Curso 1992/93
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

BENITO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ

La $_2F_1$ - transformada índice

Director
NÁCERE HAYEK CALIL

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

Índice general

A Laura

Memoria que presenta el Licenciado D. Benito Juan González Rodríguez ante la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

La Laguna, agosto de 1992

Mi más profunda gratitud al Dr. D. Nácere Hayek Calil, Catedrático de Análisis Matemático, Director de esta Memoria y Profesor Emérito de la Universidad de La Laguna, no sólo por su influencia decisiva en la elaboración de la misma, sino también por las continuas enseñanzas que de él he recibido desde hace años, y sobre todo en esta etapa de iniciación a la investigación.

Sincero reconocimiento asímismo a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático, especialmente a los componentes del Seminario de Transformadas Integrales y en particular a mis compañeros Dres. José M. Méndez, Emilio R. Negrín, Jorge J. Betancor y José Rodríguez.

Quisiera hacer constar también mi agradecimiento por la desinteresada colaboración en los trabajos de composición de esta Memoria, al Dr. Angel Montesdeoca, profesor del Departamento de Matemática Fundamental.

Gracias, por último, a todas aquellas personas que, de una forma u otra me prestaron su apoyo.

Benito Juan González Rodríguez.

Prólogo.

En esta Memoria se estudia la transformación integral

$$F(\tau) = \int_0^\infty f(t)\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)\; dt \tag{1}$$

donde, para simplificar la notación, hemos denotado con

$$\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) = {}_2F_1(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t)t^\alpha,$$

siendo ${}_2F_1$ la función hipergeométrica de Gauss, en la que α y μ constituyen parámetros complejos y τ es real y positivo.

Como se sabe, esta función representa una conocida serie definida para $|t| < 1$, y puede ser prolongada analíticamente $|t| \geq 1$ (ver Apéndice).

De la transformación (1) se efectúa, en primer lugar un análisis de sus principales propiedades clásicas (convergencia, fórmula de inversión, relación de Parseval, teoremas de tipo Abeliano), procediéndose luego a su extensión a espacios de funciones generalizadas.

La convolución que se construye y el cálculo operacional generado revisten especial importancia en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales que se presentan en determinadas aplicaciones.

La transformación integral (1) pertenece a una clase de transformaciones integrales especiales, cuyo núcleo contiene una función especial, dándose la circunstancia de ser la función transformada dependiente de uno de los índices o parámetros que comparecen en aquel. Gran parte de ellas, son agrupadas más concretamente, en un conjunto (en el que debe incluirse la (1)) conocido como transformaciones integrales respecto del índice[1], entre las que destacan las de Kontorovich-Lebedev, de Mehler-Fock y otras con núcleos más generales (función G de Meijer (Wimp [85]), etc.).

[1]Brevemente, transformaciones índice ("index transforms")

La fórmula de inversión para la transformación (1) viene dada por

$$f(t) = \int_0^\infty S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)F(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

donde

$$S(\mu,\tau) = \frac{2}{\pi\Gamma(\mu+1)^2}\tau\; sh\, \pi\tau\; \Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)$$

y

$$\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t) = t^{\mu-\alpha}{}_2F_1(\frac{1}{2}+i\tau,\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-t)$$

Para la extensión de la transformación (1) a espacios de funciones generalizadas se han seguido las dos principales vías de extensión para las transformaciones clásicas. En primer lugar, se ha aplicado el denominado *método del núcleo* ([89], [91], [62]...) esto es, construyendo un espacio de funciones prueba que contenga al núcleo de la transformación, y definiendo luego la transformada de una función generalizada como la aplicación de la misma a aquel núcleo. En este punto hacemos hincapié en la relación existente entre el espacio que se define con algunos otros estudiados por Glaeske-Hess [20]. Se hace el estudio, por otra parte, de la transformación generalizada por el también conocido *método del operador adjunto* ([69], [89],...) empleando una técnica utilizada por Lisena [45], método que puede proporcionar ciertas ventajas en determinadas aplicaciones.

El trabajo lo hemos dividido en cuatro capítulos:

En el primero de ellos se analizan las propiedades clásicas de la transformación integral (1). Comenzamos exponiendo sus condiciones de validez, así como una regla operacional en la que interviene el operador diferencial

$$A_t = t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1}D_t t^{-\alpha}$$

operador que será de primordial importancia en la definición posterior del espacio de funciones prueba. Resultado básico de este capítulo es la fórmula de inversión clásica (2), que se demuestra para funciones $f(t)$ pertenecientes al espacio $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ estudiado por Vu Kim Tuan y Marichev [81] imponiendo ciertas condiciones a $f(t)$. En la demostración se acude a una técnica utilizada en [87] y se hace uso de la transformación de Hankel-Clifford introducida por Hayek [24] y estudiada distribucionalmente por Méndez [49]. El capítulo sigue con la demostración de una relación de tipo Parseval, el estudio de la conexión con otras transformadas, y la prueba de algunos teoremas de tipo Abeliano.

En el capítulo II, se estudia la transformación (1) desde el punto de vista de su extensión a funciones generalizadas. Apoyándonos en el *método del núcleo*, construimos el espacio de funciones prueba $U_{a,\mu,\alpha}$, con $a \in [0, \frac{1}{2})$, α, $\mu \in \mathbb{C}$, que representa un espacio vectorial topológico Hausdorff, localmente convexo y secuencialmente completo, con una base numerable de entornos (espacio de Fréchet) y al que pertenece el núcleo $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)$. Un resultado notable es la caracterización que se da de los elementos de $U_{a,\mu,\alpha}$ por su comportamiento asintótico en cero e infinito. Una vez establecidas ciertas propiedades de $U_{a,\mu,\alpha}$ y de su dual $U'_{a,\mu,\alpha}$, así como su relación con otros espacios, se define la transformación generalizada, denotada por ${}_2\mathcal{F}_1$, examinando sus propiedades de acotación, así como su analiticidad. Seguidamente nos ocupamos del teorema de inversión, cuya prueba se apoya en la de inversión clásica, teniéndose que si $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ y ϕ es un elemento de $\mathcal{D}(\mathbf{I})$, bajo ciertas condiciones en los parámetros α y μ, puede escribirse

$$< f, \phi >= \lim_{T\to\infty} \left\langle \int_0^T S(\mu, \tau)\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, t)F(\tau)\, d\tau, \phi(t) \right\rangle$$

En segundo lugar, se aplica el *método del operador adjunto* en el que, como es sabido, es técnica habitual apoyarse en una generalización de cierta relación de Parseval para la transformada clásica (véase [49] y [89]). En el caso que nos ocupa, la relación de Parseval que se obtiene no resulta adecuada para seguir la técnica mencionada, por lo que conviene señalar que hemos hecho uso del procedimiento que permitió a Lisena [45] dar una extensión de la transformada de Kontorovich-Lebedev a funciones generalizadas, para poder realizar un estudio distribucional de la transformación (1) por dicho método. Con ello, se definen nuevos espacios de funciones, probándose, además, que funciones infinitamente regulares con comportamiento en el origen y en el infinito dados, resultan ser transformadas de ciertas funciones generalizadas. El capítulo se termina con el establecimiento de teoremas de tipo Abeliano para la transformación generalizada.

