ellos coordinación; Duval cita tres razones:

- **La economía de tratamiento**, es decir, la existencia de varios registros permite hacer cambios entre ellos, y este cambio tiene como objetivo permitir efectuar tratamientos de una manera más económica y más potente.
- **La complementariedad de los registros**, es decir, toda representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa, y, en un registro y otro, no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.
- **La conceptualización** implica una coordinación de registros de representación; en esta razón plantea dos hipótesis; para nuestro estudio asumiremos la referente a la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, la cual se basa en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión. Este último planteamiento de Duval se puede visualizar en el esquema 2.4.

En cuanto a las condiciones de aprendizaje cuando se toma en cuenta la semiosis, Duval menciona que si la conceptualización implica la coordinación de registros de representación, no puede ser sólo una automatización de ciertos tratamientos o comprensión de nociones, sino que debe coordinar diferentes registros de representación, movilizados de manera necesaria para esos tratamientos o para esta comprensión. Para lograr estas condiciones que permitan una conciencia más global se deben presentar tareas específicas, que categoriza en tres tipos diferentes:

- **La primera** tiene que ver con la *aprehensión de las representaciones semióticas,* la cual supone una discriminación de las unidades significantes en el registro mismo donde la representación se produce; el único medio para llegar a discriminar las unidades significantes de la representación es el de hacer que se realice la observación, por una parte, de las variaciones de representación efectuadas sistemáticamente en un registro y, por otra, de las variaciones concomitantes de representación en otro registro.

- **La segunda**, la *aprehensión de los tratamientos propios,* de una cierta categoría de registros, se logra al darle un lugar importante al aprendizaje de los tratamientos, que son específicos de cada registro de representación.
- **La tercera**, *las tareas de producción doble para las representaciones semióticas complejas*, entendiéndose como tal las que expone un procedimiento: un texto, un cálculo con varias etapas, un razonamiento.



Modelo de representación centrado en la función objetivación. Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas con líneas discontinuas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado.

Esquema 2.4

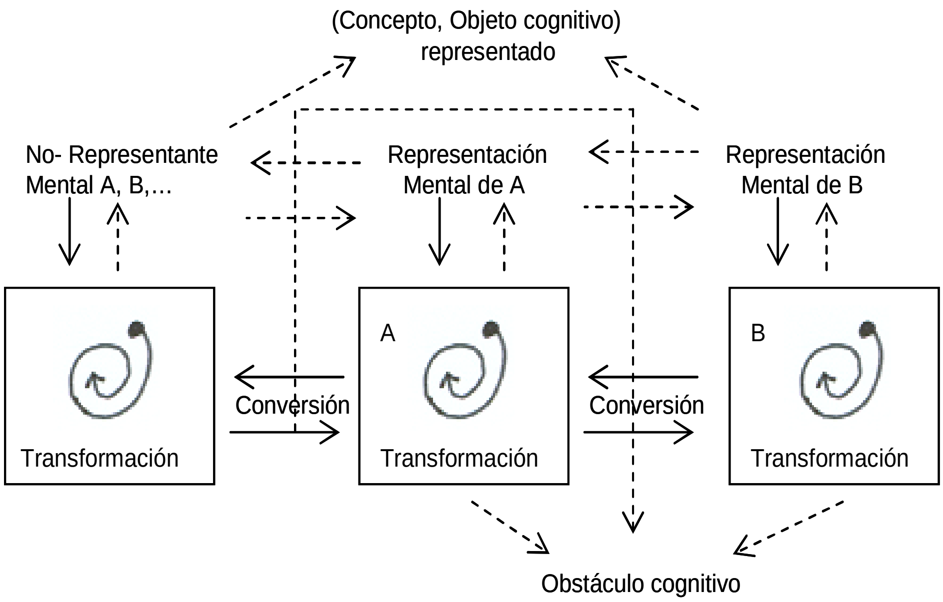
En relación a esta propuesta teórica, Hitt (2000) menciona que no sólo resultan importantes las tareas de transformación dentro de un registro de representación y las de conversión entre registros, sino la confrontación entre ejemplos y contraejemplos. Por otro lado, indica que en la resolución de problemas existen producciones de representaciones semióticas por parte de los estudiantes que no son similares a las representaciones convencionales que aparecen regularmente en los libros de texto y son utilizadas en el aula por el profesor de Matemáticas; es decir, un estudiante al enfrentarse a un problema puede generar representaciones semióticas, en las que algunas de ellas no son representaciones que podamos identificarlas dentro de un sistema semiótico de representación de los usuales.

Los obstáculos que se manifiestan por los errores en la resolución de tareas, juegan un papel importante en las aportaciones de Hitt al modelo de Duval.

Hitt (2000) señala que:

> Las construcciones de conocimientos que implica desempeños erróneos crea, desde su punto de vista, esquemas o conexiones permanentes que se contraponen a la construcción adecuada de cierto concepto. Pero, en su opinión estos esquemas no desaparecen, aún y cuando se construya un esquema alternativo. Debido a que en algunos casos, esos esquemas pueden resurgir de manera que un individuo puede repetir ese error que prevalecía en el pasado, en el momento que se le presenta una actividad más compleja (p.146)

En resumen, puntualiza que, la instrucción deberá promover mejores conexiones (articulaciones) entre representaciones de manera que la red interna, alternativa, que ya existe, aparece ligada al obstáculo que se esté formando en el individuo y le permitirá contrastar al objeto de intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento detectado y señalado como obstáculo cognitivo. El esquema 2.5 muestra lo expuesto anteriormente.



Esquema 2.5

Visualización matemática

En el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas el aspecto relacionado con la visualización tiene una gran importancia. Zimmermann y Cunningham (1991) mencionan que:

> *En la visualización matemática lo que interesa es, precisamente, la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con ordenador) para representar un concepto matemático o problema y para usar el diagrama para el logro del entendimiento, y como una ayuda en la resolución de problemas.*

La visualización se muestra como una parte esencial en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, sin embargo existe una resistencia tanto por parte de algunos docentes, como de muchos estudiantes a utilizar los aspectos visuales en la resolución de problemas matemáticos. En relación a esta problemática Eisenberg y Dreyfus (1991) establecen tres razones que influyen en este comportamiento.

La cognitiva (lo visual es más difícil de entender). Es más fácil presentar un argumento linealmente que un argumento que requiere de información bidimensional, con muchos aspectos ligados unos con otros entre varias informaciones y con implicaciones en muchas direcciones. Un diagrama es una colección de información concentrada y compleja. Aunque dos representaciones de un concepto matemático contienen la misma información, mucha de la información será explícita en el diagrama e implícita en la representación analítica. Las representaciones mediante diagramas no son inmediatamente entendibles sino que necesitan procesos cognitivos para darle sentido. Los estudiantes que no han sido enseñados apropiadamente se niegan a dibujar diagramas y gráficas. No han tenido la oportunidad de adquirir la habilidad para interpretar diagramas.

La sociológica (lo visual es más difícil de enseñar). Existe diferencia entre los métodos para el procesamiento de la información usados por los matemáticos en su trabajo (visuales generalmente), y los usados por los enseñantes (los aspectos visuales, si se utilizan, son meramente ilustrativos). La teoría de Chevallard (1985) sobre las transposición didáctica permite aclarar un poco la idea: La Trasposición didáctica "*Es el cambio que experimenta el conocimiento cuando es convertido en conocimiento científico, académico, en el conocimiento para ser enseñado bajo la institución escolar*. Se pueden señalar dos aspectos importantes de esta teoría, una es la linealización del conocimiento, mediante la cual la preparación didáctica del conocimientos implica la formulación de un texto lineal que estructura el conocimientos (así no se establece en la mente de los matemáticos); la otra, la compartamentalización del conocimiento, en la que el conocimiento debe ser separado de un cuerpo de conocimientos y aislado en un gran número de pequeños trazos de conocimiento, debiendo hacerse explícito en lugar de ser presentado implícitamente. El grado de novedad de un concepto debe ser pequeño y es frecuentemente alcanzado por la construcción de algoritmos y procedimientos de cálculo, que permiten las presentaciones secuénciales. El procesamiento analítico utiliza representaciones proposicionales y representa la manera más cómoda para el profesor por lo que tiene sentido que los estudiantes escojan procedimientos analíticos más que visuales.

Las creencias sobre las Matemáticas, lo visual no es matemático. Existe una creencia muy asentada entre los matemáticos de que las Matemáticas no son visuales. Hadamard, J. (1954) mencionó que:

> *He dado una demostración simplificada de la parte (a) del Teorema de Jordán. Por supuesto, mi demostración es completamente aritmetizable (de otra manera podría considerarse como inexistente); pero investigándola, nunca he cesado de pensar en el diagrama (solamente pienso en la curva doblada), así permanezco cuando pienso en el Teorema.*

Davis y Hersh (1981) destacan, en relación a la propia naturaleza de las Matemáticas, el "*Papel de la simbolización y la formalización al definir la naturaleza de las Matemáticas. Las influencias bourbakistas están muy arraigadas en nuestra mente. "Una demostración sin palabras no es una demostración".*

Considérese el siguiente ejemplo: en un seminario impartido por Eisenberg cuyo propósito era el de exponer el camino visual para la presentación de las Matemáticas, se hizo patente que los diagramas no fueron considerados como una prueba, sino algo en un estatus más bajo, Matemáticas mnemónicas. La siguiente figura,

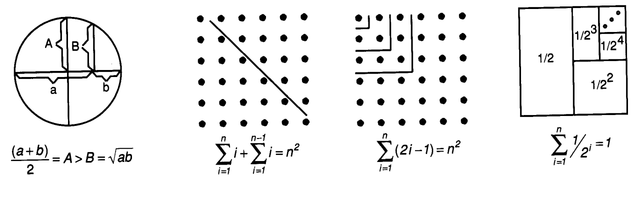


Figura 2.1

muestra cuatro de los diagramas discutidos. El consenso fue que aunque los diagramas podrían ser generadores de una prueba, ellos no eran una prueba por sí mismos y la mayoría de los participantes fueron inflexibles al respecto. La crítica se centró alrededor de la idea de que hay sólo y solamente un camino para comunicar las Matemáticas, y "*las demostraciones sin palabras"* no son aceptables. Si los métodos visuales son considerados de menor valor por matemáticos y maestros, si son a lo sumo Matemáticas mnemónicas, pero de ninguna manera permitida como argumento maduro, entonces esta actitud será trasmitida por estos matemáticos y maestros a los estudiantes y no es de sorprender que los alumnos reaccionen de la manera como lo hacen.

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación se presentan como una alternativa que contribuye a la visualización de conceptos matemáticos. Al respecto Steen (1988) menciona que los ordenadores tienen papel directo y concreto en la visualización, debido a la manera que generan gráficas matemáticas. Incluyen dibujos geométricos de todos los tipos en dos o tres dimensiones; curvas y superficies, campos direccionales, trozos de contornos y otros dibujos similares. Las figuras que se describen no necesitan ser estáticas; pueden ser dinámicas e interactivas (controladas por el usuario). Hay muchas preguntas importantes acerca del papel del ordenador en la visualización. ¿Cómo usarse el ordenador en general, y las gráficas interactivas en ordenador, en particular, para optimizar la comprensión matemática? ¿Cuáles son las características de un buen software educativo? ¿Cuáles son los papeles de las enseñanzas en el salón de clase, de las actividades estructuradas del laboratorio de ordenadores y de la libre exploración de ideas matemáticas? ¿Cuál será el impacto del ordenador en el currículo de Matemáticas? En otras palabras, ¿cómo pueden ayudarnos los ordenadores a enseñar lo que ahora se enseña, de una manera eficaz, y qué nuevos problemas, tópicos, o campos de las Matemáticas revelan las nuevas tecnologías? La visualización basada en el ordenador, ya sea estática, dinámica o interactiva, es sólo una faceta del papel del ordenador en las Matemáticas. La visualización debe estar ligada a los aspectos numéricos y simbólicos de las Matemáticas para lograr los mejores resultados.

Hitt (1998) al referirse al uso por parte de los estudiantes de varios sistemas de representación, menciona que éstos no logran crear una articulación coherente entre ellos; manipulan coherentemente las transformaciones de representación en un mismo sistema semiótico, sobre todo en el algebraico, pero muestran una carencia de articulación cuando se trata de convertir una representación de un sistema a otro, por ejemplo, del gráfico al algebraico. El diseño de nuevos materiales resulta relevante, en los que sea notorio el uso reflexivo y creativo de la tecnología existente. El profesor de Matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren su efectividad en el aula, en la que la visualización matemática promueva la elección correcta de un sistema semiótico de representación, relacionado con el concepto inmerso en la situación problemática, y donde la aplicación de aspectos sobre los sistemas semióticos de representación, sea clara. La visualización matemática promoverá entonces una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas.

Guzmán (1996) señala que las ideas, conceptos y métodos de las Matemáticas, presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva y/o geométricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo.

Las personas mas aventajadas poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Poseen la capacidad de relacionar, de modo muy versátil y variado, elementos complejos y resultados teóricos a través de redes significativas, siendo capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con los que se enfrentan.

Guzmán, considera tres tipos de visualización, la **isomórfica,** los objetos tienen un correlato "exacto", es decir, significa que sería posible, en principio, establecer una especie de tabla de correspondencias entre ciertos aspectos de la representación visual, que son los que se van a utilizar, y los significados matemáticos que representan, hasta tal punto que las posibles manipulaciones con los objetos de la representación visual podrían ser traducidos, en el momento en que sea necesario, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan. Su utilidad es clara, ya que la manipulación de objetos percibidos por los sentidos o por la imaginación, se hace normalmente mucho más fácil que el tratamiento de conceptos abstractos frecuentemente bien complicados.

El segundo tipo de visualización es la **homeomórfica**, en la que la representación de algunos de los elementos importantes tienen relaciones entre sí que imitan suficientemente las relaciones entre los objetos que representan, ofreciendo una ayuda poderosa a los procesos mentales de búsqueda, demostración, etc.

La **visualización analógica**, es cuando se sustituyen mentalmente los objetos con los que se trabajan por otros que se relacionan entre sí de forma análoga, y, cuyo comportamiento resulta más conocido por haber sido mejor explorado.

Por último la **visualización diagramática.** Nuestros objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que interesan, son meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos ayuden en los procesos de pensamiento alrededor de ellos. A veces se podría decir que estos procesos vienen a asemejarse a reglas nemotécnicas. Los diagramas en árbol que usamos en combinatoria o probabilidad, así como otros mucho más personales que cada uno se construye, son de esta naturaleza.

2.4. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES

Otros elementos que intervienen en nuestro marco teórico son las dificultades, obstáculos y errores que están presentes en el proceder de los estudiantes. Éstos pueden estar influenciados por diversos factores que pueden condicionar las respuestas dadas por los estudiantes a situaciones planteadas.

En lo que sigue, vamos a organizar estos tres elementos de tal manera que nos resulten de utilidad para nuestra investigación.

Artigue (1998) establece una categorización de dificultades de los estudiantes en el campo conceptual del Análisis elemental.

Una de ellas esta relacionada con la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual, como los números reales, las funciones y las sucesiones. En cuanto a los números reales opina que la concepción que los estudiantes tienen de ellos se muestra muy dependiente de las representaciones semióticas elegidas; añade que el creciente uso de las calculadoras tiende a reforzar la idea de que número real es igual a número decimal. En cuanto a la funciones, puntualiza que éstas adquieren para los estudiantes el estatus de prototipos y de asociaciones, tales como la asociación función/fórmula o la asociación función/curva; por tanto, el mismo objeto matemático puede ser considerado por el alumno como función o no, según la forma de su representación semiótica. Los estudiantes muestran dificultades cuando se ven en la necesidad de realizar un salto cualitativo entre dos niveles de conceptualización de noción de función, el nivel de proceso y el nivel de objeto. A los estudiantes se les pueden complicar las aplicaciones en Análisis sí sólo se apoyan en una concepción de tipo proceso; se necesita que consideren a las funciones como objetos que se pueden incluir en procesos, más complejos, por ejemplo, integrales y diferenciales, y también deben de considerar, no sólo objetos particulares sino clases de funciones, definidas por ciertas propiedades, por ejemplo, funciones continuas, Riemann integrable, etc. En esta línea de ideas, exhibe las dificultades para relacionar diferentes registros de representación semióticas y realizar conversión de un registro a otro, especialmente del registro gráfico al algebraico; por ejemplo, en el registro gráfico, la función y su derivada o sus primitivas.

Otra categoría está asociada con las dificultades de la conceptualización de la noción de límite; en esta parte referencia el papel de los obstáculos epistemológicos como generadores de dificultades de aprendizaje; es decir, pueden ser producto de formas de conocimiento que han sido, durante un tiempo, coherentes y efectivas en los contextos culturales o escolares de los estudiantes.

Brousseau (1983) menciona que el error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos.

Un obstáculo es una pieza del conocimiento; forma parte del conocimiento del estudiante. Este conocimiento ha sido satisfactorio, en general, durante un cierto tiempo para resolver problemas. Es precisamente el aspecto satisfactorio el que ha afianzado el conocimiento en la mente y lo ha convertido en obstáculo. El conocimiento demuestra ser inadecuado cuando se enfrenta con problemas nuevos y puede resultar poco elemental la inadecuación.

Los errores son datos objetivos que forman parte de la producción de los estudiantes; en muchas ocasiones constituyen un elemento estable, revelador de las características de su conocimiento, de los componentes de su imagen del concepto respecto al concepto considerado.

Las características fundamentales de los obstáculos cognitivos, según Brousseau, son:

- Los errores producidos son resistentes a la corrección.
- Se trata siempre de un conocimiento, no de una ausencia de conocimiento; puede ser incorrecto o incompleto, pero es coherente.
- Es un conocimiento que produce respuestas correctas en determinadas situaciones o dominios de problemas.
- Es un conocimiento que engendra respuestas - erróneas para ciertas situaciones o dominios de problemas.
- Los errores que producen no son esporádicos, se repiten sistemáticamente en situaciones similares;

Brousseau clasifica los obstáculos cognitivos de la manera siguiente:

- Los de origen ontogénico

  Se deben a las limitaciones (neurofisiológicas, por ejemplo) del sujeto en el momento de su desarrollo.
- Los de origen didáctico

  Son aquellos que dependen de una opción o de un proyecto del sistema educativo.
- Los de origen epistemológico.

  Son aquellos a los cuales no se puede ni se debe escapar, por el hecho mismo de su naturaleza constitutiva del propio conocimiento.

Herscovics (1989), señala que el estudiante se enfrenta a nuevas ideas que no tienen cabida en sus estructuras cognitivas ya existentes, lo que ocasiona que no pueda enfrentarse adecuadamente a una nueva información, es decir, los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interno de estas experiencias, y que la organización curricular, diseñada para presentar los objetos matemáticos de la manera más sencilla, puede causar obstáculos cognitivos, pero también surgen obstáculos cognitivos que no tienen que ver con la organización curricular sino que tienen que ver con otros aspectos, por ejemplo, la lógica interna de las Matemáticas.

Drijvers (2000, 2002, 2003) describe 12 obstáculos, que denomina globales y locales, que pueden ser generados por el uso de los Programas de Cálculo Simbólicos (PCS) (Computer Algebra System, CAS). Argumenta que estos obstáculos ofrecen oportunidades para el aprendizaje de Matemáticas. La lista de obstáculos la define utilizando sus experiencias en clases, en las que llevó a cabo tres experimentos de enseñanza.

A continuación detallamos la lista de obstáculos.

El primer experimento lo realizó con un grupo de 11 alumnos de undécimo nivel. Aquí los obstáculos los define como barreras debidas al PCS, que impedía que los estudiantes aplicaran sus esquemas mentales. En esta parte estableció siete obstáculos. A continuación se especifican los mismos:

1. *La diferencia entre las representaciones algebraicas que proporciona el PCS y las que los alumnos esperan y conciben como “sencillas.* Esto se refiere a las dificultades para reconocer que, por ejemplo, $-(x-12)$, dado por el PCS, equivale a la expresión $12-x$, que el alumno tenía en mente, o que $\sqrt{\frac{s}{4}}$ es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{s}$. Reconocer expresiones equivalentes es un tema central en álgebra, y sigue siéndolo cuando se trabaja en un entorno de álgebra computacional.
2. *La diferencia entre cálculos numéricos y cómputos algebraicos y la forma implícita con que el PCS trata esta diferencia.* Para muchos alumnos, $\sqrt{2}$ no es una respuesta real: considerar que $1{,}41$ es el resultado final. Realmente no comprenden la diferencia de categoría de las dos respuestas: en $\sqrt{2}$ “hay todavía algo de álgebra”, mientras que $1{,}41$ es estrictamente numérico. El PCS no es siempre claro en cuanto a esta diferencia de categoría.
3. *La flexible concepción de las variables y los parámetros que requiere el uso de un PCS*. …, podría decirse que en un entorno de álgebra computacional “todas las letras son iguales”. Sin embargo, en un determinado contexto de problemas, las variables tienen significados distintos y desempeñan diferentes papeles, tales como el de incógnita, parámetro o cantidad que cambia…Un trabajo eficiente con un PCS

requiere que se traten flexiblemente los papeles de las variables que intervienen, y la acotación contextual de los significados que podrían tener fuera del programa y la forma abstracta de tratarlos dentro de éste.

4. *La tendencia a aceptar sólo las soluciones numéricas y no las algebraicas.* A los alumnos no les suelen satisfacer las soluciones como $x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}v$. Al final, quieren saber qué valor representa x. Esto se denomina el “Obstáculo de la respuesta esperada”.
5. *La limitada concepción de la sustitución algebraica.* Con frecuencia, los alumnos creen que la sustitución se limita a “reemplazar por valores numéricos”. Esta concepción tiene que extenderse a la sustitución algebraica de expresiones.
6. *La limitada concepción de la solución algebraica.* Consiste en creer que resolver es sólo “calcular un valor numérico”. Esta idea ha de ampliarse a soluciones algebraicas, incluyendo expresar una variable en función de otras.
7. *La concepción de una expresión como un proceso.* Los alumnos consideran frecuentemente que una expresión es un medio conciso de describir un proceso de cálculo. Esta concepción debe extenderse a considerarla como un objeto, como algo que puede utilizarse, por ejemplo, ser sustituido en una ecuación.

Realiza dos observaciones en cuanto a la lista de obstáculos. En primer lugar, los obstáculos son de diferente naturaleza. Los obstáculos 5, 6, y 7 tienen carácter global; tratan del uso de la máquina en general, y de la relación del problema y su ejecución, en el entorno de álgebra computacional. Los locales se refieren a un tema en particular -en el caso que considera sería el Álgebra- y la forma como lo trata el PCS. Drijvers expresa que el término “local, no significa que no sea importante, por ejemplo, el tema de las expresiones equivalentes en el primer obstáculo, es esencial para la comprensión del Álgebra, y en este sentido, es global dentro del dominio de esta rama; sin embargo no afecta a la estrategia global del uso del Álgebra Computacional para resolver un problema matemático.

En un segundo lugar, puntualiza que los obstáculos pueden ser ocasionados por obstáculos cognitivos ya existentes, que llegan a ponerse de manifiesto y a revelarse más importantes, al trabajar en un entorno de álgebra computacional.

En un segundo experimento de enseñanza, trabajó con estudiantes de noveno nivel, estableciendo los siguientes tres obstáculos locales:

8. *Las limitaciones del PCS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas para ayudar a superarlas.* Algunas veces, o no hay una orden directa para llevar a cabo un tarea, o bien, el PCS es incapaz de realizarla sin ayuda del usuario. Para obtener un resultado en tales casos, se necesita la pericia del usuario y las capacidades del PCS.
9. *La incapacidad para decidir cuándo y cómo puede se útil el álgebra computacional.* Los usuarios experimentados saben para qué puede usarse el PCS y cómo les permite trabajar en una determinada situación de problema. Los principiantes, por el contrario, no tienen este sentido de lo que puede esperarse razonablemente de esta herramienta.

10. *El carácter de caja negra del PCS.* Usualmente, el PCS no da idea de la forma en que obtiene sus resultados. Esto significa que, por lo general, los estudiantes son incapaces de verificar el procedimiento. Para ello, el PCS tiene un carácter de caja negra. Y podrían sentirse incómodos estando a merced de un ingenio difícilmente controlable.

Finalmente, en un tercer experimento establece dos obstáculos globales:

11. *La difícil transferencia entre PCS y la técnica de lápiz y papel, debida a la falta de congruencia entre las técnicas en los dos medios.* Los factores que intervienen son el carácter de caja negra y la no transferencia de la herramienta del álgebra computacional.
12. *La dificultad de interpretar el resultado suministrado por el PCS.*

Socas (1997) presenta una caracterización de las dificultades, obstáculos y errores de una manera organizada que resultará útil para nuestro trabajo. Para él, el aprendizaje de las Matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturaleza distinta y pueden abordarse desde varias perspectivas: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de Matemáticas y métodos de enseñanza. Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste. Tomando en cuenta la complejidad de la enseñanza en Matemáticas menciona cinco categorías:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, en este aspecto indica que el lenguaje matemático, que exige mayor precisión en su uso que el habitual, crea un conflicto de precisión dentro del contexto matemático; las palabras, tales como raíz, potencia, matriz etc., tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, de modo que el uso de tales palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada; esta dualidad de significado de las palabras produce un cuestionamiento por parte de los estudiantes en función del contexto en el que se encuentre.
- Dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático. Estas dificultades se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las Matemáticas y en las rupturas que se dan en relación con los

modos de pensamiento matemático; el abandono de las demostraciones matemáticas no debe incluir el abandono del pensamiento lógico; seguir un argumento lógico no se debe contraponer a los métodos intuitivos, a los ejemplos y contraejemplos, que también permiten obtener resultados y métodos correctos.

- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza. Éstas tienen que ven con la institución escolar, con el currículo y con los métodos de enseñanza; las instituciones deben propiciar una organización escolar que reduzca las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza. Los elementos básicos a considerar como dificultades en el currículo de Matemáticas son: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en Matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las Matemáticas; en cuanto al método de enseñanza éste se debe adecuar a las capacidades y comprensión de los alumnos; la secuenciación de las unidades de aprendizaje se debe adaptar a la lógica interna de las Matemáticas, al respeto a las individualidades que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase, los recursos y la representación adecuada.
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representando cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores, a la hora de diseñar el material de enseñanza.
- Dificultades asociadas a las actitudes. Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y al miedo, los cuales generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.

Los obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas son un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento; el alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado; cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas y, resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté y cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez; después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

Las causas principales de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas se pueden dividir en dos grupos, los que tienen su origen en un obstáculo y los que tienen su origen en una ausencia de significado; estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

2.5. UN MODELO DE COMPETENCIA COGNITIVO PARA LA COMPRENSIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, por lo general, tienden a tratar de establecer modelos teóricos y prácticos que aporten el conjunto de los supuestos básicos que determinan la naturaleza y los límites del objeto de estudio en Educación Matemática, así como también los métodos de investigación y resultados que se deben tomar como evidencias. No existe un consenso, en general, sobre cuáles serían esos supuestos básicos que deberían formar parte de los marcos teóricos que permitan interpretar fenómenos específicos que se dan en Educación Matemática.

La investigación mediante la elaboración de modelos de competencia ha generado en Didáctica de las Matemáticas diferentes aproximaciones, es decir, en este campo de investigación se distinguen diversas formas de estudiar las situaciones problemáticas de naturaleza didáctico matemática.

El término competencia, introducido por Chomsky (1977), en relación con las habilidades lingüísticas ha influenciado enormemente la investigación sobre el desarrollo cognitivo. La competencia, como un constructo teórico, ha conducido a los investigadores a establecer conclusiones generales sobre el conocimiento.

Goldin (1987), describe la palabra competencia como: *"*las capacidades del individuo para ejecutar con éxito una clase de tareas", en su caso, la resolución de problemas matemáticos*.*

De manera general, en Didáctica de las Matemáticas se pueden delimitar dos enfoques que están relacionados tanto con los modelos de enseñanza innovadores como con los tradicionales, y que son dominios complementarios en el estudio de la Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Socas (2001) los denomina respectivamente "Modelo de Competencia" (MC) y "Modelo de Actuación" (MA).

Se puede observar, a manera de referencia, cómo las investigaciones en el marco de: Modelos para la resolución de problemas de Matemáticas (Polya, 1957; Goldin, 1985, 1987; Schoenfeld, 1985), Campos conceptuales (Vergnaud, 1993), Modelos teóricos locales (Filloy, 1999), Pensamiento numérico (Socas 2001), conducen implícitamente en su desarrollo, a la elaboración de Modelos de Competencia.

El modelo de Polya (1957), para la resolución de problemas de Matemáticas, se fundamentó en las observaciones que había realizado como profesor de Matemáticas y en la obra de los gestaltistas. Polya sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos, que tienen como resultado encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, llegando a un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, estableció un modelo basado en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un periodo de tiempo, y así logra clasificar los bloques, de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso.

Goldin (1985, 1987, 1989), considerando lo expresado por Kulm (1984), desarrolló un modelo de competencia en resolución de problemas matemáticos basado en la teoría del procesamiento de la información, y se apoya en la idea de considerar una simulación del pensamiento humano fundamentado en altos niveles de representación y no en un nivel de lenguaje de máquina producido por conexiones neuronales.

Vergnaud (1993), menciona que el campo conceptual está formado por dos conjuntos básicos: Un conjunto de situaciones y el conjunto de conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. La organización de los campos conceptuales como líneas de investigación tiene como finalidad explicitar los significados completos que aparecen durante los procesos de enseñanza-aprendizaje, por tanto, éstos deben ser un marco global que combine tanto las exploraciones formales como las funcionales.

Para los modelos teóricos locales, Filloy (1999) propone analizar los fenómenos didáctico-matemáticos, concentrándose en “modelos teóricos locales” adecuados, en lugar de privilegiar algunas de las componentes: gramática, lógica matemática, modelos de enseñanza, modelos cognitivos y pragmática. Los modelos teóricos locales aparecen organizados en torno a cuatro componentes teóricas: Modelos de enseñanza, Modelos para los procesos cognitivos, Modelos de competencia formal y Modelos de comunicación. Los fenómenos didáctico-matemáticos específicos deben ser analizados bajo las relaciones y las oposiciones que ocurren durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada una de las cuatro componentes.

Socas (2001) aborda el estudio del papel de los Sistemas Matemáticos de Signos en la comprensión de los objetos matemáticos, relativos al pensamiento numérico y algebraico, vía la elaboración de Modelos de Competencia.

La implementación de un Modelo de Competencia se orienta al planteamiento de un modelo formal abstracto que caracteriza a una situación ideal, en relación o no, con un usuario ideal. En el análisis de una situación problemática, este modelo, es utilizado como marco referencial para comparar las actuaciones de un usuario real, estableciéndose para cada sujeto un modelo de actuación.

En este sentido, define Socas que, **el modelo de competencia**

> Se referiría al aspecto formal del campo conceptual tanto a sus aspectos conceptuales y fenomenológicos como a sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado (Socas, 2001, p. 7).

En un campo conceptual específico, los conceptos y expresiones matemáticas tienen un significado intrínseco determinado por las reglas matemáticas que lo organizan y que, un ejecutor que controle ese campo ha interiorizado tanto el sistema de reglas como sus contenidos semánticos intrínsecos, y, por tanto, esa persona tiene una competencia matemática específica. La competencia, en estos términos se refiere a *“la capacidad que tiene un individuo idealizado para asociar signos y significados que están de acuerdo con los conceptos y reglas que organizan ese campo conceptual” (Socas, 2001, p. 7).*

El modelo de competencia se refiere a aspectos formales de las componentes que lo caracterizan. Un problema importante para la Educación Matemática es establecer cómo ejecuta el usuario real las acciones propias de los procesos de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático considerado, en el que las creencias extramatemáticas, concernientes al ejecutor y a la situación donde tiene lugar la actividad, juegan un papel fundamental en la determinación de cómo se realiza, se identifica y se comprende el objeto matemático. Es necesario diferenciar con claridad entre la función y las propiedades del modelo de competencia (MC) y del modelo de actuación (MA), ambos relacionan signos, objetos y significados, pero MA se sirve de informaciones que están más allá de la asociación signos-objetos-significados y de las estructuras cognitivas que subyacen, determinadas por el modelo de competencia, y opera bajo los condicionamientos de la memoria, del tiempo, de la organización de estrategias perceptivas, condicionados por el contexto y por creencias extramatemáticas, etc. que de partida no son asuntos del MC.

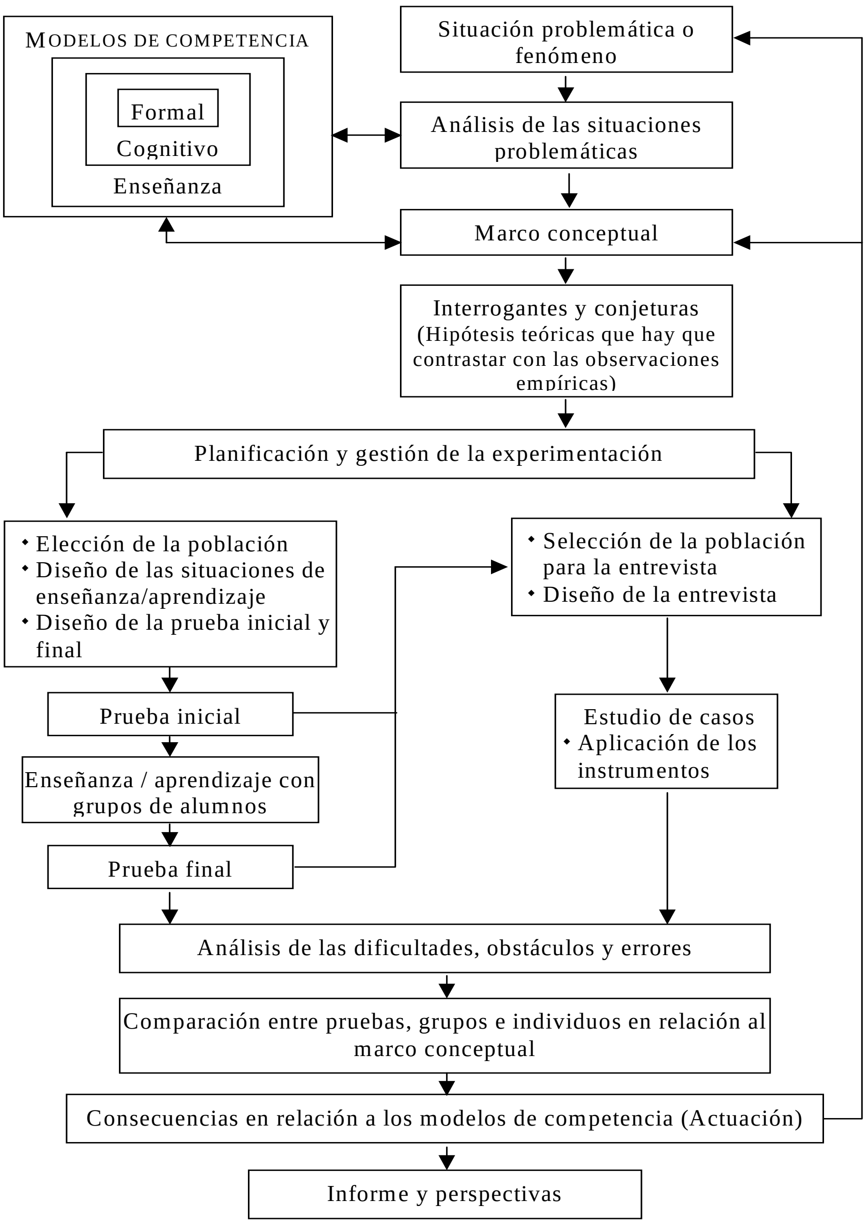
Por otra parte, se debe considerar que, aunque se pueda describir el MC como un sistema de reglas y procesos que se aplican con un cierto orden para relacionar signos, objetos y significados, no es posible hacer lo mismo para describir las actuaciones, a priori, de un modelo de actuación.

El modelo de competencia formal se caracteriza por los aspectos conceptuales y fenomenológicos de los contenidos matemáticos curriculares implicados en la situación problemática a tratar, es decir, explicita tanto la organización lógico-formal de los objetos implicados (conceptos, relaciones y procedimientos que le caracterizan) como el conjunto de situaciones y fenómenos, que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los objetos matemáticos implicados.

El modelo de competencia cognitivo retoma los aspectos anteriores (modelo formal), y además se refiere a las funciones cognitivas específicas de los objetos tratados y a los aspectos estructurales del aprendizaje, es decir, simula los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado.

El modelo de competencia de enseñanza, utiliza igualmente los aspectos anteriores (modelo cognitivo) y se refiere, además, a las acciones, a los procesos de comunicación, a los mediadores, a las situaciones, a los contextos, etc. que se dan en la enseñanza.

El esquema 2.6, muestra una planificación propuesta por Socas (2001) para la realización de una investigación vía modelos de competencia:



Esquema 2. 6

En los estudios vía modelos de competencia se establecen dos enfoques esenciales: uno, el formal, que procede de todas las evidencias acumuladas tanto de la lógica de la disciplina como de las tendencias de los sujetos, y otro, el funcional que se origina en el proceder del entorno de enseñanza en el que se está llevando a cabo el proceso de aprendizaje.

Estos dos enfoques establecen un marco global que combina explicaciones formales y funcionales y tratan de aportar significados más completos a los procesos de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos.

Nosotros nos centramos para nuestro estudio en la propuesta de Socas de un **Modelo de Competencia Cognitivo,** que nos facilitará nuestro estudio sobre la Integral Definida.

Socas organiza el Modelo de Competencia en el campo Cognitivo considerando tres componentes:

1 Estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra.
2 La teoría de Duval sobre los registros de representación semiótico y el funcionamiento cognitivo del pensamiento.
3 Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra.

La primera componente (ver apartado 2.2 para más detalles) se basa en el desarrollo cognitivo de los sistemas de representación: Se distinguen, tal como se ha indicado con anterioridad, tres estadios: El semiótico, el estructural y el autónomo.

Se considera que un estudiante se encuentra en el **estadio semiótico** si usa los signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él.

Se encuentra en el **estadio estructural** si estructura el sistema nuevo según la organización del antiguo.

Estará en el **estadio autónomo** si utiliza los signos con significados propios, independientemente del sistema anterior.

Estos estadios son incluyentes, es decir un estudiante que se encuentre en el estadio estructural, también se considera que se encuentra a su vez en el semiótico.

La segunda componente (ver apartado 2.3 para más detalles) está relacionada con la propuesta teórica de Duval sobre los registros de representación semióticos y el funcionamiento cognitivo del pensamiento. Para Duval (1993) "*toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".* La adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, en, por lo menos, dos diferentes representaciones del objeto matemático. Al analizar el uso de los registros de representación semióticos se deben tomar en cuenta el reconocimiento del registro, las transformaciones en el interior del mismo (tratamientos) y la conversión entre ellos.

En nuestra investigación hemos considerado tres registros principalmente, aunque es obvio que el registro verbal aparecerá también involucrado. El primer registro, el gráfico (G), en el que el estudiante elabora gráficos tanto en un sistema de ejes cartesianos como de tipo ilustrativos (idiosincrásicos). El segundo, el algebraico (A), en donde el estudiante plantea y resuelve integrales definidas. El tercero, el numérico (N), en el que el estudiante aplica aproximación numérica o fórmulas de geometría elemental para aproximar la medida de una región.

La tercera componente se refiere a las Dificultades y Errores en el aprendizaje (ver apartado 2.4 para más detalles). El análisis de los errores nos ayuda a delimitar cognitivamente los estadios y niveles en los que los estudiantes se mueven y, además, indagar sobre las posibles causas que provocan en los estudiantes diferentes tipos de errores.

Teniendo en cuenta todo esto, se establecen dos categorías para cada uno de los estadios.

Estadio semiótico. Consideramos que un estudiante se encuentra en el estadio semiótico:

- En la categoría 1A, si tiene ideas imprecisas sobre la Integral Definida y mezcla de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

- En la categoría 1B, si reconoce los elementos de un registro de representación semiótico en relación con la Integral Definida.

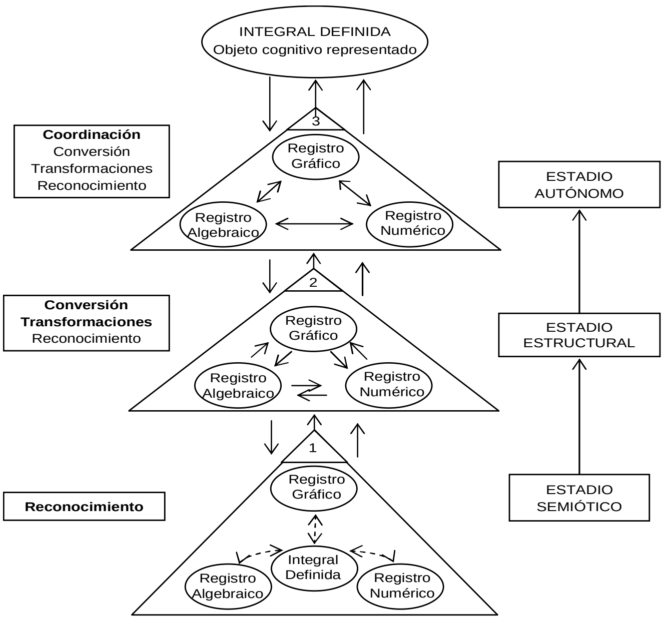
Estadio estructural. Un estudiante se encuentra en el estadio estructural:

- En la categoría 2A, si reconoce un registro de representación semiótico y realiza transformaciones (tratamientos) en su interior.
- En la categoría 2B, si realiza correctamente actividades de conversión de un registro de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un registro que el estudiante controla y facilita la conversión al otro.

Estadio autónomo. Un estudiante se encuentra en el estadio autónomo:

- En la categoría 3A, si articula dos registros de representación semióticos. Puede tomar cualquiera de ellos para significar correctamente la Integral Definida independientemente del otro.
- En la categoría 3B, si articula coherentemente diferentes registros de representación semióticos, ejerce un control de las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimientos de la Integral Definida como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes de la misma.

De esta forma, se podrá describir la competencia cognitiva, de manera esquemática, como sigue:



Esquema 2.7

En un primer estadio, el semiótico, se encuentra el reconocimiento de registros: el estudiante los relaciona con la Integral Definida, sin que haya tratamientos dentro de un mismo registro, ni conversión entre ellos. En un segundo estadio, el estructural, el estudiante ha realizado reconocimientos de varios registros, elabora algún registro en el caso que se requiera, y es capaz de hacer tratamientos dentro de un mismo registro y conversión entre ellos. En el tercer estadio, el autónomo, el estudiante ha realizado lo anterior, y además la conversión se realiza de manera coordinada y libre de contradicciones. Un estudiante que llega al estadio autónomo se puede decir que ha logrado comprender de manera adecuada el concepto de Integral Definida.

El modelo de competencia descrito es comparado con un modelo de actuación que se refiere a cómo ejecuta el usuario real, en nuestro caso el estudiante entrevistado, las acciones propias de los procesos de enseñanza/aprendizaje del objeto matemático Integral Definida.

A partir del análisis que se desarrollará de la actuación de los estudiantes al resolver las tareas propuestas, se determinarán Perfiles de actuación de los alumnos que participan en la investigación, con el objeto de agruparlos en relación con sus comportamientos, cuando resuelven las tareas preparadas como instrumento de la investigación. Pensamos que estos perfiles constituirán una aportación hacia el modelo de competencia establecido.

2.6. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Nos centraremos principalmente en los temas que vamos a considerar más relevantes que tienen que ver con la componente de nuestro marco teórico y que se relacionan con los PCS como un elemento significativo de lo que se denomina, en la actualidad, Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC).

Es importante destacar que en los últimos veinte años, aparte de los cambios experimentados por el software matemático y los propios ordenadores, las teorías sobre cómo los PCS (o CAS) pueden influir en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, también han venido refinándose cada vez más (Mariotti, 2002).

Heid (2002) establece en su trabajo que es importante analizar cómo las teorías existentes sobre la enseñanza y aprendizaje pueden influir en el papel que juegan los PCS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Para Heid, existen dos tipos de teorías que podrían resultar útiles para explorar el papel de los PCS en el aprendizaje de las Matemáticas: las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y la estructura del currículum de Matemáticas, y, las teorías que tienen que ver con las relaciones entre el aprendizaje y los contenidos del currículum.

En cuanto al primer tipo de teorías, Heid señala que los PCS constituyen una tecnología cognitiva que facilita el acceso de los estudiantes a procesos de pensamiento matemático de un nivel más alto. Con un PCS los estudiantes pueden generar y manipular expresiones simbólicas que de otra manera necesitaría un gran tiempo de trabajo. Para Pea (1987) como tecnología cognitiva, los PCS pueden ser considerados como “amplificadores” o “reorganizadores u organizadores” del currículum.

En el primer sentido, gracias a la función amplificadora, los PCS permiten extender el currículum y ampliar los tópicos que se trabajan en el currículum habitual. La segunda manera de usar PCS, como tecnología cognitiva, es como reorganizadora del currículum, cambiando la naturaleza y ordenación del currículum.

Las investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, resulta difícil de separar totalmente la relación de estas dos funciones que hemos señalado. Sin embargo, esta categorización nos ayuda principalmente para examinar los efectos de la tecnología, en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Nuestra investigación, desde el punto de vista de la clasificación de Heid a partir de los PCS como tecnología cognitiva, se configura combinando ambos aspectos, como amplificador del currículum, dado que la teoría de la aproximación para establecer la Integral Definida, no se corresponde habitualmente al currículum de Cálculo I, y, como reorganizadores del currículum en el sentido que se trabaja el concepto de Integral Definida, antes que el de Integral Indefinida (o cálculo de primitivas).

En relación con el segundo tipo de teorías de las que distingue Heid, que relacionan los contenidos y los procesos que aparecen en el currículum de Matemáticas, existen diferentes subcategorías de análisis:

El papel de los PCS en el álgebra escolar, el paso de las estrategias informales a las formales, la influencia de los PCS en las teorías que relacionan los procesos y objetos matemáticos y, finalmente, la influencia en las teorías de la representación para el aprendizaje de las Matemáticas.

Nos centraremos en esta última subcategoría que resulta ser la que más se relaciona con nuestro estudio. Pese a que existen diferentes interpretaciones de las representaciones (internas, externas, semióticas…). Creemos, al igual que Heid, que lo que importa es el sistema en el que se produce la representación, no la perspectiva que se tome sobre las representaciones. Lo esencial en este caso es la conversión entre representaciones para la articulación coherente de las mismas.

Los PCS y sus capacidades multirrepresentacionales constituyen un entorno de trabajo privilegiado. Muchas investigaciones han mostrado, como elementos claves en los que los estudiantes fracasan, la conexión entre las distintas representaciones. Santos (2000) en su investigación, encontró que un aspecto importante que favorece las conexiones entre las distintas representaciones, es la reflexión sobre la información que cada representación puede aportar a otro sistema de representación. El trabajo que desarrollamos tratará de centrarse en el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, cuando se utiliza un PCS como *DERIVE* y para facilitar la construcción de dichas representaciones.

Otros elementos importantes que se deben tener en cuenta en la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, haciendo uso de PCS, son los conceptos llamados por Heid (1988) de resecuenciación y la dicotomía entre el papel de los PCS como “caja negra/ caja blanca” (black box/white box).

El proceso de resecuenciación fue introducido en un artículo de Heid (1988), que fue considerado como el comienzo de la investigación sobre PCS en la Educación Matemática. Heid mostró que la integración de la tecnología permitía *resecuenciar* el curso, pudiendo seguirse una aproximación en la que el concepto fuese lo primero. Su estudio muestra que los sujetos del grupo experimental consideraron que al usar el PCS para los trabajos de cálculo, les hacía más seguros de su trabajo y les ayudaba a concentrarse en el proceso global de resolución de problemas.

La experiencia de Drijvers (1997) *resecuenciando* un curso de optimización indica que, aunque algunos se sintieron incómodos aceptando las funciones derivadas que devolvía la máquina, que no podrán verificar (relacionado con el carácter *black box*) transferencia desde el desarrollo de conceptos en el entorno computacional a las técnicas de lápiz-papel, resultó ser importante.

El segundo elemento tiene que ver con los términos *white box/black box.* Se refieren al papel que el PCS puede jugar en el proceso de aprendizaje y, en particular, la relación con el trabajo lápiz-papel. Buchberger (1990) discute que durante el proceso de aprendizaje de un nuevo concepto, el alumno debe desarrollar los cálculos relevantes a mano. El peligro de usar un PCS en esta fase es que el estudiante puede perder control y comprensión. Un PCS podría ser utilizado una vez que el individuo controla varios aspectos para desarrollar el trabajo (no trivial), en particular al estudiar un tópico de nivel superior. Según Buchberger el PCS se utiliza en tal caso como una *caja negra* que permite al estudiante centrarse en los nuevos aspectos sin ser distraído por los detalles que ya se conocen. Además, se pueden utilizar para obviar algunas carencias en el aprendizaje anterior.

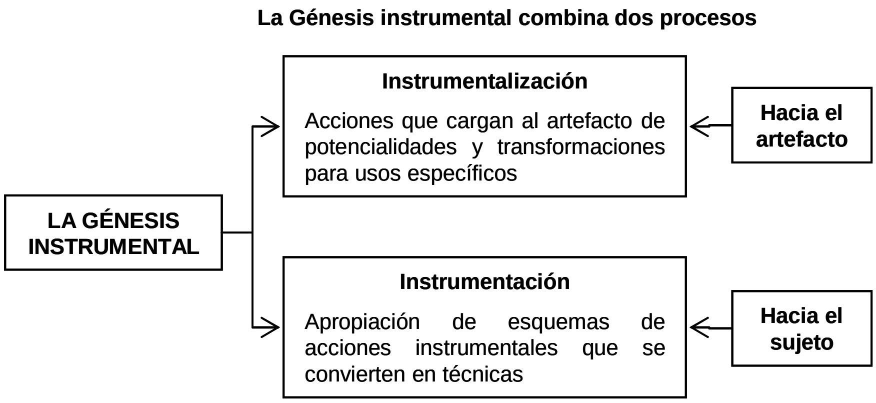
La secuencia *white box/black box* puede ser invertida. Los que apoyan esta aproximación sugieren un uso del PCS como generador de ejemplos y herramienta exploradora que el estudiante controle en nuevas situaciones. Esta fase de *caja negr*a puede llevar a descubrimientos que formen la base de la fase de explicación, en la que los hallazgos sean ordenados y probados, o llevar al desarrollo de nuevos conceptos, que es la fase de *caja blanca*. Las experimentaciones de Drijvers (1995) con esta aproximación para descubrir la Regla de la Cadena muestra que es efectiva en el sentido que los estudiantes descubrieron el procedimiento. Sin embargo, éste tuvo el carácter de reconocimiento de patrones sin un significado intrínseco relativo al concepto de derivada. En casos en los que el descubrimiento de un patrón apenas pueda realizarse sin explicaciones, esta aproximación puede ser fructífera.

En adición a estas dos aproximaciones, Macintyre y Forbes (2002) sugieren una aproximación de *caja gris* que consiste en un procedimiento de resolución de problemas, paso a paso, en el que los estudiantes se refieren a operaciones *caja negra*, pero no se apoyan en la tecnología de forma totalmente dependiente. Los subprocesos son dejados al entorno informático pero la estrategia general está determinada por el usuario.

En otro orden de cosas consideramos, al igual que Lagrange et al (2001) que el enfoque constructivista usado en las últimas investigaciones sobre la enseñanza utilizando las TIC tiende a soportar exclusivamente el corte técnico-conceptual, por tanto pensamos (Artigue, 2000) que los enfoques antropológico y sociocultural parecen más sensibles al papel jugado por los instrumentos en la actividad matemática y podrán rehabilitar el papel jugado en el aprendizaje por el trabajo técnico. El enfoque antropológico comparte con el enfoque sociocultural que los objetos matemáticos no son objetos absolutos, son entidades que surgen de la práctica con las instituciones. Aunque Chevallard (1992) distingue entre el trabajo tecnológico y teórico, Artigue los denomina a ambos teóricos. Desde esta perspectiva, se considera una técnica como un modo de resolver una tarea y tan pronto como va más allá del cuerpo de las tareas rutinarias, para una institución dada, cada técnica es un montaje complejo de razonamientos que se obtiene a partir del desarrollo de tareas rutinarias. Las técnicas no tienen solamente un valor pragmático que permite producir resultados, tienen también un valor epistemológico que le hacen formar parte de la comprensión de los objetos, y son también una fuente de nuevas cuestiones. Una técnica que llega a ser una rutina tiende a ser “desmatematizada” por los diferentes sujetos de la institución. Esto es importante porque la técnica pierde su nobleza matemática y se convierte en un simple acto.

Lagrange (1999, 2001) señala que es a través de las prácticas, donde el trabajo técnico juega un papel decisivo; uno construye los objetos matemáticos y las conexiones a través de éstos que son consideradas como de una naturaleza conceptual. El enfoque antropológico, desde nuestro punto de vista, suministra la estructura adecuada para resolver los cambios que se producen al introducir las TIC y sus posibles efectos sobre la enseñanza y el aprendizaje. El enfoque antropológico hace énfasis en el hecho de que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por nuestros sentidos.

La segunda componente viene de la Ergonomía Cognitiva (Rabardel, 1995) y se denomina Génesis Instrumental. La génesis instrumental trabaja en dos direcciones. En la primera dirección está dirigida hacia el artefacto, cargándolo progresivamente con potencialidades, y eventualmente transformándolo para usos específicos, llamamos a esto la "instrumentalización" del artefacto. En la segunda dirección, está dirigida hacia el sujeto, y conduce al desarrollo o apropiación de esquemas de acción instrumentada, las cuales, progresivamente, constituyen una técnica que permite una respuesta efectiva a las tareas dadas. Este proceso se denomina "instrumentación".



Esquema 2.8

Es en esta perspectiva global y teórica, en la que Artigue (2001) establece un análisis sobre todos estos factores mediante el cual trata de caracterizar su marco teórico, centrándolo en los siguientes aspectos:

- La inesperada complejidad de la génesis instrumental.
- Las necesidades matemáticas de instrumentación.
- El estatus de las técnicas instrumentales, los problemas surgidos de su conexión con las técnicas de papel /lápiz, y su administración institucional

Entre los resultados más relevantes de las investigaciones con calculadoras simbólicas se encuentran los de Trouche (1997, 2000, 2002). Concluye que existen efectos negativos sobre los procesos de conceptualización, al hacer un uso individual de la calculadora.

Cuando los alumnos aprenden por sí solos a utilizar las calculadoras ¿Cuáles pueden ser las consecuencias?

Se observa que los estudiantes:

- No consideran que la pantalla tiene límites mientras que la gráfica no los tiene.
- Consideran que las asíntotas forman parte de la función.
- Creen fielmente lo que les dice la calculadora sin buscar relaciones con los conocimientos adquiridos.

Además, los errores son siempre atribuidos al usuario y nunca a la máquina. Por otra parte, la idea fundamental de una relación entre los gestos y los pensamientos puesta en evidencia por Vygotsky (1978), es la base del análisis de los procesos de conceptualización.

Es importante considerar el rol central de los esquemas dentro del proceso de conceptualización, el papel motor de los sistemas de representación dentro del desarrollo conceptual, y, los automatismos, lo que influye en los procesos de conceptualización.

Las características de los entornos modelan y restringen las posibilidades de interacción con los objetos matemáticos y condicionan fuertemente las Matemáticas que pueden ser producidas o adquiridas.

Guin y Trouche (1999) muestran que hay tres tipos de restricciones: internas, de comandos y de organización; es fundamental tenerlas en cuenta según la necesidad de una socialización del proceso de instrumentación, dado que:

- La utilización de las calculadoras conduce a los estudiantes, con más probabilidad, a construir su propia comprensión matemática gracias a una reflexión consciente.
- El comportamiento ideal que describen, induce un aporte benéfico de las calculadoras.
- Los profesores son investidos de una responsabilidad importante dentro de la elección de situaciones para acompañar el proceso individual de instrumentación.
- El rol del profesor es: subrayar las contradicciones no percibidas, incitar a una reflexión para encontrar una coherencia matemática, ayuda a los alumnos a acceder a esta coherencia, introducir los

nuevos conocimientos matemáticos necesarios y administrar las dificultades que surjan dentro del nuevo entorno.

Nos muestran además, cómo los estudiantes trabajan en un solo registro (gráfico, numérico, simbólico) y existen dificultades de conversión entre registros.

Guin y Trouche (1999) también determinan unas tipologías (Tabla 2.1) de comportamientos de los estudiantes de Secundaria que se producen al inicio del proceso y que van a perdurar y a mostrarse cuando el alumno se reencuentre solo con su calculadora delante de un trabajo a realizar.

	Adaptación al entorno TI-92:	El trabajo por realizar para adaptarse a una nueva sintaxis
Racional	La calculadora juega un rol de cuaderno de trabajo interactivo. La TI-92 transforma y enriquece el trabajo matemático (conjeturas, cambios de registros, verificaciones).	La adaptación es relativamente fácil (como lo fue la adaptación a la sintaxis matemática).
Teórico	La calculadora es una caja de problemas. La TI-92 refuerza una tendencia natural: desinterés para los cálculos elementales (tratados por la máquina), fijación sobre los problemas teóricos generales.	La adaptación es una problemática ("la máquina me responde siempre un error de sintaxis"), pero enseguida el esfuerzo de adaptación se acompaña de un progreso dentro del rigor del trabajo en general.
Escolar	La calculadora es una muletilla. El trabajo matemático es reducido a la traducción por la máquina de preguntas propuestas y a la interpretación de resultados.	Se observa una ruptura entre dos grupos: aquéllos que franquean la barrera lingüística ganan en seguridad y aquéllos que no la franquean y ganan en perplejidad.
Manitas	La calculadora es una linterna mágica. La TI-92 refuerza la tendencia natural: investigaciones múltiples, construcción de itinerarios (por deformaciones sucesivas) para arribar al resultado propuesto por la calculadora.	Se distingue una ruptura entre dos grupos: aquéllos que hacen el esfuerzo de adaptarse racionalmente o racionalizan un inicio de anticipación/verificación y los otros transportan los resultados.
Experimentador	La calculadora juega el rol de un mirador panorámico. La TI-92 acentúa la tendencia a investigar, confrontar los resultados surgidos de diferentes aplicaciones.	La adaptación es una problemática ("la máquina me responde siempre un error de sintaxis"), pero enseguida el esfuerzo de adaptación se acompaña de un progreso dentro del rigor del trabajo en general.

Tabla 2.1

Estas tipologías aparecen relevantes y se muestran como un campo de investigación creciente.

La idea de la génesis instrumental también aporta algunos elementos a nuestro marco teórico, dado que nos ayudará a interpretar las limitaciones asociadas con el uso de los PCS.

También los obstáculos globales y locales definidos por Drijvers (2002) nos servirán para que los estudiantes reflexionen sobre su propio aprendizaje (ver apartado 2.4).

Las ideas que aparecen establecidas en el marco teórico juegan un papel esencial, no solamente en el análisis del trabajo de los estudiantes, sino también en el diseño y estructura de nuestro estudio. En particular, el diseño de nuestro módulo instruccional (ver anexo 14) está basado en las Prácticas de Laboratorio y el Programa de Utilidades (PU) específicamente diseñado. La idea fundamental consiste en que los estudiantes puedan utilizar el PU como una ayuda para el cálculo de área de funciones, con o sin primitiva, para desarrollar y completar su imagen del concepto de Integral Definida.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

En este Capítulo se presenta una descripción del diseño de la investigación y de los instrumentos utilizados para la recogida de información, así como el proceso seguido en la elaboración de los distintos módulos de instrucción.

En la primera parte se realizará una descripción global de la investigación explicando brevemente cada una de las distintas etapas que la conforman así como las fases en las que se ha desarrollado. Igualmente, se presentan los núcleos en torno a los cuales se han organizado las diferentes fases de la misma, orientadas a conseguir los objetivos planteados en este estudio.

En una segunda, parte se describen las técnicas e instrumentos utilizados para la recogida de información y los procedimientos seguidos en el análisis de los datos.

3.1. DISEÑO GENERAL Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se ha desarrollado en cuatro etapas en el período comprendido entre los años 1999 y 2002. Los esquemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y las tablas 3.1 y 3.2 sintetizan las distintas fases y etapas que se han desarrollado.

ELABORACIÓN DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

En esta etapa se realizó una revisión de la literatura relacionada con las actitudes, las Tecnologías de la Información y la Comunicación y la problemática sobre comprensión del concepto de la Integral Definida (ver esquema 3.1 y tabla 3.1, 1ª etapa). Con esta información se pudo establecer la relevancia de una investigación que considera estos tres elementos. Se conformó un marco teórico, por una parte, referente a las actitudes de los estudiantes, basado fundamentalmente en lo expuesto, entre otros, por Artigue y Lagrange (1997), Gómez (1997), Mayes (1998), Galbraith y Haines (1998) y

Galbraith (2002), y por otra, relacionada con la comprensión del concepto de la Integral Definida, fundamentado, entre otros, por lo tratado por Duval (1993, 1995), Hitt (1998), Hiebert y Carpenter (1992) y Socas (1997, 1998, 2001).

Esquema 3.1

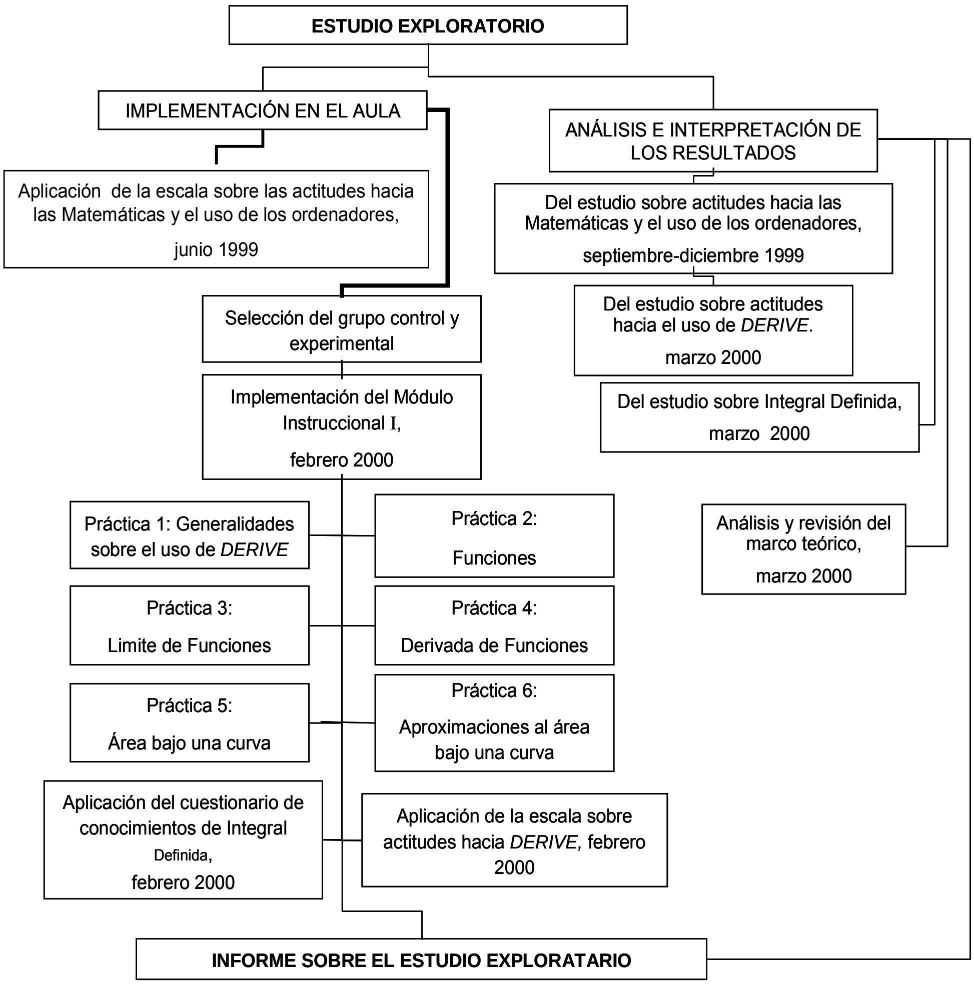
EL ESTUDIO EXPLORATORIO

El estudio exploratorio se llevó a cabo, en dos períodos.

En un primer periodo (ver esquema 3.2 y tabla 3.1, 2ª etapa), en el mes de junio de 1999 se desarrolló la siguiente actividad: De una población formada por 641 estudiantes del Primer Semestre de los Estudios Generales y Básicos de las Carreras de Ingeniería que imparte la Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre (UNEXPO), Vicerrectorado-Barquisimeto del Estado Lara (Venezuela) distribuidos en 16 secciones, en las cuales las primeras 6 secciones son de estudiantes de nuevo ingreso y el resto de repetidores, se seleccionó una muestra de 330 estudiantes. Se les aplicó un escala de actitudes tipo Likert (EA-1) (ver anexo 1) para medir las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores para el aprendizaje de las Matemáticas.

Las variables consideradas fueron género, condición de estudio y rendimiento académico.

En el segundo período correspondiente a febrero de 2000, se seleccionó una muestra de 58 estudiantes de un curso de Cálculo I de la UNEXPO. Se dividió dicha muestra en dos grupos, uno de 14 estudiantes (7 de nuevo ingreso, NI, y 7 repetidores, RE), y otro de 44 estudiantes (34 de nuevo ingreso y 10 repetidores); al primero se le denominó grupo experimental (GE) y al segundo grupo control (GC). Se siguió el programa oficial de Cálculo I que está estructurado en cuatro unidades temáticas: Funciones, Límite de funciones, Derivadas, e Integrales. En el momento de iniciar la experiencia, los estudiantes, habían cursado las tres primeras unidades del programa oficial con sus respectivos profesores. El libro de texto que utilizaron los profesores era el Cálculo de Edward y Penney (1996).



Esquema 3.2

Con el GE se llevó a cabo una instrucción, en el mes de febrero, en un laboratorio de ordenadores, utilizando para ello el Módulo Instruccional I (ver anexo 2), que posteriormente será descrito en detalle (apartado 3.2.1).

El GC, siguió la enseñanza con los métodos habituales, esto es, el profesor utilizaba el libro de texto y sus explicaciones se desarrollaban en la pizarra. El esquema de enseñanza queda limitado a la secuencia Definición-ejemplo-teorema-ejercicio.

En esta parte de la investigación se realizaron dos estudios, uno con respecto a las actitudes de los estudiantes hacia el uso de *DERIVE* en el aprendizaje de las Matemáticas, y otro, sobre el concepto de Integral Definida.

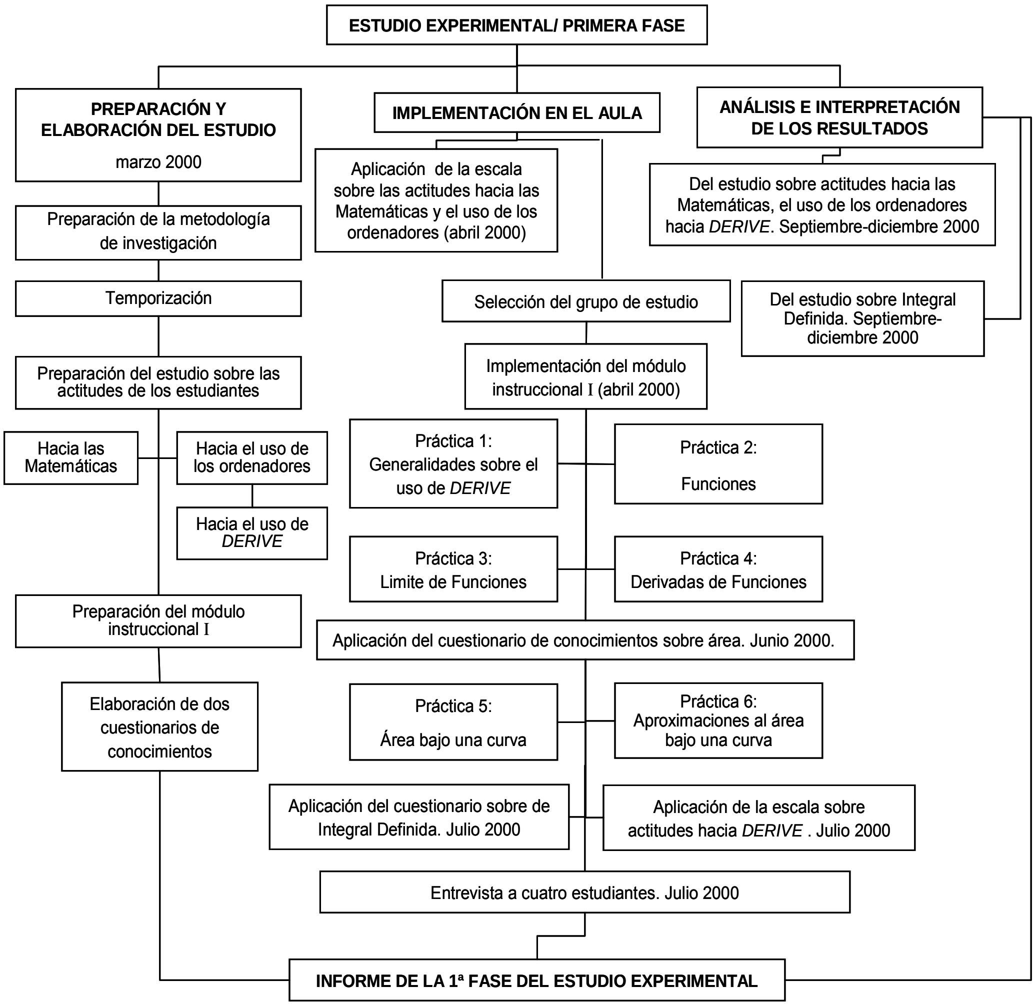
En el estudio sobre actitudes, se aplicó la escala de actitudes (EA-2) (ver anexo 3). La variable considerada fue la condición de estudio (nuevo ingreso o repetidores).

En relación al estudio sobre el concepto de Integral Definida, se aplicó un cuestionario de conocimientos (ver anexo 4), que se describe en el apartado 3.3.2, construido al objeto de determinar cómo influye la instrucción seguida por los estudiantes.

EL ESTUDIO EXPERIMENTAL

A partir de la información obtenida en el estudio exploratorio, se llevó a cabo lo que hemos denominado estudio experimental y que lo hemos dividido en dos fases que se describen a continuación.

En la primera fase (ver esquema 3.3 y tabla 3.2, 3ª etapa), se escogieron 28 estudiantes de nuevo ingreso de Cálculo I de la UNEXPO. El trabajo se desarrolló durante el periodo abril-julio de 2000. Los estudiantes participaron en un curso en el que se combinaban clases habituales de tiza y pizarra con Prácticas de Laboratorio de ordenadores usando el Módulo Instruccional I. En las tres primeras unidades del programa oficial, la formación que recibieron los estudiantes fue la misma. En la última unidad (Integrales), se formaron dos grupos; el primero de 11 estudiantes, que llamaremos Grupo 1 (G1) y el otro, de 17 estudiantes, que denominaremos Grupo 2 (G2). El objetivo de esta división fue fundamentalmente para modificar el uso que se hacia del software.



Esquema 3.3

Al inicio del curso se aplicó una escala (pretest) (EA-3) (ver anexo 5) para medir las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de ordenadores, y al final (postest) (EA- 4) (ver anexo 6); se aplicó la escala inicial y se le adicionó la escala validada en el estudio exploratorio, con el objeto de analizar las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje con *DERIVE*.

Utilizando los resultados de los dos cuestionarios sobre actitudes, se seleccionaron los dos ítems por dimensión, que tenían menor promedio de respuesta por ítem (PRI) y mayor dispersión para diseñar el protocolo de una entrevista. Esta elección se debe a que estos valores nos pueden llevar a pensar que los estudiantes tienden a tener una baja actitud en lo que la intención del ítem se refiere, y que la actitud puede no ser homogénea. Con los ítems seleccionados se estructuró una entrevista. Para la entrevista se seleccionaron dos estudiantes del G1 que denominamos G1E1, G1E2, y dos del G2 que denominamos G2E1, G2E2. Se videograbaron las sesiones y se transcribieron las entrevistas realizadas.

Decidimos, en esta primera fase, analizar los estados de opinión de los estudiantes sobre las Prácticas de Laboratorio de cara a enriquecer nuestro estudio posterior (ver anexo 7).

Al inicio del tema de Cálculo Integral se aplicó un Cuestionario de Conocimientos (CC-1) (pretest) (ver anexo 8) y al finalizar el tema otro (CC-2) (postest) (ver anexo 9), validado en el estudio exploratorio. Una de las finalidades de esta metodología es determinar el tipo de respuesta dado por los estudiantes a situaciones, que pueden ser resueltas sin utilizar cálculo integral, y, de qué manera influyen los nuevos conocimientos sobre integrales cuando responden a un cuestionario con preguntas similares. Además, sirvió para la selección de los cuatro estudiantes que fueron entrevistados con posterioridad. La prueba (CC-2) que cumplimentaron los estudiantes se utilizó como protocolo para las entrevistas.

Las entrevistas fueron realizadas en un ambiente en el que el estudiante resolvía el cuestionario realizando anotaciones y respondiendo a las distintas preguntas que le hacía el investigador. Se videograbaron las sesiones y se transcribieron las entrevistas.

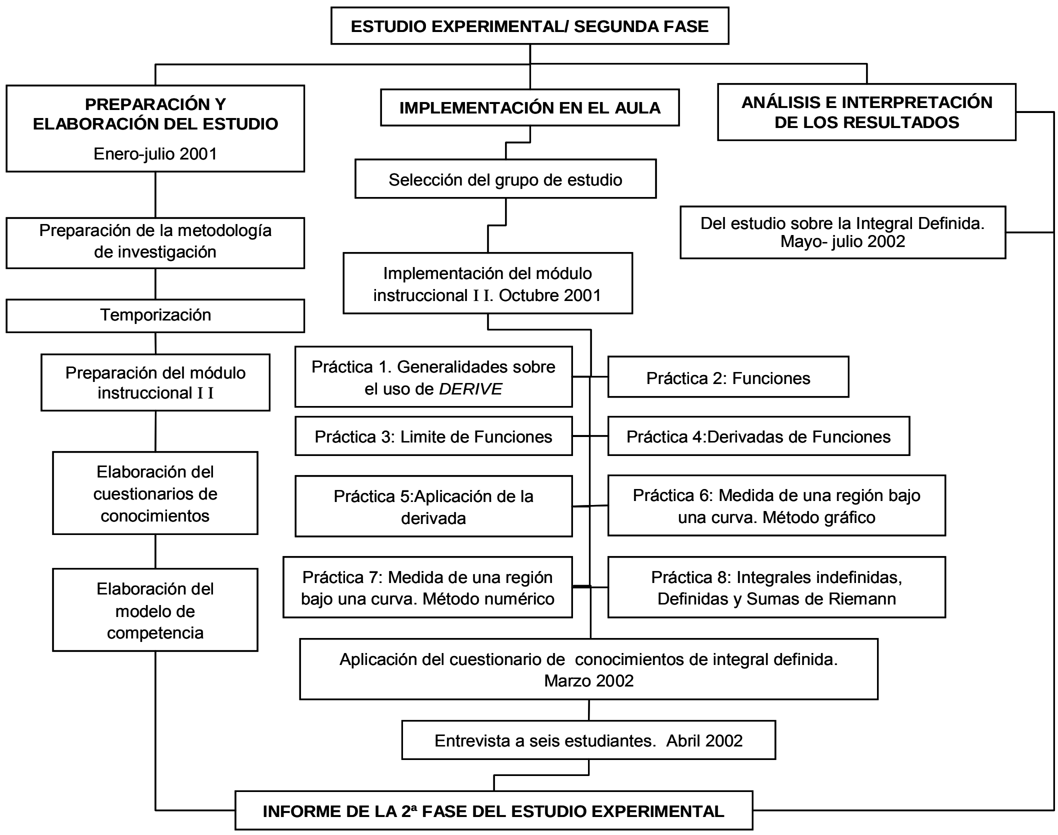
A partir de los resultados obtenidos en la primera fase, se realizó una revisión de los materiales e instrumentos utilizados para organizar el estudio definitivo sobre el concepto de la Integral Definida, lo que dio lugar a la segunda fase del estudio experimental. Esta segunda fase (ver esquema 3.4 y tabla 3.2, 4ª etapa) se llevó a cabo con un grupo de 31 estudiantes de nuevo ingreso de Cálculo I de la UNEXPO y se desarrolló durante el periodo octubre 2001-marzo 2002. El método de trabajo con los estudiantes fue el siguiente: se dictó el programa oficial de la asignatura, durante un semestre, combinando las clases habituales de aula con las Prácticas de Laboratorio, siguiendo el módulo instruccional II (ver anexo 14), que será descrito posteriormente. Este módulo incluye modificaciones respecto al utilizado en la primera fase y los estudiantes lo siguieron con el software *DERIVE* (versión 5.02).

En esta fase no se dividió el grupo de los estudiantes participantes, sino que la experiencia la siguieron todos los alumnos.

Con la finalidad de determinar la competencia de los estudiantes para la construcción del concepto de Integral Definida se seleccionaron seis estudiantes para ser entrevistados (ver anexo 17). Previamente se elaboró un modelo de competencia cognitivo que se describió en el apartado 2.5, con la intención de categorizar la comprensión de los alumnos, atendiendo a su actuación al resolver el conjunto de problemas no rutinarios que se habían elaborado.

La estrategia de enseñanza utilizada en todo el estudio experimental constó de las tres fases que describimos a continuación:

Fase 1: El profesor hace una presentación del tema usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se utiliza el libro de texto oficial (para la primera fase del estudio experimental, el libro de Edward y Penney (1996), y para la segunda fase del estudio experimental el de Stewart (1999)), usando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.



Esquema 3.4

Fase 2: Los estudiantes trabajaron por parejas, en el Laboratorio de ordenadores, una serie de Prácticas de Laboratorio. Las parejas de estudiantes deben resolver las prácticas correspondientes y presentar un informe en soporte informático del trabajo realizado en la práctica. Al comienzo de la práctica, se utilizó un cañón de proyección para hacer la presentación de la misma.

Fase 3: Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todo el grupo de estudiantes.

El núcleo de la instrucción, lo constituyen las Prácticas de Laboratorio y después de proyectarse mediante un cañón de proyección y aclarar las dudas pertinentes, los alumnos deberán resolverlas por parejas. En el apartado siguiente se ampliará la descripción de estas ideas.

En la siguiente tabla se resumen las etapas de nuestra investigación, indicando detalladamente las distintas acciones realizadas en cada etapa, los objetivos propuestos y el tipo de análisis que se desarrolló.

ETAPAS	FOCO DE ESTUDIO	ACCIONES	OBJETIVOS	TIPOS DE ANÁLISIS
1ª Elaboración del proyecto de investigación 1999		-Revisión de la literatura. -Intuición del problema. -Elaboración del marco teórico conceptual. -Elaboración del plan metodológico general.		
2ª Exploratoria 1999/2000 Validación de instrumentos	Actitudes hacia las Matemáticas y a el uso de los ordenadores	-Elaboración de la Escala de Actitudes, EA-1 -Aplicación de la Escala de Actitudes (junio 1999). -Procesamiento de los datos, análisis e interpretación.	-Determinación de las actitudes de los estudiantes. -Establecimiento del tipo de respuesta	Cualitativo
	Módulo Instruccional I	-Elaboración del Módulo Instruccional I. -Implementación del Módulo Instruccional I (febrero 2000).		
	Actitudes hacia el aprendizaje con *DERIVE*	-Elaboración de la Escala de Actitudes, EA-2. -Aplicación de la Escala de Actitudes (febrero 2000). -Procesamiento de los datos, análisis e interpretación.	-Determinación de las actitudes de los estudiantes. -Establecimiento del tipo de respuesta	Cuantitativa/ Cualitativo
	El concepto de la Integral Definida	-Elaboración del Cuestionario de Conocimientos. -Aplicación de Cuestionario de Conocimientos (febrero 2000). -Procesamiento de los datos, análisis e interpretación.	-Determinación de dificultades, obstáculos y errores. -Establecimiento del tipo de respuesta.	Cualitativo

Tabla 3.1

ETAPAS	FOCO DE ESTUDIO	ACCIONES	OBJETIVOS	TIPOS DE ANÁLISIS
3ª Experimental Fase 1 2000 Pretest / Postest		Elaboración de la metodología.		
		-Implementación del Módulo Instruccional I (abril-julio 2000).		
	Actitudes hacia las Matemáticas, el uso de los ordenadores y hacia el aprendizaje con *DERIVE.*	-Modificaciones de las Escalas de Actitudes. -Aplicación de la Escala de Actitudes Pretest (EA-3) (abril 2000) -Aplicación de la Escala de Actitudes Postest (EA-4) (julio 2000). -Entrevistas clínicas (agosto 2000). -Procesamiento de los datos, análisis e interpretación.	Determinación de las actitudes de los estudiantes. -Establecimiento del tipo de respuesta	Cuantitativo/ Cualitativo
	El concepto de la Integral Definida	-Elaboración de Pretest de Conocimientos. CC-1. -Aplicación del Cuestionario de Conocimientos Pretest (junio 2000). -Modificaciones del Cuestionario de Conocimientos validado en la 1ª etapa (Postest) (CC-2). -Aplicación del Cuestionario de Conocimientos Postest (julio 2000). -Entrevistas clínicas (agosto 2000). -Procesamiento de los datos, análisis e interpretación.	-Determinación de dificultades, obstáculos y errores. -Establecimiento del tipo de respuesta.	Cualitativo
4ª Experimental Fase 2 2001/2002	El concepto de la Integral Definida	Elaboración de la metodología.		
		-Elaboración Módulo Instruccional II, modificado del Módulo I. -Implementación del Módulo Instruccional II (octubre 2001-marzo 2002).		
		-Modificaciones del Cuestionario de Conocimientos validado en la Fase 1 (Postest) (CC-3). -Aplicación del Cuestionario de Conocimientos (marzo 2002). -Entrevistas clínicas (abril 2002). -Procesamiento de los datos, análisis e interpretación.	-Determinación de dificultades, obstáculos y errores. -Establecimiento del tipo de respuesta. -Determinación del nivel de compresión del concepto de Integral Definida	Cualitativo
Elaboración de la Memoria Doctoral, 2003/2004				

Tabla 3.2

3.2. LAS PRÁCTICAS DE LABORATORIO

Ya se indicó anteriormente que las Prácticas de Laboratorio constituyen el núcleo central de la instrucción. Cada Práctica de Laboratorio consta de un comentario general sobre la misma y un protocolo que los estudiantes deben seguir como instrucción de la práctica, con el asesoramiento del profesor. El contenido de cada práctica se proyecta en una pantalla con un cañón de proyección, y se les entrega a los alumnos por escrito con el objetivo de aclarar los puntos que sean necesarios de la misma. Una vez terminada cada práctica, se realiza una evaluación final que contiene los puntos más importantes tratados en ella. Cada Práctica de Laboratorio es recurrente, es decir, cada práctica nueva se comienza con una actividad en la que se discuten las observaciones que el profesor realiza de la anterior.

El desarrollo de las sesiones de enseñanza en el laboratorio, se lleva a cabo una vez que a los estudiantes se les había impartido el tema en su clase, con los métodos habituales. Los estudiantes asistieron al laboratorio en horarios diferentes y en dos grupos, trabajando por parejas en el ordenador. Las prácticas fueron entregadas, práctica a práctica, impresa en papel, con el objetivo de que los estudiantes las resolvieran y completaran por escrito. Antes de trabajar en la práctica, como se ya se ha indicado, se proyectó la práctica sobre una pantalla, con la finalidad de realizar comentarios generales y aclarar posibles dudas.

A continuación se detallan los aspectos más relevantes de los dos módulos instruccionales implementados.

3.2.1. Los Módulos Instruccionales

En la investigación se utilizaron dos módulos instruccionales. Cada uno de ellos contiene una serie de prácticas. Éstas se han elaborado utilizando el software *DERIVE*. De manera específica el protocolo de cada práctica esta estructurado de la siguiente manera:

<u>Introducción</u>, en la que se dan indicaciones generales que sirven, por una parte, de motivación, y, por otra, de información general sobre lo que se tratará en ella.

<u>Objetivos</u>, relacionados con el tema tratado.

<u>Desarrollo</u>, correspondientes a las actividades que lo conducirán al logro de los objetivos.

<u>Evaluación</u>, en la que se le pide al estudiante su opinión sobre el desarrollo de la práctica y se le propone problemas que debe resolver con lo aprendido en la misma.

En cada práctica se han incorporado sencillos programas de utilidades, que, al ser utilizados por los estudiantes, les facilita la realización de actividades no tan automatizadas como aquellas que se pueden hacer cuando se utilizan directamente los comandos o iconos (categorías) que aparecen en las pantalla de *DERIVE.*

<u>El Módulo Instruccional I</u> (ver anexo 2), se utilizó tanto en el estudio exploratorio como en la primera fase del estudio experimental. Las prácticas que están contenidas en el módulo se han elaborado utilizando la versión 4 del software *DERIVE*. La manera de trabajar cada práctica es la siguiente: Una vez que se le entrega a cada equipo (parejas en cada ordenador) la respectiva práctica, deben seguir la indicaciones del módulo; el profesor sólo interviene para aclarar dudas. Cada equipo realiza los cálculos gráficos y numéricos, que luego deben ser anotados en los espacios debidamente ubicados en el impreso de la práctica. Al final, los estudiantes deben cumplimentar el cuestionario de evaluación de la práctica, donde se les pide que expresen su opinión respecto al diseño de la práctica, al contenido desarrollado y además responder a preguntas tales como: *¿Qué le agregarías a esta práctica? ¿Qué le quitarías?*

Este primer módulo contiene 6 prácticas que se detallan a continuación:

- Práctica 1. Introducción al uso de *DERIVE.*

En esta practica se muestran las nociones básicas del programa *DERIVE* y algunas de sus aplicaciones en cuanto a resolución de ecuaciones.

- Práctica 2. Funciones.

En esta práctica se utilizan las capacidades gráficas de *DERIVE* para el estudio de funciones reales, así como también para elaborar graficas de ecuaciones. Dentro de las actividades de esta práctica, se introducen algunos Programas de Utilidades sencillos y ejemplos de aplicación.

- Práctica 3. Límite de Funciones.

Esta práctica utiliza las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio del límite de una función. Dentro de las actividades propuestas en esta práctica se usan algunos Programas de Utilidades para elaborar tablas de valores que muestran como se acercan los valores de las funciones, al límite.

- Práctica 4. Derivadas y aplicaciones de la derivada.

En esta práctica se utilizan las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de recta tangente a una curva y su relación con la derivada de una función. Dentro de las actividades de esta práctica se aplican algunos Programas de Utilidades para calcular la derivada de una función y su uso en el método Newton Raspón para la resolución de ecuaciones.

- Prácticas 5 y 6. Cálculo del área de una región limitada por una curva.

En estas prácticas se utilizan las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de área bajo una curva. Así como la aplicación a problemas elementales de Física. Estas prácticas están relacionadas directamente con el cálculo de integrales definidas, y en ellas se presenta la primera versión de nuestro Programa de Utilidades. El objetivo general consiste en que los estudiantes puedan ver paso a paso el desarrollo del cálculo del área de distintas aproximaciones al área de la región limitada por una curva. Se aproxima dicha área, utilizando rectángulos superiores, inferiores, punto medio, trapecios y trapecios parabólicos.

El Módulo Instruccional II (ver anexo 14) conserva la misma estructura general que el Módulo Instruccional I, es decir cada práctica contiene los mismos apartados (Introducción, Objetivos, Desarrollo y Evaluación). Sin embargo, se realizaron algunas modificaciones importantes establecidas atendiendo a diferentes razones: cambios en la versión de *DERIVE* (que este caso fue la versión 5.02), en las observaciones y sugerencias obtenidas a partir de la aplicación del Módulo Instruccional I y en el cambio de libro de texto.

Detallamos a continuación estas modificaciones.

Cambio de versión de DERIVE:

La versión 5.02 de *DERIVE* ofrece algunas ventajas con respecto a la versión 4; entre otras señalamos:

- Se pueden escribir los textos al igual que en los procesadores de texto en el entorno Windows.
- Permite grabar las gráficas en un fichero, es decir guardarlas.
- Insertar las gráficas en la ventana simbólica.

Consideramos que estas nuevas funciones incorporadas en la versión son muy importantes para nuestro trabajo, ya que el estudiante puede responder a lo que se le plantea, hacer comentarios y el profesor puede devolverle los comentarios que crea pertinentes sobre lo escrito por el estudiante. El estudiante puede dejar constancia de las gráficas tal como la ha hecho en la ventana gráfica, no tiene que hacer bosquejos sobre papel, ahorrando en tiempo y aumentando en precisión.

Cambio del libro Texto.

El libro que se utilizó como texto fue el "*Cálculo. Conceptos y contextos*" de Stewart (1999). Las razones para este cambio fueron principalmente institucionales. El Departamento de Matemáticas de la UNEXPO tiene como política cambiar del libro texto cuando los profesores lo requieran. No pudimos tener acceso a los criterios expuestos por los profesores que llevaron a tal decisión; pero el cambio, a nuestro parecer, fue acertado. Este libro concuerda mejor con nuestros planteamientos de enseñanza que el anterior. En este caso presenta en primer lugar el concepto de Integral Definida y luego de este estudio introduce las Integrales Indefinidas y posteriormente el Teorema Fundamental del Cálculo.

Los cambios introducidos en el Módulo Instruccional II, fueron realizados previamente al desarrollo de la experiencia y haremos una referencia general a tales cambios en los párrafos siguientes.

El nuevo módulo instruccional contiene 8 prácticas, que detallamos a continuación sus contenidos:

- Práctica 1. Introducción al uso de *DERIVE.*
  En esta práctica, al igual que en la práctica 1 del primer módulo, se muestran las nociones básicas del programa *DERIVE* y algunas de sus aplicaciones en cuanto a resolución de ecuaciones.
- Práctica 2. Funciones.
  De igual manera que la respectiva práctica de primer módulo, en esta se utilizan las capacidades gráficas de *DERIVE* para el estudio de funciones reales, así como para representar gráficamente las ecuaciones. Dentro de las actividades de esta práctica se introducen algunos Programas de Utilidades y ejemplos de aplicación.

- Práctica 3. Límite de Funciones.

  Análogamente que la práctica correspondiente en el Módulo Instruccional I, en esta práctica se utilizan las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio del límite de una función. También se emplean los Programas de Utilidades para elaborar tablas.
- Práctica 4. Derivadas.

  Las capacidades gráficas y simbólicas del *DERIVE* se utilizan en relación con la derivada de una función, para el estudio de la recta tangente a una curva. Dentro de las actividades de esta práctica se aplican algunos programas de utilidades para calcular la derivada de una función.
- Práctica 5. Aplicaciones de la derivada.

  Esta práctica se centra en la representación gráfica de funciones, atendiendo a las posibilidades de cálculo de las derivadas que facilitan la comprobación del test de la derivada 2ª para el cálculo de máximo y mínimo.
- Práctica 6. Cálculo del área de una región bajo una curva. Método gráfico.

  En esta práctica se utilizan principalmente las capacidades gráficas de *DERIVE* para el cálculo del área aproximada de regiones bajo una curva, utilizando un método grafico. A tal efecto los estudiantes usan el PU, diseñado por nosotros (método gráfico), ver anexo 14, pp. 149-151, con el que se construye geométricamente la aproximación de la medida del área de una región bajo una curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos. Finalmente comparan geométricamente las distintas aproximaciones a la medida del área de dicha región.
- Práctica 7. Cálculo del área de una región bajo una curva. Método numérico.

  En esta práctica se utilizan las capacidades numéricas de *DERIVE* para cálculos aproximados del área de regiones bajo una curva, utilizando una aproximación numérica. Aquí los estudiantes aplican el

PU, diseñado por nosotros (método numérico), ver anexo 14, pp. 157. Se calcula numéricamente el área de una región limitada por una curva utilizando rectángulos punto medio, trapecios y trapecios parabólicos (Regla de Simpson). Se comparan las distintas aproximaciones hechas con el valor exacto de ésta, obtenida directamente por *DERIVE*.

- Práctica 8. Integrales y el Teorema Fundamental del Cálculo.
  En esta práctica se utiliza las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de las integrales indefinidas, definidas y establecer relaciones con la regla de Barrow (Teorema Fundamental del Cálculo).

En relación con el Módulo Instruccional I, a cada práctica se le hicieron las siguientes modificaciones:

- Las respuestas a las preguntas planteadas durante el desarrollo de cada práctica, deben ser incluidas en la ventana simbólica de *DERIVE.*
- En el último apartado de cada práctica, Evaluación, se incluyeron problemas de aplicación directa de lo realizado en la práctica.
- Los apartados, Introducción y Desarrollo se modificaron, atendiendo al cambio del texto.
- Se puso mayor énfasis en el uso de los diferentes registros gráficos utilizados en los procedimientos de resolución de problemas.
- Las Prácticas de Laboratorio sobre la Integral Definida se desarrollaron de la siguiente manera:
  Se introdujo el concepto utilizando un método de aproximación gráfico para una región limitada por una curva y el eje OX (tanto sobre el eje como bajo el mismo) (práctica 6).
  En la práctica 7 se presentaron las gráficas que el estudiante debió obtener en la anterior y se realizaron aproximaciones del área de una región, utilizando las aproximaciones numéricas; se plantearon situaciones en las que se pedía a los estudiantes que hicieran comparaciones entre ambos procedimientos, favoreciendo la conversión de los distintos registros de representación semiótica.

En la Práctica 8, se presentaron las gráficas de la práctica 6 y las aproximaciones numéricas de la práctica 7; se calculaban Integrales Indefinidas y se ejemplificó el uso de la Regla de Barrow (Teorema Fundamental del Cálculo), insistiendo en la condición de continuidad para la aplicación. Para terminar, los alumnos comparan los tres procedimientos, para tratar de favorecer las conexiones entre los tres métodos.

3.2.2. El Programa de Utilidades. Descripción y uso

Se describe en detalle a continuación el PU que se utilizó en la segunda fase del estudio experimental. Este PU que se incluye en el anexo 14, pp. 149-151, 157-158, es el más elaborado. Conviene señalar que esta última versión del PU no es la misma que se utilizó en las experiencias que constituyeron el estudio exploratorio y la primera fase del estudio experimental, ya que en ellos se usó un Programa de Utilidades ligeramente diferente, en cuanto al número de sentencias, y posibilidades numéricas y gráficas. En los capítulos IV, V, VI se mostrarán las similitudes y diferencias entre ambos Programas de Utilidades.

Antes de pasar a describir el funcionamiento del PU, se debe indicar que *DERIVE* posee un Programa de Utilidades (PU) que se encuentra incorporado en la carpeta MATH del software original, en el cual se hace alguna referencia al cálculo de la integral de Riemann. Es el archivo Misc.mth y en él aparece definida la siguiente función:

$$\mathrm{LEFT\_RIEMANN}(u, x, a, b, n) := \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k\_=0}^{n-1} \lim_{x \to a+(b-a)\cdot k\_/n} u$$

Esta función solamente proporciona resultados numéricos de aproximación para la integral en el sentido de Riemann. Los aspectos gráficos no aparecen en ningún momento. Es por ello por lo que con el PU que hemos diseñado -que constituye el núcleo básico utilizado en el proceso de formación de los alumnos- tratamos que el alumno asimile el concepto atendiendo principalmente a sus aspectos gráficos y numéricos, interpretando la Integral Definida como un proceso del cálculo aproximado de áreas.

A continuación exponemos los elementos que conforman nuestro Programa de Utilidades. Éste (véase anexo 14, pp. 152-153, 158-160) contiene una serie de sentencias que permite calcular el área aproximada de una manera gráfica y numérica en el sentido de Riemann-Darboux, es decir utilizando rectángulos superiores o inferiores, tomando el punto medio de la base de cada rectángulo, así como por el método de los trapecios y mediante porciones limitadas por parábolas y el eje OX (trapecios parabólicos).

Detallamos a continuación el proceso que debe seguir el estudiante cuando utiliza el Programa de Utilidades.

Por ejemplo, si el problema consiste en calcular el área limitada por la grafica de la función $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ mediante distintas aproximaciones.

Una vez definida la función: $\mathrm{F(x)} := 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$, lo primero que se debe hacer es representarla gráficamente y obtener los puntos de corte con el eje de abscisas (figura 3.1).

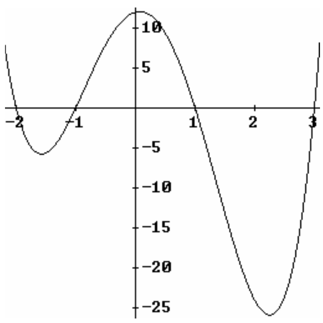


Figura 3.1. Gráfica de la curva

La gráfica tendrá dos partes o regiones "bajo" el eje OX para los intervalos$[-2, -1]$ y $[1, 3]$, y una "sobre" el eje OX en $[-1, 1]$ (figura 3.1). Se trata ahora de visualizar las distintas aproximaciones.

Representamos gráficamente, por ejemplo, 8 trapecios en cada región. Para tal efecto se procede así: se calcula la matriz que representa los 8 trapecios en cada intervalo utilizando la sentencia,

$$\begin{aligned}&\mathrm{TRAPECIOS}\ (\mathrm{a, b, n}) := \mathrm{VECTOR(TRA\ \ PECIOS(a\ + i \cdot H(a, b, n),}\\&\qquad\mathrm{F(a + i \cdot H(a, b, n), a + (i + 1) \cdot H(a, b, n), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n))), i, 0, n - 1)}\end{aligned}$$

seleccionando la parte izquierda de la igualdad de la sentencia, es decir

$$\mathrm{TRAPECIOS}\ (\mathrm{a, b, n}) :=$$

y sustituyendo $(\mathrm{a, b, n})$ por los valores de los extremos de los intervalos y el número de trapecios (n=8). Graficando se obtiene lo requerido (figura 3.2).

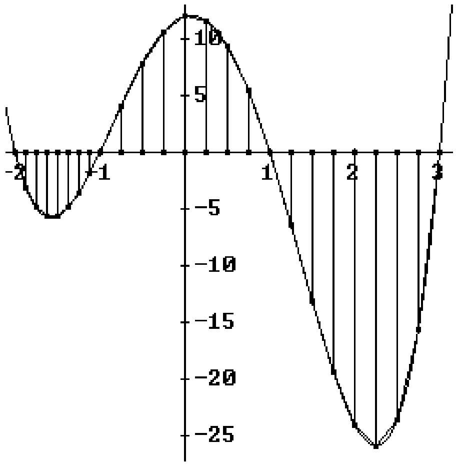


Figura 3.2. Trapecios

Resulta pertinente destacar que el nombre de cada función, expresa lo que se hace. En este caso “representa gráficamente los Trapecios” para cada parte de la función que está tanto bajo como sobre el eje OX donde se conocen los extremos de cada intervalo y el número de figuras deseadas; el lado derecho de la sentencia expresa la matriz de Trapecios construidos a partir de los extremos de la base de cada uno (lo cual resulta de subdividir el intervalo en *n* subintervalos) y su respectiva altura. Sentencias similares permiten trabajar con el resto de las aproximaciones. Estas sentencias constituyen el marco gráfico del procedimiento.

A continuación presentamos los diferentes gráficos que el estudiante puede construir siguiendo la práctica de enseñanza. Rectángulos superiores e inferiores, tomando el punto medio de cada intervalo (figuras 3.3, 3.4 y 3.5), y trapecios parabólicos (figura 3.6).

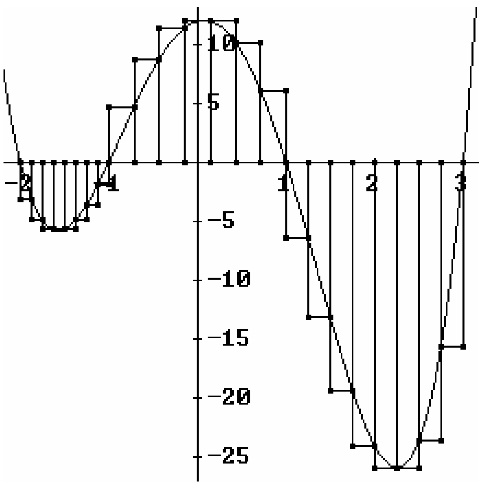


Figura 3.3. Rectángulos Superiores

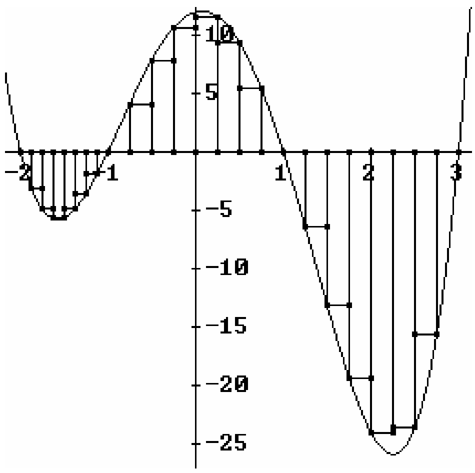
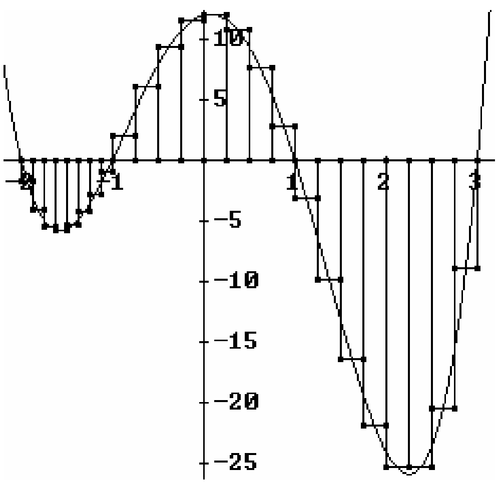


Figura 3.4. Rectángulos Inferiores



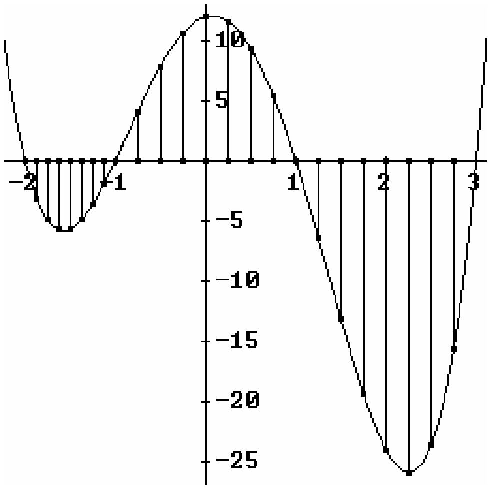


Figura 3.5. Rectángulos Punto Medio Figura 3.6. Trapecios parabólicos

La figura 3.7 se presenta todas las aproximaciones.

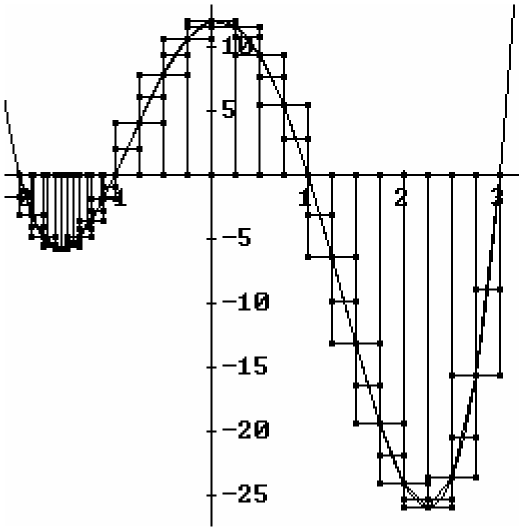
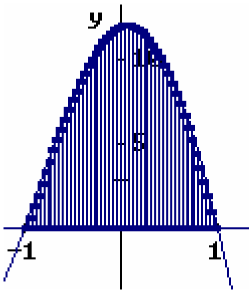


Figura 3.7. Rectángulos, Trapecios y Trapecios parabólicos

Este proceso se puede realizar para un número mayor de subdivisiones de los intervalos con lo cual se logra visualizar cómo, a medida que se aumenta el número de elementos de aproximación (trapecios, rectángulos y parábolas), éstos van “llenando” la superficie tanto “bajo” la curva (parte positiva de la función), como “sobre” la curva (parte negativa de la función). Cuando esto sucede puede dar la impresión de que la superficie puede cubrirse en su totalidad, el estudiante puede creer que con un número determinado de figuras es suficiente para llenar la superficie, sin embargo, utilizando el Zoom que incorpora *DERIVE* podrá observarse que necesitaría un número cada vez mayor de elementos de aproximación para lograr recubrir toda la superficie (figuras 3.8 y 3.9).



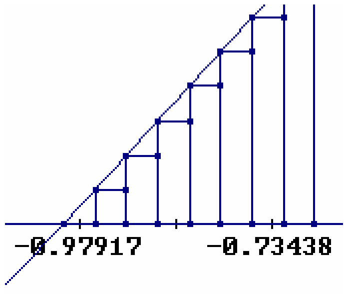


Figura 3.8 Figura 3.9

Para establecer el marco numérico del trabajo con el PU, hemos definido las funciones, distinguiendo también si el área a calcular está "sobre" el eje OX o "bajo" el eje OX. Sin perder generalidad podemos calcular el área en el intervalo $[-1, 1]$, cuya área se encuentra "sobre" el eje OX, utilizando 8 Trapecios. De manera análoga se puede proceder utilizando rectángulos superiores e inferiores, tomando el punto medio de cada subintervalo o trapecios parabólicos.

Utilizando la sentencia,

$$\mathrm{MEDIDA\_TRAPECIO}(a, b,\ n) :=$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{MEDIDA\_TRAP}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i+1) \cdot H(a, b, n)), H(a, b, n))$$

seleccionado la parte izquierda de la sentencia, y sustituyendo (a, b, n) por los valores (-1,1,8) obtenemos el valor del área 15.2578125. De manera análoga se utilizarían, en su caso, las sentencias correspondientes para las demás aproximaciones (rectángulos y trapecios parabólicos).

Con la finalidad de comparar las distintas aproximaciones que se obtienen, se utilizan las sentencias

$$\mathrm{MEDIDA\_MATRIZ\_APROX\_SOBRE\_X}(a,b, j, k, m), \qquad [1]$$

$$\mathrm{MEDIDA\_MATRIZ\_APROX\_BAJO\_X}(a,b, j, k, m),$$

para las dos partes de la curva respectivamente, siendo a y b los extremos del intervalo de integración, j y k el rango de variación de los subintervalos y m el paso de variación entre j y k[1]; obteniéndose una matriz donde se tiene de izquierda a derecha las siguientes columnas: cantidad de divisores, aproximación con rectángulos inferiores, aproximación con punto medio,

[1] Obsérvese que a efectos de comparación de los resultados, elegimos m y j pares, con el objetivo de poder aplicar el método de aproximación de Simpson. Para el caso de j (nº de subintervalos) impar se puede hacer una modificación en el PU, consistente en construir el punto medio de cada subintervalo, duplicando de este modo su número.

aproximación con trapecios, trapecios parabólicos y aproximación con rectángulos superiores. Esto le permite al estudiante comparar las diferentes aproximaciones con el valor exacto y poder determinar cuál puede ser una mejor aproximación. Sustituyendo (a, b, j, k, m) por $(-1, 1, 8, 26, 6)$, respectivamente obtenemos,

$$\begin{bmatrix} \text{N.S.} & \text{R. INF.} & \text{R. PTO. M} & \text{TRAP.} & \text{TRAP. PARAB.} & \text{R. SUP.} \\ 8 & 12.2578125 & 15.57128906 & 15.2578125 & 15.46679687 & 18.2578125 \\ 14 & 13.68429820 & 15.50072886 & 15.39858392 & 15.46668054 & 17.11286963 \\ 20 & 14.2275 & 15.483345 & 15.43332 & 15.46667 & 16.63914 \\ 26 & 14.51846385 & 15.47653268 & 15.44693813 & 15.46666483 & 16.37541241 \end{bmatrix} \text{[2]}$$

Donde N. S. significa número de subintervalos; R. INF., Rectángulos Inferiores; R. PTO. M., Rectángulos Punto Medio; TRAP., Trapecios; TRAP. PARAB., Trapecios Parabólicos; R. SUP., Rectángulos Superiores.

Se pasa a continuación a calcular el valor del área, utilizando la sentencia $\text{LIMITE\_SUMAS\_RIEMANN}(a, b)$, sustituyendo los valores de “a, b” por -1 y 1 respectivamente, obteniendo

$$\begin{bmatrix} \text{límite Rect. Inf} & \text{límite Pto. Medio} & \text{límite Trapecio} & \text{límite Trap.Parab.} & \text{límite Rect. Sup} \\ 15.46666666 & 15.46666666 & 15.46666666 & 15.46666666 & 15.46666666 \end{bmatrix}$$

En esta matriz el estudiante, por una parte, puede observar que al tomar el límite en cualquiera de los casos el valor es el mismo; y por otra, puede comparar ésta con la matriz de aproximaciones y determinar qué aproximación es la mejor.

Analizando la matriz de aproximación [2] y el valor real del área limitada por el polinomio F(x) que hemos definido (15’46666666), se propone a los alumnos un análisis más fino de los resultados obtenidos mediante las distintas aproximaciones al objeto de que los estudiantes vean la necesidad del análisis más preciso que se requerirá en un tema posterior dedicado a la integración numérica. Para ello, se le pide a los alumnos que prueben a obtener la matriz de las aproximaciones con un mayor número de divisiones, y, observarán intuitivamente el mayor orden de aproximación de la regla de Simpson, en relación con los otros métodos (orden 1 para rectángulos inferiores y superiores, orden 2 para punto medio y trapecios y orden 3 para el método de Simpson). De este modo, sustituyendo en [1] por (-1, 1, 6, 110, 8), se tiene:

$$\begin{bmatrix} \text{N.S.} & \text{R.INF.} & \text{R. PTO.M} & \text{TRAP.} & \text{TRAP.PARAB.} & \text{R. SUP.} \\ 6 & 11.09465020 & 15.65329218 & 15.09465020 & 15.47325102 & 19.09465020 \\ .. & ... & ... & ... & ... & ... \\ 46 & 14.93571924 & 15.46981768 & 15.46036499 & 15.46666857 & 15.98501074 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 110 & 15.26112156 & 15.46721764 & 15.46556472 & 15.46666666 & 15.68503184 \end{bmatrix}$$

Es decir, se podrá observar que haciendo 46 subintervalos, se obtienen 5 cifras decimales exactas para el valor de la integral con el método de Simpson, mientras que por el método de los trapecios solamente se consiguen dos cifras exactas. Con 110 subintervalos también para el método de los trapecios habrá dos cifras decimales exactas y sin embargo para el método de Simpson tenemos 8 cifras decimales exactas.

Es sabido que podemos encontrar para $F(x)$ cumpliendo ciertas condiciones ($F''(x)$ y $F^{(4)}(x)$ continuas para los métodos de los trapecios y Simpson respectivamente), el número exacto de subintervalos necesarios para conseguir un error menor que un cierto ε. Para ello bastará tener en cuenta que una cota del error para el método de los trapecios viene dada por: $|E| < \frac{M(b-a)h^2}{12}$, y para el método de Simpson, se tiene que $|E| < \frac{K(b-a)h^4}{180}$, siendo h la amplitud de los subintervalos y M y K las cotas superiores del valor absoluto de las derivadas segunda y cuarta de la función F(x) respectivamente, que pueden ser obtenidas a partir de la representación gráfica de ambas.

Creemos, de esta forma que el concepto de Integral Definida caracterizado desde esta perspectiva, facilita al estudiante, por una parte, clarificar cuál es el problema real que da lugar al Cálculo Integral, la cuadratura de curvas o lo que es lo mismo, el cálculo de áreas limitadas por ciertas curvas, y por otro, destaca la importancia de la aproximación gráfica y numérica para la resolución del problema.

Como es sabido las aplicaciones de la integral nos permiten calcular longitudes de arcos de curvas, calcular volúmenes de sólidos, tanto de revolución como por secciones, problemas de la Física, etc. La idea desarrollada para introducir el concepto de Integral Definida de esta manera nos lleva a afirmar que algunas situaciones problemáticas planteadas a nivel de papel y lápiz pueden ser resueltas de manera natural por los estudiantes. Veamos a continuación dos ejemplos sacados de la Física Matemática.

Ejemplo 1: *La figura que sigue (ver figura 3.10) muestra en péndulo de longitud L, que forma un ángulo máximo* θ_0 *con la vertical. Con la segunda ley de Newton se puede demostrar que el período, T (tiempo de una oscilación completa) está expresada por*

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2 sen^2 x}}$$

en donde $k = sen\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ *y g es la aceleración debida a la gravedad. Si* $L = 1\ m$ *y* $\theta_0 = 42^{\circ}$*, calcular el período.".*

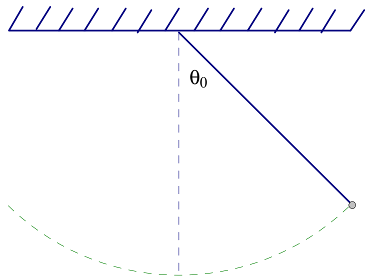


Figura 3.10

(Stewart 1999, pp.467)

Al sustituir los valores respectivos en la ecuación se tiene lo siguiente

$$T = 4\sqrt{\frac{1}{9.8}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(sen^2\frac{7}{60}\pi\right)\cdot sen^2 x}}$$

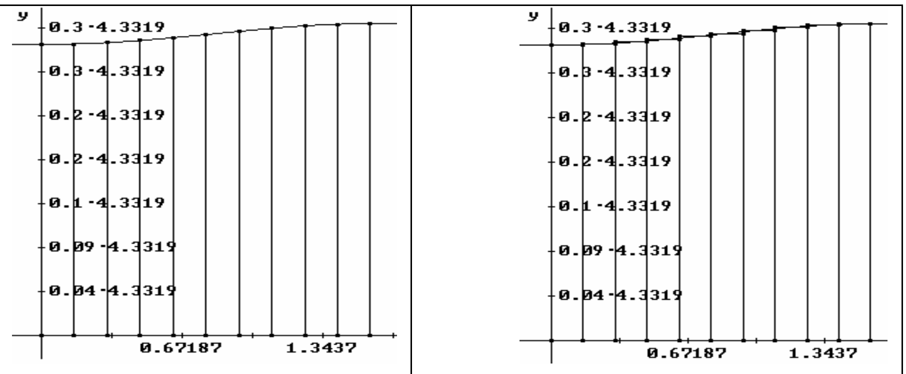
siendo la primitiva de la función integrando no integrable en términos de funciones elementales (integral elíptica). Al calcular la integral directamente *DERIVE,* utilizando la el icono "=", se obtiene:

$$\frac{4\cdot\sqrt{10}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\left(SIN(x)^2\cdot\left(COS\left(\frac{7\cdot\pi}{30}\right)-1\right)+2\right)}}\,dx}{7}$$

y de manera aproximada (icono "≈"), con 9 cifras decimales de aproximación, resulta el valor 2.076647405.

El diseño de instrucción que hemos desarrollado, nos permite, mediante

PU resolver el problema, tanto desde una perspectiva gráfica (ver figura 3.11) como numérica.



Trapecios parabólicos | Punto Medio

Figura 3.11

Además, proporciona una matriz de aproximaciones que se puede utilizar para reforzar la comparación de las distintas aproximaciones.

$$\begin{bmatrix} \text{N. S.} & \text{R. INF.} & \text{R. PTO. M} & \text{TRAP.} & \text{TRAP. PARAB.} & \text{R. SUP.} \\ 10 & 2.069507685 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.083787125 \\ 14 & 2.071547605 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.081747205 \\ 18 & 2.072680894 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.080613917 \\ 22 & 2.073402078 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.076647405 & 2.079892733 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que esta matriz ofrece resultados exactos para los métodos de orden dos y tres, utilizándolos para pocos subintervalos.

Ante este tipo de resultados, el estudiante puede percatarse, por una parte, de la importancia de los métodos numéricos y gráficos a la hora de calcular una Integral Definida cuya función no tiene primitiva, conduciéndole al procedimiento que expresamos en nuestra propuesta de enseñanza. Por otra, observar las limitaciones de un cálculo de la integral centrado en la integración de funciones continuas de las que conocemos sus primitivas (Teorema Fundamental del Cálculo).

Ejemplo 2: *Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas* (90 cm) *de ancho con secciones transversales con la forma de la curva* (figuras 3.12, 3.13)

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} \pi x, \qquad 0 \le x \le 36$$

¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas?

(Edwards y Penney 1996, pp. 370-371).

Teniendo en cuenta que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,,$$

se tiene en este caso (ver figura 11)

$$S(x)=\int_0^{36}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\;dx=36\int_0^{1}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\;dx \qquad (4)$$

Figura 3.12. Lámina de metal

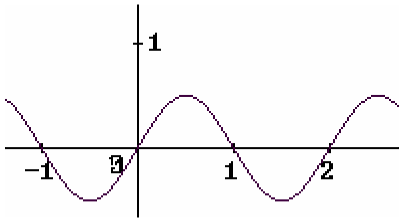


Figura 3.13 Gráfica de $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x$

En el texto mencionado se señala *Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales* (p. 370) para remitir al lector a otro capítulo del libro donde se trata la integración numérica. Presenta entonces la siguiente solución:

$$\int_0^{1}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}\;dx=1{,}46$$

Por lo tanto, la solución del problema es: $36.(1{,}46)=52{,}56$ pulgadas.

Con la secuencia de enseñanza desarrollada por los estudiantes para el estudio del concepto de Integral Definida vista como el cálculo de áreas limitadas por una curva, no necesitamos darle solamente una solución numérica tal y como se hace en el texto, sino que podría obtener dicha solución desde el punto de vista gráfico y numérico. Para lo cual bastaría con considerar la función:

$$F(x):=\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\pi x}$$

que al graficarla (figura 3.14) nos permite observar que es una función positiva. El PU servirá ahora para resolver el problema, se puede observar en la figura los distintos rectángulos y el “llenado” de la superficie limitada con el eje de abscisas.

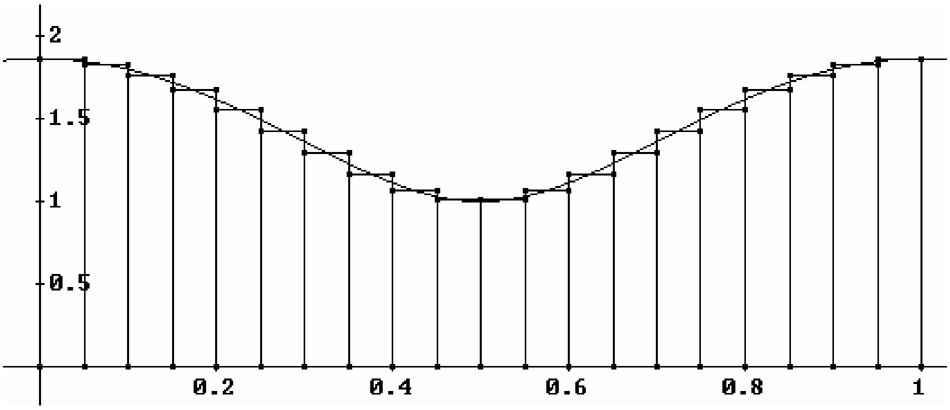


Figura 3.14. Gráfica con Rectángulos Punto Medio

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46369.

N. S	R. INF	R.PTO. M	TRAP.	TRAP. PARAB.	R.SUP.
10	1.377485726	1.463695629	1.463695315	1.463632875	1.549904904
20	1.420590677	1.463695472	1.463695472	1.463695524	1.506800266
30	1.434958942	1.463695472	1.463695472	1.463695472	1.492432002

Concluimos en definitiva que, el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente $36(1{,}46369) \approx 52{,}69$ pulgadas de ancho,

3.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOGIDA DE LA INFORMACIÓN

En este apartado se presentaran los distintos instrumentos que nos han permitido recoger la información necesaria para desarrollar la investigación.

Para el estudio sobre las actitudes se aplicaron diversas escalas de actitudes tipo Likert, cuestionarios con preguntas abiertas y entrevistas clínicas

En cuanto al estudio cognitivo realizado sobre el aprendizaje y enseñanza del concepto de Integral Definida, los instrumentos fueron, además de los módulos instruccionales, ya presentados en los apartados anteriores, varios cuestionarios de conocimientos y entrevistas clínicas con estudiantes seleccionados de los grupos.

A continuación se detalla cada instrumento.

3.3.1. Las escalas de actitudes

3.3.1.1. Actitudes hacia las Matemáticas y el uso de los ordenadores

Como hemos señalado, se utilizaron varias escalas tipo Likert en nuestro estudio de actitudes. En el estudio exploratorio se aplicó una escala de actitudes que hemos denominado (EA-1) adaptada de Depool (1991) (ver anexo 1), conformada por 34 ítems que categorizamos de manera similar a la de Galbraith y Haines (1998). Las dimensiones que definen las actitudes fueron: Confianza y seguridad en el trabajo matemático (8 ítems). Motivación hacia él (8 ítems). Compromiso con el mismo (12 ítems). Uso del ordenador en las actividades matemáticas (6 ítems) (ver anexo 1)

Para codificar las respuestas se asignaron códigos a cada ítem, teniendo en cuenta si el enunciado de éste último se presentaba en forma positiva (+) o negativa (-), de acuerdo a la siguiente tabla.

Respuestas / Tipo de ítem	Completamente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
Positivo (+)	4	3	2	1
Negativo (-)	1	2	3	4

Tabla 3.3

El procesamiento de los datos se realizó con el software SYSTAT; la confiabilidad del instrumento de acuerdo al Alfa de Cronbach es de 0.7757.

3.3.1.2. Actitudes hacia el aprendizaje con *DERIVE*

También en el estudio exploratorio se aplicó una escala de actitudes tipo Likert (EA-2), adaptada de Artigue (1997). La escala contiene 24 ítems (ver anexo 3) agrupados en tres dimensiones. Cada una de ellas constaba de 8 ítems (cuatro en forma negativa y cuatro en forma positiva). Dado que el tipo de instrucción recibida por los dos grupos que denominamos grupo experimental (GE) y grupo control (GC), fue diferente; se elaboraron dos versiones análogas para el cuestionario.

Para el GE, cada ítem se refería al “uso y manejo de *DERIVE*” y para el GC se adaptaba el enunciado de manera que la referencia era hacia el “uso de un software para ordenador". Por ejemplo, el ítem nº 12 en sus dos versiones era:

"Un software para ordenadores no ayuda a comprender las Matemáticas" (GC).

"*DERIVE*, no ayuda a comprender las Matemáticas" (GE).

Las tres dimensiones consideradas fueron: Seguridad y confianza en el trabajo con software para ordenadores/ *DERIVE*. Motivación hacia el trabajo con software para ordenadores/*DERIVE*. Compromiso con el trabajo usando software para ordenadores/ *DERIVE*.

El procesamiento de los datos se realizó con el SYSTAT. Para la confiabilidad del instrumento se utilizó el Alfa de Cronbach; que fue de 0,824873.

Se asignaron los códigos correspondientes a las respuestas de cada ítem, teniendo en cuenta si el enunciado de éste último se presentaba en forma positiva (+) o negativa (-), de manera similar a la utilizada en el estudio anterior (ver tabla 3.3).

3.3.1.3. Actitudes hacia las Matemáticas, el uso de ordenadores y hacia el aprendizaje con *DERIVE*

En la primera fase del estudio experimental se aplicaron dos escalas de actitudes, una al inicio del curso (pretest) (EA-3) (ver anexo 5) y otra al final del curso (postest) (EA-4) (ver anexo 6) con el objeto de estudiar la evolución de las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores de los estudiantes cuando realizan actividades diferentes a las habituales, y, la otra sólo al final, con la finalidad de determinar la influencia del uso del software de cálculo simbólico *DERIVE* en las variaciones de las actitudes, en caso que las hubiera.

Se consideraron seis dimensiones que determinan las actitudes tanto hacia las Matemáticas como hacia el uso de los ordenadores: Confianza y seguridad en el trabajo matemático; Motivación hacia el trabajo matemático; Compromiso con el trabajo matemático; Confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador; Motivación hacia el trabajo con el ordenador; Interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores (Galbraith y Haines, 1998). Para la escala relacionada con *DERIVE* se consideraron tres dimensiones:

Seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*, motivación hacia el trabajo con *DERIVE*, compromiso con el trabajo con *DERIVE*.

El instrumento (EA-3) era una escala Likert con 48 ítems, adaptada de la usada por Galbraith y Haines (1998). El procesamiento de los datos se realizó con el software SYSTAT. La confiabilidad del instrumento fue de 0.89 de acuerdo al coeficiente numérico Alfa de Cronbach, lo cual nos permite afirmar que existe una amplia consistencia de las respuestas de los estudiantes a la escala utilizada.

La segunda (EA-4), de 72 ítems, se configuró con la escala con la aplicada al inicio del curso y la validada en el estudio exploratorio para el estudio de las actitudes hacia el aprendizaje con *DERIVE*.

3.3.2. Los cuestionarios de conocimientos

A continuación se detallan los cuestionarios de conocimientos aplicados en la investigación.

3.3.2.1. El cuestionario de conocimientos utilizado en el estudio exploratorio

El cuestionario que se aplicó en este estudio (ver anexo 4) fue el primero que elaboramos y consta de 6 problemas, que se corresponden con las preguntas {1, 2, 3, 5, 6, 7} del cuestionario (postest), utilizadas en la primera fase del estudio experimental. Por razones de presentación y mejor descripción, hemos considerado detallar y caracterizar cada pregunta de este primer cuestionario en el siguiente apartado, ya que las consideraciones que haremos son válidas en ambos casos.

3.3.2.2. Los cuestionarios de conocimientos utilizados en el estudio experimental. Primera fase. Pretest (CC-1)/ Postest (CC-2)

En la primera fase del estudio experimental y antes de empezar la instrucción con el PU (cuarta unidad, integrales) se aplicó un cuestionario de conocimientos (pretest) (CC-1) (ver anexo 8), y al finalizar la unidad se aplicó el otro cuestionario (postest) (CC-2). Parte de este cuestionario se utilizó y validó en el estudio exploratorio (ver anexo 4 y 9). A continuación haremos la descripción general de ambos cuestionarios.

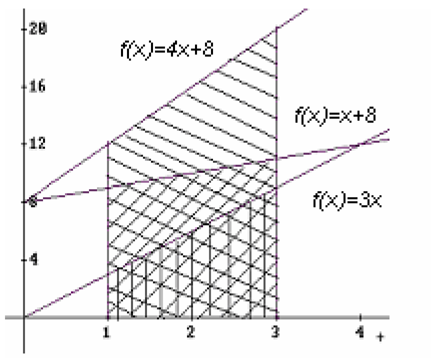
El cuestionario CC-1, que se utilizó como pretest, contiene 7 preguntas sobre el cálculo de áreas de regiones planas que, para resolverlo, no requiere conocimientos sobre el concepto de Integral Definida. El segundo cuestionario utilizado como postest (CC-2) contiene 8 preguntas adaptadas de otras pruebas utilizadas en las investigaciones de Orton (1983), Mundy (1984) y Calvo (1997). El cuestionario es similar al utilizado en el estudio exploratorio, al que se le añadieron dos preguntas. La correspondencia entre las preguntas utilizados en ambos cuestionarios, se establece con el objetivo de estudiar cómo influyen, tanto los conocimientos nuevos sobre el concepto de Integral Definida, como el método de aproximación utilizado con el software, en la concepción de área que poseen los estudiantes.

Describimos a continuación las preguntas de los dos cuestionarios.

- En la primera pregunta del pretest (CC-1) se pide a los estudiantes que justifiquen la propiedad aditiva del área limitada con el eje OX de funciones lineales y sus gráficas. En la primara pregunta del postest (CC-2) se pide a los estudiantes que justifiquen la propiedad aditiva de la Integral Definida, dadas las expresiones algebraicas de tres funciones (dos cuadráticas y una lineal) y sus gráficas. Deben explicar, utilizando estas representaciones, dicha propiedad. Pretendemos con ello, determinar qué clase de argumentos utilizan los estudiantes (gráficos, simbólicos o numéricos), para explicar esa propiedad elemental, antes y después de la instrucción, (Aditividad de la Integral Definida).

Pretest/Pregunta 1. Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué.

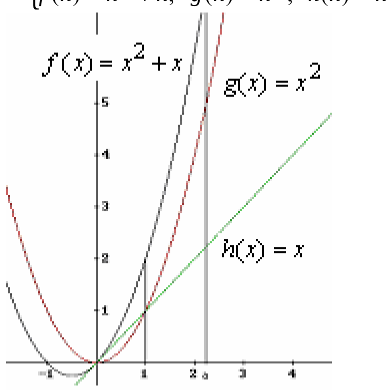
$$\text{Área}(f(x),1,3) = \text{Área}(h(x),1,3) + \text{Área}(g(x),1,3)$$



Postest/Pregunta 1. Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué.

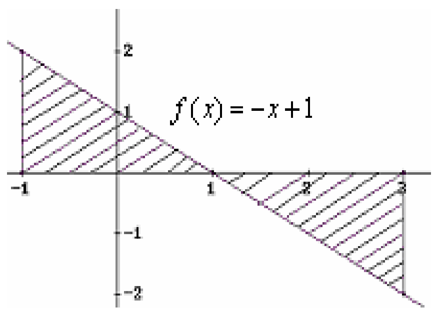
$$\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx + \int_1^a h(x)dx$$

donde $\{f(x) = x^2 + x;\ g(x) = x^2;\ h(x) = x$

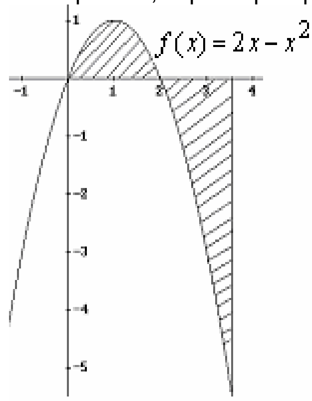


- En la segunda pregunta de ambos cuestionarios (Pretest, Postest) se pide calcular el área de una región limitada por la gráfica de una función que tiene una parte sobre el eje OX y otra bajo el eje OX. Tratamos de establecer qué dificultades tienen los estudiantes al trabajar con regiones que se encuentran bajo el eje OX y qué tipo de relaciones se establecen con las que están sobre el eje OX.

Pretest/Pregunta 2 Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué.

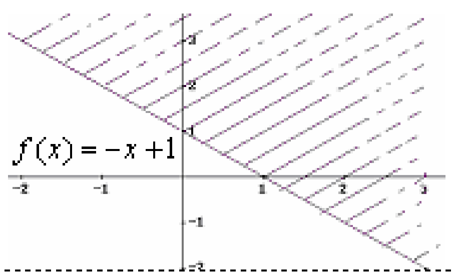


Postest/Pregunta 2.- Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué.

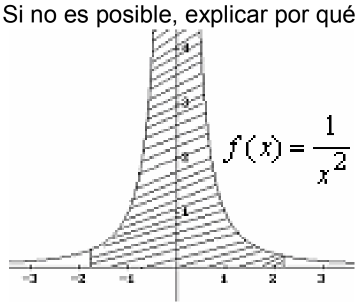


- En la tercera pregunta tanto de Pretest como de Postest se pide calcular el área de una región no acotada (semiplano limitado por una recta y la región limitada por la función $f(x) = 1/x^2$ en una región donde no está acotada). Se trata de analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda es infinita.

Pretest/Pregunta 3 Calcular el área rayada. Si no es posible, explicar por qué.

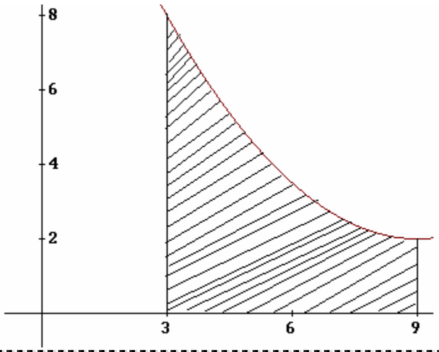


Postest/Pregunta 3. Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué.



- La cuarta pregunta es la misma en el Pretest y en el Postest. Esta pregunta es una de las que se añadió al cuestionario utilizado en el estudio exploratorio y es análoga a la utilizada por Calvo (1997). Se da únicamente la representación gráfica de una región limitada por la gráfica de una curva para la que se pide optimizar dos cotas dadas del área; se pretende determinar si los estudiantes son capaces de aproximar el área de una región limitada por una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener la expresión algebraica de la función. Además se trata de ver si son capaces de buscar mejores cotas que las dadas y de qué forma lo hacen.

Pretest, Postest. Pregunta 4. El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados?



- La quinta pregunta, tanto del Pretest como del Postest, consiste en un problema expresado sólo en el sistema de representación algebraico, se pide calcular el área limitada por la función valor absoluto con el eje OX. Tratamos de analizar de qué manera influyen los nuevos conocimientos y la metodología empleada para su enseñanza, en la resolución de este problema, para el que es sistema gráfico resultaría de gran utilidad.

Pretest/Pregunta 5. Calcular el área $A(f(x),-3,4)$ siendo $f(x)=\lvert x+2\rvert$	Postest/Pregunta 5. Calcular $\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert dx$

- La sexta pregunta que únicamente aparece en el Postest, pide que indiquen y se justifique la veracidad o falsedad de la aplicación de la regla de Barrow a una función, en un cierto intervalo donde es discontinua.

Postest/Pregunta 6

Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 = -\left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

Se pretende determinar:

- Si los alumnos son capaces de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta.
- Si los estudiantes identifican la relación de este ítem con la pregunta 3 del cuestionario.
- Si los estudiantes interpretan coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.

- La sexta y séptima preguntas del Pretest, se corresponden con las análogas 7 y 8 del Postest. En ellas se presentan dos proposiciones generales expresadas simbólicamente.

  En la hipótesis de las primeras (7 del pretest y postest), se establece una relación de desigualdad entre las áreas de regiones de dos funciones, y, en su tesis la relación de desigualdad de las funciones, mientras que, en las segundas proposiciones (pregunta 8 de ambos cuestionarios) se presenta la proposición recíproca. Con esto se pretende determinar, por una parte, si los estudiantes son capaces de entender los términos generales que se presentan y por otra, si establecen relaciones entre el área y la Integral Definida. Estos problemas no rutinarios nos ayudarán a analizar si los estudiantes utilizan contraejemplos para probar la falsedad de las afirmaciones.

Pretest/Pregunta 6. Indicar si es verdadero o falso que Si $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$, entonces, $g(x) \geq f(x)$, para toda x que pertenece a $[a,b]$. Justifica la respuesta.	Postest/Pregunta 7. Indicar si es verdadero o falso que Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces, $f(x) \geq g(x)$, para toda x que pertenece a $[a$ Justifica la respuesta.

Pretest/Pregunta 7. Indicar si es verdadero o falso que Si $g(x) \geq f(x)$, entonces, $A(f(x), a, b) \geq A(g(x), a, b)$. Justifique la respuesta.	Postest/Pregunta 8 Indicar si es verdadero o falso que Si $f(x) \geq g(x)$, entonces, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Justifica la respuesta.

Pretendemos, en general, con la aplicación de los cuestionarios:

1. Caracterizar la idea de área que poseen los estudiantes que han cursado la Secundaria y no conocen aún el concepto de Integral Definida.
2. Analizar si existe alguna influencia de la instrucción llevada a cabo con los alumnos, sobre la idea que traen los estudiantes del concepto de área, cuando se desarrolla la enseñanza combinando un método de tiza y pizarra, con el uso de las Prácticas de Laboratorio que se incluyen en el Módulo Instruccional.
3. Extraer información de cómo utilizan los alumnos los sistemas de representación gráfico y algebraico a la hora de resolver situaciones no rutinarias, que involucran tanto el concepto de área de figuras planas, como el de Integral Definida.

Se resumen en la tabla (ver tabla 3.4) las preguntas de ambos cuestionarios adjuntando sus descriptores. Se quiere destacar con esta presentación la analogía que existe entre las tareas propuestas, ya que fueron diseñadas de tal manera que las cuestiones de CC-1 pueden ser resueltas sin conocer el concepto de área utilizando la Integral Definida, mientras que las correspondientes preguntas del CC-2 requieren para su resolución el conocimiento de la relación entre el área y la Integral Definida.

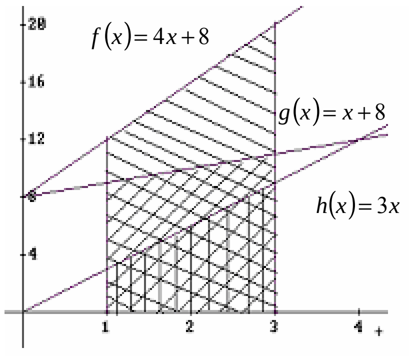
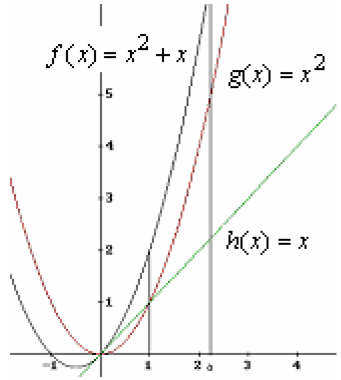
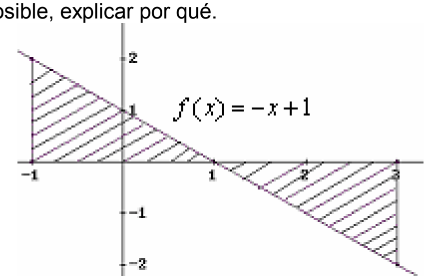
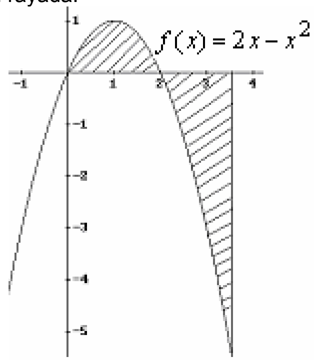
PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
1) Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué. $\acute{A}rea\ (f(x),1,3) = \acute{A}rea\ (h(x),1,3) + \acute{A}rea\ (g(x),1,3)$ 	1.1. Se pide justificar la propiedad aditiva del área. 1.2. No se menciona la palabra área. 1.3. Hay tres expresiones algebraicas y tres gráficas relacionadas (rectas). 1.4. No se pide aproximar. 1.5. Las funciones son continuas. 1.6. Se puede justificar de varias maneras. 1.7. Las regiones están rayadas. 1.8. Se puede realizar la comparación usando figuras elementales (triángulos, trapecios, etc.)	1) Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué. $\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx + \int_1^a h(x)dx$ donde $\{f(x) = x^2 + x;\ g(x) = x^2;\ h(x) = x$ 	1.1. Se pide justificar la propiedad aditiva de la integral. 1.2. No se menciona la palabra integral, ni área. 1.3. Hay tres expresiones algebraicas y tres gráficas relacionadas (una recta y dos curvas). 1.4. No se pide aproximar. 1.5. Las funciones son continuas. 1.6. Se puede justificar de varias maneras. 1.7. Las regiones no están rayadas.
2) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué. 	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región. 2.3. No se dan los intervalos, aunque se identifica en la gráfica. 2.4. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.6. El área se puede calcular usando figuras elementales (triángulos, rectángulos, etc.). 2.7. La función es continua.	2) Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. 	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región. 2.3. No aparece la palabra integral. 2.4. No se dan los intervalos, aunque se identifica en la gráfica. 2.5. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.7. No se pide aproximar. 2.8. La función es continua.

Tabla 3.4

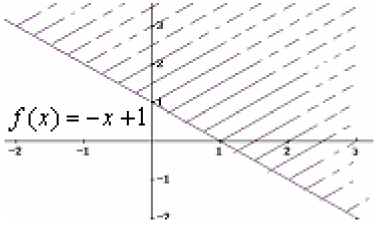
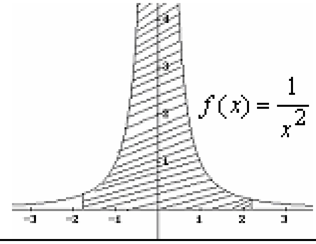
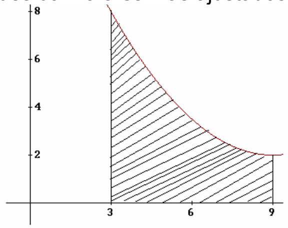
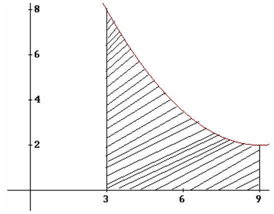
PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
3) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué. 	3.1. Se pide calcular el área. 3.2. Se identifica gráficamente la región. 3.3 No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 3.4. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 3.5. Hay una gráfica asociada. 3.6. No se pide aproximar. 3.7. Hay una región limitada por un semiplano. 3.8. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.	3) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué. 	3.1. Se pide calcular el área. 3.2. Se identifica gráficamente la región. 3.3. No aparece la palabra integral. 3.4. No se dan los intervalos, aunque se identifica en la gráfica. 3.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 3.6. Hay una gráfica asociada. 3.7. No se pide aproximar. 3.8. Hay una región con una discontinuidad en medio. 3.9. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.
4) El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados? 	4.1. Hay una gráfica asociada. 4.2. No hay una expresión algebraica asociada a la curva. 4.3. Se dan valores aproximados del área y se pide optimizarlos. 4.4. Se pueden utilizar figuras elementales para aproximar el área.	4) El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados? 	4.1. Hay una gráfica asociada. 4.2. No hay una expresión algebraica asociada a la curva. 4.3. No aparece la palabra integral. 4.3. No se puede plantear una Integral Definida. 4.4. Se dan valores aproximados del área y se pide optimizarlos. 4.5. Se pueden utilizar figuras elementales para aproximar el área.
5) Calcular el área $A(f(x),-3,4)$ siendo $f(x)=\lvert x+2\rvert$	5.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita. 5.2. Se menciona la palabra área. 5.3. Se da el intervalo en donde debe calcular el área. 5.4. No hay una gráfica asociada. 5.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla, pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.	5) Calcular $\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert dx$	5.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita. 5.2. No se menciona la palabra área. 5.3. Se da el intervalo de integración. 5.4. No hay una gráfica asociada. 5.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.

Tabla 3.4 (Continuación)

PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
		6) Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{1}x^{-2}dx=\left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right\|_{-1}^{1}=$ $\left.-\frac{1}{x}\right\|_{-1}^{1}=-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2$	4.1. Se presenta en el registro algebraico con información desarrollada (explícita). 4.2. No aparece la palabra área en “calcular la integral”. 4.3. Se da el intervalo de integración. 4.4. No hay una gráfica asociada. 4.5. Se aplica directamente las técnicas de integración.
6) Indicar si es verdadero o falso que. Si $A(f(x),a,b)\geq A(g(x),a,b)$, entonces, $g(x)\geq f(x)$, para toda x que pertenece a $[a,b]$. Justifica la respuesta.	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No hay graficas asociadas. 6.4. No se dan los valores entre los que debe calcular el área. 6.5. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.6. En general, la proposición es falsa.	7) Indicar si es verdadero o falso que $Si\ \int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x)\geq g(x)$, para todo x que pertenece a $[a,b]$	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No aparece la palabra integral. 6.4. No hay graficas asociadas. 6.5. No se dan los valores de los límites de integración. 6.6. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 6.7. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 6.8. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.9. En general, la proposición es falsa tanto si se trata de integrales como si fuese área.
7) Indicar si es verdadero o falso que Si $g(x)\geq f(x)$, entonces, $A(f(x),a,b)\geq A(g(x),a,b)$. Justifique la respuesta.	7.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 7.2. No aparece el término área. 7.3. No hay graficas asociadas. 7.4. No se dan los valores entre los que debe calcular el área. 7.5. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 7.6. En general, la proposición es falsa.	8) Indicar si es verdadero o falso que. Si $f(x)\geq g(x)$, entonces, $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$. Justifica su respuesta.	8.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 8.2. No aparece el término área. 8.3. No aparece la palabra integral. 8.4. No hay graficas asociadas. 8.5. No se dan los valores de los límites de integración. 8.5. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 8.6. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 8.7. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 8.8. En general, la proposición es verdadera si se trata de integrales y falsa si sólo se considera como área.

Continuación Tabla 3.4

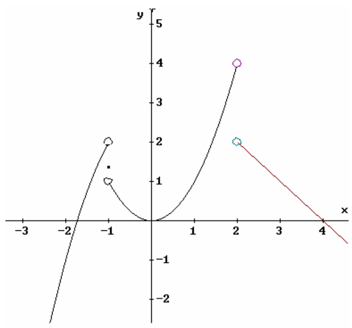
3.3.2.3. El cuestionario de conocimientos aplicado en la segunda fase del estudio experimental

En la segunda fase del estudio experimental se utilizó un nuevo cuestionario de conocimientos que representaremos por (CC-3), que contiene 7 preguntas. Este nuevo cuestionario es esencialmente el mismo que se utilizó en la primera fase del estudio experimental, aunque añadimos una pregunta, eliminando dos del CC-2 (ver anexo 16). A continuación describimos el cuestionario utilizado:

- Las preguntas {1, 2, 3, 5, 6, 7} son las mismas utilizadas en la primera fase del estudio experimental.
- En la cuarta pregunta se presenta un problema que utiliza los registros gráficos y algebraicos, en el cual aparece una función con un número finito de discontinuidades de la que se pide calcular el área limitada con OX. Presentamos a continuación el enunciado de dicha pregunta adjuntando sus respectivos descriptores (El cuestionario definitivo se presenta en las tablas 3.5, 3.6, 3.7).

Pregunta 4. Dada la función definida por $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$

- Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$.
- Si es posible, estima el valor de la Integral Definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible explicar por qué.
- Si no es posible, calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular ninguna porción, explicar por qué.



Descriptores
4.1. Se define el intervalo total.
4.2. Se plantea con los dos registros algebraico y gráfico.
4.3. Se pide calcular el área.
4.4. La función tiene 2 puntos de discontinuidad.
4.5. No aparece la palabra Integral Definida.
4.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva.
4.7. Hay una gráfica asociada.

3.3.3. Las entrevistas videograbadas

En la primera fase del estudio experimental se realizaron dos entrevistas clínicas a cuatro estudiantes seleccionados. Una con el objetivo de determinar las actitudes hacia la Matemáticas, los ordenadores y hacia el uso de *DERIVE,* y la otra para establecer la concepción que tienen los estudiantes del concepto de Integral Definida. En la segunda fase, se entrevistaron con la finalidad de determinar solamente el nivel de comprensión que poseen del concepto de Integral Definida.

3.3.3.1. Elaboración de las entrevistas para la primera fase del estudio experimental

Para el estudio sobre actitudes, utilizando los resultados del cuestionario sobre actitudes aplicado en la primera fase del estudio experimental (postest), se seleccionaron dos ítems por dimensión, los cuales tenían menor promedio de respuesta por ítem (PRI) y mayor dispersión; con ellos se estructuró una entrevista. A continuación exponemos el protocolo utilizado.

Protocolo para la entrevista sobre actitudes

El protocolo, por dimensión, fue el siguiente:

Dimensión: *Seguridad y confianza en el trabajo matemático.*
1. ¿Te preocupa tener que aprender temas difíciles en Matemáticas?
2. ¿Te preocupas más por Matemáticas que por otra materia?

Dimensión: *Motivación hacia el trabajo matemático.*
3. ¿Disfrutas haciendo actividades relacionadas con Matemáticas?
4. ¿Dedicas gran parte de tu tiempo a actividades matemáticas?

Dimensión: *Compromiso con las actividades matemáticas.*
5. ¿Repasas lo dado en clases de Matemáticas el mismo día?
6. Cuando tratas las ideas matemáticas ¿las recuerdas como unidades separadas o como un todo?

Dimensión: *Confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador.*
7. ¿Te sientes más seguro de las respuestas si te ayudas con un ordenador?
8. ¿Sientes temor si los errores se producen cuando estas utilizando un programa para ordenadores?

Dimensión: *Motivación hacia el trabajo con el ordenador.*
9. ¿Pasas mucho tiempo trabajando en el ordenador para completar alguna tarea?
10. ¿Consideras que los ordenadores te hacen mentalmente perezoso?

Dimensión: *Interacción con las Matemáticas y los ordenadores.*
11. Al trabajar con un ordenador ¿tiendes a notar los detalles matemáticos?
12. Cuando haces alguna actividad de Matemáticas en el ordenador ¿la revisas una vez terminada?

Dimensión: *Seguridad y confianza en el trabajo con DERIVE.*
13. ¿Entiendes mejor las clases utilizando *DERIVE* que explicadas en la pizarra?
14. ¿Consideras que con *DERIVE* no se aprende a calcular?

Dimensión: *Motivación por el trabajo con DERIVE.*
15. ¿Consideras que *DERIVE* te estimula la creatividad y la imaginación?
16. Cuando trabajas con *DERIVE* ¿te da deseos de hacer Matemáticas?

Dimensión: *Compromiso con el trabajo con DERIVE.*
17. ¿Consideras que cuando usas *DERIVE* hay que organizar bien el trabajo, porque de otra manera se pierde mucho tiempo?
18. ¿Consideras que es inútil tratar de resolver problemas utilizando *DERIVE*?

En cada dimensión se seleccionaron las respuestas más relevantes que pudieran arrojar información pertinente para el estudio de éstas y a través de las cuales se pudiera complementar la información suministrada por los estudiantes en la escala de actitudes aplicada.

Se incluyen en el análisis de las actitudes los comentarios escritos por los estudiantes, por equipo, (ver anexo 7) en las Prácticas de Laboratorio. Al igual que en la entrevista se seleccionaron las respuestas más relevantes y se categorizaron por dimensión.

Protocolo para la entrevista sobre el concepto de Integral Definida

En la primera fase se llevó a cabo una entrevista semiestructurada, cuyo protocolo consta de las siete preguntas del cuestionario de conocimientos utilizado en esta fase (ver anexo 9). Se analizaron las respuestas dadas por cada estudiante seleccionado para la entrevista, con la finalidad de profundizar en el tipo de respuesta. La entrevista fue realizada en un ambiente en el que al estudiante se le proporcionaron folios de papel para realizar sus anotaciones. Se videograbó cada sesión y se transcribió cada entrevista.

3.3.3.2. Elaboración de la entrevista para la segunda fase del estudio experimental

En la segunda fase se llevó a cabo una entrevista semiestructurada, cuyo protocolo consta de siete preguntas, cinco de las cuales formaban parte del postest de conocimientos (ver tablas 5, 6, 7, preguntas 2, 3, 4, 5, 6) utilizado en esta misma fase. Estas cinco preguntas fueron seleccionadas en base al análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a los dos cuestionarios aplicados en las dos fases del presente estudio. Adicionalmente se analizaron las respuestas por cada estudiante seleccionado para la entrevista, con la finalidad de profundizar en el tipo de respuesta dada. La entrevista fue realizada en un ambiente en el que el estudiante tenía acceso a una pizarra y un ordenador que tenía instalado *DERIVE* y los archivos del Programa de Utilidades. Se videograbó cada sesión y se transcribió cada entrevista.

3.4. Otros instrumentos para el análisis de los datos

3.4.1. Las redes sistémicas

Para el procesamiento de la información obtenida en los cuestionarios de conocimientos cumplimentados por los estudiantes se utilizaron las que se denominan redes sistémicas (Bliss, 1987). Las redes sistémicas se construyeron con el objeto de presentar la información de manera esquemática. Los elementos del esquema son etiquetados o categorizados formando un mapa en donde se establecen relaciones entre las categorías.

Para la elaboración de la red se precisa establecer distinciones y relaciones entre los datos recogidos. La manera de construcción de la red depende de la intención del análisis, se puede centrar el estudio en un único aspecto, puede implicar un solo nivel de distinción o puede abarcar divisiones sucesivas de una categoría en subcategorías.

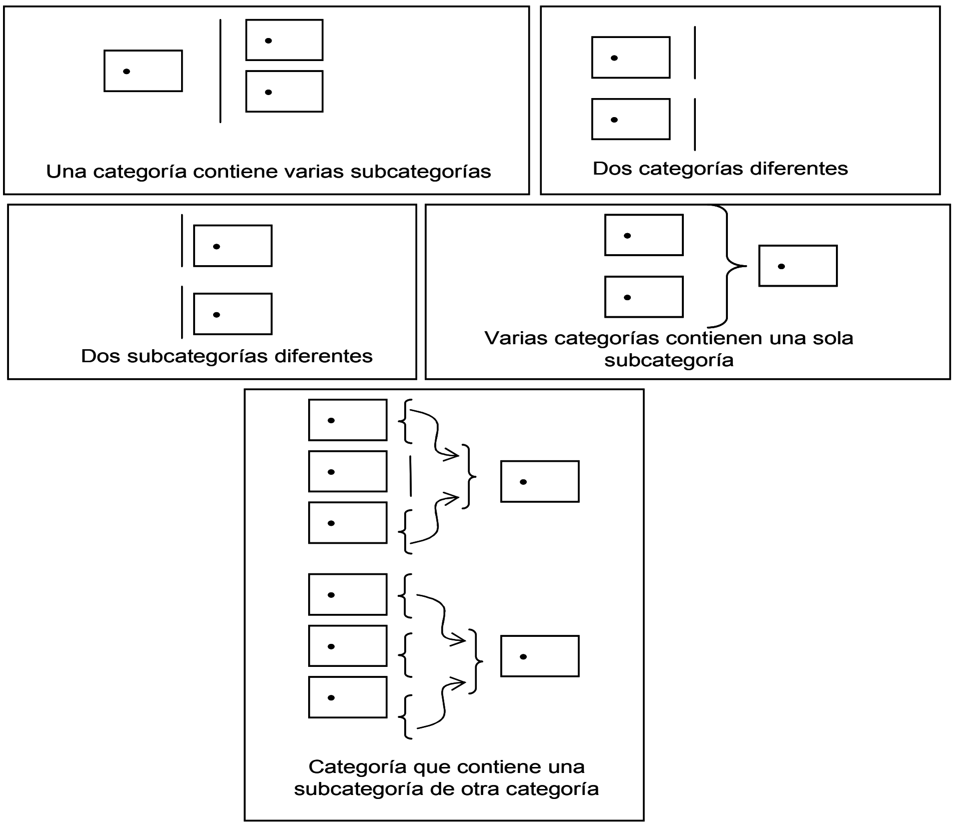
Para que una red pueda representar adecuadamente las diferentes estructuras que pueden resultar de dicha discriminación, se utiliza una serie de formalismos conducentes a representar las relaciones entre los datos. Mencionaremos aquellos que usaremos en la esquematización de las respuestas dadas por los estudiantes a los cuestionarios de conocimientos.

Las redes se leen de izquierda a derecha, de tal manera que el orden es como sigue: categorías divididas en subcategorías, en un segundo tramo estas subcategorías pasan a ser categorías que pueden dividirse en nuevas subcategorías.

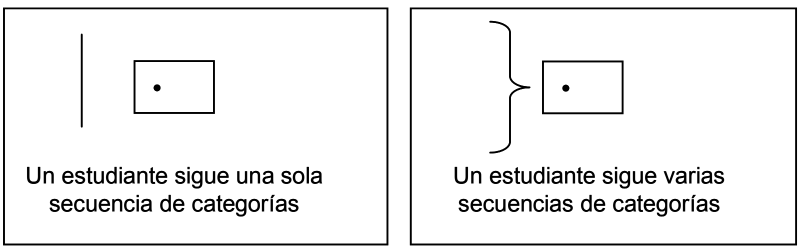
Para las redes que construimos utilizamos barras y corchetes para relacionar las categorías con sus subcategorías.

A continuación se muestra la simbología utilizada en la elaboración de las redes sistémicas que se presentarán en esta Tesis.

Simbología para la categorización de respuesta



Simbología para la categorización de estudiante



El procedimiento para la elaboración de las redes sistémicas fue el siguiente:

Para cada uno de las preguntas propuestas en los cuestionarios se analizaron en detalle las respuestas de los estudiantes y se seleccionaron categorías que agrupaban respuestas de alta frecuencia o alto interés. Las categorías fueron divididas en subcategorías que mostraban distintos aspectos de la categoría principal. Siguiendo cada secuencia de categorías se puede determinar el camino seguido, tanto por un estudiante en particular como por un grupo de ellos.

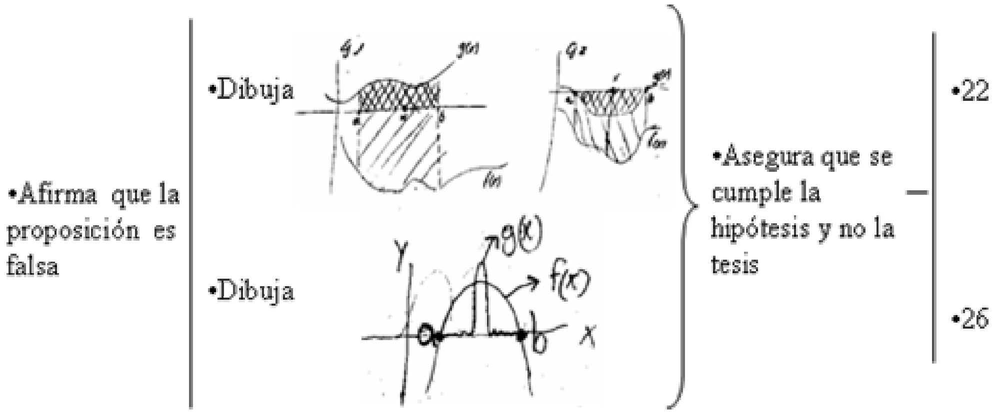
Tomando como base las redes por pregunta, se construyeron redes por estudiantes, de tal manera que se puede tener un mapa con los itinerarios seguidos en la resolución del cuestionario con cada uno de los estudiantes.

Ilustremos con un ejemplo la manera de leer una red sistémica

El siguiente ejemplo, corresponde al extracto de una de las redes sistémicas por pregunta.

En la pregunta se les pedía a los estudiantes:

Indicar si es verdadero o falso que si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ entonces $f(x) \geq g(x)$ para todo *x* que pertenece a $[a, b]$

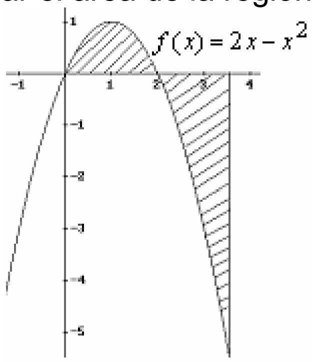


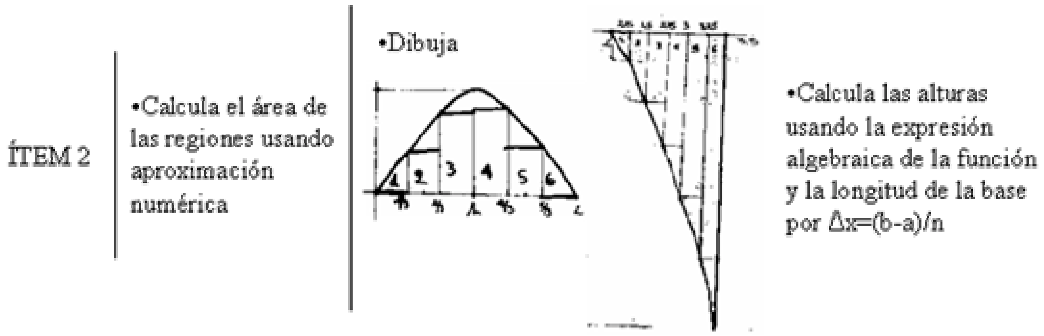
La red se lee así: el estudiante 22 afirma que la proposición es falsa, dibuja la gráfica y asegura que se cumple la hipótesis y no la tesis. Análogamente se puede determinar el camino que el estudiante 26 ha seguido.

El ejemplo a continuación, es un extracto de una de las redes por estudiante.

En la pregunta se pedía al estudiante:

Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada.





Podremos decir que “La red se lee así”: El estudiante en la pregunta 2 calcula el área de las regiones usando aproximaciones numéricas, dibuja la figuras y calcula las alturas usando la expresión de la función y la longitud de la base por $\Delta x = (b - a)/n$.

3.4.2. Esquemas de análisis de la comprensión de la Integral Definida

Con la finalidad de determinar la comprensión de los estudiantes se seleccionaron seis estudiantes, que fueron entrevistados (ver anexo 17) de acuerdo a los cuestionarios cumplimentados con anterioridad.

Para realizar nuestro análisis, decidimos organizar los problemas en tres grupos o categorías de análisis de acuerdo a las características y formas potenciales de solución:

(1) El primer grupo incluía problemas (ver tabla 3.5) relacionados con el cálculo de áreas y en los que en sus enunciados aparecía una representación gráfica de una expresión algebraica dada. El estudiante tenía que analizar e identificar información importante (intersección con los ejes, localización y delimitación precisa de la región, puntos de discontinuidad, etc.) que le permitiera diseñar un plan e identificar un conjunto de estrategias de solución. En todos los problemas de este

grupo se pedía explícitamente que el estudiante calculara el área, aunque en algunos casos había que identificarla en la representación o argumentar que no era posible determinarla (Preguntas 1, 2, 8, 9). Consideramos como parte de este grupo la pregunta 1 en la que se pide al estudiante que explique qué es la Integral Definida.

(2) El segundo grupo incluía problemas (ver tabla 3.6) con enunciados en un contexto o registro algebraico. Un aspecto importante en el proceso de solución de este grupo de problemas es que el estudiante construyera una representación gráfica de los problemas. Así, a partir de esta representación podía precisar los intervalos de integración e identificar las discontinuidades de la función e identificar el dominio de la función en el que era permisible la aplicación de ciertos procedimientos algebraicos (Preguntas 3, 4, 7).

(3) El tercer grupo involucraba problemas (ver tabla 3.7) en los que el estudiante tenía que mostrar la veracidad o falsedad de ciertas proposiciones. El enunciado de los problemas se daba en el contexto algebraico y genérico. Es decir, en lugar de definir una función particular, el enunciado del problema involucraba casos generales como f(x) o g(x). La consideración y análisis de casos particulares o instancias que permitieran entender las relaciones entre las proposiciones era una estrategia importante al responder a este tipo de problemas. ¿Qué significa que f(x) sea mayor que g(x) gráficamente? Esto ¿cómo se puede relacionar con la Integral Definida de estas funciones en un intervalo dado? Otra estrategia de solución para este tipo de problemas era que el estudiante construyera algún contraejemplo a lo que se afirma en la proposición. Una demanda fundamental al responder a este tipo de problemas es que el estudiante relacione y transite directamente entre las distintas representaciones o ejemplos que el mismo proponga (Preguntas 5, 6).

El Modelo de Competencia Cognitivo descrito en el apartado 2.5 es el que nos va a permitir, basándonos en las acciones que desarrollan los estudiantes cuando resuelvan las tareas, clasificar a los estudiantes en una de las categorías definidas.

Para distinguir y analizar las acciones de los estudiantes, utilizaremos las siguientes notaciones:

R: Registro.

T: Transformación al interior del registro (Tratamiento).

C: Conversión entre registros (dentro de conversión distinguiremos las elaboraciones idiosincrásicas).

Para categorizar las acciones establecidas:

- Reconocimiento de los elementos de un registro de representación semiótico:

$$R_A, \quad R_G, \quad R_N$$

- Transformaciones internas (Tratamiento) en un registro de representación semiótico:

$$T_A, \quad T_G, \quad T_N$$

- Elaboración de registro de representación semiótico.

$$E_A, \quad E_G, \quad E_N$$

- Conversiones (transformaciones externas) entre representación semióticas.

$$C_{A\rightarrow G}, \quad C_{G\rightarrow A,} \quad C_{N\rightarrow A}$$

- Coordinación entre diferentes registros de representación semióticos:

$$C_{A\leftrightarrow G}, \quad C_{G\leftrightarrow A,} \quad C_{N\leftrightarrow A}$$

A continuación mostramos el protocolo de la entrevista y estableceremos las acciones que se espera que realice un estudiante competente en cada una de las preguntas.

Se trata de analizar, en síntesis, si el estudiante

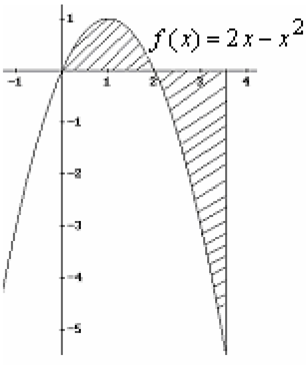
- Considera la Integral Definida
  - En general, en sus diferentes acepciones, es decir, esta puede tener valor positivo, negativo o cero.
  - En particular,
    - Como área bajo la curva.
    - Como resultado de varios procesos de aproximación de áreas: Utilizando figuras elementales como rectángulos, trapecios o trapecios parabólicos (regla de Simpson).
    - A través de la regla de Barrow.

Primer grupo de preguntas (ver tabla 3.5).

Pregunta 1: ¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa $\int_a^b f(x)dx$?

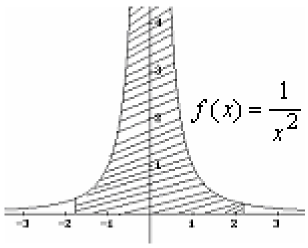
Se pretende investigar los elementos que utiliza el estudiante para traducir en su propio vocabulario lo que entiende por Integral Definida.

Pregunta 2. Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada



Se pretende determinar si el estudiante comprende la forma de obtener, en términos de la Integral Definida el área de regiones que se encuentran bajo el eje OX, así como las relaciones que establece con las regiones que están sobre el eje OX.

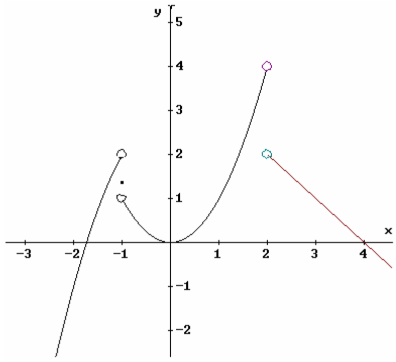
Pregunta 9. Dada la gráfica de la función, si es posible, calcula el área de la región rayada, si no es posible, justifica tu respuesta.



Se pretende analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda es infinita.

Pregunta 10. Dada la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$



- Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$.
- Si es posible, estima el valor de la Integral Definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible, explicar por qué.
- Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular alguna porción, explicar por qué.

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de aplicar aproximación o el Teorema Fundamental del Cálculo a pesar de tipo de discontinuidad.

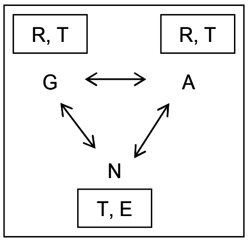
Las posibilidades de actuaciones del estudiante en este primer grupo de preguntas son:

- Reconocer los registros de representación gráfico y algebraico, y realizar tratamientos dentro de los mismos.
- Elaborar registros algebraico y/o numérico, y realizar transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Realizar conversión coordinada entre los registros de representación.

En este caso concreto y de manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_G, R_A	E_N, T_G, T_A, T_N, $C_{G\leftrightarrow A}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$

De manera resumida, el conjunto de posibilidades de desarrollo de las acciones esperadas se puede reflejar en el siguiente esquema:



<u>*Segundo grupo de preguntas*</u> (ver tabla 3.6).

Pregunta 3. Calcula, de la forma que consideres más sencilla, la integral Definida

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx$$

Se pretende analizar:

- Si existe transferencia de los conocimientos antiguos a los nuevos.
- Si el estudiante comprende el cálculo de la Integral Definida en términos de cálculo de área de figuras elementales.
- Si conoce y trabaja correctamente con algunas propiedades de la Integral Definida.

Pregunta 4. Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifica tu respuesta.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}\,dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 = \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

Se pretende determinar si el estudiante:

- Es capaz de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta.
- Interpreta coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para que la regla de Barrow pueda ser aplicada.

Pregunta 7. Calcular el área que forma con el eje OX la función

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$

Se pretende que el estudiante:

- Use el software para graficar la función, o la gráfica mediante técnicas de papel y lápiz.
- Identificar las regiones donde debe integrar, mediante la intersección de la función con el eje OX.

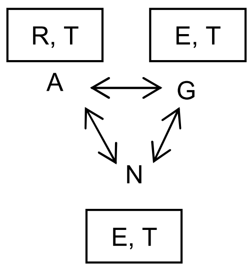
- Plantee y calcule las integrales mediante la regla de Barrow. Es posible que el estudiante utilice el PU calculando las distintas aproximaciones.

Se espera que el estudiante en este segundo grupo de preguntas:

- Elabore el registro de representación gráfico y/o numérico, y realice transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Reconozca el registro de representación algebraico, y transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Realice conversión coordinada entre los registros de representación.
- De manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$

De manera esquemática las acciones que se esperan son:



<u>*Tercer grupo de preguntas*</u> (ver tabla 3.7)

Pregunta 5. Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta.

$$Si\ f(x) \geq g(x),\ \text{entonces},\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establece relaciones entre el área y la Integral Definida.

Pregunta 6. Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta.

$$Si\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx,\ \text{entonces},\ f(x) \geq g(x),\ \text{para todo}\ x\ \text{que pertenece a}\ [a,b].$$

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establecen relaciones entre el área y la Integral Definida. Además si utiliza contraejemplos en su justificación.

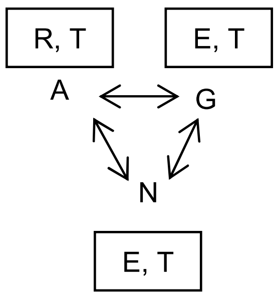
En este último grupo de preguntas, se espera que el estudiante:

- Reconozca el registro de representación algebraico y realice una transformación (tratamiento) dentro del registro algebraico.
- Elabore registros de representación gráfico y/o numérico, y transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos. Consideraremos que la elaboración del registro gráfico también implica un reconocimiento implícito del registro.
- Realice conversión coordinada entre los distintos registros de representación.

De manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{A\leftrightarrow N}$, $C_{N\leftrightarrow G}$

Las acciones esperadas son de manera esquemática:



Presentamos a continuación en las tablas 3.5, 3.6 y 3.7 los problemas utilizados en la 2ª fase del estudio experimental, agrupados en torno al tipo de actividad.

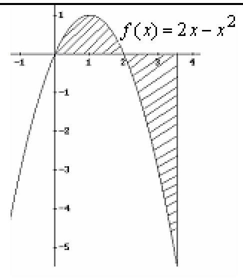
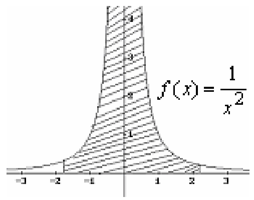
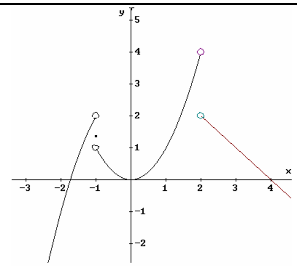
PRIMER GRUPO DE PREGUNTAS	
PREGUNTA	**DESCRIPTORES**
2) Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. 	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región. 2.3. No aparece la palabra integral. 2.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 2.5. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.7. No se pide aproximar. 2.8. La función es continua.
9) Dada la gráfica de la función, si es posible, calcula el área de la región rayada, si no es posible justifica tu respuesta. 	9.1. Se pide calcular el área. 9.2. Se identifica gráficamente la región. 9.3. No aparece la palabra integral. 9.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 9.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 9.6. Hay una gráfica asociada. 9.7. No se pide aproximar. 9.8. Hay una región con una discontinuidad en medio. 9.9. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.
10) Dada la función definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$  • Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$. • Si es posible, estima el valor de la Integral Definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible explicar por qué. • Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular alguna porción, explicar por qué.	10.1. Se define el intervalo total 10.2. Se plantea con los dos registros algebraico y gráfico. 10.3. Se pide calcular el área. 10.4. La función tiene 2 puntos de discontinuidad. 10.5. No aparece la palabra Integral Definida. 10.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 10.7. Hay una gráfica asociada.

Tabla 3.5

<table>
<tr><th colspan="2">PRIMER GRUPO DE PREGUNTAS</th></tr>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>DESCRIPTORES</th></tr>
<tr><td>1) ¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa $\int_a^b f(x)dx$?</td><td>1.1. No aparece la palabra Integral Definida.
1.2. No se da la expresión explícita de la función.
1.3. No aparece el término área.
1.4. No hay gráfica asociada.
1.5. No se dan los valores de los límites de integración.
1.6. Se menciona la expresión sin referencia directa a la Integral Definida y al área.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACCIONES ESPERADAS
R_G, R_A | E_N, T_G, T_A, T_N, $C_{G\leftrightarrow A}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$</td></tr>
</table>

Tabla 3.5 (Continuación)

<table>
<tr><th colspan="2">SEGUNDO GRUPO DE PREGUNTAS</th></tr>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>DESCRIPTORES</th></tr>
<tr><td>3) Calcula, de la forma que consideres más sencilla la Integral Definida.
$$\int_{-3}^{4} |x+1| dx$$</td><td>3.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita.
3.2. No se menciona la palabra área.
3.3. Se da el intervalo de integración.
3.4. No hay una gráfica asociada.
3.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.</td></tr>
<tr><td>4) Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifica tu respuesta.
$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 = \left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$</td><td>4.1. Se presenta en el registro algebraico con información desarrollada (explícita).
4.2. No aparece la palabra área en “calcular la integral”.
4.3. El software lo resuelve directamente (y mal).
4.4. Se da el intervalo de integración.
4.5. No hay una gráfica asociada.
4.6. Se aplica directamente las técnicas de integración.</td></tr>
<tr><td>7) Calcular el área que forma con el eje OX la función
$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$</td><td>7.1. Se presenta en el registro algebraico.
7.2. No se da el intervalo. (polinomio de cuarto grado).
7.3. No se menciona la palabra integral.
7.4. Se pide calcular un área.
7.5. No hay gráfica asociada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACCIONES ESPERADAS
R_A | E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$</td></tr>
</table>

Tabla 3.6

TERCER GRUPO DE PREGUNTAS	
PREGUNTA	**DESCRIPTORES**
5) Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta. Si $f(x) \geq g(x)$, entonces, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.	5.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 5.2. No aparece el término área. 5.3. No aparece la palabra integral. 5.4. No hay gráficas asociadas. 5.5. No se dan los valores de los límites de integración. 5.6. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 5.7. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 5.8. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 5.9. En general, la proposición es verdadera si se trata de integrales y falsa si sólo se considera como área.
6) Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta. Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces, $f(x) \geq g(x)$ para toda x que pertenece a $[a,b]$.	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No aparece la palabra integral. 6.4. No hay gráficas asociadas. 6.5. No se dan los valores de los límites de integración. 6.6. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 6.7. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 6.8. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.9. En general, la proposición es falsa tanto si se trata de integrales como si fuese área.

ACCIONES ESPERADAS

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{A\leftrightarrow N}$, $C_{N\leftrightarrow G}$

Tabla 3.7

CAPÍTULO IV

ESTUDIO EXPLORATORIO

En este capitulo se presentan y analizan los resultados del primer estudio desarrollado, estudio exploratorio, el cual constituye un primer acercamiento hacia el estudio definitivo. Se trata fundamentalmente de validar los instrumentos, métodos y técnicas que se utilizaron en los estudios experimentales.

Se organiza en tres apartados. En el primero se realiza una descripción global del estudio, seguidamente se recoge el estudio sobre actitudes y el estudio sobre el concepto de la Integral Definida, finalizando con las conclusiones generales del estudio.

4.1. DESCRIPCIÓN GLOBAL DEL ESTUDIO

El estudio exploratorio se llevó a cabo, en dos fases. En la primera, desarrollada en el mes de junio de 1999, se seleccionó una muestra de 330 estudiantes de una población formada por 641 estudiantes que cursaban el Primer Semestre de los Estudios Generales y Básicos de las Carreras de Ingeniería, que se imparte en la Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre (UNEXPO), Vicerrectorado-Barquisimeto del Estado Lara (Venezuela). Los estudiantes estaban distribuidos en 16 secciones de las que 6 secciones eran estudiantes de nuevo ingreso y el resto, repetidores. Se aplicó una escala de actitudes tipo Likert (ver anexo 1) a este grupo de 330 estudiantes correspondientes a 6 secciones de nuevo ingreso y 10 secciones de repetidores.

Las variables consideradas fueron género, condición de estudio y rendimiento académico.

En una segunda fase, se eligió una muestra de 58 estudiantes de un curso regular de Cálculo I de la UNEXPO. Se dividió dicha muestra en dos grupos, uno de 14 estudiantes, 7 de nuevo ingreso (NI) y 7 repetidores (RE), y otro de 44 estudiantes, 34 de nuevo ingreso y 10 repetidores; al primero se le denominó grupo experimental (GE) y al segundo, grupo control (GC). En el momento de iniciar la experiencia habían cursado el 75% del programa oficial con sus respectivos profesores. El libro de texto que utilizaron los profesores era el Cálculo de Edward y Penney (1996).

Con el GE se realizó un trabajo de laboratorio con *DERIVE* durante el mes de febrero de 2000, en una sala con 14 ordenadores, utilizando para ello el Módulo Instruccional I, descrito en el capítulo III.

El GC, siguió la enseñanza con los métodos habituales: definición, ejemplo, teorema y ejercicio. Se le aplicó una escala de actitudes para medir las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje con *DERIVE* (ver anexo 3). La variable considerada fue la condición de estudio (nuevo ingreso o repetidores).

Los mismos estudiantes después de cursar el Módulo Instruccional I cumplimentaron al final del curso, el cuestionario de conocimientos I (ver anexo 4), con la finalidad de determinar el tipo de respuesta que dan los estudiantes que habían cursado la asignatura, unos sin utilizar *DERIVE* y otros participando en las Prácticas de Laboratorio, utilizando el Módulo Instruccional I. La experiencia sirvió a su vez para analizar la primera versión del Módulo Instruccional, con el objetivo de validar su aplicación e incluir posteriormente las modificaciones pertinentes.

4.2. EL ESTUDIO SOBRE ACTITUDES

Se presentan a continuación las dos fases de este estudio exploratorio en relación con el ámbito afectivo: En primer lugar se estudiarán las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores, para luego analizar las actitudes de los estudiantes hacia el uso de los ordenadores y hacia el aprendizaje con *DERIVE*.

4.2.1. Actitudes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores

Este estudio como se mencionó anteriormente se llevó a cabo con 330 estudiantes de un primer curso de Cálculo. El mismo tiene como objetivo general, analizar las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores. Se les aplicó una escala de actitudes tipo Likert.

Para el momento de la aplicación de la escala, los estudiantes se encontraban cursando la asignatura con sus respectivos profesores, de manera tradicional.

4.2.1.1. Objetivos

Para llevar a cabo el objetivo general antes mencionado nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar la variabilidad global de las actitudes de los alumnos tanto hacia las Matemáticas como hacia el uso de los ordenadores; teniendo en cuenta el género, Masculino (M), Femenino (F) y la condición de estudio de los alumnos, Nuevo Ingreso (NI) y Repetidores (R).
2. Analizar la variabilidad local de las actitudes de los estudiantes en torno a las cuatro categorías de análisis o dimensiones mencionadas a continuación:
    - Confianza y seguridad en el trabajo matemático.
    - Motivación hacia el trabajo matemático.
    - Compromiso con el trabajo matemático.
    - Uso del ordenador en las actividades matemáticas.
3. Analizar la actitud poblacional de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores. Para ello, se utilizaron pruebas de hipótesis para diferencias de medias, con un nivel de significación α=5%. Valor de Z=1.96. Hipótesis nula μ_1-μ_2 =0, hipótesis alternativa μ_1-$\mu_2 \neq 0$.
4. Establecer relaciones entre el rendimiento académico y la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores. Para lo cual se calcularon los distintos coeficientes r de Pearson.

4.2.1.2. Análisis e interpretación de los resultados

Pasamos a analizar e interpretar los resultados de acuerdo a los objetivos propuestos.

Análisis de los promedios de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores con relación al género y su condición de estudio (Objetivo 1).

El valor actitudinal de los estudiantes de manera global es positivo, pero podemos considerarlo bajo. El valor actitudinal de hombres de nuevo ingreso es ligeramente superior al de las mujeres de nuevo ingreso; la diferencia entre hombres y mujeres repetidoras es poco significativa. El valor actitudinal de los estudiantes de nuevo ingreso es ligeramente superior al de los repetidores. La dispersión de los valores actitudinales son similares en cada grupo de hombres; no obstante entre las mujeres se observa mayor dispersión en las respuestas; esto evidencia gran homogeneidad en los valores actitudinales de los hombres y heterogeneidad en las mujeres. Al comparar los promedios de los valores actitudinales y las dispersiones en cuanto a género, se observa que existe gran homogeneidad (ver tabla 4.1)

Tabla 4.1. *Promedio actitudinal en cuanto a condición de estudio y género.*

Género / Condición Estudio	Masculino Media/ Desviación Estándar.	Femenino Media/ Desviación Estándar.
Nuevo Ingreso	106.87/10.17	104.72/11.53
Repetidores	99.57/10.24	100.31/7.53
Nuevo Ingreso-Repetidores	102.73/10.81	102.52/9.95

El valor actitudinal de los estudiantes de manera global en las dimensiones (Confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia el trabajo matemático, compromiso con el trabajo matemático) también es positivo, pero al igual que antes lo consideramos bajo. La dispersión de los valores actitudinales son similares en cada grupo de hombres; no obstante entre las mujeres se observa mayor dispersión en las respuestas; esto evidencia gran homogeneidad en los valores actitudinales de los hombres y heterogeneidad en las mujeres. Al comparar los promedios de los valores actitudinales y las dispersiones en cuanto a género se observa que existe gran homogeneidad (ver tabla 4.2).

Tabla 4.2*. Confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia el trabajo matemático, compromiso con el trabajo matemático.*

Género / Condición Estudio	Masculino Media/ Desviación Estándar	Femenino Media/ Desviación Estándar
Nuevo Ingreso	89.54/9.43	87.69/10.08
Repetidores	82.11/8.34	83.28/7.17
Nuevo Ingreso-Repetidores	85.33/9.55	85.49/8.99

En cuanto al uso de los ordenadores en actividades matemáticas la actitud tiende a ser negativa, tal vez por el desconocimiento que tienen los estudiantes de este recurso. Tanto los valores actitudinales como la dispersión son similares en cada grupo; esto evidencia gran homogeneidad en los grupos (ver tabla 4.3).

Tabla 4.3. *Uso del ordenador en las actividades matemáticas.*

Género / Condición Estudio	Masculino Media/ Desviación Estándar	Femenino Media/ Desviación Estándar
Nuevo Ingreso	17.33/2.94	17.03/3.05
Repetidores	17.46/4.04	17.03/2.31
Nuevo Ingreso -Repetidores	17.41/3.6	17.03/2.69

Estos resultados nos hacen pensar que, contrariamente de lo que se podría esperar en principio, no es muy significativo el repetir la materia para tener una baja actitud hacia las Matemáticas y el uso de los ordenadores.

Análisis de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de ordenadores en cuanto al promedio de respuesta por ítem (PRI) (Objetivo 2).

Dimensión 1. Confianza y seguridad en el trabajo matemático.

Analizando los PRI en esta dimensión (ver PRI de 3, 5, 6, 18, 24) se nota que en la mayoría de los ítems la valoración en torno a la confianza y seguridad hacia el trabajo matemático es alta (5 de 8 ítems) (ver tabla 4.4).