En el tercer capítulo se construye, en primer lugar, una convolución para la transformación clásica haciendo uso de un operador traslación generalizado. Seguidamente, es definido otro operador traslación generalizado sobre el espacio $U_{a,\mu,\alpha}$ y a través del operador adjunto de este último, se procede a dar una convolución para la transformación generalizada. Los resultados obtenidos arrancan de cierta representación integral del producto de dos funciones asociadas de Legendre $P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(y)$ [34], a partir de la cual se obtiene otra para el producto $\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\ \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y)$, lo que permite construir los operadores traslación generalizados mencionados anteriormente, dándose varias proposiciones que ponen de manifiesto, tanto sus propiedades clásicas como distribucionales. El teorema 3.5.1 constituye parte fundamental de este capítulo por recogerse en él las principales características de la convolución introducida. Es importante destacar también la relación de la convolución definida para la transformación clásica con la generalizada que se pone de manifiesto en la proposición 3.5.6.

El cuarto y último capítulo, se dedica a algunas aplicaciones de la transformación ${}_2\mathcal{F}_1$ a cierto tipo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales donde interviene el operador

$$A'_t = t(t+1)D_t^2 + [2t(\alpha - \mu + 1) + 1 - \mu + 2\alpha)]D_t +$$
$$+(\alpha+1)(\alpha - 2\mu) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{t},$$

adjunto del A_t. Conviene subrayar en este punto el cálculo operacional que se da en el sentido distribucional, y que permite resolver problemas de la forma

$$P\left(A'_t\right)u = g,$$

siendo P un polinomio, g, u funciones generalizadas ${}_2\mathcal{F}_1$-transformables y A'_t el operador antes mencionado. Como es usual en estos casos, se procede a una resolución formal del problema, encontrándose con posterioridad un elemento de $\mathcal{D}'(\mathbf{I})$ que cumple la ecuación y así, de existir solución sobre $\mathcal{E}'(\mathbf{I})$, esta coincidiría sobre $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ con aquella perteneciente a $\mathcal{D}'(\mathbf{I})$. Este cálculo operacional se utiliza, por otra parte, para la resolución de algunos circuitos eléctricos variables con el tiempo. Con ayuda de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación se tratan, por último, algunas ecuaciones integrales, tanto el sentido clásico como en el distribucional, en donde comparece la convolución definida en el capítulo anterior.

Finalmente, se incluye una tabla de diversas transformadas de algunas notables funciones, un Apéndice en el que se recogen varias propiedades de la función hipergeométrica de Gauss utilizadas en la Memoria y un conjunto de cuestiones abiertas, algunas de las cuales estamos investigando en la actualidad.

C A P Í T U L O I

La ${}_2\mathcal{F}_1$–transformada índice. Estudio clásico.

1.1. Preámbulo.

El fundamento del capítulo es la introducción de una nueva transformación integral que denotamos por ${}_2\mathcal{F}_1$, con la consiguiente exposición de sus principales propiedades clásicas. Son establecidas especialmente, un teorema de convergencia, una regla que fundamenta un cálculo operacional, así como cierta relación peculiar de Parseval, amén de algunas proposiciones de tipo abeliano y la conexión de la transformación que nos ocupa con otras transformadas integrales.

Resultado básico es la fórmula de inversión para la ${}_2\mathcal{F}_1$, la cual es deducida siguiendo una técnica utilizada en [87].

1.2. La ${}_2\mathcal{F}_1$–transformada índice. Condiciones de convergencia.

En este apartado se presenta la transformación integral objeto de estudio. Pertenece a las de tipo índice y su núcleo es la siguiente función

$$ {}_2F_1(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t)t^{\alpha} \tag{1.2.1} $$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de Gauss, α y μ representan parámetros complejos y siendo τ real. Conviene hacer hincapié en que esta función está definida para $|t| < 1$ como suma de una conocida serie (ver [13]) y puede prolongarse analíticamente para $|t| \geq 1$ (ver Apéndice).

A efectos de abreviar la notación, la función hipergeométrica (1.2.1) será denotada por $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)$, con lo que la transformación que se examina vendrá definida así:

$$F(\tau) = \int_0^\infty f(t)\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)dt. \tag{1.2.2}$$

Las hipótesis de validez de (1.2.2) son las contenidas en el siguiente teorema de convergencia:

Teorema 1.2.1 *Si $f(t)$ representa una función localmente integrable en $(0, \infty)$, tal que:*

$$f(t) = O(t^\beta), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad para \quad t \to 0^+ \tag{1.2.3}$$

$$f(t) = O(t^\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad para \quad t \to \infty \tag{1.2.4}$$

la transformación (1.2.2) converge absolutamente, siempre y cuando:

$$\beta + R_e\alpha > -1, \qquad \lambda + R_e(\alpha - \mu) < -\frac{1}{2}. \tag{1.2.5}$$

DEMOSTRACIÓN:

Basta tener en cuenta que

$$\left|{}_2F_1(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t)\right| = \begin{cases} O(1), & t \to 0^+ \\ O(t^{-R_e\mu - \frac{1}{2}}), & t \to +\infty \end{cases} \tag{1.2.6}$$

1.3. Una regla operacional

El teorema siguiente fundamenta las bases de las principales aplicaciones de la transformación estudiada.

Teorema 1.3.1 *Sea $f \in \mathcal{C}^2$ en $(0,\infty)$, verificando (1.2.3) y (1.2.4), y tal que*

$$D_t\left[t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}f(t)\right] = O(t^{\gamma}), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad t \to 0^+$$

$$D_t\left[t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}f(t)\right] = O(t^{\nu}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad t \to +\infty$$

con

$$\beta + R_e\alpha > 0, \quad \lambda + R_e(\alpha-\mu) < -\frac{1}{2}, \quad \gamma + R_e\mu > -1, \quad \nu + R_e\mu < -\frac{3}{2}.$$

En estas condiciones, se tiene:

$$\int_0^\infty A'_t(f(t))\,\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt =$$

$$= -\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]\int_0^\infty f(t)\,\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \tag{1.3.1}$$

siendo A'_t el operador diferencial:

$$A'_t = t^{-\alpha}D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1}D_t t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}. \tag{1.3.2}$$

Demostración:

En efecto, las condiciones del teorema garantizan en primer lugar, la convergencia de la integral del segundo miembro de (1.3.1).