Tabla 4.4. *Dimensión 1. Confianza y seguridad en el trabajo matemático.*

Nº	ÍTEM	NI	R	M	F
3	Justificar cada paso en Matemáticas es importante (+)	3.510	3.534	3.526	3.515
4	Los exámenes de Matemáticas me producen miedo (-)	2.693	2.230	2.701	2.074
5	Obtener buenas calificaciones en Matemáticas es importante para mí (+)	3.804	3.747	3.773	3.772
6	Las Matemáticas requieren practicar continuamente (+)	3.778	3.792	3.742	3.846
7	Cuando estoy en clases de Matemáticas me quedo como en la luna y no entiendo (-)	3.183	3.017	3.113	3.059
9	Las Matemáticas me dan seguridad y al mismo tiempo me estimulan (+)	3.196	3.067	3.098	3.162
18	Las Matemáticas ayudan a las personas a pensar lógicamente (+)	3.641	3.483	3.546	3.566
24	La imaginación y la intuición son útiles en Matemáticas (+)	3.281	3.303	3.273	3.316

En orden decreciente se observa que los estudiantes le asignan mayor valoración a: Obtener buenas calificaciones en Matemáticas, es importante para ellos; las Matemáticas requieren practicar continuamente; justificar cada paso en Matemáticas es importante y; las Matemáticas ayudan a las personas a pensar lógicamente. Consideran con una valoración menor que: la imaginación y la intuición son útiles en Matemáticas; las Matemáticas les dan seguridad y al mismo tiempo los estimula y; cuando están en clases de Matemáticas se quedan como “en la luna” y no entienden. La valoración más baja se la asignan a que: los exámenes de Matemáticas les producen miedo.

También se destaca que los estudiantes de nuevo ingreso le asignan mayor valoración en cada ítem que los repetidores; esta diferencia no es tan significativa en cuanto a género.

De lo anterior se puede concluir que la seguridad y confianza en el trabajo matemático influye significativamente en la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas; que el obtener buenas calificaciones, practicar continuamente y justificar cada paso influye positivamente en la actitud; la imaginación y la intuición en Matemáticas y el hecho de sentirse estimulados por Matemáticas afectan en menor grado a la actitud. Es de hacer notar que los exámenes de Matemáticas al producirles miedo puede disminuir la confianza y seguridad en el trabajo matemático, generando en el estudiante una actitud que se aproxima a lo negativo.

Finalmente el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas; no obstante, pensamos que sería conveniente, investigar un poco más sobre la influencia de la condición de estudio en la actitud.

Dimensión 2. Motivación hacia el trabajo matemático.

Analizando los PRI se nota que la valoración es baja en la mayoría de los ítems que definen esta dimensión. En orden decreciente se observa que los estudiantes le asignan mayor valoración a que: prefieren entrar a clases de Matemáticas y, les agrada resolver problemas matemáticos. La valoración es menor en cuanto a que: las clases de Matemáticas les resultan largas y tediosas y les gustaría participar en un club de Matemáticas. Los valores que reflejan una tendencia hacia una baja motivación se relacionan con: no ser voluntarios para pasar a la pizarra, sentir la necesidad de conversar sobre Matemáticas y que en clases de Matemáticas piensan en otra cosa (ver tabla 4.5).

También se destaca que los estudiantes de nuevo ingreso le asignan mayor valoración en cada ítem que los repetidores; esta diferencia, al igual que la dimensión anterior, no es tan significativa en cuanto a género.

Tabla 4.5 *Dimensión 2. Motivación hacia el trabajo matemático.*

Nº	ÍTEM	NI	R	M	F
1	No se por qué, pero en clase de Matemáticas pienso en otra cosa (-)	3.196	1.865	2.974	3.074
12	La clase de Matemáticas me resulta larga y tediosa (-)	3.072	2.803	2.933	2.912
13	Si en la Universidad se organiza un club de Matemáticas me gustaría participar (+)	2.889	2.798	2.830	2.846
15	Prefiero no entrar a las clases de Matemáticas (-)	3.810	3.551	3.644	3.706
22	Estoy a gusto en clases de Matemáticas (+)	3.144	2.843	2.928	3.059
23	Me agrada resolver problemas matemáticos (+)	3.275	3.006	3.103	3.162
25	Cuando en clases de Matemáticas se solicita un voluntario para pasar a la pizarra, no me ofrezco (-)	2.601	2.315	2.531	2.338
28	Generalmente siento la necesidad de conversar sobre Matemáticas (+)	2.634	2.416	2.572	2.426

De lo anterior se puede concluir que, a pesar de los bajos valores observados, la motivación hacia el trabajo matemático determina una actitud positiva, aunque baja, de los estudiantes hacia las Matemáticas. Detallando las respuestas nos encontramos que, aunque prefieren entrar a clases de Matemáticas y resolver problemas, no les motiva pasar a la pizarra; les gustaría participar en un club de matemática aunque no les motiva conversar sobre matemática. Esto nos lleva a pensar que las clases habituales de Matemáticas no motivan al estudiante a participar en ellas; no obstante en un ambiente de un club o tal vez con el uso de tecnología sí se sentirían motivados y como consecuencia pudiera contribuir a generar una actitud positiva en ellos.

Finalmente el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas; no obstante, pensamos que sería conveniente, investigar un poco más sobre la influencia de la condición de estudio en la actitud.

Dimensión 3. Compromiso con el trabajo matemático.

Analizando los PRI en esta dimensión (ver PRI de 8, 10, 11, 14, 16, 17, 21, 26, 27) se nota que la valoración en torno al compromiso con el trabajo matemático es alta (7 de 12 ítems) (ver Tabla 4.6).

De lo anterior se puede concluir que el compromiso con las actividades matemáticas determina una actitud positiva de los estudiantes hacia las Matemáticas. Detallando las respuestas nos encontramos que aunque consideran que el conocimiento de la teoría es indispensable para resolver los problemas, el vocabulario propio de las Matemáticas hace más difícil su aprendizaje; Además consideran que conocer cómo resolver un problema es tan importante como hallar su solución, pero a la hora de resolverlos se enredan; esto refleja que tal vez cambiando la estrategia de enfrentar al estudiante con el conocimiento, se podría aumentar el compromiso que involucra la dedicación disciplinada del estudio de las Matemáticas. Seguidamente, consideran que las Matemáticas tienen usos prácticos en la vida diaria, no obstante tienen la culpa de que muchos hayan dejado de estudiar; esto refleja una dicotomía en cuanto a que la Matemática es utilitaria pero la forma habitual de impartirla genera abandono de los estudios; es probable que utilizando mecanismos que involucren nuevas tecnologías, como los ordenadores, de gran uso en el campo de trabajo, podría comprometer al alumno al estudio de las Matemáticas.

Tabla 4.6 *Dimensión 3. Compromiso con el trabajo matemático.*

Nº	ÍTEM	NI	R	M	F
2	El vocabulario propio de las Matemáticas hace más difícil su aprendizaje (-)	2.719	2.382	2.520	2.515
8	Las Matemáticas la necesitan sólo los ingenieros (-)	3.641	3.584	3.619	3.596
10	En Matemáticas no queda más remedio que aprendérselo todo de memoria (-)	3.588	3.528	3.644	3.426
11	Conocer cómo resolver un problema es tan importante como hallar su solución (+)	3.712	3.573	3.644	3.625
14	El conocimiento de la teoría es indispensable para resolver los problemas (+)	3.725	3.618	3.660	3.676
16	Las Matemáticas tienen usos prácticos en la vida diaria (+)	3.693	3.522	3.582	3.625
17	Las Matemáticas tienen la culpa de que algunos alumnos no hayan seguido estudiando (-)	3.170	2.663	2.856	2.949
19	A la hora hacer los ejercicios individuales de Matemáticas me enredo (-)	2.824	2.393	2.577	2.603
20	Me gustaría que las asignaturas fueran solamente de Matemáticas (+)	2.072	1.904	1.969	1.985
21	No veo la necesidad de consultar textos de Matemáticas fuera de los apuntes (-)	3.484	3.376	3.412	3.441
26	Yo espero trabajar en un área que se requiera Matemática (+)	3.072	2.871	2.845	2.904
27	Además de los ejercicios de Matemáticas que me proponen resuelvo otros más (+)	3.170	2.865	2.959	3.066

Finalmente el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas; no obstante, pensamos que sería conveniente, investigar un poco más sobre la influencia de la condición de estudio, en la actitud.

Dimensión 4. Uso de ordenadores en actividades Matemáticas.

Analizando los PRI en esta dimensión (ver tabla 4.7) se observa que la valoración hacia el uso de ordenadores en actividades matemáticas es alta para la mitad de las preguntas (ver ítems 29, 30, 33) (3 de 6 ítems).

En orden decreciente se observa que los estudiantes le asignan mayor valoración a que: manejar una computadora no les produce miedo, les gustaría que en clases de Matemáticas se usara una computadora y se explicara su uso y, que los profesores que dan su clase sin una computadora son obsoletos. Los valores más bajos se tienen en cuanto a que: para trazar una gráfica o para realizar cálculos matemáticos no es necesario usar una computadora.

Detallando las respuestas nos encontramos que aunque el manejar una computadora no les produce miedo y que están de acuerdo con su uso en clases de Matemáticas, no la consideran una herramienta muy útil para graficar y realizar cálculos matemáticos.

Finalmente el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia el uso de los ordenadores; no obstante, pensamos que sería conveniente, investigar un poco más sobre la influencia de la condición de estudio en la actitud.

Tabla 4.7. *Dimensión 4. Uso de ordenadores en actividades matemáticas.*

Nº	ÍTEM	NI	R	M	F
29	El manejar una computadora me produce miedo (-)	3.542	3.281	3.443	3.338
30	Me gustaría que en las clases de Matemáticas se usara una computadora (+)	3.222	3.253	3.335	3.103
31	Es necesario usar una computadora para realizar cálculos matemáticos (+)	1.954	2.191	2.124	2.022
32	Para trazar gráficas de funciones, no es necesaria una computadora (-)	2.255	2.410	2.325	2.360
33	Los profesores que dan su clase sin una computadora son obsoletos (+)	3.425	3.112	3.211	3.316
34	En las clases de Matemáticas se debería explicar el uso de la computadora (+)	2.810	3.051	2.969	2.890

Análisis de los promedios poblacionales de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso del ordenador (Objetivo 3).

De este análisis se deduce: primero, el promedio actitudinal para toda la población de los estudiantes de nuevo ingreso es significativamente mayor que para los repetidores. Segundo, el promedio actitudinal de los estudiantes hombres de nuevo ingreso es significativamente mayor que la de los repetidores. Tercero, el promedio actitudinal de las mujeres de nuevo ingreso es significativamente mayor que el de las repetidoras. Cuarto, no existe diferencia significativa entre los promedios poblacionales de los estudiantes hombres y mujeres de nuevo ingreso. Quinto, el promedio actitudinal de los estudiantes mujeres de nuevo ingreso es significativamente mayor que el de los hombres repetidores. Sexto, no existe diferencia significativa entre los promedios poblacionales de los estudiantes mujeres y hombres repetidores. Séptimo, el promedio actitudinal de los estudiantes hombres de nuevo ingreso es significativamente mayor que el de las repetidoras (ver tabla 4.8).

Tabla 4.8. *Relación de los promedios poblacionales de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas de acuerdo a las variables género y condición de estudio.*

Estudiantes	Valor de z	Decisión
Nuevo Ingreso/ Repetidores	5.44	Se rechaza la hipótesis nula
Hombres NI/ Hombres R	4.94	Se rechaza la hipótesis nula
Mujeres NI/ Mujeres R	2.64	Se rechaza la hipótesis nula
Hombres NI/ Mujeres NI	1.20	Se acepta la hipótesis nula
Mujeres NI/ Hombres R	3.02	Se rechaza la hipótesis nula
Mujeres R/ Hombres R	-0.55	Se acepta la hipótesis nula
Hombres NI/ Mujeres R	4.56	Se rechaza la hipótesis nula

Correlación de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores, con el rendimiento académico (Objetivo 4).

Del estudio de la correlación entre las variables actitud y rendimiento se deduce: Primero, en cuanto a género, existe mayor correlación entre mujeres que entre los hombres, aunque en general es baja y positiva. Segundo, en cuanto a condición de estudio, existe una importante diferencia entre los valores de correlación, siendo la de los de nuevo ingreso significativamente alto y positivo y la de los repetidores muy baja (ver tabla 4.9).

Tabla 4.9. *Relación entre actitud y rendimiento académico.*

Género/ Condición de Estudio	Coeficiente r de Pearson
Hombres y Mujeres	0.180

Hombres	0.138
Mujeres	0.265
Nuevo ingreso	0.369
Repetidores	0.058

4.2.1.3. Conclusiones

Del análisis e interpretación de los resultados se concluye que:

Con relación al objetivo 1, se observa que existe una actitud global positiva hacia las Matemáticas y el uso de los ordenadores, aunque no demasiado alta. El género no se considera determinante dada la homogeneidad en torno a los promedios de los valores actitudinales y sus respectivas dispersiones.

El valor actitudinal de los estudiantes de manera global en las dimensiones relativas a las Matemáticas, podemos seguir considerándolo como positivo, y observamos que las diferencias más significativas aparecen nuevamente en relación con la condición de estudio. Sin embargo, en cuanto al uso de los ordenadores en actividades matemáticas la actitud tiende a ser negativa, tal vez por el desconocimiento que tienen los estudiantes de este recurso. Estos resultados nos hacen pensar que, contrariamente de lo que podríamos esperar en principio, no es muy significativo el repetir la materia para tener una baja actitud hacia las Matemáticas y el uso de los ordenadores.

En el estudio de los promedios de respuesta por ítem se observó que el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores; no obstante, pensamos que sería conveniente, investigar un poco más sobre la influencia de la condición de estudio, en la actitud.

En cuanto al objetivo 2 se puede concluir que: Primero, que la confianza y seguridad en el trabajo matemático, la motivación hacia el trabajo matemático y el compromiso con el trabajo matemático, se pueden considerar dimensiones que definen la actitud de los estudiantes. Segundo, que en las condiciones en las que se desarrolló la experiencia, la confianza y seguridad del estudiante en el trabajo matemático resultó altamente positivo; la motivación hacia el trabajo matemático fue positiva, pero baja; el compromiso hacia el trabajo matemático también resultó altamente positiva. Tercero, los estudiantes manifiestan tener una actitud positiva hacia el uso del ordenador en actividades matemáticas. Cuarto, el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas. Con base a lo anterior se recomienda realizar otras investigaciones en donde se tomen en cuenta las dimensiones antes mencionadas y diseñar estrategias que incluyan el uso de ordenadores en actividades matemáticas.

Con relación al objetivo 3 se puede observar que existe diferencia significativa en los promedios poblacionales de la actitud hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores en cuanto a la condición de estudio de los alumnos, siendo mayor el de los de nuevo ingreso al de los repetidores. Esta diferencia no se observó en cuanto a género.

Con relación al objetivo 4 se observó que existe poca correlación entre actitud y rendimiento académico en cuanto a género. Existe alta correlación entre actitud y rendimiento académico, al analizar la condición de nuevo ingreso de los estudiantes, no así en la condición de repetidores. Resulta pertinente tomar en cuenta este resultado en futuras investigaciones que incluyan pruebas de conocimientos.

Atendiendo a los resultados obtenidos en este estudio se decidió estructurar nuevamente la experiencia de tal manera que se tomaron dos grupos (control y experimental) conformados con estudiantes de nuevo ingreso y repetidores de ambos géneros, a los cuales se les sometan a un entrenamiento, uno con un método tradicional y el otro en un laboratorio de ordenadores, utilizando algún software que incluya cálculo algebraico y simbólico. Al finalizar el entrenamiento se les aplicaría una prueba de actitud.

4.2.2. Actitudes hacia el aprendizaje de las Matemáticas con *DERIVE*

En el estudio anterior se trataron las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores. El que a continuación exponemos complementa el anterior con el estudio de las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de las Matemáticas con *DERIVE*.

Nos hemos propuesto como objetivo general en este estudio, analizar las actitudes de los estudiantes hacia el uso del PCS *DERIVE,* cuando son inmersos en un plan de enseñanza que utiliza como elemento básico para su aprendizaje, herramientas tecnológicas.

4.2.2.1. Objetivos

Para llevar a cabo el objetivo general que nos planteamos no propusimos:

1. Analizar las actitudes de la población hacia el uso de un software para estudiar Matemáticas. Para ello, se utilizaron pruebas de hipótesis para diferencias de medias, con un nivel de significación α=5%. Valor de t=1.96. Hipótesis nula μ_1-μ_2 =0, hipótesis alternativa μ_1-$\mu_2 \neq 0$.
2. Establecer las correlaciones entre las actitudes hacia el uso de software de los estudiantes que recibieron la instrucción con *DERIVE* (GE) y los que no (GC), para lo cual se calcularon los distintos coeficientes r de Pearson.
3. Analizar la variabilidad global de las actitudes hacia el uso de software para el aprendizaje de las Matemáticas, para lo que se asignó actitud positiva o negativa de acuerdo al promedio muestral obtenido en una escala de 24 a 96 puntos. Además se calculó la desviación estándar en cada caso.
4. Comparar las actitudes de los estudiantes en relación con las dimensiones objeto del estudio.
   - Seguridad y confianza en el trabajo con software para ordenadores/ *DERIVE*.
   - Motivación hacia el trabajo con software para ordenadores/ *DERIVE*.
   - Compromiso con el trabajo usando software para ordenadores/ *DERIVE*.

4.2.2.2. Análisis e interpretación de resultados

Presentamos a continuación el análisis e interpretación, por objetivo, de los resultados obtenidos de la aplicación de la escala de actitudes.

Actitudes de la población hacia el uso de un software para estudiar Matemáticas (Objetivo 1).

Del análisis de los resultados (ver tabla 4.10) se deduce que existe diferencia significativa en cuanto a los promedios poblacionales entre los estudiantes del Grupo Experimental y el Grupo Control; siendo mayor los del primero. Esta diferencia no se observa al comparar los promedios actitudinales de los estudiantes según su condición de estudio, ni con el resto de las alternativas de análisis del grupo.

Tabla 4.10. *Valores de t para diferencia de promedios, por grupos.*

Grupo	Valor de *t*	Grupo	Valor de *t*
GE/ GC	2.188	GE-NI/ GC-RE	0.768
GE-NI/ GE-RE	0.768	GE-RE/ GC-RE	1.288
GE-NI/ GC-NI	1.503	GC-NI/ GC-RE	0.966
GE-RE/ GC-NI	0.729		

Correlaciones entre las actitudes hacia el uso de software de los estudiantes que recibieron la instrucción con DERIVE (GE) y los que no (GC), (Objetivo 2).

Del análisis de los resultados que se pueden observar en la Tabla 4.11, se deduce que existe correlación positiva, aunque con un rango bajo, entre las actitudes de los estudiantes del GE con respecto a los del GC; de lo que se puede inferir que el estudio es independiente de la secuencia de aprendizaje seguida por los estudiantes. Se puede observar un resultado similar para la correlación entre los estudiantes de nuevo ingreso y los Repetidores del GE, por lo que se podría trabajar con un grupo de estudiantes sin que sea determinante la condición de estudio.

Tabla 4.11. *Correlación entre las actitudes de los estudiantes del GE y el GC*

Grupos	r de Pearson
GE/ GC	0.180
GE-RE/ GE-NI	0.164
GC-RE/GC-NI	-0.452

Notemos finalmente que el coeficiente de correlación entre los estudiantes de Nuevo Ingreso y los Repetidores del GC, es alta y negativo; lo cual quiere decir que, a mayor valor actitudinal de uno frente al otro y si comparamos este resultado con el anterior, se deduce que de alguna manera el uso de *DERIVE* hace que los grupos sean más independientes.

Análisis de la variabilidad global de las actitudes hacia el uso de software para el aprendizaje de las Matemáticas (Objetivo 3).

Teniendo en cuenta los resultados que se muestran en la Tabla 4.12, se puede deducir que:

La actitud de los estudiantes es altamente positiva hacia el uso del software/*DERIVE* para aprender Matemáticas.

El valor actitudinal del GE es mayor que el del GC; se observa que los estudiantes de Nuevo Ingreso del GE muestra una actitud ligeramente superior a los Repetidores. Lo contrario sucede en el GC.

En cuanto a la dispersión de los valores actitudinales, se observa mayor homogeneidad en el GE que en el GC. De aquí que puede afirmarse que el uso de *DERIVE* influye de una manera determinante y favorable en la actitud de los estudiantes.

Tabla 4.12. *Promedios globales de la actitud hacia el uso del software para ordenadores/DERIVE.*

	GE/GC	GE	GC	GE-NI	GE-RE	GC-NI	GC-RE
Media	79.14	83.93	77.98	85.00	82.86	77.47	79.70
Desviación Estándar	7.53	5.60	7.54	5.69	5.73	7.21	8.77

Comparación de las actitudes de los estudiantes en relación con las dimensiones (Objetivo 4).

Dimensión 1*:* Seguridad y confianza en el trabajo con software para ordenadores/*DERIVE.*

Del análisis de los PRI para esta dimensión, notamos que la valoración en torno a la seguridad y confianza en el trabajo con software para ordenadores/*DERIVE* es alta (5 de 8 ítems) (ver tabla 4.13). Se debe enfatizar que, en cada ítem, el PRI de los estudiantes del GE es mayor que el del GC; esto nos conduce a pensar que la enseñanza desarrollada con los estudiantes del GE, logra una mayor confianza y seguridad en el uso de las nuevas tecnologías.

Los estudiantes del GE con alta confianza y seguridad creen que si se introducen correctamente los datos en *DERIVE,* se puede estar seguro de los resultados; entienden el procedimiento utilizado en *DERIVE*; *DERIVE* no lo complica todo; cuando se visualiza la gráfica de una función hecha en *DERIVE* la entienden mejor que si la viesen dibujada en la pizarra y, al usar *DERIVE,* se sienten más seguros de sus resultados. Los estudiantes del GC asignan menor valoración a cada uno de los aspectos anteriores. Los estudiantes del GE con menor confianza y seguridad, tienden a pensar que trabajar con *DERIVE* no les sirve en los exámenes, ya que es necesario escribir los cálculos y las demostraciones; no hay que aprender nada porque el programa lo hace todo; entienden mejor las clases en la pizarra que las explicadas usando *DERIVE*.

Tabla 4.13**.** *Seguridad y confianza en el trabajo con software para ordenadores/DERIVE.*

	Grupo Experimental			Grupo Control		
	NI-R	NI	R	NI-R	NI	R
Cuando uso un software para ordenadores/ *DERIVE* me siento más seguro de los resultados	3.643	3.714	3.571	3.068	3.059	3.100
Entiendo mejor las clases utilizando un software para ordenadores/ *DERIVE* que explicadas en la pizarra	2.929	2.857	3.000	2.205	2.176	2.300
Cuando visualizo la gráfica de una función hecha con un software para ordenadores/ *DERIVE* la entiendo mejor que dibujada en la pizarra	3.714	3.714	3.714	3.227	3.235	3.200
Si se introducen correctamente los datos en un software para ordenadores/ *DERIVE* se puede estar seguro de los resultados	3.857	4.000	3.714	3.409	3.294	3.800
Trabajar con software para ordenadores/ *DERIVE* no sirve para nada, ya que en los exámenes es necesario escribir los cálculos y las demostraciones	3.214	3.143	3.286	3.045	3.000	3.200
Un software para ordenadores/ *DERIVE* lo complica todo y no ayuda a aprender Matemáticas	3.500	3.857	3.143	3.341	3.265	3.600
Con un software para ordenadores/ *DERIVE*, no hay que aprender a calcular, él lo hace todo	2.714	2.571	2.857	2.886	2.853	3.000
El procedimiento que se utiliza en un software para ordenadores/*DERIVE* no lo entiendo	3.714	3.714	3.714	3.205	3.147	3.400

Dimensión 2: *Motivación hacia el trabajo con software para ordenadores/DERIVE.*

Al analizar los PRI en esta dimensión se observa que los estudiantes están altamente motivados hacia el trabajo con software para ordenador/*DERIVE* (ver tabla 4.14).

Los del GC le, asignan valores actitudinales más bajos, tal vez por no conocer las posibilidades del software específico de cálculo simbólico y algebraico para estudiar Matemáticas.

En el GE, al comparar los NI con los RE, se observa una diferencia significativa entre ambos, lo que nos lleva pensar que los NI se sienten más motivados que los RE; esta diferencia no existe entre los NI y los RE del GC. De estos resultados podemos concluir que el trabajo de laboratorio desarrollado puede ser más motivador que el método habitual de pizarra y tiza. Los estudiantes del GE con alta motivación consideran que trabajar con *DERIVE* no es aburrido: les ayuda a comprender las Matemáticas; les estimula la imaginación y la creatividad, les da deseos de hacer Matemáticas, y hacen ver las Matemáticas de otra manera.

Tabla 4.14. *Motivación hacia el trabajo con software para ordenadores/DERIVE.*

	Grupo Experimental			Grupo Control		
	NI-R	NI	R	NI-R	NI	R
Un software para ordenadores/*DERIVE* me estimula la imaginación y creatividad	3.643	3.857	3.429	3.364	3.500	2.900
Con un software para ordenadores/*DERIVE*, da deseos de hacer Matemáticas	3.500	3.429	3.571	2.864	2.853	2.900
Un software para ordenadores/*DERIVE* hace ver las Matemáticas de otra manera	3.429	3.714	3.143	3.250	3.206	3.400
Un software para ordenadores/ *DERIVE* ayuda a entender las Matemáticas	3.214	3.286	3.143	3.295	3.265	3.400
Trabajar con un software para ordenadores/ *DERIVE* es más aburrido que oír una clase de Matemáticas	3.857	3.714	4.000	3.364	3.294	3.600
Un software para ordenadores/ *DERIVE*, no ayuda a comprender las Matemáticas	3.714	3.857	3.571	3.364	3.324	3.500
Utilizar un software para ordenadores/ *DERIVE* en clase de Matemáticas no sirve para aprender a usar la computadora	3.786	3.857	3.714	3.568	3.559	3.600
Utilizar un software para ordenadores/ *DERIVE* en clase de Matemáticas es perder el tiempo	3.286	3.571	3.000	3.705	3.706	3.700

Dimensión 3**:** *Compromiso con el trabajo usando software para ordenadores/DERIVE.*

Al analizar los PRI en esta dimensión (ver tabla 4.15), se observa que los estudiantes del GE se sienten altamente comprometidos con el uso del *DERIVE*. Los del GC les asignan valores actitudinales más bajos al uso de programas para ordenadores.

En el GE, no se observa diferencia significativa entre los PRI de los estudiantes de nuevo ingreso y los Repetidores. Esto también sucede en los PRI de los NI y los RE del GC. Los estudiantes del GE que se sienten altamente comprometidos creen que si les proponen una clase utilizando *DERIVE* les gustaría participar; les gusta trabajar con *DERIVE* en clases de Matemáticas porque se diferencian de las clases habituales; cuando usan *DERIVE* entienden mejor los conceptos que les presentan; con *DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, porque de otra manera se pierde mucho tiempo; *DERIVE* está bien porque se trabaja al mismo tiempo en las ecuaciones y gráficos.

Tabla 4.15. *Compromiso con el trabajo usando software para ordenadores/DERIVE.*

	Grupo Experimental			Grupo Control		
	NI-R	NI	R	NI-R	NI	R
Me gustaría que en las clases de Matemáticas se usara un software para ordenadores/ *DERIVE*	3.571	3.571	3.571	3.545	3.559	3.500
Me gusta utilizar un software para ordenadores/ *DERIVE* en clases de Matemáticas porque se diferencian de los cursos habituales	3.643	3.857	3.429	3.409	3.412	3.400
Cuando uno usa un software para ordenadores/ *DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, porque de otra manera se pierde mucho tiempo	2.571	2.143	3.000	2.909	2.824	3.200
Un software para ordenadores/ *DERIVE* está bien porque uno puede trabajar al mismo tiempo en las ecuaciones y gráficos	3.643	3.714	3.571	3.341	3.294	3.500
Si me proponen otra clase utilizando un software para ordenadores/ *DERIVE* no me gustaría participar	3.857	3.857	3.857	3.545	3.618	3.300
Utilizar un software para ordenadores/ *DERIVE* en clase de Matemáticas no ahorra tiempo	3.857	4.000	3.714	3.386	3.412	3.300
Cuando uso un software para ordenadores/ *DERIVE* no entiendo los conceptos matemáticos	3.429	3.143	3.714	3.250	3.206	3.400
No encuentro útil tratar de resolver los problemas utilizando un software para ordenadores/ *DERIVE*	3.643	3.857	3.429	3.432	3.412	3.500

4.2.2.3. Conclusiones

Del análisis e interpretación de los resultados de la aplicación de la escala de actitudes se concluye que:

En relación con el objetivo 1; Proporcionar un entorno de aprendizaje con el software *DERIVE* influye positivamente en los valores actitudinales de una población de estudiantes. No se observó que hubiese diferencia significativa entre los promedios poblacionales de los estudiantes en cuanto a condición de estudio.

En relación con el objetivo 2, se infiere que las actitudes que poseen los estudiantes hacia el uso de software para estudiar las Matemáticas no dependen significativamente de si se ha hecho o no un trabajo específico con un software concreto. La condición de estudio no se muestra como factor importante de análisis. No obstante, pensamos que esta conclusión debería ser tomada en consideración en estudios posteriores, si se tienen en cuenta los diferentes usos que se puede hacer de los Programas de Calculo Simbólico que existen en el mercado.

En relación con el objetivo 3, se deduce que la actitud de los estudiantes es globalmente positiva hacia el uso de software para ordenadores/*DERIVE.* El valor actitudinal del GE es mayor al del GC. Dentro del GE, los de Nuevo Ingreso tienen una actitud ligeramente superior a los Repetidores; lo contrario sucede en el GC. En cuanto a la dispersión de los valores actitudinales, se observa mayor homogeneidad en el GE que en GC. De aquí se podría concluir que el uso de *DERIVE* influye de una manera determinante y favorable en la actitud de los estudiantes

En relación con el objetivo 4, se puede concluir que la motivación hacia el uso del software y el compromiso hacia su utilización tienen una categoría alta, sobre todo en el grupo que participó en la secuencia de aprendizaje de laboratorio (GE); que corrobora lo mencionado anteriormente.

Con todo lo anterior, nos proponemos estructurar una investigación en la que se elija un grupo de estudiantes de nuevo ingreso con el que se trabaje una secuencia de aprendizaje de todo el programa oficial de un primer curso de Ingeniería, que incluya clases habituales y clases en un laboratorio de ordenadores, con el apoyo de un módulo instruccional basado en el PCS *DERIVE*. Con ello trataremos de investigar en un largo período de tiempo (un semestre completo) la variación de las actitudes de los estudiantes, descartando las variables que se han mostrado irrelevantes a partir de la presente investigación.

4.3. EL ESTUDIO SOBRE EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Este estudio se llevó a cabo conjuntamente con el de actitudes hacia el aprendizaje con *DERIVE*. En el mismo nos propusimos como objetivos generales, por una parte, implementar un módulo instruccional basado en un conjunto de Prácticas de Laboratorio utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE* para la enseñanza del Cálculo en general y el concepto de Integral Definida para estudiantes de un primer curso de Ingeniería, y por otra, analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico en el que se distinguen los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica en la comprensión de la Integral Definida.

4.3.1. Objetivos

Para lograr los objetivos generales antes mencionados nos planteamos:

1. Establecer una modificación del currículo dedicado al Cálculo Integral que habitualmente se imparte en el primer curso de Ingeniería de las Universidades Latinoamericanas, tanto desde el punto de vista metodológico como de contenido.

2. Analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción del *DERIVE* en los cursos de Cálculo para los estudiantes de Ingeniería.
3. Determinar la concepción que tienen los estudiantes tanto del área como de la Integral Definida, después de llegar a cabo una instrucción que utiliza como material curricular un conjunto de Prácticas de Laboratorio, diseñadas con el PCS *DERIVE,* en las que se ha incorporado un Programa de Utilidades, diseñado por nosotros, para el estudio de dicho concepto.
4. Analizar cómo influye la idea de área que poseen los estudiantes, al interpretar la Integral Definida.
5. Caracterizar la idea de área que poseen los estudiantes que han cursado la Secundaria y no conocen aún el concepto de Integral Definida.
6. Analizar si existe alguna influencia de la instrucción llevada a cabo con los alumnos, sobre la idea que traen los estudiantes del concepto de área cuando se desarrolla la enseñanza combinando un método de tiza y pizarra con el uso de las Prácticas de Laboratorio.
7. Dado que en las preguntas de los cuestionarios a aplicar están presentados los registros de manera algebraica y gráfica, determinar cómo utilizan estos registros, los estudiantes, a la hora de resolver situaciones que involucran tanto el concepto de área de figuras planas, como el de Integral Definida.

4.3.2. El Desarrollo de la instrucción

La instrucción se realizó en dos fases:

Fase 1: Los estudiantes reciben clases habituales de tiza y pizarra con su respectivo profesor, se emplea el libro de texto oficial (Edward y Penney, 1996).

Fase 2: Los estudiantes trabajan por parejas, en un laboratorio de ordenadores, una serie de Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional I, descrito en el capítulo 3. El investigador actúa como facilitador en las prácticas. Las parejas de estudiantes resuelven las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Al comienzo de la práctica, se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la misma.

4.3.3. Análisis e interpretación de resultados.

Al finalizar el tema del tema de Cálculo Integral se aplicó un Cuestionario de Conocimientos (ver anexo 4.16). A continuación presentamos una tabla que contiene las preguntas del cuestionario, sus descriptores y objetivos.

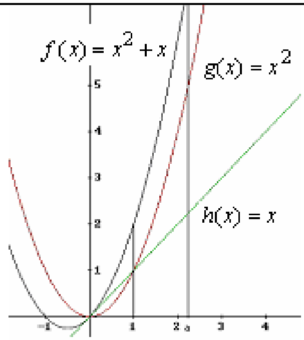
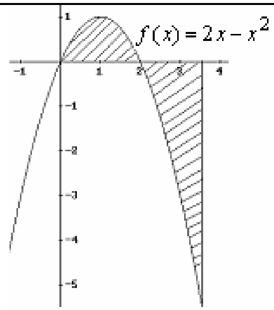
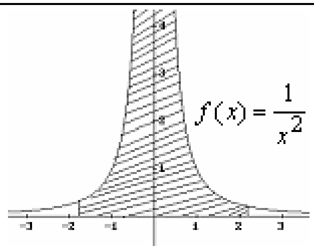
PREGUNTA	DESCRIPTORES	OBJETIVOS
1) Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué $\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx + \int_1^a h(x)dx$ donde $\{f(x) = x^2 + x;\ g(x) = x^2;\ h(x) = x$ 	*1.1.* Se pide justificar la propiedad aditiva de la integral. 1.2. No se menciona la palabra integral, ni área. 1.3. Hay tres expresiones algebraicas y tres gráficas relacionadas (una recta y dos curvas). 1.4. No se pide aproximar. 1.5. Las funciones son continuas. 1.6. Se puede justificar de varias maneras. 1.7. Las regiones no están rayadas.	Determinar qué clase de argumentos utilizan los estudiantes (gráficos, algebraicos o numéricos), para justificar la propiedad aditiva de la integral.
2) Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. 	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región. 2.3. No aparece la palabra integral. 2.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 2.5. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.7. No se pide aproximar. 2.8. La función es continua.	Determinar si el estudiante comprende la forma de obtener, en términos de la Integral Definida, el área de regiones que se encuentran bajo el eje OX, así como las relaciones que establece con las regiones que están sobre el eje OX.
3) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué. 	3.1. Se pide calcular el área. 3.2. Se identifica gráficamente la región. 3.3. No aparece la palabra integral. 3.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 3.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 3.6. Hay una gráfica asociada. 3.7. No se pide aproximar. 3.8. Hay una región con una discontinuidad en medio. 3.9. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.	Analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda, es infinita.

Tabla 4.16

PREGUNTA	DESCRIPTORES	OBJETIVOS
4) Calcular $$\int_{-3}^{4} \lvert x+1 \rvert dx$$	5.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita. 5.2. No se menciona la palabra área. 5.3. Se da el intervalo de integración. 5.4. No hay una gráfica asociada. 5.5. Es de gran interés que el cálculo se pueda resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.	Analizar: ▪ Si existe transferencia de los conocimientos antiguos a los nuevos. ▪ Si el estudiante comprende el cálculo de la Integral Definida en términos de cálculo de área de figuras elementales. ▪ Si conoce y trabaja correctamente con algunas propiedades de la Integral Definida
5) Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta. $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right\|_{-1}^{1} =$$ $$\left. -\frac{1}{x} \right\|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1} \right) = -2$$	4.1. Se presenta en el registro algebraico con información desarrollada (explícita). 4.2. No aparece la palabra área en “calcular la integral”. 4.3. Se da el intervalo de integración. 4.4. No hay una gráfica asociada. 4.5. Se aplica directamente las técnicas de integración.	Determinar si el estudiante: ▪ Es capaz de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta. ▪ Interpreta coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para que la regla de Barrow pueda ser aplicada
6) Indicar si es verdadero o falso que Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces, $f(x) \geq g(x)$. para toda x que pertenece a $[a,b]$	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No aparece la palabra integral. 6.4. No hay graficas asociadas. 6.5. No se dan los valores de los límites de integración. 6.6. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 6.7. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 6.8. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.9. En general, la proposición es falsa tanto si se trata de integrales como si fuese de área.	Determinar si el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establecen relaciones entre el área y la Integral Definida. Además si utiliza contraejemplos en su justificación.

Tabla 4.16 (Continuación)

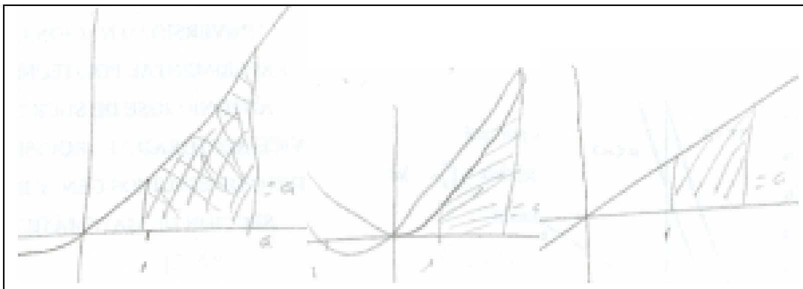
Una vez leídas las repuestas de los estudiantes al cuestionario de conocimientos aplicado al final del curso, se agruparon por categorías; el análisis se hizo por pregunta, las cuales permitieron visualizar el camino (secuencia de categorías) seguido por cada estudiante en la resolución de cada problema. El número de cada estudiante se escribe entre llaves al final de cada secuencia.

A continuación presentamos las secuencias de categorías seguidas por los estudiantes en cada pregunta. Se muestra, como ejemplos concretos, las actuaciones más significativas de los estudiantes.

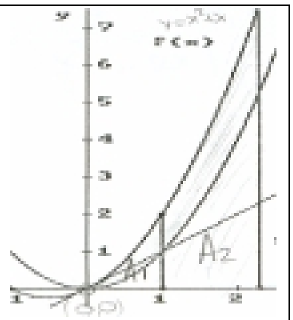
PREGUNTA 1

Categoría 1. Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad {1, 5, 7, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 30, 31, 32, 35, 38, 40}.

Categoría 2. Dibuja por separado las regiones, basa su justificación en la comparación gráfica de las regiones {2, 12}.



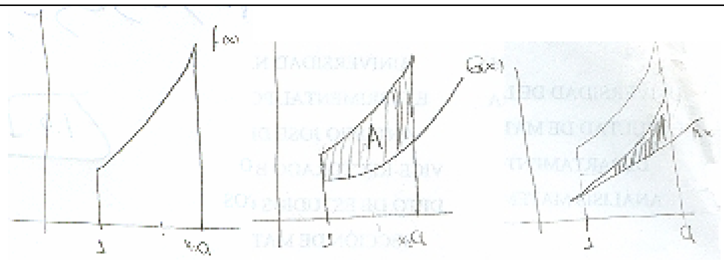
Estudiante. 2



Estudiante. 12

Figura 4.1

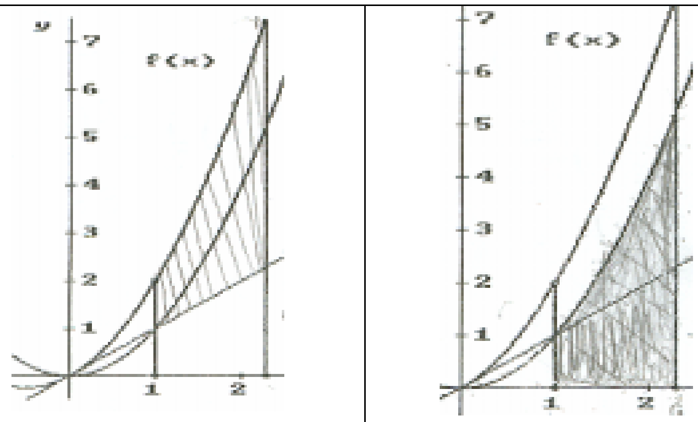
Categoría 2. Dibuja por separado las regiones, basa su justificación en aproximaciones gráficas {10}.



Estudiante. 10

Figura 4.2

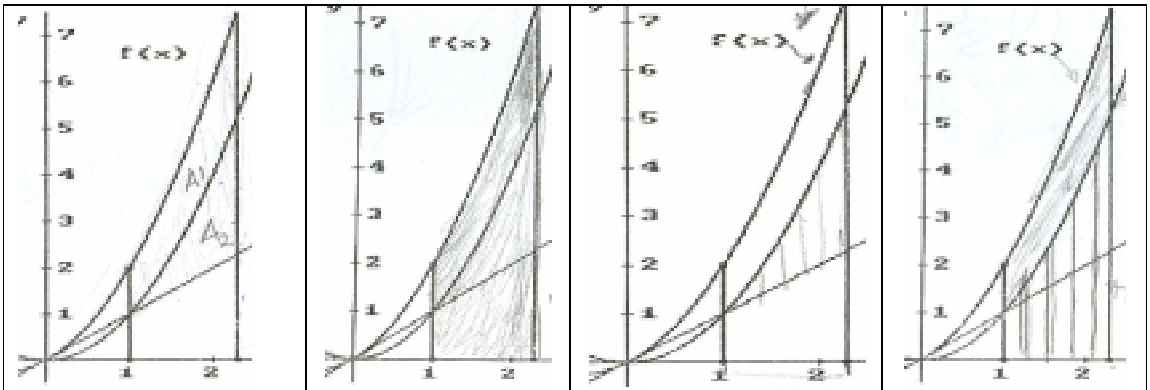
Categoría 3. Dibuja sobre la gráfica, calcula las integrales y verifica la igualdad {8, 36}.



Estudiante 8	Estudiante 36

Figura 4.3

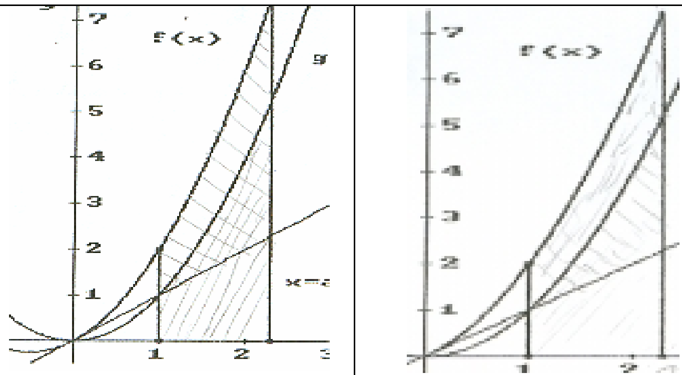
Categoría 4. Dibuja sobre la gráfica {15, 22, 27, 57}.



Estudiante 14	Estudiante 22	Estudiante 27	Estudiante 57

Figura 4.4

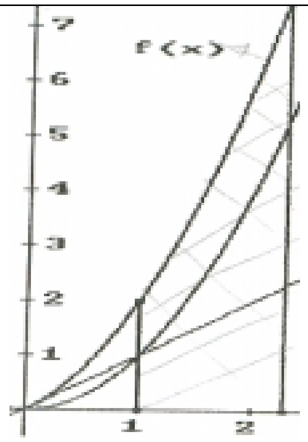
Categoría 5. Dibuja sobre la gráfica, sustituye las expresiones algebraicas de las funciones en la igualdad dada {3, 21}.



Estudiante 3	Estudiante 21

Figura 4.5

Categoría 6. Dibuja sobre la gráfica y basa su justificación en la Suma de Riemann {9}.



Estudiante 9

Figura 4.6

Categoría 7. Sustituye las expresiones algebraicas de las funciones en la igualdad dada {4, 6, 16, 25, 28, 29, 37, 58}.

Categoría 8. Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones {26, 39, 49}.

Categoría 9. No responde {33, 34, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56}.

PREGUNTA 2

Categoría 1. Calcula el área de la región que está en la parte superior (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo), utilizando integrales.

Categoría 1.1. Antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX {1, 13, 18, 26, 57}.

Categoría 1.2. Aplica valor absoluto al resultado de la integral de la región situada bajo el eje OX. {2}.

Categoría 1.3. No cambia el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX.

Categoría 1.3.1. Suma las dos integrales sin cambiarle el signo a la integral de la región situada bajo el eje OX {12, 15, 19, 30, 34, 40, 50, 51, 53, 55}.

Categoría 1.3.2. No suma los resultados de las dos integrales {11, 16, 23, 52}.

Categoría 2. Menciona que el área de la región sobre el eje OX se puede calcular con rectángulos inferiores y el área de la región bajo el eje OX se puede calcular con rectángulos inferiores {4}.

Categoría 3. Calculan el área de las regiones usando aproximación numérica {54, 56}.

Categoría 4. Calcula solo el área de la región sobre el eje OX, por aproximación numérica {37}.

Categoría 5. Calcula el área de la región sobre el eje OX utilizando Integral Definida y no calcula el área de la región que esta bajo el eje OX.

Categoría 5.1. Desconoce, para la región bajo el eje OX, la recta vertical. {3, 6, 20, 21, 27, 36, 39, 45, 46}.

Categoría 5.2. Desconoce el extremo derecho del segundo intervalo {5, 10, 24, 31, 38, 44}.

Categoría 5.3. Utiliza un valor genérico para extremos derecho del segundo intervalo {42}.

Categoría 5.4. No hay un intervalo definido {28, 32}.

Categoría 5.5. La región no está definida {29}.

Categoría 5.6. No calcula el área de la región bajo el eje OX {9, 35, 47}.

Categoría 6: No responde {7, 8, 14, 17, 22, 25, 33, 41, 43, 48, 49, 58}.

PREGUNTA 3

Categoría 1: No es posible calcular el área.

Categoría 1.1. La función no es continua en el intervalo {7, 10, 11, 18, 22, 23}.

Categoría 1.2. Plantea y calcula

$$\int_{-2}^{0} x^{-2}dx = \left[-x^{-1}\right]_{-2}^{0} = -\infty$$

$$\int_{0}^{2} x^{-2}dx = \left[-x^{-1}\right]_{0}^{2} = +\infty$$

Afirma que la región es infinita {41}.

Categoría 1.3. Afirma que la región rayada es infinita {4, 5, 6, 13, 20, 27, 28, 31, 37, 45, 46, 54, 57, 58}.

Categoría 1.4. Afirma que la curva crece sin límite {3, 8, 9, 14, 24, 29, 35, 40, 42}.

Categoría 1.5. Afirma que la región no está definida {50}.

Categoría 1.6. Afirma que la región no está acotada {30, 32, 36, 38, 49}.

Categoría 1.7. Afirma que el intervalo de integración no esta definido {1, 12, 21, 33}.

Categoría 2. No responde {16, 17, 25, 34, 43, 44, 47, 48, 51, 56}.

PREGUNTA 4

Categoría 1. Considera el integrando como una función lineal. Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx = \int_{-3}^{4} x+1dx$ (copia textual) {4, 17, 33, 43, 48, 54}

Categoría 2. Calcula $\int_{-3}^{1}(x+1)dx + \int_{-3}^{4}(x+1)dx = \cdots = \frac{21}{2}$ (copia literal) {21, 30}

Categoría 3. Define $|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$ (copia textual).

Categoría 3.1. No plantea integrales {10, 12, 22, 24, 41, 47, 52, 58}

Categoría 3.2. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1dx + \int_{-1}^{4} x+1dx = \cdots = \frac{29}{2}$ (copia literal) {6, 8, 26, 27, 28, 29, 46}

Categoría 3.3. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1dx + \int_{-1}^{4} x+1dx$

Resultados $(11)(2), \left(\frac{37}{2}\right), (5)\left(\frac{31}{2}\right), \left(\frac{17}{2}\right), \left(-\frac{13}{2}\right)$ (copia literal) {3, 14, 23, 25, 35, 44, 50, 53}.

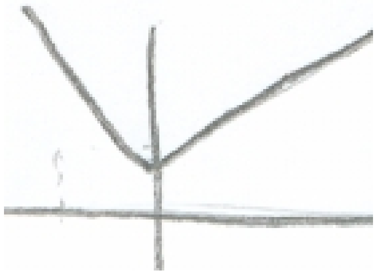
Categoría 3.4. Calcula $\int_{-3}^{4}(x+1)dx + \int_{-3}^{4} -(x+1)dx$

Resultados $\left(\left(\begin{cases} \frac{21}{2} & si \;\; x \geq -1 \\ -\frac{21}{2} & si \;\; x < -1 \end{cases}\right), (6)\right)$(copia literal)) {15, 32}.

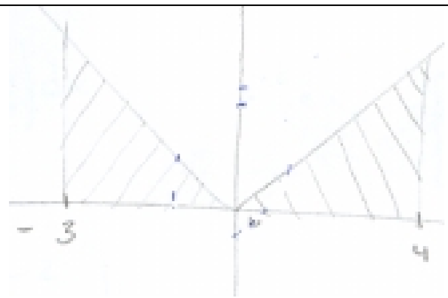
Categoría 3.5. Calcula $\int_{-1}^{4}(x+1)dx = \cdots = 12.5 \quad \int_{-3}^{2}(-x-1)dx = \cdots = 1.5$ (trascripción textual) {1}.

Categoría 3.6. Calcula $-\int_{-3}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{4} x+1dx = \cdots = \frac{53}{2}$ (copia literal) {38}.

Categoría 3.7. Grafica la función



Estudiante 9



Estudiante 11

Figura 4.7

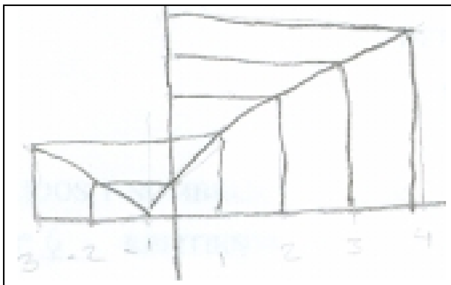
Plantea $\int_{-3}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{4}(x+1)dx$. Resultados $\left(\left(\frac{25}{2}\right),(12)\right)$ {9, 11}.

Categoría 4. Define $|x+1|=\begin{cases}-x-1 & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$ (copia literal)

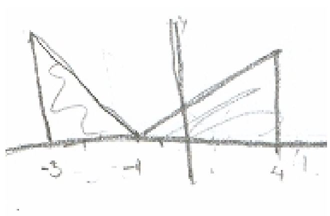
Categoría 4.1. Calcula $\int_{-3}^{0}-x-1dx+\int_{0}^{4}x+1dx=\cdots=10.5$ (copia literal) {40}.

Categoría 4.2. Calcula $\int_{-3}^{0}-x-1dx+\int_{0}^{4}x+1dx=\cdots=\frac{9}{2}$ (copia literal) {36}.

Categoría 4. 3. Grafica la función



Estudiante 49



Estudiante 55

Figura 4.8

Plantea $\int_{-3}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{4}(x+1)dx$. Resultados $((3),(14.5))$ {49, 55}.

Categoría 5. Define $|x+1|=\begin{cases}x+1 & x\geq -1\\ 1-x & x<-1\end{cases}$ (copia literal). Calcula

$\int_{-3}^{-1}(1-x)dx+\int_{-1}^{4}(x+1)dx$

Resultados $\left(\left(\frac{7}{2}\right)(-4.5)\right)$ {5, 7}.

Categoría 6. Afirma que no se puede calcular porque la función no es diferenciable {20}.

Categoría 7. Afirma que no se puede calcular porque la función no es continua {45}.

Categoría 8. No responde {2, 13, 16, 18, 19, 31, 34, 37, 39, 42, 51, 56, 57}

PREGUNTA 5

Categoría 1: Afirma que la proposición es verdadera. Resuelve la integral de igual manera que la dada {1, 2, 3, 4, 10, 11, 15, 17, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 50, 52, 54, 55, 56}.

Categoría 2: Afirma que la proposición es falsa.

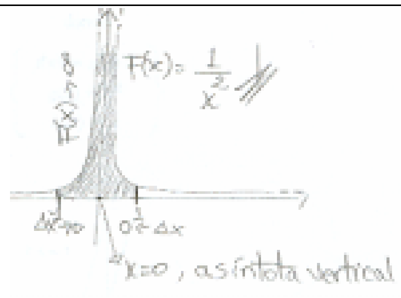
Categoría 2.1. La función no es continua {7, 9, 20, 23, 45}.

Categoría 2.2. La función no esta definida en cero {5, 12, 31}.

Categoría 2.3. Afirma que la función tiende a infinito {13, 18}.

Categoría 2.4. Afirma que un área no puede ser negativa {36, 57}.

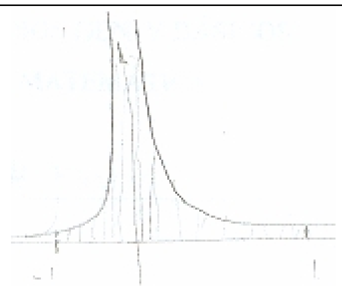
Categoría 2.5. La gráfica tiene una asíntota vertical {58}.



Estudiante 58

Figura 4.9

Categoría 2.6. Afirma que la función *aumenta sin cota,…, al hacer rectángulos inscritos o circunscritos la función siempre tiende al infinito* {8}.



Estudiante 8

Figura 4.10

Categoría 2.7. Afirma que la gráfica no tiene área acotada {6, 14, 41}

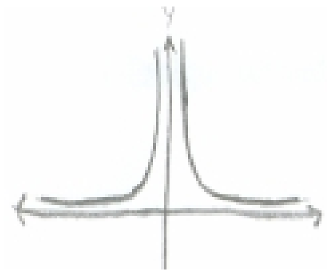
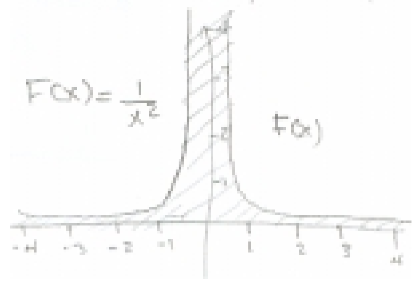
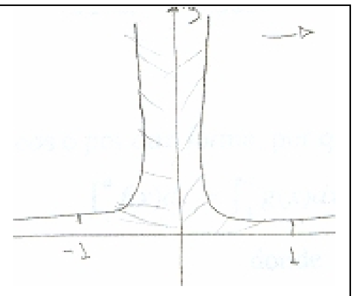
		
Estudiante 6	Estudiante 14	Estudiante 41

Figura 4.11

Categoría 3. No responde {16, 19, 22, 33, 37, 49, 51, 53}.

PREGUNTA 6

Categoría 1. Afirma que la proposición es verdadera. Se subraya el número del estudiante que confunde la hipótesis con la tesis.

Categoría 1.1. Compara integrales particulares. Realiza cálculos en el registro simbólico {15, 28, <u>29</u>, 13}.

Categoría 1.2. Reescribe la proposición enunciada {<u>3</u>, 4, <u>5</u>, 6, 24, <u>27</u>, 30, <u>39</u>, 47, 50}.

Categoría 1.3. Afirma que las integrales tienen los mismos límites de integración {2, <u>11</u>, 35, <u>43</u>}.

Categoría 1.4. Afirma que *f* es siempre mayor que *g* {20, <u>38</u>, <u>32</u>}.

Categoría 1.5. Basa su justificación en la relación Derivada-integrales-antiderivada {8}.

Categoría 1.6. Sin justificar {55}.

Categoría 1.7. Basa su justificación en la relación de las integrales con el área.

Categoría 1.7.1. Sin dar más argumentos {7, 12, <u>18</u>, <u>44</u>, 45, <u>46</u>}.

Categoría 1.7.2. Grafica {<u>9</u>, 17, 21, 26, 40}.

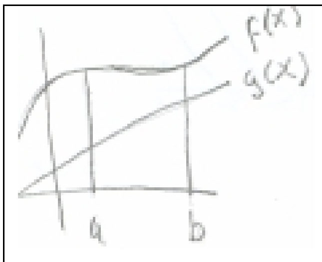
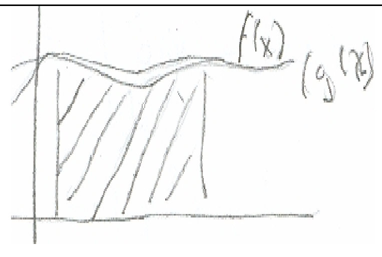
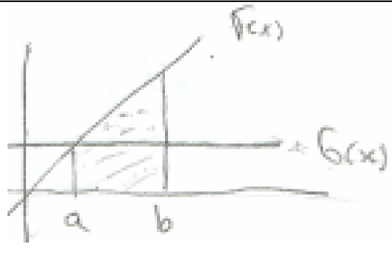
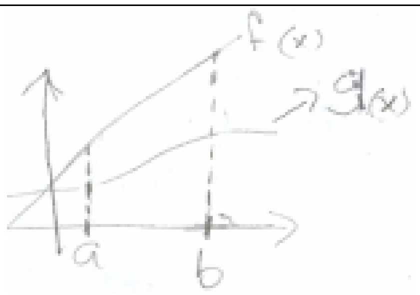
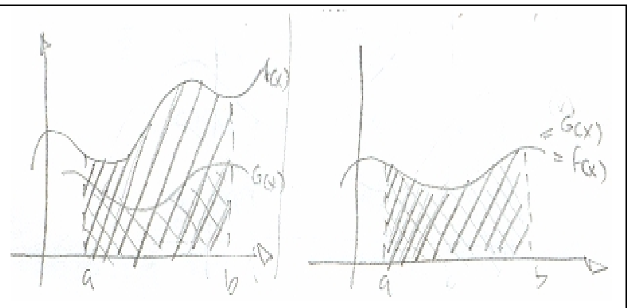
		
Estudiante 9	Estudiante 17	Estudiante 26

Figura 4.12



Estudiante 21



Estudiante 40

Figura 4.12 (Continuación)

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa. Afirma que depende de las funciones consideradas {10, 19}.

Categoría 3. No se decide por ninguna de las alternativas. Afirma que se deben definir funciones particulares. Confunde la hipótesis con la tesis {1}.

Categoría 4. No responde {14, 16, 22, 23, 25, 31, 33, 34, 36, 37, 41, 42, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58}.

4.3.4. Conclusiones.

Una vez analizadas las categorizaciones por pregunta, concluimos que los estudiantes:

En la pregunta 1, utilizan argumentos algebraicos y numéricos consistentes en la sustitución de la expresión algebraica de cada función en la integral respectiva, cálculo de las integrales y comparación de los resultados (ver categoría 1).

Argumentos gráficos marcando sobre la gráfica (ver categoría 2, 4).

Argumentos gráficos, marcando sobre la gráfica, algebraico- numéricos igual a los anteriores o utilizando Sumas de Riemann (ver categoría 3, 6).

Argumentos algebraicos con los que comparan simplemente las expresiones de las funciones (ver categorías 5, 7, 8).

La representación gráfica ha sido utilizada por 12 estudiantes, de los cuales 6 son de los 14 estudiantes del grupo que participó en las Prácticas de Laboratorio.

En relación a la pregunta 2, los estudiantes tienden a utilizar la gráfica de manera referencial para estimar el corte con el eje OX o para identificar las regiones; no se observaron marcas sobre la gráfica. Calculan el área de la región, por lo general, utilizando Integrales Definidas (ver categorías 1, 5).

Utilizan aproximaciones numéricas (ver categorías 2, 3) sin dibujar figuras elementales sobre la gráfica.

Se observó que tienen problemas para calcular el valor del área de la región bajo el eje OX (ver categoría 1.3).

En general, los estudiantes fundamentan sus procedimientos en procesos algebraico- numéricos, de modo que lo gráfico ha pasado a ser algo complementario.

Debemos hacer notar que un estudiante (ver categorías 2) del grupo de laboratorio menciona que se puede calcular el área utilizando rectángulos inferiores; esto puede estar influenciado por el énfasis puesto en las Prácticas de Laboratorio al cálculo del área de una región bajo la curva mediante aproximaciones.

Del análisis de la pregunta 3, se tiene que todos los estudiantes que dieron respuesta consideran que el área de la región no se puede calcular. Utilizan el registro gráfico dado; argumentan que la función no es continua, la región es infinita, la gráfica crece sin límite, la región no está acotada.

En un posterior estudio con Práctica de Laboratorio se tendrá que observar, la influencia del ambiente computacional en la resolución de problemas de cálculo de Integral Definida que estén relacionadas con regiones no acotadas, y, determinar si los estudiantes tratan de realizar sus cuadraturas o si intentan realizar aproximaciones.

En la pregunta 4, los estudiantes preferentemente realizan un tratamiento en el registro simbólico, algunos consideran el integrando como una función lineal (ver categoría 1, 2); puede que estos estudiantes no tengan claro que se trata de la función valor absoluto y crean que sólo se trata del valor absoluto de un número; otros definen a trozos la función (ver categoría 3, 4, 5) y cometen errores, en la definición de la función, en los límites de integración y en el cálculo de la Integral.

Los estudiantes que representaron gráficamente la función (ver categoría 3.7 y 4.2), a partir de la definición a trozos, cometen errores en la gráfica y/o el procedimiento de planteamiento y cálculo de las integrales.

Ninguno de los estudiantes ha intentado resolver el problema graficando la función y dividiendo la región en dos regiones triangulares y luego utilizar el cálculo de área de triángulos. Esto puede ser debido a que ellos pueden considerar que no sería un procedimiento aceptable o que en realidad no se les ocurra tal idea.

Con respecto al planteamiento de la pregunta 5, la mayoría considera que la proposición es verdadera, basan su razonamiento en el chequeo del procedimiento.

Los estudiantes que afirman que la proposición es falsa, argumentan analíticamente referenciando a la función (ver categorías 2.1, 2.2, 2.3), otros a la gráfica (ver categorías 2.5, 2.6, 2.7)

De los que afirman que es falsa, un estudiante, del grupo de prácticas, representa gráficamente la función y menciona el uso de rectángulos en su argumentación; es posible que esté influenciado con el procedimiento visto en las prácticas (ver categoría 2.6).

Dos estudiantes han señalado el resultado negativo de la integral para argumentar la falsedad de la proposición (ver categoría 2.4).

En la proposición planteada en la pregunta 6, de estudiantes que consideran que la proposición es verdadera, unos plantean integrales de funciones particulares, otros reescriben la proposición y otros, dan argumentos relacionados con las funciones o los límites de las integrales (ver categoría 1).

Solo dos estudiantes, de los que responden, mencionan que es falsa y argumentan que depende de las funciones consideradas.

Trece estudiantes (ver números subrayados) confunden la hipótesis con la tesis.

Los estudiantes que utilizan registros gráficos en sus argumentaciones, grafican funciones positivas, en donde se cumple la proposición, lo cual pudo influir en su respuesta (ver categorías 1.7.1, 1.7.2).

4.4. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

De los resultados obtenidos de la aplicación de las escalas de actitudes se concluye que:

Con relación a las variables consideradas: El género no afecta significativamente las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores. La condición de estudio (repetidores/nuevo ingreso) no se muestra como una variable importante de análisis. Existe alta correlación entre actitud y rendimiento académico.

Las actitudes hacia las Matemáticas, el uso de los ordenadores y hacia el aprendizaje con *DERIVE,* pueden ser definidas mediante las dimensiones: Confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia el trabajo matemático, compromiso hacia el trabajo matemático**,** uso del ordenador en las actividades matemáticas, seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*, motivación hacia el trabajo con *DERIVE* y compromiso con el trabajo con *DERIVE.*

El uso del PCS *DERIVE* proporciona un entorno de aprendizaje que influye positivamente en los valores actitudinales de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

De los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario de conocimientos se concluye que:

- Una vez que han cursado la unidad de cálculo integral, ambos grupos, utilizan preferentemente representaciones algebraico-numéricas; las representaciones gráficas son utilizadas cuando estas se les proporcionan y lo hacen de una manera referencial. Se tendría que incluir alguna pregunta en donde se les de el registro gráfico sin la expresión algebraica de la función, para poder determinar si son capaces de realizar un tratamiento en este registro.
- En cuanto a la confusión observada en el análisis de la pregunta 6, creemos que se debe incluir una pregunta que sea la recíproca de la proposición, así se puede analizar de mejor manera si los estudiantes son capaces de distinguir entre hipótesis y tesis y si utilizan gráficos en sus explicaciones que den una idea más general de lo planten.
- Centrándonos en las respuestas de los estudiantes que cursaron Prácticas de Laboratorio, se observó que en líneas generales, el proceder de los mismos es muy similar al grupo que no cursó las Prácticas. Esto puede ser debido a varias cuestiones:
    - El poco tiempo dedicado a las Prácticas.
    - No haber control de las clases habituales.
    - Los tipos de preguntas incluidas en el cuestionario.

- Se debe estructurar un curso completo con todas las unidades del programa, en que se combinen las clases habituales con Prácticas de Laboratorio y en el que el profesor que imparte el curso regular sea el mismo del Laboratorio.
- Se debe incluir una puesta en común después de desarrollar las Prácticas, puesto que de esa forma se puede clarificar mejor la formación que se ha tratado de desarrollar con los estudiantes.
- Se debe completar el cuestionario incluyendo preguntas que profundicen en tres aspectos principales.
    - La idea de área que tienen los estudiantes antes de conocer el concepto de Integral Definida.
    - Cómo influye la instrucción recibida sobre la idea de área que tienen los estudiantes que participaron en Prácticas de Laboratorio.
    - Cómo utilizan las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas, a la hora de resolver los problemas sobre la Integral Definida que requieran del conocimiento de su relación con el área de figuras planas.
- Los resultados obtenidos hasta este punto de la investigación, proporcionan elementos para continuar con el estudio en un ambiente computacional, con el objeto de indagar sobre la intención de respuesta de los estudiantes y determinar la viabilidad de la implementación de nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

CAPÍTULO V

ESTUDIO EXPERIMENTAL. PRIMERA FASE

En este Capítulo se describe la primera fase del estudio experimental. Se incluye en él los resultados del estudio definitivo sobre actitudes hacia las Matemáticas, hacia el uso de los ordenadores y hacia el aprendizaje con DERIVE, así como el análisis y discusión de los resultados de un segundo estudio sobre el aprendizaje del concepto de Integral Definida, después de que los estudiantes utilizaron el material curricular (Módulo Instrucccional I) elaborado por nosotros y descrito en el capítulo III.

Finaliza el capítulo con la presentación de las conclusiones obtenidas a partir del uso de los distintos instrumentos y técnicas de investigación.

5.1. DESCRIPCIÓN GLOBAL DEL ESTUDIO

El estudio experimental, en su primera fase, está diseñado, entre otros aspectos, tomando en cuenta la información suministrada por el estudio exploratorio.

Para llevar a cabo esta parte de la investigación se seleccionaron 28 estudiantes de nuevo ingreso que cursaban la asignatura Cálculo I, los cuales participaron en un curso donde se combinaban clases habituales de tiza y pizarra con Prácticas de Laboratorio, siguiendo el Módulo Instruccional I, que ya fue utilizado en el estudio exploratorio. Tal como se mencionó en el capítulo III, en las tres primeras unidades del programa oficial, la instrucción fue la misma para todos los estudiantes. En la última unidad (Integrales), se formaron dos grupos; el primero de 11 estudiantes, que llamaremos Grupo 1 (G1) y el otro, de 17 estudiantes, que llamaremos Grupo 2 (G2). En el G1 se continuó con la instrucción y se realizó en los dos ambientes, mientras que el G2 recibió sólo la instrucción tradicional.

Al inicio del curso se aplicó una escala Likert (pretest) (EA-3) (ver anexo 5) para medir las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de ordenadores, y al final (postest) (EA- 4) (ver anexo 6) se aplicó la escala inicial y se le añadió la escala validada en el estudio exploratorio, para medir las actitudes hacia el aprendizaje con *DERIVE,* dando lugar a un postest (EA-4, ver anexo 6).

Utilizando los resultados de los dos cuestionarios sobre actitudes, se seleccionaron dos ítems por dimensión, los cuales tenían menor promedio de respuesta por ítem y mayor dispersión; con ellos se estructuró una entrevista.

Se incluye en el análisis de las actitudes, los comentarios escritos por los estudiantes, por equipo, en las Prácticas de Laboratorio (ver anexo 7).

Al inicio del tema de Cálculo Integral se aplicó un Cuestionario de Conocimientos (CC-1) (pretest) (ver anexo 8) y al finalizar el tema otro (CC-2) (postest) (ver anexo 9), validado en el estudio exploratorio. La finalidad de esta estrategia era, por una parte, determinar el tipo de respuesta dado por los estudiantes a situaciones que pueden ser resueltas sin utilizar cálculo integral y de qué manera influyen los nuevos conocimientos sobre integrales en el cambio de respuesta. Por otra, facilitó la selección de 4 estudiantes, dos del grupo G1 (que denominamos G1E1 y G1E2) y dos de grupo G2 (que denominamos G2E1 y G2E2) que fueron entrevistados con posterioridad.

El protocolo de la entrevista constó de dos partes, una relacionada con las actitudes (ver capítulo III, sección 3.3.3.1), y otra, sobre el concepto de Integral Definida. Para este último se utilizó como protocolo (ver anexo 9) las siete preguntas del segundo cuestionario (CC-2).

La entrevista fue realizada en un ambiente en el que el estudiante contaba con folios de papel para realizar sus anotaciones. Se videograbó cada sesión y se transcribió cada entrevista.

A continuación detallamos el estudio sobre actitudes y seguidamente el estudio sobre el concepto de Integral Definida, y, al final del capítulo, exponemos las conclusiones de la primera fase del estudio exploratorio.

5.2. ESTUDIO SOBRE ACTITUDES

Este estudio, como se mencionó anteriormente se llevó a cabo con 28 estudiantes, de nuevo ingreso, de un primer curso de Cálculo. El mismo tiene como objetivo general, analizar la evolución de las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas, hacia el uso de los ordenadores y hacia el aprendizaje de las Matemáticas con *DERIVE.* Se les aplicaron dos escalas de actitudes tipo Likert.

5.2.1. Objetivos

Para lograr este objetivo general nos propusimos:

1. Analizar la evolución de las actitudes de los estudiantes que utilizan secuencias de aprendizaje desarrolladas utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*.
2. Comparar las actitudes de los estudiantes en relación con las dimensiones objeto del estudio.
   - Confianza y seguridad en el trabajo matemático.
   - Motivación hacia el trabajo matemático.
   - Compromiso con el trabajo matemático.
   - Interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores.
   - Seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*.
   - Motivación hacia el trabajo con *DERIVE*.
   - Compromiso con el trabajo con *DERIVE*.
3. Determinar algunos de los factores que pueden influir en las actitudes de los estudiantes de los primeros cursos universitarios tanto hacia las Matemáticas como hacia el uso de los ordenadores.

5.2.2. Metodología y dimensiones del análisis

En el estudio sobre actitudes se aplicaron, primeramente, dos escalas de actitudes, una al inicio del curso (pretest) (EA-3) (ver anexo 5) y otra al final del curso (postest) (EA-4) (ver anexo 6) con el objeto de estudiar la evolución de las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores por los estudiantes cuando realizan actividades diferentes a las habituales y, otra sólo al final, con la finalidad de determinar la influencia del uso del software de cálculo simbólico *DERIVE* en el cambio de actitudes.

Se consideraron seis dimensiones que determinan las actitudes tanto hacia las Matemáticas como hacia el uso de los ordenadores: Confianza y seguridad en el trabajo matemático; Motivación hacia el trabajo matemático; Compromiso con el trabajo matemático; Confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador; Motivación hacia el trabajo con el ordenador; Interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores (Galbraith y Haines, 1998). Para la escala relacionada con *DERIVE* se consideraron tres dimensiones: Seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*, motivación hacia el trabajo con *DERIVE*, compromiso con el trabajo con *DERIVE*.

La primera fue adaptada de la usada por Galbraith y Haines (1998). El instrumento era una escala Likert con 48 ítems. El procesamiento de los datos se realizó con el software SYSTAT. La confiabilidad del instrumento fue de 0.89 de acuerdo al coeficiente numérico Alfa de Cronbach, lo cual nos permite afirmar que existe una amplia consistencia de las respuestas de los estudiantes a la escala utilizada.

La segunda, de 72 ítems, se conformó con la aplicada al inicio del curso y la validada en el estudio exploratorio para el estudio de las actitudes hacia el aprendizaje con *DERIVE*.

Para codificar las respuestas se asignaron códigos a cada ítem, tomando en cuenta si el enunciado de este último se presentaba en forma positiva (+) o negativa (-), de acuerdo a la siguiente tabla.

Tabla 5.1. *Codificación de las respuestas.*

Respuestas / Tipo de ítem	Completamente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
Positivo (+)	4	3	2	1
Negativo (-)	1	2	3	4

Se incluyen las desviaciones estándar tanto por ítem, como por dimensión.

En segundo lugar, se realizó la entrevista. Para elaborar el protocolo de la misma se seleccionaron los ítems con menor promedio de respuesta por ítem y mayor dispersión con la finalidad de investigar sobre lo que pudo influir en el tipo de respuesta, dado que estos valores influyen en el valor actitudinal de los estudiantes.

En tercer lugar, dado que en cada práctica de laboratorio se incluía al final de cada práctica una serie de preguntas con la finalidad de establecer el estado de opinión de los estudiantes (agrupados en parejas) sobre las Prácticas de Laboratorio, las respuestas fueron procesadas y se seleccionaron las más relevantes y se agruparon de acuerdo a cada dimensión que define las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje con *DERIVE*.

A continuación presentamos el análisis e interpretación de los resultados obtenidos de la aplicación de las escalas de actitudes, las entrevistas y los estados de opinión de los estudiantes sobre el trabajo en el laboratorio de ordenadores.

5.2.3. Análisis e interpretación de los resultados

5.2.3.1. Las escalas de actitudes

Pasamos a continuación a desarrollar un análisis por dimensiones. Se harán dos clases de análisis; un primer análisis del cuestionario relativo al momento de su aplicación (pretest) y un segundo análisis que será el del cuestionario final (postest), pero en relación con los grupos que han quedado determinados por la instrucción recibida. Hemos incluido la desviación estándar por ítem (σ) y por dimensión (σ_{PRI}).

Al analizar los promedios de respuesta por ítem (PRI) obtenidos de la aplicación de los cuestionarios, tanto al inicio como al final del curso, podemos afirmar que, en términos generales, se conserva una alta confianza y seguridad en su trabajo matemático, con una pequeña y no significativa disminución en el PRI (ver tabla 5.2). Los estudiantes manifiestan tener una alta confianza y seguridad en el trabajo matemático dado que: en Matemáticas se premia su esfuerzo; obtienen buenos resultados; no se preocupan por tener que aprender temas difíciles; tienen confianza al asistir a clases y consideran que son buenos en la materia. Sin embargo, muestran una baja confianza y seguridad al sentirse más preocupados en clases de Matemáticas que en las de otras materias. Resulta relevante destacar que, a pesar de que los estudiantes se enfrentaron a temas que usualmente producen dificultades y obstáculos considerables para ellos, la actitud resulta muy homogénea y positiva; tal vez el haber cursado la materia de una manera no habitual, con el uso del ordenador, pudo haber influido para que la actitud se estabilizara.

Centrando el análisis en los resultados al final del curso se observa que el G2, que no cursó toda la materia usando *DERIVE*, tiene mayor PRI en la mayoría de los ítems que el G1, grupo que cursó todo la materia con dicho software; lo que podría interpretarse como que el G2 tiene una mayor confianza y seguridad en el trabajo realizado de manera habitual. Creemos que los estudiantes del G1 encontraron que el ordenador les proporciona un escenario que les suministra, en ocasiones, resultados contradictorios que no suelen aparecer en las clases habituales. Todo esto puede influir sin lugar a dudas en su actitud.

Tabla 5.2. *Confianza y seguridad en el trabajo matemático.*

ÍTEM	CA-3	CA-4 G1	CA-4 G2	CA-4
	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)
La Matemática es una materia en la que premian mi esfuerzo (+)	3.536 (0.637)	3.455 (0.505)	3.750 (0.447)	3.630 (0.492)
Los resultados que obtengo en Matemáticas son buenos (+)	3.857 (0.356)	3.636 (1.000)	3.625 (0.500)	3.630 (0.492)
No me preocupa tener que aprender temas difíciles en Matemática (+)	2.967 (1.105)	3.000 (0.786)	3.125 (1.088)	3.074 (1.035)
Tengo mucha confianza cuando asisto a las clases de Matemáticas (+)	3.464 (0.693)	3.273 (0.831)	3.500 (0.635)	3.407 (0.694)
La perspectiva de tener que aprender nuevos temas de Matemáticas, me pone nervioso (-)	3.321 (0.905)	2.909 (0.944)	3.563 (0.629)	3296 (0.775)
Estoy más preocupado en clases de Matemáticas que en las de cualquier otra materia (-)	2.571 (1.069)	2.091 (0.647)	2.000 (0.894)	2.037 (0.898)
No importa cuanto estudie Matemáticas, siempre son difíciles para mí (-)	3.536 (0.576)	3.273 (0.874)	3.562 (0.512)	3.444 (0.577)
Considero que no soy bueno en Matemáticas (-)	3.286 (0.810)	2.818 (0.505)	3.312 (0.873)	3.111 (0,892)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.317 (0.369)	3.057 (0.478)	3.305 (0.561)	3.204 (0.520)
z(CA-3/CA4)= 0.968				
z(G1/G2)= -1.781				

Los estudiantes poseen una alta motivación hacia el trabajo matemático, tanto al inicio como al final del curso, con un ligero aumento en el PRI (ver tabla 5.3). Manifiestan además que: Insisten en los problemas matemáticos hasta encontrar su solución; a lo que les produce confusión en Matemáticas le dedican tiempo para pensarlo mejor; no les desagradan los desafíos que encuentran; prefieren que no les den las respuestas a los problemas, sino hallarlas por sí mismos y entienden a las personas que se entusiasman con las Matemáticas. También se observa un importante aumento en la disposición que tienen los estudiantes a dedicar mayor tiempo a las actividades Matemáticas. Esta mejora en la actitud puede deberse al hecho de que el trabajar conjuntamente clases habituales y Prácticas de Laboratorio, motiva al estudiante para que considere que puede participar de manera dinámica en aquellas actividades que en los cursos habituales se reservaban, casi exclusivamente, para el profesor o para los estudiantes más adelantados.

En relación con los resultados obtenidos al finalizar el curso, se nota que existe, en general, poca diferencia entre ambos grupos; aunque al analizar detalladamente cada ítem ésta resulta más significativa; por ejemplo el G1 disfruta más con las actividades Matemáticas que el G2. De todo esto se deduce que los dos grupos están altamente motivados hacia el trabajo matemático sin manifestarse de manera significativa una mayor motivación, en ninguno de los dos grupos.

Tabla 5.3. *Motivación hacia el trabajo matemático.*

ÍTEM	CA-3	CA-4 G1	CA-4 G2	CA-4
	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)
Disfruto realizando actividades Matemáticas (+)	3.536 (0.576)	3.273 (0.786)	2.750 (0.683)	2.936 (0.759)
Insisto en los problemas matemáticos hasta encontrar su solución (+)	3.500 (0.694)	3.455 (0.688)	3.500 (0.516)	3.481 (0.580)
Cuando algo sobre Matemáticas me confunde, lo pienso por algún tiempo (+)	3.357 (0.951)	3.727 (0.467)	3.188 (1.047)	3.407 (0.888)
Dedico gran parte de mi tiempo a actividades Matemáticas (+)	2.679 (0.945)	3.273 (0.467)	2.938 (0.854)	3.074 (0.730)
Me desagrada cuando encuentro desafíos en Matemáticas (-)	3.321 (0.863)	3.364 (0.674)	3.813 (0.403)	3.630 (0.565)
Me frustra tener que pasar mucho tiempo en un problema matemático (-)	2.750 (1.175)	2.818 (0.982)	3.375 (0.719)	3.148 (0.864)
Prefiero que me den la respuesta a los problemas que tener que hallarla (-)	3.571 (0.634)	3.364 (0.505)	3.437 (0.727)	3.407 (0.636)
No entiendo cómo algunas personas se entusiasman con las Matemáticas (-)	3.429 (0.790)	3.455 (0.820)	3.500 (0.894)	3.481 (0.849)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.268 (0.352)	3.341 (0.256)	3.313 (0.341)	3.321 (0.239)

z(CA-3/CA4)= -0.659
z(G1/G2)= 0.347

Los estudiantes se sienten altamente comprometidos con el trabajo matemático, tanto al inicio como al final del curso, con poca diferencia en los PRI (ver tabla 5.4) y consideran que resulta útil entender los ejercicios y problemas matemáticos; relacionan los nuevos conocimientos con los que poseían; toman apuntes y revisan los temas dados. Esto evidencia que los estudiantes establecen conexiones entre registros cognitivos dados y los que ya tenían, así como que también asumen, de alguna manera el contrato didáctico (Brousseau, 1990) establecido al inicio del curso.

Respecto de los resultados del cuestionario final, se observa que, en general, el G2 manifiesta ligeramente un mayor compromiso en el trabajo matemático que el G1. Al detallar los PRI por ítem tenemos algunos resultados interesantes; por ejemplo, los del G1 consideran que el entendimiento de los problemas es muy útil, y se ubican en un PRI más bajo el del G2; esto podría deberse al hecho de que el G1 participó en Prácticas de Laboratorio que requerían entender con detalle los problemas y el procedimiento que debían seguir.

Tabla 5.4. *Compromiso en el trabajo matemático.*

ÍTEM	CA-3	CA-4 G1	CA-4 G2	CA-4
	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)
Considero muy útil intentar entender los ejercicios y los problemas matemáticos (+).	3.786 (0.499)	4.000 (0.000)	3.750 (0.577)	3.852 (0.456)
Intento relacionar los nuevos conocimientos matemáticos con los que ya tenía (+).	3.857 (0.356)	3.727 (0.467)	3.875 (0.342)	3.815 (0.396)
Me gusta revisar todos los temas de Matemáticas, una vez terminada la clase (+).	3.071 (0.813)	2.545 (0.522)	2.938 (0.929)	2.778 (0.801)
Elaboro material de apoyo con notas Matemáticas (+).	2.857 (1.008)	2.727 (0.647)	3.438 (0.512)	3.148 (0.662)
Trato las ideas Matemáticas como unidades separadas en el momento de recordarlas (-).	2.607 (0.786)	2.636 (0.924)	2.562 (0.814)	2.593 (0.844)
No tomo apuntes de Matemáticas (-).	3.857 (0.525)	3.545 (0.688)	3.812 (0.544)	3.704 (0.609)
Usualmente no tengo tiempo para verificar mi trabajo en Matemáticas para detectar y corregir los errores (-).	3.107 (0.956)	2.909 (0.831)	3.250 (0.577)	3.111 (0.698)
Prefiero revisar el material de Matemáticas superficialmente (-).	3.393 (0.786)	3.727 (0.467)	3.375 (0.806)	3.519 (0.700)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.317 (0.482)	3.227 (0.581)	3.375 (0.456)	3.315 (0.480)

z(CA-3/CA4)= 0.016
z(G1/G2)= -1.060

La confianza y seguridad de los estudiantes en el trabajo con el ordenador la consideramos alta, tanto al inicio como al final del curso, con un significativo aumento en el PRI (ver tabla 5.5). Consideran que pueden dominar los procedimientos necesarios para trabajar con el ordenador; se sienten más seguros de los resultados y en caso de errores los pueden corregir. Todo esto evidencia una evolución en la actitud en relación a esta dimensión y que el trabajar con el ordenador no les resulta extraño; sin restar importancia a la influencia que puede tener en estos tiempos el ambiente computacional en que se desenvuelve el estudiante, el trabajo en el laboratorio con el software *DERIVE* pudo haber contribuido a este cambio.

Al relacionar los dos grupos en los resultados finales, se observa que el G2 evidencia mayor confianza y seguridad que el G1. Podría explicarse esta situación porque las prácticas desarrolladas por el G2 fueron más rutinarias que las del grupo G1. En este último grupo, el Programa de Utilidades (PU) utilizado en el tema de Integrales Definidas requería un trabajo más abierto que exigía una mayor participación del propio estudiante.

Tabla 5.5. *Confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador*

ÍTEM	CA-3	CA-4 G1	CA-4 G2	CA-4
	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)
Siento mucha confianza al usar un ordenador (+)	3.500 (0.509)	3.455 (0.820)	3.500 (0.632)	3.481 (0.700)
Puedo dominar los procedimientos que se requieren al trabajar con un ordenador (+)	3.393 (0.629)	3.273 (0.647)	3.625 (0.619)	3.481 (0.643)
Me siento más seguro de mis respuestas ayudándome con el ordenador (+)	3.250 (0.928)	3.273 (0.467)	3.437 (0.629)	3.593 (0.572)
En el caso de que tenga errores cuando trabajo con el ordenador estoy seguro de poder resolverlo (+)	3.321 (0.772)	3.182 (0.982)	3.500 (0.632)	3.370 (0.792)
Me siento en desventaja al tener que usar el ordenador (-)	3.714 (0.535)	3.273 (1.009)	3.875 (0.342)	3.630 (0.742)
Me siento nervioso cuando tengo que aprender nuevos procedimientos basados en el ordenador (-)	3.286 (0.854)	3.455 (0.688)	3.750 (0.577)	3.630 (0.629)
No confío en el ordenador para producir respuestas correctas (-)	3.500 (0.882)	3.455 (1.036)	3.750 (0.447)	3.630 (0.742)
Siento pánico si los errores se producen cuando estoy utilizando un programa para ordenadores (-)	3.107 (1.031)	3.091 (1.044)	3.313 (0.873)	3.222 (0.934)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.384 (0.187)	3.307 (0.137)	3.594 (0.188)	3.505 (0.150)
z(CA-3/CA4)= -2.671				
z(G1/G2)= -6.528				

La motivación del estudiante hacia el trabajo con el ordenador la consideramos alta, tanto al inicio como al final del curso, con un ligero aumento en el PRI (ver tabla 5.6). Los estudiantes consideran que el aprendizaje resulta agradable cuando se usa un ordenador; disfrutan probando nuevas ideas en éste y entienden a las personas que se concentran en actividades relacionadas con el ordenador. No es de extrañar estos resultados, por lo mencionado en la dimensión anterior; sólo resta decir que lo “novedoso” ha sido el uso del

DERIVE en actividades Matemáticas, que al parecer representa un elemento motivador en el trabajo con el ordenador.

En cuanto a los resultados del cuestionario final, no se observa gran diferencia entre los dos grupos, a pesar de la instrucción diferente que recibieron. Aparentemente, a nivel motivacional, el que los estudiantes cursaran todo el programa con una metodología o con parte de ésta produce similares efectos positivos en su motivación.

Tabla 5.6. *Motivación hacia el trabajo con el ordenador.*

ÍTEM	CA-3	CA-4 G1	CA-4 G2	CA-4
	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)
Usando un ordenador se hace más agradable el aprendizaje (+)	3.857 (0.356)	3.909 (0.302)	3.875 (0.342)	3.889 (0.320)
Me gusta la libertad para experimentar, esto lo proporciona el ordenador (+)	3.464 (0.838)	3.727 (0.647)	3.625 (0.806)	3.667 (0.734)
Paso largas horas trabajando con un ordenador para completar una tarea (+)	1.929 (0.979)	2.091 (1.136)	2.250 (1.065)	2.185 (1.075)
Disfruto probando nuevas ideas en un ordenador (+)	3.714 (0.460)	3.727 (0.467)	3.875 (0.342)	3.815 (0.396)
Evito usar un ordenador (-)	3.750 (0.585)	3.273 (1.104)	3.938 (0.250)	3.667 (0.784)
Mi libertad se disminuye al utilizar un ordenador (-)	3.714 (0.535)	3.727 (0.467)	3.562 (0.814)	3.630 (0.688)
El ordenador hace que sea mentalmente perezoso (-)	2.929 (0.940)	2.636 (1.120)	3.063 (0.772)	2.889 (0.934)
No entiendo cómo las actividades con el ordenador absorben a algunas personas (-)	3.179 (1.124)	3.182 (0.982)	3.375 (0.806)	3.296 (0.869)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.317 (0.645)	3.284 (0.636)	3.445 (0.565)	3.379 (0.580)

z(CA-3/CA4)= -0.378
z(G1/G2)= -1.001

Existe una alta interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores tanto al inicio y al final del curso, con un considerable aumento en los PRI (ver tabla 5.7). Consideran que no tienen dificultades en el momento de transferir información al ordenador y detallar los pasos que se siguen al resolver un problema matemático con el uso del ordenador; esto evidencia confianza y seguridad hacia el uso del ordenador en actividades Matemáticas. Tienden a notar los detalles matemáticos al usar el ordenador; asimismo, también valoran la ayuda que éste les proporciona cuando de trata de relacionar aspectos gráficos y numéricos; de aquí que los estudiantes se sientan motivados a usar ordenadores en el aprendizaje de las Matemáticas. Para ellos, usar un ordenador refuerza lo aprendido en Matemáticas por la abundancia de ejemplos, lo que denota compromiso, tanto hacia el aprendizaje de las Matemáticas, como hacia el uso del ordenador. Podemos decir que el uso de los ordenadores influye en las actitudes positivas de los estudiantes hacia las Matemáticas; además, debido al aumento observado en los PRI, se podría conjeturar que específicamente el uso de *DERIVE* contribuye a estos cambios.

En relación con la comparación de los grupos, la poca diferencia en los PRI, nos conduce de nuevo a que una instrucción, aparentemente, diferente, no es determinante.

Tabla 5.7. *Interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores.*

ÍTEM	CA-3	CA-4 G1	CA-4 G2	CA-4
	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)	PRI (σ)
El ordenador refuerza lo que aprendo en Matemáticas por la abundancia de ejemplos (+).	3.536 (0.744)	3.818 (0.405)	3.750 (0.447)	3.778 (0.424)
Cuando leo una pantalla del ordenador tiendo a notar los detalles matemáticos (+)	2.857 (1.008)	3.364 (0.674)	2.813 (0.891)	3.037 (0.898)
Realizo una revisión de lo hecho en Matemáticas con el ordenador, poco después de cada sesión (+)	2.536 (1.138)	2.909 (0.701)	3.063 (1.063)	3.000 (0.920)
La computadora me ayuda a relacionar aspectos gráficos y numéricos (+)	3.821 (0.390)	4.000 (0.000)	3.875 (0.342)	3.926 (0.267)
Encuentro dificultades en el momento de transferir información a la pantalla del ordenador (-)	3.036 (0.962)	3.000 (1.000)	3.000 (1.950)	3.000 (1.038)
No logro detallar los pasos utilizados en la solución de un problema matemático, resuelto en el ordenador (-)	3.107 (0.916)	3.364 (0.505)	3.313 (0.793)	3.333 (0.679)
Cuando trabajo con el ordenador me distraigo con las instrucciones del teclado (-)	3.250 (0.844)	3.364 (0.809)	3.438 (0.727)	3.407 (0.747)
Raramente repaso el material de una sesión con el ordenador poco después que termina (-)	2.786 (0.995)	3.000 (1.000)	3.063 (0.929)	3.037 (0.940)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.116 (0.416)	3.352 (0.393)	3.289 (0.376)	3.314 (0.368)

z(CA-3/CA4)= -1.886
z(G1/G2)= 0.613

Pasemos ahora a analizar el segundo instrumento, relacionado con el aprendizaje con *DERIVE*, que como ya indicamos en la metodología, fue utilizado únicamente al finalizar el curso. Si tenemos en cuenta los promedios de respuesta por ítem de los estudiantes de los dos grupos, afirmamos, que en términos generales, poseen una alta seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE* (ver tabla 5.8) observándose una pequeña diferencia en los PRI; esto indica que el uso de *DERIVE* influye en las actitudes de los estudiantes. Al observar los resultados por ítem, se advierte, por ejemplo, que el G1 tiene un PRI mayor que el G2, en cuanto a que entienden mejor las clases en las que se ha utilizado *DERIVE* que las explicadas en la pizarra y pueden obtener mejores visualizaciones de las gráficas de funciones; esta diferencia podría ser, como se ha mencionado en párrafos anteriores, producto de los diferentes tipos de instrucción llevados a cabo en ambos grupos.

Algunos de nuestros resultados coinciden con los presentados por Artigue y Lagrange (1997) en cuanto a seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE.* Se tiene que: el G1 considera en general que con *DERIVE* no se aprende a calcular porque él lo hace todo, en tanto que el G2 es más partidario de una opinión contraria; esto puede ser debido a que el G1 manejó programas de utilidades más elaborados que los del G2, los cuales facilitaban la resolución de los problemas.

Tienden a coincidir ambas investigaciones en cuanto a que al introducir correctamente los datos en *DERIVE* se puede estar seguro de los resultados; esto evidencia que los estudiantes son conscientes de que deben interactuar con el software de manera razonada y tomar en cuenta el lenguaje que éste utiliza.

Tabla 5.8. *Seguridad y confianza en el trabajo con DERIVE.*

ÍTEM	G1 PRI (σ)	G2 PRI (σ)
Cuando uso *DERIVE,* me siento más seguro de los resultados (+)	3.545 (0.688)	3.562 (0.629)
Entiendo mejor las clases utilizando *DERIVE* que explicadas en la pizarra (+)	3.364 (0.809)	2.750 (0.856)
Cuando visualizo la gráfica de una función hecha con *DERIVE* la entiendo mejor que dibujada en la Pizarra (+)	3.909 (0.302)	3.500 (0816)
Si se introducen correctamente los datos en *DERIVE* se puede estar seguro de los resultados (+)	4.000 (0.000)	3.812 (0.403)
Trabajar con *DERIVE* no sirve para nada, ya que en los exámenes es necesario escribir los cálculos y las demostraciones (-)	3.636 (0.505)	3.857 (0.342)
DERIVE lo complica todo y no ayuda a aprender Matemáticas (-)	3.636 (0.674)	3.813 (0.403)
Con *DERIVE*, no hay que aprender a calcular, él lo hace todo (-)	2.818 (1.328)	3.188 (0.834)
El procedimiento que se utiliza en *DERIVE* no lo entiendo (-)	3.636 (0.505)	3.500 (0.816)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.568 (0.363)	3.497 (0.375)

z(G1/G2)= 0.719

En relación con la segunda dimensión, los estudiantes, en general, están altamente motivados hacia el trabajo con *DERIVE* (ver tabla 5.9), con una pequeña variación en los PRI. Esto coincide con los resultados obtenidos al analizar las dimensiones análogas que aparecen en el primer cuestionario. Con esto corroboramos que *DERIVE* proporciona un entorno que propende a generar actitudes positivas en los estudiantes. Los estudiantes consideran, por ejemplo, que *DERIVE* les estimula la imaginación y la creatividad; les ayuda a entender y a ver de otra manera las Matemáticas.

En cuanto a la motivación hacia el trabajo con *DERIVE* se tiene que: los estudiantes encuestados tienden a considerar que *DERIVE* les motiva a hacer Matemáticas y les ayuda a entenderlas; esto podría evidenciar que el trabajo combinado de clases habituales con Prácticas de Laboratorio utilizando *DERIVE*, siguiendo el módulo instruccional específico, contribuye a motivar de alguna manera al estudiante a mejorar su actitud hacia las Matemáticas.

Tabla 5.9. *Motivación hacia el trabajo con DERIVE*

ÍTEM	G1	G2
	PRI (σ)	PRI (σ)
DERIVE me estimula la imaginación y creatividad (+).	3.636 (0.505)	3.625 (0.500)
Con *DERIVE*, da deseos de hacer Matemática (+).	3.364 (0.505)	3.500 (0.516)
DERIVE hace ver la Matemática de otra manera (+).	3.727 (0.467)	3.625 (0.500)
DERIVE ayuda a entender las Matemáticas (+).	3.818 (0.405)	3.687 (0.479)
Trabajar con *DERIVE* es más aburrido que oír una clase de Matemáticas (-).	3.818 (0.401)	3.813 (0.750)
Utilizar *DERIVE* no ayuda a comprender las Matemáticas (-).	3.818 (0.404)	3.688 (0.479)
Utilizar *DERIVE* en clase de Matemáticas no sirve para aprender a usar el ordenador (-).	3.727 (0.467)	3.625 (0.500)
Utilizar *DERIVE* en clase de Matemáticas es perder el tiempo (-).	3.909 (0.302)	3.875 (0.500)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.727 (0.168)	3.679 (0.117)

z(G1/G2)= 1.24

Los estudiantes se sienten, en general, altamente comprometidos con el trabajo con *DERIVE* (ver tabla 5.10) aunque existe una pequeña coincidencia de estos resultados con los obtenidos para las dimensiones análogas que se emplearon en el Estudio Exploratorio.

En relación con la dimensión compromiso con el trabajo con *DERIVE* se tiene que: *DERIVE* les resulta útil para resolver problemas y les parece relevante las posibilidades de trabajar simultáneamente en el aspecto algebraico-gráfico-numérico que les brinda el software. Esto evidencia que los estudiantes reconocen el carácter utilitario del software. La interacción algebraico-gráfico-numérico que ofrece el software es un aspecto poco logrado en las clases de tiza y pizarra, que puede producir un compromiso de su uso cuando el estudiante se plantea alternativas de resolución de algún problema.

Tabla 5.10. *Compromiso con el trabajo con DERIVE.*

ÍTEM	G1	G2
	PRI (σ)	PRI (σ)
Me gustaría que en las clases de Matemáticas se usara *DERIVE* (+)	3.727 (0.467)	3.938 (0.250)
Me gusta utilizar *DERIVE* en clases de Matemáticas porque se diferencian de los cursos habituales (+)	3.636 (0.674)	3.750 (0.447)
Cuando uno usa *DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, porque de otra manera se pierde mucho tiempo (+)	3.545 (0.522)	2.813 (1.109)
DERIVE esta bien porque uno puede trabajar al mismo tiempo en las ecuaciones y gráficos (+)	3.818 (0.405)	3.813 (0.403)
Si me proponen otra clase utilizando *DERIVE* no me gustaría participar (-)	3.636 (0.924)	3.813 (0.544)
Utilizar *DERIVE* en clase de Matemáticas no ahorra tiempo (-)	3.727 (0.467)	3.687 (0.479)
Cuando uso *DERIVE* no entiendo los conceptos matemáticos (-)	3.636 (0.505)	3.750 (0.447)
Es inútil tratar de resolver los problemas utilizando *DERIVE* (-)	3.545 (0.688)	3.687 (0.602)
PRI EN LA DIMENSIÓN (σ_{PRI})	3.658 (0.09)	3.656 (0.350)
	z(G1/G2)= 0.029	

5.2.3.2. Las entrevistas

Considerando los resultados de la aplicación de los dos cuestionarios sobre actitudes, presentamos a continuación el análisis e interpretación de la entrevista aplicada a cuatro estudiantes (dos de cada grupo). Se reportan las respuestas más significativas.

Dimensión: *Seguridad y confianza en el trabajo matemático.*

1. ¿Te preocupa tener que aprender temas difíciles en Matemáticas?
   G1E1. No, porque es interesante saber más sobre los temas que me dan.
   G1E2. No, porque los temas difíciles me ayudan a plantearme otros, que en un futuro sé que los utilizaré en mi carrera.
   G2E1. Sí, porque me siento estimulado por los temas que no entiendo, me preocupo y trato de aprendérmelos.
   G2E2. No, porque parece lógico que a medida que se avanza, las dificultades deben ser mayores.

Comentarios: Los estudiantes dan respuestas homogéneas que reflejan estar dispuestos a investigar, no conformarse con lo que se les da; ven en las Matemáticas un reto, se esfuerzan por dominar los contenidos y lo disfrutan.

Características básicas: Seguros, confían en sus capacidades, tienen una autoestima alta, actitud positiva para aprender y realizar investigaciones.

2. ¿Te preocupas más por Matemáticas que por otra materia?
   G1E1. Sí, porque se necesita practicar más y los contenidos me resultan más extensos.
   G1E2. Sí, porque todas las materias dependen de ella.
   G2E1. No, para mi todas las materias son importantes, aunque a Matemáticas le dedico más tiempo de estudio.
   G2E2. Sí, porque Matemáticas priva otras materias.

Comentarios: En general se nota que consideran las Matemáticas como una parte fundamental dentro de su formación y en comparación con el resto de las materias. De las respuestas de **G1E1** y **G2E1** se deduce que debido a la dedicación que requieren las Matemáticas el estudiante le ha de dedicar mayor esfuerzo. Las respuestas de **G1E2** y **G2E2** nos llevan a pensar que los estudiantes consideran las Matemáticas como una materia básica con aplicaciones presentes y futuras en las demás asignaturas.

Característica Básica: Valoración alta de las Matemáticas como materia básica. Suponer dedicación de tiempo de estudio en comparación con otras materias.

De las respuestas anteriores se tiene que, en general, los estudiantes manifiestan confianza y seguridad en el trabajo matemático; con una autoestima alta, reconociendo la importancia de las Matemáticas dentro del conjunto de materias que cursan y dedicándole el tiempo requerido para su aprendizaje. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

Dimensión: *Motivación hacia el trabajo matemático.*

3. ¿Disfrutas haciendo actividades relacionadas con Matemáticas?
   G1E1. Sí, porque Matemáticas la puedo estudiar oyendo música o hablando con otras personas, en cambio las otras materias las tengo que estudiar en silencio.
   G1E2. Sí, porque tiene aplicaciones en la vida diaria, y uno se pone a ver "si hago esto, se aplica tal cosa".
   G2E1. Sí, me gusta bastante, los ejercicios de aplicación más que todo; le veo el sentido real a los ejercicios.
   G2E2. Sí, porque es la base de los temas que estudio.

Comentarios: Los estudiantes al compartir experiencias con otros y al encontrarle aplicaciones cotidianas, disfrutan realizando actividades Matemáticas. Se sienten motivados al trabajo en grupo.

Características Básicas: Estímulo por el trabajo en grupo; valoran las aplicaciones cotidianas que encuentran en Matemáticas

4. ¿Dedicas gran parte de tu tiempo a actividades Matemáticas?
   G1E1. Sí, la mayoría del tiempo de estudio se la dedico a Matemáticas.
   G1E2. Sí, yo diría que un 70% del tiempo se la dedico a Matemáticas.
   G2E1. No, tengo estipulado que por cada dos horas de clases, estudio tres horas.
   G2E2. No, lo necesario; aunque pienso que hay que estudiar un poco todos los días.

Comentarios: Por las respuestas de los estudiantes se puede pensar dos cosas, le dedican mayor tiempo de estudio a las Matemáticas ya sea por la exigencia de la materia o porque les agrada estudiarla; en cualquiera de los casos se sienten motivados al estudio de ellas.

Característica Básica: La mayoría de tiempo de estudio se lo dedica al estudio de las Matemáticas.

De las respuestas anteriores se tiene que, en general, los estudiantes manifiestan motivación hacia el trabajo matemático; se sienten estimulados por el trabajo en grupo, valoran las aplicaciones cotidianas de las Matemáticas y le dedican gran parte de su tiempo al estudio de las Matemáticas. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

Dimensión: *Compromiso con las actividades Matemáticas.*

5. ¿Repasas lo dado en clases de Matemáticas el mismo día?

G1E1. No, para la primera prueba estudié una semana antes y para la última prueba dos días antes. No me hace falta estudiar un mes antes para una prueba.

G1E2. No, quizás dos o tres días después, porque la mecánica que tengo me dice que si estoy atento en clase debo comprender lo dado, analizarlo en ese momento y al practicar detallo lo que no haya podido captar.

G2E1. Sí, porque de lo contrario se me acumula mucho contenido a la hora de estudiar para la prueba. Considero que es imposible cubrir todo un tema en poco tiempo; no es decir "yo estudié todo" y al final estudié superficialmente y no sé nada.

G2E2. Sí, estudio un poco cada día.

Comentarios: La diferencia entre los estudiantes **G1E1** y **G1E2** y **G2E1** y **G2E2** se centra en que en los primeros su estudio lo realizan en tiempo muy cercano a las pruebas, evidenciando un compromiso de tratar de aprobar el examen; en cambio los segundos lo realizan de una manera continua, de lo cual se deduce que tienen disciplina de estudio.

Características Básicas: Hábitos de estudio diferenciado, uno ocasional y otro continuo.

6. Cuando tratas las ideas Matemáticas ¿las recuerdas como unidades separadas o como un todo?

G1E1. Como un todo, ya que lo que vi. en bachillerato lo estoy aplicando ahora.

G1E2. Como un todo, si bien cada unidad va orientada hacia algo específico, siempre lleva un procedimiento dado en unidades anteriores.

G2E1. Considero que debe ser como un todo, porque en Matemáticas se relacionan muchos temas; por ejemplo, en integrales uno debe relacionarlo con derivadas y con límite.

G2E2. Yo creo que como un todo, siempre hay un detallito que aprendí antes que me sirve para usarlo después.

Comentarios: Las respuestas son homogéneas. Los estudiantes encuentran la secuencia de los conocimientos que ellos poseen con los que están recibiendo. Ven las ideas Matemáticas conectadas unas a otras, con lo que se sienten comprometidos a seguir el desarrollo de éstas para poderlas aplicar en temas posteriores.

Característica básica: Las ideas Matemáticas son percibidas de manera secuencial.

De las respuestas anteriores se tiene que, en general, los estudiantes manifiestan compromiso con las actividades Matemáticas. Los estudiantes tienen hábitos de estudio diferenciados en ocasional y continuo, lo cual denota un compromiso por aprobar una prueba o una disciplina de estudio. Perciben las ideas Matemáticas de manera secuencial y como un todo.

Dimensión: *Confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador.*

7. ¿Te sientes más seguro de las respuestas si te ayudas con un ordenador?
   G1E1. Sí, porque si mi respuesta coincide con la del ordenador, estoy seguro de que es correcta.
   G1E2. Sí, porque me ayuda a comprender de una manera gráfica o de otra manera el mismo proceso.
   G2E1. Sí, porque para mi es como una herramienta para resolver los problemas.
   G2E2. Sí, porque el ordenador me ayuda a verificar si el procedimiento y el resultado está bien. Si introduzco la información en el ordenador y concuerda con lo que hice, esta bien.

Comentarios: Los estudiantes utilizan el ordenador como una herramienta de chequeo. El ordenador refuerza la confianza y seguridad al mostrarle una respuesta. No consideran que el ordenador disminuye su capacidad sino que la complementa.

Característica básica: El ordenador como una herramienta de chequeo.

8. ¿Sientes pánico si los errores se producen cuando estás utilizando un programa para ordenadores?
   G1E1. Si, Porque cuando escribo en el ordenador y tengo un error “me pongo nerviosa”. Cuando eso sucede consulta al profesor y trato de solucionarlo.
   G1E2. No, simplemente trato de encontrar cuál fue el error que causó el error; analizo el proceso de acuerdo a lo que conozco en teoría.
   G2E1. No, porque si eso sucede, utilizo mis conocimientos para resolver el problema; trataría de resolverlo en el papel.
   G2E2. A veces si, cuando al ordenador le pasa algo, llamo a mi padre. De repente es una “tontería” pero como uno no sabe nada, el ordenador no te va a decir “hiciste mal esto”.

Comentarios: Los errores les producen inseguridad temporal. Para resolver los problemas consultan a alguien al que consideran experto o se apoyan en sus conocimientos; después vuelven e insisten en el problema.

Característica básica: Los ordenadores le producen inseguridad temporal.

De las respuestas anteriores se tiene que, en general, los estudiantes manifiestan confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador. El ordenador lo usan como herramienta de chequeo. Al enfrentarse con un error consultan a un experto o tratan de resolverlo con sus conocimientos. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

Dimensión: *Motivación hacia el trabajo con el ordenador.*

9. ¿Pasas mucho tiempo trabajando en el ordenador para completar alguna tarea?
   G1E1. Para completar tareas que me mandan no, pero si paso mucho tiempo en el ordenador. Como cualquier muchacho "jugando".
   G1E2. No, porque me desenvuelvo bastante bien con el ordenador y no tengo mayor dificultad con su funcionamiento.
   G2E1. Sí, cuando me asignan trabajos.
   G2E2. No, lo necesario.

Comentarios: Existen algunas diferencias, en cuanto a que **G1E1** se sentirá motivado si la tarea se asemeja a un juego; **G1E2,** su alto autoconcepto lo lleva a pensar que le resultará fácil realizar la tarea, **G1E1** y **G2E2** realizarán la tarea; cuando sea necesario. Cada uno se siente motivado lo que cambia es el tipo de estímulo.

Característica Básica: Motivación condicionada al tipo de estímulo.

10. ¿Consideras que los ordenadores te hacen mentalmente perezoso?
    G1E1. No, uno tiene que ser ágil para trabajar con el ordenador. Más bien se mueve el cuerpo.
    G1E2. Yo creo que si, a mi no me gusta meter el ejercicio en el ordenador y que me dé el resultado, prefiero hacerlo y saber de dónde salen las "cosas".
    G2E1. No, porque cuando el ordenador da otro resultado, digo "oye, ahora que habrá pasado" entonces veo la gráfica y me pongo hacer otra vez el ejercicio.
    G2E2. Depende de lo que haga, siempre es mejor seguir el proceso, no tomar el ordenador como un recurso indispensable, sino como algo que me ayuda pero "hasta allí".

Comentarios: Las opiniones están divididas; **G1E1** y **G2E1** consideran un reto el trabajar con el ordenador; **G1E2** y **G2E2** prefieren seguir ellos mismos el proceso y dejar el uso del ordenador como un apoyo. La motivación es más evidente en algunos estudiantes que en otros en cuanto a la opinión que tienen referente a su desarrollo mental.

Característica básica: Diferenciación en cuanto a la opinión del desarrollo mental, para unos resulta un reto el uso del ordenador para otros es un apoyo.

De las respuestas anteriores se tiene que la motivación hacia el trabajo con el ordenador está condicionada por el tipo de estímulo. Algunos estudiantes se sienten motivados por el reto que representa el trabajar con el ordenador y otros prefieren seguir ellos mismos el proceso.

Dimensión: *Interacción con las Matemáticas y los ordenadores.*

11. Al trabajar con un ordenador ¿tiendes a notar los detalles matemáticos?
    G1E1. Sí, un ejemplo son las gráficas, la precisión que ofrece y la variedad que uno puede tener en un mismo sistema.
    G1E1. Sí, porque los procesos tienen cierta fragilidad, si no se cumple de una manera precisa es más factible cometer un error.
    G2E1. En parte sí, en una gráfica, uno detalla "oye la gráfica no es así como pensaba, sino que es así".
    G2E2. No, al ordenador le introduces la información y él te da un resultado, no te dice el procedimiento.

Comentarios: Los estudiantes **G1E1** y **G2E1** les impresionan el aspecto gráfico que le ofrece el ordenador. La respuesta dada por **G1E2** considera el trabajo con el ordenador como un proceso bien estructurado, en cambio **G2E2** no logra notar el proceso que se sigue en el trabajo con ordenador.

Característica básica: La interacción entre las Matemáticas y el ordenador se facilita al tomar en cuenta el aspecto gráfico de un problema. Un estudiante considera que el trabajo con el ordenador involucra proceso y otro, simple determinación de resultados.

12. Cuando haces alguna actividad de Matemáticas en el ordenador ¿la revisas una vez terminada?
    G1E1. No, porque sé que lo que hice está bien.
    G1E2. Siempre reviso todos los trabajos, sean de Matemáticas o de otras materias.
    G2E1. Si lo reviso, estoy seguro, pero siempre es bueno revisar para ver si uno captó.
    G2E2. Si, porque siempre trato de seguir el proceso y verificar si esta bien.

Comentarios: La interacción se nota al cotejar el proceso que seguiría el estudiante con el que le muestra el ordenador.

Característica básica: Comparación de procesos con o sin ordenador.

De las respuestas anteriores se tiene que la interacción con las Matemáticas y los ordenadores está condicionada por el aspecto gráfico que brinda el ordenador; además el seguir y el cotejar procesos resulta una forma de interacción.

Dimensión: *Seguridad y confianza en el trabajo con DERIVE.*

13. ¿Entiendes mejor las clases utilizando *DERIVE* que explicadas en la pizarra?
    G1E1. *DERIVE* está bien, pero en la pizarra un ejercicio se resuelve completo, eso es lo que uno tiene que hacer en una prueba.
    G1E2. A veces comprendo mejor las clases dadas en la pizarra que con *DERIVE.* Pero hay situaciones en la que *DERIVE* me ayuda a comprender mejor lo dado en clase. Por ejemplo, en el tema de áreas bajo la curva, como se iba aproximando el área utilizando rectángulos.
    G2E1. Con *DERIVE*, porque en la pizarra es algo común, en cambio con el ordenador se hace más práctica las clases. Se pueden ve el procedimiento, el resultado, se hace más dinámica la clase.
    G2E2. Se ve más claro con *DERIVE,* es como una herramienta. La ventaja con *DERIVE* es que puedo ver cómo se conforma una gráfica; en clase aprendo el procedimiento.

Comentarios: El estudiante **G1E1** valora la importancia que tiene *DERIVE*, no obstante considera que el esquema de resolución de problemas que se sigue en las pruebas se asemeja más al seguido en clase. El resto de los estudiantes valoran lo complementario que resulta la clase formal y la clase con *DERIVE*, además, según la naturaleza del tema, tendría más adecuación un ambiente que otro.

Característica básica: El esquema de las pruebas se asemeja más al de una clase formal que a la del uso de un software. La clase habitual y el uso de *DERIVE* se complementan.

14. ¿Consideran que con *DERIVE* no se aprende a calcular?
    G1E1. Sí se aprende a calcular, por ejemplo: si quiero calcular una derivada, *DERIVE* la calcula, pero también lo puedo resolver utilizando límite.
    G1E2. Sí se aprende a calcular, lo que sucede es que se debe conocer el lenguaje de programación que uso en *DERIVE*.
    G2E1. Yo creo que sí, *DERIVE* nos da el resultado, pero el procedimiento lo tenemos que hacer nosotros.
    G2E2. Eso es relativo, ya que necesito tener conocimientos para utilizar *DERIVE*.

Comentarios: Se nota que los estudiantes consideran a *DERIVE* como un soporte para la resolución de problemas. Valoran la necesidad de conocer su lenguaje para poderlo aplicar.

Característica básica: *DERIVE* como soporte para la resolución de problemas.

De las respuestas anteriores se tiene que con un esquema diferente de evaluación que incluya el uso del ordenador, y particularmente el uso de *DERIVE,* se pudiera medir mejor el efecto del software en la seguridad y confianza.

Al considerar a *DERIVE* como un soporte para la resolución de problemas se puede deducir que *DERIVE* le proporciona confianza y seguridad. Es de hacer notar que el G1 considera que el trabajar con *DERIVE* involucra seguir procedimientos y conocer el lenguaje aplicado, en cambio el G2 lo ve como herramienta para encontrar solamente resultados.

Dimensión: *Motivación por el trabajo con DERIVE.*

15. ¿Consideras que *DERIVE* te estimula la creatividad y la imaginación?
    G1E1. Sí, porque me ayuda a construir diferentes gráficas, en donde puedes hacer alejamientos, acercamientos y detallar los puntos que no se visualizan cuando hago un ejercicio en el papel.
    G1E2. Claro que sí, por ejemplo: uno se imagina una gráfica, cuando uso *DERIVE* me doy cuenta de los errores que cometo o de lo acertado que estaba.
    G2E1. Sí, porque puedo ingresar la información de un problema matemático en *DERIVE* y tener la gráfica y el resultado.
    G2E2. Sí, sobre todo en cuanto a gráficas.

Comentarios: Los estudiantes se sienten motivados al ver que pueden realizar actividades que en la clase habitual no puede hacer. Valoran lo dinámico que resulta trabajar con *DERIVE* y la capacidad de chequeo que les proporciona. Lo interesante es que pasan de la imagen mental que tienen a la comparación con lo que visualizan en la pantalla, sin tener que perder tiempo y con gran certeza. Esto sirve de elemento motivante para que el estudiante ejercite su capacidad imaginativa y creativa. Valoran la capacidad gráfica que tiene *DERIVE*, motivándolos a tener en cuenta el marco gráfico como una manera de resolución de problemas.

Características básicas: Ejecución de actividades con *DERIVE* diferentes a las clases habituales. Las clases con *DERIVE* son dinámicas. Estímulo de la imaginación y la creatividad.

16. Cuando trabajas con *DERIVE* ¿te da deseos de hacer Matemáticas?
    G1E1. Sí porque se pueden crear nuevas aplicaciones, bajo ciertas condiciones del lenguaje del programa.
    G1E2. Sí, porque me sirve de estímulo al pensar que algo que tardaría mucho tiempo en hacer, *DERIVE* lo hace más rápido.
    G2E1. Sí, porque con *DERIVE* se puede verificar los resultados.
    G2E2. Sí, me parece muy práctico, los resultados son muy inmediatos y me evita el tedioso trabajo de calcularlos.

Comentarios: Los estudiantes del G1 se sienten motivados ya que pueden producir sus propios conocimientos. Los estudiantes en general se sienten motivados por la rapidez de respuesta que le ofrece *DERIVE*. Los estudiantes del G2 valoran la capacidad de chequeo que le ofrece *DERIVE.*

Característica básica: *DERIVE* como generador de conocimientos. Con *DERIVE* se resuelven los problemas con mayor rapidez.

De las respuestas anteriores se tiene que los estudiantes se sienten motivados por el trabajo con *DERIVE,* ya que las actividades que se realizan se diferencian de las clases habituales. Les estimula la imaginación y la creatividad. Los estudiantes del G1 opinan que pueden producir sus propios conocimientos, en cambio los del G2 utilizan *DERIVE* para chequear y hallar resultados a los problemas.

Dimensión*: Compromiso con el trabajo con DERIVE.*

17. ¿Consideras que cuando usas *DERIVE* hay que organizar bien el trabajo, porque de otra manera se pierde mucho tiempo?
    G1E2. Sí, ya que éste tiene un lenguaje de programación para definir las funciones.
    G2E1. Sí, en *DERIVE* hay que organizar las ideas para poder llegar rápidamente al resultado.

Comentarios: El lenguaje utilizado en *DERIVE* compromete al estudiante a realizar procedimientos bien estructurados y organizados.

Característica básica: *DERIVE* contribuye a organizar procesos.

18. ¿Consideras que es inútil tratar de resolver problemas utilizando *DERIVE*?
    G1E1. Todo lo contrario, pienso que es muy útil porque me ayuda a visualizar mejor el ejercicio.
    G1E2. No, *DERIVE* y yo, somos como Don Quijote y Sancho Panza, es decir, como dos compañeros. Cuando tengo dudas, *DERIVE* me puede orientar.
    G2E1. No, porque *DERIVE* da una respuesta inmediata a los problemas y así no tengo que perder tiempo en los detalles.
    G2E2. Es muy útil para hallar un resultado, pero uno tiene que seguir el proceso.

Comentarios: Los estudiantes del G1 opinan que *DERIVE* les ayuda a crear procesos, en cambio para el G2 *DERIVE* es generador de respuestas desvalorizando el proceso.

Característica básica: Opinión diferenciada para unos *DERIVE* fomenta procesos y para otros sólo genera respuestas.

Comentarios: De las respuestas anteriores se tiene que en general *DERIVE* contribuye a estructurar y organizar procedimientos; no obstante, es más notoria la opinión del G1 en cuanto a la importancia que le dan al proceso que en el G2. Así como también se evidencia mayor compromiso por el trabajo con *DERIVE* en G1 que en G2.

5.2.3.3. Los estados de opinión de los estudiantes sobre las Prácticas de Laboratorio

Con la finalidad de indagar sobre la actitud de los estudiantes hacia el trabajo en el laboratorio y uso de *DERIVE* en cuanto a las dimensiones seguridad y confianza, motivación y compromiso, se les pidió que dieran su opinión en cuanto a las actividades desarrolladas en el laboratorio, al diseño de la práctica, al contenido expuesto al estilo de la clase; además que mencionaran las ventajas y desventajas a esta manera de enseñanza. Se escribe entre llaves el número de práctica y el número del equipo que realizó el comentario.

A continuación pasamos a detallar las respuestas dadas por los estudiantes

Dimensión: *Seguridad y confianza en el trabajo con DERIVE.*

<u>Las actividades de laboratorio</u>

- {Pr 1 (E 10)} Son muy interesantes ya que descubrimos que los procesos matemáticos no solamente los podemos hacer con calculadora o desarrollarlos a mano.
- {Pr 3 (E 3)} Creemos que son muy buenas porque gracias a ellas podemos comprobar los que nos dio en clases de teoría.
- {Pr 4 (E 9)} Es una buena opción que nos permite realizar de manera más práctica los cálculos.

<u>El diseño de la práctica</u>

- {Pr 1 (E 3)} Está elaborada de una manera sencilla que cumpla con los requerimientos del alumno.
- {Pr 4 (E 4)} Las prácticas tienen un diseño muy bueno, ya que permite que cualquier persona sea capaz de utilizarla debido a que no son complicadas.

<u>El contenido expuesto</u>

- {Pr 1 (E 10)} Es muy interesante ya que los ejercicios van aumentando gradualmente de dificultad.
- {Pr 4 (E 15)} Hace de lo complicado algo práctico y sencillo.
- {Pr 5 (E 4)} Es muy práctico, porque obtenemos las áreas con facilidad y gran precisión.
- {Pr 5 (E 5)} El contenido fue el mismo visto teóricamente y, por lo tanto, se hizo fácil manejar dicho contenido.

<u>El estilo de la clase</u>

- {Pr 4 (E 16)} Es mucho más fácil entender el cálculo así.
- {Pr 5 (E 2)} Se trabaja mucho más rápido con *DERIVE* que hacerlo sin el programa. Facilita la comprensión.
- {Pr 1 (E 10)} *DERIVE* simplifica el trabajo del alumno al realizar procesos matemáticos simples, obteniendo resultados inmediatos.

Ventajas y desventajas

- {Pr 7 (E 1)} Ventaja. Es que hay gráficas con una precisión tal que haciéndolas manualmente no se podría lograr.
- {Pr 1 (E 8)} Ventaja. Una manera más práctica de aprender, sencilla, gráfica y directa.
- {Pr 2 (E 2)} En la actualidad trabajar el cálculo sin una computadora es algo prehistórico. La computadora te ofrece vistas rápidas de cosas que tardarían mucho sin ellas.
- {Pr 4 (E 16)} Más ventajas que desventajas, ya que el método le facilita al alumno la comprensión de la materia.

De lo anterior se deduce que los estudiantes reconocen que pueden seguir el proceso de resolución de situaciones de una manera sencilla y con rapidez de respuesta; logran conectar lo visto en clases habituales con lo dado en las prácticas; reconocen el poder de visualización que les brinda el software y su capacidad gráfica. Estos comentarios nos lleva a pensar que los estudiantes poseen confianza y seguridad en el trabajo tanto de laboratorio con del uso de *DERIVE.*

Dimensión: *Motivación por el trabajo con DERIVE.*

Las actividades de laboratorio

- {Pr 4 (E 4)} Por medio de los ejercicios se emplean los conocimientos obtenidos en clase.
- {Pr 4 (E 8)} Nos permite aclarar dudas.
- {Pr 1 (E 2)} Son muy didácticas y nos ofrecen una herramienta para obtener un mejor avance matemático a la hora de estudiar, sin procedimientos fastidiosos y con resultados inmediatos.
- {Pr 1 (E 12)} Estas actividades fueron útiles para obtener conocimientos sobre el programa *DERIVE*.
- {Pr 1 (E 12)} Estas actividades fueron útiles para obtener conocimientos sobre el programa *DERIVE*.
- {Pr 3 (E 1)} El programa es muy eficiente y permite tener una idea más amplia sobre el tema.
- {Pr 3 (E 14)} Son muy interesantes, pues es una forma fácil, rápida y dinámica de aprender cálculo por computadora.
- {Pr 4 (E 4)} Estas actividades son muy buenas ya que nos permiten estudiar los mismos contenidos pero de una manera diferente y muy amena.
- {Pr 6 (E 2)} Son muy interesantes. Es bueno ver el desarrollo analítico de un ejercicio en conjunto con sus gráficas.
- {Pr 6 (E 7)} Es agradable, entretenido y nada monótono.

El diseño de la práctica

- {Pr 1(E 4)} Nos gusta mucho, ya que están contenidas paso a paso las actividades a realizar, logrando así que estas prácticas sean de fácil acceso para el estudiante.

El contenido expuesto

- {Pr 2 (E 2)} Aprendimos unas nuevas gráficas.
- {Pr 5 (E 6)} Es muy interesante ya que es útil al momento de estudiar.
- {Pr 6 (E 4)} Es bastante interesante, podemos observar lo que sucede con una función cuando se grafica. Calculamos el área en forma rápida y precisa.
- {Pr 4 (E 2)} Las gráficas ayudan a visualizar los resultados, lo hacen más palpables.

El estilo de la clase

- {Pr 1 (E 3)} Es dinámica y permite al alumno desarrollar y poner en práctica habitualmente para el manejo de este tipo de programas.
- {Pr 1 (E 9)} Es una clase muy interesante y dinámica. Nos gusta porque nunca habíamos trabajado en una práctica con computadora.
- {Pr 1 (E 10)} Es agradable, ya que se puede enfocar de una manera distinta la materia, adquiriendo el aprendizaje de una manera práctica.

- {Pr 3 (E 9)} Es muy agradable el método de estudio, se hace la actividad de manera diferente a la tradicional.
- {Pr 4 (E 16)} Es una clase muy amena, bastante ilustrada y poco estresante.

Ventajas y desventajas

- {Pr 1 (E 9)} Aprendimos de una forma más fácil a manejar la computadora.
- {Pr 3 (E 9)} Es agradable; se aprende a trabajar en equipo. Se sale de lo tradicional. Desventaja: Se hace muy mecánico el trabajo; nos limita el pensamiento, ya que todo lo hace el computador.
- {Pr 3 (E 9)} Es muy bueno ya que es interactivo, lo cual motiva al alumno a estudiar.

De lo anterior se tiene que: los estudiantes opinan que las actividades de laboratorio les ayuda a aclarar las dudas de lo hecho en la clase habitual; las actividades son agradables, dinámicas, interactivas y prácticas; pueden seguir los procesos de varias maneras; reconocen la capacidad de visualización del *DERIVE;* son partícipes de la generación de su aprendizaje y las actividades son diferentes a las tradicionales. Todo esto muestra que a los estudiantes les motiva el trabajo de laboratorio y el uso de *DERIVE.*

Dimensión: *Compromiso con el trabajo con DERIVE.*

Las actividades de laboratorio

- {Pr 1 (E 3)} Son favorables para el aprendizaje de las Matemáticas con otra metodología.
- {Pr 1 (E 11)} Conocimos un programa nuevo e importante para nosotros, ya que más adelante nos servirá mucho para resolver problemas matemáticos.
- {Pr 3 (E 11)} Nos ayuda a aprender más sobre lo que estamos estudiando.
- {Pr 3 (E 11)} Ayudan a la utilización del computador.
- {Pr 4 (E 14)} Son muy importantes para nosotros, ya que en el libro aparecen muchos ejercicios que se hacen con programas de computadora y ésta nos permite aprender a manejarlos para hacer dichos ejercicios.

El diseño de la práctica

- {Pr 3 (E 4)} En cada práctica se aprende un poco más sobre cómo utilizar el programa *DERIVE*.
- {Pr 4 (E 14)} Es bueno porque nos permite desarrollar la práctica más rápida y fácilmente.
- {Pr 5 (E 4)} Está diseñada para que el estudiante pueda captar en forma práctica la teoría dada.

El contenido

- {Pr 2 (E 4)} Es muy interesante, ya que lo explicado en clase es practicado en el laboratorio y de esta manera se puede afianzar los conocimientos.
- {Pr 2 (E 6)} Es recomendable leer el contenido de gráficas antes de la práctica.
- {Pr 4 (E 5)} Sería importante guardar las gráficas.

El estilo de la clase

- {Pr 4 (E 6)} Es de gran importancia ya que podemos visualizar lo que practicamos.
- {Pr 4 (E 14)} Es importante porque nos ayuda a entender la parte teórica de estos temas.
- {Pr 1 (E 8)} Es dinámica porque se comparten más opiniones y así no son monótonas las clases.
- {Pr 1 (E 12)} La clase fue muy dinámica y el trabajo en grupo nos sirvió para conocer a nuestros compañeros, además de intercambiar ideas.
- {Pr 2 (E 2)} La práctica estuvo dinámica, permite las interacciones computador- estudiante.
- {Pr 1 (E 2)} Está bien porque se aprende a usar la computadora y el trabajo en equipo ayuda a mejorar la comprensión.

Ventajas y desventajas

- {Pr 2 (E 6)} Ventaja: Deja ver el contenido de las gráficas lo cual sirve para comparar resultados. Desventaja: Crea en el estudiante inutilidad para elaborar procedimientos.
- {Pr 3 (E 6)} La ventaja es que podemos aprender más con la computadora, observar las gráficas con *DERIVE*.
- {Pr 3 (E 10)} Se aprende rápidamente el cálculo por otros métodos no convencionales.
- {Pr 3 (E 15)} Se puede verificar los resultados de ejercicios resueltos.
- {Pr 4 (E 4)} La ventaja, por medio del desarrollo de estas prácticas se puede afianzar los conocimientos obtenidos en clase. La desventaja, es que la computadora no nos muestra el procedimiento para obtener los resultados, por lo que resolver los ejercicios se hace mecánico.
- {Pr 5 (E 1)} Se observa muy detenidamente la representación y los cambios que ocurren.
- {Pr 5 (E 3)} Ventaja: Se aprende a la resolución de áreas por otros métodos.
- {Pr 5 (E 4)} La ventaja es que aprendemos a trabajar con el computador al nivel de otros programas, visualizamos las gráficas y aprendemos más. La desventaja es que algunos no saben manejar una computadora y les cuesta más desarrollar la práctica.

De los comentarios anteriores se tiene que: los estudiantes opinan que las actividades de laboratorio y el uso de *DERIVE* favorecen su aprendizaje; que el software es utilitario; les ayuda a resolver problemas planteados en el libro de Cálculo; los compromete a estudiar previamente los temas; estimula el trabajo de equipo e interacción ordenador-estudiante; se utilizan métodos no convencionales; reconocen la capacidad de visualización que les brinda *DERIVE.* De todo esto se tiene que los estudiantes están en disposición de asumir el contrato didáctico que supone este tipo de actividades.

5.2.4. Discusión de los resultados.

De los resultados obtenidos de la aplicación de las escalas de actitudes, de las entrevistas a cuatro estudiantes y de las opiniones dadas por equipo de las Prácticas de Laboratorio se tiene que:

En cuanto a la **confianza y seguridad en el trabajo matemático**

La confianza y seguridad en su trabajo matemático se puede considerar alta, con una pequeña y no significativa disminución en el promedio de respuesta por ítem (PRI). Esto se pone en evidencia, por ejemplo, porque consideran que en Matemáticas se premia su esfuerzo; obtienen buenos resultados; no se preocupan por tener que aprender temas difíciles; tienen confianza al asistir a clases y consideran que son buenos en la materia. Sin embargo, muestran una baja confianza y seguridad al sentirse más preocupados en clases de Matemáticas que en las de otras materias. Al considerar los resultados de la aplicación de las escalas referentes al uso de *DERIVE* se tiene que: se observa que el G2, que no cursó toda la materia usando *DERIVE*, tiene mayor PRI en la mayoría de los ítems que el G1, grupo que cursó todo la materia con dicho software; lo que podría interpretarse como que el G2 tiene una mayor confianza y seguridad en el trabajo realizado de manera habitual. Creemos que los estudiantes del G1 encontraron que el ordenador les proporciona un escenario que les suministra, en ocasiones, resultados contradictorios que no suelen aparecer en las clases habituales. Todo esto puede influir sin lugar a dudas en su actitud.

De las respuestas dadas por los estudiantes entrevistados se tiene que en general, los estudiantes manifiestan confianza y seguridad en el trabajo matemático; con una autoestima alta, reconociendo la importancia de las Matemáticas dentro del conjunto de materias que cursan y dedicándole el tiempo requerido para su aprendizaje. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

En relación a la **motivación hacia el trabajo matemático** se tiene que: Los estudiantes poseen una alta motivación hacia el trabajo matemático, tanto al inicio como al final del curso, con un ligero aumento en el PRI. Esto se pone de manifiesto ya que: Insisten en los problemas matemáticos hasta encontrar su solución; a los que les produce confusión en Matemáticas le dedican tiempo para pensarlo mejor; no les desagradan los desafíos que encuentran; prefieren que no les den las respuestas a los problemas, sino hallarlas por sí mismos y entienden a las personas que se entusiasman con las Matemáticas. También se observa un importante aumento en la disposición que tienen los estudiantes a dedicar mayor tiempo a las actividades matemáticas.

En cuanto a los resultados obtenidos al finalizar el curso, se nota que existe, en general, poca diferencia entre ambos grupos; aunque al analizar detalladamente cada ítem ésta resulta más significativa; por ejemplo el G1 disfruta más con las actividades matemáticas que el G2. De todo esto se deduce que los dos grupos están altamente motivados hacia el trabajo matemático aunque no se manifiesta de manera significativa una mayor motivación, en ninguno de los dos grupos.

De la entrevista se deduce que, en general, los estudiantes manifiestan motivación hacia el trabajo matemático; se sienten estimulados por el trabajo en grupo, valoran las aplicaciones cotidianas de las Matemáticas y le dedican gran parte de su tiempo al estudio de las mismas. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

Al analizar el **compromiso con el trabajo matemático** se tiene que: Los estudiantes se sienten altamente comprometidos con el trabajo matemático, tanto al inicio como al final del curso, con poca diferencia en los PRI, consideran que resulta útil entender los ejercicios y problemas matemáticos; relacionan los nuevos conocimientos con los que poseían; toman apuntes y revisan los temas dados.

Respecto de los resultados del cuestionario final, se observa que, en general, el G2 manifiesta ligeramente un mayor compromiso en el trabajo matemático que el G1. Al detallar los PRI por ítem tenemos algunos resultados interesantes; por ejemplo, los del G1 consideran que el entendimiento de los problemas es muy útil, y se ubican en un PRI más bajo el del G2; esto podría deberse al hecho de que el G1 participó en Prácticas de Laboratorio que requerían entender en detalle los problemas y el procedimiento que debían seguir.

En la entrevista se observó que, en general, los estudiantes manifiestan compromiso con las actividades matemáticas. Los estudiantes tienen hábitos de estudio diferenciados en ocasional y continuo, lo cual denota un compromiso por aprobar una prueba o una disciplina de estudio. Perciben las ideas matemáticas de manera secuencial y como un todo.

En cuanto a la **confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador:** Se puede considerar alta, tanto al inicio como al final del curso, con un significativo aumento en el PRI. Consideran que pueden dominar los procedimientos necesarios para trabajar con el ordenador; se sienten más seguros de los resultados y en caso de errores los pueden corregir.

Al relacionar los dos grupos en los resultados finales, se observa que el G2 evidencia mayor confianza y seguridad que el G1. Podría explicarse esta situación porque las prácticas desarrolladas por el G2 fueron más rutinarias que las del grupo G1. En este último grupo, el Programa de Utilidades (PU) utilizado en el tema de Integrales Definidas requería un trabajo más abierto que exigía una mayor participación del propio estudiante.

En la entrevista, en general, los estudiantes manifiestan confianza y seguridad en el trabajo con el ordenador. El ordenador lo usan como herramienta de chequeo. Al enfrentarse con un error consultan a un experto o tratan de resolverlo con sus conocimientos. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

En relación a la **motivación del estudiante hacia el trabajo con el ordenador.** Se puede considerar alta, tanto al inicio como al final del curso, con un ligero aumento en el PRI. Los estudiantes consideran que el aprendizaje resulta agradable cuando se usa un ordenador; disfrutan probando nuevas ideas en éste y entienden a las personas que se concentran en actividades relacionadas con el ordenador. No es de extrañar estos resultados, por lo mencionado en la dimensión anterior; sólo resta decir que lo “novedoso” ha sido el uso del *DERIVE* en actividades matemáticas, que al parecer representa un elemento motivador en el trabajo con el ordenador.

En cuanto a los resultados del cuestionario final, no se observa gran diferencia entre los dos grupos, a pesar de la instrucción diferente que recibieron. Aparentemente, a nivel motivacional, el que los estudiantes cursaran todo el programa con una metodología o con parte de ésta, produce similares efectos positivos en su motivación.

De la entrevista se deduce que la motivación hacia el trabajo con el ordenador está condicionada por el tipo de estímulo. Algunos estudiantes se sienten motivados por el reto que representa el trabajar con el ordenador y otros prefieren seguir ellos mismos el proceso.

Al analizar la **interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores**. Se puede decir que existe una alta interacción del estudiante con las Matemáticas y los ordenadores tanto al inicio como al final del curso, con un considerable aumento en los PRI. Consideran que no tienen dificultades en el momento de transferir información al ordenador y detallar los pasos que se siguen al resolver un problema matemático con el uso del ordenador; esto evidencia confianza y seguridad hacia el uso del ordenador en actividades matemáticas. Tienden a notar los detalles matemáticos al usar el ordenador; asimismo, también valoran la ayuda que éste les proporciona cuando se trata de relacionar aspectos gráficos y numéricos; de aquí que los estudiantes se sientan motivados a usar ordenadores en el aprendizaje de las Matemáticas. Para ellos, usar un ordenador refuerza lo aprendido en Matemáticas por la abundancia de ejemplos, lo que denota compromiso, tanto hacia el aprendizaje de las Matemáticas, como hacia el uso del ordenador.

En relación con la comparación de los grupos, la poca diferencia en los PRI, nos conduce de nuevo a que una instrucción, aparentemente, diferente, no es determinante.

En cuanto a la entrevista se tiene que la interacción con las Matemáticas y los ordenadores está condicionado por el aspecto gráfico que brinda el ordenador; además el seguir y el cotejar procesos resulta una forma de interacción.

En cuanto a la **seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE.*** Poseen una alta seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*, observándose una pequeña diferencia en los PRI; esto indica que el uso de *DERIVE* influye en las actitudes de los estudiantes. Al observar los resultados por ítem, se advierte, por ejemplo, que el G1 tiene un PRI mayor que el G2, en cuanto a que entienden mejor las clases en las que se ha utilizado *DERIVE* que las explicadas en la pizarra y pueden obtener mejores visualizaciones de las gráficas de funciones; esta diferencia podría ser, como se ha mencionado en párrafos anteriores, producto de los diferentes tipos de instrucción llevados a cabo en ambos grupos.

En la entrevista se tiene que los estudiantes consideran a *DERIVE* como un soporte para la resolución de problemas, se puede deducir que éste les proporciona confianza y seguridad. Es de hacer notar que el G1 considera que el trabajar con *DERIVE* involucra seguir procedimientos y conocer el lenguaje aplicado, en cambio el G2 lo ve como herramienta para encontrar solamente resultados.

De las opiniones de los estudiantes agrupados por equipo se tiene: los estudiantes reconocen que pueden seguir el proceso de resolución de situaciones de una manera sencilla y con rapidez de respuesta; logran conectar lo visto en clases habituales con lo dado en las prácticas; reconocen el poder de visualización que les brinda el software y su capacidad gráfica. Estos comentarios nos lleva a pensar que los estudiantes poseen confianza y seguridad en el trabajo tanto de laboratorio con del uso de *DERIVE.*

En cuanto a la **motivación del estudiante hacia el trabajo con *DERIVE***. Los estudiantes, en general, están altamente motivados hacia el trabajo con *DERIVE*, con una pequeña variación en los PRI. Los estudiantes consideran que *DERIVE* les motiva a hacer Matemáticas y les ayuda a entenderlas.

De la entrevista se tiene que los estudiantes se sienten motivados por el trabajo con *DERIVE* ya que las actividades que se realizan se diferencian de las clases habituales. Les estimula la imaginación y la creatividad. Los estudiantes del G1 opinan que pueden producir sus propios conocimientos, en cambio los del G2 utilizan *DERIVE* para chequear y hallar resultados a los problemas.

En cuanto a la opinión por equipo se tiene que: los estudiantes consideran que las actividades de laboratorio les ayudan a aclaran las dudas de lo hecho en la clase habitual; las actividades son agradables, dinámicas, interactivas y prácticas; pueden seguir los procesos de varias maneras; reconocen la capacidad de visualización del *DERIVE;* son partícipes de la generación de su aprendizaje y las actividades son diferentes a las tradicionales. Todo esto muestra que a los estudiantes les motiva el trabajo de laboratorio y el uso de *DERIVE.*

En cuanto al **compromiso con el trabajo con *DERIVE,*** se tiene que: *DERIVE* les resulta útil para resolver problemas y les parece relevante las posibilidades de trabajar simultáneamente en el aspecto algebraico-gráfico-numérico que les brinda el software. Esto evidencia que los estudiantes reconocen el carácter utilitario del software. La interacción algebraico-gráfico-numérico que ofrece el software es un aspecto poco logrado en las clases de tiza y pizarra, que puede producir un compromiso de su uso cuando el estudiante se plantea alternativas de resolución de algún problema.

De la entrevista se deduce que, en general, *DERIVE* contribuye a estructurar y organizar procedimientos; no obstante es más notoria la opinión del G1 en cuanto a la importancia que le dan al proceso que en el G2. Así como también se evidencia mayor compromiso por el trabajo con *DERIVE* en G1 que el G2.

Los estudiantes, por equipo opinan que: las actividades de laboratorio y el uso de *DERIVE* favorece su aprendizaje; que el software es utilitario; les ayuda a resolver problemas planteados en el libro de Cálculo; los compromete a estudiar previamente los temas; estimula el trabajo de equipo e interacción ordenador-estudiante; se utilizan métodos no convencionales; reconocen la capacidad de visualización que les brinda *DERIVE.* De todo esto se tiene que los estudiantes están en disposición de asumir el contrato didáctico que supone este tipo de actividades.

5.3. ESTUDIO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

Este estudio, al igual que el del estudio exploratorio, se llevó a cabo conjuntamente con el de actitudes. En el mismo nos propusimos como objetivos generales, por una parte, implementar el Módulo Instruccional I aplicado en el estudio exploratorio, y por otra, analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico en el que se distinguen los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica en la comprensión de la Integral Definida.

5.3.1. Objetivos

Para lograr los dos objetivos generales mencionados anteriormente no propusimos:

1. Caracterizar la idea de área que poseen los estudiantes que han cursado la Secundaria y no conocen aún el concepto de Integral Definida.
2. Analizar si existe alguna influencia de la instrucción llevada a cabo con los alumnos, sobre la idea que traen los estudiantes del concepto de área cuando se desarrolla la enseñanza combinando un método de tiza y pizarra con el uso de las Prácticas de Laboratorio.
3. Dado que los ítems en los cuestionarios a aplicar están presentados de manera algebraica y gráfica, determinar cómo utilizan, los estudiantes, estos registros a la hora de resolver situaciones que involucran tanto el concepto de área de figuras planas, como el de Integral Definida.

5.3.2. El desarrollo de la instrucción

La instrucción se realizó en tres fases que describimos a continuación:

Fase 1: El profesor hace una presentación del tema usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Edward y Penney (1996)), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: Los estudiantes trabajan por parejas, en un laboratorio de ordenadores, una serie de Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional I, descrito en el capítulo 3. Las parejas de estudiantes resuelven las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado en la práctica. Al comienzo de la práctica, se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la misma.

Fase 3: Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes que presentaron de las prácticas.

5.3.3. Análisis e interpretación de los resultados

Al inicio del tema de Cálculo Integral se aplicó un Cuestionario de Conocimientos (pretest) (ver anexo 8) y al finalizar el tema otro (postest) (ver anexo 9), validado en el estudio exploratorio. La finalidad de esta estrategia era, por una parte, determinar el tipo de respuesta dado por los estudiantes a situaciones que pueden ser resueltas sin utilizar cálculo integral y de qué manera influyen los nuevos conocimientos sobre integrales en el cambio de respuesta. Por otra, facilitó la selección de cuatro estudiantes que fueron entrevistados con posterioridad. Se utilizó como protocolo para la entrevista las siete preguntas del segundo cuestionario. La entrevista fue realizada en un ambiente en el que el estudiante contaba con folios de papel para realizar sus anotaciones. Se videograbó cada sesión y se transcribió cada entrevista.

Las tablas 5.11 a la 5.17 muestran las preguntas del cuestionario (pretest y postest), sus descriptores y objetivos

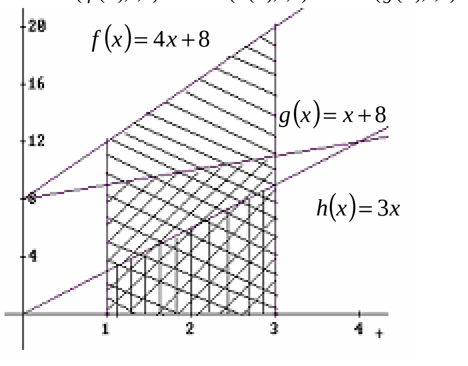
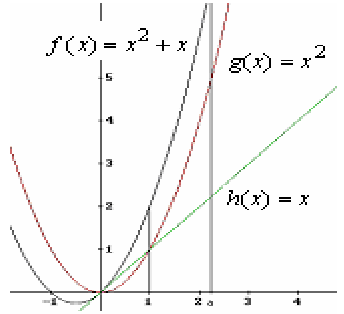
PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
1) Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué $\text{Área } (f(x),1,3) = \text{Área } (h(x),1,3) + \text{Área } (g(x),1,3)$  	1.1. Se pide justificar la propiedad aditiva del área. 1.2. No se menciona la palabra área. 1.3. Hay tres expresiones algebraicas y tres gráficas relacionadas (rectas). 1.4. No se pide aproximar. 1.5. Las funciones son continuas. 1.6. Se puede justificar de varias maneras. 1.7. Las regiones están rayadas. 1.8. Se puede realizar la comparación usando figuras elementales (triángulos, trapecios, etc.).	1) Explicar, por medio de gráficos o de otra forma, por qué. $\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx + \int_1^a h(x)dx$ $\{f(x) = x^2 + x;\ g(x) = x^2;\ h(x) = x$  	1.1. Se pide justificar la propiedad aditiva de la integral. 1.2. No se menciona la palabra integral, ni área. 1.3. Hay tres expresiones algebraicas y tres gráficas relacionadas (una recta y dos curvas). 1.4. No se pide aproximar. 1.5. Las funciones son continuas. 1.6. Se puede justificar de varias maneras. 1.7. Las regiones no están rayadas.
Objetivo: Se pretende determinar qué clase de argumentos utilizan los estudiantes (gráficos, algebraicos o numéricos) para justificar la propiedad aditiva del área (pretest) y de la integral (postest).			

Tabla 5.11

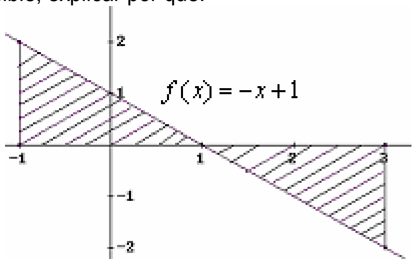
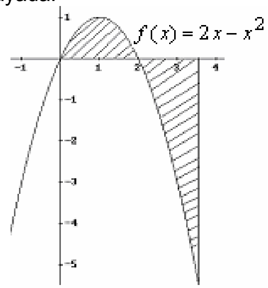
2) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué.  	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región 2.3. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 2.4. Hay dos regiones (sobre y bajo) 2.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.6. El área se puede calcular usando figuras elementales (triángulos, rectángulos, etc.). 2.7. La función es continua.	2) Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada.  	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región 2.3. No aparece la palabra integral. 2.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 2.5. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.7. No se pide aproximar. 2.8. La función es continua.
Objetivo: Se pretende establecer qué dificultades tienen los estudiantes al trabajar con regiones que se encuentran bajo el eje X y qué tipo de relaciones establecen con las que están sobre el eje X			

Tabla 5.12

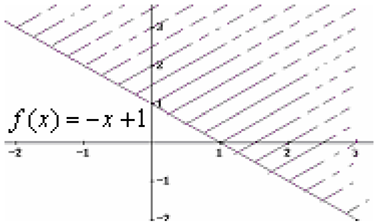
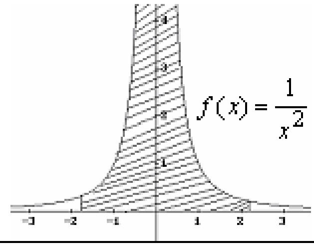
PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
3) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué. 	3.1. Se pide calcular el área. 3.2. Se identifica gráficamente la región. 3.3 No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 3.4. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 3.5. Hay una gráfica asociada. 3.6. No se pide aproximar. 3.7. Hay una región limitada por un semiplano. 3.8. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.	3) Calcular el área de la región rayada. Si no es posible, explicar por qué. 	3.1. Se pide calcular el área. 3.2. Se identifica gráficamente la región. 3.3. No aparece la palabra integral. 3.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 3.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 3.6. Hay una gráfica asociada. 3.7. No se pide aproximar. 3.8. Hay una región con una discontinuidad en medio. 3.9. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.
Objetivo: Se trata de analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda es infinita.			

Tabla 5.13

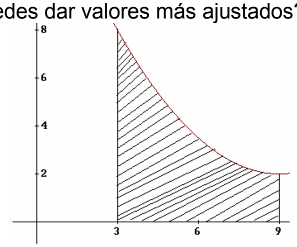
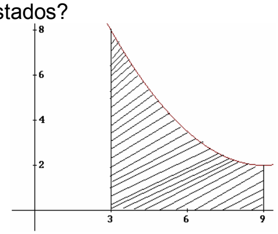
4) El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados? 	4.1. Hay una gráfica asociada. 4.2. No hay una expresión algebraica asociada a la curva. 4.3. Se dan valores aproximados del área y se pide optimizarlos. 4.4. Se pueden utilizar figuras elementales para aproximar el área.	4) El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados? 	4.1. Hay una gráfica asociada. 4.2. No hay una expresión algebraica asociada a la curva. 4.3. No aparece la palabra integral. 4.3. No se puede plantear una Integral Definida. 4.4. Se dan valores aproximados del área y se pide optimizarlos. 4.5. Se pueden utilizar figuras elementales para aproximar el área.
Objetivo: Se pretende determinar si los estudiantes son capaces de aproximar el área de una región limitada por una curva, y cómo lo hacen a pesar de no tener la expresión algebraica de la función. Además se trata de ver si son capaces de establecer mejores cotas que las dadas y de qué forma lo hacen.			

Tabla 5.14

PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
5) Calcular el área $A(f(x),-3,4)$ siendo $f(x)=\|x+2\|$.	5.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita. 5.2. Se menciona la palabra área. 5.3. Se da el intervalo en donde debe calcular el área. 5.4. No hay una gráfica asociada. 5.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.	5) Calcular $\int_{-3}^{4}\|x+1\|dx$	5.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita. 5.2. No se menciona la palabra área. 5.3. Se da el intervalo de integración. 5.4. No hay una gráfica asociada. 5.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.
Objetivo: Se trata de analizar de qué manera influyen los nuevos conocimientos y la metodología empleada para su enseñanza, en la resolución de este problema para el que el sistema gráfico resultaría de gran utilidad.			

Tabla 5.15

PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
		6) Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{1}x^{-2}dx=\left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right\|_{-1}^{1}=$ $-\left.\frac{1}{x}\right\|_{-1}^{1}=-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2$	4.1. Se presenta en el registro algebraico con información desarrollada (explícita). 4.2. No aparece la palabra área en “calcular la integral”. 4.3. Se da el intervalo de integración. 4.4. No hay una gráfica asociada. 4.5. Se aplica directamente las técnicas de integración.
Objetivo: Se pretende determinar si los estudiantes: ▪ Son capaces de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta. ▪ Identifican la relación de esta pregunta con la pregunta 3. ▪ Interpretan coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.			

Tabla 5.16

PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
6) Indicar si es verdadero o falso que. Si $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$, entonces, $g(x) \geq f(x)$, para toda x que pertenece a $[a,b]$. Justifica la respuesta.	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No hay graficas asociadas. 6.4. No se dan los valores entre los que debe calcular el área. 6.5. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.6. En general, la proposición es falsa.	7) Indicar si es verdadero o falso que Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces, $f(x) \geq g(x)$, para toda x que pertenece a $[a,b]$	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No aparece la palabra integral. 6.4. No hay graficas asociadas. 6.5. No se dan los valores de los límites de integración. 6.6. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 6.7. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 6.8. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.9. En general, la proposición es falsa tanto si se trata de integrales como si fuese área.

Tabla 5.17

PREGUNTA PRETEST	DESCRIPTORES	PREGUNTA POSTEST	DESCRIPTORES
7) Indicar si es verdadero o falso que Si $g(x) \geq f(x)$, entonces, $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$. Justifique la respuesta.	7.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 7.2. No aparece el término área. 7.3. No hay graficas asociadas. 7.4. No se dan los valores entre los que debe calcular el área. 7.5. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 7.6. En general, la proposición es falsa.	8) Indicar si es verdadero o falso que. $Si\, f(x) \geq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ Justifica su respuesta.	8.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 8.2. No aparece el término área. 8.3. No aparece la palabra integral. 8.4. No hay graficas asociadas. 8.5. No se dan los valores de los límites de integración. 8.5. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 8.6. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 8.7. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 8.8. En general, la proposición es verdadera si se trata de integrales y falsa si sólo se considera como área.
Objetivo: Se pretende determinar, por una parte, si los estudiantes son capaces de entender los términos generales que se presentan y si establecen relaciones entre el área y la integral, y, por otra, si son capaces de utilizar contraejemplos.			

Tabla 5.18

A continuación presentamos el análisis e interpretación de los datos obtenidos de la aplicación de los dos cuestionarios de conocimientos y de la entrevista (sobre el postest) a los cuatro estudiantes. Para lo primero, se elaboraron redes sistémicas por preguntas (ver anexo 10 y 11), estableciendo las secuencias de categorías seguidas por los estudiantes en cada una. Se muestra, como ejemplos concretos, las actuaciones más significativas de los estudiantes. El número de cada estudiante se escribe entre llaves al final de cada secuencia. Para cada estudiante que participó en la entrevista se diseñó su respectiva red sistémica (ver anexo 12). Se transcribieron las entrevistas (ver anexo 13) y se seleccionaron las líneas con respuestas más relevantes. El análisis e interpretación se realiza por preguntas, primeramente se presenta la información para el grupo de los 28 estudiantes y seguidamente por estudiante entrevistado. Al final se realiza una discusión que sintetiza lo expuesto.

Pretest/ PREGUNTA 1

<u>*Para el grupo total.*</u>

Categoría 1. Dibuja las tres regiones (trapecios) por separado.

Categoría 1.1. Divide cada región en triángulos y rectángulos, utiliza fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifica la igualdad. Ver figura 5.1. {22}.

Categoría 1.2. No divide las regiones. Ver figura 5.2 {18}.

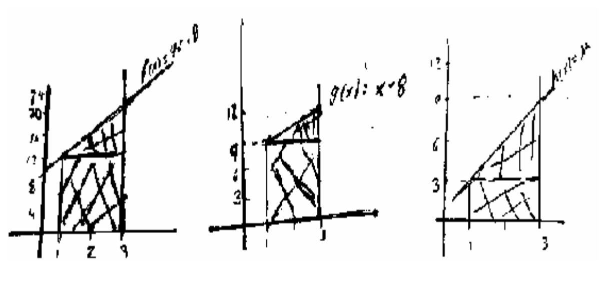


Figura 5.1

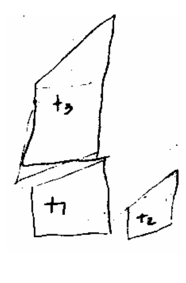


Figura 5.2

Categoría 1.3. Describe la situación comparando las tres funciones *f(x)>g(x)>h(x)* y no justifica la igualdad {4}.

Categoría 1.4. Elabora gráficos de figuras elementales y no justifica la igualdad planteada en la proposición. Ver figura 5.3 {23}.

Categoría 1.5. Elabora gráficos de figuras elementales (triángulos, trapecios, etc.) con la idea de Puzzle y justifica la igualdad. Ver figura 5.4 {1, 7, 10, 13, 15, 24, 26, 28}.

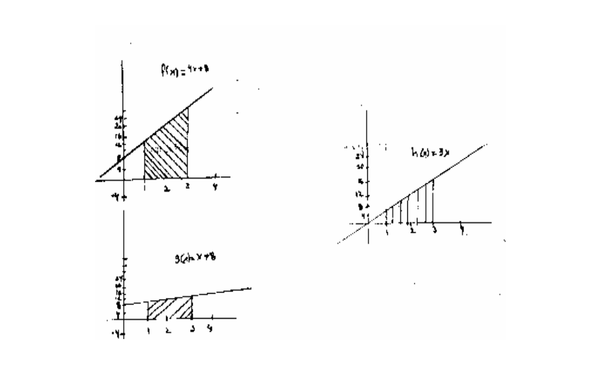


Figura 5.3

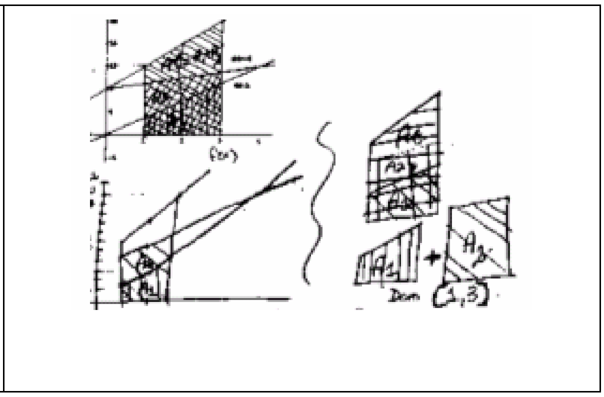


Figura 5.4

Categoría 2. Opera con la expresión algebraica de las funciones.

Categoría 2.1. Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones *[f(x)=h(x)+g(x); f(x)=(3x)+(x+8); f(x)=4x+8].* {3, 5, 10, 11, 14, 20, 27}.

Categoría 2.2. Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica puntualmente la igualdad *[h(0)=3.0=0; g(0)=0+8=8; f(0)=4.0+8=8].* {10, 14, 25}.

Categoría 3. Trabaja sobre el gráfico dado.

Categoría 3.1. Divide cada región en triángulos y rectángulos, utiliza fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifica la igualdad. Ver figura 5.5 {9, 12}.

Categoría 3.2. No divide las regiones, utiliza fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifica la igualdad. Ver figura 5.6 {2,21}.

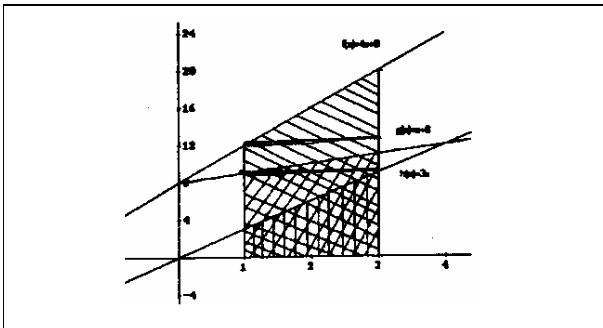


Figura 5.5

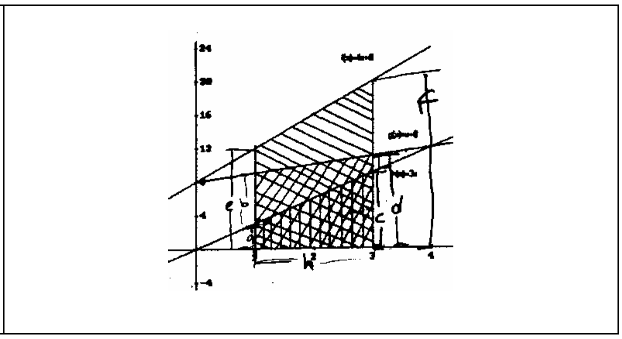


Figura 5.6

Categoría 4. Menciona que la igualdad no se cumple {6}.

Categoría 5. No responde {8, 16, 17,19}.

Postest/ PREGUNTA 1

<u>*Para el grupo total*</u>

Categoría 1. Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad {2, 3, 8, 10, 14, 15, 20, 22, 24, 25, 26, 28}.

Categoría 2. Dibuja por separado las regiones, calcula las integrales y verifica la igualdad. Ver figura 5.7 {4, 5}.

Categoría 3. Dibuja las regiones sobre la gráfica, calcula las integrales y verifica la igualdad. Ver figura 5.8 {12, 13, 27}.

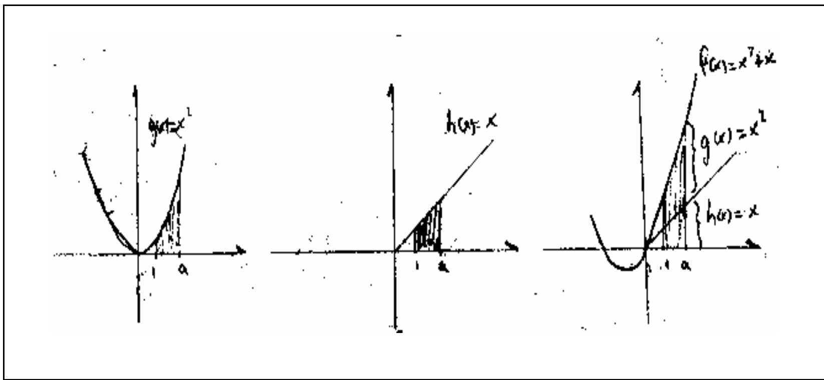


Figura 5.7

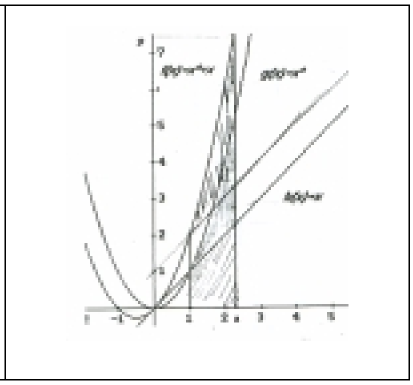


Figura 5.8

Categoría 4. Sustituye las expresiones algebraicas de las funciones en la igualdad dada {6, 7, 18, 19, 21}.

Categoría 5. Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones {1}.

Categoría 6. No responde {9, 23}.

De lo anterior se deduce que los estudiantes, antes de cursar la unidad de Integral Definida utilizan:

Argumentos gráficos, dibujan figuras tales como triángulos, rectángulos y trapecios; los dibujan sobre el gráfico dado o tratan de separar las figuras y tratarlas como puzzle (ver categorías 1 y 3).

Argumentos algebraico-numéricos, utilizan fórmulas de cálculo de área de estas figuras (ver categorías 1.1, 3.1, 3.2); utilizan las expresiones algebraicas de las funciones y realizan comparaciones (ver categorías 1.3, 2.1).

En general, los estudiantes argumentan su respuesta con representaciones gráficas. Las representaciones algebraicas-numéricas son consecuencia de una utilización previa de la representación gráfica. Se percibe cierto intento de mover figuras y tratar de llenar espacios.

Una vez cursada esta unidad, los estudiantes tienden, en general, a utilizar:

Argumentos algebraico-numéricos consistentes en la sustitución de la expresión algebraica de cada función en la integral respectiva, cálculo de las integrales y comparación de los resultados (ver categoría 1, 4, 5).

Argumentos gráficos marcando sobre la gráfica (ver categoría 3).

En esta pregunta del postest, en líneas generales, la representación gráfica ha pasado a un segundo plano o no se utiliza; además, ningún estudiante trata de justificar la propiedad utilizando la división del intervalo y las sumas de Riemann o el cálculo de la aproximación mediante trapecios (en el trabajo de Orton sí lo hacen). Esto puede ser debido a la mayor facilidad que ofrece el operar en las representaciones algebraico-numéricas que en las gráficas; y al hecho de que el estudiante puede pensar que resulta más rápido y aceptable el uso de integrales para justificar la igualdad. Debemos hacer existen ligeros indicios de que dos estudiantes del G1 (ver categoría 1), que cursaron las PL de esta unidad, separan y rellenan las regiones, tal vez en un intento de compararlas. Se puede decir que esto puede estar influenciado por lo que hicieron en las PL en las que las regiones se cubrían por figuras, hasta dar una apariencia similar a la que se observa en el ejemplo.

Para los estudiantes entrevistados

El estudiante G1E1.

<u>*En los cuestionarios*</u>

En el Pretest el estudiante expresa dos tipos de representaciones.

Gráfica.

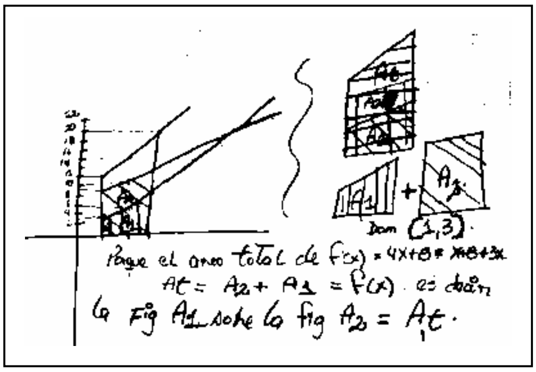


Figura 5.9

Considera que superponiendo la figura A1 sobre la A2 se logra obtener la At, con ésto último suponemos que se refiere al área total. Evidencia una idea de la cotidianidad de objetos concretos que deben colocarse uno sobre otros, como si fueran cajas; no se percata de que las tres figuras son diferentes.

Algebraica, en donde primeramente escribe que el área total es igual a la expresión de la función; confundiendo el significado del área con la expresión que define las imágenes de la función; tal vez quiso expresar que la suma de las imágenes de las dos funciones inferiores daba la superior.

Por otra parte, justifica la igualdad tomando las expresiones derechas de las definiciones de las funciones e igualándolas; con lo cual expresa “al sumar las dos áreas (A1+A2) nos da el área total”, de nuevo confunde el valor del área con la definición de la función.

En el Postest, para justificar la igualdad resuelve las integrales, chequeando que los resultados coinciden; no considera la gráfica para dar alguna justificación. Esta tendencia puede ser debida a una economía de registro o porque resulta el procedimiento más elemental y pudiera ser más aceptable matemáticamente.

<u>*En la entrevista*</u>

Inicialmente resuelve el problema de la misma manera que en la prueba escrita. Al preguntarle

2) _ E*: Integro estas dos* (se refiere a las integrales de la derecha de la igualdad) *y al sumarlas, supuestamente me va a dar ésta* (se refiere a la integral de la izquierda de la igualdad)
3) _ I*: Hazlo.*
4) _ E*:* (Escribe) $\left[x^2 + x\right]_1^a = \int_1^a \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}$ (y la calcula evaluando el primer miembro. Igualmente procede con las otras integrales).
5) _ E: *¿Puedo utilizar la calculadora?*
6) _ I: *Bueno.*
7) _ E*:* (Utiliza la calculadora para realizar los cómputos de la evaluación de las integrales).
8) _ E: Al finalizar el cálculo de la última integral se da cuenta del error y lo corrige escribiendo $\int_1^a x^2 + x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_1^a$, igualmente lo hace con las otras integrales. Escribe las expresiones algebraicas de las integrales de h y g, lo iguala a la suma de los cálculos que realizó y escribe que es igual a la integral de f. Escribe *“Demostrado”*
9) _ I: *Puedes explicar por qué se cumple la igualdad.*
10) _ E*: Esta es f(x)* (usa el lápiz y recorre la curva) *ésta es g(x) y ésta h(x). (Pausa).*
11) _ I*: Puedes dar algunas razones del por qué se cumple la igualdad.*
12) _ E*: El área de g(x) es ésta, el área de h(x) es esta* (señala las expresiones algebraicas de las integrales en la igualdad y los resultados que le ha dado, parece que se refiere a la curva y no a la región bajo ella) *entonces si tenemos las dos áreas* (señala las curvas) *al sumar estas dos áreas nos va dar el área total de f(x)* (ver anexo 13, p. 101).

La idea que tiene de la integral está relacionada con el cálculo de área. Relaciona la representación simbólica de la integral con la representación gráfica dada.

Al solicitarle una interpretación gráfica

13) _ I: *¿Puedes dar una interpretación gráfica de esa igualdad?*
14) _ E*:* Usa el lápiz y recorre la curva de h y dice *"lo que quiere decir es que esta área"* (raya la región entre h y g), *"prácticamente no lo veo".*
15) _ I: *¿No lo ves?*
16) _ E*: Cuando usted pidió en el examen por medio de gráficos o de otra forma, yo agarré otra forma.*
17) _ I*: ¿Cómo explicarías usando gráficos?*
18) _ E*:* Usa el lápiz y recorre la curva de g. Raya la región entre la curva de h y g. Dice "*ésta es el área entre h(x) y g(x)".* Recorre la curva de f. *Profesor el área de f(x) ¿hasta dónde llega?*
19) _ I*: Te recuerdo que la región es la porción desde el eje X hasta la curva.*
20) _ E*:* Raya la región entre la curva de g y la de f y expresa que ésta es la región de f.
21) _ I: *¿Cuáles son las otras dos regiones?*
22) _ E*: Bajo g* (raya la región entre h y g) *bajo h* (raya la región bajo h).

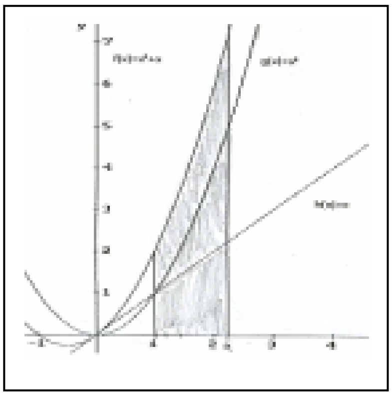


Figura 5.10

23) _ I*: Entonces dices que al sumar estos dos pedacitos* (se refiere a los de g y h) *te da el otro* (se refiere al de f) *¿no te parece ilógico?*
24) _ E*: Si.*
25) _ I: *¿Dónde consideras que esta el problema? ¿O es una interpretación tuya o es el problema así?*
26) _ E*: Es una interpretación mía.*
27) _ I: *¿De dónde empieza la región de f y hasta dónde llega?*
28) _ E*: Este es como el ejercicio que usted nos dio en cálculo de área* (dibuja una figura rectangular y le dibuja una triangular sobre ella) *ese si lo vi., porque ese fue un pedacito que era así y el otro era algo así y lo colocaba los dos y me daba, pero este no lo veo.*

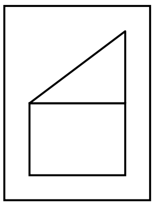
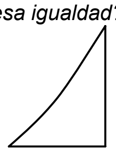
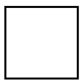
 Bosquejo.

Figura 5.11

29) _ I: *Pero no puedes determinar desde dónde empieza la región de f? Empecemos por cada una.*
30) _ E: *¡Ah ya entendí! El área de f es todo, el de f es de aquí para allá* (señala desde la curva de f hasta el eje OX). Luego señala las otras regiones*.*
31) _ I*: ¿Qué relación estableces para ver si se cumple esa igualdad?*

32) _ E*: Bueno, por decir ésta es el área de g* (dibuja  bosquejo) *esta es el área de h* (dibuja  bosquejo) *la suma de estas dos áreas me va dar el área de f(x). Este pedacito con éste me da éste* (señala en la gráfica dada la relación y la gráfica que dibuja)

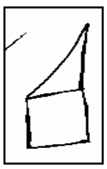


Figura 5.12

33) _ I*: ¿Puedes dar una interpretación numérica sin usar las integrales?*
34) _ E*: Sumo las dos funciones.*
35) _ I*: Sin usar integrales puedes explicar que esa igualdad se cumple. Numéricamente*
36) _ E*: ¿Puedo utilizar rectángulos?*
37) _ I*: Puedes usar lo que quieras*
38) _ E*: Por decir de 1 a 2* (marca sobre el eje x como haciendo subdivisiones) *lo divido en 5.*
39) _ I: *¿5 qué?*
40) _ E*: El "a, b" lo divido en 5, para formar rectángulos.*
41) _ I: *¿Y después que haces con esos rectángulos?*
42) _ E*: La base me da 0,5. Veo 0,5 por 2, base por altura* (señala el eje OX y recorre con el lápiz hasta la curva de g) *0,5 por 3; 0,5 por 4; 0,5 por 5, los sumo y ya tengo un área aproximada.*
43) _ I: *¿Qué harías con los otros dos?*
44) _ E*: Igualito también.*
45) _ I*: ¿Y después qué harías?*
46) _ E*: Lo sumo, por ejemplo 10* (señala la región de h) *y luego hago con el otro hasta arriba* (señala la región de g) *la suma de estos dos me dará aproximado* (señala la región de f) (ver anexo 13, p. 101).

El procedimiento que describe se asemeja al que utilizó en el cuestionario CC-2, mueve las regiones como si fuera un puzzle. Se observa la influencia de la instrucción al mencionar el procedimiento que seguiría utilizando rectángulos; ésta es la forma de trabajo con el PU en el laboratorio de ordenadores.

Comentarios: La idea que tiene de la Integral Definida está asociada con el cálculo del área de una región.

Continúa utilizando el procedimiento de mover piezas con la idea de puzzle observado en el cuestionario Pretest.

Se observa la influencia de la instrucción recibida en el tipo de respuesta dada.

Realiza conversiones entre registros algebraico y gráfico.

El estudiante G1E2

En los cuestionarios

En el Pretest no responde.

En el Postest calcula por separado las integrales y verifica la igualdad. No se observa marcas en la gráfica.

Comentarios: El estudiante utilizando el registro algebraico, puede que considere que es la manera más fácil y que tendrá mayor aceptación. Esto puede ser debido a una economía de registro o producto de la creencia de que este tipo de registro es matemáticamente más aceptable que el gráfico.

En la entrevista

Establece una relación entre las funciones para justificar la igualdad de las integrales.

2) _ E*: La función f(x)* (indica con el lápiz el integrado de la integral del lado izquierdo de la igualdad) *es una función compuesta por g(x) y h(x) y la integral de esa función* (se refiere a la integral de f) *que va de 1 a "a" es igual a las otras integrales, como yo le dije, esa función está compuesta por las dos y las dos están siendo evaluadas en el mismo intervalo* (ver anexo 13, p. 110).

Este procedimiento fue el que utilizó en el Postest.

Al solicitarle que dé una interpretación gráfica, se tiene que.

5) _ I: *¿Puedes dar una justificación gráfica de la igualdad de las integrales?*
6) _ E: (Recorre con el lápiz las gráficas) *Puede ser.*
7) _ I: *¿Me lo puedes explicar?*
8) _ E: *Habría que tomar una cantidad de gráficos. Pero, tratando de ver si se cumple la igualdad. En ese caso se utilizaría DERIVE* (ver anexo 13, pp. 110).

Puede que el mencionar el *DERIVE* para graficar figuras se refiera a la aproximación geométrica de las regiones, de igual manera que las llevadas a cabo en las Prácticas de Laboratorio.

9) _ I: *Supón que no tienes DERIVE. ¿De qué forma puedes establecer la igualdad de las integrales, de manera gráfica?*
10) _ E: *Suponga que tenga una función cuadrada y una función cúbica.* Dibuja

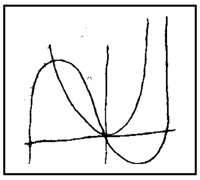


Figura 5.13

11) _ I: *Pero en este caso tienes éstas que están debajo* (se refiere a las dadas).
12) _ E: *El área de la función cuadrada* (se refiere a la gráfica de g) (indica con el lápiz la curva de g y la expresión algebraica de g) *más el área de la función x* (indica la expresión algebraica de h) *tiene que ser igual a estas dos* (indica con el lápiz la expresión algebraica de f).
13) _ I: *¿No se te ocurre cómo usar algún tipo de gráfico para dar una interpretación de esa igualdad?*
14) _ E: Se queda por segundos observando la gráfica (ver anexo 13, p. 110).

El utilizar otro registro gráfico distinto al dado hace suponer que no establece conexiones entre los registros algebraico y gráfico dados; parece no relacionar la igualdad dada con las expresiones de las funciones enunciadas.

15) _ I: *¿Me puedes indicar cuáles son las áreas de f, g y h?*
16) _ E: *La de g(x) va aquí abajo* (se refiere a la región bajo g) *de 1 a "a"* (se refiere al segmento en el eje OX)(raya la región)
17) _ I: *¿Y la de h?*
18) _ E: *Es la que de 1 a "a" bajo esta línea* (raya la región).

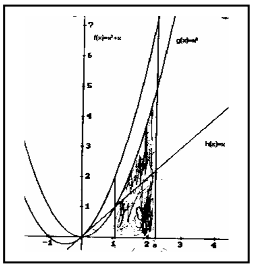


Figura 5.14

19) _ I: *¿Y la de f?*
20) _ E: *Del intervalo 1 a "a", esta parte* (se refiere a la región entre g y h) *más esta parte* (se refiere a la región bajo h).
21) _ I: *¿La de f llega hasta la parte rayada?*
22) _ E: *Sí, toda la parte rayada. La suma de estas dos* (se refiere a la región de h y la g).
23) _ I: *¿No se te ocurre cómo hacerlo?*
24) _ E: *¿Un trapecio?*
25) _ I: *No sé.*
26) _ E: *Una parte, tomando una base mayor y una base menor por la altura* (se refiere al trapecio que forma la región bajo h).
27) _ I: *¿Y eso que relación tiene con las otras?*

28) _ E: *Esto es parte de la integral, o sea visualicé la parte. La parte que acabo de ver se ve como un trapecio* (se refiere al trapecio que forma la región bajo h).
29) _ I*: ¿Qué relación tiene el trapecio con el resto de las áreas?*
30) _ E*: Deben tener la misma área.*
31) _ I: *Ahora, ¿Qué justificación numérica darías para esa igualdad?*
32) _ E: *Esa área sería como un "A" que esta compuesto por "B" más "C"* (escribe A=B+C) *puedo llamar a cualquiera B y el otro C* (escribe en la gráfica "B"en la región entre g y h y "C"en la región de h) (ver anexo 13 p. 111)

Al mencionar el uso trapecios, puede que transfiera lo aprendido en las Prácticas de Laboratorio en cuanto a la aproximación geométrica de la región utilizando este tipo de figuras. Aquí tampoco se refiere a las expresiones algebraicas de las funciones.

Comentarios: De las respuestas dadas por el estudiante en esta pregunta no se puede afirmar o negar que relacione las integrales exclusivamente con cálculo del área.

Se observa una tendencia al uso de registros gráficos en la resolución de situaciones planteadas.

El estudiante G2E1.

En los cuestionarios

En el Pretest dibuja las tres regiones por separado, divide cada región en triángulos y rectángulos, calcula las áreas de la figuras con sus fórmulas respectivas, las alturas las calcula a partir de las expresiones algebraicas de las funciones, suma los resultados y verifica la igualdad.

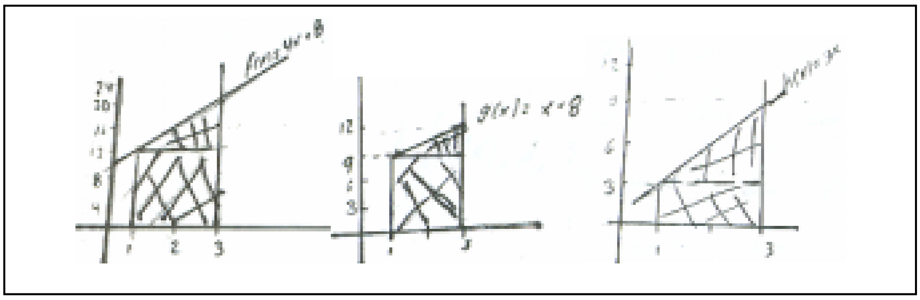


Figura 5.15

En el Postest calcula las integrales por separado y verifica la igualdad. No se observan marcas en la gráfica.

Comentarios: El estudiante ha realizado en el Pretest un tratamiento adecuado del registro gráfico. En el Postest basa la argumentación en un tratamiento del registro algebraico. Esto puede deberse a una economía de registro o producto de la creencia de que lo algebraico es matemáticamente más aceptable que lo gráfico.

<u>En la entrevista</u>

Resuelve, de entrada el problema como en el Postest

2) _ E: *Según mi criterio lo que hice en el examen fue que evalué las integrales en ambos lado desde 1 hasta a, como* $f(x) = x^2 + x$, *saqué la primitiva de esa función y lo evalué desde 1 hasta "a", y lo igualé a la evaluación de integral de 1 hasta "a" de g(x) más la evaluación desde 1 hasta "a" de h(x), y al final a ambos lados de la igualdad me debería dar el mismo resultado.*
3) _ E: *¿Se lo hago aquí?*
4) _ I: *Si hazlo.*
5) _ E: Calcula las integrales siguiendo en procedimiento que ha descrito anteriormente. Menciona que "*me da el mismo resultado a ambos lados de la igualdad, por eso llego a la conclusión de que la igualdad se cumple*" (ver anexo 13, p. 117).

Al solicitarle que dé una interpretación gráfica, procede de la siguiente manera.

12) _ I: *¿Me puedes dar una interpretación gráfica?*
13) _ E: *Por lo menos usando rectángulos* (dibuja líneas sobre el gráfico dado) *que estén por debajo de h(x) y también de g(x), el área de esos dos rectángulos sería igual o muy aproximado al rectángulo del mismo longitud de la base que esta debajo de f(x)* (las líneas las dibuja deteniéndose al llegar a cada curva y luego las continúa),

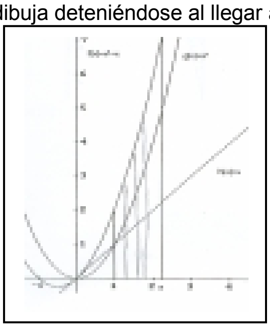


Figura 5.16

por lo menos que asignemos un valor, por lo menos cuatro rectángulos, desde 1 hasta 2, cada rectángulo tendría 0.5 de ancho o $\frac{1}{2}$, *daría aproximado menor que la escala, podemos tomar el rectángulo de 1 hasta 1.5 de base* (realiza cómputos de área del rectángulo bajo h, otro bajo g y otro bajo f).

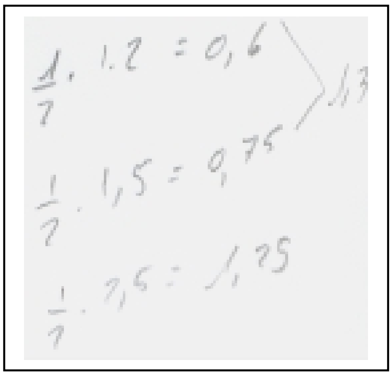


Figura 5.17

Me da un área muy aproximada. Los rectángulos que están bajo h(x) y g(x) me dan 1,30 y calculamos un rectángulo completo para f(x) me da 1,25; eso me daría la tendencia de que la suma de las áreas de g(x) y h(x) es igual o aproximado a la de f(x).
14) _ I *¿Pudiera hacerse con otras figuras?*
15) _ E: *También se podría con trapecios o con rectángulos punto medio, para hallar una respuesta un poco más aproximada, pero se trabaja más fácilmente con los rectángulos.*
16) _ I: *A parte de los procedimientos que has mencionado ¿puedes dar otra forma de justificar la igualdad?*
17) _ E: *Utilizando Sumas de Riemann, por lo menos tenemos un número de rectángulos, podía ser para hallar una respuesta más exacta un número elevado de rectángulos. Con las Sumas de Riemann nos facilitaría el trabajo de estar calculando cada rectángulo, las Sumas de Riemann la pondríamos en términos de "n", le podríamos aplicar límite de "n" hacia infinito, siendo "n" el número de rectángulo, mientras más rectángulos haya mayor la exactitud será el área* (ver anexo 13, p. 118)

Comentarios: El estudiante realiza un tratamiento adecuado de los registros algebraico y gráfico y conversión entre ellos.