Por otra parte, si se tiene en cuenta (1.3.2), y tras integrar por partes, se infiere:

$$\int_0^\infty A'_t(f(t))\,\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt =$$

$$= \left[t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1}D_t t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}f(t)\right]t^{-\alpha}\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\Big|_0^\infty -$$

$$-\int_0^\infty t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1}D_t t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}f(t)D_t t^{-\alpha}\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt. \tag{1.3.3}$$

Ahora bien, las condiciones impuestas en γ y ν, junto con el comportamiento asintótico de la función hipergeométrica en 0 e ∞ promueven que el primer término de (1.3.3) sea nulo, y además, aseguran la convergencia de la integral que allí aparece.

Si se integra de nuevo por partes, se deduce que (1.3.3) es igual a:

$$-t^{\alpha+1}(t+1)f(t)D_t t^{-\alpha}\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t)A_t\,\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \qquad (1.3.4)$$

resultando, por idénticas razones a las anteriormente apuntadas, que el primer término de (1.3.4) es nulo, con lo que al tener en cuenta que:

$$A_t\,\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) = -\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) \qquad (1.3.5)$$

se concluye el aserto.

1.4. Fórmula de inversión.

En este apartado probaremos un resultado central: la fórmula de inversión para la transformación (1.2.2). Para ello vamos a recurrir a la siguiente clase de funciones (véase [81]):

Definición 1.4.1 *Sean c y γ números reales tales que $2\ sgn\ c + sgn\ \gamma \geq 0$. El espacio de funciones $f(x)$ que pueden ser representadas en la forma:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \rho(s)x^{-s}ds \qquad x\in(0,\infty)$$

donde,

$$\sigma = \{s\in\mathbb{C} : R_e s = \frac{1}{2}\},\ \rho(s) = s^{-\gamma}e^{-c\pi|Ims|}F(s),\ \int_\sigma |F(s)|ds < \infty,$$

se denota por $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ y escribimos $f(x)\in\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$.

El espacio $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ con la norma

$$\|f\|_{\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)} = \int_\sigma |F(s)|ds$$

es un espacio de Banach.

Antes de entrar en la prueba de la fórmula de inversión precisamos demostrar algunas proposiciones previas:

Proposición 1.4.1 *Si c y γ son números reales y μ complejo, tales que $2\ sgn\ (c+1) + sgn\ (\gamma - R_e\mu) > 0$, existe la integral:*

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}.$$

$$\int_\sigma \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s)\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)} f^*(1-s)ds \quad (1.4.1)$$

siendo f^* la transformada de Mellin de f, con $f \in \mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$, $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$, $\sigma = \{s \in \mathbb{C} : R_e s = \frac{1}{2}\}$.

Además, si $R_e\alpha > -\frac{1}{2}$ y $R_e(\mu-\alpha) > 0$, se tiene que

$$F(\tau) = \int_0^\infty f(t)\ \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt.$$

Demostración:

Por el comportamiento asintótico de la función Gamma ([13] pág. 47), se tiene, para $|Im\ s| \to \infty$

$$\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s)\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)} \sim Ce^{-\pi|Ims|}|s|^{R_e\mu-2}$$

de modo que, por estar f en $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ y tenerse que $2\ sgn\ (c+1) + sgn\ (\gamma - R_e\mu) > 0$, la integral (1.4.1) converge absolutamente.

Por otra parte,

$$\int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^{s-1}dt$$

converge absolutamente $\forall s \in \sigma$, ya que $R_e\alpha > -\frac{1}{2}$ y $R_e(\mu-\alpha) > 0$; por último, si $f(t) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, $f^*(s)$ es absolutamente integrable sobre σ deduciéndose:

$$\int_0^\infty f(t)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \int_\sigma f^*(1-s)t^{s-1}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma f^*(1-s)ds \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^{s-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}.$$

$$\int_\sigma \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s)\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)}f^*(1-s)ds =$$

$$= F(\tau)$$

Proposición 1.4.2 *Sean α, μ y s parámetros complejos con $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $R_es = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu-\alpha) < \frac{1}{4}$, $R_e(\mu-2\alpha) < -1$. Entonces, la representación integral*

$$\frac{1}{2\Gamma(\mu+1)}sh\ \pi\tau\ \Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s).$$

$$t^{\alpha-\mu}\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t) =$$

$$= \int_0^\infty z^{\mu-\alpha-s}C_\mu(tz)dz \int_{-\infty}^\infty e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}d\theta \int_{|\theta|}^\infty C_0(ze^\theta\Psi)sen\ 2\tau u\ du \quad (1.4.2)$$

es válida, siendo $\Psi = 2ch\ u - 2ch\ \theta$ y

$$\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x) = x^{\mu-\alpha}{}_2F_1(\frac{1}{2}+i\tau,\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x). \quad (1.4.3)$$

C_μ denota la función de Bessel-Clifford de primera especie y orden μ. Esta función está relacionada con la función J_μ de Bessel mediante $C_\mu(z) = z^{-\frac{\mu}{2}} J_\mu(2\sqrt{z})$. (véase [23]).

Demostración:

Partamos de la representación integral (ver [42])

$$\frac{2}{\pi} K_{2\tau i}(2\sqrt{z}) K_{2\tau i}(2\sqrt{y})\ sh\ 2\pi\tau =$$

$$= \int_{|\frac{1}{2}\log\frac{y}{z}|}^{\infty} C_0(2\sqrt{zy}\ chu - z - y)\ sen\ \ 2\tau u\ du. \tag{1.4.4}$$

Multiplicando ambos miembros por $y^{\mu-\alpha-s-\frac{1}{2}}$ e integrando respecto a y desde 0 hasta ∞ queda:

$$\frac{2}{\pi} K_{2\tau i}(2\sqrt{z}) \int_0^\infty y^{\mu-\alpha-\frac{1}{2}-s} K_{2\tau i}(2\sqrt{y}) dy\ sh\ 2\pi\tau =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{|\frac{1}{2}\log\frac{y}{z}|}^{\infty} C_0(2\sqrt{zy}\ chu - z - y)\ sen\ \ 2\tau u\ du \right) y^{\mu-\alpha-s-\frac{1}{2}}\ dy. \tag{1.4.5}$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de (1.4.5) por $z^{-\frac{1}{2}} C_\mu(tz)$ y se integra respecto a z desde 0 hasta ∞, se tendrá:

$$\frac{2}{\pi} \left(\int_0^\infty K_{2\tau i}(2\sqrt{z}) z^{-\frac{1}{2}} C_\mu(tz)\ dz \right) \left(\int_0^\infty y^{\mu-\alpha-\frac{1}{2}-s} K_{2\tau i}(2\sqrt{y}) dy \right)\ sh\ 2\pi\tau =$$

$$= \int_0^\infty z^{\mu-\alpha-s} C_\mu(tz) dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)} d\theta.$$

$$\int_{|\theta|}^{\infty} C_0(2\sqrt{zy}\ chu - z - y)\ sen\ 2\tau u\ du \tag{1.4.6}$$

Ahora bien, la primera integral del primer miembro de (1.4.6) es igual a (ver [78] pág. 248):

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\frac{1}{2}-i\tau)}{2\Gamma(\mu+1)}t^{\alpha-\mu}\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)$$

y la segunda vale ([14] 10.2(2)):

$$\frac{1}{2}\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s)$$

con lo cual, mediante el cambio de variable $\frac{1}{2}\log\frac{y}{z}=\theta$ en el segundo miembro, y las simplificaciones oportunas en el primero, se tiene la igualdad (1.4.2).

Sólo resta justificar la existencia de la integral iterada de (1.4.2). Para ello tendremos en cuenta lo siguiente:

$$\int_{|\theta|}^{\infty}|C_0(ze^{\theta}\Psi)sen\ 2\tau u|du \leq \int_{|\theta|}^{\infty}|C_0(ze^{\theta}\Psi)|du \tag{1.4.7}$$

y puesto que para $x>0$, $x^{\frac{1}{4}}C_0(x)$ está acotada, (1.4.7) resulta menor o igual que

$$A_1\int_{|\theta|}^{\infty}\frac{z^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\theta}{4}}du}{(ch\ u-ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}=A_2\frac{z^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\theta}{4}}}{(ch\ u)^{\frac{1}{4}}}\int_1^{\infty}\frac{ch\ u\ dv}{(v-1)^{\frac{1}{4}}(v^2ch^2\theta-1)^{\frac{1}{2}}}<$$

$$<A_3\frac{z^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\theta}{4}}}{(ch\ u)^{\frac{1}{4}}}\int_1^{\infty}(v-1)^{-\frac{1}{4}}(v^2-1)^{-\frac{1}{2}}\ dv$$

siendo esta última integral convergente. Con esto:

$$\int_0^{\infty}|z^{\mu-\alpha-s}C_{\mu}(tz)|dz\int_{-\infty}^{\infty}|e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}|d\theta\int_{|\theta|}^{\infty}|C_0(ze^{\theta}\Psi)\ sen\ 2\tau u|du<$$

$$<A_4\int_0^{\infty}z^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{3}{4}}|C_{\mu}(tz)|dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\theta(R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta \tag{1.4.8}$$

siendo $A_i>0$, $i=1,2,3,4$.

Por último, si tenemos en cuenta que ([23]):

$$C_{\mu}(x)=O\left(x^{-\frac{1}{4}-\frac{R_e\mu}{2}}\right),\quad x\to+\infty$$

así como:

$$C_\mu(x) = O(1), \quad x \to 0$$

y, además, que $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$, $R_e(\mu - 2\alpha) < -1$, sigue que la primera integral de (1.4.8) converge. En cuanto a la segunda, $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$ garantiza también su convergencia absoluta, de todo lo cual se infiere la validez de (1.4.2).

Procedemos a continuación a establecer la fórmula de inversión para la transformación estudiada.

Teorema 1.4.1 *Sean c, γ números reales verificando $2\ sgn\ c + sgn\ (\gamma + R_e(\mu - 2\alpha)) \geq 0$, α, μ parámetros complejos tales que $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$ y $R_e(\mu - 2\alpha) < -1$. Sea $f \in \mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$. Entonces, si $F(\tau)$ es la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada de $f(t)$, se tiene:*

$$f(t) = \int_0^\infty S(\mu, \tau)\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, t)F(\tau)d\tau \tag{1.4.9}$$

donde $\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, x)$ está dada por (1.4.3) y siendo

$$S(\mu, \tau) = \frac{2}{\pi\Gamma(\mu + 1)^2}\tau\ sh\ \pi\tau\ \Gamma(\mu + \frac{1}{2} + i\tau)\Gamma(\mu + \frac{1}{2} - i\tau) \tag{1.4.10}$$

Demostración:

Consideremos la integral:

$$I(\lambda, t) = \int_0^\lambda S(\mu, \tau)\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, t)F(\tau)d\tau$$

la cual, por la Proposición 1.4.1 puede escribirse:

$$I(\lambda, t) = \int_0^\lambda S(\mu, \tau)\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, t)d\tau \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2} + i\tau)\Gamma(\mu + \frac{1}{2} - i\tau)}.$$

$$\int_\sigma \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s)\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)} f^*(1-s)ds. \tag{1.4.11}$$

Como para λ finito se puede cambiar el orden de la integración, resulta al hacer uso de la Proposición anterior:

$$I(\lambda,t) = \frac{2t^{\mu-\alpha}}{\pi^2 i} \int_\sigma \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)} f^*(1-s)ds \int_0^\infty z^{\mu-\alpha-s} C_\mu(tz)dz.$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}d\theta \int_{|\theta|}^\infty C_0(ze^\theta\Psi)\left[\int_0^\lambda \tau\ sen\ 2\tau u\ d\tau\right] du =$$

$$= \frac{t^{\mu-\alpha}}{2\pi^2 i} \int_\sigma \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)} f^*(1-s)ds \int_0^\infty z^{\mu-\alpha-s} C_\mu(tz)dz.$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}d\theta \int_{|\theta|}^\infty C_0(ze^\theta\Psi)\left(-\frac{\partial}{\partial u}\frac{sen\ 2\lambda u}{u}\right) du$$

y al cambiar el orden en la integración, lo cual es posible dado el comportamiento asintótico de las funciones C_μ y las hipótesis del teorema, se tiene

$$I(\lambda,t) = \frac{t^{\mu-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial u}\frac{sen\ 2\lambda u}{u}\right) du \int_{-u}^u e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2})}d\theta.$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)} f^*(1-s)(ze^{2\theta})^{-s}ds\right] z^{\mu-\alpha} C_\mu(tz) C_0(ze^\theta\Psi)dz \tag{1.4.12}$$

Obsérvese ahora que la expresión entre corchetes de (1.4.12), representa la G_{02}^{10}-transformada de f en el punto $ze^{2\theta}$ (ver [81]), la cual existe por ser, en virtud de las hipótesis, $f \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, y $2\ sgn\ c + sgn\ (\gamma + R_e(\mu-2\alpha)) \geq 0$. De ahora en adelante, denotaremos a esta última por $G(f)(ze^{2\theta})$. Por otra parte, cabe destacar que esta transformada constituye, esencialmente, la transformación de Hankel-Clifford estudiada por Hayek [24] y Méndez [49].