Tiene una idea del área bastante general de la Integral Definida y muestra indicios de que la puede calcular e interpretar utilizando varios registros de representación semiótica. Habría que precisar cómo relaciona la Integral Definida y el área bajo una curva.

Es capaz de utilizar distintas aproximaciones geométricas del área de una región. Se observa la influencia de la instrucción recibida en las clases habituales.

El estudiante G2E2

En los cuestionarios

En el Pretest opera con la expresión algebraica de la función, verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones, luego, evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica puntualmente la igualdad. No se observan marcas sobre la gráfica.

En el Postest calcula las integrales por separado y verifica la igualdad. No se observan marcas sobre la gráfica.

Comentarios: El estudiante se limita a trabajar en registros simbólicos. En el Pretest no está claro que haya comprendido la proposición planteada. En el Postest la respuesta puede ser producto de la creencia de que lo algebraico es más matemáticamente aceptable que lo gráfico.

En la entrevista

Inicialmente resuelve el problema de la misma manera que en el Postest. Al preguntarle

13) _ I: *¿Puedes dar una justificación gráfica de la igualdad de las integrales?*
14) _ E: *Con una aproximación gráfica. Lo podría verificar con los cuadrados, con trapecios. Apartando las gráficas.*
15) _ I: Sin apartarlas. ¿Puedes dar un ejemplo?
16) _ E: *Yo creo que dibujaría un trapecio aquí* (lo dibuja hasta la curva de f), *Dibujaría un trapecio hasta la parábola* x^2 *, lo mismo para la recta. Verificando se vería que los dos trapecios pequeños* (señala los trapecios bajo g y h) *forman el trapecio grande*

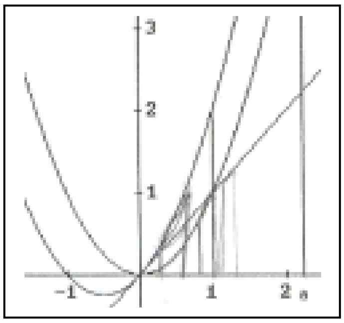


Figura 5.18

(ver anexo 13, p. 125)

El estudiante menciona un procedimiento que se puede considerar como un adecuado tratamiento del registro gráfico, en el cual se evidencia la influencia de la instrucción recibida en las clases habituales.

Al solicitarle otro tipo de interpretación, menciona

17) _ I: *¿Me puedes dar una interpretación numérica, sin usar integrales?*
18) _ E: *Se da la igualdad porque sería* $x^2 + x$ *que sería g(x) más h(x)*
19) _ I: *A parte de esos procedimientos que has dado ¿lo puedes hacer de otra manera?*
20) _ E: *Dándole valores a la x* (ver anexo 13, p. 125).

El comentario sobre el procedimiento se asemeja al que utilizó en el Pretest.

Comentarios: El tratamiento que realiza del registro gráfico evidencia la influencia de la instrucción recibida en las clases habituales. Esto no se había observado en las respuestas dadas en el Postest. Puede que en el cuestionario haya influido la creencia de que lo algebraico resulta más aceptable matemáticamente que lo gráfico o por simple economía de registro. Esto puede inhibir su capacidad para plantear una argumentación basada en registro gráfico.

Pretest/ PREGUNTA 2

Para el grupo total

Categoría 1. Trabaja sobre el gráfico dado.

Categoría 1.1. Dibuja un trapecio y dos triángulos, obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando la fórmula y $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.19 {13, 23}.

Categoría 1.2. Dibuja un rectángulo y dos trapecios, obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando las fórmulas $A = b \cdot h$ y $A = \frac{(B+b)}{2}h$, respectivamente. Ver figura 5.20 {27}.

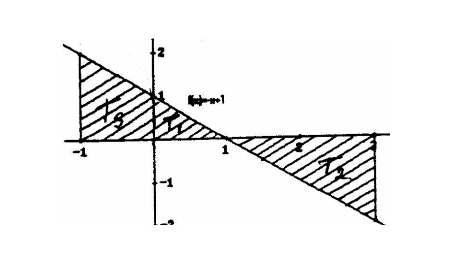


Figura 5.19

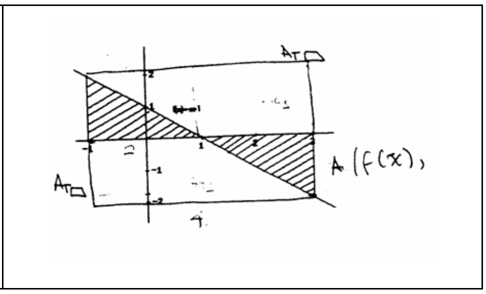


Figura 5.20

Categoría 1.3. Identifica los dos triángulos en el gráfico dado.

Categoría 1.3.1. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.21 {1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 24, 25, 26, 28}.

Categoría 1.3.2. Usa la expresión algebraica de la función y la fórmula de la distancia entre dos puntos para obtener las medidas de los lados y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.22 {19}.

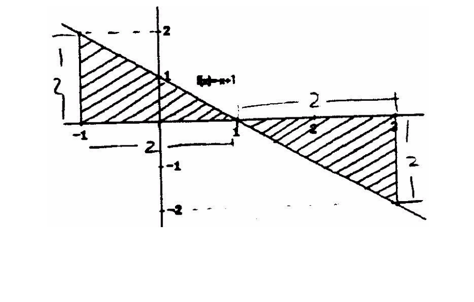


Figura 5.21

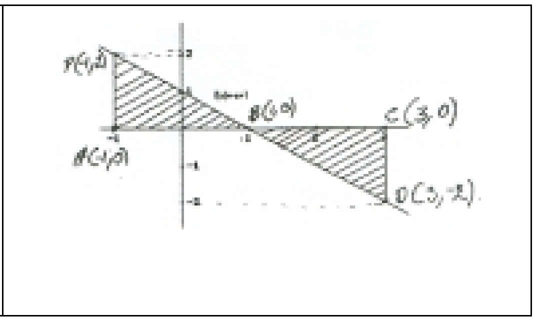


Figura 5.22

Categoría 1.3.3. Calcula la imagen de la función en -1 y 3, y le aplica valor absoluto al resultado. Calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.23 {7, 21, 22}.

Categoría 1.3.4 Aplica el teorema de Pitágoras para obtener las medidas de los lados y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.24. {4, 16, 17}.

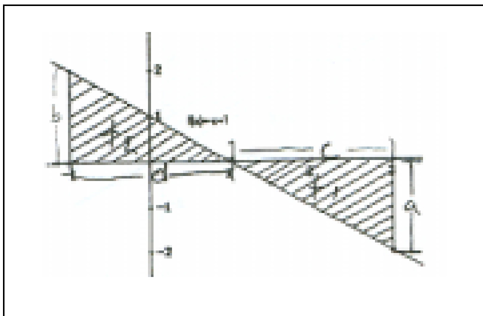


Figura 5.3

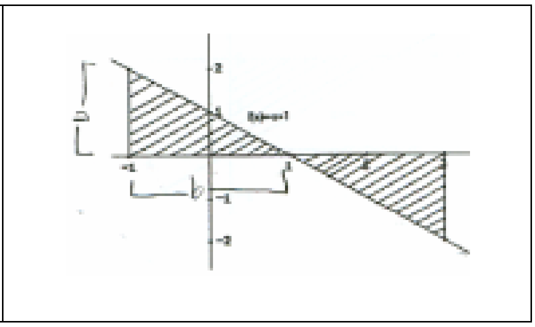


Figura 5.24

Categoría 2. No responde. {2, 14, 20}

Postest/ PREGUNTA 2

Para el grupo total

Categoría 1. Calcula el área de la región que está en la parte superior (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales.

Categoría 1.1. Antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX {1, 5, 8, 10, 12, 15, 18, 19, 20, 22, 27}.

Categoría 1.2. Aplica valor absoluto al resultado de la integral de la región situada bajo el eje OX. {7}.

Categoría 1.3. No cambia el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX.

Categoría 1.3.1. Suma las dos integrales sin cambiarle el signo a la integral de la región situada bajo el eje OX {4, 14}.

Categoría 1.3.2. No suma los resultados de las dos integrales {24}.

Categoría 2. Calculan el área de las regiones usando aproximación numérica {2}. Ejemplo.

Por la regla de Simpson

$$[0,2] \quad \Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$x_1 = 0 \;\; y_1 = 0; \;\; x_2 = 0.4 \;\; y_2 = 0.64; \;\; x_3 = 0.8 \;\; y_3 = 0.96;$$
$$x_4 = 1.2 \;\; y_4 = 0.96; \;\; x_5 = 1.6 \quad y_5 = 0.64; \quad x_6 = 2 \quad y_6 = 0$$

$$S_5 = \frac{2}{5}\left[0 + 4(0.64) + 2(0.96) + 4(0.96) + 2(0.64) + 0\right] = 1.28$$

$$\left[2, \tfrac{7}{2}\right] \qquad \Delta x = \frac{\tfrac{7}{2} - 2}{5} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$x_1 = 2 \;\; y_1 = 0; \;\; x_2 = 2.3 \;\; y_2 = -0.69; \;\; x_3 = 2.6 \;\; y_3 = -1.56;$$
$$x_4 = 2.9 \;\; y_4 = -2.61; \;\; x_5 = 3.2 \quad y_5 = -3.84; \quad x_6 = 3.5 \quad y_6 = -5.25$$

$$S_5 = \frac{3}{10}\left[0 + 4(-0.69) + 2(-1.56) + 4(-2.61) + 2(-3.84) + (-5.25)\right] = -2.644$$

Por ser área bajo la curva x es $\left|-2.644\right| = 2.644$ A_T =1.28+2.644=3.924

Categoría 3. Calcula el área de la región sobre el eje OX por aproximación numérica y el área de la región bajo OX usando la Integral Definida {9}.

Categoría 4. Calcula el área de la región sobre el eje OX utilizando Integral Definida y no calcula el área de la región que está bajo el eje OX.

Categoría 4.1. Desconoce, para la región bajo el eje OX, la recta vertical {3, 13, 23}

Categoría 4.2. La región bajo el eje OX no está bajo la curva {6, 28}.

Categoría 4.3. No calcula el área de la región bajo el eje OX {25}.

Categoría 5: No responde {21}.

De las categorizaciones anteriores, comprobamos que los estudiantes, antes de cursar la unidad de integrales utilizan la secuencia de representaciones gráfico-algebraico-numéricas (ver categoría 1). Al calcular el valor del área de la porción bajo el eje OX la han considerado como positiva; la mayoría ha estimado, observando la gráfica, la altura del triángulo dibujado por ellos, que se encuentra bajo el eje OX (ver categorías 1.1, 1.2, 1.3.1); otros calculan valores de la función utilizando la expresión algebraica (ver categoría 1.3.2), otros aplican valor absoluto para obtener un número positivo (ver categoría 1.3.3) y otros, más artificiosos, usan el teorema de Pitágoras (ver categoría 1.3.4). En todos estos procedimientos se observa la intención de resolver el problema para que el valor del área resulte positivo. No se observó que tuviesen problema con el calculo del área de la porción sobre el eje OX, simplemente la adicionaron con la que está bajo dicho eje.

Una vez cursada esta unidad, los estudiantes tienden a utilizar la gráfica de manera referencial para estimar el corte con el eje OX o para identificar las regiones; no se observó marcas sobre la gráfica. Calculan el área de la región, por lo general, utilizando integrales definidas (ver categorías 1, 3, 4). Utilizan aproximaciones numéricas (ver categorías 1 y 3) sin dibujar figuras elementales sobre la gráfica. No se observó, en general, que tuviesen problemas para calcular el valor del área de la región bajo el eje OX; no obstante, un pequeño grupo (ver categoría 4) presenta problemas con la interpretación de la gráfica. En general, los estudiantes fundamentan sus procedimientos en procesos algebraicos- numéricos, de modo que lo gráfico ha pasado a ser algo complementario. Debemos hacer notar que dos estudiantes (ver categorías 2 y 3) del G1 que cursaron PL en esta unidad fueron los que utilizaron aproximación numérica; esto puede estar influenciado por el énfasis puesto en las Prácticas de Laboratorio a la aproximaciones numéricas a través del Programa de Utilidades.

El estudiante G1E1.

En los cuestionarios

En el Pretest el estudiante considera la gráfica identificando dos triángulos; utiliza la fórmula de área de un triángulo para calcular las dos porciones, llamando X1 la porción que esta bajo del eje OX y X2 la que esta sobre el eje OX. Al percatarse que el valor para la porción de X1 le da un número negativo escribe "no es posible porque el área no puede ser negativa". Se presenta un obstáculo semántico, ya que al considerar que el área es positiva; no logra resolver el problema. Es evidente que el estudiante tiene dos representaciones semióticas del objeto que no logra articular, en la cual una le lleva a pensar en que si es posible (la gráfica) y la otra que no es posible (la numérica). Pensamos que este obstáculo puede ser debido a las implicaciones que tiene el uso de la palabra "área".

En el Postest utiliza Integral Definida para calcular el área; no obstante para el cálculo de la porción debajo del eje OX, le asigna al extremo derecho un valor genérico "b" y al calcular ésta no se percata del signo, con lo cual existe la duda de que si la respuesta sería o no como la que dio en el Pretest.

En la entrevista

Al preguntarle

47) _ I: *En esa pregunta ¿qué relación puedes establecer entre el área bajo el eje OX y la Integral Definida?*
48) _ E: *La gráfica de la función es ésta* (recorre con el lápiz la curva) *lo que pasa es que esto está fuera de la gráfica de la función* (se refiere a la región bajo el eje OX y sobre la curva)
49) _ I*: ¿Está limitada?*
50) _ E*: Si se puede calcular. Igualito a lo que hicimos en el anterior.*
51) _ I: *¿Qué relación puedes establecer entre el área bajo el eje OX y la Integral Definida?*
52) _ E*:* Pausa.
53) _ I*: ¿Se puede calcular esa área?*
54) _ E*: Sí*
55) _ I: *¿De qué manera la puedes calcular?*
56) _ E*: En el examen calculé el área de esto* (señala la región sobre el eje OX) se queda por unos segundos indicando con el lápiz la intersección de la curva con el eje X e indica la región bajo el eje OX
57) _ I: *¿Qué usaste para calcular esa área*? (se refiere a la región bajo el eje OX)
58) _ E*: Aquí puedo utilizar el mismo método.*
59) _ I: *¿Cuál?*
60) _ E*: El de rectángulos.*
61) _ I*: ¿Integrales no puedes usar?*
62) _ E*: Pero ésta no* (señala la expresión algebraica de la función)
63) _ I: *¿Por qué?*
64) _ E: *Porque está fuera de la gráfica.*
65) _ I*: ¿Por qué dices que esta fuera de la gráfica? Porque la región rayada ya esta limitada. ¿Cuál es la región?*
66) _ E*: Ésta* (señala la región sobre el eje OX)
67) _ I*: ¿Y la otra no?*
68) _ E*: Bueno sí.*
69) _ I: *¿De dónde a dónde iría la integral?*
70) _ E*: De 2 a b* (se refiere a una letra que ha escrito como extremo derecho del intervalo para la región bajo el eje OX)
71) _ I*: ¿Se puede calcular esa integral?*
72) _ E*: Sí* (ver anexo 13, p. 103).

La región bajo el eje OX le confunde, tal vez el hecho de que en la gráfica no se viera explícitamente, con algún número, hasta donde llega la región le produzca la confusión.

73) _ I*: ¿Qué relación hay entre esa integral y el área? ¿Significa lo mismo? ¿O no se puede decir que el área es igual a esa integral?*
74) _ E*: ¿El área?*
75) _ I: *¿Él área será igual al valor de la integral en ese intervalo?*
76) _ E: *Sí.*
77) _ I: *¿Qué signo tendría la integral?*
78) _ E: *Las áreas no tienen signo. Cómo puedo decir que un área es negativa.*
79) _ I: *El área ¿qué es? ¿Un número, un objeto? ¿Qué es para ti un área?*
80) _ E: *Un área en un número, un espacio* (mueve el lápiz como demarcando una región)
81) _ I: *¿El espacio o un número?*
82) _ E*: El espacio que existe entre dos extremos.*
83) _ I*: Cuando te dicen calcula el área ¿qué haces? ¿Dibujas el área rayada o le asignas un número?*
84) _ E*: Yo la dibujo.*
85) _ I: *¿Y eso sería el cálculo del área?*
86) _ E*: La dibujo y si no me dan datos, le coloco que si x o x por la altura o un triángulo.*
87) _ I*: Cuando te dicen calcula el área de un triángulo, un cuadrado, ¿Qué hacías?*
88) _ E*:* Dibuja un triángulo.
89) _ I: *La figurita nada más ¿No le asignaban un número?*
90) _ E: *Sí.*
91) _ I*: ¿Qué es el área? ¿El dibujo representa el área o y número representa el área?*
92) _ E*: El número.*
93) _ I*: El dibujo ¿qué papel juega?*
94) _ E: *El dibujo es como ayudarse para el cálculo.*
95) _ I: *Entonces ¿qué es el área, el dibujo o el número?*
96) _ E*: El número.*
97) _ I: *¿Y la figura es representativa...?*
98) _ E*: De ese número.*
99) _ I*: Volvamos al problema* (ver anexo 13, p. 103).

Considera que el área es equivalente a la región, confunde lo geométrico de la región con el valor numérico.

100) _ E*: ¿Qué relación habría entre el área y la Integral Definida?* (se refiere a la región bajo el eje OX).
101) _ E: Risas*.*
102) _ I: *El área es un número ¿Y la integral qué es?*
103) _ E*: Un número.*
104) _ I: *¿Qué relación hay entre ese número dado por la integral y el que puedes calcular del área?*
105) _ E*: Que si son iguales es el área.*
106) _ I: *¿Esa integral que signo tendría?*
107) _ E*: Positivo.*
108) _ I: *¿Bajo el eje OX?*
109) _ E: *Si, porque ella dará negativa.*
110) _ I: *¿La integral o el área?*
111) _ E*: La integral va dar negativa. Pero la integral es el área.*
112) _ I*: ¿El área es positiva o negativa?*
113) _ E: *Positiva.*
114) _ I: *¿Qué harías tú para que dando la integral negativa, diera el área esa? Parece que hay una contradicción, que la integral sea negativa y el área que da positiva. ¿Qué harías para que dé positiva?*
115) _ E*:* Se queda unos segundos pensando y dice *¡no sé profesor! Se sobreentiende que si es área va dar positiva.*
116) _ I: *¿Qué modificación le harías a ese proceso para que te de positivo?*
117) _ E*: No utilizando los signos. No sé, multiplicando por -1 a ambos lados (señala un -20= 20 que ha escrito)*
118) _ I*: ¿A quién multiplicarías por -1?*
119) _ E*: De todas maneras me dará lo mismo.*
120) _ I: *¿A ambos lados de qué?*
121) _ E*: No sé, no lo veo* (ver anexo 12 p. 104).

Parece que la idea que tiene de la integral equivalente al área le produce un obstáculo a la hora de establecer la relación entre la integral de valor negativo y el valor del área de una región bajo la curva.

Comentarios: De las respuestas dadas se tiene que el estudiante tiene dificultades para resolver problemas que involucran el cálculo del área de una región que se encuentra bajo el eje OX. Esto puede ser ocasionado por la idea que tiene de la integral al considerarla como sólo valor del área; además confunde el valor numérico de área con el aspecto geométrico de la región.

Al considerar que no puede resolver el problema con una integral, se inclina por la alternativa de aproximar con rectángulos; esto puede ser consecuencia de la instrucción recibida.

El tratamiento y, por tanto, la conversión entre los registros simbólico y gráfico no se realizan adecuadamente como consecuencia de los problemas descritos anteriormente.

El estudiante G1E2.

En los cuestionarios

En el Pretest identifica dos triángulos y utiliza elementos de geometría elemental para calcular el área de la región.

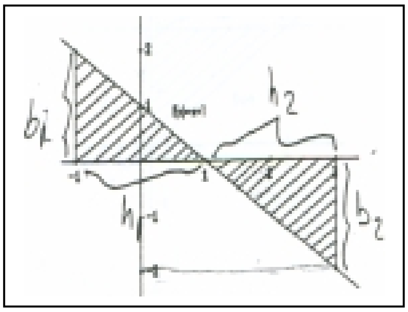


Figura 5.25

En el Postest calcula las áreas de las regiones sobre y bajo el eje OX utilizando integrales; antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX. No se observan marcas sobre la gráfica.

Comentarios: El estudiante logra resolver el problema en los dos cuestionarios. El tratamiento del registro gráfico en el Pretest es más evidente que en el Postest. Esto puede ser debido a que en el primero resulte más indispensable el uso del gráfico para resolver el problema, en cambio en el segundo se restringe a la identificación de las regiones y la estimación del corte de la curva con el eje OX. El hecho de que no se observen marcas sobre la gráfica no significa que el estudiante no la considere en la resolución del problema, sino que estime el corte por observación del gráfico y la decisión de anteceder el signo a la segunda integral por observar que la segunda región está bajo el eje OX.

En la entrevista

Identifica geométricamente las regiones al calcular el área.

35) _ I: *¿Qué es lo que hay que hacer ahí?*
36) _ E*: Tenemos una parábola que es cóncava hacia abajo, en donde nos dicen que calculemos el área de la parte rayada. Una parte es positiva, que esta sobre el eje X y la otra es negativa que se encuentra debajo.*
37) _ I*: ¿Y qué relación puedes establecer entre el área bajo el eje X y la Integral Definida?*
38) _ E*: El área bajo el eje X sería una integral negativa.*
39) _ I*: ¿Y el área es negativa o es positiva?*
40) _ E*: En área es positiva.*
41) _ I: *¿Qué harías para resolver el problema? Ya que estás diciendo que la integral es negativa.*
42) _ E: *Restaría el área de arriba menos el área de abajo.*
43) _ I: *¿Cuáles son esas áreas?*
44) _ E*: El área de arriba es la que esta comprendida en el intervalo 0 a 2* (señala con el lápiz la región sobre el eje OX) *y la de abajo la que esta comprendida entre 2 a 3,7* (señala con el lápiz la región bajo el eje OX)
45) _ I*: Con respecto a las integrales ¿Cómo sería?*
46) _ E*: Si nosotros evaluamos la integral para calcular un área debe dar positiva.*
47) _ I: *Por ejemplo, Tú calculas la integral de la parte de arriba y la parte de abajo y te da un número, vamos a decir que uno te da 16 y el otro te da*
48) _ E*: Menos 8* (escribe -8)
49) _ I*: Okey, entonces tú restas esas cantidades y te da el área total.*
50) _ E*: Tomando el área de arriba, restándole la parte de abajo. O sea, la de arriba menos la de abajo me da positivo.*
51) _ I: *¿Qué restas, el área o las integrales?*
52) _ E: *Las integrales.*
53) _ I*: Ya.*
54) _ E*: La integral de arriba menos la integral de abajo.*
55) _ I: *¿Tienes alguna idea de por qué esa integral te da negativa?*
56) _ E*: Porque esta por debajo del eje OX.*
57) _ I: *¿Quién esta por debajo de OX? ¿La integral?*
58) _ E*: La integral que va de 2 a 3,7* (ver anexo 13, p. 111).

Comentarios: El estudiante realiza adecuados comentarios relacionados con el procedimiento a seguir para calcular el área pedida. Es consciente de que el valor de la integral de la región bajo el eje OX es negativo y que le debe cambiar el signo para establecer el valor del área de la región. Esto refleja un tratamiento adecuado tanto del registro gráfico como del algebraico.

El estudiante G2E1.

En los cuestionarios

En el Pretest identifica dos triángulos, calcula las imágenes de -1 y 3, y le aplica valor absoluto al resultado, calcula las áreas usando la fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$.

En el Postest calcula el área de las regiones (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales, antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX.

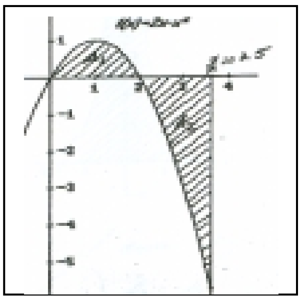


Figura 5.26

Comentarios: El estudiante logra resolver el problema en los dos cuestionarios. Aunque no se observan marcas sobre la gráfica en el Pretest, por el procedimiento utilizado se deduce que basa la resolución en el gráfico. En el Postest, identifica las dos regiones; puede que estime el corte por observación del gráfico y la decisión de anteceder el signo a la segunda integral por observar que la segunda región está bajo el eje OX.

En la entrevista

En la pregunta 2 al preguntarle

20) _ I: *¿Qué relación puedes establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la Integral Definida?*
21) _ E: *Que la integral de la parte de la curva que está debajo del eje OX, debería dar un valor negativo; como el área no puede ser negativa le aplicamos valor absoluto y solucionamos ese inconveniente.*
22) _ I: *¿La integral da positiva o negativa?*
23) _ E: *Al final debería dar positiva. Aquí da negativa* (señala con el lápiz la región bajo el eje OX). *Le aplicamos la integral desde 2 hasta 7/2 el resultado da negativo.*
24) _ I: *¿Y el área?*
25) _ E: *Da positiva.*
26) _ I: *¿Puedes explicar por qué la integral da negativa y el área da positiva?*
27) _ E: *Si la integral resulta negativa, el área da negativa, porque la integral es el área bajo la curva.*
28) _ I: *¿Pero el área es negativa o es positiva?*
29) _ E: *El área es positiva.*
30) _ I: *¿Por qué la integral da negativa?*
31) _ E: *Porque utilizáramos rectángulos* (dibuja sobre la gráfica segmentos de línea) *de igual base, las imágenes de la base, ya sea con el extremos izquierdo o el extremo derecho, sería un número negativo y al multiplicar un número positivo que sería la base por un número negativo que sería la altura o la imagen derecha o izquierda, el resultado da negativo; si se suman números negativos el resultado es negativo.*

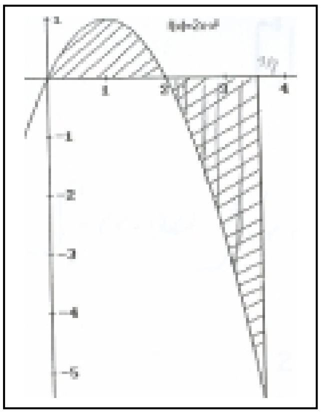


Figura 5.27

(ver anexo 13, p. 118)

Comentarios: El estudiante diferencia lo que es la Integral Definida del área de una región, considera que la Integral Definida puede asumir un valor negativo, en cambio el área es positiva. Por un momento se confunde, pero rectifica.

Realiza un tratamiento adecuado de la representación gráfica. Cuando menciona la construcción de los rectángulos, el procedimiento se asemeja al dado en clases habituales, realizando una transferencia de lo aprendido.

El estudiante G2E2.

En los cuestionarios

En el Pretest trabaja sobre el gráfico dado y obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula el área usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

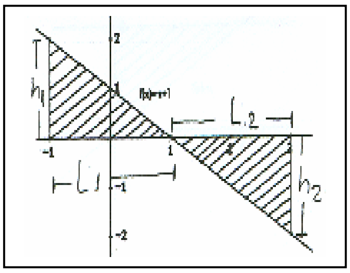


Figura 5.28

En el Postest calcula el área de las regiones (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales, no cambia el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX y suma las dos integrales sin cambiarle el signo a la integral de la región situada bajo el eje OX. No se observan marcas sobre la gráfica.

Comentarios: El estudiante realiza en el Pretest un adecuado tratamiento del registro gráfico. En el Postest realiza un adecuado tratamiento del registro algebraico; la gráfica es utilizada para determinar el corte con el eje OX y como referencia para anteceder el signo negativo a la segunda integral.

Aparentemente es capaz de diferenciar la relación entre Integral Definida y área de una región, y considerar que la Integral Definida puede asumir un valor negativo y el área sólo valor positivo.

En la entrevista

En la pregunta 2 al preguntarle

23) _ I: *¿Qué relación puedes establecer entre área bajo el X y la Integral Definida?*
24) _ E: *Si hay relación porque por medio de la Integral Definida, la podemos definir entre 2 y 3.6. Hay relación porque la podemos sacar por ese método* (señala con el dedo la gráfica).
25) _ I: *¿Tiene el mismo signo esa área que la Integral Definida?*
26) _ E: *No porque como esta bajo el eje X, hay que colocarle al área el signo menos para que nos diera el área positiva.*
27) _ I: *¿Qué signo tiene la integral, ahí debajo del eje x?*
28) _ E: *Nos da negativa área, si la realizamos así sin.*
29) _ I: *¿El área o la integral?*
30) _ E: *El área, el área nos daría negativa. Pero la integral tiene el signo positivo.*
31) _ I: *¿El área es un valor negativo?*
32) _ E: *No puede dar negativa, porque el área no es un valor negativo. Tendríamos que ponerle un signo menos a la integral.*
33) _ I: *¿Qué es lo que da negativo, la integral o el área?*
34) _ E: *La integral da negativa. Si la integral da negativa, el área da negativa.*
35) _ I: *¿Entonces para que le pones el signo negativo a la integral?*
36) _ E: *Le ponemos el signo menos a la integral para que el área de positiva.*
37) _ I: *¿El área es un valor positivo negativo?*
38) _ E: *Positivo.*
39) _ I: *¿Por qué la integral da negativa?*
40) _ E: *Porque la estamos calculando bajo el eje OX* (ver anexo 13, p. 124).

Comentarios: El estudiante, aunque muestra cierta confusión en cuanto al signo de la integral y el área, se observa que considera que la Integral Definida puede asumir valores positivos o negativos; esto nos lleva a conjeturar que tiene una idea amplia de la Integral Definida y que en ocasiones puede ser utilizada para el cálculo del área de una región.

Pre.test/ PREGUNTA 3

Para el grupo total.

Categoría 1: No es posible calcular el área de la región

Categoría 1.1. Afirma que la región es infinita {2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 25}.

Categoría 1.2. Afirma que el dominio no está restringido {14, 26}.

Categoría 2: Acota la región dibujando segmentos y calcula el área usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (ver figura 5.29).

Categoría 2.1. Afirma que sería imposible calcular el área sin tener el intervalo. {24}.

Categoría 2.2. Afirma que el resto no es calculable porque no se puede asociar a una superficie conocida {15}.

Categoría 2.3. No considera el resto de la región {8, 27}.

Categoría 2.4. Afirma que la región es infinita {1}.

Categoría 2.5. Afirma que el dominio no está restringido {12}

Categoría 2.6. Afirma que

$x_1 = \frac{-xy + x}{2};\ x_2 = yx - \frac{1}{2};\ x_3 = y - xy;\ A_t = x_1 + x_2 + x_3$ {10}

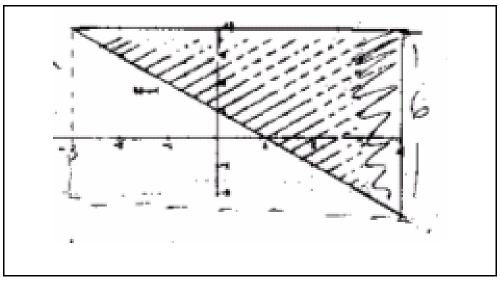


Figura 5.29

Categoría 3. No responde {11, 19, 23, 28}

Postest/ PREGUNTA 3

Categoría 1: No es posible calcular el área

Categoría 1.1. La función no es continua en el intervalo {8, 19, 26}.

Categoría 1.2. Plantea

$$\int_a^b x^{-2} dx$$

Categoría 1.2.1. Para [a, b]= [-18/10, 22/10]. Sin calcular, menciona que la integral no existe en cero {26}.

Categoría 1.2.2. La calcula dividiendo [a, b] en [-2, 0], [0, 2] y obtiene 1/0 en ambos casos. Menciona que la integral no existe en cero {5, 27}.

Categoría 1.3. La función no está definida en el intervalo.

Categoría 1.3.1. Plantea $\int_a^b x^{-2} dx$

Divide [a, b] en [-1.7, 0], [0, 2.1] sin calcular {6}.

Categoría 1.4. La gráfica tiene una asíntota.

Categoría 1.4.1. Plantea $\int_a^b x^{-2} dx$

La calcula para [a, b]= [-1.7, 2.2] y obtiene 1.04278 {12}.

Categoría 1.4.2. Plantea $\int_a^b x^{-2} dx$

La calcula dividiendo [a, b] en [-1.8, 0], [0, 2.1] y obtiene “infinito” en ambos casos {14}.

Categoría 1.5. Afirma que la función no está definida en un punto x {22}.

Categoría 1.6. Afirma que la región rayada es infinita {2, 9, 13, 18, 21, 25}.

Categoría 1.7. Afirma que la curva crece sin límite {1, 23, 28}.

Categoría 1.8. Afirma que la región no está acotada.

Categoría 1.8.1. Sin explicación por qué {3}.

Categoría 1.8.2. Da un ejemplo gráfico. Ver figura 5.30 {24}.

Categoría 1.9. Afirma que la región debe estar en un intervalo cerrado. Da un ejemplo gráfico. Ver figura 5.31 {4}

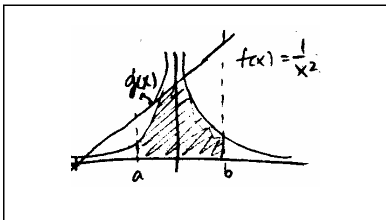


Figura 5.30

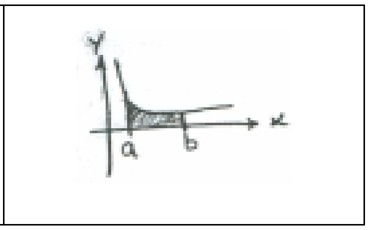


Figura 5.31

Categoría 2. Sí es posible calcular el área.

Categoría 2.1. Calcula

$$I = \int_a^b \frac{1}{x^2} dx$$

Categoría 2.1.1. Para [a, b]= [-1.75, 2.1] y obtiene I= -1.06 {7}.

Categoría 2.1.2. Para [a, b]= [-1.8, 2.2] y obtiene I= -5.49 {15}.

Categoría 2.1.3. Para [a, b]= [0, 2] y obtiene I= 8/3. {20}.

Categoría 2.2. Aplica la Regla de Simpson y afirma que el área es 2.82. {10}.

Tomando en cuenta lo anterior, podemos afirmar que los estudiantes, antes de recibir la instrucción, basan su justificación en el registro gráfico dado, de modo que la mayoría considera que el área no se puede calcular; argumentando que la región es infinita o su dominio no está restringido (ver categorías 1.1, 1.2). Otros delimitan la región con segmentos, tal vez porque tienen una idea de que el área es siempre finita y que es siempre calculable (ver categorías 2.2, 2.3). Otros, de igual manera, delimitan parte de la región y se refieren al resto como que no es calculable (ver categorías 2.1, 2.2, 2.3). Un estudiante (ver categoría 2.6) establece expresiones algebraicas para el cálculo del área de la región, tal vez tiene la idea de que esta manera de resolución es matemáticamente más aceptable.

Después de cursar la unidad, la mayoría de los estudiantes consideran que el área de la región no se puede calcular. Utilizan el registro gráfico, unos con mayor énfasis (ver categorías 1.1, 1.6, 1.7, 1.8.1) que otros (ver categorías 1.2.1, 1.4.1); argumentan que la función no existe en cero, que la región es infinita, o que no está acotada; los razonamientos basados en registros gráficos están ligados, en gran parte, al tratamiento de los registros simbólicos, es decir al cálculo de la Integral Definida; la representación gráfica ejerce mayor influencia en el tipo de respuesta que la algebraica (ver categoría 1.2.1). Los que mencionan que sí es posible calcular el área sólo usan el registro simbólico esto es, calculan la integral aplicando directamente la regla de Barrow como el cálculo de integrales (ver categoría 2.1) o la aproximación numérica (ver categoría 2.2). Varios estudiantes del G1 dan argumentaciones gráficas en sus respuestas (ver categorías 1.6, 1.7, 1.8.1); debemos hacer notar que un estudiante (ver categoría 1.9) dibuja una figura semejante a la que se puede obtener trabajando con el PU, es decir, con la idea de aproximar una región mediante cuadraturas.

El estudiante G1E1.

En los cuestionarios

En el Pretest el estudiante acota la gráfica con un segmento horizontal y uno vertical.

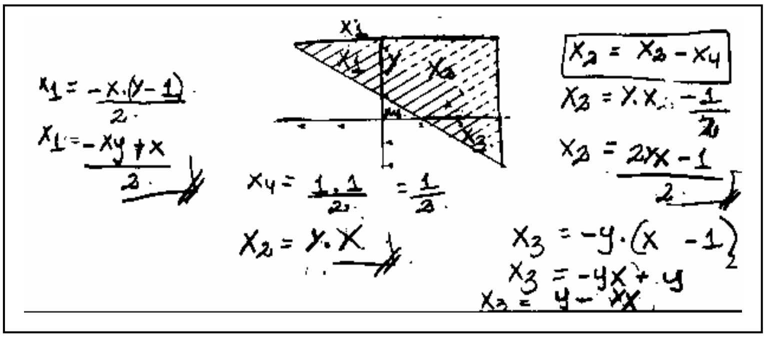


Figura 5.32

Luego divide el área en porciones formadas por triángulos y un cuadrado; le asigna valores genéricos a las longitudes de los lados con el fin de usar las fórmulas para el cálculo del área; seguidamente plantea ecuaciones tratando de establecer el área total; puede que piense que expresando el área con elementos genéricos sea suficiente para resolver el problema. Lo interesante es que a pesar de que tiene dos representaciones del objeto no logra determinar valores numéricos que orienten su respuesta; además al acotar la gráfica no logra dar el salto de lo finito a lo infinito, llevándolo a pensar que el área es calculable.

En el Postest utiliza la regla de Simpson para hallar un valor aproximado del área; en la gráfica no se observa ninguna marca, posiblemente el procedimiento lo realizó sin tomar en cuenta la gráfica.

En la entrevista

En la pregunta 3 menciona.

125) _ E*: Lo que pasa es que va para infinito* (raya con el lápiz prolongado la gráfica en la parte superior)
126) _ I: *¿En qué afecta el hecho que sea infinito?*
127) _ E: *Que no tenemos límite hasta dónde la vamos a calcular.*
128) _ I: *¿Qué otro cosa puede estar fallando allí?*
129) _ E*: Yo puedo decir, lo hago por rectángulos* (mueve el lápiz sobre la gráfica como si quisiera dibujar rectángulos) sí*, pero cuando llegué aquí* (mueve el lápiz acercándose al eje OY y prolongando hacia arriba) *hasta dónde.*
130) _ I: *¿Qué condiciones debe cumplir esa curva para que se pueda calcular ésa área?*
131) _ E*: Que tenga por decir, límite, algo que me diga de dónde hasta dónde* (traza un segmento en la parte superior de la gráfica). *Porque yo puedo decir de -2 a 0 y de 0 a 2 pero no me limita* (señala la parte superior de la gráfica).
132) _ I: *¿Esa función es continua?*
133) _ E*: Ella es continua.*
134) _ I*: ¿Sí?*
135) _ E*: Ah, no, es discontinua.*
136) _ I: *¿En dónde?*
137) _ E*: Aquí* (señala con el lápiz la parte superior de la gráfica)
138) _ I*: ¿La discontinuidad no se establece con los valores de x? ¿En dónde sería discontinua?*
139) _ E*: Es discontinua de -1 hasta 1.*
140) _ I: *Puede ser en algún valor o hay un valor específico.*
141) _ E*: El cero* (mueve el lápiz de abajo hacia arriba cerca del eje OY) (ver anexo 13, p. 104).

El estudiante reacciona condicionado por lo visto en las Prácticas de Laboratorio, realiza una transferencia de la construcción de rectángulos a la aproximación geométrica de la región.

Basa su justificación en el tratamiento del registro gráfico.

142) _ I*: ¿Si tengo una función discontinua le puedo calcular el área?*
143) _ E*: Sí.*
144) _ I*: ¿Cómo?*
145) _ E: *Por ejemplo, si esto fuera una curva así,* dibuja

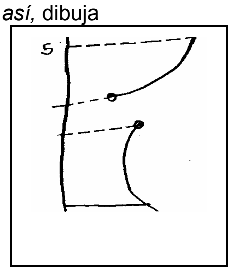


Figura 5.33

Es discontinua, pero me dan el límite (señala la parte superior de la gráfica)
146) _ I*: ¿Cuál es el problema que tenemos en esta gráfica?* (se refiere a la gráfica dada)
147) _ E*: Que no tenemos una línea horizontal.* (Señala la parte superior de la gráfica dada) (ver anexo 13, p. 105)

El ejemplo planteado es muy importante ya que se trata de una discontinuidad a trozos que no esta previsto a este nivel.

Comentarios: El estudiante muestra un buen tratamiento del registro gráfico y es capaz de plantearse situaciones relacionadas con discontinuidades finitas.

La idea de aproximación del área también la aplicó cuando cumplimentó el Postest.

El estudiante G1E2.

En los cuestionarios

En el Pretest acota la región dibujando segmentos, calcula el área utilizando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y no considera el resto de la región.

En el Postest menciona que el área de la región no es calculable, justifica que la función no es continua en el intervalo. No se observan marcas en la gráfica.

Comentarios: El estudiante hace un inadecuado tratamiento del registro gráfico en el Pretest, puede que la presentación de la gráfica le confunda y considere que debe acotar. En el Postest no está claro si la justificación se basa en la expresión algebraica de la función o en la observación de la gráfica.

En la entrevista

En la pregunta 3 basa su justificación en la representación gráfica y se observa la influencia de la instrucción recibida en su respuesta.

61) _ I: *¿Consideras que se puede calcular el área?*
62 _ E*: Primeramente tomaría este intervalo de aquí a aquí* (señala con el lápiz el intervalo de -2 a 0) (Pausa). *Podría tomar rectángulos superiores e inferiores de esa parte para tener una aproximación de esa área* (mueve el lápiz sobre la región como simulando rectángulos).
63) _ I: *¿Consideras que esa área la puedes calcular?*
64) _ E*: Rectángulos inferiores y superiores y si tuviese la función que me define la gráfica, se podría calcular.*
65) _ I*: ¿Es indispensable tener la función para calcular el área?*
66) _ E*: Para utilizar integrales, sí.*
67) _ I*: A parte de integrales, ¿Habría otro forma de calcularla, auque no tengamos la expresión de la función?*
68) _ E: (Se queda pensando por unos segundos) *Sería como calcular el área de cierta cantidad de triángulos* (recorre con el lápiz las líneas de la región rayada).
69) _ I*: ¿Qué significa para ti esas rayitas que están allí*? (se refiere a las líneas que están en la parte superior de la gráfica).
70) _ E*: Esto me dice que esto tiende a un número muy grande. Pero para calcular el área, la base se podría hacer como un intervalo.*
71) _ I: *¿Hasta dónde?*
72) _ E: *Un intervalo abierto. Puede ser desde -2 hasta acercarse a cero* (marca con el lápiz puntos cerca del origen)
73) _ I: *¿Y que sucede en cero?*
74) _ E: *La gráfica va tendiendo a infinito.*
75) _ I*: ¿Qué condiciones debe tener la gráfica para que le puedas calcular el área?*
76) _ E*: Ser continua.*
77) _ I*: ¿Y qué más?*
78) _ E*: Ser continua y derivable.*
79) _ I: *¿Y esta función es continua?*
80) _ E: *No.*
81) _ I: *¿Le puedes calcular el área?*
82) _ E: *Tomando un intervalo en donde el punto de discontinuidad se excluya.*
83) _ I*: ¿Cuál sería el procedimiento para calcularla?*
84) _ E*: Tomaría hasta aquí, esta parte aquí* (marca con el lápiz un pequeño segmento vertical antes del origen y otro después del origen) *y supongamos esta parte* (se refiere a la parte a la izquierda del eje X) *me dé hasta 3* (se refiere a un valor en el eje Y) *entonces el área sería toda esta parte* (raya parte de la región a la izquierda del eje Y y que no llega al eje Y).
85) _ I: *¿Qué figuras usarías para hacer ese trabajo?*
86) _ E*: Rectángulos. Para tener una aproximación de esa área, tomaría rectángulos superiores y rectángulos inferiores* (dibuja varios rectángulos sobre la región que ha rayado).

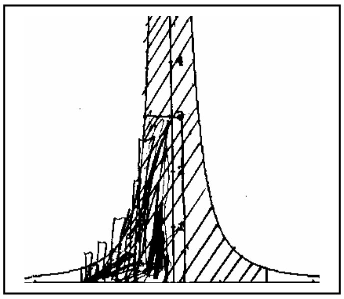


Figura 5.34

87) _ I*: ¿Hasta dónde?*
88) _ E*: Hasta el intervalo antes señalado* (se refiere al intervalo desde -2 hasta cerca de cero).
89) _ I: *¿Y del otro lado que harías?*
90) _ E: *Yo sé que estas dos gráficas tienen simetría, yo podría multiplicarlo por dos* (ver anexo 13, p. 112).

Comentarios: En las respuestas del estudiante se destaca la influencia de la instrucción recibida; el procedimiento descrito es el utilizado en las Prácticas de Laboratorio y con el Programa de Utilidades, para aproximar geométricamente la región bajo una curva.

Realiza un tratamiento adecuado del registro gráfico.

El estudiante G2E1.

En los cuestionarios

En el Pretest afirma que no es posible calcular el área y argumenta que la región es infinita. No se observan marcas sobre la gráfica.

En el Postest afirma que no es posible calcular el área y argumenta que la función no está definida en un punto *x*. No se observan marcas sobre la gráfica.

Comentarios: El estudiante realiza en el Pretest un adecuado tratamiento del registro gráfico. En el Postest, aparentemente, basa el argumento en la expresión algebraica de la función. Las razones dadas en ambos cuestionarios son las elementales.

En la entrevista

En la pregunta 3 al preguntarle:

34) _ I: *¿Se puede calcular el área entre -2 y 2?*
35) _ E: *El área aquí es infinita* (señala con el dedo la gráfica).
36) _ I: *¿Qué significa para ti lo rayado?*
37) _ E: *Significa que eso continúa hacia arriba.*
38) _ I: *¿Es posible calcular esa área?*
39) _ E: *No se puede calcular.*
40) _ I: *¿Por qué?*
41) _ E: *Si el área tiende hacia infinito en Y* (recorre el eje con el lápiz) *hay un punto en la función donde no es continua, no esta definida la función. Cuando lleguemos a x igual cero, no esta definido.*
42) _ I: *¿Qué condiciones debe cumplir esa gráfica para que se pueda calcular el área?*
43) _ E: *Qué en el intervalo -2 hasta 2 no exista un valor que vuelva a la función indeterminada, porque al volverla una indeterminación, con los conocimientos que tenemos de Cálculo 1, no lo podríamos calcular.*
44) _ I: *¿Y en cuanto a la continuidad de la función?*
45) _ E: *No es continua en el punto x igual cero* (ver anexo 13, p. 119).

Comentarios: El estudiante realiza un tratamiento del registro gráfico, el cual utiliza para argumentar su respuesta.

El estudiante G2E2.

En los cuestionarios

En el Pretest menciona que no es posible calcular el área de la región, afirma que el dominio no está restringido. No se observan marcas sobre la gráfica.

En el Postest menciona que no es posible calcular el área de la región, afirma que tiene una asíntota. Plantea las integrales $\int_{-1.8}^{0}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\infty$ y $\int_{0}^{2.1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\infty$

Comentarios: El estudiante, en el Pretest, basa su argumentación en el gráfico. En el Postest su justificación es más avanzada, el resultado de que las integrales son iguales a infinito la debe deducir de la gráfica, ya que este tipo de resultados sólo se llegan a ver en un curso posterior (integrales impropias). De aquí que realiza un adecuado tratamiento de registro gráfico y algebraico y conversión entre ellos.

<u>*En la entrevista*</u>

En la pregunta 3 al preguntarle

41) _ I: *¿Se puede calcular el área entre -2 y 2?*
42) _ E: *No, porque no estaría definida esta gráfica* (Señala con el dedo la gráfica de abajo hacia arriba) *en esta área en especifico. Habría que definir otro intervalo.*
43) _ I: *¿En cuál?*
44) _ E: *En -3 y -1. Porque ahí si estamos calculando un área bajo la curva. Pero entre -2 y 2 porque la gráfica nunca va llegar al eje Y.*
45) _ I: *¿La curva cumple con las condiciones para que se le pueda calcular el área?*
46) _ E: *En algunos intervalos. En este específico no.*
47) _ I: *¿Cuáles son las condiciones?*
48) _ E: *Que la función no pase por x igual a cero. Se puede calcular en 0.1, pero nunca va a llegar a tocar el eje Y.*
49) _ I: *¿Qué relación estableces entre valor cero y el dominio de la función?*
50) _ E: *El dominio sería todos los números reales menos el cero.*
51) _ I: *¿De qué manera influye la continuidad o discontinuidad de la gráfica en el cálculo del área?*
52) _ E: *En este caso como no es continua en este intervalo, no se puede calcular el área. Pero entre -3 y -1, como hay continuidad si se puede calcular* (ver anexo 13, pp. 124).

Comentarios: El estudiante realiza un tratamiento del registro gráfico, el cual utiliza para argumentar la imposibilidad de calcular el área de la región. No menciona la Integral Definida en su respuesta; no obstante puede que considere su utilización cuando se refiere a la discontinuidad de la gráfica.

Pretest y Postest/ PREGUNTA 4

<u>*Para el grupo total.*</u>

Pretest. Primera pregunta

Categoría 1 Trabaja sobre la gráfica dada.

Categoría 1.1. Dibuja cuatro rectángulos, calcula el área usando la fórmula $A=\frac{b\cdot h}{2}$ y justifica la cota inferior comparando con el área de R_1 =12 y la cota superior comparando con la suma aproximada de las áreas $R_1+1/3R_2+1/2R_3$ =26. Ver figura 5.35 {25}.

Categoría 1.2: Dibuja dos rectángulos, calcula las áreas usando la fórmula $A=b\cdot h$ y justifica la cota inferior comparando con el área de R_2 =12 y la cota superior comparando con el área de R_1=48. Ver figura 5.36 {18, 20, 21, 26}.

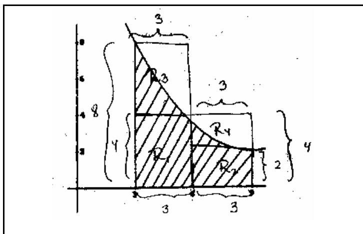


Figura 5.35

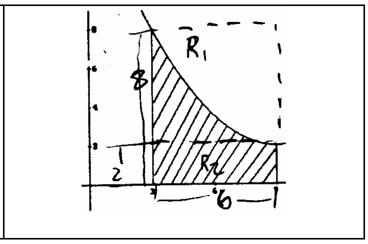
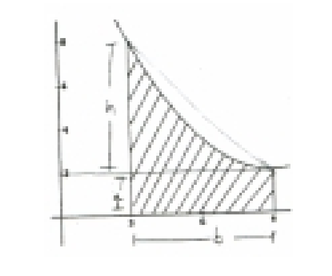


Figura 5.36

Categoría 1.3: Dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas usando las fórmulas $A{=}b{\cdot}h$ y $A=\dfrac{b\cdot h}{2}$ respectivamente. Justifica la cota inferior comparando con el rectángulo de área igual a 12, y la cota superior comparando con la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo (área total = 30). Ver figura 5.37 {1, 5, 6, 9, 10, 12, 19, 22}.

Categoría 1.4: Dibuja dos rectángulos y un triángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A{=}b{\cdot}h$ y $A=\dfrac{b\cdot h}{2}$ respectivamente, suma las áreas, obtiene el valor 24 y lo compara con las dos cotas dadas. Ver figura 5.38 {2}.



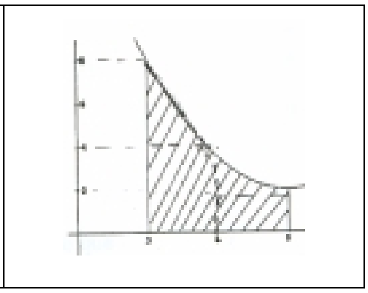
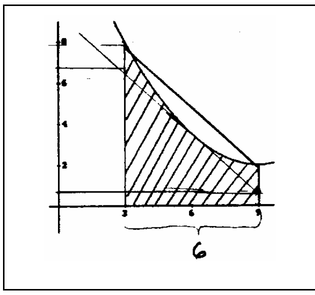


Figura 5.37 Figura 5.38

Categoría 1.5: Dibuja dos trapecios y calcula sus áreas usando la fórmula $A=\dfrac{(B+b)}{2}h$. Justifica la cota inferior y la compara con el área del trapecio que es igual a 22.2, y la cota superior comparando con el área del trapecio igual a 30. Ver figura 5.39. {7}.

Categoría 1.6: Dibuja un trapecio, calcula el área usando la fórmula $A=\dfrac{(B+b)}{2}h$, y justifica las dos cotas por comparación con el trapecio de área 30. Ver figura 5.40 {8, 14}.



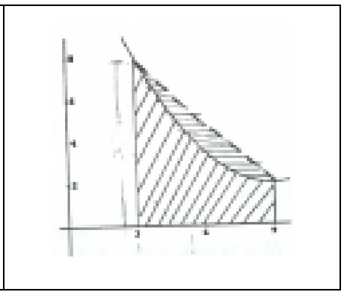


Figura 5.39 Figura 5.40

Categoría 2. No responde {3, 4, 11, 13, 15, 16, 17, 23, 24, 27, 28}.

CC-2: Segunda pregunta.

Categoría 1. Calcula cotas más ajustadas.

Categoría 1.1. Dibuja un triángulo y un rectángulo. Ver figura 5.37.

Categoría 1.1.1. Calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, y propone una mejor cota inferior con el área de triángulo, igual a 18, y una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo, igual a 30 {1, 5, 9, 10, 12}.

Categoría 1.1.2. Calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, propone una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo, igual a 30 {6, 19, 22}.

Categoría 1.2. Dibuja dos trapecios, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{(B+b)}{2}h$ y propone una mejor cota inferior con el área del trapecio igual a 22.2 y una mejor cota superior con el área del trapecio igual a 30. Ver figura 5.39 {7}.

Categoría 2. Calcula un valor aproximado del área.

Categoría 2.1. Dibuja cuatro rectángulos, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y afirma que el valor aproximado es 26. Ver figura 5.35. {25}.

Categoría 2.2. Dibuja dos rectángulos y un triángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, y afirma que el valor aproximado del área es 24. Ver figura 5.38 {2}.

Categoría 2.3. Dibuja un trapecio y calcula el área usando la fórmula $A = \frac{(B+b)}{2}h$ y afirma que el valor aproximado del área es 30. Ver figura 5.40 {8,14}.

Categoría 2.3. Dibuja un triángulo y un trapecio y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{(B+b)}{2}h$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, y afirma que el valor aproximado del área es 25. Ver figura 5.41. {26}.

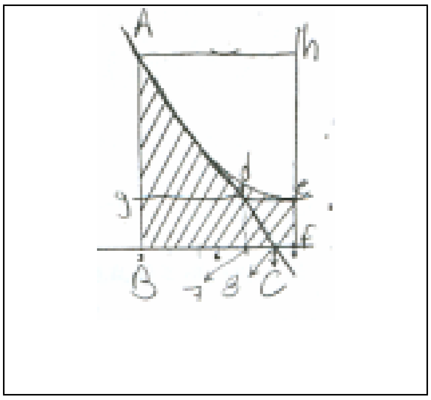


Figura 5.41

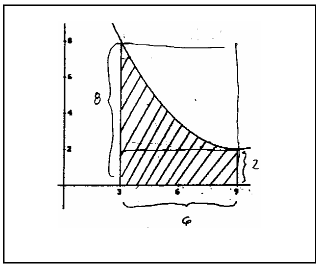
Categoría 3. No responde {3, 4, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 28}.

CC-3. Primera pregunta

Categoría 1. Trabaja sobre el gráfico dado.

Categoría 1.1. Dibuja dos rectángulos, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y justifica la cota inferior comparando con el área del rectángulo, igual a 12, y la cota superior comparando con el área del rectángulo, igual a 48. Ver figura 5.42 {1, 2, 4, 9, 18, 19, 21, 24}.

Categoría 1.2. Dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, y justifica las cotas comparando con la suma de las áreas, igual a 30. Ver figura 5.43 {3,12}.



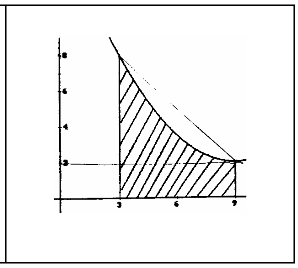


Figura 5.42 Figura 5.43

Categoría 1.3. Dibuja un trapecio y un rectángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{(B + b)}{2} h$ y $A = b \cdot h$ respectivamente, y justifica la cota inferior comparando con el área de trapecio, igual a 12 y la cota superior comparando con el área del rectángulo, igual a 48. Ver figura 5.44 {7}.

Categoría 1.4. Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores, para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 17 y para la de los superiores, 29, y no justifica las cotas. Ver figura 5.45 {22}.

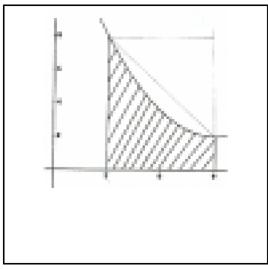


Figura 5.44

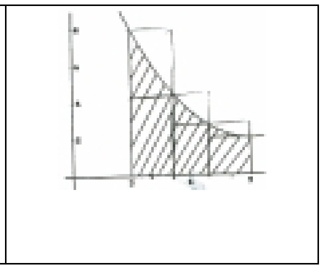


Figura 5.45

Categoría 1.5. Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores, calcula las áreas usando la fórmula $A = b \cdot h$ y para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 18 y para la de los superiores, 36, y justifica las cotas. Ver figura 5.46 {8,25}

Categoría 1.6. Dibuja dos rectángulos y dos triángulos, calcula las áreas usando las fórmulas $A = b \cdot h$ y $A = \frac{b \cdot h}{2}$ respectivamente, suma las áreas y obtiene 24. No justifica las cotas encontradas. Ver figura 5.47 {13}.

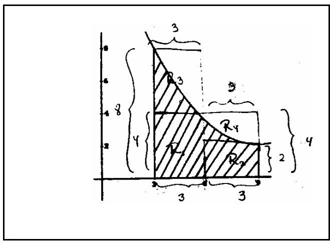


Figura 5.46

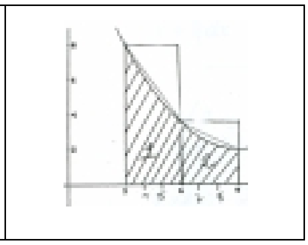


Figura 5.47

Categoría 1.7. Dibuja dos trapecios, calcula las áreas usando la aproximación numérica y calcula un área $A = \Delta x/2(y_0 + y_1 + y_2) = 25$ sin escribir la justificación. Ver figura 5.48 {27}.

Categoría 1.8. Dibuja cuatro trapecios, calcula las áreas usando aproximación numérica y justifica las cotas comparando con el área de $A = \Delta x/2(8+6+4+3+2) = 17.25$ con $\Delta x = 2$ [uso incorrecto de la regla del trapecio]. Ver figura 5.49 {26}.

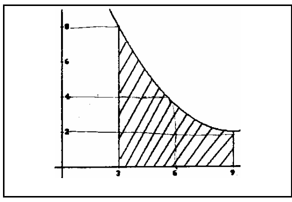


Figura 5.48

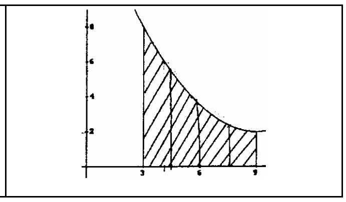


Figura 5.49

Categoría 1.9. Dibuja siete rectángulos, calcula las áreas usando la aproximación numérica y justifica las cotas comparando con el área de

A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8) [error en el cálculo del área de rectángulo]. Ver figura 5.50 {10}.

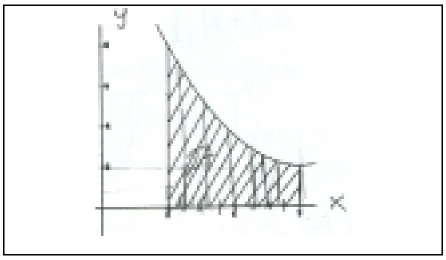


Figura 5.50

Categoría 2. No marca nada sobre el gráfico dado, obtiene las áreas usando una aproximación numérica y justifica las cotas calculando lo siguiente:

S_n=Δx/3(1.8+4.4+1.2)=52/3, con Δx=2,

T_n=Δx/2(1.8+2.4+1.2)=18, M_n=Δx(8/2+4+2)=20.

Esto es, hace un uso incorrecto de las reglas de Simpson, punto medio y trapecios {5}.

Categoría 3. No responde {6, 14, 15, 20, 23, 28}.

CC-3. Segunda pregunta

Categoría 1. Calcula cotas más ajustadas.

Categoría 1.1. Dibuja dos triángulos y un rectángulo, calcula las áreas mediante las fórmulas $A=\frac{b \cdot h}{2}$ y $A=b{\cdot}h$ respectivamente, obtiene para el triángulo el valor 24 y suma las áreas del triángulo y el rectángulo y obtiene el valor 30, propone una mejor cota inferior con el área del triangulo y una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo. Ver figura 5.51. {1}.

Categoría 1.2. Dibuja dos rectángulos, dos triángulos y dos trapecios, calcula las áreas mediante las fórmulas $A=b{\cdot}h$, $A=\frac{b \cdot h}{2}$ y $A=\frac{(B+b)}{2}h$ respectivamente, y propone una mejor cota inferior con la suma de las áreas de los rectángulos y los triángulos, que es 24, y una mejor cota superior con el área de la suma de las áreas de los trapecios, que es 27. Ver figura 5.47 {13}.

Categoría 1.3. No dibuja sobre el gráfico dado, calcula las áreas mediante una aproximación numérica y justifica las cotas calculando lo siguiente:

Sn=Δx/3(1.8+4.4+1.2)=52/3, con Δx=2, Tn=Δx/2(1.8+2.4+1.2)=18,

Mn=Δx(8/2+4+2)=20.

[Usa incorrectamente las reglas de Simpson, punto medio y trapecios]. {5}.

Categoría 2. Calcula un valor aproximado del área.

Categoría 2.1. Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores, calcula las áreas usando la fórmula $A=b\cdot h$ y calcula el promedio de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores, que resulta igual a 23. Ver figura 5.45 {22}.

Categoría 2.2. Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores, calcula las áreas usando la fórmula $A=b\cdot h$ y calcula el promedio de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores, cuyo valor es 27. Ver figura 5.46 {8, 25}.

Categoría 2.3. Dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas usando la fórmula $A=b\cdot h$ y $A=\frac{b\cdot h}{2}$ respectivamente, y afirma que el valor aproximado del área es 30. Ver figura 5.44 {3, 12}.

Categoría 2.4 Dibuja seis trapecios, calcula las áreas usando la fórmula $A=\frac{(B+b)}{2}h$ y afirma que el valor aproximado del área es 25.3. Ver figura 5.52 {9}.

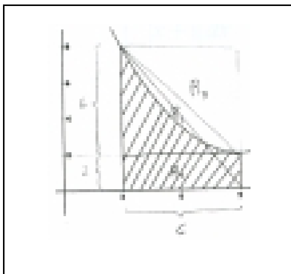


Figura 5.51

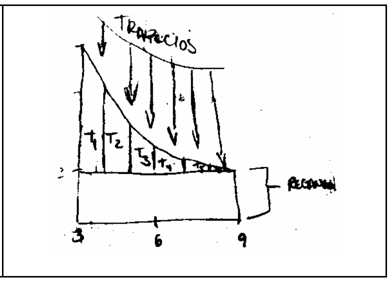


Figura 5.52

Categoría 2.5. Dibuja dos trapecios, calcula el área usando la aproximación numérica y afirma que, por la regla del trapecio, el valor aproximado del área es $A=\Delta x/2(y_o+y_1+y_2)=25$. Ver figura 5.48 {27}.

Categoría 2.6. Dibuja cuatro trapecios, calcula el área usando aproximación numérica y afirma que el área aproximada es A=Δx/2(8+6+4+3+2)=17.25 con Δx=2 [uso incorrecto de la regla del trapecio]. Ver figura 4.49 {26}.

Categoría 2.7. Dibuja seis trapecios, calcula el área usando aproximación numérica y afirma que por la regla del trapecio, el área aproximada es,

$$A=\Delta x/2(y_o+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+y_6)= 1/2(3+2.4+2.5+2.6+2.7+2.8+2.9)=22.5.$$

Errores en los cálculos. Ver figura 5.53. {19}.

Categoría 2.8. Dibuja siete rectángulos, calcula el área usando aproximación numérica y afirma que el valor aproximado del área es,

$$A = 0.75\ (1+2+3+4+5+6+7+8)=27.$$

Error en el cálculo del área de rectángulo. Ver figura 33. {10}.

Categoría 2.9. No dibuja sobre el gráfico dado, y calcula las áreas usando aproximación numérica

Categoría 2.9.1. Afirma que, por la regla de Simpson, el valor aproximado del área es,

$$S_2=1[8+4.(3.6)+(2.2)]=24.6.$$

Hace un uso incorrecto de la regla. {2}.

Categoría 2.9.2. Usa 10 trapecios y afirma que el valor aproximado del área es,

$$A=6/10(3.6+4.2+4.8+5.4+6+6.6+7.2+7.8+8.4+9)=37.8.$$

{7}.

Categoría 3. Dibuja diecisiete rectángulos inferiores y superiores y afirma que *cuantos más rectángulos.... mayor será la aproximación.* Ver figura 5.54 {4}.

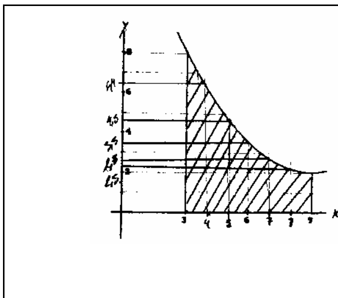


Figura 5.53

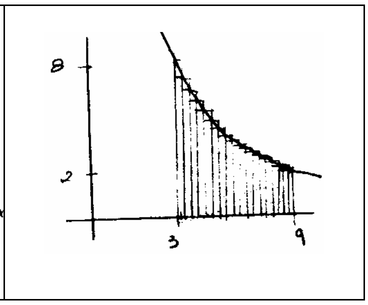


Figura 5.54

Categoría 4. Afirma que no se pueden dar valores más ajustados porque *no se conoce la función* {14,21}.

Categoría 5. No responde {6, 15, 18, 20, 23, 24, 28}.

De las categorizaciones anteriores, se deduce que los estudiantes, antes de cursar la unidad de integrales, resuelven el problema realizando el tratamiento del registro gráfico, usando figuras elementales tales como triángulos, trapecios y rectángulos para “cuadrar” la región; se observa que el no tener la expresión algebraica de la función no les dificulta el cálculo del área de la región. Resulta notoria la manera cómo realizan la cuadratura de la región limitada por la curva, que recuerdan a los procedimientos utilizados por grandes matemáticos en el pasado; la idea de acotar entre dos valores está presente en los procedimientos y así como el realizar refinamientos (ver categoría 1.1, 1.5, 1.6, 2.3).

Después de haber finalizado la unidad, algunos estudiantes siguen un procedimiento similar al que utilizaron cuando resolvían el CC-1 (ver categorías 1.1, 1.2, 1.3), otros muestran mayor influencia de la instrucción recibida en esta unidad (ver categorías 1.4, 1.9, 2.4, 2.7, 3). La cuadratura de la región limitada por la curva, también está presente en la resolución del problema, pero han mejorado el refinamiento (ver categorías 1.9, 2.4, 2.7, 3). Varios estudiantes del G1 muestran dibujos sobre la gráfica, semejantes a los obtenidos al aplicar el PU (ver categorías 2.4, 3); debemos señalar que la figura que aparece en la categoría 3 se asemeja a lo que se obtiene mediante el uso del PU cuando se trata de dibujar una cantidad “grande” de rectángulos basándose en las ideas de aproximación que se proponen en él.

En un posterior trabajo con PL se tendrá que hacer mayor énfasis en la necesidad de hacer cuadraturas para las distintas regiones limitadas por las curvas, mediante el PU, así como mejorar el tratamiento de los registros gráfico- numéricos y establecer conversiones entre ambos registros, planteando además actividades que provoquen la coordinación de ambos registros.

El estudiante G1E1.

<u>En los cuestionarios</u>

En el Pretest utiliza un rectángulo que sobreestima el área y un rectángulo que al sumarle un triángulo subestima el área; al restar la subestimación de la sobrestimación menciona que el resultado que le da es la aproximación del área en cuestión. Lo interesante de esto es que se observan dos representaciones (una gráfica y otra numérica), las cuales articula para dar la respuesta.

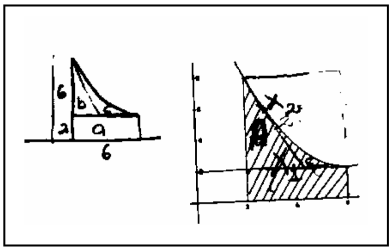


Figura 5.55

En el Postest también muestra dos representaciones (gráfica y numérica) utilizando rectángulos inferiores, encontrando un valor aproximado, con el cual justifica su respuesta. No consideró sobrestimar el área.

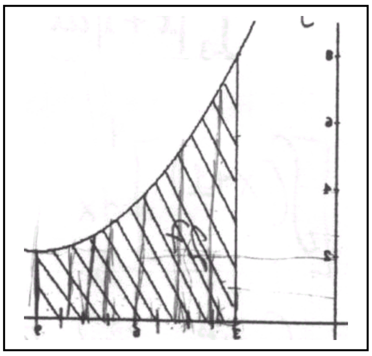
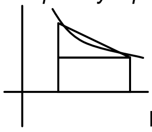


Figura 5.56

<u>En la entrevista</u>

En la pregunta 4 menciona.

149) _ E: *Primero no tengo ecuación, no tengo función, no tengo nada. Tengo la altura y la base.*
150) _ I: *¿Es importante tener la función para calcular el área? ¿Es indispensable?*
151) _ E: *No.*
152) _ *I: ¿Qué razones puedes dar para justificar que el área es mayor que 12 y menor que 48?*
153) _ E*: Por decir aquí* (marca con el lápiz punto sobre el eje X dividiendo en porciones el segmento), *yo lo puedo dividir en rectángulos, muchos rectángulos* (mueve el lápiz de abajo hacia arriba).
154) _ I: *¿Y qué más?*
155) _ E*: ¿Lo puedo dividir en rectángulos?*
156) _ I*: ¿Puedes hacer lo que quieras?*
157) _ E*: Lo que pasa con éste, es que los rectángulos dan más precisión. Se puede hacer de varias formas.*
158) _ I: *¿Cuáles?*
159) _ E: *Yo tengo el área de un rectángulo que 6 por 2 y aquí está el área de un triángulo* (mueve el lápiz indicado el rectángulo y el triángulo que sería como esto  bosquejo) *y los sumo y eso me dará aproximadamente el área total. Utilizando el argumento que dio en clase, lo hacemos por rectángulos. De 3 a 9* (se refiere al eje OX) *aquí hay seis o cuatro; por decir 20 rectángulos. Cuatro rectángulos* (marca con el lápiz punto en el segmento sobre el eje OX).
160) _ I: *¿Qué razones puedes decir de por qué está entre 12 y 48?*
161) _ E*: Bueno, 6 por 2 es 12, que es el área de este cuadrado* (dibuja el rectángulo que se ve en la figura anterior) *y esta misma base que sería 6 por 6 que es 36 entre dos, que es el área de este triángulo* (Se refiere al triángulo que se ve en la figura anterior). *Si es menor que 48 porque al sumar el área de ésta* (se refiere al rectángulo) *más el área del triángulo.*
162) _ I*: ¿De qué manera pudieras dar un valor más aproximado?*
163) _ E*: ¿Puedo utilizar puntos medios?* (se refiere a rectángulos puntos medios).
164) _ I: *¿Cómo lo harías?*
165) _ E*: Yo, particularmente lo haría con rectángulos. Dividiría ésto* (dibuja un rectángulo superior). *En ocho rectángulos* (usa la calculadora) *0,75 cada base del rectángulo. La imagen de 3 es 8*, (lo calcula por inspección de la gráfica y dibuja cada rectángulo) *la imagen de 6 es 4,5, la imagen de 4 es 6, la imagen de 2 es 9* (confunde los valores de y con lo de x). *Aproximaría, 0,75 por 8, este 0,75 por 6.*

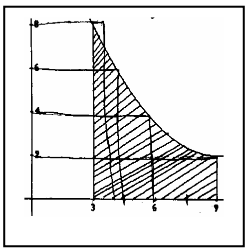


Figura 5.57

166) _ I*: Mejor explícame el procedimiento.*
167) _ E*: La base la voy a dividir en cuatro partes. Entonces la base es seis, la divido en cuatro y me da 1,5 que es la base de cada rectángulo* (indica en el eje OX con el lápiz) *luego multiplico la base por la altura.*
168) _ I*: ¿Y eso te da subestimación, sobrestimación?*
169) _ E*: Subestimación.*
170) _ I: *¿Y qué extremo del intervalo estas tomando?*
171) _ E*: El derecho.*
172) _ I*: ¿Y eso te serviría para encontrar un valor más exacto?*
173) _ E*: Sí.*
174) _ I: *¿Existe una forma de hacerlo más exacto que los rectángulos?*
175) _ E*: Sí, el trapecio.*
176) _ I: *¿Y hay otra forma?*
177) _ E*: Sí, Simpson.* (ver anexo 13, p. 105)

Comentarios: Se observa que el estudiante no necesita tener la expresión algebraica de la función para dar un procedimiento de resolución del problema. Al igual que en situaciones anteriores le basta con realizar aproximaciones geométricas similares a las hechas en las Prácticas de Laboratorio.

Es capaz de optimizar las aproximaciones con diferentes figuras.

Realiza un buen tratamiento del registro gráfico.

Con cierta orientación puede lograr comprender la importancia de las aproximaciones de tipo superior e inferior, como una forma de establecer la existencia de la Integral Definida.

El estudiante G1E2.

<u>En los cuestionarios</u>

En el Pretest dibuja un trapecio sobre el gráfico, calcula su área y utiliza este valor para dar respuesta a las dos preguntas.

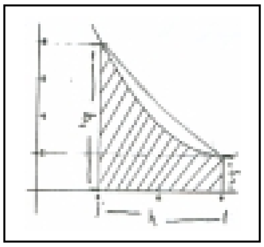


Figura 5.58

En el Postest dibuja dos rectángulos inferiores y dos superiores, calcula sus áreas y utiliza los resultados para dar respuesta a las dos preguntas.

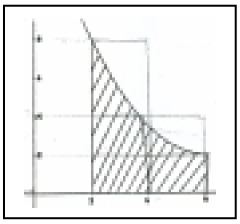


Figura 5.59

Comentarios: El estudiante logró resolver el problema a pesar de no contar con la expresión algebraica de la función. En el Postest, al calcular el área de la región estima las alturas de los rectángulos encontrando las imágenes de 3, 6 y 9 y escribe "*f(3), f(6) y f(9)*" esto se puede deber a que en las Prácticas de Laboratorio se requería tener la expresión algebraica de la función para aplicar el Programa de Utilidades.

En la entrevista

En la pregunta 4 al preguntarle

91) _ I: *¿Por qué el área esta entre 12 y 48?*
92) _ E*: Podría utilizar rectángulos inferiores y superiores. Si utilizo rectángulos superiores me daría mayor que 12 y menor que 48 y utilizando rectángulos inferiores también.*
93) _ I: *¿Puedes dibujarlos?*
94) _ E*: Sí.* Dibuja

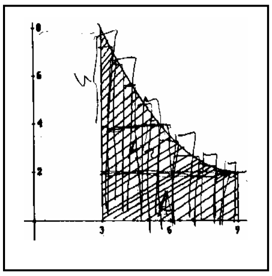


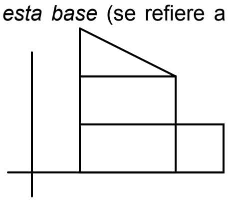
Figura 5.60

Serían los rectángulos superiores y estos serían los rectángulos inferiores (dibuja los dos tipos de rectángulos sobre la grafica). *También puedo utilizar la regla de Simpson o la del trapecio, si conociera la función* (ver anexo 13, p. 112).

La construcción de figuras refleja una transferencia de lo aprendido en las Prácticas de Laboratorio. El mencionar "*si conociera la función*" puede ser debido a que el Programa de Utilidades requiere saber la expresión algebraica de la función.

95) _ I*: Hasta el momento has dibujado rectángulos, ¿Cómo aseguras que eso está entre 12 y 48, nada más dibujando esos rectángulos?*
96) _ E: *Cada segmento del eje X me representa un número* (indica con el lápiz el eje X) *y el eje vertical me representa otro* (indica con el lápiz el eje Y) *yo puedo decir que 3 a 8 es un valor* (parece que se refiere al primer rectángulo) *y a partir de esos valores los puedo utilizar para definir un área* (puede que se refiera a las áreas de los otros rectángulos). *Eso me da una ligera idea de la ley que lleva la función* (puede que se refiera a una especie de construcción progresiva de rectángulos) *tomando la distancia de este segmento* (indica con el lápiz el segmento entre 3 y 9 en el eje X) *pudiera utilizar sumatoria.*
97) _ I: *¿De que manera?*
98) _E: *Dividiría el intervalo entre un número, luego utilizaría estos valores* (indica con el lápiz el eje Y), *por eso me daría una aproximación de esa área.*
99) _ I*: ¿Puedes hacer alguna?*
100) _ E*: Tomaría* $\Delta x = \frac{9-3}{3} = 2$ *luego tomaré* (estima por inspección de la gráfica los valores de Y) *sumatoria* (escribe $\sum_{i=1}^{2} (8+4+2)\Delta x$)
101) _ I: *¿Estos son superiores o inferiores?*
102) _ E: *Indica con el lápiz los rectángulos sin dar respuesta.*
103) _ I: *¿Qué relación hay entre los superiores y los inferiores?*
104) _ E: *Los superiores me daría un valor por encima del valor exacto de la integral, del área.*
105) _ I*: ¿Y los inferiores?*
106) _ E*: Por debajo.*
107) _ I: *¿Es indispensable tener la expresión de la función para calcular esa área?*
108) _ E*: Sí.*
109) _ I*: ¿Por qué?*

110) _ E*: Porque pudiera calcular el área usando varios procedimientos.*
111) _ I: *¿Cómo cuáles?*
112) _ E*: Trapecios, Simpson, la misma integral.*
113) _ I: *¿Qué valore más ajustados puedes dar?*
114) _ E: *Si tuviese la función que define la gráfica, sí.*
115) _ I*: ¿Y sin tener la función?*
116) _ E*: Tomaría un rectángulo de altura 2 más otro rectángulo de altura 4. Este caso sería un área uno* (se refiere a A_1) *más un área* dos (se refiere a A_2)*, mas con esta altura y esta base* (se refiere a un triángulo), *me daría este rectángulo, este rectángulo y un triángulo* (la figura sería así



bosquejo, en la gráfica se puede notar esta construcción).
Donde el rectángulo (indica sobre la gráfica) *uno la base sería (9-3) y la altura sería 2* (escribe $A_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$ =(9-3).2=12*) el rectángulo dos* (indica sobre la gráfica) *la altura seria la diferencia entre 4 y 2 y la base la diferencia entre 6 y* 3 (escribe A_2=(6-3)(4-2)=) *y la del triángulo sería de 8 a 4 y de 6 a 3* (escribe A_3=(6-3)(8-4)/2=) *la suma de esas áreas me daría un valor aproximado de esa área* (ver anexo 13, p. 113)

Comentarios: En las respuestas dadas por el estudiante se observa la influencia de la instrucción recibida en las Prácticas de Laboratorio, la construcción de los rectángulos se asemeja a los obtenidos en las prácticas.

Realiza un adecuado tratamiento de registro gráfico, el cual utiliza para realizar el tratamiento del registro algebraico (conversión de registros).

El estudiante G2E1.

En los cuestionarios

En el Pretest dibuja un triángulo y un rectángulo, calcula las áreas con las fórmulas respectivas, justifica las cotas y propone mejores cotas.

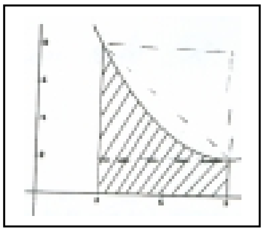


Figura 5.61

En el Postest dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores, calcula las áreas usando las fórmulas $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$, justifica las cotas y propone mejores cotas.

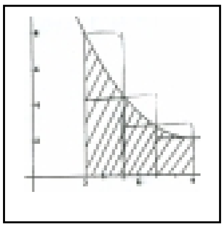


Figura 5.61

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico, el cual utiliza para justificar las cotas y proponer mejores cotas. El procedimiento que utiliza en el Postest se semeja al utilizado en las clases habituales de tiza y pizarra.

<u>En la entrevista</u>

En la pregunta 4 al preguntarle.

46) _ I: *El área de la región sombreada en mayor que 12 y menor que 48 ¿por qué?*
47) _ E: *Mayor que 12 porque calculamos el rectángulo que esta acá* (dibuja un rectángulo en la base de la gráfica) *de base 6 y altura 2, sería 6 por 2 igual a 12 y podemos observar que* (señala región bajo la curva y sobre el rectángulo) *aun queda gran parte del área sin calcular, por eso es que decimos que es mayor que 12. Menor que 48, porque si hacemos un triángulos acá* (dibuja un triángulo de base sobre el rectángulo) *sumamos el área del triángulo más el área de este rectángulo sería 6 por 6 entre 2 igual a 18 más 12 del rectángulo igual 30, y nos damos cuenta que nos estamos excediendo en el cálculo del área y por tanto 48 sería un valor mucho más elevado del que realmente sería el área verdadera* (ver anexo 13, p. 119).

Este procedimiento es similar al que utilizó en el Postest

48) _ I: *¿Puedes dar una aproximación más ajustada?*
49) _ E: *Utilizando rectángulos* (dibuja rectángulos inferiores), *utilizaríamos 6 rectángulos para hallar un área. Vamos hacer otros que excedan* (dibuja rectángulos superiores). *Lo podemos hacer de dos maneras, tomando rectángulos que excedan, tomando la imagen izquierda del rectángulo y tomando el extremo derecho y sumando esas dos áreas y calculando en promedio del área.*

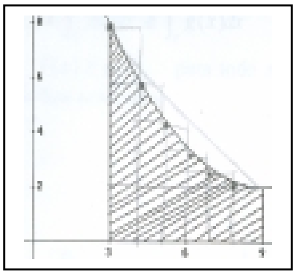


Figura 5.62

(ver anexo 13, p. 119)

Este procedimiento es similar al que utilizó en el primer cuestionario, el cual fue dado en clase habitual.

50) _ I: *¿Qué otro tipo de aproximación?*
51) _ E: *Si tuviésemos la función.*
52) _ I: *¿Es indispensable tener la función?*
53) _ E: *No es indispensable porque si tenemos un problema de la vida real en donde no tengamos la función, nosotros podemos aproximar una función, no sería exacta, y podemos calcular mediante una integral, podemos calcular el área específica de la zona que deseamos.*
54) _ I: *Si no tienes la función ¿Cómo planteas la integral?*
55) _ E: *Sin la función no se puede plantear la integral. Pero se podría, éste, el procedimiento más fácil es el de rectángulos* (ver anexo 13, p. 120).

El estudiante es capaz de aproximar el área, aun cuando no conozca la expresión algebraica de la función.

56) _ I: *¿Otras figuras?*
57) _ E: *Sí, trapecios. Podría utilizarse rectángulos inferiores y triángulos encima de los rectángulos inferiores y así el error sería menor, porque el triángulo se semeja bastante a la curva* (mueve el lápiz sobre la curva)
58) _ I: *Pero si tienes el triángulo y tienes el rectángulo, prácticamente tienes el trapecio.*
59) _ E: *Sí, exactamente, lo más rápido sería utilizando trapecio. Un valor aproximado utilizando una sola figura, que sería el trapecio.*
(Ver anexo 13, pp. 120).

Se observa la influencia de la instrucción recibida en la clase habitual cuando el estudiante expone la idea de minimizar el error de aproximación superponiendo trapecios a los rectángulos.

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico.

Se observa que es capaz de aproximar el área bajo una curva de varias maneras, sin necesidad de conocer la expresión algebraica de la función.

El procedimiento que utiliza es semejante al expuesto en las clases habituales.

El estudiante G2E2.

<u>*En los cuestionarios*</u>

En el Pretest trabaja sobre el gráfico dado y dibuja dos trapecios, calcula las áreas usando sus fórmulas, justifica las dos cotas comparando con el área del trapecio de área igual a 30 y afirma que el valor aproximado del área es 30.

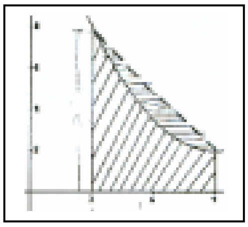


Figura 5.63

En el Postest afirma que no se pueden dar valores más ajustados porque "*no se conoce la función".*

Comentarios: El estudiante en el Pretest realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico. En el Postest no logra resolver el problema, considera que no lo puede resolver por no tener la expresión algebraica de la función, muestra una marcada dependencia del registro algebraico.

<u>*En la entrevista*</u>

En la pregunta 4

53) _ I: *Dice que el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué?*
54) _ E: Dibuja una línea en la base se la figura y menciona que mide 6 y la altura 8. Dibuja trapecio. *Es menor que 48 porque* (se queda en silencio). *Aquí se podía dar más valores conociendo la ecuación de esta gráfica. Así yo creo que se podía usar triángulos, trapecios.*
55) _ I: *¿Puedes dar una mejor aproximación del área?*
56) _ E: *Sacaríamos el área de este rectángulo* (dibuja un rectángulo de medida 6 por 8) *podíamos dividir aquí* (raya la región del trapecio que dibujó), *lo que esta sobrestimando aquí, se compensa un poco, puede ser 24 a algo así.*
57) _ I: *Me dices que no conoces la función y no puedes dar un valor exacto. ¿Qué procedimiento usarías para conseguir un valor más aproximado?*
58) _ E: Dibuja un triángulo y hace silencio.
59) _ I: *Usando lo dado en clase ¿Habría un mecanismo?*
60) _ E: *Yo creo que* (dibuja trapecios) *usando trapecios, con un valor aproximado para poder encontrar los delta de x y poder buscar el área.*

61) _ I: *¿Podrían haber otro tipo de figuras?*
62) _ E: *También se puede hacer con rectángulos.*
63) _ I: *¿Cuál sería más exacta?*
64) _ E: *El trapecio, porque* (dibuja un rectángulo) *el rectángulo, si lo ponemos por lado adentro, nos daría una subestimación.*
65) _ I: *¿Consideras que es indispensable tener una función para poder dar una estimación bastante cercana del área?*
66) _ E: *Del área no, pero para hallar una exactitud sí.*

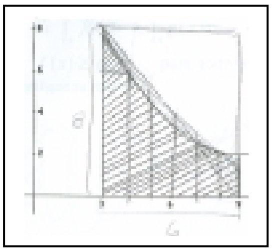


Figura 5.64

(ver anexo 13, p. 125)

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico. El procedimiento utilizado en la resolución de la pregunta es similar al que aplicó en los cuestionarios, específicamente en la construcción de los trapecios. Se observa la influencia de la instrucción de las clases habituales cuando construye varios trapecios para aproximar el área de la región.

Pretest / PREGUNTA 5

Para el grupo total.

Categoría 1. Representa gráficamente la función.

Categoría 1.1. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos. Con la expresión algebraica de la función y la fórmula de distancia entre dos puntos obtiene las medidas de los lados y las áreas con la fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.65 {4, 19, 26}.

Categoría 1.2. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.65 {12, 18, 21}.

Categoría 1.3. Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.65 {1, 10, 14, 25}.

Categoría 1.4. Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos. Con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.65 {2}.

Categoría 1.5. Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.65 {9, 27}.

Categoría 1.6. Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos. Con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.65 {22}.

Categoría 2. La representación gráfica de la función es incorrecta.

Categoría 2.1. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Ver figura 5.66 {8}.

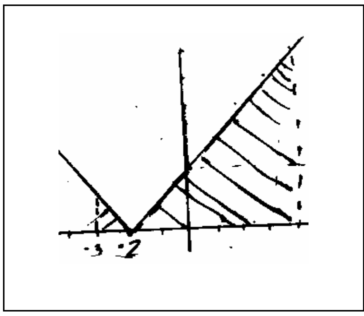


Figura 5.65

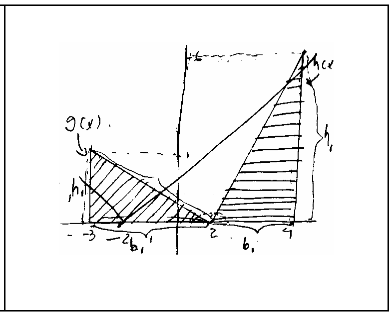


Figura 5.66

Categoría 2.2. Sin especificar el procedimiento, dibuja dos triángulos y dos rectángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y las áreas con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente. Ver figura 5.67 {28}.

Categoría 2.3. Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos y dos rectángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente. Ver figura 5.67 {24}.

Categoría 2.4. Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos y dos rectángulos. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A=\frac{b\cdot h}{2}$ y $A=b\cdot h$ respectivamente. Ver figura 5.68. {15}.

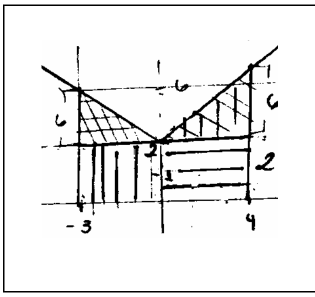
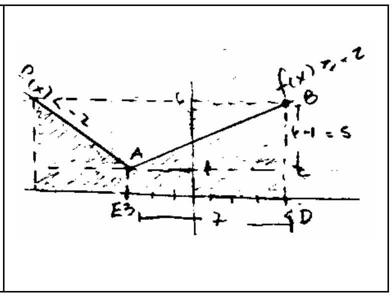



Figura 5.67 Figura 5.68

Categoría 2.5. Define la función a trozos. Dibuja un triángulo. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A=\frac{b\cdot h}{2}$. Ver figura 5.69 {11}.

Categoría 2.6. Evalúa la función en [-3,4]. Dibuja un triángulo. Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A=\frac{b\cdot h}{2}$. Ver figura 5.70 {7}.

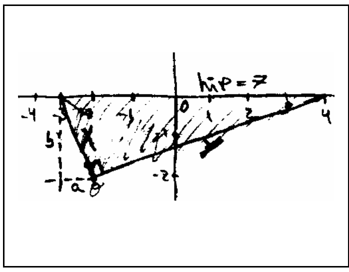
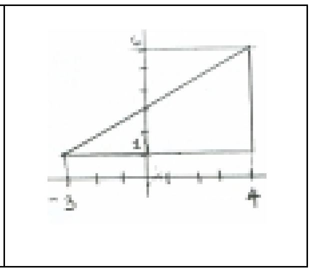



Figura 5.69 Figura 5.70

Categoría 3. No responde {3, 5, 6, 13, 16, 17, 20, 23}.

Postest/ PREGUNTA 5

Categoría 1: No representa gráficamente la función.

Categoría 1.1. Considera el integrando como una función lineal. Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx=\int_{-3}^{4} x+1dx$ (copia textual)

Categoría 1.1.1. Aplica valor absoluto al resultado {2, 4, 7, 13, 14, 25}.

Categoría 1.1.2. No aplica valor absoluto {1, 6, 18, 20, 27, 28}.

Categoría 1.2. Define $|x+1|=\begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ -x-1 & x<1 \end{cases}$ (copia textual)

Categoría 1.2.1. Calcula $\int_{-3}^{1} -x-1dx+\int_{-3}^{4} x+1dx$ (copia textual) {15}.

Categoría 1.2.2. Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx=\int_{-3}^{4} x+1dx$ (copia textual) {10}.

Categoría 1.3. Define $|x+1|=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$ (copia textual).

Categoría 1.3.1. Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx=\int_{-3}^{4} x+1dx$ (copia textual) {9}.

Categoría 1.3.2. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1dx+\int_{-1}^{4} x+1dx$ (copia textual) {26}.

Categoría 1.4. Define $|x+1|=\begin{cases} -x-1 & x<0 \\ x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ (copia textual).

Categoría 1.4.1. Calcula $\int_{-3}^{4} -x-1dx+\int_{-3}^{4} x+1dx$ (copia textual) {3,5}

Categoría 1.4.2. Calcula

$$\int_{-3}^{0}|x+1|dx+\int_{0}^{4}|x+1|dx=$$
$$\int_{-3}^{0}x+1dx+\int_{-3}^{0}-x-1dx+\int_{0}^{4}x+1dx+\int_{0}^{4}-x-1dx$$
(copia textual) {12}.

Categoría 1.4.3. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1dx+\int_{-1}^{0} x+1dx+\int_{0}^{4} x+1dx$ (copia textual) {22}.

Categoría 2. Representa gráficamente la función. Ver figura 5.71.

Categoría 2.1. $|x+1|=\begin{cases} -x-1 & x<0 \\ x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ (copia textual)

Categoría 2.1.1. Calcula $\int_{-3}^{-1} -x-1dx+\int_{-1}^{4} x+1dx$ (copia textual) {8}.

Categoría 2.1.2. Calcula

$$\int_{a}^{b}|x+1|dx=\left[\left|\frac{x^2}{2}+x\right|\right]_{-3}^{4}=-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{4}=\cdots=\frac{29}{2}$$
(copia textual) {21}.

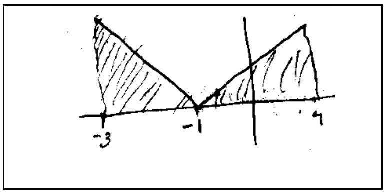


Figura 5.71

Categoría 2.1.3. No realiza cálculos {24}

Categoría 3. No responde. {19, 23}.

De las categorizaciones hechas para el pretest se observa que una gran parte de los estudiantes elaboran una representación gráfica de la función, algunos no especifican el procedimiento (ver categorías 1.1, 1.2, 2.1, 2.2), otros lo hacen usando tablas de valores (ver categorías 1.3, 1.4, 2.3) y otros definiendo la función a trozos (ver categorías 1.5, 2.4, 2.5); una vez representada la función, delimitan las regiones con dos triángulos, y, seguidamente, calculan el valor del área con la respectiva fórmula; algunos estudiantes se han equivocado al realizar la representación gráfica (ver categoría 2); no obstante, la idea general es empezar con un registro gráfico y realizar la conversión al registro algebraico-numérico de la manera más sencilla, ajustada evidentemente a los conocimientos que tienen hasta el momento.

Después de la instrucción, una parte de los estudiantes realizan un tratamiento sólo en el registro algebraico, algunos consideran el integrando como un función lineal (ver categoría 1.1); puede que estos estudiantes no tengan claro que se trata de la función valor absoluto y crean que sólo se trata del valor absoluto de un número; otros definen a trozos la función (ver categoría 1.2, 1.3, 1.4) y cometen errores, tanto en la definición como en el planteamiento de las integrales, principalmente en los límites de integración; únicamente uno (ver categoría 1.3.2) plantea y calcula las integrales; puede que el no representar gráficamente la función haya contribuido a que no se percaten del error. Los estudiantes que representaron gráficamente la función (ver categoría 2), a partir de la definición a trozos, escribieron correctamente los límites de integración, y, salvo un error de cálculo de la integral, resolvieron las integrales. Hay que hacer notar que los estudiantes pudieron haber calculado la integral con un procedimiento similar al usado en el pretest y no lo hicieron; puede que crean que este procedimiento no sería aceptable en una prueba sobre integrales.

El cambio de proceder en la resolución de este tipo de problema puede tener varias explicaciones; puede ser debido al contenido involucrado, a conocimientos previos o adquiridos ahora, o a la forma cómo se les ha presentado el problema. Se deben aclarar tales aspectos.

El estudiante G1E1.

<u>*En los cuestionarios*</u>

En el Pretest, elabora una tabla de valores y representa la función valor absoluto. Establece dos tipos de representación semiótica, una gráfica y otra numérica, calcula las áreas utilizando dos regiones triangulares. Articula las dos representaciones para dar la respuesta.

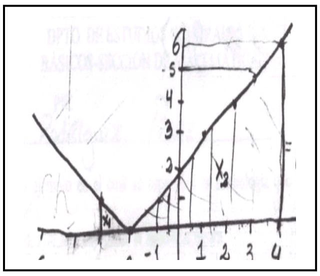


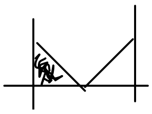
Figura 5.72

En el Postest no representa la función. Define erróneamente la función valor absoluto, al plantear la integral considera el integrando como una función lineal.

<u>*En la entrevista*</u>

En la pregunta 5**,** al preguntarle

180) _ I*: ¿De qué manera lo calcularías?*
181) _ E*: Y si lo dejamos y pasamos a otro.*
182) _ I*: Trata de hacerlo.*



-3 0 4

183) _ E*:* (Dibuja bosquejo) *vamos a calcular el área de esta* (raya una de la regiones).
184) _ I*: ¿Esa gráfica está bien hecha?*
185) _ E: *Nooo, es como para visualizar.*
186) _ I: *¿Se puede hacer una integral así como esta?*
187) _ E*: Hay que separarla en dos.*
188) _ I: *¿Y dónde estaría el corte de una integral con la otra?*
189) _ E*: De menos infinito hasta -3 y de -3 a 4.*
190) _ I*: ¿Cómo que desde menos infinito?*
191) _ E*: No. Si x es menor que menos 3 y si x es mayor que 4. Escribe* $\begin{cases} -(x+1) & si \quad x<-3 \\ x+1 \quad si & x>4 \end{cases}$ (ver anexo 13, p. 106).

De entrada tiene dificultad para resolver el problema; el definir erróneamente la función, parece que le ha impedido plantearse las integrales.

Al solicitarle que grafique la función se tiene que.

192) _ I *¿Puedes hacer la gráfica con más precisión de esa función valor absoluto?*
193) _ E: Elabora una tabla de valores

x	*y*
-3	
-1	
0	
1	

Profe. Pero ésta es la integral (señala la integral) *para sustituirlo necesito hacerlo aquí* (se refiere al integrando) *o en la función que escribí* (se refiere a la expresión escrita de forma a trozos*) por decir -2 lo sustituyo aquí* (se refiere al integrando)

194) _ I: *¿Sobre qué función se está integrando?*
195) _ E: *Esta* (se refiere al integrando)
196) _ I: *Entonces ¿Dónde debes sustituir?*
197) _ E: Sustituye en el integrando y completa la tabla de valores

x	*y*
-3	1
-1	0
0	1
1	2

Trata de graficar y no sabe dónde colocar el punto angular, al parecer cree que va en el origen. El entrevistador le hace ver el error y finalmente grafica correctamente la función.
198) _ I*: ¿Hasta dónde vamos a calcular el área?*
199) _ E*: De -3 hasta 4. Dibuja dos triángulos*

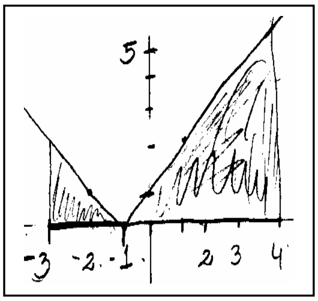


Figura 5.73

200) _ I: *¿De alguna manera se puede calcular esa integral viendo la gráfica?*
201) _ E*: Calcula el área de éste* (se refiere a la región a la izquierda) *y el área de ésta* (se refiere a la región a la derecha) (ver anexo 13, p. 107)

Muestra capacidad para resolver el problema utilizando nociones de geometría elemental.

202) _ I: *¿Qué figuras son ésas?*
203) _ E*: Triángulos.*
204) _ I: *¿No puedes calcular?*
205) _ E*: ¿Por triángulos?*
206) _ I: Completa la tabla estimando las imágenes de -3 y 4 usando la gráfica que ha elaborado. Luego escribe $A_1 = \frac{2.2}{2} = 2 \qquad A_2 = \frac{5.5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \quad \text{A} \quad \text{total} \;\; 12{,}5 + 2 = 14{,}5$ *Sumo las dos áreas y eso me da el área total* (ver anexo p. 107).

Relaciona el cálculo anterior con el cálculo de la Integral Definida.

207) _ I*: ¿Esa área es equivalente al resultado de esa integral?*
208) _ E*: Exactamente no.*
209) _ I*: ¿Por qué dices que no es exacta?*
210) _ E*: Si es igual, porque no utilizamos decimales.*
211) _ I: *¿Consideras que esta bien escrita la función valor absoluto de manera a trozos? Fíjate en la gráfica y lo que tienes definido. ¿Concuerda la gráfica con lo que tienes escrito?*
212) _ E*: No.*
213) _ I: *¿Dónde esta el error?*
214) _ E*: No sé.*
215) _ I*: ¿Te acuerdas de la definición de la función valor absoluto?*
216) _ E*: "No".* Se queda pensando por unos segundos y dice *"¿así profesor?"* Escribe

$$\begin{cases} -(x+1) & x < -1 \\ (x+1) & x > -1 \end{cases}$$

217) _ I*: Pudieras plantear la integral una vez que has definido la función.*
218) _ E*: Sí.*
219) _ I: *Escríbela.*
220) _ E*:* Plantea las dos integrales $\int_{-3}^{-1} -(x+1)dx$

$$\int_{-1}^{4} (x+1)dx$$

221) _ I: *Las haces separadas ¿Y después qué haces?*
222) _ E*: Las sumo y me va dar aproximado a esto* (se refiere a 14,5 que es el resultado que calculó con los triángulos) (ver anexo 13, p. 107).

Comentarios: El estudiante al inicio tiene dificultades para definir la función valor absoluto, este obstáculo es superado al lograr graficarla, con lo que logra plantear procedimientos simbólicos en la resolución.

Realiza un tratamiento y conversión entre los registros gráfico y simbólico, producto del tratamiento adecuado del registro gráfico.

El estudiante G1E2.

En los cuestionarios

En el Pretest representa la gráfica de la función de manera incorrecta, no especifica el procedimiento que utilizó para graficar, dibuja dos triángulos y calcula sus áreas con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

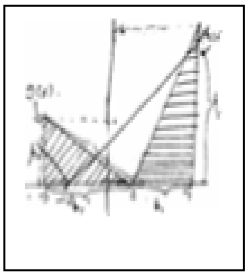


Figura 5.74

En el Postest representa gráficamente la función, define la función a trozos, plantea las integrales para cada parte y suma los resultados.

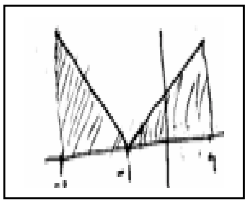


Figura 5.75

Comentarios: El estudiante, a pesar que la gráfica de la función no la representó correctamente, utilizó un procedimiento adecuado. En el Postest ha seguido un procedimiento adecuado, realizando un tratamiento en los registros gráfico y algebraico y conversión entre ellos.

En la entrevista

En la pregunta 5 resuelve el problema utilizando la representación gráfica de la función.

118) _ E*: Calcular la integral que va del intervalo del -3 a 4 del valor absoluto de x+1.*
119) _ I*: ¿Lo puedes calcular de alguna manera?*
120) _ E*: Primero tendría que buscar el punto pico* (se refiere al punto angular*) del valor absoluto. Luego tomaría por definición la parte negativa* (se refiere en la definición a –(x+1)*) y sumaría la parte negativa más la parte positiva.*

121) _ I: *¿Se puede calcular esa integral de una sola vez, con una sola integral?*
122) _ E: *¿Con una sola integral?* (pausa) *No.*
123) _ I: *¿La puedes calcular?*
124) _ E: *Sí.*
125) _ I: *Calcúlala.*
126) _ E: Escribe la función a trozos $x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$ grafica la función
$-(x+1) \geq 0 \quad x \leq -1$

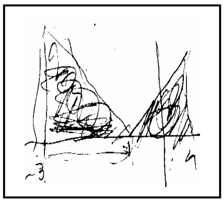


Figura 5.76

y raya las dos regiones. *Tendríamos que* (escribe la integral con el valor absoluto como la suma de dos integrales) $\int_{-3}^{4}|x+1|dx = -\int_{-3}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx$ (ver anexo 13, p. 114)

El estudiante realiza un adecuado tratamiento de los registros algebraico y gráfico y conversión entre ellos, no ha requerido insistirle para que plantee el procedimiento correcto.

127) _ I: *¿Qué relación hay entre ese resultado y la integral que te plantearon?*
128) _ E: *Que me da el área de los dos triángulos que se formarían sobre* (raya las regiones de los dos triángulos) *lo que acabo de rayar.*
129) _ I: *¿Cuánto vale esa área?*
130) _ E: *Empieza a calcular las integrales. También hay otra forma de hallar esta área.*
131) _ I: *¿Cuál?*
132) _ E: *Haciendo la suma de estos dos triángulos* (señala con el lápiz las dos regiones)
133) _ I: *¿De qué manera?*
134) _ E: *Tomando la diferencia de este intervalo* (señala el segmento entre -3 y-1) *como la base y la altura* (señala el segmento vertical del triángulo de la izquierda). *Para eso utilizaría esta función* (se refiere al integrando) *para calcular la altura.*
135) _ I: *Hazlo para ver.*
136) _ E: *La altura seria 2* (escribe h_1=2) *y la base sería* (escribe b_1=(-1)-(-3)=2 para el área uno y para el área dos sería b_2=5 y h=5. Calcula las dos áreas usando la fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$ y le da (2.2/2=2) y (25/2) respectivamente). *El área total sería 2+25/2=29/2*
137) _ I: *¿Cuánto da el área total?*
138) _ E: *29/2.*
138) _ I: *¿Qué consideras más sencillo? Es decir, a través de este procedimiento o a través de las integrales.*
140) _ E: *Las integrales serían un proceso como más general.*
141) _ I: *¿Qué importancia tiene la integral en este problema?*
142) _ E: *Suponga que una persona no sabe aplicar esa función* (puede que se refiera a que no puede definir a trozos la función o graficarla), *pero sabe calcular la integral, él puede decir que esa integral evaluada en esa gráfica es igual a este procedimiento* (señala el procedimiento hecho con la fórmula $A=\frac{b \cdot h}{2}$) (ver anexo 13, p. 114).

El estudiante es capaz de plantear procedimientos en los que realiza transferencias de conocimientos de geometría elemental.

Comentarios: Las respuestas dadas por el estudiante reflejan que basa su procedimiento en el tratamiento de registros gráfico y numérico, y conversión entre ellos. Es capaz de transferir conocimientos de geometría elemental a la resolución de problemas de cálculo de integrales.

El estudiante G2E1.

En los cuestionarios

En el Pretest representa gráficamente la función, define la función a trozos, dibuja dos triángulos, con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

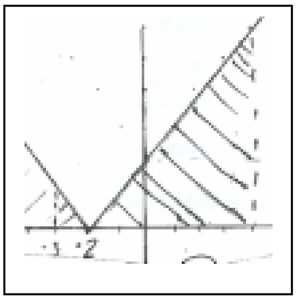


Figura 5.77

En el Postest no representa gráficamente la función, define la función a como $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x<0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ y calcula la integral

$$\int_{-3}^{-1} -x-1\,dx + \int_{-1}^{0} x+1\,dx + \int_{0}^{4} x+1\,dx$$

Comentarios: El estudiante realizó en el Pretest un tratamiento adecuado del registro algebraico y gráfico y conversión entre ellos. No obstante en el Postest se limita al registro algebraico; aunque comete un error en la definición de la función, plantea correctamente las integrales; tal vez si graficara la función se hubiese percatado del error.

En la entrevista

En la pregunta 5 al pedirle

62) _ I: *Calcula la integral.*

63) _ E: Define la función valor absoluto de la siguiente manera $\begin{cases} x \geq 0 & x+1 \\ x<0 & -(x+1) \end{cases}$

64) _ I: *¿Estás seguro que esa es la definición?*

65) _ E: *Sí, para la parte de la función que está sobre el eje OX, quedaría x más 1, y para la parte que esta bajo el eje OX, le asignaríamos un signo negativo, porque sabemos que esa área dará negativo, ese valor dará negativo y lo multiplicamos por el menos que está afuera y cambiaría a positivo, eso es por conocimiento básico de valor absoluto.*

66) _ I: *Teniendo esa información ¿Cómo planteas la integral?*

67) _ E: *Ahora con esto obtendría dos integrales.*

68) _ I: *¿Cuáles serían?*

69) _ E: Empieza a escribir las integrales y no puede (ver anexo 13, p. 120).

Al pedirle que utilice la representación gráfica, se tiene que.

70) _ I: *¿Puedes graficar la función?*

71) _ E: Grafica la función sin utilizar tablas de valores.

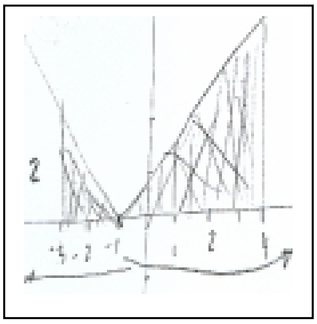


Figura 5.78

72) _ I: *¿Puedes rayar la región?*
73) _ E: Raya la región. *Hay dos integrales de -3 a -1 y de -1 a 4.* Escribe las integrales $\int_{-3}^{-1} -(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx$.
74) _ I: *Si observas este planteamiento, la definición de la función que has escrito, no aparece ese valor -1. ¿Dónde esta el -1 es esa condición?*
75) _ E: Reescribe la definición de la siguiente manera $\begin{cases} x \geq -1 & x+1 \\ x < -1 & -(x+1) \end{cases}$. *Para todos los valores de aquí hasta acá* (dibuja una línea entre -1 y 4) *utilizamos esta expresión* (señala la primera parte de la definición), *para los valores que son menor* (dibuja una línea entre -3 y -1) *utilizamos esta* (señala la segunda parte de la definición).
(Ver anexo 13, pp. 120)

Muestra capacidad de resolver el problema utilizando geometría elemental.

76) _ I: *¿Qué observas en la gráfica?*
77) _ E: *En la gráfica se observa que se puede calcular esta área utilizando triángulos* (raya las dos regiones demarcando los triángulos). *Más fácil, utilizamos la base en valor absoluto porque estaría en los negativos* (señala la base del triángulo de la izquierda al punto angular) *por la altura divido entre dos, porque calculamos el área del triángulo; y el otro triángulo, de base 5* (señala la base del triángulo de la derecha al punto angular), *la altura hallaríamos la imagen de 4, seria 5.* Realiza los cálculos $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ y $\frac{5 \cdot 5}{2} = 12.5$ suma los resultados y le da 14.5.
78) _ I: *¿Algunas veces se pueden hacer sin conocimientos de integrales?*
79) _ E: *Si. El cálculo del área debajo de una recta, se puede hacer sin tener conocimiento de integrales, en este caso, utilizamos triángulos, que vendría siendo el resultado de la integral* (ver anexo 13, p. 120).

Comentarios: El estudiante, aunque ha cometido un error al definir la función, al graficarla utiliza el tratamiento en este registro para realizar una adecuada conversión al registro algebraico.

Es capaz de transferir conocimientos de geometría elemental a la resolución de este tipo de problemas. Este procedimiento es similar al que utilizó en el Postest.

En el procedimiento utilizado por el estudiante se observa la influencia de la instrucción recibida en las clases habituales.

El estudiante G2E2.

En los cuestionarios

En el Pretest representa gráficamente la función, elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función, dibuja dos triángulos y obtiene las medidas de los lados por inspección de la gráfica y las áreas con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$

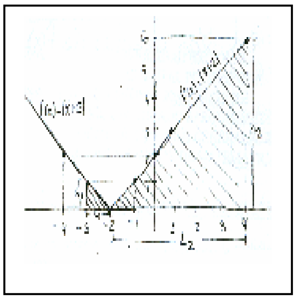


Figura 5.79

En el Postest no representa gráficamente la función, calcula la $\int_{-3}^{4}|x+1|dx = \int_{-3}^{4} x+1dx$, aplica valor absoluto al resultado, que resulta igual a $\frac{9}{2}$.

Comentarios: El estudiante en el Pretest ha realizado un adecuado tratamiento del registro gráfico.

En el Postest confunde la función valor absoluto con una función lineal, esto puede deberse al no haber graficado. El estudiante muestra una tendencia a la utilización de registros algebraicos.

No se puede negar o afirmar que pueda establecer relaciones entre la Integral Definida y el área de una región.

<u>En la entrevista</u>

En la pregunta 5 plantea, de entrada y calcula la integral de manera algebraica

67) _ E: *Esta no la supe dividir. Creo que es de -3 hasta -1 y de -1 a 4.* Escribe $\int_{-3}^{-1} \int_{-1}^{4}$ *Yo en el examen no la dividí, sino que calculé el área entre este valor absoluto.*
68) _ I: *¿Qué criterios utilizas para saber que la puedes dividir entre -3 y -1, y entre -1 y 4?*
69) _ E: *Porque es valor absoluto. Al hacer la gráfica desde -3 a -1 y después de -1 hasta 4.*
70) _ I: *¿Se puede establecer una sola integral entre -3 y 4?*
71) _ E: *No, porque yo la hice entre -3 y 4 y no me dio. Hay que dividirla para que nos pueda dar.*
(Ver anexo 113, pp. 125)

Al solicitarle que utilice una representación gráfica se tiene que:

72) _ I: *¿Puedes graficar la función?*
73) _ E: Dibuja directamente la gráfica sin tabla de valores.

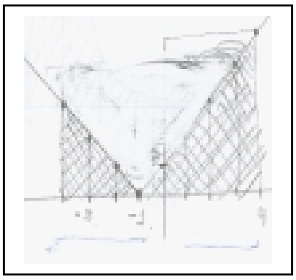


Figura 5.80

74) _ I: *¿Qué puedes observar en la gráfica?*
75) _ E: *Que hacer esta integral debo hacerla entre -3 y -1, y entre -1 y 4* (señala la gráfica). *Porque si hacemos directamente sería todo esto* (señala tanto la región bajo la gráfica como la parte sobre la gráfica, demarcando una región poligonal). Raya las partes a ambos lado del punto angular.

76) _ I: *¿Puedes observar alguna figura ahí?* (se refiere a las dos regiones a ambos lado del punto angular).
77) _ E: *Son dos triángulos.*
78) _ I: *¿Qué te piden?*
79) _ E: *Me piden el área entre -3 y 4. Tenemos que dividirlo entre -3 hasta -1, y desde -1 hasta 4.*
80) _ I: *¿Me puedes plantear las integrales?*
81) _ E: Escribe $\int_{-3}^{-1}(x+1)dx+\int_{-1}^{4}(x+1)dx$.
82) _ I: *¿Las dos integrales tienen la misma expresión en el integrando?*
83) _ E: *Sí.*
84) _ I: *¿Me puedes definir la función valor absoluto?*
85) _ E: No logra definirla.
86) _ I: Le define la función de la siguiente manera $\begin{cases}-(x+1) & si\ x+1<0,\ \ x<-1\\ x+1 & si\ x+1\geq 0,\ \ x\geq -1\end{cases}$ *Si comparas la definición de la función con las integrales ¿hay algún problema?*
87) _ E: Analiza en silencio la función que se le ha definido. *Faltaría el menos* (le escribe el signo negativo al integrando de la primera integral, quedando así $\int_{-3}^{-1}-(x+1)dx+\int_{-1}^{4}(x+1)dx$) (ver anexo 13, p. 126).

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico; no obstante tiene dificultad para definir la función valor absoluto a trozos, una vez superado el obstáculo realiza la conversión al registro simbólico, planteando adecuadamente las integrales.

Postest/ PREGUNTA 6 (sólo en el Postest)

<u>*Para el grupo total.*</u>

Categoría 1: Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Resuelve la integral de igual manera que la dada {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 15, 18, 20, 22, 23, 25, 28}.

Categoría 2: Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 2.1. La función no es continua {8, 19}.

Categoría 2.2. *El área de $1/x^2$ es infinita cerca de cero* {21}.

Categoría 2.3. *El área nunca es negativa* {27}

Categoría 2.4. La gráfica tiene una asíntota vertical. Representa gráficamente la función. Ver figura 5.81 {14, 24}.

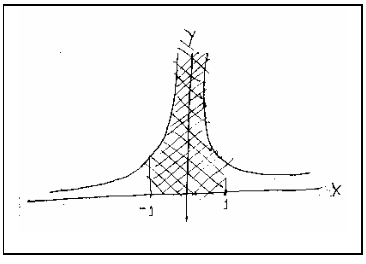


Figura 5.81

Categoría 3. No responde {9, 26}

De las categorizaciones anteriores se tiene que: los estudiantes que afirman que la proposición es falsa se limitan a comprobar el procedimiento y no se detienen a reflexionar sobre el problema, al parecer se dejan llevar por la presentación del registro algebraico sin plantearse una representación gráfica (ver categoría 1). De los que afirman que es falsa, dos estudiantes representan gráficamente la función, pueden que hayan identificado la relación de esta pregunta con la pregunta 3 (ver categoría 2.3); otros argumentan que la función no es continua o que *"el área...es infinita cerca de cero";* es posible que estos estudiantes se refieran a la necesidad de que la función sea continua para poder utilizar la Regla de Barrow. Ninguno de los estudiantes ha señalado el resultado negativo de la integral como argumento en su justificación, lo que resulta un tanto extraño si nos atenemos al tipo de respuesta en otras preguntas (el área es positiva).

De las respuestas dadas en esta pregunta se generan algunos interrogantes: ¿Influyó en la respuesta de los estudiantes la presentación tan aparentemente directa de la Regla de Barrow? ¿Por qué no relacionaron esta pregunta, con la pregunta 3? ¿Están pensando los estudiantes en las hipótesis de aplicación de la regla de Barrow cuando al expresar que la función no es continua o el área es infinita? Al no tomar en cuenta el resultado negativo de la integral ¿están relacionando la Integral Definida con el área o no logran establecer conexión alguna?

El estudiante G1E1.

<u>En el cuestionario</u>

El estudiante se limita a reproducir el procedimiento y escribe "es verdadero porque ciertamente la integral es –2". No se ha percatado de que la función es discontinua; tampoco se da cuenta que la gráfica de la función está en la pregunta 3.

<u>En la entrevista</u>

En la pregunta 6 chequea los cálculos

224) _ E*: Chequea los cálculos que se le dan. Es verdadero.*
225) _ I*: ¿Es verdadero? ¿Por qué?*
226) _ E*: No, es falso.*
227) _ I*: ¿Por qué?*
228) _ E*: Vuelve a calcular la integral. Sí, si es verdadero.*
229) _ I*: Tú basas tu justificación en los cálculos que has hecho. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que dé ese resultado?*
230) _ E: *Que sea derivable en ese intervalo.*
231) _ I*: ¿Qué condiciones debe tener la función?*
232) _ E*: Que sea continua* (ver anexo 13, p. 107)

Puede que la presentación del procedimiento en el registro simbólico, genere como primera reacción en el estudiante el tratar de dar una respuesta utilizando sólo este registro y no se plantee una interpretación gráfica; esto evidencia lo dominante que puede ser este tipo de registro a la hora de dar respuesta a una situación planteada; no así cuando el registro es gráfico, en éste el estudiante tiende a realizar conversión al simbólico.

Referencia la gráfica de la pregunta 3

233) _ I*: ¿En dónde no es continua?*
234) _ E*: Ella no es continua, porque va a dar como la anterior.* Dibuja

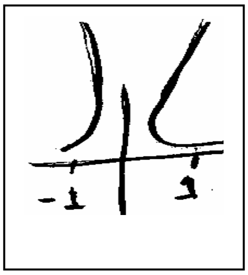


Figura 5.82

(ver anexo 13 p. 107)

Por insistencia el investigador se plantea un registro gráfico, como en ocasiones anteriores el estudiante realiza un buen tratamiento de este tipo de registro.

Considera la integral como equivalente al área.

235) _ I*: ¿Qué razones tiene para decir ahora que no se puede calcular?*
236) _ E*: Si se puede hacer.*
237) _ I*: Si se puede hacer. ¿A pesar de que el negativo y la gráfica de esa función es ésa?* (Se refiere a la que ha hecho el estudiante)
238) _ E*: Porque cuando uno resuelve una integral en un intervalo es porque dará un área.*
239) _ I: *¿La integral puede dar negativa?*
240) _ E*: No* (Observa el desarrollo de la integral)
241) _ I: *¿No puede dar negativa la integral?*
242) _ E*: Antes de esto tenemos que multiplicarlo por...*
243) _ I*: Una cosa es la integral y otra cosa es el área. ¿Sí o no?*
244) _ E*: Sí*
245) _ I*: Ahora, ¿La integral puede dar negativa?*
246) _ E*: La integral sí pero el área no.*
247) _ I*: Entonces ¿cuál es el problema de esa integral?*
248) _ E*: Esta integral está bien sacada. No tiene error.*
249) _ I: *¿Sí?*
250) _ E*: La integral está bien así* (señala el procedimiento) *pero como no es continua, es falso.*
251) _ I: *¿Por qué?*
252) _ E: *Marca en la gráfica que hizo el -1 y el 1 en el eje x, prolonga con el lápiz la curva hacia arriba. Por lo veo aquí es falso.*
253) _ I*: ¿La integral?*
254) _ E*: No, está bien resuelta. El razonamiento, cómo le digo.*
255) _ I*: ¿Hay un error en el razonamiento?*
256) _ E*: Que la función no es continua* (ver anexo 13, p. 108).

La idea que tiene de área, equivalente a la Integral Definida, le produce un obstáculo al considerar la posibilidad de que el resultado de la integral pueda dar un valor negativo.

Comentarios: El estudiante relaciona esta pregunta con la pregunta 3, facilitándole dar una interpretación de la mima.

Presenta dificultades de interpretación de la integral debido a que la considera equivalente al área, es decir siempre positiva.

El estudiante G1E2.

En el cuestionario

Afirma que la proposición es falsa y argumenta que la función no es continua en el intervalo. No proporciona justificación gráfica.

Comentarios: El estudiante al dar una respuesta tan elemental basada, aparentemente, en el registro algebraico enunciado, lo único que se puede mencionar es que él ha supuesto que ésta es una razón suficiente para decir que es falsa la proposición.

En la entrevista

En la pregunta 6 menciona que:

145) _ I: *¿Consideras que es verdadero o falso?*
146) _ E: *Falso.*
147) _ I: *¿Por qué?*
148) _ E*: En ese intervalo que va desde -1 a 1 esta incluido el cero* (indica con el lápiz la integral). *Primero la división de 1 entre cero no existe, segundo tiene una discontinuidad.*
149) _ I: *¿Qué condiciones debe cumplir una integral para que se pueda calcular?*
150) _ E*: Que la función sea continua.*
151) _ I: *Si la función es discontinua ¿Qué mecanismo se podría usar para calcular el área?*
152) _ E: *Tomaría una aproximación hacia el punto de discontinuidad.*
153) _ I: *¿A qué tipo de funciones discontinuas se le puede hacer eso?*
154) _ E: *A todas las funciones que tengan asíntotas o que tengan puntos en donde la división por cero no sea posible.*
(Ver anexo 13, pp. 114)

Comentarios: Las repuestas del estudiante reflejan que considera la aproximación geométrica, en el estilo del usado en las Prácticas de Laboratorio, para argumentar su respuesta.

El estudiante G1E2.

En el cuestionario

Afirma que la proposición es verdadera, resuelve la integral de igual manera que la dada.

Comentarios: El estudiante se limita a chequear el procedimiento. Puede que considere el procedimiento expuesto suficiente argumento para justificar su respuesta.

En la entrevista

En la pregunta 6 considera que la proposición es falsa.

81) _ E: *Yo considero que es falsa.*
82) _ I: *¿Por qué?*
83) _ E: *Porque entre -1 y 1 existe un valor que vendría a ser cero que al evaluarlo en ese punto no estaría definida la función y quedaría sin saber el área de ese punto de la gráfica.*
84) _ I: *¿Qué condición se debe cumplir para realizar esos cálculos?*
85) _ E: *Qué sea continua en todos los números del intervalo dado, en este caso sería -1 y 1. Por los conocimientos que tenemos, porque a lo mejor existen otros procedimientos más avanzados que sí permiten que se realice la integral.*
86) _ I: *Observas que el resultado da -2 ¿Tú lo comprobaste en el examen?*
87) _ E: *Yo lo comprobé y si seguimos los pasos se ve que está correctamente.*
88) _ I: *¿Qué es lo que está fallando?*

89) _ E: *Lo que le estoy diciendo, que existen puntos entre -1 y 1, aquí no se ve porque utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo, que es donde dice que la integral de f de x evaluada de "a" hasta "b" es igual a la función F(b) menos F(a)* (no expresa explícitamente que se trata de la primitiva, pero es de esperar que a ella se refiera).
90) _ I: *¿Entonces qué es lo que está fallando?*
91) _ E: *Que está dando negativo y el área no debería dar negativo.*
92) _ I: *En un ejercicio anterior dijiste que la integral puede dar negativa y estamos hablando de una integral, entonces ¿qué es lo que falla en ese ejercicio para que lleve a pensar que eso es falso?¿Qué condición se debe cumplir para que eso sea verdadero?*
93) _ E: *La función es discontinua.*
94) _ I: *¿Cuál es la condición para que exista la integral?*
95) _ E: *Que sea continua. Es falso porque es discontinua en el punto x igual a cero.*
96) _ I: *¿Eso es lo que tú piensas?*
97) _ E: *Eso es lo que yo pienso.*
98) _ I: *A parte de esas razones ¿qué otra cosa se te ocurre?*
99) _ E: *Graficando la función. Porque eso es muy importante para saber, para tener una idea, si está por debajo del eje X, en la gráfica se ve claramente si existe un salto en la gráfica.*
(Ver anexo 13, pp. 122)

Comentarios: El estudiante basa su argumentación en el registro algebraico, referenciado el Teorema Fundamental del Cálculo. El resultado negativo lo confunde, aunque en la pregunta 2 admitía la posibilidad de que la integral pudiese dar un valor negativo; esto puede ser ocasionado a que en la pregunta 2 se tenía una región bajo el eje OX y aquí no ha graficado y la función es positiva.

El estudiante G2E2.

En el cuestionario

Afirma que la proposición es falsa, menciona que la gráfica tiene una asíntota vertical. Representa gráficamente la función,

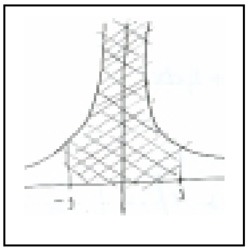


Figura 5.83

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico, el cual utiliza para argumentar su respuesta. Logra relacionar esta pregunta con la pregunta 3.

Resulta relevante destacar que en otros problemas ha mostrado una tendencia al uso de registros algebraicos y en este problema ha hecho lo contrario.

En la entrevista

En la pregunta 6 referencia la gráfica de la pregunta 3 como justificación de respuesta

89) _ E: *Es falsa.*
90) _ I: *¿Por qué?*
91) _ E: *El intervalo que se está sacando aquí* (muestra la gráfica de la pregunta 3) *es entre -1 y 1, la gráfica no es continua.*

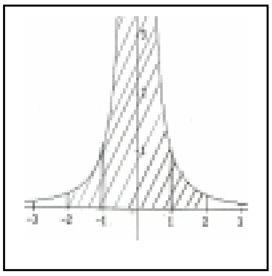


Figura 5.84

92) _ I: *¿Qué condiciones se deben cumplir?*
93) _ E: *Porque esta integral la calculamos desde -1 hasta cero, y desde 0 a 1, la suma de esto tendría que darme infinito* (muestra la gráfica de la pregunta 3). *La gráfica no está restringida.*
94) _ I: *¿Cuál es el dominio de la función?*
95) _ E: *Todos los números reales menos el cero.*
96) _ I: *¿Puedes mencionar las razones por las cuales no se puede calcular?*
97) _ E: *No se puede calcular porque entre -1 y 1 está el cero. Entonces al darle el valor cero dará infinito* (ver anexo 13, p. 126).

Comentarios: El estudiante establece una conexión de lo planteado en esta pregunta con la pregunta 3, la que utiliza para argumentar su respuesta; esto se puede considerar como una conversión del registro simbólico dado y el gráfico expuesto en la pregunta 3.

Pretest/ PREGUNTA 6

Para el grupo total.

Categoría 1. Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 1.1. Justifica rehaciendo la tesis $f(x) \geq g(x)$ {1, 3, 5, 12, 13, 15, 25}.

Categoría 1.2. Se requiere tener funciones definidas {7}.

Categoría 1.3. Dibuja un diagrama y menciona que g*(x) tiene más área que f(x).* Ver figura 5.85 {24}.

Categoría 1.4. Representa gráficamente dos rectas y marca una región.

Categoría 1.4.1. Justifica rehaciendo la hipótesis*,* $A(g(x),a,b) \geq A(f(x),a,b)$. Ver figura 5.86 {2, 22}

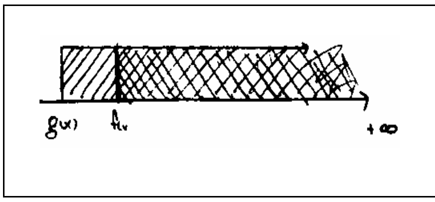


Figura 5.85

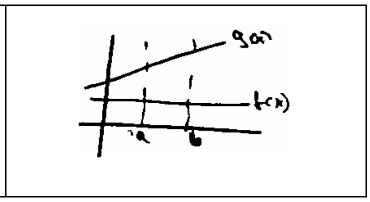


Figura 5.86

Categoría 1.4.2. Justifica rehaciendo la tesis $f(x) \geq g(x)$. Ver figura 5.87 {4, 6, 9, 17, 18, 19, 21}.

Categoría 1.4.3. Usa funciones lineales particulares y valores de éstas y rehace la tesis $f(x) \geq g(x)$. Ver figura 5.88 {14}.

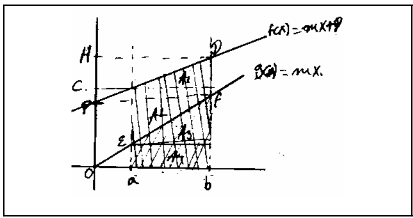


Figura 5.87

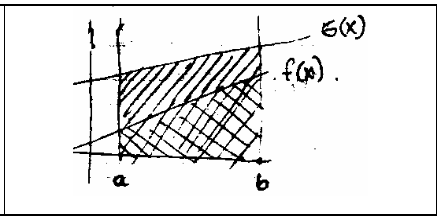


Figura 5.88

Categoría 1.4.4. Basa su justificación en el gráfico y menciona que se cumple en este caso. Ver figura 5.89 {26}

Categoría 2. Afirma que la proposición es verdadera, dibuja un diagrama.

Categoría 2.1. Escribe *A(g(x),a,b)* ≥ *A(f(x)a,b)* *f(x)* ≥ *g(x)*↔ *g(x)* ≥ *f(x).* Ver figura 5.90 {8}.

Categoría 2.2. Escribe que *x* ≥ *a* o *x* ≤ *b*. Ver figura 51. {10}

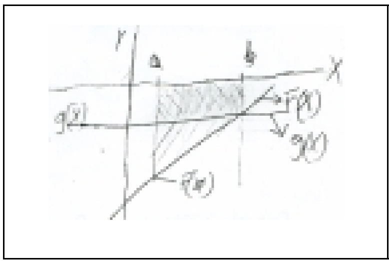


Figura 5.89

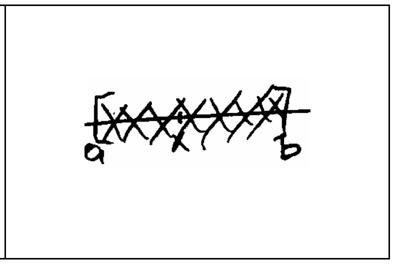


Figura 5.90

Categoría 3. No responde {11, 16, 20, 23, 27, 28}.

Postest/ PREGUNTA 7

Categoría 1. Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Compara integrales particulares, por ejemplo: $\int_0^2 (x^2 + x)dx \geq \int_0^2 x^2 dx$.

Categoría 1.1.1. De la comparación hecha, infiere que se cumple la tesis {2, 4, 10, 14, 20, 24, 25, 28}.

Categoría 1.1.2. Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica la tesis {3, 8}.

Categoría 1.2. Reescribe la proposición enunciada {5, 6, 7, 12, 13, 15, 23}

Categoría 1.3. Deriva las integrales como si fueran indefinidas y deduce que se cumple la tesis {18, 19, 21, 27}.

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 2.1. Resuelve $\int_0^2 (x^2+x)dx \geq \int_0^2 x^2 dx \ldots 2.66 \geq 4$ y escribe *"FALSO"* {1}.

Categoría 2.2. Dibuja regiones y asegura que se cumple la hipótesis y no la tesis. Ver figura 5.91 {22}, ver figura 5.92 {26}.

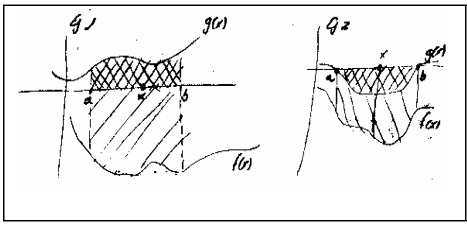


Figura 5.91

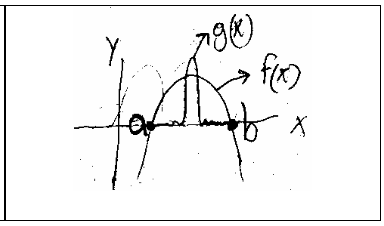


Figura 5.92

Categoría 3. No responde. {9}.

El estudiante G1E1.

<u>*En los cuestionarios*</u>

En el Pretest afirma que la proposición es verdadera, dibuja un diagrama. Puede que crea que se trata de una inecuación en una variable.

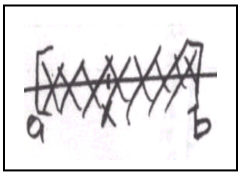


Figura 5.93

En el CC-3 escribe un ejemplo particular de dos integrales (representación numérica) la cual utiliza para justificar su respuesta, mencionando que la proposición es verdadera. No utiliza representaciones gráficas.

<u>*En la entrevista*</u>

En la pregunta 7**,** al comienzo plantea ejemplos particulares y los trata de desarrollar utilizando un procedimiento algebraico.

259) _ I: *¿Esa proposición es verdadera o falsa?*

260) _ E*: Profesor, sería que lo puedo hacer usando las funciones, si yo digo que* $f(x) = x^2 + x + 1$ *y* $g(x) = x + 2$

261) _ I: *Primero tienes que decirme si para tí eso es verdadero o es falso.*
262) _ E: (indica la proposición con el lápiz) *¡es falso!*
263) _ I: *¿Por qué?*
264) _ E: *La integral de esta ecuación, esta función* (señala a f(x) en la tesis y la primera integral en la hipótesis de la proposición) *y también integro ésta* (señala a g(x) en la tesis y la primera integral en la hipótesis de la proposición)
265) _ I: *¿Qué dice ahí?* (se refiere a la proposición)
266) _ E*: Indique si es verdadero o falso que si la integral de "a" hasta "b" de f(x) dx es mayor o igual que la integral de "a" hasta "b" de g(x) dx entonces f(x) es mayor o igual que g(x) para todo x que pertenece al intervalo "a, b".*

267) _ I: *¿Tú dices que es falso? ¿Por qué?*
268) _ E: Se queda unos segundos pensando.
269) _ I: *Puedes dar algún ejemplo geométrico o numérico.*
270) _ E: *Así* (utiliza las funciones que definió, calcula dos integrales entre 0 y 1 y le da para la de f 11/6 y para la de g 5/2) (utiliza la calculadora para realizar los cómputos) *quiere decir que 11/6 es menor que 5/2 y aquí es todo lo contrario* (se refiere a la tesis de la proposición) (ver anexo 13, p. 108).

Este procedimiento fue el que utilizó cuando cumplimentó el cuestionario Postest. Es importante destacar que el estudiante a lo largo de la entrevista ha realizado buenos tratamientos en registros gráficos, era de esperar que ante este tipo de planteamiento proporcionara una interpretación gráfica; puede que el planteamiento algebraico influya en su respuesta.

Al solicitarle que dé una interpretación gráfica, se tiene que,

273) _ I: *¿Lo puedes hacer gráficamente?*
274) _ E: Dibuja

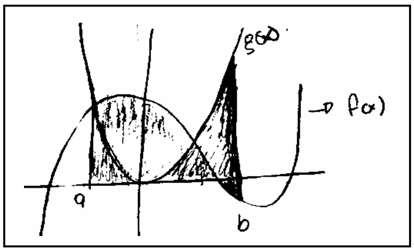


Figura 5.94

275) _ I: *¿Cuál área es mayor, la de f o la de g?*
276) _ E: *La de f.*
277) _ I: *¿Y las imágenes? ¿La de g es mayor o menor que la de f en ese intervalo?*
278) _ E: *Las imágenes, son mayores las de g.*
279) _ I: *¿Entonces de cumple o no se cumple?*
280) _ E: *Entonces sí se cumple.*
281) _ I: *¿Se cumple aquello que tienes arriba?* (se refiere a la proposición)
282) _ I: *Tú dijiste que era falso y ese es el ejemplo de que es falso. Entonces ¿Esa gráfica cumple con lo que está arriba o no?*
283) _ E: *Cumple con lo que está arriba.*
284) _ I: *¿Cumple?*
285) _ I: *¿Entonces la imagen de f es mayor que la de g allí?*
286) _ E: *No* (ver anexo 13, p. 109).

El gráfico que ha elaborado es un contraejemplo para justificar la falsedad de la proposición, no obstante la interpretación que realiza el estudiante no está clara. Lo importante es que muestra capacidad de plantearse acertados registros gráficos para justificar una proposición planteada de manera general.

Comentarios: El estudiante logra dar una acertada justificación al utilizar el registro gráfico.

La idea que tiene de equivalencia área-Integral Definida no le ha impedido justificar la proposición, esto puede ser debido a que ha considerado gráficas de funciones positivas.

El estudiante G1E2.

En los cuestionarios

En el Pretest afirma que la proposición es verdadera y escribe A(*g(x),a,b) ≥ A(f(x)a,b) f(x) ≥ g(x)↔ g(x) ≥ f(x)* y proporciona el diagrama,

Figura 5.95

En el Postest compara integrales de funciones particulares, evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica la tesis. No utiliza registros gráficos en la justificación de la respuesta. El plantear algún registro gráfico le hubiera facilitado proporcionar algún contraejemplo de la proposición.

En la entrevista

En la pregunta 7 menciona que:

158) _ E*: Puede ser verdadero.*
159) _ I: *¿Cómo es eso? ¿Qué razones tienes para decir que puede ser verdadero?*
160) _ E*: Porque, no, no, sí es verdadero.*
161) _ I: *¿Por qué?*
162) _ E*: Porque dicen que esa integral evaluada en "a b"* (se refiere a la integral de f) *es mayor que la otra integral evaluada en ese intervalo* (se refiere a la integral de g) *siempre y cuando que la función que corresponde a la integral sea mayor.*
163) _ I*: ¿Qué otra explicación puedes dar para eso?*
164) _ E*: Qué la función f(x) esté por encima de la g(x)* (ver anexo 13, pp. 115).

Al solicitarle un interpretación gráfica.

165) _ I*: Puedes dar una interpretación gráfica.*
167) _ E*: Sería ésta.* Dibuja

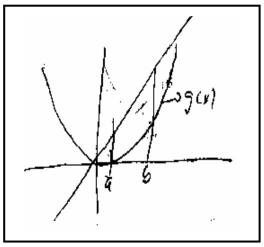


Figura 5.96

ésta será la función f(x) y esta la g(x) y si la evaluamos en este intervalo, eso se cumple.
168) _ I*: ¿Me puedes explicar por qué se cumple?*
169) _ E*: Esta función* (se refiere a f) *es superior a ésta* (se refiere a g) *en este intervalo.*
170) _ I: *¿Dónde se ve la relación de las integrales y dónde se ve la de las funciones?*
171) _ E*: Si esta función* (se refiere a f) *es mayor que esta función* (se refiere a g), *esta integral* (se refiere a la integral de f) *es mayor que esta integral en este intervalo* (se refiere a la integral de g) (indica con el lápiz sobre el gráfico lo que dice) (ver anexo 13, p. 115).

El estudiante ha construido un gráfico en donde se cumple la proposición; esto refuerza la repuesta dada en el cuestionario Postest, en el que dio ejemplos de funciones particulares en las que se cumplía la proposición.

171) _ I*: Pero está al revés, la hipótesis es que la integral de una es mayor que la integral de la otra, entonces se cumple que las imágenes de f son mayores que la de g. ¿Puedes dar un ejemplo gráfico donde eso no se cumpla?*
172) _ E*: Que tenga una discontinuidad en una de las dos.*
173) _ I: *Para ver.*
174) _ E*:* Dibuja

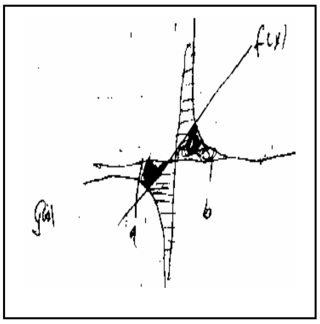


Figura 5.97

trazó esta función llamándola f(x) en este intervalo "a b"
175) _ I*: ¿Cómo interpretas eso?*
176) _ E*: Esta función es discontinua* (se refiere a g) (indica con el lápiz la curva) *y ésta es continua* (se refiere a f) *no se cumple esto* (se refiere a la proposición)
177) _ I*: ¿Cuáles son esas áreas que estás definiendo?*
178) _ E*: Sería esta área* (raya las regiones bajo el eje x, entre la curva y la recta; y sobre el eje x, entre la curva y la recta) *y la otra esta* (raya el resto de las regiones) (ver anexo 13, p. 115).

No está claro lo que quiere expresar con el gráfico, puede que considere el hecho de que basta que una función sea discontinua para que no exista la integral y, por tanto, no se cumpla la proposición.

Comentarios: El estudiante ha construido un ejemplo en el que se cumple la proposición y eso lo lleva a afirmar que la proposición es verdadera; en cierta forma el tratamiento del registro gráfico es adecuado aunque lo lleve a una respuesta equivocada.

El estudiante G2E1.

En los cuestionarios

En el Pretest afirma que la proposición es falsa, representa gráficamente dos rectas y marca una región, justifica rehaciendo la tesis $A(g(x),a,b) \geq A(f(x),a,b)$. Escribe *"porque las imágenes de g(x) son mayores que las de f(x), por tanto el área de g(x) debe ser siempre mayor que el área de f(x) en todo x que pertenece a* $[a,b]$*"*

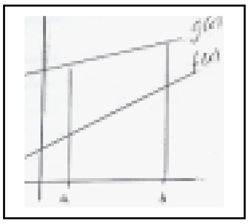


Figura 5.98

En el postest afirma que la proposición es verdadera, falsa, asegura que se cumple la hipótesis y no la tesis.

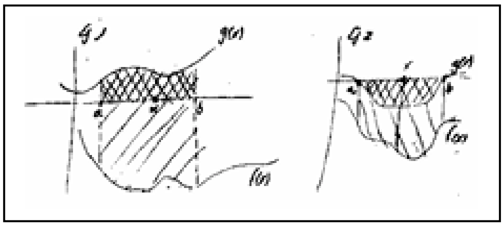


Figura 5.99

Comentarios: El estudiante en el Pretest ha confundido la hipótesis con la tesis.

En el Postest los ejemplos considerados serían validos si se considera la integral como área bajo una curva. Esto nos lleva a conjeturar que el estudiante tiene una idea de la Integral Definida asociada sólo al cálculo de área bajo una curva.

<u>*En la entrevista*</u>

En la pregunta 7 menciona que la proposición es falsa.

101) _ E: *Es falsa.*
102) _ I: *¿Por qué?*
103) _ E: *Porque dice que el área de f de x en "a" y "b" es mayor o igual que el área de g de x entre "a" y "b" entonces las imágenes de la función f de x son mayores o iguales que g para todo x que pertenece al intervalo "a b"* (ver anexo p. 122).

Al solicitarle que dé una interpretación gráfica, se tiene que.

104) _ I: *¿Puedes dar un ejemplo donde eso no se cumpla?*
105) _ E: Dibuja

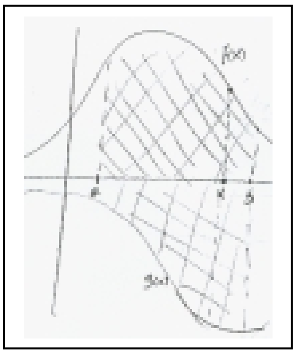


Figura 5.99

La función f(x) (dibuja la curva sobre el eje X) *éste es "a" y éste es "b", y dice que es mayor el área que g(x)* (dibuja otra curva bajo el eje X) *y que éste es el valor x, éste es de acá es menor que éste de acá* (dibuja líneas punteadas partiendo del punto señalado como x), *el área de f(x)* (raya la región bajo la curva de f) *mayor que el área de g(x)* (raya la región bajo la curva de g) *pero no siempre las imágenes de f(x) son mayores que las de g(x), en ese intervalo* (ver anexo 13, p. 122).

El estudiante confunde la imagen de la función con distancia no dirigida.

106) _ I: *Pero ahí también se está cumpliendo que la imagen de f es mayor que la de g. ¿Me puedes dar un ejemplo en donde no se cumpla la proposición?*
107) _ E: Dibuja

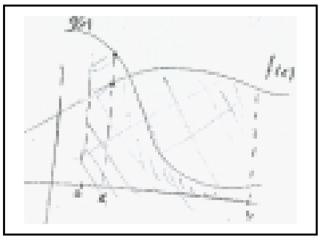


Figura 5.100

La integral de f(x) (raya la región bajo la curva f) *es mayor que la de g(x)* (raya la región bajo la curva de g) *donde no cumple que la imagen de f(x) no es mayor que la de g(x)* (escribe una *x,* dibuja una línea punteada) (ver anexo 13, p. 122).

En el gráfico anterior muestra el contraejemplo de la proposición. Parece que el gráfico que tiene una región bajo el eje OX le confunde.

Comentarios: El estudiante realiza un tratamiento adecuando del registro gráfico, en el que ha logrado construir un contraejemplo de la proposición. Muestra una confusión en cuanto al significado de la imagen de una función, considerándolo como distancia no dirigida

El estudiante G2E2.

<u>*En los cuestionarios*</u>

Afirma que la proposición es falsa, representa gráficamente dos rectas y marca una región, usa funciones lineales particulares y valores de éstas y rehace la tesis $\{f(x) \geq g(x)\}$

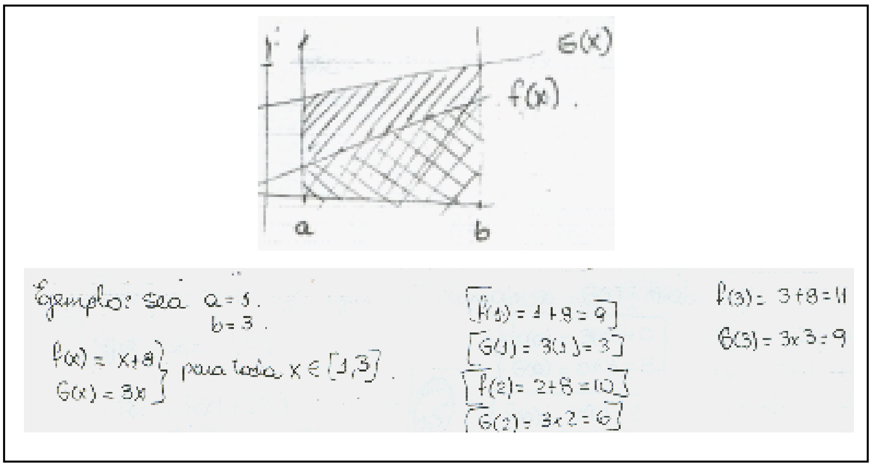


Figura 5.101

En el Postest afirma que la proposición es verdadera, compara integrales particulares, de la comparación hecha, infiere que se cumple la tesis.

Comentarios: El estudiante utiliza en el Pretest un procedimiento similar que en la pregunta 1 del mismo. Además al rehacer la tesis evidencia que requiere mantener el orden expuesto en la hipótesis.

En el Postest utiliza un procedimiento similar que en la pregunta 1 del mismo. Puede que considere que el uso de un registro algebraico sea más aceptable matemáticamente que un registro gráfico.

<u>*En la entrevista*</u>

En la pregunta se observa que confunde la hipótesis con la tesis en la proposición

102) _ I: *¿Eso se cumple independientemente de la integral que se tenga?*
103) _ E: *Si f(x) es mayor a g(x).*
104) _ I: *Pero es que la hipótesis es que la integral de f es mayor o igual que la de g* (ver anexo 13, p. 126).

Al solicitarle una interpretación gráfica se tiene que:

105) _ I: *¿Me puedes dar un ejemplo gráfico?*
106) _ E: Dibuja

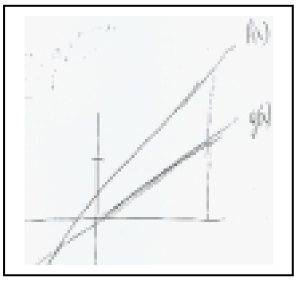


Figura 5.102

La integral de f(x) mayor que la de g(x), siempre y cuando se cumpla esta condición (señala la tesis)
107) _ I: *¿Y con curvas?*
108) _ E: Dibuja

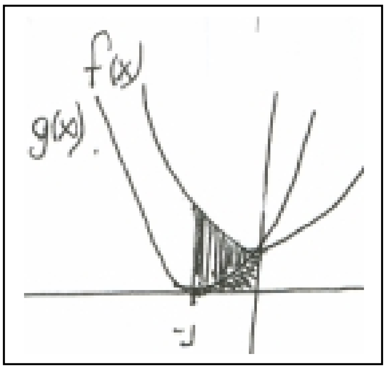


Figura 5.103

109) _ I: *¿En qué parte la integral de f es mayor a la de g?*
110) _ E: *Por ejemplo si me mandan a calcular el área entre -1 y 0* (raya la región). *El área de f(x) sería esta* (raya de región).
111) _ I: *¿Ahí se cumple la proposición?*
112) _ E: *Sí* (ver anexo 13, p. 127).

Comentarios: El estudiante confunde la hipótesis con la tesis, lo que le produce un obstáculo para argumentar su respuesta. El ejemplo que ha construido resulta un contraejemplo de la proposición, siempre que considere una mayor región a la derecha.

Pretest/ PREGUNTA 7

<u>*Para el grupo total.*</u>

Categoría 1. Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Dibuja un diagrama y menciona que *f(x) tiene más área que g(x).* Ver figura 5.104. {24}.

Categoría 1.2. Representa gráficamente dos rectas y marca una región.

Categoría 1.2.1. Reescribe la proposición enunciada. Ver figura 5.91 {2, 4, 6, 9, 18, 19, 21, 22}.

Categoría 1.2.2. Usa funciones lineales particulares y valores de éstas para justificar. Ver figura 5.105 {14}.

Categoría 1.2.3. Basa su justificación en el gráfico, menciona que se cumple según la gráfica. Ver figura 5.105 {26}

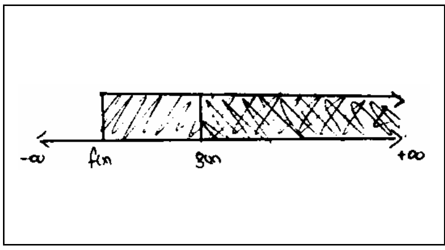


Figura 5.104

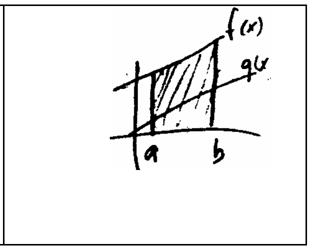


Figura 5.105

Categoría 1.3. Dibuja un diagrama.

Categoría 1.3.1. Vuelve a escribir la proposición. Ver figura 5.90 {8}.

Categoría 1.3.2. Reescribe la proposición enunciada. Ver figura 5.90 {10}

Categoría 1.4. Reescribe la proposición enunciada {1, 5, 12, 15, 25, 20}

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa.

Categoría 2.1. Se requiere tener funciones definidas {3,7}.

Categoría 2.2. Se requiere tener la figura {13}.

Categoría 3. No responde {11, 16, 17, 23, 27, 28}.

Postest/ PREGUNTA 8

<u>*Para el grupo total.*</u>

Categoría 1. Afirma que la proposición es verdadera.

Categoría 1.1. Da ejemplos particulares, por ejemplo *f(x)=x+2* y *g(x)=x+1.*

Categoría 1.1.1. Asegura que *f(x)* ≥ *g(x),* calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados {2, 3, 10, 14, 19, 28}.

Categoría 1.1.2. Calcula valores de las funciones y los compara, calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados {8, 20, 25}.

Categoría 1.2. Dibuja dos curvas y basa su justificación en el gráfico. Ver figura 5.106 {26}.

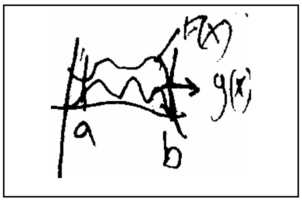


Figura 5.106

Categoría 1.3. Menciona que la desigualdad no se altera al aplicar la integral. {1, 5, 6}.

Categoría 1.4. Reescribe la proposición enunciada {4, 9, 13, 15, 22, 23}.

Categoría 2. Afirma que la proposición es falsa porque se desconoce el intervalo de integración {7, 12}.

Categoría 3. Afirma que la veracidad o falsedad de la proposición depende de la constante de integración {18, 21, 27}.

Categoría 4. No responde {24}.

De las categorizaciones anteriores podemos afirmar que: los estudiantes, antes de cursar la unidad, no logran entender los términos generales planteados, unos rehacen la tesis o la hipótesis (ver categorías 1.1, 1.4.1, 1.4.3, 2.1 de la pregunta 6; 1.1, 1.3 de la pregunta 7), pensamos que es posible que se fijen en los términos interiores a los paréntesis de $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$ y que no se percaten de que se trata de comparación de áreas; otros mencionan que requieren definir funciones particulares (ver categorías 1.2 de la pregunta 6 y 2.1 de la pregunta 7); esto puede evidenciar que sólo conciben las proposiciones en términos particulares; otros elaboran diagramas sobre una recta (ver categorías 1.3 de la pregunta 6 y 2.2 de la pregunta 7), puede que estos estudiantes crean que se trata de inecuaciones en una variable. Entre los estudiantes que logran “entender” los planteamientos generales, tenemos los que dan contraejemplos (ver categorías 1.4.2, 1.4.4 de la pregunta 7) y los que dan ejemplos en los que se cumple la proposición (ver categorías 1.2.1 y 1.2.3), estos estudiantes relacionan las proposiciones con el área de regiones.

Después de desarrollar la unidad, entre los que interpretan la proposición, unos plantean integrales de funciones particulares (caso pregunta 7) y luego comparan las funciones (ver categorías 1.1.1, 1.1.2) y viceversa (caso pregunta 8) (ver categorías 1.1.1, 1.1.2); el tratamiento se circunscribe al registro algebraico, no se puede afirmar o negar que se planteen registros gráficos o relacionan este razonamiento con área de regiones. Dos estudiantes (ver categoría 2.2 de la pregunta 7) elaboran registros gráficos en los que se representan contraejemplos de la proposición, con la salvedad de que, el dibujado por el estudiante número 22, sólo es válido para el caso de que se considere el área de las regiones; en cambio en el del estudiante número 26, representa un contraejemplo, tanto si se trata del área como de integrales definidas cualesquiera. El registro gráfico elaborado en la pregunta 8 (ver categoría 1.2) constituye una representación particular de la proposición.

Pensamos que el principal problema de los estudiantes ante estas proposiciones generales radica en una falta de comprensión no sólo de los conocimientos relacionados, sino del propio significado del concepto de proposición. Habrá que tener en cuenta en el estudio definitivo este aspecto.

El estudiante G1E1.

En los cuestionarios

En el Pretest afirma que la proposición es verdadera, reescribe la proposición enunciada.

En el Postest, afirma que la proposición es verdadera, escribe un ejemplo particular de dos funciones, calcula dos integrales y compara los resultados de estas. No utiliza representaciones gráficas.

En la entrevista

De entrada, trata de proceder de manera algebraica, aunque referencia el aspecto gráfico.

286) _ E*: Aquí no me dan el intervalo.*
287) _ I*: ¿Es importante que den el intervalo para dar una respuesta en ese ejercicio?*
288) _ E*: Porque aquí puedo meter cualquier número.*
289) _ I*: ¿Qué dice ahí?*
290) _ E*: Si f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral de f(x) en "a" "b" es mayor que la de g(x) en "a" "b"*
291) _ I: *¿Tú dices que eso es verdadero o falso?*
292) _ E: *Éste también es falso.*
293) _ I: *¿Qué razones tienes para decir que es falso?*
294) _ E*: Porque si yo digo, si hago lo mismo, la misma gráfica* (mueve el lápiz como simulando una curva, tal vez se refiere a lo que hizo en la pregunta 7) (se queda por segundos observando la proposición)
295) _ I: *¿Puedes dar algún ejemplo?*
296) _ E*: Lo puedo hacer por el mismo método que apliqué en el anterior.*
297) _ I: *Bueno.*

298) _ E*: Escribe las funciones* $f(x) = x+1 \quad g(x) = x-1$ *calcula las integrales entre 1 y dos y le da como resultado 3/2 y -1/2 respectivamente* (usa la calculadora para hacer los cómputos*). Sí es verdadero* (ver anexo 13, p. 109).

Al pedirle una interpretación gráfica, se tiene que,

299) _ I*: ¿Puedes dar una interpretación gráfica?*
300) _ E: Dibuja

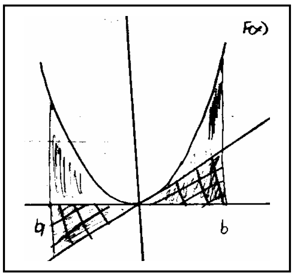


Figura 5.107

ésta es f(x) y ésta es g(x), en el intervalo es el área de f(x) (raya la región f) *ésta es la de g(x)* (raya la región de g) *el área de f(x) es mayor.*
301) _ I: *Pero ¿qué dice primero el enunciado?*
302) _ E*: Las imágenes.*
303) _ I: *¿Qué pasa con las imágenes?*
304) _ E*: Las imágenes de f(x) son mayores.*
305) _ I: *¿Entonces se cumple la tesis?*
306) _ E: *Se cumple, sí. El área de f(x) que el área de g(x)* (ver anexo 13, p. 109).

Comentarios: El estudiante procede como en la pregunta anterior, el tratamiento del registro gráfico le facilita dar una justificación adecuada de la proposición, realizando una conversión al registro simbólico a partir del registro gráfico.

El estudiante G1E2.

<u>En los cuestionarios</u>

En los dos cuestionarios procede de forma similar que en las preguntas precedentes, con la diferencia que comienza con la comparación de las funciones.

Comentarios: El estudiante en el Pretest confunde la desigualdad enunciada con inecuaciones en una variable y no se percata de que son relaciones establecidas en dos variables.

En el Postest la justificación está basada en registros algebraicos. El no utilizar registros gráficos pudo ocasionar que no diese justificaciones adecuadas.

<u>En la entrevista</u>

En la pregunta 8 menciona que:

184) _ E*: Puede ser falso.*
185) _ I: *¿Por qué?*
186) _ E*: Por la gráfica que acabo de hacer.*
187) _ I*: ¿Cómo explicas eso?*
188) _ E: *Para que esto se cumpla tiene que cumplirse para toda función. Pero si una de las dos no es continua, no se puede cumplir* (vuelve al ejemplo anterior y menciona que ahí no se cumple)
189) _ I*: ¿Tú basas tu justificación en que una de las funciones es discontinua?*

190) _ E*: Sí.*
191) _ I: *Y si las funciones fueran continuas ¿Se cumpliría?*
192) _ E*: Si se cumple.*
193) _ I*: ¿Puedes dar un ejemplo?*
194) _ E*:* Dibuja

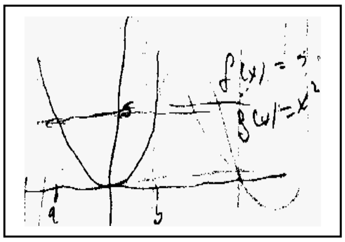


Figura 5.108

195) _ I*: ¿Me lo puedes explicar?*
196) _ E: *La función f(x) esta por encima de la función g(x)*
197) _ I: *¿Se cumple o no se cumple el enunciado en ese ejemplo?*
198) _ E: *Si se cumple.*
199) _ I: *¿Por qué se cumple?*
200) _ E: *Porque una función es mayor que la otra.*
201) _ I: *¿Y eso es suficiente? ¿Y qué pasa con la tesis?*
202) _ E: *También se cumple, que una es mayor que la otra.*
203) _ I*: ¿Qué significa una?*
204) _ E*: Que evaluando la integral en ese intervalo, una es mayor que la otra.*
205) _ I*: ¿Otra razón que pudieras dar?*
206) _ E*: Pudiera ser otra función.* Dibuja

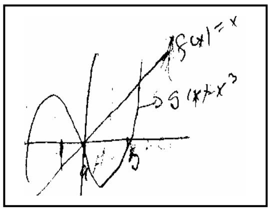


Figura 5.109

cúbica evaluada en "a b" y la otra una recta. También se debería cumplir.
207) _ I*: ¿Qué se cumple?*
208) _ E*: El enunciado.*
209) _ I: *¿Explícamelo?*
210) _ E*: Al evaluar la función g(x) y la función f(x)* (indica con el lápiz a g(x) y a f(x) en el gráfico) *esta función tendría que ser mayor en el intervalo "a b"* (indica con el lápiz en la gráfica) (ver anexo 13, p. 116).

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico para argumentar su respuesta.

El estudiante G2E1.

<u>*En los cuestionarios*</u>

En el Pretest afirma que la proposición es falsa, representa gráficamente dos rectas y marca una región, recibe la proposición enunciada.

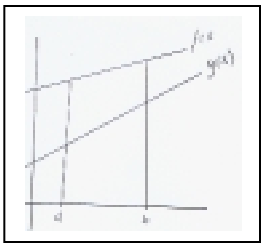


Figura 5.110

En el Postest afirma que la proposición es verdadera, reescribe la proposición enunciada.

Comentarios: De lo expresado por el estudiante no se puede asegurar o negar que comprenda la proposición enunciada.

<u>En la entrevista</u>

En la pregunta 8 menciona que la proposición es verdadera, utiliza dos representaciones gráficas para justificar su respuesta.

111) _ E: *Yo considero que es verdadero.*
112) _ I: *¿Por qué?*
113) _ E: *Porque las imágenes serán mayor las de f(x) en "a" "b" y la imágenes de g(x) podía estar por debajo del eje X o por encima del eje X, pero debajo de f.* Dibuja

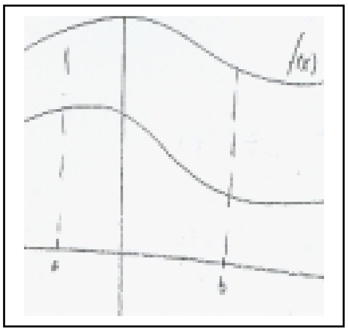


Figura 5.111

se cumple que a la larga la imágenes de f(x) son que las de g(x), la integral de f(x) va ser mayor que la integral de g(x).
114) _ I: *¿Me puedes dar otro ejemplo gráfico donde se pueda visualizar eso que dicen que es cierto?*
115) _ E: Dibuja

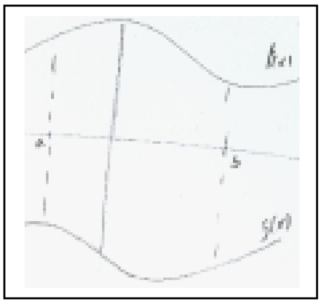


Figura 5.112

f(x) por arriba y g(x) por aquí (Dibuja la curva de f sobre el eje OX y la de g por debajo del eje OX), *también podemos observar que g(x) tendrá mayor área que f(x), pero la integral es negativa y al ser negativa será menor que la integral positiva que tenemos acá arriba* (se refiere a la de f)*. Y las imágenes por el simple hecho de estar por debajo del eje OX será menores a las que están por encima del eje OX* (ver anexo 13, p. 122).

Comentarios: El estudiante realiza un adecuado tratamiento del registro grafico, exponiendo dos situaciones que tipifican la proposición. En el segundo ejemplo se observa que ha rectificado la confusión observada en la pregunta anterior en cuanto a regiones que se encuentran bajo el eje OX.

El estudiante G2E2.

En los cuestionarios

En el Pretest afirma que la proposición es verdadera, representa gráficamente dos rectas y marca una región, y usa funciones lineales particulares y valores de éstas para justificar.

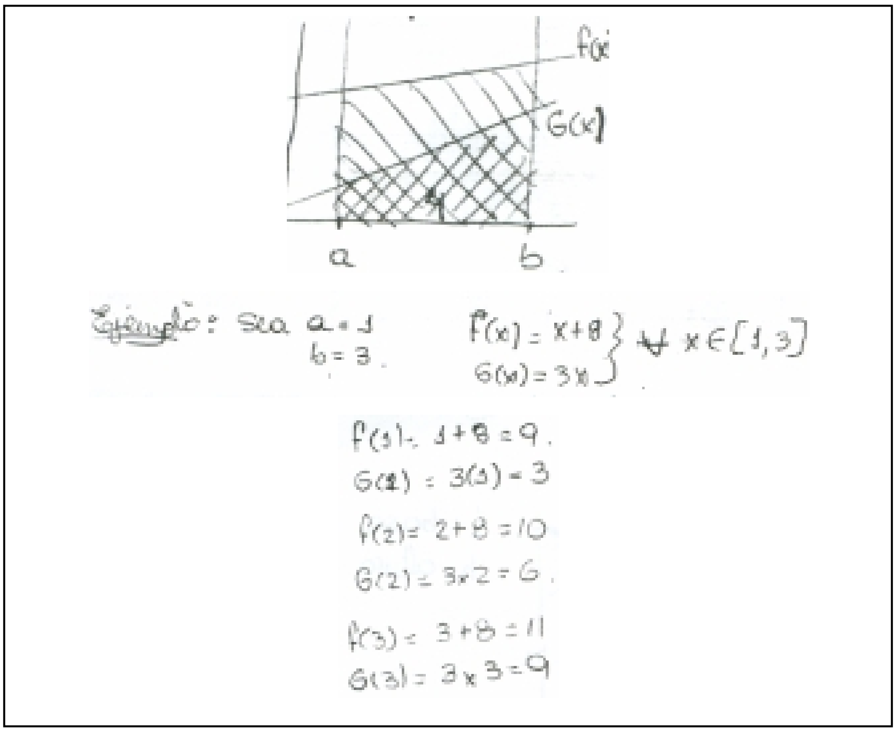


Figura 5.113

En el Postest afirma que la proposición es verdadera, da ejemplos particulares con funciones, asegura que *f(x)* ≥ *g(x),* calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados.

Comentarios: El estudiante responde de manera similar que las preguntas anteriores.

En la entrevista

En la pregunta 8 se observa, como en la pregunta anterior, que confunde la hipótesis con la tesis.

113 _ I: *¿Cuál es la hipótesis en esta proposición?*
114) _ E: *No me dan el intervalo.*
115) _ I: *¿Es verdadero o falso lo que está planteado?*
116) _ E: No tiene claro lo que es la hipótesis y la tesis.
117) _ I: Le aclara lo que significa la hipótesis y la tesis en una proposición.
118) _ I: *¿Es verdadera o falsa la proposición?*
119) _ E: *Es verdadera. Esto similar al problema anterior, está como al revés. Si la función es mayor o igual a la otra función, entonces la integral de esta función tiene que mayor que la integral de esta función* (ver anexo 13, p. 127).

Al solicitarle una interpretación gráfica se tiene que

120) _ I: *¿Me puedes dar una interpretación gráfica?*
121) _ E: *Igual, me lo están diciendo al revés, allá lo que era la tesis aquí es la hipótesis.*
122) _ I: *¿Puedes elaborar alguna gráfica?*

123) _ E: Dibuja

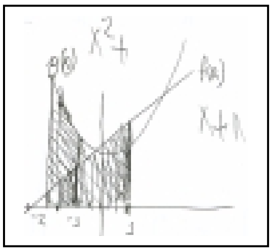


Figura 5.114

Me mandan a calcular el área de f(x) y el área de g(x) sería ésta (raya las dos regiones que están sobre el eje OX).
124) _ I: *¿Cómo explicarías la proposición?*
125) _ E: *Aquí no me dan un intervalo específico.*
126) _ I: *¿Qué se puede hacer?*
127) _ E: *Si me mandan a buscar entre -2 y -1, la f(x) sería menor, la g(x) sería mayor* (raya las regiones)
128) _ I: *La hipótesis es que tienen que buscar un problema donde f(x) sea mayor o igual a g(x), no al contrario.*
129) _ E: *Entre 0 y 1.*
130) _ I: *Ahí se cumple la hipótesis.*
131) _ I: *¿Se cumple la tesis en esa parte?*
132) _ E: *Sí.*
133) _ I: *Si las dos gráficas estuviesen debajo del eje X ¿Se seguiría cumpliendo la proposición?*
134) _ E: Dibuja

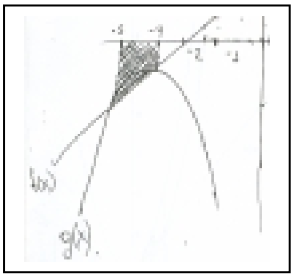


Figura 5.114

Es este intervalo (señala el intervalo de -5 a -4) *si se cumple esta tesis, porque el área de f(x) sería mayor que la de g(x)*
135) _ I: *¿Verificaste la hipótesis?*
136) _ E: *Sí.*
137) _ I: *¿Se cumple la hipótesis?*
138) _ E: Silencio (ver anexo 13, p. 128)

Comentarios: En esta pregunta se evidencia, como en la pregunta anterior, que no logra interpretar la proposición en términos de hipótesis y tesis. Sin embargo muestra capacidad para plantearse importantes registros gráficos.

5.3.4. Discusión de los resultados

Del análisis e interpretación de la información recolectada de la aplicación de los dos cuestionarios y de la entrevista a los cuatro estudiantes, presentamos a continuación un resumen por preguntas.

PREGUNTA 1

En el pretest se pedía justificar la propiedad aditiva del área. Se proporcionan dos registros, uno algebraico y otro gráfico.

<u>*Para el grupo total.*</u>

Los estudiantes, antes de cursar la unidad de Integral Definida utilizan:

Argumentos gráficos, dibujan figuras tales como triángulos, rectángulos y trapecios; los dibujan sobre el gráfico dado o tratan de separar las figuras y tratarlas como en un puzzle (ver categorías 1 y 3).

Argumentos algebraico-numéricos, utilizan fórmulas de cálculo de área de estas figuras (ver categorías 1.1, 3.1, 3.2); las expresiones algebraicas de las funciones y realizan comparaciones (ver categorías 1.3, 2.1).

En general, los estudiantes argumentan su respuesta con representaciones gráficas. Las representaciones algebraico-numéricas son consecuencia de una utilización previa de la representación gráfica. Se percibe cierto intento de mover figuras y tratar de llenar espacios.

Una vez cursada esta unidad, los estudiantes tienden, en general, a utilizar:

Argumentos algebraico-numéricos consistentes en la sustitución de la expresión algebraica de cada función en la integral respectiva, cálculo de las integrales y comparación de los resultados (ver categoría 1, 4, 5).

Argumentos gráficos marcando sobre la gráfica (ver categoría 3).

En el postest se pedía justificar la propiedad aditiva de la integral. Se proporcionan dos registros, uno gráfico y otro algebraico.

En esta pregunta, en líneas generales, la representación gráfica ha pasado a un segundo plano o no se utiliza; además, ningún estudiante trata de justificar la propiedad utilizando la división del intervalo y las sumas de Riemann o el cálculo de la aproximación mediante trapecios (en el trabajo de Orton sí lo hacen). Esto puede ser debido a la mayor facilidad que ofrece el operar en las representaciones algebraicas-numéricas que en las gráficas; y al hecho de que el estudiante puede pensar que resulta más rápido y aceptable el uso de integrales para justificar la igualdad. Debemos hacer notar que dos estudiantes del G1 (ver categoría 1), que cursaron las PL de esta unidad, separan y rellenan las regiones, tal vez en un intento de compararlas, aunque ello es un indicio un tanto débil, se puede decir que esto puede estar influenciado por lo que hicieron en las PL en las que las regiones se cubrían por figuras hasta dar una apariencia similar a la que se observa en el ejemplo.

En la entrevista

La idea que tiene el estudiante **G1E1** de la integral está relacionada con el cálculo del área. Al explicar la igualdad utiliza figuras en forma de puzzle. Se observa cierta influencia de la instrucción recibida al mencionar el procedimiento que seguiría utilizando rectángulos; ésta es la forma de trabajo con el PU en el laboratorio de ordenadores.

El estudiante **G1E2** intenta justificar la igualdad basándose en la suma de funciones, sin que se observe que relacione las integrales. Al tratar de explicar gráficamente, dibuja otras curvas, lo que nos hace suponer que no establece conexiones entre los registros gráficos y algebraicos dados. Al insistirle que utilice la gráfica dada menciona el uso de trapecios, esto puede estar influenciado por la instrucción recibida.

El estudiante **G2E1** proporciona dos explicaciones, una basada en el cálculo de las integrales e igualación de los resultados, y otra, utilizando rectángulos a través del cálculo de sus áreas.

El estudiante **G2E2** proporciona una explicación basada en el uso de trapecios.

En general, los estudiantes del grupo G1 tienden a dar explicaciones con cierta influencia de la instrucción recibida en el laboratorio de ordenadores. Las explicaciones del grupo G2 resultan las esperadas de las proporcionadas por un estudiante de una clase habitual.

PREGUNTA 2

En el pretest se pedía calcular el área de una región que tiene una porción sobre el eje OX y otra bajo el eje OX. Se proporcionan dos registros, uno algebraico y otro gráfico.

Los estudiantes, antes de cursar la unidad de Integrales, utilizan la secuencia de representaciones gráfico-algebraico-numérica (ver categoría 1). Al calcular el valor del área de la porción bajo el eje OX la han considerado como positiva; la mayoría ha estimado, observando la gráfica, la altura del triángulo dibujado por ellos, que se encuentra bajo el eje OX (ver categorías 1.1, 1.2, 1.3.1); otros calculan valores de la función utilizando la expresión algebraica (ver categoría 1.3.2), otros aplican valor absoluto para obtener un número positivo (ver categoría 1.3.3) y otros, más artificiosos, usan el teorema de Pitágoras (ver categoría 1.3.4). En todos estos procedimientos se observa la intención de resolver el problema para que el valor del área resulte positivo. No se observó que tuviesen problema con el cálculo del área de la porción sobre el eje OX, simplemente la adicionaron con la que está bajo dicho eje.

En el postest, al igual que en el pretest, se pide calcular el área de una región que tiene una porción sobre el eje OX y otra bajo el eje OX. Se proporcionan dos registros, uno algebraico y otro gráfico.

Una vez cursada esta unidad, los estudiantes tienden a utilizar la gráfica de manera referencial para estimar el corte con el eje OX o para identificar las regiones; no se observó marcas sobre la gráfica. Calculan el área de la región, por lo general, utilizando integrales definidas (ver categorías 1, 3, 4). Utilizan aproximaciones numéricas (ver categorías 1 y 3) sin dibujar figuras elementales sobre la gráfica. No se observó, en general, que tuviesen problemas para calcular el valor del área de la región bajo el eje OX; no obstante, un pequeño grupo (ver categoría 4) presenta problemas con la interpretación de la gráfica. En general, los estudiantes fundamentan sus procedimientos en procesos algebraicos- numéricos, de modo que lo gráfico ha pasado a ser algo complementario. Debemos hacer notar que dos estudiantes (ver categorías 2 y 3) del G1 que cursaron PL en esta unidad fueron los que utilizaron aproximación numérica; esto puede estar influenciado por el énfasis puesto en las PL a la aproximaciones numéricas a través del Programa de Utilidades.

En la entrevista

El estudiante **G1E1** presenta dificultades para resolver problemas que involucra el cálculo del área de una región bajo el eje OX. Esto puede ser ocasionado por la idea que tiene de la integral asociada al área. Al considerar que no puede resolver el problema con una integral, se inclina por la alternativa de aproximar con rectángulos; esto puede ser consecuencia de la instrucción recibida.

El estudiante **G1E2** no tiene dificultades para identificar las regiones y calcular el área. Muestra que es consciente de que el valor de la integral de la región bajo el eje OX es negativo y que le debe cambiar el signo.

El estudiante **G2E1** diferencia lo que es la Integral Definida del área de una región, considera que la Integral Definida puede asumir un valor negativo, en cambio el área es positiva.

El estudiante **G2E2**, aunque muestra cierta confusión en cuanto al signo de la integral y el área, se observa que considera que la Integral Definida puede asumir valores positivos o negativos.

PREGUNTA 3

En el pretest se pide, si es posible, calcular el área de una región limitada por un semiplano. Si el estudiante considera que no es posible debe justificar por qué. Se proporcionan dos registros, uno algebraico y otro gráfico.

Los estudiantes, antes de recibir la instrucción, basan su justificación en el registro gráfico dado, de modo que la mayoría considera que el área no se puede calcular; argumentando que la región es infinita o su dominio no está restringido (ver categorías 1.1, 1.2). Otros delimitan la región con segmentos, tal vez porque tienen una idea de que el área es siempre finita y que es siempre calculable (ver categorías 2.2, 2.3). Otros, de igual manera, delimitan parte de la región y se refieren al resto como que no es calculable (ver categorías 2.1, 2.2, 2.3). Un estudiante (ver categoría 2.6) establece expresiones algebraicas para el cálculo del área de la región, tal vez tiene la idea de que esta manera de resolución es matemáticamente más aceptable.

En el postest se pide calcular el área de un función no acotada, si el estudiante considera que no es posible debe justificar por qué. Se proporcionan dos registros uno, algebraico y otro, gráfico.

Después de cursar la unidad, la mayoría de los estudiantes considera que el área de la región no se puede calcular. Utilizan el registro gráfico, unos con mayor énfasis (ver categorías 1.1, 1.6, 1.7, 1.8.1) que otros (ver categorías 1.2.1, 1.4.1); argumentan que la función no existe en cero, que la región es infinita, o que no está acotada; los razonamientos basados en registros gráficos están ligados, en gran parte, al tratamiento de los registros simbólicos, es decir al cálculo de la Integral Definida; la representación gráfica ejerce mayor influencia en el tipo de respuesta que la algebraica (ver categoría 1.2.1). Los que mencionan que sí es posible calcular el área sólo usan el registro simbólico, esto es, calculan la integral aplicando directamente la regla de Barrow como el cálculo de integrales (ver categoría 2.1) o la aproximación numérica (ver categoría 2.2). Varios estudiantes del G1 dan argumentaciones gráficas en sus respuestas (ver categorías 1.6, 1.7, 1.8.1); debemos hacer notar que un estudiante (ver categoría 1.9) dibuja una figura semejante a la que se puede obtener trabajando con el PU, es decir, con la idea de aproximar una región mediante cuadraturas.

En la entrevista

El estudiante **G1E1** intenta explicar que el área no es calculable con un argumento basado en la construcción de rectángulos que asemeja el proceso seguido en las Prácticas de Laboratorio.

El estudiante **G2E1** dibuja un gran número de rectángulos aproximándose al eje OY. Esta idea también es similar al procedimiento dado en las Prácticas de Laboratorio.

Los estudiantes **G2E1** y **G2E2** proporcionan argumentos relacionados con el comportamiento de la curva o que la función no está definida. No realizan tratamientos del registro gráfico.

En general se observa que los estudiantes del G1 utilizan tratamientos del registro gráfico que se asemejan a los que se aplican en las Prácticas de Laboratorio. En cambio los del grupo G2 usan argumentos más teóricos, sin elaborar ningún tipo de gráfico.

PREGUNTA 4

En el pretest y en el postest se plantea el mismo problema y se pide calcular el área de una región, para lo cual se proporciona sólo la gráfica de la función. Se proporciona sólo el registro gráfico.

Los estudiantes, antes de cursar la unidad de integrales, resuelven el problema realizando el tratamiento del registro gráfico, usando figuras elementales tales como triángulos, trapecios y rectángulos para "rellenar" la región; se observa que el no tener la expresión algebraica de la función no les dificulta el cálculo del área de la región. Resulta notoria la manera cómo realizan la cuadratura de la región limitada por la curva, que recuerda a los procedimientos utilizados por grandes matemáticos en el pasado; la idea de acotar entre dos valores está presente en los procedimientos, así como el realizar refinamientos (ver categoría 1.1, 1.5, 1.6, 2.3).

Después de haber finalizado la unidad, algunos estudiantes siguen un procedimiento similar al que utilizaron cuando resolvían el CC-1 (ver categorías 1.1, 1.2, 1.3), otros muestran mayor influencia de la instrucción recibida en esta unidad (ver categorías 1.4, 1.9, 2.4, 2.7, 3). La cuadratura de la región limitada por la curva, también está presente en la resolución del problema, pero han mejorado el refinamiento (ver categorías 1.9, 2.4, 2.7, 3). Varios estudiantes del G1 muestran dibujos sobre la gráfica semejantes a los obtenidos al aplicar el PU (ver categorías 2.4, 3). Debemos señalar que la figura que aparece en la categoría 3 se asemeja a lo que se obtiene mediante el uso del PU cuando se trata de dibujar una cantidad "grande" de rectángulos, basándose en las ideas de aproximación que se proponen en él.

En un posterior trabajo con PL se tendrá que hacer mayor énfasis en la necesidad de hacer cuadraturas para las distintas regiones limitadas por las curvas, mediante el PU, así como mejorar el tratamiento de los registros gráfico- numéricos y establecer conversiones entre ambos registros, planteando además actividades que provoquen la coordinación de ambos registros.

En la entrevista

Se observa que el estudiante **G1E1** no necesita tener la expresión algebraica de la función para dar un procedimiento de resolución del problema. Las aproximaciones que realiza son similares a las hechas en las Prácticas de Laboratorio.

El estudiante **G2E1** construye un gran número de rectángulos inferiores y superiores que reflejan una transferencia de lo aprendido en las Prácticas de Laboratorio. No requieren de la expresión algebraica de la función para resolver el problema.

Los estudiantes **G2E1** y **G2E2** utilizan rectángulos y triángulos para aproximar el área. No requieren tener la expresión algebraica de la función para resolver el problema.

Se observa que los estudiantes del grupo G1 están influenciados por la instrucción recibida, mientras que los estudiantes del grupo G2 son capaces de utilizar figuras variadas en su resolución.

PREGUNTA 5

En el pretest se pide calcular el área de una porción de la gráfica de una función valor absoluto. Se proporciona sólo el registro algebraico.

Los estudiantes, antes de cursar la unidad de integrales, elaboran una representación gráfica de la función, algunos no especifican el procedimiento (ver categorías 1.1, 1.2, 2.1, 2.2), otros lo hacen usando tablas de valores (ver categorías 1.3, 1.4, 2.3) y otros definiendo la función a trozos (ver categorías 1.5, 2.4, 2.5); una vez representada la función, delimitan las regiones con dos triángulos, y, seguidamente, calculan el valor del área con la respectiva fórmula; algunos estudiantes se han equivocado al realizar la representación gráfica (ver categoría 2); no obstante, la idea general es empezar con un registro gráfico y realizar la conversión al registro algebraico-numérico de la manera más sencilla, ajustada evidentemente a los conocimientos que tienen hasta el momento.

En el postest se pide calcular la integral de una función valor absoluto. Se proporciona sólo el registro algebraico.