El cambio de variable $ze^{2\theta} = y$, permite escribir (1.4.12) de la siguiente forma:

$$I(\lambda, t) = \frac{t^{\mu-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial u} \frac{sen\ 2\lambda u}{u} \right) du \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta.$$

$$\int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_0(ye^{-\theta}\Psi)\, dy. \tag{1.4.13}$$

Integrando por partes, resulta:

$$I(\lambda, t) =$$

$$= -\frac{t^{\mu-\alpha}}{\pi} \frac{sen\ 2\lambda u}{u} \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_0(ye^{-\theta}\Psi) dy \Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{t^{\mu-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \Phi(t, u) \frac{sen\ 2\lambda u}{u}\, du$$

siendo

$$\Phi(t, u) =$$

$$= e^{-u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-u})\, dy +$$

$$+e^{u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{u})\, dy +$$

$$+ \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \frac{\partial}{\partial u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_0(ye^{-\theta}\Psi)\, dy. \tag{1.4.14}$$

Nótese ahora que:

$$\int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_0(ye^{-\theta}\Psi)\, dy \Big|_0^\infty \tag{1.4.15}$$

tiende a cero para $u \to 0$, y que además, si hacemos $ye^{-2\theta} = z$, esta integral queda igual a:

$$\int_{-u}^{u} e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2})} d\theta \int_0^\infty G(f)(ze^{2\theta}) z^{\mu-\alpha} C_\mu(tz) C_0(ze^{\theta}\Psi)\, dz.$$

Como, por otra parte,

$$\left|\int_{-u}^{u} e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2})}d\theta \int_{0}^{\infty} G(f)(ze^{2\theta})z^{\mu-\alpha}C_{\mu}(tz)C_0(ze^{\theta}\Psi)\ dz\right| <$$

$$< M_1 \int_{-u}^{u} e^{2\theta R_e(\mu-\alpha+\frac{1}{2})}d\theta \int_{0}^{\infty} \left|G(f)(ze^{2\theta})\right| z^{R_e(\mu-\alpha)} \frac{|C_{\mu}(tz)|z^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\theta}{4}}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}dz \tag{1.4.16}$$

y dado que para $R_e s = \frac{1}{2}$,

$$|G(f)(\omega)| < C\omega^{-\frac{1}{2}} \tag{1.4.17}$$

siendo C una constante adecuada, (1.4.16) se encuentra acotada por

$$M_2 \int_{-u}^{u} e^{\theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}d\theta \int_{0}^{\infty} \frac{z^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{3}{4}}|C_{\mu}(tz)|}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}dz <$$

$$< M_3 \int_{-u}^{u} \frac{e^{\theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta = 2M_3 \int_{0}^{u} \frac{ch\ \theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta$$

con $M_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Si escindimos esta última en dos, con intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, resulta que la integral entre 0 y 1 está acotada (pues $ch\ u - ch\ \theta > ch\ u - ch\ 1$), y para la segunda al tener en cuenta que

$$ch\ p\theta = O(ch^p\theta), \quad p > 0, \quad \theta > 1$$

y que además,

$$sh\ \theta = O(ch\ \theta), \quad \theta > 1,$$

podemos inferir:

$$\int_{1}^{u} \frac{ch\ \theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta = O\left(\int_{1}^{u} \frac{(ch\ \theta)^{2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4}-1}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\ ch\ \theta\right) =$$

$$= O\left((ch\ u)^{2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{2}}\right), \quad u \to \infty$$

la cual tiende a cero para $u \to \infty$ puesto que $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$.

Con esto, podrá escribirse:

$$I(\lambda, t) = \frac{t^{\mu-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \Phi(t, u) \frac{sen\ 2\lambda u}{u}\ du.$$

Sentado esto, denotemos ahora:

$$F(t, u) = \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \frac{\partial}{\partial u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_0(ye^{-\theta}\Psi)\ dy$$

que al tener en cuenta que el comportamiento asintótico de las funciones que intervienen posibilita la derivación bajo el signo de integral, adopta la forma:

$$F(t, u) = \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) \frac{\partial}{\partial u} C_0(ye^{-\theta}\Psi)\ dy$$

y al hacer uso de la relación

$$\frac{\partial}{\partial u} C_0\left(ye^{-\theta}\Psi\right) = 2ye^{-2\theta}(e^{\theta-u} - 1) C_1\left(ye^{-\theta}\Psi\right) - \frac{\partial}{\partial \theta} C_0\left(ye^{-\theta}\Psi\right)$$

resulta:

$$F(t, u) = 2e^{-u} \int_{-u}^{u} e^{-2\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha+1} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_1(ye^{-\theta}\Psi) dy -$$

$$-2 \int_{-u}^{u} e^{-3\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha+1} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_1(ye^{-\theta}\Psi) dy -$$

$$- \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-2\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} C_0\left(ye^{-\theta}\Psi\right) dy. \qquad (1.4.18)$$

Puesto que, mediante una integración por partes, el último término de (1.4.18) se escribe:

$$-e^{-u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-u})\ dy + e^{u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{u})\ dy -$$

$$-\int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} \left[e^{-\theta} C_\mu(tye^{-2\theta}) + 2tye^{-3\theta} C_{\mu+1}(tye^{-2\theta}) \right] dy$$

sigue, al sustituir esta expresión en (1.4.18):

$$F(t,u) =$$

$$= e^u \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^u)\, dy +$$

$$+ e^{-u} \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^{-u})\, dy +$$

$$+ F_1(t,u) - F_2(t,u) - F_3(t,u)$$

donde

$$F_1(t,u) = 2e^{-u} \int_{-u}^{u} e^{-2\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha+1} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_1(ye^{-\theta}\Psi) dy$$

$$F_2(t,u) = 2 \int_{-u}^{u} e^{-3\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha+1} C_\mu(tye^{-2\theta}) C_1(ye^{-\theta}\Psi) dy$$

$$F_3(t,u) =$$

$$= \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} \left[e^{-\theta} C_\mu(tye^{-2\theta}) + 2tye^{-3\theta} C_{\mu+1}(tye^{-2\theta}) \right] dy.$$