Después de la instrucción, una parte de los estudiantes realiza un tratamiento sólo en el registro algebraico; algunos consideran el integrando como una función lineal (ver categoría 1.1); puede que estos estudiantes no tengan claro que se trata de la función valor absoluto y crean que sólo se trata del valor absoluto de un número; otros definen a trozos la función (ver categoría 1.2, 1.3, 1.4) y cometen errores, tanto en la definición como en el planteamiento de las integrales, principalmente en los límites de integración; únicamente uno (ver categoría 1.3.2) plantea y calcula las integrales; puede que al no representar gráficamente la función haya contribuido a que no se percaten del error. Los estudiantes que representaron gráficamente la función (ver categoría 2), a partir de la definición a trozos, escribieron correctamente los límites de integración, y, salvo un error de cálculo de la integral, resolvieron las integrales. Hay que hacer notar que los estudiantes pudieron haber calculado la integral con un procedimiento similar al usado en el pretest y no lo hicieron; puede que crean que este procedimiento no sería aceptable en una prueba sobre integrales.

El cambio de proceder en la resolución de este tipo de problema puede tener varias explicaciones; puede ser debido al contenido involucrado, a conocimientos previos o ahora adquiridos, o a la forma como se les ha presentado el problema. Se deben aclarar tales aspectos.

En la entrevista

El estudiante **G1E1** al inicio tiene dificultades para definir la función valor absoluto, este obstáculo es superado al lograr graficarla. Delimita la región con triángulos y utiliza la fórmula del cálculo del área de un triángulo para hallar el valor del área; adicionalmente plantea dos integrales que calculan el área solicitada.

El estudiante **G2E1** define la función, grafica la función y dos regiones triangulares, plantea dos integrales, relacionándolas con el cálculo del área de las dos regiones triangulares. Utiliza la fórmula del cálculo del área de un triángulo para hallar el valor del área.

Los estudiantes **G2E1** y **G2E2** utilizan procedimientos similares que los anteriores.

En general los estudiantes de ambos grupos, una vez grafican la función, son capaces de resolver el problema planteando integrales o utilizando geometría elemental.

PREGUNTA 6

Esta pregunta sólo se planteó en el postest. Se muestra la resolución de una integral y se pide justificar si es verdadero o falso el desarrollo. Se proporciona sólo el registro algebraico.

Los estudiantes que afirman que la proposición es falsa se limitan a comprobar el procedimiento y no se detienen a reflexionar sobre el problema, al parecer se dejan llevar por la presentación del registro algebraico sin plantearse una representación gráfica (ver categoría 1). De los que afirman que es falsa, dos estudiantes representan gráficamente la función, puede que hayan identificado la relación de esta pregunta con la pregunta 3 (ver categoría 2.3); otros argumentan que la función no es continua o que *"el área...es infinita cerca de cero";* es posible que estos estudiantes se refieran a la necesidad de que la función sea continua para poder utilizar la Regla de Barrow. Ninguno de los estudiantes ha señalado el resultado negativo de la integral como argumento en su justificación, lo que resulta un tanto extraño si nos atenemos al tipo de respuesta en otras preguntas (el área es positiva).

De las respuestas dadas en esta pregunta se generan algunos interrogantes: ¿Influyó en la respuesta de los estudiantes la presentación tan aparentemente directa de la Regla de Barrow? ¿Por qué no relacionaron esta pregunta, con la pregunta 3? ¿Están pensando los estudiantes en las hipótesis de aplicación de la regla de Barrow, cuando al expresar que la función no es continua o el área es infinita? Al no tomar en cuenta el resultado negativo de la integral ¿están relacionando la Integral Definida con el área o no logran establecer conexión alguna?

<u>En la entrevista</u>

La representación del procedimiento en el registro algebraico, genera en el estudiante **G1E1** el tratar de dar una respuesta afirmativa, como primera reacción, debido a la aparente veracidad del procedimiento. El estudiante trata de relacionar este problema con el problema 3 elaborando una gráfica.

El estudiante **G1E2** menciona que "*tomaría una aproximación hacia el punto de discontinuidad",* esto refleja cierta influencia de la instrucción recibida y que considera una interpretación gráfica del problema.

El estudiante **G2E1** se limita a mencionar como argumento la discontinuidad de la función.

El estudiante **G2E2** relaciona el problema con el problema 3, utilizando la gráfica como argumento en su explicación.

En general, los estudiantes a pesar de que se les muestre una proposición aparentemente verdadera, son capaces de plantearse un registro gráfico como soporte para sus argumentaciones.

PREGUNTAS 6 y 7 del PRETEST. PREGUNTAS 7 y 8 POSTEST

En el pretest, pregunta 6, se plantea una proposición en la cual su hipótesis es la desigualdad de las áreas de dos funciones y su tesis la desigualdad de las funciones. En la pregunta 7 se plantea la recíproca de la proposición. En ambas preguntas se pide justificar la veracidad o falsedad de cada proposición. Se proporcionan los registros algebraicos.

Los estudiantes, antes de cursar la unidad, no logran entender los términos generales planteados, unos rehacen la tesis o la hipótesis (ver categorías 1.1, 1.4.1, 1.4.3, 2.1 de la pregunta 6; 1.1, 1.3 de la pregunta 7), pensamos que es posible que se fijen en los términos interiores a los paréntesis de $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$ y que no se percaten de que se trata de comparación de áreas; otros mencionan que requieren definir funciones particulares (ver categorías 1.2 de la pregunta 6 y 2.1 de la pregunta 7); esto puede evidenciar que sólo conciben las proposiciones en términos particulares; otros elaboran diagramas sobre una recta (ver categorías 1.3 de la pregunta 6 y 2.2 de la pregunta 7), puede que estos estudiantes crean que se trata de inecuaciones en una variable. Entre los estudiantes que logran "entender" los planteamientos generales, tenemos los que dan contraejemplos (ver categorías 1.4.2, 1.4.4 de la pregunta 7) y los que dan ejemplos en los que se cumple la proposición (ver categorías 1.2.1 y 1.2.3), estos estudiantes relacionan las proposiciones con el área de regiones.

En el postest, pregunta 7, se plantea una proposición en la cual su hipótesis es la desigualdad de dos integrales y su tesis la desigualdad de las funciones. En la pregunta 8 se plantea la recíproca de la proposición. En ambas preguntas se pide justificar la veracidad o falsedad de cada proposición. Se proporcionan los registros algebraicos.

Después de desarrollar la unidad, entre los que interpretan la proposición, unos plantean integrales de funciones particulares (caso pregunta 7) y luego comparan las funciones (ver categorías 1.1.1, 1.1.2) y viceversa (caso pregunta 8) (ver categorías 1.1.1, 1.1.2); el tratamiento se circunscribe al registro algebraico, no se puede afirmar o negar que se planteen registros gráficos o relacionan este razonamiento con área de regiones. Dos estudiantes (ver categoría 2.2 de la pregunta 7) elaboran registros gráficos en los que se representan contraejemplos de la proposición, con la salvedad de que, el dibujado por el estudiante número 22, sólo es válido para el caso de que se considere el área de las regiones; en cambio en el del estudiante número 26, representa un contraejemplo, tanto si se trata del área como de integrales definidas cualesquiera. El registro gráfico elaborado en la pregunta 8 (ver categoría 1.2) constituye una representación particular de la proposición.

Pensamos que el principal problema de los estudiantes ante estas proposiciones generales, radica en una falta de comprensión no solo de los conocimientos relacionados, sino del propio significado del concepto de proposición. Habrá que tener en cuenta en el estudio definitivo este aspecto.

En la entrevista

El estudiante **G1E1** elabora representaciones gráficas para mostrar la falsedad de la proposición del problema 7. En cambio en el problema 8 muestra dificultad en la interpretación y justificación de la proposición; elabora dos gráficas que pueden servir para explicar las proposiciones, no obstante es incapaz de exponer con claridad su idea.

El estudiante **G1E2** ha construido para el problema 7 un gráfico en donde se cumple la proposición y eso lo lleva a afirmar que la proposición es verdadera. A pesar de que elabora un gráfico no logra dar una explicación de la veracidad o falsedad de la proposición.

El estudiante **G2E1** para el problema 7 elabora un gráfico que utiliza como contraejemplo de la proposición. Para el problema 8 elabora dos gráficas para mostrar la veracidad de la proposición.

El estudiante **G2E2** en el problema 7 elabora dos gráficas, al tratar de explicar la proposición confunde la hipótesis con la tesis. En el problema 8 procede como en el problema 7.

En general los estudiantes son capaces de plantearse representaciones gráficas que luego utilizan en sus argumentaciones. A pesar de la dificultad que presentan los problemas planteados logran dar argumentos aceptables.

5.4. CONCLUSIONES DE LA PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Las conclusiones del capítulo se han estructurado considerando los dos estudios. Por una parte, se recogen los aspectos más generales del estudio sobre las actitudes, analizados e interpretados a partir de la aplicación de las dos escalas (antes y después de la instrucción), las entrevistas a cuatro estudiantes y los estados de opinión de los estudiantes (agrupados en parejas) sobre las Prácticas de Laboratorio y ubicando sus aportaciones en las dimensiones que definen las actitudes. Y por otra, la información recolectada de la aplicación de dos cuestionarios de conocimientos sobre el concepto de la Integral Definida y la entrevista a cuatro estudiantes.

A continuación exponemos las conclusiones del estudio sobre las actitudes y seguidamente las del estudio sobre el concepto de la Integral Definida.

Del análisis e interpretación de los datos recolectados sobre las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas, el uso de ordenador y la enseñanza con DERIVE se concluye que:

Los estudiantes tienden a poseer una alta confianza y seguridad en su trabajo matemático, a pesar de que se enfrentan a temas que usualmente producen dificultades y obstáculos considerables para ellos. Los estudiantes manifiestan una autoestima alta, reconociendo la importancia de las Matemáticas dentro del conjunto de materias que cursan y dedicándole el tiempo requerido para su aprendizaje. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

La motivación hacia el trabajo matemático también la consideramos alta; la cual experimentó un aumento, tal vez por el trabajo combinado de clases habituales y Prácticas de Laboratorio con ordenadores, que motiva al estudiante a participar de manera dinámica en las actividades que son usuales en los cursos donde la enseñanza seguida es la habitual. Los estudiantes se sienten estimulados por el trabajo en grupo, valoran las aplicaciones cotidianas de las Matemáticas y le dedican gran parte de su tiempo al estudio de las Matemáticas. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

Se observa que se sienten altamente comprometidos con el trabajo matemático. Su compromiso se ha mantenido de acuerdo con el contrato didáctico asumido y se sienten comprometidos con las actividades matemáticas. Tienen hábitos de estudio diferenciados en ocasional y continuo, lo cual denota un compromiso por aprobar una prueba o una disciplina de estudio. Perciben las ideas Matemáticas de manera secuencial y como un todo.

Pensamos que el uso del ordenador inspira confianza, seguridad y motiva a los estudiantes a participar en las actividades en las que se use. El ordenador lo usan como herramienta de chequeo. Al enfrentarse con un error consultan a un experto o tratan de resolverlo con sus conocimientos. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

En cuanto a la interacción de los estudiantes con las Matemáticas y los ordenadores podemos mencionar que se ha mejorado la confianza y seguridad, la motivación y el compromiso de éstos en el desarrollo de sus actividades, la cual está relacionada con el aspecto gráfico que brinda el ordenador; además el seguir y el comparar procesos resulta una forma de interacción.

De la aplicación del segundo cuestionario al final del curso, en relación con las actitudes de los estudiantes hacia el uso de *DERIVE* en actividades matemáticas la poca diferencia en los PRI de ambos grupos nos lleva a pensar que existe homogeneidad entre ellos.

Los estudiantes consideran a *DERIVE* como un soporte para la resolución de problemas, de lo que se deduce que éste le proporciona confianza y seguridad. Es de hacer notar que el G1 considera que el trabajar con *DERIVE* involucra seguir procedimientos y conocer el lenguaje aplicado, en cambio el G2 lo ve como una herramienta para encontrar solamente resultados.

Los estudiantes reconocen que pueden seguir el proceso de resolución de situaciones de una manera sencilla y con rapidez de respuesta; logran conectar lo visto en clases habituales con lo dado en las prácticas; reconocen el poder de visualización que les brinda el software y su capacidad gráfica. Estos comentarios nos lleva a pensar que los estudiantes poseen confianza y seguridad en el trabajo tanto de laboratorio como con el uso de *DERIVE.*

Los estudiantes se sienten motivados por el trabajo con *DERIVE* ya que las actividades que se realizan se diferencian de las clases habituales. Les estimula la imaginación y la creatividad. Los estudiantes del G1 opinan que pueden producir sus propios conocimientos, en cambio los de G2 utilizan *DERIVE* para chequear y hallar resultados a los problemas. *DERIVE* contribuye a estructurar y organizar procedimientos; no obstante es notoria la opinión del G1 en cuanto a la importancia que le dan al proceso que en el G2. Así como también se evidencia mayor compromiso por el trabajo con *DERIVE* en G1 que en G2.

Los estudiantes consideran que las actividades de laboratorio les ayudan a aclarar las dudas de lo hecho en la clase habitual; las actividades son agradables, dinámicas, interactivas y prácticas; pueden seguir los procesos de varias maneras; reconocen la capacidad de visualización del *DERIVE;* son partícipes de la generación de su aprendizaje y las actividades son diferentes a las tradicionales. Todo esto muestra que a los estudiantes les motiva el trabajo de laboratorio y el uso de *DERIVE.*

De los comentarios de los estudiantes se concluye que las actividades de laboratorio y el uso de *DERIVE* contribuye a afianzar la confianza y seguridad, motivación y compromiso del estudiante en actividades de esta índole; es decir se establece un contrato didáctico de importante beneficio en pro de la enseñanza y aprendizaje del cálculo.

Comparando nuestras resultados con las investigaciones previas tenemos que, en concordancia con Gómez (1997), al utilizar nuevas tecnologías (calculadoras gráficas u ordenadores) los estudiantes tienden a pensar que al trabajar intensamente pueden obtener éxito en el curso, reconocen la importancia de comprender el problema antes que memorizar procedimientos, resaltan la potencialidad gráfica que les brinda el uso de nuevas tecnologías. Al igual que Ortiz (2000) consideramos pertinente el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Coincidimos con Noguera (2001) que al instrumentar cursos en el cual se utiliza un PCS, los estudiantes experimentan cambios positivos en cuanto a las actitudes hacia las Matemáticas. Con respecto a Galbraith y Haines (1998) también hemos encontrado que el uso del ordenador influye de una manera positiva en la integración Matemáticas-ordenador. Al igual que Lagrange (1996) consideramos que se debe estar consciente de las capacidades de *DERIVE* para optimizar su uso, que la facilidad de uso que brinda contribuye a crear una actitud positiva hacia el software y que el estudiante se concentra en comprender y aprender Matemáticas. Resulta necesario planificar con mucho cuidado las lecciones cuando se utiliza *DERIVE,* estamos de acuerdo con Artigue y Lagrange (1997) en cuanto a que a través de actividades bien planificadas, el uso de un PCS puede apoyar el aprendizaje de las Matemáticas y motivar interesantes actividades Matemáticas.

Del análisis e interpretación de los resultados de la aplicación de los dos cuestionarios de conocimientos y de la entrevista a cuatro estudiantes se concluye que:

Antes de recibir la instrucción, los estudiantes consideran el área como un valor numérico positivo asignado a una región; construyen figuras como si se tratase de un puzzle, sin tomar en cuenta las referencias con el sistema de ejes cartesianos. Puede que al considerar que el área de una región no acotada no se puede calcular, estén pensando en la figura, en cierto sentido, independiente del plano cartesiano.

En relación con el uso de representaciones gráficas-algebraicas-numéricas, ya sea que la pregunta esté planteada en dos sistemas de representación o en uno de ellos, los estudiantes siguen una secuencia gráfica-algebraico-numérica; se nota que las dos últimas son consecuencia de una utilización inicial del sistema de representación gráfico. Al expresar el cálculo del área con una proposición general, lo abordan con el uso de representaciones gráficas, tratando de mostrar la veracidad o falsedad de la proposición.

Una vez que los estudiantes han cursado la unidad, ambos grupos, utilizan fundamentalmente representaciones algebraico-numéricas; las representaciones gráficas son utilizadas cuando se les proporciona y de una manera referencial. Hacen uso de las expresiones algebraicas de las funciones y las referencias del sistema de ejes cartesianos; puede que esto haya influido en que, como al inicio, no consideren las figuras como un puzzle. Se pudiera pensar que este comportamiento ha ocasionado un retroceso en la capacidad gráfica del estudiante, pero lo observado en el análisis de la pregunta 4 hace dudar de esta evidencia; la conducta del estudiante puede estar condicionada por varios elementos:

Por una parte,

- La resistencia a la visualización (Eisenberg y Dreyfus, 1991),

- La idea de que es una prueba sobre integrales y que los argumentos simbólicos serían más aceptables que los gráficos,

- Resolverlo simbólicamente es más rápido y contundente (una economía de registros).

Por otra,

- La consideración de la Integral Definida como una herramienta para el cálculo del área de una región.

- La incapacidad de distinguir entre las distintas connotaciones de la Integral Definida y su relación con el área.

El registro algebraico de la Integral Definida ejerce una influencia determinante en la resolución de los problemas.

Centrándonos en el trabajo de los estudiantes que cursaron Prácticas de Laboratorio, se observó que en líneas generales, utilizan divisiones de la gráfica que se asemejan a las obtenidas por ellos con el PU, tanto con la idea de “rellenar la región” como con el uso de un número “grande” de figuras elementales (rectángulos, trapecios). También se observa que algunos de estos estudiantes utilizan aproximaciones numéricas de las integrales y las áreas, tal vez por el énfasis puesto en el acercamiento que se hace al concepto de Integral Definida.

Por otra parte, de las respuestas dadas por cuatro estudiantes entrevistados se tiene que:

El estudiante **G1E1** tiene una idea de la integral asociada con el cálculo de área de una región. Cuando la Integral Definida le da un resultado negativo le produce un obstáculo en el momento de interpretar su significado.

Realiza adecuados tratamientos de registros gráficos, los que utiliza en la resolución de situaciones planteadas.

En las respuestas dadas se observa la influencia de la instrucción recibida en las Prácticas de Laboratorio.

El estudiante **G1E2** tiene una idea de la Integral Definida que en ocasiones la puede interpretar como el área de una región.

Considera que la Integral Definida puede asumir valor negativo, y que al tratarse del cálculo de valor del área de una región se requiere cambiarle el signo para que dé el valor positivo que representa el área.

Realiza adecuados tratamientos de registros gráficos, que utiliza para realizar la conversión a registros algebraicos.

Realiza transferencias de conocimientos de geometría elemental a la resolución de problemas planteados.

Transfiere lo aprendido en las prácticas a la resolución de situaciones planteadas.

El estudiante **G2E1** tiene una idea bastante general de la Integral Definida y muestra indicios de que la puede calcular e interpretar, utilizando varios registros de representación semiótica.

Es capaz de utilizar distintas aproximaciones geométricas del área de una región.

El estudiante diferencia lo que es la Integral Definida del área de una región, considera que la Integral Definida puede asumir un valor negativo, en cambio el área es positiva.

Realiza adecuados tratamientos de registros gráficos, lo cuales los utiliza para realizar conversión a registros algebraicos.

Realiza transferencias de conocimientos de geometría elemental a la resolución de problemas planteados.

Transfiere lo aprendido en las clases habituales a la resolución de situaciones planteadas.

Es capaz de construir contraejemplos para justificar la falsedad de una proposición general enunciada.

El estudiante **G2E2** al responder a los cuestionarios de conocimientos mostraba una tendencia al uso de registros de representación algebraica. En la entrevista se observó que este proceder cambió, el estudiante tiene capacidad de plantear procedimientos utilizando registros de representación gráfico. Este comportamiento puede ser producto, en el momento de cumplimentar un cuestionario, de la creencia de que lo algebraico es matemáticamente más aceptable que lo gráfico; una vez que se le insiste en el uso del registro de representación gráfico, el estudiante muestra su capacidad para plantear procedimientos utilizando este registro.

El estudiante, aunque muestra cierta confusión en cuanto al signo de la integral y el área, se observa que considera que la Integral Definida puede asumir valores positivos o negativos; esto nos lleva a conjeturar que tiene una idea amplia de la Integral Definida y que en ocasiones puede ser utilizada para el cálculo del área de una región.

Comparando la actuación de los estudiantes por grupo, los estudiantes del G1 utilizan con mayor frecuencia los registros de representación gráfica que los del grupo G2. La construcción progresiva de figuras para aproximar geométricamente el área de una región es más evidente en el G1 que en el G2 (ver pregunta 3 en la entrevista del estudiante G1E2). Los estudiantes del G1 muestran mayor dependencia de la expresión algebraica de la función para resolver los problemas que los del G2; esto puede ser producto de que para aplicar el PU se requería definir algebraicamente la función. Ambos grupos muestran capacidad para plantear procedimientos de resolución de problemas utilizando registros de representación gráfica, los cuales lo utilizan para realizar conversión al registro de representación algebraico. Ambos grupos realizan transferencias de conocimientos de geometría elemental en la resolución de situaciones planteadas.

Los resultados obtenidos hasta este punto de la investigación, algunos de los cuales hemos reseñado, proporcionan elementos para continuar con el estudio en un ambiente que combine las clases habituales con las Prácticas de Laboratorio al objeto de, por una parte, responder a las preguntas abiertas que han ido surgiendo durante el análisis realizado y, por otra, determinar la viabilidad de la implementación de nuevos tecnologías en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

CAPÍTULO VI

ESTUDIO EXPERIMENTAL. SEGUNDA FASE

En este Capítulo se presentan y analizan los resultados del último estudio realizado, centrado en el aprendizaje del concepto de Integral Definida. Se desarrolló la instrucción en tres fases que permitieron analizar, mediante un estudio de casos y poniendo en juego un modelo de competencia cognitivo, el grado de comprensión alcanzado por los estudiantes analizados después del período de formación que cubrieron.

6.1. DESCRIPCIÓN GLOBAL DEL ESTUDIO

El estudio se realizó con 31 estudiantes de nuevo ingreso de un curso regular de Cálculo I. El trabajo se desarrolló durante el periodo octubre 2001-marzo 2002 de la siguiente manera: se dictó el programa oficial de la asignatura Cálculo I, durante el semestre completo, siguiendo el programa vigente, combinando las clases habituales de aula con las Prácticas de Laboratorio, siguiendo el Módulo Instruccional II. En dicho módulo instruccional se habían incluido algunas modificaciones al utilizado en la primera fase del Estudio Experimental (ver capítulo III). La formación que recibió el grupo fue la misma.

Al final del curso, se aplicó a todos los estudiantes un cuestionario de conocimientos (CC-2) en dos escenarios diferentes (escenario 1, con lápiz y papel; escenario 2, con ordenador). Las respuestas suministradas por los estudiantes al cuestionario de conocimientos nos sirvieron para seleccionar a 6 estudiantes que fueron entrevistados (escenario 3). Para el análisis de los resultados se utilizó el modelo de competencia cognitivo descrito en los capítulos I y III, adaptado de Socas (2001), en el que se consideran algunos aspectos del aprendizaje determinado por aspectos cognitivos relativos a la articulación coherente de diferentes registros de representación (Duval 1993). Este modelo sirve de fundamento para el análisis conceptual de la comprensión de la Integral Definida. Se trata en definitiva de determinar la concepción que tienen los estudiantes, tanto del área limitada por una curva como de la Integral Definida, después de recibir su formación en los dos ambientes señalados.

6.2. OBJETIVOS.

Con este estudio, nos planteamos alcanzar los siguientes objetivos:

- Analizar cómo influye la idea que poseen los estudiantes de área al interpretar la Integral Definida.
- Determinar cómo utilizan los estudiantes, los registros gráfico, numérico y algebraico, a la hora de resolver situaciones que involucran tanto el concepto de área de figuras planas como el de Integral Definida.
- Relacionar la ejecución, por parte del estudiante, de las acciones propias de los procesos de enseñanza/aprendizaje de Integral Definida, con la capacidad de un individuo ideal para asociar signos y significados que están de acuerdo con los conceptos y reglas que organizan el campo conceptual referente a la Integral Definida.
- Determinar si los estudiantes utilizan *DERIVE,* e incluso el Programa de Utilidades, como soporte en la resolución de los problemas cuando no se les indica cómo resolver las actividades.

6.3. EL DESARROLLO DE LA INSTRUCCIÓN

La instrucción se realizó en tres fases que describimos a continuación:

Fase 1: El profesor hace una presentación del tema usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: Los estudiantes trabajan por parejas, en un laboratorio de ordenadores, una serie de Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional II, descrito en el capítulo 3. Las parejas de estudiantes resuelven las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado en la práctica. Al comienzo de la práctica, se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la misma.

Fase 3: Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron.

Con la finalidad de determinar la competencia de los estudiantes para la construcción del concepto de Integral Definida se seleccionaron seis estudiantes para ser entrevistados (ver anexo 17).

6.4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para realizar nuestro análisis, tal como se expuso en el capítulo III, organizamos los problemas, utilizados en el cuestionario de conocimientos y en la entrevista, en tres grupos importantes de acuerdo a las características y formas potenciales de solución.

En la confección del cuestionario se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones en relación con las preguntas a incluir en él:

1. Preguntas en las que el registro gráfico constituye el elemento básico de la información que se suministra para la resolución del problema.
2. Preguntas en las que la información suministrada viene dada en el registro algebraico.
3. Cuestiones más generales en las que los estudiantes tienen que poner en juego un alto nivel de comprensión del concepto de Integral Definida para usar diferentes registros de representación semiótica trabajados durante la instrucción (numérico, gráfico y algebraico).

El cuestionario fue cumplimentado por los estudiantes en tres escenarios diferentes:

<u>Escenario 1:</u>

Los estudiantes trabajan los problemas del cuestionario empleando solamente lápiz y papel y reportan por escrito sus acercamientos o soluciones a los problemas.

<u>Escenario 2:</u>

El segundo escenario corresponde al trabajo que muestran los estudiantes al resolver el cuestionario con el empleo del software *DERIVE*, aquí los estudiantes entregan una copia del disquete que muestra sus acercamientos y comentarios hacia los problemas.

Escenario 3:

En el tercer y último escenario, los estudiantes seleccionados participan en una entrevista semiestructurada donde se les cuestiona directamente en torno a los acercamientos para resolver los problemas planteados. Aquí ellos eligen libremente qué tipo de herramienta deben emplear durante sus explicaciones o soluciones al cuestionario.

Conviene señalar que no todas las preguntas se trabajaron en los tres escenarios, dado que un análisis previo de las respuestas dadas por el gran grupo (la clase) en los Escenarios 1 y 2 nos sugirieron incluir o descartar algunas de las preguntas que quedaron para la entrevista semiestructurada (escenario 3) que se desarrolló con el grupo de estudiantes seleccionados.

Exponemos en las tablas 6.1 a la 6.3, las preguntas utilizadas, los descriptores que se tuvieron en cuenta en el posterior análisis, los escenarios donde fueron utilizadas, los objetivos que se pretenden con cada pregunta y la actuación que se espera de cada estudiante.

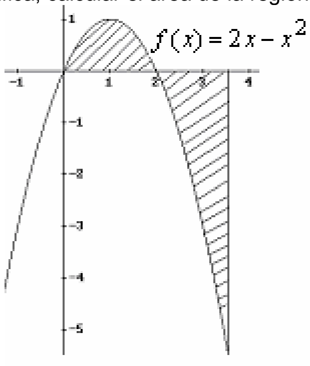
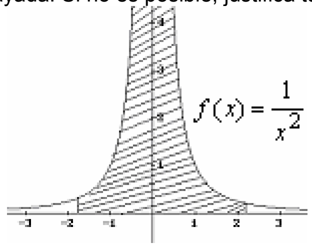
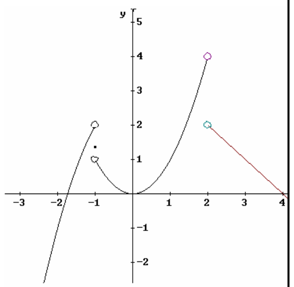
PRIMER GRUPO PREGUNTAS			
PREGUNTA	**DESCRIPTORES**	**ESCENARIOS**	**OBJETIVO**
2) Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. 	2.1. Se pide calcular el área. 2.2. Se identifica gráficamente la región. 2.3. No aparece la palabra integral. 2.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 2.5. Hay dos regiones (sobre y bajo). 2.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 2.7. No se pide aproximar. 2.8. La función es continua.	Lápiz y papel(1) PCS (2) Entrevista (3)	Determinar si el estudiante comprende la forma de obtener en términos de la Integral Definida el área de regiones que se encuentran bajo el eje OX, así como las relaciones que establece con las regiones que están sobre el eje OX.
9) Dada la gráfica de la función, si es posible, calcula el área de la región rayada. Si no es posible, justifica tu respuesta. 	7.1. Se pide calcular el área. 7.2. Se identifica gráficamente la región. 7.3. No aparece la palabra integral. 7.4. No se dan los intervalos aunque se identifica en la gráfica. 7.5. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 7.6. Hay una gráfica asociada. 7.6. No se pide aproximar. 7.7. Hay una región con una discontinuidad en medio. 7.8. Si pide una justificación en caso de que no se puede calcular.	Lápiz y papel(1) PCS (2)	Analizar lo que responden los estudiantes cuando el área de la región que se demanda es infinita.

Tabla 6.1

PRIMER GRUPO PREGUNTAS			
PREGUNTA	**DESCRIPTORES**	**ESCENARIOS**	**OBJETIVO**
10) Dada la función definida por $f(x)=\begin{cases}-x^2+3 & x<-1\\ 1.36 & x=-1\\ x^2 & -1<x<2\\ -x+4 & x>2\end{cases}$  • Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$. • Si es posible, estima el valor de la Integral Definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible explicar por qué. Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular ninguna porción explicar por qué.	10.1. Se define el intervalo total. 10.2. Se plantea con los dos registros algebraico y gráfico. 10.3. Se pide calcular el área. 10.4. La función tiene 2 puntos de discontinuidad. 10.5. No aparece la palabra Integral Definida. 10.6. Hay una expresión algebraica asociada a la curva. 10.7. Hay una gráfica asociada.	Lápiz y papel(1) PCS (2)	Determinar si el estudiante es capaz de aplicar aproximación o el Teorema Fundamental del Cálculo a pesar de tipo de discontinuidad.
1) ¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa $\int_a^b f(x)dx$?	1.1 No aparece la palabra Integral Definida. 1.2. No se da la expresión explícita de la función. 1.3. No aparece el término área. 1.4. No hay gráfica asociada. 1.5. No se dan los valores de los límites de integración. 1.6. Se menciona la expresión sin referencia directa a la Integral Definida y al área.	Entrevista (3)	Investigar los elementos que utiliza el estudiante para traducir en su propio vocabulario lo que entiende por Integral Definida.

Las posibilidades de actuaciones del estudiante son en este caso:

- Reconocer los registros de representación gráfico y algebraico, y realizar tratamientos dentro de los mismos.
- Elaborar registros algebraico y/o numérico, y realizar transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Realice conversión coordinada entre los registros de representación.

En este caso concreto y de manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_G, R_A	E_N, T_G, T_A, T_N, $C_{G\leftrightarrow A}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$

Tabla 6.1 (Continuación)

SEGUNDO GRUPO DE PREGUNTAS			
PREGUNTA	**DESCRIPTORES**	**ESCENARIOS**	**OBJETIVO**
3) Calcula, de la forma que consideres más sencilla la Integral Definida $$\int_{-3}^{4} \lvert x+1 \rvert dx$$	3.1. Se presenta en el registro algebraico con mucha información implícita. 3.2. No se menciona la palabra área. 3.3. Se da el intervalo de integración. 3.4. No hay una gráfica asociada. 3.5. Es de gran interés que el cálculo se puede resolver de una forma sencilla pues involucra el cálculo de área de triángulos rectángulos.	Lápiz y papel (1) PCS (2) Entrevista (3)	Analizar: • Si existe transferencia de los conocimientos antiguos a los nuevos. • Si el estudiante comprende el cálculo de la Integral Definida en términos de cálculo de área de figuras elementales. • Si conoce y trabaja correctamente con algunas propiedades de la Integral Definida.
4) Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifica tu respuesta. $$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right\|_0^2 =$$ $$= \left.\frac{1}{(x-1)}\right\|_0^2 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$	4.1. Se presenta en el registro algebraico con información desarrollada (explícita). 4.2. No aparece la palabra área en “calcular la integral”. 4.3. El software lo resuelve directamente (y mal). 4.4. Se da el intervalo de integración. 4.5. No hay una gráfica asociada. 4.6. Se aplica directamente las técnicas de integración.		Determinar si el estudiante: • Es capaz de utilizar el registro gráfico para justificar la falsedad de la respuesta. • Interpreta coherentemente las hipótesis que deben cumplir las funciones para que la regla de Barrow pueda ser aplicada
7) Calcular el área que forma con el eje OX la función $$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$	7.1. Se presenta en el registro algebraico. 7.2. No se da el intervalo. (polinomio de cuarto grado). 7.3. No se menciona la palabra integral. 7.4. Se pide calcular un área. 7.5. No hay gráfica asociada.	Entrevista (3)	• Use el software para graficar la función, o la gráfica mediante técnicas de papel y lápiz. • Identificar las regiones donde debe integrar, mediante la intersección de la función con el eje OX. • Plantee y calcule las integrales mediante la regla de Barrow. Es posible que el estudiante utilice el PU calculando las distintas aproximaciones.

Se espera que el estudiante:

- Elabore el registro de representación gráfico y/o numérico, y realice transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Reconozca el registro de representación algebraico, y transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos.
- Realice conversión coordinadas entre los registros de representación.
- De manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{G\leftrightarrow N}$, $C_{A\leftrightarrow N}$

Tabla 6.2

TERCER GRUPO DE PREGUNTAS			
PREGUNTA	**DESCRIPTORES**	**ESCENARIOS**	**OBJETIVO**
5) Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta. Si $f(x) \geq g(x)$, entonces, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$	5.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 5.2. No aparece el término área. 5.3. No aparece la palabra integral. 5.4. No hay graficas asociadas. 5.5. No se dan los valores de los límites de integración. 5.5. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 5.6. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 5.7. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 5.8. En general, la proposición es verdadera si se trata de integrales y falsa si sólo se considera como área.	Lápiz y papel (1) PCS (2) Entrevista (3)	Determinar el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establece relaciones entre el área y la Integral Definida.
6) Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifica tu respuesta. Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces, $f(x) \geq g(x)$ para toda x que pertenece a $[a,b]$.	6.1. No se dan expresiones explícitas de las funciones que intervienen. 6.2. No aparece el término área. 6.3. No aparece la palabra integral. 6.4. No hay graficas asociadas. 6.5. No se dan los valores de los límites de integración. 6.5. No se menciona el intervalo de integración en la hipótesis. 6.6. Se mencionan las expresiones sin referencia directa a la Integral Definida y al área. 6.5. La forma de presentación es compleja: resulta una proposición que conecta dos situaciones. 6.8. En general, la proposición es falsa tanto si se trata de integrales como si fuese área.	Lápiz y papel (1) PCS (2) Entrevista (3)	Determinar el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establecen relaciones entre el área y la Integral Definida. Además si utiliza contraejemplos en su justificación.

Se espera que el estudiante:

- Reconozca el registro de representación algebraico y realice una transformación (tratamiento) dentro del registro algebraico.
- Elabore registros de representación gráfico y/o numérico, y transformaciones (tratamientos) dentro de los mismos. Consideraremos que la elaboración del registro gráfico también implica un reconocimiento implícito del registro.
- Realice conversión coordinada entre los distintos registros de representación.

De manera esquemática las acciones que se espera que realice el estudiante son:

R_A	E_G, E_N, T_A, T_G, T_N, $C_{A \leftrightarrow G}$, $C_{A \leftrightarrow N}$, $C_{N \leftrightarrow G}$

Tabla 6.3

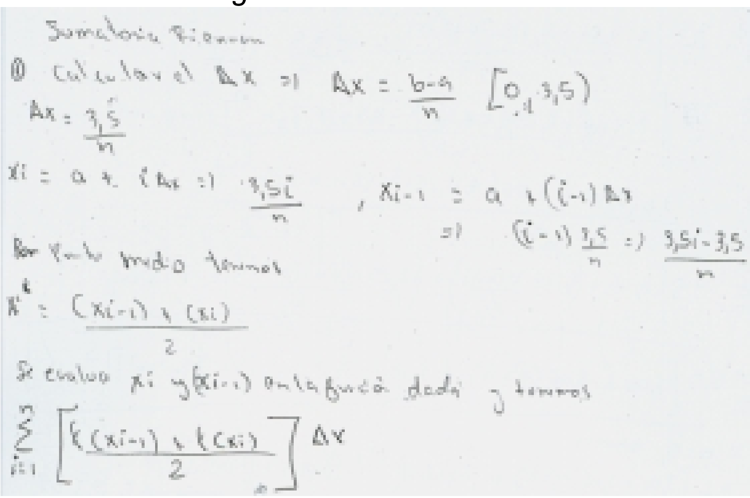
A continuación presentamos el análisis e interpretación de los resultados de la aplicación del esquema de análisis expuesto anteriormente:

6.4.1. El estudiante E1

En la pregunta 2 del primer grupo (escenario 1), considera el intervalo $[0, 3.5)$ y no lo divide en subintervalos. Calcula el término general de la suma de Riemann, siguiendo el procedimiento dado en clase habitual; es decir, establece $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, sustituye los valores de los extremos y obtiene $\Delta x = \frac{3.5}{n}$, establece los extremos del i-ésimo subintervalo y un valor cualquiera en el i-ésimo subintervalo, menciona que lo resolverá "*Por punto medio*", se refiere a considerar el punto medio de cada subintervalo, establece el término general de las sumas y luego particulariza para $n = 4$, el resultado que obtiene es 35.89, el resultado correcto es aproximadamente -2.041, los resultados son diferentes porque cometió un error en un signo en el procedimiento, pero se debe acotar que los pasos son los correctos. En el escenario 2, plantea y calcula la integral indefinida y luego una definida en $[0, 2]$ y obtiene $\frac{4}{3}$, plantea una Integral Definida en $\left[0, \frac{7}{2}\right]$ que no calcula, plantea y calcula una Integral Definida en $\left[2, \frac{7}{2}\right]$ y obtiene $-\frac{27}{8}$. Escribe *"ÁREA"* y la operación $\frac{4}{3} - -\frac{27}{8}$ y obtiene $\frac{113}{24}$, que es el valor exacto del área. En el escenario 3 plantea y calcula integrales de forma similar que en el escenario 2, pero considera el intervalo $[0, 3]$, grafica, en la pizarra la curva y raya las regiones, lo que utiliza para explicar lo que se le pide y menciona "*una manera de hacerlo más sencilla es evaluar la integral…".* Utiliza *DERIVE* para graficar la curva. Al calcular la integrales con *DERIVE* obtiene para $[0, 2]$ es valor $\frac{4}{3}$ y para $[2, 3]$ el valor $-\frac{4}{3}$, ante tales resultados puntualiza "*Aquí hay un problema, porque aquí daría -4/3, pero en este caso la multiplico por -1 para que me dé positivo"* luego dice "*como nos piden el área, es el mismo valor pero no puede dar negativo,* *o sea hay que buscar la manera que si da negativo, multiplicar por -1 para que dé positivo; si tengo 4/3 y -4/3 me daría cero, es algo absurdo".* Al pedirle que explique por qué en el examen no siguió este procedimiento menciona "*No me pasó por la mente hacerlo así* (señala la pizarra). *Como en la parte que trabajamos con área, con curva, con punto medio, lo asocié* (parece que se refiere al trabajo de la clase habitual)".

En los dos procedimientos utilizados por el estudiante E1 se observa que: en el primero (escenario 1) tienden actuar condicionado por la instrucción recibida en las clases habituales, en las que se enfatizó el método numérico para estimar el área bajo una curva. El considerar el intervalo $[0, 3.5)$ y no los dos subintervalos $[0, 2]$ y $[2, 3.5]$ puede deberse a que reaccionó ante la aplicación de un procedimiento, más que a la adecuación de la teoría a un problema particular. En el segundo procedimiento (escenario 2 y 3) reconoce que prefiere trabajar con integrales, lo que ratifica que en la prueba con lápiz y papel se sentía condicionado. Cuando trabaja en los escenarios 2 y 3 explica correctamente el procedimiento del cálculo de área, identificando las regiones y obteniendo el valor del área. Utiliza *DERIVE* para graficar la función, puede que considere que la representación gráfica en el PCS le ayude a clarificar el significado de valor $-\frac{4}{3}$. El siguiente extracto muestra lo anterior.

Escenario 1. Pregunta 2.



Al sustituir xi y (xi-1) tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5}{n}\left[-\left[\left(\frac{1,75\cdot(-1+2i)}{n}\right)^2\right]+\left[\frac{3,5(-1+2i)}{n}\right]\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5}{n}\left[-\left[\left(\frac{-1,75+3,5i}{n}\right)^2\right]+\frac{(-3,5+7i)}{n}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5}{n}\left[-\left[\frac{(-1,75)^2-6,125i+12,25i^2}{n^2}\right]+\left(\frac{-3,5}{n}\right)+\left(\frac{7i}{n}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5}{n}\left[+\frac{3,06+6,125i+12,25i^2}{n^2}-\frac{3,5}{n}+\frac{7i}{n}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5}{n}\left[\frac{3,06+6,125i+12,25i^2-3,5n+7in}{n^2}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5(3,06+6,125i+12,25i^2-3,5n+7in}{n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5\left[3,06+\left(6,125\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)+\left(12,25\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+7n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]}{n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3,5\left[3,06+3,06(n^2+n)+2,04(2n^3+n^2+2n+1)+\frac{7}{2}(n^3+n^2)\right]}{n^3}$$

Si n=4 tenemos

$$\frac{3,5\left[3,06+3,06(4^2+4)+2,04(2(4)^3+(4)^2+2(4)+1)+\frac{7}{2}((4)^3+(4)^2)\right]}{(4)^3}=35,89$$

(ver anexo 17, pp. 172-173)

Escenario 2. Pregunta 2.

$$F(X) := 2\cdot X - X^2$$

$$\int (2\cdot X - X^2)\, dX$$

$$X^2 - \frac{X^3}{3}$$

$$\int_0^2 (2\cdot X - X^2)\, dX$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\int_0^{7/2} (2\cdot X - X^2)\, dX$$

$$\int_2^{7/2} (2\cdot X - X^2)\, dX$$

$$-\frac{27}{8}$$

AREA:

$\frac{4}{3} - -\frac{27}{8}$

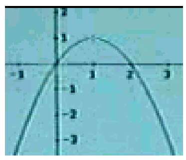
$$\frac{113}{24}$$

(ver anexo 17, p. 173)

Escenario 3. Pregunta 2.

19) I: *La siguiente pregunta, el ejercicio dos, dice calcula el área rayada* (le muestra la prueba) *que aparece en esta gráfica. Te pido que me lo resuelvas de la forma más sencilla posible.*
20) E: *¿Puedo dibujar aquí?* (se refiere a la pizarra).
21) I*: Sí. Sabes que puedes usar el ordenador, el DERIVE, si te apetece.*
22) E: *Si lo puedo hacer, pero no puedo dibujar el área rayada.*
23): I: *Bueno.*
24) E: *¿Se lo hago aquí?* (se refiere al ordenador).
25) I: *Como tú quieras. Te digo ¿Cuál es para ti la forma más sencilla para calcular el área rayada de esa función? Si quieres la puedes dibujar y luego tú actúas como quieras.*

26) E: (Dibuja) *La función* (escribe $f(x) = 2x - x^2$). *Aquí dice, calcular el área rayada*. *En este caso también tengo que calcular esta área en este intervalo, desde cero hasta tres* (escribe [0,3]) *el área rayada, una manera de hacerlo más sencilla es evaluar la integral desde este punto a este punto* (señala en el eje x el cero y el dos), escribe $\int_0^2 2x - x^2\,dx$ observa la gráfica y completa $\int_0^2 2x - x^2\,dx + \int_2^3 2x - x^2\,dx$ se detiene y luego borra el signo + escribe $-\int_2^3 2x - x^2\,dx$ *sería menos porque esta parte es negativa* (se refiere a la región bajo el eje x*) la región es negativa, pero el área final es positiva.*
27) I: *¿Qué entiendes por región negativa?*
28) E: *Región bajo la curva* (señala la región sobre el eje OX), *pero aquí* (señala la región bajo el eje OX) *sería bajo el eje OX, o sea bajo el eje OX son negativa, la que está por encima del eje OX son positiva, las regiones, pero al final el área da positiva* (calcula a parte la primera integral, usa la calculadora para realizar los cómputos y le da 4/3). *Como estaba diciendo esta parte es negativa* (señala la región bajo el eje OX) *me queda así* $-\int_2^3 2x - x^2\,dx$ la calcula y le da 4/3, queda por segundo observando la pizarra y dice *¿la puedo hacer en la computadora?*
29) I: *Sí.*

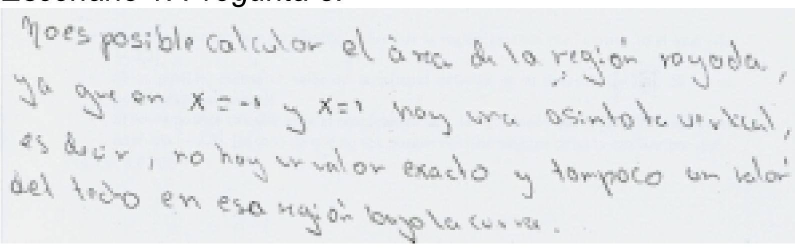


30) E: Escribe en *DERIVE* $F(x) := 2x - x^2$ *Aquí podemos graficar.*
31) I: *¿Por qué quieres hacer esa comprobación? ¿Por la igualdad de los dos resultados?*
32) E: *Sí, porque esta parte me daría negativa* (señala el cálculo de la segunda integral).
33) I: *¿Cómo?*
34) E: *Esta parte* (señala el cálculo de la segunda integral) *me debería dar negativa.*
35) I: *Pero tenía un signo menos.*
36) E: *¿Qué será?*
37) I: *Desde allá has arrastrado un signo negativo.*
38) E*: Sí.*
39) I*: ¿Pero no te resulta extraño que te dé 4/3 aquella franjita* (señala la región bajo el eje OX) *y que te dé 4/3 también la otra?* (señala la región sobre el eje OX).
40) E: *Aquel es más grande* (señala la región sobre el eje OX) *parece que hay un error.*
41) I: *¿Por eso es que usas el ordenador?*

42) E: *Sí. Primero voy a evaluar la integral pero la parte de arriba, ¿Puedo mirarlo aquí?* (se refiere a la resolución de la prueba en el laboratorio)
43) I: *Sí.*
44) E: Busca en la hoja de la prueba lo que hizo en el laboratorio y dice *Aquí en la gráfica* (se acerca a la pizarra) regresa al ordenador y calcula la primera integral y le da 4/3, luego calcula la segunda integral y le da -4/3. *Aquí hay un problema, porque aquí daría -4/3, pero en este caso la multiplico por -1 para que me dé positiva.*
45) I*: Entonces ¿Qué es lo que no te puede dar negativa?*
46) E: *El área. La región en la curva sí. Las regiones es que todo esto sería el área rayada* (señala toda la región en la gráfica dibujada en la pizarra*) es este pedacito* (señala la región sobre el eje OX) *y este pedacito* (señala la región bajo el eje OX)*, como estaba explicando está por encima del eje OX, es positiva y ésta como está por debajo del eje OX es negativa; pero como nos piden el área, es el mismo valor pero no puede dar negativa, o sea hay que buscar la manera que si da negativa, multiplicar por -1 para que dé positiva; si tengo 4/3 y -4/3 me daría cero, es algo absurdo.*
47) I: *¿Por qué en el examen no lo hiciste así?* (se refiere a la prueba en clase).
48) E: *No me pasó por la mente hacerlo así* (señala la pizarra). *Como en la parte que trabajamos con área, con curva, con punto medio, lo asocié* (parece que se refiere al trabajo de la clase habitual).
49) I: *¿Cómo consideras que es más fácil?*
50) E: *Así* (señala la pizarra) (ver anexo 17, pp. 173-174).

En la pregunta 8 (escenarios 1 y 2), menciona que el área rayada no se puede calcular y entre los argumentos alude que "*en* $x=-1$ *y* $x=1$ *hay una asíntota vertical",* puede que esta respuesta, posiblemente basada en la observación de la gráfica, se deba a la presentación de la región rayada. El siguiente extracto muestra los comentarios del estudiante.

Escenario 1. Pregunta 8.


No es posible calcular el área de la región rayada, ya que en x=-1 y x=1 hay una asíntota vertical, es decir, no hay un valor exacto y tampoco un valor del todo en esa región bajo la curva.

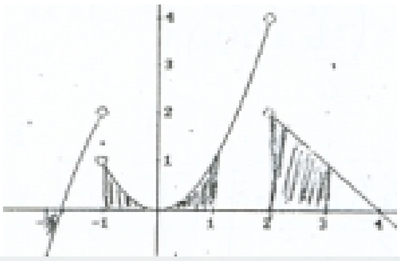
(ver anexo 17, p.180).

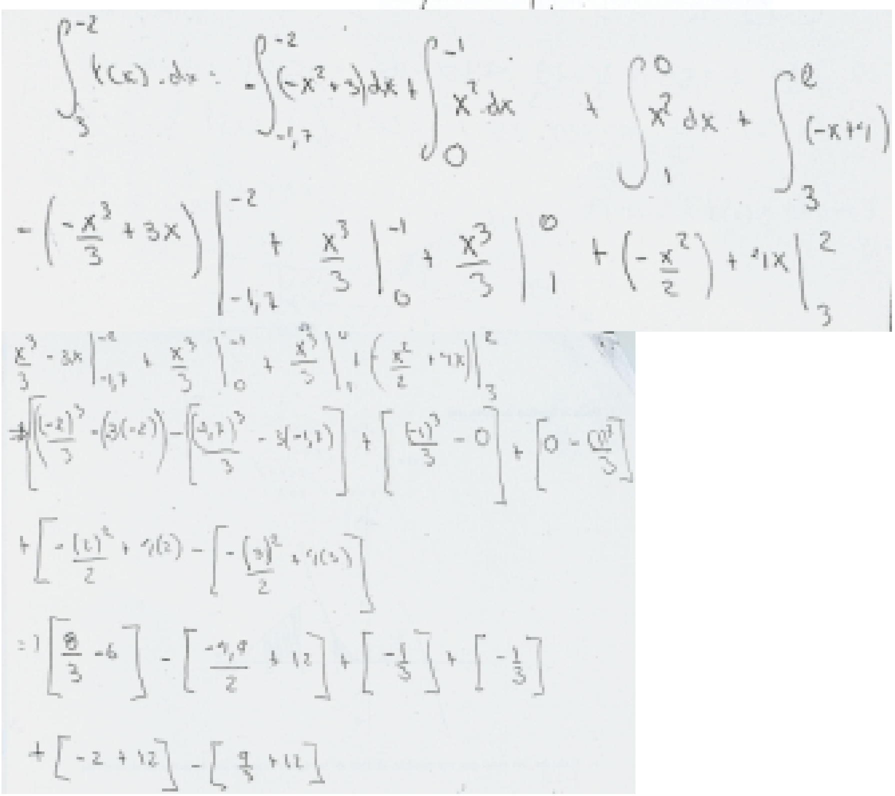
Escenario 2. Pregunta 8.

EL ÁREA DE LA REGIÓN RAYADA NO ES POSIBLE CALCULAR, DEBIDO QUE EXISTE UNA ASÍNTOTA EN X=-1 Y X=1, POR LO TANTO ES DISCONTINUA Y PARA CALCULAR EL ÁREA RAYADA, LA FUNCIÓN DEBE SER CONTINUA EN TODO SU DOMINIO.
(ver anexo 17, p. 180).

En la pregunta 9 (escenario 1) se observa que rellena, en la gráfica, parte de la región, dejando sin rayar las porciones cercanas a los puntos de discontinuidad. En el escenario 2 alude que "*El área de la región limitada por la curva en el intervalo* $[-2, 3]$ *no es posible calcularla debido a que la función no es* *continua en dicho intervalo".* Al realizar los cálculos, utilizando integrales, establece como límites de integración los valores de las abscisas correspondientes a las tres regiones rayadas por él. Puede que la idea que tiene de una región, a la que se le debe calcular el área esté relacionada con situaciones en donde la curva es continua y que en este tipo de problemas debe "cortarle" la parte cercana a la discontinuidad. Esto queda evidenciado cuando en la entrevista (pregunta 1) puntualiza "…*Una función puede no ser continua, pero si te mandan a buscar la integral en un intervalo específico tiene que ser continua, porque si hay una discontinuidad no se puede buscar exactamente la integral que queremos conseguir"* (cita 18). A continuación mostramos los extractos relacionados con los anteriores comentarios

Escenario 1. Problema 9





$$\left[\frac{-10}{3}\right] - [9{,}55] + \left[-\frac{1}{3}\right] + \left[-\frac{1}{3}\right] + [10] - [15]$$

$$-\frac{10}{3} - 9{,}55 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 10 - 15 = 15{,}11$$

(Ver anexo 17, p. 181)

Escenario 2. Pregunta 9.

EL ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR LA CURVA EN EL INTERVALO [-2,3] NO ES POSIBLE CALCULAR, DEBIDO A QUE LA FUNCIÓN NO ES CONTINUA EN DICHO INTERVALO.

[-2,-1.7]

$F(X) := -X^2 + 3$

$$\int_{-2}^{-1.7} (-X^2 + 3)\, dX$$

$$-\frac{129}{1000}$$

[-1,0]

$F(X) := X^2$

$$\int_{-1}^{0} X^2\, dX$$

$$\frac{1}{3}$$

[0,1]

$F(X) := X^2$

$$\int_{0}^{1} X^2\, dX$$

$$\frac{1}{3}$$

[2,3]

$F(X) := -X + 4$

$$\int_{2}^{3} (-X + 4)\, dX$$

$$\frac{3}{2}$$

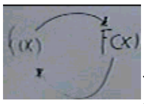
AREA:

$$- -\frac{129}{1000} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{6887}{3000}$$

$$2.295666666$$

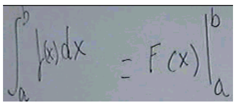
(ver anexo 17, pp. 181-182)

El estudiante E1, en la pregunta 1, menciona la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, en el cálculo de la Integral Definida, y comenta la relación que se puede establecer entre una función y su antiderivada, puntualiza que *"si tengo esta función* (dibuja ) *si yo integro esto* (se refiere a la función de la izquierda*) me da esto* (se refiere a la función de la derecha*), igualmente si yo derivo esto* (se refiere a la función de la derecha) me da esta función (se refiere a la función de la izquierda)". Los comentarios en esta pregunta giran en torno al uso del Teorema Fundamental del Cálculo. Retomando lo expresado por el estudiante en las preguntas 2 y 9, en la primera utilizó Sumas de Riemann (escenario 1) y e la 9, la regla de Barrow. En ninguno de estos problemas alude el uso de los métodos utilizados en las Prácticas de Laboratorio. Puede que la instrucción recibida no influya en la manera de cómo el estudiante E1 calcula la Integral Definida. En el siguiente extracto se muestran los comentarios del estudiante.

Escenario 3. Pregunta 1

1) I: Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral defina entre a y b de f(x) diferencial de x?*

2) E*: Esta función está acotada en este intervalo* (señala la expresión derecha de la igualdad*) es continua en un intervalo "a b"* (señala a "b" y "a" escritas en la expresión derecha) *¿Necesito un caso?*



3) I: *Como creas que alguien te va a entender. Puedes dibujar, puedes usar el ordenador, puedes hacer lo que quieras.*

4) E: *Esa función está definida en ese intervalo, una Integral Definida en ese intervalo* (señala los límites de integración). *Lo podría hacer en este caso, o sea evaluar esta función* (señala F(x) es la parte derecha de la igualdad) *en "b" y "a", por el teorema fundamental,* escribe *Teorema Fundamental del Cálculo.*

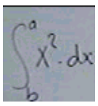
5) I: *Esa f(x) grande, mayúscula, ¿es la misma que la que está atrás?* (se refiere a la que aparece a ambos lados de la igualdad)

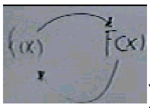
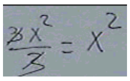
6) E: *No. Sería su antiderivada*. Escribe *F(b)-F(a)=, sería un valor que pondría aquí* (señala la expresión escrita).

7) I: *¿Qué significa ser antiderivada?*

8) E: *Si esa antiderivada la derivamos nos daría la integral. ¿Puedo hacer un ejemplo?*

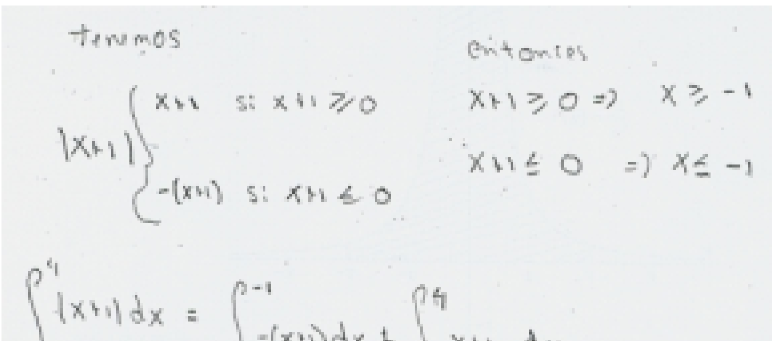
9) I*: Sí, claro.*

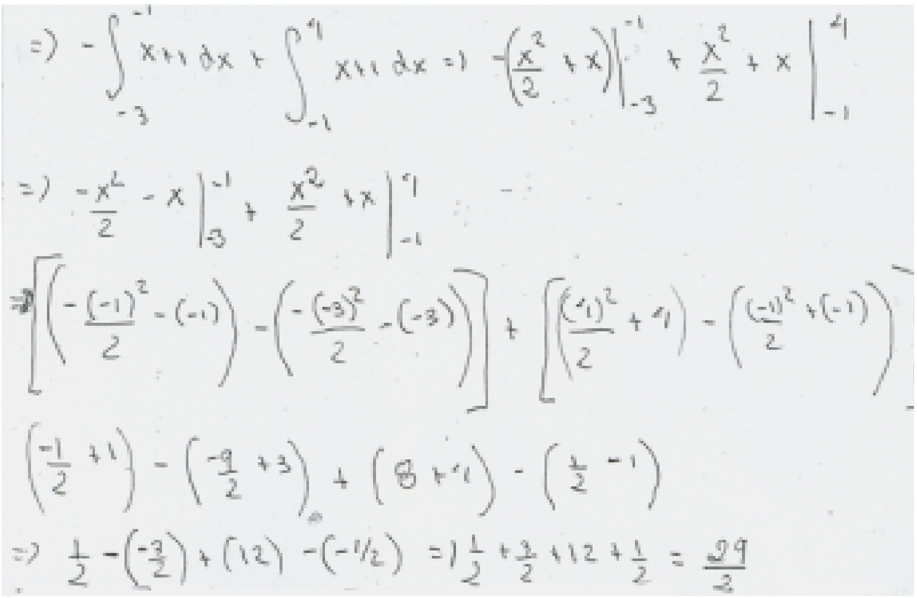
10) E: *Si yo tengo la integral*  *entonces al integral esto (señala el integrando) me daría la antederivada, o sea me daría* $x^3/3$*; lo que quiere decir que si tengo esta función*

> (dibuja ) *si yo integro esto* (se refiere a la función de la izquierda*) me da esto* (se refiere a la función de la derecha*), igualmente si yo derivo esto* (se refiere a la función de la derecha) me da esta función (se refiere a la función de la izquierda). *Si derivo esto* (señala la expresión $x^3/3$) *me quedaría*  (ver anexo 17, p. 171).

En la pregunta 3 (escenario 1), segundo grupo, el estudiante define la función a trozos, plantea a igualdad $\int_{-3}^{4}|x+1|\,dx = \int_{-3}^{-1} -(x+1)dx + \int_{-1}^{4} x+1\,dx$ y la resuelve, obteniendo $\frac{29}{2}$ (resultado correcto). Se observa fluidez en los pasos seguidos. No grafica la función, puede que no la requiera. En la entrevista, por insistencia del entrevistador, grafica la función en la pizarra y luego en *DERIVE*, le hace ver que las regiones forman triángulos y en ese momento dice "*Sí, sería por área"*, este comentario nos hace pensar que al plantearle el cálculo de una integral no lo asocia inmediatamente con una representación gráfica y el cálculo de su área, pero sí a la aplicación de la Regla de Barrow. En el resto de la entrevista (en esta pregunta) calcula el área utilizando la fórmula del área de un triángulo. A continuación se muestra parte de lo expuesto por el estudiante.

Escenario 1. Pregunta 3.





$\Rightarrow -\int_{-3}^{-1} x+1\,dx + \int_{-1}^{4} x+1\,dx \Rightarrow -\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{4}$

$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} - x\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{4}$

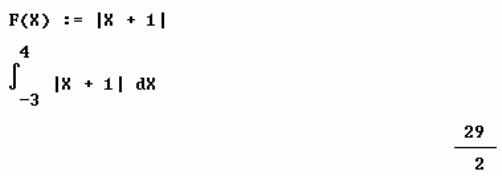
$\Rightarrow \left[\left(-\frac{(-1)^2}{2}-(-1)\right)-\left(-\frac{(-3)^2}{2}-(-3)\right)\right]+\left[\left(\frac{(4)^2}{2}+4\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right]$

$\left(\frac{-1}{2}+1\right)-\left(\frac{-9}{2}+3\right)+(8+4)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{2}\right)+(12)-(-1/2) \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+12+\frac{1}{2} = \frac{29}{2}$

(ver anexo 17, p.175).

Escenario 2. Pregunta 3.



$F(X) := |X + 1|$

$\int_{-3}^{4} |X + 1|\, dX$

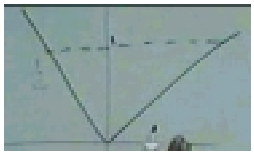
$\frac{29}{2}$

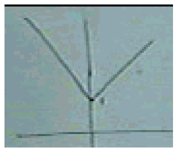
(ver anexo 17, p.175).

Escenario 3. Pregunta 3.

51) I: *En la pregunta que dice: Calcula la integral entre -3 y 4 del valor absoluto de x más 1 diferencial de x* (se lo muestra en la prueba) *¿Podrías resolverla gráficamente?*

…





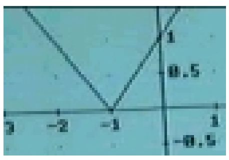
54) E: Dibuja una gráfica. *Pero si fuera x más 1 lo desplazo una unidad hacia arriba* (dibuja).

55) I: *Si eso fuera cierto el valor de -1 ¿Cuánto sería?*

56) E: Escribe en la pizarra $|x+1|$ y se queda por segundos observando la segunda gráfica y la expresión.

57) I: *¿Puedes usar la computadora?*

58) E: Escribe en *DERIVE* $F(x):=|x+1|$ grafica la función, borra la gráfica que había dibujado en la pizarra y escribe



$y=|x+1|$

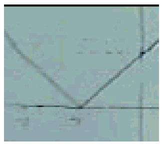
$x=-1$ y dice *Estaba confundido, no era que se desplaza*

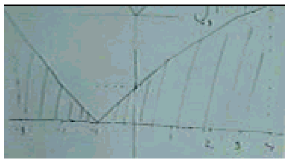
$y=0$

hacia arriba, sino hacia la izquierda (dibuja)

59) I*: ¿Qué te pide el problema?*

60) E: *Calcular la integral*, escribe $\int_{-3}^{4}|x+1|\,dx$, raya la región en la gráfica





62) I: *¿Hay una manera fácil de hacerlo? ¿Qué es lo que tienes que calcular?*

63) E*: La Integral Definida.*

64) I*: Y esas rayas ¿Qué significa?*

65) E*: Como mi región.*

66) I*: ¿Tú no ves como dos triángulos?*

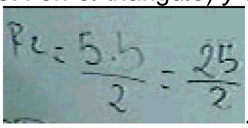
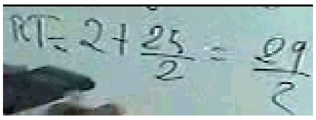
67) E*: Sí. Sería por área.*

68) E: *Sí. Base por altura sobre dos. Su base* (señala el eje *OX* en el triángulo de la izquierda*) y la altura* (señala el segmento vertical en el triángulo de la izquierda)

69) I: *¿Crees que sería igual de válido si lo resolvieras así? No que te dé el mismo resultado.*

70) E*: Se supone que no.*

71) I: *¿No te da el mismo resultado? Prueba a ver*

72) E: *Base que sería tres menos uno que sería dos, por la altura, en este caso, que sería dos*, escribe , *y aquí* (señala el triángulo de la derecha) *me quedaría cinco* (señala el eje *OX* en el triángulo) *y aquí* (señala el 4 en el eje *OX*) *sería 5* (señala el integrando), escribe . *Si calculo todo*  (ver anexo 17, pp. 176-176).

En la pregunta 4 (escenario 1), rehace el cálculo de la integral utilizando cambio de variable; en el escenario 2 calcula la integral directamente usando *DERIVE* y escribe "*Es verdadero, ya que fue comprobado con DERIVE*". Aquí se muestra, como en el grupo de preguntas anterior, que el cálculo de una integral, para el estudiante E1, se limita a un proceso netamente algebraico, desligado del estudio de la función y de su gráfica. Al cuestionarlo en la entrevista, justifica el resultado dado en el PCS indicando que se puede hacer con *DERIVE,* pero antes tiene que "ver" que sea continua (se refiere a la función). Cuando se le pide que explique por qué en otras situaciones no comprueba la continuidad y se le indica el caso de la integral $\int_{2}^{3}\left(2x - x^{2}\right)dx$, el estudiante menciona que no es necesario porque se trata de una función polinómica. Esta respuesta refleja que sigue un procedimiento algorítmico de resolución de la integral. A continuación se muestra parte de lo expuesto por el estudiante.

Escenario 1. Pregunta 4.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 (x-1)^{-2} dx \Rightarrow \text{sea } u = x-1,\; du = dx$$

entonces tenemos

$$\int_0^2 (u)^{-2} du \Rightarrow \frac{u^{-1}}{-1}\Big|_0^2 \Rightarrow \frac{-1}{u}\Big|_0^2 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)}\Big|_0^2$$

$$\frac{-1}{(2-1)} - \left(\frac{-1}{0-1}\right) \Rightarrow \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) \Rightarrow -1 - (+1) \Rightarrow -1-1 = -2$$

es verdadero, ya que al evaluar la integral definida paso a paso dió el mismo resultado al ejercicio al validar...

(ver anexo 17, p. 176)

Escenario 2. Pregunta 4.

$$F(X) := \frac{1}{(X-1)^2}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(X-1)^2}\, dX$$

CONCLUSION: ES VERDADERO YA QUE FUE COMPROBADO POR DERIVE

(ver anexo 17, p. 177).

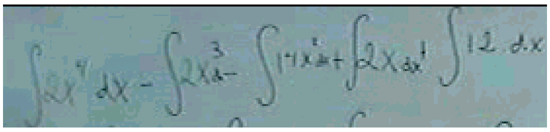
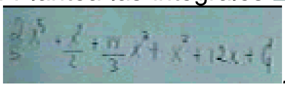
Escenario 3. Pregunta 4.

> 81) I: *¿No te parece raro que DERIVE te diga que da -2?*
> 82) E: *Sí. Pero aquí está entre cero y dos; si no estoy tomando el punto 1 para que me dé cero, yo lo puedo hacer y me da -2; pero antes tengo que ver que sea continua.*
> 83) I: *¿Y por qué no lo miraste en las otras, si era continua?*
> 84) E*: En esta* (señala $\int_2^3 (2x - x^2)dx$ que está en la pantalla de *DERIVE*) *porque aquí es continua para todos los reales, es una función polinómica. Aquí* (señala el integrando del problema 4) *porque es una función racional, las que no son continuas son cuando el denominador me da cero, en este caso en 1 me da cero* (ver anexo 17, p. 177).

En la pregunta 7, se vuelve a evidenciar que el estudiante no logra relacionar la Integral Definida con el cálculo del área de una región bajo la curva, a tal punto que afirma "*Me daría como una antiderivada. No me daría un valor específico. Me da un valor en función área".* En el momento que, por insistencia del entrevistador, grafica la función en *DERIVE*, logra establecer las regiones, los límites de integración y explicar el proceso que seguiría para hallar el valor del área. Se muestra un extracto de la entrevista.

Escenario 3. Pregunta 7.

109) I*: Resuelve ahora como quieras el área que forma con el eje OX la función* $f(x)=2x^4-2x^3-14x^2+2x+12$.

110) E: Plantea las integrales  y la resuelve y le da .

111) I: *¿Qué estás haciendo?*

112) E: *Si me dices calcular el área, sería la integral de eso* (señala la expresión algebraica de la función).

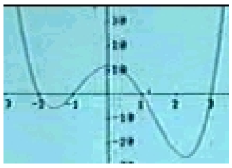
113) I*: ¿Y ahora como seguiría? ¿Cuál es el área?*

114) E*: Me daría como una antiderivada. No me daría un valor específico. Me da un valor en función área.*

115) I: *Yo te pregunto ¿Cuál es el área? Y tú ¿Qué me dices?*

116) E*: El área sería todo, la integral con su función. ¿Si quiere para hacer la gráfica?* (señala el ordenador).

117) I: *Adelante*.



118) E: Escribe la expresión algebraica de la función y la grafica usando *DERIVE* y dice "*la función está desde -2 hasta 3".*

119) I*: Te estoy preguntando el área limitada con el eje OX.*

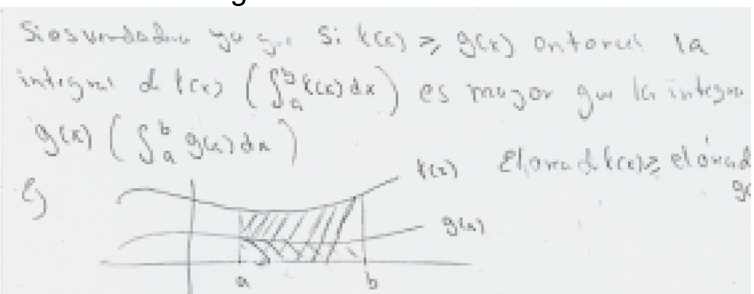
120) E*: Al evaluar sería aquí, aquí y aquí* (señala las tres regiones de izquierda a derecha). *En este caso podría calcular esta función acotada en estos puntos* (señala el -2 y el -1 en la primera región), *después hallar de este punto a este punto* (señala la región desde -1 a 1) *y de este punto a este punto* (señala la región desde 1 a 3), *la integral de cada uno y al sumarla la cambiaría a positivo* (señala la regiones bajo el eje *OX) porque está bajo el eje OX.*

I: *¿Cómo te resultaría más fácil?*

E: *En un caso así, haciendo la gráfica* (ver anexo 17, p. 180).

En la pregunta 5 del tercer grupo (escenario 1), el estudiante dibuja dos regiones acotadas por las gráficas de funciones positivas, las que utiliza para afirmar que la proposición es verdadera; en el escenario 2 da un ejemplo definiendo dos funciones, calcula las integrales y compara los resultados y escribe "*He podido demostrar por medio de un ejemplo que la proposición dada es verdadera".* En la pregunta 6 (escenario 1) menciona que la proposición es verdadera, ya que las funciones "*están acotadas en* $[a,b]$ *y son continuas en ese intervalo"*, en el escenario 2 plantea una integral y concluye que "*es verdadera, ya que la función es continua en el intervalo* $[a,b]$, *lo cual ha sido demostrado a través de DERIVE".* En la entrevista presenta una representación gráfica similar a la de la prueba con lápiz y papel y justifica la veracidad de la proposición de la pregunta 5. Para justificar la falsedad de la proposición de la pregunta 6, representa dos curvas de funciones positivas, esta representación es un contraejemplo de la proposición. El entrevistador le propone una grafica, en la que una de las curvas es la representación de una función negativa (la gráfica de la función g), el estudiante comenta "*Entonces sería más grande* (señala la región de g)", cuando se le pregunta *"¿Entonces sería verdadero o falso?"* el estudiante hace silencio. La actuación del estudiante en este grupo de preguntas es sorprendente, ya que, en las respuestas de los dos grupos precedentes utiliza escasamente las representaciones gráficas en los procedimientos que sigue, en cambio en este grupo, es capaz de explicar correctamente la veracidad de la primera proposición y construir un contraejemplo para la segunda, elaborando e interpretando representaciones gráficas. Se observa que cuando considera la gráfica de una función negativa, esto le confunde. Los siguientes extractos muestran lo anteriormente descrito.

Escenario 1. Pregunta 5.



(ver anexo 17, p.177)

Escenario 2. Pregunta 5.

$F(X) \geq G(X)$

$$\int_a^b F(X)\, dX$$

$$\int_a^b G(X)\, dX$$

POR EJEMPLO

$F(X) := X^2$

$G(X) := X$

INT(F(X)) + G(X)

$$\frac{7}{3}$$

2.333333333

$$\int_1^2 x\ dx$$

$$\frac{3}{2}$$

$$1.5$$

EN CONCLUSIÓN, SE HA PODIDO DEMOSTRAR POR MEDIO DE UN EJEMPLO QUE LA EXPRESIÓN DADA ES VERDADERA.

(ver anexo 17, pp. 177-178).

Escenario 1. Pregunta 6.

Si es verdadera ya que si $\int_a^b f(x)\cdot dx \geq \int_a^b g(x)\cdot dx$ las funciones de estas integrales tambsion dben ser $f(x) \geq g(x)$ ya que estan acotado en $[a,b]$ y son continua en ese intervalo

(ver anexo 17, p. 178).

Escenario 2. Pregunta 6.

F(X) ≥ G(X)

PARA TODO X QUE PERTENECE A [a,b]

INT(F(X) ≥ G(X))

$$\int_a^b (F(X) \geq G(X))\ dX$$

$$\int_a^b (X^2 \geq X)\ dX$$

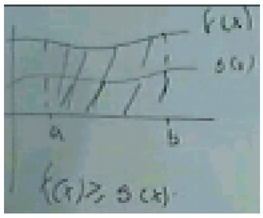
EN CONCLUSIÓN: ES VERDADERA, YA QUE LA FUNCIÓN ES CONTINUA EN EL INTERVALO [a,b]. LO CUAL HA SIDO DEMOSTRADO A TRAVÉS DEL DERIVE.

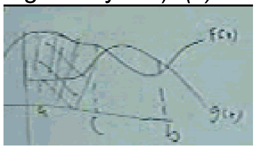
(ver anexo 17, p. 178)

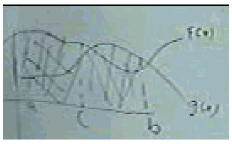
Escenario 3. Pregunta 6.

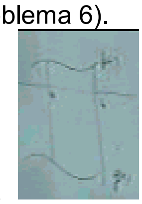
> 85) I: *Había otra pregunta que decía ver si era verdadero o falso lo siguiente, si consideramos f(x) y g(x) donde una era mayor o igual que la otra entonces la integral de f(x) entre a y b diferencial de x es mayor o igual que la integral de g(x) entre a y b diferencial de x* (escribe $f(x) \geq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$) *y después había otra pregunta que lo decía al revés, sí fuera así* (escribe $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$) *sería cierto también que, entonces* $f(x) \geq g(x)$*. Tú dijiste en las dos que si era verdadero.*
>
> 86) E: *Había una que decía para toda x acotada y continua en un intervalo.*

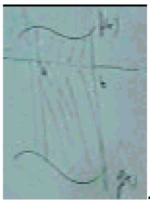
87) I: *No, esa no decía nada de la acotación, de la continuidad, ni de nada. ¿Podrías darme un ejemplo?*
88) E*: Aquí dice que f(x) es mayor o igual que g(x)* (se refiere a la primera proposición, problema 5) *podría ser así* (dibuja), *esta es f(x) y esta g(x)* (señala las curvas respectivas), *acotadas entre "a" y "b", entonces f(x) es todo esto* (señala la región bajo la curva de f) *es mayor que g(x), que es este pedacito* (señala la región bajo la curva de g), *se dice que f(x) es mayor que g(x). Ahí, como estoy diciendo que la función f(x) es mayor que g(x) entonces la integral de f(x) tiene que ser mayor que la de g(x)* (señala la primera proposición, problema 5). *En cambio aquí* (señala la segunda proposición, problema 6) *está al revés, puedo conseguir un caso* (dibuja), *yo puedo tener aquí este caso, en esta parte aquí* (se refiere a la región rayada) *f(x) es mayor que g(x) y la integral* $\int_a^c f(x) \geq \int_a^c g(x)$ *; también puedo ver en esta parte aquí puede ser lo contrario, puede ser que g(x) sea mayor que f(x)* (señala la región entre "c" y "b"); *entonces nosotros no sabemos exactamente si en toda la función f(x) será mayor que g(x). O sea aquí yo sé* (se señala la hipótesis de la primera proposición, problema 5) *antes de evaluar que f(x) es mayor que g(x), estoy partiendo de este caso, estoy partiendo que mi función es mayor que la otra y yo puedo llegar a decir entonces que la integral de la función es mayor a la de la otra integral* (señala la tesis en primera proposición, problema 5*). Pero aquí me dicen* (señala la hipótesis de la segunda proposición, problema 6) *que esta integral es mayor que esta integral y de ahí parto, puedo decir que esta función es mayor que ésta* (señala la tesis en la segunda proposición, problema 6); *pero no sé exactamente si en toda mi función f(x) va ser mayor que g(x)* (señala la hipótesis de segunda proposición, problema 6).







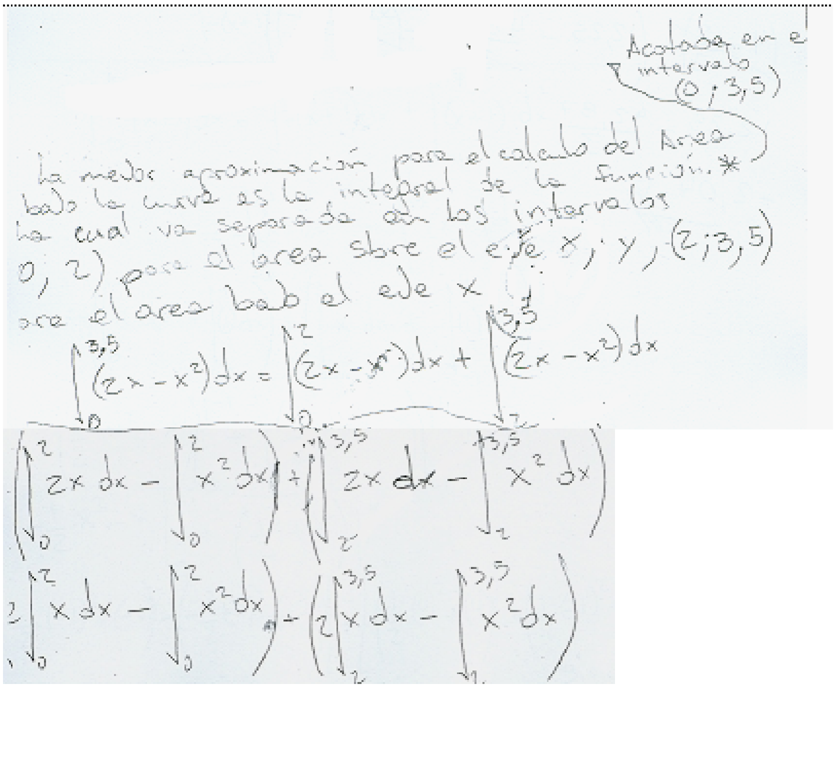
89) I: *Vamos con esta* (señala la primera proposición, problema 5). Dibuja  *¿Se sigue cumpliendo?*

90) E: Raya las regiones .
91) I: *¿Quién es la integral entre a y b de f(x)?*
92) E: *Es ésta* (señala la región sobre el eje *OX*)
93) I: *¿Quién es la integral entre a y b de g(x)?*
94) E*: Es ésta* (señala la región bajo el eje *OX*).
95) I*: ¿Entonces que pasa con ese mayor o igual?*
96) E*: Entonces sería más grande* (señala la región de g)
97) I*: ¿Entonces sería verdadero o sería falso?*
98) E: Silencio (ver anexo 17, pp.178-179).

6.4.2. El estudiante E2

En el reporte del estudiante E2 relacionado con la pregunta 2 que involucra el cálculo del área comprendida entre el eje *OX* y la función $\left(2x - x^2\right)$, representa gráficamente, identifica correctamente el intervalo que corresponde a cada región; luego plantea la igualdad $\int_0^{3.5}\left(2x - x^2\right)dx = \int_0^2\left(2x - x^2\right)dx + \int_2^{3.5}\left(2x - x^2\right)dx$, lo que evidencia que no traduce el cálculo del área a la Integral Definida; se puede pensar que desconecta los dos procesos, uno el cálculo del área de la región y otro el uso de la Integral Definida. A pesar de que al inicio mencionó que está calculando el área, le resulta negativo; nos hace pensar que no tiene claro la relación entre área e Integral Definida. Entre sus comentarios menciona "*la mejor aproximación para el cálculo del área bajo la curva es la integral de la función",* esta aseveración resulta interesante, ya que en las Prácticas de Laboratorio se introduce el tema de cálculo integral mediante aproximaciones, de alguna manera el estudiante E2 asocia el área y la Integral Definida con las aproximaciones. Se observa que detalla cada paso en la aplicación del procedimiento algebraico. El siguiente extracto muestra lo anteriormente descrito.

Escenario 1. Pregunta 2.



Acotada en el intervalo (0;3,5)

La mejor aproximación para el calculo del Area bajo la curva es la integral de la función.* la cual va separada en los intervalos (0, 2) para el area sobre el eje x, y, (2;3,5) para el area bajo el eje x

$$\int_0^{3,5}(2x-x^2)dx = \int_0^{2}(2x-x^2)dx + \int_2^{3,5}(2x-x^2)dx$$

$$\left(\int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2dx\right) + \left(\int_2^{3,5} 2x\,dx - \int_2^{3,5} x^2dx\right)$$

$$\left(2\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 x^2dx\right) + \left(2\int_2^{3,5} x\,dx - \int_2^{3,5} x^2dx\right)$$

$$= \left(\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \left(\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^{3,5}$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^{3,5}$$

$$\left((2)^2 - \frac{(2)^3}{3} - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right) + \left((3,5)^2 - \frac{(3,5)^3}{3} - \left((2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right)\right)$$

$$\cancel{\left(4 - \frac{8}{3}\right)} + \left(12,25 - \frac{42,87}{3} - \cancel{\left(4 - \frac{8}{3}\right)}\right)$$

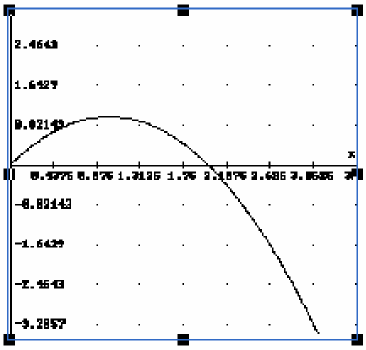
$$= 12,25 - \frac{42,87}{3}$$

$$-2,04$$

(ver anexo 17, p. 183-184)

Escenario 2. Pregunta 2.

$$F(x) := 2 \cdot x - x^2$$



Para calcular el área en el intervalo dado (0,3.5) hay que dividir en subintervalos, ya que la gráfica se encuentra sobre el eje x en el subintevalo (0,2) y bajo el eje x en el subintervalo (2,3.5).
Primero la calculo por la integral acotada en el intervalo completo...

$$\int_0^{3.5} (2 \cdot x - x^2)\, dx$$

$$-\frac{49}{24}$$

$$-2.041666666$$

ahora calculo la integral en cada subintervalo..
primero de 0 a 2

$$\int_0^{2} (2 \cdot x - x^2)\, dx$$

$$\frac{4}{3}$$

$$1.333333333$$

luego de 2 a 3.5

$$\int_2^{3.5} (2\cdot x - x^2)\, dx$$

$$-\frac{27}{8}$$

$$-3.375$$

ahora las sumo ...

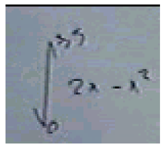
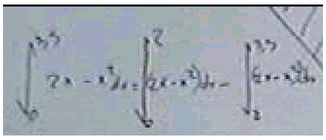
$$1.333333333 + -3.375$$

$$-2.041666666$$

(ver anexo 17, p. 184-185)

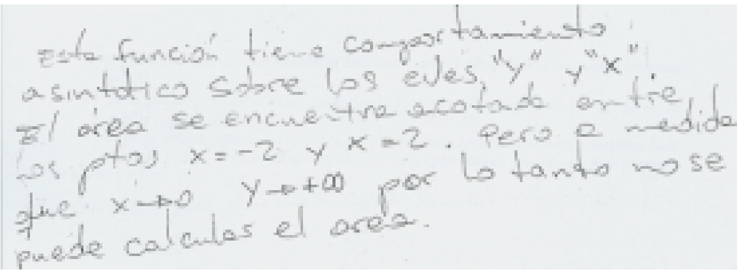
En la entrevista (escenario 3) al solicitarle que resuelva el problema de la manera más sencilla, expresa que se trata de calcular el "*área de la curva acotada entre cero y 3.5".* Luego menciona "*yo voy hablar de la integral entre cero y 3.5"* y plantea la integral $\int_0^{3.5}\left(2x - x^2\right)dx$; describe el procedimiento de cálculo del área y escribe la integral como la diferencia de dos integrales. El haber igualado las integrales puede atribuirse a un despiste y no se puede asegurar que confunda el cálculo del área bajo la curva y el cálculo de la integral $\int_0^{3.5}\left(2x - x^2\right)dx$. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 3. Pregunta 2.

17) I: *Te pido que la resuelvas de la forma que consideres más sencilla.*
18) E: *¿De la forma que considere más sencilla? OK, si vamos a conseguir el área de la curva acotada entre cero y 3.5, ¿por qué puedo hacer estimación hasta 3.5?*
19) I: *Sí.*
20) E: *Yo voy a hablar de la integral desde cero hasta 3.5* (plantea la integral)  *pero esta área sobre el eje OX* (señala la región sobre el eje *OX*, en el gráfico) *y ésta está bajo el eje OX* (señala la región bajo el eje *OX*, en el gráfico). *Aja, el área encima del eje OX, o sea la región es positiva y abajo es negativa. O sea, que yo sacaré esta* (señala la región sobre el eje *OX*) *y se la voy a restar a esta* (señala la región bajo el eje *OX*) *y me dará la región. Entonces sería la integral de cero a dos menos la integral de 2 a 3.5* (plantea las dos integrales y las resuelve)  explica cada paso del procedimiento señalando en el gráfico lo que obtiene algebraicamente. Para realizar los cómputos finales pregunta *¿Puedo usar DERIVE?*
21) I: *Sí.*
22) E: Abre la ventana de *DERIVE* y realiza los cómputos y lo va anotando en la pizarra, le da como resultado total (4.7)
(ver anexo 17, p.185)

El estudiante E2 se apoya en el registro gráfico dado para argumentar sus razonamientos. Esto se observa tanto en las citas anteriores como en la siguiente.

Escenario 1. Pregunta 8.


esta función tiene comportamiento
asintótico sobre los ejes "y" y "x"
El área se encuentra acotada entre
los ptos $x=-2$ y $x=2$. Pero a medida
que $x \to 0$ $y \to +\infty$ por lo tanto no se
puede calcular el área.

(ver anexo 17, p. 191)

Se observa la influencia de la instrucción recibida cuando asocia el cálculo de la Integral Definida, las sumas de Riemann y la construcción de rectángulos. Al mencionar "*la suma de Riemann que consiste en encontrar cierta cantidad, n cantidad de rectángulos debajo de una curva*" no queda claro si relaciona la suma de Riemann con la figura geométrica o con el área de las figuras. El siguiente extracto así lo indica:

Escenario 3. Pregunta 1.

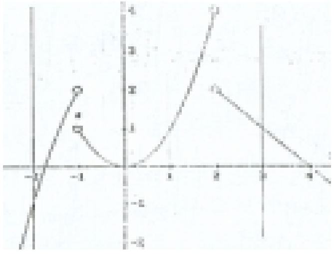
1) I: Escribe en la pizarra la expresión $\int_a^b f(x)dx$

¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la Integral Definida entre a y b de f(x) diferencial de x?

2) E: *La base para la integral sería la suma de Riemann que consiste en encontrar cierta cantidad, n cantidad de rectángulos debajo de una curva. La suma de Riemann te da la aproximación de la integral entre el eje OY la curva. Entonces tengo la función acotada entre "a b" esto será el valor de la integral* (grafica una curva y raya una región) (ver anexo 17, p. 183).

El estudiante E2 al trabajar con funciones continuas, plantea una integral cuyos límites de integración son los extremos del intervalo de integración (pregunta 2), cuando se trata de una continuidad a trozos (pregunta 9), tiende a aproximar los límites de integración y no se refiere a la integral sino al área, la que considera como aproximada. El siguiente extracto muestra el parecer del estudiante E2.

Escenario 1. Pregunta 9.



La funcion es discontinua en el intervalo [-2, 3].

Podría calcular el area en los Intervalos [-2,-1] [-1, 2] y [2, 3] pero la funcion no esta definida para x=2. y tiene una discontinuidad de salto en x=-1. Voy a hacer una aproximación del Area total tomando subintervalos en los q' f(x) sea continua. [-2,-1,01] [-0,99;1,99], y [2,01;3]

$$A_T \approx \int_{-2}^{-1,01} f(x)dx + \int_{-0,99}^{1,99} f(x)\,dx + \int_{2,01}^{3} f(x)\,dx$$

$$\approx \int_{-2}^{-1,01} (-x^2+3)dx + \int_{-0,99}^{1,99} (x^2)dx + \int_{2,01}^{3} (-x+4)\,dx$$

$$\left(\int_{-2}^{-1,01} -x^2dx + \int_{-2}^{-1,01} 3dx\right) + \int_{-0,99}^{1,99} x^2\,dx + \left(\int_{2,01}^{3} -x\,dx + \int_{2,01}^{3} 4\,dx\right)$$

$$\left(-\int_{-2}^{-1,01} x^2dx + \int_{-2}^{-1,01} 3dx\right) + \int_{-0,99}^{1,99} x^2\,dx + \left(-\int_{2,01}^{3} x\,dx + \int_{2,01}^{3} 4dx\right)$$

$$\left(-\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_{-2}^{-1,01} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-0,99}^{1,99} + \left(-\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{2,01}^{3}$$

$$\left(-\frac{(-1,01)^3}{3} + 3(-1,01) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 3(-2)\right)\right) + \left(\frac{(1,99)^3}{3} - \frac{(-0,99)^3}{3}\right) + \left(-\frac{(3)^2}{2} + 4(3) - \left(-\frac{(2,01)^2}{2} + 4(2,01)\right)\right)$$

$$\left(\frac{1,03}{3} - 3,03 - \left(\frac{8}{3} - 6\right)\right) + \left(\frac{7,88}{3} + \frac{0,97}{3}\right) + \left(-\frac{9}{2} + 12 - \left(\frac{4,04}{2} + 8,04\right)\right)$$

$$\left(-2,68 - \left(-\frac{10}{3}\right)\right) + 2,95 + \left(\frac{15}{2} - (6,02)\right)$$

$$-2,68 + \frac{10}{3} + 2,95 + \frac{15}{2} - 6,02$$

$$\approx 5,08$$

(ver anexo 17, pp. 192-193)

El estudiante expresa, en la entrevista, que para resolver un problema que involucra una función que no es continua, tiene "*que dividir en subintervalos…donde f(x) sea continua".* Esto puede explicar la forma de responder a la pregunta 9 (escenario 1). Esto se muestra en el siguiente extracto.

Escenario 3. Pregunta 9.

> 13) I: *¿Y si la función no es continua?*
> 14) E: *Tengo que dividir en subintervalos. Entre los subintervalos donde f(x) sea continua* (ver anexo 17, p. 183).

Al analizar las respuestas dadas por el estudiante E2 al segundo grupo de preguntas (3, 4, 7) destacamos que en la pregunta 3 (escenario 1) define a trozos la función valor absoluto, plantea la suma de dos integrales y la resuelve correctamente utilizando técnicas de integración, no requiere de la gráfica para resolver el problema. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 1. Pregunta 3.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & si\ x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1 & si\ x \geq -1 \\ -(x+1) & si\ x < -1 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \int_{-3}^{-1} -(x+1)\,dx + \int_{-1}^{4} (x+1)\,dx$$

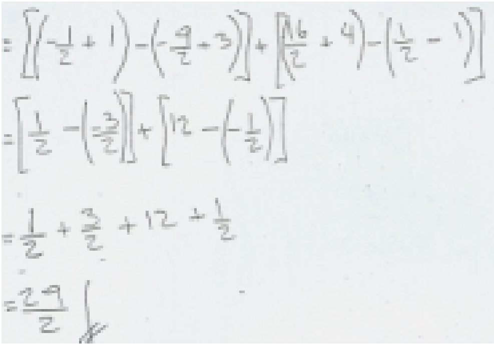
$$= -\int_{-3}^{-1} (x+1)\,dx + \int_{-1}^{4} (x+1)\,dx$$

$$= -\left(\int_{-3}^{-1} x\,dx + \int_{-3}^{-1} (1)\,dx\right) + \left(\int_{-1}^{4} x\,dx + \int_{-1}^{4} (1)\,dx\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x \Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}(-3)^2 - (-3)\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}(4)^2 + (4)\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 + (-1)\right)\right]$$

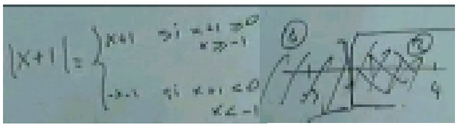


(ver anexo 17, pp. 185-186)

En la entrevista se le pide que resuelva la integral gráficamente, el estudiante E2 expresa que tiene que definir la función a trozos, y a continuación dibuja un diagrama, que utiliza para graficar dos semirrectas. Se observa que tiene dificultades para graficar la función valor absoluto. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 3. Pregunta 3.

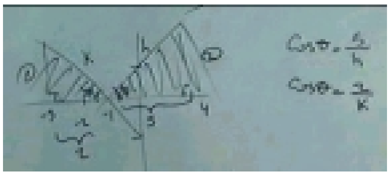
> 23) I: *En el problema te pedían calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto x más 1 diferencial de x* (Le escribe en la pizarra $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$). *Te pido que la resuelvas gráficamente.*
>
> ….
>
> 26) E: *Primero tengo que definir el valor absoluto* (escribe la función a trozos, luego dibuja un diagrama), *para evaluar la gráfica hablando de la integral de -3 a 4 para esta parte* (señala la parte que identifica como 1) *de -1 hasta menos infinito voy a utilizar esto* (señala en la definición la correspondiente a –x-1) *y desde -1 hasta más infinito voy a utilizar esto* (señala en la definición la correspondiente a x+1) *luego dibuja dos semirrectas observando la definición que ha dado* creo, creo, no estoy seguro que la gráfica sea así (luego completa la gráfica y raya la región), *este pedazo de la gráfica lo voy a utilizar en esta ecuación* (se refiere a la parte derecha de la gráfica y la correspondiente x+1 en la definición) *y para sacar el otro pedazo* (se refiere a la parte izquierda de la gráfica y la correspondiente-x-1 en la definición) *utilizaría esta ecuación.* (ver anexo 17, p. 186).



Distingue las dos regiones triangulares en la gráfica, pero se confunde en la aplicación de la fórmula del cálculo del área de un triángulo, al tratar de estimar las alturas utilizando trigonometría. Después se percata que puede estimar las alturas hallando las imágenes de la función. Finalmente calcula el área aplicando la fórmula del área de un triángulo. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 3. Pregunta 3.

33) I: *Sí. Tú habías dibujado una gráfica y qué es que lo tenías que calcular si vemos la gráfica.*
34) E: *Ésta de aquí y ésta de aquí* (señala las dos regiones en la gráfica).
35) I: *Y esas dos figuras geométricas ¿Qué son?*
36) E: *Triángulos. Si lo acoto aquí y aquí* (dibuja dos segmentos verticales en las regiones formando dos triángulos) *me quedan triángulos rectángulos.*



37) I: *¿Sabes hallar el área de un triángulo rectángulo?*
38) E: *¡Más fácil! ¡Si es verdad!* (calcula las longitudes de los lados de los triángulos en el eje *OX* directamente en la gráfica y para las alturas utiliza trigonometría).
39) I: *Así estamos igual o peor.*
41) E: *Peor diría yo. Prefiero calcularlo por integral.*
42) I: *Piensa un poco, Tú no puedes conocer las alturas de esos triángulos.*
42) E: *Las alturas. Metiendo valores en la función. Este valor* (señala el 4 en la gráfica y la correspondiente x+1 en la definición, escribe f(4)= 4+1=5).
43) I: *¿Cuál es el área de un triángulo?*
44) E: *Base por altura sobre 2.*
…

Hace los cálculos.
48) Chequea en la prueba. *No.* Suma los resultados que tiene en la pizarra y le da 14,5 (ver anexo 17, p. 187*).*

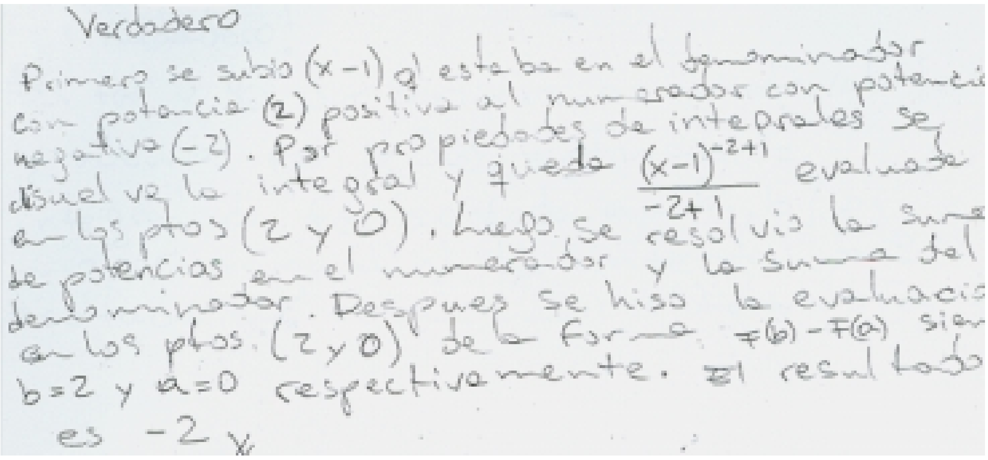
Resulta interesante que el estudiante trate de aplicar trigonometría para calcular la altura del triángulo, puede ser que considere, a priori, que el procedimiento debe ser lo más complejo posible para que sea matemáticamente aceptable. Al cuestionarle sobre cuál procedimiento considera más fácil (uso de área de triángulos o Integral Definida) el estudiante E2 manifiesta que si *"Hubiese tenido más tiempo para hacerlo, lo hubiera hecho así"* refiriéndose al cálculo mediante área de triángulos; no obstante, puntualiza que "*Era el examen de integrales"* ratificando que su respuesta está condicionada por la teoría dada en el curso. Cuando el entrevistador le pregunta "*¿De cuál te fiarías?"* responde "*De integral"*. Esto muestra que la contundencia de la teoría de integrales puede crear en el estudiante la sensación mítica de que es la mejor manera de resolver un problema e impedirle plantearse otras alternativas, que en algunos situaciones la pudo haber pensado pero no las implementa. Esto se pone de manifiesto en el extracto.

Escenario 3. Pregunta 3.

51) I: *¿Cómo consideras que sería más fácil?*
52) E: *Hubiera tenido más tiempo para hacerlo, lo hubiera hecho así. Pero aquí me están evaluando la integral. Era el examen de integral.*
53) I: *Era el examen de integral.*
54) E: *Por eso, tenía que evaluarlo por integral*.
55) I: *¿Te lo dice ahí?*
56) E: *Calcule la Integral Definida. ¿Lo podía calcular como quisiera?*
57) I: *No, digo yo, no sé. ¿Qué opinas?*
58) E: *Para una demostración buena, podría hacer los pasos según las integrales, después poner esto* (se refiere al desarrollo que escribió en la pizarra), *poner que los dos resultados son el mismo y que era más fácil hacerlo por este camino que por integrales.*
59) I: *Si los resultados no te hubiera salido iguales.*
60) E: *Tuviese que estudiar bien eso.*
61) I: *¿Cuál desecharías de los dos?*
62) E: *Difícil. Primero tendría que estudiar que no me haya equivocado en los pasos y si no me he equivocado y está bien tendría que dar igual.*
63) I: *¿De cuál te fiarías?*
64) E: *De integral* (ver anexo 17, p. 187).

Al responder a la pregunta 4 (escenario 1), el estudiante E2 muestra la creencia que es suficiente expresar en palabras el procedimiento como una manera de justificar la proposición. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 1. Pregunta 4.


Verdadero
Primero se subio (x−1) q' estaba en el denominador con potencia (2) positiva al numerador con potencia negativa (−2). Por propiedades de integrales se disuelve la integral y queda $\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}$ evaluada en los ptos (2 y 0). Luego se resolvio la suma de potencias en el numerador y la suma del denominador. Despues se hiso la evaluacion en los ptos. (2 y 0) de la forma $F(b) - F(a)$ siendo b=2 y a=0 respectivamente. El resultado es −2

(ver anexo 17, p. 188)

Cuando utiliza el PCS (escenario 2) realiza los cálculos de nuevo y al darle el mismo valor, expresa "*Y así queda demostrado que la respuesta es verdadera"*, esto muestra la confianza que el estudiante tiene en el PCS, lo que en este caso ocasiona un obstáculo que le impide reflexionar sobre el significado de la información obtenida, en el contexto de la pregunta formulada. El siguiente extracto así lo muestra.

Escenario 2. Pregunta 4.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

la evaluamos indefinidamente

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-2}$$

Y para comprobarla evaluamos la integral indefinida en el intervalo (0,2) por medio del T.F.C (teorema fundamental del cálculo) F(b)-F(a)

F(b):

-1

$$\frac{1}{1-0}$$

1

$$-1-1$$

f(b)-f(a)=

-2

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

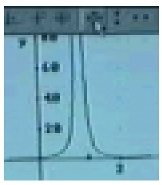
Y así queda demostrado que la respuesta es verdadera.

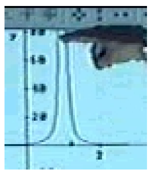
(ver anexo 17, p. 188).

En la entrevista (escenario 3), al inicio, procede como en el escenario 2, luego utiliza el *DERIVE* y grafica la función del integrando. Justifica la falsedad de la proposición relacionando el comportamiento de la gráfica y el área. No logra justificar por qué el PCS no le proporciona un resultado que le sirva para desmentir la proposición. Esto evidencia que una inadecuada interpretación de la información que proporciona el PCS puede conducir al estudiante a situaciones contradictorias. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 3. Pregunta 4.

71) I: *¿No se te ocurre nada?*
72) E: *Ya va.*
73) I: *¿El DERIVE no te pudiera ayudar?*
74) E: (Utiliza *DERIVE* y grafica la función) *Está acotada de cero a dos, OK, ahí no tengo techo en la gráfica* (se acerca a la pantalla en la pared) *yo tengo acotada de cero a dos (señala el origen y el dos) si yo tuviese limitación en el eje y* (señala la parte superior de la gráfica) *yo pudiera calcular esta área, pero ella sigue infinitamente subiendo,*



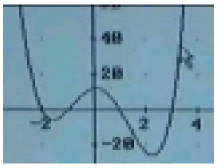


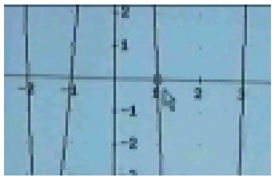
sube y sube y sube (mueve el brazo de abajo hacia arriba señalando en la gráfica) *y por lo tanto el área me daría infinito.* Afirma con seguridad *¡es falso!*
75) *¿Por qué crees que DERIVE te dice que es verdadero dándote menos dos?*
76) E: Observa la pizarra, la pantalla sobre la pared y la prueba y dice *de verdad no sé. En ningún momento le dije* (chequea los cómputos hechos en *DERIVE*). *Yo puedo decir que asume que tiene techo porque en ningún momento se ve. No lo sé* (ver anexo 17, p. 189).

En la pregunta 7, en la que se le plantea una situación en un registro algebraico y se le pide calcular el área que forma el polinomio con el eje OX, el estudiante E2 recurre al uso de *DERIVE*, grafica la función, utiliza la herramienta de *DERIVE* para estimar los cortes de la curva con el eje OX y plantea la igualdad $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{3} f(x)\,dx$. Lo interesante de este proceder es que en las preguntas 2 y 10 (escenario 1 y 2), el estudiante E2 no distinguió, en el planteamiento de las integrales, el valor del área de la región bajo el eje OX, en cambio en esta pregunta sí expresa correctamente las integrales, evidenciando que realiza la distinción de las regiones. El siguiente extracto lo muestra.

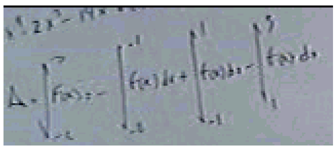
Escenario 3. Pregunta 7.

121) E: Utiliza *DERIVE* para graficar la curva, se acerca a la pantalla y señala las tres regiones a calcularle el área, dice *voy a trabajar esto, esto y esto, si entre la gráfica y el eje OX.*



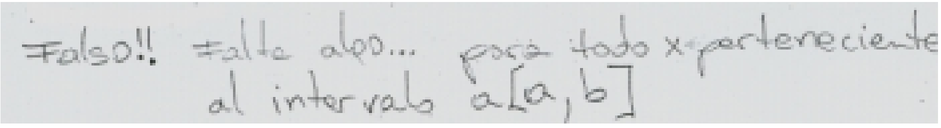


122) I: *¿Qué clase de función es f(x)?*
123) E*: Polinómica.*
124) I: *¿Cuántos ceros tiene?*
125) E: *Tiene cuatro. Con la computadora puedo encontrar los subintervalos* (recorre la curva con el cursor y va estimando los cortes de la curva con el eje OX) dice *-2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3*
126) I: *¿Cómo lo harías?*
127) E: Plantea las integrales (ver anexo, 17, p. 191).



En el grupo de preguntas (5 y 6) en las que se plantean proposiciones genéricas, en las cuales se debe justificar su veracidad o falsedad, utilizando registros gráficos y/o algebraicos, el estudiante E2 expresa que en virtud de que se omite "*para todo x perteneciente al intervalo* $[a,b]$" (pregunta 5) y que "*la función debe ser continua en el intervalo* $[a,b]$" (pregunta 6), se puede afirmar que la primera proposición (pregunta 5) es falsa y que la segunda es verdadera (pregunta 6). Esto evidencia, entre otros aspectos, que el no expresarle explícitamente el intervalo de integración es un obstáculo para que pueda interpretar la proposición y que la continuidad de la función, para el estudiante E2, es una condición indispensable para determinar la veracidad de una proposición. Los siguientes extractos lo muestran.

Escenario 1. Pregunta 5


Falso!! falta algo... para todo x perteneciente al intervalo a[a,b]

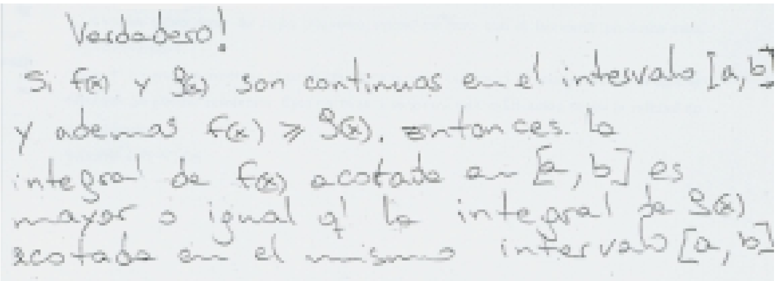
(ver anexo 17, p. 189)

Escenario 2. Pregunta 5.

```
Es falso porque falta poner que la función debe ser continua en el intervalo
(a,b)
```

(ver anexo 17, p. 189)

Escenario 1 Pregunta 6.


Verdadero!
Si f(x) y g(x) son continuas en el intervalo [a,b]
y ademas f(x) ≥ g(x), entonces la
integral de f(x) acotada en [a,b] es
mayor o igual q' la integral de g(x)
acotada en el mismo intervalo [a,b]

(ver anexo 17, p. 189)

Escenario 2. Pregunta 6.

```
Se basa en el teorema de comparación de la integral ya que x pertenece al
intervalo (a,b)
```

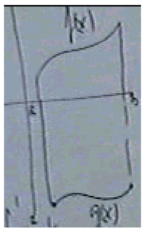
(ver anexo 17, p. 189)

Escenario 3. Preguntas 5 y 6.

> 92) I: *…* (Señala la proposición 5*) si una función es mayor o igual que otra, entonces la integral entre a y b de una es mayor o igual que la integral entre a y b de la otra. La otra pregunta* (se refiere a la proposición 6) *es que si las integrales son mayores o iguales entonces las funciones también lo son. Te pregunto, ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones, siendo f(x) y g(x) funciones cualesquiera? Tú respondiste que una era falsa y otra verdadera.*
> 93) E: *Yo puse que una era falsa y otra verdadera porque había una, no me acuerdo cuál, que decía que x pertenece al intervalo; había una que tenía la salvedad y otra que no* (ver anexo 17, p. 190).

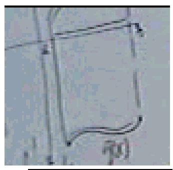
Al plantearle una representación gráfica, en la que se observa que la gráfica de una (*f(x)*) está sobre el eje *OX* y la otra (*g(x)*) está bajo el eje *OX*, y se le pide que la utilice en su argumentación (tal como está elaborada la gráfica se cumplen las dos proposiciones), el estudiante E2 interpreta la desigualdad de la integrales (pregunta 5) como área, mencionando "*Ésta es mayor* (se refiere a la región de g), *esta área es más grande que ésta* (señala a la región de g en comparación con la de f)*"*, Luego afirma que "*pero es negativa"* se refiere a *g(x).* Se observa que al principio asocia las integrales al área, luego considera el valor de la integral que corresponde a *g(x)*, puntualizando *"si puedo afirmar"*, aunque no menciona expresamente que la proposición sea verdadera, se intuye que esto es lo que quiere decir*.* Se nota que el incluir el término área, por parte del estudiante E2, le genera un obstáculo para la interpretación de la proposición. En la pregunta 6, tras la orientación del entrevistador, parte de la desigualdad de las integrales, se apoya en la gráfica dada y la utiliza para establecer la "veracidad" de la proposición. A pesar de que logra interpretar las proposiciones, se nota que tiene dificultad para realizar distinciones entre el significado del área y la Integral Definida. Es siguiente extracto de la entrevista así lo muestra.

Escenario 3. Preguntas 5 y 6.



102) I: *Si te pusiera estas dos funciones* (dibuja en la pizarra) *f(x) es mayor que g(x), te pregunto ¿será la integral entre a y b de f(x) mayor o igual que la integral entre a y b de g(x)?* (señala en la gráfica cada parte).
103) E*: Ésta es mayor* (se refiere a la región de g), *esta área es más grande que ésta* (señala a la región de g en comparación con la de f) *pero es negativa.* Se queda por unos segundos pensando.
104) I: *¿Entonces?*
105) E: *¿Estamos comprobando que f(x) es mayor o igual que g(x)?*
106) I: *Estamos suponiendo que f(x) es mayor o igual que g(x).*

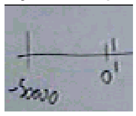
107) E*: Los valores aquí* (marca con el rotulador sobre el segmento entre a y b) *cuando los evalúe dará valores positivos* (marca con el rotulador una línea bajo la curva de f). *Estos dará "y" negativos* (marca con el rotulador una línea sobre la curva de g) *Si puedo afirmar que, si puedo* (señala la desigualdad de las funciones). *Estos valores son positivos y éstos son negativos* (señala la curva de f y luego la de g)



108) I: *Vamos a suponerlo al revés* (se refiere a la proposición 6) *entonces, supongamos que la integral entre a y b de f(x) es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) ¿Podemos afirmar que f(x) es mayor o igual que g(x)?*

109) E*: Si hago estos mismos pasos* (señala con el dedo la curva de f y la de g) *yo pienso que la integral es el área bajo la curva. Esta área* (raya la región sobre la curva de g) *es mayor que ésta* (raya la región bajo la curva de f).
110) I: *¿Tú no dices que es negativa?* (se refiere al valor de la integral de la región sobre la curva de g)
111) E*: Ahh.*
112) *I: ¿Tú no dijiste que la de abajo se considera negativa?*
113) *E: Pero es más negativa que el valor absoluto que tiene éste* (señala la región sobre la curva de g y luego la región bajo la curva de f, puede que se refiera al valor absoluto de valor de la Integral Definida de g(x)).
114) I: *Pero todo negativo es menor que lo positivo.*

115) E: *Cierto. Esto es lo que estoy suponiendo ahora* (escribe la desigualdad de las integrales)
116) I: *Eso es lo que estás suponiendo ahora.*
117) E: *Si esto se cumple* (se refiere a la desigualdad de las integrales) *con más razón esto que es más grande* (señala la región de g y escribe el signo negativo sobre la Integral Definida de g) *es más grande y es negativo, entonces esto es negativo y esto positivo* (escribe el signo positivo sobre la Integral Definida de f) *aunque sea un valor pequeño. Me acuerdo de séptimo grado que me dijeron que puedo tener -50000 y 1 y, 1 es mayor que -50000.*



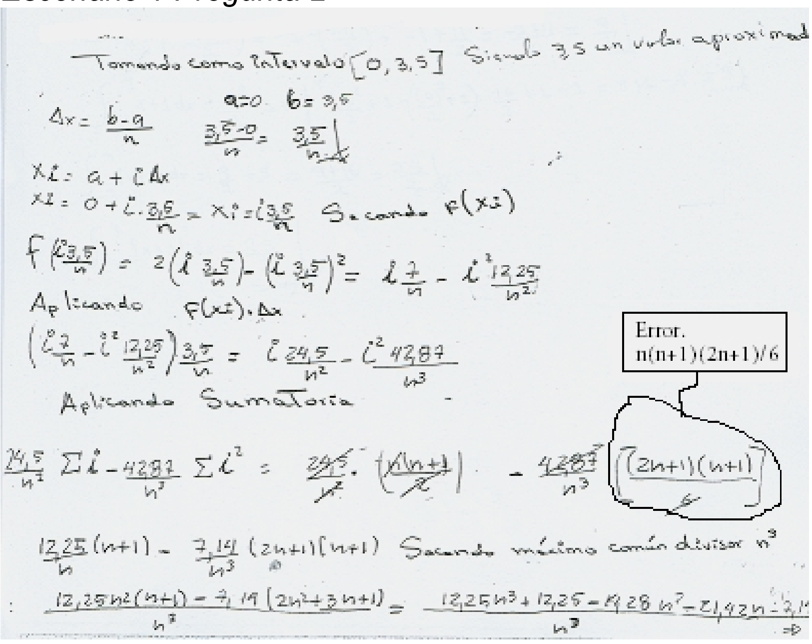
118) I: *¿Entonces las dos son verdaderas?*
119) E: *Sí* (ver anexo 17, pp. 190-191).

En los grupos de preguntas precedentes, el estudiante trabaja con situaciones en las cuales se definía una gráfica y/o la expresión algebraica de la función; en estas preguntas (5 y 6), el estudiante E2 no cuenta con estos dos registros de manera explícita, parece que este escenario le confunde y no logra establecer conexiones entre los registros y además evidencia que tiene dificultad para diferenciar lo que significa el cálculo del área bajo una curva y el significado amplio de la Integral Definida.

6.4.3. El estudiante E3

El estudiante E3 responde a la pregunta 2 (escenario 1), estableciendo el término general de la suma de Riemann, sin dividir el intervalo $[0, 3.5]$ en subintervalos; comete un error al sustituir $\sum i^2$ por su suma, calcula el límite de la suma de Riemann y obtiene el valor 12.25. El procedimiento seguido es correcto, salvo el error cometido. Aparentemente sólo utiliza la gráfica para establecer los extremos del intervalo. En el escenario 2 considera dos subintervalos, plantea una integral para cada uno, realiza la operación $\frac{4}{3} - -\frac{27}{8}$ y obtiene el valor 4.718333333 (resultado correcto del área), escribe "*Definimos el intervalo del área que vamos a calcular, en este caso* $[0, 3.5]$*, calculamos la integral de* $F(x) = 2 * x - x\text{^}2$ *en el intervalo* $[0, 2]$ *y calculamos la integral de* $F(x) = 2 * x - x\text{^}2$ *en el intervalo* $[2, 3.5]$*, luego al conseguir el área, las sumamos y la suma del área debe dar positiva, en el caso del área en el intervalo* $[2, 3.5]$ *la multiplicamos por -1 para que nos dé positiva".* En la entrevista, el investigador le dibuja la región en la pizarra y le pide al estudiante E3 que resuelva el problema de la forma más sencilla, comenta "*se me hace más fácil por integrales",* explica el procedimiento que seguirá, luego plantea una integral en $[0, 2]$ y otra en $[2, 3.5]$, suma los resultados y obtiene $\frac{113}{24}$. El entrevistador le pregunta "*¿Por qué en el examen no lo hiciste así?"* responde "*Porque creí que lo podía sacar por la suma de Riemann. …Yo me mecanicé, vi una gráfica, Riemann, sólo pensé en el método de Riemann".* De las respuestas del estudiante E3 se observa que logra resolver correctamente este tipo de problemas utilizando para ello la regla de Barrow. La aplicación de la aproximación numérica está condicionada por lo que cree que se le requiere, en correspondencia con la instrucción recibida. Prefiere calcular el área de una región bajo la curva aplicando la regla de Barrow que por aproximación numérica. Al mencionar "*vi una gráfica, Riemann, sólo pensé en el método de Riemann",* asocia la gráfica con la aplicación de la aproximación numérica, esto le puede limitar a plantearse otras alternativas que para él le serían más fáciles. Los siguientes extractos lo muestran.

Escenario 1 Pregunta 2



$$= \frac{12{,}25n^3 - 14{,}28n^2 - 21{,}42n + 7{,}14}{n^3}$$

Aplicando Suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{12{,}25n^3/n^3 - 14{,}28n^2/n^3 - 21{,}42n/n^3 + 7{,}14/n^3}{n^3/n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{12{,}25 - \overset{0}{\cancel{14{,}28/n}} - \overset{0}{\cancel{21{,}42/n^2}} + \overset{0}{\cancel{7{,}14/n^3}}}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = 12{,}25$$

(ver anexo 17, p. 195)

Escenario 2. Pregunta 2.

$$F(X) := 2 \cdot X - X^2$$

$$\int_0^2 (2 \cdot X - X^2)\, dX$$

$$\frac{4}{3}$$

Proposición

$$\int_2^{3.5} (2 \cdot X - X^2)\, dX$$

$$-\frac{27}{8}$$

AREA

$$\frac{4}{3} - -\frac{27}{8}$$

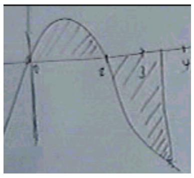
$$\frac{113}{24}$$

4.708333333

DEFINIMOS EL INTERVALO DEL ÁREA QUE VAMOS A CALCULAR, EN ESTE CASO [0,3.5], CALCULAMOS LA INTERGRAL DE F(X)=2*X-X^2 EN EL INTERVALO [0,2] Y CALCULAMOS LA INTERGRAL DE F(X)=2*X-X^2 EN EL INTERVALO [2,3.5], LUEGO AL CONSEGUIR EL ÁREA, LAS SUMAMOS Y LA SUMA DEL ÁREA DEBE DAR POSITIVA, EN CASO DEL ÁREA EN EL INTERVALO [2,3.5]LA MULTIPLICAMOS POR -1 PARA QUE NOS DE POSITIVA

(ver anexo 17, p. 195)

Escenario 3. Pregunta 2.



15) I: *La pregunta dos del cuestionario pide calcular* (dibuja la gráfica en la pizarra) *el área de una región ¿Podrían resolver esa cuestión de la forma más sencilla posible?*

16) E*: Se me hace más fácil con integrales. Sacar la Integral Definida de cero a 2 y después de 2 a 3,5. Esta área me dará negativa y multiplico por* -1 (señala la región bajo el eje *OX*) *luego lo sumo al resultado de esta área* (señala la región sobre el eje *OX*) *número y número y calculo la integral, el área de esta y ésta* (señala las dos regiones). *¿Lo puedo hacer aquí?*

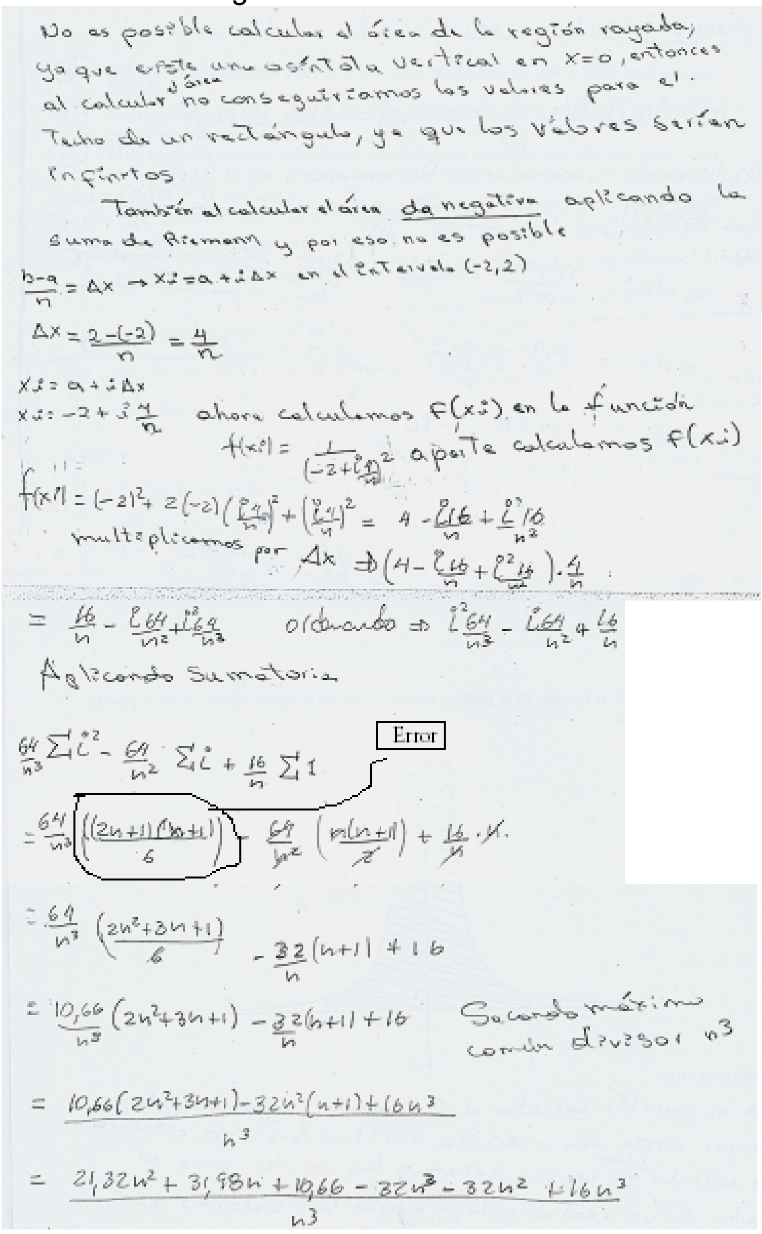
17) I: *Sí.*

18) E: Observa en el cuestionario y copia en la pizarra la expresión $f(x) = 2x - x^2$ $[0,\ 3{,}5]$ *El dominio de f(x) son todos los reales, por ser una función polinómica* (escribe Dom. f(x): R). (Escribe) *Calculo la integral de f(x) en* $[0,2]$ $\int_0^2$.

19) I*: Lo que estás haciendo ahora es calcular la integral entre cero y dos.*
20) E*: ¿Tengo que ir haciéndolo paso a paso?*
21) I: *Conviene que lo digas.*
22) E*: Saco primero el dominio de la función en todos los reales. El error que cometí en el parcial era que calculé la integral, no me percaté del dominio, cuando es lo importante y esencial. Como el dominio son todos los reales por ser una función polinómica, ahora calcularé la Integral Definida en el intervalo cero dos* (señala el intervalo y luego señala en la gráfica el segmento correspondiente) *que dará positiva por estar sobre el eje OX. Calculo la integral en el intervalo dos cero de f(x) que es 2x-x^2* (Escribe $\int_0^2 2x-x^2 = \frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3} = x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 =$) *una vez que saqué la antiderivada de la integral, sustituyo los valores entre dos y cero, aquí en "a b"* (señala el intervalo [0,2]) *como uno calcula la integral es el intervalo "b" menos el "a"*(señala los límites de integración, parece que se refiere a la evaluación de la antederivada en b y a) completa el cálculo y le da 4/3 y dice *Este es el valor de la integral en dos cero. Calcularé el valor de la integral en el intervalo dos tres coma cinco* (señala la región bajo el eje *OX*) escribe *Calculo la integral de f(x) en* $[2, 3.5]$*, ahora voy a seguir calculando la integral, ahora definida en otro intervalo* (señala la región bajo el eje *OX*) *que esta bajo el eje OX, dos a tres coma cinco* (cambia 3.5 por 7/2 y escribe $\int_2^{7/2} 3x-x^2 = \frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3} = x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_2^{7/2} = ($) usa la calculadora para realizar los cómputos y le da como resultado $\frac{49}{4}-\frac{343}{8}-\frac{4}{3}$ (resultado incorrecto).
23) I: *Bueno, lo dejamos así. Ahora te quiero preguntar ¿por qué en el examen no lo hiciste así?*
24) E*: Porque creí que lo podía sacar por la suma de Riemann. Como vi la suma de Riemann, se me hace complicado. No pensé, los nervios quizás, o también yo leí el examen y está un poco complicado, uno de repente ve el examen y está complicado se bloquea muchas veces, no piensa; ahora a penas uno sale del examen uno dice por qué no lo hice de esta manera, lo pude hacer de 30 mil formas. Yo me mecanicé, vi una gráfica, Riemann, sólo pensé en el método de Riemann.* Rectifica lo cómputos y termina de calcular la integral, luego suma los dos resultados de las dos integrales y le da 113/24 y dice *"Y ésta es el área de la región rayada"* (señala la gráfica) (ver anexo 17, p. 196).

En la pregunta 8, el estudiante E3 comenta que "*No es posible calcular el área de la región rayada, ya que existe una asíntota vertical en* $x = 0$*, entonces al calcular el área no conseguimos los valores para el techo de un rectángulo, ya que los valores serían infinitos",* a pesar de este comentario aplica aproximación numérica para calcular el área y comenta que al aplicar la suma de Riemann, el área es negativa (el error en el resultado es debido a que se equivocó al sustituir $\sum i^2$ por su suma) y debido a esto no es posible calcular el área. En el escenario 2 escribe que las asíntotas son $x = -1$ y $x = 1$. El estudiante a pesar de que está consciente de que el área no es calculable, cree que la aproximación numérica resuelve el problema. El resultado negativo, la puede llevar a pensar que éste no coincida con lo que observa en la gráfica (la región está sobre el eje *OX*). El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 1. Pregunta 8.



No es posible calcular el área de la región rayada, ya que existe una asíntota vertical en $x=0$, entonces al calcular el área no conseguiríamos los valores para el techo de un rectángulo, ya que los valores serían infinitos

También al calcular el área da negativa aplicando la suma de Riemann y por eso no es posible

$\frac{b-a}{n} = \Delta x \rightarrow x_i = a + i\Delta x$ en el intervalo $(-2,2)$

$\Delta x = \frac{2-(-2)}{n} = \frac{4}{n}$

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = -2 + i\frac{4}{n}$ ahora calculamos $f(x_i)$ en la función $f(x_i) = \frac{1}{(-2+i\frac{4}{n})^2}$ aparte calculamos $f(x_i)$

$f(x_i) = (-2)^2 + 2(-2)\left(\frac{i4}{n}\right) + \left(\frac{i4}{n}\right)^2 = 4 - \frac{i16}{n} + \frac{i^2 16}{n^2}$

multiplicamos por $\Delta x \Rightarrow \left(4 - \frac{i16}{n} + \frac{i^2 16}{n^2}\right)\cdot\frac{4}{n}$

$= \frac{16}{n} - \frac{i64}{n^2} + \frac{i^2 64}{n^3}$ ordenando $\Rightarrow \frac{i^2 64}{n^3} - \frac{i64}{n^2} + \frac{16}{n}$

Aplicando Sumatoria

Error

$\frac{64}{n^3}\sum i^2 - \frac{64}{n^2}\sum i + \frac{16}{n}\sum 1$

$= \frac{64}{n^3}\left(\frac{(2n+1)(n+1)}{6}\right) - \frac{64}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{16}{n}\cdot n$

$= \frac{64}{n^3}\left(\frac{2n^2+3n+1}{6}\right) - \frac{32}{n}(n+1) + 16$

$= \frac{10,66}{n^3}(2n^2+3n+1) - \frac{32}{n}(n+1) + 16$ Sacando máximo común divisor n^3

$= \frac{10,66(2n^2+3n+1) - 32n^2(n+1) + 16n^3}{n^3}$

$= \frac{21,32n^2 + 31,98n + 10,66 - 32n^3 - 32n^2 + 16n^3}{n^3}$

Aplicando suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{21,32n^2+31,98n+10,66-32n^3-32n^2+16n^3}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{\frac{21,32n^2}{n^3}+\frac{31,98n}{n^3}+\frac{10,66}{n^3}-\frac{32n^3}{n^3}-\frac{32n^2}{n^3}+\frac{16n^3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{\cancel{\frac{21,32}{n}}^{0}+\cancel{\frac{31,98}{n^2}}^{0}+\cancel{\frac{10,66}{n^3}}^{0}-32-\cancel{\frac{32}{n}}^{0}+16}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = -32+16 = -16$$

(ver anexo 17, pp. 203-204)

Escenario 2

NO SE PUEDE CALCULAR EL ÁREA DE LA REGIÓN RAYADA, POR QUE EXISTE UNA ASÍNTOTA EN X=1 Y X=-1, POR LO TANTO HAY DISCONTINUIDAD Y PARA PODER CALCULAR EL ÁREA DEBE SER CONTINUA EN TODO SU DOMINIO O EN TODO EL INTERVALO A EVALUAR.

(ver anexo 17, p. 204)

En la pregunta 9, escribe que $\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+3dx + \int_{-1}^{2} x^2dx + \int_{2}^{3} -x+4dx$, comete errores al calcular la primitiva de la segunda y tercera integral, obtiene un valor negativo para la tercera integral, suma los resultados sin cambiarle el signo al valor negativo. En el escenario 2; plantea y calcula tres integrales, de igual manera que en el escenario 1, al final suma los resultados, el resultado de la primera integral es negativo y no le cambia el signo. A pesar de que en la pregunta 8, en la que se presentaba una gráfica con discontinuidad, utilizó aproximación numérica para tratar de calcular el área, en esta pregunta utiliza integrales y la regla de Barrow. Puede que en la pregunta 9 realice una transferencia de lo aprendido en la instrucción, por ejemplo, cuando menciona el "techo" del rectángulo, y, que la pregunta 9 no considera la continuidad en el momento de aplicar la regla de Barrow. Al no cambiar el signo al resultado negativo, puede que no relacione el área con la integral y reaccione a un proceso meramente algorítmico. A continuación presentamos los extractos correspondientes.

Escenario 1. Pregunta 9.

Calculo de la integral definida en [-2,3]

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+3dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} -x+4\,dx. \qquad \frac{-8+9}{3} = \frac{1}{3}$$

Error

Aparte

$$\int_{-2}^{-1}(-x^2+3)dx = -\frac{x^3}{3}\boxed{+3}+c\Big|_{-2}^{-1} -\frac{(-1)^3}{3}+3-\left(-\frac{(2)^3}{3}+3\right) = \frac{+1}{3}+3-\left(-\frac{8}{3}+3\right) =$$

$$\frac{1+9}{3}$$

$$= \frac{10}{3}-\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}-\frac{1}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \Big|_{-1}^{2} \frac{(2)^3}{3} - \left(\frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\int_{2}^{3} -x + 4\,dx = -\frac{x^2}{2} \underbrace{\boxed{+4}}_{\text{Error}} + C \Big|_{2}^{3} -\frac{(3)^2}{2} + 4 - \left(-\frac{(2)^2}{2} + 4\right) = -\frac{9}{2} + 4 - (-2+4)$$

$$= \frac{-9+8}{2} - (2) = -\frac{1}{2} - 2 = \frac{-1-4}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2 + 3\,dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} -x + 4\,dx$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \frac{9}{3} + \frac{9}{3} + \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{18}{3} - \frac{5}{2} = \frac{36-15}{6} = \cancel{\frac{21}{6}} = \frac{7}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \frac{7}{2}$$

(ver anexo 17, p. 204)

Escenario 2. Pregunta 9.

ESTIMANDO EL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN EL INTERVALO [-2,3]

$F(X) = -X^2 + 3$

$\int_{-1}^{-2} (-X^2 + 3)\,dX$

$-\frac{2}{3}$

-0.6666666666

$F(X) = X^2$

$\int_{-1}^{2} X^2\,dX$

3

$F(X) = -X + 4$

$\int_{2}^{3} (-X + 4)\,dX$

$\frac{3}{2}$

1.5

LA SUMA DE TODOS LOS RESULTADOS, ES EL RESULTADO DE LA INTEGRAL DE F(X) DEFINIDA EN EL INTERVALO [-2,3]

$-\frac{2}{3} + 3 + \frac{3}{2}$

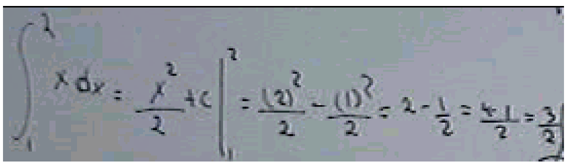
$\frac{23}{6}$

(ver anexo 17, p. 205)

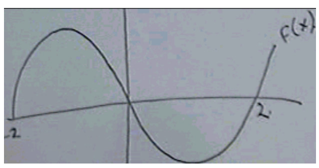
En la pregunta 1, el estudiante comenta que explicaría el significado de $\int_a^b f(x)dx$ utilizando un ejemplo con una función particular en la que le calcule la primitiva y la evalúe en los límites de integración, no menciona la condición de continuidad. Por insistencia del entrevistador elabora un gráfico, que utiliza para ilustrar cómo daría la explicación; aunque puntualiza que la integral sirve "*para calcular el área" y* la curva que dibuja tiene una porción bajo el eje *OX*, no menciona el signo de la integral. En otra parte de la entrevista, al proponerle un ejemplo con la función coseno, comenta con detalle el cálculo de la región sobre y bajo el eje *OX* y el signo que tendrá la integral que calcula el valor de la región bajo el eje *OX*. En la pregunta 2 y 9, se observó que al calcular el área de una región y obtener un valor negativo para la integral, no le cambia el signo; en la entrevista rectifica el error y menciona este cambio. Se nota que, para el estudiante E3, la Integral Definida está asociada a un proceso de cálculo algorítmico. A continuación se muestra un extracto de la entrevista.

Escenario 3. Pregunta 1.

1) I*:* Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la Integral Definida entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2) E*: La integral de f(x) dx sería la antiderivada de f(x) en un intervalo definido de "a" a "b".* *Escribe en la pizarra La integral de f(x) en el intervalo* $[a,b]$ *es la antiderivada de f(x) más la constante y obtenemos que* $\int_a^b f(x)dx = F(x) + C\Big|_a^b$
3) I: *Dame un ejemplo*
4) E*: Un ejemplo.* Plantea y resuelve una integral



5) I: *¿Y dónde está la C que ha desaparecido?*
6) E: *Esa es un constante que podemos tomar valor cero, uno; o sea en este caso cero y no afecta nada.*
7) I: *¿Eso te sirve para una aplicación geométrica o algo con la integral?*
8) E*: ¿Qué si la integral me sirve para una aplicación geométrica? Para calcular el área en una gráfica, en una curva. Si tengo la gráfica, quiero calcular la Integral Definida, suponiendo -2 a 2 puedo calcular el área esta* (señala la región a la izquierda del eje Y) *con una función f(x) igual a*

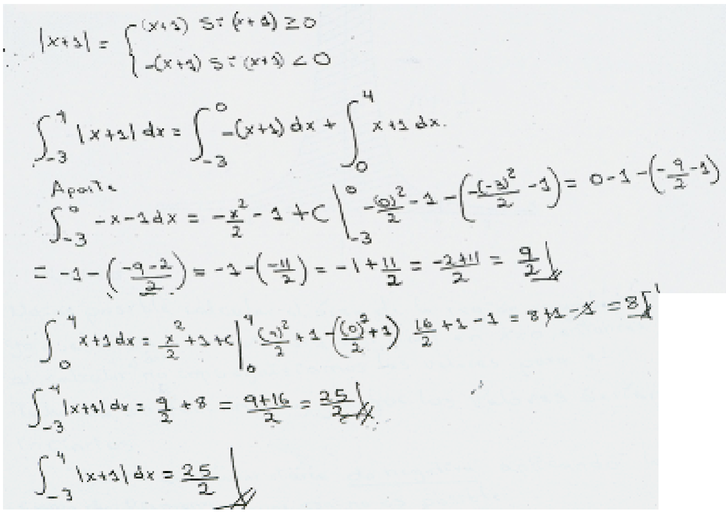


9) I*: Coseno de x, por ejemplo.*
10) E*: Sí.* (Escribe $f(x) = \cos x$). *Calculando la integral de coseno de x desde -2 a cero, este intervalo* (señala el intervalo en el eje *OX*) *y restándosela menos la integral de ésta* (señala la región bajo el eje *OX*) *porque esta integral nos da negativa, y será un área*

negativa y luego la sumamos, ésta la multiplicamos por -1 (señala la región bajo el eje *OX*) *porque es menos, pero es la suma de dos áreas y la suma de dos áreas siempre nos da positiva, para eso es la integral, para calcularla* (ver anexo 17, p. 194).

En la pregunta 3 (segundo grupo), el estudiante E3 define la función a trozos, plantea la igualdad $\int_{-3}^{1}|x+1|\,dx=\int_{-3}^{0}-(x+1)\,dx+\int_{0}^{4}x+1\,dx$, se equivoca al escribir cero como límite de integración y calcula erróneamente la primitiva en cada integral, por ejemplo: $\int_{-3}^{1}-(x+1)\,dx=-\frac{x^2}{2}-1+C\Big|_{-3}^{0}$. En la entrevista justifica la equivocación mencionando que *"Se me olvidó despejar x y x quedaba mayor o igual que -1…".* Por insistencia del entrevistador representando varios puntos traza dos semirrectas a través de ellos. Por iniciativa propia propone calcular la integral utilizando triángulos, la manera de explicar el procedimiento nos hace pensar que su respuesta se debe a información suministrada por algún estudiante previamente entrevistado. Se observa que el estudiante ante un problema planteado con un registro algebraico, lo resuelve algebraicamente, sin plantearse una representación gráfica.

Escenario 1. Pregunta 3.



$|x+1| = \begin{cases} (x+1) \text{ si } (x+1) \geq 0 \\ -(x+1) \text{ si } (x+1) < 0 \end{cases}$

$\int_{-3}^{4}|x+1|\,dx = \int_{-3}^{0}-(x+1)\,dx + \int_{0}^{4}x+1\,dx.$

Aparte

$\int_{-3}^{0}-x-1\,dx = -\frac{x^2}{2}-1+C\Big|_{-3}^{0} -\frac{(0)^2}{2}-1-\left(-\frac{(-3)^2}{2}-1\right) = 0-1-\left(-\frac{9}{2}-1\right)$

$= -1-\left(\frac{-9-2}{2}\right) = -1-\left(-\frac{11}{2}\right) = -1+\frac{11}{2} = \frac{-2+11}{2} = \frac{9}{2}$

$\int_{0}^{4}x+1\,dx = \frac{x^2}{2}+1+C\Big|_{0}^{4} \frac{(4)^2}{2}+1-\left(\frac{(0)^2}{2}+1\right) \quad \frac{16}{2}+1-1 = 8+1-1 = 8$

$\int_{-3}^{4}|x+1|\,dx = \frac{9}{2}+8 = \frac{9+16}{2} = \frac{25}{2}$

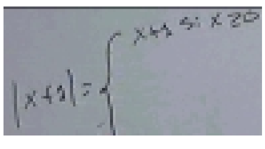
$\int_{-3}^{4}|x+1|\,dx = \frac{25}{2}$

(ver anexo 17, p. 199).

Escenario 3. Pregunta 3.

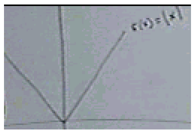
25) I: *En la pregunta 3 se te pide calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto x más 1 diferencial de x* (escribe $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$)

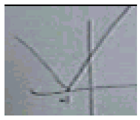
Te pregunto si podrías resolver gráficamente esa integral. En la prueba ¿Cómo la resolviste?



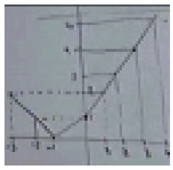
$|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

26) E*: En el examen la resolví numéricamente pero también me equivoqué, como es el valor absoluto de x más 1.* (Escribe) *el valor absoluto de x más 1 será igual a x más 1*, *si x es mayor o igual que cero. Se me olvidó despejar x y x me quedaba mayor o igual que -1* (borra todo lo que ha escrito). *¿Tengo que resolverla toda?*
27) I*: Te pido que me la resuelvas gráficamente.*

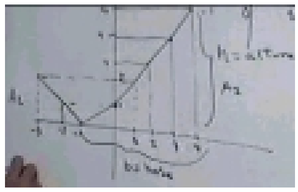




28) E: *Esta es la gráfica del valor absoluto de x y la gráfica del valor absoluto de x más 1, trasladamos la gráfica una unidad hacia la izquierda, se supone que acá es simétrica con respecto al eje y la gráfica de x más 1 sería así, cuando trasladamos una unidad hacia la izquierda me quedaría en -1*, *entonces le voy a dar algunos valores para que quede exacta la gráfica* (borra la ultima gráfica) *porque tengo que sacar la integral gráficamente en el intervalo -3 y 4, si la traslado una unidad, para x sea igual a cero* (observa el integrando y escribe -1 en un sistema de ejes cartesianos) *empiezo a dar valores de -3 hasta 4, en -3, -3 más 1 me da -2, valor absoluto de -2 es 2* (representa varios puntos, murmura, parece que calcula la imágenes de varios puntos, luego traza la gráfica)



…
35) I*: Y ahora ¿Cómo resolverías el problema? Porque el problema en principio no era pintar la curva sino calcular la integral en -3 a 4.*



36) E: *Puedo calcular la Integral Definida aquí* (señala la región a la izquierda del punto angular) *desde -3 a -1 y desde -1 a 4. Pero, eso es una pregunta, uno puede calcular, cuando uno calcula un área también puede hacerlo si aquí hay un triángulo y aquí tengo otro triángulo* (señala las dos regiones a ambos lados del punto angular) *busco la base, la altura* (señala la gráfica) *y puedo calcular el área, que es la integral en esa gráfica. Como las dos están sobre el eje OX, las dos me darían positiva….*Calcula el área y obtiene y dice $\frac{29}{2}$ *será la integral de la región, de la gráfica en este intervalo desde -3 a 4* (señala las dos regiones en la gráfica).
(ver anexo 17, pp. 197-198)

En la pregunta 4 (escenarios 1 y 2), rehace el procedimiento y concluye que la proposición es verdadera. En la entrevista cambia de opinión y menciona que "*en 1 hay una asíntota vertical* (señala el integrando) *y, por tanto, hay una discontinuidad".* No logra explicar el resultado obtenido en *DERIVE,* argumenta que "*el 1 no estaba en el dominio"*. Muestra la gráfica que aparece en la pregunta 9 y dice "*La integral no la podíamos calcular en un intervalo definido, tomaría valores más grande* (mueve el brazo hacia arriba), *más grande y no encontraríamos el punto donde está definida la integral".* Se observa que el estudiante logra dar argumentos basados en el estudio de la función (integrando); así como haciendo referencia a una representación gráfica, pero se nota inseguridad en sus planteamientos. El siguiente extracto así lo muestra.

Escenario 3. Pregunta 4.

51) I: *La pregunta seis pedía estudiar si era verdadero o falso que* $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -2$

52) E*: Yo revisé lo que está escrito y dije es verdadero, pero como en el ejercicio anterior hay que revisar el dominio. No se podía calcular porque teníamos que calcular la integral desde cero a dos y en 1 tiene una asíntota vertical* (señala el integrando) *y por tanto hay una discontinuidad.*

53) *I: ¿Y entonces no se puede calcular la integral?*

54) *E: No la puedo calcular porque tiene que ser continua en todo el intervalo y con la asíntota en 1 quedaría así* (mueve la mano sobre la pizarra como trazando la gráfica de la curva), *no se podía calcular por la asíntota vertical.*

55) I*: Y la hiciste con el DERIVE.*

56) E*: Sí con el DERIVE.*

57) I*: ¿Y qué te daba con el DERIVE?*

58) E*:* Observa la prueba de laboratorio y dice *en el DERIVE la hice mal.*

59) I*: ¿Por qué la hiciste mal en el DERIVE?*

60) E*: Ya va. Porque calculé la integral y le di el intervalo dos cero, pero yo tenía que darme cuenta que tenía una asíntota y no podíamos calcularla de dos cero. Con el DERIVE me da un valor -1 pero.*

61) I*: ¿Qué crees que está mal?*

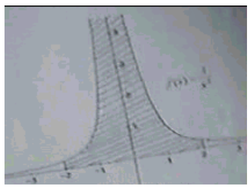
62) E*: Los datos que introduje en DERIVE. No sé. Incluso dije que era verdadero.*

63) I*: ¿Entonces qué ocurre? ¿Está mal el DERIVE?*

64) E*: No, el DERIVE no está mal, está mal el planteamiento que hice. No lo podía integrar porque el 1 no estaba en el dominio de la función, porque cuando hacemos la gráfica que esta* (busca en la prueba la gráfica que aparece en la pregunta 9)

65) I*: ¿Entonces es necesario hacer la gráfica para verlo primero o no?*

66) E*: Sí, es más fácil. La gráfica es la misma sólo que trasladada* (muestra la gráfica que aparece en la pregunta 9) *una unidad hacia la derecha y la asíntota vertical está en cero* (señala la gráfica) *y en ésta está en 1. La integral no la podíamos calcular en un intervalo definido, tomaría valores más grandes* (mueve el brazo hacia arriba), *más grandes y no encontraríamos el punto donde está definida la integral* (ver anexo 17, p. 199).



En la pregunta 7, el estudiante E3 comenta "*Yo uso DERIVE más que todo cuando tengo gráficas, regiones bajo la curva o Simpson, bueno Simpson lo entendí gracias a DERIVE".* El estudiante asocia el planteamiento de un problema, en donde se le proporciona un registro gráfico, con la aplicación de técnicas dadas en el curso, considerando que sería la forma más aceptable. Responde a la pregunta graficando la función en *DERIVE*, estableciendo los cortes de la curva con los ejes por observación de la gráfica, plantea las integrales y las resuelve, justifica por qué el resultado de la integral que calcula la medida de la región bajo el eje *OX* tiene valor negativo. La manera de explicar el procedimiento nos hace sospechar que se debe a información suministrada por algún estudiante previamente entrevistado. El extracto de la entrevista que presentamos lo muestra.

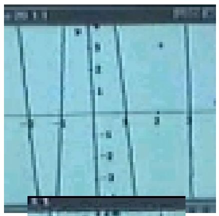
Escenario 3. Pregunta 7.

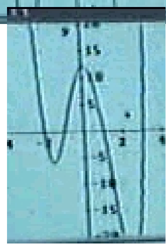
90) I*: En la siguiente pregunta te pido que calcules el área que forma con el eje OX la función* (escribe en la pizarra $f(x)=2x^4-2x^3-14x^2+2x+12$ calcular el área que forma con el eje *OX*).

91) E*: ¿Puedo usar el DERIVE?*

92) I*: Puedes usar el DERIVE desde la primera pregunta. ¿Por qué no lo has usado antes?*

93) *E: Porque DERIVE me ayuda a resolver las integrales más fáciles. Yo uso DERIVE más que todo cuando tengo gráficas, regiones bajo la curva o Simpson, bueno Simpson lo entendí gracias a DERIVE.*



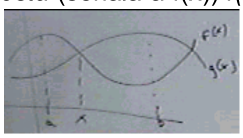


94) E: Escribe la expresión algebraica de la función en la pantalla de *DERIVE.* Luego grafica la curva, le hace varios ZOOM y comenta *Calcularía el área, calcularía la integral desde -2 hasta -1* (estima los límites de integración por observación de la gráfica, en la pantalla de *DERIVE*) *y desde -1 a 1, de 1 a 3, calculando la integral en estas regiones* (señala cada región*).* Escribe en la pantalla de *DERIVE calculando la Integral Definida de f(x) en el intervalo [-2,-1]* (Plantea en la pantalla de *DERIVE* la integral), *la integral de ésta* (señala la región en [-2,-1]) *o sea el área en esta región me da -3.666666, me da negativa porque está debajo del eje OX. Voy a calcular ahora la Integral Definida desde -1 hasta 1, que es esta parte que está sobre el eje OX;* escribe en la pantalla *Calculando la Integral Definida de f(x) en el intervalo [-1,1];* Plantea en la pantalla de *DERIVE* la integral y comenta *da positiva porque está sobre el eje OX y da 15.4666666.* Escribe en la pantalla *Calculando la Integral Definida de f(x) en el intervalo [1,3]* (ver anexo 17, pp. 202-203).

En el último grupo de preguntas (5 y 6), en los escenarios 1 y 2 las respuestas del estudiante E3 están basadas en aspectos generales, por ejemplo, basa la veracidad de la proposición en la pregunta 5 en el Teorema Fundamental del Cálculo. Proporciona ejemplos de funciones particulares que cumplen con las proposiciones. En la entrevista utiliza varias representaciones gráficas para ilustrar la veracidad de la proposición 5 y un contraejemplo de la proposición 6. Para la proposición 6 dibuja una gráfica similar a la del estudiante E1, en la que muestra que a pesar de que la integral de f sea mayor que la de g "*no sabemos cómo se comporta f(x) y g(x)…".* Para ilustrar la veracidad de la proposición 5 dibuja dos curvas de funciones positivas y traduce en palabras la proposición. El entrevistador le propone una gráfica, en la que una de las curvas (la de g) está bajo el eje *OX*, y le pregunta si la proposición 5 se sigue cumpliendo, el estudiante E3 responde que sí, argumenta, al referirse a la integral de g(x), "*porque este valor dará negativo".* A pesar que se nota que tiene información suministrada por algún estudiante anteriormente entrevistado, las explicaciones dadas por el estudiante E3 evidencian dominio en su respuesta. Interpreta adecuadamente las proposiciones y logra distinguir diferentes situaciones que pueden presentarse al ilustrar la relación de dos funciones y sus integrales. El siguiente extracto de la entrevista muestra lo anteriormente descrito.

Escenario 3. Preguntas 5 y 6.

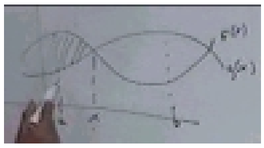
68) I*: Las preguntas que decían que si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: si f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral entre a y b de f(x) diferencial de x es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) diferencial de x, preguntaban que si esto era verdadero o falso* (escribe la proposición en la pizarra) *y también el recíproco, es decir que si la integral entre a y b de f(x) diferencial de x es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) diferencial de x podemos afirmar que f(x) es mayor o igual que g(x)* (escribe la proposición en la pizarra). *Se te pregunta ¿Podemos afirmar que esto* (señala la proposición 5), *podemos afirmar esto?* (señala la proposición 6) *¿Por qué? dijiste que eran verdaderas.*



69) E*: Verdaderas. Ésta si dije que era verdadera* (señala la proposición 5) *porque si tenemos cualquier función f(x), tenemos la función f(x), partimos de ésta* (señala a f(x)) *f(x) es mayor que g(x), cuando tenemos estas dos funciones en el mismo intervalo "a b"* (señala los límites de integración) *la integral de f(x) en el intervalo "a b" será mayor que la integral de g(x) en el intervalo "a b". Ésta* (se refiere a la proposición 6) *yo dije en el parcial que era verdadera, pero tenía mucha confusión, en ésta yo estaba segura* (se refiere a la proposición 5) *pero en ésta no estaba segura* (se refiere a la proposición 6). *Lo que hice era pensar que si tenía una función y tenía su integral* (señala la hipótesis de la proposición 5 y la hipótesis de la proposición 6) *esta integral sería mayor* (señala la tesis de la proposición 6). *Dije que era exactamente lo mismo* (parece que se refiere a que las dos proposiciones son equivalentes) *pero invertí el orden, dije que si tenía esto* (se refiere a la hipótesis y la tesis de la proposición 6) *la integral de ésta* (se refiere la integral de f(x) y la de g(x) en la proposición 6) *entonces f(x) sería mayor o igual que g(x)* (señala la tesis de la proposición 6). *Pero f(x) puede ser mayor en el intervalo "a b"* (señala el integrando f(x) en la proposición 6) *¿Lo puedo explicar con una gráfica?*

70) I*: Sí.*

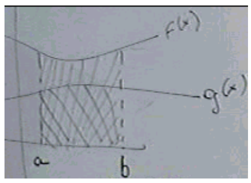
71) E: Dibuja



72) I*: ¿Ese ejemplo es con respecto a cuál proposición?*

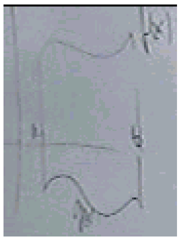
73) E*: Con la segunda* (se refiere a la proposición 6). *Yo digo que en "a" ésta es f y ésta g* (señala las curvas en la gráfica) *y éste sea un punto "c" o un punto x* (se refiere al que identifica como x en la gráfica), *la integral de f y g en "a b"* (raya la región entre f y g) *la integral en este punto en "a x" f es mayor que la integral de g(x). Pero en este punto* (se refiere a la región entre x y b) *la integral de f(x) es menor que la de g(x). No sabemos como se comporta f(x) y g(x) para asegurar que en ese intervalo "ab" siempre será mayor la f de x que la g de x.*

74) I*: Entonces tendrás que decirme ¿Cuál es la integral de f(x)? ¿Quién es la integral de g(x)? Y luego comparar f(x) y g(x).*



75) E*:* Borra la gráfica y grafica la integral de *f(x)* y dice *sería toda esta región como en la pregunta número 5* (señala la proposición 5*) que f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral de f(x) en el intervalo "ab" es mayor que la integral de g(x) en el intervalo "ab". La integral de f(x) en este intervalo "ab", como f(x) es mayor que g(x) será esto* (se refiere a la región rayada en la gráfica anterior). *Y la integral de g(x) en ese mismo intervalo será ésta, donde vemos que la integral de f(x) es mayor que la integral de g(x) en el intervalo "ab".*

76) *I: Espera un momento, vamos a ver, eso es para justificar eso* (se refiere a la proposición 5). *Si ahora considero f(x) entre a y b y considero g(x) entre a y b. Se sigue cumpliendo que f(x) es mayor que g(x) ¿no?*



77) *E: Sí.*
78) *I: ¿Será que la integral en a y b de f(x) es mayor que la integral...?*
79) *E: De g(x) en "a b", porque este valor dará negativo* (señala la región bajo el eje *OX*, correspondiente a la región limitada por la curva de g y el eje *OX*) *y éste dará positivo* (señala la región sobre el eje *OX*, correspondiente a la región limitada por la curva de f y el eje *OX*) *esta será mayor* (señala la región sobre el eje *OX*) *que la integral de ésta* (señala la región bajo el eje *OX*) (ver anexo 17, pp. 201-202).

6.4.4. El estudiante E4

Analizando las acciones realizadas por el estudiante E4 en el primer grupo de preguntas, específicamente en la pregunta 2 (escenario 1) procede de forma semejante a los pasos seguidos en las Prácticas de Laboratorio, en las que se aplicó el Programa de Utilidades. Inicia el procedimiento manifestando que calculará el área de la región rayada utilizando rectángulos inferiores (uno de los métodos implementados en las Prácticas de Laboratorio, con el Programa de Utilidades). Separa la región en dos. Para la porción de curva sobre el eje *OX* en $[0, 2]$ realiza una partición del intervalo en seis subintervalos y establece los respectivos subintervalos; dibuja la porción de curva y seis rectángulos inferiores (este tipo de rectángulos es el que se obtiene al aplicar el Método Gráfico del Programa de Utilidades); calcula el área de cada rectángulo, multiplicando la longitud de cada subintervalo por la imagen del respectivo valor del extremo del subintervalo (se observa que el primer y el último de los resultados le da cero, este tipo de resultado lo obtendría si aplicara el Programa de Utilidades, Método Numérico, lo que no le resulta extraño al estudiante); suma los resultados obtenidos y escribe $A_1 = 0{,}318622333$. Procede de igual forma con la porción bajo el eje *OX* y le da como resultado $A_2 = |-2{,}734375|$. Para el resultado total suma el primero más el valor absoluto del segundo. En lo expuesto por el estudiante se destacan varios aspectos relevantes, interpreta el problema realizando un tratamiento de la gráfica, se percata que existen dos áreas a calcular, a pesar que el valor de la segunda le resulta negativo le aplica valor absoluto para obtener un valor positivo, en los pasos que sigue se observa que asemejan a los de las Prácticas de Laboratorio, relacionados con el estudio de la Integral Definida, en las que se implementó el Programa de Utilidades; traduce el proceso geométrico al numérico de manera correcta. Lo observado en cuanto al valor cero para el área del primer y último rectángulos de la región sobre el eje *OX*, se puede atribuir más a limitaciones de procedimiento del Programa de Utilidades que a un error del estudiante. El siguiente extracto muestra lo anteriormente descrito.

Escenario 1. Pregunta 2.

Voy a calcular el area rayada por el metodo de Región Rectangulo Inferior sobre X para el intervalo [0, 2] dividida en n rectangulos e igualmente para el intervalo [2, 3,5]

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

hacemos las respectivas particiones:

Rectangulo 1 (0, 1/3) [0, 1/3]
2 (1/3, 2 1/3) [1/3, 2/3)
3) (2 1/3, 3 1/3). (2/3, 1)
4) (3 1/3, 4 1/3). (1, 4/3).
5) (4 1/3, 5 1/3) (4/3, 5/3)
6) (5 1/3, 6 1/3) (5/3, 2).

Rectangulo 1 Δx f(0) = 0 f(0) = 0
2 Δx f(1/3) = 0,1837 f(1/3) = 0,5511
3 Δx f(2/3) = 0,291852 f(2/3) = 0,8844
4 Δx f(4/3) = 0,294063 f(4/3) = 0,8911
5 Δx f(5/3) = 0,186252 f(5/3) = 0,5644
6 Δx f(2) ≈ 0

area en el intervalo [0, 2]:

$\Delta x[f(0) + f(1/3) + f(2/3) + f(4/3) + f(5/3) + f(2)$

$\frac{1}{3}[0 + 0,1837 + 0,291852 + 0,294063 + 0,186252 + 0]$

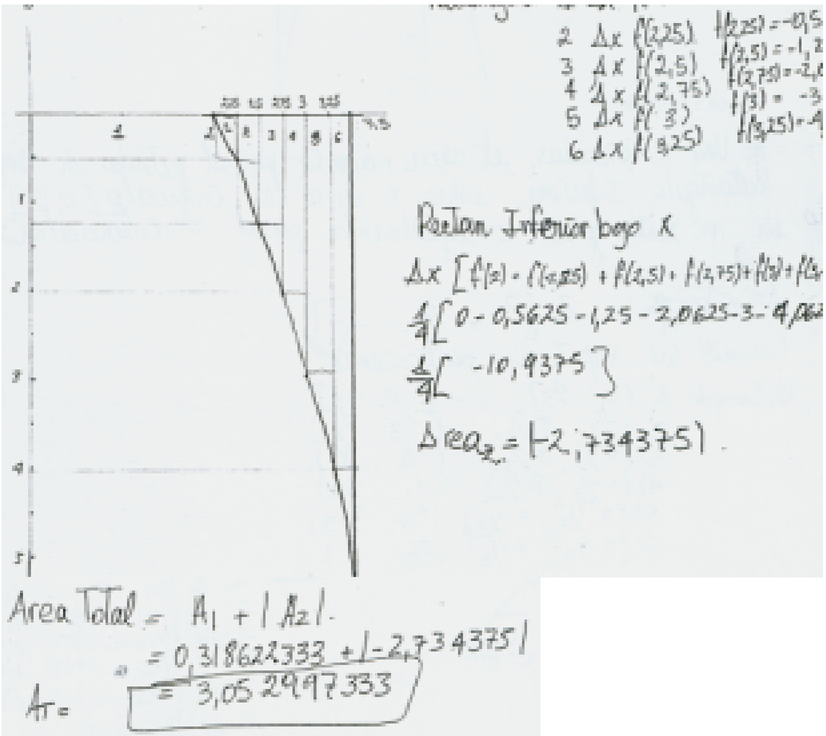
$\frac{1}{3}[0,955867]$

$A_1 = 0,318622333$

Ahora tomamos el intervalo [2, 3,5] Vamos a estudiar este interva

$\Delta x = \frac{3,5-2}{6} = 0,25$

Rectangulo 1 Δx f(2) f(2) = 0

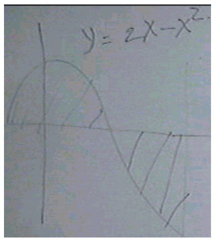


(ver anexo 17, p. 207)

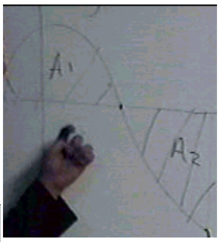
En la entrevista (escenario 3), mezcla la explicación del problema 1 con la del 2, sin que se le plantee directamente el problema, el estudiante E4 lo expone y explica cómo lo resolvería, se apoya en una gráfica que elabora en la pizarra; menciona que debe establecer los cortes de la curva con el eje *OX*, que puede utilizar *DERIVE* para hallarlos, después de establecer los intervalos usaría "*cualquier método de rectángulos inferior, superior, extremo izquierdo, extremo derecho y ahí nos va dar tal valor*" (aquí realiza una transferencia del procedimiento seguido en Prácticas de Laboratorio). Luego indica, al igual que en el escenario 1, que el área total es la suma del área A_1 más $\left|-A_2\right|$. El siguiente extracto así lo muestra.

Escenario 3. Pregunta 2.

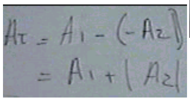
> 9) I*: Si tienes, por ejemplo, una función cualquiera, calculas la integral, ¿Te da el área siempre bajo la curva? Si la función es negativa, por ejemplo.*
> 10) E*: Tengo que sacarle el valor absoluto al área para que me dé positiva, porque ningún área puede ser negativa. Puedo hacerlo aquí* (señala la pizarra).
> 11) I*: Hazlo.*
> 12) E: *Puedo tener esto* (dibuja una curva en la pizarra), *tú me dices que calcule el área de la región rayada, supón que sea "y" es* (no completa la frase).
> 13) I: *Dos x menos x cuadrada.*

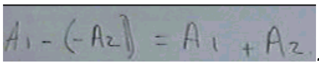


14) E: Completa la gráfica. *Tenemos que buscar los puntos exactos donde corta al eje OX* (dibuja los puntos de corte de la curva con el eje *OX*), *para calcular exactamente, con el programa DERIVE, para calcular exactamente donde corta exactamente al eje OX, después que tenemos los dos intervalos, podemos usar cualquier método de rectángulos inferior, superior, extremo izquierdo, extremo derecho y ahí nos va dar tal valor. Entonces decimos que el área total, éste es el área 1 y ésta es el área 2* (escribe en cada región la identificación). *Cuando es la región es la suma de todas* (señala las dos regiones*); pero cuando es área, un área nunca puede ser negativa* (señala la región bajo el eje *OX*) *le sacamos el valor absoluto y le ponemos área 1 menos el área 2, otra definición puede ser área 1 más el valor absoluto del área 2* (escribe)



15) I*: ¿Y esas dos expresiones son iguales?*
16) E*: Sí.*
17) I*: El área 1 menos menos área 2 es área 1 más el área 2 ¿No?*



18) E*: Sí.* Escribe 

.
19) I: *¿Qué diferencia hay con la de abajo? Son distintas, en una le pones valor absoluto y a la otra no.*
20) E*: A una le pongo valor absoluto, porque si A es negativo, con el valor absoluto se convierte en positivo. Así sí* (ver anexo 17, p. 206).

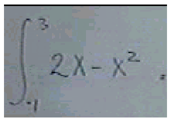
Al pedirle que calcule el área, el estudiante E4 plantea y resuelve con ayuda de *DERIVE* $\int_{-1}^{3} 2x - x^2\, dx$ (para resolver la integral utiliza el comando "Cálculo") y al darle negativo duda, grafica la función en *DERIVE.* En este momento se muestra confuso y dice "*usted me dice que calcule la integral"* el entrevistador le dice "*yo digo que calcules el área"*. Calcula la integral indefinida de la función y sin percatarse del error calcula la Integral Definida de la antiderivada y dice "*Ésta sería realmente el área".* Muestra desconfianza del proceso seguido con integral y dice "*¿Dónde está en Programa de Utilidades?* Aquí se evidencia que el estudiante E4, al trabajar con el ordenador tiene mayor confianza en el uso del Programa de Utilidades que en la herramienta automatizada "Cálculo" del software. Seguidamente utiliza el Programa de Utilidades para representar 10 rectángulos y menciona "*Ésta es el área"*, este comentario muestra que el estudiante E4 confunde el aspecto gráfico con el valor del área. Al ser cuestionado opta por calcular el área mediante lo que hemos denominado Método Numérico en el Programa de Utilidades, selecciona una de las sentencia "MEDIDA_EXTREMO DERECHO(a,b,n) y sustituye los valores de los extremos a=0 y b=3, y el número de rectángulos (n=10) y obtiene -0.495, luego selecciona otra sentencias y le da

0.0025, al notar que resultan dos valores diferentes y contrarios en signo, se confunde y no logra explicar lo que sucede. Al cuestionarlo, opta por calcular los ceros de la función, con lo que establece dos subintervalos, utiliza una de las sentencias del Programa de Utilidades y calcula los valores para cada región, luego realiza la operación $\frac{33}{25} - -\frac{297}{200} = ... = 2.805$ y dice *"El área total es 2.805".* Del procedimiento seguido por el estudiante E4 podemos destacar que: Se muestra seguro al utilizar el Programa de Utilidades en el cálculo del área; tiende a confundir el aspecto gráfico con el valor del área; aunque manipula adecuadamente las sentencias del Método Numérico (PU) no logra controlar las aparentes inconsistencias que se pueden presentar. Las siguientes citas de la entrevista muestran lo anteriormente descrito.

Escenario 3. Pregunta 2.

21) I: *Esa función es más o menos así ¿Calcula el área?*

22) E: *Por lo menos, si usted me manda a integrar esta función* (señala la expresión y=2x-x^2) *de -1 a 3* (escribe en el eje *OX* los números) *integro la función de -1 a 3 de 2x-x^2* (plantea y resuelve la integral) *el resultado es* $-\frac{4}{3}$.

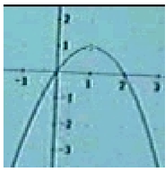


23) I*: ¿Entonces el área de esa región rayada es -4/3?*

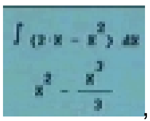
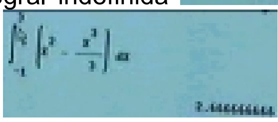
24) E*: No, no me tiene que dar negativo. Chequea el procedimiento.*

25) I*: ¿Qué tal si usas el DERIVE?*

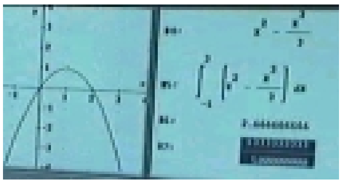
26) E: (Escribe en *DERIVE* la expresión F(x):=2x-x^2 y la gráfica, obtiene la gráfica, luego cierra la ventana gráfica y se queda con la simbólica)*, usted me dice que calcule la integral.*

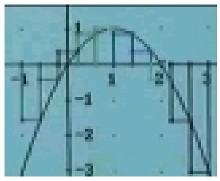


27) I: *Yo digo que calcules el área rayada. Ves que hay un error en la gráfica porque la hicimos a pulso, realmente la gráfica sería así, que es la pregunta 2.*

28) E*:* Calcula la integral indefinida , luego calcula la Integral Definida entre $-1\ y\ 3$ del resultado  *Ésta sería realmente el área.*

29) I*: Pon mosaico vertical.*

30) E: Muestra las dos ventanas  *¿Dónde esta el Programa de Utilidades?*
31) I: *En la carpeta que tiene tu nombre.*
32) E: (Abre el archivo que contiene el Programa de Utilidades referente al método gráfico, escoge la sentencia RECT_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) que sirve para representar rectángulos extremos izquierdos, sustituye “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, cometiendo el error de no escribir la expresión algebraica de la función y, por tanto,. no pudo obtener la matriz de valores necesaria para graficar los rectángulos. Copia el Programa de Utilidades y lo pega en la ventana en donde tenía escrita la función F(x):=2x-x^2, marca la sentencia RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a,b,n), sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10 y le da una matriz que no logra representar los rectángulos porque la función está antes del Programa de Utilidades).
33) I*: No has definido la función.*
34) E*: Entonces la defino, agarro esta función (se refiere a F(x):=2x-x^2) y me voy acá* (se refiere al final del Programa de Utilidades, en donde copia la expresión de la función) selecciona la sentencia RECT_EXTREMO_DERECHO(a,b,n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, calcula la matriz y representa los rectángulos. *Ésta es el área tomando extremo derecho de este intervalo* (se refiere al intervalo [-1,3]), *por allí se traza el rectángulo, pero hay que establecer un delta de x.*



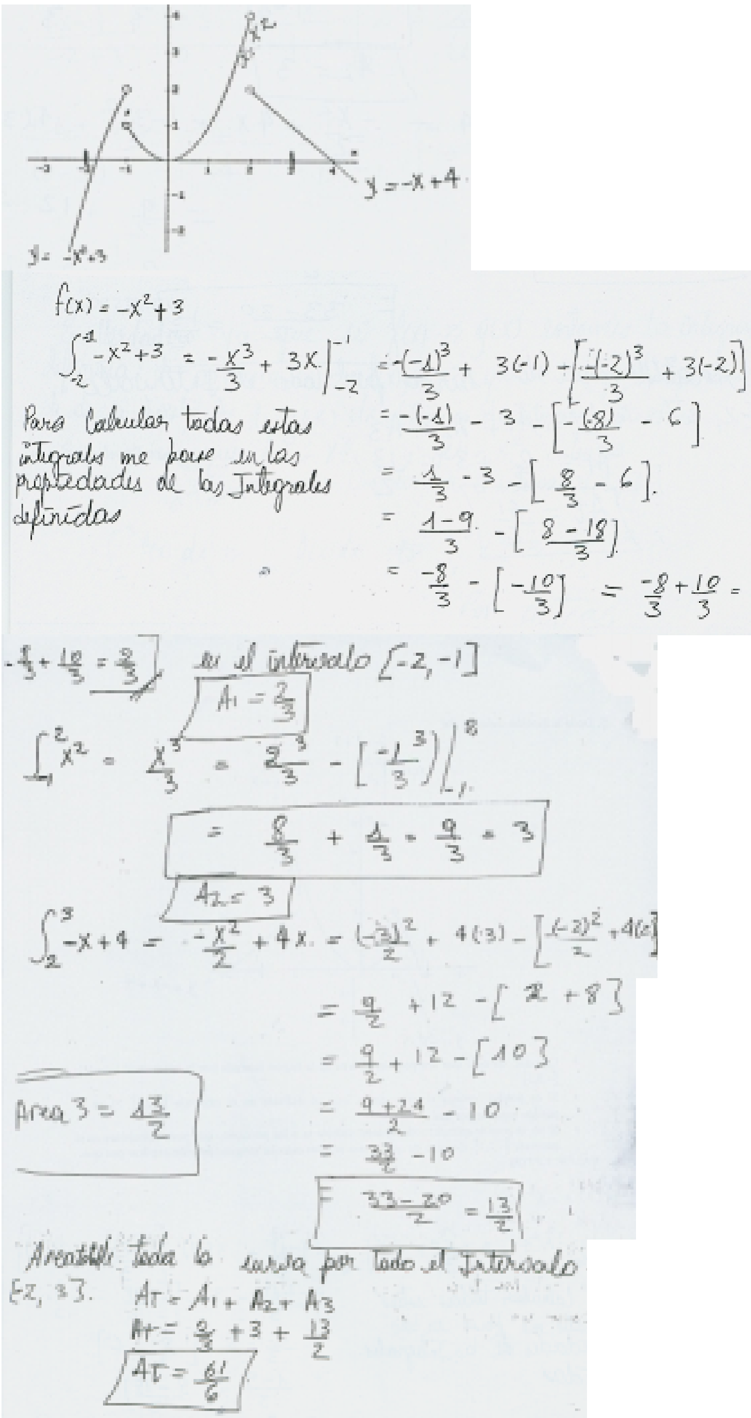
35) I*: De todas maneras observa que ahí estas trabajando de -1 a 3, pero allí no* (se refiere a la pregunta 2, cuyo intervalo es de 0 a 3) *queremos el área rayada desde 0 hasta 3. Yo quiero que me calcules el área de esa región rayada.*
36) E*: ¿Desde 0 hasta 3?*
37) I*: Sí.*
38) E*: Lo puedo hacer por el método numérico también.* (Abre el archivo del Programa de Utilidades referente al método numérico, copia las sentencias en ventana donde tiene el resto del programa y definida la función; copia la función al final del programa).
39) I*: ¿Qué es lo que estás haciendo?*
40) E: *Para calcularle numéricamente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n)). *Lo haré por rectángulos extremo derecho, tomo aquí la sentencia, sustituyo “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da* -0.495 *¿Y por qué da el área negativa?*
41) I: *Eso pregunto yo ¿Por qué te da negativo?*
42) E: (Selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da 0.0225). *Da diferente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) y sustituye los valores de “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da 0.405).
43) I: *¿Por qué crees que da en un sitio positivo y el otro negativo?*
44) E*: ¿A qué se debe eso?*
45) I: *¿Tú qué crees?*
46) E*: Silencio.*
47) I: *Tú mismo lo dijiste de entrada, como tienes que calcular el área de esa región rayada, entonces pusiste allí el área total es igual al área 1 más el valor absoluto del área 2 y ahora en lo que estás calculando ahí no estás distinguiendo. ¿Tú estas distinguiendo el área 1 y el área 2 o lo estás hallando todo a la vez?*
48) E*: Tengo que conseguir el área.*
49) I*: ¿Qué estás haciendo?*
50) E: (Utiliza la categoría de *DERIVE* para calcular las raíces de la ecuación y le da x=0 y x=2). *Entonces debemos conseguir el área de 0 a 3, partimos de dos intervalos de 0 a 2 y*

> *de 2 a 3. Esto que saqué* (señala los resultados obtenidos anteriormente) *es el valor de la región, más no del área.* Sustituye en la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n) los valores de “a” por 0, “b” por 2 y “n” por 10 y le da 33/25. *Este es el valor del pedazo de cero a dos, es la región y para conseguir la región de 2 a 3 cambio “a” por 2, “b” por 3 y “n” por 10* (en la misma sentencia) *aquí me dará negativo* (el resultado es -297/200). *Pero si decimos que este resultado* (se refiere a 33/25) *es el valor del área 1 y este el valor del área 2, entonces el área total será ésta menos ésta* 
>
> *. Este sí es el valor del área, diferente de la región; éste es el área total. El área 1 sería éste* (señala en la gráfica la región entre 0 y 2 y el valor de 33/25) *y esto sería el valor aquí* (señala la región entre 2 y 3 y el valor de -297/200)*. El área total sería 2.805* (ver anexo 17, pp. 20-209).

En la pregunta 8 (escenario 1) justifica la imposibilidad de calcular el área argumentando que no puede ser calculada por ninguno de los métodos vistos en clase, más adelante indica *“Es más para estar más seguro este ejercicio lo hicimos en Prácticas de Laboratorio y lo hicimos por todos los métodos y todos dieron infinito”.* Se refiere a los que tienen que ver con lo que hemos denominado Método gráfico y Método Numérico en las Prácticas de Laboratorio. El estudiante E4 realiza una transferencia de lo aprendido en las Prácticas de Laboratorio. En el escenario 2 grafica la función en *DERIVE* y escribe “*El valor de esta área no es calculable por ahora, ya que no hemos visto integrales impropias, pero en nuestro caso decimos que no está acotada”,* esta respuesta no se corresponde con los contenidos dados en el curso, pudo ser inducida por algún sujeto fuera del curso.

El la pregunta 9 (escenario 1) escribe “*Para calcular todas estas integrales me basé en las propiedades de las integrales definidas”*, plantea por separado las integrales $\int_{-2}^{-1} -x^2+3=\cdots=\frac{2}{3}$ escribe “*en el intervalo* $[-2,-1]$ $A_1=\frac{2}{3}$*”* igualmente hace como dos integrales más, al final escribe *“Área total de toda la curva por todo el intervalo* $[-2,3]$*.* $A_T=A_1+A_2+A_3$, $A_T=\frac{2}{3}+3+\frac{13}{2}$, $A_T=\frac{61}{6}$. En el escenario 2 también plantea integrales y las resuelve utilizando la categoría “Cálculo” de *DERIVE*. En los dos procedimientos utilizados por el estudiante E4 considera la región bajo el eje *OX* como si estuviese sobre el eje *OX*. A pesar que en otras situaciones utiliza el Programa de Utilidades, aquí prefiere aplicar la herramienta de *DERIVE* “Cálculo”. Esto último resulta sorprendente, puede que considere tedioso los cálculos con el PU o que la discontinuidad de la gráfica condicione su proceder. El siguiente extracto muestra el procedimiento seguido por el estudiante E4.

Escenario 1. Pregunta 9.



$f(x) = -x^2+3$

$\int_{-2}^{-1} -x^2+3 = -\frac{x^3}{3} + 3x \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 3(-2)\right]$

$= -\frac{(-1)}{3} - 3 - \left[-\frac{(-8)}{3} - 6\right]$

$= \frac{1}{3} - 3 - \left[\frac{8}{3} - 6\right]$

$= \frac{1-9}{3} - \left[\frac{8-18}{3}\right]$

$= \frac{-8}{3} - \left[-\frac{10}{3}\right] = \frac{-8}{3} + \frac{10}{3} =$

Para calcular todas estas integrales me base en las propiedades de las Integrales definidas

$-\frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$ en el intervalo $[-2,-1]$

$\boxed{A_1 = \frac{2}{3}}$

$\int_{-1}^{2} x^2 = \frac{x^3}{3} = \frac{2^3}{3} - \left[\frac{-1^3}{3}\right]\Big|_{-1}^{8}$

$\boxed{= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3}$

$\boxed{A_2 = 3}$

$\int_{-2}^{3} -x+4 = -\frac{x^2}{2} + 4x = \frac{(-3)^2}{2} + 4(3) - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 4(2)\right]$

$= \frac{9}{2} + 12 - [2 + 8]$

$= \frac{9}{2} + 12 - [10]$

$= \frac{9+24}{2} - 10$

$= \frac{33}{2} - 10$

$\boxed{= \frac{33-20}{2} = \frac{13}{2}}$

$\boxed{\text{Area } 3 = \frac{13}{2}}$

Area total toda la curva por todo el Intervalo $[-2, 3]$.

$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

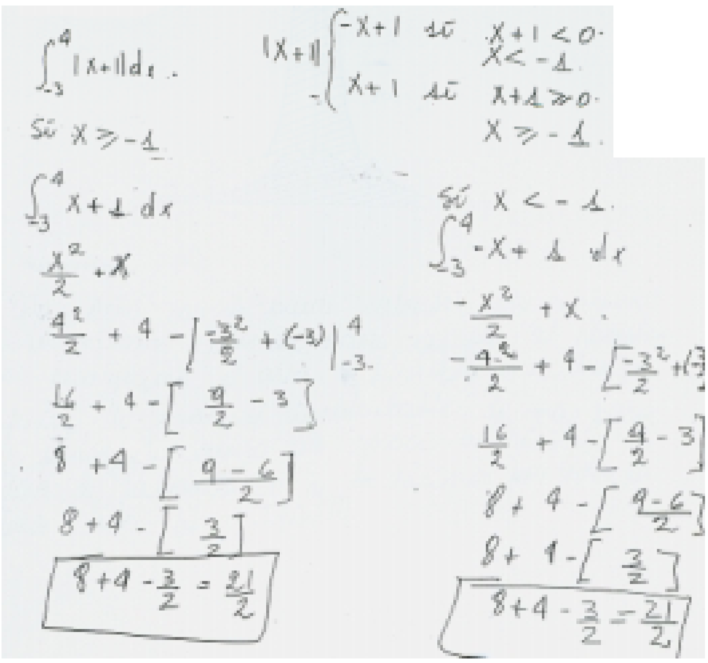
$A_T = \frac{2}{3} + 3 + \frac{13}{2}$

$\boxed{A_T = \frac{61}{6}}$

(ver anexo 17, p. 216-217).

En el segundo grupo de preguntas (3, 4, 7) en las que se proporciona sólo el registro algebraico, el estudiante E4 en la pregunta 3, escenario 1, define a trozos la función valor absoluto, en una de las partes escribe $-x+1$ y la forma correcta es $-x-1$, el resto de la definición está bien escrita. Plantea dos integrales con límites de integración -3 y 4. No grafica la función, ni se percata que debe dividir el intervalo en dos subintervalos, al final no suma los resultados de las integrales. En la pregunta 4 (escenario 1) afirma que la proposición es verdadera y rehace el procedimiento. Un punto importante en este proceder es que mientras que en el primer grupo de problemas, en los que se le suministró el registro gráfico, el estudiante E4 interpreta la pregunta apoyándose en la gráfica y lo resuelve, en éstos (pregunta 3, 4), parece que el no darle la gráfica lo conduce a plantearse un procedimiento algebraico que lo lleva a cometer errores. Además, en la pregunta 2 el no sumar los dos resultados de las integrales puede deberse a que considera que debe calcular la integral en dos partes, influenciado tal vez por la definición a trozos de la función. El extracto que a continuación exponemos evidencia lo antes descrito.

Escenario 1. Pregunta 3.



$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx$.

$|x+1| \begin{cases} -x+1 & \text{si } x+1<0, \; x<-1 \\ x+1 & \text{si } x+1\geq 0, \; x\geq -1 \end{cases}$

Si $x \geq -1$

$\int_{-3}^{4} x+1\,dx$

$\frac{x^2}{2}+x$

$\frac{4^2}{2}+4-\left[\frac{-3^2}{2}+(-3)\right]_{-3}^{4}$

$\frac{16}{2}+4-\left[\frac{9}{2}-3\right]$

$8+4-\left[\frac{9-6}{2}\right]$

$8+4-\left[\frac{3}{2}\right]$

$\boxed{8+4-\frac{3}{2}=\frac{21}{2}}$

Si $x<-1$.

$\int_{-3}^{4} -x+1\,dx$

$-\frac{x^2}{2}+x$.

$-\frac{4^2}{2}+4-\left[\frac{-3^2}{2}+(\right.$

$\frac{16}{2}+4-\left[\frac{9}{2}-3\right]$

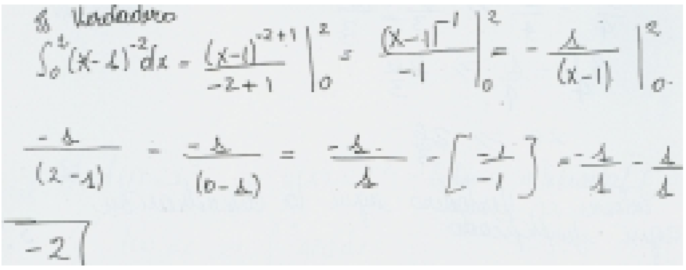
$8+4-\left[\frac{9-6}{2}\right]$

$8+4-\left[\frac{3}{2}\right]$

$\boxed{8+4-\frac{3}{2}=\frac{21}{2}}$

(ver anexo 17, p. 209)

Escenario 1. Pregunta 4.