Si sustituimos $F(t,u)$ en (1.4.14), se llega a:

$$\Phi(t,u) =$$

$$= 2e^u \int_0^\infty G(f)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu(tye^u)\, dy + F_1(t,u) - F_2(t,u) - F_3(t,u). \quad (1.4.19)$$

Debemos señalar ahora que la fórmula de inversión para la transformación de Hankel-Clifford (véase [24] y [49]) puede ser aplicada al primer sumando de la expresión (1.4.19) lo que permite escribir:

$$\Phi(t,u) = 2t^{\alpha-\mu}e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})}f(te^{2u}) + F_1(t,u) - F_2(t,u) - F_3(t,u). \quad (1.4.20)$$

Veamos a continuación que, para cada $t > 0$, las funciones

$$\frac{1}{u}F_i(t,u), \quad (i = 1, 2, 3)$$

son absolutamente integrables en el intervalo $(0,\infty)$. Para ello nos apoyaremos en la acotación de las funciones $x^{\frac{1}{4}}C_0(x)$ y $x^{\frac{1}{4}}C_1(x)$, en las condiciones del teorema, en la relación (1.4.17) y en las siguientes consideraciones:

(i) tras el cambio de variable $tye^{-2\theta} = z$, $F_1(t,u)$ queda igual a

$$2e^{-u}t^{\alpha-\mu-2}\int_{-u}^{u} e^{2\theta(\mu-\alpha+1)}d\theta.$$

$$\int_0^\infty G(f)(zt^{-1}e^{2\theta})z^{\mu-\alpha+1}C_\mu(z)C_1(zt^{-1}e^{\theta}\Psi)dz$$

cuyo módulo está acotado por

$$A_1 e^{-u}t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}}\int_{-u}^{u}\frac{e^{\theta(2\ R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta\int_0^\infty z^{R_e(\mu-\alpha)+\frac{1}{4}}|C_\mu(z)|\ dz.$$

Ahora bien, dado que la segunda integral es convergente por el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel-Clifford (véase [23]), se tiene que

$$|F_1(t,u)| < A_2 e^{-u}t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}}\int_{-u}^{u}\frac{e^{\theta(2\ R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta$$

y así,

$$\int_0^\infty \frac{|F_1(t,u)|}{u}du < A_2 t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u}\int_{-u}^{u}\frac{e^{\theta(2\ R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}}d\theta$$

con $A_1, A_2 > 0$.

Cambiando ahora el orden de integración, la integral del segundo miembro queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(2\; R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})}\;(ch\; u - ch\; \theta)^{-\frac{1}{4}}\; d\theta \int_{|\theta|}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\; du\; <$$

$$< 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta(2\; R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})}}{(ch\;\theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-|\theta|}}{\sqrt[4]{x-1}\sqrt{x^2-1}\log\sqrt{x^2-1}} dx =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta(2\; R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})-|\theta|}}{(ch\;\theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}\sqrt{x^2-1}\log\sqrt{x^2-1}}$$

siendo ambas convergentes al tenerse $\frac{1}{8} < R_e(\mu-\alpha) < \frac{1}{4}$, de lo que sigue:

$$\int_0^{\infty} \frac{|F_1(t,u)|}{u} du < A\; t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}}, \quad A > 0.$$

(ii) Razonando de la misma forma,

$$F_2(t,u) =$$

$$2t^{\alpha-\mu-2} \int_{-u}^{u} e^{\theta(2(\mu-\alpha)+1)} d\theta \int_0^{\infty} G(f)(t^{-1}e^{2\theta}z) z^{\mu-\alpha+1} C_\mu(z) C_1(t^{-1}ze^{\theta}\Psi) dz$$

de donde se infiere:

$$|F_2(t,u)| <$$

$$< 2B_1 t^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{5}{4}} \int_{-u}^{u} \frac{e^{\theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\; u - ch\;\theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta \int_0^{\infty} z^{\mu-\alpha+\frac{1}{4}} |C_\mu(z)|\; dz <$$

$$< B_2 t^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{5}{4}} \int_{-u}^{u} \frac{e^{\theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\; u - ch\;\theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta$$

siendo B_1 y B_2 constantes positivas, con lo cual,

$$\int_0^{\infty} \frac{|F_2(t,u)|}{u} du < B_2 t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}} \int_0^{\infty} \frac{du}{u} \int_{-u}^{u} \frac{e^{\theta(2\; R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\; u - ch\;\theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta$$

teniéndose así:

$$\int_0^\infty \frac{|F_2(t,u)|}{u} < B\, t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}}, \quad B > 0.$$

(iii) Finalmente, haciendo el mismo cambio de variable, se puede escribir:

$$F_3(t,u) = t^{\alpha-\mu-1} \int_0^\infty G(f)(t^{-1}e^{2\theta}z)e^{\theta(2(\mu-\alpha)+1)}z^{\mu-\alpha}\, dz.$$

$$\int_{-u}^{u} C_0(t^{-1}ze^{2\theta})\left[C_\mu(z) + 2zC_{\mu+1}(z)\right]\, d\theta$$

obteniéndose:

$$|F_3(t,u)| <$$

$$< D_1 t^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{\theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta \int_0^\infty z^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{3}{4}}|C_\mu(z)|\, dz +$$

$$+ D_2 t^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{\theta(2R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta \int_0^\infty z^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4}}|C_{\mu+1}(z)|\, dz$$

de donde,

$$\int_0^\infty \frac{|F_3(t,u)|}{u} du < D_3 t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{1}{4}} \int_0^\infty \frac{du}{u} \int_{-u}^{u} \frac{e^{\theta(2\, R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta <$$

$$< D_4\, t^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{1}{4}}$$

con $D_i > 0$, $1 \leq i \leq 4$.

Los tres últimos resultados reflejan ya que:

$$\frac{1}{u} F_i(t,u) \in L(0,\infty), \quad i = 1,2,3$$

deduciéndose por el Lema de Riemann:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty F_i(t,u) \frac{sen\ 2\lambda u}{u}\, du = 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Estudiemos, por último, la integral

$$I_1(\lambda,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})}f(te^{2u})\frac{sen\ 2\lambda u}{u}\ du.$$

Puesto que $f\in\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, para una ϕ adecuada se podrá escribir:

$$f(te^{2u})=\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\phi(s)\Big(te^{2u}\Big)^{-s}ds$$

con lo que al sustituir en I_1 y cambiar el orden de la integración (lo cual es posible dada su convergencia absoluta), queda

$$I_1(\lambda,t)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\phi(s)t^{-s}\int_0^\infty e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2}+s)}\frac{sen\ 2\lambda u}{u}du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\phi(s)\ arc\ tg\frac{2\lambda}{2s-1+2\mu-2\alpha}t^{-s}ds.$$

expresión en la que la función

$$\psi(\lambda,s)=arc\ tg\ \frac{2\lambda}{2s-1+2\mu-2\alpha}$$

es continua para todo valor real de λ y todo $s\in\sigma$, y además,

$$|\psi(\lambda,s)|\leq\frac{\pi}{2}$$

y

$$\lim_{\lambda\to\infty}\psi(\lambda,s)=\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente [1], cabe deducir:

$$\lim_{\lambda\to\infty}I_1(\lambda,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\phi(s)t^{-s}ds=f(t).$$

En definitiva:

$$\lim_{\lambda\to\infty}I(\lambda,t)=f(t)=\int_0^\infty S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)F(\tau)d\tau$$

lo que concluye la demostración.

1.5. Relación de Parseval.

En esta sección se prueba una relación de tipo Parseval para la transformación (1.2.2), la cual resulta útil en el cálculo de transformadas de algunas funciones. Previamente es preciso demostrar una proposición en la que se da una acotación para el núcleo de la transformada.

Proposición 1.5.1 *Sea μ un parámetro complejo con $R_e\mu > 0$. Entonces, para $\tau \to \infty$, se tiene*

$$|\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)| \leq Mx^{-\frac{1}{2}-R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)}(x+1)^{-\frac{1}{2}-R_e\frac{\mu}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}. \tag{1.5.1}$$

Demostración:

Partiendo de la estimación (ver [64] pág. 231, (24)):

$$P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(ch\ \xi) \sim \frac{\tau^{-\frac{1}{2}-\mu}}{\sqrt{\pi}(e^{2\xi}-1)^{\frac{1}{2}}}\left(e^{(\frac{1}{2}+i\tau)\xi} + e^{i(\mu+\frac{1}{2})\pi}e^{(\frac{1}{2}-i\tau)\xi}\right)$$

para $\tau \to \infty$, sigue al hacer $ch\ \xi = 2x+1$:

$$|P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(2x+1)| \leq M_1[x(x+1)]^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}$$

con lo que si se tienen en cuenta las relaciones existentes entre $\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)$ y $P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(2x+1)$, resulta

$$|\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)| \leq Mx^{-\frac{1}{2}-R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)}(x+1)^{-\frac{1}{2}-R_e\frac{\mu}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}$$

para $\tau \to \infty$.

Teorema 1.5.1 (Relación de Parseval). *Sean c,γ,β y ρ parámetros reales, μ,α complejos. Sean $f(t)$, $g(t) \in \mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ con $2\ sgn\ (c+1) + sgn\ (\gamma - R_e(\mu-2\alpha)) \geq 0$, $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu-\alpha) < \frac{1}{4}$, $R_e(\mu-2\alpha) < -1$. Se supone que:*

$$g(t) = O(t^{\beta}), \quad t \to \infty, \quad con \quad \beta + R_e(\mu-\alpha) < 0,$$

$$g(t) = O(t^\rho), \quad t \to 0^+, \quad con \quad \rho + R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) > -\frac{1}{2}$$

y si denotamos por $F(\tau)$ y $G(\tau)$ sus respectivas ${}_2\mathcal{F}_1$-transformadas, que:

$$F(\tau) = O(\tau^\nu), \quad \tau \to \infty, \quad con \quad \nu + R_e\mu > -\frac{3}{2}$$

$$F(\tau) = O(\tau^\lambda), \quad \tau \to 0^+, \quad con \quad \lambda > -2.$$

En estas condiciones:

$$\int_0^\infty S(\mu,\tau)F(\tau)G(\tau)d\tau = \int_0^\infty t^{2\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}f(t)g(t)\; dt. \qquad (1.5.2)$$

Demostración:

Por la Proposición 1.5.1,

$$|G(\tau)| \leq \int_0^\infty |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)||g(t)|dt \leq$$

$$\leq \tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}+R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)}(t+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{R_e\mu}{2}}|g(t)|dt \leq M_1\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}, \quad M > 0$$

por cuanto las condiciones impuestas a $g(t)$ garantizan la convergencia absoluta de la última integral.

Por otra parte,

$$S(\mu,\tau) = O(\tau^2), \qquad \tau \to 0^+$$

$$S(\mu,\tau) = O(\tau^{2R_e\mu+1}), \qquad \tau \to \infty$$

lo que unido a las acotaciones impuestas a ν y λ, aseguran la convergencia absoluta de la primera integral de (1.5.2).

Además,

$$\int_0^\infty S(\mu,\tau)F(\tau)G(\tau)\; d\tau =$$

$$= \int_0^\infty S(\mu,\tau)F(\tau)d\tau \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)g(t)dt \qquad (1.5.3)$$

y por las hipótesis del enunciado cabe aplicar el Teorema de Fubini para cambiar el orden de la integración, con lo que (1.5.3) puede escribirse, tras la consideración de ciertas propiedades de la función hipergeométrica de Gauss (ver Apéndice):

$$\int_0^\infty g(t)t^\alpha(t+1)^{-\mu}dt \int_0^\infty S(\mu,\tau)t^{\alpha-\mu}\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)F(\tau)d\tau \tag{1.5.4}$$

y así, al aplicar la fórmula de inversión de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada se llega a que (1.5.4) es igual a

$$\int_0^\infty t^{2\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}f(t)g(t)\,dt.$$

1.6. Relación con otras transformadas.

En este apartado se exponen conexiones de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice con otras conocidas transformaciones integrales.

a) La transformación de Olevskii.