(ver anexo 17, p. 211)

Cuando el entrevistador (escenario 3) le propone que resuelva el problema gráficamente, el estudiante E4 grafica la función, a pesar que el entrevistador le insiste que calcule la integral, él dice "*usted me está mandando a calcular esta área"*, luego puntualiza "*Esta área la puedo hacer por rectángulos, punto medio* (señala la región a la izquierda del punto angular)*, ¿cómo? consiguiendo un delta de x, que sería el ancho del rectángulo, la base del rectángulo…",* dibuja rectángulos inferiores y enumera cada rectángulo y dice "*Yo digo que el rectángulo 1 será delta x por f(-3), el rectángulo 2 será delta x por f(-2) y así sucesivamente".* En la pregunta 4 reconoce la importancia de la gráfica en la resolución del problema cuando expone *"No teníamos la gráfica"*. En estas dos situaciones en la que el estudiante E4 utiliza la gráfica en la resolución de un problema, se observa que lo interpreta y logra resolverlo; además el trabajar con la gráfica le permite la transferencia de lo aprendido en la Prácticas de Laboratorio, en las que se seguía un proceso similar de construcción de rectángulos como una manera de aproximación al área bajo una curva. Exponemos a continuación dos extractos de la entrevista que muestran lo antes indicado.

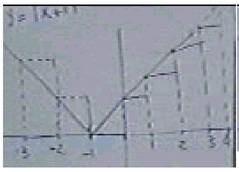
Escenario 3. Pregunta 3.

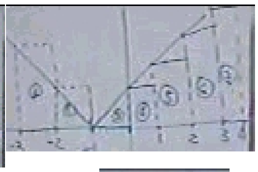
57) I: *¿Gráficamente sabrías hacerlo?*

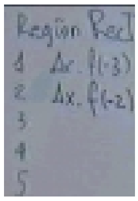
58) E*: Sí, porque tenemos que valor absoluto de x es así*  *y x más 1 quiere decir una unidad hacia la izquierda, me quedaría* .

59) I*: Yo te pregunto la integral entre -3 y 4.*

60) E: *Bueno, usted me está mandando a calcular toda esta área* (señala la región a la derecha del punto angular). *Esta área la puedo hacer por rectángulos, por puntos medios* (señala la región a la izquierda del punto angular), *¿cómo? consiguiendo un delta de x, que sería el ancho del rectángulo, la base del rectángulo; por lo menos, supongamos que agarramos que Δx=1, porque el 2 no cuadra, quedaría aquí* (dibuja segmentos verticales en la gráfica), *establecería unos rectángulos, si nos vamos por rectángulos extremo izquierdo ésta sería la imagen de 1, ésta sería la imagen del otro, éste la imagen de éste, éste la imagen de éste, del lado izquierdo de -1 sería éste* (dibuja para cada extremo el respectivo rectángulo) *llamemos rectángulo 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Yo digo que el rectángulo 1 será delta x por f(-3), el rectángulo 2 será delta x por f(-2) y así sucesivamente* (ver anexo 17, p. 210).

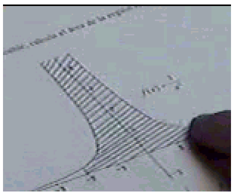






Escenario 3. Pregunta 4.

93) I: *¿Qué pasó con esta pregunta?*
94) E: *No teníamos la gráfica. O sea la gráfica la teníamos atrás y no nos fijamos en la función* (señala en la prueba el integrando) *que es 1 sobre x menos 1 al cuadrado, que es x menos 1 por x más 1. Nosotros realizamos las operaciones, yo las realicé aquí abajo* (señala la hoja de la prueba) *y con eso justifique que era verdadero, resultando que tiene una asíntota parecida, una asíntota como ésta* (señala la gráfica de la pregunta 8) (ver anexo 17, p. 209).



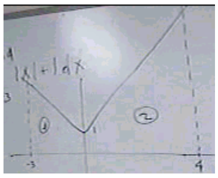
El entrevistador modifica la pregunta y le plantea otra integral $\int_{-3}^{4}|x|+1dx$ (pregunta 3) y le pide al estudiante E4 que calcule la integral, éste grafica la función menciona que "*La calcularía de* -3 *a 0 y de 0 a 4* (señala en la gráfica) *según la gráfica. También puedo desarrollar el valor absoluto de x",* puede que no se percate de que ambos procedimientos son complementarios. Cuando se le sugiere que dibuje dos trapecios, delimitando la región, logra interpretar y resolver el problema. El siguiente extracto muestra esto.

Escenario 3. Pregunta 3.

E*: Sería diferente.* (Escribe $\int_{-3}^{4}|x|+1dx$). *Ésta es la gráfica.*

65) I*: ¿Cómo calcularías esa integral?*
66) E*: La calcularía de -3 a 0 y de 0 a 4* (señala en la gráfica) *según la gráfica. También puedo desarrollar el valor absoluto de x.*
67) I*: ¿Necesitarías hacer todos esos rectángulos que hiciste?*
68) E*: Directamente aquí* (señala la integral) *sacando la integral, teniendo la gráfica, no. Estudio la integral de -3 a 0 de x+1, más la integral de 0 a 4 de x+1 diferencial de x.*
69) I*: ¿Y ahí no tienes dos figuras geométricas que tú conoces?*
70) E*: ¿Dos figuras geométricas?*
71) I*: Que te pueda permitir calcular el área, es decir dos trapecios.*
72) E*: Sí.*

73) I: *Márcalos a ver.*
74) E*: Aquí los tengo.*
75) I*: ¿Cómo?*

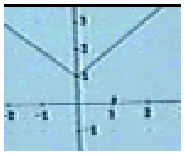


76) E*: Me quedaría trapecio 1, trapecio 2.* Escribe (Región Trapecio) (ver anexo 17, p. 210-211).

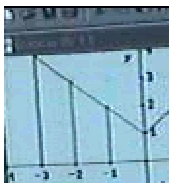
Al solicitarle que resuelva el problema utilizando *DERIVE*, el estudiante E4, con ayuda de *DERIVE* grafica la función y aplica el Programa de Utilidades (Método gráfico), dibuja tres trapecios en la región izquierda del punto angular; el entrevistador le cuestiona *"¿No era uno?* a lo que responde "*Mientras más trapecios, más exacto da"*, esto refleja la influencia de la instrucción recibida en la Prácticas de Laboratorio, en donde se ilustró que al aumentar considerablemente la cantidad de figuras elementales se podía realizar una aproximación más fina de la región. Utiliza la sentencia del PU y rehace los cómputos y grafica dos trapecios (uno a cada lado del punto angular), después aplica la sentencia de PU (Método Numérico) y calcula el área de los dos trapecios, suma los resultados y le da 19.5. De lo anterior se evidencia, por una parte, que el estudiante E4 manipula correctamente el PU, y, por otra, que a pesar de que puede plantearse otra manera de resolver el problema, termina recurriendo al PU. El siguiente extracto muestra lo anterior.

Escenario 3. Pregunta 3.

78) E*: ¿Lo puedo hacer con el DERIVE?*
79) I*: Sí claro.*
80) E: (Escribe el *DERIVE* $F(x):=|x|+1$ y grafica la función abre el archivo del Programa de Utilidades para el método gráfico, lo copia y lo pega en la ventana en donde escribe la expresión $F(x):=|x|+1$, esta vez coloca al final del programa la expresión de la función).

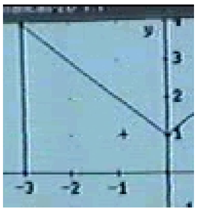


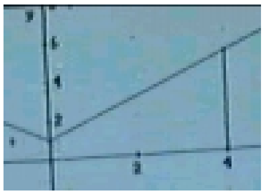
81) I*: ¿Qué estás haciendo?*
82) E*: Para calcularle el área, si lo voy a hacer por trapecios,* (selecciona la sentencia TRAPECIOS (a, b, n), mueve la expresión de la función a la primera sentencia, vuelve a marcar la sentencia de trapecios y dice "a" lo tomo como -3, "b" como 0 y "n" 1, calcula la matriz y no logra representar porque la expresión de la función debe estar al final).
83) I*: Es el mismo problema de antes, la F(x) debes escribirla debajo.*
84) E*:* (Escribe la expresión al final del programa, selecciona la sentencia de trapecios y sustituye "a" por -3, "b" por 0 y "n" por 3 y calcula la matriz, luego la grafica).



85) I: *Son tres trapecios.*
86) E: *Tres trapecios.*
87) I: *¿No era uno?*

88) E*: Mientras más trapecios, más exacto da.*
89) I*: ¿Tú crees?*
90) E: *En práctica nos daba así.*
91) I: *Prueba a ver. Hazlo con uno*
92) E: *Con uno*, (sustituye “a” por -3, “b” por 0 y “n” por 1, calcula la matriz y representa el trapecio) *Éste es un solo trapecio. Ahora si,* (sustituye “a” por 0, “b” por 4 y “n” por 1, calcula la matriz y representa el trapecio) *Ahí lo tengo.* (Abre el archivo del Programa de Utilidades para el método numérico, copia el programa y lo pega en la ventana en donde viene trabajando; copia al final la expresión de la función, selecciona la sentencia REGION_TRAPECIO(a, b, n), sustituye “a” por -3, “b” por 0 y “n” por 1 y le da 7.5). *Esta es el área 7.5, el área del trapecio 1. Si quiero conseguir el área del trapecio 2*, (sustituye en la sentencia “a” por 0, “b” por 4 y “n” por 1 y le da 12). *Entonces el área total* (suma 7.5 más 12) *es 19.5* (ver anexo 17, p. 211).

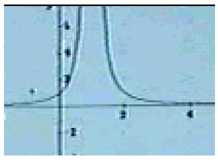




Con respecto al uso que el estudiante E4 hace del PCS, en algunas ocasiones le sirve para plantearse y resolver adecuadamente problemas, por ejemplo veamos el extracto de la entrevista en la pregunta 4.

Escenario 3. Pregunta 4.

99) I: *¿Por qué no la haces con DERIVE?*
100) E*: Escribe en DERIVE la expresión de la función y grafica Ésta es la gráfica, entonces nos mandan a calcular el área de 0 a 2; pero resulta que ella de 0 a 2 no es continua; ésta es la asíntota* (señala con el cursor en 1 en el eje OX) (ver anexo 17, p. 212).



Se observa que el estudiante E4 logra identificar, mediante la gráfica, que la función no es continua y utiliza esta información para argumentar que el área no puede ser calculada.

En otra situación, lo conduce a situaciones contradictorias, esto se puede observar en el siguiente extracto.

Escenario 2. Pregunta 3.

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$-2$$

Esto es verdadero ya que el programa dice que es así.

(ver anexo 17, p. 212)

Aquí muestra confianza en el resultado que le proporciona el PCS, sin plantearse otras alternativas, ni reflexionar sobre la veracidad del resultado en correspondencia de la pregunta formulada.

Escenario 3 pregunta 4.

111) I: *¿Entonces aquí que pasó*? (se refiere a la resolución del problema en la prueba de laboratorio) *cuando lo hiciste en DERIVE te dio -2; ¿Por qué crees que pasa eso?*
112) E*: En el programa debería salir como que da infinito* (mueve los brazos emulando la forma de la curva). *Ahora en el Programa de Utilidades si nos dio infinito. Si nos da incalculable* (ver anexo 17, p. 212).

El comentario anterior evidencia que el resultado que obtiene le produce una contradicción que expuso en el escenario 2 y no logra explicarse a si mismo que sucede. Esto nos lleva a pensar que se debe enseñar al estudiante a que haga un uso reflexivo del PCS, estableciendo el significado de la información que le brinda el PCS en el contexto de la pregunta formulada.

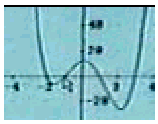
El proceder del estudiante E4 en la resolución del problema 7 reafirma lo expuesto en cuanto al uso que hace el estudiante del PCS. En este problema, utiliza *DERIVE* para graficar la función, identifica los puntos de corte de la curva con los ejes, divide el intervalo en varios subintervalos, utiliza el PU (Método Numérico) y aproxima el área de cada porción, finalmente encuentra el resultado, en el cual ha tomado en cuenta si la región está bajo o sobre el eje *OX*. El siguiente extracto lo muestra.

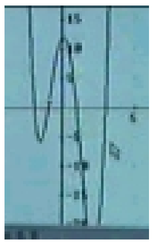
Escenario 3. Pregunta 7.

133) *I: Ahora, calcula el área que forma con el eje OX la función, escribe* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$.

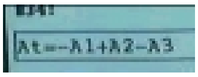
134) E: (Escribe en *DERIVE* la expresión 

y grafica). *Sería aquí, aquí y este* pedazo (indica con el cursor las tres regiones). (Copia la expresión $2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ a parte).
135) I: *¿Para qué estás haciendo eso?*
136) E*: Para encontrar los cortes exactos con el eje OX.*
137) E*:* (Calcula con *DERIVE* las raíces) *Corta al eje OX en 3, -2, -1 y 1. Corta aquí en 3, en 1, en -1 y en -2* (señala en la gráfica los números en el eje *OX*). *Usted me dice que consiga el área que forma esta con el eje OX* (indica con el cursor la curva), *entonces voy a estudiar desde -2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3* (señala la regiones en la gráfica). (Empieza a escribir los intervalos en *DERIVE*).





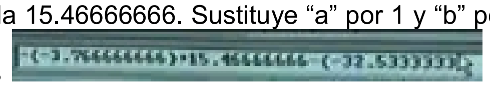
138) I: *¿Qué haces?*

139) E*: Voy a poner todo en paréntesis para trabajar más fácil con el Programa de Utilidades. De -2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3* (escribe [-2,-1], [-1,1], [1,3]) (abre el archivo del Programa de Utilidades referente al método numérico).
140) I*: ¿Tú no tienes una manera más rápida de hacer el problema que yo te digo?*
141) E: *Una manera más rápida. La sacó rapidito*. (Copia el programa y lo pega en el ventana en donde tiene la función, copia la función y la pega al final del programa. Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por -2, “b” por -1 y “n” por 5 y le da -3.61344; selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 1 y “n” por 5 y le da 15.73632; en esta sentencia sustituye los valores de “a” por 1, “b” por 3 y “n" por 5 y le da -33.22368; escribe en *DERIVE* 

luego hace los cálculos 

) *Esta es el área* (ver anexo 17, p. 215).

Cuando se le cuestiona para que proporcione un valor exacto del área, recurre al PU y utiliza la sentencia relacionada con el límite de las sumas de Riemann. Este proceder es interesante porque puede ser que un estudiante de un curso tradicional plantease integrales y la resolviese mediante la regla de Barrow, en cambio el estudiante E4 no lo hace y prefiere el PU, desmitificando de alguna manera el uso del cálculo de la antiderivada como mecanismo casi exclusivo (para un estudiante de clases tradicionales) de cálculo del área bajo una curva. El siguiente extracto así lo muestra.

142) I: *¿Y si tomaras más rectángulos te saldría lo mismo?*
143) E: *52 sería, lo que cambiaría sería un decimal.*
144) I: *¿No la puedes calcular exacta?*
145) E*: ¿Exacta? Por el límite, por las sumas de Riemann cuando n tiene a infinito.*
146) I*: Calcúlala exacta.*
147) E*:* (Selecciona la sentencia LIMITE_SUMA_DE_RIEMANN (a, b), sustituye “a” por -2 y “b” por 3 y le da -20.833333333, luego borra el resultado. Sustituye “a” por -2 y “b” por -1 y le da -3.76666666). *De -2 a 3 no me da, tengo que hacerlo por parte.*
148) I*: Ah claro, como la hiciste antes. ¿Y ésa es la manera que te da exacta?*
149) E*: Ésta sí. Ésta me da exacta.*
150) I: *Sigue calculando a ver.*
151) *E:* (Sustituye “a” por -1 y “b” por 1 y le da 15.46666666. Sustituye “a” por 1 y “b” por 3 y le da -32.53333333. Realiza los cómputos 

y le da 51.76666666), *Ésta es el área total* (ver anexo 17, p. 215).

Para analizar las respuestas del estudiante E4 al último grupo de preguntas (5 y 6) se debe realizar un comentario adicional de las preguntas 3 y 4, éstas tenían la particularidad de que en la 3 se pedía calcular la integral y en la 4 se presentaba la aplicación de la “regla de Barrow”, en estos problemas el estudiante E4 no graficó y aplicó técnicas de integración en la resolución. En las preguntas 5 y 6 se presentan planteos de integrales de manera genéricas, el proceder del estudiante E4 es considerar las expresiones algebraicas de dos funciones y calcular la Integral Definida de cada una, luego compara los resultados, con lo que llega a la conclusión de que ambas proposiciones son verdaderas. En cambio cuando se le plantea o se le solicita que relacione área y una representación gráfica, el estudiante E4 prefiere trabajar con el PU (dibujando rectángulos o trapecios, Método Gráfico, y/o, aproximando el valor del área, Método Numérico) que aplicar integrales. Es posible que el estudiante E4 perciba que algunos problemas deben ser resueltos por una vía (gráfico-numérica) y otros por otra vía (algebraicas), sin que prive el resolverlos de la forma más sencilla posible. Es siguiente extracto lo muestra.

Escenario 1. Pregunta 5.

Es Verdadero ya que si $f(x) \geq g(x)$ entonces la integral definida de a hasta b de $f(x)\,dx \geq$ que la integral definida desde a hasta b de $g(x)\,dx$. (Teorema de Integral Definidas)

Supongamos que $f(x) = x^3$. y $g(x) = x^2$: entonces

$x^3 \geq x^2$ Las dos en el intervalo $[1,3]$.

$$\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx \Rightarrow \int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

$$\int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

$$\frac{x^4}{4} \geq \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} \geq \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

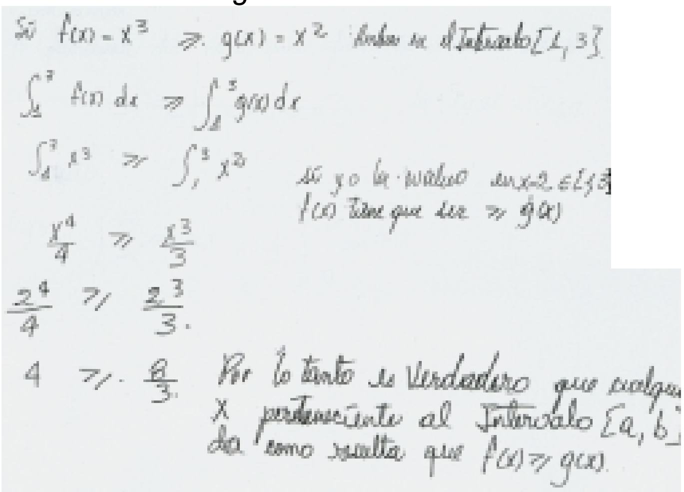
$$\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{26}{3}$$

$$20 \geq \frac{26}{3}$$

Entonces es Verdadero segun la demostración aquí ejemplificado

(ver anexo 17, p. 213)

Escenario 1. Pregunta 6.



Si $f(x) = x^3 \geq g(x) = x^2$ Ambas en el Intervalo $[1, 3]$

$\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx$

$\int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$ Si yo le valuo en $x=2 \in [1,3]$ $f(x)$ tiene que ser $\geq g(x)$

$\frac{x^4}{4} \geq \frac{x^3}{3}$

$\frac{2^4}{4} \geq \frac{2^3}{3}$.

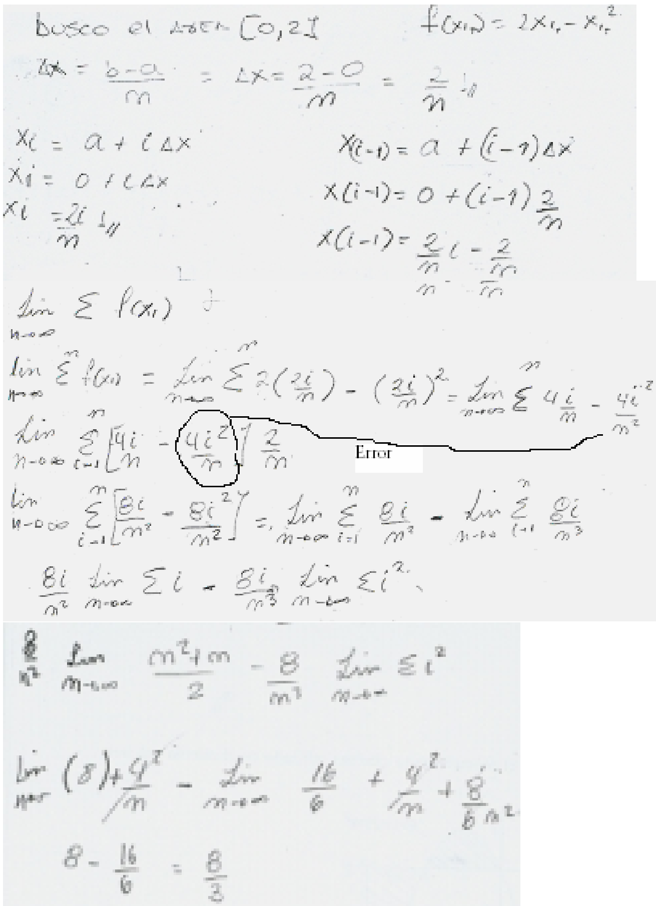
$4 \geq \frac{8}{3}$. Por lo tanto es Verdadero que cualquier x perteneciente al Intervalo $[a, b]$ da como resulta que $f(x) \geq g(x)$.

(ver anexo 17, p. 213)

6.4.5. El estudiante E5

En la pregunta 2 (escenario 1), el estudiante E5 escribe el intervalo $[0, 2]$, sigue los pasos de la aproximación numérica, comete varios errores, por ejemplo, la expresión $\frac{4i^2}{n^2}$, en otro paso la escribe $\frac{4i^2}{n}$. No plantea el cálculo de la segunda porción, ni menciona el por qué no lo realiza. En el escenario 2, plantea y resuelve dos integrales, una definida en $[0, 2]$ y otra en $[2, 3.5]$; realiza la operación $|1.33333333|+|-3.375|$ y obtiene el valor 4.708333333; escribe "*Primero se busca la Integral Definida en el intervalo* $(0, 2)$*, luego la Integral Definida en el intervalo* $(2, 3.5)$*, después se suman los valores absolutos de los resultados, encontrando así el área de la curva de la región rayada".* En la entrevista grafica la curva en *DERIVE,* al realizarle varios ZOOM la gráfica se observa cortada, parece que esto le confunde y decide graficar en la pizarra la gráfica. Utiliza esta última para establecer los límites de integración, plantea dos integrales y las resuelve, escribe en valor absoluto el resultado de la segunda integral (valor negativo), suma los resultados. Cuando se le pregunta *"¿Tú dices que la integral es siempre un área?"* responde "*Siempre y cuando la gráfica sea continua*". Esto puede explicar la dificultad en el uso del PCS, al percibir en la pantalla de *DERIVE* que la gráfica está cortada. El siguiente extracto muestra lo anteriormente descrito.

Escenario 1. Pregunta 2.



busco el área $[0,2]$ $\quad f(x_i) = 2x_i - x_i^2$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = a + i\Delta x \qquad x_{(i-1)} = a + (i-1)\Delta x$

$x_i = 0 + i\Delta x \qquad x(i-1) = 0 + (i-1)\frac{2}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n} \qquad x(i-1) = \frac{2}{n}i - \frac{2}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i)$

$\lim_{n\to\infty} \sum^{n} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right) - \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} \frac{4i}{n} - \frac{4i^2}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{4i}{n} - \frac{4i^2}{n}\right]\frac{2}{n}$ Error

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{8i}{n^2} - \frac{8i^2}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{n^3}$

$\frac{8i}{n^2} \lim_{n\to\infty} \sum i - \frac{8i}{n^3} \lim_{n\to\infty} \sum i^2$

$\frac{8}{n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2} - \frac{8}{n^3} \lim_{n\to\infty} \sum i^2$

$\lim_{n\to\infty} (8) + \frac{4^2}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{16}{6} + \frac{4^2}{n} + \frac{8}{6n^2}$

$8 - \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

(ver anexo 17, p. 220)

Escenario 2. Pregunta 2.

$F(X) := 2 \cdot X - X^2$

$\int_0^2 (2 \cdot X - X^2)\, dX$

1.333333333

$\int_2^{3.5} (2 \cdot X - X^2)\, dX$

-3.375

$|1.33333333| + |-3.375|$

4.708333333

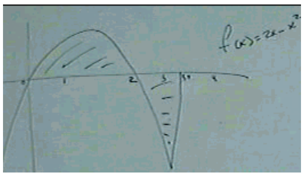
Primero se busca la integral definida en el intervalo (0, 2), luego la integral definida en el intervalo (2, 3.5). después se suman los valores absolutos de los resultados. encontrando así el área de la curva de la región rayada.

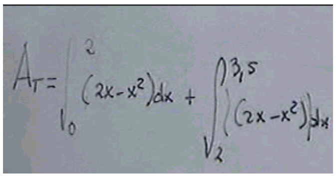
(ver anexo 17, p. 220)

Escenario 3. Pregunta 2.

27) I: *En esta pregunta se te pide calcular el área rayada. ¿Te pido que calcules de la forma más sencilla el área de esa región?*

28) E*: Se la hago aquí* (se refiere a la pizarra).
29) I*: Como quieras, si quieres usar el ordenador.*
30) E*:* Se sienta al frente del ordenador, abre *DERIVE.* Escribe la expresión algebraica de la función, luego la grafica; le realiza varios ZOOM y dice *no importa* (parece que se confunde con lo que aparece en la pantalla, se acerca a la pizarra, dibuja la curva y la región) *el método más sencillo sería por integrales definida entre cero y dos y entre 2 y 3,5* (señala cada región en la gráfica) *en donde está acotada. Esta vendría siendo como el área uno* (señala región sobre el eje *OX*) *El área dos* (utiliza la calculadora para hacer los cómputos) *sería -3,28 da negativo porque está hacia abajo, la parte rayada está hacia abajo, entre 2 y 3,5. Entonces el área total sería la suma de estas dos, pero aquí* (señala el resultado -3,28) *se podría multiplicar por -1 o se le pone valor absoluto porque un área no puede ser negativa. Entonces el área total sería la integral, el área total sería* $A_T = 4{,}61$.

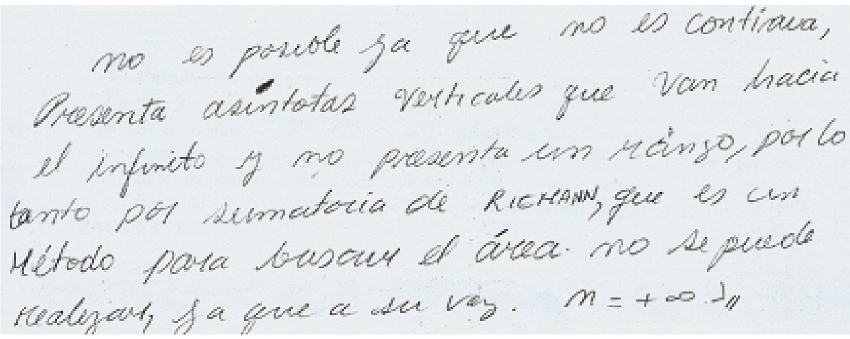




31) I*: Ese valor absoluto que acabas de poner, se lo acabas de poner a la función, pero entonces no me has hallado la integral entre 2 y 3,5 del valor absoluto.*
32) E*: Cierto es un error* (borra las barras de valor absoluto de la segunda integral) *hay que colocárselo al valor que me dio* $A_T = \frac{4}{3} + |-3{,}28|$
33) I*: ¿Tú dices que la integral es siempre un área?*
34) E*: No siempre, ella también es el área.*
35) I*: ¿Cuándo representa el área?*
36) E*: Siempre y cuando la gráfica sea continua* (ver anexo 17, p. 221).

En el problema 8, escenario 1, escribe "*No es posible ya que no es continua…",* puede que se refiera a la gráfica. En el escenario 2 alude que la función es discontinua. En la pregunta 9, escenario 1, no responde. Al igual que en la pregunta 2, es posible que el estudiante asocie el cálculo de la Integral Definida, de manera exclusiva, con funciones continuas y esto sea un obstáculo en el momento de resolver un problema. El siguiente extracto lo muestra.

Escenario 1. Pregunta 8.


no es posible ya que no es continua, Presenta asintotas verticales que van hacia el infinito y no presenta un rango, por lo tanto por sumatoria de RICHMANN, que es un Método para buscar el área no se puede realizar, ya que a su vez. $n = +\infty$.

(ver anexo 17, p. 227).

Escenario 2. Pregunta 8.

No es posible calcular el área de la región rayada, porque es una función discontinua y por lo tanto, no posee extremos superiores que terminen de acotar la gráfica y poder calcular así el área.

(ver anexo 17, p. 227).

Escenario 1. Pregunta 9

NO RESPONDE

En el escenario 3 (pregunta 9) plantea integrales, en los puntos de salto de la gráfica escribe como límites de integración el valor de la abscisa en el punto de discontinuidad. El siguiente extracto así lo muestra.

Escenario 2. Pregunta 9.

En el intervalo(−2, −1):

$F(X) := -X^2 + 3$

$\int_{-2}^{-1} (-X^2 + 3)\, dX$

0.6666666666

En el intervalo (−1, 2):

$F(X) := X^2$

$\int_{-1}^{2} X^2\, dX$

3

Ahora sumamos lo que nos dio en cada intervalo:

$0.666666 + 3$

3.666666

(ver anexo 17, p. 228).

De los comentarios que realiza en la pregunta 1, se evidencia que asocia la Integral Definida con un proceso que relaciona la función y su antiderivada. No se observa que asocie la Integral Definida con el cálculo del área. No utiliza representaciones gráficas en su explicación y plantea un ejemplo con la expresión algebraica de una función. El siguiente extracto de la entrevista lo muestra.

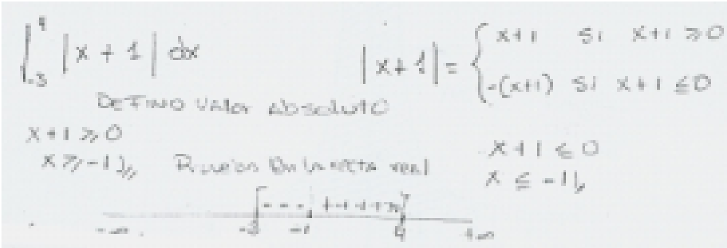
Escenario 3. Pregunta 1.

1) I*:* Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la Integral Definida entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2) E*: Para explicarle a alguien diría que ésta es una integral que está acotada entre a y b y sería una Integral Definida. Siempre dará un valor numérico, por estar definida. El resultado*

que da vendría siendo la antiderivada y para comprobar si está bien esa integral lo que se hace es derivar el resultado y me tiene que dar la integral.
3) I: *¿Qué diferencia hay entre una integral indefinida y una definida?*
4) E*: La definida está acotada* (señala la integral escrita en la pizarra) *entre a y b y la indefinida no está acotada, entonces daría una función; en este caso da un número y el resultado de la indefinida daría una función.*
5) I*: ¿Qué significa para ti acotar?*
6) E*: Una función que sea continua en estos valores* (señala los límites de integración). *Por ejemplo, si está en a y b* (escribe $[a,b]$) *debe existir un valor "c", o sea no un valor "c" sino que entre a y b sea continua la función* (señala el integrando)
7) I*: Es decir, que la integral esté acotada significa que la función es continua en el intervalo "a b".*
8) E*: Acotada significa que esté entre estos dos valores* (señala los límites de integración) *pero siempre y cuando sea continua.*
9) I*: Con esa explicación crees que alguien entendería lo que significa una Integral Definida. ¿Tienes algo que añadir?*
10) E: *Tal vez con un ejercicio.*
11) I: *Adelante.*
12) E: Plantea la integral $\int_0^1 \left(x^2\right) dx$ comenta *Ella está acotada entre cero y uno, entonces se integra, sería* $\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1$ *podemos llamar a esto f(x)* (escribe f(x) antes de la integral) *entonces f(1)= 1/3 y f(0)= 0 estos resultados se restan 1/3-0=1/3. Y es continua porque si colocamos estos valores aquí* (señala el integrando) *va a existir* (ver anexo 17, p. 219).

En la pregunta 3, escenario 1, define la función a trozos, elabora un diagrama, plantea $\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = -\int_{-3}^{-1} (x+1)dx + \int_{-1}^{4} x+1dx = \cdots = \frac{29}{2}$, al final escribe $\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \frac{29}{2}$. En la entrevista se le plantea otra integral $\int_{-3}^{4} |x-4|\,dx$, utiliza el mismo procedimiento que en el escenario 1. Grafica la función y por iniciativa propia plantea resolverlo utilizando regiones triangulares. Puede ser que esta respuesta esté inducida por el comentario de algún estudiante anteriormente entrevistado. El estudiante manifiesta que a pesar que el procedimiento de resolución aplicando regiones triangulares es más sencillo, lo haría por integrales *"Porque realmente uno ve el ejercicio más mecánico, no desde el punto de vista con la gráfica"*. Esto evidencia que el estudiante sigue un procedimiento algorítmico y el plantearse otra alternativa la puede considerar que será menos aceptable. El extracto siguiente lo muestra.

Escenario 1. Pregunta 3.


$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & si\ x+1 \leq 0 \end{cases}$

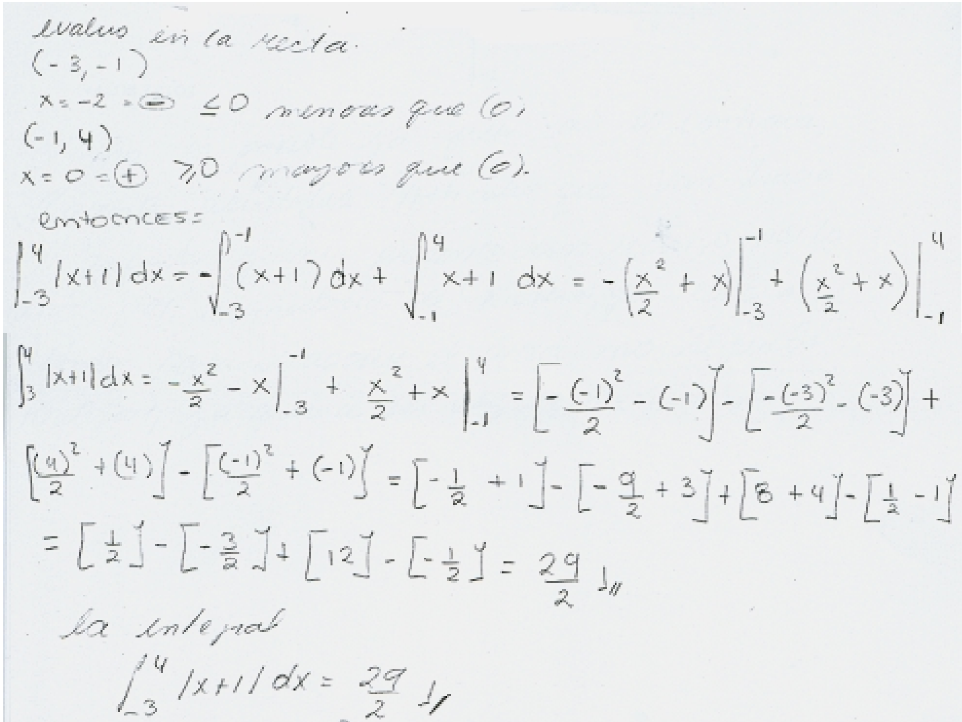
DEFINO VALOR ABSOLUTO

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$ // PRUEBAS EN LA RECTA REAL

$x+1 \leq 0$

$x \leq -1$ //


Evaluo en la recta.

$(-3,-1)$

$x=-2 = (-) \leq 0$ menores que (0)

$(-1,4)$

$x=0 = (+) \geq 0$ mayores que (0).

entonces:

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = -\int_{-3}^{-1}(x+1)\,dx + \int_{-1}^{4} x+1\,dx = -\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = -\frac{x^2}{2} - x\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{4} = \left[-\frac{(-1)^2}{2} - (-1)\right] - \left[-\frac{(-3)^2}{2} - (-3)\right] +$$

$$\left[\frac{(4)^2}{2}+(4)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right] = \left[-\frac{1}{2}+1\right] - \left[-\frac{9}{2}+3\right] + \left[8+4\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\right] - \left[-\frac{3}{2}\right] + \left[12\right] - \left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{29}{2} \;//$$

la integral

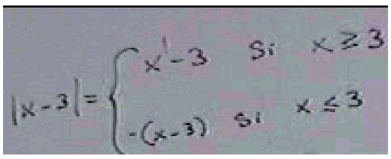
$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \frac{29}{2} \;//$$

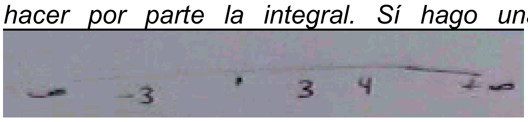
(ver anexo 17, p. 222)

Escenario 3. Pregunta 2.

63) I*: En este ítem se pide calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto de x menos 3 diferencial de x.*

64) E: *Escribe* $\int_{-3}^{4} |x-3|\,dx$ *primero es un valor absoluto* (define el valor absoluto) *se presenta de dos formas, cuando x es mayor o igual que 3 y cuando x es menor o igual que 3, entonces hay que hacer por parte la integral. Sí hago una recta*

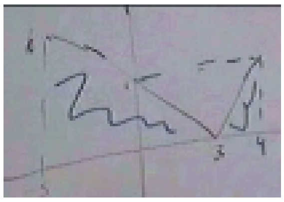

$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ x \geq 3 \\ -(x-3) & si\ x \leq 3 \end{cases}$



aquí dice x mayores o iguales que 3 (señala la correspondiente en la definición) *se tenía que hacer de 3 a 4; pero los x que sean menores o iguales de 3, se tendría que hacer de -3 a 3. Plantea las integrales* $-\int_{-3}^{3}(x-3)\,dx + \int_{3}^{4}(x-3)\,dx$ *y se resuelve* (usa la calculadora para realizar los cómputos y el resultado que le da es 37/2)

65) I: *¿Eso qué quiere decir?*
66) E: *¿Este resultado?*
67) I: *Sí*
68) E: *El resultado de la integral.*
69) I: *¿Qué quiere decir en términos de área?*
70) E: *Que el área de esta gráfica* (no ha graficado) *seria 37/2. O sea, la gráfica sería*

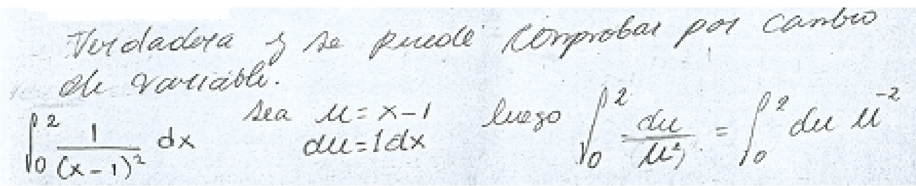
71) I: *¿Qué quiere decir?*
72) E: *Esa sería la gráfica de esa función.*
73) I: *La gráfica de la función valor absoluto de x menos 3.*
74) E: *Ah bueno, acotada entre -3 y 4.*
75) I: *En definitiva lo que te calcula la integral del valor absoluto de x menos 3 ¿Qué es?*
76) E: *Aquí*
77) I: *Con esa gráfica.*
78) E: *Se puede calcular esta parte y esta parte* (se refiere a la región izquierda y derecha de la gráfica) *puede ser por medio del área de un triángulo, como hay dos triángulos rectángulos. Sería base por altura sobre dos.*



79) I: *Si te fuera dicho que lo podías calcular como quisieras ¿Cómo lo hubieras hecho?*
80) E: *Por esto* (se refiere a la integral).
81) I: *Por integral. ¿Por qué?*
82) E: *Porque realmente uno ve el ejercicio como mecánico, no desde el punto de vista con la gráfica. Es mucho más sencilla* (señala la gráfica) *porque se buscan las dos áreas del triángulo, se suman y da, que buscan todo esto* (se refiere a la resolución de las integrales). *Realmente como que uno tiene la integral, pasos, definidas.*
83) I: *¿Y si el profesor te hubiese resuelto así? Geométricamente. ¿Cómo lo harías?*
84) E: *De esta forma* (se refiere a las integrales*). Así es mucho más sencilla* (se refiere al procedimiento con triángulos) *pero en el examen uno llega a usar las propiedades de la integral* (ver anexo 17, pp. 222-223).

En la pregunta 4 (escenario 1), realiza un cambio de variable y obtiene el mismo resultado y escribe "*al trabajarlo por sustitución da (-2) y por tanto el desarrollo anterior es verdadero".* En el escenario 2 expresa "*Es verdadero, y se demostró por el teorema fundamental del cálculo".* En la entrevista rectifica la respuesta dada en los escenarios anteriores, *"es falsa porque, ella no es continua, esa función no es continua; si se sustituye 1 daría sobre cero, entonces no sería continua".* No grafica la función y su respuesta se basa en el estudio de las condiciones de la función. Puede que no asocie la representación gráfica con el desarrollo algebraico que se le presenta. Se presenta el siguiente extracto.

Escenario 1. Pregunta 4.



Verdadera y se puede comprobar por cambio de variable.

$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ sea $u = x-1$, $du = 1dx$ luego $\int_0^2 \frac{du}{u^2} = \int_0^2 du\, u^{-2}$

$$= \frac{u^{-1}}{-1}\Big|_0^2 = -\frac{1}{u}\Big|_0^2 = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = \left[-\frac{1}{(2)-1}\right] - \left[\frac{-1}{0-1}\right] = [-1]-[1] = -2$$

al trabajarlo por sustitución da (-2) y por tanto el desarrollo anterior es verdadero.

(ver anexo 17, p. 223)

Escenario 2. Pregunta 4.

Es verdadero, y se demostrO por el teorema fundamental del cálculo, ya que calcularon la integral indefinidamente, luego sustituyeron en la variable x los límites de la integral y restaron dichos resultados.

(Ver anexo 17, pp. 224)

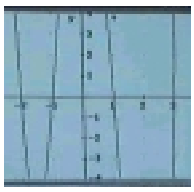
Escenario 3. Pregunta 4.

91) I*: Vamos con otra pregunta, te acuerdas cómo era.*
92) E*: ¿De verdadero y falso?*
93) I: *Era la de la integral entre cero y dos de 1 partido por x menos 1 elevado al cuadrado.*
94) E*: Que daba dos.*
95) I: *Menos dos.*
96) E: *Ahí también la busqué, yo puse que era verdadera porque vi el procedimiento bueno y da, si se hace por el DERIVE también da. Pero es falsa porque, ella no es continua, esa función no es continua; si se sustituye 1 daría sobre cero, entonces no sería continua.*
97) I: *En DERIVE dices que lo metiste y te dio eso.*
98) E*: Sí, yo lo hice.*
99) I: *¿Y por qué crees que DERIVE dice mentiras?*
100) E*: No es que diga mentiras, es uno el que debe tener eso claro. Para aplicar integral una función debe ser continua* (ver anexo 17, p. 224).

El estudiante E5 en la pregunta 7, representa la función en *DERIVE*, al igual que en la pregunta 2 la gráfica se muestra cortada, lo que le confunde, no logra explicar el procedimiento que seguiría para resolver el problema.

Escenario 3. Pregunta 7.

166) I: *Por último calcula el área que forma con el eje OX la siguiente función* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ *¿Cómo lo vas hacer?*
167) E*:* Utiliza *DERIVE.*
168) I*: Lo vas hacer con el ordenador ¿Por qué?*
169) E*: Me parece más sencillo.*
170) I: *Es más sencillo.*
171) E*: Es más sencillo que hacerlo a mano porque como es un polinomio de grado cuatro, o sea teniendo la facilidad.* Escribe la expresión algebraica, grafica y parece que se confunde con lo que aparece en la pantalla *¿Calcular el área?*



172) I*: Explica un poco cómo lo harías.*
173) E*: Para calcular el área lo trabajaría por integral indefinida. Se*

puede Integral Definidamente en cada intervalo que tenga, pero como me la dan así (señala la expresión algebraica que escribió el entrevistador en la pizarra) *y me dicen revuélvala, entonces yo la buscaría de una manera indefinida, una integral indefinida.* Utiliza *DERIVE* y calcula la integral indefinida

$$\int\left(2x^4-2x^3-14x^2+2x+12\right)dx=0.4x^5-0.5x^4-4.666666x^3+x^2+12x$$

174) I: *¿Esa es el área que forma con el eje OX?*
175) E: *Si es indefinida lo haría así.*
176) I: *Me dijiste que el área tiene que ser un número.*
177) E*: Sí.* Indica con el cursor la gráfica y los puntos de intersección de la curva con el eje *OX*. Parece que está confundido porque la curva en la pantalla se visualiza discontinua y no se nota las regiones a calcular (ver anexo 17, p. 227).

El tercer grupo de preguntas (5 y 6), en los escenarios 1 y 2, las respuestas giran en torno a que la primera proposición es falsa porque no se especifica el intervalo y la segunda verdadera porque se trata de funciones acotadas. En la entrevista por iniciativa propia representa gráficamente dos funciones positivas, lo que utiliza para ilustrar la veracidad de la primera proposición. Seguidamente, presenta dos integrales $\int_0^1 x^2\,dx$ y $\int_0^1 x\,dx$, en las que considera que el valor de la primera es mayor que el de la segunda, las resuelve, obteniendo $1/3$ para la primera y $1/2$ para la segunda. Con este ejemplo pretende mostrar que la proposición es falsa, no se percata de lo incorrecto de su apreciación. El entrevistador le intenta hacer ver que está equivocada, al no tener éxito, le propone que plantee una representación gráfica, el estudiante E5 representa dos curvas similares a las que elaboraron los estudiantes E1 y E3, y explica de forma análoga que en este ejemplo no se cumple la proposición. El entrevistador le propone una representación de dos curvas graficadas bajo el eje *OX*, en la que observa que la gráfica de *f* esta sobre la de *g.* El comentario del estudiante E5, en relación a la proposición 5, resulta algo incoherente cuando expresa *"El área de g(x) vendría siendo ésta* (raya la región sobre la curva de g) *y la de f(x) ésta. Sí se sigue cumpliendo. Porque aquí f(x) sigue siendo mayor que g(x), más allá está el negativo, suponiendo que aquí esté el -2* (escribe -2 en el eje y) *y aquí el -4* (escribe -4 en el eje y) *aun f(x) sigue siendo mayor que g(x*)" al mencionar el área es posible que se refiere a las integrales, en el caso de que realmente este hablando de área lo que señala no es correcto.

Escenario 3. Preguntas 5 y 6.

115) I*: En estas preguntas decía que si tomamos dos funciones* (escribe f(x) y g(x)) *tal que f(x) mayor o igual que g(x)* (escribe $f(x) \geq g(x)$) *entonces la integral entre a y b de f(x) diferencial de x mayor o igual a la integral entre a y b de g(x) diferencial de x* (escribe la proposición 5 en la pizarra) *se pregunta si es verdadero o falso. De la misma manera se pregunta si es verdadero o falso que…*

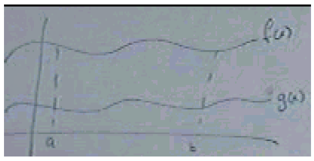
…

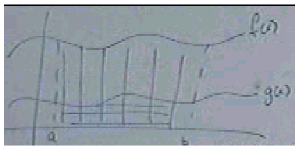
117) I: *Tú respondiste en el examen que la primera era falsa y la segunda era verdadera. Dijiste que la primera era falsa porque faltaba especificar que debe pertenecer al intervalo "a b".*

118) E*: En realidad, cuando reviso nuevamente ésa, es verdadera* (se refiere a la proposición 5)

119) I: *¿Por qué?*

120) E*: Porque a manera de gráfica hay una función y la gráfica de f dicen que es mayor que la de g, acotada* (dibuja) *el área de f(x) sería todo esto y el área de g(x) vendría a ser este pedazo* (dibuja) *entonces cuando yo la resuelvo con su integral, tanto la de f como la de g, me doy cuenta automáticamente así como la gráfica señala que el área de f(x) es mayor que la de g(x) entonces en la integral dará lo mismo; por lo tanto es verdadero que si una función f(x) es mayor o igual que una función g(x) entonces la integral de f(x) también es mayor o igual que la de g(x). Pero la de abajo* (se refiere a la proposición 6) *es falsa.*





121) I*: ¿Por qué?*

122) E*: Porque siempre hay que comenzar de una función, con un ejemplo que yo le diga* $\int_0^1 x^2 dx$ *yo la resuelvo* (al resolverla obtiene 1/3*) y me busco otro ejemplo que me dice que la integral de g(x) será menor que ésta, puede ser acotada por cero y uno* $\int_0^1 x dx$ (al resolverla le resulta ½) *aquí me dice que la integral de f(x)* (se refiere a la primera integral del ejemplo) *será mayor que la de g(x)* (se refiere a la segunda integral del ejemplo*), pero cuando hago los resultados ésta me da 1/3 y ésta me da ½, o sea que no quiere decir si la integral de f(x) es mayor de la g(x) entonces la función será igual.*

123) I*: Pero lo que dice ahí es si la integral de f(x) es mayor o igual que la de g(x) entonces f(x) es mayor o igual que g(x).*

124) E*: Entonces no se cumple, por eso mismo porque aquí estoy dando la integral de f(x)* (se refiere a la primera integral del ejemplo).

…

129) I*: Yo supongo que la integral de f(x) es mayor o igual que la de g(x) y ahí la integral de f(x) es menor 1/3, ¿Cómo es en relación con ½? ¿Quién es mayor? ¿1/3 o ½?*

130) E*: ½*

131) I*: La integral de f(x) ¿Cuánto es?*

132) E*: La de f(x) es 1/3*

133) I: *¿Y la integral de g(x)?*

134) E*: ½*

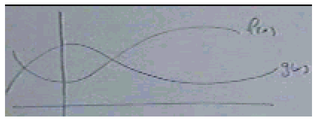
135) I: *Estamos diciendo que si la integral de f(x) es mayor o igual que la de g(x) entonces f(x) es mayor o igual que g(x).*

136) E*: Aquí demostramos que* (señala el integrando x^2 de la primera integral del ejemplo) *la función de f(x) es mayor que la de g(x)* (señala el integrando x de la segunda integral del ejemplo) *pero cuando la integro me da menor.*

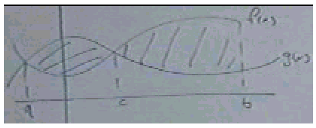
137) I*: ¿Y f(x)?*

138) *E: Ésta es f(x)* (escribe $f(x)=x^2$) y g(x) (escribe g(x)=x) *cuando yo integro eso, me doy cuenta que f* (señala el resultado de la primera integral) *es menor* (señala el resultado de la

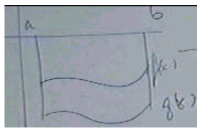
segunda integral) *la integral de g es mayor que ésta* (señala la primera integral), *o sea no se cumplirá. Si digo que f en función es mayor que g, pero cuando las integro f me da menor y no me da.*
139) I: *¿Y si x vale 0.5? ¿Quién vale más f(x) o g(x)?*
…
154) E*: Sería que no podemos decir que una integral es mayor que otra sin saber si la función es mayor que la otra. Si por ejemplo la hacemos con una gráfica.*
155) I*: ¿Esa explicación que estás dando es con respecto a la primera o la segunda proposición?*
156) E*: La segunda.* (Dibuja). *Entonces aquí se puede demostrar que la gráfica de f(x) es mayor que la de g(x), pero en medida de área, en este caso, g(x) es mayor que f(x).*



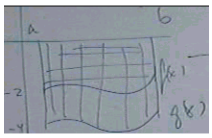
157) I*: ¿Para ti qué quiere decir eso que está ahí debajo?* (se refiere a la proposición 6).
158) E: *Que la integral de a y b de f(x) es mayor o igual a la integral de a y de g(x) entonces la función f(x) es mayor o igual a la de g(x) para todo x en el intervalo "a b". Solo que yo supuse que es falsa porque no podemos empezar de una integral, o sea no podemos ver si una integral es mayor que otra sin conocer la función.*



159) I*: Y la de arriba* (se refiere a la gráfica que elaboró el estudiante para explicar la proposición 5) *vuélveme a explicar cómo es.*
160) E*: Es verdadera porque* (se refiere a la proposición 5). *Me especifica que la función f(x) es mayor que g(x), hago la gráfica de f(x) y la de g(x) acotada entre a y b (señala las gráficas de las funciones) entonces el área de f(x) vendría siendo toda ésta* (señala la región bajo f) *y la de g(x) vendría siendo ésta* (señala la región de g) *entonces quiere decir que si una función es mayor que otra entonces la integral de dicha función será mayor que la otra integral.*



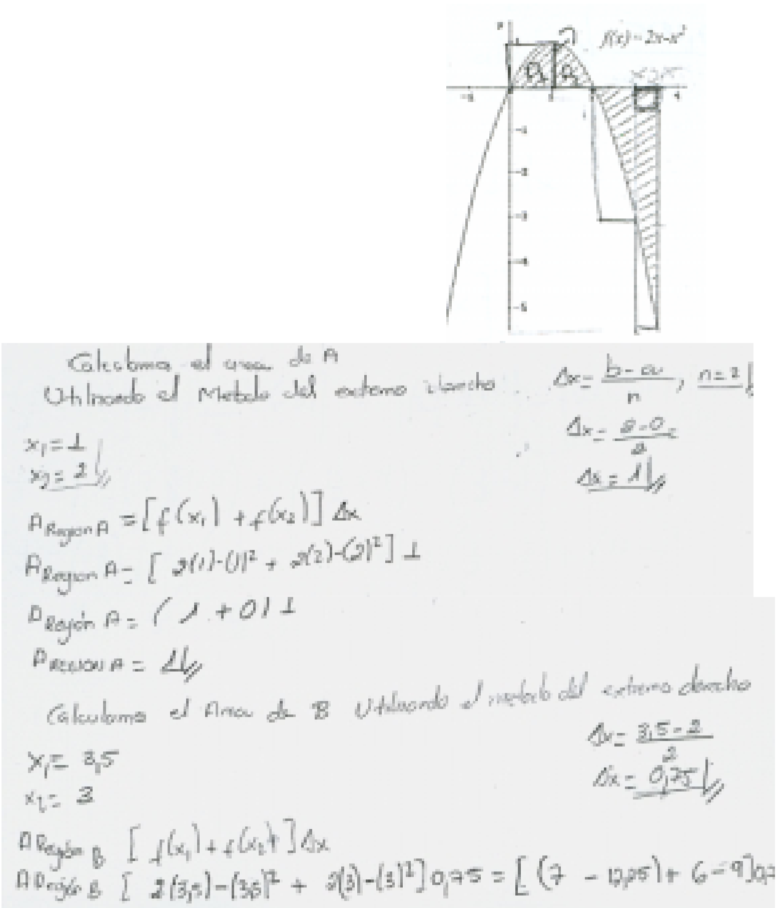
161) I: *Si tomamos ahora estas funciones* (dibuja) *¿Se sigue cumpliendo esta propiedad?* (se refiere a la proposición 5)
162) E*: El área de g(x) vendría siendo ésta* (raya la región sobre la curva de g) *y la de f(x) ésta* (dibuja) *Sí se sigue cumpliendo. Porque aquí f(x) sigue siendo mayor que g(x), más allá está el negativo, suponiendo que aquí esté el -2* (escribe -2 en el eje y) *y aquí el -4* (escribe -4 en el eje y) *aun f(x) sigue siendo mayor que g(x*) (dibuja)
163) I*: ¿Y es área de f(x) es mayor que la de g(x)?*
164) E*:* Se queda en silencio por unos segundos*. No sería, porque como son valores absolutos no se cumpliría.*
165) I*: Observa que la integral es menos un número, es decir menos el valor del área de f(x) y la de g(x) es menos el valor de la otra área; pero el valor del área de g(x) será la integral de signo menos es más pequeña que la de f(x), es decir que si se sigue cumpliendo la propiedad* (ver anexo 17, pp. 225-227).

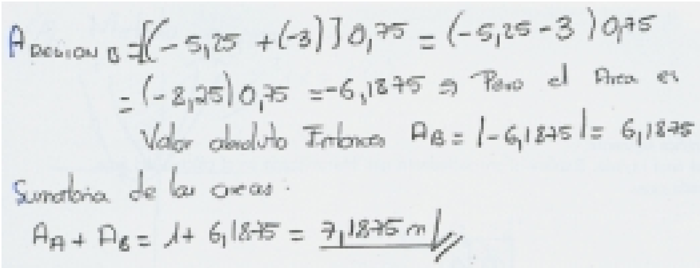


6.4.6. El estudiante E6

En el desempeño del estudiante E6 al trabajar los problemas del primer grupo se identifican dos tendencias importantes. Por un lado en dos de los problemas (Preguntas 2 y 9) decide utilizar la idea de aproximar el área de las regiones a través del empleo de rectángulos. Aunque la idea general de aproximar el área de regiones curvas está presente en el trabajo que muestra en los dos problemas, es evidente que no desarrolla los recursos y estrategias que le permite utilizar e implementar con éxito esta estrategia. Esto se manifiesta en la forma en que selecciona (la partición del intervalo) y calcula el área de los rectángulos. Por ejemplo para la pregunta 2, en una región localizada por encima del eje *OX*, divide el intervalo $[0,2]$ en dos intervalos donde construye un rectángulo para cada intervalo e intenta realizar todo un procedimiento algebraico que le permita calcular las áreas, sin darse cuenta de que esa partición del intervalo no es adecuada ni tampoco se da cuenta que el área de los rectángulos que construye se pueden calcular sin necesidad de realizar todo un procedimiento algebraico.

Escenario 1. Pregunta 2.





$A_{REGION\ B} = [(-5,25 + (-3)]\,0,75 = (-5,25 - 3)\,0,75$

$= (-8,25)\,0,75 = -6,1875 \Rightarrow$ Pero el Área es

Valor absoluto Entonces $A_B = |-6,1875| = 6,1875$

Sumatoria de las areas:

$A_A + A_B = 1 + 6,1875 = \underline{7,1875\, m}$

(ver anexo 17, pp. 229-230)

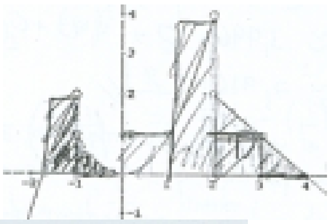
Aquí es evidente que el estudiante E6 reconoce la importancia de aplicar paso a paso un procedimiento que trabajó en la instrucción tanto de lápiz y papel, como con el PCS, para encontrar aproximaciones de áreas, pero no manifiesta los recursos suficientes que le permitan encontrar el significado de ese proceso. Esto se hace evidente cuando reporta los resultados de los cálculos y que nunca los contrasta con lo que podría ser una aproximación visual del área de la región que desea calcular. En la entrevista manifiesta inseguridad de lo que hizo y señala que su forma de resolverlo indica que realmente no entiende. El siguiente extracto de la entrevista nos lo muestra.

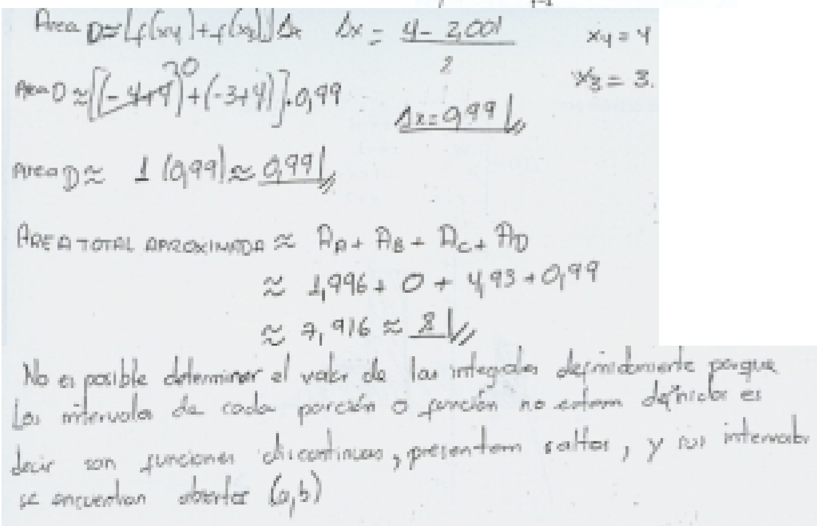
Escenario 3. Pregunta 2.

28) I*: ¿Realmente crees que te daba el área?*
29) E*: Realmente, ¡bueno!, según los cálculos que me dio de repente.*
30) I*: ¿Tú acabas de decir que es una sobrestimación?*
31) E*: Ah, OK, realmente no da el área exacta porque aquí hay una sobrestimación* (porción sobre el eje *OX*) *y aquí también* (porción bajo el eje *OX*) *pero da una aproximación al área, claro que si hubiese dividido mis rectángulos mejor, hubiese dado una mejor aproximación, más cerca, mientras que n se hace infinito esa aproximación se hace más exacta.*
32) I: *Y entonces.*
33) E*: También lo podíamos hallar por la integral de esto* (indica la expresión algebraica de la función) *y esto* (indica la gráfica) *evaluado en este intervalo* (señala en la gráfica el segmento de cero a cuatro)
34) I*: ¿Y por qué optaste por ésa? ¿Por qué te defiendes mejor?*
35) E*: Opté por ésta, porque vi la gráfica y supuse que el profesor quería que yo entendiera, si entendía bien lo que era una integral, porque este mecanismo, o sea es muy mecánico* (señala la Integral Definida mencionada en el aparte anterior) *es la propiedad; ésta* (señala la gráfica) *más que todo se va por la parte de Riemann que es más analizada, se entiende bien qué es lo que se quiere decir con la integral, entonces apliqué esto* (señala la gráfica) *para que se entendiera.*
36) I*: Y si yo te pidiera ahora que lo hicieras de la forma más sencilla posible ¿cuál utilizarías?*
37) E: *Para mi sigue siendo la forma más sencilla* (señala la gráfica), *claro que la integral evaluada en el intervalo cero cuatro* (plantea la integral) *así.*
38) I*: ¿Pero eso no te da exacto como me habías dicho?*
39) E*: Esta* (señala la gráfica) *no, exacto no me da, me da una aproximación, porque si te puedes fijar aquí* (señala el rectángulo sobre el eje *OX*) *cuando yo hallo el área de este*

rectángulo, aquí hay una sobrestimación y aquí (señala el rectángulo bajo el eje *OX*) *también hay una sobrestimación.*
40) I*: Y si yo te dijera. Aquí con esa sobrestimación que has hecho sale que el área es 7.1875, pero realmente el área daba 18.5.*
41) E*: Me está dando a entender que esto* (señala la gráfica) *no me funcionó, debe ser que hice algo mal, creo que no le coloqué aquí, dividí muy poquito las, los rectángulos aquí la base, pero por esta manera da, para mi por ahí da, haciendo los cálculos, colocando n más* (no completa la frase) (ver anexo 17, p. 232).

En otro problema donde la función es continua a trozos (pregunta 9), encuentra dificultades al seleccionar los intervalos para calcular el área en los puntos donde precisamente la función es discontinua. Decide considerar puntos cercanos a los puntos de discontinuidad y desarrolla un proceso similar al que utilizó en el problema anterior (mostrando las mismas inconsistencias). Sin embargo, en este segundo problema es interesante observar que después de realizar todos los cálculos y llegar a una respuesta, escribe al final que no es posible determinar el valor de la integral (aquí posiblemente no asocie la integral con el área) ya que menciona que la función es discontinua.
Escenario 1. Pregunta 9.




Area D ≈ [f(x4)+f(x3)]Δx   Δx = (4 − 3,001)/2   x4 = 4
Area D ≈ [(−4+4)^0 + (−3+4)]·0,99   x3 = 3.
Δx = 0,99
Area D ≈ 1 (0,99) ≈ 0,99
AREA TOTAL APROXIMADA ≈ A_A + A_B + A_C + A_D
≈ 1,996 + 0 + 4,93 + 0,99
≈ 7,916 ≈ 8
No es posible determinar el valor de las integrales definidamente porque los intervalos de cada porción o función no estan definidos es decir son funciones discontinuas, presentan saltos, y sus intervalos se encuentran abiertos (a,b)

(ver anexo 17, pp. 240-241)

Parece que asocia la discontinuidad de una función directamente con la imposibilidad de resolver la integral de esa función. Es aquí donde se identifica la segunda tendencia en sus acercamientos hacia los problemas en este grupo, ya que al trabajar un tercer problema donde la región a considerar no está acotada debido a una discontinuidad, inmediatamente reporta que no es posible encontrar el área de esa función. En este problema se observa que cuando intenta explicar el por qué no se puede calcular el área, el lenguaje que emplea no es preciso para dar cuenta de lo que visualmente de manera informal puede describir. Por ejemplo escribe "*... nos hace falta imágenes que nos permitan determinar el área por los diferentes métodos en el intervalo...*". Es importante resaltar que cuando emplea el software para trabajar en estos problemas identifica correctamente los límites de integración y calcula las integrales correspondientes, los valores que se producen uno positivo (arriba del eje *OX*) y otro negativo (debajo del eje *OX*) los suma y el resultado le da un valor negativo al que finalmente cambia ya que afirma que el área siempre es positiva, tal y como se muestra en la impresión del fichero correspondiente.

Escenario 2. Pregunta 2.

$f(x) := 2 \cdot x - x^2$

$\int_0^2 f(x) := 2 \cdot x - x^2 \, dx$

$$\frac{4}{3}$$

$$1.333333333$$

$\int_2^{3.5} f(x) := 2 \cdot x - x^2 \, dx$

$$-\frac{27}{8}$$

$$-3.375$$

Sumamos ahora el valor de cada integral en su respectivo intervalo

$1.33333 + -3.375$

$$-\frac{204167}{100000}$$

$$-2.04167$$

Como vemos nos da un valor negativo pero las areas se expresan en valor absoluto, entoncesw nos queda que el area total rayada es:

2.04167

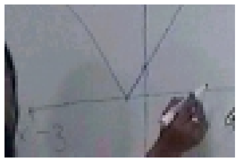
(Ver anexo 17, p. 230)

En el otro problema (función continua a trozos) identifica los límites de integración (en los puntos de discontinuidad los aproxima) y calcula el valor de las integrales correspondientes. De manera general, el acercamiento mostrado por el estudiante E6 en este grupo de problemas se caracteriza por una facilidad en el uso de operaciones algebraicas, pero muestra dificultades e inconsistencias al tener que darle sentido a sus resultados y en la reflexión que le permita relacionar el tratamiento de casos que involucren discontinuidades de cierta función con las condiciones que permiten utilizar la Integral Definida.

En relación al desempeño del estudiante E6 en el segundo grupo de problemas destacamos la facilidad con que interpreta la función valor absoluto que aparece en la integral que se le pide resolver (problema 3). De hecho, inicialmente sin presentar el registro gráfico de la función, considera adecuadamente el intervalo entre los límites de integración. Es decir, el estudiante E6 desarrolla una representación como objeto de la función valor absoluto, que en este caso la traslada del origen al punto menos uno. Este hecho se constata cuando en la entrevista se le pide explícitamente graficar la función y realiza esta tarea con facilidad.

Escenario 3. Pregunta 3.

72) I*: ¿Cómo es esa curva?*
73) E*: ¿x+1?, para ver* (dibuja la gráfica del valor absoluto sin fijarse en la definición) *no puede tomar imágenes negativas porque es el valor absoluto* (ver anexo 17, p. 234).



En ambos ambientes con el uso de lápiz y papel y con la ayuda del software, el estudiante E6 encuentra el valor de la integral. En el desarrollo de la entrevista, al ser cuestionada sobre su reserva de no trabajar directamente con el registro gráfico, manifiesta que cuando el problema explícitamente plantea resolver una integral, y no se le proporcionan gráficas, entonces no tiene por qué recurrir al registro gráfico. Es decir, no se da cuenta que ambos registros desempeñan un papel fundamental en el entendimiento y en el cálculo de integrales definidas.

Escenario 3. Pregunta 3.

80) I: *Si sabes eso ¿lo podrías hacer más fácil, eso que has encontrado que es el área que está bajo una curva?*

81) E*: Señala las dos integrales y dice* *por propiedad, la manera más fácil sería ésta, lo mecánico ¡pues!, ¡esto! y por mi gráfica lo haría aquí* (señala la gráfica) *y mis triángulos, el área de triángulo, la base por la altura, la imagen* (señala el -3), *la evaluaría aquí* (escribe la expresión |x+1|) *en esta función, llamémosla f(x), ¡verdad! parecido al que yo le explique ahora del primer problema con rectángulos ahí, aquí sería con triángulos, ¡verdad!, ésta es mi función* (refiriéndose a f(x)= |x+1|) *hallaría el área de este triángulo* (refiriéndose al triángulo de la izquierda) *el área de este otro triángulo* (refiriéndose al triángulo de la derecha) *y las sumaría.*
…
Calcula las áreas de los dos triángulos.
84) I*: ¿Cuándo hiciste el examen se te ocurrió hacerlo así?*
85) E*: Éstee, ¡nooo!, no pensé en ningún momento hacerlo así* (señala la gráfica) *cómo le digo, me dan mi integral, lo primero que yo me enfoco, integral, me dan el área, si me fuesen puesto la gráfica, lo más lógico me enfoco en mi gráfica, me están dando la integral, entonces me enfoco en ella, ¿entiende?, lo primero que me den me enfoco, si me hubiesen dado la gráfica* (señala la gráfica) *lo hago de esta manera* (se refiere al procedimiento con triángulos) *entonces aquí* (señala la integral original) *digo yo, el profesor me está hablando de integral, me voy por aquí* (se refiere a la integral). *Como le dije anteriormente, usted me preguntó que por qué lo hice por los rectángulos, o sea, veo mi gráfica, por ahí me digo lo voy a sacar por ahí, o sea el primer enfoque que yo le doy, si ahora yo veo que, o sea no me costó, o sea yo lo saqué por aquí* (señala la definición de valor absoluto) *por las propiedades de valor absoluto, no me costó y lo hice, se me facilitó por ahí, o sea el primer enfoque que yo tengo.*
86) I*: Supón ahora que me pones ese problema y yo te lo resuelvo así* (se refiere al procedimiento con triángulos) *¿Tú qué dirías?*
87) E*: ¡Yo diría que!*
88) I: *¿Me lo pondrías perfecto? ¿Me lo pondrías malo? ¿Me lo pondrías regular? ¿Qué nota me pondrías si yo te lo resuelvo de esa manera, de 1 a 10?*
89) E: *Del 1 al 10, si lo resolviera de esta manera, ésteee, si estoy evaluando integral y quiero las propiedades de la integral, yo pienso, nooo, aquí el muchacho consiguió este valor absoluto y dijo ¿cómo lo hago yo para conseguir mi integral y mis intervalos? No tiene claro su propiedad* (aunque señala la definición a trozos del valor absoluto, parece que se refiere a la integral), *pero tomaría en cuenta de que si entiende de lo que estamos hablando* (señala la integral original) *sabe que es región bajo la curva* (indica la gráfica de la función) *o sea está consciente, analizó el problema, le pondría un 9.*
90) I: *Si no menciono nada de integrales ¿me pondrías un 9? ¿Por qué no un 10?*
91) E*: Por lo que le estoy diciendo, estoy evaluando la propiedad* (señala la integral) *a lo mejor él se asustó con este valor absoluto que vio aquí, ¡verdad! y se fue por aquí* (señala la gráfica).
…
96) I*: ¿Por qué me pones un 9? Ponme un cero.*
97) E*: Le pongo un 9, porque pensó,* (señala la gráfica). *Te castigo con un punto porque estoy evaluando esto* (señala la integral). *Por este lado siempre me han gustado la gráficas, me defiendo en estos términos, me parece que por gráficos uno entiende todo, por gráfico uno lo ve, lo analiza, lo capta. Pero si yo estoy evaluando esto, la propiedad, si la sabe aplicar* (ver anexo 17, pp. 234-235).

Otra idea interesante que emerge durante la entrevista se relaciona con el significado que le da al uso de la Integral Definida. Específicamente al ser cuestionada sobre otra forma más simple de calcular el área en este problema, al observar la gráfica reconoce que el área se puede determinar a partir del cálculo de las áreas de dos triángulos, sin embargo, sostiene que dado que el tema es “la

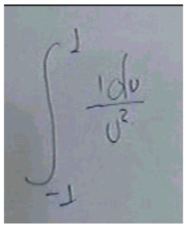
Integral Definida” entonces el problema se debía de resolver utilizando herramientas que se han estudiado en este tema. Es decir, el hecho de que la integral $\int_a^b f(x)$ aparezca representada de esta manera, para el estudiante E6 implica asociarla con un conjunto de procedimientos propios y éstos son los adecuados a utilizar. Si el problema se puede resolver por otros métodos, incluso más fáciles, pero el tema es el estudio de la integral, entonces no los valora de la misma manera. Esto es consistente con algunas creencias que desarrollan los estudiantes acerca del estudio de las Matemáticas cuando creen que siempre la mejor forma de resolver un problema es empleando álgebra, en lugar de acercamientos numéricos o gráficos.

En otro problema (problema 4) que se ubica en este bloque de preguntas, el estudiante E6 parece reconocer que el desarrollo de los procesos que le permiten resolver una integral existe una discontinuidad que no le permite poder aplicar las reglas de derivación directamente. Trata de resolver este problema a través del uso de un cambio de variable sin percatarse que el problema persiste ya que incluso ajusta adecuadamente los límites para este cambio de variable. Al emplear el software para determinar el valor de esta integral obtiene el mismo resultado que le da el proceso donde empleó el cambio de variable, lo que le ayuda a creer que su respuesta es correcta. Es decir, el uso del software no le permite identificar dónde está el error en el procedimiento empleado al resolver la integral. Durante el desarrollo de la entrevista se da cuenta de la necesidad de reflexionar sobre las condiciones sobre el dominio de la función antes de aplicar directamente las fórmulas de integración. Se constata aquí que durante la entrevista el alumno tiene oportunidad de realizar una reflexión que le permite elaborar o analizar las ideas con más profundidad, lo que queda patente en el extracto siguiente.

Escenario 3. Pregunta 4.

104) I*: Entonces dices, me da menos dos*
105) E*: ¡Me da menos dos! Pero.*
106) I*: Cambiaste hasta los límites de integración.*
107) E: *En este intervalo no lo chequee. Pero esto es* falso (señala la integral original) *porque no se puede calcular.*

108) I*: Cuando haces la nueva Integral Definida, ¿Los límites de integración quedan igual que el anterior?*



109) E: *Yo los cambié,* (pero no es cierto, mantiene los límites) *si fuera indefinida no hay problema, pero como es definida, este 2* (limite superior) *lo metí en x-1 y este cero aquí (x-1) e hice mi cambio. Aquí no sería 2 y 0,* sustituye los limites de integración 2 y 0 en u=x-1 y los resultados los cambia en la integral.

110) I: *Dijiste aquí: "por lo tanto es verdadero"*

111) E*: Ahora te digo que es falsa.*

112) I*: ¿Por qué?*

113) E: *Porque como le dije ahora, si usted me da la restricción, si evaluamos esta función, llamémosla* $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$*, ¡verdad! Nosotros primero antes de evaluarla, si yo entre 0 y 2 coloco 1 se me hace cero abajo* (señala la integral original) *o sea una función indefinida, discontinua y ahí la integral no puede ser, tendríamos que evaluar primero la función, ver si en el intervalo que me dan es real y chequear, yo me fui así y no la vi* (señala la integral original)

114) I: *¿Por qué no me has estudiado eso en las otras funciones en donde has calculado la integral? ¿Por qué esperaste hasta aquí para decírmelo?*

115) E: *Porque las otras funciones, las que usted me dio es un polinomio, polinomio es real en todo el dominio, todo el dominio de él son reales, hay imágenes para todo su dominio.*

116) I: *¿Y el valor absoluto?*

117) E: *El valor absoluto,* (pausa) *¡también!, bueno depende que función me pueda dar, si usted me coloca y dice valor absoluto de esto* (señala la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$) *me puede colocar valor absoluto de todo esto, me tiene que especificar valor absoluto de qué, una función polinomio o este tipo de función* (señala la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$) *me la puede colocar en un valor absoluto y sería siendo en este intervalo, no podría ser, sería indefinida, o sea.*

118) I*: ¿Y si yo te propusiera la integral entre 3 y 4 de* $\dfrac{1}{(x-1)^2}dx$*?*

119) E: *Así* (escribe $\int_3^4 \dfrac{1}{(x-1)^2}dx$) (pausa, mueve la cabeza en señal afirmativa) *si, si sería real, o sea no hay un valor después de 3 que vaya a dar cero, no lo hay, negativo tampoco me da aquí, porque esta elevado al cuadrado, si, en este intervalo si y no sería -2 supongo* (ver anexo 17, pp. 236-237).

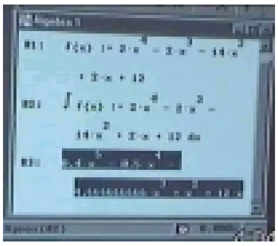
En el otro problema, se proporciona un polinomio de grado cuatro (pregunta 7) y se le pide calcular el área que forma el polinomio con el eje OX. En este problema el estudiante E6 no se plantea la necesidad de recurrir al registro gráfico que le permita identificar los límites de integración. Se limita a reportar que no cuenta con los datos suficientes para determinar el área. Es decir, no se da cuenta que resolviendo la ecuación que se le asocia a la función puede determinar esos elementos que necesita. El uso del software tampoco ayuda al estudiante E6 a resolver este problema. Parece que cuando se le proporciona el registro gráfico de alguna manera puede identificar los intervalos de integración, o cuando conoce la función que hay que integrar (ejemplo la del valor absoluto) es capaz de trabajar en los problemas, pero en otros casos no identifica los conceptos y procedimientos que hay que utilizar para encontrar la información que permitan resolver la integral en estudio. El siguiente diálogo muestra lo anterior.

Escenario 3. Pregunta 7.

51) E*:* Accede a *DERIVE* y escribe *f(x)= y* dice *¿dónde están los puntos aquí?* El entrevistador le menciona donde está, se equivoca al escribir la función, debe escribir $f(x) := 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ y escribe $f(x) =: 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$. Aprieta varias veces la tecla enter.

52) I*: Está puesto al revés el dos puntos y el igual.*

53) E: *Ah, OK,* lo escribe de forma correcta, aprieta enter y aparece la función en la ventana simbólica de *DERIVE.* Marca el icono de la integral y selecciona la integral indefinida, aparece expresada en pantalla la integral indefinida, marca el icono de igualdad y aparece el resultado, marca el icono de aproximado y le aparece el resultado. Dice *¡sería esta la respuesta!*



54) I*: ¿Sería esa el área?*

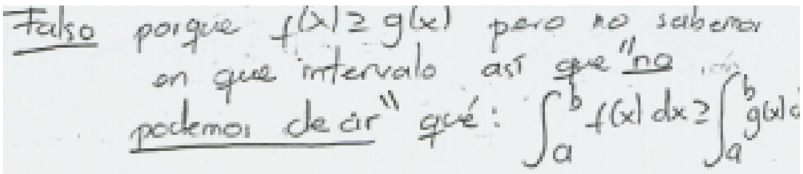
55) E*: Aja, y me da una función como le dije porque no tengo un intervalo, las integrales definidas nos daban una función, una ecuación.*

56) I: *¿Pero me dijiste antes que era un número la integral?*

57) E: *¿La integral un número? ¿Le dije que era un número?* (ver anexo 17, p. 230).

Finalmente, en el último grupo de problemas que conceptualmente exigen conectar al menos dos registros de representación (gráfico y algebraico) a través de instancias particulares que el mismo estudiante tiene que sugerir, el estudiante E6 otra vez manifiesta que en virtud de que no se explicitan los intervalos en donde f y g cumplen con las condiciones, entonces no se puede afirmar nada con respecto al comportamiento de las integrales. Así lo hace patente en los tres escenarios propuestos:

Escenario 1. Preguntas 5.



Falso porque $f(x) \geq g(x)$ pero no sabemos en que intervalo así que "no podemos decir" qué: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)$

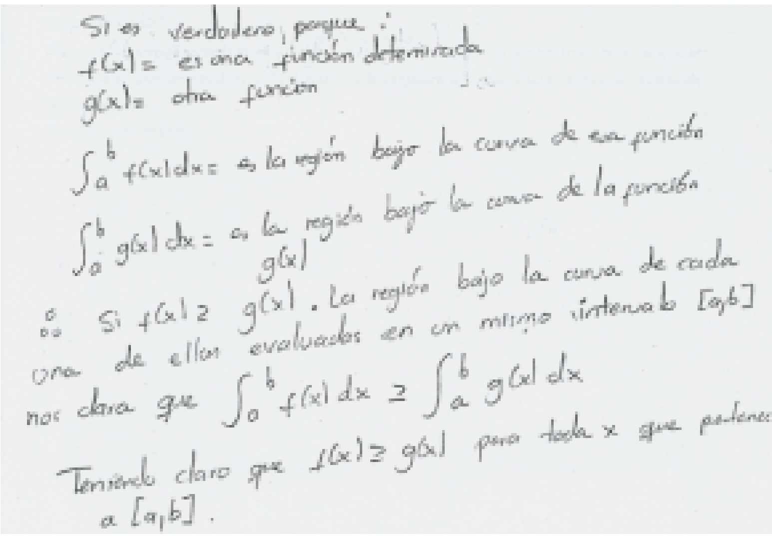
(ver anexo 17, p. 237)

Escenario 2. Preguntas 5.

```
Falsa ya que no me especifican en que intervalo la funcion f(x) es mayor que
la funcion g(x), por lo tanto no podemos asegurar que la interal de f(x)
evaluada en el intervalo [a,b] es mayor que la integral de g(x) evaluada en
este mismo intervalo.
```

(ver anexo 17, p. 237)

Escenario 1. Preguntas 6.



Si es verdadero, porque :
$f(x)=$ es una función determinada
$g(x)=$ otra función
$\int_a^b f(x)dx =$ es la región bajo la curva de esa función
$\int_a^b g(x)dx =$ es la región bajo la curva de la función $g(x)$
∴ Si $f(x) \geq g(x)$. La región bajo la curva de cada una de ellas evaluadas en un mismo intervalo $[a,b]$
nos aclara que $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
Teniendo claro que $f(x) \geq g(x)$ para toda x que pertenec
a $[a,b]$.

(ver anexo 17, p. 237)

Escenario 2/ PREGUNTA 6

```
 Es verdadera ya que nos especifican en que intervalo f(x) es mayor que g
(x). La integral es la region bajo la curva de f(x) y g(x), `por lo tanto si
f(x) es mayor o igual que g(x) tambien sus integrales son mayores o iguales
evaluadas en ese mismo intervalo [a,b]
```

(ver anexo 15, p. 237)

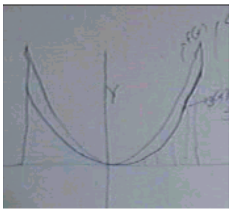
Escenario 3. Pregunta 5.

124) I*: ¿Y porqué era falsa?*
125) E: *Para mí.*
126) I: Para ti.
127) E*: Arriba dije que era falsa* (se refiere a primera proposición, problema 5), *porque me dicen f(x) mayor o igual que g(x) pero no me dieron la restricción del intervalo, aja, en dónde f(x) es mayor que g(x), entonces la integral en este intervalo* (se refiere a la primera integral) *es mayor que la integral en este intervalo* (se refiere a la segunda integral) *yo dije, ajá, tu sabes que la integral* (señala la primera integral) *sería la región bajo la curva de esta gráfica* (señala expresión f(x)) *y ésta* (señala la segunda integral) *sería la región bajo la curva de esta gráfica* (señala la expresión g(x)) *pero no me dijeron, o sea no me especificaron el intervalo, todavía ahí yo en esta parte no, o sea no estuve muy segura de responder, me confundí bastante* (ver anexo 17, p. 238).

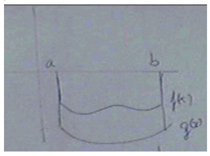
En ningún momento trata de pensar en algunos ejemplos que le ayuden a entender la información asociada con las proposiciones. Aquí el empleo del software no le ayuda a entender las condiciones del problema ya que no existe una función particular a trabajar. Es interesante observar que en el desarrollo de la entrevista donde el estudiante examina estos problemas, solamente, cuando el investigador encargado de la entrevista le sugiere que realice alguna gráfica acerca de la hipótesis de la proposición, es cuando comienza a visualizar la información y procesos importantes para afrontar este tipo de problemas. Veámoslo en el siguiente extracto de la entrevista:

Escenario 3. Pregunta 5.

Al preguntarle



140) I: *¿Tú podrías representar gráficamente que se entiende por la parte de arriba, con un ejemplo?* (se refiere a la primera proposición, problema 5).
141) E: *¿Ésta?* (señala la primera proposición, problema 5) *¿Con gráfico?*
142) I*: ¿Cómo quieras?*
143) E*: ¡Bueno! Llamemos a esta parábola f(x), la región de ella, llamemos a g(x) otra parábola más pequeña, más abierta, así la entiendo yo. Entonces la integral de f(x) es mayor que la de g(x)* (observa la tesis en la primera proposición, problema 5).



144) I*: Y si ahora tenemos esta gráfica y ésta es f(x) y ésta g(x)* (el entrevistador grafica las curvas) *¿se seguirá cumpliendo la propiedad?*
145) E*: ¿Tomando los negativos? O sea, ¿Bajo el eje OX?*
146) I*: Ahí ¿f(x) será mayor que g(x)?*
147) E*: ¡Aja!, aquí lo que me pone en duda es esta componente de la x, me daría la imagen negativa del área, pero yo la pongo en valor absoluto y me da un área positiva, ésta área de g(x) (señala la región de g) es mayor que ésta área (señala la región de f). Me está diciendo que f(x) es ésta, hasta aquí llega f(x).* (ver anexo 17, p. 238).

Escenario 3. Pregunta 6.

Al preguntarle.

154) I*: La otra* (se refiere a la segunda proposición, problema 6) *es falso ¿por qué?*
155) *E: La otra, está al revés, la veo al revés, me colocaron primero esto* (señala la tesis de la proposición y dirige la mirada a la hipótesis, hace una pausa de varios segundos) *¡si es falso!* De nuevo pausa de varios segundos.
156) I: *¿Cómo demostrarías que es falsa?*
157) E: *Por ahí* (señala la gráfica anterior) *más que todo, por aquí* (se acerca a la gráfica) *usted me está diciendo la integral, ¡verdad!, aquí se cumple lo contrario de esto,* (señala segunda proposición, problema 6) *aquí la integral es mayor, pero la función no lo es. No puedo decir que una función es mayor que otra porque me digan primero la integral, si vemos allá, aquella integral de g(x), la región es mayor que la de f(x), pero f(x) es mayor que g(x), ésta* (se refiere a la integral de g(x)) *es mayor que ésta* (se refiere a la integral de f(x)) *allá* (señala la gráfica). (ver anexo 17, p. 239).
158) I*: ¿Entonces no estoy suponiendo que las integrales son mayores?, o sea lo que dice ahí es: si se cumple que las dos integrales están* (no completa la frase) (ver anexo 17, p. 236).

6.5. CONCLUSIONES DE LA SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Las conclusiones de esta última fase de nuestra investigación, han sido organizadas de dos formas diferentes.

En primer lugar, se desarrolla un análisis individual mediante un estudio de casos, en el que se tienen en cuenta las actuaciones de los estudiantes en cada grupo de preguntas. De esta forma, identificando las distintas acciones que realiza cada estudiante y comparándolas con las que se describen en el apartado 3.4.2 para cada una de las preguntas, podemos ubicar al estudiante en una de las categorías que aparecen descritas en nuestro módulo de competencia cognitivo (véase el apartado 2.5 para más detalles). En definitiva, este primer análisis nos permite ubicar a cada estudiante en un estadio de desarrollo cognitivo basado en los sistemas de representación (semiótico-1; estructural-2; autónomo-3) y en una categoría según el estadio en el que situamos el estudiante (1 A o B; 2 A o B; 3 A o B).

El segundo análisis que se desarrolla para el establecimiento de las conclusiones de este capítulo, resulta más global que el anterior y para él definimos tres perfiles de estudiantes, que vienen clasificados por sus comportamientos a la hora de resolver las tareas en los tres escenarios, pero centrando más la atención en los escenarios 2 y 3, es decir en las Prácticas de Laboratorio y en las decisiones que toman a la hora de enfrentarse con los problemas propuestos en la entrevista. El uso que hacen del PCS, resulta determinante a la hora de establecer los perfiles.

El primer análisis es desde el un punto de vista individual, de tal manera que mediante el estudio de casos que se realizó, en el que se tiene en cuenta las actuaciones de cada estudiante en cada grupo de preguntas, nos ayuda a determinar las acciones que se aproximen a las previstas en el modelo de competencia. En el segundo, un estudio global, en el que se exhiben tres perfiles que responden a la actuación de los estudiantes cuando resuelven las tareas propuestas.

Estudio de Casos

El estudiante E1, en el primer grupo de preguntas, asocia la Integral Definida con el cálculo de la antiderivada. Considera que el cálculo de la Integral Definida es un proceso algebraico que relaciona la función y su antiderivada.

Escasamente utiliza representaciones gráficas para apoyar sus planteamientos. Tiene dificultades para interpretar gráficas de funciones discontinuas. Ante un problema, en la que la gráfica tiene saltos, aproxima los límites de integración. La identificación de las regiones las realiza en el caso que se trate de gráficas que no presenten saltos.

Cuando tiene que calcular el área de una región que tiene una porción sobre y otra bajo el eje *OX*, al utilizar aproximación numérica no hace distinción entre las dos regiones, cuando utiliza integrales, antes de sumar los resultados, le cambia el signo al resultado de la integral (valor negativo) de la porción bajo el eje *OX*. Es posible que detecte cuándo la integral es igual al área. Lo que no está claro es si esto es por el planteamiento de los problemas o si en realidad es capaz de diferenciar las distintas acepciones de la integral (valor positivo, negativo o cero) en el contexto de cualquier tipo de problemas.

Comparando la actuación del estudiante E1 con las acciones de usuario ideal tipificado en modelo de competencia se tiene que: Realiza un reconocimiento de registro gráfico siempre que se trate de una gráfica que no presente saltos. El tratamiento del registro algebraico lo realiza al plantear integrales y resolverlas utilizando la herramienta “Cálculo” de *DERIVE* o aplicando la regla de Barrow.

Podemos establecer las acciones del estudiante E1. Reconoce los registros algebraico y gráfico y realiza tratamientos en los mismos. La siguiente tabla representa las acciones.

R_A, R_G, T_A, T_G

En el segundo grupo de preguntas tiende a utilizar procedimientos algebraicos, sin apoyo gráfico, utilizando integrales y procedimientos análogos a los descritos anteriormente. Al insistirle (en la entrevista, problema 3) que utilice conocimientos de geometría elemental, calcula el área utilizando triángulos, pero no menciona que lo que calcula sea la integral; puede que no relacione área-

Integral Definida-región bajo una curva. Por otra parte, es posible que crea que la aplicación de este tipo de procedimientos no sea aceptable, obstaculizando la transferencia de conocimientos antiguos a los nuevos.

Cuando se le plantea el cálculo del área y se le proporciona la expresión algebraica (pregunta 7) y no se indica explícitamente el intervalo de integración, su reacción es aplicar un cálculo algebraico. Únicamente cuando grafica (usando el PCS) logra establecer el procedimiento adecuado de cálculo del área. De nuevo se distingue una tendencia al uso de procedimientos algebraicos, en el que la integral es un proceso de aplicación de una serie de pasos, sin detenerse a pensar en el significado de los resultados que va obteniendo.

Comparando la actuación del estudiante E1 con las acciones de usuario ideal tipificado en modelo de competencia se tiene que en este grupo de problemas, en líneas generales, se observa que reconoce los registros algebraicos (algunas veces por insistencia del entrevistador) y realiza tratamientos de éstos. El planteamiento de representaciones gráficas casi no está presente, salvo que se le insista en su uso.

Las acciones del estudiante E1 se presentan a continuación:

$$\boxed{R_A,\ T_A}$$

En el tercer grupo de preguntas (5 y 6) al plantearle proposiciones generales, ilustra la relación de la hipótesis y la tesis en cada una, con ejemplos gráficos y con ejemplos de funciones particulares. No menciona en sus comentarios el área; puede que no establezca relaciones entre el área y la integral. Elabora y realiza un correcto tratamiento del los registros gráficos (en la entrevista), que utiliza para ilustrar la veracidad de la primera proposición y falsedad de la segunda.

Comparando la actuación del estudiante E1 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas se puntualiza que elabora y realiza un correcto tratamiento del registro gráfico. Esto es sorprendente en virtud de su tendencia al trabajo algebraico.

Sus acciones en este grupo de preguntas son:

$$\boxed{R_A,\ E_G,\ T_G}$$

El uso de *DERIVE* se limita al cálculo de integrales aplicando la herramienta "Cálculo" y la representación de la gráfica de una función. No referencia el uso del Programa de Utilidades, ni existen elementos que haga pensar que considere su aplicación.

De lo anteriormente expresado y considerando que el estudiante E1 realiza un reconocimiento de un tipo de registro, sea el algebraico o el gráfico, realiza cierto tratamiento de cada uno, la relación que establece entre ambos no se puede considerar como una conversión coordinada, podemos ubicarlo según el modelo de competencia en la categoría 2A del estadio estructural.

Estudiante E2, de las respuestas dadas en el primer grupo de preguntas, se deduce que asocia la Integral Definida con el cálculo aproximado de la medida de una región, que puede asumir valores positivos o negativos.

Para calcular el área de una región bajo una curva, por ejemplo en la pregunta 2, plantea integrales y las calcula aplicando la regla de Barrow. Muestra fluidez en los pasos seguidos. Pero en el planteamiento de las integrales trata indistintamente las regiones sobre y bajo el eje *OX*. Es posible que no comprenda la manera de obtener en términos de la Integral Definida el área de una región que se encuentra bajo el eje *OX*.

Al solicitarle que calcule el área de una región bajo un curva, cuya gráfica presenta saltos, plantea integrales y utiliza aproximaciones de los valores de las abscisas en los puntos de discontinuidad, como limites de integración. Es posible que posea una idea del área relacionada con gráficas de funciones continuas y al aproximar los límites de integración intenta trabajar con la porción continua en cada subintervalo.

Prefiere aplicar procedimientos algebraicos y escasamente utiliza representaciones gráficas.

Comparando la actuación del estudiante E2 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia se tiene que en este grupo de preguntas reconoce y realiza tratamientos del registro algebraico. Presenta dificultades en el tratamiento del registro gráfico cuando se trata de regiones bajo el eje *OX,* o cuando la gráfica de la función presenta saltos.

Las acciones de este estudiante se expresan como sigue:

$\boxed{R_A, T_A}$

En el segundo grupo de preguntas se observa que la resolución, en general, está basada en la aplicación de procedimientos algebraicos con escaso soporte gráfico. No logra transferir con facilidad conocimientos de antiguos a los nuevos (ver análisis de la pregunta 3, escenario 3). Cree que su actuación debe estar acorde con los contenidos dados en clase, esto puede limitar la transferencia de conocimientos antiguos a los nuevos.

Se observa que, por ejemplo en las preguntas 4 y 7, el uso del PCS le ayuda a plantearse argumentos basados en representaciones gráficas, los que utiliza con facilidad.

Comparando la actuación del estudiante E2 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en el anterior grupo de preguntas el comportamiento es similar al observado en el primer grupo, uso de procedimientos algebraicos con escasa utilización del aspecto gráfico. No obstante se debe notar que el PCS le ayuda al uso de las representaciones gráficas en sus argumentaciones. Se puede decir que realiza un reconocimiento y tratamiento de los registros algebraicos. El tratamiento de registro gráfico está condicionado al uso del PCS.

Sus acciones son las siguientes.

$\boxed{R_A, R_G, T_A, T_G}$

En el último grupo de preguntas, se observa que tiende a argumentar la veracidad o falsedad de proposiciones generales con planteos algebraicos. Al cuestionarle (en la entrevista) y proponerle un registro gráfico tiene dificultades para interpretarlo, además no es capaz de plantear nuevos gráficos.

Su actuación, en este grupo de preguntas, es similar a lo descrito en el grupo precedente.

Las acciones en este grupo de preguntas son.

$\boxed{R_A, R_G, T_A, T_G}$

El uso del PCS se limita al cálculo de integrales aplicando la herramienta "Cálculo" y a la representación gráfica de algunas funciones. No se detectaron elementos que nos hagan pensar que considere el PU en la resolución de los problemas planteados.

De lo expuesto anteriormente se puede puntualizar que el estudiante E2 tiende a realizar reconocimientos y tratamientos de registros algebraicos. Los registros gráficos son utilizados escasamente; no obstante creemos que el uso del PCS le puede ayudar a mejorar el tratamiento que realiza de este registro. Comparando la actuación del estudiante E2 con el modelo de competencia lo podemos ubicar en la Categoría 2A del estadio estructural.

El estudiante E3, en el primer grupo de preguntas realiza comentarios (pregunta 1) que nos conduce a suponer que asocia la Integral Definida con el cálculo de la primitiva de una función. Para él, la Integral Definida es un proceso algorítmico de resolución de problemas.

Utiliza indistintamente la aproximación numérica y la Integral Definida (aplicando la regla de Barrow) para calcular el área de una región, sin considerar cuál es la forma más sencilla de resolver el problema.

Utiliza escasamente las representaciones gráficas en la resolución de los problemas. En contraposición a esto, los procedimientos son de tipo algebraicos.

Al calcular el área de regiones que se encuentran bajo el eje *OX*, no distingue entre el valor negativo que obtiene y el significado que tiene en relación al área. El hecho de que considere el cálculo de la Integral Definida como un proceso algorítmico, puede que le produzca un obstáculo en el momento de realizar tal distinción.

En el problema en el que se presenta la discontinuidad en dos puntos (pregunta 9) escribe adecuadamente los límites de integración en los puntos de discontinuidad. Puede que la forma algorítmica que utiliza no le permita plantearse situaciones similares a las expuestas por los estudiantes E1 y E2.

Comparando la actuación del estudiante E3 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de problemas se limita al tratamiento del registro algebraico de manera algorítmica. El proporcionarle una representación gráfica de una función continua, la conduce a realizar un tratamiento de un registro numérico. A pesar que grafica una curva, se puede decir que existe una ausencia casi total del registro gráfico.

En cuanto a sus acciones tenemos:

$\boxed{R_A, T_A, T_G, E_N}$

En lo que corresponde al segundo grupo de preguntas puntualizamos que, al igual que en el anterior grupo de preguntas implementa procedimientos algorítmicos; por ejemplo, define la función valor absoluto (pregunta 3), erróneamente y al tratar de graficarla utiliza varios puntos en cada semirrecta, puede que no tenga claro la forma que tiene la función y reaccione a un proceso mecánico. La transferencia de conocimientos antiguos a los nuevos, por ejemplo, el uso de regiones triangulares en la pregunta 3, pudo ser inducida por el comentario de algún estudiante antes entrevistado, más que por iniciativa propia. Al igual que el estudiante E2 utiliza el PCS en la resolución del problema 7.

Comparando la actuación del estudiante E3 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia se tiene que en este grupo de problema se ratifica lo mencionado en el primer grupo de preguntas, el estudiante E3 utiliza las integrales como un proceso algorítmico, se puede decir que realiza medianamente un tratamiento del registro algebraico. El tratamiento del registro gráfico es implementado en el momento que se le requiera expresamente (escenario 3).

Las acciones quedan expresadas como sigue:

$\boxed{R_A, T_A, T_G}$

Por último en el tercer grupo de preguntas, utiliza representaciones gráficas para ilustrar la veracidad de la primera proposición y falsedad de la segunda. Las gráficas son similares a las utilizadas por el estudiante E1, es posible que su proceder esté inducido por este estudiante. Al margen de esta observación, realiza un adecuado tratamiento del registro gráfico y aparentemente entiende el significado de los términos generales que se le presentan.

Comparando la actuación del estudiante E3 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia se tiene que en este grupo de preguntas el estudiante E3 basa la resolución de los problemas en un tratamiento de registros gráficos.

Las acciones se expresan de la siguiente manera.

R_A, T_G

En los procedimientos y comentarios expuestos por el estudiante E3 no se detectaron indicios que nos hagan pensar que la instrucción recibida en las Prácticas de Laboratorio influya en el tipo de respuesta.

Tomando en cuenta las respuestas dadas por el estudiante E3 en los tres grupos de preguntas y considerando que en general realiza reconocimiento y tratamiento del registro algebraico, y que el numérico y el gráfico es escasamente implementado, podemos ubicarlo, de acuerdo al modelo de competencia en la categoría 2A del estadio estructural.

El estudiante E4, en relación al primer grupo de preguntas se observa que la Integral Definida la asocia al cálculo aproximado del área de una región, mediante el uso de cálculo numérico y gráfico.

Ante un problema en el que se le proporciona una gráfica de una función continua, inmediatamente lo asocia con el uso de rectángulos y aproximación numérica, siguiendo un procedimiento similar al implementado en las Prácticas de Laboratorio, en las que manipuló el PU. Si la gráfica de la función tiene saltos, utiliza integrales, en las que considera como límites de integración los valores de las abscisas en los puntos de discontinuidad. Se observa que realiza mejores tratamientos de los registros numéricos y gráficos que en los algebraicos.

Ante un problema en la que la región se encuentra bajo el eje *OX* (pregunta 2) reconoce, que a pesar de que el valor que obtiene es negativo, se le debe cambiar de signo cuando se trata del área de la región bajo el eje *OX*.

Comparando la actuación del estudiante E4 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas evidencia que el tratamiento que realiza del registro gráfico y numérico está condicionado por la instrucción recibida. El uso de la Integral Definida, resuelta por la regla de Barrow, es utilizada como método alternativo. Se observa que realiza conversión entre el registro gráfico y numérico.

Sus actuaciones se representan en la siguiente tabla. Además del reconocimiento de los registros algebraico y gráfico y tratamiento de los registros gráfico y numérico, aparece la conversión entre el registro gráfico y numérico.

R_A, R_G, T_G, T_N, $C_{G \to N}$

En el segundo grupo de preguntas, cuando intenta plantear un procedimiento algebraico, por ejemplo en la pregunta 3, no logra interpretar el problema. En el momento que grafica la función, procede como en el grupo de preguntas anteriores, grafica rectángulos o trapecios, utiliza el PU (escenario 3) y calcula el área aproximada. En la pregunta 7 representa gráficamente la función en PCS y aplica el PU. El uso del PU, de alguna manera, sustituye el procedimiento aplicado por los estudiantes precedentes, que utilizaron triángulos y transfirieron conocimientos antiguos a los nuevos

Adicionalmente se observa que el uso casi exclusivo del PU, por parte del estudiante E4, aparentemente le dificulta traducir el cálculo de la Integral Definida en términos del área.

Comparando la actuación del estudiante E4 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, mencionamos que los tratamientos que realiza de los registros gráficos y numéricos están condicionados por el uso del PU. Consideramos, como en el anterior grupo de preguntas, que realiza una conversión entre los registros gráfico y numérico. El tratamiento del registro algebraico es percibido como un mecanismo alternativo, que en lo posible prefiere no implementar.

Las acciones son como sigue.

R_A, R_G, T_G, T_N, $C_{G \to N}$

En el tercer grupo de preguntas se observa que tiene dificultades al tratar de interpretar las proposiciones generales. Puede que el hecho de no tener funciones definidas que pueda utilizar para el PU le produzca un obstáculo a la hora de argumentar la veracidad o falsedad de las proposiciones. En el escenario

1 consideró funciones particulares, no grafica y utiliza integrales. Esto resulta un tanto contradictorio por su inclinación a lo gráfico-numérico.

Su actuación está condicionada por la ausencia de funciones definidas. Los comentarios que realiza en la entrevista no son suficientes para considerarlos como un buen tratamiento del registro gráfico que elabora.

Debido a que fue capaz de reconocer debidamente los registros algebraicos dados, es posible que no pudiese realizar las acciones previstas en el modelo de competencias para este grupo de preguntas.

La actuación del estudiante E4, a pesar de las dificultades observadas para realizar tratamientos de los registros algebraicos, pero que al trabajar con registros gráficos realiza un tratamiento de éste y conversión al numérico. Tomando en cuenta esto lo ubicamos en la categoría 2B del estadio estructural.

El estudiante E5, en el primer grupo de preguntas asocia la Integral Definida con un proceso que relaciona la función y su antiderivada.

Utiliza escasamente representaciones gráficas en su explicación. Cuando representa una función en *DERIVE* y observa en la pantalla una aparente discontinuidad, se confunde y no logra interpretar la información que el PCS le proporciona.

Comparando la actuación del estudiante E5 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas se limita a un escaso tratamiento del registro algebraico, el registro gráfico es de tipo referencial y se limita, por ejemplo en la pregunta 2 (escenarios 1 y 2), al establecimiento de los límites de integración. El uso del PCS, al graficar, le confunde porque no logra interpretar la representación que le muestra la pantalla.

La acción que realiza se expresa de la siguiente manera.

$$\boxed{R_A}$$

En el segundo grupo de preguntas, en la pregunta 3 escenario 1 realiza un tratamiento correcto del registro algebraico, no grafica la función. En la entrevista plantea el mismo proceso; por iniciativa propia resuelve el problema delimitando las regiones con triángulos y transfiriendo conocimientos antiguos a los nuevos. Reconoce que el procedimiento en el que se utilizan figuras elementales es más fácil, pero considera que debe utilizar el procedimiento dado en el curso. En la pregunta 4 no grafica y se limita a mencionar la discontinuidad de la función en su argumentación. En la pregunta 7 se confunde con la gráfica que representa en la pantalla de *DERIVE*, la observa de manera discontinua.

Comparando la actuación del estudiante E5 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que su actuación en este grupo de preguntas está restringida al tratamiento algebraico. En las otras dos preguntas no se puede afirmar que interpreta correctamente lo que se le plantea.

Al igual que en el anterior grupo de preguntas, la acción que realiza es la siguiente.

$\boxed{R_A}$

En el tercer grupo de preguntas, en los escenarios 1 y 2, no interpreta las proposiciones que se le plantean. En la entrevista elabora registros gráficos similares a los utilizados por los estudiantes E1 y E3, lo que nos hace pensar que sus respuestas son inducidas por estos estudiantes. Al no realizar un reconocimiento de los registros algebraicos dados, es posible, que le impida realizar las acciones requeridas en el modelo de competencia.

La actuación del estudiante E5 en este grupo de preguntas, si tomamos en cuenta lo expuesto en los escenarios 1 y 2, se observa que no interpreta los registros algebraicos dados y por tanto no realiza ningún tratamiento. En cuanto a la entrevista, sus respuestas pueden haber sido inducidas por estudiantes antes entrevistados.

No se detectaron indicios que nos hagan pensar que considera los procedimientos dados en las Prácticas de Laboratorio, ni influencia del Programa de Utilidades en los comentarios y procesos de resolución de los problemas.

De lo antes mencionado se puede decir que el estudiante E5, de manera general, realiza un escaso reconocimiento del registro algebraico, el gráfico es utilizado como referencia, sin que realice un tratamiento profundo. Al comparar la actuación del estudiante E5 con el modelo de competencia, la podemos ubicar en la categoría 1B del estadio semiótico.

El estudiante E6, en el primer grupo de preguntas asocia la Integral Definida al cálculo del área bajo una curva.

El tratamiento que realiza de los registros gráficos (ver análisis de las preguntas 2 y 9) se asemeja a los procedimientos seguidos en las Prácticas de Laboratorio, en cuanto a la construcción de rectángulos que aproximan la región bajo la curva. En la pregunta 2, escenario 1, utiliza la aproximación numérica para estimar el área de la región, en las que identifica cada región y reconoce la necesidad de cambio de signo del resultado del valor obtenido para la porción bajo el eje *OX*. Entre sus comentarios reconoce que al proporcionarle la gráfica la asocia con la aplicación de la aproximación numérica.

Comparando la actuación del estudiante E6 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia se tiene que en este grupo de preguntas, en general, realiza un reconocimiento de los registros y tratamiento de los gráficos y conversión al registro numérico. En el tratamiento de los registros se observa la influencia de la instrucción recibida.

Sus actuaciones se expresan de la forma siguiente.

$$\boxed{R_A,\ R_G,\ T_A,\ T_G,\ C_{G\rightarrow N}}$$

En el segundo grupo de preguntas, por ejemplo en la pregunta 3, calcula la Integral Definida, definiendo la función valor absoluto y utilizando integrales; los cálculos los realiza aplicando la regla de Barrow. El estudiante expresa que al proponerle una integral le induce a resolverla sin plantearse la gráfica. Al solicitarle que lo resuelva de otra manera, representa gráficamente la función y delimita la región con triángulos, en la idea de los estudiantes E1, E3 y E4, puede que estos estudiantes hayan influido en el tipo de respuesta dada por el estudiante E6. En el problema 7, se observa que el usar el PCS le confunde y no logra interpretar el problema, hasta tal punto que confunde la Integral Definida por la primitiva de una función. Por la manera de resolver los problemas, es posible que graficando la función lograra calcular el área.

La actuación del estudiante E6 en este grupo de preguntas evidencia cierto condicionamiento a la forma como están planteados los problemas. Al plantearle un registro algebraico $\left(\int_a^b f\right)$ no reflexiona sobre el signo de la Integral Definida, continúa el proceso hasta el final en donde debe identificar área e Integral Definida.

Comparando la actuación del estudiante E6 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas reconoce y realiza tratamientos de los registros algebraicos, elabora registros gráficos y realiza un tratamiento en estos registros, y conversión entre los registros algebraico y gráfico.

En cuanto a sus acciones se tiene que.

$$\boxed{R_A,\ R_G,\ T_A,\ T_G,\ C_{A\to G}}$$

En el último grupo de preguntas, la idea que tiene del área asociada a la Integral Definida le impide interpretar situaciones que involucran gráficas de curvas dibujadas bajo el eje *OX*. Sin embargo cuando las curvas están representadas sobre el eje *OX* logra la interpretación de las proposiciones.

Comparando la actuación del estudiante E6 con las acciones de usuario ideal tipificado en el modelo de competencia, se tiene que en este grupo de preguntas su actuación se restringe al tratamiento de registros gráficos de funciones positivas, con los que logra interpretar proposiciones generales. Se puede decir que en estas condiciones realiza conversión entre el registro algebraico y gráfico.

Al considerar las acciones se tiene que.

$$\boxed{R_A,\ R_G,\ T_A,\ T_G,\ C_{A\to G}}$$

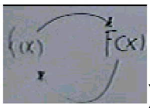
De lo anteriormente expuesto y tomando en cuenta que el estudiante E6 realiza tratamiento de registros gráficos y numéricos, y conversión entre ellos, la podemos ubicar según el modelo de competencia en la categoría 2B del estadio estructural.

Estudio Global

Como hemos señalado con anterioridad, establecemos tres perfiles de estudiantes que responden a una serie de características:

Perfil 1

El uso del PCS se limitó al cálculo de integrales o la localización de cortes de la curva con el eje OX. El estudiante que se encuentra en este perfil utiliza fundamentalmente procedimientos algebraicos y/o numéricos en la resolución de los problemas, con escaso soporte gráfico. Cuando se le plantean situaciones en las que debe utilizar representaciones gráficas se confunde y tiende a proporcionar argumentos algebraicos. Resultó paradójico que en los problemas en que se les plantearon proposiciones genéricas, utilizaron representaciones gráficas para argumentar la veracidad o falsedad de las mismas. El cálculo de la Integral Definida es percibido como la aplicación de un procedimiento algorítmico, sin preocuparse de su significado en el contexto del problema. En este perfil ubicamos a los estudiantes E1, E3 y E5. Como ejemplo de la actuación de uno de los estudiantes, el E1, se tiene que al pedirle que explique el significado de $\int_a^b f(x)dx$, éste responde.

> 10) E: *Si yo tengo la integral* $\int_b^a x^2 \cdot dx$ *entonces al integrar esto (señala el integrando) me daría la antederivada, o sea me daría* $x^3/3$*; lo que quiere decir que si tengo esta función* (dibuja 
>
>) *si yo integro esto* (se refiere a la función de la izquierda*) me da esto* (se refiere a la función de la derecha*), igualmente si yo derivo esto* (se refiere a la función de la derecha) me da esta función (se refiere a la función de la izquierda). *Si derivo esto* (señala la expresión $x^3/3$) *me quedaría* $\frac{3x^2}{3} = x^2$.

Los comentarios en esta pregunta giran en torno al uso del Teorema Fundamental del Cálculo. No alude el uso de los métodos utilizados en las Prácticas de Laboratorio. Puede que la instrucción recibida no influya en la manera de cómo el estudiante E1 entiende la Integral Definida.

Perfil 2

El estudiante que ubicamos en este perfil, asocia el uso del software con el de una herramienta que le permite hacer más fácil el acercamiento para la resolución de un problema que utilizando papel y lápiz. El estudiante que responde a este perfil, en general, reconoce la importancia de encontrar áreas de curvas limitadas a través de la idea de aproximación. Es consciente de la necesidad de mejorar y obtener buenas aproximaciones mediante un proceso de refinar una partición dentro de un intervalo. Sin embargo, no desarrolla una clara comprensión del proceso de seleccionar una partición particular en el intervalo dado. Eso ocurre en concreto cuando intenta realizar esta tarea sin el uso del software. También asocia el concepto Integral Definida con el proceso de calcular su valor, aunque no identifica las condiciones necesarias para aplicar el procedimiento. De hecho, a menudo el software lo usa como un medio para apoyar lo que hace en papel y lápiz. Otro resultado importante es que cuando el estudiante trabaja en un problema en donde se le suministra la representación gráfica, con frecuencia identifica los límites de integración y la manera de calcular las áreas de las regiones; sin embargo, cuando el problema aparece expresado algebraicamente, raramente confía en las representaciones gráficas para resolverlo. Aquí el uso del software parecía ser suficiente para resolver el problema. En uno de los problemas (calcular $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$) que pedía calcular el área de una región limitada por triángulos, el estudiante se apresuró a aplicar los métodos de Integral Definida en lugar de calcular el área mediante una fórmula sencilla ($\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$, en particular, un estudiante durante la entrevista menciona que ya que el tema era Integral Definida, entonces tenía que resolverlo de esa manera. Hemos considerado que el estudiante E6 es el que más se ajusta a éste. A modo de ejemplo citamos una parte de la entrevista realizada a este estudiante.

En el problema 4 antes mencionado al preguntarle que:

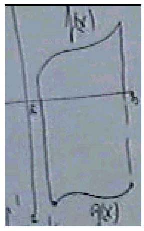
86) I*: Supón ahora que me pones ese problema y yo te lo resuelvo así* (se refiere al procedimiento con triángulos) *¿Tú qué dirías?*
87) E*: ¡Yo diría que!*

88) I: *¿Me lo pondrías perfecto? ¿Me lo pondrías malo? ¿Me lo pondrías regular? ¿Qué nota me pondrías si yo te lo resuelvo de esa manera, de 1 a 10?*
89) E: *Del 1 al 10, si lo resolviera de esta manera, ésteee, si estoy evaluando integral y quiero las propiedades de la integral, yo pienso, nooo, aquí el muchacho consiguió este valor absoluto y dijo ¿cómo lo hago yo para conseguir mi integral y mis intervalos? No tiene claro su propiedad* (aunque señala la definición a trozos del valor absoluto, parece que se refiere a la integral), *pero tomaría en cuenta de que si entiende de lo que estamos hablando* (señala la integral original) *sabe que es región bajo la curva* (indica la gráfica de la función) *o sea está consciente, analizó el problema, le pondría un 9.*
90) I: *Si no menciono nada de integrales ¿me pondrías un 9? ¿Por qué no un 10?*
91) E*: Por lo que le estoy diciendo, estoy evaluando la propiedad* (señala la integral) *a lo mejor él se asustó con este valor absoluto que vio aquí, ¡verdad! y se fue por aquí* (señala la gráfica).

Perfil 3

El tipo de estudiante que consideramos que responde a este tercer y último perfil muestra una disposición clara al uso de *DERIVE* y/o el Programa de Utilidades (PU), diseñado para aproximar las áreas. El estudiante que se encuentra es este perfil utiliza con éxito la idea de la aproximación para determinar áreas de regiones. Este no sólo muestra fluidez decidiendo qué tipo de partición del intervalo tomar sino también usando las herramientas algebraicas para llevar a cabo los procedimientos que involucraba el cálculo de las áreas correspondientes. En general, identifican y usan apropiadamente la información suministrada por las representaciones algebraica y gráfica en el cálculo de las integrales definidas. Existe evidencia de que este tipo de estudiante entiende la relación entre el área y el concepto de Integral Definida. Esto era evidente por la manera en que usan tanto el software como el PU para aproximar las áreas limitadas. Aquí, el estudiante reconoce que el cálculo de las integrales va más allá de la aplicación de una fórmula o el uso de un software particular, esto involucra un proceso que se podría visualizar mediante el uso de *DERIVE* y/o el PU. Sin embargo, cuando se le pide que examine proposiciones generales sobre propiedades de funciones y sus relaciones con la Integral Definida, no proporciona un argumento coherente para apoyar sus respuestas. En particular, parecía que les faltaran estrategias de resolución de problemas (analizando casos particulares, proporcionando contraejemplos o usando representaciones gráficas) para dar sentido o interpretar este tipo de problemas. Por ejemplo, el estudiante E2, que hemos ubicado en este perfil, durante la entrevista cuando se le cuestiona para que reflexione sobre las posibles relaciones entre la gráfica de dos funciones y sus integrales, proporciona argumentos contradictorios.

A continuación exponemos un extracto de la entrevista a este estudiante



102) I: *Si te pusiera estas dos funciones* (dibuja en la pizarra) *f(x) es mayor que g(x), te pregunto ¿será la integral entre a y b de f(x) mayor o igual que la integral entre a y b de g(x)?* (señala en la gráfica cada parte).
103) E*: Ésta es mayor* (se refiere a la región de g), *esta área es más grande que ésta* (señala a la región de g en comparación con la de f) *pero es negativa.* Se queda por unos segundos pensando.
104) I: *¿Entonces?*
105) E: *¿Estamos comprobando que f(x) es mayor o igual que g(x)?*
106) I: *Estamos suponiendo que f(x) es mayor o igual que g(x).*
107) E*: Los valores aquí* (marca con el rotulador sobre el segmento entre a y b) *cuando los evalúe va dar valores positivos* (marca con el rotulador una línea bajo la curva de f). *Estos dará "y" negativos* (marca con el rotulador una línea sobre la curva de g) *Si puedo afirmar que, si puedo* (señala la desigualdad de las funciones). *Estos valores son positivos y éstos son negativos* (señala la curva de f y luego la de g)…

Sin embargo, parece que el estudiante no está convencido de su respuesta inicial. Confunde el signo de desigualdad entre funciones y entre las integrales vistas como áreas.

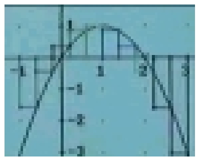
Por otra parte un estudiante E4 que muestra este perfil, se inclina al uso del software para aproximar todos los problemas sin considerar la representación gráfica que a menudo es necesaria para la resolución. Este estudiante muestra, al igual que el anterior, serias dificultades al resolver los problemas que involucran demostraciones o algunas proposiciones. Además, parece pensar que el software no sólo le proporciona una manera eficaz de aproximación sino una forma de resolver correctamente un problema. De hecho, durante la entrevista cuando se le pidió que diera una explicación de lo que había obtenido gráficamente con el software, no fue capaz de explicar lo que sucede cuando el valor de la integral es negativo. El estudiante parece usar mecánicamente el software para hacer los cálculos y no identifica ni relaciona las representaciones para poder pasar de una representación a otra.

En el problema 2 el estudiante E4 para calcular el área limitada por la función y el eje OX, utiliza el Programa de Utilidades de la siguiente forma:

El estudiante abre el archivo que contiene el Programa de Utilidades referente al método gráfico, escoge la sentencia RECT_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) que sirve para representar rectángulos extremos izquierdos, sustituye "a" por -1, "b" por 3 y "n" por 10, cometiendo el error de no escribir la expresión algebraica de la función y por tanto no pudo obtener la matriz de valores necesaria para graficar los rectángulos. Copia el Programa de Utilidades y lo pega en la ventana en donde tenía escrita la función F(x):=2x-x^2, marca la sentencia RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a,b,n), sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10 y le da una matriz que no logra representar los rectángulos porque la función esta antes del Programa de Utilidades).

33) I*: No has definido la función.*

34) E*: Entonces la defino, agarro esta función (se refiere a F(x):=2x-x^2) y me voy acá* (se refiere al final del Programa de Utilidades, en donde copia la expresión de la función) selecciona la sentencia RECT_EXTREMO_DERECHO(a,b,n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, calcula la matriz y representa los rectángulos. *Ésta es el área tomando extremo derecho de este intervalo* (se refiere al intervalo [-1,3]), *por allí se traza el rectángulo, pero hay que establecer un delta de x.*



35) I*: De todas maneras observa que ahí estás trabajando de -1 a 3, pero allí no* (se refiere a la Pregunta 2, cuyo intervalo es de 0 a 3) *queremos el área rayada desde 0 hasta 3. Yo quiero que me calcules el área de esa región rayada.*

36) E*: ¿Desde 0 hasta 3?*

37) I*: Sí.*

38) E*: Lo puedo hacer por el método numérico también.* (Abre el archivo del Programa de Utilidades referente al método numérico, copia las sentencias en ventana donde tiene el resto del programa y definida la función; copia la función al final del programa).

Durante la interacción con el investigador, el estudiante usa con soltura el software pero experimenta serias dificultades para interpretar su trabajo

39) I*: ¿Qué es lo que estás haciendo?*

40) E: *Para calcularle numéricamente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n)). *Lo vamos a hacer por rectángulos extremo derecho, tomo aquí la sentencia, sustituyo “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da* -0.495 *¿Y porqué da el área negativa?*

41) I: *Eso pregunto yo ¿Por qué te da negativo?*

42) E: (Selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da 0.0225). *Da diferente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) y sustituye los valores de “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da 0.405).

43) I: *¿Por qué crees que da en un sitio positivo y el otro negativo?*

44) E*: ¿A qué se debe eso?*

45) I: *¿Tú qué crees?*

46) E*: Silencio……*

Esto evidencia, en el análisis de esta transcripción, que el estudiante tiene una tendencia a aproximar el problema mediante en uso del software, pero es necesario que en esta fase de la entrevista el investigador dirija el diálogo para que el estudiante comprenda el proceso y como consecuencia, la entrevista muestre posteriormente que el estudiante comprende lo que está haciendo.

CAPÍTULO VII

APORTACIONES, IMPLICACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

7.1. INTRODUCCIÓN

En esta investigación, tal y como se ha indicado con anterioridad, se han planteado tres objetivos generales de distinta naturaleza:

Un primer objetivo, de carácter curricular.

Objetivo 1. Diseñar, implementar y evaluar un Módulo Instruccional basado en un conjunto de prácticas de laboratorio utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE* para la enseñanza del concepto de Integral Definida para estudiantes de un primer curso de Ingeniería.

El segundo objetivo, que se estableció resultó ser un objetivo de carácter cognitivo.

Objetivo 2. Analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico, en el que se enfatizan los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica, en la comprensión de la Integral Definida.

El tercer y último objetivo constituye un objetivo de ámbito afectivo.

Objetivo 3. Analizar las actitudes de los estudiantes, hacia las Matemáticas y hacia el uso del PCS *DERIVE*, cuando son inmersos en un plan de enseñanza que utiliza como elemento básico herramientas tecnológicas para su aprendizaje.

Previo al diseño definitivo de la investigación, y con la intención de alcanzar nuestros objetivos generales, se desarrolló un estudio exploratorio con una doble intención:

Por una parte, validar la escala de actitudes en torno a las distintas dimensiones inicialmente establecidas, y por otra, experimentar una primera secuencia de enseñanza (Módulo Instruccional I) que incluyeran las prácticas de laboratorio con el objetivo adicional de elaborar y validar un cuestionario de conocimientos (CC-1) para analizar la comprensión del concepto de Integral Definida que adquieren los estudiantes, después de seguir el Módulo Instruccional diseñado.

Los resultados de este estudio resultaron útiles para nuestra investigación y nos sugirieron, por un lado, la validez de algunos elementos metodológicos y por otro, la necesidad de establecer algunas modificaciones de otros elementos de la metodología inicialmente diseñada para nuestra investigación.

A partir del estudio exploratorio realizado, encontramos que:

- Las diferentes dimensiones consideradas en las escalas de actitudes: Confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia el trabajo matemático, compromiso con el trabajo matemático, uso del ordenador en las actividades Matemáticas, seguridad y confianza en el trabajo con *DERIVE*, motivación hacia el trabajo con *DERIVE*, compromiso con el trabajo con *DERIVE*, se muestran válidas para nuestro estudio posterior.
- Las variables consideradas género y condición de estudio (nuevo ingreso o repetidores) pueden ser suprimidas dado que no se mostraron significativas en este estudio exploratorio.
- La correlación que existe entre la actitud hacia los aspectos analizados y el rendimiento académico es alta.
- Se debe estructurar un curso completo con todas las unidades del programa, en el que se combinen las clases habituales con las Prácticas de Laboratorio y en el que el profesor que imparte el curso regular sea el mismo del Laboratorio.
- Conviene realizar una puesta en común después de desarrollar las Prácticas de Laboratorio, puesto que de esa forma se puede clarificar mejor la formación que se ha tratado de desarrollar con los estudiantes.
- Modificar y completar el cuestionario de conocimientos, incluyendo preguntas que profundicen en tres aspectos principales.
    - La idea de área que tienen los estudiantes antes de conocer el concepto de Integral Definida

- Cómo influye la instrucción recibida sobre la idea de área que tienen los estudiantes que participaron en Prácticas de Laboratorio.
- Cómo utilizan las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas a la hora de resolver los problemas sobre la Integral Definida que requieran del conocimiento de su relación con el área de figuras planas.

En definitiva los resultados obtenidos hasta este punto de la investigación, proporcionaron elementos enriquecedores para continuar con el estudio inicialmente propuesto.

7.2. CONCLUSIONES

En relación con el primer objetivo estableceremos conclusiones en cuanto al diseño, desarrollo y evaluación del módulo instruccional utilizado.

En cuanto al diseño del Módulo Instruccional II, se puede concluir, en líneas generales, que responde a las necesidades formativas que nos habíamos propuesto.

La estructura de las actividades que conforman cada práctica a saber: Introducción, en la que se dan indicaciones generales que sirven, por una parte, de motivación, y, por otra, de información general sobre lo que se tratará en ella. Objetivos, relacionados con el tema tratado. Desarrollo de la práctica, correspondientes a las actividades que lo conducirán al logro de los objetivos. Evaluación, en la que se le pide al estudiante su opinión sobre el desarrollo de la práctica y se le propone problemas que debe resolver con lo aprendido en la misma; facilitan que el estudiante pueda seguir paso a paso el desarrollo de cada práctica y que el profesor pase a cumplir un papel de orientador, en el caso que se presente alguna dificultad en alguna actividad, contribuyendo así a que el estudiante sea generador de su propio aprendizaje, y, de alguna manera, un poco más independiente de la tutela del docente.

Consideramos que el diseño de instrucción organizado en torno al PCS *DERIVE* nos permitió, por una parte, observar cómo los estudiantes se enfrentaban al concepto de aproximación de una forma explícita, lo que resultaría más complicado sin el uso de una herramienta tecnológica. De otra parte, el uso del módulo instruccional utilizado ayudó a los alumnos a constatar que *DERIVE* tiene la posibilidad de elaborar sencillos programas para abordar problemas que modelizan situaciones prácticas y aplicadas.

El módulo instruccional diseñado, facilitó el trabajo de los alumnos para el estudio del concepto de Integral Definida desde las perspectivas gráfica y numérica, dado que las actividades diseñadas con *DERIVE* permitieron que los alumnos visualizaran los procedimientos aproximados, que en muchas ocasiones, facilitan la resolución de algunos problemas que por otros métodos serían excesivamente laboriosos, complicados y difíciles de entender.

En relación con el Programa de Utilidades, se logró observar la fácil adaptación de los estudiantes en cuanto a la manipulación de las sentencias del programa. El PU proporcionó una herramienta efectiva para el cálculo de integrales definidas en las que el integrando, está constituido por funciones cuyas primitivas no pueden ser expresadas por funciones elementales. Consideramos que es viable su incorporación como un complemento a las actividades propuestas en los libros de texto, puesto que muchas de ellas son problemas específicos para cuya resolución se pueden utilizar programas de esta naturaleza. Además, el PU contribuyó a formar una imagen del concepto de Integral Definida más flexible, ya que el estudiante tuvo la posibilidad de observar paso a paso el desarrollo de todo el proceso de construcción de la integral como área, y enlazar con el conocimiento de los procedimientos algorítmicos a los que el estudiante accede con mayor facilidad.

En cuanto a la implementación del Módulo Instruccional y con la estrategia de enseñanza, hemos de destacar la complementariedad y convergencia de las tres fases seguidas, puesto que permitieron acercar y comparar los procedimientos utilizados en las clases habituales con los procedimientos de resolución paso a paso en los sistemas de representación gráfico y numérico. La fase 2 supone de hecho una ventaja considerable frente a la presentación pormenorizada de los conceptos por el procedimiento habitual que requeriría de un tiempo y una comprensión obviamente mayor.

La última fase, de puesta en común, se mostró importante durante la implementación del módulo instruccional, pues resultó novedoso y motivante para los estudiantes el discutir por grupos y con toda la clase las Prácticas de Laboratorio, en una asignatura en la que habitualmente no se utilizan esos planteamientos metodológicos.

El último aspecto a analizar sobre la instrucción es la evaluación del módulo de enseñanza utilizado. El análisis que realizaremos estará fundamentalmente basado en la evaluación de las Prácticas de Laboratorio que han realizado los alumnos en el desarrollo de la experiencia. Esta evaluación se organiza en torno a los cuatro aspectos siguientes:

- Sobre las actividades en sí mismas.
- Sobre los contenidos tratados.
- Sobre la metodología seguida en clase.
- Ventajas y desventajas.

En cuanto al primer aspecto, destacamos que los estudiantes consideran que las actividades que desarrollaron (en sus propias palabras):

Son muy interesantes ya que descubrimos que los procesos matemáticos no solamente los podemos hacer con calculadora o desarrollarlos a mano.

Son muy didácticas y nos ofrecen una herramienta para obtener un mejor avance matemático a la hora de estudiar, sin procedimientos fastidiosos y con resultados inmediatos.

Son muy interesantes. Es bueno ver el desarrollo analítico de un ejercicio en conjunto con sus gráficas.

Son muy importantes para nosotros, ya que en el libro aparecen muchos ejercicios que se hacen con programas de computadora y éste nos permite aprender a manejarlos para hacer dichos ejercicios.

En definitiva, las actividades les parecen a los alumnos útiles, interesantes e incluso “didácticas”.

Sobre el diseño de las prácticas, los estudiantes destacan del diseño de las prácticas su sencillez, su secuencialidad y su contribución hacia el aprendizaje y manejo del software. Los estudiantes señalan que:

Las prácticas tienen un diseño muy bueno, ya que permite que cualquier persona sea capaz de utilizarla debido a que no son complicadas.

Nos gusta mucho, ya que están contenidas, paso a paso, las actividades a realizar, logrando así que estas prácticas sean de fácil acceso para el estudiante.

En cada práctica se aprende un poco más sobre como utilizar el programa DERIVE.

En relación a los contenidos de las Prácticas de Laboratorio, los alumnos señalan principalmente los aspectos que refuerzan lo que ya conocen, la visualización y lo interesante de los contenidos. En sus palabras:

El contenido fue el mismo visto teóricamente y por lo tanto se hizo fácil manejar dicho contenido.

Las gráficas ayudan a visualizar los resultados, lo hacen más palpables.

Es muy interesante, ya que lo explicado en clase es practicado en el laboratorio y de esta manera se pueden afianzar los conocimientos.

La metodología de trabajo empleada en el laboratorio, fue aceptable y destacada por los estudiantes. Para ellos, con esta forma de trabajar:

Se trabaja mucho más rápido con DERIVE que hacerlo sin el programa. Facilita la comprensión.

DERIVE simplifica el trabajo del alumno al alumno al realizar procesos matemáticos simples, obteniendo resultados inmediatos.

Es una clase muy interesante y dinámica. Nos gusta porque nunca habíamos trabajado en una práctica con computadora.

La clase fue muy dinámica y el trabajo en grupo nos sirvió para conocer a nuestros compañeros, además de intercambiar ideas.

Los estudiantes encuentran más ventajas que desventajas, y lo manifiestan en sus respuestas.

Más ventajas que desventajas, ya que el método le facilita al alumno la comprensión de la materia.

Es agradable; se aprende a trabajar en equipo. Se sale de lo tradicional. Desventaja: Se hace muy mecánico el trabajo; se limita el pensamiento, ya que todo lo hace el computador

La ventaja es que podemos aprender más con la computadora, observar las gráficas con DERIVE.

La ventaja, por medio del desarrollo de estas prácticas, es que se puede afianzar los conocimientos obtenidos en clase. La desventaja, es que la computadora no nos muestra el procedimiento para obtener los resultados, por lo que resolver los ejercicios se hace mecánico.

Somos conscientes de que este análisis se limita a una evaluación del diseño por parte de los estudiantes, En un futuro, y con la ampliación y uso posterior del módulo se podrá hace una evaluación más detallada de su puesta en marcha.

En relación con el objetivo 2, se puede observar cómo la mayoría de los estudiantes analizados (5 de los 6 estudiantes entrevistados) en nuestro estudio de casos, se encuentran en el estadio estructural dado que son capaces de utilizar los sistemas de representación asociados al concepto de Integral Definida estructurando según la organización del concepto de área de figuras planas conocido por ellos con anterioridad, es decir el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo.

Se concluye de nuestro análisis además, que dos estudiantes (E4 y E6) se encuentran en la categoría 2B de este estadio dado que, en general, realizan de manera aceptable el reconocimiento y el tratamiento dentro del propio registro de al menos dos registros de representación semiótica (numérico, gráfico o algebraico) y son capaces de realizar conversión de un registro de representación semiótica a otro en relación a la Integral Definida; en estas actividades de conversión se controla un registro y se facilita la conversión al otro.

Tres estudiantes (E1, E2 y E3), los hemos situado en la categoría 2A dado que, en general, reconocen al menos un registro de representación semiótico y son capaces de realizar transformaciones (tratamientos) dentro de dicho registro.

Solamente uno de los estudiantes entrevistados podemos considerar que se encuentra en el estadio semiótico dado que el significado que asocia a la Integral Definida está demasiado ligado al concepto de área de figuras elementales. El estudiante lo hemos situado en la categoría 1B y es el E5, dado que únicamente es capaz de reconocer uno de los registros de representación semióticos. Esto es, reconoce ligeramente el registro algebraico, utilizando simplemente el registro gráfico como referente, sin que realice en él tratamientos dentro del propio registro ni conversión entre ambos.

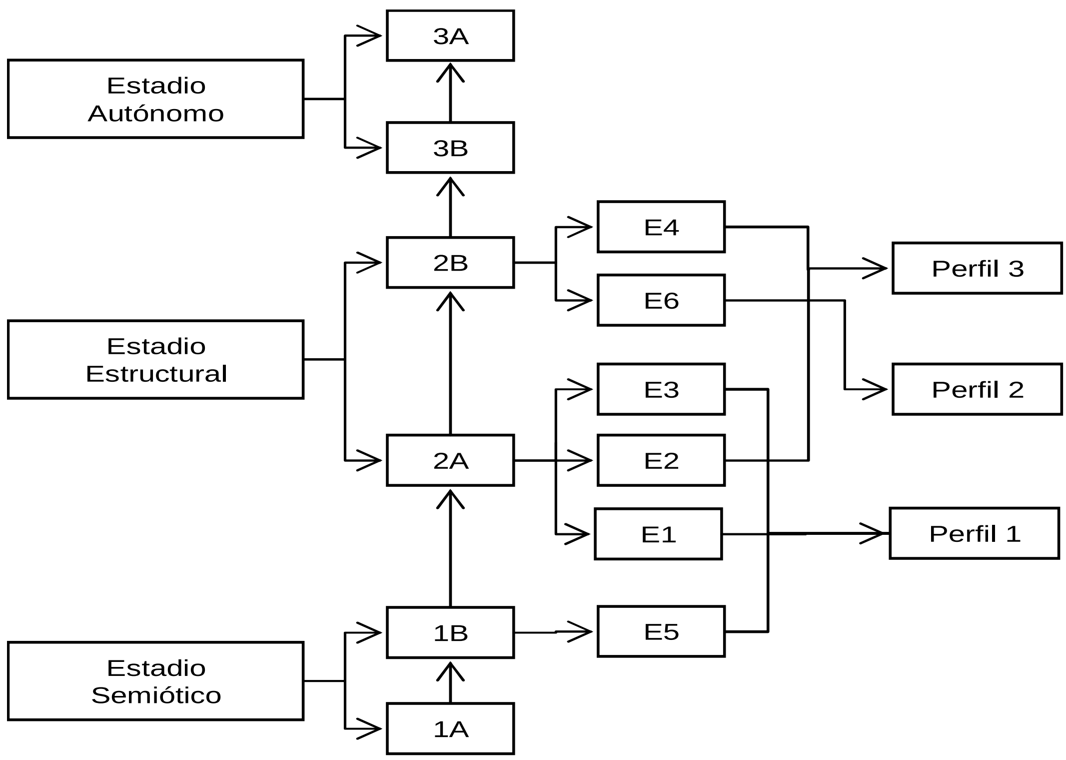
Para nuestro estudio global (véase el apartado el apartado 6.5) y, partiendo principalmente del análisis de las entrevistas clínicas realizadas en las 2ª fase del estudio experimental, concluimos que:

Tres de los seis estudiantes entrevistados se pueden situar en el perfil 1 (E1, E3 y E5), y se caracterizan por usar del PCS simplemente para realizar cálculos algebraicos o localizar cortes de la curva con el eje X. Utilizan procedimientos algebraicos y/o numéricos en la resolución de los problemas, con escaso soporte gráfico. Cuando se les plantean situaciones en las que deben utilizar representaciones gráficas se confunden y tienden a proporcionar argumentos algebraicos. Lo que resulta contradictorio con estas ideas es que en los problemas en que se les planteó proposiciones genéricas (problemas 5 y 6), utilizaron representaciones gráficas para argumentar la veracidad o falsedad de las mismas. El cálculo de la Integral Definida es percibido por estos estudiantes como la aplicación de un procedimiento algorítmico, sin preocuparse de su significado en el contexto del problema.

Únicamente el estudiante (E6) se encuentra en el perfil 2, ya que, parece que asocia el uso del software con una herramienta que le permite hacer más fáciles los acercamientos que utilizando papel y lápiz. Reconoce, en general, la importancia de encontrar áreas de curvas limitadas a través de la idea de aproximación. Es consciente de la necesidad de mejorar y obtener buenas aproximaciones mediante un proceso de refinar una partición dentro de un intervalo; sin embargo, no desarrolla una clara comprensión del proceso de seleccionar una partición particular en el intervalo dado, en particular cuando intenta realizar esta tarea sin el uso del software. También asocia el concepto de Integral Definida con el proceso de calcular su valor, aunque no es capaz de identificar las condiciones necesarias para aplicar el procedimiento. De hecho, a menudo el software lo usa como un medio para apoyar lo que hace en papel y lápiz. Otro resultado importante es que cuando el estudiante trabaja en un problema en donde se le suministra la representación gráfica, a menudo identifica los límites de integración y la manera de calcular las áreas de las regiones; sin embargo, cuando el problema se expresó de manera algebraica, raramente confían en las representaciones gráficas para resolver el problema.

Finalmente a los estudiantes (E2 y E4) los ubicamos en el perfil 3, dado que muestran una disposición clara al uso de *DERIVE* y/o al programa de utilidades (PU), diseñado para aproximar áreas. Utilizan, con éxito la idea de la aproximación para determinar áreas de regiones. No sólo muestran fluidez decidiendo qué tipo de partición del intervalo tomar sino también usando las herramientas algebraicas para llevar a cabo los procedimientos para calcular las áreas correspondientes. En general, identifican y usan apropiadamente la información suministrada por las representaciones algebraica y gráfica en el cálculo de las integrales definidas. Existe evidencia de que estos estudiantes entienden la relación entre el área y el concepto de Integral Definida. Esto resultó evidente por la manera en que usan tanto el software como el PU para aproximar las áreas. Reconocen que el cálculo de las integrales va más allá de la aplicación de una fórmula o el uso de un software particular y consideran que, esto involucra un proceso que podrían visualizar a través del uso de *DERIVE* y/o el PU. Sin embargo, cuando se les pide que justifiquen proposiciones generales en las que intervienen propiedades de funciones y sus relaciones con la Integral Definida, no proporcionan un argumento coherente para apoyar sus respuestas. En particular, parece que les faltaran estrategias de resolución de problemas (analizar casos particulares, proporcionar contraejemplos, usar representaciones gráficas…), para dar sentido o interpretar este tipo de problemas.

En el siguiente esquema recogemos los distintos estudiantes situados atendiendo a las dos clasificaciones que hemos realizado:



Esquema 6.1

En los comportamientos que hemos asociado a los distintos perfiles de actuación de los estudiantes, podemos señalar, aunque su análisis exhaustivo quedará como un problema abierto, el estudiante con el Perfil 1 exhibe un comportamiento próximo a las tipologías de estudiantes Racional y Teórico, propuesto por Guin y Trouche (2002), el PCS, se muestra como una fuente de problemas con la que no se sienten cómodos. El Perfil 3 que hemos determinado responde a las tipologías descritas por Guin y Trouche de Manitas y Escolar, en el sentido de que se siente cómodos en la resolución de las tareas usando *DERIVE*. Quizás el Perfil 2 se asocie más a la tipología descrita por dichos autores en términos de Experimentados, que confronta las distintas fuentes de trabajo.

Cabe volver a señalar que el estudio y conexión de los perfiles, que hemos encontrado con las tipologías mencionadas, resultan un tema de estudio que puede mostrarse como relevante.

Nos podemos plantear además una nueva pregunta de investigación ¿qué tipo de relación existe entre los estadios cognitivos definidos y los perfiles establecidos? ¿Y entre las categorías?

Con respecto al tercer objetivo relacionado con las actitudes concluimos que:

Los estudiantes tienden a poseer una alta confianza y seguridad en su trabajo matemático, a pesar de que se enfrentan a temas que usualmente les producen dificultades y obstáculos considerables. Los estudiantes manifiestan una autoestima alta, reconociendo la importancia de las Matemáticas dentro del conjunto de materias que cursan y dedicándole el tiempo requerido para su aprendizaje.

La motivación hacia el trabajo matemático también resultó ser alta; y experimentó un aumento después de la instrucción. Tal vez, el trabajo combinado de clases habituales y prácticas de laboratorio con ordenadores, que motiva al estudiante a participar más intensamente en las actividades que son usuales en los cursos en los que la enseñanza seguida es la habitual. Los estudiantes; se sienten estimulados por el trabajo en grupo, valoran las aplicaciones cotidianas de las Matemáticas y le dedican gran parte de su tiempo al estudio de las Matemáticas.

Concluimos también que los estudiantes se sienten altamente comprometidos con el trabajo matemático. Su compromiso se ha mantenido de acuerdo con el contrato didáctico asumido, se sienten comprometidos con las actividades matemáticas.

De las respuestas de los estudiantes, concluimos también que el uso del ordenador inspira confianza, seguridad y motiva a los estudiantes a participar en las actividades en las que se utilice. El ordenador lo usan como herramienta “de chequeo”. Al enfrentarse con un error consultan a un experto o tratan de resolverlo con sus conocimientos. No se observó gran diferencia en las respuestas de los dos grupos.

La interacción de los estudiantes entre las Matemáticas y los ordenadores ha mejorado la confianza y seguridad, la motivación y el compromiso de éstos en el desarrollo de sus actividades. La facilidad de trabajo con los registros gráficos que brinda el ordenador constituye una forma importante de interacción, al igual que esta interacción es también facilitada por la posibilidad de seguir paso a paso los procesos de resolución y poder cotejar en todo momento los resultados.

De la aplicación del cuestionario E A-4 (ver anexo 6) cumplimentado al final del curso (primera fase del estudio experimental) y en relación con las actitudes de los estudiantes hacia el uso de *DERIVE* en actividades matemáticas, la poca diferencia en los promedios de respuesta por ítem (PRI) de ambos grupos (Grupo G1, que cursó todo el programa combinando las clases habituales con las Prácticas de Laboratorio y grupo G2, que cursó sólo las tres primeras unidades del programa oficial con esta metodología y la última -relacionada con Integrales- sólo con clases habituales), nos permite afirmar que existe homogeneidad entre ellos; es decir, manifiestan un actitud similar hacia el uso del software en actividades matemáticas.

Los estudiantes consideran a *DERIVE* como un soporte para la resolución de problemas, de lo que se deduce que éste le proporciona confianza y seguridad. Es de hacer notar que el G1 considera que el trabajar con *DERIVE* involucra seguir procedimientos y conocer el lenguaje aplicado, en cambio el G2 lo ve como herramienta para encontrar solamente resultados.

Los estudiantes reconocen que pueden seguir el proceso de resolución de problemas de una manera sencilla y con rapidez de respuesta; logran conectar lo visto en clases habituales con lo dado en las prácticas; reconocen el poder de visualización que les brinda el software y su capacidad gráfica. Estos comentarios nos llevan a pensar que los estudiantes poseen confianza y seguridad en el trabajo tanto de laboratorio como con el uso de *DERIVE.*

Los estudiantes se sienten motivados por el trabajo con *DERIVE* ya que las actividades que se realizan se diferencian de las clases habituales. Les estimula la imaginación y la creatividad. Los estudiantes del G1 opinan que pueden producir sus propios conocimientos, en cambio los de G2 utilizan *DERIVE* para chequear y hallar resultados a los problemas. *DERIVE* contribuye a estructuras y organizar procedimientos; no obstante es notoria la opinión del G1 en cuanto a la importancia que le dan al proceso que en el G2. Así como también se evidencia mayor compromiso por el trabajo con *DERIVE* el G1 que el G2.

Los estudiantes consideran que las actividades de laboratorio les ayuda a aclarar las dudas de lo hecho en la clase habitual, las actividades son agradables, dinámicas, interactivas y prácticas; pueden seguir los procesos de varias maneras; reconocen la capacidad de visualización del *DERIVE;* son partícipes de la generación de su aprendizaje y las actividades son diferentes a las tradicionales. Todo esto muestra que a los estudiantes les motiva el trabajo de laboratorio y el uso de *DERIVE.*

Contribuye a afianzar la confianza y seguridad, motivación y compromiso del estudiante en actividades de esta índole; es decir se establece un contrato didáctico de importante beneficio en pro de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

En relación con las primera y segunda conjeturas, podemos concluir que las escalas de actitudes que hemos adaptado para nuestra investigación, han resultado ser de gran utilidad para la determinación de las actitudes de los estudiantes con todas las limitaciones propias de un estudio principalmente cuantitativo como el que hemos hecho. Durante las diferentes fases del estudio, se ha podido constatar que los estudiantes muestran una actitud positiva hacia la introducción de los PCS para estudiar Matemáticas. En el estudio experimental (Primera fase) las respuestas dadas por los estudiantes entrevistados nos ayudan a confirmar nuestra conjetura, dado que se sienten motivados trabajando con *DERIVE*.

15. ¿Consideras que *DERIVE* te estimula la creatividad y la imaginación?
    G1E1. Sí, porque me ayuda a construir diferentes gráficas, en donde de puedes hacer alejamientos, acercamientos y detallar los puntos que no se visualizan cuando hago un ejercicio en el papel.

    G1E2. Claro que sí, por ejemplo: uno se imagina una gráfica, cuando uso DERIVE *me doy cuenta de los errores que cometo o de lo acertado que estaba.*

    G2E1. Sí, porque puedo ingresar la información de un problema matemático en DERIVE *y tener la gráfica y el resultado.*

    G2E2. Sí, sobre todo en cuanto a gráficas.

16. Cuando trabajas con DERIVE *¿te da deseos de hacer Matemáticas?*

G1E1. Sí porque se pueden crear nuevas aplicaciones, bajo ciertas condiciones del lenguaje del programa.

G1E2. Sí, porque me sirve de estímulo al pensar que algo que tardaría mucho tiempo en hacer, DERIVE *lo hace más rápido.*

G2E1. Sí, porque con DERIVE *se puede verificar los resultados.*

G2E2. Sí, me parece muy práctico, los resultados son muy inmediatos y me evita el tedioso trabajo de calcularlos.

Y en general les da mayor confianza y seguridad en su trabajo matemático.

- ¿Te preocupa tener que aprender temas difíciles en Matemáticas?
  G1E1. No, porque es interesante saber más sobre los temas que me dan.
  G1E2. No, porque los temas difíciles me ayudan a plantearme otros, que en un futuro sé que los utilizaré en mi carrera.
  G2E1. Sí, porque me siento estimulado por los temas que no entiendo, me preocupo y trato de aprendérmelos.
  G2E2. No, porque parece lógico que a medida que se avanza, las dificultades deben ser mayores.
- ¿Te preocupas más por Matemáticas que por otra materia?
  G1E1. Sí, porque se necesita practicar más y los contenidos me resultan más extensos.
  G1E2. Sí, porque todas las materias dependen de ella.
  G2E1. No, para mi todas las materias son importantes, aunque a Matemáticas le dedico más tiempo de estudio.
  G2E2. Sí, porque Matemáticas priva otras materias.

En relación con la tercera conjetura hemos señalado que dos de los seis estudiantes, se han mostrado cómodos trabajando con el PU diseñado para nuestra investigación. Quizás, convendría indicar que la soltura adquirida no determinó totalmente los conocimientos que esperábamos que alcanzaran.

El sentido de aproximación que se señala en la conjetura cuarta para el concepto de Integral Definida, tal como se ha mostrado en las conclusiones, se ha manifestado en algunas ocasiones como un obstáculo para el aprendizaje, aunque sólo se ha puesto de manifiesto en la confusión de los alumnos a la hora de resolver algunas tareas en las que el enunciado viene dado mediante el sistema de representación gráfico (estudiante E6 en la segunda fase del estudio experimental).

Finalmente, en cuanto a nuestra última conjetura, en líneas generales, podemos afirmar que el método de trabajo seguido con los alumnos, siguiendo las tres fases que ya hemos descrito, ayudó a mejorar la comprensión del concepto de Integral Definida, así como la competencia.

Creemos además que el modelo de competencia que hemos utilizado se mostró como un elemento útil y un instrumento valioso para nuestra investigación.

7.3. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Los resultados de la investigación que hemos desarrollado han quedado establecidos dentro del contexto propio de trabajo del investigador y sujeto a una serie de limitaciones que podemos agruparlas en tres tipos.

Limitaciones institucionales. Que tienen que ver con el currículum de Matemáticas del programa de la formación de los futuros ingenieros y las disponibilidades del entorno social y cultural del país, en el que se desarrolla. Disposición y facilidad de uso de los laboratorios de ordenadores. Dotación material de los laboratorios. Contenidos del programa de Matemáticas.

Limitaciones cognitivas de los estudiantes. La formación matemática de los estudiantes de los primeros cursos de ingeniería viene marcada por una formación principalmente algorítmica.

Los estudiantes que vienen de secundaria no están familiarizados con la realización de actividades de demostración y justificación de propiedades.

Limitaciones metodológicas. No es habitual que los estudiantes participen en las prácticas con los ordenadores para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Se necesita disponer de tiempo extra para actividades de laboratorio.

Hemos señalado ya que dentro del amplio número de instrumentos utilizados para el análisis que se ha desarrollado en la investigación, existen algunos que deberían ser modificados e incluso, ampliados. Por ejemplo, en cuanto a la evaluación del módulo instruccional ésta se limitó exclusivamente a la evaluación que realizaron los alumnos, lo que constituye obviamente una limitación del análisis que hemos realizado en nuestro trabajo.

Incluimos a continuación un conjunto de temas que podrían ser considerados para la realización de investigaciones futuras, que a lo largo de esta memoria, han ido quedando como preguntas abiertas susceptibles de ser analizadas con mayor profundidad.

- Establecer conexiones entre el modelo de competencia definido, los perfiles de actuación de los estudiantes y las tipologías de comportamiento de los estudiantes cuando utilizan PCS.
- Dado que nuestro estudio consideró el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS) para un primer curso de cálculo para carreras de ingeniería, convendría extender el uso de las Prácticas de Laboratorio a otros cursos de Cálculo y al uso de otros PCS e investigar el avance en el tiempo de la evolución de los conceptos de cálculo en general.
- Estudiar el papel del profesor cuando se implementa un módulo de instrucción con las características del que hemos desarrollado.
- Elaborar instrumentos y categorías de análisis específicas con el objetivo de evaluar el programa de formación recibido por los alumnos con la metodología y los materiales utilizados en esta investigación.
- Modificar ligeramente el módulo instruccional partiendo de los resultados de esta investigación y utilizarlo en las aulas de Bachillerato, cuando se introduzca el concepto de Integral Definida.
- Complementar el modelo de competencia cognitivo desarrollado con los aspectos teóricos específicos del empleo de los PCS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE M. (1991). Analysis. En Tall D. (ed.), *Advanced in Mathematical Thinking.* Kluwer. Dordrecht. 167-196.

ARTIGUE, M.; ABBOUD, M.; DROUHARD, P.; LAGRANGE, J. B. (1995). *Une recherché sur le logiciel DERIVE.* Cahier de DIDIREM 3 (número especial). IREM. Paris 7.

ARTIGUE, M. (1997a). Le logiciel '*DERIVE'* comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics.* 33, 133-169.

ARTIGUE, M. (1997b). Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. *Actes de l'université d'été 1996*. Rennes, France: IREM de Rennes. 19-40.

ARTIGUE M., LAGRANGE, J. (1997). Pupils Learning Algebra with *DERIVE*. A Didactic Perspective. *ZDM.* 5, 105-112.

ARTIGUE, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista latinoamericana de investigación didáctica en Matemática Educativa*. 1, 40-55.

ARTIGUE, M. (2001). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. Communication at the Second CAME Symposium, Utrecht.

ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and concept work. *International Journal of Computers from Mathematical Learning.* 7, 245-274.

AZCÁRATE, C. et al (1996). *Cálculo Diferencial e Integral.* Síntesis. Madrid.

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit Scientifique.* París: De Vrin. (Traducción al castellano: *La formación del espíritu científico.* México: Siglo Veintiuno, 1985).

BLISS, J.; OGBORN, J. (1987). *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* Croom Helm. New York.

BLUM, W. (1991). Applications and Modelling in Mathematics Teaching. A Reviews of Arguments and Instructional Aspects. En M. Niss, W. Blum y I. Huntley (Eds.), *Teaching and Mathematical Modelling and Applications.* Chichester. 10-29.

BRADLEY, G.; SMITH, K. (1998). *Cálculo de una variable.* Prentice Hall. Madrid.

BROUSSEAU, G. (1983). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 2, 37-128.

BROUSSEAU, G. (1987). Fondements et methods de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 9(3), 309-336.

BROWN, C.A., KOUBA V.L., et al (1988). Attitudes. *Arithmetics Teacher*. 35 (9), 15-16.

BROWN, D.; PORTA, H.; UHL, J. J. (1990). Calculus and Mathematica. En T. W. Tucker (Ed.), *Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources,* MAA Notes 17. Washington DC: MAA. 101-120.

BROWN, D.; PORTA, H.; UHL, J. J. (1991a). Calculus and Mathematica: A Laboratory Course for Learning by Doing. En L.C. Leinbach et al. (Eds.), *The Laboratory Approach to Teaching Calculus,* MAA Notes 20. Washington DC: MAA. 99-110.

BROWN, D.; PORTA, H.; UHL, J. J. (1991b). Lightly Edited Samples of Student Writing and Calculus and Mathematica. En L.C. Leinbach et al. (Eds.), *The Laboratory Approach to Teaching Calculus,* MAA Notes 20. Washington DC: MAA. 189-196.

BRUNER, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction.* Norton. New York.

BUCHBERGER, J. (1990). Should students learn integration rules? *Sigsam Bulletin.* 24 (1), 10-17.

CALVO, C., (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales*. Tesis de Maestría. UAB. Sin publicar.

CAMACHO, M., DEPOOL, R. (2000a). Actitudes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores en primer curso de ingeniería. En, Camacho, M.; Morales, A; Socas, M. M (eds.): *Formación del profesorado e investigación en educación matemática II*. 69-93.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2000b). Programa de Utilidades para la Enseñanza del Concepto de Integral Definida para futuros Ingenieros. Ejemplos de Aplicación. *Universidad, Ciencia y Tecnología.* 4 (16), 193-200.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2001a). La evolución de las actitudes de los estudiantes cuando utilizan un CAS (Computer Algebra System) para el aprendizaje de los conceptos de cálculo. En, Camacho, M.; Morales, A; Socas, M. M (eds.): *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*. 319-338.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2001b). Un análisis comparativo sobre las actitudes de estudiantes de primero de ingeniería hacia el uso de programas de cálculo simbólico para el aprendizaje del cálculo. En Beitia, G (ed.): *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 603-610.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2002a). El concepto de Integral Definida y su relación con concepto de área limitada por una curva. Análisis de una experiencia piloto. En, Camacho, M.; Morales, A; Socas, M. M (eds.): *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IV.* 79-132.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2002b). Students' Attitudes towards Mathematics and Computers when using *DERIVE* in the Learning of Calculus Concepts. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 1 (4), 259-283.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2003a). Análisis de la comprensión de la Integral Definida. Un estudio de casos. SEIEM. Aceptado para publicar.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2003b). La Integral Definida. Una propuesta de enseñanza utilizando el *DERIVE. Reflexiones sobre la enseñanza del Precálculo y el Cálculo*. Aceptado para publicar.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2003c) Modelo de Competencia para el campo conceptual de la Integral Definida. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática V.* 2003. Aceptado para publicar.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2003d). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE. Educación Matemática.* 15(3), 119-140.

CAMACHO, M.; DEPOOL, R. (2003e). Using *DERIVE* to understand the concept of definite integral. *Journal for Mathematics Teaching and Learning.* 1-16. http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm.

CASTRO, E.; CASTRO E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico et al. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Cap. V, ICE/Horsori. Barcelona. 95-124.

CHEVALLARD, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne.* La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 12 (1), 77-111.

CHICK, H.; et al (2001). *Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra.* Melbourne: The University of Melbourne.

CHOMSKI, N. (1977). *El lenguaje y el entendimiento.* Barcelona: Seix Barral.

COSTON, Y. M. (1995). The effect of a graphics calculador enhanced college algebra curriculum and cooperative learning on mathematics achievement and attitude'. En L. Lum (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.* Reading MA: Addison-Wesley. 460-466.

COULOMBE, W.N.; MATHEWS, D. (1995). A comparative study of mathematics courses with computer and non-computer laboratories. En L. Lum (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.* Reading MA: Addison-Wesley. 467-473.

CZARNOCHA, B.; DUBINSKI, E.; et al (2001). Conceptions of Area: In Students and in History. *College Mathematics Journal.* 32 (2), 99-109.

DAVIS, P.; HERSH, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Birkhauser, Boston.

DEPOOL, R. (1991). Actitudes hacia las matemáticas en los alumnos de sexto y noveno grados de Educación Básica y segundo año del Ciclo

Diversificado. Tesis de Maestría. Convenio UCLA-UPEL-UNEXPO. Sin publicar

DEPOOL, R., CAMACHO, M. (2001). Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un software para el aprendizaje de las Matemáticas. En, Camacho, M.; Morales, A; Socas, M. M (eds.): *Formación del profesorado e investigación en educación matemática III*. 27-42.

DREYFUS, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En Tall, D.O. (ed): *Advanced mathematical thinking.* 26-41. Kluwer. Boston.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the four teenth International conference for the Psychology of Mathematics Education*. 2, 27-33.

DRIJVERS, P. (1995). White box/ black box revisited. *The International Derive Journal.* 2 (1), 3-14.

DRIJVERS, P.; VERWEIJ, A., WINSEN E. (1997). Mathematics Lessons with *DERIVE*. Developed by the CAVO working group. En *ZDM*. 4, 118-123.

DRIJVERS, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 5,189-209.

DRIJVERS, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 34 (5), 221-228.

DRIJVERS, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment. CD-B. Utrecht.

DUBINSKI, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D. (ed.): *Advanced in Mathematical Thinking.* Kluwer. Dordrecht. 95-123.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives.* 5, 37-65.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pénsee humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*. Peter Lang.

EDWARDS, C.; PENNEY, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (1991). On the reluctance to visualize in Mathematics. En Zimmermann, W.; Cunnigham, S. (eds): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA. Washington. 25-37.

ERNEST, J. (1976). Mathematics and sex. American *Mathematical Monthly*. 83, 595-614.

FENNEMA, E., SHERMAN, J. (1976). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: A further study. *Journal for Research in Mathematics Education.* 9, 189-203.

FILLOY, E. (1999). *Aspectos teóricos del Álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

GALBRAITH, P. (2002). “Life wasn’t meant to be easy”: Separating wheat from chaff in technology aided learning. 2*nd International Conference on the Teaching of Mathematics.* 1-22.

GALBRAITH, P., HAINES C. (1998). Disentangling the Nexus: Attitudes to Mathematics and Technology in a Computer Learning Environment. *Educational Studies in Mathematics.* 36, 275-290.

GALBRAITH, P., HAINES C., IZARD, J. (1998). How do Students’ attitudes to mathematics Influence the Modelling Activity? En P. Galbraith, W. Blum, G. Booker y I. D. Huntley (Eds.), *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology-Rich World.* Chichester: Horwood Publishing.

GAIRÍN, J. (1987). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática.* Barcelona: PPU.

GANGULI, A. (1992). The effect on students’ attitudes of the computer as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics.* 23 (6), 611-618.

GINSBURG, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics.* 1(3), 4-11.

GOLDIN, G. (1985). Thinking scientifically and Thinking Mathematically. En E. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

GOLDIN, G. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the* *teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

GOLDIN, G. (1998). Representations, learning, and problem solving in Maths. *Journal of Mathematical Behaviour.* 17 (2), 137-165.

GOLDIN, G. (1989). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation*.* En A. Borbás (Ed.). *Proceedings of the Twelfth Conference PME.* Veszprem, Hungary: OOK Printing House.

GÓMEZ, P. (1997). Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes. Universidad de Los Andes. Bogotá- Colombia. http://ued. Uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/reportes/calculadoras/ 7-Actitude.html.

GONZÁLEZ, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia.* Universidad de La Laguna. Sin publicar.

GRAS, R. (1992). Data analysis: a method for the processing of didactic questions. En R. Douady & A. Mercier (eds): *Research in Didactic of Mathematics.* La pensée sauvage. Grenoble.

GRAY, E. M.; TALL, D. (1992). Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure – A Primary Perspective, *Workshop on Mathematics Education and Computers*, Taipei National University. 209– 215.

GRAY, E. M.; TALL, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education.* 25, 116-140.

GUIN, D.; TROUCHE, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 3, 195-227.

GUIN, D.; TROUCHE, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 34 (5), 204-211.

GUZMÁN, M. DE. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis.* Pirámide. Madrid.

HADAMARD, J. (1954). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Dover, New York.

HANNULA, M. (2002). Attitude towards Mathematics: Emotions, Expectations and Values. *Educational Studies in Mathematics.* 49, 25-46.

HEID, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as tool. *Journal for Research Mathematics Education.* 19, 3-25.

HEID, M. K. (2002). How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computers Algebra in Mathematics Education.* 9 (2), 95-112.

HEID, M. K.; BLUME, G. W.; FRANAGAN, K.; ISERI, L.; KERR, K. (1999). The impact of CAS on non-routine problem-solving by college mathematics students. *International Journal of Computers Algebra in Mathematics Education.* 5(4), 217-249.

HERNÁNDEZ, A. (1995). Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numéricos, Gráficos y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Tesis Doctoral. Sin publicar.

HERSCOVICS, N. (1989). Cognitive Obstacles Encounters in the Learning of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Reston, VA: N.C.T.M.

HEUGL, H. (1997). Experimental and Active Learning with *DERIVE*. En *ZDM*. 4 (4), 142-148.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (ed): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan. New York. 65-97.

HITT, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación Matemática.* 10 (2), 23-45.

HITT, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y de Estructuras Cognitivas. *Representations and mathematics visualization.* PME-NA, Tucson, Arizona. 131-147. http://www.cinvestav.mx/mat_edu/PMENA/ .

HOLTON, D., et al (2003). The Teaching and learning of Maths of University level: an ICMI study. Kluwer Dordrecht.

HUNTER, M.; MONAGHAN, J.D.; ROPER, T. (1993). The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking. En R. Sutherland (Ed.), *Workings Papers for ESRC Algebra Seminar,* London: Institute of Education.

KAPUT, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R. W. Scholz, R Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers. 379-397

KENDAL, M.; STACEY, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 6, 143-165.

KISSANE, B.; et al (1995). Student Reactions to the use os Graphic Calculators. En MERGA 18 GALTHA-*Proceedings of the Mathematics Research Group of Australasia.* Darwin. Northern Territory University. http://cleo.murdoch.edu.au/learning/pubs/mkemp/merga95.html .

KULM, G. (1984). The classification of Problem Solving Research variables. En Goldin y McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* Philadelphia: The Franklin Institute Press.

KUTZLER, B. (1994). Derive- The future of teaching mathematics. *The International Derive Journal.* 1 (1), 37-48.

KUTZLER, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Derisoft. España.

LAGRANGE, J. (1996). Teaching and Learning of mathematics. An attitudinal survey of the use of *DERIVE* in French classrooms. *International DERIVE Journal.* 3 (3), 91-107.

LAGRANGE, J. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 4, 51-81.

LAGRANGE, J. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Students in Mathematics.* 43, 1-30.

LAGRANGE, J-B., ARTIGUE, M., LABORDE, C. & TROUCHE, L. (2001), *A Meta Study on IC Technologies in Education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration*, Contribution to the XXVth International Conference on Psychology of Mathematics Education, Utrecth, July 2001.

MACINTYRE, T.; FORBES, I. (2002). Algebraic skills and CAS- Could assessment sabotage the potential? *International Journal of Computer in Mathematics Education.* 9, 29-56.

MALLAM, W. (1993). Impact of School-Type and Sex of the Teacher on Female Students' Attitudes towards Mathematics in Negerian secondary schools. *Educational Studies in Mathematics.* 24 (2), 223-229.

MANDLER, G. (1989). Affect and learning: Cases and consequences of emotional interactions. En D.B. McLeod & V.M. Adams (Eds.): *Affect and mathematical problem solving: A new perspective.* Springer-Verlang. New York. 3-19.

MANN, G.; ZEHAVI, N. (1998). A Programming Approach to Extreme Problems. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 5(4), 269-277.

MARIOTTI, M. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. In L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 695-723

MARLEWSKI, A. (1999). Using a Computer System in Producing and Understanding the Numerical Quadrature Formulas. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 6(2), 87-101.

MASINGILA, J.; PRUS-WISNIOWSKA, E. (1996). Developing and Assessing Mathematical Understanding in Calculus through Writing. *NCTM.* 95-104.

MAYES, R. (1998). ACT in Algebra: Students Attitude and Belief. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 5(1), 3-14.

McLEOD, D. (1992). Research on affect in mathematics educations: A reconceptualization. En D. A. Grouws (ed): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan. New York. 575-596

MILLÁN, N. (1988). Escala de actitud hacia la Matemática. Ponencia presentada al V Seminario Nacional de Investigación Educativa. El Mácaro.

MOHAMMAD, Y; TALL, D. (1999). Changing Attitudes to University Mathematics Through Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics.* 37, 76-82.

MONAGHAN, J. (1994). On the successful use of Derive. *The International Derive Journal.* 1 (1), 57-69.

MONAGHAN, J.; SUM, S.; TALL, D. (1994). Construction of limit concept with a computer algebra system. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Educational.* Lisbon. 3. 279-286.

MULLER E. R. (1991). MAPLE Laboratory in a Service Calculus Course. En L. C. Leinbach et al (Eds.),*The Laboratory Approach to Teaching Calculus,* MAA Notes. Washington DC: MAA. 20, 111-117.

MUNDY, J., (1984), Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En Bell, A.; Low, B.; Kilpatrick, J., (Eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education.* Proceedings, ICME 5. Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center. Nottingham. 170-172

MUÑOZ, D. (1994). Las Actitudes hacia las Matemáticas de los Maestros y Alumnos de Bachillerato. *Educación Matematica.* 6 (1), 46-58.

MURA, R. (1987). Sex – Related differences in expectations of success in undergraduate Mathematics. *Journal for research in Mathematics Education.* 18, 15-23.

NOGUERA, N. (2001). A description of Tenth Grade Algebra Students' Attitudes and Cognitive Development When Learning Algebra Using CAS. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 8(4), 257-270.

NOMIKI, S.; et al (1997). A Statistical Analysis on the Effectiveness of Using a Computer Algebra System in a Developmental Algebra Course. *Journal of Mathematical Behaviour.* 16 (2), 175-180.

ORTEGA P. (2002). La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico. Universidad Computence de Madrid. Tesis Doctoral. Sin publicar.

ORTIZ, J. (2000). Modelización y Calculadoras Gráficas en la formación inicial de profesores de Matemáticas. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Sin publicar.

ORTIZ, J. (2002). Modelización y Calculadora Gráfica en la enseñanza del Álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación. Memorias doctorales. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Sin publicar.

ORTON, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults,* ph.D. tesis, Leeds University.

ORTON, A. (1983). Student's understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics.* 14 (1), 1-18.

PALMITER, J. R. (1991). Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education.* 22, 151-156.

PEA, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. *Educational Communication and Technology.* New York University. 89-122.

PHILIPPOU, G. N.; CHRISTOU, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 35, 189-206.

POLYA, G. (1957). *How to solve it*. New Jersey: Princeton University Press. (Traducción al castellano: 1976. Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas).

PONTE, J. (1994). Teachers' and Students' views and Attitudes towards a New Mathematics Curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics.* 26, 347-365.

PONTE, J. P. et al. (1992). Students' Views and Attitudes Towards Mathematics Teaching and Learning: A Case Study of a Curriculum Experience. En W. Greeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of PME 16.* Durham, NH: University of New Hampshire. Vol. II, 218-225.

RABARDEL, P. (1995). *Les homes et les technologies- approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin Paris.

RASSLAN, S.; TALL, D., (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th PME.* 4, 89-96.

RUTHVEN, K. (2002). Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems: *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* 7, 275-291.

SANTOS, M. (2000). The Use of representations as a Vehicle to Promote Students' Mathematical Thinking in Problem Solving. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education.* 7 (3), 193-212.

SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactiques des Mathématiques.* 6 (1), 5-67.

SIERPINSKA, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits, *Educational Studies in Mathematics.* 18, 371-387.

SCHNEIDER, M. (1993). A way to analyse several dificultéis the pupils meet with in calculus. En M. Artigue y G. Ervynck (Eds.), *Proccedings of Workings Group 3 on Students' Difficulties in Calculus,* ICME-7, Québec, Canada. 31-34.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36

SOCAS, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico et al. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Cap. V, ICE/ Horsori. Barcelona. 125-154.

SOCAS, M. (2001). Investigación Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un Estudio en relación con el Lenguaje Algebraico. Universidad de La Laguna. Sin publicar.

SOCAS, M. M.; HERNÁNDEZ, J.; NODA, A. (1998). Modelo de Competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas relativas. *Enseñanza de las Ciencias.* 16 (2), 261-269.

SPIVAK, M. (1974). *Calculus.* Reverté. Barcelona.

STEEN, L. (1988). Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorical Reasoning. *The sciences.* 27, 41-46.

STEWART, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos.* Thomson. México.

TALL, D. (1985). Understanding the Calculus. *Mathematics Teaching.* 110, 48-53.

TALL, D. (1986). A Graphical Approach to Integration and the Fundamental Theorem. *Mathematics Teaching.* 113, 48-51.

TALL, D. (1990). A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods. *Teaching Mathematics and its Applications.* 9(3), 124-131.

TALL, D. (1991a). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics (ed. S. Cunningham & W. S. Zimmermann,* MAA Notes No. 19). Washington DC: MAA. 105-119.

TALL. D. (1991b). Recent development in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts. *The Laboratory Approach to Teaching Calculus.* 20, 15-25.

TALL, D. (1991c). *Reflections*. En Advanced mathematical thinking. 251-259. Kluwer. Dordrecht.

TALL. D. (1991d). Setting the Calculus Straight. *Mathematics Review*, 2 (1), 2–6.

TALL, D. (1991e). Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics Teaching.* 137, 29-32.

TALL, D. (1995). Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, plenary address. En L. Meira & D. Carraher, (Eds.), *Proceedings of PME* 19, Recife, Brazil, I, 61– 75.

TALL, D. (1997). Functions and Calculus. En A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289–325, Dordrecht: Kluwer.

TALL. D.; THOMAS, M. (1991). Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer, *Educational Studies in Mathematics*, 22 2, 125– 147.

THOMAS, G.; FINNEY, R. (1992). *Calculus and Analytic Geometry*. Addison Wesley. New York.

TROUCHE, L. (1997). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice: Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation.* Dissertation. Montpellier, France: Université de Montpellier II.

TROUCHE, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics.* 41, 239-264.

TROUCHE, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. In D.

Guin & L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques, transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. La pensée sauvage editions. Paris. 215-242.

TURÉGANO, P. (1998). Del área a la Integral. Un Estudio en el Contexto Educativo. *Enseñanza de las Ciencias.* 16 (2), 233-249.

VERGNAUD, G. (1993). La teoría de los campos conceptuales. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa*. México: Cinvestav-IPN. 88-117

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind y society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.): *Advanced in Mathematical Thinking.* Kluwer. Dordrecht. 65-80.

WEIGAND, H. G; WELLER H. (1998). Modelling Real-life Problems Involving Periodic Processes with Computer Algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. 5 (4), 251-267.

WENZELBURGER, E. (1993). Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral- Una Propuesta Didáctica. *Educación Matemática.* 5 (3), 93-123.

WOLLEAT, P.L., BECKER, A., PEDRO, J., FENNEMA, E. (1980). Sex differences in high school student's causal attributions of performance in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 11, 356-365.

ZIMMERMAN, W. (1991). Visual thinking in calculus. En Zimmerman, W. y Cunningham, S. (eds.): *Visualization in teaching and learning Mathematics.* Mathematical Association of America. 127-137.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (1991). Introducción de editores: ¿Qué es la visualización matemática? En Zimmerman y Cunningham (eds): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* MAA. 67-76.

ANEXOS

ÍNDICE

ANEXO 1

ESCALA DE ACTITUDES EA-1

ESTUDIO EXPLORATORIO

ESTUDIO EXPLORATORIO
ESCALA DE ACTITUDES EA-1

APELLIDOS Y NOMBRE: ____________________________

SECCIÓN Nº:_______ SEXO: VARÓN __HEMBRA:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se te presentan una serie de enunciados

Escribe un 4 si estas completamente de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 3 si estas de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 2 si estas en desacuerdo con el enunciado.

Escribe un 1 si estas completamente en desacuerdo con el enunciado.

	PROPOSICIONES	
1	No sé por qué, pero en clase de Matemática pienso en otro cosa	
2	El vocabulario propio de la matemática hace más difícil su aprendizaje	
3	Justificar cada paso en Matemáticas es importante	
4	Los exámenes de Matemáticas me producen miedo	
5	Obtener buenas calificaciones en Matemáticas es importante para mí.	
6	Las Matemáticas requieren practicar continuamente.	
7	Cuando estoy en clase de Matemáticas me quedo como en la luna y no entiendo nada	
8	La Matemáticas la necesitan sólo los Ingenieros.	
9	Las Matemáticas me dan seguridad y al mismo tiempo me estimula	
10	En Matemáticas no queda más remedio que aprendérselo todo de memoria.	
11	Conocer cómo resolver un problema es tan importante como hallar su solución.	
12	La clase de Matemáticas me resulta larga y tediosa.	
13	Si en la Universidad se organiza un club de Matemáticas me gustaría participar	
14	El conocimiento de la teoría es indispensable para resolver los problemas.	
15	Prefiero no entrar a las clases de Matemáticas.	
16	La Matemática tiene usos prácticos en la vida diaria.	
17	Las Matemáticas tiene la culpa de que algunos alumnos no hayan seguido estudiando.	
18	Las Matemáticas ayuda a las personas a pensar lógicamente	
19	A la hora de hacer ejercicios individuales de Matemáticas me enredo	
20	Me gustaría que las asignaciones fueran solamente de Matemáticas.	
21	No veo la necesidad de consultar textos de Matemáticas fuera de los apuntes.	
22	Estoy a gusto en la clase de Matemática.	
23	Me agrada resolver problemas Matemáticos.	
24	La imaginación y la intuición son útiles en Matemáticas.	
25	Cuando en clase de Matemáticas se solicita un voluntario para pasar la pizarra no me ofrezco.	
26	Yo espero trabajar en un área que requiera Matemáticas.	
27	Además de los ejercicios de Matemáticas que me proponen resuelvo otros más.	
28	Generalmente siento la necesidad de conversar de Matemáticas	
29	El manejar una computadora me produce miedo.	
30	Me gustaría que en las clases de Matemáticas se usara una Computadora.	
31	Es necesario usar una Computadora para realizar cálculos Matemáticos.	
32	Para trazar gráficas de funciones, no es necesario una Computadora	
33	Los profesores que dan su clase sin una Computadora son obsoletos.	
34	En las clases de Matemáticas se debería explicar el uso de la Computadora.	

ANEXO 2

MÓDULO INSTRUCCIONAL I

PRÁCTICA 1

ALUMNO: ____
ALUMNO: ____
Día: ______**mes**________**año:**______.
Hora de inicio de la práctica: ______________

INTRODUCCIÓN

DERIVE es un "Programa de Cálculo Simbólico", que es utilizado para trabajar con Matemáticas, usando las notaciones propias (simbólicas) de esta ciencia.

Este programa de Cálculo simbólico es capaz de realizar operaciones numéricas básicas con números Reales y Complejos, dando la respuesta en forma exacta y aproximada. Tiene capacidad para representar gráficamente funciones y curvas en general. Así como también, capacidad numérica que suple a la mejor de las calculadoras. Calcula valores de Funciones Trigonométricas, dando la respuesta exacta y aproximada. Ésta es una muestra de la diversidad de aplicaciones que tiene *DERIVE*, en las actividades que desarrollaremos iremos explicando estas utilidades y otras más. En esta práctica se darán las nociones básicas del programa *DERIVE* y algunas de sus aplicaciones en cuanto a resolución de ecuaciones. Finalmente se pedirá evaluar el desarrollo de esta práctica.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA.

Programa de Cálculo 1. Unidad 1. Introducción al Cálculo.

OBJETIVOS

1. Explicar las nociones básicas del programa derive.
2. Simplificar expresiones algebraicas.
3. Resolver ecuaciones en una variable.
4. Resolver ecuaciones lineales.

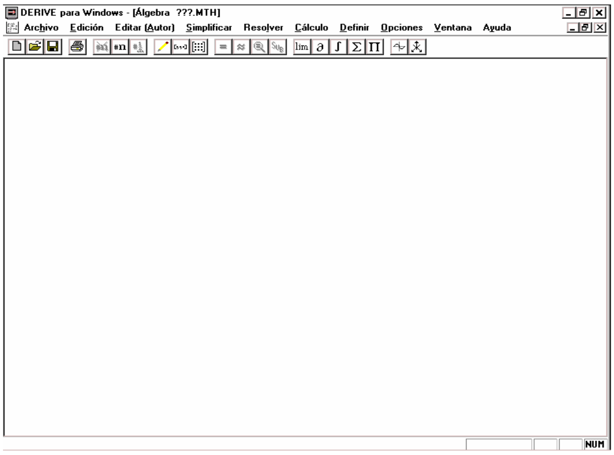
INSTRUCCIÓN GENERAL

La Práctica está diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor.

ACCESO AL PROGRAMA DERIVE.

Pulsa el botón del ratón dos veces (lo más rápido que puedas) en el icono que dice **DERIVE.**

Te aparecerá la pantalla del DERIVE

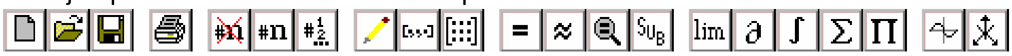


***DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA PANTALLA*.**

En la parte superior de la pantalla del *DERIVE* aparecen las siguientes Categorías

Archivo Edición Editar (Autor) Simplificar Resolver Cálculo Definir Opciones

Debajo aparecen una serie de iconos que activan los comandos.



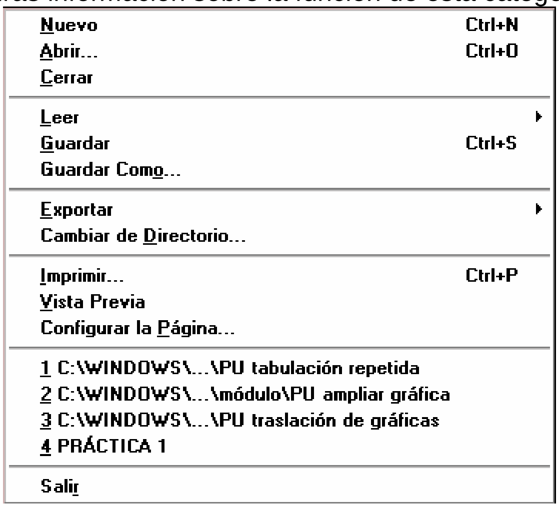
Las aplicaciones de la mayoría de las categorías y de los comandos las desarrollaremos a lo largo de las actividades que realizaremos.

USO DE LAS CATEGORÍAS.

Sí marcas alguna categoría, por ejemplo:

Archivo

y pulsas el ratón, obtendrás información sobre la función de esta categoría.

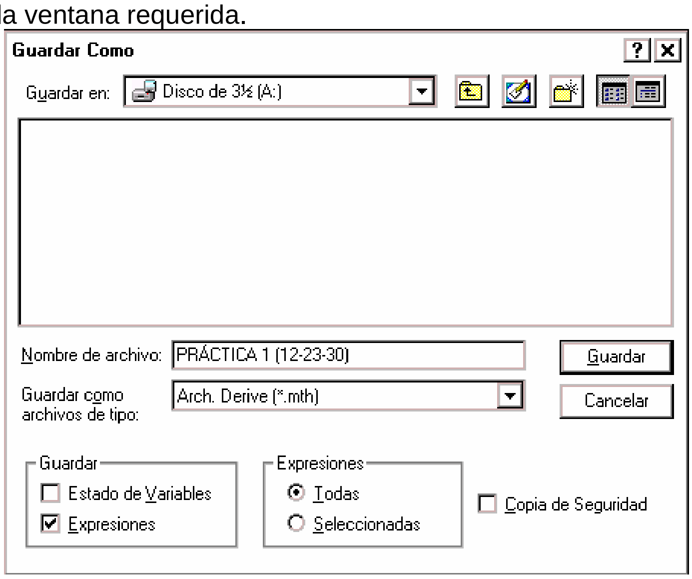


Para salirse de cualquier categoría, ubica el cursor en la hoja en blanco o Ventana y pulsa el ratón.

PROCEDIMIENTO PARA GUARDAR INFORMACIÓN.

Para guardar en un Archivo personalizado se deben seguir los siguientes pasos:

Marcas la categoría **Archivo** y desplazas el cursor hasta **Guardar Como**. Pulsa el ratón y aparecerá la ventana requerida.



Selecciona en donde dice **Guardar en**: la disquetera **Disco de 3½(A)** *(no te olvides de introducir el disquete)***.** Escribe en donde dice Nombre de archivo ***PRÁCTICA 1*** y ***número de lista*** (si trabajas en equipo escribe también los números de tus compañeros) y luego marca **Guardar**. Volverás a la pantalla de *DERIVE,* sí observas en la parte superior, aparece impreso el nombre del archivo.

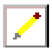
DERIVE para Windows - [Álgebra A:\PRÁCTICA 1 (12-23-30).mth]

Observación: Una vez que tienes guardado el archivo y necesitas que te actualice lo guardado, conservando el mismo nombre, marca el icono.

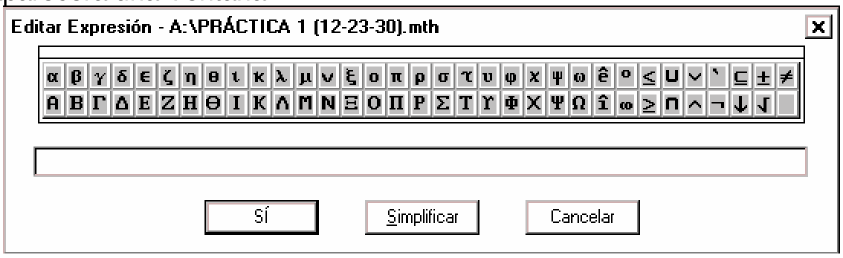
ALGUNAS APLICACIONES DE LAS CATEGORÍAS Y LOS COMANDOS

Escritura de frases.

Para escribir en la Ventana, es decir en la pantalla blanca, se procede así:
Pulsa el icono



Te aparecerá una Ventana



Escribe, entre comillas, **"Sumas de Riemann"**, Luego pulsa el icono

Debe aparecer lo que se te pidió.
Para borrar lo escrito pulsa el icono

Para recuperar lo borrado pulsa

Ahora escribe

$$\text{"}\delta\gamma\sqrt{\ }\Sigma\eta\beta\text{"}$$

Para obtener estos signos, observa que se encuentran en parte superior de la ventana que abriste, marca cada uno con el ratón y aparecerán en la ventana.

NOTA. Guarda lo que han hecho.

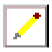
OPERACIONES BÁSICAS.

Suma, Resta, Multiplicación y División.

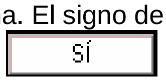
Calculemos

$$(23 + 12 - 75)\cdot 45$$

Marca el icono



Escribe la expresión en la ventana. El signo de multiplicación es un asterisco *. Luego



Una vez que te aparezca la expresión marca el icono

ESCRIBE EL RESULTADO: ___________________

Calcula lo siguiente.

$$\frac{[23 + 45 - 125]\cdot 15}{2 - 45}$$

El signo "[" se obtiene tecleando simultáneamente AltGr y el signo "[". El signo de división es /.

ESCRIBE EL RESULTADO: ___________________

Radicales.

Calcula

$$\sqrt{(3\cdot 400 - 5 + 4)}$$

El signo de raíz se encuentra en parte superior de la ventana.

ESCRIBE EL RESULTADO: ___________________

Potencias.

Calcula

$$(5^4)^2$$

El signo para elevar a una potencia es $\wedge$. Se obtiene tecleando simultáneamente la techa que tiene el símbolo $[\Uparrow]$ y la tecla que tiene el signo $\wedge$.

ESCRIBE EL RESULTADO: ___________________

***<u>Observación</u>*:**

Después que se hayan escrito varias líneas, irán apareciendo en la ventana del lado derecho y en la parte inferior unos iconos que sirven para mover lo escrito de arriba hacia abajo y viceversa; de derecha a izquierda a derecha y viceversa. Funciona, marcando y sin soltar el botón del ratón lo mueves. Practícalo.

```
#31: RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#32: RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#33: RECT_PTO_MEDIO(a, b, n)
#34: TRAPECIOS(a, b, n)
#35: AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#36: AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#37: AREAS_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#38: AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#39: RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#40: RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#41: AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#42: AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#43: AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#44: AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#45: APROXIMACIONES_DEL_AREA_BAJO_LA_CURVA_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#46: APROXIMACIONES_DEL_AREA_BAJO_LA_CURVA_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#47: LIM_RECT_INF(a, b)
#48: LIM_RECT_SUP(a, b)
#49: LIM_PTO_MEDIO(a, b)
#50: LIM_TRAP(a, b)
```

<u>USO DE LA CATEGORÍA Simplificar.</u>

Esta categoría permite, entre sus funciones expandir expresiones algebraicas, así como también factorizarlas. Veamos el procedimiento a seguir.

Marca la categoría

Simplificar

y pulsa el ratón, obtendrás informativa sobre la función de esta categoría.

Normal...	Ctrl+B
Expandir...	Ctrl+E
Factorizar...	Ctrl+F
Aproximar...	Ctrl+G
Sustituir	▸

Para salirse de cualquier categoría, ubica el cursor en la hoja en blanco o Ventana y pulsa el ratón.

Veamos un ejemplo de aplicación de esta categoría.

Escribe la expresión

$$5\cdot\left[(x-6)^6\right]$$

Con el *DERIVE* puedes expandir la expresión anterior, de la siguiente manera:

Marca la categoría simplificar y bajas hasta expandir, márcalo

Te aparecerá,

$$\mathrm{EXPAND}\left(5\cdot\left[(x-6)^6\right],\ \mathrm{Rational},\ x\right)$$

Marca el icono

=

Obtendrás una expansión de la expresión en forma polinómica.

$$[5\cdot x^6 - 180\cdot x^5 + 2700\cdot x^4 - 21600\cdot x^3 + 97200\cdot x^2 - 233280\cdot x + 233280]$$

Si vuelves a marcar la categoría simplificar y bajas hasta factorizar, obtendrás el polinomio factorizado. Hazlo.

Expande la siguiente expresión:

$$7(x+4)^5$$

ESCRIBE EL RESULTADO: ________________________________

Factoriza la expresión obtenida anteriormente.

ESCRIBE EL RESULTADO: __________________

USO DE LA CATEGORÍA Resolver.

Esta categoría permite, entre sus funciones resolver ecuaciones de manera algebraica y numérica; así como también resolver sistemas de ecuaciones lineales. Veamos el procedimiento a seguir.

Marca la categoría

Resolver

y pulsa el ratón, obtendrás informativa sobre la función de esta categoría.

Algebraicamente...	Ctrl+May+A
Numéricamente...	Ctrl+May+N
Sistema de ecuaciones...	Ctrl+May+S

Veamos un ejemplo de aplicación de esta categoría.

Escribe la expresión

$$x^3 - 5\cdot x^2 + 6\cdot x$$

Marca la categoría *Resolver* y bajas hasta Algebraicamente, márcalo

Te aparecerá

$$\text{SOLVE}(x^3 - 5\cdot x^2 + 6\cdot x,\ x)$$

Con el icono de igualdad se tiene

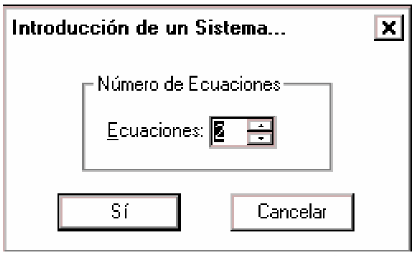
$$[x = 0,\ x = 2,\ x = 3]$$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

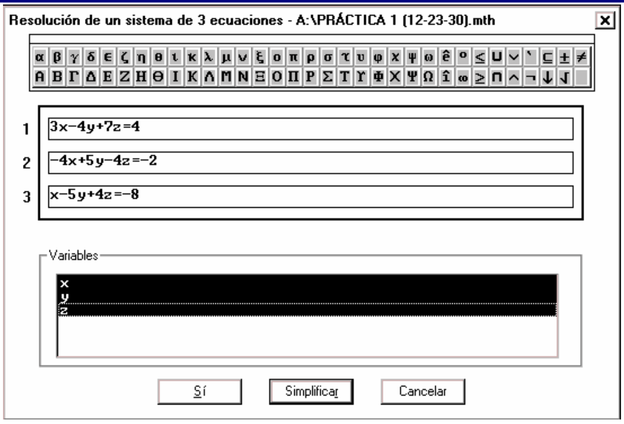
Para explicar el procedimiento consideremos el ejemplo siguiente: resuelve el sistema lineal.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 7z = 4 \\ -4x + 5y - 4z = -2 \\ x - 5y + 4z = -8 \end{cases}$$

Marca la categoría *Resolver* y luego marca *sistema de ecuaciones.* Al aparecer la ventalla respectiva escribe, donde dice Ecuaciones: el número 3.



Una vez que hayan marcado "**Sí",** te aparecerá otra ventana donde escribirás las ecuaciones y las variables.



Al marcar **Sí** y luego marcar el icono de igualdad tendrás la solución del sistema.

SOLVE([3·x − 4·y + 7·z = 4, − 4·x + 5·y − 4·z = −2, x − 5·y + 4·z = −8], [x, y, z])

$$\left[x = \frac{10}{3} \quad y = \frac{166}{57} \quad z = \frac{46}{57} \right]$$

NOTA. Guarda lo que han hecho.

Resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 28 \\ 2x + y + 3z = 25 \\ 2x + 2y + 2z = 22 \end{cases}$$

ESCRIBE EL RESULTADO: ___________________

Hora de finalización de la práctica: ___________

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 1.

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. Escribe tu opinión con relación al diseño de la práctica.
3. Escribe tu opinión con relación al contenido expuesto.
4. Escribe tu opinión con relación al estilo de la clase.
5. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
6. ¿Qué le quitarías?
7. Consideran que el tiempo fue suficiente. En caso de no serlo ¿Cuánto tiempo en minutos consideras que se debió asignar a la práctica?
8. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
9. ¿Qué ventajas y desventajas le atribuyes a esta manera de enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

1. Leithold, L. (1994). *Matemáticas previas al Cálculo*. Tercera edición. Harla. México.
2. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PRÁCTICA 2

ALUMNO: ____
ALUMNO: ____
Día: ______mes________año:______.
Hora de inicio de la práctica: _____________

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas de *DERIVE* para el estudio de funciones reales, así como también elaborar graficas de ecuaciones. Dentro de las actividades de esta práctica se introducirán algunos programas de utilidades y ejemplos de aplicación.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 1. Introducción al Cálculo.

OBJETIVOS

1. Representar gráficamente funciones.
2. Trasladar, ampliar y determinar la reflexión de la gráfica de una función.
3. Elaborar la grafica de una ecuación.
4. Elaborar tablas de valores de una función utilizando tabulación repetida.
5. Elaborar y manipular programas de utilidades diseñados en *DERIVE.*

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica está diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persiste, consulta al profesor.

DESARROLLO

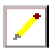
ABRE UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 2a y los números de lista.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE FUNCIONES.

Definamos la función

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 1$$

Para ello, marca el icono



Escribe la expresión como a continuación.

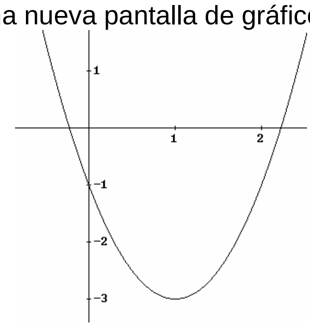
$$F(x) := 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$$

Seguidamente marca “**Sí”.**

Representemos gráficamente las funciones. Marca el icono

Cuando aparezca la ventana de gráficos, vuelves a marcas el icono

Aparecerá la gráfica en una nueva pantalla de gráficos.



Para visualizar la pantalla de trabajo y la pantalla gráfica debes hacer lo siguiente: Marca la categoría

Ventana

Selecciona mosaico vertical.

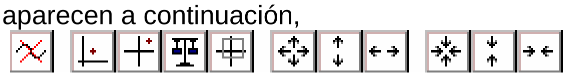
IMPRIMIR GRÁFICOS.

Para imprimir el gráfico, marca el icono

IMPLIME EL GRÁFICO Y ANÉXALO A LA PRÁCTICA.
GUARDA LO QUE HAS HECHO.

Modificar el Campo Visual de la Gráfica.

Los iconos que aparecen a continuación,



De izquierda a derecha tienen las siguientes funciones

- El primero borra la gráfica.
- El segundo y tercero, traslada el centro de la gráfica en la ventana.
- El Cuarto cambia la escala en los ejes.
- El QUINTO selecciona el rango, y con él puedes hacerle un ZOOM a la gráfica, en la parte que selecciones.
- El sexto, séptimo y octavo reduce en campo visual de la gráfica.
- El noveno, décimo y undécimo, amplifica el campo visual de la gráfica.

Utilizando la gráfica, practica marcando los iconos.

Grafica las siguientes funciones.

1. $g(x) = 1 + 4x - x^3$.
2. $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2))}$
3. $i(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
4. $w(x) = 3\cos x$
5. $k(x) = 2 - \sin x$
6. $n(x) = [|x|]$ (función parte entera). En *DERIVE* parte entera se escribe $n(x) = FLOOR\ x$.
7. $m(x) = x^2 + [|x|]$.

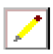
IMPRIME LOS GRÁFICOS Y ANÉXALOS A LA PRÁCTICA.
GUARDA LO QUE HAS HECHO.

TRASLACIÓN DE GRÁFICAS.

ABRE UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 2b y los números de lista.

A continuación vamos a trabajar con un programa de utilidades diseñada para trasladar la gráfica de una función.

Marca el icono



Escribe

```
F(x) :=
```

Repite el proceso para cada una de las expresiones siguientes.

```
TRASLACIóN_VERTICAL(k) := k + F(x)
TRASLACIóN_HORIZONTAL(k) := F(k + x)
```

(1)

OBSERVACIÓN: *Se utilizan en la definición de las sentencias nombres que nos indican cual es el proceso que se desarrolla.*

TRASLACIÓN_VERTICAL(k) :

TRASLACIÓN_HORIZONTAL(k)

En TRASLACIÓN VERTICAL si sustituyes k por un valor positivo, la gráfica se traslada hacia arriba; si se sustituye por un valor negativo la grafica se traslada hacia abajo.

En TRASLACIÓN HORIZONTAL si sustituyes k por un valor positivo, la gráfica se traslada hacia la izquierda; si se sustituye por un valor positivo, la gráfica se traslada hacia la derecha.

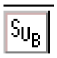
Veamos como se puede aplicar el programa de utilidades a un ejemplo particular.

Sea $f(x) = (x+1)^3 + 3$. Escribe la expresión de la función tal como:

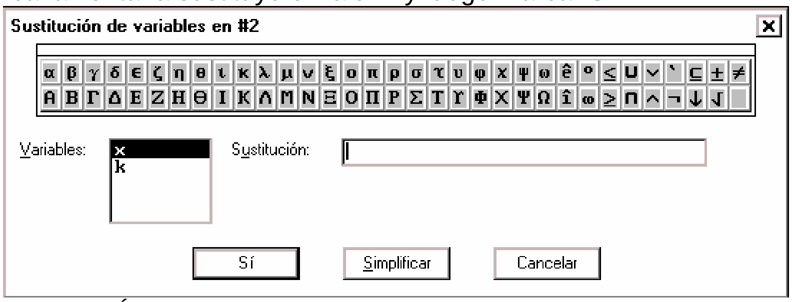
$$F(x) := (x + 1)^3 + 3$$

Representa gráficamente la función y divide la pantalla en dos partes.

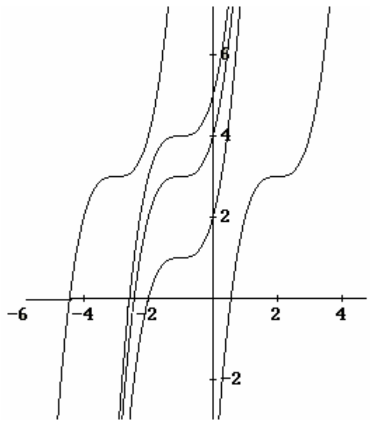
Para sustituir el valor de k en cualquiera de los tipos de traslación, marca la sentencia respetiva **(1).**y luego marca el icono



Cuando aparezca la ventana sustituye el valor k y luego marca "**Sí**"



Sustituye en TRASLACIÓN VERTICAL por {1,-2} y grafica.
Sustituye en TRASLACIÓN HORIZONTAL por {2,-3} y grafica.
Las gráficas de observarán así:



NOTA. Guarda lo que han hecho.

IMPRIME LOS GRÁFICOS Y ANÉXALOS A LA PRÁCTICA.

Traslada a dos posiciones verticales y dos horizontales la gráfica de la función.

$$f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 6x - 1.$$

IMPRIME LOS GRÁFICOS Y ANÉXALOS A LA PRÁCTICA.

AMPLIACIÓN Y REFLEXIÓN DE UNA GRÁFICA.

Para obtener la gráfica de $k\ f(x)$ para algún número real k, pueden *multiplicarse* por k las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, duplican las ordenadas y si $y = \frac{1}{2} f(x)$, se multiplican las ordenadas por $\frac{1}{2}$. Si $k > 0$ (y $k \neq 1$) , este proceso se denomina ***ampliar*** la gráfica de $y = f(x)$.

La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene multiplicando por –1 la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Así, cada punto (a,b)de la gráfica de $y = f(x)$que se encuentra sobre el eje X, determina un punto $(a,-b)$ en la gráfica de $y=-f(x)$ que se encuentra bajo el eje X. Análogamente, si (c,d) está bajo el eje OX (es decir, $d<0$), entonces $(c,-d)$ se encuentra sobre el eje X. La gráfica de $y=-f(x)$ es una ***reflexión*** de la gráfica de $y=f(x)$, con respecto al eje X.

ABRE UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 2c y los números de lista

Escribe el siguiente programa de utilidades (PU).

```
F(x) :=

AMPLIAR_LA_GRáFICA(k) := k·F(x)

reflexión_de_la_gráfica := - F(x)
```
(2)

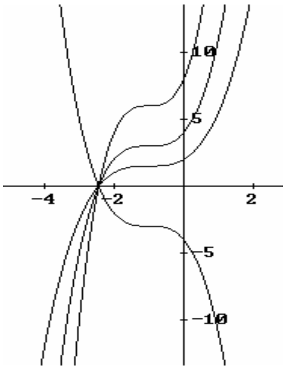
Veamos como se puede aplicar el programa de utilidades a un ejemplo particular.

Sea $f(x)=(x+1)^3+3$. Escribe la expresión de la función tal como

$$F(x) := (x + 1)^3 + 3$$

Representa gráficamente la función y divide la pantalla en dos partes.

Sustituye el valor de k por {2, ½} en **AMPLIAR_ LA_ GRÁFICA (k**) y representa gráficamente cada una. Después marca **reflexión_ de_ la_ gráfica** y grafica. Las gráficas se verán así.



NOTA. Guarda lo que han hecho.
Amplía la gráfica de la función y gráfica la reflexión.
IMPRIME LOS GRÁFICOS Y ANÉXALOS A LA PRÁCTICA.

$$f(x)=2x^5-10x^3+6x-1.$$

IMPRIME LOS GRÁFICOS Y ANÉXALOS A LA PRÁCTICA.

<u>ASIGNACIÓN:</u> Elabora un programa de utilidades para sumar, restar, multiplicar y para cociente de funciones ***(esta actividad es para fuera de clase).***

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACÍÓN.

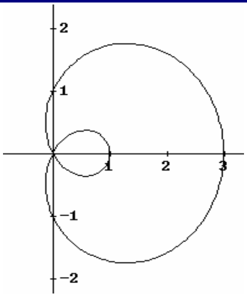
La representación gráfica de una ecuación en dos variables *x* e *y* es el conjunto de todos los puntos (x,y) en el plano que satisfacen la ecuación. Podemos elaborar una representar gráficamente de una ecuación independientemente que sea una función o no, encontrando los valores de *x* e *y* que la satisfacen.

ABRE UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 2d y los números de lista.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^4-4x^3+3x^2+2x^2y^2=y^2+4xy^2-y^4$$

Al representar gráficamente la ecuación se verá así:



NOTA. Guarda lo que han hecho.

Representa gráficamente la curva cuya ecuación es

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2 y^2$$

IMPRIME EL GRÁFICO Y ANÉXALO A LA PRÁCTICA.

Representa gráficamente la curva cuya ecuación es

$$\begin{cases} x = t - 2\ sen(t) \\ y = 1 - 2\cos t \end{cases}$$

Esta ecuación se dice que está expresada en forma paramétrica, con parámetro ***t***, Para poderla representar escribe

```
[t - 2·SIN(t), 1 - 2·COS(t)]
```

IMPRIME EL GRÁFICO Y ANÉXALO A LA PRÁCTICA.

TABULACIÓN REPETIDA

Se puede elaborar una sucesión de tablas de valores de una función diseñando un programa de utilidades.

ABRE UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 2e y los números de lista y escribe el programa de utilidades.

```
F(x) :=

TABULACIóN_REPETIDA(a, b, h) := [VECTOR(x, x, a, b, h), VECTOR(F(x), x, a, b, h)]

TABULACIóN_REPETIDA(a, b, h)
```

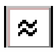
La sentencia permite elaborar una tabla de valores de la función *f(x)* en el intervalo [a, b] con subintervalos de longitud h.

Veamos cómo se puede aplicar el programa de utilidades a un ejemplo particular.

Sea $f(x) = (x+1)^3 + 3$. Escribe la expresión de la función tal como

$$F(x) := (x + 1)^3 + 3$$

Sustituye los valores de a, b, h por {-3,-1,0.5} y {-2.5,-2,0.1} Marcando el icono.



$$F(x) := (x + 1)^3 + 3$$

TABULACIóN_REPETIDA(-3, -1, 0.5)

$$\begin{bmatrix} -3 & -2.5 & -2 & -1.5 & -1 \\ -5 & -0.375 & 2 & 2.875 & 3 \end{bmatrix}$$

TABULACIóN_REPETIDA(-2.5, -2, 0.1)

$$\begin{bmatrix} -2.5 & -2.4 & -2.3 & -2.2 & -2.1 & -2 \\ -0.375 & 0.256 & 0.803 & 1.272 & 1.669 & 2 \end{bmatrix}$$

NOTA. Guarda lo que han hecho.

Elaboda dos tablas de valores para la función $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 6x - 1$ **en el intervalo [-2,3].**

ESCRIBE EL RESULTADO:

Hora de finalización de la práctica: ___________

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 2.

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.

2. Escribe tu opinión con relación al diseño de la práctica.

3. Escribe tu opinión con relación al contenido expuesto.

4. Escribe tu opinión con relación al estilo de la clase.

5. ¿Qué le agregarías a esta práctica?

6. ¿Qué le quitarías?

7. Consideran que el tiempo fue suficiente. En caso de no serlo ¿Cuánto tiempo en minutos consideras que se debió asignar a la práctica?

8. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.

9. ¿Qué ventajas y desventajas le atribuyes a esta manera de enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler (1992). *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw Hill. México.
3. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Addison Wesley. México
4. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Derisoft. España.

PRÁCTICA 3

ALUMNO: ____
ALUMNO: ____
Día: ______**mes**________**año:**______.
Hora de inicio de la práctica: _____________

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio del límite de una función. Dentro de las actividades de esta práctica se usarán algunos programas de utilidades para la elaboración de tablas de valores donde se destacará la tendencia al límite de una función.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 1. Introducción al Cálculo.

OBJETIVOS

1. Calcular el límite de una función.
2. Visualizar geométricamente la idea de límite.
3. Elaborar tablas de valores de una función donde se destaque la tendencia al límite de una función.
4. Elaborar y manipular programas de utilidades diseñados en *DERIVE.*

INSTRUCCIÓN GENERAL

La Práctica está diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persistenn consulta al profesor.

DESARROLLO

ABRE UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 3a y los números de lista.

IDEA INTUITIVA DE LÍMITE

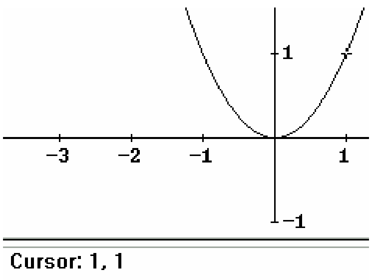
Decimos que el número ***L*** es el límite de ***F(x)*** cuando ***x*** tiende a ***a*** siempre que podamos hacer que el número ***F(x)*** se acerque a ***L*** tanto como queramos, escogiendo simplemente ***x*** suficientemente cerca, aunque no igual al número ***a***

Con *DERIVE* podemos calcular el límite de una función de diferentes maneras, además tenemos la ventaja de visualizar lo calculado al representar gráficamente la función. A continuación desarrollemos cada forma de cálculo.

IDEA GEOMÉTRICA DEL LÍMITE

Para ilustrar el procedimiento consideremos el siguiente ejemplo: Calcular el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando *x* tiende a 1.

Al representar gráficamente la función observarás en la parte inferior izquierda las coordenadas donde está ubicado el cursor represéntadolo el signo +, ubica el cursor en un punto de la curva inferior al punto (1,1), mueve el cursor hacia arriba siguiendo los puntos de la curva, acercándote al punto (1,1) observa como van cambiando tanto los valores de ***x*** como los de ***y***.



Anota a continuación esos cambios

¿Qué relación estableces entre estos cambios y la idea de Límite?

Repite el procedimiento con puntos superior de la curva y acércate al punto (1,1). Anota a continuación esos cambios

¿Qué relación estableces entre estos cambios y la idea de Límite?

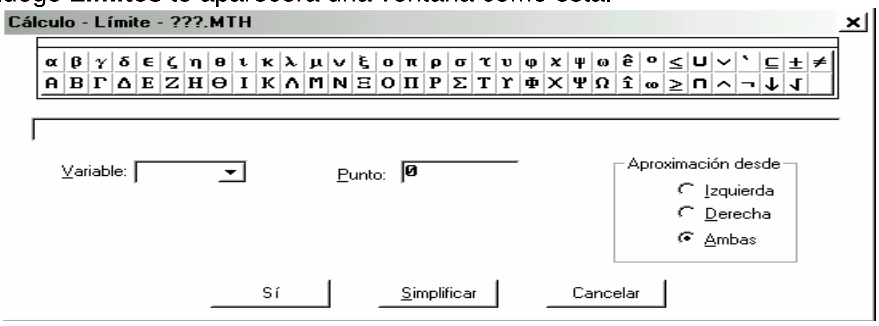
¿Qué relación estableces entre estos cambios y la idea de Límites laterales?

(Creo que deberías poner algunas funciones discontinuas, antes de pasar al calcularlos con la categoría cálculo, puesto que en las funciones continuas, como bien sabes, los límites valen el valor de la función)

(Deberías aprovechar el modo de trazado de DERIVE, para moverte sobre la curva)

CÁLCULO DEL LÍMITE UTILIZANDO LA CATEGORÍA "CÁLCULO"

Calculemos el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando *x* tiende a 1. Marca la categoría **Cálculo** y luego **Límites** te aparecerá una ventana como ésta.



Escribe la parte derecha de la ecuación en la primera banda, selecciona la variable, escribe el punto (en este caso es 1) selecciona la **Aproximación desde,** de manera predeterminada *DERIVE* lo calcula por **Ambas.** Marca **Sí,** aparecerá la expresión del límite, luego marca aproximado y tendrás la respuesta. Repite el procedimiento para los límites laterales.

Escribe los resultados obtenidos.

(Poner algunas funciones más raras)

CÁLCULO DEL LÍMITE MEDIANTE EL COMANDO DE DERIVE

Para calcular el límite de esta manera marca el icono del lápiz y escribe la sintaxis

```
LIM(x^2, x, 1, 0)
```

Al marcar **Sí** te aparecerá la expresión del límite y al marcar aproximado obtendrás la respuesta.

La sintaxis del comando anterior es anterior es

LIM (f(x), x, a, dirección)

Donde ***a*** es el punto al que tiende la variable y **dirección** puede tomar los valores: **-1** si es por la izquierda, **1** por la derecha y **0,** que se puede omitir**,** si es por ambos lados.

Calcule los límites laterales utilizando el comando definido. Escriba las sintaxis a continuación.

CÁLCULO DEL LÍMITE UTILIZANDO UN PROGRAMA DE UTILIDADES

Escribir El comando para el cálculo de límites

LIMITE _ PUNTO(u, x, a, h):=APPEND([[x, u]], VECTOR([k, LIM(u,x,k)], k, a-5h, a+5h, 2h))

Al marcar Sí aparecerá la sentencia.

$$\mathrm{LIMITE\_PUNTO}(u, x, a, h) := \mathrm{APPEND}([\ x \quad u\ ], \mathrm{VECTOR}(\left[k, \lim_{x \to k} u\right], k, a - 5 \cdot h, a + 5 \cdot h, 2 \cdot h))$$

$$\mathrm{LIMITE\_PUNTO}(u, x, a, h)$$

(se debe explicar que significan los comandos utilizados, sobre todo el append, y además pedir al alumno que interprete lo que sale si no en la propia práctica, oralmente)

Este programa de utilidades se utiliza para elaborar una tabla de valores que ilustra la aproximación al límite de una función. Sustituye **u** por ***x^2*, a por** 1 y h por **0.1**. La tabla de valores es:

$$\begin{bmatrix} x & x^2 \\ 0.5 & 0.25 \\ 0.7 & 0.49 \\ 0.9 & 0.81 \\ 1.1 & 1.21 \\ 1.3 & 1.69 \\ 1.5 & 2.25 \end{bmatrix}$$

CALCULA

```
LIMITE_PUNTO(x^2 , x, 1, 0.0001)
```

Escribe la tabla

Ejercicios.
Calcular los siguientes límites. Escribe los resultados:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1+x}{-1+\sqrt{x}} =$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{2+x}}{-3+\sqrt{1+4x}} =$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(4x)}{2x} =$

Representa la función y calcula el límite.

$$f(x) = \frac{|x|}{senx} \quad cuando \quad x \to 0$$

Hora de finalización de la práctica: __________

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 3

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. Escribe tu opinión con relación al diseño de la práctica.
3. Escribe tu opinión con relación al contenido expuesto.
4. Escribe tu opinión con relación al estilo de la clase.
5. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
6. ¿Qué le quitarías?
7. Consideran que el tiempo fue suficiente. En caso de no serlo ¿Cuánto tiempo en minutos consideras que se debió asignar a la práctica?
8. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
9. ¿Qué ventajas y desventajas le atribuyes a esta manera de enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler (1992). *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw Hill. México.
3. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Addison Wesley. México
4. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Derisoft. España.

PRÁCTICA 4

ALUMNO: ____
ALUMNO: ____
Día: ______mes________año:______.
Hora de inicio de la práctica: _____________

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de recta tangente a una curva y su relación con la derivada de una función. Dentro de las actividades de esta práctica se usarán algunos programas de utilidades para calcular la derivada de una función y su uso en el método Newton Raphson.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 2. DERIVADA.

OBJETIVOS

1. Establecer relaciones entre la recta tangente a una curva y la derivada de la función.
2. Calcular la derivada de una función usando editar expresión.
3. Calcular la derivada de una función utilizando la categoría “Cálculo”.
4. Aproximar las raíces de un polinomio utilizando el método de Newton Raphson.

INSTRUCCIÓN GENERAL

La Práctica está diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persistenn consulta al profesor.

DESARROLLO

LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y LA DERIVADA

Geométricamente, la derivada de una función en un punto representa la pendiente de la tangente a dicha función en el punto. El origen de la idea de derivada proviene precisamente del intento de trazar la recta tangente en un punto dado a una curva dada. A continuación se expone un programa de utilidades (PU) que se diseñó para dar una interpretación geométrica a la relación entre la recta tangente a una curva y la derivada de una función

ABRE EL ARCHIVO GUARDADO EN TU DISKETTE 31/2 CON EL NOMBRE RECTA TANGENTE. CÁMBIALE EL NOMBRE POR PRÁCTICA 4a y los números de lista.

$$\#1:\ \mathrm{F}(x) :=$$

$$\#2:\ \mathrm{PENDIENTE\_RECTA\_SECANTE}(a, h) := \frac{\mathrm{F}(a + h) - \mathrm{F}(a)}{h}$$

$$\#3:\ \mathrm{SECANTE}(a, h) := \mathrm{PENDIENTE\_RECTA\_SECANTE}(a, h)\cdot(x - a) + \mathrm{F}(a)$$

$$\#4:\ \mathrm{RECTA\_TANGENTE}(a) := \lim_{h\to 0} \mathrm{SECANTE}(a, h)$$

$$\#5:\ \mathrm{PENDIENTE\_RECTA\_TANG}(a) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}(a + h) - \mathrm{F}(a)}{h}$$

$$\#6:\ \mathrm{PENDIENTE\_RECTA\_TANG}(x) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}(x + h) - \mathrm{F}(x)}{h}$$

$$\#7:\ \mathrm{PENDIENTE\_RECTA\_SECANTE}(a, h)$$

$$\#8:\ \mathrm{SECANTE}(a, h)$$

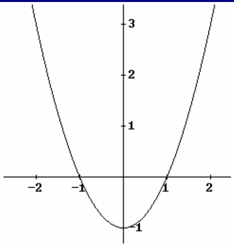
$$\#9:\ \mathrm{RECTA\_TANGENTE}(a)$$

$$\#10:\ \mathrm{PENDIENTE\_RECTA\_TANG}(x)$$

$$\#11:\ \mathrm{RECTA\_TANGENTE}(a)$$

Cada sentencia del PU expresa lo que hace. Por ejemplo: la sentencia #2 calcula la pendiente de la recta secante a la curva, que pasa por los puntos (a,F(a)) y (a+h, F(a+h)), siendo h el incremento**.** Las sentencias de la #1 a la #6 las denominaremos programa base (PB) y las sentencias de la # 7 a la #11 programa ejecutable (PE). Observa que la función debe ser derivable, por lo que sólo calculamos el límite a la derecha de (F(x+h)-F(x))/h.
¿Qué ocurriría si los límites laterales no coincidieran?

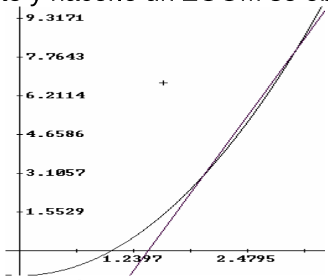
Para explicar el uso de PU considérese el ejemplo: Definimos la función cuadrática $f(x) = x^2 - 1$ la representar gráficamente es:



Calculemos la ecuación de una recta secante que pase por el punto (2, 3) con un incremento **h** = 1. Sustituye en la sentencia #8 (que ésta en correspondencia con la #3) los valores de **a** y **h** por 2 y 1 respectivamente, obtendrás la expresión

$$5 \cdot x - 7$$

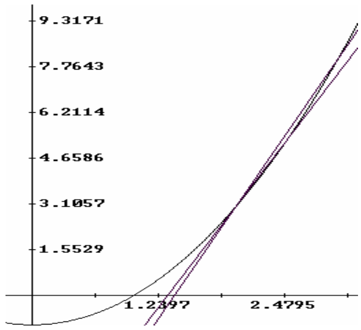
Al representar gráficamente y hacerle un ZOOM se observará así:



Si tomamos un valor de **h** más pequeño por ejemplo **h** = 0.5 y establecemos la ecuación de la recta secante en el punto (2,3) cuya expresión es

$$1.5 \cdot (3 \cdot x - 4)$$

Representamos gráficamente la recta

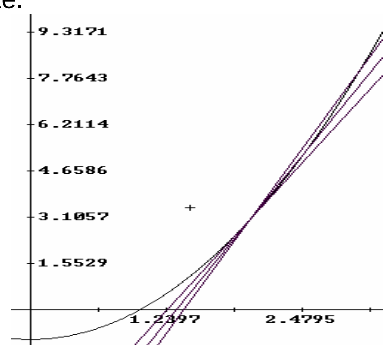


A medida que **h** tienda a cero la recta secante se aproximará a la recta tangente en el punto (2,3).

Utilizando la sentencia #9 (que está en correspondencia con la #4) se establece la expresión que define la recta tangente, al sustituir el valor de **a,** la expresión que define la recta tangente es

$$4 \cdot x - 5$$

Grafica la recta tangente.



Se puede calcular la pendiente de la recta tangente en el punto **(a, F(a))** utilizando sentencia #11 (que está en correspondencia con la #5) al sustituir **a** por 2 en la sentencia #11 se obtiene que pendiente de la recta tangente es 4.

La sentencia #6 establece la expresión la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la curva. En el ejemplo la expresión es **2x**. Ésta sentencia establece la derivada de la función.

Ejercicio.

Dada la función con expresión $f(x) = x^3 - 3x + 1$ Halle la ecuación de la recta secante en **x = -1** con un incremento **h** = 1
Escribe la expresión:

Represéntala, dibuja la gráfica aquí.
Halle la ecuación de la recta secante en **x = -1** con un incremento **h** = 0.7
Escribe la expresión:

Represéntala, dibuja la gráfica aquí.

Halle la ecuación de la recta tangente en **x = -1**.
Escribe la expresión:

Represéntala, dibuja la gráfica aquí

Calcula la expresión que define la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Escribe la expresión.
(LO QUE TE INDICO AHORA VUELVE A SER IMPORTANTE: *Lo que interesa es que las funciones que utilicemos para hacer las cosas necesitemos representarlas en el ordenador porque son difíciles de representar a mano. Si tú pones una parábola solamente, para explicar un concepto es muy pobre lo que haces. Interesan funciones difíciles, como las que están al final del apartado, antes del método de Newton-Raphson*)

CÁLCULO DE LA DERIVADA USANDO “EDITAR EXPRESIÓN”

ABRE UN ARCHIVO NUEVO Y GUÁRDALO CON EL NOMBRE POR PRÁCTICA 4b y los números de lista.

Con *DERIVE* se puede calcular la derivada escribiendo la expresión **DIF (f, x)** para calcular la primera derivada. Por ejemplo, calcule la derivada de $f(x) = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-3}}$ Para ello escribe la expresión `DIF(5/3·√((x^2 + 2)·(x^3 - 3)), x)` y luego el icono del igualdad.

Escribe el resultado.

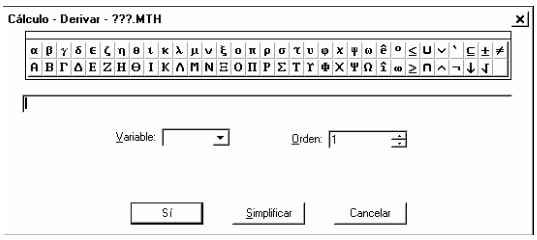
Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.

$y = (x + x^2)^5 (1 + x^3)^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} =$

$y = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} =$

CÁLCULO DE LA DERIVADA USANDO LA CATEGORÍA “*Cálculo*”

Para hallar la derivada usando categoría, marca **Cálculo** luego **Derivar** te aparecerá una ventana



en la que podrás escribir la expresión de la función que deseas derivar, la variable con respecto a la cual derivarás y el orden de derivación, es decir, si es la primera derivada o una de orden mayor.

Deriva la función $f(x)=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-3}}$ (recuerda escribir la parte derecha de la expresión)
Escribe el resultado

Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.

$f(x)=\frac{7+2x-3x^3}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad f'(x)=$

$f(x)=\sqrt{x}sen\sqrt{x+\sqrt{x}}$ $\qquad f'(x)=$

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

La resolución de ecuaciones ha sido de gran interés a lo largo de la historia de las Matemáticas. Los babilonios hace dos milenios encontraron un método de completar cuadrados, que produce algo parecido a la "*fórmula cuadrática*" que suministra la solución exacta de cualquier ecuación de segundo grado. A principios del siglo XVI, matemáticos como Cardano, del Ferro, Ferrari y Tartaglia encontraron fórmulas para hallar las soluciones exactas de ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado. En 1824 Niels Henrik Abel demostró que no era posible encontrar fórmulas como éstas para ecuaciones polinómicas de grado mayor de cuatro.

Cuando no se cuenta con fórmulas exactas para resolver una ecuación $f(x)=0$ se recurre a técnicas numéricas del cálculo para encontrar soluciones aproximadas. Una de éstas es el *método de Newton-Raphson*. Este método consiste en producir una sucesión de aproximaciones que se acerquen a la solución. Se selecciona el primer número x_0 próximo a la raíz buscada (este valor se puede estimar por inspección visual de la gráfica) de la sucesión. El método usa la tangente a la curva en $(x_0, f(x_0))$ para aproximar la solución de la ecuación curva, llamando x_1 al punto donde la tangente corta al eje X. El punto x_2 donde la tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ corta el eje X, es la siguiente aproximación en la sucesión. Este procedimiento se continúa de manera iterativa hasta obtener un valor suficientemente cerca de la raíz de la ecuación.

Pasos a seguir:

- Suponer una primera aproximación a la raíz de la ecuación $f(x)=0$
- Usar la primera aproximación para obtener la segunda, la segunda para obtener la tercera, y así sucesivamente, mediante la fórmula iterada.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x_n)\neq 0$$

Se ha diseñado un programa de utilidades basado en lo anteriormente expuesto.

ABRE EL ARCHIVO GUARDADO EN TU DISKETTE 31/2 CON EL NOMBRE NEWTON RAPHSON. CÁMBIALE EL NOMBRE POR PRÁCTICA 4c y los números de lista.

```
#1:  F(x) :=

#2:  NEWTON(x0, n) := ITERATES(x - F(x)/(d/dx F(x)), x, x0, n)

#3:  NEWTON(x0, n)

#4:  RECTA_TANG(a, b) := F(a)/(a - b)·(x - a) + F(a)

#5:  RECTA_TANG(a, b)
```

Este PU elabora una tabla de valores de manera iterada, es decir una vez calculada una aproximación se introduce en la fórmula para calcular la siguiente. Definida la función y

sustituidos los valores de **x0** (primera aproximación) y n (número de iteraciones) en la sentencia #3 que está en correspondencia con la #2, se obtiene la tabla. La #5 en correspondencia con la #4 definen la ecuación de la recta tangente. Veamos la aplicación del PU con un ejemplo: sea la función definida por $f(x) = x^3 - 3x + 1$ representa la función, calculemos la raíz que se encuentra en el intervalo $[1,2]$ sustituye **x0** por 2 y **n** por 5.
Escribe el resultado.

Los valores cinco y seis se repiten
Escribe la mejor aproximación con cinco cifras decimales: _________________
¿En cuál iteración se produce? _______________
Sustituye **x0** por 1 y **n** por 5.
Escribe el resultado.
¿Cómo resolverías el problema?

Calculemos la recta tangente en el punto tangente $(2, f(2))$ y que pasa por el punto de intersección con el eje X $(1.66666,0)$ Para ello sustituye en la sentencia #5 **a** y **b** por 2 y 1.66666 respectivamente.
Escribe la ecuación:

Representa la recta, dibuja la gráfica aquí

Calculemos la recta tangente en el punto tangente $(1.66666, f(1.66666))$ y que pasa por el punto de intersección con el eje X $(1.54861,0)$
Escribe la ecuación:

Representa la recta, dibuja la gráfica aquí

Hora de finalización de la práctica: __________

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 4

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. Escribe tu opinión con relación al diseño de la práctica.
3. Escribe tu opinión con relación al contenido expuesto.
4. Escribe tu opinión con relación al estilo de la clase.
5. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
6. ¿Qué le quitarías?
7. Consideran que el tiempo fue suficiente. En caso de no serlo ¿Cuánto tiempo en minutos consideras que se debió asignar a la práctica?
8. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
9. ¿Qué ventajas y desventajas le atribuyes a esta manera de enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler (1992). *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw Hill. México.
3. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Addison Wesley. México
4. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Derisoft. España.

PRÁCTICA 5

ALUMNO: ____
ALUMNO: ____
Día: ______mes________año:______.
Hora de inicio de la práctica: _____________

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio del área bajo una curva. Así como también la aplicación a problemas de Física.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 4. ÁREA BAJO UNA CURVA.

OBJETIVOS

1. Establecer relación entre el área bajo una curva y el desplazamiento de un móvil.
2. Calcular el área bajo una curva utilizando rectángulos y trapecios.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica está diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor.

DESARROLLO

ÁREA BAJO UNA CURVA

Arquímedes de Siracusa fue el más grande matemático de la era antigua desde el siglo V a.C. hasta el siglo II d.C., llevó a cabo muchos de los cálculos de área y volumen que ahora se usan en cálculo integral: desde áreas de círculos, esferas y segmentos de secciones cónicas hasta volúmenes de conos, esferas, elipsoides y paraboloides. Se había demostrado con anterioridad, en los *Elementos* de Euclides**,** que el área A de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio r, de modo que $A = \pi r^2$ para una constante de proporcionalidad.

Uno de los problemas que resulta relevante e interesante es el cálculo del área bajo una curva. Su importancia no sólo radica en la interpretación meramente matemática, sino en sus raíces surgidas de situaciones de aplicación de las matemáticas a otras disciplinas y a problemas cotidianos. Como ejemplo de esto tenemos el cálculo de la distancia recorrida por un móvil, conociendo velocidad y tiempo; así como también determinar el área a cortar en una lámina de algún material.

A continuación presentamos un problema de aplicación a la Física. Consideremos la siguiente tabla de velocidad/ tiempo de un móvil.

Tiempo (seg)	0	1	2	3	4	5
Velocidad (pies / seg)	20	35	45	48	50	55

Se debe calcular la distancia recorrida por éste. Debido a que la velocidad es creciente, el móvil recorre, al menos, 20 pies durante el primer segundo; de igual manera recorre al menos 35 pies durante el siguiente segundo, 45 pies durante tercer segundo, 48 pies durante el cuarto segundo, y 50 pies durante el último segundo. Por tanto, durante los cinco segundos, el móvil ha recorrido una distancia:

$$\boxed{20 + 35 + 45 + 48 + 50 = 198 \text{ pies}}$$

No obstante, el cálculo anterior se pudo haber hecho de la siguiente manera. En el primer segundo el móvil recorrió, cuando más, 35 pies; en el siguiente recorrió 45 pies, en el tercero 48 pies, en el cuarto 50 pies, y el último 55 pies. En total ha recorrido:

$$\boxed{35 + 45 + 48 + 50 + 55 = 233 \text{ pies}}$$

Como podrás observar ha dado dos resultados diferentes, uno menor que otro. Cabe pensar que la distancia real debe ser un valor intermedio entre estos.
SOLUCIÓN DEL PROBLEMA UTILIZANDO *DERIVE.*

Veamos a continuación otra manera de resolver el problema anterior.

Abre un archivo que está guardado en tu disquete con el nombre RECTÁNGULO Y TRAPECIO; observarás un programa de utilidades (PU). Guárdalo con el nombre PRÁCT 5 (Nombre y apellido)

Considera en el eje X *el tiempo* y el eje Y la *velocidad*, grafica los puntos cuyos valores están en la tabla (una forma sencilla es utilizar el editor expresión, el lápiz, y escribir, por ejemplo [[2,4],[3,7]] esto representa dos puntos, análogamente se puede hacer para más de dos puntos) (antes de proceder a representar gráficamente los puntos ubícate en la categoría opciones-puntos y selecciona en unir NO) una vez representados los puntos ajusta la gráfica hasta que visualices todos los **puntos.**

Dibuja la gráfica aquí y traza una curva aproximada que pase por los puntos:

La distancia recorrida por el móvil es el área bajo esta curva, limitada por el eje X entre las rectas verticales que pasan por los puntos (0,0) y (5,0). El problema es que no se conoce la expresión que define la función cuya gráfica es la curva mencionada; no obstante se pueden realizar aproximaciones del área bajo la curva usando gráficas de figuras cuya fórmula para hallar su área sea conocida, y luego sumarlas. Entre las figuras de mayor utilidad están los rectángulos y los trapecios**.**

Resolvamos el problema utilizando rectángulos. Cada sentencia expresa en su parte izquierda lo que se hace. La sentencia **#5: RECTANGULO(a, b, c)** está en correspondencia con la sentencia

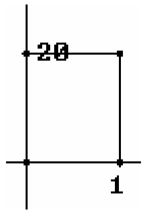
$$\#1:\quad \mathrm{RECTANGULO}(a,\ b,\ c) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & c \\ b & c \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

y sirve para representar rectángulos.

Escribamos la tabla de valores así:

Tiempo (seg)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Velocidad (pies / seg)	20	35	45	48	50

Sustituye los valores de a, b, c por 0, 1 y 20 respectivamente (antes de proceder a representar gráficamente el rectángulo ubícate en la categoría opciones-puntos y selecciona en unir SÍ), te dará una gráfica como la siguiente:



La longitud del segmento sobre el eje X es la diferencia "**b-a"** y longitud del segmento paralelo al eje Y es "**c"**. Representa los rectángulos restantes. A estos rectángulos los denominaremos RECTÁNGULOS INFERIORES.

Dibuja la gráfica a continuación:

Para calcular el área de cada rectángulo (ésta área es el producto de longitud del segmento sobre el eje X por la longitud del segmento paralelo al eje Y) usa la sentencia **#7: ÁREA_DEL_RECTÁNGULO(a, b, c)** que está en correspondencia con la **#3,** sustituye los valores de a, b, c respectivos para calcular el área en cada rectángulo y luego suma los resultados.

Escribe los resultados:

El resultado coincide con el primero que obtuvimos para el cálculo de la distancia recorrida por el móvil.

Para obtener el segundo resultado consideremos la tabla:

Tiempo (seg)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Velocidad (pies / seg)	35	45	48	50	55

Representa los rectángulos para estos valores. A estos rectángulos los denominaremos RECTÁNGULOS SUPERIORES.
Dibuja la gráfica aquí:

Calcular el área para cada rectángulo y suma los resultados.
Escribe los resultados

El resultado coincide con el segundo que obtuvimos para el cálculo de la distancia recorrida por el móvil.

Como se dijo anteriormente la distancia recorrida por el móvil debe ser un valor intermedio entre los obtenidos.

Lo que hemos hecho con rectángulos ahora lo haremos con trapecios. Consideremos la tabla de valores:

Tiempo (seg.)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
Velocidad (pies/ seg.)	20-35	35-45	45-48	48-50	50-55

Sustituye en la sentencia **#6: TRAPECIO(a, b, c, d)** que está en correspondencia con

$$\#2:\quad \mathrm{TRAPECIO}(a,\ b,\ c,\ d) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & c \\ b & d \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

los valores **a, b** (valores de los extremos del segmento del trapecio sobre el eje X) y **c, d** (valores de los extremos de los segmentos del trapecio paralelos al eje Y) respectivos en cada trapecio y grafícalos.
Dibuja la gráfica aquí:

Calcula el área de cada trapecio usando la sentencia **#8: AREA_TRAPECIO(a, b, c, d)** correspondiente a la sentencia.

$$\#4:\quad \mathrm{AREA\_TRAPECIO}(a,\ b,\ c,\ d) := \frac{(c + d)\cdot(b - a)}{2}$$

la longitud del segmento del trapecio sobre el eje X es **b-a** y las longitudes de los segmentos paralelos al eje Y son respectivamente **"c"** y **"d"** sustituye los valores según la tabla y calcula las áreas, luego súmalas.
Escribe los resultados:

¿Cuál consideras que es la mejor aproximación al área bajo la curva?

<u>IMPRIME EL GRÁFICO Y ANÉXALO.</u>
<u>Hora de finalización de la práctica: .</u>

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 5

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.

2. Escribe tu opinión con relación al diseño de la práctica.

3. Escribe tu opinión con relación al contenido expuesto.

4. Escribe tu opinión con relación al estilo de la clase.

5. ¿Qué le agregarías a esta práctica?

6. ¿Qué le quitarías?

7. Consideran que el tiempo fue suficiente. En caso de no serlo ¿Cuánto tiempo en minutos consideras que se debió asignar a la práctica?
8. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
9. ¿Qué ventajas y desventajas le atribuyes a esta manera de enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler (1992). *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw Hill. México.
3. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Addison Wesley. México
4. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Derisoft. España.

PRÁCTICA 6

ALUMNO: ____
ALUMNO: ____
Día: ______mes________año:______.
Hora de inicio de la práctica: ______________

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de área bajo una curva.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 4. ÁREA DE UNA REGIÓN BAJO UNA CURVA.

OBJETIVOS

1. Ilustrar geométricamente la aproximación del área de una región limitada por una curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (regla de Simpson).
2. Calcular el área de una región limitada por una curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (regla de Simpson).
3. Comparar geométricamente y analíticamente las distintas aproximaciones del área de una región limitada por una curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (regla de Simpson).
4. Comparar las distintas aproximaciones del área de una región limitada por una curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (regla de Simpson) con el valor exacto de ésta.

INSTRUCCIÓN GENERAL

La Práctica está diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor.

DESARROLLO

El basamento de la teoría se debe al famoso matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Quien ideó lo que se conoce como **Sumas de Riemann.**

Se ha diseñado un programa de utilidades, que permite representar gráficamente un rectángulo, diez rectángulos, mil rectángulos, etc. Se puede mostrar la aproximación geométrica y el área aproximada de una región limitada por una curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (regla de Simpson).

Abre el archivo con el nombre **ÁREA DE UNA REGIÓN BAJO UNA CURVA**. Guarda el archivo con el nombre PRÁCT. 6. Tu nombre y apellido.

El programa está estructurado en programa base (PB) y programa ejecutable (PE). Las sentencias del PE son las que manipularás y están en correspondencia con las sentencias del PB. Tanto el PB como el PE tienen tiene sentencias que proporcionan el marco gráfico como el numérico del cálculo del área de una región bajo una curva.

A continuación se te presenta un ejemplo a desarrollar para explicar el funcionamiento del programa de utilidades (PU).

Dada la función definida por $f(x) = x^3 - 12x + 4$ Mostrar la aproximación geométrica y el área aproximada de la región bajo la curva en el intervalo $[-3, -1]$, utilizando rectángulos inferiores, superiores, punto medio, trapecio, trapecios parabólicos.

MARCO GRÁFICO DEL CÁLCULO DEL ÁREA BAJO UNA CURVA.

Tomemos 4 rectángulos de cada tipo, 4 trapecios y 4 trapecios parabólicos. Escribe la expresión de la función. La sentencia #6 calcula la longitud de cada subintervalo, en nuestro ejemplo sustituye a, b, n por $-3, -1, 4$ respectivamente e4rsta sentencia es $\Delta x_i = H(a, b, n)$

Escribe el resultado:

$\Delta x_i = H(a,b,n) =$

Escribe los subintervalos:

Para establecer el marco gráfico utilizamos las sentencias de la #12 a la #20 del PB las que manipularás son las sentencias #38 a la #58. Cada sentencia expresa lo que hace, por ejemplo la sentencia #12 sirve para representar gráficamente rectángulo inferiores sobre el eje X en el intervalo $[a,b]$ con *n* rectángulos. Está diseñada tomando en cuenta los extremos del subintervalo y la imagen mínima en el subintervalo.

```
RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) :=
VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)
```

Análogamente los sentencias 13 a la 20 expresan las diferentes figuras que se requieren.

Sustituye los valores a, b, n por $-3, -1, 4$ respectivamente en la sentencia #38 y marca el icono de igualdad.

Escribe el resultado

Representa la función y los 4 rectángulos inferiores. Dibuja la gráfica.

Sustituye los valores a, b, n por $-3, -1, 4$ respectivamente en las sentencias #38, #39, #42, #45

Escribe el resultado

Dibuja la gráfica.

El PU también se puede utilizar para representar gráficamente rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos para aproximar geométricamente el área de una región limitada por una curva y bajo el eje X, las sentencias #40 #41 #42 #45 sirven para tal fin. Para aproximar geométricamente el área de la región bajo la curva en $[1, 3]$ Sustituye los valores a, b, n por $1, 3, 4$ respectivamente en la sentencia antes mencionadas.

Escribe el resultado

Dibuja la gráfica.

¿Qué tipo de aproximación consideras que es la mejor?

<u>RELACIÓN ENTRE EN NÚMERO DE RECTÁNGULOS, TRAPECIOS Y PORCIONES DE PARÁBOLAS CON EL ÁREA UNA REGIÓN BAJO UNA CURVA.</u>

Veamos que sucede cuando aumentamos el número de rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos y su relación con el cálculo del área de una región bajo una curva. Para ello utilizaremos rectángulos inferiores, con la idea de que similares resultados se pueden obtener con las otras figuras.

Sustituye los valores a,b, n por $-3,-1, 20$ respectivamente en la sentencia #38 y grafica.

Sustituye los valores a,b, n por $-3,-1, 50$ respectivamente en la sentencia #38 y grafica.

Sustituye los valores a, b, n por $-3, -1, 100$ respectivamente en la sentencia #38 y grafica.

Cómo podrás observar a medida que se aumenta el número de rectángulos se va llenando el área de la región bajo la curva en el intervalo en estudio.

¿Consideras que es suficiente 100 rectángulos para calcular en área de la región bajo la curva? Escribe tu respuesta.

Hazle un ZOOM a la gráfica hasta que puedas observar los rectángulos
¿Ahora que opinas? Escribe tu respuesta

¿Cuántos rectángulos se necesitan para calcular el área de la región bajo la curva? Escribe tu respuesta

MARCO NUMÉRICO DEL CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA REGIÓN BAJO UNA CURVA.

El marco numérico del cálculo del área de una región bajo una curva se obtiene con las sentencias #21 a la #37 del PB que están en correspondencia con las sentencias #47 a la #58 de PE. Por ejemplo la sentencia #21 que expresa

$$\text{AREAS\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMIN}(a, b, n), H(a, b, n))$$

sirve para calcular el área aproximada de una región bajo la curva utilizando rectángulos inferiores sobre el eje X en el intervalo $[a,b]$ con *n* rectángulos y es igual a la Suma de Riemann calculada a partir de las áreas de los rectángulos con base $H(a,b,n) = \Delta x_i$ y altura la imagen mínima de los valores de x en cada subintervalo. Similares sentencias existen para el cálculo del área aproximada de una región bajo la curva para rectángulos superiores, punto medio, trapecio y porciones de parábolas tanto sobre como bajo el eje X.

En el ejercicio anterior calculemos el área aproximada de una región bajo la curva en $[-3,-1]$ con $n = 4$ para los distintos rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Regla de Simpson).

Para calcular el área aproximada de una región bajo la curva para rectángulos inferiores sobre el eje X, sustituye en la sentencia #47 los valores de a,b,n .

AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)=

Calcula las siguientes áreas:
AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)=

AREAS_RECT_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)=

AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)=

AREA_SIMP(a, b, n)=

La sentencia #56 proporciona una matriz con las diferentes aproximaciones del área de una región sobre el eje X. Sustituye los valores de a, b, n, j, k, m por 0, 3, 10, 20, 2; esto significa, aproximación en el intervalo $[a,b]$ empezando con 10 figuras hasta 20 figuras variando de dos en dos. La primera columna representa el número de figuras, la segunda son las aproximaciones con rectángulos inferiores, la tercera con punto medio, la tercera con trapecio, la cuarta Simpson y la quinta con rectángulos superiores.

APROX_DEL_ÁREA_SOBRE_X(a, b, n, j, k, m)=

Para poder precisar cuál es la mejor aproximación se requiere saber el valor exacto del área de una región bajo la curva. Esto se obtiene con la sentencia #37que está en correspondencia con la sentencias #58. Expresa el límite de las sumas de Riemann que proporciona el valor exacto del área de una región bajo la curva en el intervalo $[a,b]$

Calcula el área en el intervalo $[-3,-1]$ sustituye los valores de a,b en la sentencia #58.

¿Cuál es mejor aproximación?

Hora de finalización de la práctica: __________

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 6.

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. Escribe tu opinión con relación al diseño de la práctica.
3. Escribe tu opinión con relación al contenido expuesto.
4. Escribe tu opinión con relación al estilo de la clase.
5. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
6. ¿Qué le quitarías?
7. Consideran que el tiempo fue suficiente. En caso de no serlo ¿Cuánto tiempo en minutos consideras que se debió asignar a la práctica?
8. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
9. ¿Qué ventajas y desventajas le atribuyes a esta manera de enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler (1992). *Cálculo y Geometría Analítica*. McGraw Hill. México.
3. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Addison Wesley. México
4. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Derisoft. España.

Programa Base (PB)

#1: $F(x) :=$

#2: $AREA\_RECT(c, d) := c \cdot d$

#3: $AREA\_TRAP(c, d, h) := \dfrac{(c + d) \cdot h}{2}$

#4: $RECTANGULO(a, b, h) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & h \\ b & h \\ b & 0 \end{bmatrix}$

#5: $TRAPECIO(a, \alpha, b, \beta) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \alpha \\ b & \beta \\ b & 0 \end{bmatrix}$

#6: $H(a, b, n) := \dfrac{b - a}{n}$

#7: $FMIN(a, b, n) := MIN(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)))$

#8: $FMAX(a, b, n) := MAX(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)))$

#9: $XL(a, b, n) := a + (i - 1) \cdot H(a, b, n)$

#10: $XR(a, b, n) := a + i \cdot H(a, b, n)$

#11: $XM(a, b, n) := a + (i - 0.5) \cdot H(a, b, n)$

```
#12:  RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
        b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#13:  RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
        b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#14:  RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
        b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#15:  RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
        b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)
```

#16: $\mathrm{RECT\_PTO\_MEDIO}(a, b, n) := \mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{RECTANGULO}\left(a + i\cdot H(a, b, n), a + (i + 1)\cdot H(a, b, n), F\left(a + (2\cdot i + 1)\cdot\frac{H(a, b, n)}{2}\right)\right), i, 0, n - 1\right)$

```
#17:  TRAPECIOS(a, b, n) := VECTOR(TRAPECIO(a + i·H(a, b, n), F(a + i·H(a, b, n)), a + (i +
        1)·H(a, b, n), F(a + (i + 1)·H(a, b, n))), i, 0, n - 1)
```

#18: $\mathrm{PARAB\_SIM}(a, b, n) := \mathrm{VECTOR}\left(\left[\mathrm{FIT}\left[\begin{array}{cc} x & p\cdot x^{2} + q\cdot x + r \\ XL(a, b, n) & F(XL(a, b, n)) \\ XM(a, b, n) & F(XM(a, b, n)) \\ XR(a, b, n) & F(XR(a, b, n)) \end{array}\right]\right], i, 1, n\right)$

#19: $\mathrm{SEGMENTOS\_SIM}(a, b, n) := \mathrm{VECTOR}\left(\left[\begin{array}{cc} XL(a, b, n) & F(XL(a, b, n)) \\ XL(a, b, n) & 0 \\ XR(a, b, n) & 0 \\ XR(a, b, n) & F(XR(a, b, n)) \end{array}\right], i, 1, n\right)$

```
#20:  CURVA_SIM(a, b, n) := VECTOR(CHI(XL(a, b, n), x, XR(a, b, n))·ELEMENT(PARAB_SIM(a, b,
        n), i), i, 1, n)
```

#21: $\mathrm{AREAS\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{AREA\_RECT}(\mathrm{FMIN}(a, b, n), H(a, b, n))$

$$\#22:\quad \text{AREAS\_RECT\_INF\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMAX}(a, b, n), H(a, b, n))\right|$$

$$\#23:\quad \text{AREAS\_RECT\_SUP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMAX}(a, b, n), H(a, b, n))$$

$$\#24:\quad \text{AREAS\_RECT\_SUP\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMIN}(a, b, n), H(a, b, n))\right|$$

$$\#25:\quad \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}\left(F\left(a + (2 \cdot i + 1) \cdot \frac{H(a, b, n)}{2}\right), H(a, b, n)\right)$$

$$\#26:\quad \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}\left(F\left(a + (2 \cdot i + 1) \cdot \frac{H(a, b, n)}{2}\right), H(a, b, n)\right)\right|$$

$$\#27:\quad \text{AREAS\_TRAP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_TRAP}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)), H(a, b, n))$$

$$\#28:\quad \text{AREAS\_TRAP\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_TRAP}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)), H(a, b, n))\right|$$

$$\#29:\quad \text{ÁREA\_SIMP}(a, b, n) := \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{H(a, b, n) \cdot (F(XL(a, b, n)) + 4 \cdot F(XM(a, b, n)) + F(XR(a, b, n)))}{6}\right|$$

$$\#30:\quad \text{APROX\_DEL\_ÁREA\_SOBRE\_X}(a, b, j, k, m) := \text{VECTOR}([n, \text{AREAS\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n), \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n), \text{AREAS\_TRAP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n), \text{ÁREA\_SIMP}(a, b, n), \text{AREAS\_RECT\_SUP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a, b, n)], n, j, k, m)$$

$$\#31:\quad \text{APROX\_DEL\_ÁREA\_BAJO\_X}(a, b, n, j, k, m) := \text{VECTOR}([n, \text{AREAS\_RECT\_INF\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n), \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n), \text{AREAS\_TRAP\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n), \text{ÁREA\_SIMP}(a, b, n), \text{AREAS\_RECT\_SUP\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a, b, n)], n, j, k, m)$$

#32: $\text{LIM\_RECT\_INF}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(F(a + (i + 1)\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$

#33: $\text{LIM\_RECT\_SUP}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(F(a + i\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$

#34: $\text{LIM\_PTO\_MEDIO}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}\left(F\left(a + (2\cdot i + 1)\cdot\frac{H(a, b, n)}{2}\right), H(a, b, n)\right) \right|$

#35: $\text{LIM\_TRAP}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_TRAP}(F(a + i\cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1)\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$

#36: $\text{LÍMITE\_SIMP}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \text{ÁREA\_SIMP}(a, b, n)$

#37: $\text{LÍMITE\_SUMAS\_RIEMANN}(a, b) := \begin{bmatrix} \text{límite rect.inf} & \text{límite pto Medio} & \text{límite trapecio} & \text{límite simpson} & \text{límite rect. sup} \\ \text{LIM\_RECT\_INF}(a, b) & \text{LIM\_PTO\_MEDIO}(a, b) & \text{LIM\_TRAP}(a, b) & \text{LÍMITE\_SIMP}(a, b) & \text{LIM\_RECT\_SUP}(a, b) \end{bmatrix}$

Programa Ejecutable (PE)

```
#38:  RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#39:  RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#40:  RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#41:  RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#42:  RECT_PTO_MEDIO(a, b, n)
#43:  TRAPECIOS(a, b, n)
#44:  PARAB_SIM(a, b, n)
#45:  CURVA_SIM(a, b, n)
#46:  SEGMENTOS_SIM(a, b, n)

#47:  AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#48:  AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#49:  AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#50:  AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#51:  AREAS_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#52:  AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#53:  AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#54:  AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#55:  ÁREA_SIMP(a, b, n)
#56:  APROX_DEL_ÁREA_SOBRE_X(a, b, j, k, m)
#57:  APROX_DEL_ÁREA_BAJO_X(a, b, n, j, k, m)
#58:  LÍMITE_SUMAS_RIEMANN(a, b)
```

ANEXO 3

ESCALA DE ACTITUDES EA-2.

ESTUDIO EXPLORATORIO

ESTUDIO EXPLORATORIO
ESCALA DE ACTITUDES EA-2

APELLIDOS Y NOMBRE: ____________________________

SECCIÓN Nº:_______ SEXO: VARÓN __HEMBRA:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se te presentan una serie de enunciados

Escribe un 4 si estas completamente de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 3 si estas de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 2 si estas en desacuerdo con el enunciado.

Escribe un 1 si estas completamente en desacuerdo con el enunciado.

	PROPOSICIONES	
1	Me gustaría que en las clases de Matemáticas se usara un software para ordenadores/DERIVE.	
2	Cuando visualizo la gráfica de una función hecha con un software para ordenadores/*DERIVE* la entiendo mejor que dibujada en la pizarra	
3	Cuando uno usa un software para ordenadores/*DERIVE* me siento más seguro de los resultados.	
4	Entiendo mejor las clases utilizando un software para ordenadores/*DERIVE* que explicadas en la pizarra	
5	Trabajar con un software para ordenadores/*DERIVE* es más aburrido que oír una clase de Matemáticas	
6	Sí me proponen otra clase utilizando un software para ordenador/*DERIVE* no me gustaría participar	
7	Un software para ordenadores/*DERIVE* me estimula la imaginación y la creatividad.	
8	El procedimiento que se utiliza en un software para ordenadores *DERIVE* no lo entiendo.	
9	Cuando uso un software para ordenadores/DERIVE no entiendo los conceptos matemáticos	
10	Me gustaría utilizar un software para ordenadores/*DERIVE* en clases de Matemáticas por que se diferencian de los cursos habituales	
11	Un software para ordenadores/DERIVE no ayuda a comprender las Matemáticas.	
12	Utilizar un software para ordenadores/DERIVE en clase de Matemáticas no sirve para aprender a usar el ordenador	
13	Utilizar un software para ordenadores/*DERIVE* en clase de Matemáticas no ahorra tiempo	
14	Utilizar un software para ordenadores/DERIVE en clase de Matemáticas es perder el tiempo	
15	Con un software para ordenadores/*DERIVE* no hay que aprender a calcular, él lo hace todo.	
16	Trabajar con un software para ordenadores/*DERIVE* no sirve para nada, ya que en los exámenes es necesario escribir los cálculos y las demostraciones.	
17	Cuando uno usa un software para ordenadores/*DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, porque de otra manera se pierde mucho tiempo	
18	Con un software para ordenadores/*DERIVE* da deseos de hacer Matemáticas	
19	Un software para ordenadores/*DERIVE* ayuda a entender las Matemáticas	
20	Un software para ordenadores/*DERIVE* lo complica todo y no ayuda a aprender Matemáticas.	

21	No encuentro útil tratar de resolver los problemas utilizando un software para ordenador/*DERIVE*	
22	Un software para ordenadores/*DERIVE* hace ver las Matemáticas de otra manera	
23	Un software para ordenador/*DERIVE* esta bien porque uno puede trabajar al mismo tiempo e las ecuaciones y gráficos	
24	Sí se introducen correctamente los datos en un software para ordenadores/*DERIVE* se puede estar seguro de los resultados	

ANEXO 4

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTO. ESTUDIO EXPLORATORIO

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS. ESTUDIO EXPLORATORIO

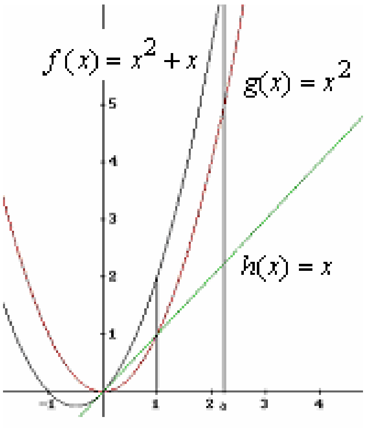
PREGUNTA

1.- Explicar por medio de gráficos o de otra forma por qué.

$$\int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a g(x)\,dx + \int_1^a h(x)\,dx$$

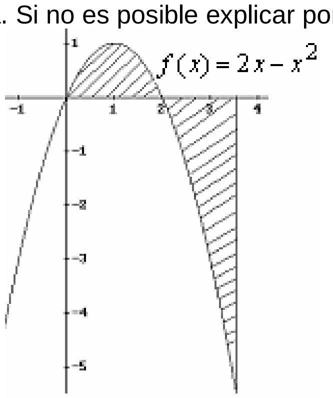
donde

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = x^2 \\ h(x) = x \end{cases}$$

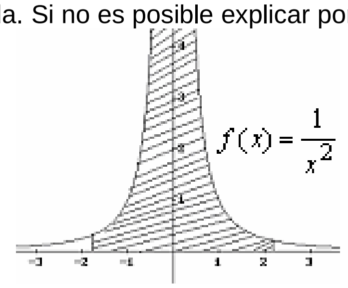


PREGUNTA

2.- Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



3.- Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



PREGUNTA
4.- Calcular

$$\int_{-3}^{4} \left| x+1 \right| dx$$

PREGUNTA
5.- Indicar si es verdadero o falso que.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_{-1}^{1} = -\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

Justifica tu respuesta.

PREGUNTA
6.- Indicar si es verdadero o falso que

$$Si \ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \text{entonces}$$
$$f(x) \geq g(x) \quad \text{para todo } x \text{ que pertenece a } [a,b]$$

Justifica tu respuesta.

ANEXO 5

ESCALA DE ACTITUDES EA-3.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL
ESCALA DE ACTITUDES EA-3

APELLIDOS Y NOMBRE: ____________________________

INSTRUCCIONES: A continuación se te presentan una serie de enunciados

Escribe un 4 si estas completamente de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 3 si estas de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 2 si estas en desacuerdo con el enunciado.

Escribe un 1 si estas completamente en desacuerdo con el enunciado.

	PROPOSICIONES	
1	Las Matemáticas es una materia en la que premian mi esfuerzo	
2	La perspectiva de tener que aprender nuevos temas de Matemáticas me pone nervioso	
3	Cuando leo una pantalla de una computadora tiendo a notar los detalles matemáticos	
4	Me desagrada cuando encuentro desafíos en Matemáticas	
5	Siento mucha confianza al usar un ordenador	
6	Me siento en desventaja al tener que usar un ordenador	
7	Usando un ordenador se hace más agradable el aprendizaje	
8	Evito usar un ordenador	
9	El ordenador refuerza lo que aprendo en Matemáticas por la abundancia de ejemplos	
10	Encuentro dificultades en el momento de transferir información a la pantalla del ordenador	
11	Considero muy útil intentar entender los ejercicios y los problemas matemáticos.	
12	Me gusta la libertad para experimentar, esto lo proporciona el ordenador	
13	Los resultados que obtengo en Matemáticas son buenos	
14	Estoy más preocupado en clases de Matemáticas que en cualquier otra materia	
15	Insisto en los problemas matemáticos hasta encontrar su solución	
16	Me frustra tener que pasar mucho tiempo en un problema matemático	
17	Puedo dominar los procedimientos que se requieren al trabajar con un ordenador	
18	Me siento nervioso cuando tengo que aprender nuevos procedimientos basados en el ordenador	
19	Trato las ideas matemáticas como unidades separadas en el momento de recordarlas	
20	Mi libertad se disminuye al utilizar un ordenador	
21	Disfruto realizando actividades matemáticas.	
22	No logro detallar los pasos utilizados en la solución de un problema matemático, resuelto en el ordenador	
23	Intento relacionar los nuevos conocimientos matemáticos con los que ya tenía	
24	No tomo apuntes de Matemáticas.	
25	No me preocupa tener que aprender temas difíciles en Matemáticas	
26	No importa cuanto estudie Matemáticas, siempre es difícil para mi	
27	Cuando algo sobre Matemáticas me confunde, lo pienso por algún tiempo	

28	Prefiero que me den la respuesta a los problemas que tener que hallarla	
29	Considero que no soy bueno en Matemáticas	
30	No confío en el ordenador para producir respuestas correctas.	
31	Paso largas horas trabajando con un ordenador para completar una tarea	
32	El ordenador hace que sea mentalmente perezoso	
33	Realizo una revisión de lo hecho en Matemáticas con el ordenador, poco después de cada sesión.	
34	Cuando trabajo con el ordenador me distraigo con las instrucciones del teclado.	
35	Me gusta revisar todos los temas de Matemáticas, una vez terminada la clase.	
36	Usualmente no tengo tiempo para verificar mi trabajos en Matemáticas para detectar y corregir los errores	
37	Tengo mucha confianza cuando asisto a las clases de Matemáticas	
38	Me siento más seguro de mis respuestas ayudándome con el ordenador	
39	Dedico gran parte de mi tiempo en actividades matemáticas	
40	No entiendo cómo algunas personas se entusiasmas con las Matemáticas	
41	En el caso de que tenga errores cuando trabajo con el ordenador seguro de poder resolverlo.	
42	Siento pánico si los errores se producen cuando estoy utilizando un programa para ordenadores	
43	Disfruto probando nuevas ideas en un ordenador	
44	No entiendo cómo las actividades con el ordenador absorben a algunas personas.	
45	La computadora me ayuda a relacionar aspectos gráficos y numéricos.	
46	Raramente repaso el material de una sesión con el ordenador poco después que termina.	
47	Elaboro material de apoyo con notas Matemáticas	
48	Prefiero revisar el material de Matemáticas superficialmente	

ANEXO 6

ESCALA DE ACTITUDES EA-4.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.
ESCALA DE ACTITUDES EA-4

APELLIDOS Y NOMBRE: ____________________________

INSTRUCCIONES: A continuación se te presentan una serie de enunciados

Escribe un 4 si estas completamente de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 3 si estas de acuerdo con el enunciado.

Escribe un 2 si estas en desacuerdo con el enunciado.

Escribe un 1 si estas completamente en desacuerdo con el enunciado.

	PROPOSICIONES	
1	Las Matemáticas es una materia en la que premian mi esfuerzo	
2	La perspectiva de tener que aprender nuevos temas de Matemáticas me pone nervioso	
3	Cuando leo una pantalla de una computadora tiendo a notar los detalles matemáticos	
4	Me desagrada cuando encuentro desafíos en Matemáticas	
5	Siento mucha confianza al usar un ordenador	
6	Me siento en desventaja al tener que usar un ordenador	
7	Usando un ordenador se hace más agradable el aprendizaje	
8	Evito usar un ordenador	
9	El ordenador refuerza lo que aprendo en Matemáticas por la abundancia de ejemplos	
10	Encuentro dificultades en el momento de transferir información a la pantalla del ordenador	
11	Considero muy útil intentar entender los ejercicios y los problemas matemáticos.	
12	Me gusta la libertad para experimentar, esto lo proporciona el ordenador	
13	Los resultados que obtengo en Matemática son buenos	
14	Estoy más preocupado en clases de Matemáticas que en cualquier otra materia	
15	Insisto en los problemas matemáticos hasta encontrar su solución	
16	Me frustra tener que pasar mucho tiempo en un problema matemático	
17	Puedo dominar los procedimientos que se requieren al trabajar con un ordenador	
18	Me siento nervioso cuando tengo que aprender nuevos procedimientos basados en el ordenador	
19	Trato las ideas matemáticas como unidades separadas en el momento de recordarlas	
20	Mi libertad se disminuye al utilizar un ordenador	
21	Disfruto realizando actividades matemáticas.	
22	No logro detallar los pasos utilizados en la solución de un problema matemático, resuelto en el ordenador	
23	Intento relacionar los nuevos conocimientos matemáticos con los que ya tenía	
24	No tomo apuntes de Matemáticas	
25	No me preocupa tener que aprender temas difíciles en Matemáticas	
26	No importa cuanto estudie Matemáticas, siempre es difícil para mi	
27	Cuando algo sobre Matemáticas me confunde, lo pienso por algún tiempo	

28	Prefiero que me den la respuesta a los problemas que tener que hallarla	
29	Considero que no soy bueno en Matemáticas	
30	No confío en el ordenador para producir respuestas correctas.	
31	Paso largas horas trabajando con un ordenador para completar una tarea	
32	El ordenador hace que sea mentalmente perezoso	
33	Realizo una revisión de lo hecho en Matemáticas con el ordenador, poco después de cada sesión	
34	Cuando trabajo con el ordenador me distraigo con las instrucciones del teclado	
35	Me gusta revisar todos los temas de Matemáticas, una vez terminada la clase	
36	Usualmente no tengo tiempo para verificar mi trabajos en Matemáticas para detectar y corregir los errores	
37	Tengo mucha confianza cuando asisto a las clases de Matemáticas	
38	Me siento más seguro de mis respuestas ayudándome con el ordenador	
39	Dedico gran parte de mi tiempo en actividades matemáticas	
40	No entiendo cómo algunas personas se entusiasmas con las Matemáticas.	
41	En el caso de que tenga errores cuando trabajo con el ordenador seguro de poder resolverlo.	
42	Siento pánico si los errores se producen cuando estoy utilizando un programa para ordenadores	
43	Disfruto probando nuevas ideas en un ordenador	
44	No entiendo cómo las actividades con el ordenador absorben a algunas personas.	
45	La computadora me ayuda a relacionar aspectos gráficos y numéricos	
46	Raramente repaso el material de una sesión con el ordenador poco después que termina	
47	Elaboro material de apoyo con notas Matemáticas	
48	Prefiero revisar el material de Matemáticas superficialmente	
49	Cuando uso *DERIVE* me siento más seguro de los resultados	
50	Trabajar con *DERIVE* no sirve para nada, ya que en los exámenes es necesario escribir los cálculos y las demostraciones	
51	Entiendo mejor las clases utilizando *DERIVE* que explicadas en la pizarra	
52	*DERIVE* lo complica todo y no ayuda a aprender Matemáticas	
53	Cuando visualizo la gráfica de una función hecha con *DERIVE* la entiendo mejor que dibujada en la Pizarra	
54	Con *DERIVE* no hay que aprender a calcular, él lo hace todo	
55	Si se introducen correctamente los datos en *DERIVE* se puede estar seguro de los resultados	
56	El procedimiento que se utiliza en *DERIVE* no lo entiendo	
57	*DERIVE* me estimula la imaginación y creatividad	
58	Utilizar *DERIVE* en clase de Matemáticas es perder el tiempo	
59	Con *DERIVE* da deseos de hacer Matemáticas	
60	Utilizar *DERIVE* en clase de matemáticas sirve para aprender a usar el ordenador	
61	*DERIVE* hace ver las Matemáticas de otra manera	
62	Utilizar *DERIVE* no ayuda a comprender las Matemáticas	

63	*DERIVE*, ayuda a entender las Matemáticas	
64	Trabajar con *DERIVE* es más aburrido que oír una clase de Matemáticas	
65	Me gustaría que en las clases de Matemáticas se usara *DERIVE*	
66	Es inútil tratar de resolver los problemas utilizando *DERIVE*	
67	Me gusta utilizar *DERIVE* en clases de Matemáticas porque se diferencian de los cursos habituales	
68	Cuando uso *DERIVE* no entiendo los conceptos matemáticos	
69	Cuando uno usa *DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, por que de otra manera se pierde mucho tiempo	
70	Utilizar *DERIVE* en clase de Matemáticas no ahorra tiempo	
71	*DERIVE* esta bien por que uno puede trabajar al mismo tiempo en las ecuaciones y gráficos	
72	Sí me proponen otra clase utilizando *DERIVE* no me gustaría participar	

ANEXO 7

COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS DE LAS PRÁCTICAS DE LABORATORIO.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRÁCTICA 1

Equipo	opinión Sobre las actividades	Opinión sobre el diseño utilizado	Opinión sobre el contenido	Opinión sobre el estilo de clase	¿Qué le agregarías?	¿Qué le quitarías?	¿Consideras que el tiempo fue suficiente?	Otras Observaciones	Ventajas y desventajas
1	Las actividades en el laboratorio para el aprendizaje	Es una práctica de fácil manejo y comprensión	Esta bien organizada	Muy bueno	Esta acorde con nuestros conocimientos	nada	Si fue suficiente		Es una manera de enseñanza muy didáctica.
2	son prácticas muy didácticas e interesantes	Esta bien diseñada	Esta bien desarrollada	Es interactiva	Más ejercicios	nada	suficiente		Esta bien porque se aprende a usar la computadora y el trabajo en equipo ayuda a mejorar la comprensión
3	son muy didácticas y nos ofrecen una herramienta para obtener un mejor avance matemático a la hora de estudiar, sin procedimientos fastidiosos y con resultados inmediatos	Esta elaborado de una manera sencilla de manera que cumple con los requerimientos del alumno	Es una manera más fácil de realizar cálculos matemáticos	Dinámica y permite al alumno a desarrollar y poner en práctica habilidades para el manejo de este tipo de programas	ejercicios	nada	es suficiente	el computador facilita el trabajo	desarrolla habilidades y destrezas

4	Son favorables para el aprendizaje de las matemáticas con otra metodología	Nos gusta mucho, ya que esta contenía paso a paso las actividades a realizar, logrando así que estas prácticas sean de fácil acceso para el estudiante	cumple con los objetivos de clase	Muy amena y recreativa	nada		si		Ventaja: Se hace más fácil el trabajo
5	muy interesante, dinámica y comunitaria	Esta muy bien especificada	interesante	diferente	nada	nada	fue suficiente		Aprender a resolver operaciones matemáticas a través del computador.
6	son muy buenas	esta muy bien especificada	es entendible	es 100% práctica	más ejercicios	nada	fue suficiente		Ventaja: es una manera rápida de aprendizaje.
7	combina el campo de la computación y el cálculo	facilita el desarrollo del contenido de la misma y el uso de el programa utilizado		es agradable		nada	fue suficiente		Enseñanza de la computación dentro del área del cálculo

8	Fue una práctica muy amena ya que con esa forma de conocer un poco más el cálculo es más divertida y así quizás se puede aprender más y mejor	es los suficientemente explícito para comprender el programa	es suficiente	es dinámico porque se comparten más opiniones y así no es monótona las clases	instrucciones más gráficas	nada	si, porque permite cubrir los objetivos	son suficientes	Ventaja: una manera más práctica de aprender, sencilla, gráfica y directa. Desv. Pérdida de interés por conocer los métodos manuales
9	Es muy interesante, ya que no habíamos utilizado un programa como este	La práctica es muy buena porque nos explica detalladamente los pasos a seguir para el desarrollo de la misma	Es un buen contenido porque aprendimos a manejar parte del programa	Es una clase muy interesante y dinámica. Nos gusta porque nunca habíamos trabajado en una práctica con computadora	Una explicación más clara sobre la práctica antes de comenzar.	nada	suficiente		aprendimos de una forma más fácil a manejar la computadora

10	Nos pareció muy interesante, ya que es un programa nuevo, no conocido por nosotros, donde descubrimos que los procesos matemáticos no solamente los podemos hacer con calculadora o desarrollarlos a mano	Es muy útil ya que se encuentra muy bien organizada, explicando paso a paso el procedimiento a seguir facilitando el trabajo y ayudándonos a comprender más fácilmente el programa.	Es muy interesante ya que los ejercicios van aumentando gradualmente de dificultad	Es agradable, ya que se puede enfocar de una manera distinta la materia, adquiriendo el aprendizaje de una manera práctica.	Más ejercicios para tener más práctica y poder tener mayor destreza al realizar el programa	nada	es suficiente	ninguna	Muchas ventajas ya que es práctico, entretenido, nuevo, útil, divertido.
11	conocimos un programa nuevo e importante para nosotros, ya que más adelante nos servirá mucho para resolver problemas matemáticos	Es interesante y buena para calcular	El contenido esta acorde con lo que estamos viendo	Muy bueno, ya que de este modo no solo aprendemos en clase, sino también de una forma práctica, no es monótona y nos servirá mucho en el futuro	Más desarrollo de ejercicios	nada	suficiente		No es monótona.

12	Estas actividades fueron útiles para obtener conocimientos sobre el programa DERIVE	La práctica fue útil para el manejo del programa y su diseño nos hizo más cómodo el aprendizaje	El contenido fue expresado de una manera muy clara y explícita.	La clase fue muy dinámica y el trabajo en grupo nos sirvió para conocer a nuestros compañeros, además de intercambiar ideas	nada	nada	suficiente	ninguno	hace más fácil el aprendizaje de la materia

COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRÁCTICA 2

Equipo	opinión Sobre las actividades	Opinión sobre el diseño utilizado	Opinión sobre el contenido	Opinión sobre el estilo de clase	¿Qué le agregarías?	¿Qué le quitarías?	¿Consideras que el tiempo fue suficiente?	Otras Observaciones	Ventajas y desventajas
1	son muy buenas	Es excelente, se entiende casi todo	Es muy interesante, en especial las gráficas de funciones implícitas	Es moderno y vanguardista, muy agradable	más tiempo		No, 140 min.	la práctica estuvo dinámica, permite las interacciones computador-estudiante	En la actualidad trabajar el cálculo sin una computadora es algo prehistórico. la computadora te ofrece vistas rápidas d cosas que tardarían mucho sin ella
2	son dinámicas y entretenidas	es muy participativa	aprendimos unas nuevas gráficas	todas deberían ser así		nada	suficiente		
3	son muy didácticas y divertidas	es muy interesante	muy completo	muy dinámica	nada	nada	suficiente		es muy buena e interesante

4	son completas, entretenidas y muy interesantes		Es muy interesante, ya que lo explicado en clase es practicado en el laboratorio y de esta manera se puede afianzar los conocimientos	Es muy dinámica	suficiente	nada			Ventaja: que se puede trabajar con un programa desconocido por nosotros; conocer más sobre el uso de la computadora.
5	si	Es un diseño entendible que facilita el manejo de la práctica	fue interesante	fue completa	nada	nada			Deja ver de una manera más práctica el contenido de la materia
6	si	Esta bien elaborada	el contenido es profundo	Quizás las computadoras ayudan a adelantar el proceso pero frustra al estudiante al no entender lo expuesto.	Quizás detalles teóricos de forma sencilla que ayuden a la comprensión de las formas más complicadas	nada	no fue suficiente	Es recomendable leer el contenido de gráficas antes de la práctica	Ventaja: Deja ver el contenido de las gráficas lo cual sirve para comparar resultados. Desventaja: crea en el estudiante inutilidad para elaborar procedimientos.

COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRÁCTICA 3

Equipo	opinión Sobre las actividades	Opinión sobre el diseño utilizado	Opinión sobre el contenido	Opinión sobre el estilo de clase	¿Qué le agregarías?	¿Qué le quitarías?	¿Consideras que el tiempo fue suficiente?	Otras Observaciones	Ventajas y desventajas
1	el programa es muy eficiente y permite tener una idea más amplia sobre el tema	Fue un diseño muy accesible	Fue muy interesante y se ponen en uso los conocimientos que adquieren en clase	Fue muy dinámica	nada	nada	si fue suficiente		Es fácil y muy bueno
2	son interesantes	bastante prácticas	faltaron ejercicios	dinámico	más ejercicios	nada	si	ninguna	Hay ventajas de aprendizaje. Pero a la hora de un examen si es complicado, tendremos problemas ya que no es por computadora.
3	creemos que son muy buenas porque gracias a ellos podemos comprobar los que nos dio en clase de teoría	Es bueno porque hay muchas formas como resolver el límite		el estilo de clase nos gusta mucho porque es la clase más rápida y dinámica	nada	nada	no, unas dos horas porque no tenemos casi conocimiento del computador		Ventaja, la manera de ver el cálculo es más rápido.

4		En cada práctica se aprende un poco más sobre como utilizar el programa DERIVE	El límite es de gran importancia para un estudiante de Ingeniería y por eso la computadora nos ayuda a ver el comportamiento de la gráfica	La clase es muy dinámica	no	nada	si	algunos no tenemos donde practicar con DERIVE	
5	muy instructivas	Excelente	bien	dinámica	tiempo	nada			dinámica
6	Nos enseña gráficamente como se aproxima el límite	Debe ser más específico las instrucciones	Adecuado	Bueno	Más instrucciones	nada	si	ninguno	Ventajas: que hay cosas que no se pueden explicar en clase. Desventaja: Menor interés en particular manualmente.

7	Las actividades cumplieron con los objetivos y nos permitieron tener una mejor visión sobre el estudio del límite	Esta bien elaborada y hace cómodo y rápido el desenvolvimiento en la práctica	El contenido tiene relación directa con lo visto en la clase teórica	Hace dinámico el estudio del cálculo			Fue suficiente		Ventaja: Es más rápido el aprendizaje. Desventaja: No se puede trabajar individualmente.
8	Son muy interesantes, ya que nos permite aclarar dudas	Esta muy bien diseñada ya que trabajamos cómodamente	Nos permite ampliar los conocimientos y aclarar dudas que uno pueda tener	Es muy dinámico	nada	nada	si		
9	son muy completas ya que cubre todos los puntos de los objetivos que estudiamos	Esta práctica estuvo corta y de verdad nos fue suficiente el tiempo	Consideramos que el contenido de la práctica esta en equilibrio con lo que esta en equilibrio con lo que estamos viendo en clase. Lo que nos permite uniformidad en lo que hemos estudiado	Es muy agradable el método de estudio, se hace la actividad de manera diferente a la tradicional	Un preparador para que ayude al profesor	le agregaría pequeños detalles	fue suficiente		Es agradable; se aprende a trabajar en equipo. Se sale de lo tradicional. Desv.: se Hace muy mecánico el trabajo; nos limita el pensamiento, ya que todo lo hace el computador.

10	Las actividades son muy didácticas ya que nos ofrece 4 formas de resolver los límites	Esta bien diseñada	envuelve todo lo visto en clase	es dinámico	Más ejercicios	nada	si fue suficiente		Se aprende rápidamente el cálculo por otros métodos no convencionales
11	Estas actividades nos ayudan a aprender más sobre lo que estamos estudiando	Esta bien diseñada	Esta bien, ya que es lo que estamos viendo últimamente	Es didáctica			si		las prácticas no son monótonas
12	son muy instructivas	Muy bien explicadas	Se evalúa mejor el límite y es más práctico	Es muy dinámica y relajante	nada	nada	si fue suficiente		Ventaja: Uno aprende a manejar programas matemáticos por computadora y se sale de lo rutinario
14	son muy interesante, pues es una forma fácil, rápida y dinámica de aprender cálculo por computadora	Es buena, porque nos guía en los pasos que tenemos que hacer para poder realizar la práctica	Es un contenido interesante porque es lo que estamos viendo en teoría	Es dinámica y rápida	nada	nada	10		

15	Es práctico ya que por medio de los gráficos tiene el concepto más claro de lo que es un límite	Nos gusta ya que el instructivo da una información muy clara del proceso a ejecutar	Solidifica los conceptos dados en clase y ayuda al aprendizaje del mismo	Emplea un sistema muy didáctico que ayuda aprender los conceptos con más facilidad	Ejercicios con más gráficas	nada	si fue suficiente		Se puede verificar los resultados de ejercicios resueltos.

COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRÁCTICA 4

Equipo	opinión Sobre las actividades	Opinión sobre el diseño utilizado	Opinión sobre el contenido	Opinión sobre el estilo de clase	¿Qué le agregarías?	¿Qué le quitarías?	¿Consideras que el tiempo fue suficiente?	Otras Observaciones	Ventajas y desventajas
1	que fueron interesantes	que es muy dinámica	Que es buena base para poner en uso lo adquiridos en clase	Que fue muy dinámica y muy interesante	nada	nada	si		
2	son buenas y dinámicas	es interesante y facilita el trabajo	el contenido es muy completo y útil para la resolución de problemas	muy moderno y vanguardista	nada	esta muy completo, no le quitaría nada	No, porque entramos tarde al aula, se podría asignar 140 min.	Las gráficas ayudan a visualizar los resultados, lo hacen más palpables	Es más atractivo y actual. Es agradable.
3	Esta actividad ayuda a la utilización del computador	El diseño es muy entendible	esta practica es muy extensa	es muy práctica	nada	le quitaría un poco de contenido	no fue suficiente		

4.	Estas actividades son muy buenas ya que nos permiten estudiar los mismos contenidos pero de una manera diferente y muy amena	Las prácticas tienen un diseño muy bueno, ya que permiten que cualquier persona sea capaz de utilizarla debido a que no son complicadas	Estos contenidos nos permiten desarrollar de una manera práctica los temas que con anterioridad hemos visto en clases, por lo que el aprendizaje se hace más completo	Es una clase muy amena, bastante ilustrativa y poco estresante.	nada	nada		Ninguna. Ya que las observaciones anteriores permiten visualizar el desarrollo de las prácticas.	Las ventajas son que por medio del desarrollo de estas prácticas se pueden afianzar los conocimientos obtenidos en clase. La desventaja es que la computadora no nos muestra el procedimiento para obtener los resultados, por lo que resolver los ejercicios se hace mecánico
5	agradable	bueno	importante	Bueno	más tiempo	nada	media hora más	sería importante guardar las gráficas	Ventaja: aprender más rápido y eficiente.

6	son muy dinámicas	muy fácil de aprender	Es un contenido de gran importancia, ya que podemos visualizar lo que practicamos	Es un estilo muy práctico	Más tiempo y un preparador para que nos aclare las dudas.	nada	si	ninguno	La ventaja es que podemos aprender más con la computadora, observar las gráficas con el DERIVE.
7	falta tiempo	esta bien pero con poco más de tiempo			mucho más tiempo	contenido			
8	son muy buenas ya que nos permite aprender un poco más a cerca de cálculo	Estuvo bien ya que fue de utilidad para aclarar dudas.	Es bastante útil, ya que nos permite aclarar dudas	Esta muy bien, es chévere	nada	nada	no fue suficiente, pero es porque tenía mucho contenido		es muy bueno ya que es interactivo lo cual motiva al alumno a estudiar
9	Es una buena opción que nos permite realizar de manera más práctica los cálculos	Es muy específica y ordenada	Nos complementa las actividades realizadas en clase.	Es amena y es agradable, además de no ser monótona	Material de apoyo para estudiar fuera de práctica	nada	si fue suficiente	ninguna	No es monótona, es práctica y es una manera agradable de aprender.

10	esta bien	esta bien organizada	es completo	dinámica	nada	nada	si		
11	Son de mucha ayuda para el entendimiento de los temas	Esta muy bien diseñada porque ofrece toda la explicación necesaria	Envuelve todos los objetivos propuestos	Es muy dinámica	nada	nada	si fue suficiente		Ventaja: Se aprende de una manera diferente y más agradable. Desventaja: No todos pueden participar.
12	Las operaciones del laboratorio realizadas son de uso frecuente para los ingenieros, facilitando el trabajo en nuevos cálculos	El diseño es versátil, de fácil acceso y funcionamiento, con un método eficaz para el cálculo	Este abarca los temas del libro, por el cual guiamos nuestras clases.	La clase es versátil, muy didáctica y organizada	nada	nada	el tiempo fue suficiente		Una de las ventajas más importantes es el uso futuro con el manejo del programa DERIVE.

14	La actividad de laboratorio es muy importante para nosotros, ya que en el libro aparecen muchos ejercicios que se hacen con programas de computadora y éste nos permite aprender a manejarlos para hacer dichos ejercicios.	Es buena porque nos permite desarrollar la práctica más rápida y fácilmente.	Es importante porque nos ayuda a entender la parte teórica de estos temas	Es dinámica, lo que nos permite aprender con más facilidad.		nada	no fue suficiente		Ventaja: es más fácil de aprender; es dinámica
15	Muy prácticas y didácticas, útiles para el estudio	Son muy sencillas y fácil de comprender	Hace de lo complicado algo práctico y sencillo	Muy práctico y fácil de entender	Suficiente	nada	si		
16	Son gratificantes, facilita el estudio de las unidades del programa	Es el adecuado, a pesar de ser largo no deja de ser interesante	Largo, pero fácil de manejar con el programa.	Es mucho más fácil entender el cálculo así.	Tiempo	nada	No fue suficiente	Es mejor haber dividido el equipo en dos, así tenemos más tiempo de consulta con el profesor, en caso de dudas	Más ventajas que desventajas, ya que el método le facilita al alumno la comprensión de la materia.

COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRÁCTICA 5

Equipo	opinión Sobre las actividades	Opinión sobre el diseño utilizado	Opinión sobre el contenido	Opinión sobre el estilo de clase	¿Qué le agregarías?	¿Qué le quitarías?	¿Consideras que el tiempo fue suficiente?	Otras Observaciones	Ventajas y desventajas
1	Son muy interesantes y ayudan a mejorar la adquisición de los conocimientos planteados	Que fue muy original y fácil del comprender	Fue muy interesante.	Fue muy dinámica	Un poco más de ejercicios	Nada	fue más que suficiente	ninguna	Se observa muy detenidamente la representación y los cambios que ocurren. Desv. Ninguna, es perfecto e ideal.
2	Se trabaja mucho más rápido con DERIVE que hacerlo sin el programa. Facilita la comprensión	Es muy bueno, ayuda al desarrollo rápido de los trabajos.	Es muy interesante y útil.	Dinámico y diferente, muy agradable	Nada, es muy buena.	Nada, todo nos parece bien	SI	La práctica esta muy bien elaborada. Nos gustó mucho	Todo es mucho más rápido y más agradable. No tiene desventajas.
3	Interesante	Bueno	Excelente	Dinámica	Impresora a color	Nada	Si	Ninguna	V: se aprende a la resolución de áreas por otros métodos.

4	Las actividades son muy dinámicas y prácticas para el aprendizaje	Esta diseñada para que el estudiante pueda captar en forma práctica la teoría dada.	Es muy práctico, porque obtenemos las áreas con facilidad y gran precisión.	Es chévere el estilo de clase, porque estamos frente al computador y podemos captar lo estudiado	Un preparador para que le ayude al profesor a responder nos las dudas.	nada	Si	no tenemos ninguna otra observación	Las ventajas es que aprendemos a trabajar con el computador a nivel de otros programas, visualizamos las gráficas y aprendemos más. La desventajas es que algunos no saben manejar una computadora y les cuesta más desarrollar la práctica.
5	Fueron muy dinámicas	Facilita el entendimiento de los objetivos de la misma	El contenido fue el mismo visto teóricamente y por lo tanto se hizo fácil manejar dicho contenido	La clase fue muy cómoda y permitió cumplir con los objetivos propuestos.	El servicio de una impresora	nada	El tiempo para esta práctica fue suficiente	falta una impresora	Desv. Todos no tenemos una computadora en nuestras casas para practicar más a menudo. Ventaja: se aprende con más facilidad lo aprendido en clase.
6	son muy interesantes	Está muy bien diseñada ya que nos permitió aprender un poco más.	Es muy interesante ya que es de utilidad al momento de estudiar.	Es muy dinámica y útil	nada	nada	Si el tiempo es suficiente	.	es muy útil e interactiva

7	Son amenas, entretenidas y fáciles de realizar.	Es muy ordenada y específica	Es práctico y útil a la vez.	Es agradable.	Material que nos permita estudiar fuera de clase.	Nada.	si fue suficiente	Está todo completo.	Vent. Las clases son más dinámicas y entretenidas, nos resulta ventajoso desde todo punto de vista.
8	Es muy entendible.	Es muy dinámico.	Es un contenido que cumple con lo planteado en la evaluación.	Es de mayor enseñanza.	nada	nada	si		

COMENTARIOS DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRÁCTICA 6

Equipo	opinión Sobre las actividades	Opinión sobre el diseño utilizado	Opinión sobre el contenido	Opinión sobre el estilo de clase	¿Qué le agregarías?	¿Qué le quitarías?	¿Consideras que el tiempo fue suficiente?	Otras Observaciones	Ventajas y desventajas	¿Qué problema tuviste con las actividades?
1	Estuvimos fenomenal hasta que se cayó el sistema	Es muy dinámico e interesante	Gracias a esta modalidad de este laboratorio se puede aprender mucho más fácil esto	Es muy dinámica lo único que falta es música en clase.	Un poco más de ejercicios.	Nada	Si fue suficiente.	Hubo un problema al principio con las sentencias pero se logró resolver	Es muy ventajoso por favorecer el aprendizaje y desventaja ninguna	Ninguna.
2	Muy agradable e interesante	Bastante completa	Muy útil para el aprendizaje del tema	Interactivo	Nada	Nada		Ninguna	Ventaja: muy dinámica y se aprende mucho	ninguno
3	Muy instructivas	Excelente	Importante	Buena y dinámica	Nada	Nada	Si	ninguna	Se aprecia mejor los métodos del cálculo de área.	Orden de las sentencias.

4.	Son muy dinámicas	Esta muy bien diseñadas para nuestros conocimientos.	El contenido es de gran importancia, para estudiantes de Ingeniería y cualquier otra carrera	Es un buen estilo	Nada	nada	si	ninguna	La ventaja es que podemos observar todo	Tuve que cambiarme de máquina y volverlo a hacer.
5	Las actividades realizadas cumplieron con los objetivos planteados en la práctica.	El diseño de la práctica se ajusta para que los alumnos tengan facilidad al usarla.	El contenido expuesto se ajusta a lo antes visto teóricamente.	El estilo de la clase se adapta a las necesidades de los alumnos.	Nada.	Nada.	Si el tiempo fue suficiente.		Ventajas: Una manera mejor de aprendizaje.	ninguna
6	Son muy interesantes ya que son interactivas.	Esta bien porque explican todo detalladamente.	Esta muy completo, y además es una retroalimentación a la clase anteriormente dada.	Es muy amena.	Material de apoyo para estudiar fuera de clase.	Nada.	El tiempo es suficiente.	Ninguna	Ventaja: Es una manera muy dinámica de aprender. desventaja: no tiene.	Ninguna.

7	Es cómoda, práctica y entretenida.	Esta bien elaborada, es ordenada y específica.	Es el contenido que estamos viendo, lo que implica que a través de esta práctica la podemos entender mejor.	Es entretenida y práctica.	Material de apoyo para llevar a casa.	Nada.	Si		Ventaja: que se nos hace más practica y cómoda.	Ningún.
8	Hay mucho dinamismo.	Es muy bien definida	No es muy entendible.	Es muy práctica.	Nada.	Nada.	Si fue suficiente.		Ventaja: nos ayuda a manejar bien el DERIVE el computador	Problemas con los numerales de la práctica

ANEXO 8

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-1.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

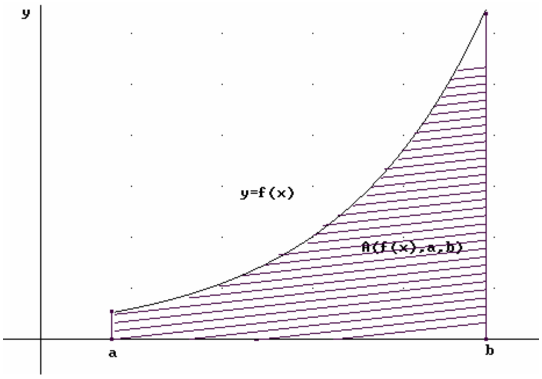
PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-1

COMENTARIO

A continuación se te presenta un ejemplo en el cual se especifica la simbología que se utilizará en el desarrollo de este cuestionario.

Vamos a representar por $A(f(x),a,b)$ al área de la región rayada de la siguiente figura:

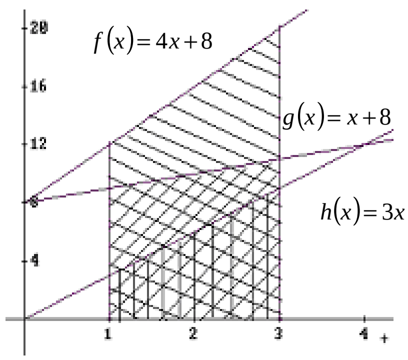


INICIO DEL CUESTIONARIO.

PREGUNTA

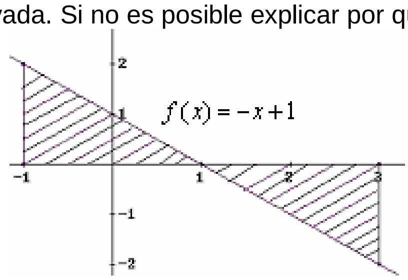
1.- Explicar por medio de gráficos o de otra forma por qué.

$$Área(f(x),1,3) = Área(h(x),1,3) + Área(g(x),1,3)$$

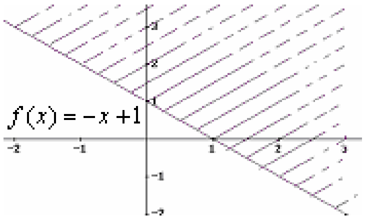


PREGUNTA

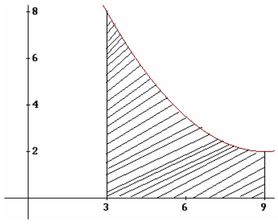
2.- Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



PREGUNTA
3.- Calcular el área rayada. Si no es posible explicar por qué.



PREGUNTA
4.- El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados?



PREGUNTA
5.- Calcular el área $A(f(x),-3,4)$ siendo $f(x) = |x+2|$

PREGUNTA
6.- Indicar si es verdadero o falso que.

Si $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$ entonces $g(x) \geq f(x)$ para todo x que pertenece a $[a,b]$

Justifica tu respuesta.

PREGUNTA
7.- Indicar si es verdadero o falso que

Si $g(x) \geq f(x)$ entonces $A(f(x),a,b) \geq A(g(x),a,b)$

Justifique tu respuesta.

ANEXO 9

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-2.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

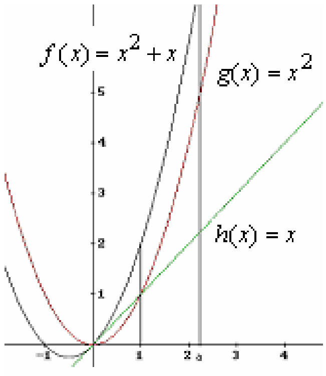
CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-2

PREGUNTA
1.- Explicar por medio de gráficos o de otra forma por qué.

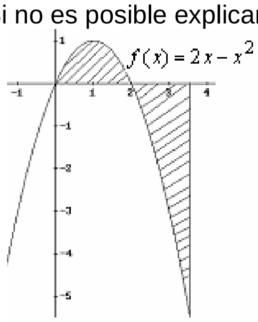
$$\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx + \int_1^a h(x)dx$$

donde

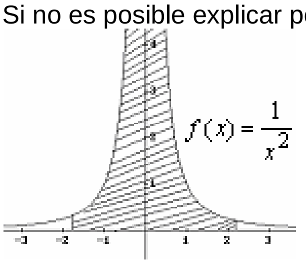
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = x^2 \\ h(x) = x \end{cases}$$



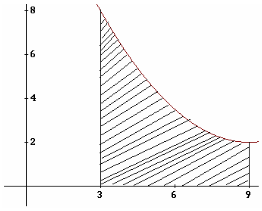
PREGUNTA
2.- Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



PREGUNTA
3.- Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué.



PREGUNTA
4.- El área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar valores más ajustados?



PREGUNTA
5.- Calcular

$$\int_{-3}^{4} |x+1| dx$$

PREGUNTA
6.- Indicar si es verdadero o falso que.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right|_{-1}^{1} = -\left. \frac{1}{x} \right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1} \right) = -2$$

Justifica la respuesta

PREGUNTA
7.- Indicar si es verdadero o falso que

$$Si \quad \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx \quad \text{entonces}$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{para todo } x \text{ que pertenece a } [a,b]$$

Justifica tu respuesta.

PREGUNTA
8.- Indicar si es verdadero o falso que.

$$Si\, f(x) \geq g(x) \quad \text{entonces} \quad \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

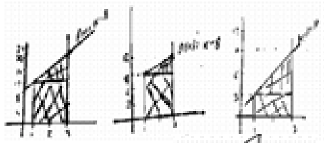
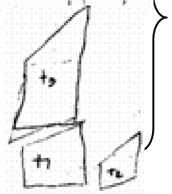
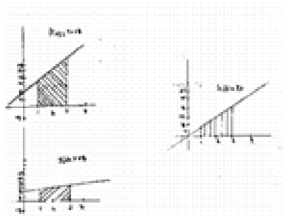
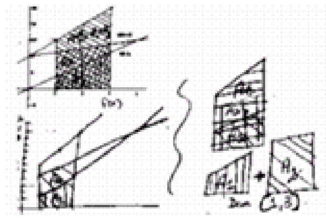
Justifica tu respuesta.

ANEXO 10

RED SISTÉMICA DEL CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-1.

PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

Pregunta 1

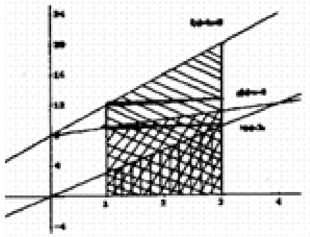
- •Dibuja las tres regiones (trapecios) por separado
  - •Divide cada región en triángulos y rectángulos.
    
  - •No divide las regiones
    
    - •Calcula las áreas usando sus fórmulas y halla las alturas a partir de las expresiones algebraicas de las funciones
      - •Suma las áreas y verifica la igualdad
        - •22
        - •18
  - •Describe la situación comparando las tres funciones *f(x)>g(x)>h(x) y n*o justifica la igualdad
    - •4
  - •Elabora gráficos de figuras elementales y no justifica la igualdad
    
    - •23
  - •Justifica la igualdad con la “idea de Puzzle”
    
    - •1,7,13,15 24,26,28
- •Opera con la expresión algebraica de las funciones
  - •Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones (f(x)=g(x)+h(x))
    - •3,5,11 20,27
  - •Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica puntualmente la igualdad
    - •25

14

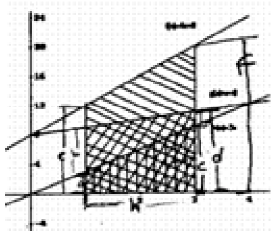
10

Pregunta 1

- •Trabaja sobre el gráfico dado
  - •Divide cada región en triángulos y rectángulos.



  - •No divide las regiones

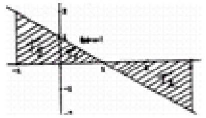


  - •Calcula las áreas utilizando fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y justifica la igualdad
    - •9,12
    - •2,21
- •Menciona que la igualdad no se cumple — •6
- •No responde — •8,16,17,19

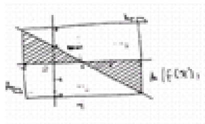
Pregunta 2

•Trabaja sobre el gráfico dado

•Dibuja un trapecio dos triángulos



•Dibuja un rectángulo y dos trapecios



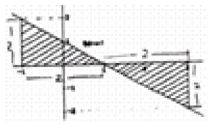
•Obtiene las medidas de los lados por inspección de la gráfica y calcula las áreas usando sus fórmulas

•13,23

•27

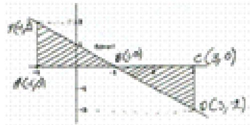
•Identifica los dos triángulos

•Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica



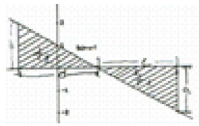
•1,3,5,6,8,9,10,1 1 12,15,18,24, 25,26,28

•Usa la expresión algebraica de la función y la fórmula de distancia entre dos puntos para obtener las medidas de los lados



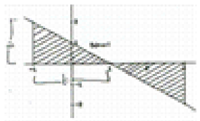
•19

•Calcula la imagen de -1 y 3, y le aplica valor absoluto al resultado



•7,21,22

•Aplica el teorema de Pitágoras para obtener las medidas de los lados



•4,16,17

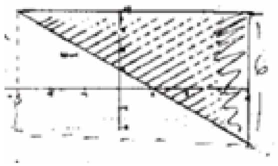
•Calcula las áreas usando sus fórmulas

•No responde

•2,14,20

Pregunta 3

- •No es posible calcular el área de la región
  - •Afirma que la región es infinita — •2,3,4,5,6 7,9,13,16 17,18,20 21,22,25
  - •Afirma que el dominio no esta restringido — •14,26
- •Acota la región dibujando segmentos



  - Calcula el área usando la fórmula $A=\frac{b\cdot h}{2}$
    - •Afirma que sería imposible calcular el área sin tener el intervalo — •24
    - •Afirma que el resto no es calculable porque no se puede asociar a una superficie conocida — •15
    - •No considera el resto de la región — •8,27
    - •Afirma que la región es infinita — •1
    - •Afirma que el dominio no esta restringido — •12
  - •Afirma que $x_1=\frac{-xy+x}{2}$ $x_2=yx-1/2$ $x_3=y-xy$ — •10

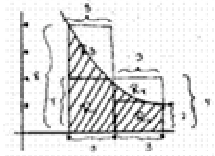
    $A_t=x_1+x_2+x_3$

- •No responde — •11,19,23,28

Pregunta 4. 1ra. parte.

•Trabaja sobre el gráfico dado

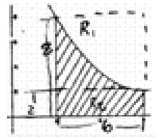
•Dibuja cuatro rectángulos



•Justifica la cota inferior comparando con el área de R_1 =12 y la cota superior comparando con la suma aproximada de las áreas R_1+1/3R_2+1/2R_3 =26

•25

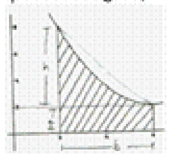
•Dibuja dos rectángulos



•Justifica la cota inferior comparando con el área de R_2=12 y la cota superior comparando con el área de R_1=48

•18,20,21,26

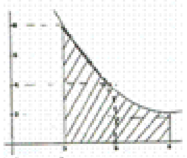
•Dibuja un triángulo y un rectángulo



•Justifica la cota inferior comparando con el rectángulo de área 12, y la cota superior comparando con la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo (área total=30)

•1,5,6,9,10,12,19,22

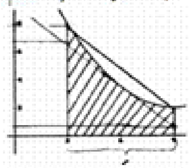
•Dibuja dos rectángulos y un triángulo



•Suma las áreas las áreas, obtiene el valor 24 y la compara con las dos cotas dadas

•2

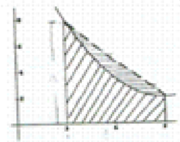
•Dibuja dos trapecios



•Justifica la cota inferior comparando con el área del trapecio que es igual a 22.2, y la cota superior comparando con del trapecio igual a 30

•7

•Dibuja un trapecio



•Justifica las dos cotas comparando con el trapecio de área igual a 30

•8,14

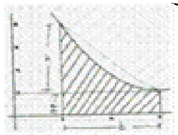
•Calcula las áreas usando sus fórmulas

•No responde

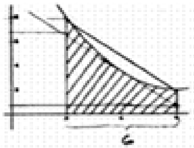
•3,4,11,13,15,161 7,23,24,27,28

Pregunta 4. 2da Parte.

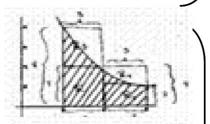
- •Calcula cotas más ajustadas
  - •Dibuja un triángulo y un rectángulo

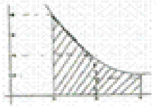
  - •Dibuja dos trapecios

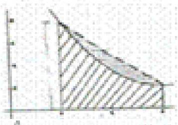
  - •Calcula las áreas usando sus fórmulas
    - •Propone una mejor cota inferior con el área del triángulo, igual a 18, y una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo, igual a 30. — •1,5,9,10,12
    - •Propone una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo igual a 30 — •6,19,22
    - •Propone una mejor cota inferior con el área del trapecio igual a 22.2 y una mejor cota superior con el área del trapecio igual a30 — •7
- •Calcula un valor del área aproximada
  - •Dibuja cuatro rectángulos

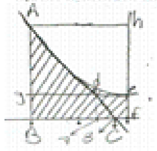
  - •Dibuja dos rectángulos y un triángulo

  - •Dibuja un trapecio

  - •Dibuja un triángulo y un trapecio

  - •Calcula las áreas usando sus fórmulas
    - •Afirma que el valor del área aproximado es 26 — •25
    - •Afirma que el valor aproximado del área es 24 — •2
    - •Afirma que el valor aproximado del área es 30 — •8,14
    - •Afirma que el valor aproximado del área es 25 — •26
- •No responde — •3,4,11,13,15,16,17,1820,21,23,24 27,28

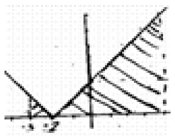
Pregunta 5

•Representa gráficamen-te la función

•Sin especificar el procedimiento. Dibuja dos triángulos

•Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos

•Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos



•Con la expresión algebraica de la función y la fórmula de distancia entre dos puntos obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ — •4,19 ,26

•Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ — •12,18,21 •1,10,14,25 •9,27

•Con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ — •2 •22

•La representa-ción gráfica de la función es incorrecta

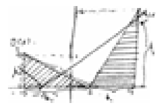
•Sin especificar el procedimiento

•Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función

•Define la función a trozos

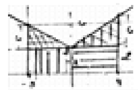
•Evalúa la función en [-3,4]

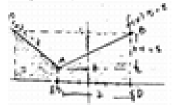
•Dibuja dos triángulos, obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$



•8

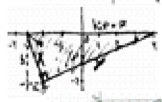
•Dibuja dos triángulos y dos rectángulos, obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ y $A = b \cdot h$ respectivamente

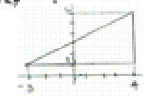




•28 •24 •15

•Dibuja un triángulo, obtiene las medidas de los lados por observación de la gráfica y el valor del área con las fórmulas $A = \frac{b \cdot h}{2}$



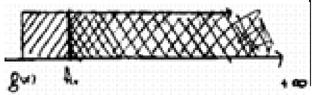


•11 •7

•No responde — •3,5,6,13,16,17,20,23

Pregunta 6

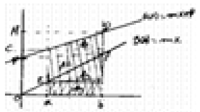
- •Justifica rehaciendo la tesis {*f(x)* ≥ *g(x)*} — •1,3,5,12,13 15,25,
- •Se requiere tener funciones definidas — •7
- •Afirma que la proposición es falsa
  - •Dibuja un diagrama

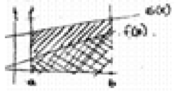
    - •Menciona que *g(x) tiene más área que f(x)* — •24
  - •Representa gráficamente dos rectas y marca una región

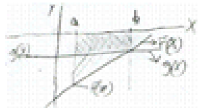
    - •Justifica rehaciendo la hipótesis A(*g(x),a,b)* ≥ *A(f(x)a,b)* — •2,22

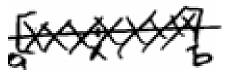
    - •Justifica rehaciendo la tesis {*f(x)* ≥ *g(x)*} — •4,6,9,17 18,19,21

    - •Usa funciones lineales particulares y valores de estas y rehace la tesis {*f(x)* ≥ *g(x)*} — •14

    - •Basa su justificación en el gráfico y menciona que se cumple en este caso — •26
- •Afirma que la proposición es verdadera
  - •Dibuja un diagrama

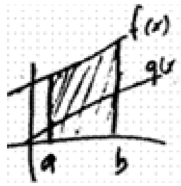
    - •Escribe A(*g(x),a,b)* ≥ *A(f(x)a,b) f(x)* ≥ *g(x)*↔ *g(x)* ≥ *f(x)* — •8
    - •Escribe que x ≥ a o x ≤ b — •10
- •No responde — •11,16,20 23,27,28

Pregunta 7

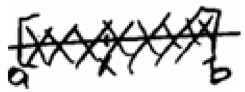
- •Afirma que la proposición es verdadera
  - •Dibuja un diagrama

    - •Menciona que *f(x) tiene más área que g(x)* — •24
  - •Representa gráficamente dos rectas y marca una región.

    - •Rescribe la proposición enunciada — •2,4,6,9,18,19, 1,22
    - •Usa funciones lineales particulares y valores de estas para justificar. — •14
    - •Basa su justificación en el gráfico, menciona que se cumple según la gráfica — •26
  - •Dibuja un diagrama

    - •Vuelve a escribir la proposición — •8
    - •Rescribe la proposición enunciada — •10
  - •Rescribe la proposición enunciada — •1,5,12 15, 25,20
- •Afirma que la proposición es falsa
  - •Se requiere tener funciones definidas — •3,7
  - •Se requiere tener la figura — •13

ANEXO 11

RED SISTÉMICA DEL CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-2.

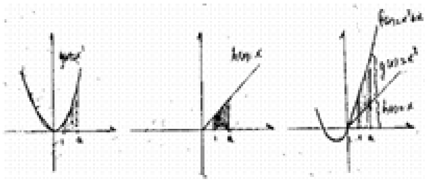
PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

Pregunta 1

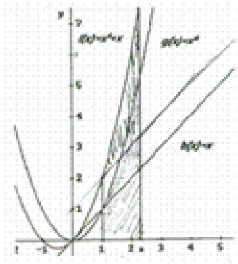
•Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad

•2,3,8,10,14,15,20,22,24,25,26,28

•Dibuja por separado las regiones



•Dibuja las regiones sobre la gráfica



•Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad

•4,5

•12,13,27

•Sustituye las expresiones algebraicas de las funciones en la igualdad dada

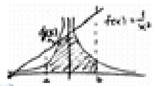
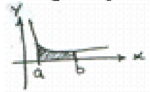
•6,7,18,19,21

Pregunta 2

- •Calcula el área de la región que esta en la parte superior (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales
  - •Antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX
    - •1,5,8,10,12,15,18 19,20,22,27
  - •Aplica valor absoluto al resultado de la integral de la región situada bajo el eje OX
    - •7
  - •No cambia el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX
    - • Suma las dos integrales sin cambiarle el signo a la integral de la región situada bajo el eje OX
      - •4,14
    - • No suma los resultados del las dos integrales
      - •24
- •Calcula el área de las regiones usando aproximación numérica
  - •2
- •Calcula el área de la región de la región sobre el eje OX por aproximación numérica y el área de la región bajo OX utilizando la integral definida
  - •9
- •Calcula el área de la región sobre el eje OX utilizando integral definida y no calcula el área de la región que esta bajo el eje OX
  - •Desconoce, para la región que esta bajo eje OX, la recta vertical.
    - •3,13,23
  - •La región bajo el eje OX no esta bajo la curva.
    - •6,28
  - •25
- •No responde
  - •21

Pregunta 3

•No es posible calcular el área

- • La función no es continua en el intervalo — •8,19
- •Plantea $\int_a^b x^{-2}dx$
  - •Para [a, b]=[-18/10, 20/10] sin calcular.
  - •La calcula dividiendo [a, b] en [-2, 0],[0, 2] y le da 1/0 en ambos casos.
  - } • La integral no existe en cero — •5,27
- (•8,19 y •5,27) } •26
- • La función no esta definida en el intervalo
- •La gráfica tiene una asíntota
  - } •Plantea $\int_a^b x^{-2}dx$
    - • Divide [a, b] en [-1.7, 0],[0, 2.1] sin calcular. — •6
    - •La calcula para [a, b]=[-1.7, 2.2] y obtiene 1.04278 — •12
    - •La calcula dividiendo [a, b] en [-1.8, 0],[0, 2.1] y obtiene infinito en ambos casos. — •14
- •Afirma que la función no esta definida en un punto x — •22
- •Afirma que la región rayada es infinita — •2,9,13,18,21,25
- •Afirma que la curva crece sin límite — •1,23,28
- •Afirma que la región no esta acotada
  - — •3
  - •Dibuja  — •24
- •Afirma que la región debe estar en intervalo cerrado. Dibuja  — •4

•Si es posible calcular el área

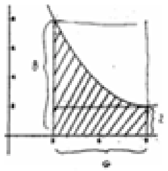
- •Calcula $I = \int_a^b \frac{1}{x^2}dx$
  - •Para [a, b] igual a [-1.7, 2.1] y obtiene I= -1.06 — •7
  - •Para [a, b] igual a [-1.8, 2.2] y obtiene I= -5.49 — •15
  - •Para [a, b] = [0, 2] y obtiene I= 8/3 — •20
- •Aplica la regla de Simpson y afirma que el área es igual a 2.82 — •10

Pregunta 4 . 1ra Parte

•Trabaja sobre el gráfico dado

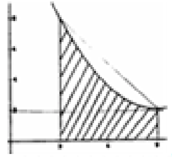
•Calcula las áreas usando sus fórmulas

- •Dibuja dos rectángulos



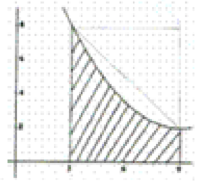
  - •Justifica la cota inferior comparando con el área del rectángulo igual a 12 y la cota superior comparando con el área de rectángulo igual a 48
    - •1,2,4,9,18 19,21,24

- •Dibuja un triángulo y un rectángulo



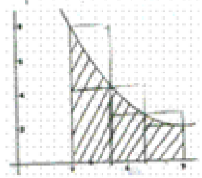
  - •Justifica las cotas comparando con la suma de las áreas, igual a 30.
    - •3,12

- •Dibuja un trapecio y rectángulo



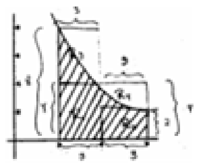
  - •Justifica la cota inferior comparando con el área del trapecio, igual a 12 y la cota superior comparando con el área del rectángulo, igual a 48
    - •7

- •Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores



  - •Para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 17 y para la de los superiores, 29, y no justifica las cotas
    - •22

- •Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores

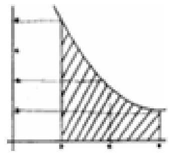


  - •Para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 18 y para la de los superiores, 36, y justifica las cotas
    - •8,25

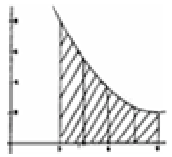
Pregunta 4. 1ra Parte Continuación.

•Trabaja sobre el gráfico dado

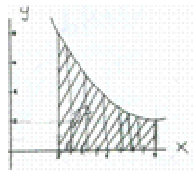
- •Dibuja dos trapecios



- •Dibuja cuatro trapecios



- •Dibuja siete rectángulos



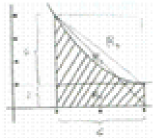
•No marca nada sobre el gráfico dado

•Calcula las áreas usando aproximación numérica

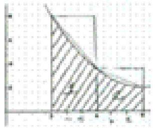
- • Calcula un área A=Δx/2(y_o+y_1+y_2)=25. sin escribir la justificación — •27
- •Justifica las cotas comparando con el área de A=Δx/2(8+6+4+3+2)=17.25 con Δx=2 [uso incorrecto de la regla del trapecio] — •26
- •Justifica las cotas comparando con el área de A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8) [error en el cálculo del área de rectángulo] — •10
- •Justifica las cotas calculando S_n=Δx/3(1.8+4.4+1.2)=52/3, con Δx=2, T_n=Δx/2(1.8+2.4+1.2)=18, M_n=Δx(8/2+4+2)=20 (uso incorrecto de las regla de Simpson, punto medio y trapecio) — •5

Pregunta 4 . 2da Parte.

- •Calcula cotas más ajustadas
  - •Dibuja dos triángulos y un rectángulo

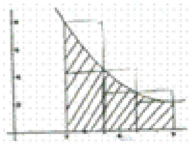
    

  - •Dibuja dos rectángulos, dos triángulos y dos trapecios

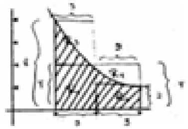
    

    - •Calcula las áreas usando sus fórmulas
      - •Obtiene para el triángulo el valor 24 y suma las áreas del triángulo y el rectángulo y obtiene el valor 30, propone una mejor cota inferior con el área del triángulo y una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo — •1
      - •Propone una mejor cota inferior con la suma de las áreas de los rectángulos y los triángulos, que es 24, ~~y~~ una mejor cota superior con el área de la suma de las áreas de los trapecios, que es 27 — •13
  - •No dibuja sobre el gráfico dado, calcula las áreas usando aproximación numérica
    - •Justifica las cotas calculando lo siguiente

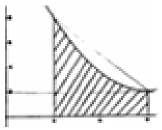
      $S_n=\Delta x/3(1.8+4.4+1.2)=52/3$, con $\Delta x=2$, $T_n=\Delta x/2(1.8+2.4+1.2)=18$, $M_n=\Delta x(8/2+4+2)=20$ (uso incorrecto de las regla de Simpson, punto medio y trapecio) — •5
- •Calcula un valor aproximado del área
  - •Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores

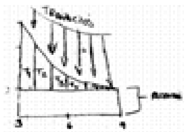
  - •Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores

  - •Dibuja un triángulo y un rectángulo

  - •Dibuja seis trapecios

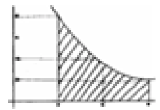
    

    - •Calcula las áreas usando sus fórmulas
      - •Calcula el promedio de área de los rectángulos inferiores y superiores, que resulta igual a 23 — •22
      - •Calcula el promedio de área de los rectángulos inferiores y superiores, que resulta igual a 27 — •8,25
      - •Afirma que el valor aproximado del área es 30. — •3,12
      - •Afirma que el valor aproximado del área es 25.3 — •9

Pregunta 4.. 2da Parte Continuación.

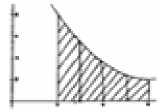
•Calcula un valor del área aproximada

•Dibuja dos trapecios



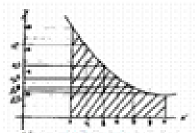
•Afirma que. por la regla del trapecio, el valor aproximado del área es $A=\Delta x/2(y_o+y_1+y_2)=25$ — •27

•Dibuja cuatro trapecios



•Afirma que el área aproximada es $A=\Delta x/2(8+6+4+3+2)=17.25$ con $\Delta x=2$ [uso incorrecto de la regla del trapecio] — •26

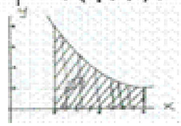
•Dibuja seis trapecios



•Calcula el área usando aproximación numérica

•Afirma que el área aproximada es $A=\Delta x/2(y_o+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+y_6)=1/2(3+2.4+2.5+2.6+2.7+2.8+2.9)=22.5$ [Errores en los cálculos] — •19

•Dibuja siete rectángulos



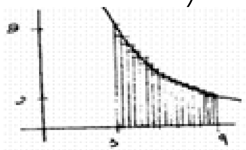
•Afirma que el valor aproximado del área es $A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8)=27$ [error en el cálculo del área de rectángulo] — •10

•No dibuja sobre el gráfico dado, y calcula las áreas usando aproximación numérica

•Afirma que, por la regla de Simpson, el valor aproximado del área es $S_2=1[8+4.(3.6)+(2.2)]=24.6$ [uso incorrecto de la regla] — •2

• Usa 10 trapecios y afirma que el valor aproximado del área es: $A=6/10(3.6+4.2+4.8+5.4+6+6.6+7.2+7.8+8.4+9)=37.8$ — •7

•Dibuja diecisiete rectángulos inferiores y superiores



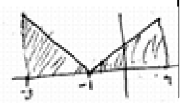
•Afirma que *mientras más rectángulos...mayor será la aproximación* — •4

•Afirma que no se pueden dar valores más ajustados porque *no se conoce la función* — •14,21

•No responde — •6,15,18 20,23,24 28

ÍTEM 5 CC-3

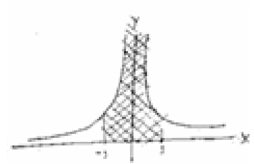
- •No representa gráficamente la función.
  - •Considera el integrando como una función lineal. Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx = \int_{-3}^{4} x + 1dx$
    - •Aplica valor absoluto al resultado — •2,4,7 13,14,25
    - — •1,6,18 20,27,28
  - •Define $|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$
    - •Calcula $\int_{-3}^{1} - x - 1\, dx + \int_{-3}^{4} x + 1\, dx$ — •15
    - •Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx = \int_{-3}^{4} x + 1dx$ — •10
  - •Define $|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$
    - •Calcula $\int_{-3}^{4}|x+1|dx = \int_{-3}^{4} x + 1dx$ — •9
    - •Calcula $\int_{-3}^{-1} - x - 1\, dx + \int_{-1}^{4} x + 1\, dx$ — •26
  - •Define $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$
    - •Calcula $\int_{-3}^{4} - x - 1\, dx + \int_{-3}^{4} x + 1\, dx$ — •3,5
    - •Calcula $\int_{-3}^{0} |x + 1| dx + \int_{0}^{4} |x + 1| dx = \int_{-3}^{0} x + 1\, dx + \int_{-3}^{0} - x - 1\, dx + \int_{0}^{4} x + 1\, dx + \int_{0}^{4} - x - 1\, dx$ — •12
    - •Calcula $\int_{-3}^{-1} - x - 1\, dx + \int_{-1}^{0} x + 1\, dx + \int_{0}^{4} x + 1\, dx$ — •22
- •Representa gráficamente la función.



  - •Define $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$
    - •Calcula $\int_{-3}^{-1} - x - 1\, dx + \int_{-1}^{4} x + 1\, dx$ — •8
    - •Calcula $\int_{a}^{b}|x+1|dx = \left[\left|\frac{x^2}{2}+x\right|\right]_{-3}^{4} = -\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{4}$ — •21
  - — •24
- •No responde — •19,23

Pregunta 6

- •Afirma que la proposición es verdadera
  - •Resuelve la integral de igual manera que la dada — •1,2,3,4,5,6,7,10,12,1315,18, 20,22,23,25,28
- •Afirma que la proposición es falsa
  - •La función no es continua — •8,19
  - •*El área de $1/x^2$ es infinita cerca de cero* — •21
  - •*El área nunca es negativa* — •27
  - •La gráfica tiene una asíntota vertical. Representa gráficamente la función

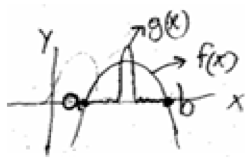
    — •14, 24
- •No responde — •9,26

Pregunta 7

- •Afirma que la proposición es verdadera
  - •Compara integrales particulares
    - •De la comparación hecha, infiere que se cumple la tesis — •2,4,10,14,20,24, 25,28
    - •Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica la tesis — •3,8
  - •Rescribe la proposición enunciada — •5,6,7,12,13,15,23
  - •Deriva las integrales como si fueran indefinidas e infiere que se cumple la tesis — •18,19,21,27
- •Afirma que la proposición es falsa
  - •Resuelve $\int_0^2 \left(x^2 + x\right)dx \geq \int_0^2 x^2\,dx \cdots 2.66 \geq 4$ y escribe "FALSO" — •1
  - •Asegura que se cumple la hipótesis y no la tesis
    - •Dibuja

— •22

    - •Dibuja



— •26
- •No responde — •9

Pregunta 8

- •Afirma que la proposición es verdadera
  - •Da ejemplos particulares con funciones
    - •Asegura que f(x) ≥ g(x), calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados — •2,3,10,14,19,28
    - •Calcula valores de las funciones y los compara, calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados — •8,20,25
  - •Dibuja 

    - •Basa su justificación en el gráfico — •26
  - •Menciona que la desigualdad no se afecta al aplicar la integral — •1,5,6
  - •Rescribe la proposición enunciada — •4,9,13,15,22,23
- •Afirma que la proposición es falsa
  - • Se desconoce el intervalo de integración — •7,12
- •Afirma que la veracidad o falsedad de la proposición depende de la constante de integración — •18,21,27
- •No responde — •24

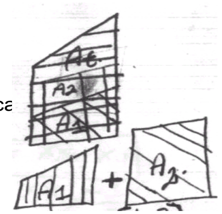
ANEXO 12

RED SISTÉMICA DE LOS CUESTIONARIOS DE CONOCIMIENTOS CC-1/CC-2. POR ESTUDIANTE PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

Estudiante GIE1/ CC-1

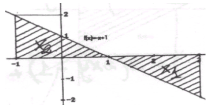
ÍTEM 1

- •Dibuja las tres regiones (trapecios) por separado
- •Opera con la expresión algebraica de las funciones
- •Justifica la igualdad con la “idea de Puzzle”
- •Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraica de las funciones (f(x)=g(x)+h(x))
- •Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica puntualmente la igualdad



ÍTEM 2

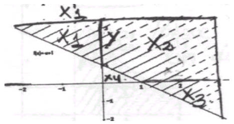
- •Trabaja sobre el gráfico dado
- •Identifica los dos triángulos



- •Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica
- •Calcula las áreas usando la fórmula

ÍTEM 3

- •Acota la región dibujando segmentos



- Calcula el área usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$
- •Afirma que $x_1 = \frac{-xy + x}{2}$ $\quad x_2 = yx - 1/2 \quad x_3 = y - xy$

$$A_t = x_1 + x_2 + x_3$$

ÍTEM 4a

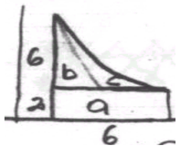
- •Trabaja sobre el gráfico dado

ÍTEM 4b

- •Calcula cotas más ajustadas

(ÍTEM 4a y 4b):

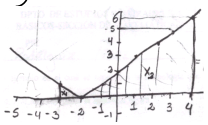
- •Dibuja un triángulo y un rectángulo



- •Calcula las áreas usando las fórmulas $A = \frac{b \cdot h}{2}$, $A = b \cdot h$
- •Justifica la cota inferior comparando con el rectángulo de área 12, y la cota superior comparando con la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo (área total=30)
- •Propone una mejor cota inferior con el área triángulo, igual a 18, y una mejor cota superior con la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo, igual 30.

ÍTEM 5

- •Representa gráficamente la función



- •Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos
- •Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y el valor del área con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$

ÍTEM 6

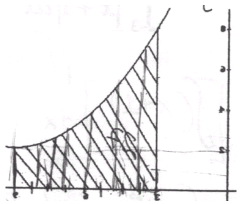
- •Afirma que la proposición es verdadera
- •Dibuja un diagrama

- •Escribe que x ≥ a o x ≤ b

ÍTEM 7

- •Afirma que la proposición es verdadera
- •Rescribe la proposición enunciada

<u>Estudiante GIE1/ CC-2</u>

ÍTEM 1	•Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad			
ÍTEM 2	•Calcula el área de la región que está en la parte superior (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales	•Antecede el signo negativo a la integral de la región bajo el eje OX		
ÍTEM 3	•Si es posible calcular el área	•Aplica la regla de Simpson y afirma que el área es igual a 2.82		
ÍTEM 4a	•Trabaja sobre el gráfico dado	•Dibuja siete rectángulos 	•Calcula las áreas usando aproximación numérica	•Justifica las cotas comparando con el área de A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8) [error en el cálculo del área de rectángulo]
ÍTEM 4b	•Calcula un valor del área aproximada		•Calcula el área usando aproximación numérica	•Afirma que el área aproximada es A=0.75(1+2+3+4+5+6+7+8)=27 [error en el cálculo del área de rectángulo
ÍTEM 5	•No representa gráficamente la función	•Define $\lvert x+1\rvert=\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ -x-1 & x<1\end{cases}$	•Calcula $\int_{-3}^{4}\lvert x+1\rvert dx = \int_{-3}^{4} x+1\,dx$	
ÍTEM 6	•Afirma que la proposición es verdadera	•Resuelve la integral de igual manera que la dada		
ÍTEM 7	•Afirma que la proposición es verdadera	•Compara integrales particulares	•De la comparación hecha, infiere que se cumple la tesis	
ÍTEM 8	•Afirma que la proposición es verdadera	•Da ejemplos particulares con funciones	•Asegura que f(x) ≥ g(x), calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados	

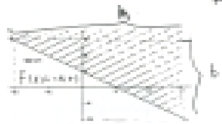
<u>Estudiante GIE2/ CC-1</u>

ÍTEM 1 | •No responde

ÍTEM 2 | •Trabaja sobre el gráfico dado | •Identifica los dos triángulos

| •Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica | •Calcula las áreas usando sus fórmulas

ÍTEM 3 | •Acota la región dibujando segmentos

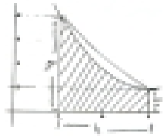


| •Calcula el área usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ | •No considera el resto de la región

ÍTEM 4a | •Trabaja sobre el gráfico dado

ÍTEM 4b | •Calcula un valor del área aproximada

} •Dibuja un trapecio



| •Justifica las dos cotas comparando con el área del trapecio igual a 30

•Afirma que el valor aproximado del área es 30

ÍTEM 5 | •La representación gráfica de la función es incorrecta

| •Sin especificar el procedimiento | •Dibuja dos triángulos, obtiene las medidas de los lados por inspección de la gráfica y el valor del área con las fórmulas $A = \frac{b \cdot h}{2}$

ÍTEM 6 | •Afirma que la proposición es verdadera

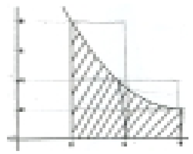
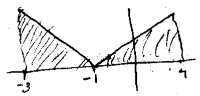
ÍTEM 7 | •Afirma que la proposición es verdadera

} •Dibuja un diagrama

| •Escribe A(*g(x),a,b) ≥ A(f(x)a,b) f(x) ≥ g(x)↔ g(x) ≥ f(x)*

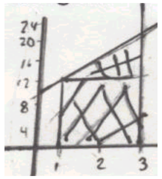
•Vuelve a escribir la proposición

Estudiante GIE2/ CC-2

ITEM 1	•Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad			
ITEM 2	•Calcula el área de las regiones (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales	•Antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX		
ITEM 3	•No es posible calcular el área	• La función no es continua en el intervalo		
ITEM 4a	•Trabaja sobre el gráfico dado	$\left.\right\}$ •Dibuja dos rectángulos superiores y dos inferiores		•Para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 18 y para la de los superiores, 36, y justifica las cotas
ITEM 4b	•Calcula un valor del área aproximada			•Calcula el promedio de área de los rectángulos inferiores y superiores igual a 27
ITEM 5	•Representa gráficamente la función 	•Define $\lvert x+1\rvert = \begin{cases} -x-1 & x<0 \\ x+1 & x\geq 0 \end{cases}$	•Calcula $\int_{-3}^{-1} - x - 1\,dx + \int_{-1}^{4} x + 1\,dx$	
ITEM 6	•Afirma que la proposición es falsa	•La función no es continua		
ITEM 7	•Afirma que la proposición es verdadera	•Compara integrales particulares	•Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica la tesis	
ITEM 8	•Afirma que la proposición es verdadera	•Calcula valores de las funciones y los compara, calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados		

Estudiante G2E1/ CC-1

ÍTEM 1
- •Dibuja las tres regiones (trapecios) por separado
- •Divide cada región en triángulos y rectángulos.



- •Calcula las áreas usando sus fórmulas y halla las alturas a partir de las expresiones algebraicas de las funciones
- •Suma las áreas y verifica la igualdad

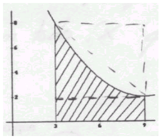
ÍTEM 2
- •Identifica los dos triángulos
- •Calcula la imagen de -1 y 3, y le aplica valor absoluto al resultado
- •Calcula las áreas usando sus fórmulas

ÍTEM 3
- •No es posible calcular el área de la región
- •Afirma que la región es infinita

ÍTEM 4a
- •Trabaja sobre el gráfico dado

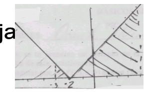
ÍTEM 4b
- •Calcula cotas más ajustadas

- •Dibuja un triángulo y un rectángulo



- •Calcula las áreas usando sus fórmulas
- •Justifica la cota inferior comparando con el rectángulo de área 12, y la cota superior comparando con la suma de las áreas del rectángulo y del triángulo (área total=30)
- •Propone una mejor cota superior con la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo igual a 30

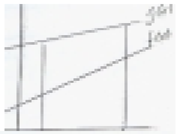
ÍTEM 5
- •Representa gráficamente la función
- •Define la función a trozos. Dibuja dos triángulos



- •Con la expresión algebraica de la función obtiene las medidas de los lados y el valor del área con la fórmula.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

ÍTEM 6
- •Afirma que la proposición es falsa
- •Representa gráficamente dos rectas y marca una región



- •Justifica rehaciendo la hipótesis A(*g(x),a,b)* ≥ *A(f(x)a,b)*

ÍTEM 7
- •Afirma que la proposición es verdadera
- •Representa gráficamente dos rectas y marca una región

- •Rescribe la proposición enunciada

Estudiante G2E1/ CC-2

ÍTEM 1 | •Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad

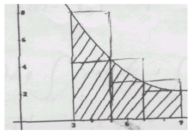
ÍTEM 2 | •Calcula el área de las regiones (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales | •Antecede el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX

ÍTEM 3 | •No es posible calcular el área | •Afirma que la función no esta definida en un punto x

ÍTEM 4a | •Trabaja sobre el gráfico dado

ÍTEM 4b | •Calcula un valor aproximado del área

•Dibuja tres rectángulos superiores y tres inferiores



•Calcula las áreas usando sus fórmulas

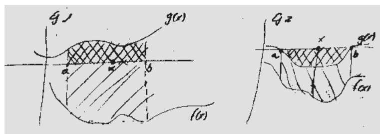
•Para la suma de las áreas de los rectángulos inferiores obtiene el valor 17 y para la de los superiores, 29, y no justifica las cotas

•Calcula el promedio de área de los rectángulos inferiores y superiores, que resulta igual a 23

ÍTEM 5 | •No representa gráficamente la función | •Define $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ | •Calcula $\int_{-3}^{-1} - x - 1\, dx + \int_{-1}^{0} x + 1\, dx + \int_{0}^{4} x + 1\, dx$

ÍTEM 6 | •Afirma que la proposición es verdadera | •Resuelve la integral de igual manera que la dada

ÍTEM 7 | •Afirma que la proposición es falsa | •Dibuja



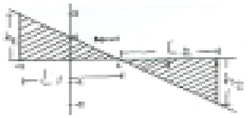
•Asegura que se cumple la hipótesis y no la tesis

ÍTEM 8 | •Afirma que la proposición es verdadera | •Rescribe la proposición enunciada

Estudiante G2E2/ CC-1

ÍTEM 1
- •Opera con la expresión algebraica de las funciones
  - •Verifica la igualdad sumando las expresiones algebraicas de las funciones (f(x)=g(x)+h(x))
  - •Evalúa las funciones en algún punto del dominio y verifica puntualmente la igualdad

ÍTEM 2
- •Trabaja sobre el gráfico dado

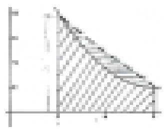


  - •Obtiene las medidas de los lados observando la gráfica y calcula las áreas usando la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$

ÍTEM 3
- •No es posible calcular el área de la región
  - •Afirma que el dominio no esta restringido

ÍTEM 4a

ÍTEM 4b
- •Trabaja sobre el gráfico dado y dibuja dos trapecios

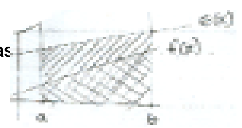


  - •Calcula las áreas usando sus fórmulas
    - •Justifica las dos cotas comparando con el área del trapecio de área igual a 30
    - •Afirma que el valor aproximado del área es 30

ÍTEM 5
- •Representa gráficamente la función

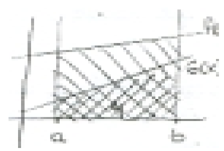
  - •Elabora tabla de valores usando la expresión algebraica de la función. Dibuja dos triángulos
    - •Obtiene las medidas de los lados por inspección de la gráfica y las áreas con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$

ÍTEM 6
- •Afirma que la proposición es falsa
  - •Representa gráficamente dos rectas y marca una región



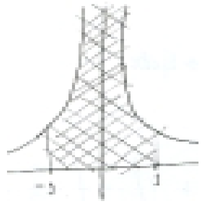
    - •Usa funciones lineales particulares y valores de estas y rehace la tesis *{f(x) ≥ g(x)}*

ÍTEM 7
- •Afirma que la proposición es verdadera
  - •Representa gráficamente dos rectas y marca una región



    - •Usa funciones lineales particulares y valores de estas para justificar.

<u>Estudiante G2E2/ CC-2</u>

ÍTEM 1	•Calcula las integrales por separado y verifica la igualdad			
ÍTEM 2	•Calcula el área de las regiones (sobre) y la parte inferior del eje OX (bajo) utilizando integrales	•No cambia el signo negativo a la integral de la región situada bajo el eje OX	• Suma las dos integrales sin cambiarle el signo a la integral de la región situada bajo el eje OX	
ÍTEM 3	•No es posible calcular el área	•La gráfica tiene una asíntota	•Plantea $\int_a^b x^{-2}\,dx$	•La calcula dividiendo [a, b] en [-1.8, 0], [0, 2.1] y obtiene infinito en ambos casos.
ÍTEM 4a	•No responde			
ÍTEM 4b	•Afirma que no se pueden dar valores más ajustados porque *no se conoce la función*			
ÍTEM 5	•No representa gráficamente la función	•Calcula $\int_{-3}^{4} \lvert x+1 \rvert dx = \int_{-3}^{4} x+1\,dx$	•Aplica valor absoluto al resultado	
ÍTEM 6	•Afirma que la proposición es falsa	•La gráfica tiene una asíntota vertical. Representa gráficamente la función		
ÍTEM 7	•Afirma que la proposición es verdadera	•Compara integrales particulares	•De la comparación hecha, infiere que se cumple la tesis	
ÍTEM 8	•Afirma que la proposición es verdadera	•Da ejemplos particulares con funciones	•Asegura que f(x) ≥ g(x), calcula las integrales en un intervalo y compara los resultados	

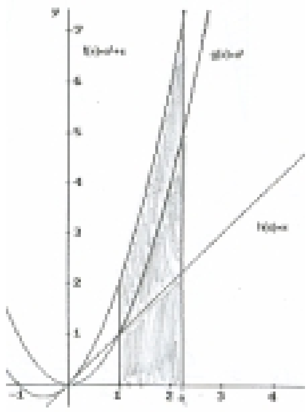
ANEXO 13

TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS SOBRE CONOCIMIENTOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA. PRIMERA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

ENTREVISTA AL ESTUDIANTE G1E1

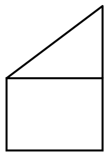
PREGUNTA 1

1. I: Le entrega el cuestionario le pregunta ¿Por qué consideras que cumple la igualdad?
2. E*: Integro estas dos* (se refiere a las integrales de la derecha de la igualdad) *y al sumarlas, supuestamente me va a dar ésta* (se refiere a la integral de la izquierda de la igualdad)
3. I*: Hazlo.*
4. E*: Escribe* $\left[x^2+x\right]_1^a = \int_1^a \frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}$ *y la calcula evaluando el primer miembro. Igualmente procede con las otras integrales*
5. E: *¿Puedo utilizar la calculadora?*
6. I: *Bueno.*
7. E*:* Utiliza la calculadora para realizar los cómputos de la evaluación de las integrales.
8. E: Al finalizar el cálculo de la última integral se da cuenta del error y lo corrige escribiendo $\int_1^a x^2+x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_1^a$ igualmente lo hace con las otras integrales. Escribe las expresiones algebraicas de las integrales de h y g, lo iguala a la suma de los cálculos que realizó y escribe que es igual a la integral de f. Escribe *"Demostrado"*
9. I: *Puedes explicar por qué se cumple la igualdad.*
10. E*: Ésta es f(x)* (usa el lápiz y recorre la curva) *ésta es g(x) y ésta h(x). (Pausa).*
11. I*: Puedes dar algunas razones del por qué se cumple la igualdad.*
12. E*: El área de g(x) es ésta, el área de h(x) es ésta* (señala las expresiones algebraicas de las integrales en la igualdad y los resultados que le ha dado, parece que se refiere a la curva y no a la región bajo ella)) *entonces si tenemos las dos áreas* (señala las curvas) *al sumar estas dos áreas nos va dar el área total de f(x).*
13. I: *¿Puedes dar una interpretación gráfica de esa igualdad?*
14. E*:* Usa el lápiz y recorre la curva de h y dice *"lo que quiere decir es que esta área"* (raya la región entre h y g), *"prácticamente no lo veo".*
15. I: *¿No lo ves?*
16. E*: Cuando usted pidió en el examen por medio de gráficos o de otra forma, yo agarré otra forma.*
17. I*: ¿Cómo explicarías usando gráficos?*
18. E*:* Usa el lápiz y recorre la curva de g. Raya la región entre la curva de h y g. Dice "*esta es el área entre h(x) y g(x)".* Recorre la curva de f. *Profesor el área de f(x) ¿hasta dónde llega?*
19. I*: Te recuerdo que la región es la porción desde el eje X hasta la curva.*
20. E*:* Raya la región entre la curva de g y la de f y expresa que "*ésta es la región de f".*
21. I: *¿Cuáles son las otras dos regiones?*
22. E*: Bajo g* (raya la región entre h y g) *bajo h* (raya la región bajo h).

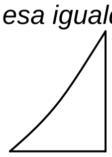
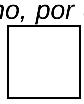


23. I*: Entonces dices que al sumar estos dos pedacitos* (se refiere a los de g y h) *te da el otro* (se refiere al de f) *¿no te parece ilógico?*
24. E*: Si.*

25. I: *¿Dónde consideras que está el problema? ¿O es una interpretación tuya o es el problema así?*
26. E*: Es una interpretación mía.*
27. I: *¿De dónde empieza la región de f y hasta dónde llega?*
28. E*: Éste es como el ejercicio que usted nos dio en cálculo de área* (dibuja una figura rectangular y le dibuja una triangular sobre ella) *ése si lo vi, porque ese fue un pedacito que era así y el otro era algo así y lo colocaba los dos y me daba, pero éste no lo veo.*



Bosquejo.

29. I: *Pero no puedes determinar desde dónde empieza la región de f? Empecemos por cada una.*
30. E: *¡Ah ya entendí! El área de f es todo, el de f es de aquí para allá* (señala desde la curva de f hasta el eje X). Luego señala las otras regiones.
31. I*: ¿Qué relación estableces para ver si se cumple esa igualdad?*
32. E*: Bueno, por decir ésta es el área de g* (dibuja  bosquejo) *ésta es el área de h* (dibuja  bosquejo) *la suma de estas dos áreas me dará el área de f(x). Este pedacito con éste me da éste* (señala en la gráfica dada la relación y la gráfica que dibuja)

33. I*: ¿Puedes dar una interpretación numérica sin usar las integrales?*
34. E*: Sumo las dos funciones.*
35. I*: Sin usar integrales puedes explicar que esa igualdad se cumple. Numéricamente*
36. E*: ¿Puedo utilizar rectángulos?*
37. I*: Puedes usar lo que quieras*
38. E*: Por decir de 1 a 2* (marca sobre el eje OX como haciendo subdivisiones) *lo divido en 5.*
39. I: *¿5 qué?*
40. E*: El "a, b" lo divido en 5, para formar rectángulos.*
41. I: *¿Y después qué haces con esos rectángulos?*
42. E*: La base me da 0,5. Veo 0,5 por 2, base por altura* (señala el eje OX y recorre con el lápiz hasta la curva de g) *0,5 por 3; 0,5 por 4; 0,5 por 5, los sumo y ya tengo un área aproximada.*
43. I: *¿Qué harías con los otros dos?*
44. E*: Igualito también.*
45. I*: ¿Y después que harías?*
46. E*: Lo sumo, por ejemplo 10* (señala la región de h) *y luego hago con el otro hasta arriba* (señala la región de g) *la suma de estos dos me dará aproximado* (señala la región de f).

PREGUNTA 2

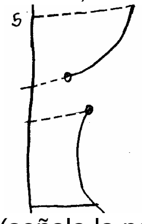
47. I: *En ese ítem ¿qué relación puedes establecer entre el área bajo el eje OX y la integral definida?*
48. E: *La gráfica de la función es ésta* (recorre con el lápiz la curva) *lo que pasa es que ésto está fuera de la gráfica de la función* (se refiere a la región bajo el eje OX y sobre la curva)
49. I*: ¿Esta limitada?*
50. E*: Si se puede calcular. Igualito a lo que hicimos en el anterior.*
51. I: *¿Qué relación puedes establecer entre el área bajo el eje OX y la integral definida?*
52. E*:* Pausa*.*
53. I*: ¿Se puede calcular esa área?*

54. E*: Sí.*
55. I: *¿De qué manera la puedes calcular?*
56. E*: En el examen calculé el área de ésto* (señala la región sobre el eje OX) se queda por unos segundos indicando con el lápiz la intersección de la curva con el eje OX e indica la región bajo el eje OX.
57. I: *¿Qué usaste para calcular esa área*? (se refiere a la región bajo el eje OX).
58. E*: Aquí puedo utilizar el mismo método.*
59. I: *¿Cuál?*
60. E*: El de rectángulos.*
61. I*: ¿Integrales no puedes usar?*
62. E*: Pero ésta no* (señala la expresión algebraica de la función).
63. I: *¿Por qué?*
64. E: *Porque está fuera de la gráfica.*
65. I*: ¿Por qué dices que está fuera de la gráfica? Porque la región rayada ya está limitada. ¿Cuál es la región?*
66. E*: Ésta* (señala la región sobre el eje OX)
67. I*: ¿Y la otra no?*
68. E*: Bueno sí.*
69. I: *¿De dónde a dónde iría la integral?*
70. E*: De 2 a b* (se refiere a un letra que ha escrito como extremo derecho del intervalo para la región bajo el eje X)
71. I*: ¿Se puede calcular esa integral?*
72. E*: Sí.*
73. I*: ¿Qué relación hay entre esa integral y el área? ¿Significa lo mismo? ¿O no se puede decir que el área es igual a esa integral?*
74. E*: ¿El área?*
75. I: *¿Él área será igual al valor de la integral en ese intervalo?*
76. E: *Sí.*
77. I: *¿Qué signo tendría la integral?*
78. E: *Las áreas no tienen signo. Cómo puedo decir que un área es negativa.*
79. I: *El área ¿qué es? ¿un número, un objeto? ¿qué es para ti un área?*
80. E: *Un área en un número, un espacio* (mueve el lápiz como demarcando una región).
81. I: *¿El espacio o un número?*
82. E*: El espacio que existe entre dos extremos.*
83. I*: Cuando te dicen calcula el área ¿qué haces? ¿dibujas el área rayada o le asignas un número?*
84. E*: Yo la dibujo.*
85. I: *¿Y eso sería el cálculo del área?*
86. E*: La dibujo y si no me dan datos, le coloco que si x o x por la altura o un triángulo.*
87. I*: Cuando te dicen calcula el área de un triángulo, un cuadrado, ¿Qué hacías?*
88. E*:* Dibuja un triángulo.
89. I: *La figurita nada más ¿No le asignaban un número?*
90. E: *Sí.*
91. I*: ¿Qué es el área? ¿El dibujo representa el área o y número representa el área?*
92. E*: El número.*
93. I*: El dibujo ¿qué papel juega?*
94. E: *El dibujo es como ayudarse para el cálculo.*
95. I: *Entonces ¿qué es el área, el dibujo o el número?*
96. E*: El número.*
97. I: *¿Y la figura es representativa…?*
98. E*: De ese número*
99. I*: Volvamos al problema.*
100. E*: ¿Qué relación habría entre el área y la integral definida?* (se refiere a la región bajo el eje OX)
101. E: Risas*.*
102. I: *El área es un número ¿Y la integral qué es?*
103. E*: Un número.*
104. I: *¿Qué relación hay entre ese número dado por la integral y el que puedes calcular del área?*
105. E*: Que si son iguales es el área.*

106. I: *¿Esa integral que signo tendría?*
107. E*: Positivo.*
108. I: *¿Bajo el eje OX?*
109. E: *Si, porque ella dará negativa.*
110. I: *¿La integral o el área?*
111. E*: La integral va dar negativa. Pero la integral es el área.*
112. I*: ¿El área es positiva o negativa?*
113. E: *Positiva.*
114. I: *¿Qué harías tú para que dando la integral negativa, diera el área esa? Parece que hay una contradicción, que la integral sea negativa y el área que da positiva. ¿Qué harías para que dé positiva?*
115. E*:* Se queda unos segundos pensando y dice *¡no sé profesor! Se sobreentiende que si es área va a dar positiva.*
116. I: *¿Qué modificación le harías a ese proceso para que te de positivo?*
117. E*: No utilizando los signos. No sé, multiplicando por -1 a ambos lados (señala un -20= 20 que ha escrito)*
118. I*: ¿A quién multiplicarías por -1?*
119. E*: De todas maneras me dará lo mismo.*
120. I: *¿A ambos lados de qué?*
121. E*: No sé, no lo veo.*

PREGUNTA 3.

122. I: *¿Qué dice ahí?*
123. E*: Calcule el área rayada, si no es posible explicar por qué.*
124. I*: ¿Se puede calcular el área?*
125. E*: Lo que pasa es que va para infinito* (raya con el lápiz prolongado la gráfica en la parte superior)
126. I: *¿En qué afecta el hecho que sea infinito?*
127. E: *Que no tenemos límite hasta dónde la vamos a calcular.*
128. I: *¿Qué otro cosa puede estar fallando allí?*
129. E*: Yo puedo decir, lo hago por rectángulos* (mueve el lápiz sobre la gráfica como si quisiera dibujar rectángulos) sí, *pero cuando llegué aquí* (mueve el lápiz acercándose al eje OY y prolongando hacia arriba) *hasta dónde.*
130. I: *¿Qué condiciones debe cumplir esa curva para que se pueda calcular ésa área?*
131. E*: Que tenga que decir, límite, algo que me diga de dónde hasta dónde* (traza un segmento en la parte superior de la gráfica). *Porque yo puedo decir de -2 a 0 y de 0 a 2 pero no me limita* (señala la parte superior de la gráfica).
132. I: *¿Esa función es continua?*
133. E*: Ella es continua.*
134. I*: ¿Sí?*
135. E*: Ah, no, es discontinua.*
136. I: *¿En dónde?*
137. E*: Aquí* (señala con el lápiz la parte superior de la gráfica).
138. I*: ¿La discontinuidad no se establece con los valores de x? ¿En dónde sería discontinua?*
139. E*: Es discontinua de -1 hasta 1.*
140. I: *Puede ser en algún valor o hay un valor específico.*
141. E*: El cero* (mueve el lápiz de abajo hacia arriba cerca del eje OY)
142. I*: ¿Si tengo una función discontinua le puedo calcular el área?*
143. E*: Sí.*
144. I*: ¿Cómo?*
145. E: *Por ejemplo, si esto fuera una curva así,* dibuja

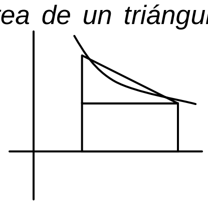


Es discontinua, pero me dan el límite (señala la parte superior de la gráfica).

146. I*: ¿Cuál es el problema que tenemos en esta gráfica?* (se refiere a la gráfica dada).
147. E*: Que no tenemos una línea horizontal.* (señala la parte superior de la gráfica dada)

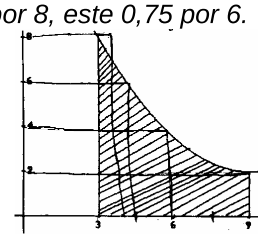
PREGUNTA 4

148. I: *El área sombreada es mayor que 12 y menor que 48 ¿Por qué?*
149. E: *Primero no tengo ecuación, no tengo función, no tengo nada. Tengo la altura y la base.*
150. I: *¿Es importante tener la función para calcular el área? ¿Es indispensable?*
151. E: *No.*
152. *I*: *¿Qué razones puedes dar para justificar que el área es mayor que 12 y menor que 48?*
153. E*: Por decir aquí* (marca con el lápiz punto sobre el eje OX dividiendo en porciones el segmento), *yo lo puedo dividir en rectángulos, muchos rectángulos* (mueve el lápiz de abajo hacia arriba).
154. I: *¿Y qué más?*
155. E*: ¿Lo puedo dividir en rectángulos?*
156. I*: ¿Puedes hacer lo que quieras?*
157. E*: Lo que pasa con éste, es que los rectángulos dan más precisión. Se pueden hacer de varias formas.*
158. I: *¿Cuáles?*
159. E: *Yo tengo el área de un rectángulo que 6 por 2 y aquí está el área de un triángulo*



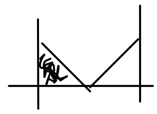
(mueve el lápiz indicado el rectángulo y el triángulo que sería como esto bosquejo) *y los sumo y eso me dará aproximadamente el área total. Utilizando el argumento que dio en clase, lo hacemos por rectángulos. De 3 a 9* (se refiere al eje OX) *aquí hay seis o cuatro; por decir 20 rectángulos. Cuatro rectángulos* (marca con el lápiz punto en el segmento sobre el eje OX)

160. I: *¿Qué razones puedes decir de por qué está entre 12 y 48?*
161. E*: Bueno, 6 por 2 es 12, que es el área de este cuadrado* (dibuja el rectángulo que se ve en la figura anterior) *y esta misma base que sería 6 por 6 que es 36 entre dos, que es el área de este triángulo* (Se refiere al triángulo que se ve en la figura anterior). *Si es menor que 48 porque al sumar el área de ésta* (se refiere al rectángulo) *más el área del triángulo.*
162. I*: ¿De qué manera pudieras dar un valor más aproximado?*
163. E*: ¿Puedo utilizar puntos medios* (se refiere a rectángulos puntos medios).
164. I: *¿Cómo lo harías?*
165. E*: Yo, particularmente lo haría con rectángulos. Dividiría esto* (dibuja un rectángulo superior) e*n ocho rectángulos* (usa la calculadora) *0,75 cada base del rectángulo. La imagen de 3 es 8*, (lo calcula por inspección de la gráfica y dibuja cada rectángulo) *la imagen de 6 es 4,5, la imagen de 4 es 6, la imagen de 2 es 9* (confunde los valores de y con lo de x)*. Aproximaría, 0,75 por 8, este 0,75 por 6.*



166. I*: Mejor explícame el procedimiento.*
167. E*: La base la voy a dividir en cuatro partes. Entonces la base es seis, la divido en cuatro y me da 1,5 que es la base de cada rectángulo* (indica en el eje x con el lápiz) *luego multiplico la base por la altura.*
168. I*: ¿Y eso te da subestimación, sobrestimación?*
169. E*: Subestimación.*
170. I: *¿Y qué extremo del intervalo estas tomando?*
171. E*: El derecho.*
172. I*: ¿Y eso te serviría para encontrar un valor más exacto?*
173. E*: Sí.*
174. I: *¿Existe una forma de hacerlo más exacto que los rectángulos?*
175. E*: Sí, el trapecio.*
176. I: *¿Y hay otra forma?*
177. E*: Sí, Simpson.*

PREGUNTA 5
178. I*: ¿Puedes leer el ejercicio?*
179. E*: Calcular la integral definida entre -3 y 4 del valor absoluto de x más 1.*
180. I*: ¿De qué manera lo calcularías?*
181. E*: Y si lo dejamos y pasamos a otro.*
182. I*: Trata de hacerlo.*



-3 0 4

183. E*:* (Dibuja bosquejo) *vamos a calcula el área de ésta* (raya una de la regiones)
184. I*: ¿Esa gráfica esta bien hecha?*
185. E: *Nooo, es como para visualizar.*
186. I: *¿Se puede hacer una integral así como ésta?*
187. E*: Hay que separarlas en dos.*
188. I: *¿Y dónde estaría el corte de una integral con la otra?*
189. E*: De menos infinito hasta -3 y de -3 a 4.*
190. I*: ¿Cómo que desde menos infinito?*
191. E*: No. Si x es menor que menos 3 y si x es mayor que 4. Escribe*

$$\begin{cases} -(x+1) & si \quad x<-3 \\ x+1 & si \quad x>4 \end{cases}$$

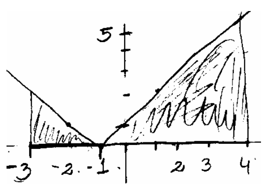
192. I: *¿Puedes hacer la gráfica con más precisión de esa función valor absoluto?*
193. E: Elabora una tabla de valores

x	*y*
-3	
-1	
0	
1	

Profe. Pero ésta es la integral (señala la integral) *para sustituirlo necesito hacerlo aquí* (se refiere al integrando) *o en la función que escribí* (se refiere a la expresión escrita de forma a trozos*) por decir -2 lo sustituyo aquí* (se refiere al integrando)
194. I: *¿Sobre qué función se esta integrando?*
195. E: *Ésta* (se refiere al integrando)
196. I: *Entonces ¿Dónde debes sustituir?*
197. E: Sustituye en el integrando y completa la tabla de valores

x	*y*
-3	1
-1	0
0	1
1	2

Trata de graficar y no sabe dónde colocar el punto angular, al parecer cree que va en el origen. El entrevistador le hace ver el error y finalmente grafica correctamente la función.
198. I*: ¿Hasta dónde vamos a calcular el área?*
199. E*: De -3 hasta 4. Dibuja dos triángulos*



200. I: *¿De alguna manera se puede calcular esa integral viendo la gráfica?*
201. E*: Calcula el área de éste* (se refiere a la región a la izquierda) *y el área de ésta* (se refiere a la región a la derecha).
202. I: *¿Qué figuras son esas?*
203. E*: Triángulos.*

204. I: *¿No puedes calcular?*
205. E*: ¿Por triángulos?*
206. I: Completa la tabla estimando las imágenes de -3 y 4 usando la gráfica que ha elaborado. Luego escribe $A_1 = \frac{2.2}{2} = 2$ $\quad A_2 = \frac{5.5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$ $\quad \mathrm{A} \quad \mathrm{total} \; 12{,}5 + 2 = 14{,}5$ *Sumo las dos áreas y eso me da el área total.*
207. I*: ¿Esa área es equivalente al resultado de esa integral?*
208. E*: Exactamente no.*
209. I*: ¿Por qué dices que no es exacta?*
210. E*: Si es igual, porque no utilizamos decimales.*
211. I: *¿Consideras que está bien escrita la función valor absoluto de manera a trozos? Fíjate en la gráfica y lo que tienes definido. ¿Concuerda la gráfica con lo que tienes escrito?*
212. E*: No.*
213. I: *¿Dónde esta el error?*
214. E*: No sé.*
215. I*: ¿Te acuerdas de la definición de la función valor absoluto?*
216. E*: "No".* Se queda pensando por unos segundos y dice *"¿así profesor?"* Escribe

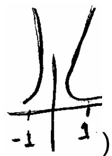
$$\begin{cases} -(x+1) & x < -1 \\ (x+1) & x > -1 \end{cases}$$

217. I*: Pudieras plantear la integral una vez que has definido la función.*
218. E*: Sí.*
219. I: *Escríbela.*
220. E*:* Plantea las dos integrales $\int_{-3}^{-1} -(x+1)dx$

$$\int_{-1}^{4}(x+1)dx$$

221. I: *Las haces separadas ¿Y después que haces?*
222. E*: Las sumo y me va dar aproximado a esto* (se refiere a 14,5 que es el resultado que calculó con los triángulos).

PREGUNTA 6.
223. I*: Indica si es verdadero o falso el razonamiento que tienes ahí.*
224. E*: Chequea los cálculos que se le dan. Es verdadero.*
225. I*: ¿Es verdadero? ¿Por qué?*
226. E*: No, es falso.*
227. I*: ¿Por qué?*
228. E*: Vuelve a calcular la integral. Sí, si es verdadero.*
229. I*: Tú basas tu justificación en los cálculos que has hecho. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que de ese resultado?*
230. E: *Que sea derivable en ese intervalo.*
231. I*: ¿Qué condiciones debe tener la función?*
232. E*: Que sea continua.*
233. I*: ¿En dónde no es continua?*
234. E*: Ella no es continua, porque va ha dar como la anterior*

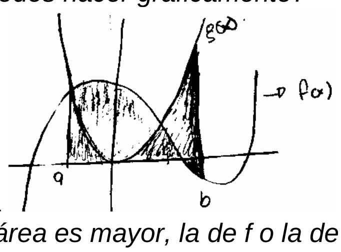
(dibuja 

)

235. I*: ¿Qué razones tienes para decir ahora que no se puede calcular?*
236. E*: Si se puede hacer.*
237. I*: Si se puede hacer. ¿A pesar de que es negativo y la gráfica de esa función es ésa?* (Se refiere a la que ha hecho el estudiante)
238. E*: Porque cuando uno resuelve una integral en un intervalo es porque dará un área.*
239. I: *¿La integral puede dar negativa?*
240. E*: No* (Observa el desarrollo de la integral)
241. I: *¿No puede dar negativa la integral?*

242. E*: Antes de esto tenemos que multiplicarlo por...*
243. I*: Una cosa es la integral y otra cosa es el área. ¿Sí o no?*
244. E*: Sí*
245. I*: Ahora, ¿La integral puede dar negativa?*
246. E*: La integral sí pero el área no.*
247. I*: Entonces ¿cuál es el problema de esa integral?*
248. E*: Esta integral está bien sacada. No tiene error.*
249. I: *¿Sí?*
250. E*: La integral está bien así* (señala el procedimiento) *pero como no es continua, es falso.*
251. I: *¿Por qué?*
252. E: *Marca en la gráfica que hizo el -1 y el 1 en el eje x, prolonga con el lápiz la curva hacia arriba. Por lo veo aquí es falso.*
253. I*: ¿La integral?*
254. E*: No, esta bien resuelta. El razonamiento, cómo le digo.*
255. I*: ¿Hay un error en el razonamiento?*
256. E*: Que la función no es continua.*

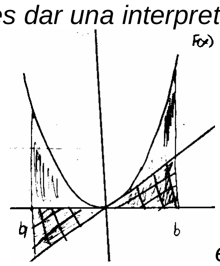
PREGUNTA 7

257. I*: ¿Qué es lo que dice?*
258. E: *Indicar si es verdadero o falso que si la integral de "a" hasta "b" de f(x) dx es mayor o igual, uuuh,* (pausa)
259. I: *¿Esa proposición es verdadera o falsa?*
260. E*: Profesor, sería que lo puedo hacer usando las funciones, si yo digo que* $f(x)=x^2+x+1$ *y* $g(x)=x+2$
261. I: *Primero tienes que decirme si para ti eso es verdadero o es falso.*
262. E: (indica la proposición con el lápiz) *¡es falso!*
263. I: *¿Por qué?*
264. E: *La integral de esta ecuación, esta función* (señala a f(x) en la tesis y la primera integral en la hipótesis de la proposición) *y también integro ésta* (señala a g(x) en la tesis y la primera integral en la hipótesis de la proposición)
265. I: *¿Qué dice ahí?* (se refiere a la proposición)
266. E*: Indique si es verdadero o falso que si la integral de "a" hasta "b" de f(x) dx es mayor o igual que la integral de "a" hasta "b" de g(x) dx entonces f(x) es mayor o igual que g(x) para todo x que pertenece al intervalo "a, b".*
267. I: *¿Tú dices que es falso? ¿Por qué?*
268. E*:* Se queda unos segundos pensando.
269. I: *Puedes dar algún ejemplo geométrico o numérico.*
270. E*: Así* (utiliza las funciones que definió, calcula dos integrales entre 0 y 1 y le da para la de f 11/6 y para la de g 5/2) (utiliza la calculadora para realizar los cómputos) *quiere decir que 11/6 es menor que 5/2 y aquí es todo lo contrario* (se refiere a la tesis de la proposición).
271. I*: ¿Lo puedes hacer gráficamente?*
272. E*:* Dibuja 
273. I*: ¿Cuál área es mayor, la de f o la de g?*
274. E*: La de f.*
275. I*: ¿Y las imágenes? ¿La de g es mayor o menor que la de f en ese intervalo?*
276. E*: Las imágenes, son mayores las de g.*
277. I*: ¿Entonces de cumple o no se cumple?*
278. E*: Entonces si se cumple.*
279. I*: ¿Se cumple aquello que tienes arriba?* (se refiere a la proposición)
280. I*: Tú dijiste que era falso y ese es el ejemplo de que es falso. Entonces ¿Esa gráfica cumple con lo que esta arriba o no?*
281. E: *Cumple con lo que está arriba.*
282. I: *¿Cumple?*

283. I*: ¿Entonces la imagen de f es mayor que la de g allí?*
284. E*: No.*

PREGUNTA 8

285. I: *¿Eso es cierto o falso?*
286. E*: Aquí no me dan el intervalo.*
287. I*: ¿Es importante que den el intervalo para den una respuesta en ese ejercicio?*
288. E*: Porque aquí puedo meter cualquier número.*
289. I*: ¿Qué dice ahí?*
290. E*: Si f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral de f(x) en "a" "b" es mayor que la de g(x) en "a" "b"*
291. I: *¿Tú dices que eso es verdadero o falso?*
292. E: *Éste también es falso.*
293. I: *¿Qué razones tienes para decir que es falso?*
294. E*: Porque si yo digo, si hago lo mismo, la misma gráfica* (mueve el lápiz como simulando una curva, tal vez se refiere a lo que hizo en pregunta 7) (se queda por segundos observando la proposición)
295. I: *¿Puedes dar algún ejemplo?*
296. E*: Lo puedo hacer por el mismo método que apliqué en el anterior.*
297. I: *Bueno.*
298. E*: Escribe las funciones* $f(x)=x+1 \quad g(x)=x-1$ *calcula las integrales entre 1 y 2 y le da como resultado 3/2 y -1/2 respectivamente* (usa la calculadora para hacer los cómputos*). Sí es verdadero.*
299. I*: ¿Puedes dar una interpretación gráfica?*

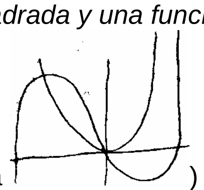


300. E: Dibuja *ésta es f(x) y ésta es g(x), en el intervalo es el área de f(x)* (raya la región f) *ésta es la de g(x)* (raya la región de g) *el área de f(x) es mayor.*
301. I: *Pero ¿qué dice primero el enunciado?*
302. E*: Las imágenes.*
303. I: *¿Qué pasa con las imágenes?*
304. E*: Las imágenes de f(x) son mayores.*
305. I: *¿Entonces se cumple la tesis?*
306. E: *Se cumple, sí. El área de f(x) que el área de g(x).*

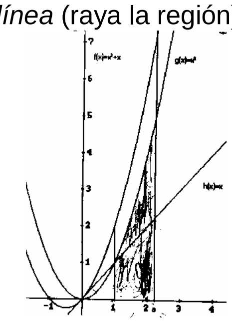
ENTREVISTA AL ESTUDIANTE G1E2.

PREGUNTA 1

1. I*: En la pregunta 1 dice que expliques por medio de gráficos o de otra forma por qué se cumple esa igualdad.*
2. E*: La función f(x)* (indica con el lápiz el integrado de la integral del lado izquierdo de la igualdad) *es una función compuesta por g(x) y h(x) y la integral de esa función* (se refiere a la integral de f) *que va de 1 a "a" es igual a las otras integrales, como yo le dije, esa función está compuesta por las dos y las dos están siendo evaluadas en el mismo intervalo.*
3. I: *¿Se te ocurre otra forma de justificar esa igualdad?*
4. E: *No.*
5. I: *¿Puedes dar una justificación gráfica de la igualdad de las integrales?*
6. E*:* (Recorre con el lápiz las gráficas) *Puede ser.*
7. I: *¿Me lo puedes explicar?*
8. E*: Habría que tomar una cantidad de gráficos. Pero, tratando de ver si se cumple la igualdad. En ese caso se utilizaría DERIVE.*
9. I: *Supón que no tienes DERIVE. ¿De qué forma puedes establecer la igualdad de las integrales, de manera gráfica?*
10. E*: Suponga que tenga una función cuadrada y una función cúbica*

(dibuja )

11. I: *Pero en este caso tienes éstas que están debajo* (se refiere a las dadas).
12. E*: El área de la función cuadrada* (se refiere a la gráfica de g)(indica con el lápiz la curva de g y la expresión algebraica de g) *más el área de la función x* (indica la expresión algebraica de h) *tiene que ser igual a estas dos* (indica con el lápiz la expresión algebraica de f).
13. I*: ¿No se te ocurre cómo usar algún tipo de gráfico para dar una interpretación de esa igualdad?*
14. E*: S*e queda por segundos observando la gráfica.
15. I*: ¿Me puedes indicar cuáles son las áreas de f, g y h?*
16. E*: La de g(x) va aquí abajo* (se refiere a la región bajo g) *de 1 a "a"* (se refiere al segmento en el eje X)(raya la región)
17. I*: ¿Y la de h?*
18. E*: Es la que de 1 a "a" bajo esta línea* (raya la región).



19. I*: ¿Y la de f?*
20. E*: Del intervalo 1 a "a", esta parte* (se refiere a la región entre g y h) *más esta parte* (se refiere a la región bajo h).
21. I*: ¿La de f llega hasta la parte rayada?*
22. E*: Sí, toda la parte rayada. La suma de estas dos* (se refiere a la región de h y la g).
23. I: *¿No te se ocurre cómo hacerlo?*
24. E*: ¿Un trapecio?*
25. I*: No sé.*
26. E*: Una parte, tomando una base mayor y una base menor por la altura* (se refiere al trapecio que forma la región bajo h).
27. I*: ¿Y eso que relación tiene con las otras?*
28. E: *Esto es parte de la integral, o sea visualicé la parte. La parte que acabo de ver se ve como un trapecio* (se refiere al trapecio que forma la región bajo h).
29. I*: ¿Qué relación tiene el trapecio con el resto de las áreas?*
30. E*: Deben tener la misma área.*

31. I: *Ahora, ¿Qué justificación numérica darías para esa igualdad?*
32. E: *Esa área sería como un "A" que esta compuesto por "B" más "C"* (escribe A=B+C) *puedo llamar a cualquiera B y el otro C* (escribe en la gráfica "B"en la región entre g y h y "C"en la región de h).

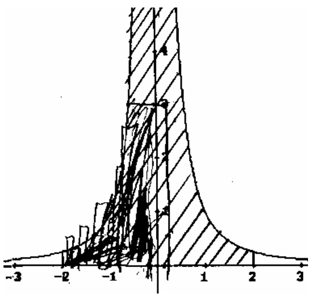
PREGUNTA 2

33. I: *¿Puedes leer lo que dice?*
34. E*: Calcular el área rayada, si no es posible explicar por qué.*
35. I: *¿Qué es lo que hay que hacer ahí?*
36. E*: Tenemos una parábola que es cóncava hacia abajo, en donde nos dicen que calculemos el área de la parte rayada. Una parte es positiva, que esta sobre el eje OX y la otra es negativa que se encuentra debajo.*
37. I*: ¿Y qué relación puedes establecer entre el área bajo el eje OX y la integral definida?*
38. E*: El área bajo el eje OX sería una integral negativa.*
39. I*: ¿Y el área es negativa o es positiva?*
40. E*: En área es positiva.*
41. I: *¿Qué harías para resolver el problema? Ya que estás diciendo que la integral es negativa.*
42. E: *Restaría el área de arriba menos el área de abajo.*
43. I: *¿Cuáles son esas áreas?*
44. E*: El área de arriba es la que esta comprendida en el intervalo 0 a 2* (señala con el lápiz la región sobre el eje OX) *y la de abajo la que esta comprendida entre 2 a 3,7* (señala con el lápiz la región bajo el eje OX)
45. I*: Con respecto a las integrales ¿Cómo sería?*
46. E*: Si nosotros evaluamos la integral para calcular un área debe dar positiva.*
47. I: *Por ejemplo, Tú calculas la integral de la parte de arriba y la parte de abajo y te da un número, vamos a decir que uno te da 16 y el otro te da*
48. E*: Menos 8* (escribe -8)
49. I*: Okey, entonces tú restas esas cantidades y te da el área total.*
50. E*: Tomando el área de arriba, restándole la parte de abajo. O sea, la de arriba menos la de abajo me da positivo.*
51. I: *¿Qué restas, el área o las integrales?*
52. E: *Las integrales.*
53. I*: Ya.*
54. E*: La integral de arriba menos la integral de abajo.*
55. I: *¿Tienes alguna idea de por qué esa integral te da negativa?*
56. E*: Porque está por debajo del eje OX.*
57. I: *¿Quién está por debajo de OX? ¿La integral?*
58. E*: La integral que va de 2 a 3,7.*

PREGUNTA 3

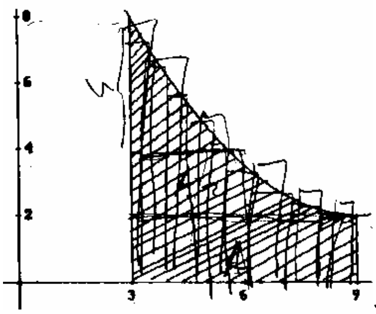
59. I*: ¿Me puedes leer lo que dice?*
60. E*: Calcular el área rayada. Si no es posible explicar por qué:*
61. I: *¿Consideras que se puede calcular el área?*
62. E*: Primeramente tomaría este intervalo de aquí a aquí* (señala con el lápiz el intervalo de -2 a 0) (Pausa). *Podría tomar rectángulos superiores e inferiores de esa parte para tener una aproximación de esa área* (mueve el lápiz sobre la región como simulando rectángulos).
63. I: *¿Consideras que esa área la puedes calcular?*
64. E*: Rectángulos inferiores y superiores y si tuviese la función que me define la gráfica, se podría calcular.*
65. I*: ¿Es indispensable tener la función para calcular el área?*
66. E*: Para utilizar integrales, sí.*
67. I*: A parte de integrales, ¿Habría otro forma de calcularla, auque no tengamos la expresión de la función?*
68. E: (Se queda pensando por unos segundos) *Sería como calcular el área de cierta cantidad de triángulos* (recorre con el lápiz las líneas de la región rayada).
69. I*: ¿Qué significa para ti esas rayitas que están allí*? (se refiere a las líneas que están en la parte superior de la gráfica).
70. E*: Esto me dice que esto tiende a un número muy grande. Pero para calcular el área, la base se podría hacer como un intervalo.*

71. I: *¿Hasta dónde?*
72. E: *Un intervalo abierto. Puede ser desde -2 hasta acercarse a cero* (marca con el lápiz puntos cerca del origen).
73. I: *¿Y que sucede en cero?*
74. E: *La gráfica va tendiendo a infinito.*
75. I*: ¿Qué condiciones debe tener la gráfica para que le puedas calcular el área?*
76. E*: Ser continua.*
77. I*: ¿Y qué más?*
78. E*: Ser continua y derivable.*
79. I: *¿Y esta función es continua?*
80. E: *No.*
81. I: *¿Le puedes calcular el área?*
82. E: *Tomando un intervalo en donde el punto de discontinuidad se excluya.*
83. I*: ¿Cuál sería el procedimiento para calcularla?*
84. E*: Tomaría hasta aquí, esta parte aquí* (marca con el lápiz un pequeño segmento vertical antes del origen y otro después del origen) *y supongamos esta parte* (se refiere a la parte a la izquierda del eje X) *me dé hasta 3* (se refiere a un valor en el eje Y) *entonces el área sería toda esta parte* (raya parte de la región a la izquierda del eje OY y que no llega al eje OY).
85. I: *¿Qué figuras usarías para hacer ese trabajo?*
86. E*: Rectángulos. Para tener una aproximación de esa área, tomaría rectángulos superiores y rectángulos inferiores* (dibuja varios rectángulos sobre la región que ha rayado).

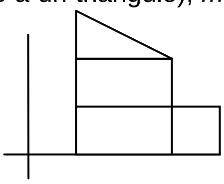


87. I*: ¿Hasta dónde?*
88. E*: Hasta el intervalo antes señalado* (se refiere al intervalo desde -2 hasta cerca de cero).
89. I: *¿Y del otro lado que harías?*
90. E: *Yo sé que estas dos gráficas tienen simetría, yo podría multiplicarlo por dos.*

PREGUNTA 4

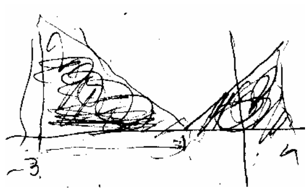
91. I: *¿Por qué el área esta entre 12 y 48?*
92. E*: Podría utilizar rectángulos inferiores y superiores. Si utilizo rectángulos superiores me daría mayor que 12 y menor que 48 y utilizando rectángulos inferiores también.*
93. I: *¿Puedes dibujarlos?*
94. E*: Sí.* Dibuja  *Serían los rectángulos superiores y estos serían los rectángulos inferiores* (dibuja los dos tipos de rectángulos sobre la gráfica). *También puedo utilizar la regla de Simpson o la del trapecio, si conociera la función.*
95. I*: Hasta el momento has dibujado rectángulos, ¿Cómo aseguras que eso esta entre 12 y 48, nada más dibujando esos rectángulos?*
96. E: *Cada segmento del eje OX me representa un número* (indica con el lápiz el eje OX) *y el eje vertical me representa otro* (indica con el lápiz el eje OY) *yo puedo decir que 3 a 8 es un valor* (parece que se refiere al primer rectángulo) *y a partir de esos valores los puedo utilizar para definir un área* (puede que se refiera a las áreas de los otros rectángulos). *Eso*

me da una ligera idea de la ley que lleva la función (puede que se refiera a una especie de construcción progresiva de rectángulos) *tomando la distancia de este segmento* (indica con el lápiz el segmento entre 3 y 9 en el eje OX) *pudiera utilizar sumatoria.*

97. I: *¿De que manera?*
98. E: *Dividiría el intervalo entre un número, luego utilizaría estos valores* (indica con el lápiz el eje OY), *por eso me daría una aproximación de esa área.*
99. I*: ¿Puedes hacer alguna?*
100. E*: Tomaría* $\Delta x = \frac{9-3}{3} = 2$ *luego tomaré* (estima por inspección de la gráfica los valores de Y) *sumatoria* (escribe $\sum_{i=1}^{2}(8+4+2)\Delta x$).
101. I: *¿Estos son superiores o inferiores?*
102. E: *Indica con el lápiz los rectángulos sin dar respuesta.*
103. I: *¿Qué relación hay entre los superiores y los inferiores?*
104. E: *Los superiores me daría un valor por encima del valor exacto de la integral, del área.*
105. I*: ¿Y los inferiores?*
106. E*: Por debajo.*
107. I: *¿Es indispensable tener la expresión de la función para calcular esa área?*
108. E*: Sí.*
109. I*: ¿Por qué?*
110. E*: Porque pudiera calcular el área usando varios procedimientos.*
111. I: *¿Cómo cuáles?*
112. E*: Trapecios, Simpson, la misma integral.*
113. I: *¿Qué valores más ajustados puedes dar?*
114. E: *Si tuviese la función que define la gráfica, sí.*
115. I*: ¿Y sin tener la función?*
116. E*: Tomaría un rectángulo de altura 2 más otro rectángulo de altura 4. Este caso sería un área uno* (se refiere a A_1) *más un área dos* (se refiere a A_2)*, más con esta altura y esta base* (se refiere a un triángulo), *me daría este rectángulo, este rectángulo y un triángulo* (la figura sería así ).
Donde el rectángulo (indica sobre la gráfica) *uno la base sería (9-3) y la altura sería 2* (escribe $A_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$ =(9-3).2=12*) el rectángulo dos* (indica sobre la gráfica) *la altura seria la diferencia entre 4 y 2 y la base la diferencia entre 6 y* 3 (escribe A_2=(6-3)(4-2)=) *y la del triángulo sería de 8 a 4 y de 6 a 3* (escribe A_3=(6-3)(8-4)/2=) *la suma de esas áreas me daría un valor aproximado de esa área.*

PREGUNTA 5

117. I: *¿Me puedes leer lo que dice?*
118. E*: Calcular la integral que va del intervalo del -3 a 4 del valor absoluto de x+1.*
119. I*: ¿Lo puedes calcular de alguna manera?*
120. E*: Primero tendría que buscar el punto pico* (se refiere al punto angular*) del valor absoluto. Luego tomaría por definición la parte negativa* (se refiere en la definición a –(x+1)*) y sumaría la parte negativa más la parte positiva.*
121. I*: ¿Se puede calcular esa integral de una sola vez, con una sola integral?*
122. E: *¿Con una sola integral?* (pausa) *No.*
123. I: *¿La puedes calcular?*
124. E*: Sí.*
125. I*: Calcúlala.*
126. E: Escribe la función a trozos $\begin{matrix} x+1 \geq 0 & x \geq -1 \\ -(x+1) \geq 0 & x \leq -1 \end{matrix}$ grafica la función



y raya las dos regiones. *Tendríamos que* (escribe la integral con el valor absoluto como la suma de dos integrales)

$$\int_{-3}^{4}|x+1|dx = -\int_{-3}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx \cdot$$

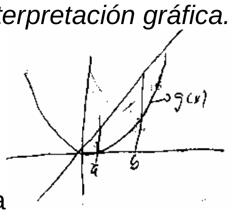
127. I: *¿Qué relación hay entre ese resultado y la integral que te plantearon?*
128. E*: Que me da el área de los dos triángulos que se formarían sobre* (raya las regiones de los dos triángulos) *lo que acabo de rayar.*
129. I*: ¿Cuánto vale esa área?*
130. E*: Empieza a calcular las integrales. También hay otra forma de hallar esta área.*
131. I*: ¿Cuál?*
132. E*: Haciendo la suma de estos dos triángulos* (señala con el lápiz las dos regiones).
133. I: *¿De qué manera?*
134. E: *Tomando la diferencia de este intervalo* (señala el segmento entre -3 y-1) *como la base y la altura* (señala el segmento vertical del triángulo de la izquierda). *Para eso utilizaría esta función* (se refiere al integrando) *para calcular la altura.*
135. I*: Hazlo para ver.*
136. E*: La altura seria 2* (escribe h_1=2) *y la base sería* (escribe b_1=(-1)-(-3)=2 para el área uno y para el área dos sería b_2=5 y h=5. Calcula las dos áreas usando la fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ y le da (2.2/2=2) y (25/2) respectivamente). *El área total sería 2+25/2=29/2.*
137. I: *¿Cuánto da el área total?*
138. E*: 29/2.*
139. I: *¿Qué consideras más sencillo? Es decir, a través de este procedimiento o a través de las integrales.*
140. E*: Las integrales serían un proceso como más general.*
141. I*: ¿Qué importancia tiene la integral en este problema?*
142. E*: Suponga que una persona no sabe aplicar esa función* (puede que se refiera a que no puede definir a trozos la función o graficarla), *pero sabe calcular la integral, él puede decir que esa integral evaluada en esa gráfica es igual a este procedimiento* (señala el procedimiento hecho con la fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$).

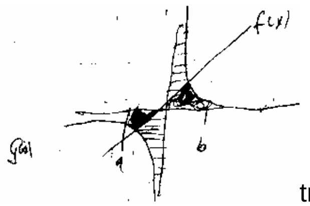
PREGUNTA 6

143. I: *¿Me puedes leer lo que dice?*
144. E*: Indicar si es verdadero o falso que* (lee el desarrollo).
145. I: *¿Consideras que es verdadero o falso?*
146. E: *Falso.*
147. I: *¿Por qué?*
148. E*: En ese intervalo que va desde -1 a 1 esta incluido el cero* (indica con el lápiz la integral)*. Primero la división de 1 entre cero no existe, segundo tiene una discontinuidad.*
149. I: *¿Qué condiciones debe cumplir una integral para que se pueda calcular?*
150. E*: Que la función sea continua.*
151. I: *Si la función es discontinua ¿Qué mecanismo se podría usar para calcular el área?*
152. E: *Tomaría una aproximación hacia el punto de discontinuidad.*
153. I: *¿A qué tipo de funciones discontinuas se le puede hacer eso?*
154. E: *A todas las funciones que tengan asíntotas o que tengan puntos en donde la división por cero no sea posible.*

ÍTEM PREGUNTA 7

155. I: *Léeme lo que dice ahí.*
156. E*: Indicar si es verdadero o falso que si la integral de f(x) en el intervalo "a" "b" es mayor o igual que la integral de g(x) en "a" "b" entonces f(x) es mayor o igual a g(x) para todo x que pertenece al intervalo cerrado"a b".*

157. I: *¿Eso es verdadero o es falso?*
158. E*: Puede ser verdadero.*
159. I: *¿Cómo es eso? ¿Qué razones tienes para decir que puede ser verdadero?*
160. E*: Porque, no, no, sí es verdadero.*
161. I: *¿Por qué?*
162. E*: Porque dicen que esa integral evaluada en "a b"* (se refiere a la integral de f) *es mayor que la otra integral evaluada en ese intervalo* (se refiere a la integral de g) *siempre y cuando que la función que corresponde a la integral sea mayor.*
163. I*: ¿Qué otra explicación puedes dar para eso?*
164. E*: Qué la función f(x) esté por encima de la g(x).*
165. I*: Puedes dar una interpretación gráfica.*
166. E*: Sería esta* (dibuja 

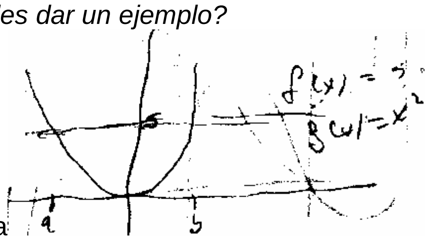
) *esta será la función f(x) y esta la g(x) y si la evaluamos en este intervalo, eso se cumple.*
167. I*: ¿Me puedes explicar por qué se cumple?*
168. E*: Esta función* (se refiere a f) *es superior a ésta* (se refiere a g) *en este intervalo.*
169. I: *¿Dónde se ve la relación de las integrales y dónde se ve la de las funciones?*
170. E*: Si esta función* (se refiere a f) *es mayor que esta función* (se refiere a g), *esta integral* (se refiere a la integral de f) *es mayor que esta integral en este intervalo* (se refiere a la integral de g) (indica con el lápiz sobre el gráfico lo que dice).
171. I*: Pero está al revés, la hipótesis es que la integral de una es mayor que la integral de la otra, entonces se cumple que las imágenes de f son mayores que la de g. ¿Puedes dar un ejemplo gráfico donde eso no se cumpla?*
172. E*: Que tenga una discontinuidad en una de las dos.*
173. I: *Para ver.*
174. E*:* Dibuja 

trazó esta función llamándola f(x) en este intervalo "a b"
175. I*: ¿Cómo interpretas eso?*
176. E*: Esta función es discontinua* (se refiere a g) (indica con el lápiz la curva) *y esta es continua* (se refiere a f) *no se cumple esto* (se refiere a la proposición).
177. I*: ¿Cuáles son esas áreas que estás definiendo?*
178. E*: Sería esta área* (raya las regiones bajo el eje x, entre la curva y la recta; y sobre el eje x, entre la curva y la recta) *y la otra esta* (raya el resto de las regiones).

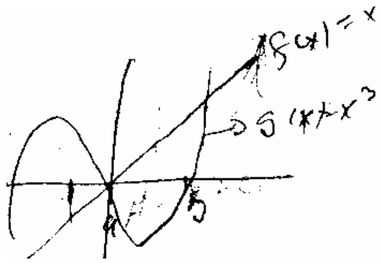
PREGUNTA 8

179. I*: Léeme el enunciado.*
180. E*: Léeme correctamente la proposición.*
181. I: *¿Eso es verdadero o es falso?*
182. E*: A mí me parece que eso viene de la otra.*
183. I*: ¿Pero es verdadero o falso?*
184. E*: Puede ser falso.*
185. I: *¿Por qué?*
186. E*: Por la gráfica que acabo de hacer.*
187. I*: ¿Cómo explicas eso?*
188. E: *Para que esto se cumpla tiene que cumplirse para toda función. Pero si una de las dos no es continua, no se puede cumplir* (vuelve al ejemplo anterior y menciona que ahí no se cumple)
189. I*: ¿Tú basas tu justificación en que una de las funciones es discontinua?*
190. E*: Sí.*
191. I: *Y si las funciones fueran continuas ¿Se cumpliría?*
192. E*: Sí se cumple.*

193. I*: ¿Puedes dar un ejemplo?*

194. E*:* Dibuja 

195. I*: ¿Me lo puedes explicar?*
196. E: *La función f(x) esta por encima de la función g(x)*
197. I: *¿Se cumple o no se cumple el enunciado en ese ejemplo?*
198. E: *Si se cumple.*
199. I: *¿Por qué se cumple?*
200. E: *Porque una función es mayor que la otra.*
201. I: *¿Y eso es suficiente? ¿Y qué pasa con la tesis?*
202. E: *También se cumple, que una es mayor que la otra.*
203. I*: ¿Qué significa una?*
204. E*: Que evaluando la integral en ese intervalo, una es mayor que la otra.*
205. I*: ¿Otra razón que pudieras dar?*
206. E*: Pudiera ser otra función.* Dibuja



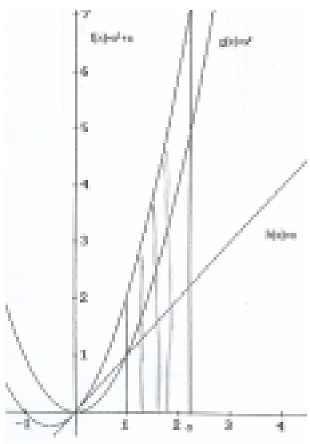
cúbica evaluada en "a b" y la otra una recta. También se debería cumplir.

207. I*: ¿Qué se cumple?*
208. E*: El enunciado.*
209. I: *¿Explícamelo?*
210. E*: Al evaluar la función g(x) y la función f(x)* (indica con el lápiz a g(x) y a f(x) en el gráfico) *esta función tendría que ser mayor en el intervalo "a b"* (indica con el lápiz en la gráfica).

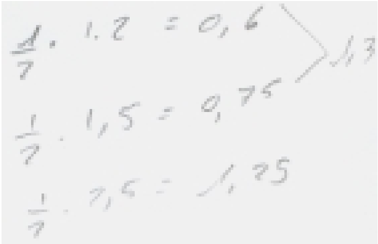
ENTREVISTA AL ESTUDIANTE-G2E1

PREGUNTA 1

1. I: *En la pregunta 1 dice que expliques por medios gráficos o de otra forma por qué se cumple la igualdad.*
2. E: *Según mi criterio lo que hice en el examen fue que evalué las integrales en ambos lados desde 1 hasta a, como* $f(x) = x^2 + x$, *saqué la primitiva de esa función y lo evalué desde 1 hasta "a", y lo igualé a la evaluación de integral de 1 hasta "a" de g(x) más la evaluación desde 1 hasta "a" de h(x), y al final a ambos lados de la igualdad me debería dar el mismo resultado.*
3. E: *¿Se lo hago aquí?*
4. I: *Si hazlo.*
5. E: Calcula las integrales siguiendo en procedimiento que ha descrito anteriormente. Menciona que "*me da el mimo resultado a ambos lados de la igualdad, por eso llego a la conclusión de que la igualdad se cumple".*
6. I: *¿Esa igualdad se cumple independientemente del intervalo considerado?*
7. E: *En este intervalo se cumple, pero no le sabría decir responder, yo creo que sí daría el mismo resultado, porque se estaría calculando el área debajo de la curva entre dos extremos para tres integrales, por lo menos si sumamos la h(x) y la g(x), debería ser igual a la de f(x) en ese intervalo de valores, yo creo que pudiera ser dentro de cualquier valor.*
8. I: *¿Eso es independiente de las funciones que se consideren?*
9. E: *No, tienen que ser continuas, un ejemplo, la función g(x) podría ser continua de 1 hasta "a" pero desde "a" hasta vamos a llamarlo "b" puede tener una discontinuidad, entonces con los conocimientos que tengo hasta ahora no podrías trabajar esta integral que no este definida.*
10. I: *Para funciones continuas ¿Habría algún caso donde eso no se cumpliera?* (Se refiere a la igualdad).
11. E: *No estoy seguro si la curva pasara por debajo del eje OX, pero eso se solucionaría colocándole valor absoluto o un menos del lado izquierdo de la integral, para que diera negativo se multiplicaría por el signo menos y se sumaria el área de esa integral. Considero que para toda función continua esto se debería cumplir.*
12. I: *¿Me puedes dar una interpretación gráfica?*
13. E: *Por lo menos usando rectángulos* (dibuja líneas sobre el gráfico dado) *que estén por debajo de h(x) y también de g(x), el área de esos dos rectángulos sería igual o muy aproximado al rectángulo del mismo longitud de la base que está debajo de f(x)* (las líneas las dibuja deteniéndose al llegar a cada curva y luego las continúa),



por lo menos que asignemos un valor, por lo menos cuatro rectángulos, desde 1 hasta 2, cada rectángulo tendría 0.5 de ancho o ½; daría aproximado menor que la escala, podemos tomar el rectángulo de 1 hasta 1.5 de base (realiza cómputos de área del rectángulo bajo h, otro bajo g y otro bajo f).

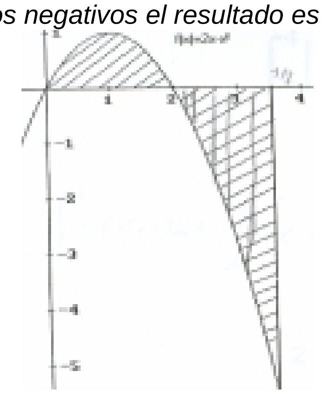


Me da un área muy aproximada. Los rectángulos que están bajo h(x) y g(x) me dan 1,30 y calculamos un rectángulo completo para f(x) me da 1,25; eso me daría la tendencia de que la suma de las áreas de g(x) y h(x) es igual o aproximado a la de f(x).

14. I *¿Pudiera hacerse con otras figuras?*
15. E: *También se podría con trapecios o con rectángulos punto medio, para hallar una respuesta un poco más aproximada, pero se trabaja más fácilmente con los rectángulos.*
16. I: *A parte de los procedimientos que has mencionado ¿puedes dar otra forma de justificar la igualdad?*
17. E: *Utilizando Sumas de Riemann, por lo menos tenemos un número de rectángulos, podía ser para hallar una respuesta más exacta un número elevado de rectángulos. Con las Sumas de Riemann nos facilitaría el trabajo de estar calculando cada rectángulo, las Sumas de Riemann la pondríamos en términos de "n", le podríamos aplicar límite de "n" hacia infinito, siendo "n" el número de rectángulo, mientras más rectángulos haya mayor la exactitud será el área.*

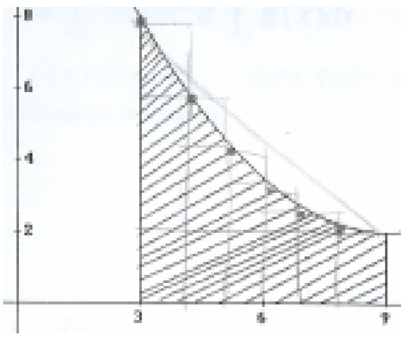
PREGUNTA 2

18. I: *¿Me puedes leer lo que dice?*
19. E: *Calcular el área de la región rayada. Si no es posible explicar por qué*.
20. I: *¿Qué relación puedes establecer entre el área de la región bajo el eje OX y la integral definida?*
21. E: *Que la integral de la parte de la curva que está debajo del eje OX, debería dar un valor negativo; como el área no puede ser negativa le aplicamos valor absoluto y solucionamos ese inconveniente.*
22. I: *¿La integral da positiva o negativa?*
23. E: *Al final debería dar positiva. Aquí da negativa* (señala con el lápiz la región bajo el eje OX). *Le aplicamos la integral desde 2 hasta 7/2 el resultado da negativo.*
24. I: *¿Y el área?*
25. E: *Da positiva.*
26. I: *¿Puedes explicar por qué la integral da negativa y el área da positiva?*
27. E: *Si la integral resulta negativa, el área da negativa, porque la integral es el área bajo la curva.*
28. I: *¿Pero el área es negativa o es positiva?*
29. E: *El área es positiva.*
30. I: *¿Por qué la integral da negativa?*
31. E: *Porque utilizáramos rectángulos* (dibuja sobre la gráfica segmentos de línea) *de igual base, las imágenes de la base, ya sea con el extremos izquierdo o el extremo derecho, sería un número negativo y al multiplicar un número positivo que sería la base por un número negativo que sería la altura o la imagen derecha o izquierda, el resultado da negativo; si se suman números negativos el resultado es negativo.*



PREGUNTA 3
32. I: *¿Me puedes leer lo que dice?*
33. E: *Calcular el área de la región rayada.*
34. I: *¿Se puede calcular el área entre -2 y 2?*
35. E: *El área aquí es infinita* (señala con el dedo la gráfica).
36. I: *¿Qué significa para ti lo rayado?*
37. E: *Significa que eso continua hacia arriba.*
38. I: *¿Es posible calcular esa área?*
39. E: *No se puede calcular.*
40. I: *¿Por qué?*
41. E: *Si el área tiende hacia infinito en OY* (recorre el eje con el lápiz) *hay un punto en la función donde no es continua, no esta definida la función. Cuando lleguemos a x igual cero, no esta definido.*
42. I: *¿Qué condiciones debe cumplir esa gráfica para que se pueda calcular el área?*
43. E: *Qué en el intervalo -2 hasta 2 no exista un valor que vuelva a la función indeterminada, porque al volverla una indeterminación, con los conocimientos que tenemos de Cálculo 1, no lo podríamos calcular.*
44. I: *¿Y en cuanto a la continuidad de la función?*
45. E: *No es continua en el punto x igual cero.*

PREGUNTA 4
46. I: *El área de la región sombreada en mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué?*
47. E: *Mayor que 12 porque calculamos el rectángulo que esta acá* (dibuja un rectángulo en la base de la gráfica) *de base 6 y altura 2, sería 6 por 2 igual a 12 y podemos observar que* (señala región bajo la curva y sobre el rectángulo) *aún queda gran parte del área sin calcular, por eso es que decimos que es mayor que 12. Menor que 48, porque si hacemos un triángulos acá* (dibuja un triángulo de base sobre el rectángulo) *sumamos el área del triángulo más el área de este rectángulo sería 6 por 6 entre 2 igual a 18 más 12 del rectángulo igual 30, y nos damos cuenta que nos estamos excediendo en el cálculo del área y por tanto 48 sería un valor mucho más elevado del que realmente sería el área verdadera.*
48. I: *¿Puedes dar una aproximación más ajustada?*
49. E: *Utilizando rectángulos* (dibuja rectángulos inferiores), *utilizaríamos 6 rectángulos para hallar un área. Vamos a hacer otros que excedan* (dibuja rectángulos superiores). *Lo podemos hacer de dos maneras, tomando rectángulos que excedan, tomando la imagen izquierda del rectángulo y tomando el extremo derecho y sumando esas dos áreas y calculando en promedio del área.*

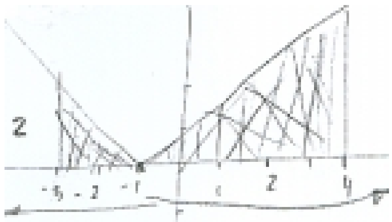


50. I: *¿Qué otro tipo de aproximación?*
51. E: *Si tuviésemos la función.*
52. I: *¿Es indispensable tener la función?*
53. E: *No es indispensable porque si tenemos un problema de la vida real en donde no tengamos la función, nosotros podemos aproximar una función, no sería exacta, y podemos calcular mediante una integral, podemos calcular el área específica de la zona que deseamos.*
54. I: *Si no tienes la función ¿Cómo planteas la integral?*
55. E: *Sin la función no se puede plantear la integral. Pero se podría, este, el procedimiento más fácil es el de rectángulos.*
56. I: *¿Otras figuras?*

57. E: *Si, trapecios. Podría utilizarse rectángulos inferiores y triángulos encima de los rectángulos inferiores y así el error sería menor, porque el triángulo se asemeja bastante a la curva* (mueve el lápiz sobre la curva).
58. I: *Pero si tienes el triángulo y tienes el rectángulo, prácticamente tienes el trapecio.*
59. E: S*í, exactamente, lo más rápido sería utilizando trapecio. Un valor aproximado utilizando una sola figura, que sería el trapecio.*

PREGUNTA 5

60. I: *¿Me puedes leer lo que dice?*
61. E: *Calcular la integral de -3 a 4 de valor absoluto de x más 1 dx.*
62. I: *Calcula la integral.*
63. E: Define la función valor absoluto de la siguiente manera $\begin{cases} x \geq 0 & x+1 \\ x < 0 & -(x+1) \end{cases}$
64. I: *¿Estás seguro que ésa es la definición?*
65. E: *Sí, para la parte de la función que está sobre el eje OX, quedaría x más 1, y para la parte que está bajo el eje OX, le asignaríamos un signo negativo, porque sabemos que esa área dará negativo, ese valor dará negativo y lo multiplicamos por el menos que está afuera y cambiaría a positivo, eso es por conocimiento básico de valor absoluto.*
66. I: *Teniendo esa información ¿Cómo planteas la integral?*
67. E: *Ahora con esto obtendría dos integrales.*
68. I: *¿Cuáles serían?*
69. E: Empieza a escribir las integrales y no puede.
70. I: *¿Puedes graficar la función?*
71. E: Representa la función sin utilizar tablas de valores.



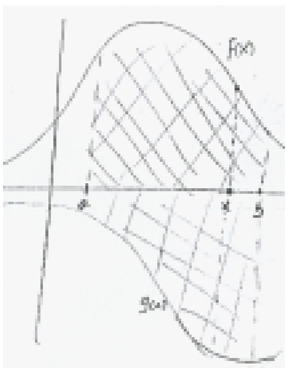
72. I: *¿Puedes rayar la región?*
73. E: Raya la región. *Hay dos integrales de -3 a -1 y de -1 a 4.* Escribe las integrales $\int_{-3}^{-1} -(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx$.
74. I: *Si observas este planteamiento, la definición de la función que has escrito, no aparece ese valor -1. ¿Dónde esta el -1 es esa condición?*
75. E: Reescribe la definición de la siguiente manera $\begin{cases} x \geq -1 & x+1 \\ x < -1 & -(x+1) \end{cases}$. *Para todos los valores de aquí hasta acá* (dibuja una línea entre -1 y 4) *utilizamos esta expresión* (señala la primera parte de la definición), *para los valores que son menor* (dibuja una línea entre -3 y -1) *utilizamos ésta* (señala la segunda parte de la definición).
76. I: *¿Qué observas en la gráfica?*
77. E: *En la gráfica se observa que se puede calcular esta área utilizando triángulos* (raya las dos regiones demarcando los triángulos). *Más fácil, utilizamos la base en valor absoluto porque estaría en los negativos* (señala la base del triángulo de la izquierda al punto angular) *por la altura divido entre dos, porque calculamos el área del triángulo; y el otro triángulo, de base 5* (señala la base del triángulo de la derecha al punto angular), *la altura hallaríamos la imagen de 4, seria 5.* Realiza los cálculos $\frac{2\cdot 2}{2}=2$ y $\frac{5\cdot 5}{2}=12.5$ suma los resultados y le da 14.5.
78. I: *¿Algunas veces se puede hacer sin conocimientos de integrales?*
79. E: *Si. El cálculo del área debajo de una recta, se puede hacer sin tener conocimiento de integrales, en este caso, utilizamos triángulos, que vendría siendo el resultado de la integral.*

PREGUNTA 6

80. I: *¿Explica si es verdadera o falsa la proposición?*
81. E: *Yo considero que es falsa.*
82. I: *¿Por qué?*
83. E: *Porque entre -1 y 1 existe un valor que vendría a ser cero que al evaluarlo en ese punto no estaría definida la función y quedaría sin saber el área de ese punto de la gráfica.*
84. I: *¿Qué condición se debe cumplir para realizar esos cálculos?*
85. E: *Qué sea continua en todos los números del intervalo dado, en este caso sería -1 y 1. Por los conocimientos que tenemos, porque a lo mejor existen otros procedimientos más avanzados que si permiten que se realice la integral.*
86. I: *Observas que el resultado da -2 ¿Tú lo comprobaste en el examen?*
87. E: *Yo lo comprobé y si seguimos los pasos se ve que esta correctamente.*
88. I: *¿Qué es lo que está fallando?*
89. E: *Lo que le estoy diciendo, que existe puntos entre -1 y 1, aquí no se ve porque utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo, que es donde dice que la integral de f de x evaluada de "a" hasta "b" es igual a la función F(b) menos F(a)* (no expresa explícitamente que se trata de la primitiva, pero es de esperar que a ella se refiera).
90. I: *¿Entonces qué es lo que está fallando?*
91. E: *Que está dando negativo y el área no debería dar negativo.*
92. I: *En un ejercicio anterior dijiste que la integral puede dar negativa y estamos hablando de una integral, entonces ¿qué es lo que falla en ese ejercicio para que lleve a pensar que eso es falso? ¿Qué condición se debe cumplir para que eso sea verdadero?*
93. E: *La función es discontinua.*
94. I: *¿Cuál es la condición para que exista la integral?*
95. E: *Que sea continua. Es falso porque es discontinua en el punto x iguala cero.*
96. I: *¿Eso es lo que tú piensas?*
97. E: *Eso es lo que yo pienso.*
98. I: *A parte de esas razones ¿qué otra cosa se te ocurre?*
99. E: *Graficando la función. Porque eso es muy importante para saber, para tener una idea, si esta por debajo del eje OX, en la gráfica se ve claramente si existe un salto en la gráfica.*

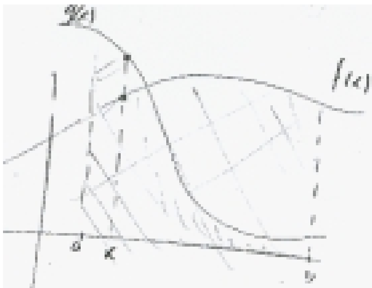
PREGUNTA 7

100. I: *En la pregunta 7 dice que indiques si es verdadera o falsa la proposición.*
101. E: *Es falsa.*
102. I: *¿Por qué?*
103. E: *Porque dice que el área de f de x en "a" y "b" es mayor o igual que el área de g de x entre "a" y "b" entonces las imágenes de la función f de x son mayores o iguales que g para todo x que pertenece al intervalo "a b".*
104. I: *¿Puedes dar un ejemplo donde eso no se cumpla?*
105. E: Dibuja



La función f(x) (dibuja la curva sobre el eje OX) *éste es "a" y éste es "b", y dice que es mayor el área que g(x)* (dibuja otra curva bajo el eje OX) *y que este es el valor x, este es de acá es menor que este de acá* (dibuja líneas punteadas partiendo del punto señalado como x), *el área de f(x)* (raya la región bajo la curva de f) *mayor que el área de g(x)* (raya la región bajo la curva de g) *pero no siempre las imágenes de f(x) son mayores que las de g(x), en ese intervalo.*

106. I: *Pero ahí también se esta cumpliendo que la imagen de f es mayor que la de g. ¿Me puedes dar un ejemplo en donde no se cumpla la proposición?*
107. E: Dibuja



La integral de f(x) (raya la región bajo la curva f) *es mayor que la de g(x)* (raya la región bajo la curva de g) *donde no cumple que la imagen de f(x) no es mayor que la de g(x)* (escribe una *x,* dibuja una línea punteada).

PREGUNTA 8

108. I: *¿Me puedes leer la proposición?*
109. E: *Indica si es verdadero o falso que si las imágenes de f(x) son mayores o iguales a las imágenes de g(x) entonces la integral de "a" hasta "b" de f(x)dx es mayor o igual a la integral de "a" hasta "b" de g(x)dx.*
110. I: *¿Eso es verdadero o es falso?*
111. E: *Yo considero que es verdadero.*
112. I: *¿Por qué?*
113. E: *Porque las imágenes serán mayor las de f(x) en "a" "b" y la imágenes de g(x) podía estar por debajo del eje X o por encima del eje X, pero debajo de f.* Dibuja

se cumple que a la larga la imágenes de f(x) son que las de g(x), la integral de f(x) va ser mayor que la integral de g(x).

114. I: *¿Me puedes dar otro ejemplo gráfico donde se pueda visualizar eso que dicen que es cierto?*
115. E: Dibuja

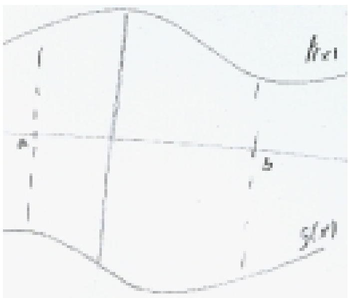


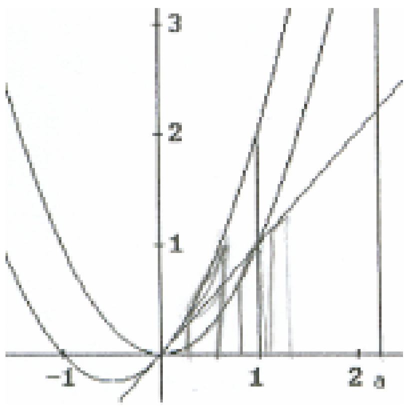
Figura 9

f(x) por arriba y g(x) por aquí (Dibuja la curva de f sobre el eje OX y la de g por debajo del eje OX), *también podemos observar que g(x) tendrá mayor área que f(x), pero la integral es negativa y al ser negativa será menor que la integral positiva que tenemos acá arriba* (se refiere a la de f)*. Y las imágenes por el simple hecho de estar por debajo del eje OX será menores a las que están por encima del eje OX.*

ENTREVISTA AL ESTUDIANTE G2E2

PREGUNTA 1

1. I: *En la primera pregunta dice que expliques por medio de gráficos o de otra forma por qué se cumple la igualdad.*
2. E: Sustituye las expresiones de las funciones en las integrales y las calcula, compara las resultados; menciona *es "igual, los dos procedimientos van a través de f(x), g(x) y h(x) me da igual".*
3. I: *¿La igualdad es independiente del intervalo considerado?*
4. E: *Yo creo que no, porque f(x) tiene que ser g(x) más h(x) para que se pueda dar la igualdad, si no hay esa sumatoria* (señala las expresiones de las funciones) *no se daría.*
5. I: *Si fuese entre cero uno ¿se cumpliría esa igualdad?*
6. E: *Si porque estaría en la misma gráfica*.
7. I: *Resuélvelo.*
8. E: Lo resuelve obteniendo en el valor -5/6 a ambos lados (resultado equivocado) *Yo creo que en cualquier intervalo se cumple.*
9. I: *¿Esta bien el resultado?*
10. E: *-5/6.*
11. I: *Pero lo que tienes que calcular esta sobre el eje OX.*
12. E: Chequea los cálculos y le da 5/6. *Me equivoqué porque evalué primero en cero y después en uno.*
13. I: *¿Puedes dar una justificación gráfica de la igualdad de las integrales?*
14. E: *Con una aproximación gráfica. Lo podría verificar con los cuadrados, con trapecios. Apartando las gráficas.*
15. I: Sin apartarlas. ¿Puedes dar un ejemplo?
16. E: *Yo creo que dibujaría un trapecio aquí* (lo dibuja hasta la curva de f), *dibujaría un trapecio hasta la parábola* x^2 *, lo mismo para la recta. Verificando se vería que los dos trapecios pequeños* (señala los trapecios bajo g y h) *forman el trapecio grande*



17. I: *¿Me puedes dar una interpretación numérica, sin usar integrales?*
18. E: *Se da la igualdad porque sería* $x^2 + x$ *que sería g(x) más h(x).*
19. I: *A parte de esos procedimientos que has dado ¿lo puedes hacer de otra manera?*
20. E: *Dándole valores a la x.*

PREGUNTA 2

21. I: *¿Puedes leer lo que dice?*
22. E: *Calcular el área rayada, si no es posible explicar porque. En este ejercicio cometí un error, porque al calcular entre 2 y 3.6; yo lo hice fue restar la recta vertical* (señala con el dedo la gráfica) *menos la función* $2x - x^2$*, las resté y me dio un área mucho más grande.*
23. I: *¿Qué relación puedes establecer entre área bajo el OX y la integral definida?*
24. E: *Si hay relación porque por medio de la integral definida, la podemos definir entre 2 y 3.6. Hay relación porque la podemos sacar por ese método* (señala con el dedo la gráfica).

25. I: *¿Tiene el mismo signo esa área que la integral definida?*
26. E: *No porque como esáa bajo el eje OX, hay que colocarle al área el signo menos para que nos diera el área positiva.*
27. I: *¿Qué signo tiene la integral, ahí debajo del eje x?*
28. E: *Nos da negativa área, si la realizamos así sin.*
29. I: *¿El área o la integral?*
30. E: *El área, el área nos daría negativa. Pero la integral tiene el signo positivo.*
31. I: *¿El área es un valor negativo?*
32. E: *No puede dar negativa, porque el área no es un valor negativo. Tendríamos que ponerle un signo menos a la integral.*
33. I: *¿Qué es lo que da negativo, la integral o el área?*
34. E: *La integral da negativa. Si la integral da negativa, el área da negativa.*
35. I: *¿Entonces para que le pones el signo negativo a la integral?*
36. E: *Le ponemos el signo menos a la integral para que el área de positiva.*
37. I: *¿El área es un valor positivo negativo?*
38. E: *Positivo.*
39. I: *¿Por qué la integral da negativa?*
40. E: *Porque la estamos calculando bajo el eje OX.*

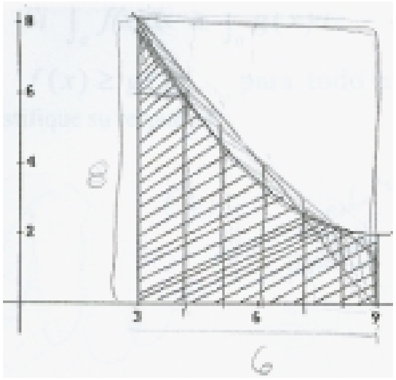
PREGUNTA 3

41. I: *¿Se puede calcular el área entre -2 y 2?*
42. E: *No, porque no estaría definida esta gráfica* (Señala con el dedo la gráfica de abajo hacia arriba) *en esta área en especifico. Habría que definir otro intervalo.*
43. I: *¿En cuál?*
44. E: *En -3 y -1. Porque ahí si estamos calculando un área bajo la curva. Pero entre -2 y 2 porque la gráfica nunca va llegar al eje OY.*
45. I: *¿La curva cumple con las condiciones para que se le pueda calcular el área?*
46. E: *En algunos intervalos. En este específico no.*
47. I: *¿Cuáles son las condiciones?*
48. E: *Que la función no pase por x igual a cero. Se puede calcular en 0.1, pero nunca va a llegar a tocar el eje OY.*
49. I: *¿Qué relación estableces entre valor cero y el dominio de la función?*
50. E: *El dominio sería todos los números reales menos el cero.*
51. I: *¿De qué manera influye la continuidad o discontinuidad de la gráfica en el cálculo del área?*
52. E: *En este caso como no es continua en este intervalo, no se puede calcular el área. Pero entre -3 y -1, como hay continuidad si se puede calcular.*

PREGUNTA 4

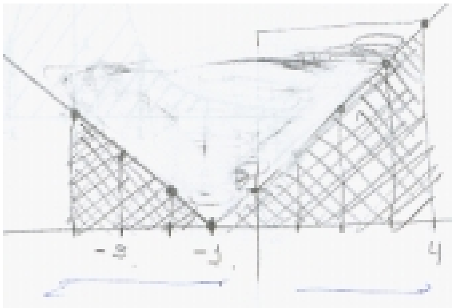
53. I: *En la pregunta 5 dice que el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué?*
54. E: Dibuja una línea en la base se la figura y menciona que mide 6 y la altura 8. Dibuja un trapecio. *Es menor que 48 porque* (se queda en silencio). *Aquí se podía dar más valores conociendo la ecuación de esta gráfica. Así yo creo que se podía usar triángulos, trapecios.*
55. I: *¿Puedes dar una mejor aproximación del área?*
56. E: *Sacaríamos el área de este rectángulo* (dibuja un rectángulo de medida 6 por 8) *podíamos dividir aquí* (raya la región del trapecio que dibujó), *lo que esta sobrestimando aquí, se compensa un poco, puede ser 24 a algo así.*
57. I: *Me dices que no conoces la función y no puedes dar un valor exacto. ¿Qué procedimiento usarías para conseguir un valor más aproximado?*
58. E: Dibuja un triángulo y hace silencio.
59. I: *Usando lo dado en clase ¿Habría un mecanismo?*
60. E: *Yo creo que* (dibuja trapecios) *usando trapecios, con un valor aproximado para poder encontrar los delta de x y poder buscar el área.*
61. I: *¿Qué otro tipo de figuras puedes utilizar?*
62. E: *También se puede hacer con rectángulos.*
63. I: *¿Cuál sería más exacta?*
64. E: *El trapecio, porque* (dibuja un rectángulo) *el rectángulo, si lo ponemos por lado adentro, nos daría una subestimación.*

65. I: *¿Consideras que es indispensable tener una función para poder dar una estimación bastante cercana del área?*
66. E: *Del área no, pero para hallar una exactitud si.*



PREGUNTA 5

67. E: É*sta no la supe dividir. Creo que es de -3 hasta -1 y de -1 a 4.* Escribe $\int_{-3}^{-1} \int_{-1}^{4}$ *Yo en examen no la dividí, sino que calculé el área entre este valor absoluto.*
68. I: *¿Qué criterios utilizas para saber que la puedes dividir entre -3 y -1, y entre -1 y 4?*
69. E: *Porque es valor absoluto. Al hacer la gráfica desde -3 a -1 y después de -1 hasta 4.*
70. I: *¿Se puede establecer una sola integral entre -3 y 4?*
71. E: *No, porque yo la hice entre -3 y 4 no me dio. Hay dividirla para que nos pueda dar.*
72. I: *¿Puedes graficar la función?*
73. E: Dibuja directamente la gráfica sin tabla de valores.



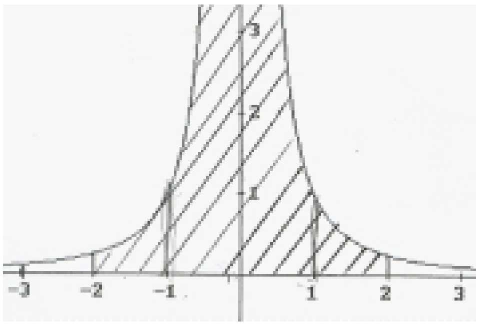
74. I: *¿Qué puedes observar en la gráfica?*
75. E: *Que hacer esta integral debo hacerla entre -3 y -1, y entre -1 y 4* (señala la gráfica). *Porque si hacemos directamente sería todo esto* (señala tanto la región bajo la gráfica como la parte sobre la gráfica, demarcando una región poligonal). Raya las partes a ambos lado del punto angular.
76. I: *¿Puedes observar alguna figura ahí?* (se refiere a las dos regiones a ambos lado del punto angular).
77. E: *Son dos triángulos.*
78. I: *¿Qué te piden?*
79. E: *Me piden el área entre -3 y 4. Tenemos que dividirlo entre -3 hasta -1, y desde -1 hasta 4.*
80. I: *¿Me puedes plantear las integrales?*
81. E: Escribe $\int_{-3}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx$.
82. I: *¿Las dos integrales tienen la misma expresión en el integrando?*
83. E: *Si.*
84. I: *¿Me puedes definir la función valor absoluto?*
85. E: No logra definirla.

86. I: Le define la función de la siguiente manera $\begin{cases} -(x+1) & si\ x+1<0,\ \ x<-1 \\ x+1 & si\ x+1\geq 0,\ \ x\geq -1 \end{cases}$ *Si comparas la definición de la función con las integrales ¿hay algún problema?*

87. E: Analiza en silencio la función que se le ha definido. *Faltaría el menos* (le escribe el signo negativo al integrando de la primera integral, quedando así $\int_{-3}^{-1} -(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx$)

PREGUNTA 6

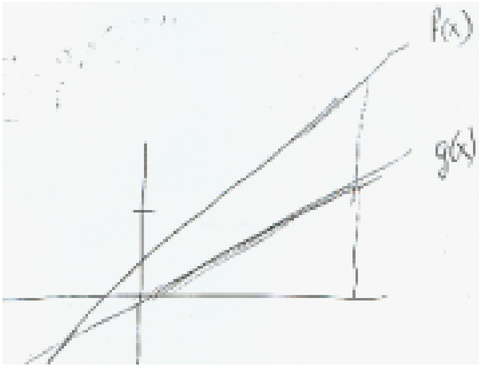
88. I: *En esta pregunta se pide indicar si es verdadera o falsa esa proposición.*
89. E: *Es falsa.*
90. I: *¿Por qué?*
91. E: *En el intervalo que se está sacando aquí* (muestra la gráfica del problema 3) *es entre -1 y 1, la gráfica no es continua.*



92. I: *¿Qué condiciones se deben cumplir?*
93. E: *Porque esta integral la calculamos desde -1 hasta cero, y desde 0 a 1, la suma de esto tendría que darme infinito* (muestra la gráfica del problema 3). *La gráfica no esta restringida.*
94. I: *¿Cuál es el dominio de la función?*
95. E: *Todos los números reales menos el cero.*
96. I: *¿Puedes mencionar las razones por las cuáles no se puede calcular?*
97. E: *No se puede calcular porque entre -1 y 1 esta el cero. Entonces al darle el valor cero dará infinito.*

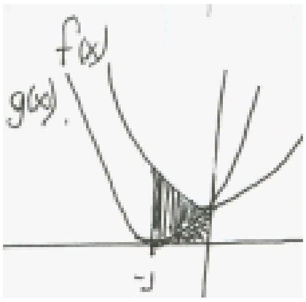
PREGUNTA 7

98. I: *En esta pregunta debes Indicar si es verdadera o falsa la proposición.*
99. E: *Es verdadera porque se da la condición de que f(x) es mayor que g(x), es área bajo esta gráfica* (se refiere al área de la región bajo f) *debe ser mayor que la de la otra función g(x).*
100. I: *Léeme la proposición.*
101. E: *Indicar si es verdadero o falso que la integral entre a y b de f(x) dx es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) dx, entonces f(x) es mayor que g(x) para toda x que pertenece a "a b"*
102. I: *¿Eso se cumple independientemente de la integral que se tenga?*
103. E: *Si f(x) es mayor a g(x).*
104. I: *Pero es que la hipótesis es que la integral de f es mayor o igual que la de g.*
105. I: *¿Me puedes dar un ejemplo gráfico?*
106. E: Dibuja



La integral de f(x) mayor que la de g(x), siempre y cuando se cumpla esta condición (señala la tesis).

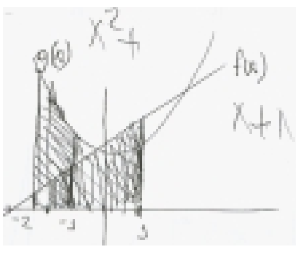
107. I: *¿Y con curvas?*
108. E: Dibuja



109. I: *¿En que parte la integral de f es mayor a la de g?*
110. E: *Por ejemplo si me mandan a calcular el área entre -1 y 0* (raya la región). *El área de f(x) sería esta* (raya de región).
111. I: *¿Ahí se cumple la proposición?*
112. E: *Si.*

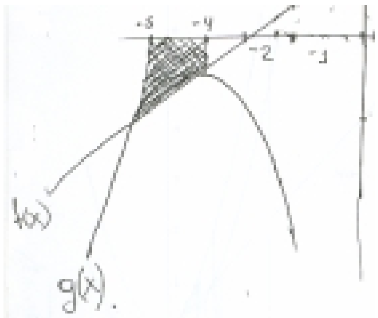
PREGUNTA 8

113. I: *¿Cuál es la hipótesis en esta proposición?*
114. E: *No me dan el intervalo.*
115. I: *¿Es verdadero o falso lo que está planteado?*
116. E: No tiene claro lo que es la hipótesis y la tesis.
117. I: Le aclara lo que significa la hipótesis y la tesis en una proposición.
118. I: *¿Es verdadera o falsa la proposición?*
119. E: *Es verdadera. Esto similar al problema anterior, está como al revés. Si la función es mayor o igual a la otra función, entonces la integral de esta función tiene que mayor que la integral de esta función.*
120. I: *¿Me puedes dar una interpretación gráfica?*
121. E: *Igual, me lo están diciendo al revés, allá lo que era la tesis aquí es la hipótesis.*
122. I: *¿Puedes elaborar alguna gráfica?*
123. E: Dibuja



Me mandan a calcular el área de f(x) y el área de g(x) sería ésta (raya las dos regiones que están sobre el eje X).

124. I: *¿Cómo explicarías la proposición?*
125. E: *Aquí no me dan un intervalo específico.*
126. I: *¿Qué se puede hacer?*
127. E: *Si me mandan a buscar entre -2 y -1, la f(x) sería menor, la g(x) sería mayor* (raya las regiones).
128. I: *La hipótesis es que tienen que buscar un problema donde f(x) sea mayor o igual a g(x), no al contrario.*
129. E: *Entre 0 y 1.*
130. I: *Ahí se cumple la hipótesis.*
131. I: *¿Se cumple la tesis en esa parte?*
132. E: *Sí.*
133. I: *Si las dos gráficas estuvieses debajo del eje OX ¿Se seguiría cumpliendo la proposición?*
134. E: Dibuja



Es este intervalo (señala el intervalo de -5 a -4) *si se cumple esta tesis, porque el área de f(x) sería mayor que la de g(x)*

135. I: *¿Verificaste la hipótesis?*
136. E: *Sí.*
137. I: *¿Se cumple la hipótesis?*
138. E: Silencio.

ANEXO 14

MÓDULO INSTRUCCIONAL II

PRÁCTICA 1

INTRODUCCIÓN

DERIVE es un "Programa de Cálculo Simbólico", que es utilizado para trabajar con Matemáticas, usando las notaciones propias (simbólicas) de esta ciencia.

Este programa de Cálculo simbólico es capaz de realizar operaciones numéricas básicas con números Reales y Complejos, dando la respuesta en forma exacta y aproximada. Tiene capacidad para representar gráficas de funciones y curvas en general. Así como también, capacidad numérica que suple a la mejor de las calculadoras. Calcula valores de Funciones Trigonométricas, dando la respuesta exacta y aproximada. Ésta es una muestra de la diversidad de aplicaciones que tiene *DERIVE*, en las actividades que desarrollaremos iremos explicando estas utilidades y otras más. En esta práctica se darán las nociones básicas del programa *DERIVE* y algunas de sus aplicaciones en cuanto a resolución de ecuaciones. Finalmente se pedirá evaluar el desarrollo de esta práctica.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 1. Introducción al Cálculo.

OBJETIVOS

1. Explicar las nociones básicas del programa *DERIVE*.
2. Simplificar expresiones algebraicas.
3. Resolver ecuaciones en una variable.

Equipo audiovisual:

Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

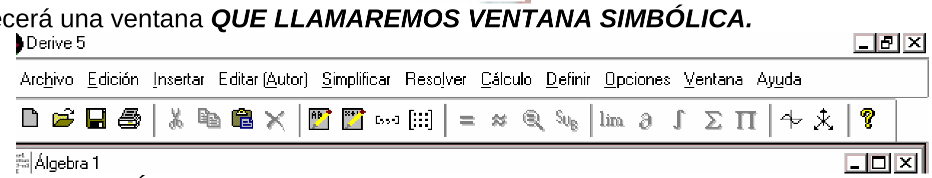
La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

ACESO AL PROGRAMA DERIVE

Pulsa el botón del ratón dos veces (lo más rápido que puedas) en el icono que dice ***DERIVE* 5.**

Te aparecerá una ventana ***QUE LLAMAREMOS VENTANA SIMBÓLICA.***



DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA PANTALLA.

En la parte superior de la pantalla del *DERIVE* aparecen las siguientes Categorías

Debajo aparecen una serie de iconos que activan los comandos.

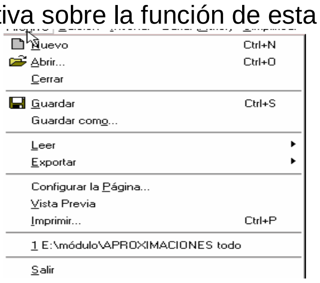
Las aplicaciones de la mayoría de las categorías y de los comandos las desarrollaremos a lo largo de las actividades que realizaremos.

USO DE LAS CATEGORÍAS

Si marcas alguna categoría, por ejemplo:

Archivo

y pulsas el ratón, obtendrás informativa sobre la función de esta categoría.

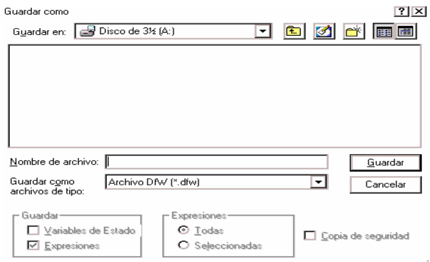


Para salirse de cualquier categoría, ubica el cursor en la hoja en blanco o Ventana y pulsa el ratón.

PROCEDIMIENTO PARA GUARDAR INFORMACIÓN

Para guardar en un Archivo personalizado se deben seguir los siguientes pasos:

Marca la categoría **Archivo** y desplaza el cursor hasta **Guardar Como**. Pulsa el ratón y aparecerá la ventana requerida.



Selecciona en donde dice **Guardar en**: la disquetera **Disco de 3½(A)***(no te olvides de introducir el disquete)***.** Escribe en donde dice “Nombre de archivo” ***PRÁCT 1, y la cédula de identidad*** y luego marca **Guardar**. Volverás a la pantalla de *DERIVE,* si observas en la parte superior, aparece impreso el nombre del archivo.

A:\PRACT 1 10256789.dfw

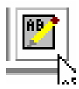
Observación: Una vez que tienes guardado el archivo y necesitas que te actualice lo guardado, conservando el mismo nombre, marca el icono.

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS CATEGORÍAS Y LOS COMANDOS

Escritura de frases.

Para escribir textos en la Ventana, es decir en la pantalla blanca, se procede así:

Pulsa el icono

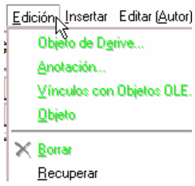


Te aparecerá una Ventana con un recuadro donde podrás escribir el texto deseado. Escribe lo siguiente:

```
Práctica de laboratorio número 1
Apellidos y Nombre:
```

Para borrar lo escrito pulsa el icono

Para recuperar lo borrado pulsa la categoría **Edición** y luego **Recuperar**



NOTA. Guarda lo que han hecho.

OPERACIONES BÁSICAS

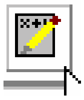
Suma, Resta, Multiplicación y División.

Escribe: Ejemplo 1

Calculemos

$$(23 + 12 - 75) \cdot 45$$

Marca el icono



Escribe la expresión en la ventana. El signo de multiplicación es un asterisco *
Pulsa la tecla **Enter**

Una vez que te aparezca la expresión marca el icono

Escribe: Ejemplo 2.

Calcula lo siguiente.

$$\frac{[23 + 45 - 125] \cdot 15}{2 - 45}$$

El signo "[" se obtiene tecleando simultáneamente AltGr y el signo "[". El signo de división es /.

Puedes dar un resultado aproximado pulsando el icono ≈

Radicales.

Escribe: Ejemplo 3

Calcula

$$\sqrt{(3 \cdot 400 - 5 + 4)}$$

El signo de raíz se encuentra en la ventana de símbolos

Potencias.

Escribe: Ejemplo 4

Calcula

$$(5^4)^2$$

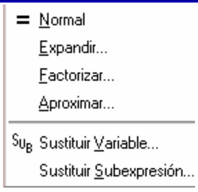
El signo para elevar a una potencia es $\wedge$. Se obtiene tecleando simultáneamente la techa que tiene el símbolo $[\Uparrow]$ y la tecla que tiene el signo $\wedge$.

USO DE LA CATEGORÍA Simplificar

Esta categoría permite, entre sus funciones, expandir expresiones algebraicas, así como también factorizarlas. Veamos el procedimiento a seguir.

Marca la categoría

y pulsa el ratón, obtendrás informativa sobre la función de esta categoría.



Para salirse de cualquier categoría, ubica el cursor en la hoja en blanco o Ventana y pulsa el ratón.

Veamos un ejemplo de aplicación de esta categoría.

Escribe: Ejemplo 5

Escribe la expresión

$$5\cdot(x-6)^6$$

Con el *DERIVE* puedes expandir la expresión anterior, de la siguiente manera:

Marca la categoría simplificar y bajas hasta expandir, luego marca **SÍ**

Te aparecerá,

$$\mathrm{EXPAND}(5\cdot(x-6)^6,\ \mathrm{Rational},\ x)$$

Marca el icono

=

Obtendrás una expansión de la expresión en forma polinómica.

$$5\cdot x^6 - 180\cdot x^5 + 2700\cdot x^4 - 21600\cdot x^3 + 97200\cdot x^2 - 233280\cdot x + 233280$$

Si vuelves a marcar la categoría simplificar y bajas hasta factorizar obtendrás el polinomio factorizado. Hazlo.

Escribe: Ejemplo 6

Expande la siguiente expresión:

$$7(x+4)^5$$

Factoriza la expresión obtenida anteriormente.

<u>USO DE LA CATEGORÍA Resolver.</u>

Esta categoría permite, entre sus funciones resolver ecuaciones de manera algebraica y numérica. Veamos el procedimiento a seguir.

Escribe: Ejemplo 7

Resuelve la ecuación $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

Escribe la expresión de la ecuación

Marca la categoría

Resolver

Luego Expresión

Por último Resolver

NOTA. Guarda lo que han hecho.

<u>Escribe en la ventana simbólica</u>

<u>EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 1</u>

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.

ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
6. Utilice *DERIVE* para resolver los siguientes problema.

a. La luna del planeta Gxyz tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.5 y su periodo de revolución en torno al planeta es de 100 días. Si la luna está en la posición $(a,0)$ cuando $t=0$, entonces el ángulo central después de *t* días está dado por la *ecuación de Kepler* $\frac{2\pi t}{100}=\theta-\frac{1}{2}sen\theta$. Determine θ si $t=17(días)$. (Edwards and Penney Pp 182).

b. Al tratar de determinar la acidez de una solución saturada de hidróxido de magnesio en ácido clorhídrico, obtienes la ecuación $\frac{(3.64)\,10^{-11}}{[H_3O^+]^2}=[H_3O^+]+(3.6)10^{-4}$

Para la concentración del ion hídronio $[H_3O^+]$. Para hallar el valor de $[H_3O^+]$, fijar $x=10^4[H_3O^+]$ y conviertes la ecuación en $x^3+3.6x^2+36.4=0$. Resuelve la ecuación. ¿Cuál es valor de $[H_3O^+]$. (Thomas/ Finney, Pp267)

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J., (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PRÁCTICA 2

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas de *DERIVE* para el estudio de funciones reales, así como también elaborar gráficas de ecuaciones. Dentro de las actividades de esta práctica se introducirán algunos programas de utilidades y ejemplos de aplicación.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 1. Introducción al Cálculo.

OBJETIVOS

1. Graficar funciones.
2. Elaborar la grafica de una ecuación.
3. Graficar puntos.
4. Elaborar y manipular programas de utilidades diseñados en *DERIVE.*

Equipo audiovisual:
Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

GUARDA UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 2 Y TU NÚMERO DE CÉDULA DE IDENTIDAD.

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA
PRÁCTICA DE LABORATORIO NÚMERO 2

APELLIDOS Y NOMBRE:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Escribe: Ejemplo 1
Definamos la función

$$f(x) = 1 + 4x - x^3$$

Escribe en la ventana de Entrada de expresiones la función como a continuación.

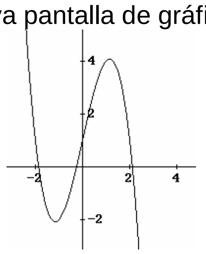
$$\mathbf{f(x) := 1 + 4 \cdot x - x^3}$$

Seguidamente marca la tecla **Enter**

Representemos gráficamente la función. Marca el icono

Cuando aparezca **LA VENTANA GRÁFICA**, vuelves a marcas el icono

Aparecerá la gráfica en una nueva pantalla de gráficos.



Para visualizar la pantalla simbólica y la pantalla gráfica haz lo siguiente: Marca la categoría

Ventana

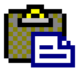
Selecciona mosaico vertical.

<u>IMPRIMIR GRÁFICOS</u>

<u>PREGÚNTALE AL PROFESOR SI HAY UNA IMPRESORA CONECTADA, EN CASO QUE SE PUEDA, IMPRIME LA GRÁFICA.</u>

Marca la ventana que contiene el gráfico y luego el icono

<u>INSERTAR GRÁFICOS EN LA VENTANA SIMBÓLICA</u>

En la ventana gráfica pulsa **Edición** y baja hasta **Marcar y copiar.** Luego con el botón derecho del ratón pulsado marca la parte de la gráfica que deseas, suelta el botón del ratón. Marca la ventana simbólica y luego pulsa el icono  que significa pegar.

Escribe: Ejemplo 2

<u>INSERTA LA GRÁFICA QUE HAS HECHO EN LA VENTANA SIMBÓLICA</u>

<u>UBICACIÓN DE PUNTOS SOBRE LA CURVA</u>

Para ubicar puntos sobre la curva, marca con el cursor el punto deseado; en la parte inferior aparecerá información sobre las coordenadas horizontal y vertical.

Escribe: Ejemplo 3

ANOTA EL NÚMERO EN LA VENTANA SIMBÓLICA.

Si marcas el icono al ubicar algún punto de la gráfica y usando las teclas de desplazamiento izquierdo o derecho te podrás mover a través de los puntos de la gráfica. Observa como cambian las coordenadas al mover el cursor.

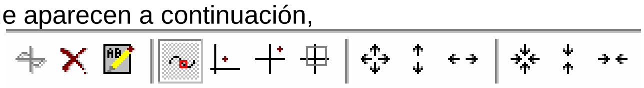
Escribe: Ejemplo 4

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA QUE CONTENGA LA UBICACIÓN DEL PUNTO.

<u>GUARDA LO QUE HAS HECHO</u>

Modificar el Campo Visual de la Gráfica.

Los iconos que aparecen a continuación,



de izquierda a derecha tienen las siguientes funciones

- El primero representa.
- El segundo borra la gráfica.
- El tercero es para incluir anotaciones en la gráfica.
- El cuarto es para fijar el cursor en la gráfica.
- Los quinto y sexto, trasladan el centro de la gráfica en la ventana.
- El séptimo selecciona el rango, y con él puedes hacerle un ZOOM a la gráfica, en la parte que selecciones.
- Los octavo, noveno y décimo reducen el campo visual de la gráfica.
- Los tres restantes, amplificar el campo visual de la gráfica.

Utilizando la gráfica que tienes en pantalla, practica marcando los iconos.

OBSERVACIÓN: Se puede representar una función a la cual se le restringe su dominio.

Escribe: Ejemplo 8

Sea la función definida por $g(x)=1+4x-x^3$, se requiere representarla en el intervalo $[-2-4]$ el procedimiento que se sigue es escribir.

$$IF\left(-2<x<4,1-4x-x^3\right)$$

GRAFICA LA FUNCIÓN. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

Escribe: Ejemplo 9

También se pueden graficar función seccionalmente definidas, tales como:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -3<x<2 \\ \cos x & 2<x<4 \\ \|x\| & 4<x<6 \end{cases}$$

Marca Editar (Autor) se selecciona una matriz de 3 filas y una columna, en cada fila se escribe la definición de una de las porciones de la curva.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{IF}(-3 < x < 2,\ x^3) \\ \mathrm{IF}(2 < x < 4,\ \mathrm{COS}(x)) \\ \mathrm{IF}(4 < x < 6,\ \mathrm{FLOOR}(x)) \end{bmatrix}$$

GRAFICA LA FUNCIÓN. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

<u>GUARDA LO QUE HAS HECHO.</u>

<u>REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN</u>

La representemos gráfica de una ecuación en dos variables *x* e *y* es el conjunto de todos los puntos (x,y) en el plano que satisfacen la ecuación. Podemos elaborar la gráfica de una ecuación independientemente que sea o no una función.

Escribe: Ejemplo 10

$$x^4-4x^3+3x^2+2x^2y^2=y^2+4xy^2-y^4$$

REPRESENTA LA FUNCIÓN. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

Guarda lo que han hecho.

Escribe: Ejemplo 11

<u>Representa la curva cuya ecuación es</u>

$$\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$$

REPRESENTA LA FUNCIÓN. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

OBSERVACIÓN: La ecuación de una recta horizontal es $x=b$,

Escribe: Ejemplo 12.

Dada la ecuación $x=3$. **REPRSENTA LA FUNCIÓN. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.**

<u>ECUACIONES PARAMÉTRICAS</u>

Escribe: Ejemplo 13

<u>Representa la curva cuya ecuación esta expresada en forma paramétrica</u>

$$\begin{cases} x=t-2\ sen(t) \\ y=1-2\cos t \end{cases}$$

Escribe de la siguiente manera las ecuaciones.

`[t - 2·SIN(t), 1 - 2·COS(t)]` **REPRESENTA LA FUNCIÓN. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.**

GUARDA LO QUE HAS HECHO.

GRÁFICA DE PUNTOS

Para representar un punto basta escribir entre corchetes los valores de la abscisa y la ordenada y luego representar. Por ejemplo $(2,3)$ se escribe $[2,3]$.

REPRESENTA EL PUNTO

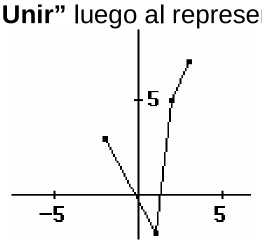
Para representar varios puntos consecutivos se utiliza una matriz de dos columnas y tantas filas como puntos se quieran graficar.

Escribe: Ejemplo 14.

Representa los puntos $(-2,3),(1,-2),(2,5),(3,7)$, se utiliza una matriz de dos columnas y 4 filas**. Elabora la matriz,** se observa así. **HAZLO.**

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Estos puntos al graficarlos se pueden unir, para ello marcar la categoría **Opciones, luego Pantalla, seguido Puntos y marcar "Unir"** luego al representar nuevamente se podrá ver así:



HAZLO.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

Este mecanismo es muy importante, ya que en los casos en los que no se tenga la expresión que define la relación entre dos variables se pueden representar puntos relacionados y así tener un bosquejo de la gráfica.

MODELAR CURVAS.

DERIVE permite ajustar un conjunto de datos mediante una función polinómica de un determinado grado. Para ello el programa implementa la función **FIT.**

Escribe: Ejemplo 15.

Ajustar una curva cúbica a los siguientes puntos: $(-2,20),(3,3),(6,18),(8,30)$. Representar los puntos y la curva.
Definamos la función

Escribe $f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$

PULSA LA TECLA **Enter**

Escribe m:=[[-2,20],[3,3],[6,18],[8,30]]

PULSA LA TECLA **Enter**

Escribe $FIT([x, f(x)], m)$

PULSA LA TECLA **Enter**

Grafica la matriz y la función resultante. Ajusta la gráfica.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

NOTA. Guarda lo que han hecho.

Escribe en la ventana simbólica

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 2

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.

ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. ¿Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
6. *Grafica las siguientes funciones. En cada caso selecciona un parte de la gráfica e insértala en la ventana de símbolos a continuación de cada expresión.*
   a. $i(x) := \dfrac{x}{x^2 - 9}$
   b. $w(x) := 3\sin x$
   c. $s(x) := |x|$ (En *DERIVE* valor absoluto se escribe ABS x)
   d. $n(x) := [|x|]$ (función parte entera). En *DERIVE* parte entera se escribe $n(x) = FLOOR\ x$.
7. Encuentre la solución del sistema por inspección gráfica $\begin{cases} y = \cos(x^2 + 1) \\ y = x^3 \end{cases}$

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA. (Stewart, Pp 331)

8. Encuentre la solución de la ecuación por inspección gráfica $Ln(4 - x^2) = x$

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA. (Stewart, Pp 331)

9. Sustituye en las ecuaciones paramétricas el valor de ***a*** y representa las curvas. Describe las gráficas resultantes.

$$x = a + \cos t \qquad y = a\tan t + \sin t$$

a	-2	-1	-0.5	-0.2	0	0.5	1.	2

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA. (Stewart, Pp 53)

10. La tabla da las emisiones de plomo hacia el medio ambiente en Estados Unidos, **en millones de toneladas métricas**, desde 1970 hasta 1992.

año	Emisiones
1985	18.3
1988	5.9
1989	5.5
1990	5.1
1991	4.5
1992	4.7

   a. Grafique los puntos de la tabla.
   b. Ajuste con una curva los puntos.
   c. Estime la cantidad de emisión de plomo en 1993.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA
(Stewart, p. 82)

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J., (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PRÁCTICA 3

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio del límite de una función. Dentro de las actividades de esta práctica se usarán algunos programas de utilidades para la elaboración de tablas de valores donde se destacará la tendencia al límite de una función.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 1. Introducción al Cálculo.

OBJETIVOS

1. Calcular el límite de una función.
2. Visualizar geométricamente la idea de límite.
3. Elaborar tablas de valores de una función donde se destaque la tendencia al límite de una función.
4. Elaborar y manipular programas de utilidades diseñados en *DERIVE.*

Equipo audiovisual:
Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

GUARDA UN ARCHIVO CON EL NOMBRE DE PRÁCTICA 3, TU CÉDULA DE IDENTIDAD:
ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA
PRÁCTICA DE LABORATORIO NÚMERO 3
APELLIDOS Y NOMBRE

IDEA DE LÍMITE

Decimos que el número ***L*** es el límite de ***f(x)*** cuando ***x*** tiende a ***a*** siempre que podamos hacer que el número ***f(x)*** se acerque a ***L*** tanto como queramos, escogiendo simplemente ***x*** suficientemente cerca, aunque no igual al número ***a***

Con *DERIVE* podemos calcular el límite de una función de diferentes maneras, además tenemos la ventaja de visualizar lo calculado al representar la función. A continuación desarrollemos cada forma de cálculo.

IDEA GEOMÉTRICA DEL LÍMITE.

Para ilustrar el procedimiento consideremos el siguiente ejemplo:

Escribe: Ejemplo 1.

Calcular el límite de la función $f(x) = x^2$ cuando x tiende a 1.

Una vez representada la función, ubica el cursor en un punto de la curva inferior al punto (1,1), mueve el cursor hacia arriba siguiendo los puntos de la curva, acercándote al punto (1,1) observa como van cambiando tanto los valores de ***x*** como los de ***y***.

ESCRIBE: PREGUNTA 1

¿Qué relación estableces entre estos cambios y la idea de Límite?

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA RESPUESTA.

Repite el procedimiento con puntos de la curva superiores al punto (1,1).

ESCRIBE: PREGUNTA 2

¿Qué relación estableces entre estos cambios y la idea de Límite?

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA RESPUESTA.

ESCRIBE: PREGUNTA 3

¿Qué relación estableces entre estos cambios y la idea de Límites laterales?

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA RESPUESTA.

OBSERVACIÓN: En el ejemplo anterior la imagen de la función coincidió con el límite, no obstante en otros casos esto no se presenta de esta manera, veamos a continuación una serie de ejemplos ilustrativos.

Escribe: Ejemplo 2.

Calcular el límite de la función $f(x) := \dfrac{|x|}{senx}$ $\quad x \to 0$ utilizando el método gráfico.

Representa la función.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

¿Cuál es límite de la función cuando x tiende a cero por la izquierda?
¿Cuál es límite de la función cuando x tiende a cero por la derecha?
¿Cuál es límite de la función cuando x tiende a cero?

<u>CÁLCULO DEL LÍMITE UTILIZANDO UN PROGRAMA DE UTILIDADES.</u>

Se pueden construir programas de utilidades para realizar procedimientos personalizados. Para estimar el límite de una función aplicando un Programa de Utilidades, escribe en la ventana de expresiones lo siguiente:

APROX_LIMITE(u, x, a, h):=APPEND([[x, u]], VECTOR([k, LIM(u, x, k)], k, a-5h, a+5h, 2h))

Pulsa la techa **Enter**.

$$\text{APROX\_LIMITE}(u,\ x,\ a,\ h) := \text{APPEND}([[x,\ u]],\ \text{VECTOR}(\left[k,\ \lim_{x\to k} u\right],\ k,\ a - 5\cdot h,\ a + 5\cdot h,\ 2\cdot h))$$

Escribe lo siguiente y pulsa la tecla **Enter**

$$\text{APROX\_LIMITE}(u,\ x,\ a,\ h)$$

El PU calcula aproximaciones al valor límite, donde "**u**" es el miembro de la derecha de la expresión que define la función; **"a"** es la tendencia de los valores de x; con una variación **"h"**. Una vez sustituida **u, a, h** el PU calcula una matriz de valores aproximados, tanto si el acercamiento es por la izquierda o por la derecha de **"a".**

Escribe: Ejemplo 3.

Estimar el límite de la función

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{2+x}}{-3 + \sqrt{1+4x}} \qquad x \to 2$$

Marca el icono SUB para sustituir las letras

Sustituye **u** por $\dfrac{x - \sqrt{2+x}}{-3+\sqrt{1+4x}}$ el valor de **"a"** es 2, tomemos una variación de los valores de ***x*** en **h** igual a 0.1 Marca **Sí y obtendrás la matriz**

¿ENTRE QUÉ VALORES SE ENCUENTRA EL LÍMITE

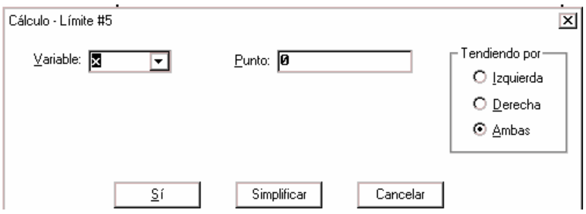
ESCRIBE LA RESPUESTA EN LA VENTANA SIMBÓLICA

<u>CÁLCULO DEL LÍMITE UTILIZANDO LA CATEGORÍA "CÁLCULO"</u>

Escribe: Ejemplo 4.

Escribe la expresión $\dfrac{x - \sqrt{2+x}}{-3+\sqrt{1+4x}}$

Para calcular el límite de la función. Marca la categoría **Cálculo** y luego **Límites o también marca el icono** lim **.** Te aparecerá una ventana como ésta.



Se selecciona la variable, se escribe el punto al cual tiende x (el cual puede ser un número real o en el caso de límites al infinito selecciona de la ventana de símbolos el de infinito); selecciona la tendencia, de manera predeterminada *DERIVE* lo calcula por **Ambas,** pero se puede calcular por el lado izquierdo o por el lado derecho. Una vez que se marca **Sí** aparecerá la expresión del límite, luego al marcar aproximado se tendrá la respuesta.
Calcula el límite en el ejemplo 5 cuando x tiende a cero.

Escribe: Ejemplo 5.
Calcula el límite de la función

$$f(x) = \frac{sen^2 x}{x^2} \qquad x \to +\infty$$

CÁLCULO DEL LÍMITE UTILIZANDO LA VENTANA DE ENTRADAS DE EXPRESIONES

La expresión que se utiliza es:

LIM(f(x), x, a, dirección)

El término **f(x)** se cambia por la expresión de la función a la cual se le va ha calcular el límite. La ***a*** es el punto al que tiende la variable y **dirección** puede tomar los valores: **-1** si es por la izquierda (límite lateral), **1** por la derecha (límite lateral) y **0,** que se puede omitir**,** si es por ambos lados.

Escribe: Ejemplo 6.
Utiliza la expresión anterior para calcula el límite.

$$\lim_{x \to \pi} \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$$

Escribe: Ejemplo 7.

Calcula el límite de la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \le 2 \\ x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$ cuando $x \to 2$

<u>*Escribe en la ventana simbólica*</u>

<u>EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 3</u>

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.
ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
6. Calcular el límite de la función $f(x) = \sqrt[x]{e} \qquad x \to 0$ utilizando el método gráfico. La función exponencial se escribe con el símbolo $\hat{e}$
7. Sea $g(t) := \frac{(1 - \cos t)}{t^2}$

c. Representa la función y calcula el $\lim_{t \to 0} g(t)$ ubicando un punto sobre la gráfica y moviéndose por aproximación al límite. **Marca y copia en la ventana simbólica la grafica.**

d. Calcula el límite y compara con la respuesta anterior.

(Thomas, Pp 59)

8. Representas gráficamente el sistema $\begin{cases} y = 1 - \left(\dfrac{x^2}{6}\right) \\ y = (xsenx)/(2 - 2\cos x) \\ y = 1 \end{cases}$

¿Qué comportamiento tienen las gráficas cuando $x \to 0$? **Marca y copia en la ventana simbólica la grafica.**
(**Thomas. Pp 66).**

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J. (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PRÁCTICA 4

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizará las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de la recta tangente a una curva y su relación con la derivada de una función. Dentro de las actividades de esta práctica se usarán algunos programas de utilidades para calcular la derivada de una función.

Unidad temática del programa.

Programa de Cálculo 1. Unidad 2. DERIVADA.

OBJETIVOS

1. Establecer relaciones entre la recta tangente a una curva y la derivada de la función.
2. Calcular la derivada de una función usando editar expresión.
3. Calcular la derivada de una función utilizando la categoría "Cálculo"
4. Aplicar programas de utilidades en el estudio de la derivada de una función.

Equipo audiovisual:

Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA Y LA DERIVADA

Geométricamente, la derivada de una función en un punto representa la pendiente de la tangente a la gráfica de la función en el punto. El origen de la idea de derivada proviene precisamente del intento de trazar la recta tangente en un punto dado a una curva dada. A continuación se expone un Programa de Utilidades (PU) que se diseñó para dar una interpretación geométrica a la relación entre la recta tangente a una curva y la derivada de una función

ABRE EL ARCHIVO GUARDADO EN TU DISKETTE 31/2 CON EL NOMBRE RECTA TANGENTE. CÁMBIALE EL NOMBRE POR (PRÁCTICA 4) y TU NÚMERO DE CÉDULA.

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA

PRÁCTICA DE LABORATORIO NÚMERO 4

APELLIDOS Y NOMBRE

COMENTARIO

Cada sentencia del PU expresa lo que hace. Por ejemplo: La sentencia #2 calcula la pendiente de la recta secante en el punto **(a, *f*(a))** con un incremento ***n*.** Con las sentencias #4 y #5 se pueden representar *n* rectas secantes; la sentencia #6 sirve para representar la recta tangente. Las sentencias de la #1 a la #6 son del programa base (PB) y las sentencias # 7 a la #9 del programa ejecutable (PE). Ilustremos su uso con un ejemplo.

ESCRIBE: EJEMPLO 1.

Define la función $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{6}$ y represéntala gráficamente. Representemos gráficamente 5 rectas secantes que pasen por el punto (2, *f(2)*), tanto para puntos cuyo valor de x este a la derecha como a la izquierda de x = 1.

Sustituye en la sentencia #7 los valores de a = 2 y n = 5, al marcar el icono de aproximado obtendrás una matriz que representa las expresiones que definen las rectas secantes que pasan por el punto (*2*, *f(2)*) y por los puntos cuyos valores de x están a la derecha de x = 2.

REPRESENTA LA MATRIZ. Sustituye en la sentencia #9 el valor de a= 2; obtendrás la ecuación de la recta tangente; **REPRESÉNTALA.**

MARCA Y PEGA LA GRÁFICA EN LA VENTANA SIMBÓLICA.

¿QUÉ RELACIÓN ESTABLECES ENTRE LAS RECTAS SECANTES Y LA RECTA TANGENTE?

BORRA TODAS LAS GRÁFICAS DE LA VENTANA GRÁFICA. REPRESENTA LA FUNCIÓN Y LA RECTA TANGENTE.

Sustituye en la sentencia #8 los valores de a = 2 y h = 5. **Representa la matriz.**

MARCA Y PEGA LA GRÁFICA EN LA VENTANA SIMBÓLICA.

¿QUÉ RELACIÓN ESTABLECES ENTRE LAS RECTAS SECANTES Y LA RECTA TANGENTE?

<u>ESTIMACIÓN DE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO UTILIZANDO ACERCAMIENTOS UTILIZANDO EL *ZOOM* DE LA GRÁFICA</u>

Algunas veces nos referimos a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la pendiente de la curva en el punto. La idea es que al acercarnos lo suficientemente al punto la curva se semeja a una línea recta. Utilizando *DERIVE* podemos graficar la curva y aplicando varios *ZOOM* se puede lograr ver la curva como si fuera recta, lo cual permite lograr establecer dos punto de la curva lo bastante cerca y con ello poder calcular una estimación de la pendiente de la recta tangente a través de la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos, donde uno de ellos es el punto tangente. De esta manera podemos tener una estimación de la derivada de la función en un punto particular.

ESCRIBE: EJEMPLO 2.

Sea $f(x)=2^x$. Estimemos el valor de $f'(0)$.

El punto tangente es $(0,1)$

Representa la función y hazle sucesivos *ZOOM* alrededor del punto $(0,1)$ hasta que se asemeje a una recta. Ya tienes el punto tangente, el otro punto que necesitas lo puedes obtener ubicando un punto cercano al este punto; una vez que obtengas el punto calcula la pendiente de la recta secante que pasa por estos puntos. Este valor es una estimación de la derivada cuando x=0.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA

ESCRIBE EL VALOR ESTIMADO DE LA DERIVADA EN X = 0

<u>CÁLCULO DE LA DERIVADA USANDO “EDITAR EXPRESIÓN”</u>

Con *DERIVE* se puede calcular la derivada escribiendo la expresión **DIF (g, x)** para calcular la primera derivada.

ESCRIBE: EJEMPLO 3.

Calcule la derivada de $g(x)=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-3}}$

Para ello escribe la expresión

$$\mathrm{DIF}\left(\frac{5}{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2+2}{x^3}-3,\ x\right)}\right)$$

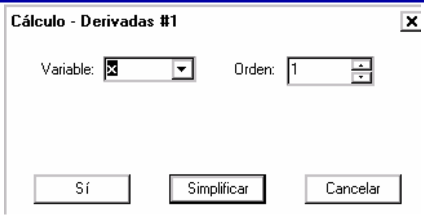
y luego el icono de igualdad.

La expresión DIF (g, x, n) se utiliza para calcular la n-ésima derivada.

Calcula la tercera derivada de la función g.

CÁLCULO DE LA DERIVADA USANDO LA CATEGORÍA “*Cálculo*”

Una vez escrita la expresión a derivar, marcas la categoría **Cálculo,** luego **Derivadas** te aparecerá una ventana.



Escoges con respecto a qué variable vas a derivar y el orden de derivación, es decir, si es la primera derivada o una de orden mayor.

ESCRIBE: EJEMPLO 4

Deriva la función $g(x) = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-3}}$

<u>DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS</u>

Las funciones que hemos utilizado están escritas de manera explícitas, es decir una de las variables en términos de la otra. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre *x* e *y*. A continuación explicamos el procedimiento para calcular su derivada de funciones escritas de manera implícitas.

Sigue la siguiente secuencia: Marca **Archivo**, luego **Abrir,** en donde dice **Buscar** debe aparecer la indicación del disco duro **C,** selecciona la carpeta **DFW5,** luego la carpeta **Math,** seguido **Dif_apps,** marca la sentencia **# 23,** cópiala y la pegas es el archivo que vienes trabajando.

Para completar el PU escribe:

u:=
n:=
IMP_DIF(u,x,y,n)

Este Programa de Utilidades permite calcular la derivada implícita, cualquiera que sea el orden **"n"**, lo realiza de manera iterada, es decir la derivada siguiente depende de la anterior.

ESCRIBE: EJEMPLO 5.

Calcula $\frac{dy}{dx}$ de $sen(x+y) = y^2 \cos x$

Sustituye en **IMP_DIF(u,x,y,n)** la **u** por $\sin(x+y) - y^2 \cos x$ la **n por 1** (primera derivada) luego pulsa la tecla de **Enter y después marca el icono de aproximado.**

<u>Escribe en la ventana simbólica</u>

<u>EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 4</u>

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.
ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. ¿Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio.
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?.
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.

Utilice *DERIVE* para resolver los siguientes problemas.

6. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.

Utiliza "Editar expresión" <u>escribe la expresión.</u>

Problema 1

$$y=\left(x+x^2\right)^5\left(1+x^3\right)^2 \qquad \text{a) } \frac{dy}{dx} \quad \text{b) } \frac{d^2y}{dx^2}$$

Problema 2

$$y=\frac{\sec x}{1+\tan x} \qquad \text{a) } \frac{dy}{dx} \quad \text{b) } \frac{d^4y}{dx^4}$$

Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones, utilizando la categoría "Calcular"

Problema 3

$$f(x)=\frac{7+2x-3x^3}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad \text{a) } f'(x) \qquad \text{b) } f''(x)$$

Problema 4

$$f(x)=\sqrt{x}sen\sqrt{x+\sqrt{x}} \qquad f'(x) \qquad \text{b) } f^{(5)}(x)$$

Calcula la derivada implícita.

Problema 5

$$xseny+\cos 2y=\cot xy \qquad \frac{d^2y}{dx^2}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J. (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PROGRAMA DE UTILIDADES PARA EL CÁLCULO DE LA TANGENTE A UNA CURVA

```
#1:   f(x) :=

                                            f(a + h) - f(a)
#2:   PENDIENTE_RECTA_SECANTE(a, h) :=  -----------------
                                                  h

#3:   SECANTE(a, h) := PENDIENTE_RECTA_SECANTE(a, h)·(x - a) + f(a)

      RECTA_TANGENTE(a) := lim SECANTE(a, h)
#4:                        h→0

#5:   RECTAS_SECANTE_1(a, h, n) := VECTOR([SECANTE(a, h)], h, 1, n)

#6:   RECTAS_SECANTE_2(a, h, n) := VECTOR([SECANTE(a, h)], h, -n, -1)

#7:   RECTAS_SECANTE_1(a, h, n)

#8:   RECTAS_SECANTE_2(a, h, n)

#9:   RECTA_TANGENTE(a)
```

PRÁCTICA 5

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizará las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para representar funciones utilizando los criterios de la primera y segunda derivada.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 4. APLICACIÓN DE LA DERIVADA.

OBJETIVOS

1. Aplicar los criterios de la primera y segunda derivada para establecer crecimiento de decrecimiento de una función, valores extremos de la función, concavidad y puntos de inflexión.
2. Representar funciones que posean asíntotas.

Equipo audiovisual:

Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aun persiste consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA: PRÁCTICA 5. APELLIDOS Y NOMBRE

En esta práctica obtendrás información sobre la gráfica de una función a partir del comportamiento de sus derivadas, lo cual resulta muy útil para detallar la representación gráfica de funciones.

En el ejemplo siguiente, a partir de la gráfica de la función, calcularas: intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores extremos, concavidad y puntos de inflexión de la misma.

Ejemplo 1.

Utiliza la **gráfica de la función** cuya expresión es $f(x) = x\cos(\pi x)$ en el intervalo $[-3.5, 2.5]$

Responde las siguientes preguntas (dar las aproximaciones con 5 cifras decimales)

1) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?
2) ¿Cuáles son los intervalos de decrecimiento?
3) ¿En cuales intervalos la derivada de la función es positiva y el cuáles negativa?
4) ¿Cuáles son los valores máximos relativos de la función?
5) ¿Cuáles son los valores mínimos relativos de la función?
6) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo absolutos de la función?
7) ¿En cuáles puntos la recta tangente es horizontal?
8) ¿En cuáles intervalos la gráfica es cóncava hacia arriba?
9) ¿En cuáles intervalos la gráfica es cóncava hacia abajo?
10) ¿Cuáles son los puntos de inflexión?
11) ¿En cuales intervalos la segunda derivada de la función es positiva y el cuáles negativa?

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA EN EL INTERVALO SEÑALADO.

Ejemplo 2.

Dada la expresión que define la función $f(x) = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$

1. Representa la función.
2. Determina su dominio.
3. Calcula los números críticos. Hazlo analíticamente.
4. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Hazlo analíticamente. Copia y pega un parte de gráfica donde crece y otra donde decrece.
5. Determina los valores extremos de la función. Utiliza el criterio de la primera derivada y de la segunda derivada. Escribe las coordenadas de los puntos. Copia y pega una parte de la gráfica donde se encuentre un máximo y una donde se encuentre un mínimo.
6. Determina los valores de x donde pueden existir posibles puntos de inflexión.
7. Determina los intervalos dónde la gráfica de la función es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Hazlo analíticamente. Copia y pega una parte de la gráfica donde sea cóncava hacia arriba y donde se cóncava hacia abajo.
8. Determina los puntos de inflexión. Escribe sus coordenadas.
9. Copia y pega la gráfica de la función en la ventana simbólica.

Escribe en la ventana simbólica

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 5

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.
ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. ¿Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio?
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.

Utilice *DERIVE* para resolver los siguientes problemas.

6. Entre 0º C y 30º C, el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426\ T + 0.0085043\ T^2 - 0.0000679\ T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima. (Stewart, pag. 280). Represente la función (copia y pega en la ventana simbólica). De un respuesta gráfica y analítica.

7. El 24 de abril de 1990, el transportador espacial *Discovery* desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transportador durante una misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron en $t = 126\,seg$, se expresa mediante $v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$ (en pies/seg). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transportador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares. (Stewart, pag. 281). Represente la función (copia y pega en la ventana simbólica). Dé una respuesta gráfica y analítica.

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J. (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PRÁCTICA 6

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de regiones bajo una curva, utilizando el método gráfico.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 4. MEDIDA DE UNA REGIÓN BAJO UNA CURVA. MÉTODO GRÁFICO.

OBJETIVOS

1. Ilustrar geométricamente la aproximación de la medida de una región bajo curva utilizando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos.
2. Comparar geométricamente las distintas aproximaciones a la medida de una región bajo una curva.

Equipo audiovisual:

Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aun persiste consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

Los procedimientos que desarrollaremos en esta práctica surgieron por la necesidad de calcular aproximaciones de la región bajo una curva, con mayor precisión.

El basamento de la teoría se debe al famoso matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) Quien ideó lo que se conoce como **Sumas de Riemann.**

Se ha diseñado un Programa de Utilidades, que permite graficar un rectángulo, trapecios y trapecios parabólicos, que permite aproximar el valor de la medida de una región bajo una curva.

ABRE UNA CARPETA EN EL DISCO DURO Y ESCRIBE LOS NÚMEROS DE CÉDULAS COMO NOMBRE DE LA CARPETA.

Abre el archivo con el nombre PROGRAMA DE UTILIDADES (MG), que se encuentra en el disco 31/2 que se te entregará. Guarda el archivo con el nombre PRÁCTICA 6, y números de cédula.

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA
PRÁCTICA DE LABORATORIO NÚMERO 6

APELLIDOS Y NOMBRE

El programa esta estructurado para proporcionar el marco gráfico del cálculo de la medida de una región bajo una curva.

A continuación se te presenta un ejemplo en donde aplicarás el Programa de Utilidades.

Dada la función definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ ilustraremos geométricamente el cálculo de la medida de una región bajo la curva en el intervalo $[-1, 2.5]$ utilizando rectángulos inferiores, superiores, punto medio, trapecios y trapecios parabólicos (regla de Simpson).

Ejemplo 1.

Representa La función.

Calcula la intersección de la gráfica con el eje X.

Escribe los intervalos en donde la gráfica se encuentra sobre el eje X y bajo el eje X en el intervalo $[-1,2.5]$.

COMENTARIOS DEL PROGRAMA DE UTILIDADES.

El programa tiene 25 sentencias. La sentencia #15 se utilizan para graficas rectángulos inferiores sobre el eje x, la sentencia #16 rectángulos inferiores bajo el eje x, la sentencia #17 rectángulos superiores sobre el eje x, la sentencia #18 rectángulos superiores bajo el eje x, la sentencia #19 rectángulos tomando el extremo izquierdo de cada subintervalo, la sentencia #20 rectángulos tomando el extremo derecho de cada subintervalo, la sentencia #21 rectángulos tomando el punto medio en cada subintervalo, la sentencia #22 trapecios y la sentencia #24 trapecios parabólicos.

Representemos gráficamente 7 rectángulos sobre el eje x en el intervalo donde la gráfica esta sobre el eje x. Sustituye en la sentencia #15 (marca la sentencia sólo en la parte RECT_INF_SOBRE_EL_EJE(a, b, n)) los valores de "a, b" por los extremos del intervalo y "n"por 7, MARCA EL ICONO DE APROXIMADO, te aparecerá una matriz, cada elemento de la matriz representa los cálculos necesarios para elaborar la gráfica. Representa la matriz.

Utiliza la sentencia #16 y grafica 7 rectángulos inferiores bajo el eje x en el intervalo donde la gráfica se encuentra bajo el eje x.

MARCA Y COPIA LA GRÁFICA EN LA VENTANA SIMBÓLICA.

1. Calcula el valor de la medida de una región encerrada en cada rectángulo.
2. Calcula la suma de todas las medidas de las regiones que se encuentran sobre el eje x en el intervalo considerado.
3. Calcula la suma de las medidas de las regiones que se encuentran bajo el eje x en el intervalo considerado.
4. Calcula la suma de las medidas de las regiones que se encuentran sobre y bajo el eje x en el intervalo considerado.
5. Calcula la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran sobre el eje x en el intervalo considerado.
6. Calcula la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran bajo el eje x en el intervalo considerado.
7. Calcula la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran sobre y bajo el eje x en el intervalo considerado.
8. Si comparas los resultados de 2 y 5 qué concluyes.
9. Si comparas los resultados de 3 y 6 qué concluyes.
10. Si comparas los resultados de 4 y 7 qué concluyes.

BORRA LOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

Ejemplo 2

Representa siete rectángulos superiores en cada región.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

BORRA LOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

Ejemplo 3

Representa siete rectángulos tomando el extremo izquierdo de cada subintervalo en cada región.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

BORRA LOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

Ejemplo 4

Representa siete rectángulos tomando el extremo derecho de cada subintervalo en cada región.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.

BORRA LOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

Ejemplo 5

Grafica siete rectángulos tomando el punto medio de cada subintervalo en cada región.

MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
BORRA LOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

Ejemplo 6

Representa siete trapecios en cada región.
MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
BORRA LOS TRAPECIOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

Ejemplo 7

Representa siete trapecios parabólicos (regla de Simpson) en cada región.
MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
BORRA LOS RECTÁNGULOS DE LA VENTANA GRÁFICA

1. ¿CUÁL DE LAS APROXIMACIONES TE PARECE LA MEJOR? ¿POR QUÉ?
2. ORDENA DE MENOR A MAYOR LAS APROXIMACIONES.

Ejemplo 8

Representa 100 rectángulos inferiores en el intervalo donde la región esta sobre el eje x.
MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
¿Consideras que con 100 rectángulos es suficiente para cubrir la región? Justifica tu respuesta.

Escribe en la ventana simbólica

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 6

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.
ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. ¿Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio?
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
6. Abre el archivo que se encuentra en el disco 31/2 y guárdalo en la carpeta del disco duro con el nombre Pract6-Cédula de identidad-problema

   Dada la función cuya expresión es $f(x) = \frac{1}{x^2}$

   a. Grafica la función
   b. Dibuja cinco rectángulos inferiores en el intervalo $[0,3]$. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
   c. BORRA LOS RECTÁNGULOS. Dibuja cinco rectángulos superiores en el intervalo $[0,3]$. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
   d. BORRA LOS RECTÁNGULOS. Dibuja cinco rectángulos superiores en el intervalo $[-1,2]$. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
   e. BORRA LOS RECTÁNGULOS. Dibuja cuatro rectángulos superiores en el intervalo $[-2,2]$. MARCA Y COPIA EN LA VENTANA SIMBÓLICA LA GRÁFICA.
      i. ¿Qué diferencia existe en cuanto al número de rectángulos graficados en la parte “b” y en la parte “c”? ¿A qué se debe ésto?
      ii. ¿Qué diferencias existen entre las gráficas de la parte “d” y “e”? ¿A qué se deben estas diferencias?

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.*.Cuarta edición, México. Prentice Hall.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. México. Addison Wesley Longman.
4. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PROGRAMA DE UTILIDADES. MÉTODO GRÁFICO

#1: F(x) :=

#2: $\text{RECTANGULO}(a, b, h) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & h \\ b & h \\ b & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{TRAPECIO}(a, \alpha, b, \beta) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \alpha \\ b & \beta \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{MEDIDA\_RECT}(c, d) := c \cdot d$

$\text{MEDIDA\_TRAP}(c, d, h) := \dfrac{(c + d) \cdot h}{2}$

#6: $H(a, b, n) := \dfrac{b - a}{n}$

#7: $\text{FMIN}(a, b, n) := \text{MIN}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)))$

#8: $\text{FMAX}(a, b, n) := \text{MAX}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)))$

#9: $\text{XL}(a, b, n) := a + (i - 1) \cdot H(a, b, n)$

#10: $\text{XR}(a, b, n) := a + i \cdot H(a, b, n)$

#11: $\text{XM}(a, b, n) := a + (i - 0.5) \cdot H(a, b, n)$

#12: $\text{XLP}(a, b, n) := a + 2 \cdot (i - 1) \cdot H(a, b, n)$

#13: $\text{XRP}(a, b, n) := a + 2 \cdot i \cdot H(a, b, n)$

#14: $\text{XMP}(a, b, n) := a + (2 \cdot i - 1) \cdot H(a, b, n)$

#15: RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#16: RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#17: RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#18: RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)

#19: RECT_EXTREMO_IZQUIERDO(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n), F(a + i·H(a, b, n))), i, 0, n - 1)

```
#20:   RECT_EXTREMO_DERECHO(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b,
         n), F(a + (i + 1)·H(a, b, n))), i, 0, n - 1)

#21:   RECT_PTO_MEDIO(a, b, n) := VECTOR⎛RECTANGULO⎛a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n),
                                        ⎝          ⎝

                            H(a, b, n)⎞⎞
         F⎛a + (2·i + 1)·──────────⎟⎟, i, 0, n - 1⎞
          ⎝                   2      ⎠⎠            ⎠
#22:   TRAPECIOS(a, b, n) := VECTOR(TRAPECIO(a + i·H(a, b, n), F(a + i·H(a, b, n)), a + (i +
         1)·H(a, b, n), F(a + (i + 1)·H(a, b, n))), i, 0, n - 1)

                                        ⎛⎡     ⎡                   2             ⎤⎤           ⎞
                                        ⎜⎢     ⎢      x          p·x  + q·x + r  ⎥⎥           ⎟
                                        ⎜⎢     ⎢                                 ⎥⎥           ⎟
                                        ⎜⎢     ⎢ XLP(a, b, n)  F(XLP(a, b, n))   ⎥⎥         n ⎟
#23:   PARAB_SIMP(a, b, n) := VECTOR    ⎜⎢FIT  ⎢                                 ⎥⎥, i, 1, ───⎟
                                        ⎜⎢     ⎢ XMP(a, b, n)  F(XMP(a, b, n))   ⎥⎥         2 ⎟
                                        ⎜⎢     ⎢                                 ⎥⎥           ⎟
                                        ⎝⎣     ⎣ XRP(a, b, n)  F(XRP(a, b, n))   ⎦⎦           ⎠

#24:   CURVA_SIM(a, b, n) := VECTOR⎛CHI(XLP(a, b, n), x, XRP(a, b, n))·ELEMENT(PARAB_SIMP2(a,
                                   ⎝

                           n ⎞
         b, n), i), i, 1, ───⎟
                           2 ⎠
                                          ⎛⎡ XLP(a, b, n)  F(XLP(a, b, n)) ⎤           ⎞
                                          ⎜⎢                               ⎥           ⎟
                                          ⎜⎢ XLP(a, b, n)        0         ⎥         n ⎟
#25:   SEGMENTOS_SIM(a, b, n) := VECTOR   ⎜⎢                               ⎥, i, 1, ───⎟
                                          ⎜⎢ XRP(a, b, n)        0         ⎥         2 ⎟
                                          ⎜⎢                               ⎥           ⎟
                                          ⎝⎣ XRP(a, b, n)  F(XRP(a, b, n)) ⎦           ⎠
```

PRÁCTICA 7

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de regiones bajo una curva, utilizando aproximación numérica.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 4. MEDIDA DE UNA REGIÓN BAJO UNA CURVA. MÉTODO NUMÉRICO.

OBJETIVOS

1. Calcular la medida de una región bajo una curva utilizando rectángulos punto medio, trapecios y trapecios parabólicos (Regla de Simpson).
2. Comparar las distintas aproximaciones a la medida de una región bajo una curva con el valor exacto de ésta.

Equipo audiovisual:

Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aún persisten consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

ABRE UNA CARPETA EN EL DISCO DURO Y ESCRIBE LOS NÚMEROS DE CÉDULAS COMO NOMBRE DE LA CARPETA.

Abre el archivo con el nombre PROGRAMA DE UTILIDADES (MN), que se encuentra en el disco 31/2 que se te entregará. Guarda el archivo con el nombre PRÁCTICA 7, y números de cédula.

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA

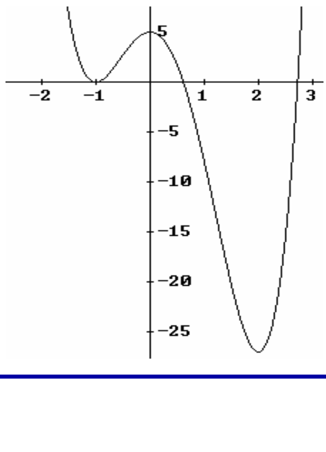
PRÁCTICA DE LABORATORIO NÚMERO 7

APELLIDOS Y NOMBRE

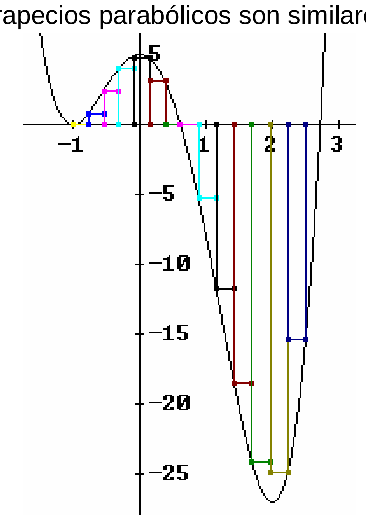
En la práctica 6 se desarrolló el método gráfico para estimar el valor de la región bajo una curva.

El problema planteado en la práctica 7 consistió en calcular el valor de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ acotada en el intervalo cerrado $[-1, 2.5]$.

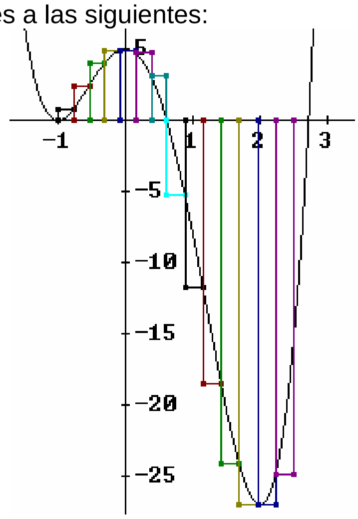
La gráfica de la función es



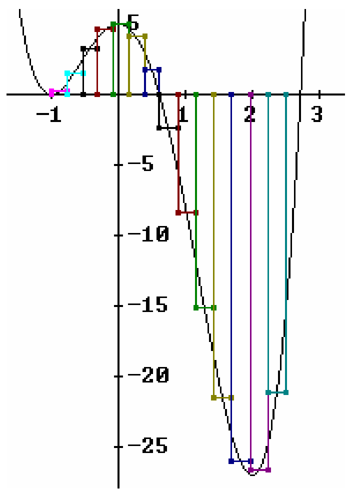
Las diferentes gráficas que elaboraste en la práctica 6 tomando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos son similares a las siguientes:



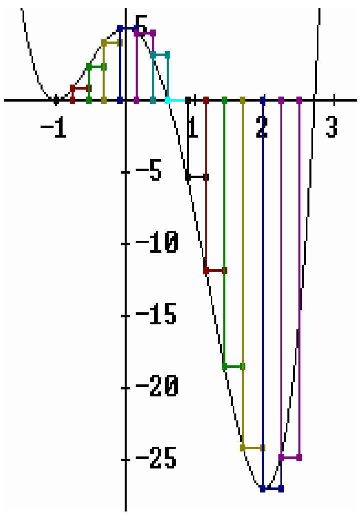
Rectángulos inferiores



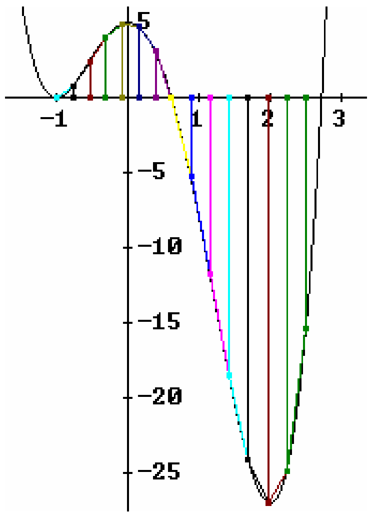
Rectángulos superiores



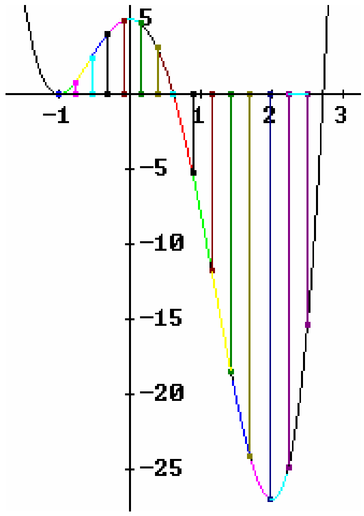
Rectángulos punto medio



Rectángulos-Extremo izquierdo



Trapecios



Trapecios parabólicos

MARCO NUMÉRICO DEL CÁLCULO DEL VALOR DE LA MEDIDA DE LA REGIÓN BAJO UNA CURVA

Para establecer el marco numérico se construyó un Programa de Utilidades con 28 sentencias que permiten estimar el valor de la región tanto si esta sobre o bajo el eje X.

Calculemos el valor de la región en el problema de la práctica 6 en el intervalo $[-1,\ 0.612574]$ cuya región se encuentra sobre el eje X, utilizamos la sentencia #15 la cual aproxima el valor de medida de la región utilizando rectángulos inferiores, esta sentencia se elaboró a partir de sumas de Riemann, tomando longitudes iguales es la base de cada rectángulo y altura la imagen mínima de los extremos de cada subintervalo.

Ejemplo 1

Escribe la expresión de la función $F(x) := 3 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 5$

Aproxima el valor de la medida de la región tomando siete rectángulos inferiores; sustituye en parte de la sentencia MEDIDA_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) los valores de “a, b, c” por -1, 0.612574 y 7 respectivamente, marca el icono de igualdad.

La sentencia #18 aproxima el valor de la medida de la región bajo la curva utilizando rectángulos superiores, diseñada tomando longitudes iguales en la base de cada rectángulo y altura la imagen máxima en los extremos de cada subintervalo.

Ejemplo 2

Aproxima el valor de la medida de la región en el intervalo $[-1,\ 0.612574]$ utilizando siete rectángulos superiores.

La sentencia #19 aproxima el valor de la medida de la región bajo la curva utilizando rectángulos extremo izquierdo, diseñada tomando longitudes iguales en la base de cada rectángulo y altura las imágenes del extremo izquierdo de cada de cada subintervalo.

Ejemplo 3

Aproxima el valor de la región en el intervalo $[-1, 0.612574]$ utilizando siete rectángulos extremo izquierdo.

La sentencia #20 aproxima el valor de la medida de la región bajo la curva utilizando rectángulos extremo derecho, diseñada tomando longitudes iguales en la base de cada rectángulo y altura las imágenes del extremo derecho de cada de cada subintervalo.

Ejemplo 4

Aproxima el valor de la región en el intervalo $[-1, 0.612574]$ utilizando siete rectángulos extremo derecho.

La sentencia #21 aproxima el valor de la medida de la región bajo la curva utilizando rectángulos punto medio, diseñada tomando longitudes iguales en la base de cada rectángulo y altura las imágenes del punto medio de cada de cada subintervalo.

Ejemplo 5

Aproxima el valor de la región en el intervalo $[-1, 0.612574]$ utilizando siete rectángulos punto medio.

La sentencia #22 aproxima el valor de la medida de la región bajo la curva utilizando trapecios, diseñada tomando longitudes iguales en la base de cada trapecio y altura las imágenes en los extremos de cada subintervalo.

Ejemplo 6

Aproxima el valor de la medida de la región en el intervalo $[-1, 0.612574]$ utilizando siete trapecios.

La sentencia #23 aproxima el valor de la región bajo la curva utilizando trapecios parabólicos (regla de Simpson), diseñada tomando longitudes iguales en la base de la gráfica y las alturas son calculadas a través de las imágenes de porciones de parábolas que aproximan la curva en estudio en cada subintervalo.

Ejemplo 7

Aproxima el valor de la región en el intervalo $[-1, 0.612574]$ utilizando siete trapecios parabólicos (regla de Simpson).

Ejemplo 8

Ordena de menor a mayor las diferentes aproximaciones.

La sentencia #24 proporciona una matriz donde se ordenan las diferentes aproximaciones del valor de la región sobre el eje x.

Ejemplo 9

Sustituye en la sentencia #24 los valores de “a, b, n” por -1, 0.612574 y 7 respectivamente.

Analiza la matriz y escribe lo que consideres más relevante.

La sentencia #25 proporciona una matriz de aproximaciones del valor de la medida de la región sobre el eje x, la primera columna representa el número de figuras, la segunda las aproximaciones usando rectángulos inferiores, la tercera rectángulos punto medio, la cuarta trapecios y la quinta trapecios parabólicos, y la sexta rectángulos superiores.

Ejemplo 10

Sustituye “a, b, j, k, m” por -1, 0.612574, 10, 30, 5 respectivamente; que significan: los extremos del intervalo, empezando con 10 hasta 30 figuras variando de 5 en 5.

LÍMITE DE LA SUMA DE RIEMANN.

Para calcular el límite de las sumas de Riemann, primero calculamos el n-ésimo término de las sumas de Riemann y luego calculamos su límite.

Ejemplo 11

Sustituye en la sentencia #19 (rectángulos extremo izquierdo) los valores de “a, b” por -1 y 0.612475 respectivamente.

Calcula el límite de la expresión encontrada.

Ejemplo 12

Sustituye en la sentencia #20 (rectángulos extremo derecho) los valores de “a, b” por -1 y 0.612475 respectivamente.

Calcula el límite de la expresión encontrada.

Ejemplo 13

Sustituye en la sentencia #21 (rectángulos punto medio) los valores de “a, b” por -1 y 0.612475 respectivamente.

Calcula el límite de la expresión encontrada.

Ejemplo 14

Sustituye en la sentencia #22 (trapecios) los valores de “a, b” por -1 y 0.612475 respectivamente.

Calcula el límite de la expresión encontrada.

Ejemplo 15

Sustituye en la sentencia #23 (regla de Simpson) los valores de “a, b” por -1 y 0.612475 respectivamente.

Calcula el límite de la expresión encontrada.

¿Qué concluyes en relación al cálculo del límite de la Sumas de Riemann?

Compara este valor del límite con las diferentes aproximaciones, ¿cuál es la mejor aproximación?

REGIÓN BAJO EL EJE X

El valor de la medida de la región bajo el eje x puede ser calculado con las sentencias #16, #18, #19, #20, #21, #22 y #23 para aproximaciones con las diferentes figuras. Las sentencias #25 y #27 proporcionan matrices de aproximaciones.

Ejemplo 16

Utilizando la función anterior calcula para el intervalo $[0.612475,\ 2.5]$ lo siguiente.

a. Las aproximaciones del valor de la medida de la región con siete figuras de cada tipo. Usa la sentencia #25.
b. Las aproximaciones tomando entre 10 y 30 figuras de cada tipo, variando de 5 en 5. Usa la sentencia #27.
c. El límite de la suma de Riemann. Utiliza la sentencia #28.

Responde lo siguiente.

a. ¿Cuál es el valor de la medida de la región en el intervalo $[-1,\ 2.5]$?
b. ¿Cuál es el valor del área en el intervalo $[0.612475,\ 2.5]$?
c. ¿Cuál es el valor del área en el intervalo $[-1,\ 2.5]$?

<u>*Escribe en la ventana simbólica*</u>

<u>EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 7</u>

Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.

ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. ¿Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio?
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.

6. Abre el archivo que se encuentra en el disco 31/2 y guárdalo el la carpeta del disco duro con el nombre Pract7 problema

Dada la función cuya expresión es $f(x)=\frac{1}{x^2}$

a. Escribe la expresión

$$F(x) := \frac{1}{x^2}$$

b. Utiliza la sentencia #19 y calcula la aproximación de la medida de la región en el intervalo $[0,3]$, utiliza 6 figuras de cada tipo.

c. ¿A qué se debe que algunas de las aproximaciones no se puedan calcular?

7. La densidad lineal de una varilla de 4 m de longitud está expresada por $\rho(x)=9+2\sqrt{x}$, en kg/m; *x* se da en metros a partir de un extremo de la varilla.

a. Calcula la masa total de la varilla.

b. Ilustrar los cálculos trazando rectángulos, trapecios y porciones de parábolas.

8. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad es $v(t)=t^2-2t-8$ cuando el tiempo es *t*. La velocidad se expresa en metros por segundo.

a. Calcula en desplazamiento de la partícula en el período $1 \leq t \leq 6$.

b. Calcula la distancia recorrida durante este lapso.

c. Ilustrar los cálculos trazando rectángulos, trapecios y porciones de parábolas.

d.

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J. (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

PROGRAMA DE UTILIDADES. MÉTODO NUMÉRICO

#1: $F(x) :=$

#2: $\text{RECTANGULO}(a, b, h) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & h \\ b & h \\ b & 0 \end{bmatrix}$

#3: $\text{TRAPECIO}(a, \alpha, b, \beta) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \alpha \\ b & \beta \\ b & 0 \end{bmatrix}$

#4: $\text{MEDIDA\_RECT}(c, d) := c \cdot d$

#5: $\text{MEDIDA\_TRAP}(c, d, h) := \frac{(c + d) \cdot h}{2}$

#6: $H(a, b, n) := \frac{b - a}{n}$

```
#7:   FMIN(a, b, n) := MIN(F(a + i·H(a, b, n)), F(a + (i + 1)·H(a, b, n)))

#8:   FMAX(a, b, n) := MAX(F(a + i·H(a, b, n)), F(a + (i + 1)·H(a, b, n)))

#9:   XL(a, b, n) := a + (i - 1)·H(a, b, n)

#10:  XR(a, b, n) := a + i·H(a, b, n)

#11:  XM(a, b, n) := a + (i - 0.5)·H(a, b, n)

#12:  XLP(a, b, n) := a + 2·(i - 1)·H(a, b, n)

#13:  XRP(a, b, n) := a + 2·i·H(a, b, n)

#14:  XMP(a, b, n) := a + (2·i - 1)·H(a, b, n)

                                                n - 1
#15:  MEDIDA_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) :=  Σ   MEDIDA_RECT(FMIN(a, b, n), H(a, b, n))
                                                 i=0

                                               n - 1
#16:  MEDIDA_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) :=  Σ   MEDIDA_RECT(FMAX(a, b, n), H(a, b, n))
                                                i=0

                                                n - 1
#17:  MEDIDA_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) :=  Σ   MEDIDA_RECT(FMAX(a, b, n), H(a, b, n))
                                                 i=0

                                               n - 1
#18:  MEDIDA_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) :=  Σ   MEDIDA_RECT(FMIN(a, b, n), H(a, b, n))
                                                i=0

                                          n - 1
#19:  MEDIDA_EXTREMO_IZQUIERDO(a, b, n) :=  Σ   MEDIDA_RECT(F(a + i·H(a, b, n)), H(a, b, n))
                                           i=0

                                        n - 1
#20:  MEDIDA_EXTREMO_DERECHO(a, b, n) :=  Σ   MEDIDA_RECT(F(a + (i + 1)·H(a, b, n)), H(a, b,

        n))

                                     n - 1                                  H(a, b, n)
#21:  MEDIDA_PUNTO_MEDIO(a, b, n) :=   Σ   MEDIDA_RECT(F(a + (2·i + 1)·──────────)), H(a, b,
                                      i=0                                       2

        n))

                                  n - 1
#22:  MEDIDA_TRAPECIO(a, b, n) :=   Σ   MEDIDA_TRAP(F(a + i·H(a, b, n)), F(a + (i + 1)·H(a, b,
                                   i=0

        n)), H(a, b, n))

                              n/2
#23:  MEDIDA_SIMP(a, b, n) :=  Σ
                              i=1

        H(a, b, n)·(F(XLP(a, b, n)) + 4·F(XMP(a, b, n)) + F(XRP(a, b, n)))
        ───────────────────────────────────────────────────────────────────
                                        3

                                          ⎡                    REC.INF
#24:  MEDIDA_APROX_SOBRE_X(a, b, n) :=    ⎣ MEDIDA_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)

               PUNTO MEDIO                      TRAPECIOS                  SIMPSON
        MEDIDA_PUNTO_MEDIO(a, b, n)  MEDIDA_TRAPECIO(a, b, n)  MEDIDA_SIMP(a, b, n)
                      RECT.SUP                        ⎤
        MEDIDA_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)      ⎦
```

```
#25:  MEDIDA_APROX_BAJO_X(a, b, n) := [                     REC.INF
                                     MEDIDA_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)

            PUNTO MEDIO                   TRAPECIOS                SIMPSON
   MEDIDA_PUNTO_MEDIO(a, b, n)  MEDIDA_TRAPECIO(a, b, n)  MEDIDA_SIMP(a, b, n)

                  RECT.SUP
   MEDIDA_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) ]

#26:  MEDIDA_MATRIZ_APROX__SOBRE_X(a, b, j, k, m) := VECTOR([n,
   MEDIDA_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n), MEDIDA_PUNTO_MEDIO(a, b, n),
   MEDIDA_TRAPECIO(a, b, n), MEDIDA_SIMP(a, b, n), MEDIDA_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b,
   n)], n, j, k, m)

#27:  MEDIDA_MATRIZ_APROX__BAJO_X(a, b, j, k, m) := VECTOR([n,
   MEDIDA_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n), MEDIDA_PUNTO_MEDIO(a, b, n),
   MEDIDA_TRAPECIO(a, b, n), MEDIDA_SIMP(a, b, n), MEDIDA_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b,
   n)], n, j, k, m)
```

#28: $\text{LIMITE\_SUMA\_DE\_RIEMANN}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \text{REGION\_RECT}(F(a + i\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n))$

PRÁCTICA 8

INTRODUCCIÓN

En esta práctica se utilizarán las capacidades gráficas y simbólicas de *DERIVE* para el estudio de las integrales indefinidas, definidas y establecer relaciones con las sumas de Riemann.

UNIDAD TEMÁTICA DEL PROGRAMA

Programa de Cálculo 1. Unidad 4. INTEGRALES INDEFINIDAS, DEFINIDAS Y SUMAS DE RIEMANN.

OBJETIVOS

1. Calcular integrales indefinidas.
2. Calcular integrales definidas.
3. Establecer relaciones de la integral definida con las sumas de Riemann.

Equipo audiovisual:

Cañón de Proyección.

INSTRUCCIÓN GENERAL.

La Práctica esta diseñada de tal manera que puedes trabajar con las instrucciones que se te proporcionan, en caso que tengas dificultades intenta resolverlas, si aun persiste consulta al profesor. **Se complementará la instrucción del uso del ordenador con explicaciones dadas por el profesor con proyecciones en una pantalla.**

DESARROLLO

ABRE UNA CARPETA EN EL DISCO DURO Y ESCRIBE LOS NÚMEROS DE CÉDULAS COMO NOMBRE DE LA CARPETA.

ESCRIBE EN LA VENTANA SIMBÓLICA

PRÁCTICA DE LABORATORIO NÚMERO 8

APELLIDOS Y NOMBRE

Guarda el archivo con el nombre PRÁCT 8, TU APELLIDO Y NOMBRE.

DESARROLLO

Utilizando *DERIVE* se pueden calcular integral de la mayor parte de las funciones integrables cuya estructura no sea muy complicada, por ejemplo, las funciones que envuelven de forma simple logaritmos, exponenciales, funciones racionales, trigonométricas, trigonométricas inversas, etc.

INTEGRAL INDEFINIDA

Ilustremos el procedimiento del cálculo de la integral indefinida con un ejemplo.

Ejemplo 1

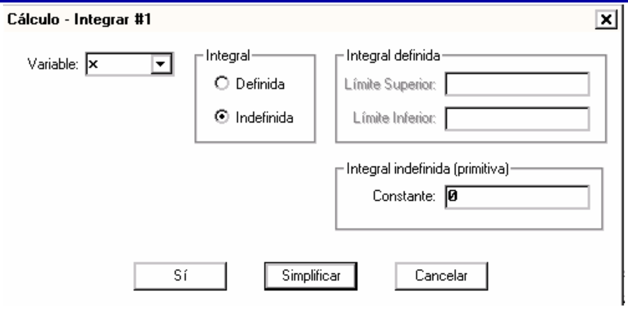
Calcular la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}\,dx$$

Forma directa:

Escribe la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$

Marca el icono de integral, escoge la variable. En la opción **Integral** marca Indefinida. Marca SÍ y luego el icono de igualdad.



Ejemplo 2

Usando Editor de expresión, escribe `INT(1/√(x^2+1),x)` marca Sí y luego el icono de igualdad.

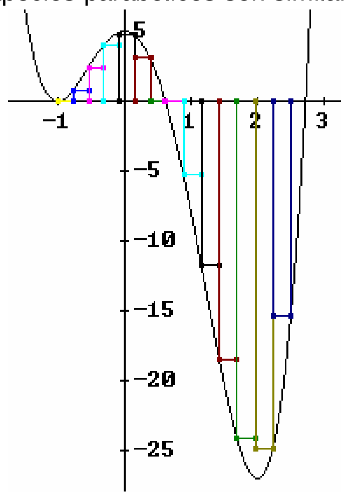
INTEGRAL DEFINIDA

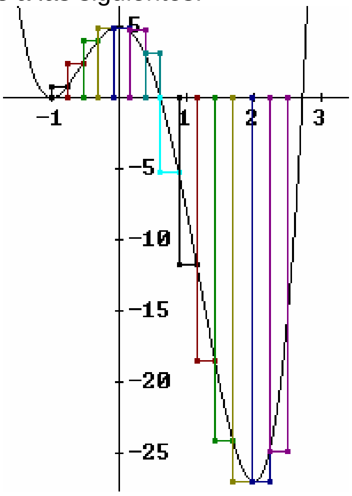
Definición: Si *f* es una función continua definida para $a \le x \le b$, dividimos el intervalo $[a,b]$ en **n** subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$ Hacemos que $x_0(=a), x_1, x_2, \cdots, x_n(=b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos los puntos muestras $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$, en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de *f*, desde ***a*** hasta ***b***, es

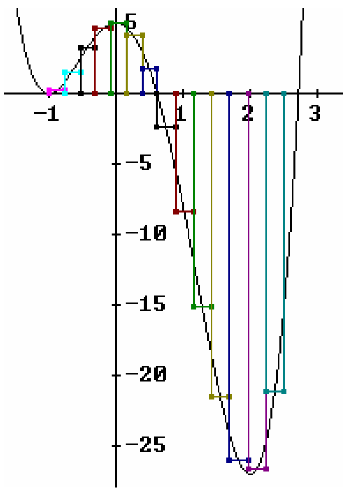
$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

En la práctica 6 se estudió el método gráfico para estimar el valor de la región bajo una curva, en esta práctica se trabajó con la función definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ en el intervalo $[-1, 2.5]$.

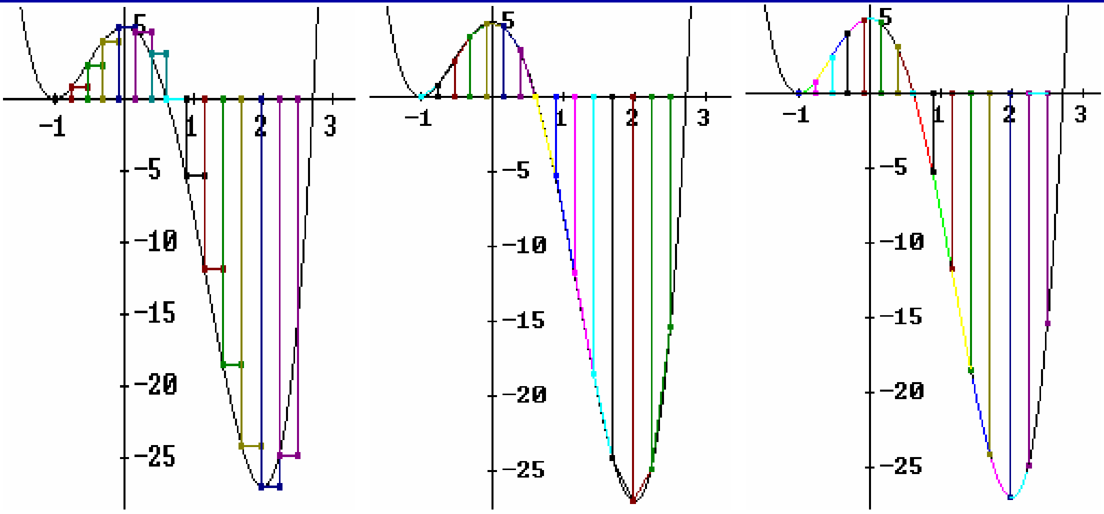
Las diferentes gráficas que elaboraste en la práctica 6 tomando rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos son similares a las siguientes:







Rectángulos inferiores   Rectángulos superiores   Rectángulos punto medio



Rectángulos-Extremo izquierdo   Trapecios   Trapecios parabólicos

En la práctica 7 se calculó el valor de la región bajo la curva para esta función obteniendo como resultado:

APROX_SOBRE_X(-1, 0.612574, 7)

REC.INF	PUNTO MEDIO	TRAPECIOS	SIMPSON	RECT.SUP
3.445897432	4.691111651	4.581160665	4.654461322	5.716423898

APROX_REGION_SOBRE_X(-1, 0.612574, 10, 30, 5)

10	3.814328507	4.672262771	4.618599589	4.654375044	5.422870671
15	4.102305900	4.662286441	4.638486621	4.654353168	5.174667342
20	4.243295639	4.658808640	4.645431180	4.654349487	5.047566721
25	4.326931236	4.657201358	4.648642727	4.654348481	4.970354219
30	4.381918849	4.656328914	4.650386531	4.654348120	4.918854213

APROX_SOBRE_X(0.612574, 2.5, 7)

REC.INF	PUNTO MEDIO	TRAPECIOS	SIMPSON	RECT.SUP
-37.30744577	-32.73107934	-32.10638645	-32.52284838	-26.90532713

APROX_REGION_SOBRE_X(0.612574, 2.5, 10, 30, 5)

10	-35.94093288	-32.62522688	-32.31865993	-32.52303790	-28.69638697
15	-34.86612095	-32.56854024	-32.43217737	-32.52308595	-29.99823378
20	-34.29470517	-32.54866935	-32.47194340	-32.52309404	-30.64918164
25	-33.94858180	-32.53946660	-32.49035553	-32.52309625	-31.03212926
30	-33.71733060	-32.53446616	-32.50035880	-32.52309704	-31.28338701

```
LIMITE_SUMA_DE_REIAMNN(-1, 0.612574)
                                4.654347783
LIMITE_SUMA_DE_REIAMNN(0.612574, 2.5)
                               -32.52309778
```

REGLA DE BARROW

La evaluación de la integral definida también se puede hacer utilizando la regla de Barrow (segunda parte del teorema fundamental del cálculo), la cual expresa que:

Supóngase que *f* es continua sobre $[a,\, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de *f*, es decir F' =*f*

Ejemplo 3

Calcula la antiderivada de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$. Aplica la regla de Barrow para calcular en valor de la región en los intervalos $[-1,\, 0.612574]$; $[0.612574,\, 2.5]$; $[-1,\, 2.5]$

CÁLCULO DEL VALOR DE LA REGIÓN UTILIZANDO LA CATEGORÍA "Cálculo"

Ejemplo 4

Calcula la integral definida de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ en los intervalos $[-1,\, 0.612574]$; $[0.612574,\, 2.5]$; $[-1,\, 2.5]$. Para ello escribe la expresión de la función y marca la categoría "calcular" y luego "integrales" en la ventana que aparece en la pantalla, marca "integral definida" y luego los límites de integración, marca "Si" y el icono de igualdad.

Compara estos resultados con los obtenidos en el ejemplo 3 y los resultados obtenidos en la práctica 7 y 8. Escribe lo que consideres más relevante.

INTEGRAL DEFINIDA POR APROXIMACIÓN.

La evaluación de la integral a través de la antiderivada depende de que la función sea integrable; existen funciones que no tienen primitivas, por tanto la alternativa de la aproximación a través de sumas de Riemann resulta de gran utilidad. A continuación damos un ejemplo de este tipo.

Ejemplo 5

Calcular la integral indefinida

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x}\; dx$$

Ejemplo 6

Calcula la integral definida

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x}\; dx$$

Ejemplo 7

Utilizando el integrando, define la función

$$F(x) := \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x}$$

Grafícala.

MARCA Y COPIA LA GRÁFICA Y PÉGALA EN LA VENTANA SIMBÓLICA.

REPRESENTA 10 RECTÁNGULOS PUNTO MEDIO EN EL INTERVALO $[0.1]$.

MARCA Y COPIA LA GRÁFICA Y PÉGALA EN LA VENTANA SIMBÓLICA.

APROXIMA EL VALOR DE LA REGIÓN EN INTERVALO $[0.1]$.

ESCRIBE EL VALOR DE LA MEJOR APROXIMACIÓN.

Escribe en la ventana simbólica

EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA Nº 8

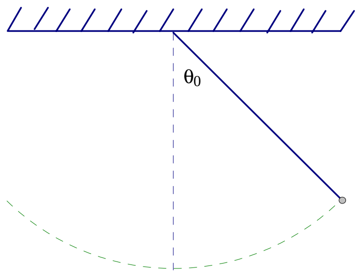
Responde en la ventana simbólica cada una de las siguientes preguntas.
ESCRIBE SÓLO EL NÚMERO DE LA PREGUNTA.

1. ¿Escribe tu opinión con relación a las actividades realizadas en el laboratorio?
2. ¿Qué le agregarías a esta práctica?
3. ¿Qué le quitarías?
4. Escribe lo nuevo que has aprendido en esta práctica.
5. Escribe otras observaciones que no hayan sido planteadas en los numerales anteriores.
6. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$

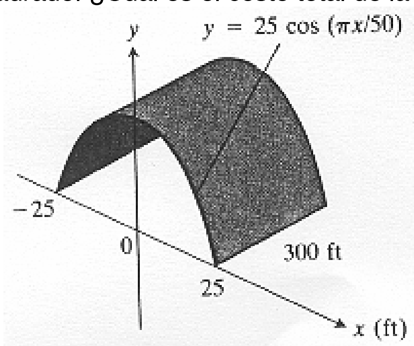
   Utiliza la regla de Barrow y calcula en el intervalo $[-1,2]$
   Calcula la integral utilizando utilizando la categoría "Calcular"
   Representa la función.
   El resultado es falso. Explicar por qué.
7. La figura que sigue (ver figura 14) muestra en péndulo de longitud L, que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical. Con la segunda ley de Newton se puede demostrar que el periodo, T (tiempo de una oscilación completa) está expresada por

   $$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2 sen^2 x}}$$

   en el que $k = sen\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1\ m$ y $\theta_0 = 42^o$, calcula el periodo con la regla de Simpson ($n = 10$)". Ilustrar geométricamente el cálculo de la integral definida.



8. Una empresa de ingeniería se ofrece construir un túnel. Este tiene 300 pies de largo por 50 pies de ancho. La forma del túnel es un arco cuya ecuación es $y = 25Cos(\pi x/50)$. La parte superior del túnel se tratará con un sellador impermeable que tiene con un costo de 1.75 dólares por pie cuadrado. ¿Cuál es el costo total de la aplicación del sellador?



BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards, C., Penney, D. (1996). *Cálculo.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
2. Larson, R., Hostetler. (1992). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. México. McGraw Hill.
3. Stewart, J. (1999). Cálculo. International Thomson Editores. México.
4. Thomas, G., Finney, R. (1998). *Cálculo.* Novena edición. Addison Wesley Longman. México.
5. Kutzler, B. (1998). *Introducción a DERIVE para Windows.* Primera edición. España. Derisoft.

ANEXO 15

CUESTIONARIOS DE CONOCIMIENTOS CC-3.

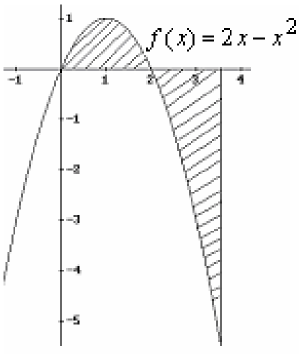
SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-3

PREGUNTA

1.- Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. Explica el procedimiento que has utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso.



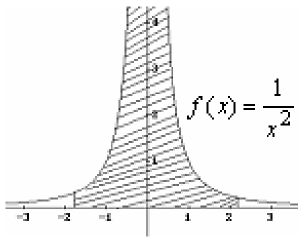
PREGUNTA

2.- Calcula la integral definida

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx$$

PREGUNTA

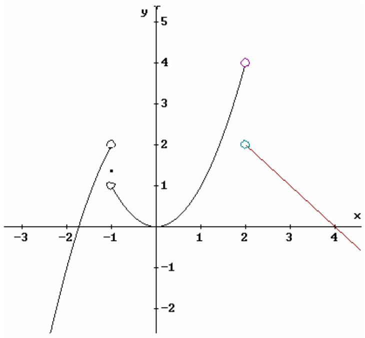
3.- Dada la gráfica de la función. Si es posible, calcula el área de la región rayada. Si no es posible justifica tu respuesta.



PREGUNTA

4.-Dada la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$



- Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$
- Si es posible, estima el valor de la integral definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible explicar por qué.
- Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular ninguna porción explicar por qué.

PREGUNTA

5.- Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx=\int_0^2 (x-1)^{-2}dx=\left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2=-\left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2=-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2$$

PREGUNTA

6.- Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

$$Si\ f\ (x)\geq g(x) \quad \text{entonces} \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

PREGUNTA

7.- Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

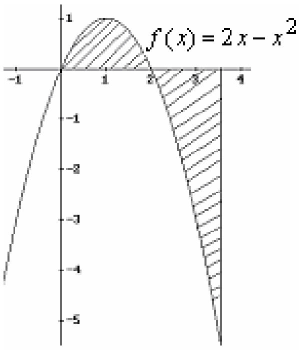
$$Si\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \text{entonces}$$
$$f(x)\geq g(x) \quad \text{para todo } x \text{ que pertenece a } [a,b]$$

SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS CC-3

PREGUNTA

1.- Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. Explica el procedimiento que has utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso.



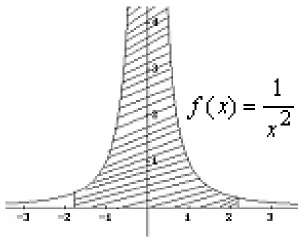
PREGUNTA

2.- Calcula la integral definida

$$\int_{-3}^{4} |x+1|dx$$

PREGUNTA

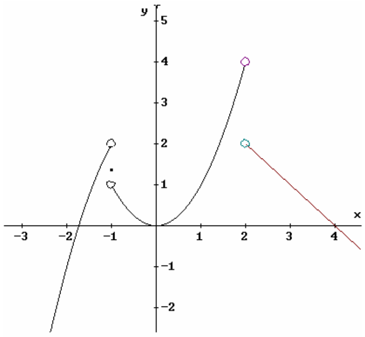
3.- Dada la gráfica de la función. Si es posible, calcula el área de la región rayada. Si no es posible justifica tu respuesta.



PREGUNTA

4.-Dada la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$



- Calcular, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo $[-2,3]$
- Si es posible, estima el valor de la integral definida en el intervalo $[-2,3]$. Si no es posible explicar por qué.
- Si no es posible calcular toda el área, calcula la o las porciones que sean calculables en el intervalo $[-2,3]$. En caso de que no sea posible calcular ninguna porción explicar por qué.

PREGUNTA

5.- Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 = -\left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

PREGUNTA

6.- Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

$$Si\; f(x) \geq g(x) \quad \text{entonces} \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

PREGUNTA

7.- Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

$$Si\; \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \text{entonces}$$
$$f(x) \geq g(x) \quad \text{para todo } x \text{ que pertenece a } [a,b]$$

ANEXO 16

CUESTIONARIO PARA LA ENTREVISTA.

SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

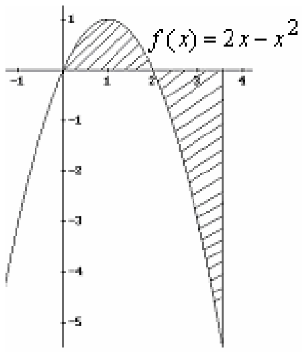
CUESTIONARIO DE LA ENTREVISTA

PREGUNTA

1.- ¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa $\int_a^b f(x)dx$?

PREGUNTA

2.- Dada la gráfica, calcular el área de la región rayada. Explica el procedimiento que has utilizado en el cálculo del área. Justifica cada paso.



PREGUNTA

3.- Calcula la integral definida

$$\int_{-3}^{4} |x+1| dx$$

PREGUNTA 4

Indicar si es verdadero o falso el siguiente desarrollo. Justifique su respuesta.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_0^2 (x-1)^{-2} dx = \left.\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^2 = -\left.\frac{1}{(x-1)}\right|_0^2 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$$

PREGUNTA

5.- Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

$$Si\ f(x) \geq g(x) \quad \text{entonces} \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

PREGUNTA 6

Indicar si es verdadera o falsa la siguiente proposición. Justifique su respuesta.

$$Si\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \text{entonces}$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{para todo } x \text{ que pertenece a } [a,b]$$

PREGUNTA

7.- Calcular el área que forma con el eje OX la función

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$

ANEXO 17

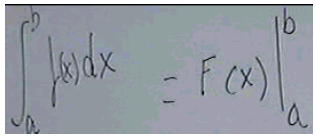
TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTA SOBRE CONOCIMIENTOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

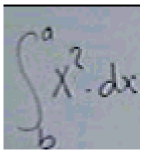
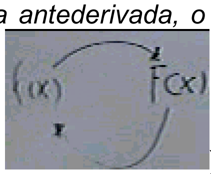
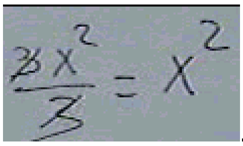
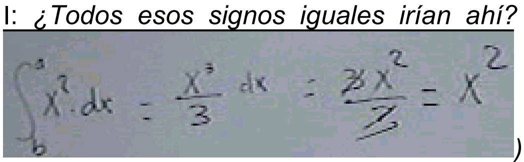
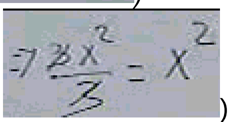
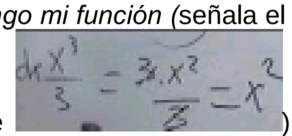
SEGUNDA FASE DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL.

ENTREVISTA AL ESTUDIANTE E1

PREGUNTA 1
Escenario 3

1. I: Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral defina entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2. E*: Esta función está acotada en este intervalo* (señala la expresión derecha de la igualdad*) es continua en un intervalo "a b"* (señala a "b" y "a" escritas en la expresión derecha) *¿Necesito un caso?*

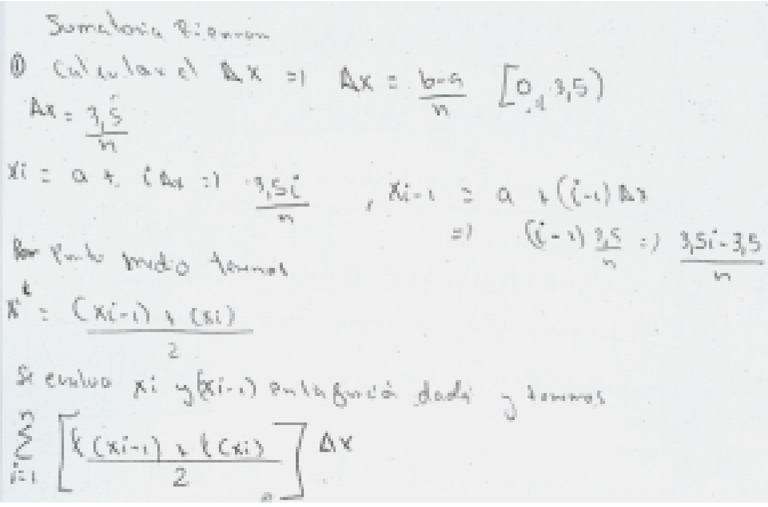


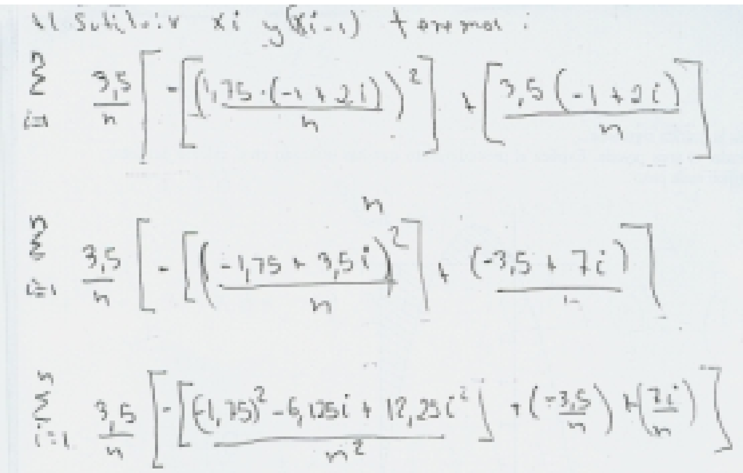
3. I: *Como creas que alguien te va a entender. Puedes dibujar, puedes usar el ordenador, puedes hacer lo que quieras.*
4. E: *Esa función está definida en ese intervalo, una integral definida en ese intervalo* (señala los límites de integración). *Lo podría hacer en este caso, o sea evaluar esta función* (señala F(x) es la parte derecha de la igualdad) *en "b" y "a", por el teorema fundamental,* escribe *Teorema Fundamental del Cálculo.*
5. I: *Esa f(x) grande, mayúscula, ¿es la misma que la que está atrás?* (se refiere a la que aparece a ambos lados de la igualdad)
6. E: *No. Sería su antiderivada*. Escribe *F(b)-F(a)=, sería un valor que pondría aquí* (señala la expresión escrita).
7. I: *¿Qué significa ser antiderivada?*
8. E: *Si esa antiderivada la derivamos nos daría la integral. ¿Puedo hacer un ejemplo?*
9. I*: Sí claro.*
10. E: *Si yo tengo la integral*  *entonces al integrar esto (señala el integrando) me daría la antederivada, o sea me daría* $x^3/3$*; lo que quiere decir que si tengo esta función* (dibuja ) *si yo integro esto* (se refiere a la función de la izquierda*) me da esto* (se refiere a la función de la derecha*), igualmente si yo derivo esto* (se refiere a la función de la derecha) me da esta función (se refiere a la función de la izquierda). *Si derivo esto* (señala la expresión $x^3/3$) *me quedaría* .
11. I: *¿Todos esos signos iguales irían ahí? ¿O hay algunos que no irían?* (se refiere a )
12. E*: No, éste no* (cambia el signo ) *esto sería una tercera parte. Es decir, si yo tengo mi integral aquí* (señala la integral que planteó) *me daría esto* (señala $x^3/3dx$). (Borra la expresión anterior). *Yo tengo mi función (*señala el integrando)*, la integré y me dio esto* (señala $x^3/3$) (Escribe a parte ) *tengo esta función, la derivo. Entonces se cumple que tengo esta función* (señala a f(x) en el diagrama*) la integral me daría la antiderivada y a su vez* (señala F(x) en el diagrama) *tengo esta función, una antiderivada, la derivo y me daría la integral* (señala a f(x) en el diagrama).
13. I: *Bien.*

14. E: *Si con este teorema* (se refiere al Teorema Fundamental del Cálculo) *cuando integro* (señala el integrando en $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$) *me da la antiderivada* (señala a F(x)) *que tengo que evaluarla en "b" y "a". Sería la integral de f(x) acotada en "b" y "a", entonces esta antiderivada tengo que evaluarla en estos valores* (señala a F(x) y a "b" "a") *me quedaría esta evaluada en "b" menos esta evaluada en "a" y me daría x un valor* (escribe *F(b)-F(a)=x*).
15. I: *¿Qué significa que esté acotada?*
16. E: *Que es continua en ese intervalo o que hay que evaluarla exactamente en ese intervalo. Sería el intervalo* $[a, b]$*, me piden buscar la integral en este intervalo, que no se pase de aquí, que exactamente esté acotada aquí y debe ser continua para poder realizarlo.*
17. I: *Es decir, ¿Toda función continua está acotada?*
18. E*: No, no necesariamente. Una función puede no ser continua, pero si te mandan a buscar la integral en un intervalo específico tiene que ser continua, porque si hay una discontinuidad no se puede buscar exactamente la integral que queremos conseguir.*

PREGUNTA 2

Escenario 1





$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3{,}5}{n}\left[\frac{3{,}06+6{,}125i+12{,}25i^2}{n^2} - \frac{3{,}5}{n} + \frac{7i}{n}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3{,}5}{n}\left[\frac{3{,}06+6{,}125i+12{,}25i^2-3{,}5n+7in}{n^2}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3{,}5(3{,}06+6{,}125i+12{,}25i^2-3{,}5n+7in}{n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3{,}5\left[3{,}06+\left(6{,}125\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)+\left(12{,}25\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+7n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]}{n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3{,}5\left[3{,}06+3{,}06(n^2+n)+2{,}04(2n^3+n^2+2n+1)+\frac{7}{2}(n^3+n^2)\right]}{n^3}$$

Si $n=4$ tenemos

$$\frac{3{,}5\left[3{,}06+3{,}06(4^2+4)+2{,}04(2(4)^3+(4)^2+2(4)+1)+\frac{7}{2}((4)^3+(4)^2)\right]}{(4)^3}=35{,}89$$

Escenario 2

$F(X) := 2\cdot X - X^2$

$\int (2\cdot X - X^2)\, dX$

$$X^2 - \frac{X^3}{3}$$

$\int_0^2 (2\cdot X - X^2)\, dX$

$$\frac{4}{3}$$

$\int_0^{7/2} (2\cdot X - X^2)\, dX$

$\int_2^{7/2} (2\cdot X - X^2)\, dX$

$$-\frac{27}{8}$$

AREA:

$\frac{4}{3} - -\frac{27}{8}$

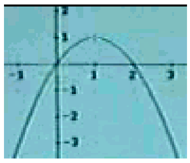
$$\frac{113}{24}$$

Escenario 3

19. I: *La siguiente pregunta, el ejercicio dos, dice: calcula el área rayada* (le muestra la prueba) *que aparece en esta gráfica. Te pido que me lo resuelvas de la forma más sencilla posible.*
20. E: *¿Puedo dibujar aquí?* (se refiere a la pizarra).
21. I*: Sí. Sabes que puedes usar el ordenador, el DERIVE, si te apetece.*
22. E: *Sí lo puedo hacer, pero no puedo dibujar el área rayada.*
23. I: *Bueno.*
24. E: *¿Se lo hago aquí?* (se refiere al ordenador).
25. I: *Como tú quieras. Te digo ¿Cuál es para ti la forma más sencilla para calcular el área rayada de esa función? Si quieres la puedes dibujar y luego tú actúas como quieras.*

26. E: (Dibuja) *La función* (escribe $f(x)=2x-x^2$). *Aquí dice, calcular el área rayada. En este caso también tengo que calcular esta área en este intervalo, desde cero hasta tres* (escribe [0,3]) *el área rayada, una manera de hacerlo más sencilla es evaluar la integral desde este punto a este punto* (señala en el eje OX el cero y el dos), escribe $\int_0^2 2x-x^2\,dx$ observa la gráfica y completa $\int_0^2 2x-x^2\,dx+\int_2^3 2x-x^2\,dx$ se detiene y luego borra el signo + escribe $-\int_2^3 2x-x^2\,dx$ *sería menos porque esta parte es negativa* (se refiere a la región bajo el eje OX*) la región es negativa, pero el área final es positiva.*

27. I: *¿Qué entiendes por región negativa?*
28. E: *Región bajo la curva* (señala la región sobre el eje OX), *pero aquí* (señala la región bajo el eje OX) *sería bajo el eje OX, o sea bajo el eje OX son negativas, la que están por encima del eje OX son positivas, las regiones, pero al final el área da positiva* (calcula la parte la primera integral, usa la calculadora para realizar los cómputos y le da 4/3). *Como estaba diciendo esta parte es negativa* (señala la región bajo el eje OX) *me queda así* $-\int_2^3 2x-x^2\,dx$ la calcula y le da 4/3, queda por segundo observando la pizarra y dice *¿la puedo hacer en la computadora?*
29. I: *Sí.*
30. E: Escribe en *DERIVE* $F(x):=2x-x^2$ *Aquí podemos hacer la representación gráfica*.



31. I: *¿Por qué quieres hacer esa comprobación? ¿Por la igualdad de los dos resultados?*
32. E: *Sí, porque esta parte me daría negativa* (señala el cálculo de la segunda integral).
33. I: *¿Cómo?*
34. E: *Esta parte* (señala el cálculo de la segunda integral) *me debería dar negativa.*
35. I: *Pero tenía un signo menos.*
36. E: *¿Qué será?*
37. I: *Desde allá has arrastrado un signo negativo.*
38. E*: Sí.*
39. I*: ¿Pero no te resulta extraño que te dé 4/3 aquella franjita* (señala la región bajo el eje OX) *y que te dé 4/3 también la otra?* (señala la región sobre el eje OX).
40. E: *Aquel es más grande* (señala la región sobre el eje OX) *parece que hay un error.*
41. I: *¿Por eso es que usas el ordenador?*
42. E: *Sí. Primero voy a evaluar la integral pero la parte de arriba, ¿Puedo mirarlo aquí* (se refiere a la resolución de la prueba en el laboratorio)
43. I: *Sí.*
44. E: Busca en la hoja de la prueba lo que hizo en el laboratorio y dice *Aquí en la gráfica* (se acerca a la pizarra) regresa al ordenador y calcula la primera integral y le da 4/3, luego calcula la segunda integral y le da -4/3. *Aquí hay un problema, porque aquí daría -4/3, pero en este caso la multiplico por -1 para que me de positivo.*
45. I*: Entonces ¿Qué es lo que no te puede dar negativa?*
46. E: *El área. La región en la curva sí. Las regiones es que todo esto sería el área rayada* (señala toda la región en la gráfica dibujada en la pizarra*) es este pedacito* (señala la región sobre el eje OX) *y este pedacito* (señala la región bajo el eje OX)*, como estaba explicando está por encima del eje OX, es positiva y ésta como está por debajo del eje OX es negativa; pero como nos piden el área, es el mismo valor pero no puede dar negativo, o sea hay que buscar la manera que si da negativo, multiplicar por -1 para que dé positivo; si tengo 4/3 y -4/3 me daría cero, es algo absurdo.*
47. I: *¿Por qué en el examen no lo hiciste así?* (se refiere a la prueba en clase).
48. E: *No me pasó por la mente hacerlo así* (señala la pizarra). *Como en la parte que trabajamos con área, con curva, con punto medio, lo asocié* (parece que se refiere al trabajo de la clase habitual).
49. I: *¿Cómo consideras que es más fácil?*

50. E: *Así* (señala la pizarra).

ÍTEM 3
Escenario 1

tenemos

$$|x+1| \begin{cases} x+1 & si\ x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & si\ x+1 \leq 0 \end{cases}$$

entonces

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$x+1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$$

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \int_{-3}^{-1} -(x+1)\,dx + \int_{-1}^{4} x+1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow -\int_{-3}^{-1} x+1\,dx + \int_{-1}^{4} x+1\,dx \Rightarrow -\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^2}{2}+x\,\Big|_{-1}^{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} - x\,\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^2}{2}+x\,\Big|_{-1}^{4}$$

$$\Rightarrow \left[\left(-\frac{(-1)^2}{2}-(-1)\right) - \left(-\frac{(-3)^2}{2}-(-3)\right)\right] + \left[\left(\frac{(4)^2}{2}+4\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right]$$

$$\left(\frac{-1}{2}+1\right) - \left(\frac{-9}{2}+3\right) + (8+4) - \left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \left(\frac{-3}{2}\right) + (12) - (-1/2) \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+12+\frac{1}{2} = \frac{29}{2}$$

Escenario 2

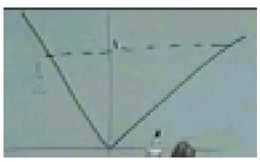
F(X) := |X + 1|

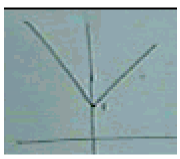
$$\int_{-3}^{4} |X + 1|\ dX$$

$$\frac{29}{2}$$

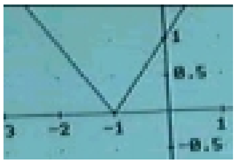
Escenario 3

51. I: *En la pregunta que dice: Calcula la integral entre -3 y 4 del valor absoluto de x más 1 diferencial de x* (se lo muestra en la prueba) *¿Podrías resolverla gráficamente?*
52. E: Se sienta frente del ordenador.
53. I: *¿Cómo será esa función? ¿Qué imagen tienes cuando te dicen valor absoluto de x? Yo quiero que me hagas la gráfica. Lo que quiero saber ¿cómo lo harías gráficamente? Por ejemplo de valor absoluto de x que es más fácil.*
54. E: Dibuja una gráfica *Pero si fuera x más 1 lo desplazo una unidad hacia arriba*.
55. I: *Si eso fuera cierto el valor de -1 ¿Cuánto sería?*
56. E: Escribe en la pizarra $|x+1|$ y se queda por

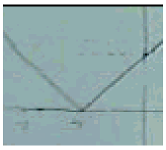


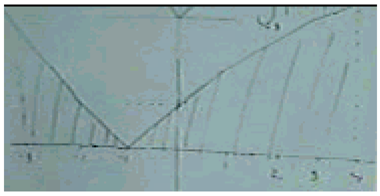


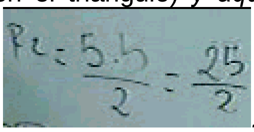
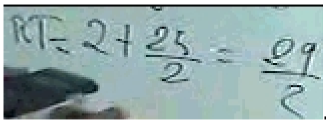
segundos observado la segunda gráfica y la expresión.
57. I: *¿Puedes usar la computadora?*
58. E: Escribe en *DERIVE* $F(x) := |x+1|$ grafica la función, borra la gráfica que había dibujado en la pizarra y escribe $\begin{matrix} y = |x+1| \\ x = -1 \\ y = 0 \end{matrix}$ y dice



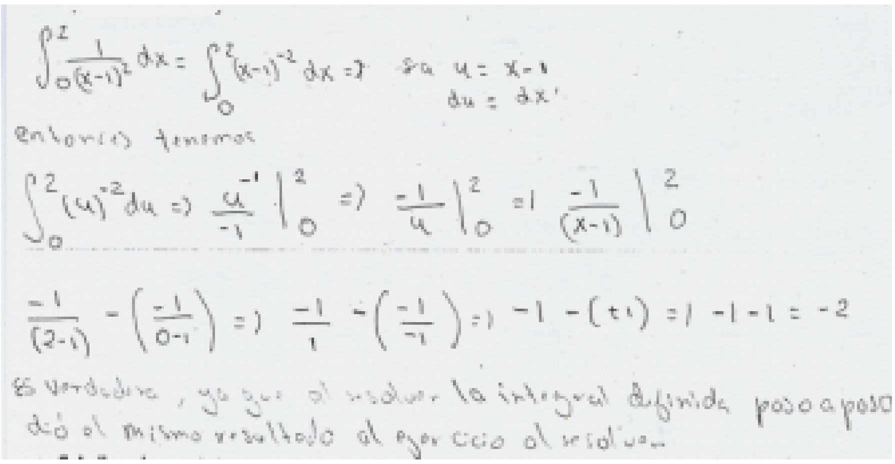
Estaba confundido, no era que se desplazaba hacia arriba, sino hacia la izquierda (dibuja)
59. I*: ¿Qué te pide el problema?*
60. E: *Calcular la integral*, escribe $\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx$, raya la región en la gráfica
61. I: *¿Hay una manera fácil de hacerlo? ¿Qué es lo que tienes que calcular?*
62. E*: La integral definida.*
63. I*: Y esas rayas ¿Qué significa?*
64. E*: Como mi región.*
65. I*: ¿Tú no ves como dos triángulos?*
66. E*: Sí. Sería por área.*
67. I*: ¿Y por qué no? ¿Sabes hallar el área de un triángulo?*





68. E: *Sí. Base por altura sobre dos. Su base* (señala el eje OX en el triángulo de la izquierda*) y la altura* (señala el segmento vertical en el triángulo de la izquierda)
69. I: *¿Crees que sería igual de válido si lo resolvieras así? No que te dé el mismo resultado.*
70. E*: Se supone que no.*
71. I: *¿No te da el mismo resultado? Prueba a ver*
72. E: *Base que sería tres menos uno que sería dos, por la altura, en este caso, que sería dos*, escribe *, y aquí* (señala el triángulo de la derecha) *me quedaría cinco* (señala el eje OX en el triángulo) *y aquí* (señala el 4 en el eje OX) *sería 5* (señala el integrando), escribe *. Si calculo todo* .

PREGUNTA 4
Escenario 1



Escenario 2

$$F(X) := \frac{1}{(X-1)^2}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(X-1)^2}\,dX$$

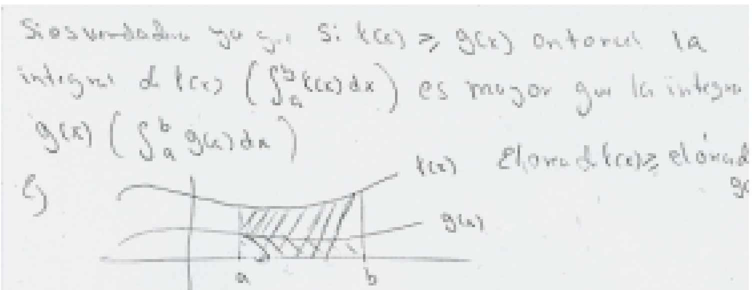
CONCLUSION: ES VERDADERO YA QUE FUE COMPROBADO POR DERIVE

Escenario 3

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -2$$

73. I: *En la pregunta en la que se te pedía estudiar si era verdadero o falso que la integral entre cero y dos de esta función era igual a menos dos* (escribe igualdad).
74. E*: Ahí es falso.*
75. I*: ¿Es falso?*
76. E: *Sí. Integrando esto* (señala el integrando) *si me da. Si yo tengo un valor acotado en [0,2] yo tengo que ver si la función es continua en ese intervalo, en 1 no es continua. El 1 tomado aquí* (señala el intervalo) *colocado en esta función* (señala el integrando) *me daría cero.*
77. I: *¿Por qué DERIVE te da?* (Se refiere a lo que hizo el estudiante en la prueba de laboratorio)
78. E: *El DERIVE sí me da.*
79. I: *Porque tú antes cuando hiciste el problema primero, lo hiciste y después fuiste al DERIVE y dijiste está bien, en el DERIVE está bien hecho.*
80. E: *Pero antes de hacer esta integral tengo que ver si es continua esa función en ese intervalo.*
81. I: *¿No te parece raro que DERIVE te diga que da -2?*
82. E: *Sí. Pero aquí esta entre cero y dos; si no estoy tomando el punto 1 para que me dé cero, yo lo puedo hacer y me da -2; pero antes tengo que ver que sea continua.*
83. I: *¿Y por qué no lo miraste en las otras, si era continua?*
84. E*: En esta* (señala $\int_2^3 (2x - x^2)dx$ que está en la pantalla de *DERIVE*) *porque aquí es continua para todos los reales, es una función polinómica. Aquí* (señala el integrando del problema 4) *porque es una función racional, las que no son continuas son cuando el denominador me da cero, en este caso en 1 me da cero.*

PREGUNTA 5
Escenario 1



Escenario 2

$$F(X) \geq G(X)$$

$$\int_a^b F(X)\,dX$$

$$\int_a^b G(X)\,dX$$

POR EJEMPLO

```
F(X) := X^2
G(X) := X

INT(F(X)) + G(X)
```

$$\frac{7}{3}$$

2.333333333

$$\int_1^2 x\ dx$$

$$\frac{3}{2}$$

1.5

EN CONCLUSIÓN, SE HA PODIDO DEMOSTRAR POR MEDIO DE UN EJEMPLO QUE LA EXPRESIÓN DADA ES VERDADERA.

PREGUNTA 6
Escenario 1

Si es verdadero ya que si $\int_a^b f(x).dx \geq \int_a^b g(x).dx$ las funciones de estas integrales tambion deben ser $f(x) \geq g(x)$ ya que estan acotado en [a,b] y son continua en ese intervalo

Escenario 2

$F(X) \geq G(X)$
PARA TODO X QUE PERTENECE A [a,b]

```
INT(F(X) ≥ G(X))
```

$$\int_a^b (F(X) \geq G(X))\ dX$$

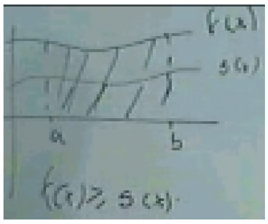
$$\int_a^b (X^2 \geq X)\ dX$$

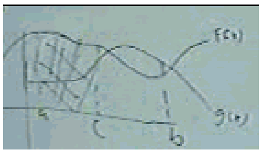
EN CONCLUSIÓN: ES VERDADERA, YA QUE LA FUNCIÓN ES CONTINUA EN EL INTERVALO [a,b]. LO CUAL HA SIDO DEMOSTRADO A TRAVÉS DEL DERIVE.

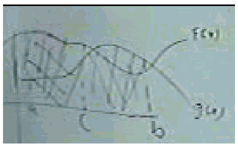
Escenario 3

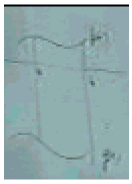
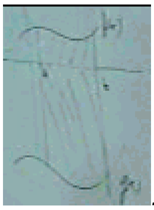
85. I: *Había otra pregunta que decía ver si era verdadero o falso lo siguiente, si consideramos f(x) y g(x) donde una era mayor o igual que la otra entonces la integral de f(x) entre a y b diferencial de x es mayor o igual que la integral de g(x) entre a y b diferencial de x* (escribe $f(x) \geq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$) *y después había otra pregunta que lo decía al revés, sí fuera así* (escribe $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$) *sería cierto también que, entonces* $f(x) \geq g(x)$*. Tú dijiste en las dos que sí era verdadero.*
86. E: *Había una que decía para toda x acotada y continua en un intervalo.*

87. I: *No, ésa no decía nada de la acotación, de la continuidad, ni de nada. ¿Podrías darme un ejemplo?*
88. E*: Aquí dice que f(x) es mayor o igual que g(x)* (se refiere a la primera proposición, problema 5) *podría ser así* (dibuja), *ésta es f(x) y ésta g(x)* (señala las curvas respectivas), *acotadas entre "a" y "b", entonces f(x) es todo esto* (señala la región bajo la curva de f) *es mayor que g(x), que es este pedacito* (señala la región bajo la curva de g), *se dice que f(x) es mayor que g(x). Ahí, como estoy diciendo que la función f(x) es mayor que g(x) entonces la integral de f(x) tiene que ser mayor que la de g(x)* (señala la primera proposición, problema 5). *En cambio aquí* (señala la segunda proposición, problema 6) *está al revés, puedo conseguir un caso* (dibuja), *yo puedo tener aquí este caso, en esta parte aquí* (se refiere a la región rayada) *f(x) es mayor que g(x) y la integral* $\int_a^c f(x) \geq \int_a^c g(x)$ *; también puedo ver en esta parte aquí puede ser lo contrario, puede ser que g(x) sea mayor que f(x)* (señala la región entre "c" y "b"); *entonces nosotros no sabemos exactamente si en toda la función f(x) será mayor que g(x). O sea aquí yo se* (se señala la hipótesis de la primera proposición, problema 5) *antes de evaluar que f(x) es mayor que g(x), estoy partiendo de este caso, estoy partiendo que mi función es mayor que la otra y yo puedo llegar a decir entonces que la integral de la función es mayor a la de la otra integral* (señala la tesis en primera proposición, problema 5*). Pero aquí me dicen* (señala la hipótesis de la segunda proposición, problema 6) *que esta integral es mayor que esta integral y de ahí parto, puedo decir que esta función es mayor que ésta* (señala la tesis en la segunda proposición, problema 6); *pero no se exactamente si en toda mi función f(x) será mayor que g(x)* (señala la hipótesis de segunda proposición, problema 6).



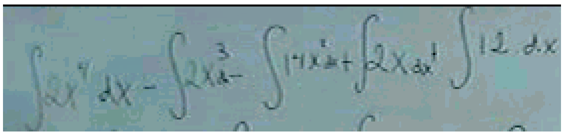
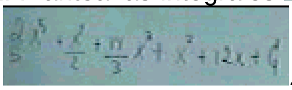


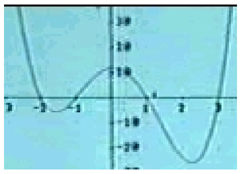


89. I: *Vamos con ésta* (señala la primera proposición, problema 5). Dibuja  *¿Se sigue cumpliendo?*
90. E: Raya las regiones .
91. I: *¿Quién es la integral entre a y b de f(x)?*
92. E: *Es ésta* (señala la región sobre el eje OX)
93. I: *¿Quién es la integral entre a y b de g(x)?*
94. E*: Es ésta* (señala la región bajo el eje OX).
95. I*: ¿Entonces que pasa con ese mayor o igual?*
96. E*: Entonces sería más grande* (señala la región de g)
97. I*: ¿Entonces sería verdadero o sería falso?*
98. E: Silencio.
99. I: *Te voy ayudar un poco, la integral entre a y b en el caso que la función esta por debajo* (señala la región bajo el eje OX*) es negativa y por lo tanto sigue siendo menor que la de arriba que es positiva, o sea que sigue siendo verdadera.*
100. E*: Sigue siendo verdadera.*
101. I: *¿La integral es el área o no?*
102. E*: Sí.*
103. I: *¿Siempre?*
104. E*: Si la integral está acotada* (señala la región sobre el eje OX), *Sí.*
105. I*: ¿Y por abajo?*
106. E: *Sí.*

107. I: *¿Y por qué le cambias el signo en el primer problema?* (se refiere al problema 2)
108. E*: Porque me da un valor negativo. O sea el área no puede ser negativa, por eso se le cambia el signo.*

PREGUNTA 7
Escenario 3

109. I*: Resuelve ahora como quieras el área que forma con el eje OX la función* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$.
110. E: Plantea las integrales  y la resuelve y le da .
111. I: *¿Qué estas haciendo?*
112. E: *Si me dices calcular el área, sería la integral de eso* (señala la expresión algebraica de la función).
113. I*: ¿Y ahora cómo seguiría? ¿Cuál es el área?*
114. E*: Me daría como una antiderivada. No me daría un valor específico. Me da un valor en función área.*
115. I: *Yo te pregunto ¿Cuál es el área? Y tú ¿Qué me dices?*
116. E*: El área sería todo, la integral con su función. ¿Si quiere para hacer la gráfica?* (señala el ordenador).
117. I: *Adelante*.



118. E: Escribe la expresión algebraica de la función y la grafica usando *DERIVE* y dice "*la función está desde -2 hasta 3".*
119. I*: Te estoy preguntando el área limitada con el eje OX.*
120. E*: Al evaluar sería aquí, aquí y aquí* (señala las tres regiones de izquierda a derecha). *En este caso podría calcular esta función acotada en estos puntos* (señala el -2 y el -1 en la primera región), *después hallar de este punto a este punto* (señala la región desde -1 a 1) *y de este punto a este punto* (señala la región desde 1 a 3), *la integral de cada uno y al sumarla la cambiaría a positivo* (señala la regiones bajo el eje OX*) porque esta bajo el eje OX.*
121. I: *¿Cómo te resultaría más fácil?*
122. E: *En un caso así, haciendo la gráfica.*

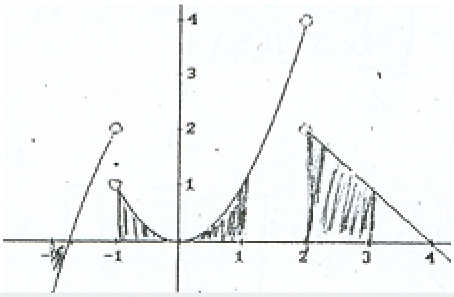
PREGUNTA 8
Escenario 1

No es posible calcular el área de la región rayada,
ya que en x = -1 y x = 1 hay una asíntota vertical,
es decir, no hay un valor exacto y tampoco un valor
del todo en esa región bajo la curva.

Escenario 2

EL ÁREA DE LA REGIÓN RAYADA NO ES POSIBLE CALCULAR, DEBIDO QUE EXISTE UNA ASÍNTOTA EN X=-1 Y X=1, POR LO TANTO ES DISCONTINUA Y PARA CALCULAR EL ÁREA RAYADA, LA FUNCIÓN DEBE SER CONTINUA EN TODO SU DOMINIO.

PREGUNTA 9
Escenario 1



$$\int_3^{-2} f(x)\,dx = -\int_{-1,7}^{-2}(-x^2+3)\,dx + \int_0^{-1} x^2\,dx + \int_1^{0} x^2\,dx + \int_3^{2} (-x+4)$$

$$-\left(-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_{-1,7}^{-2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_1^{0} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)+4x\Big|_3^{2}$$

$$\frac{x^3}{3}-3x\Big|_{-1,7}^{-2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_1^{0} + \left(-\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_3^{2}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{(-2)^3}{3} - (3(-2))\right) - \left(\frac{(-1,7)^3}{3} - 3(-1,7)\right)\right] + \left[\frac{(-1)^3}{3} - 0\right] + \left[0 - \frac{(1)^3}{3}\right]$$

$$+\left[-\frac{(2)^2}{2} + 4(2) - \left[-\frac{(3)^2}{2}+4(3)\right]\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3}-6\right] - \left[\frac{-4,9}{2}+12\right] + \left[-\frac{1}{3}\right] + \left[-\frac{1}{3}\right]$$

$$+\left[-2+12\right] - \left[\frac{9}{3}+12\right]$$

$$\left[\frac{-10}{3}\right] - \left[9,55\right] + \left[-\frac{1}{3}\right] + \left[-\frac{1}{3}\right] + \left[10\right] - \left[15\right]$$

$$-\frac{10}{3} - 9,55 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 10 - 15 = 15,11$$

Escenario 2

EL ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR LA CURVA EN EL INTERVALO [-2,3] NO ES POSIBLE CALCULAR, DEBIDO A QUE LA FUNCIÓN NO ES CONTINUA EN DICHO INTERVALO.

[-2,-1.7]

$F(X) := -X^2 + 3$

$\int_{-2}^{-1.7} (-X^2 + 3)\, dX$

$$-\frac{129}{1000}$$

[-1,0]

$F(X) := X^2$

$\int_{-1}^{0} X^2\, dX$

$$\frac{1}{3}$$

[0,1]

$F(X) := X^2$

$\int_{0}^{1} X^2\, dX$

$$\frac{1}{3}$$

[2,3]

$F(X) := -X + 4$

$\int_{2}^{3} (-X + 4)\, dX$

$$\frac{3}{2}$$

AREA:

$--\frac{129}{1000} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2}$

$$\frac{6887}{3000}$$

$$2.295666666$$

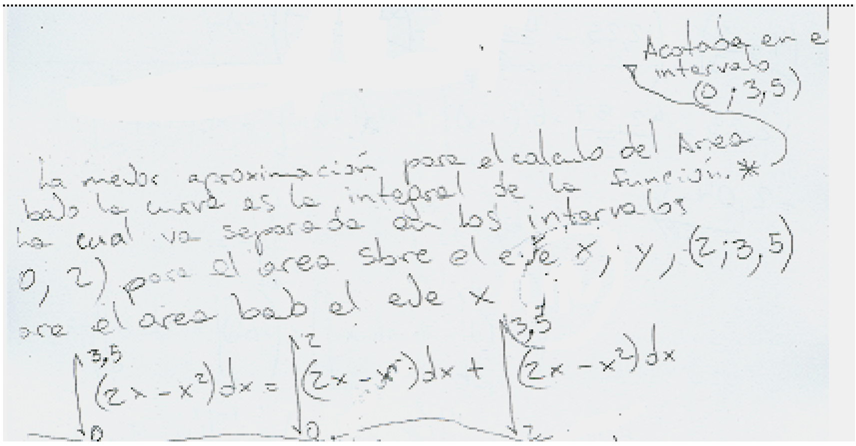
ENTREVISTA AL ESTUDIANTE E2

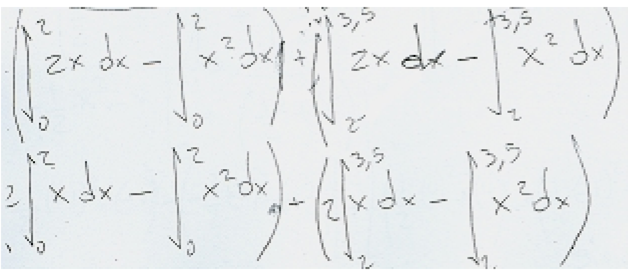
PREGUNTA 1
Escenario 3

1. I: Escribe en la pizarra la expresión $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral definida entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2. E: *La base para la integral sería la suma de Riemann que consiste en encontrar cierta cantidad, n cantidad de rectángulos debajo de una curva. La suma de Riemann te da la aproximación de la integral entre el eje OY la curva. Entonces tengo la función acotada entre "a b" esto será el valor de la integral* (grafica una curva y raya una región)

3. I: *Es decir el valor de la integral sería el área.*
4. E: *El área.*
5. I: *De todo eso.*
6. E: *Acotada entre a y b. Es decir desde "a" hasta "b"* (señala con el dedo la integral que se le dio y observa la gráfica)
7. I: *¿Quién sería f(x)?*
8. E: Marca en la gráfica y=f(x)
9. I: *¿Tú crees que con esa explicación te entendería lo que quiere decir la integral entre a y b de f(x) diferencial de x?*
10. E: *Sí. Si la tuviera sin acotar tendría un valor extraño ahí* (observa la gráfica), *pero está acotada (señala la integral).*
11. I: *¿Qué significa acotar? ¿Quién tiene que estar acotada?*
12. E: *La función. Yo voy hacer una evolución de la función entre el intervalo a y b (indica en la gráfica el segmento sobre el eje OX) y con esto* (señala los límites de integración en la integral) *se está suponiendo que la función es continua en el interior.*
13. I: *¿Y si la función no es continua?*
14. E: *Tengo que dividir en subintervalos. Entre los subintervalos donde f(x) sea continua.*

PREGUNTA 2
Escenario 1





$$= \left(\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^{3,5}$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^{3,5}$$

$$\left((2)^2 - \frac{(2)^3}{3} - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right) + \left((3,5)^2 - \frac{(3,5)^3}{3} - \left((2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right)\right)$$

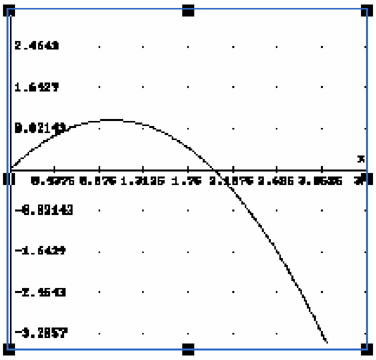
$$\cancel{\left(4 - \frac{8}{3}\right)} + \left(12,25 - \frac{42,87}{3} - \cancel{\left(4 - \frac{8}{3}\right)}\right)$$

$$= 12,25 - \frac{42,87}{3}$$

$$-2,04$$

Escenario 2

$F(x) := 2 \cdot x - x^2$



Para calcular el área en el intervalo dado (0,3.5) hay que dividir en subintervalos, ya que la gráfica se encuentra sobre el eje x en el subintevalo (0,2) y bajo el eje x en el subintervalo (2,3.5).
Primero la calculo por la integral acotada en el intervalo completo...

$$\int_0^{3.5} (2 \cdot x - x^2)\, dx$$

$$-\frac{49}{24}$$

$$-2.041666666$$

ahora calculo la integral en cada subintervalo..
primero de 0 a 2

$$\int_0^{2} (2 \cdot x - x^2)\, dx$$

$$\frac{4}{3}$$

$$1.333333333$$

luego de 2 a 3.5

$$\int_2^{3.5} (2 \cdot x - x^2)\, dx$$

$$-\frac{27}{8}$$

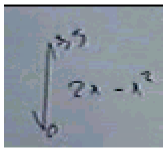
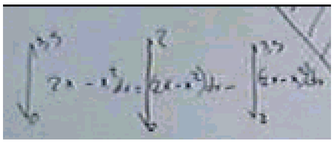
$$-3.375$$

ahora las sumo ...

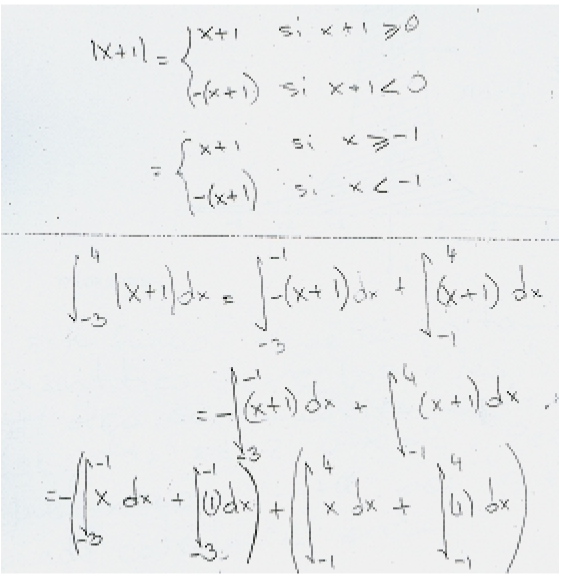
1.333333333 + -3.375

-2.041666666

Escenario 3

15. I: *Bien, el segundo problema decía, calcular el área de la región rayada dada la gráfica siguiente.*
16. E: El estudiante escribe la expresión algebraica de la función y la grafica.
17. I: *Te pido que la resuelvas de la forma que consideres más sencilla.*
18. E: *¿De la forma que considere más sencilla? OK, si vamos a conseguir el área de la curva acotada entre cero y 3.5, ¿por qué puedo hacer estimación hasta 3.5?*
19. I: *Sí.*
20. E: *Yo voy a hablar de la integral desde cero hasta 3.5* (plantea la integral)  *pero esta área sobre el eje OX* (señala la región sobre el eje OX, en el gráfico) *y ésta está bajo el eje OX* (señala la región bajo el eje OX, en el grafico). *Ajá, el área encima del eje OX, o sea la región es positiva y abajo es negativa. O sea, que yo sacaré está* (señala la región sobre OX) *y se la voy a restar a ésta* (señala la región bajo OX) *y me dará la región. Entonces sería la integral de cero a dos menos la integral de 2 a 3.5* (plantea las dos integrales y las resuelve)  explica cada paso del procedimiento señalando en el gráfico lo que obtiene algebraicamente. Para realizar los cómputos finales pregunta *¿Puedo usar DERIVE?*
21. I: *Sí.*
22. E: Abre la ventana de *DERIVE* y realiza los cómputos y lo va anotando en la pizarra, le da como resultado total (4.7)

PREGUNTA 3
Escenario 1



$$= -\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}(3)^2 - (-3)\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}(4)^2 + (4)\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 + (-1)\right)\right]$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} + 1\right) - \left(-\frac{9}{2} + 3\right)\right] + \left[\left(\frac{16}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right] + \left[12 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 12 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{29}{2}$$

Escenario 2

F(x) := |x + 1|

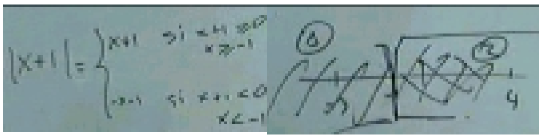
$$\int_{-3}^{4} |x + 1| \, dx$$

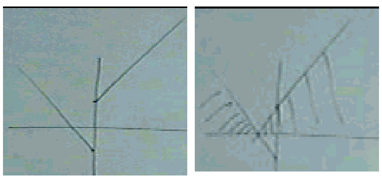
$$\frac{29}{2}$$

14.5

Escenario 3

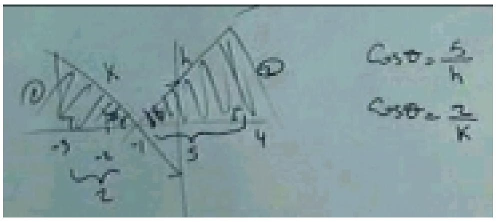
23. I: *En la pregunta te pedían calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto x más 1 diferencial de x* (Lo escribe en la pizarra $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$). *Te pido que la resuelvas gráficamente.*
24. E: *Que la resuelva gráficamente*.
25. I: *Ajá, en el examen la resolviste algebraicamente. Dividiste la función, hiciste dos intervalos, luego la resolviste. Ahora con los medios que quieras te pido, vamos a ver gráficamente si es posible resolverla y comparamos con lo que has hecho.*
26. E: *Primero tengo que definir el valor absoluto* (escribe a función a trozos, luego dibuja un diagrama), *para evaluar la gráfica hablando de la integral de -3 a 4 para esta parte* (señala la parte que identifica como 1) *de -1 hasta menos infinito voy a utilizar esto* (señala en la definición la correspondiente a –x-1) *y desde -1 hasta más infinito voy a utilizar esto* (señala en la definición la correspondiente a x+1) *luego dibuja dos semirrectas observando la definición que ha dado* creo, creo, no estoy seguro que la gráfica sea así (luego completa la gráfica y raya la región), *este pedazo de la gráfica lo voy a utilizar en esta ecuación* (se refiere a la parte derecha de la gráfica y la correspondiente x+1 en la definición) *y para sacar el otro pedazo* (se refiere a la parte izquierda de la gráfica y la correspondiente-x-1 en la definición) *utilizaría esta ecuación.*



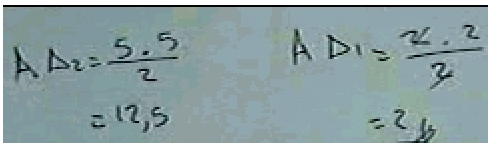


27. I: *Ahora, ¿Cómo resolverías la integral entre -3 y 4 del valor absoluto de x más 1 diferencial de x?*
28. E: Borra la gráfica.
29. I: *¿Por qué borras la gráfica si te pido que la resuelvas gráficamente?*
30. E: Vuelve a representarla gráficamente, luego plantea la integral.

31. I: *Realmente ¿Qué es lo que tienes que calcular en la gráfica?*
32. E: *¿Qué es lo tengo que calcular en la gráfica?*
33. I: *Sí. Tú habías dibujado una gráfica y qué es que lo tenías que calcular si vemos la gráfica.*
34. E: *Ésta de aquí y ésta de aquí* (señala las dos regiones en la gráfica).
35. I: *Y esas dos figuras geométricas ¿Qué son?*
36. E: *Triángulos. Si lo acoto aquí y aquí* (dibuja dos segmentos verticales en las regiones formando dos triángulos) *me quedan triángulos rectángulos.*
37. I: *¿Sabes hallar el área de un triángulo rectángulo?*



38. E: *¡Más fácil! ¡Si es verdad!* (calcula las longitudes de los lados de los triángulos en el eje OX directamente en la gráfica y para las alturas utiliza trigonometría).
39. I: *Así estamos igual o peor.*
40. E: *Peor diría yo. Prefiero calcularlo por integral.*
41. I: *Piensa un poco, Tú no puedes conocer las alturas de esos triángulos.*
42. E: *Las alturas. Metiendo valores en la función. Este valor* (señala el 4 en la gráfica y la correspondiente x+1 en la definición, escribe f(4)= 4+1=5).



43. I: *¿Cuál es el área de un triángulo?*
44. E: *Base por altura sobre 2.*
45. I: *Tienes la base.*
46. E: *Ah. Así me pasa en los exámenes, cuando faltan 10 minutos para terminar, ah era así. Calcula el área de la parte derecha, luego calcula la imagen de -3 y calcula el área de la parte izquierda.*
47. I: *¿Te da lo mismo que en la prueba?*
48. E: Chequea en la prueba. *No*. Suma los resultados que tiene en la pizarra y le da 14,5.
49. I: *¿Cuánto te daba?*
50. E: *Me daba 29/2. Que es 14,5.*
51. I: *¿Cómo consideras que sería más fácil?*
52. E: *Hubiera tenido más tiempo para hacerlo, lo hubiera hecho así. Pero aquí me están evaluando la integral. Era el examen de integral.*
53. I: *Era el examen de integral.*
54. E: *Por eso, tenía que evaluarlo por integral*.
55. I: *¿Te lo dice ahí?*
56. E: *Calcule la integral definida. ¿Lo podía calcular como quisiera?*
57. I: *No, digo yo, no sé. ¿Qué opinas?*
58. E: *Para una demostración buena, podría hacer los pasos según las integrales, después poner esto* (se refiere al desarrollo que escribió en la pizarra), *poner que los dos resultados son el mismo y que era más fácil hacerlo por este camino que por integrales.*
59. I: *Si los resultados no te hubieran salido iguales.*
60. E: *Tuviese que estudiar bien eso.*
61. I: *¿Cuál desecharías de los dos?*
62. E: *Difícil. Primero tendría que estudiar que no me haya equivocado en los pasos y si no me he equivocado y está bien tendría que dar igual.*
63. I: *¿De cuál te fiarías?*
64. E: *De integral*

PREGUNTA 4
Escenario 1

Verdadero
Primero se subio (x -1) q' estaba en el denominador con potencia (2) positiva al numerador con potencia negativo (-2). Por propiedades de integrales se disuelve la integral y queda $\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}$ evaluada en los ptos (2 y 0). Luego se resolvio la suma de potencias en el numerador y la suma del denominador. Despues se hiso la evaluacion en los ptos. (2 y 0) de la forma F(b) - F(a) siendo b=2 y a=0 respectivamente. El resultado es -2 ✓

Escenario 2

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

la evaluamos indefinidamente

$$\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-2}$$

Y para comprobarla evaluamos la integral indefinida en el intervalo (0,2) por medio del T.F.C (teorema fundamental del cálculo) F(b)-F(a)

F(b):
-1

$$\frac{1}{1-0}$$

1

$$-1-1$$

f(b)-f(a)=
-2

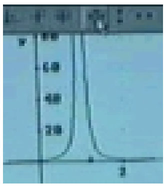
$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

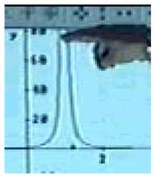
Y así queda demostrado que la respuesta es verdadera.

Escenario 3

65. I: El entrevistador le enuncia el problema y escribe en la pizarra $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -2$ y le dice al estudiante. *Tú contestas que es verdadero y tratas de justificar, pero no es verdadero, es falso ¿Por qué no usas el ordenador para ver si es verdadero o si es falso?, puedes usar gráficas, puedes usar lo que prefieras.*
66. E: Utiliza *DERIVE*, escribe la expresión algebraica de la función, luego la integral y al calcularla le da como resultado -2. El estudiante dice *Eh, bueno.*
67. I: *Pero te digo que es falso.*
68. E: (Hace silencio por unos segundos, observa la prueba). *Lo hago a mano.*
69. I: *A mano estáa hecho.*

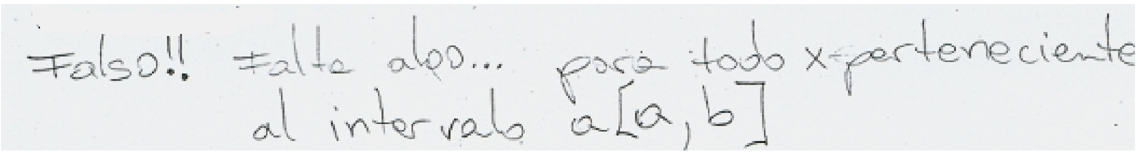
70. E: Se queda pensando y dice *Es Falso*. Esto lo dice no como afirmación sino como si se preguntara así mismo de por qué.
71. I: *¿No se te ocurre nada?*
72. E: *Ya va.*
73. I: *¿El DERIVE no te podría ayudar?*
74. E: Utiliza *DERIVE* y representa gráficamente la función *Esta acotada de cero a dos, OK, ahí no tengo techo en la gráfica* (se acerca a la pantalla en la pared) *yo tengo acotada de cero a dos (señala el origen y el dos) si yo tuviese limitación en el eje y* (señala la parte superior de la gráfica) *yo pudiera calcular esta área, pero ella sigue infinitamente subiendo, sube y sube y sube* (mueve el brazo de abajo hacia arriba señalando en la gráfica) *y por lo tanto el área me daría infinito.* Afirma con seguridad *¡es falso!*





75. I: *¿Por qué crees que DERIVE te dice que es verdadero dándote menos dos?*
76. E: Observa la pizarra, la pantalla sobre la pared y la prueba y dice *de verdad no sé. En ningún momento le dije* (chequea los cómputos hechos en *DERIVE*). *Yo puedo decir que asume que tiene techo porque en ningún momento se ve. No lo sé.*
77. I: *¿Será porque lo calcula de la misma manera como está ahí calculada?*
78. E: Observa la pantalla en la pared y la prueba y mueve la cabeza en señal afirmativa.
79. I: *¿Será porque quien programó DERIVE puso que la integral entre a y b es la antiderivada evaluada en los extremos del intervalo?*
80. E: *Sí. El programa tiene una falla y aquí hay una, que la respuesta en este sería falso porque el área te daría infinito y te esta dando -2*.
81. I: *¿Te da una falla el programa o es una falla del que esta resolviendo la integral?*
82. E: *Pudiera ser una falla mía que no sé utilizar bien el programa.*
83. I: *El programa está bien utilizado.*
84. E: *Estoy metiendo bien los datos.*
85. I: *Sí.*
86. I: *¿Siempre puedes calcular la integral entre a y b de una función f(x)?*
87. E: *No, porque esta no es continua. ¡Cierto, cierto! Pudiera empezar por la gráfica primero, me fuera ahorrado tanto trabajo. ¡Si es verdad!*

PREGUNTA 5
Escenario 1

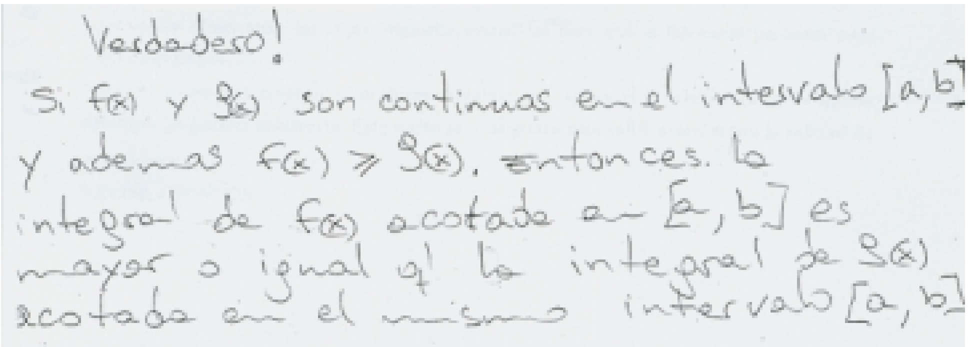


Falso!! falta algo... para todo x perteneciente al intervalo a[a,b]

Escenario 2

```
Es falso porque falta poner que la función debe ser continua en el intervalo
(a,b)
```

PREGUNTA 6
Escenario 1



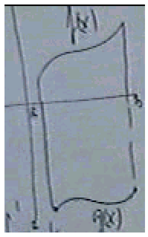
Verdadero!
Si f(x) y g(x) son continuas en el intervalo [a,b]
y ademas f(x) ≥ g(x), entonces la
integral de f(x) acotada a [a,b] es
mayor o igual al la integral de g(x)
acotada en el mismo intervalo [a,b]

Escenario 2

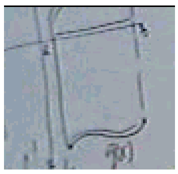
```
Se basa en el teorema de comparación de la integral ya que x pertenece al
intervalo (a,b)
```

Escenario 3

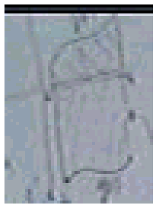
88. I: *Las preguntas en las que se decía que si una función f(x) es mayor o igual que una función g(x) entonces la integral entre a y b de f(x) diferencial de x era mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) diferencial de x* (escribe la proposición sobre la pizarra) *y después decíamos que al revés también podría cumplirse.*
89. E: *Exacto.*
90. I: *¿Es verdadero esto?* (señala la proposición escrita sobre la pizarra)*. ¿Y es verdadero que si la integral entre a y b de f(x) diferencial de x es mayor que la integral entre a y b de g(x) diferencial de x entonces f(x) será mayor o igual que g(x)?* (escribe sobre la pizarra la proposición).
91. E: *Esto es igual que esto* (señala las dos proposiciones).
92. I: *No, ¿Qué estoy diciendo aquí?* (señala la proposición 5*) si una función es mayor o igual que otra, entonces la integral entre a y b de una es mayor o igual que la integral entre a y b de la otra. La otra pregunta* (se refiere a la proposición 6) *es que si las integrales son mayores o iguales entonces las funciones también lo son. Te pregunto, ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones, siendo f(x) y g(x) funciones cualesquiera? Tú respondiste que una era falsa y otra verdadera.*
93. E: *Yo puse que una era falsa y otra verdadera porque había una, no me acuerdo cuál, que decía que x pertenece al intervalo; había una que tenía la salvedad y otra que no.*
94. I*: Sí.*
95. E*: La que no la tenía no puede ser. Porque las funciones tienen que ser continuas. Yo todavía no tengo el motivo exacto por qué era verdadero o por qué era falso.*
96. I*: A lo mejor te ayuda tomar dos funciones conocidas y mirar qué es lo que te esta diciendo ahí. Por ejemplo, toma f(x)=x*^{2} *y g(x)=- x*^{2} *y "a" que sea -2 y "b" que 1. ¿No pudiera ser eso una buena herramienta para mirar que quiere decir eso?* (se refiere a las proposiciones*).*
97. E*:* (Representa las dos funciones) *¿Hago cualquiera*? (se refiere a las dos proposiciones).
98. I: *Empieza por la primera* (se refiere al ítem 5).
99. E: Calcula las dos integrales dándole $\frac{9}{3} \geq -\frac{7}{3}$ menciona que es cierto.
100. I: *Si es cierto en ese caso ¿Será cierto siempre?*
101. E: *En este caso sí. Las funciones son continuas.*
102. I: *Si te pusiera estas dos funciones* (dibuja en la pizarra) *f(x) es mayor que g(x), te pregunto ¿será la integral entre a y b de f(x) mayor o igual que la integral entre a y b de g(x)?* (señala en la gráfica cada parte).



103. E*: Ésta es mayor* (se refiere a la región de g) *esta área es más grande que ésta* (señala a la región de g en comparación con la de f) *pero es negativa.* Se queda por unos segundos pensando.
104. I: *¿Entonces?*
105. E: *¿Estamos comprobando que f(x) es mayor o igual que g(x)?*
106. I: *Estamos suponiendo que f(x) es mayor o igual que g(x).*
107. E*: Los valores aquí* (marca con el rotulador sobre el segmento entre a y b) *cuando los evalúe dará valores positivos* (marca con el rotulador una línea bajo la curva de f). *Estos darán "yes" negativas* (marca con el rotulador una línea sobre la curva de g) *Si puedo afirmar que, si puedo* (señala la desigualdad de las funciones). *Estos valores son positivos y éstos son negativos* (señala la curva de f y luego la de g)



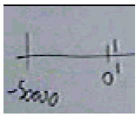
108. I: *Vamos a suponerlo al revés* (se refiere a la proposición 6) *entonces, supongamos que la integral entre a y b de f(x) es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) ¿Podemos afirmar que f(x) es mayor o igual que g(x)?*
109. E*: Si hago estos mismos pasos* (señala con el dedo la curva de f y la de g) *yo pienso que la integral es el área bajo la curva. Esta área* (raya la región sobre la curva de g) *es mayor que ésta* (raya la región bajo la curva de f)



110. I: *¿Tú no dices que es negativa?* (se refiere al valor de la integral de la región sobre la curva de g).
111. E*: Ah.*
112. *I: ¿Tú no dijiste que la de abajo se considera negativa?*
113. *E: Pero es más negativa que el valor absoluto que tiene éste* (señala la

región sobre la curva de g y luego la región bajo la curva de f, puede que se refiera al valor absoluto de valor de la integral definida de g(x)).

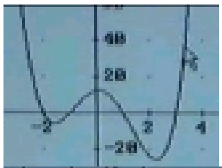
114. I: *Pero todo negativo es menor que lo positivo.*
115. E: *Cierto. Esto es lo que estoy suponiendo ahora* (escribe la desigualdad de las integrales)
116. I: *Eso es lo que estás suponiendo ahora.*
117. E: *Si esto se cumple* (se refiere a la desigualdad de las integrales) *con más razón esto que es más grande* (señala la región de g y escribe el signo negativo sobre la integral definida de g) *es más grande y es negativo, entonces esto es negativo y esto positivo* (escribe el signo positivo sobre la integral definida de f) *aunque sea un valor pequeño. Me acuerdo de séptimo grado que me dijeron que puedo tener -50000 y 1 y, 1 es mayor que -50000* (dibuja)



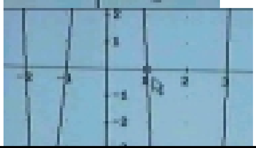
118. I: *¿Entonces las dos son verdaderas?*
119. E: *Sí.*

PROBLEMA 7
Escenario 3

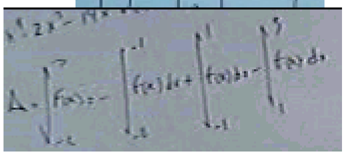
120. I: *Calcula el área que forma con el eje OX la curva* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$
121. E: Utiliza *DERIVE* para representar gráficamente la curva se acerca a la pantalla y señala las tres regiones a calcularle el área, dice *voy a trabajar esto, esto y esto, si entre la gráfica y el eje OX.*



122. *I: ¿Qué clase de función es f(x)?*
123. E*: Polinómica.*
124. I: *¿Cuántos ceros tiene?*
125. E: *Tiene cuatro. Con la computadora puedo encontrar los subintervalos* (recorre la curva con el cursor y va estimando los cortes de la curva con el eje OX) dice *-2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3*



126. I: *¿Cómo lo harías?*
127. E: Plantea las integrales



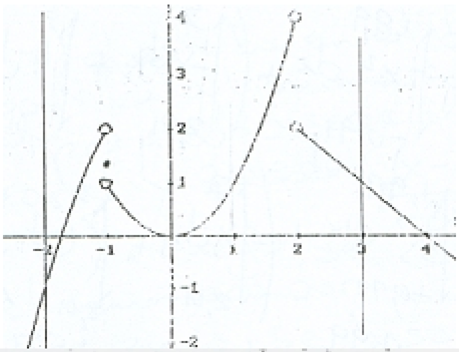
PREGUNTA 8
Escenario 1

Esta función tiene comportamiento asintótico sobre los ejes "y" y "x". El área se encuentra acotada entre los ptos x = -2 y x = 2. Pero a medida que x → 0 y → +∞ por lo tanto no se puede calculas el área.

Escenario 2

No se puede calcular el área señalada ya que cuando "x" tiende a cero por la derecha y por la izquierda, "y" tiende a infinito... por lo tanto el área también tendería al infinito.

PREGUNTA 9
Escenario 1



La funcion es discontinua en el intervalo [-2, 3].

Podría calcular el area en los Intervalos [-2,-1] [-1, 2] y [2, 3] pero la funcion no esta definida para x=2. y tiene una discontinuidad de salto en x=-1. Voy a hacer una aproximación del Area Total tomando subintervalos en los q' f(x) sea continua. [-2,-1,01] [-0,99;1,99] y [2,01;3]

$$A_T \approx \int_{-2}^{-1,01} f(x)\,dx + \int_{-0,99}^{1,99} f(x)\,dx + \int_{2,01}^{3} f(x)\,dx$$

$$\approx \int_{-2}^{-1,01} (-x^2+3)\,dx + \int_{-0,99}^{1,99} (x^2)\,dx + \int_{2,01}^{3} (-x+4)\,dx$$

$$\left(\int_{-2}^{-1,01} -x^2\,dx + \int_{-2}^{-1,01} 3\,dx\right) + \int_{-0,99}^{1,99} x^2\,dx + \left(\int_{2,01}^{3} -x\,dx + \int_{2,01}^{3} 4\,dx\right)$$

$$\left(-\int_{-2}^{-1,01} x^2\,dx + \int_{-2}^{-1,01} 3\,dx\right) + \int_{-0,99}^{1,99} x^2\,dx + \left(-\int_{2,01}^{3} x\,dx + \int_{2,01}^{3} 4\,dx\right)$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_{-2}^{-1,01} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-0,99}^{1,99} + \left(-\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{2,01}^{3}$$

$$\left(-\frac{(-1,01)^3}{3}+3(-1,01) - \left(-\frac{(-2)^3}{3}+3(-2)\right)\right) + \left(\frac{(1,99)^3}{3} - \frac{(-0,99)^3}{3}\right) + \left(-\frac{(3)^2}{2}+4(3) - \left(-\frac{(2,01)^2}{2}+4(2,01)\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1,03}{3} - 3,03 - \left(\frac{8}{3}-6\right)\right) + \left(\frac{7,88}{3}+\frac{0,97}{3}\right) + \left(\frac{-9}{2}+12-\left(\frac{4,04}{2}+8,04\right)\right)$$

$$\left(-2,68-\left(-\frac{10}{3}\right)\right)+2,95+\left(\frac{15}{2}-(6,02)\right)$$

$$-2,68+\frac{10}{3}+2,95+\frac{15}{2}-6,02$$

$$\approx 5,08$$

Escenario 2

Esta función es discontinua... por lo tanto no podemos calcular la integral del intervalo señalado... ahora bien.. la podriamos calcular en los subintervalos en que la función es continua... pero la función no esta definida para x=2 y tiene una discontinuidad de salto en x=-1... haremos una aproximación del área calculándola en los intervalos (-2,-1.01) , (-0.99,1.99) y (2.01,3)

para (-2,-1.01) f(x)=-x^2+3

para (-2,-1.01) f(x)=-x^2+3

$$f(x) := -x^2 + 3$$

$$\int_{-1.01}^{-2} (-x^2 + 3)\, dx$$

$$-0.646767$$

para (-0.99,1.99) f(x)=x^2

$$f(x) := x^2$$

$$\int_{-0.99}^{1.99} f(x) := x^2\, dx$$

$$\frac{4425449}{1500000}$$

$$2.950299333$$

para (2.01,3) f(x)=-x+4

$$f(x) := -x + 4$$

$$\int_{2.1}^{3} f(x) := -x + 4\, dx$$

$$\frac{261}{200}$$

$$1.305$$

ahora sumo todos los resultados...

$$-0.646767 + 2.950299333 + 1.305$$

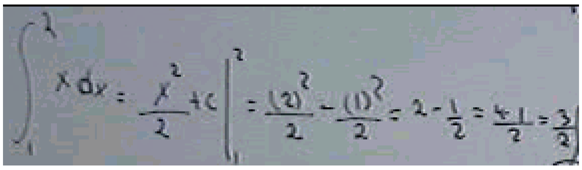
$$3.608532332$$

y obtengo una aproximacion del area en el intevalo (-2,3)

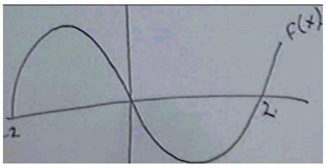
ENTREVISTA AL ESTUDIANTE E3

PREGUNTA 1
Escenario 3

1. I*:* Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral defina entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2. E*: La integral de f(x) dx sería la antiderivada de f(x) en un intervalo definido de “a” a “b”. Escribe en la pizarra La integral de f(x) en el intervalo* $[a,b]$ *es la antiderivada de f(x) más la constante y obtenemos que* $\int_a^b f(x)dx = F(x) + C\Big|_a^b$
3. I: *Dame un ejemplo*
4. E*: Un ejemplo.* Plantea y resuelve una integral



5. I: *¿Y dónde está la C que ha desaparecido?*
6. E: *Esa es un constante que podemos tomar valor cero, uno; o sea en este caso cero y no afecta nada.*
7. I: *¿Eso te sirve para una aplicación geométrica o algo con la integral?*
8. E*: ¿Qué si la integral me sirve para una aplicación geométrica? Para calcular el área en una gráfica, en una curva. Si tengo la gráfica, quiero calcular la integral definida, suponiendo -2 a 2 puedo calcular el área esta* (señala la región a la izquierda del eje Y) *con una función f(x) igual a*



9. I*: Coseno de x, por ejemplo.*
10. E*: Sí.* (Escribe $f(x) = \cos x$). *Calculando la integral de coseno de x desde -2 a cero, este intervalo* (señala el intervalo en el eje OX) *y restándosela menos la integral de ésta* (señala la región bajo el eje OX) *porque esta integral nos da negativa, y será un área negativa y luego la sumamos, esta la multiplicamos por -1* (señala la región bajo el eje OX) *porque es menos, pero es la suma de dos áreas y la suma de dos áreas siempre nos da positiva, para eso es la integral, para calcularla.*
11. I*: ¿Quieres añadir algo más?*
12. E*: Señala la integral que planteo y dice Yo estoy tomando acá, bueno, lo que no se explicarle el por qué, es difícil, pero uno se da cuenta, uno comprende que si la derivada de la integral da buena, cuando uno derive esto* (señala la expresión $\frac{x^2}{2} + C$) *debe quedar exactamente la integral original; para que la derivada “C”, integral “C” desaparezca cuando la integremos, “C” es una constante cualquiera del cero al mil, o sea. Pero como la integral de una constante es cero, yo tomaría el valor más fácil, porque cero en la suma o en la resta no afecta y cuando definimos la integral* (señala la expresión $\frac{x^2}{2} + C\Big|_a^b$) *siempre se resta en una intervalo definido, que es que usamos ahí, no afecta ni la suma ni la resta porque es cero, es el neutro de la suma.*
13. I*: ¿La integral definida en un número? ¿O no?*
14. E*: Sí. Porque estamos definiendo una función* (señala el integrando en la integral que planteó), *en una integral, en un intervalo dado* (señala la integral que planteó)*, queremos evaluar el área en ese intervalo* (señala la resolución de la integral) *por ejemplo* (señala la gráfica) *en esta gráfica.*

PREGUNTA 2
Escenario 1

Tomando como intervalo $[0, 3,5]$ Siendo 3,5 un valor aproximad

$a=0 \quad b=3,5$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \frac{3,5-0}{n} = \frac{3,5}{n}$

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = 0 + i.\frac{3,5}{n} = x_i = i\frac{3,5}{n}$ Sacando $f(x_i)$

$f\left(i\frac{3,5}{n}\right) = 2\left(i\frac{3,5}{n}\right) - \left(i\frac{3,5}{n}\right)^2 = i\frac{7}{n} - i^2\frac{12,25}{n^2}$

Aplicando $f(x_i).\Delta x$

$\left(i\frac{7}{n} - i^2\frac{12,25}{n^2}\right)\frac{3,5}{n} = i\frac{24,5}{n^2} - i^2\frac{42,87}{n^3}$

Aplicando Sumatoria

Error.
n(n+1)(2n+1)/6

$\frac{24,5}{n^2}\sum i - \frac{42,87}{n^3}\sum i^2 = \frac{24,5}{n^2}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{42,87}{n^3}\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{6}\right]$

$\frac{12,25}{n}(n+1) - \frac{7,14}{n^3}(2n+1)(n+1)$ Sacando máximo común divisor n^3

$= \frac{12,25n^2(n+1) - 7,14(2n^2+3n+1)}{n^3} = \frac{12,25n^3 + 12,25 - 14,28n^2 - 21,42n - 7,14}{n^3}$

$= \frac{12,25n^3 - 14,28n^2 - 21,42n + 7,14}{n^3}$

Aplicando Suma de Riemann

$\lim_{n\to\infty}\sum f(x_i) = \frac{12,25n^3/n^3 - 14,28n^2/n^3 - 21,42n/n^3 + 7,14/n^3}{n^3/n^3}$

$\lim_{n\to\infty}\sum f(x_i) = \frac{12,25 - \cancel{14,28/n} - \cancel{21,42/n^2} + \cancel{7,14/n^3}}{1}$

$\lim_{n\to\infty}\sum f(x_i) = 12,25$

Escenario 2

$F(X) := 2\cdot X - X^2$

$\int_0^2 (2\cdot X - X^2)\, dX$

$\frac{4}{3}$

Proposición

$\int_2^{3.5} (2\cdot X - X^2)\, dX$

$-\frac{27}{8}$

AREA

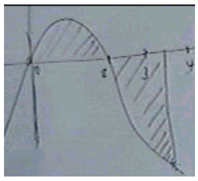
$\frac{4}{3} - -\frac{27}{8}$

$\frac{113}{24}$

4.708333333

DEFINIMOS EL INTERVALO DEL ÁREA QUE VAMOS A CALCULAR, EN ESTE CASO [0,3.5], CALCULAMOS LA INTERGRAL DE F(X)=2*X-X^2 EN EL INTERVALO [0,2] Y CALCULAMOS LA INTERGRAL DE F(X)=2*X-X^2 EN EL INTERVALO [2,3.5], LUEGO AL CONSEGUIR EL ÁREA, LAS SUMAMOS Y LA SUMA DEL ÁREA DEBE DAR POSITIVA, EN CASO DEL ÁREA EN EL INTERVALO [2,3.5]LA MULTIPLICAMOS POR -1 PARA QUE NOS DE POSITIVA

Escenario 3



15. I: *La pregunta dos del cuestionario pide calcular* (dibuja la gráfica en la pizarra) *el área de una región ¿Podrían resolver esa cuestión de la forma más sencilla posible?*
16. E*: Se me hace más fácil con integrales. Sacar la integral definida de cero a 2 y después de 2 a 3,5. Esta área me dará negativa y multiplico por -1* (señala la región bajo el eje OX) *luego lo sumo al resultado de esta área* (señala la región sobre el eje OX) *número y número y calculo la integral, el área de ésta y ésta* (señala las dos regiones). *¿Lo puedo hacer aquí?*
17. I: *Sí.*
18. E: Observa en el cuestionario y copia en la pizarra la expresión $f(x) = 2x - x^2 \ [0,\ 3{,}5]$ *El dominio de f(x) son todos los reales, por ser una función polinómica* (escribe Domf(x): R). (Escribe) *Calculo la integral de f(x) en* $[0,2]$ $\int_0^2$ *.*
19. I*: Lo que estás haciendo ahora es calcular la integral entre cero y dos.*
20. E*: ¿Tengo que ir haciéndolo paso a paso?*
21. I: *Conviene que lo digas.*
22. E*: Saco primero el dominio de la función en todos los reales. El error que cometí en el parcial era que calculé la integral, no me percaté del dominio, cuando es lo importante y esencial. Como el dominio son todos los reales por ser una función polinómica, ahora calcularé la integral definida en el intervalo cero dos* (señala el intervalo y luego señala en la gráfica el segmento correspondiente) *que dará positiva por estar sobre el eje OX. Calculo la integral en el intervalo dos cero de f(x) que es 2x-x*^{2} (Escribe $\int_0^2 2x-x^2 = \frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3} = x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 =$) *una vez que saqué la antiderivada de la integral, sustituyo los valores entre dos y cero, aquí en "a b"* (señala el intervalo [0,2]) *como uno calcula la integral es el intervalo "b" menos el "a"*(señala los límites de integración, parece que se refiere a la evaluación de la antederivada en b y a) completa el cálculo y le da 4/3 y dice *Éste es el valor de la integral en dos cero. Calcularé el valor de la integral en el intervalo dos tres coma cinco* (señala la región bajo el eje OX) escribe *Calculo la integral de f(x) en* $[2,\ 3.5]$*, ahora voy a seguir calculando la integral, ahora definida en otro intervalo* (señala la región bajo el eje OX) *que esta bajo el eje OX, dos a tres coma cinco* (cambia 3.5 por 7/2 y escribe $\int_2^{7/2} 2x-x^2 = \frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3} = x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_2^{7/2} = ($) usa la calculadora para realizar los cómputos y le da como resultado $\frac{49}{4}-\frac{343}{8}-\frac{4}{3}$ (resultado incorrecto).
23. I: *Bueno,lo dejamos así. Ahora te quiero preguntar ¿por qué en el examen no lo hiciste así?*
24. E*: Porque creí que lo podía sacar por la suma de Riemann. Como vi la suma de Riemann, se me hace complicado. No pensé, los nervios quizás, o también yo leí el examen y está un poco complicado, uno de repente ve el examen y está complicado se bloquea muchas veces, no piensa; ahora a penas uno sale del examen uno dice por qué no lo hice de esta manera, lo pude hacer de 30 mil formas. Yo me mecanicé, vi una gráfica, Riemann, sólo pensé en el método de Riemann.* Rectifica los cómputos y termina de calcular la integral, luego suma los dos resultados de las dos integrales y le da 113/24 y dice *Y ésta es el área de la región rayada* (señala la gráfica).

PREGUNTA 3
Escenario 1

$$|x+1| = \begin{cases} (x+1) & \text{si } (x+1) \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si } (x+1) < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \int_{-3}^{0} -(x+1)\,dx + \int_{0}^{4} x+1\,dx.$$

Aparte

$$\int_{-3}^{0} -x-1\,dx = -\frac{x^2}{2} - 1 + C \Big|_{-3}^{0} -\frac{(0)^2}{2} - 1 - \left(-\frac{(-3)^2}{2} - 1\right) = 0 - 1 - \left(-\frac{9}{2} - 1\right)$$

$$= -1 - \left(\frac{-9-2}{2}\right) = -1 - \left(\frac{-11}{2}\right) = -1 + \frac{11}{2} = \frac{-2+11}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\int_{0}^{4} x+1\,dx = \frac{x^2}{2} + 1 + C \Big|_{0}^{4} \frac{(4)^2}{2} + 1 - \left(\frac{(0)^2}{2} + 1\right) \quad \frac{16}{2} + 1 - 1 = 8 + \cancel{1} - \cancel{1} = 8$$

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \frac{9}{2} + 8 = \frac{9+16}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \frac{25}{2}$$

Escenario 2

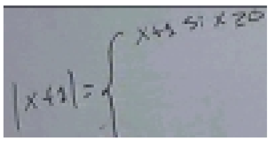
|X + 1|

$$\int_{-3}^{4} |X + 1|\, dX$$

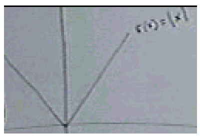
$$\frac{29}{2}$$

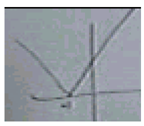
Escenario 3

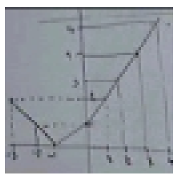
25. I: *En la pregunta 3 se te pide calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto x más 1 diferencial de x* (escribe $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$) *Te pregunto si podrías resolver gráficamente esa integral. En la prueba ¿Cómo la resolviste?*
26. E*: En el examen la resolví numéricamente pero también me equivoqué, como es el valor absoluto de x más 1.* (Escribe) *el valor absoluto de x más 1 será igual a x más 1*, *si x es mayor o igual que cero. Se me olvidó despejar x y x me quedaba mayor o igual que -1* (borra todo lo que ha escrito). *¿Tengo que resolverla toda?.*



27. I*: Te pido que me la resuelvas gráficamente.*
28. E: *Esta es la gráfica del valor absoluto de x y la gráfica del valor absoluto de x más 1, trasladamos la gráfica una unidad hacia la izquierda, se supone que acá es simétrica con respecto al eje y la gráfica de x más 1 sería así, cuando trasladamos una unidad hacia la izquierda me quedaría en -1*, *entonces le voy a dar algunos valores para que quede exacta la gráfica* (borra la ultima gráfica) *porque tengo que sacar la integral gráficamente en el intervalo -3 y 4, si la traslado una unidad, para x sea igual a cero* (observa el integrando y escribe -1 en un sistema de ejes cartesianos) *empiezo a dar valores de -3 hasta 4, en -3, -3 más 1 me da -2, valor absoluto de -2 es 2* (representa varios puntos, murmura, parece que calcula la imágenes de varios puntos, luego traza la gráfica)

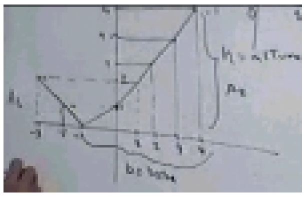






29. I*: ¿Necesitas tantos punto para representarla gráficamente?*
30. E: *No sé aún, porque no estoy muy segura cómo lo calcularé, pero estoy trazando lo que puedo a mano; o sea la gráfica que me están pidiendo ahí en este intervalo* (señala la integral). *O sea de valor absoluto x más 1 en -3 y 4*
31. I*: ¿Son líneas rectas o no?*
32. E*: Esto es recto* (señala la parte derecha de la gráfica).
33. I: *¿Cuántos puntos necesitan para graficar una recta?*

34. E*: Dos. Tenía que sacar los intervalos* (señala los extremos -3 y 4 en la gráfica)*. Tenía con sacar solamente -3 a 4* (señala el integrando) *tenía los dos puntos, sacarlo en -1 y se trasladaba y ahí me daría cero, lo demás no era necesario.*
35. I*: Y ahora ¿Cómo resolverías el problema? Porque el problema en principio no era pintar la curva sino calcular la integral en -3 a 4.*
36. E: *Puedo calcular la integral definida aquí* (señala la región a la izquierda del punto angular) *desde -3 a -1 y desde -1 a 4. Pero, eso es una pregunta, uno puede calcular, cuando uno calcula un área también puede hacerlo si aquí hay un triángulo y aquí tengo otro triángulo* (señala las dos regiones a ambos lados del punto angular) *busco la base, la altura* (señala la gráfica) *y puedo calcular el área, que es la integral en esa gráfica. Como las dos están sobre el eje OX, las dos me darían positiva. Esto es un triángulo, lo que tengo aquí* (señala la región a la izquierda del punto angular) *ésta sería la base, desde -3 hasta -1, la altura* (señala el 2 en el eje Y y traza una línea punteada hasta la semirrecta indicando el punto (-3,2)), *y aquí estaría el otro triángulo, de aquí hasta aquí* (señala el punto angular y recorre la semirrecta hasta el punto (4,5)) *ésta sería la base* (señala el eje OX) *desde -1 hasta 4 y ésta sería la altura* (señala la línea vertical que une el punto (4,0) y (4,5)) *sería h igual a altura y esta sería b igual a base de este triángulo* (se refiere al triángulo de la izquierda) *sería hasta aquí* (señala el punto angular) *y el otro sería hasta aquí* (se refiere al triángulo de la derecha y señala el punto (4,5)) *lo puedo llamar área 1* (escribe A_1) *y área 2* (escribe A_2) *sacando el área 1, sería igual a la base por la altura entre 2* (escribe $A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$), *la base sería igual a dos unidades que es de -3 a -1, lo que se toma en cuenta es la magnitud de la base, la altura es dos* (escribe $A_2=2.2/2=2$*) la primera área me da dos.* Escribe*, Calculando el* A_2*,* $A_2 = \frac{b \cdot h}{2}$*,* $A_2=5.5/2=25/2$*.* Escribe y lo dice verbalmente*, Para calcular el área total=* A_1+A_2*,* $A_t=2+25/2= 29/2$*. Y 29/2 será la integral de la región, de la gráfica en este intervalo desde -3 a 4* (señala las dos regiones en la gráfica).



37. I: *¿Por qué no lo hiciste así en la prueba?*
38. E*: Yo lo empecé a hacer pero no gráficamente, sino numéricamente, entonces cuando evalué el valor absoluto de x más 1 que es igual a x más 1, si x más 1 es mayor que cero, no despejé y trabajé, en vez de dejar x menor que -1, al no despejar x, ya tenía todos los intervalos malos y de hecho creo que me dio 25/2 o algo así.*
39. I*: ¿Y no se te ocurrió pensar que podías hacerlo así?*
40. E: *¡No! Es que me parece tan sencillo cuando uno lo piensa.*
41. I: *¿Es que las Matemáticas tienen que ser difíciles?*
42. E: *Sí.*
43. I*: ¿Tienen que ser para que sean Matemáticas?*
44. E: *Tienen que ser.*
45. I: *¿Si no son difíciles no son Matemáticas?*
46. E: *¡No! No es que son difíciles, sino más que todo las Matemáticas, para mí, hay que ingeniárselas, hay que pensar mucho, no solamente mirarla desde un sólo punto de vista, como a veces me pasa a mí o a la mayoría de los estudiantes, quizá porque uno está concentrado que va a un parcial de Sumas de Riemann, gráficas, yo particularmente cuando estoy en el examen creo que me concentro en que sólo puedo usar el método que tiene que ver con el parcial que estoy viendo, con las secciones que están pautadas para ese parcial y por eso no hubiese pensado que podía sacar la integral definida en ese intervalo del valor absoluto* (señala la gráfica) *por algo tan sencillo como el valor del área de un triángulo.*
47. I*: Pero realmente sí tiene que ver la pregunta con el parcial, porque ahí te están preguntando calcular una integral sencillamente.*
48. E*: Sí.*
49. I*: Y tú misma dices que hay que mirar las Matemáticas de distintos puntos de vista.*
50. E*: Hay que mirarlas. Pero en el examen cuesta a veces mirarlas. Yo soy muy nerviosa.*

PREGUNTA 4
Escenario 1

$$\int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{(x-1)}\Big|_0^2 = -\frac{1}{(2-1)} - \left(-\frac{1}{(0-1)}\right)$$

$$\Rightarrow = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -1-(1) = -1-1=-2$$

Es verdadero ya que al resolver la integral paso a paso verifico que el desarrollo es completamente verdadero, se aplicó la fórmula de integración de $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$. Luego se evaluó la integral en el intervalo $[0,2]$

Escenario 2

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^2}$$

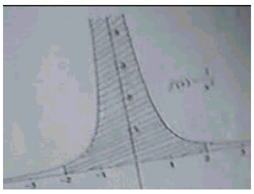
$$\int_0^2 \frac{1}{(X-1)^2}\,dX$$

$$-2$$

EL DESARROLLO ES VERDADERO, YA QUE LO HEMOS CALCULADO A TRAVÉS DEL CÁLCULO DE INTEGRAL DEFINIDA CON EL DERIVE

Escenario 3

51. I: *La pregunta seis pedía estudiar si era verdadera o falsa que* $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -2$
52. E*: Yo revisé lo que está escrito y dije es verdadero, pero como en el ejercicio anterior hay que revisar el dominio. No se podía calcular porque teníamos que calcular la integral desde cero a dos y en 1 tiene una asíntota vertical* (señala el integrando) *y por tanto hay una discontinuidad.*
53. *I: ¿Y entonces no se puede calcular la integral?*
54. *E: No la puedo calcular porque tiene que ser continua en todo el intervalo y con la asíntota en 1 quedaría así* (mueve la mano sobre la pizarra como trazando la gráfica de la curva), *no se podía calcular por la asíntota vertical.*
55. I*: Y la hiciste con el DERIVE.*
56. E*: Sí con el DERIVE.*
57. I*: ¿Y qué te daba con el DERIVE?*
58. E*:* Observa la prueba de laboratorio y dice *en el DERIVE la hice mal.*
59. I*: ¿Por qué la hiciste mal en el DERIVE?*
60. E*: Ya va. Porque calculé la integral y le di el intervalo dos cero, pero yo tenía que darme cuenta que tenía una asíntota y no podíamos calcularla de dos cero. Con el DERIVE me da un valor -1 pero.*
61. I*: ¿Qué crees que está mal?*
62. E*: Los datos que introduje en DERIVE. No sé. Incluso dije que era verdadero.*
63. I*: ¿Entonces qué ocurre? ¿Está mal el DERIVE?*
64. E*: No, el DERIVE no está mal, está mal el planteamiento que hice. No lo podía integrar porque el 1 no estaba en el dominio de la función, porque cuando hacemos la gráfica que está* (busca en la prueba la gráfica que aparece en la pregunta 9)
65. I*: ¿Entonces es necesario hacer la gráfica para verlo primero o no?*
66. E*: Sí, es más fácil. La gráfica es la misma sólo que trasladada* (muestra la gráfica que aparece en la pregunta 9) *una unidad hacia la derecha y la asíntota vertical está en cero* (señala la gráfica) *y en ésta está en 1. La integral no la podíamos calcular en un intervalo definido, tomaría valores más grandes* (mueve el brazo hacia arriba), *más grandes y no encontraríamos el punto donde está definida la integral.*
67. I*: Realmente DERIVE lo que hace es que aplica la misma fórmula que aparece aplicada ahí.*



PREGUNTA 5
Escenario 1

Es verdadero, ya que por el Teorema Fundamental del cálculo si tenemos 2 funciones en este caso $f(x)$ y $g(x)$ con la condición de g'. $f(x) \geq g(x)$ esto implica g' necesariamente al resolver la integrales de ambas funciones para el mismo intervalo [a,b] tendriemos que la integral $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Escenario 2

ES VERDADERO, YA QUE SI TENEMOS UNA UNA FUNCIÓN F(X) QUE CUMPLE LA CONDICIÓN DE QUE ES MAYOR QUE G(X), CUANDO INTEGREMOS DICHAS FUNCIONES EN UN MISMO INTERVALO [a,b] NECESARIAMENTE TENDREMOS QUE LA INTEGRAL DE F(X)DEFINIDA EN [a,b] SERÁ MAYOR QUE LA INTEGRAL DE G(X) DEFINIDA EN [a,b]

EJEMPLO EN EL INTERVALO[0,1]

$F(X) = X^2$

$G(X) = X$

$\int_1^2 X^2\, dX$

$$\frac{7}{3}$$

2.333333333

$\int_1^2 X\, dX$

$$\frac{3}{2}$$

1.5

CON ESTO DEMOSTRAMOS QUE ES VERDADERO

PREGUNTA 6
Escenario 1

Es verdadero, ya que al tener la integral de $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ para el mismo intervalo tendremos tambien $f(x) \geq g(x)$ para todo x que pertenesca al mismo intervalo [a,b] en el cual se evaluó la integral

Escenario 2

ES VERADERO

EJEMPLO: EN EL INTERVALO (1,2)

$F(X) = X^2$

$\int_1^2 X^2\, dX$

$$\frac{7}{3}$$

2.333333333

G(X) = X

$\int_1^2 X\, dX$

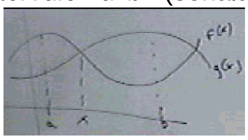
$\frac{3}{2}$

1.5

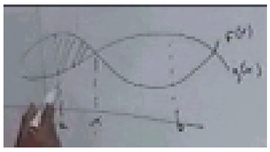
POR LOS RESULTADO OBTENIDOS CONFIRMAMOS QUE ES VERDADERO, COMO LA INTEGRAL DE F(X) DEFINIDA EN UN INTERVALO [a,b] ES MAYOR QUE LA INTEGRAL DE G(X) DEFINIDA EN UN INTERVALO [a,b] EN ENTONCES F(X)≥G(X) PARA TODOS LOS X QUE PERTENECEN AL MISMO INTERVALO DEFINIDO [a,b]

Escenario 3

68. I*: Las preguntas que decían que si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: si f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral entre a y b de f(x) diferencial de x es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) diferencial de x, preguntaban que si esto era verdadero o falso* (escribe la proposición en la pizarra) *y también el recíproco, es decir que si la integral entre a y b de f(x) diferencial de x es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) diferencial de x podemos afirmar que f(x) es mayor o igual que g(x)* (escribe la proposición en la pizarra). *Se te pregunta ¿Podemos afirmar que esto* (señala la proposición 5), *podemos afirmar esto?* (señala la proposición 6) *¿Por qué? dijiste que eran verdaderas.*
69. E*: Verdaderas. Ésta si dije que era verdadera* (señala la proposición 5) *porque si tenemos cualquier función f(x), tenemos la función f(x), partimos de ésta* (señala a f(x)) *f(x) es mayor que g(x), cuando tenemos estas dos funciones en el mismo intervalo "a b"* (señala los límites de integración) *la integral de f(x) en el intervalo "a b" será mayor que la integral de g(x) en el intervalo "a b". Ésta* (se refiere a la proposición 6) *yo dije en el parcial que era verdadera, pero tenía mucha confusión, en ésta yo estaba segura* (se refiere a la proposición 5) *pero en ésta no estaba segura* (se refiere a la proposición 6). *Lo que hice era pensar que si tenía una función y tenia su integral* (señala la hipótesis de la proposición 5 y la hipótesis de la proposición 6) *esta integral sería mayor* (señala la tesis de la proposición 6). *Dije que era exactamente lo mismo* (parece que se refiere a que las dos proposiciones son equivalentes) *pero invertí el orden, dije que si tenía esto* (se refiere a la hipótesis y la tesis de la proposición 6) *la integral de ésta* (se refiere la integral de f(x) y la de g(x) en la proposición 6) *entonces f(x) sería mayor o igual que g(x)* (señala la tesis de la proposición 6). *Pero f(x) puede ser mayor en el intervalo "a b"* (señala el integrando f(x) en la proposición 6) *¿Lo puedo explicar con una gráfica?*

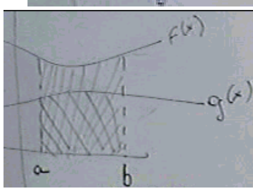


70. I*: Sí.*
71. E: Dibuja
72. I*: ¿Ese ejemplo es con respecto a cuál proposición?*
73. E*: Con la segunda* (se refiere a la proposición 6). *Yo digo que en "a" ésta es f y ésta g* (señala las curvas en la gráfica) *y éste sea un punto "c" o un punto x* (se refiere al que identifica como x en la gráfica), *la integral de f y g en "a b"* (raya la región entre f y g) *la integral en este punto en "a x" f es mayor que la integral de g(x). Pero en este punto* (se refiere a la región entre x y b) *la integral de f(x) es menor que la de g(x). No sabemos cómo se comporta f(x) y g(x) para asegurar que en ese intervalo "ab" siempre será mayor la f de x que la g de x.*

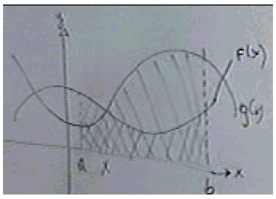


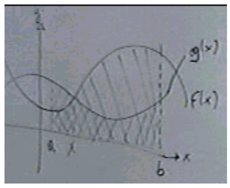
74. I*: Entonces tendrás que decirme ¿Cuál es la integral de f(x)? ¿Quién es la integral de g(x)? Y luego comparar f(x) y g(x).*
75. E*:* Borra la gráfica y grafica la integral de *f(x)* y dice *sería toda esta región como en la pregunta número 5* (señala la proposición 5*) que f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral de f(x) en el intervalo "ab" es mayor que la integral de g(x) en el intervalo "ab". La integral de f(x) en este intervalo "ab", como f(x) es mayor que g(x)*

será esto (se refiere a la región rayada en la gráfica anterior). *Y la integral de g(x) en ese mismo intervalo será esta, donde vemos que la integral de f(x) es mayor que la integral de g(x) en el intervalo "ab".*



76. *I: Espera un momento, vamos a ver, eso es para justificar eso* (se refiere a la proposición 5). *Si ahora considero f(x) entre a y b y considero g(x) entre a y b. Se sigue cumpliendo que f(x) es mayor que g(x) ¿no?*
77. *E: Sí.*
78. *I: ¿Será que la integral en a y b de f(x) es mayor que la integral...?*
79. *E: De g(x) en "a b", porque este valor dará negativo* (señala la región bajo el eje OX, correspondiente a la región limitada por la curva de g y el eje OX) *y éste dará positivo* (señala la región sobre el eje OX, correspondiente a la región limitada por la curva de f y el eje OX) *ésta será mayor* (señala la región sobre el eje OX) *que la integral de ésta* (señala la región bajo el eje OX)
80. I*: Ahora puedes pasar a la segunda* (se refiere a la proposición 6)
81. E: *En el caso contrario que tenemos la integral de f(x) en el intervalo "a b" será mayor o igual que la integral de g(x) en el intervalo "a b" entonces me preguntan que si f(x) es mayor o igual que g(x); si yo tengo, suponiendo, aquí f(x) era mayor que g(x)* (señala la gráfica anterior que elaboró el estudiante), *pero acá tenemos que la integral de f(x)* (señala la curva de f en la última gráfica) *mayor, ya va* (observa la gráfica y la proposición 6), *si la integral de f(x) es mayor que la integral de g(x);* (invierte f(x) y g(x) en la gráfica) *que la integral de f(x) será menor que la integral de g(x), siendo ésta f(x)* (señala la curva de f), *yo no se cómo se comporta f(x) en todo el intervalo "a b"* (recorre la curva de f con el rotulador), *puede haber un caso que la f(x) sea mayor en el mismo intervalo, como acá que es mayor que g(x)* (señala la parte en donde la curva de f es mayor que la de g), *pero en el mismo intervalo definido "a b*"(señala el segmento "ab" en eje OX) *hay una variación* (señala la parte en donde la curva de g es mayor que la de f) *y g(x) es mayor que f(x), por lo tanto cuando calculamos acá la integral de f(x)* (señala la parte en donde la curva de f es mayor que la de g) *tendríamos esta porción* (señala la región bajo la curva de f) *y la integral de g(x)* (señala la región bajo la curva de g) *tendríamos esta otra porción.*

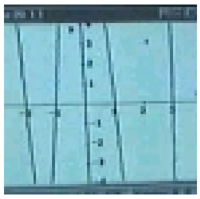




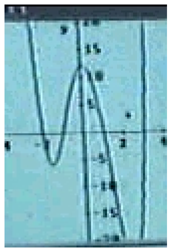
82. I*: ¿Por qué dudas?*
83. E: *Porque estoy confundida con la gráfica. Pero en realidad no podemos asegurarlo porque no sabemos cuál es la función que estamos integrando, como acá* (señala la gráfica).
84. I*: ¿Qué es lo que tienes que probar para decir que es falso?*
85. *E: Que la integral de f(x) no es mayor, todo el tiempo, que la integral de g(x).*
86. I: *No. Lo que tienes que probar es que* (se refiere a la proposición 6) *tienes que tener dos funciones donde la integral de una y la integral de otra, sea una mayor que la otra, la integral, y las funciones no sea una mayor que la otra. Ahora mira la gráfica y trata de explicarlo. ¿Crees que la integral de f(x) entre a y b es mayor o igual que la integral de g(x) entre a y b?*
87. E*: Sí.*
88. I*: ¿Es f(x) siempre mayor que g(x)?*
89. E*: No siempre f(x) es mayor que g(x)* (señala la gráfica).

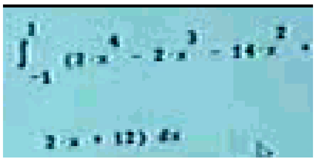
PREGUNTA 7
Escenario 3

90. I*: En la siguiente pregunta te pido que calcules el área que forma con el eje OX la función* (escribe en la pizarra $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ calcular el área que forma con el eje OX).
91. E*: ¿Puedo usar el DERIVE?*
92. I*: Puedes usar el DERIVE desde la primera pregunta. ¿Por qué no lo has usado antes?*
93. *E: Porque DERIVE me ayuda a resolver las integrales más fáciles. Yo uso DERIVE más que todo cuando tengo gráficas, regiones bajo la curva o Simpson, bueno Simpson lo entendí gracias a DERIVE.*



94. E: Escribe la expresión algebraica de la función en la pantalla de *DERIVE.* Luego grafica la curva, le hace varios ZOOM y comenta *Calcularía el área, calcularía la integral desde -2 hasta -1* (estima los límites de integración por observación de la gráfica, en la pantalla de *DERIVE*) *y desde -1 a 1, de 1 a 3, calculando la integral en estas regiones* (señala cada región*).* Escribe en la pantalla de *DERIVE calculando la integral definida de f(x) en el intervalo [-2,-1]* (Plantea en la pantalla de *DERIVE* la integral), *la integral de ésta* (señala la región en [-2,-1]) *o sea el área en esta región me da -3.666666, me da negativa porque está debajo del eje OX. Voy a calcular ahora la integral definida desde -1 hasta 1, que es esta parte que está sobre el eje OX;* escribe en la pantalla *Calculando la integral definida de f(x) en el intervalo [-1,1];* Plantea en la pantalla de *DERIVE* la integral y comenta *da positiva porque esta sobre el eje OX y da 15.4666666.* Escribe en la pantalla *Calculando la integral definida de f(x) en el intervalo [1,3].*





95. *I: ¿Estas segura que esos puntos son el 1 y el 3?*
96. *E: Sí porque cuando coloco el cursor acá en la gráfica veo que el cursor esta en menos dos cero, en este caso -2 sería la coordenada del punto en x y cero el x, cuando es este punto exacto -1 y cero* (mueve el cursos sobre el eje OX)*, cosa que sería muy difícil al graficarlo sin el DERIVE, a mano, no podría encontrar los valores exactos.*
97. *I: ¿No tienes otra forma de comprobarlo? ¿No te bastaría con sustituir, a ver cuánto te da f(x)?*
98. *E: Tomaría los valores de x cuando "y" es igual a cero.*
99. *I: Digo yo, si la x la sustituyes por -2, por ejemplo ¿Cuánto te tendría que dar la función?*
100. *E: Hace silencio por segundos. Me daría cero.*

PREGUNTA 8
Escenario 1

No es posible calcular el área de la región rayada, ya que existe una asíntota vertical en $x=0$, entonces al calcular el área no conseguiríamos los valores para el techo de un rectángulo, ya que los valores serían infinitos

También al calcular el área da negativa aplicando la suma de Riemann y por eso no es posible

$\frac{b-a}{n} = \Delta x \rightarrow x_i = a + i\Delta x$ en el intervalo $(-2,2)$

$\Delta x = \frac{2-(-2)}{n} = \frac{4}{n}$

$x_i = a + i\Delta x$

$x_i = -2 + i\frac{4}{n}$ ahora calculemos $f(x_i)$ en la función

$f(x_i) = \frac{1}{\left(-2+i\frac{4}{n}\right)^2}$ aparte calculamos $f(x_i)$

$f(x_i) = (-2)^2 + 2(-2)\left(\frac{i4}{n}\right)^2 + \left(\frac{i4}{n}\right)^2 = 4 - \frac{i16}{n} + \frac{i^2 16}{n^2}$

multiplicamos por $\Delta x \Rightarrow \left(4 - \frac{i16}{n} + \frac{i^2 16}{n^2}\right) \cdot \frac{4}{n}$

$= \frac{16}{n} - \frac{i64}{n^2} + \frac{i^2 64}{n^3}$ ordenando $\Rightarrow \frac{i^2 64}{n^3} - \frac{i64}{n^2} + \frac{16}{n}$

Aplicando Sumatoria

Error

$\frac{64}{n^3}\sum i^2 - \frac{64}{n^2}\sum i + \frac{16}{n}\sum 1$

$= \frac{64}{n^3}\left(\frac{(2n+1)(n+1)}{6}\right) - \frac{64}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{16}{n} \cdot n.$

$$= \frac{64}{n^3}\left(\frac{2n^2+3n+1}{6}\right) - \frac{32}{n}(n+1) + 16$$

$$= \frac{10{,}66}{n^3}(2n^2+3n+1) - \frac{32}{n}(n+1) + 16$$

Sacando máximo común divisor n^3

$$= \frac{10{,}66(2n^2+3n+1) - 32n^2(n+1) + 16n^3}{n^3}$$

$$= \frac{21{,}32n^2 + 31{,}98n + 10{,}66 - 32n^3 - 32n^2 + 16n^3}{n^3}$$

Aplicando suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{21{,}32n^2 + 31{,}98n + 10{,}66 - 32n^3 - 32n^2 + 16n^3}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{21{,}32n^2}{n^3} + \frac{31{,}98n}{n^3} + \frac{10{,}66}{n^3} - \frac{32n^3}{n^3} - \frac{32n^2}{n^3} + \frac{16n^3}{n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = \frac{21{,}32}{n} + \frac{31{,}98}{n^2} + \frac{10{,}66}{n^3} - 32 - \frac{32}{n} + 16$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i) = -32 + 16 = -16$$

Escenario 2

NO SE PUEDE CALCULAR EL ÁREA DE LA REGIÓN RAYADA, POR QUE EXISTE UNA ASÍNTOTA EN X=1 Y X=-1, POR LO TANTO HAY DISCONTINUIDAD Y PARA PODER CALCULAR EL ÁREA DEBE SER CONTINUA EN TODO SU DOMINIO O EN TODO EL INTERVALO A EVALUAR.

PREGUNTA 9

Escenario 1

Cálculo de la integral definida en $[-2,3]$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+3\,dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} -x+4\,dx. \qquad \frac{-8+9}{3} = \frac{1}{3}$$

Error

A parte

$$\int_{-2}^{-1}(-x^2+3)\,dx = -\frac{x^3}{3}\boxed{+3}+C\Big|_{-2}^{-1} -\frac{(-1)^3}{3}+3-\left(-\frac{(2)^3}{3}+3\right) = \frac{+1}{3}+3-\left(-\frac{8}{3}+3\right) =$$

$$= \frac{10}{3} - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} \qquad \frac{1+9}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C\Big|_{-1}^{2} \frac{(2)^3}{3} - \left(\frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{8}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{8}{3}+\frac{1}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\int_{2}^{3} -x+4\,dx = -\frac{x^2}{2}\boxed{+4}+C\Big|_{2}^{3} -\frac{(3)^2}{2}+4-\left(-\frac{(2)^2}{2}+4\right) = -\frac{9}{2}+4-(-2+4)$$

Error

$$= \frac{-9+8}{2} - (2) = -\frac{1}{2} - 2 = \frac{-1-4}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+3\,dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} -x+4\,dx$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \frac{9}{3} + \frac{9}{3} + \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{18}{3} - \frac{5}{2} = \frac{36-15}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \frac{7}{2}$$

Escenario 2

ESTIMANDO EL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN EL INTERVALO [-2,3]

$F(X) = -X^2 + 3$

$$\int_{-1}^{-2} (-X^2 + 3)\, dX$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$-0.6666666666$$

$F(X) = X^2$

$$\int_{-1}^{2} X^2\, dX$$

$$3$$

$F(X) = -X + 4$

$$\int_{2}^{3} (-X + 4)\, dX$$

$$\frac{3}{2}$$

$$1.5$$

LA SUMA DE TODOS LOS RESULTADOS, ES EL RESULTADO DE LA INTEGRAL DE F(X) DEFINIDA EN EL INTERVALO [-2,3]

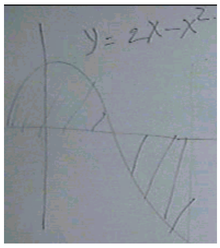
$$-\frac{2}{3} + 3 + \frac{3}{2}$$

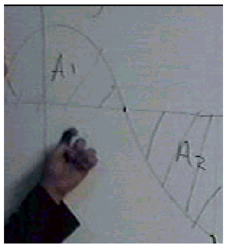
$$\frac{23}{6}$$

ENTREVISTA AL ESTUDIANTE E4

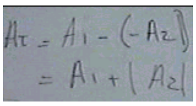
PREGUNTA 1
Escenario 3

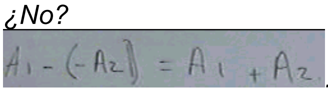
1. I*: Escribe en la pizarra la expresión la* $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral defina entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2. E*: La integral de f(x) diferencial de x de "a" a "b" es una función x que la vamos a evaluar de un intervalo "a" hasta un intervalo "b".*
3. I*: ¿Eso sería suficiente?*
4. E*: También tenemos en cuenta la existencia de las propiedades de integrales. Hay integrales de dos casos; una puede ser determinada, otra indeterminada.*
5. I*: ¿La integral tiene que ver algo con el área?*
6. E*: Es el área bajo la curva.*
7. I: *¿Siempre?*
8. E*: Claro que sí.*
9. I*: Si tienes, por ejemplo, una función cualquiera, calculas la integral, ¿Te da el área siempre bajo la curva? Si la función es negativa, por ejemplo.*
10. E*: Tengo que sacarle el valor absoluto al área para que me dé positiva, porque ningún área puede ser negativa. Puedo hacerlo aquí* (señala la pizarra).
11. I*: Hazlo.*
12. E: *Puedo tener esto* (dibuja una curva en la pizarra), *tú me dices que calcule el área de la región rayada, supón que sea "y" es* (no completa la frase).
13. I: *Dos x menos x cuadrada.*
14. E: Completa la gráfica. *Tenemos que buscar los puntos exactos donde corta al eje OX* (dibuja los puntos de corte de la curva con el eje OX), *para calcular exactamente, con el programa DERIVE, para calcular exactamente donde corta exactamente al eje OX, después que tenemos los dos intervalos, podemos usar cualquier método de rectángulos inferior, superior, extremo izquierdo, extremo derecho y ahí nos va dar tal valor. Entonces decimos que el área total, este es el área 1 y ésta es el área 2* (escribe en cada región la identificación). *Cuando es la región es la suma de todas* (señala las dos regiones*); pero cuando es área, un área nunca puede ser negativa* (señala la región bajo el eje OX) *le sacamos el valor absoluto y le ponemos área 1 menos el área 2, otra definición puede ser área 1 más el valor absoluto del área 2* (escribe)

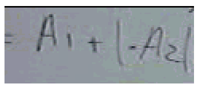




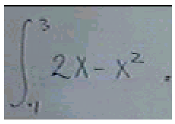
15. I*: ¿Y esas dos expresiones son iguales?*
16. E*: Sí.*
17. I*: El área 1 menos menos área 2 es área 1 más el área 2 ¿No?*



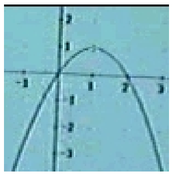
18. E*: Sí.* Escribe  .
19. I: *¿Qué diferencia hay con la de abajo? Son distintas, en una le pones valor absoluto y a la otra no.*
20. E*: A una le pongo valor absoluto, porque si A es negativo, con el valor absoluto se convierte en positivo. Así sí.*



21. I: *Esa función es más o menos así ¿Calcula el área?*
22. E: *Por lo menos, si usted me manda a integrar esta función* (señala la expresión y=2x-x^2) *de -1 a 3* (escribe en el eje OX los números) *integro la función de -1 a 3 de 2x-x^2* (plantea y resuelve la integral) *el resultado es* $-\frac{4}{3}$.



23. I*: ¿Entonces el área de esa región rayada es -4/3?*
24. E*: No, no me tiene que dar negativo. Chequea el procedimiento.*
25. I*: ¿Qué tal si usas el DERIVE?*
26. E: (Escribe en *DERIVE* la expresión F(x):=2x-x^2 y la gráfica, obtiene la gráfica, luego cierra la ventana gráfica y se queda con la simbólica)*, usted me dice que calcule la integral.*



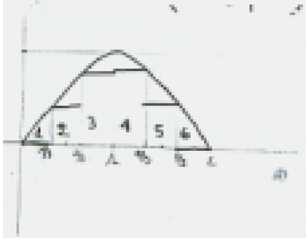
PREGUNTA 2
Escenario 1

Yo voy a calcular el area rayada por el metodo de Región Rectangula Inferior sobre X para el intervalo [0, 2] dividido en m rectangulos. e igualmente para el intervalo [2, 3,5]

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

hacemos las respectivas particiones

Rectangulo 1 $(0, \frac{1}{3})$ $[0, \frac{1}{3}]$
2 $(\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$ $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
3) $(2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$ $(\frac{2}{3}, 1)$
4) $(3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3})$ $(1, \frac{4}{3})$
5) $(4\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3})$ $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$
6) $(5\frac{1}{3}, 6\frac{1}{3})$ $(\frac{5}{3}, 2)$



Rectangulo 1 $\Delta x\ f(0) = 0$ $f(0) = 0$
2 $\Delta x\ f(\frac{1}{3}) = 0,1837$ $f(\frac{1}{3}) = 0,5511$
3 $\Delta x\ f(\frac{2}{3}) = 0,291852$ $f(\frac{2}{3}) = 0,8844$
4 $\Delta x\ f(\frac{4}{3}) = 0,294063$ $f(\frac{4}{3}) = 0,8911$
5 $\Delta x\ f(\frac{5}{3}) = 0,186252$ $f(\frac{5}{3}) = 0,5644$
6 $\Delta x\ f(2) \approx 0$

area en el intervalo [0, 2]:

$\Delta x[f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3}) + f(2)$

$\frac{1}{3}[0 + 0,1837 + 0,291852 + 0,294063 + 0,186252 + 0]$

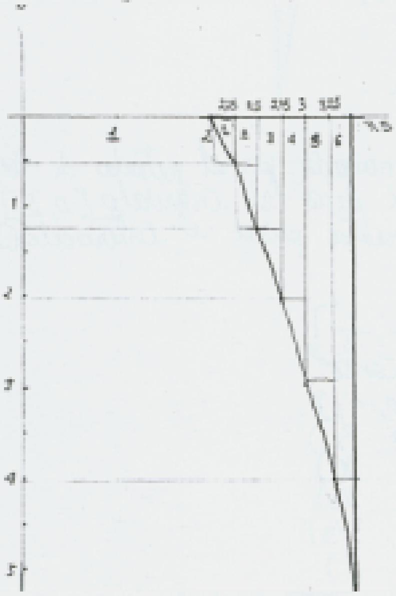
$\frac{1}{3}[0,955867]$

$A_1 = 0,318622333.$

Ahora tomamos el intervalo [2, 3,5] Vamos a estudiar este interva

$\Delta x = \frac{3,5-2}{6} = 0,25.$

Rectangulo 1 $\Delta x\ f(2)$ $f(2) = 0$
2 $\Delta x\ f(2,25)$ $f(2,25) = -0,5$
3 $\Delta x\ f(2,5)$ $f(2,5) = -1,2$
4 $\Delta x\ f(2,75)$ $f(2,75) = -2,0$
5 $\Delta x\ f(3)$ $f(3) = -3$
6 $\Delta x\ f(3,25)$ $f(3,25) = -4$



Rectan Inferior bajo X

$\Delta x\ [f(2) + f(2,25) + f(2,5) + f(2,75) + f(3) + f(3,$

$\frac{1}{4}[0 - 0,5625 - 1,25 - 2,0625 - 3 - 4,062$

$\frac{1}{4}[-10,9375]$

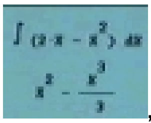
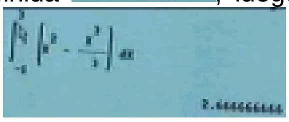
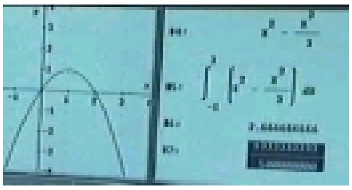
$Area_2 = |-2,734375|.$

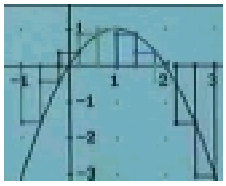
Area Total $= A_1 + |A_2|.$

$= 0,318622333 + |-2,734375|$

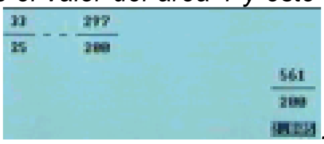
$A_T = \boxed{= 3,052997333}$

Escenario 2
NO RESPONDE.
Escenario 3

27. I: *Yo digo que calcules el área rayada. Ves que hay un error en la gráfica porque la hicimos a pulso, realmente la gráfica sería así, que es el problema 2.*
28. E*:* Calcula la integral indefinida , luego calcula la integral definida entre -1 y 3 del resultado  *Esta sería realmente el área.*
29. I*: Pon mosaico vertical.*
30. E: Muestra las dos ventanas  *¿Dónde esta el programa de utilidades?*
31. I: *En la carpeta que tiene tu nombre.*
32. E: (Abre el archivo que contiene el programa de utilidades referente al método gráfico, escoge la sentencia RECT_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) que sirve para representar rectángulos extremos izquierdo, sustituye “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, cometiendo el error de no escribir la expresión algebraica de la función y por tanto no pudo obtener la matriz de valores necesaria para graficar los rectángulos. Copia el programa de utilidades y lo pega en la ventana en donde tenía escrita la función F(x):=2x-x^2, marca la sentencia RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a,b,n), sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10 y le da una matriz que no logra representar los rectángulos porque la función esta antes del programa de utilidades).
33. I*: No has definido la función.*
34. E*: Entonces la defino, agarro esta función (se refiere a F(x):=2x-x^2) y me voy acá* (se refiere al final del programa de utilidades, en donde copia la expresión de la función) selecciona la sentencia RECT_EXTREMO_DERECHO(a,b,n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 3 y “n” por 10, calcula la matriz y representa los rectángulos. *Esta es el área tomando extremo derecho de este intervalo* (se refiere al intervalo [-1,3]), *por allí se traza el rectángulo, pero hay que establecer un delta de x.*

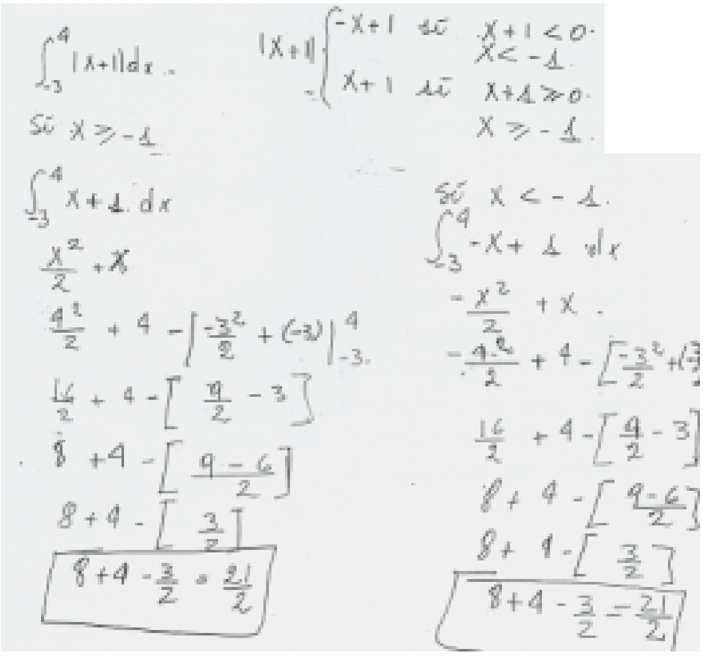


35. I*: De todas maneras observa que ahí estas trabajando de -1 a 3, pero allí no* (se refiere a la pregunta 2, cuyo intervalo es de 0 a 3) *queremos el área rayada desde 0 hasta 3. Yo quiero que me calcules el área de esa región rayada.*
36. E*: ¿Desde 0 hasta 3?*
37. I*: Sí.*
38. E*: Lo puedo hacer por el método numérico también.* (Abre el archivo del programa de utilidades referente al método numérico, copia las sentencias en ventana donde tiene el resto del programa y definida la función; copia la función al final del programa).
39. I*: ¿Qué es lo que estas haciendo?*
40. E: *Para calcularle numéricamente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n)). *Lo haré por rectángulos extremo derecho, tomo aquí la sentencia, sustituyo “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da* -0.495 *¿Y por qué da el área negativa?*
41. I: *Eso pregunto yo ¿Porqué te da negativo?*
42. E: (Selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da 0.0225). *Da diferente.* (Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_IZQUIERDO (a, b, n) y sustituye los valores de “a” por 0, “b” por 3 y “n” por 10 y le da 0.405).

43. I: *¿Por qué crees que da en un sitio positivo y el otro negativo?*
44. E*: ¿A qué se debe eso?*
45. I: *¿Tú qué crees?*
46. E*: Silencio.*
47. I: *Tú mismo lo dijiste de entrada, como tienes que calcular el área de esa región rayada, entonces pusiste allí el área total es igual al área 1 más el valor absoluto del área 2 y ahora en lo que estás calculando ahí no estás distinguiendo. ¿Tú estas distinguiendo el área 1 y el área 2 o lo estas hallando todo a la vez?*
48. E*: Tengo que conseguir el área.*
49. I*: ¿Qué estas haciendo?*
50. E: (Utiliza la categoría de *DERIVE* para calcular las raíces de la ecuación y le da x = 0 y x=2). *Entonces debemos conseguir el área de 0 a 3, partimos de dos intervalos de 0 a 2 y de 2 a 3. Esto que saqué* (señala los resultados obtenidos anteriormente) *es el valor de la región, más no del área.* Sustituye en la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n) los valores de “a” por 0, “b” por 2 y “n” por 10 y le da 33/25. *Este es el valor del pedazo de cero a dos, es la región y para conseguir la región de 2 a 3 cambio “a” por 2, “b” por 3 y “n” por 10* (en la misma sentencia) *aquí me dará negativo* (el resultado es -297/200). *Pero si decimos que este resultado* (se refiere a 33/25) *es el valor del área 1 y este el valor del área 2, entonces el área total será ésta menos ésta* 

. Este sí es el valor del área, diferente de la región; este es el área total. El área 1 sería este (señala en la gráfica la región entre 0 y 2 y el valor de 33/25) *y esto sería el valor aquí* (señala la región entre 2 y 3 y el valor de -297/200)*. El área total sería 2.805.*

PREGUNTA 3
Escenario 1



Escenario 2

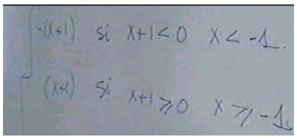
$f(x) := |x + 1|$

$$\int_{-3}^{4} f(x) := |x + 1| \, dx$$

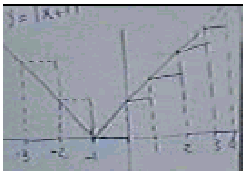
$$\frac{29}{2}$$

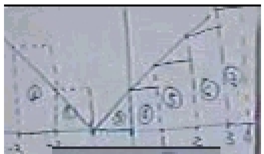
$$14.5$$

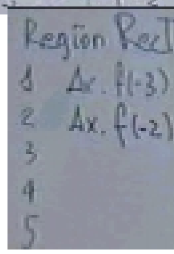
Escenario 3

51. I*: La siguiente pregunta es calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto de x más 1 diferencial de x* (escribe en la pizarra $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$).
52. E*: Lo puedo hacer con el DERIVE.*
53. I*: Entonces abre un archivo nuevo.*
54. E*: Lo voy a explicar acá* (se acerca a la pizarra), *si tengo que* $f(x)=|x+1|$ *definiendo el valor absoluto me quedaría* 

me quedarían dos integrales de -3 a -1 y de -1 a 4 (señala la integral) *aplicando el concepto del valor absoluto* (señala la definición), *me quedaría* $\int_{-3}^{-1}x+1+\int_{-1}^{4}x+1$.
55. I: *¿Seguro?*
56. E*:* (Modifica las integrales $\int_{-3}^{-1}(x+1)dx + \int_{-1}^{4}(x+1)dx$).
57. I: *¿Gráficamente sabrías hacerlo?*
58. E*: Sí, porque tenemos que valor absoluto de x es así*  *y x más 1 quiere decir una unidad hacia la izquierda, me quedaría* .
59. I*: Yo te pregunto la integral entre -3 y 4.*
60. E: *Bueno, usted me está mandando a calcular toda esta área* (señala la región a la derecha del punto angular). *Esta área la puedo hacer por rectángulos, por puntos medios* (señala la región a la izquierda del punto angular)*, ¿cómo? consiguiendo un delta de x, que sería el ancho del rectángulo, la base del rectángulo; por lo menos, supongamos que agarramos que Δx=1, porque el 2 no cuadra, quedaría aquí* (dibuja segmentos verticales en la gráfica), *establecería unos rectángulos, si nos vamos por rectángulos extremo izquierdo ésta sería la imagen de 1, ésta sería la imagen del otro, éste la imagen de éste, éste la imagen de este, del lado izquierdo de -1 sería éste* (dibuja para cada extremo el respectivo rectángulo) *llamemos rectángulo 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Yo digo que el rectángulo 1 será delta x por f(-3), el rectángulo 2 será delta x por f(-2) y así sucesivamente.*

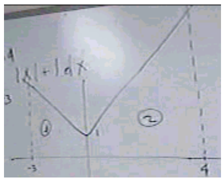




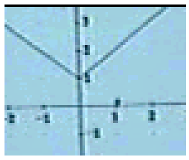


61. I*: Si ahora en lugar de la integral de -3 a 4 de valor absoluto de x más 1 tuvieras la integral de -3 a 4 de valor absoluto de x, más 1.*
62. E*: Valor absoluto de x, cierro, más 1.*
63. I: *Sí.*
64. E*: Sería diferente.* (Escribe $\int_{-3}^{4}|x|+1dx$). *Esta va ser la gráfica.* 
65. I*: ¿Cómo calcularías esa integral?*
66. E*: La calcularía de -3 a 0 y de 0 a 4* (señala en la grafica) *según la gráfica. También puedo desarrollar el valor absoluto de x.*
67. I*: ¿Necesitarías hacer todos esos rectángulos que hiciste?*
68. E*: Directamente aquí* (señala la integral) *sacando la integral, teniendo la gráfica, no. Estudio la integral de -3 a 0 de x+1, más la integral de 0 a 4 de x+1 diferencial de x.*
69. I*: ¿Y ahí no tienes dos figuras geométricas que tú conoces?*
70. E*: ¿Dos figuras geométricas?*
71. I*: Que te pueda permitir calcular el área, es decir dos trapecios.*
72. E*: Sí.*
73. I: *Márcalos a ver.*

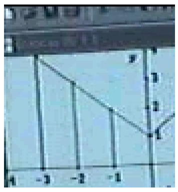
74. E*: Aquí los tengo.*
75. I*: ¿Cómo?*
76. E*: Me quedaría trapecio 1, trapecio 2.* Escribe  (Región Trapecio))



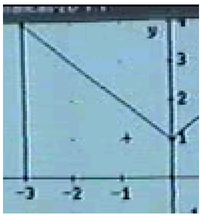
77. I*: ¿Qué estas haciendo?*
78. E*: ¿Lo puedo hacer con el DERIVE?*
79. I*: Sí claro.*
80. E: (Escribe el *DERIVE* $F(x) := |x| + 1$ y grafica la función abre el archivo del programa de utilidades para el método gráfico, lo copia y lo pega en la ventana en donde escribe la expresión $F(x) := |x| + 1$, esta vez coloca al final del programa la expresión de la función).

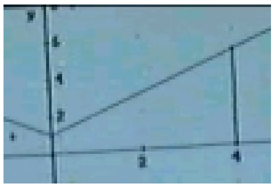


81. I*: ¿Qué estas haciendo?*
82. E*: Para calcularle el área, si lo hago por trapecios,* (selecciona la sentencia TRAPECIOS (a, b, n), mueve la expresión de la función a la primera sentencia, vuelve a marcar la sentencia de trapecios y dice "a" lo tomo como -3, "b" como 0 y "n" 1, calcula la matriz y no logra representar porque la expresión de la función debe estar al final).
83. I*: Es el mismo problema de antes, la F(x) debes escribirla debajo.*
84. E*:* (Escribe la expresión al final del programa, selecciona la sentencia de trapecios y sustituye "a" por -3, "b" por 0 y "n" por 3 y calcula la matriz, luego la grafica).



85. I: *Son tres trapecios.*
86. E: *Tres trapecios.*
87. I: *¿No era uno?*
88. E*: Mientras más trapecios, más exacto da.*
89. I*: ¿Tú crees?*
90. E: *En práctica nos daba así.*
91. I: *Prueba a ver. Hazlo con uno*
92. E: *Con uno*, (sustituye "a" por -3, "b" por 0 y "n" por 1, calcula la matriz y representa el trapecio) *Éste es un solo trapecio. Ahora si,* (sustituye "a" por 0, "b" por 4 y "n" por 1, calcula la matriz y representa el trapecio) *Ahí lo tengo.* (Abre el archivo del programa de utilidades para el método numérico, copia el programa y lo pega en la ventana en donde viene trabajando; copia al final la expresión de la función, selecciona la sentencia REGION_TRAPECIO(a, b, n), sustituye "a" por -3, "b" por 0 y "n" por 1 y le da 7.5). *Éste es el área 7.5, el área del trapecio 1. Si quiero conseguir el área del trapecio 2*, (sustituye en la sentencia "a" por 0, "b" por 4 y "n" por 1 y le da 12). *Entonces el área total* (suma 7.5 más 12) *es 19.5.*





PREGUNTA 4
Escenario 1

b) Verdadero

$$\int_0^2 (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_0^2 = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^2 = -\frac{1}{(x-1)}\Bigg|_0^2$$

$$\frac{-1}{(2-1)} - \frac{-1}{(0-1)} = \frac{-1}{1} - \left[\frac{-1}{-1}\right] = \frac{-1}{1} - \frac{1}{1}$$

$$\boxed{-2}$$

Escenario 2

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

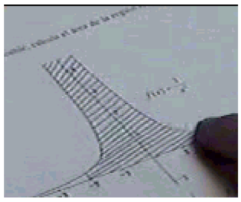
$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

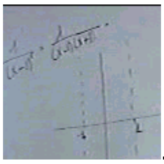
$$-2$$

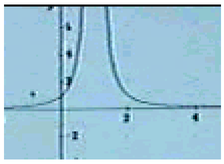
Esto es verdadero ya que el programa dice que es así.

Escenario 3

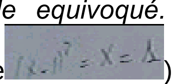
93. I: *¿Qué pasó con esta pregunta?*



94. E: *No teníamos la gráfica. O sea la gráfica la teníamos atrás y no nos fijamos en la función* (señala en la prueba el integrando) *que es 1 sobre x menos 1 al cuadrado, que es x menos 1 por x más 1. Nosotros realizamos las operaciones, yo las realice aquí abajo* (señala la hoja de la prueba) *y con eso justifiqué que era verdadero, resultando que tiene una asíntota parecida, una asíntota como ésta* (señala la gráfica de la pregunta 9)
95. I*: ¿Qué quiere decir parecida?*
96. E: *Que tiene asíntota en 1 y -1.*
97. I*: ¿Cómo sería la función?*
98. E*:* Se acerca a la pizarra y dibuja . Se queda por segundos observando la pizarra.
99. I: *¿Por qué no la haces con DERIVE?*



100. E*: Escribe en DERIVE la expresión de la función y grafica Esta es la gráfica, entonces nos mandan a calcular el área de 0 a 2; pero resulta que ella de 0 a 2 no es continua; esta es la asíntota* (señala con el cursor en 1 en el eje OX).
101. I*: ¿En dónde hay una asíntota?*
102. E*: En 1.*
103. I*: ¿Y qué paso antes que habían dos?*

104. E*: Me equivoqué.* *Borra lo hecho en la pizarra. Aquí* (escribe ) *entonces ella tiene una asíntota en* 1 (dibuja), *nos mandan a calcular de 0 a 2, nos mandan a calcular toda esta* (raya la región). *Pero resulta que para calcular el área de esto (señala la región), o sea la integral, ella no es continua, tendría una discontinuidad en x igual 1.*
105. I*: Y el que no sea continua ¿Qué quiere decir?*
106. E*: ¿Qué no sea continua?*
107. I: *Este razonamiento* (se refiere al presentado en la prueba) *dices que está bien.*
108. *E: Está bien. Por lo menos aquí* (señala el ítem en la prueba), *nos equivocamos aquí porque no tenemos la gráfica. Con asíntotas sería más adelante con integrales impropias.*
109. I: *¿Cuando tienes asíntotas no puedes hacer esto?* (señala el procedimiento en la prueba)
110. E*: No es que no pueda, porque el procedimiento está bien, lo que nos embroma es la gráfica. Porque la gráfica es discontinua en x igual 1.*
111. I: *¿Entonces aquí que pasó*? (se refiere a la resolución del problema en la prueba de laboratorio) *cuando lo hiciste en DERIVE te dio -2; ¿Por qué crees que pasa eso?*
112. E*: En el programa debería salir como que da infinito* (mueve los brazos emulando la forma de la curva). *Ahora en el programa de utilidades si nos dio infinito. Si nos da incalculable.*

113. I*: Pudiera ser que DERIVE haga lo mismo que este razonamiento, sin fijarse si la función es continua.*
114. E*: Sí.*

PREGUNTA 5
Escenario 1

Es Verdadero ya que si $f(x) \geq g(x)$ entonces la integral definida de a hasta b de $f(x)\,dx \geq$ que la integral definida desde a hasta b de $g(x)\,dx$. (Teorema de Integrales Definidas)

Supongamos que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$ entonces Las dos en el intervalo $[1, 3]$.

$x^3 \geq x^2$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx \Rightarrow \int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

$$\int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

$$\frac{x^4}{4} \geq \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} \geq \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{26}{3}$$

$$20 \geq \frac{26}{3}$$

Entonces es Verdadero segun la demostración aquí ejemplificado

Escenario 2

Es falso ya que falta una proposición que no esta acotada.

PREGUNTA 6
Escenario 1

Si $f(x) = x^3 \geq g(x) = x^2$ Ambas en el Intervalo $[1, 3]$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx$$

$$\int_1^3 x^3 \geq \int_1^3 x^2$$

si yo le evaluo en $x=2 \in [1,3]$
$f(x)$ tiene que ser $\geq g(x)$

$$\frac{x^4}{4} \geq \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{2^4}{4} \geq \frac{2^3}{3}.$$

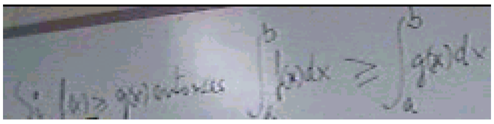
$$4 \geq \frac{8}{3}.$$

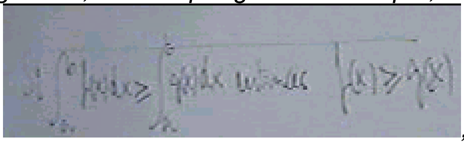
Por lo tanto es Verdadero que cualquier x perteneciente al Intervalo $[a, b]$ da como resulta que $f(x) \geq g(x)$.

Escenario 2

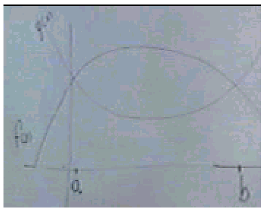
Es verdadero ya que las dos proposiciones están acotadas en (a, b)

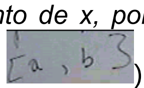
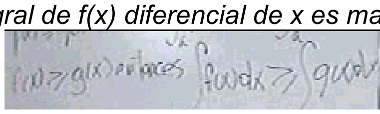
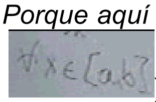
Escenario 3

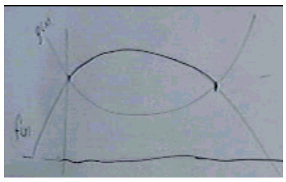
115. I*: Vamos con la siguiente, supongamos que, escribo* 



, había dos preguntas, una te decía que si tengo f(x) mayor o igual que g(x) entonces la integral entre a y b de f(x) es mayor o igual que la integral entre a y b de g(x) (se refiere a la proposición 5) *y si las integrales cumplen esto* (se refiere a la proposición 6) *entonces f(x) es mayor o igual que g(x). Tú dices en tu prueba que las dos son verdaderas. ¿Sigues pensando lo mismo?*
116. E: *A usted le faltó para toda x que pertenezca al intervalo "a b"* (se refiere a la proposición 6).
117. I*: Sí. ¿Y eso hace que sea falso o que sea verdadero?*
118. *E: Es falsa* (señala la proposición 5) *porque me falta una acotación aquí. Porque yo puedo tener dos funciones aquí, donde esta es mi f(x) y esta mi g(x)* (señala en la gráfica las respectivas curvas), *si yo tengo un intervalo "a b", en el intervalo "a b" veo que f(x) es mayor que g(x), entonces si elimino el intervalo* (borra las letras a y b), *si yo no tengo intervalo, aquí g(x)* (señala a la parte izquierda en donde g(x) es mayor que f(x)) *es mayor que f(x), por lo tanto esta es falsa* (señala la primera proposición) *porque me falta un acotamiento de x, porque ésta debe*



estar acotada desde "a" hasta "b" (escribe ), (señala la hipótesis de la primera proposición) *porque aquí no toma ningún intervalo y aquí* (señala la tesis) *dice que la integral de f(x) diferencial de x de "a" hasta "b" es mayor que la integral de g(x) diferencial de x desde "a" hasta "b" porque aquí esta definida; ahora si me dijese si f(x) es mayor o igual que g(x) entonces la integral de f(x) diferencial de x es mayor o igual que la integral de g(x) diferencial de x* (escribe ) *así si es verdadera; pero aquí* (se refiere a la primera proposición) *es falsa.*
119. I*: ¿Y la otra*? (se refiere a la proposición 6).
120. E*: La otra si es verdadera* (se refiere a la proposición 6) *porque las dos están acotadas* (se refiere a que en la hipótesis las integrales tienen limites de integración y en la tesis esta escrito el intervalo).
121. *I: Claro, decía para toda x perteneciente al intervalo.*
122. E*: Sí. Porque aquí dice para toda x perteneciente al intervalo "a b"* (escribe ) *entonces aquí es verdadero. Nuevamente si tengo la gráfica* (dibuja) *y tengo el intervalo "a b", aquí se ve que f(x) es mayor o igual que g(x); entonces si f(x) mayor o igual que g(x) para toda x perteneciente a un intervalo "a b" entonces la integral de "a" a "b" de f(x) diferencial de x es mayor o igual que la integral de "a" a "b" de g(x) diferencial de x.*



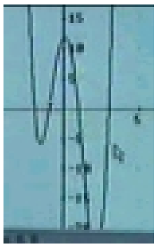
123. I*: ¿Y quién es...?*
124. E*: ¿Aquí?* (señala la gráfica)
125. I: *Sí.*
126. E*: El área bajo la curva.*
127. I*: ¿Quién es la integral entre "a" y "b" de f(x) diferencial de x?*
128. E*: Esto* (raya la región bajo la curva de f
129. I: *¿Y la integral entre a y b de g(x) diferencial de x, quién es?*
130. E: *Ésta sería* (raya la región bajo la curva de g).
131. I: *¿Eso es para cualquier función o ese es un ejemplo concreto?*
132. E*: Ése es un ejemplo para este tipo de demostración.*

PREGUNTA 7
Escenario 3

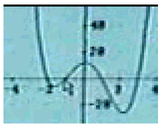
133. *I: Ahora, calcula el área que forma con el eje OX la función, escribe* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$.

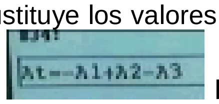
134. E: (Escribe en *DERIVE* la expresión 

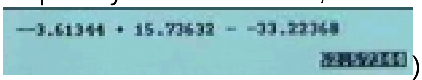
y grafica). *Sería aquí, aquí y este* pedazo (indica con el cursor las tres regiones). (Copia la expresión $2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ a parte).

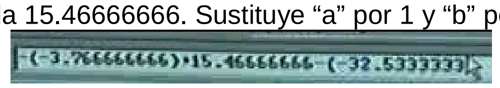


135. I: *¿Para qué estas haciendo eso?*
136. E*: Para encontrar los cortes exactos con el eje OX.*
137. E*:* (Calcula con *DERIVE* las raíces) *Corta al eje OX en 3, -2, -1 y 1. Corta aquí en 3, en 1, en -1 y en -2* (señala en la gráfica los números en el eje OX). *Usted me dice que consiga el área que forma ésta con el eje* OX (indica con el cursor la curva), *entonces voy a estudiar desde -2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3* (señala la regiones en la gráfica). (Empieza a escribir los intervalos en *DERIVE*).



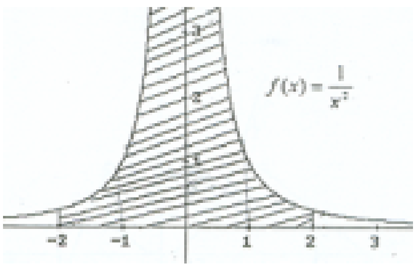
138. I: *¿Qué haces?*
139. E*: Voy a poner todo en paréntesis para trabajar más fácil con el programa de utilidades. De -2 a -1, de -1 a 1 y de 1 a 3* (escribe [-2,-1], [-1,1], [1,3]) (abre el archivo del programa de utilidades referente al método numérico).
140. I*: ¿Tú no tienes una manera más rápida de hacer la pregunta que yo te digo?*
141. E: *Una manera más rápida. La saco rapidito*. (Copia el programa y lo pega en el ventana en donde tiene la función, copia la función y la pega al final del programa. Selecciona la sentencia MEDIDA_EXTREMO_DERECHO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por -2, “b” por -1 y “n” por 5 y le da -3.61344; selecciona la sentencia MEDIDA_PUNTO_MEDIO (a, b, n) sustituye los valores de “a” por -1, “b” por 1 y “n” por 5 y le da 15.73632; en esta sentencia sustituye los valores de “a” por 1, “b” por 3 y “n" por 5 y le da -33.22368; escribe en *DERIVE* 

luego hace los cálculos 

) *Ésta es el área.*
142. I: *¿Y si tomaras más rectángulos te saldría lo mismo?*
143. E: *52 sería, lo que cambiaría sería un decimal.*
144. I: *¿No la puedes calcular exacta?*
145. E*: ¿Exacta? Por el límite, por las sumas de Riemann cuando n tiene a infinito.*
146. I*: Calcúlala exacta.*
147. E*:* (Selecciona la sentencia LIMITE_SUMA_DE_RIEMANN (a, b), sustituye “a” por -2 y “b” por 3 y le da -20.833333333, luego borra el resultado. Sustituye “a” por -2 y “b” por -1 y le da -3.76666666). *De -2 a 3 no me da, tengo que hacerlo por partes.*
148. I*: Ah claro, como la hiciste antes. ¿Y esa es la manera que te da exacta?*
149. E*: Ésta sí. Ésta me da exacta.*
150. I: *Sigue calculando a ver.*
151. *E:* (Sustituye “a” por -1 y “b” por 1 y le da 15.46666666. Sustituye “a” por 1 y “b” por 3 y le da -32.53333333. Realiza los cómputos 

y le da 51.76666666), *Esta es el área total.*

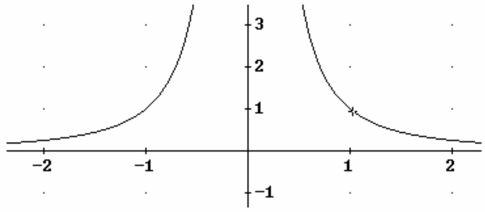
PROBLEMA 8
Escenario 1



Esta Area no se puede calcular por ninguno de los métodos vistos en clases, ya que al hacerlos por cualquiera el area a buscar, nos daría Infinita, lo cual es incalculable. Es más para estar plenamente seguro este ejercicio lo hicimos en practica de laboratorio y los hicimos por todos los metodos y todos dieron Infinito.

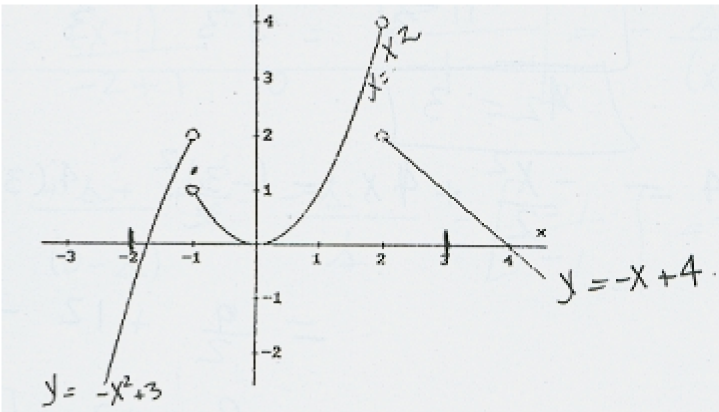
Escenario 2.

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



El valor de esta área no es calculable por ahora, ya que no hemos visto integrales impropias, pero en nuestro caso decimos que no esta acotada.

PREGUNTA 9
Escenario 1



$f(x) = -x^2+3$

$$\int_{-2}^{-1} -x^2+3 = -\frac{x^3}{3} + 3x \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 3(-2)\right]$$

$$= -\frac{(-1)}{3} - 3 - \left[-\frac{(-8)}{3} - 6\right]$$

$$= \frac{1}{3} - 3 - \left[\frac{8}{3} - 6\right]$$

$$= \frac{1-9}{3} - \left[\frac{8-18}{3}\right]$$

$$= \frac{-8}{3} - \left[-\frac{10}{3}\right] = \frac{-8}{3} + \frac{10}{3} =$$

Para Calcular todas estas integrales me base en las propiedades de las Integrales definidas

$-\frac{8}{3}+\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$] en el intervalo [-2, -1]

$\boxed{A_1 = \frac{2}{3}}$

$\int_{-1}^{2} x^2 = \frac{x^3}{3} = \frac{2^3}{3} - \left[\frac{-1^3}{3}\right]\Big|_{-1}^{2}$

$\boxed{= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3}$

$\boxed{A_2 = 3}$

$\int_{2}^{3} -x+4 = -\frac{x^2}{2} + 4x. = \frac{(-3)^2}{2} + 4(3) - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 4(2)\right]$

$= \frac{9}{2} + 12 - [2 + 8]$

$= \frac{9}{2} + 12 - [10]$

$\boxed{\text{Area } 3 = \frac{13}{2}}$

$= \frac{9+24}{2} - 10$

$= \frac{33}{2} - 10$

$\boxed{= \frac{33-20}{2} = \frac{13}{2}}$

Area ~~total~~ toda la curva por todo el Intervalo [2, 3].

$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

$A_T = \frac{2}{3} + 3 + \frac{13}{2}$

$\boxed{A_T = \frac{61}{6}}$

Escenario 2

$f(x) := -x^2 + 3$

$-x^2 + 3 = 0$

NSOLVE($-x^2 + 3 = 0$, x, Real)

$x = -1.732050807 \vee x = 1.732050807$

$\int (-x^2 + 3)\, dx$

$$3\cdot x - \frac{x^3}{3}$$

$f(x) := 3\cdot x - \frac{x^3}{3}$

$\int_{-1.732050807}^{-2} f(x) := 3\cdot x - \frac{x^3}{3}\, dx$

$$\frac{110000000023647785015883456499817860001}{120000000000000000000000000000000000000}$$

$$0.9166666666$$

$f(x) := 1.36$

$\int f(x) := 1.36\ dx$

$$\frac{34\cdot x}{25}$$

$$1.36\cdot x$$

$\int_{-1}^{-1} 1.36\cdot x\ dx$

$$0$$

$f(x) := x^2$

$\int f(x) := x^2\ dx$

$$\frac{x^3}{3}$$

$\int_{-1}^{2} \frac{x^3}{3}\ dx$

$$\frac{5}{4}$$

$$1.25$$

$f(x) := -x + 4$

$0 = -x + 4$

NSOLVE(0 = -x + 4, x, Real)

$$x = 4$$

$\int f(x) := -x + 4\ dx$

$$4\cdot x - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{44}{3}$$

$$14.66666666$$

Ahora el área de toda la curva es la sumatorias de todas sus subáreas

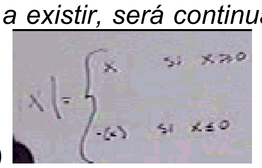
$\frac{44}{3} + \frac{5}{4} + 0 + 0.9166666666$

$$\frac{252499999999}{15000000000}$$

$$16.83333333$$

ENTREVISTA AL ESTUDIANTE E5

PREGUNTA 1
Escenario 3

1. I*:* Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral defina entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2. E*: Para explicarle a alguien diría que ésta es una integral que está acotada entre a y b y sería una integral definida. Siempre dará un valor numérico, por estar definida. El resultado que da vendría siendo la antiderivada y para comprobar si está bien esa integral lo que se hace es derivar el resultado y me tiene que dar la integral.*
3. I: *¿Qué diferencia hay entre una integral indefinida y una definida?*
4. E*: La definida está acotada* (señala la integral escrita en la pizarra) *entre a y b y la indefinida no está acotada, entonces daría una función; en este caso da un número y el resultado de la indefinida daría una función.*
5. I*: ¿Qué significa para ti acotar?*
6. E*: Una función que sea continua en estos valores* (señala los límites de integración). *Por ejemplo, si esta en a y b* (escribe $[a,b]$) *debe existir un valor "c", o sea no un valor "c" sino que entre a y b sea continua la función* (señala el integrando)
7. I*: Es decir, que la integral esté acotada significa que la función es continua en el intervalo "a b".*
8. E*: Acotada significa que esté entre estos dos valores* (señala los límites de integración) *pero siempre y cuando sea continua.*
9. I*: Con esa explicación crees que alguien entendería lo que significa una integral definida. ¿Tienes algo que añadir?*
10. E: *Tal vez con un ejercicio.*
11. I: *Adelante.*
12. E: Plantea la integral $\int_0^1 (x^2)dx$ comenta *Ella está acotada entre cero y uno, entonces se integra, sería* $\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1$ *podemos llamar a esto f(x)* (escribe f(x) antes de la integral) *entonces f(1)= 1/3 y f(0)= 0 estos resultados se restan 1/3-0=1/3. Y es continua porque si colocamos estos valores aquí* (señala el integrando) *va a existir.*
13. I*: Por ejemplo valor absoluto de x*
14. E*: La integral.*
15. I*: Sí. Entre 0 y 1 diferencial de x.*
16. E*:* Escribe $\int_0^1 |x|dx$
17. I*: ¿Es una función acotada?*
18. E*: ¿Cómo?*
19. I*: ¿Eso es una función acotada?*
20. E*: Sí.*
21. I*: ¿Por qué?*
22. E*: Porque siempre que el valor que se le* (señala el integrando, hace silencio por segundos), *o sea siempre va a existir, será continua en ese punto. Claro se define porque es un valor absoluto* (escribe) 

ahí se puede ver que si es acotada en ese punto.
23. I*: Es una función acotada en cero uno* (no lo dice como pregunta sino como reflexión). *¿Y la integral entre cero y uno de uno partido por x diferencial de x?*
24. E*: Escribe* $\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\right|dx$ *ahí no sería acotada porque cuando esta el cero, la función no existe.*
25. I*: ¿Tú dices que la función es acotada entre cero y uno?*

26. E*: No, no quiere decir que entre cero uno todas las funciones son acotadas, no; eso es siempre y cuando la función sea continua en ese punto. Pero aquí no existe porque está el cero* (señala el denominador en el integrando).

PREGUNTA 2
Escenario 1

busco el área [0,2] $f(x_i) = 2x_i - x_i^2$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = a + i\Delta x$ $x_{(i-1)} = a + (i-1)\Delta x$

$x_i = 0 + i\Delta x$ $x(i-1) = 0 + (i-1)\frac{2}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n}$ $x(i-1) = \frac{2}{n}i - \frac{2}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \sum f(x_i)$

$\lim_{n\to\infty} \sum^{n} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right) - \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} \frac{4i}{n} - \frac{4i^2}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{4i}{n} - \frac{4i^2}{n}\right] \frac{2}{n}$ Error

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{8i}{n^2} - \frac{8i^2}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i}{n^3}$

$\frac{8i}{n^2} \lim_{n\to\infty} \sum i - \frac{8i}{n^3} \lim_{n\to\infty} \sum i^2$

$\frac{8}{n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2} - \frac{8}{n^3} \lim_{n\to\infty} \sum i^2$

$\lim_{n\to\infty} (8) + \frac{4}{n}^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{16}{6} + \frac{4}{n}^2 + \frac{8}{6n^2}$

$8 - \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Escenario 2

```
F(X) := 2·X − X^2
```

$\int_0^2 (2\cdot X - X^2)\, dX$

1.333333333

$\int_2^{3.5} (2\cdot X - X^2)\, dX$

−3.375

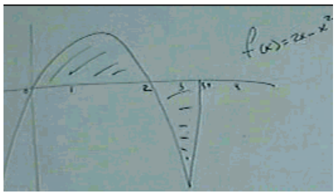
|1.33333333| + |−3.375|

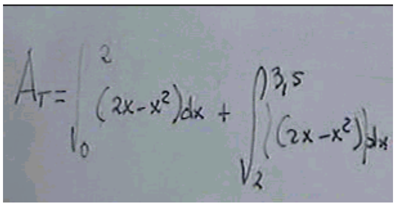
4.708333333

Primero se busca la integral definida en el intervalo (0, 2), luego la integral definida en el intervalo (2, 3.5). después se suman los valores absolutos de los resultados. encontrando así el área de la curva de la región rayada.

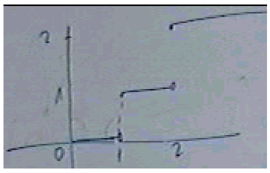
Escenario 3

27. I*: En esta pregunta se te pide calcular el área rayada. ¿Te pido que calcules de la forma más sencilla el área de esa región?*
28. E*: Se la hago aquí* (se refiere a la pizarra).
29. I*: Como quieras, si quieres usar el ordenador.*
30. E*:* Se sienta al frente del ordenador, abre *DERIVE.* Escribe la expresión algebraica de la función, luego la grafica; le realiza varios ZOOM y dice *no importa* (parece que se confunde con lo que aparece en la pantalla, se acerca a la pizarra, dibuja la curva y la región) *el método más sencillo sería por integrales definidas entre 0 y 2 y entre 2 y 3,5* (señala cada región en la gráfica) *en donde esta acotada. Esta vendría siendo como el área uno* (señala región sobre el eje OX) *El área dos* (utiliza la calculadora para hacer los cómputos) *sería -3,28 da negativo porque esta hacia abajo, la parte rayada esta hacia abajo, entre 2 y 3,5. Entonces el área total sería la suma de estas dos, pero aquí* (señala el resultado -3,28) *se podría multiplicar por -1 o se le pone valor absoluto porque un área no puede ser negativa. Entonces el área total sería la integral, el área total sería* $A_T = 4{,}61$.





31. I*: Ese valor absoluto que acabas de poner, se lo acabas de poner a la función, pero entonces no me has hallado la integral entre 2 y 3,5 del valor absoluto.*
32. E*: Cierto es un error* (borra las barras de valor absoluto de la segunda integral) *hay que colocárselo al valor que me dio* $A_T = \frac{4}{3} + |-3{,}28|$
33. I*: ¿Tú dices que la integral es siempre un área?*
34. E*: No siempre, ella también es el área.*
35. I*: ¿Cuándo representa el área?*
36. E*: Siempre y cuando la gráfica sea continua.*
37. I*: Pero la otra parte también es continua, entre 2 y 3,5.*
38. E*: Sí.*
39. I*: ¿Y la integral no es esa área? La integral sería un -3,28.*
40. E*: Esa es el área de esa parte.*
41. I*: ¿-3,28?*
42. E*: Bueno, no, no. No es porque el área no debe ser negativa.*
43. I: *Volviendo a lo de la función acotada. Esta función que es parte entera* (le grafica la función) *¿Podemos decir que esa función es acotada en cero dos?*



44. E*: Ella presenta saltos, eso es una discontinuidad.*
45. I: *¿Entonces?*
46. E*: No se puede calcular el área.*
47. I: *¿Es acotada o no?*
48. E*: Si es acotada, más no es continua. O sea, la gráfica esta acotada en cero dos* (señala el eje Y), *pero no es continua.*
49. I*: Entonces en qué quedamos. ¿La integral es para una función que esta acotada o para una función que sea continua?*
50. E*: Para la que sea continua.*
51. I: *Pero antes me dijiste.*
52. E*: O sea, que esos números representaban que estaba acotada en ciertos números* (parece que se refiere a los límites de integración) *pero siempre hay que ver si es continua o no.*
53. I: *¿Entonces continua y acotada es los mismo?*
54. E*: No, porque una gráfica puede ser acotada y no continua como en este caso.*
55. I*: ¿Y qué significa estar acotada?*
56. E*: Que ella esté entre dos valores.*
57. I*: ¿Pudieras señalar alguna cota de esa gráfica?*
58. E*: Esta acotada en cero y uno, uno y dos* (señala valores en el eje OX)
59. I*: ¿Por qué en el examen no resolviste esa integral de esa manera?* (se refiere a lo planteado en la pregunta 2).
60. E*: Sí, en verdad Riemann me costó mucho entenderlo.*

61. I: *¿Por qué se te ocurrió hacerlo de esa manera?*
62. E*: No sé, realmente no la vi desde ese punto de vista, la gráfica, por Riemann y ya está.*

PREGUNTA 3 Modificado
Escenario 1

$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx$ $\qquad |x+1| = \begin{cases} x+1 & si\ \ x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & si\ \ x+1 \leq 0 \end{cases}$

Defino valor absoluto

$x+1 \geq 0$ $\qquad x+1 \leq 0$

$x \geq -1$ Pruebo en la recta real $\qquad x \leq -1$

evaluo en la recta

$(-3,-1)$

$x=-2 \Rightarrow (-) \leq 0$ menores que (0)

$(-1,4)$

$x=0 \Rightarrow (+) \geq 0$ mayores que (0).

entonces:

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = -\int_{-3}^{-1}(x+1)\,dx + \int_{-1}^{4} x+1\,dx = -\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{4}$$

$$\int_{3}^{4} |x+1|\,dx = -\frac{x^2}{2} - x\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{4} = \left[-\frac{(-1)^2}{2} - (-1)\right] - \left[-\frac{(-3)^2}{2} - (-3)\right] +$$

$$\left[\frac{(4)^2}{2} + (4)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right] = \left[-\frac{1}{2}+1\right] - \left[-\frac{9}{2}+3\right] + \left[8+4\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\right] - \left[-\frac{3}{2}\right] + \left[12\right] - \left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{29}{2}$$

la integral

$$\int_{-3}^{4} |x+1|\,dx = \frac{29}{2}$$

Escenario 2

|x + 1|

$\int_{-3}^{4}$ |x + 1| dx

14.5

Escenario 3

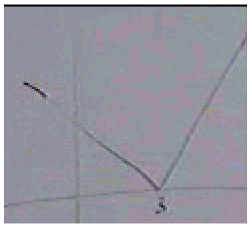
63. I*: En este ítem se pide calcular la integral entre -3 y 4 del valor absoluto de x menos 3 diferencial de x.*
64. E: *Escribe* $\int_{-3}^{4}|x-3|dx$ *primero es un valor absoluto* (define el valor absoluto) *se presenta de dos formas, cuando x es mayor o igual que 3 y cuando x es menor o igual que 3, entonces hay que hacer por parte la integral. Sí*

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si\ \ x \geq 3 \\ -(x-3) & si\ \ x \leq 3 \end{cases}$$

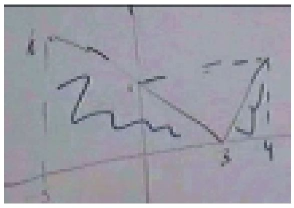
hago una recta  *aquí dice x mayores o iguales que 3* (señala la correspondiente en la definición) *se tenía que hacer de 3 a 4; pero los x que sean menores o iguales de 3, se tendría que hacer de -3 a 3. Plantea las integrales*

$-\int_{-3}^{3}(x-3)\,dx+\int_{3}^{4}(x-3)\,dx$ *y se resuelve* (usa la calculadora para realizar los cómputos y el resultado que le da es 37/2)

65. I*: ¿Eso qué quiere decir?*
66. E*: ¿Este resultado?*
67. I: *Sí*
68. E: *El resultado de la integral.*
69. I: *¿Qué quiere decir en términos de área?*
70. E: *Que el área de esta gráfica* (no ha graficado) *seria 37/2. O sea, la gráfica sería*

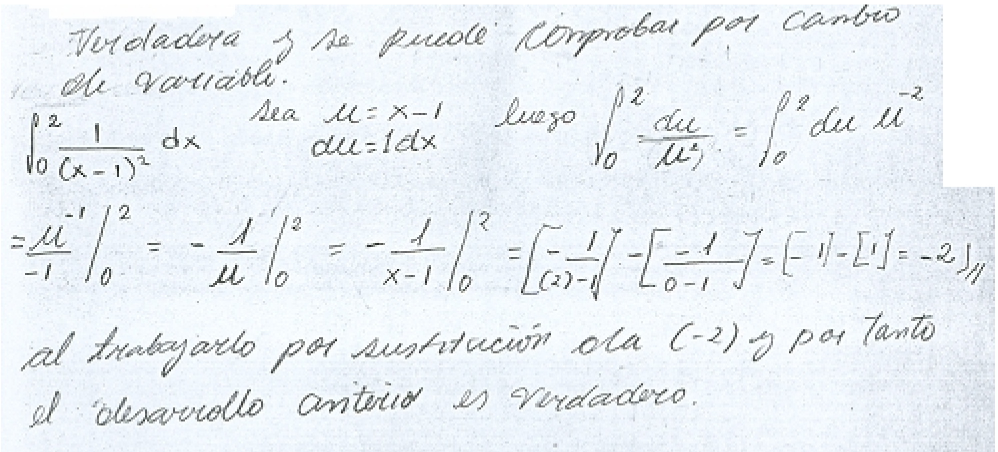


71. I*: ¿Qué quiere decir?*
72. E*: Esa sería la gráfica de esa función.*
73. I: *La gráfica de la función valor absoluto de x menos 3.*
74. E*: Ah bueno, acotada entre -3 y 4.*
75. I: *En definitiva lo que te calcula la integral del valor absoluto de x menos 3 ¿Qué es?*
76. E*: Aquí*
77. I*: Con esa gráfica.*
78. E*: Se puede calcular esta parte y esta parte* (se refiere a la región izquierda y derecha de la gráfica) *puede ser por medio de área de un triángulo, como hay dos triángulos rectángulos. Sería base por altura sobre dos.*



79. I*: Si te fuera dicho que lo podías calcular como quisieras ¿Cómo lo hubieras hecho?*
80. E*: Por esto* (se refiere a la integral).
81. I: *Por integral. ¿Por qué?*
82. E*: Porque realmente uno ve el ejercicio como mecánico, no desde el punto de vista con la gráfica. Es mucho más sencilla* (señala la gráfica) *porque se buscan las dos áreas del triángulo, se suman y da, que buscan todo esto* (se refiere a la resolución de las integrales). *Realmente como que uno tiene la integral, pasos, definidas.*
83. I: *¿Y si el profesor te hubiese resuelto así? Geométricamente. ¿Cómo lo harías?*
84. E: *De esta forma* (se refiere a las integrales*). Así es mucho más sencilla* (se refiere al procedimiento con triángulos) *pero en el examen uno llega a usar las propiedades de la integral.*
85. I: *Como que piensas que el profesor no le daría validez aquello* (se refiere al procedimiento con triángulos).
86. E*: Ajá, y en realidad sí.*
87. I: *¿Y tú le darías validez?*
88. E*: Sí le daría validez.*
89. I*: Tú como profesora si alguien te resuelve el problema así.*
90. E*: Sí, porque yo no le especifiqué al alumno si era por propiedades o de esta manera, sino libremente.*

PREGUNTA 4
Escenario 1



Verdadera y se puede comprobar por cambio de variable.

$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ Sea $u = x-1$, $du = 1dx$ luego $\int_0^2 \frac{du}{u^2} = \int_0^2 du\, u^{-2}$

$= \frac{u^{-1}}{-1}\Big|_0^2 = -\frac{1}{u}\Big|_0^2 = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = \left[-\frac{1}{(2)-1}\right] - \left[\frac{-1}{0-1}\right] = [-1] - [1] = -2$

al trabajarlo por sustitución da (-2) y por tanto el desarrollo anterior es verdadero.

Escenario 2

Es verdadero, y se demostrO por el teorema fundamental del cálculo, ya que calcularon la integral indefinidamente, luego sustituyeron en la variable x los límites de la integral y restaron dichos resultados.

Escenario 3

91. I*: Vamos con otra pregunta, te acuerdas cómo era.*
92. E*: ¿De verdadero y falso?*
93. I: *Era la de la integral entre cero y dos de 1 partido por x menos 1 elevado al cuadrado.*
94. E*: Que daba dos.*
95. I: *Menos dos.*
96. E: *Ahí también la busqué, yo puse que era verdadera porque vi el procedimiento bueno y da, si se hace por el DERIVE también da. Pero es falsa porque, ella no es continua, esa función no es continua; si se sustituye 1 daría sobre cero, entonces no sería continua.*
97. I: *En DERIVE dices que lo metiste y te dio eso.*
98. E*: Sí, yo lo hice.*
99. I: *¿Y por qué crees que DERIVE dice mentiras?*
100. E*: No es que diga mentiras, es uno el que debe tener eso claro. Para aplicar integral una función debe ser continua.*
101. I*: Antes de meterla al DERIVE.*
102. E: *Sí, porque ella te resuelve, más los conocimientos tuyos son distintos.*
103. I: *Por ejemplo si tienes que calcular la integral entre cero y uno de 1 partido por raíz de x ¿Cuánto te daría?*
104. E: *Tampoco existe porque ¿si se coloca el cero? Ahí sería 1 entre cero.*
105. I*: Vamos a ver que hace DERIVE.*
106. E*:* Utiliza *DERIVE* escribe la expresión algebraica de la función y calcula la integral entre cero y uno, marca el icono de aproximado y le da 1.999863760. Se queda por segundos en silencio y dice o sea hay algo raro, como le dije si colocamos el cero esa función no existe, aunque *DERIVE* lo haga.
107. I*: ¿Está mal eso?*
108. E*: Silencio.*
109. I*: ¿Y por qué crees que es eso? ¿Por qué no lo debes hacer?*
110. E*: Porque yo al resolver la integral debo tomar en cuenta que sea continua, y ya evaluándola así ya se ve que si se le coloca el cero da uno sobre cero que no existe; quiere decir que esa gráfica presenta una asíntota ahí.*
111. I: *Por ejemplo, cuando yo quisiera hallar la integral entre cero y dos de parte entera de x, la función que vimos antes, entonces esa función ¿no la podemos integral entre cero y dos?*
112. E*: No, ahí hay una discontinuidad, está por salto.*
113. I: *O sea, si yo la metiera en DERIVE y la calculara y me diera un resultado, diría que está mal porque no puedo.*
114. E*: O sea, DERIVE te la da, pero por los conocimientos sé que no es continua. Antes de resolver la integral hay que verificar eso.*

PREGUNTA 5
Escenario 1

es falsa ya que no se especifica que (x) debe pertenecer al intervalo [a,b], por lo tanto $f(x) \geq g(x) \neq \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Escenario 2

Es falso, ya que en el ejercicio no se acotó que la x, debe pertenecer al intervalo (a, b), que son los límites de dicha integración tanto para f como para g.

PREGUNTA 6
Escenario 1

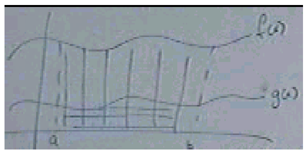
Esta si es verdadera ya que se acota que (x) pertenece [a, b] por lo tanto $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = f(x) \geq g(x)$

Escenario 2

Es verdadero ya que, primero es una propiedad del teorema de comparación de la integral y segundo acotan que la x,pertenece al intervalo(a, b)

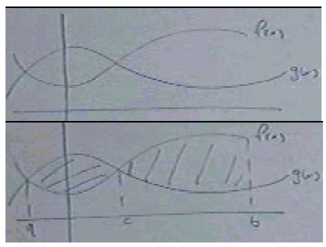
Escenario 3

115. I*: En estas preguntas decía que si tomamos dos funciones* (escribe f(x) y g(x)) *tal que f(x) mayor o igual que g(x)* (escribe $f(x) \geq g(x)$) *entonces la integral entre a y b de f(x) diferencial de x mayor o igual a la integral entre a y b de g(x) diferencial de x* (escribe la proposición 5 en la pizarra) *se pregunta si es verdadero o falso. De la misma manera se pregunta si es verdadero o falso que cumpliéndose que esta integral* (se refiere a la proposición 6) *es mayor que otra entonces se podría afirmar que f(x) mayor o igual que g(x) para todo x del intervalo "a b"* (escribe la proposición 6). *Se te pregunta si es verdadero o falso esto* (se refiere al ítem 5) *si es verdadero o falso esto* (se refiere a la proposición 6) *¿De acuerdo?*
116. E*: Sí.*
117. I: *Tú respondiste en el examen que la primera era falsa y la segunda era verdadera. Dijiste que la primera era falsa porque faltaba especificar que debe pertenecer al intervalo "a b".*
118. E*: En realidad, cuando reviso nuevamente ésa es verdadera* (se refiere a la proposición 5)
119. I: *¿Por qué?*
120. E*: Porque a manera de gráfica hay una función y la gráfica de f dice que es mayor que la de g, acotada* (dibuja) *el área de f(x) sería todo esto y el área de g(x) vendría a ser este pedazo* (dibuja) *entonces cuando yo la resuelvo con su integral, tanto la de f como la de g, me doy cuenta automáticamente así como la gráfica señala que el área de f(x) es mayor que la de g(x) entonces en la integral dará lo mismo; por lo tanto es verdadero que si una función f(x) es mayor o igual que una función g(x) entonces la integral de f(x) también es mayor o igual que la de g(x). Pero la de abajo* (se refiere a la proposición 6) *es falsa.*

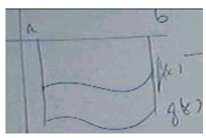


121. I*: ¿Por qué?*
122. E*: Porque siempre hay que comenzar de una función, con un ejemplo que yo le diga* $\int_0^1 x^2 dx$ *yo la resuelvo* (al resolverla obtiene 1/3*) y me busco otro ejemplo que me dice que la integral de g(x) será menor que ésta, puede ser acotada por cero y uno* $\int_0^1 x dx$ (al resolverla le resulta ½) *aquí me dice que la integral de f(x)* (se refiere a la primera integral del ejemplo) *será mayor que la de g(x)* (se refiere a la segunda integral del ejemplo*), pero cuando hago los resultados ésta me da 1/3 y ésta me da ½, o sea que no quiere decir si la integral de f(x) es mayor de la g(x) entonces la función será igual.*
123. I*: Pero lo que dice ahí es si la integral de f(x) es mayor o igual que la de g(x) entonces f(x) es mayor o igual que g(x).*
124. E*: Entonces no se cumple, por eso mismo porque aquí estoy dando la integral de f(x)* (se refiere a la primera integral del ejemplo).
125. I: *Eso no está cumpliendo que la integral de f(x) sea mayor o igual que la de g(x). ¿Quién es f(x) ahí?*
126. E*: x cuadrado.*
127. I*: ¿Y g(x)?*
128. E*: x*

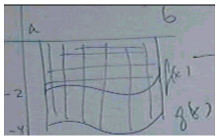
129. I*: Yo supongo que la integral de f(x) es mayor o igual que la de g(x) y ahí la integral de f(x) es menor 1/3, ¿Cómo es en relación con 1/2? ¿Quién es mayor? ¿1/3 o 1/2*
130. E*:1/2*
131. I*: La integral de f(x) ¿Cuánto es?*
132. E*: La de f(x) es 1/3*
133. I: *¿Y la integral de g(x)?*
134. E*: ½*
135. I: *Estamos diciendo que si la integral de f(x) es mayor o igual que la de g(x,) entonces f(x) es mayor o igual que g(x).*
136. E*: Aquí demostramos que* (señala el integrando x^2 de la primera integral del ejemplo) *la función de f(x) es mayor que la de g(x)* (señala el integrando x de la segunda integral del ejemplo) *pero cuando la integro me da menor.*
137. I*: ¿Y f(x)?*
138. *E: Ésta es f(x)* (escribe $f(x)=x^2$) y g(x) (escribe g(x)=x) *cuando yo integro eso, me doy cuenta que f* (señala el resultado de la primera integral) *es menor* (señala el resultado de la segunda integral) *la integral de g es mayor que ésta* (señala la primera integral), *o sea no se cumplirá. Si digo que f en función es mayor que g, pero cuando las integro f me da menor y no me da.*
139. I: *¿Y si x vale 0.5? ¿Quién vale más f(x) o g(x)?*
140. E*: Trata de modificar el límite inferior de la primera integral.*
141. I*: No, no, no en los extremos del intervalo. Tú me estas diciendo que f(x) es mayor que g(x)*
142. E*: No, aquí no.*
143. I*: No la integral, f(x).*
144. E*: La función* (señala la expresión algebraica de la función $f(x)=x^2$)
145. I*: Yo te digo ¿Cuánto vale f de 0.5?*
146. E*: 0.25*
147. I*: ¿Cuánto vale g de 0.5?*
148. E*: 0.5.*
149. I*: ¿Quién es mayor de los dos?*
150. E*: g*
151. I: *¿Entonces es cierto que siempre f(x) es mayor que g(x)?*
152. E*: No.*
153. I*: En todo ese intervalo es no. ¿Qué ocurre entonces?*
154. E*: Sería que no podemos decir que una integral es mayor que otra sin saber si la función es mayor que la otra. Si por ejemplo la hacemos con una gráfica.*
155. I*: ¿Esa explicación que estás dando es con respecto a la primera o la segunda proposición?*



156. E*: La segunda.* (Dibuja). *Entonces aquí se puede demostrar que la gráfica de f(x) es mayor que la de g(x), pero en medida de área, en este caso, g(x) es mayor que f(x).*
157. I*: ¿Para ti qué quiere decir eso que está ahí debajo?* (se refiere a la proposición 6).
158. E: *Que la integral de a y b de f(x) es mayor o igual a la integral de a y de g(x) entonces la función f(x) es mayor o igual a la de g(x) para todo x en el intervalo "a b". Solo que yo supuse que es falsa porque no podemos empezar de una integral, o sea no podemos ver si una integral es mayor que otra sin conocer la función.*
159. I*: Y la de arriba* (se refiere a la gráfica que elaboró el estudiante para explicar la proposición 5) *vuélveme a explicar cómo es.*
160. E*: Es verdadera porque* (se refiere a la proposición 5). *Me especifica que la función f(x) es mayor que g(x), hago la gráfica de f(x) y la de g(x) acotada entre a y b (señala las graficas de las funciones) entonces el área de f(x) vendría siendo toda ésta* (señala la región bajo f) *y la de g(x) vendría siendo ésta* (señala la región de g) *entonces quiere decir que si una función es mayor que otra entonces la integral de dicha función será mayor que la otra integral.*
161. I: *Si tomamos ahora estas funciones* (dibuja) *¿Se sigue cumpliendo esta propiedad* (se refiere a la proposición 5)



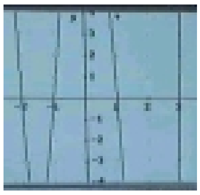
162. E*: El área de g(x) vendría siendo ésta* (raya la región sobre la curva de g) *y la de f(x) ésta* (dibuja) *Sí se sigue cumpliendo. Porque aquí f(x) sigue siendo mayor que g(x), más allá esta el negativo, suponiendo que aquí esté el -2* (escribe -2 en el eje y) *y aquí el -4* (escribe -4 en el eje y) *aún f(x) sigue siendo mayor que g(x*) (dibuja)
163. I*: ¿Y es área de f(x) es mayor que la de g(x)?*



164. E*:* Se queda en silencio por unos segundos*. No sería, porque como son valores absolutos no se cumpliría.*
165. I*: Observa que la integral es menos un número, es decir menos el valor del área de f(x) y la de g(x) es menos el valor de la otra área; pero el valor del área de g(x) será la integral de signo menos es más pequeña que la de f(x), es decir que si se sigue cumpliendo la propiedad.*

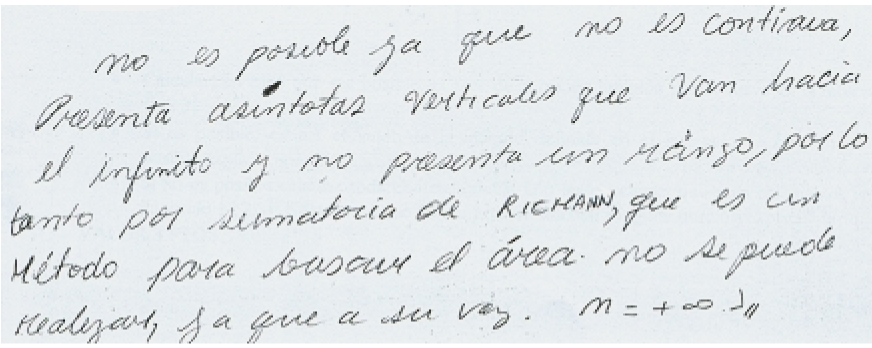
PREGUNTA 7
Escenario 3

166. I: *Por último calcula el área que forma con el eje OX la siguiente función* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ *¿Cómo lo vas hacer?*
167. E*:* Utiliza *DERIVE.*
168. I*: Lo vas hacer con el ordenador ¿Por qué?*
169. E*: Me parece más sencillo.*
170. I: *Es más sencillo.*



171. E*: Es más sencillo que hacerlo a mano porque como es un polinomio de grado cuatro, o sea teniendo la facilidad.* Escribe la expresión algebraica, grafica y parece que se confunde con lo que aparece en la pantalla *¿Calcular el área?*
172. I*: Explica un poco cómo lo harías.*
173. E*: Para calcular el área lo trabajaría por integral indefinida. Se puede integral definidamente en cada intervalo que tenga, pero como me la dan así* (señala la expresión algebraica que escribió el entrevistador en la pizarra) *y me dicen revuélvala, entonces yo la buscaría de una manera indefinida, una integral indefinida.* Utiliza *DERIVE* y calcula la integral indefinida $\int \left(2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12\right) dx = 0.4x^5 - 0.5x^4 - 4.666666x^3 + x^2 + 12x$
174. I: *¿Esa es el área que forma con el eje OX?*
175. E: *Si es indefinida lo haría así.*
176. I: *Me dijiste que el área tiene que ser un número.*
177. E*: Sí.* Indica con el cursor la gráfica y los puntos de intersección de la curva con el eje OX. Parece que esta confundido porque la curva en la pantalla se visualiza discontinua y no se nota las regiones a calcular.

PREGUNTA 8
Escenario 1


no es posible ya que no es continua,
Presenta asíntotas verticales que van hacia
el infinito y no presenta un rango, por lo
tanto por sumatoria de RICHMANN, que es un
Método para buscar el área. no se puede
realizar, ya que a su vez. $n = +\infty$.

Escenario 2

No es posible calcular el área de la región rayada, porque es una función discontinua y por lo tanto, no posee extremos superiores que terminen de acotar la gráfica y poder calcular así el área.

PREGUNTA 9
Escenario 1
NO RESPONDE
Escenario 2

En el intervalo(−2, −1):

$$F(X) := -X^2 + 3$$

$$\int_{-2}^{-1} (-X^2 + 3)\, dX$$

$$0.6666666666$$

En el intervalo (−1, 2):

$$F(X) := X^2$$

$$\int_{-1}^{2} X^2\, dX$$

$$3$$

Ahora sumamos lo que nos dio en cada intervalo:

$$0.666666 + 3$$

$$3.666666$$

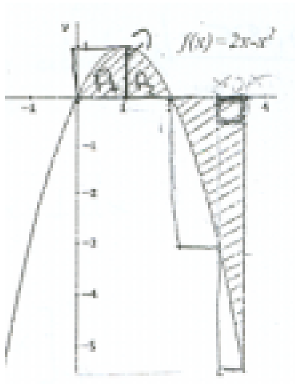
ENTREVISTA AL ESTUDIANTE E6

PREGUNTA 1
Escenario 3

1. I: Escribe en la pizarra la expresión la $\int_a^b f(x)dx$ *¿Cómo le explicarías a alguien lo que significa la integral defina entre a y b de f(x) diferencial de x?*
2. E*: Yo la explicaría que la integral de f(x) es como hallar la región,* (pausa) *el área bajo la curva, de una manera que sea más fácil de poder hallar la región bajo la curva de una integral definida, de una función definida. Me daría un valor, un valor exacto, un valor numérico.*
3. I*: Eso*
4. E*:* Reafirma *¡Eso! Si no la tuviéramos definida me daría una función, que la podemos evaluar, depende de los valores que me den.*
5. I: *¿Si quisiéramos hallar el área sobre una curva?*
6. E: *¿Sobre una curva? Se detiene por unos segundos a pensar.*
7. I: *¿Podríamos utilizar también eso?*
8. E*:* Se detiene por unos segundos a pensar.
9. I: *Cuando dices bajo una curva ¿a qué te refieres?*
10. E: *El área bajo la curva, la curva éstee,* Hace gestos con los brazos*. Mi, miii, mi gráfica y miii, algo que me indique mi eje OX y mi eje OY.*
11. I: *Tú dices que tienes una curva, un eje OX y esa integral es el área*
12. E: *El área bajo esa curva.*
13. I: *Si la curva esta por debajo del eje OX ¿podrías utilizar eso para hallar el área sobre la curva?*
14. E: *Si mi gráfica esta bajo el eje OX, estaría sobre la curva.*
15. I: *¿Cuál sería el área?*
16. E*: La integral evaluada en a, b.*
17. I*: Si necesitas pintar algo lo puedes hacer.*
18. E*: Yo digo, la más fácil la recta,* (dibuja una recta) *la región bajo la curva que sería ésta* (señala la porción sobre el eje OX) *mi integral; la pregunta suya será ésta* (señala la porción bajo el eje OX) *aquí habrá una región sobre la curva. Sería también la integral evaluada aquí* (señala la porción sobre el eje OX) *y aquí* (señala la porción bajo el eje OX)

19. I*: ¿Y así es como lo explicaría en definitiva?*
20. E*: En definitiva diría que la integral significa el área bajo la curva, una manera más fácil de poder hallar esto* (señala la gráfica); *con una curva, con una gráfica más complicada, en este caso es muy fácil, puedo hallarla por método de triángulos.*

PREGUNTA 2
Escenario 1



Calculamos el area de A

Utilizando el Metodo del extremo derecho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $n=2$

$\Delta x = \frac{2-0}{2}$

$\Delta x = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$A_{Region\,A} = [f(x_1) + f(x_2)]\Delta x$

$A_{Region\,A} = [2(1)-(1)^2 + 2(2)-(2)^2]\,1$

$A_{Región\,A} = (1+0)\,1$

$A_{REGION\,A} = 1$

Calculamos el Area de B Utilizando el metodo del extremo derecho

$\Delta x = \frac{3,5-2}{2}$

$\Delta x = 0,75$

$x_1 = 3,5$

$x_2 = 3$

$A_{Región\,B}$ $[f(x_1)+f(x_2)]\Delta x$

$A_{Región\,B}$ $[2(3,5)-(3,5)^2 + 2(3)-(3)^2]0,75 = [(7-12,25)+6-9]0,7$

$A_{REGION\,B} = [(-5,25+(-3)]0,75 = (-5,25-3)0,75$

$= (-8,25)0,75 = -6,1875 \Rightarrow$ Pero el Area es Valor absoluto Entonces $A_B = |-6,1875| = 6,1875$

Sumatoria de las areas:

$A_A + A_B = 1 + 6,1875 = 7,1875\,m$

Escenario 2

$f(x) := 2\cdot x - x^2$

$\int_0^2 f(x) := 2\cdot x - x^2\,dx$

$\frac{4}{3}$

1.333333333

$\int_2^{3.5} f(x) := 2\cdot x - x^2\,dx$

$-\frac{27}{8}$

-3.375

Sumamos ahora el valor de cada integral en su respectivo intervalo

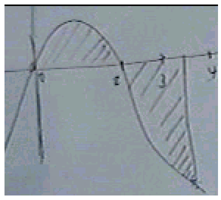
1.33333 + -3.375

$-\frac{204167}{100000}$

-2.04167

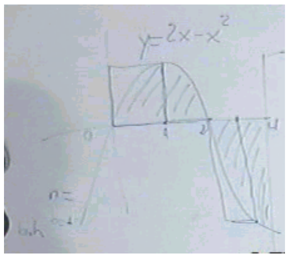
Como vemos nos da un valor negativo pero las areas se expresan en valor absoluto, entoncesw nos queda que el area total rayada es:

2.04167



Escenario 3

21. I*: Bien, el segundo problema decía, calcular el área de la región rayada dada la gráfica siguiente,* el entrevistador se la dibuja en la pizarra.
22. I*: En el examen ¿qué fue lo que hiciste?*
23. E: *Lo hice por rectángulos, hallando el área.*
24. I*: ¿Qué hiciste?*
25. E*: Divide mis triángulos* (el estudiante expresa verbalmente triángulo, pero dibuja rectángulos) *tomando mi extremo derecho, dividí mis triángulos, lo dividí en dos partes* (se refiere a la parte sobre el eje OX), *pero para hacerlo más exacto, siempre podemos, esa n como dice las propiedades de Riemann, que mientras la n, que sería la cantidad de divisiones que vamos hacer, se va haciendo más exacta la aproximación del área,* (al parecer quiere expresar que a medida que tome una partición más fina la aproximación es mejor) *yo la dividí en dos nada más y tomé mis extremos derechos* (dibuja los rectángulos en la porción sobre el eje OX). *Luego se dirige a la porción bajo el eje OX, dibuja dos rectángulos, vuelve a la porción sobre el eje OX e indica la base de uno de los rectángulos y dice donde la base se veía que iba a valer cada una un centímetro, donde el área de cada rectángulo es la base por la altura, llamando a esta altura la imagen del eje OX* (señala el lado del rectángulo dibujado sobre el eje OX), *si utilizamos esta imagen se ve que el área va a ser cero* (refiriéndose al rectángulo con altura cero que esta sobre el eje OX) *utilizando la imagen de 2* (chequea el valor sustituyendo el 2 en la expresión algebraica de la función). *¿Lo hago paso por paso?*



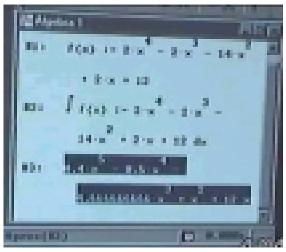
26. I*: No, lo tienes hecho aquí* (se refiere a la prueba del estudiante)
27. E: *Hallé mi área de ésta y mi área de ésta* (se refiere a las porciones sobre y bajo el eje OX) *especificando los extremos a considerar, para saber las imágenes que tomaría cada valor, porque no es lo mismo, aquí como vemos hay una sobrestimación del área* (porción sobre el eje OX), *aquí también hay una sobrestimación* (porción bajo el eje OX*) por esto* (se refiere al rectángulo que dibujó bajo el eje OX), *eso quedaba a criterio de cada quien y tomé mi imagen de 4 y la otra imagen que tome es de x=3 y sumé. Esta área daría un valor negativo* (porción bajo el eje OX)*, como las áreas no pueden ser negativas y era la suma de ellas dos, tendríamos que multiplicarlo por menos uno o colocar esta área* (se refiere a la porción bajo el eje OX) *en valor absoluto y sumarlas, y, decía que esa era mi área.*
28. I*: ¿Realmente crees que te daba el área?*
29. E*: Realmente, ¡bueno!, según los cálculos que me dio de repente.*
30. I*: ¿Tú acabas de decir que es una sobrestimación?*
31. E*: Ah, Okey, realmente no da el área exacta porque aquí hay una sobrestimación* (porción sobre el eje OX) *y aquí también* (porción bajo el eje OX) *pero da una aproximación al área, claro que si hubiese dividido mis rectángulos mejor, hubiese dado una mejor aproximación, más cerca, mientras que n se hace infinito esa aproximación se hace más exacta.*
32. I: *Y entonces.*
33. E*: También lo podíamos hallar por la integral de esto* (indica la expresión algebraica de la función) *y esto* (indica la gráfica) *evaluado en este intervalo* (señala en la gráfica el segmento de cero a cuatro)
34. I*: ¿Y por qué optaste por ésa? ¿Por qué te defiendes mejor?*
35. E*: Opté por ésta, porque vi la gráfica y supuse que el profesor quería que yo entendiera, si entendía bien lo que era una integral, porque este mecanismo, o sea es muy mecánico* (señala la integral definida mencionada en el aparte anterior) *es la propiedad; ésta* (señala la gráfica) *más que todo se va por la parte de Riemann que es más analizada, se entiende bien qué es lo que se quiere decir con la integral, entonces apliqué esto* (señala la gráfica) *para que se entendiera.*
36. I*: Y si yo te pidiera ahora que lo hicieras de la forma más sencilla posible ¿cuál utilizarías?*
37. E: *Para mi sigue siendo la forma más sencilla* (señala la gráfica), *claro que la integral evaluada en el intervalo cero cuatro* (plantea la integral) *así.*
38. I*: ¿Pero eso no te da exacto como me habías dicho?*
39. E*: Ésta* (señala la gráfica) *no, exacto no me da, me da una aproximación, porque si te puedes fijar aquí* (señala el rectángulo sobre el eje OX) *cuando yo hallo el área de este*

rectángulo, aquí hay una sobrestimación y aquí (señala el rectángulo bajo el eje OX) *también hay una sobrestimación.*

40. I*: Y si yo te dijera. Aquí con esa sobrestimación que has hecho sale que el área es 7.1875, pero realmente el área daba 18.5.*
41. E*: Me está dando a entender que esto* (señala la gráfica) *no me funcionó, debe ser que hice algo mal, creo que no le coloque aquí, dividí muy poquito las, los rectángulos aquí la base, pero por esta manera da, para mí por ahí da, haciendo los cálculos, colocando n más* (no completa la frase).

PREGUNTA 7
Escenario 3

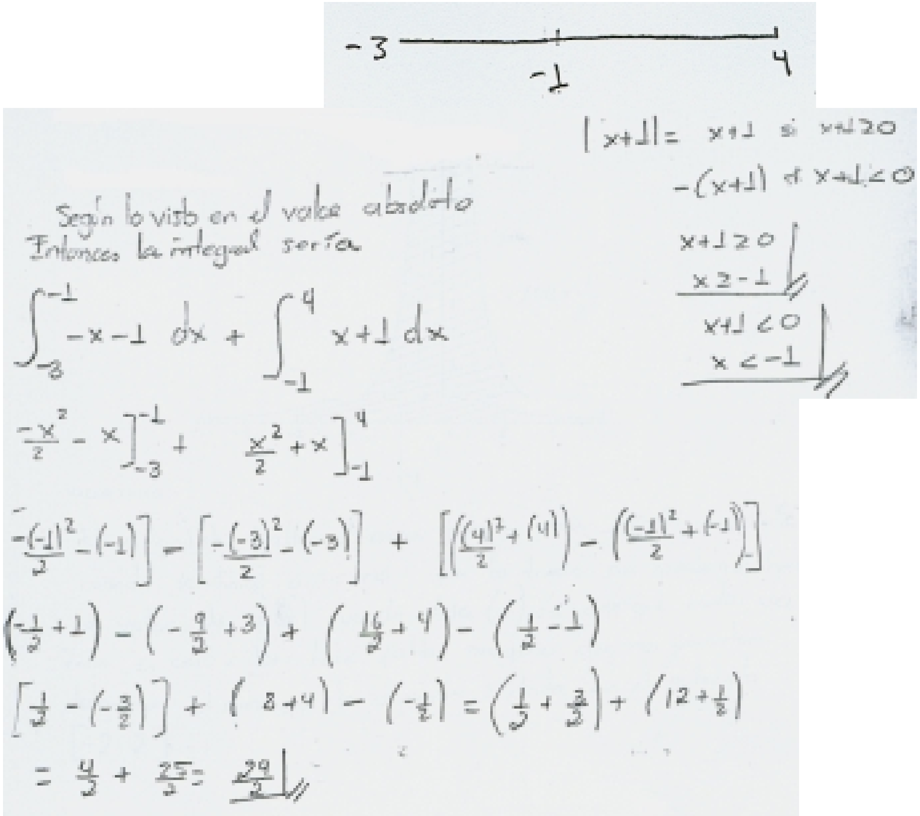
42. I*: Si ahora te pido hallar el área que forma la función* $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ *con el eje OX.*
43. E*: Escribe la función en la pizarra*
44. I*: ¿Ésta es una función?*
45. E*: Polinómica*
46. I: *Que forma una región con el eje OX. Te pido hallar el área de esa región ¿Cómo lo harías?*
47. E*: Por integrales, integraría todo esto* (señala la expresión algebraica escrita por ella en la pizarra) *integral indefinida porque usted no me está restringiendo el intervalo, colocaría* $\int 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$. *¿Podría utilizar el computador?*
48. I*: Como te dije al principio que podías utilizar la que quisieras.*
49. E: *Se sienta al frente del ordenador, accede a DERIVE, tiene dificultad en el acceso y dice ¿qué pasa aquí?*
50. I*: Lo has abierto dos veces.*
51. E*:* Accede a *DERIVE* y escribe *f(x)= y* dice *¿dónde están los puntos aquí?* El entrevistador le menciona donde están, se equivoca al escribir la función, debe escribir $f(x) := 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$ y escribe $f(x) =: 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$. Aprieta varias veces la tecla enter.
52. I*: Esta puesto al revés el dos puntos y el igual.*
53. E: *Ah, OK,* lo escribe de forma correcta, aprieta enter y aparece la función en la ventana simbólica de *DERIVE.* Marca el icono de la integral y selecciona la integral indefinida, aparece expresada en pantalla la integral indefinida, marca el icono de igualdad y aparece el resultado, marca el icono de aproximado y le aparece el resultado. Dice *¡sería ésta la respuesta!*



54. I*: ¿Sería ésa el área?*
55. E*: Aja, y me da una función como le dije porque no tengo un intervalo, las integrales definidas nos daban una función, una ecuación.*
56. I: *¿Pero me dijiste antes que era un número la integral?*
57. E: *¿La integral un número? ¿Le dije que era un número?*
58. I*: ¡Sí!*
59. E*: La integral, ésa que usted me acaba de señalar al principio (indica con el dedo la integral* $\int_a^b f(x)dx$ *escrita en la pizarra, al inicio de la entrevista), eso, en ese intervalo es un número, es un valor. Si yo tengo una integral indefinida no me puede dar un valor, me tiene que dar una función.*
60. I*: ¿Y yo no te estoy preguntado el área de la función con el eje OX?*
61. E: *Con el eje OX, es que esa viene siendo el área como una función.*
62. I: *¿Entonces eso es una función área?*
63. E: *La función de la integral, que esa integral me pida en los valores que usted me dé, si es real va ser el valor del área* (pausa). *Si usted me da una restricción en esa ecuación* (señala con la manos a la expresión de la función escrita sobre la pizarra) *en esa integral y esa restricción al hallar la integral que va dar la función, porque es indefinida, si ese intervalo es real para esa función, porque hay funciones que no son reales, como hay uno del valor absoluto ahí que no son, que no puede ser la restricción que nos están dando, entonces, dependiendo, la evalúo y le doy el valor. Pero como le digo hay dos tipos de*

integrales, las definidas y las indefinidas; la indefinida nos la va dar la función, igualito va a ser la ecuación que va a ser la integral de esa función, cómo le voy a dar un valor si usted no da ese valor, no le puedo dar un valor.

PREGUNTA 3
Escenario 1



Escenario 2

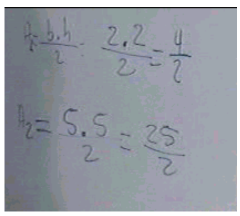
Escenario 3

64. I*: Entonces ahora la otra pregunta es con respecto a la función valor absoluto. Calcúlame* $\int_{-3}^{4}|x+1|dx$*, copia por favor.*
65. E*: Escribe sobre la pizarra la integral.*
66. I: *Tú aquí la haces muy bien.*
67. E*: Yo ahí, valor absoluto* (indica el integrando), *utilicé mi ecuación que era "a si* $a \geq 0$*" verdad!, "-a si* $a < 0$*" menos "a" para que si es menor que cero me dé el valor positivo, entonces yo dije que esto era todo mi "a"* (escribe sobre el integrando la letra "a") *toda mi "a" y coloque* $x+1$ *si* $x+1 \geq 0$ *y* $-(x+1)$ *si* $x+1 < 0$ *después despejé* $x+1 \geq 0$, $x \geq -1$ *¡verdad!, luego agarré* $x+1 < 0$, $x < -1$, *qué hice yo, yo tengo mi intervalo* (dibuja un segmento) -3 4 *dije, bueno voy a evaluar de -3 a -1* (señala la expresión x<-1) *y lo voy a meter aquí* (señala el integrando) *en mi ecuación, ¡verdad!, entonces agarre un valor entre -3 y -1* (indica la expresión x<-1)*, -2 y al meterlo aquí* (señala el integrando) *a ver, ¿-2+1?* (escribe -2+1=-1) *como me daba un valor negativo, yo*

dije que del intervalo -3 a 4 (escribe una integral con limites -3 y 4) *si "a" me da un valor negativo* (le dibuja un círculo al -1 de la operación anterior) *utilizaría ésta* (señala la expresión –(x+1)) *¡verdad!, y así mi integral, le cambie el signo* (escribe como integrando –x) *por esto* (señala la expresión –(x+1)) *así fue.*

68. I*: ¿Eso es entre -3 y -1?*
69. *E: Rectifica el límite superior y completa el integrando escribiendo* $\int_{-3}^{-1} -x-1$ *y después evalué de -1 a 4* (señala la expresión x<-1) *busqué el valor cero, me da* positivo (indica el integrando que tiene el valor absoluto) *sería esta de aquí* (le dibuja un círculo a la expresión (x+1)) *por propiedad, o sea yo me valí de la propiedad de valor absoluto,* escribe el signo de integral con límite inferior -1 la suma a la que ya tenía y dice *quedando claro que siempre que yo voy hacer una integral éste* (señala el límite superior de la primera y el límite inferior de la segunda) *debe ser igual que éste, no le puedo colocar un valor diferente, tiene que ser el mismo, con el que terminé acá* (límite superior de la primera*) voy a empezar en la otra* (límite inferior de la segunda) *y 4* (escribe 4 como límite superior de la segunda) *y ahí esta mi restricción* (escribe el integrando x+1 en la segunda integral y completa las integrales con los dx) *y los evalué.*
70. I*: Muy bien, ¿Y qué significa ese valor 29/2?, que esta bien*
71. E*: Ésteee, ¿29/2? El valor de la integral, el área, bajo esta curva* (señala el integrando que tiene el valor absoluto) *entre -3 y 4, me dio un valor.*
72. I*: ¿Cómo es esa curva?*
73. E*: ¿x+1?, para ver* (dibuja la gráfica del valor absoluto sin fijarse en la definición) *no puede tomar imágenes negativas porque es el valor absoluto.*

74. I: *Entonces ¿qué es lo que te da esa integral?*
75. E: *La integral, estamos en un intervalo -3, supóngase a 4*, (dibuja dos regiones triangulares)
76. I*: ¿Eso no lo puedes hacer de una forma más sencilla?*
77. E*: ¿Qué? ¿La gráfica o esto?* (señala la integral)
78. I*: Dices que el resultado de eso 29/2 es el área de todo eso que está rayado.*
79. E*: ¡Ajá!*
80. I: *Si sabes eso ¿lo podrías hacer más fácil, eso que has encontrado que es el área que está bajo una curva?*
81. E*:* Señala las dos integrales y dice *por propiedad, la manera más fácil sería ésta, lo mecánico ¡pues!, ¡esto! y por mi gráfica lo haría aquí* (señala la gráfica) *y mis triángulos, el área de triángulo, la base por la altura, la imagen* (señala el -3), *la evaluaría aquí* (escribe la expresión |x+1|) *en esta función, llamémosla f(x), ¡verdad! parecido al que yo le expliqué ahora en el primer problema con rectángulos ahí, aquí sería con triángulos, ¡verdad!, ésta es mi función* (refiriéndose a f(x)= |x+1|) *hallaría el área de este triángulo* (refiriéndose al triángulo de la izquierda) *el área de este otro triángulo* (refiriéndose al triángulo de la derecha) *y las sumaría.*
82. I: *¿Y cuánto valdría el área del primer triángulo?*
83. E*: El área del primer triángulo, aquí le colocaríamos 2 valor positivo* (se refiere a la distancia entre -3 y -1) *porque es un valor para un área, la altura utilizaría mi extremo* (señala el -3) *lo evaluaría aquí* (refiriéndose a f(x)=|x+1|) *y me daría 2* (sustituye en la fórmula y le da 4/2, aplica igual procedimiento para el otro triángulo y luego suma los resultados, todos los valores los encuentra por inspección de la gráfica). *El área* A_1 *más el área* A_2 *4/2+25/2=29/2.*



84. I*: ¿Cuándo hiciste el examen se te ocurrió hacerlo así?*
85. E*: Éstee, ¡nooo!, no pensé en ningún momento hacerlo así* (señala la gráfica) *cómo le digo, me dan mi integral, lo primero que yo me enfoco, integral, me dan el área, si me hubiesen puesto la gráfica, lo más lógico me enfoco en mi gráfica, me están dando la integral, entonces me enfoco en ella, ¿entiende?, lo primero que me den me enfoco, si me hubiesen dado la gráfica* (señala la gráfica) *lo hago de esta manera* (se refiere al procedimiento con triángulos) *entonces aquí* (señala la integral original) *digo yo, el profesor me está hablando de integral, me voy por aquí* (se refiere a la integral). *Como le dije anteriormente, usted me preguntó que por qué lo hice por los rectángulos, o sea, veo mi gráfica, por ahí me digo lo voy a sacar por ahí, o sea el primer enfoque que yo le doy, si ahora yo veo que, o sea no me costó, o sea yo lo saqué por aquí* (señala la definición de

valor absoluto) *por las propiedades de valor absoluto, no me costó y lo hice, se me facilitó por ahí, o sea el primer enfoque que yo tengo.*

86. I*: Supón ahora que me pones ese problema y yo te lo resuelvo* así (se refiere al procedimiento con triángulos) *¿Tú qué dirías?*
87. E*: ¡Yo diría que!*
88. I: *¿Me lo pondrías perfecto? ¿Me lo pondrías malo? ¿Me lo pondrías regular? ¿Qué nota me pondrías si yo te lo resuelvo de esa manera, de 1 a 10?*
89. E: *Del 1 al 10, si lo resolviera de esta manera, ésteee, si estoy evaluando integral y quiero las propiedades de la integral, yo pienso, nooo, aquí el muchacho consiguió este valor absoluto y dijo ¿cómo lo hago yo para conseguir mi integral y mis intervalos? No tiene claro su propiedad* (aunque señala la definición a trozos del valor absoluto, parece que se refiere a la integral), *pero tomaría en cuenta de que si entiende de lo que estamos hablando* (señala la integral original) *sabe que es región bajo la curva* (indica la gráfica de la función) *o sea está consciente, analizó el problema, le pondría un 9.*
90. I: *Si no menciono nada de integrales ¿me pondrías un 9? ¿Por qué no un 10?*
91. E*: Por lo que le estoy diciendo, estoy evaluando la propiedad* (señala la integral) *a lo mejor él se asustó con este valor absoluto que vio aquí, ¡verdad! y se fue por aquí* (señala la gráfica).
92. I*: Si sabe representar el valor absoluto no se pudo haber asustado.*
93. E*: Pero, ah, bueno, pero aquí* (señala la gráfica) *claro al hallar su, al meter aquí sus valores puede que no esté claro* (señala la fórmula $A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$) *pero estoy evaluando la propiedad y quiero que me, a ver si sabe hacer esta propiedad, o sea estoy evaluando mi propiedad de integral, a ver si lo sabe calcular, claro que por aquí perfecto* (señala la gráfica) *él sabe lo que estamos hablando al referirnos a la integral, ¿me entiende?, sabe lo que es, es el área* (señala la gráfica) *pero de una manera más fácil, pero si estoy evaluando mi propiedad* (señala la integral) *es esto lo que yo quiero.*
94. I: *¿Es eso lo que te da?*
95. E*: Es esto lo que yo le doy, verdad y yo estoy evaluando la propiedad, yo estoy evaluando un tema, yo quiero ver si se desenvuelve en esto* (señala las dos integrales, con integrando –x-1 y x+1) *aplicando mis propiedades, partiendo sus integrales, dividirlas.*
96. I*: ¿Por qué me pones un 9? Ponme un cero.*
97. E*: Le pongo un 9, porque pensó,* (señala la gráfica). *Te castigo con un punto porque estoy evaluando esto* (señala la integral). *Por este lado siempre me han gustado la gráficas, me defiendo en estos términos, me parece que por gráficos uno entiende todo, por gráfico uno lo ve, lo analiza, lo capta. Pero si yo estoy evaluando esto, la propiedad, si la sabe aplicar*

PREGUNTA 4
Escenario 1

$u = x-1$
$du = 1dx$
$du = dx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{du}{(u)^2} = \int_{-1}^{1} u^{-2} du = \left.\frac{u^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1} = \left.-\frac{1}{u}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{(-1)}\right) = -1 - (1) = -1 - 1 = \underline{-2}$$

$u = 2-1 = 1$
$u = 0-1 = \underline{-1}$ $\Rightarrow$ Cambiamos los limites. Por lo tanto si es verdadera.

Escenario 2

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

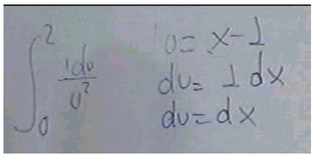
$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

$$-2$$

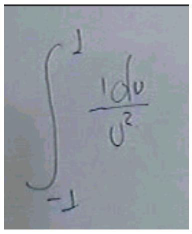
Como podemos observar si es verdadera la integral

Escenario 3

98. I*: En este problema se pedía estudiar si era verdadero o falso, y aparecían unos pasos ahí. En entrevistador le escribe la integral* $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = -2$ *entonces tú me dices.*
99. E*: Ahí me salió malo, pero evalué la integral.*
100. I: *Me interesa saber por qué haces un cambio de variable.*
101. E*: Un cambio de variable.*
102. I: *Tú dijiste u = x-1*
103. E: *Porque no puedo resolver esta integral así, tengo que integral por sustitución, hacer un cambio de variable, decir u = x-1, colocar la derivada de "u" que sería 1dx (escribe du=1dx) du = dx, entonces tengo mi dx aquí* (señala en la integral) *mi "u" aquí, por lo tanto sería la integral* $\int_0^2$ *yo por aquí por integral no me puedo ir de una vez, tengo que hacer un cambio de variable, para hacerla fácil y poder aplicar las propiedades que yo conozco* (señala donde están escritos los cambios, realiza los cambios en la integral) *y ahora si puedo hacer mi, porque sustituí, por esto* (señala los cambios)



104. I*: Entonces dices, me da menos dos*
105. E*: ¡Me da menos dos! Pero.*
106. I*: Cambiaste hasta los límites de integración.*
107. E: *En este intervalo no lo chequee. Pero esto es falso* (señala la integral original) *porque no se puede calcular.*
108. I*: Cuando haces la nueva integral definida, ¿Los límites de integración quedan igual que el anterior?*
109. E: *Yo los cambié,* (pero no es cierto, mantiene los límites) *si fuera indefinida no hay problema, pero como es definida, este 2* (limite superior) *lo metí en x-1 y este cero aquí (x-1) e hice mi cambio. Aquí no sería 2 y 0,* sustituye los limites de integración 2 y 0 en u = x-1 y los resultados los cambia en la integral.



110. I: *Dijiste aquí: "por lo tanto es verdadero"*
111. E*: Ahora te digo que es falsa.*
112. I*: ¿Por qué?*
113. E: *Porque como le dije ahora, si usted me da la restricción, si evaluamos esta función, llamémosla* $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$*, ¡verdad! Nosotros primero antes de evaluarla, si yo entre 0 y 2 tomo 1, se me hace cero abajo* (señala la integral original) *o sea una función indefinida, discontinua y ahí la integral no puede ser, tendríamos que evaluar primero la función, ver si en el intervalo que me dan es real y chequear, yo me fui así y no la vi* (señala la integral original)
114. I: *¿Por qué no me has estudiado eso en las otras funciones en donde has calculado la integral? ¿Por qué esperaste hasta aquí para decírmelo?*
115. E: *Porque las otras funciones, las que usted me dio es un polinomio, polinomio es real en todo el dominio, todo el dominio de él son reales, hay imágenes para todo su dominio.*
116. I: *¿Y el valor absoluto?*
117. E: *El valor absoluto,* (pausa) *¡también!, bueno depende que función me pueda dar, si usted me coloca y dice valor absoluto de esto* (señala la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$) *me puede colocar valor absoluto de todo esto, me tiene que especificar valor absoluto de qué, una función polinomio o este tipo de función* (señala la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$) *me la puede colocar en un valor absoluto y seguirá estando en este intervalo, no podría ser, sería indefinida.*
118. I*: ¿Y si yo te propusiera la integral entre 3 y 4 de* $\frac{1}{(x-1)^2}dx$*?*

119. E: *Así* (escribe $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx$) (pausa, mueve la cabeza en señal afirmativa) *sí, sí sería real, o sea no hay un valor después de 3 que dé cero, no lo hay, negativo tampoco me da aquí, porque esta elevado al cuadrado, si, en este intervalo si y no sería -2 supongo.*

120. I*: Si te pongo la integral* $\int_{-1}^0 \sqrt{x}dx$ *¿cuánto daría esa integral?*

121. E*: ¡Esta integral! Vamos a estudiarla igual que aquella* (señala la integral anterior) *vamos a ver si ella esta para este intervalo, esto no es real* (escribe $\sqrt{x}$ = no real) *no le puedo sacar una raíz cuadrada a un número negativo.*

PREGUNTA 5
Escenario 1

Falso porque $f(x) \geq g(x)$ pero no sabemos en que intervalo así que "no podemos decir" qué: $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)d$

Escenario 2

Falsa ya que no me especifican en que intervalo la funcion f(x) es mayor que la funcion g(x), por lo tanto no podemos asegurar que la interal de f(x) evaluada en el intervalo [a,b] es mayor que la integral de g(x) evaluada en este mismo intervalo.

PREGUNTA 6
Escenario 1

Si es verdadero porque:
$f(x)$= es una función determinada
$g(x)$= otra funcion
$\int_a^b f(x)dx$= es la región bajo la curva de esa función
$\int_a^b g(x)dx$= es la región bajo la curva de la función $g(x)$
o Si $f(x) \geq g(x)$. La región bajo la curva de cada una de ellas evaluadas en un mismo intervalo [a,b] nos aclara que $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
Teniendo claro que $f(x) \geq g(x)$ para toda x que pertenec a [a,b].

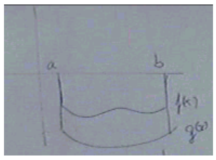
Escenario 2

Es verdadera ya que nos especifican en que intervalo f(x) es mayor que g (x). La integral es la region bajo la curva de f(x) y g(x), `por lo tanto si f(x) es mayor o igual que g(x) tambien sus integrales son mayores o iguales evaluadas en ese mismo intervalo [a,b]

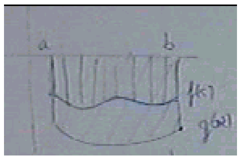
Escenario 3

122. I*: El entrevistador le escribe las dos proposiciones ¿Tú contestaste que la primera era...?*

123. E*: Aquí contesté que era falsa* (se refiere a la primera proposición, problema 5) *y ésta era verdadera* (se refiere a la segunda proposición, problema 6).
124. I*: ¿Y porqué era falsa?*
125. E: *Para mí.*
126. I: Para ti.
127. E*: Arriba dije que era falsa* (se refiere a primera proposición, problema 5), *porque me dicen f(x) mayor o igual que g(x) pero no me dieron la restricción del intervalo, aja, en dónde f(x) es mayor que g(x), entonces la integral en este intervalo* (se refiere a la primera integral) *es mayor que la integral en este intervalo* (se refiere a la segunda integral) *yo dije, ajá, tú sabes que la integral* (señala la primera integral) *sería la región bajo la curva de esta gráfica* (señala expresión f(x)) *y ésta* (señala la segunda integral) *sería la región bajo la curva de esta gráfica* (señala la expresión g(x)) *pero no me dijeron, o sea no me especificaron el intervalo, todavía ahí yo en esta parte no, o sea no estuve muy segura de responder, me confundí bastante.*
128. I*: Y la otra era verdadera porque si te decían.*
129. E*: Porque si me decían el intervalo, lo saqué así.*
130. I*: ¿Y qué entiendes que te estoy preguntando?*
131. E*: Ahí lo que yo entiendo que me preguntan, que ésta es una función* (señala a f en la primera proposición, problema 5) *y ésta es otra función* (señala a g en la primera proposición, problema 5) *entonces la región bajo la curva de* esta (señala la primera integral en la primera proposición, problema 5), *si ésta es mayor que ésta* (señala la hipótesis en la primera proposición, problema 5) *la región bajo la curva de esta tiene que ser mayor o igual que ésta* (señala la tesis en la primera proposición, problema 5) *en este intervalo, es lo que entendí. Entonces yo le digo que no, yo coloco que es falsa ahí porque si no me restringió el valor, el intervalo. Cómo puedo saber que era en este intervalo, no como aquí* (se refiere a la segunda proposición, problema 6) *me lo dieron, yo saqué, bueno, si f(x) es mayor o igual en este intervalo* (señala la tesis de la segunda proposición, problema 6) *yo dije, bueno, la integral también será* (señala la hipótesis de la segunda proposición, problema 6)
132. I*: Entonces para resolver ésa que estaba antes* (se refiere a la primera proposición, problema 5) *primero tratantes de resolver la siguiente* (se refiere a la segunda proposición, problema 6) *y luego volviste.*
133. E*: Sí, volvía, iba y volvía.*
134. I*: Ahora después de todas tus conversaciones y después de mirar la prueba, me respondes de otra manera, ¿supongo?*
135. E: *Yo dije que ésta era falsa* (señala la primera proposición, problema 5) *y ésta era verdadera* (señala la segunda proposición, problema 6) *todavía ahí yo no quedé convencida, de por qué si era. Me quedé con la cuestión del intervalo.*
136. I: *¿Qué querría decir esa segunda parte?* (se refiere a la segunda proposición, problema 6).
137. E*: ¿Ésta? Que esta fue la que yo puse verdadera, el intervalo fue lo que me convenció, si f(x) es mayor que g(x) en este intervalo, como le dije yo ahora, si esta gráfica es mayor que ésta en este intervalo* (señala la tesis)) *entonces el área bajo la curva de esta* (señala la primera integral) *es mayor o igual que la de esta* (señala la segunda integral).
138. I: *Entonces lo que estas diciendo ahí es al revés.*
139. E: *OK, aquí me la están volteando, me están dando la integrales y después las funciones.*
140. I: *¿Tu podrías representar gráficamente que se entiende por la parte de arriba, con un ejemplo?* (se refiere a la primera proposición, problema 5).
141. E: *¿Ésta?* (señala la primera proposición, problema 5) *¿Con gráfico?*
142. I*: ¿Cómo quieras?*
143. E*: ¡Bueno! Llamemos a esta parábola f(x), la región de ella, llamemos a g(x) otra parábola más pequeña, más abierta, así la entiendo yo. Entonces la integral de f(x) es mayor que la de g(x)* (observa la tesis en la primera proposición, problema 5).



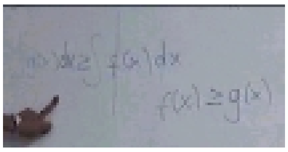
144. I*: Y si ahora tenemos esta gráfica y ésta es f(x) y ésta g(x)* (el entrevistador grafica las curvas) *¿se seguirá cumpliendo la propiedad?*
145. E*: ¿Tomando los negativos? O sea, ¿Bajo el eje OX?*
146. I*: Ahí ¿f(x) será mayor que g(x)?*
147. E*: ¡Aja!, aquí lo que me pone en duda es esta componente de la x, me daría la imagen negativa del área, pero yo la pongo en valor absoluto y me da un área positiva, esta área de g(x) (señala la región de g) es mayor que esta área (señala la región de f). Me está diciendo que f(x) es ésta, hasta aquí llega f(x).*
148. I: *¿Pero la integral es el área?*



149. E: *La integral de f(x) vendría siendo ésta* (raya la región de f) *sobre la curva y el eje OX. Yo diría que sería la integral de g(x) es toda ésta* (raya la región de g). *No sé, no se cumpliría.*
150. I*: Si quieres puedes poner un ejemplo.*
151. E*: Pausa* (se queda por varios segundo observando la grafica). *A no, sí, sí, ¡sí!, Porque estoy diciendo, ajá f(x) mayor o igual que g(x)* (señala el ítem 5, regresa a la gráfica) *aquí f(x), las imágenes negativas, las imágenes negativas se van alejando más del cero en g(x), ¡verdad!, siendo esta curva* (pasa el rotulador sobre la curva de g) *viendo desde ese punto de vista, imágenes negativas, aquí se cumplirá que f(x) mayor o igual que g(x), esto* (señala la hipótesis en la primera proposición) *se cumple ésta al evaluarla en la x, pero la integral, en aquella no creo que se cumpla esto* (señala la tesis) *esta propiedad, no la, no la veo* (se queda observando la gráfica y moviendo la cabeza en señal de negación).
152. I*: ¿Por qué?*
153. E: *Porque aunque f(x) si es mayor que g(x), ahí, se ve f(x) va ser mayor que g(x), sus imágenes están más cerca del cero, son valores negativos, mientras mayor séase van alejando más del cero, son menores* (dirige la mirada a la gráfica y hace señales con el brazo) *pero al yo evaluarlo como región sobre la curva, sería ahí, yo estoy viendo que el área de g(x) es mayor que el área de f(x) en ese punto, no estoy segura que, si me pone usted en un parcial una función así* (señala la gráfica) *y me dice* (señala la primera proposición) *y lo veo* (señala la gráfica) *por allá, no estaría segura de colocarle a usted que eso* (señala la proposición) *es verdadero con aquello* (señala la gráfica).
154. I*: La otra* (se refiere a la segunda proposición, problema 6) *es falso ¿por qué?*
155. *E: La otra, está al revés, la veo al revés, me colocaron primero esto* (señala la tesis de la proposición y dirige la mirada a la hipótesis, hace una pausa de varios segundos) *¡si es falso!* De nuevo pausa de varios segundos.
156. I: *¿Cómo demostrarías que es falsa?*
157. E: *Por ahí* (señala la gráfica anterior) *más que todo, por aquí* (se acerca a la gráfica) *usted me está diciendo la integral, ¡verdad!, aquí se cumple lo contrario de esto,* (señala segunda proposición, problema 6) *aquí la integral es mayor, pero la función no lo es. No puedo decir que una función es mayor que otra porque me digan primero la integral, si vemos allá, aquella integral de g(x), la región es mayor que la de f(x), pero f(x) es mayor que g(x), ésta* (se refiere a la integral de g(x)) *es mayor que ésta* (se refiere a la integral de f(x)) *allá* (señala la gráfica).
158. I*: ¿Entonces no estoy suponiendo que las integrales son mayores?, o sea lo que dice ahí es: si se cumple que las dos integrales están* (no completa la frase).
159. E*: Pero no, dijera que era falsa, el ejemplo que usted me esta dando allá* (señala la gráfica*), me da a entender que no, que yo por la integral no me puedo guiar, que la función también es mayor, lo veo por su ejemplo allá. Aquí estamos trabajando primero con la integral* (señala el ítem) *la integral de f(x) es mayor que la de g(x) entonces f(x) sería mayor que g(x) y allá* (señala la gráfica) *puede ver que la integral de g(x) es mayor que la integral de f(x), eso no quiere decir que f(x) sea mayor que g(x), ¿me está entendiendo?, o sea esta integral* (señala la región de f) *será mayor que ésta el área* (señala la región de g), *pero eso no quiere decir que ésta* (señala a g(x) en la gráfica) *sea mayor que ésta* (señala a f(x) en la gráfica) *porque no lo es. Aquí en este ejemplo.*
160. I*: ¿Qué es lo que tendría que probar que es falso?*
161. E*: ¿Probar que es falso?* (pausa) *para ver.*
162. I*: Tú antes me dijiste que arriba* (se refiere a la primera proposición, problema 5) *que si tienes una función mayor que otra.*
163. E*: Su integral esta referida*

164. I*: Ahora ¿Qué es lo que me tienes que probar en la segunda parte?* (se refiere a la segunda proposición, problema 6)

165. E*: Lo que tendría que probar es que si una integral de una función es mayor que la integral de otra función* (señala la proposición) *eso no quiere decir que esa función sea mayor que la otra, que es lo que le estoy tratando de decir aquí* (se acerca a la gráfica). *Aquí vemos que la integral de g(x) es mayor* (escribe la expresión), *tomando el valor absoluto del área* (escribe la integral indefinida de f(x))



166. I*: Pero eso no esta escrito así.*

167. *E: No está escrito así, pero yo me puedo guiar por* eso (señala la gráfica), *o sea, éste es un contraejemplo de lo que está aquí, ¿me está entendiendo? Le estoy dando el contraejemplo para decir de una vez que esto es falso* (señala la segunda proposición, completa la proposición), *aquí estoy comprobando que no, tendría que decir que g(x) es mayor o igual que f(x)* (escribe $g(x) \geq f(x)$) se dirige a la gráfica y dice *voy a llamar a éste g(x) y éste f(x)* (cambiando el orden de colocación de f(x) y g(x)), *estoy tratando de probar que esto* (señala la hipótesis de la segunda proposición) *no me dice nada, no me especifica en si. O sea, que no puedo tomar la integral, el área, y decir porque ella es mayor, por el asunto de la parte negativa, también la función será. O sea, lo contrario* (señala de la primera proposición, problema 5).

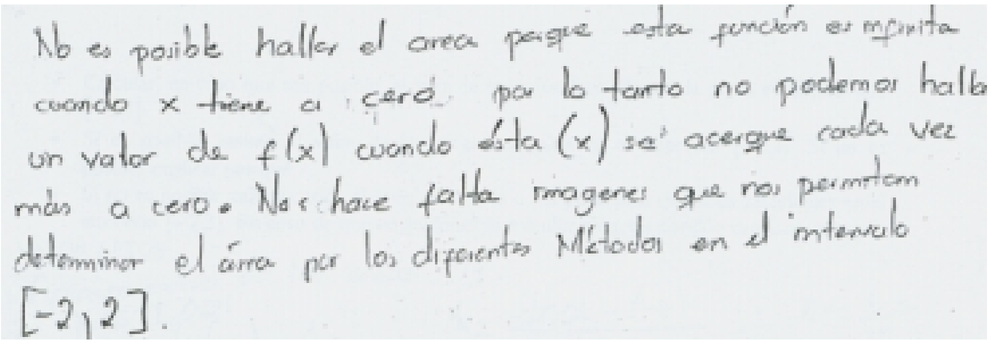
168. I: *La integral entre a y b de g(x) es negativa, entonces menos un número más grande que otro es menor que el otro más chico, si es también negativo.*

169. E: *Usted me esta diciendo que un número negativo mientras mayor sea, es menor que un número negativo mientras menor sea; o sea, eso está muy claro, por ahí es que lo estoy sacando yo.*

170. I: *Entonces la integral de g(x) diferencial de x es menor o igual que la integral de f(x) diferencial de* x (el estudiante observa la proposición que escribió)

171. *E: OK, pero si* (cambia el signo de desigualdad en la hipótesis de su proposición a menor o igual)

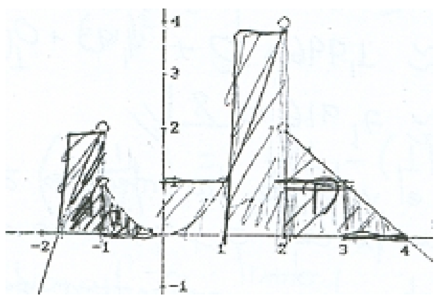
PREGUNTA 8
Escenario 1


No es posible hallar el area porque esta función es infinita cuando x tiene a cero por lo tanto no podemos halla un valor de f(x) cuando ésta (x) se acerque cada vez más a cero. Nos hace falta imagenes que nos permitan determinar el área por los diferentes Métodos en el intervalo [-2,2].

Escenario 2

NO ES POSIBLE HALLAR EL AREA DE ESTA GRAFICA YA QUE EN EL INTERVALO QUE NOS LA PIDEN[-2,2] LA FUNCION NO ESTA COMPLETAMENTE DEFINIDA . TIENDE A MAS INFINITO LAS IMAGENES CUANDO X TIENDE A CERO.

PREGUNTA 9
Escenario 1



Aproximaciones de las areas

$x_1 \approx -1{,}001$

Area $A = f(x_1) \cdot \Delta x$ $\qquad \Delta x = \frac{-1{,}001 - (-2)}{1}$; $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Area $A = [-(-1{,}001)^2+3]\,0{,}999$ $\qquad \Delta x = \frac{-1{,}001+2}{1}$

Area $A \approx 1{,}996$ $\qquad \Delta x = 0{,}999$

Area $B = f(x_0) \cdot \Delta x$ $\qquad x_0 = 0$ $\qquad \Delta x = \frac{0+1}{1} = 1$

Area $B = x^2 \cdot \Delta x = (0)^2 \cdot 1 \approx 0$

Area $C \approx [f(x_1)+f(x_2)] \cdot \Delta x$ $\qquad \Delta x = \frac{1{,}99 - 0}{2}$ $\qquad$ Donde $x_2 \approx 1{,}99$

Area $C \approx [(1{,}99)^2 + (1)^2] \cdot 0{,}995 \approx 4{,}93$ $\qquad \Delta x = 0{,}995$ $\qquad x_1 = 1$

Area $D \approx [f(x_4)+f(x_3)]\,\Delta x$ $\qquad \Delta x = \frac{4 - 2{,}001}{2}$ $\qquad x_4 = 4$

Area $D \approx [(-4+9)+(-3+4)] \cdot 0{,}99$ $\qquad x_3 = 3$

$\Delta x = 0{,}99$

Area $D \approx 1\,(0{,}99) \approx 0{,}99$

AREA TOTAL APROXIMADA $\approx A_A + A_B + A_C + A_D$

$\approx 1{,}996 + 0 + 4{,}93 + 0{,}99$

$\approx 7{,}916 \approx 8$

No es posible determinar el valor de las integrales definidamente porque los intervalos de cada porción o función no están definidos es decir son funciones discontinuas, presentan saltos, y sus intervalos se encuentran abiertos (a,b)

Escenario 2

SI ES POSIBLE . LO HACEMOS POR PARTES

CUANDO Y=0 EN -X^2+3, X ES IGUAL A $-\sqrt{3}$

$f(x) := -x^2 + 3$

$\int_{-\sqrt{3}}^{-1.01} f(x) := -x^2 + 3\,dx$

$$2 \cdot \sqrt{3} - \frac{8059699}{3000000}$$

$$0.7775352817$$

$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} f(x) := -x^2 + 3\,dx$

$$\frac{10}{3} - 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$-0.1307682818$$

$f(x) := x^2$

$\int_{-0.999}^{0} f(x) := x^2\,dx$

$$\frac{332334333}{1000000000}$$

$$0.332334333$$

$$\int_{0}^{1.999} f(x) := x^2 \, dx$$

$$\frac{7988005999}{3000000000}$$

2.662668666

f(x) := -x + 4

$$\int_{2.001}^{3} f(x) := -x + 4 \, dx$$

$$\frac{2996001}{2000000}$$

1.4980005

Como hemos visto el area de esta grafica sólo se puede hallar por porciones que sean calculables en el intervalo, teniendo muy en cuenta el intervalo ha utilizar, pues al evaluar la integral debemos aproximar el intervalo(no estan contenidos en toda la porcion de cada funcion). El area total es la suma de cada una de estas areas ya halladas