En [58] Olevskii estudia la transformación integral definida por:

$$\varphi(\xi) = \int_0^\infty {}_2F_1(\alpha+\beta i, \alpha-\beta i; \gamma; -\xi)S_1(\alpha,\gamma,\beta)f(\beta)d\beta \tag{1.6.1}$$

con

$$S_1(\alpha,\gamma,x) = \frac{xsh\ 2\pi x}{\pi^2\Gamma(\gamma)^2}\Gamma(\alpha+xi)\Gamma(\alpha-xi)\Gamma(\gamma-\alpha+xi)\Gamma(\gamma-\alpha-xi) \tag{1.6.2}$$

cuya fórmula de inversión es la

$$f(x) = \int_0^\infty {}_2F_1(\alpha+xi, \alpha-xi; \gamma; -\xi)S_2(\alpha,\gamma,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{1.6.3}$$

siendo

$$S_2(\alpha,\gamma,x) = x^{\gamma-1}(x+1)^{2\alpha-\gamma} \tag{1.6.4}$$

bajo las condiciones:

$$\alpha+1>\gamma>\alpha>0, \qquad \gamma>\frac{1}{2}, \qquad x^\gamma e^{\pi x}f(x)\in L(0,\infty).$$

Si tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \tau$, $\gamma = \mu + 1$, (1.6.1) y (1.6.3) se transforman en:

$$F(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi\Gamma(\mu+1)^2} \int_0^\infty \tau sh\ \pi\tau\Gamma(\mu + \frac{1}{2} + i\tau)\Gamma(\mu + \frac{1}{2} - i\tau).$$

$$_2F_1(\frac{1}{2} + i\tau, \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -x) f(\tau) d\tau \tag{1.6.5}$$

$$f(\tau) = \int_0^\infty {}_2F_1(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -x) x^\mu F(x) dx. \tag{1.6.6}$$

Cabe observar que la fórmula de inversión de la $_2\mathcal{F}_1$-transformada índice que estamos considerando, coincide con (1.6.5) y que la fórmula de inversión (1.6.6) de la transformación de Olevskii equivale a la (1.2.2) que define la transformada objeto de estudio, todo ello con $\alpha = \mu$ en (1.2.2), lo cual imposibilita las demostraciones realizadas hasta ahora al haberse exigido $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$, por lo que se puede decir que la relación existente entre ambas transformadas es, más bien, de carácter formal.

b) La transformación de Fourier seno.

Si en el núcleo de la transformación (1.2.2) tomamos $\mu = \frac{1}{2}$ se tiene (véase [63]):

$$\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) = \frac{-t^\alpha}{2\tau\sqrt{t+t^2}} sen\ (2\tau\ arc\ sh\sqrt{t})$$

con lo que (1.2.2) puede escribirse

$$F(\tau) = -\frac{1}{2\tau} \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sqrt{t+t^2}} f(t) sen\ (2\tau\ arc\ sh\ \sqrt{t}) dt. \tag{1.6.7}$$

Haciendo el cambio de variable $arc\ sh\ \sqrt{t} = x$, sigue

$$F(\tau) = -\frac{1}{\tau} \int_0^\infty sh^{2\alpha} x f(sh^2 x)\ sen\ 2\tau x dx \tag{1.6.8}$$

la cual se puede expresar como

$$-\frac{1}{\tau}\mathcal{F}_s\left(sh^{2\alpha}xf(sh^2x);2\tau\right)$$

donde $\mathcal{F}_s$ denota la transformada de Fourier seno.

1.7. Teoremas abelianos para la ${}_2\mathcal{F}_1$ –transformada.

Se introducen en este epígrafe algunos teoremas de tipo abeliano para la transformación (1.2.2). Probaremos un teorema que relaciona el comportamiento de una función en un entorno del origen con el de su transformada para grandes valores de τ y también otro que se refiere al comportamiento de una función $f(x)$ cuando $x \to \infty$ con el de su transformada $F(\tau)$ para $\tau \to \infty$.

Teorema 1.7.1 *Sea f una función medible en* $(0,\infty)$, *tal que*

$$t^{\alpha-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}(t+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}}f(t) \qquad (\alpha,\mu\in\mathbb{C})$$

sea absolutamente integrable en cualquier intervalo de la forma (T,∞) *con* $T>0$. *Supongamos que*

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\gamma}f(t)=\beta \tag{1.7.1}$$

donde γ *y* β *son dos complejos tales que* $-R_e\alpha < R_e\gamma < R_e(\mu-\alpha)$. *Entonces*

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)\right]=0 \tag{1.7.2}$$

donde

$$H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)=\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-\gamma+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-\gamma-i\tau)}{\Gamma(\mu+1-\alpha-\gamma)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)} \tag{1.7.3}$$

y $F(\tau)$ *dada por (1.2.2).*

Demostración:

En primer lugar, obsérvese que las hipótesis del teorema garantizan la existencia de $F(\tau)$.

Por otra parte, (véase [14], 6.9(3))

$$\int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma dt = H(\alpha,\mu,\gamma,\tau) \tag{1.7.4}$$

para $-R_e\alpha < R_e\gamma < R_e(\mu-\alpha)+\frac{1}{2}$.

Consideremos ahora,

$$|F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)| = \left|\int_0^\infty (t^{-\gamma}f(t)-\beta)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^\delta \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt +$$

$$+\int_\delta^\infty \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt \leq$$

$$\leq \sup_{0<t\leq\delta}\left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| \int_0^\delta |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt +$$

$$+\int_\delta^\infty \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt$$

Haciendo uso de la Proposición 1.5.1 tenemos

$$|F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)| \leq \sup_{0<t\leq\delta}\left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| \int_0^\delta |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt +$$

$$+C\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}\int_\delta^\infty \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| [t(t+1)]^{-\frac{1}{2}-\frac{R_e\mu}{2}} t^{R_e(\alpha+\gamma)} dt \tag{1.7.5}$$

Por (1.7.1), dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que el primer sumando de (1.7.5) es menor que ε. Por tanto

$$|F(\tau) - \beta H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)| \leq$$

$$\varepsilon + C\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu} \int_\delta^\infty \left| t^{-\gamma} f(t) - \beta \right| [t(t+1)]^{-\frac{1}{2}-\frac{R_e\mu}{2}} t^{R_e(\alpha+\gamma)} dt \tag{1.7.6}$$

Ahora bien, siendo $R_e\gamma < R_e(\mu - \alpha)$ y en virtud de las hipótesis sobre f, la última integral de (1.7.6) es convergente. Además, como para $\tau \to \infty$ el último término de (1.7.6) tiende a cero, se tiene:

$$|F(\tau) - \beta H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)| < \varepsilon$$

con lo que

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)] = 0.$$

El siguiente teorema establece una relación entre el comportamiento de $f(t)$ para $t \to \infty$ y el de $F(\tau)$ para $\tau \to \infty$.

Teorema 1.7.2 *Sea f(t) una función medible en el intervalo* $(0, \infty)$ *tal que*

$$t^{\alpha-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}(t+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}} f(t) \qquad (\alpha, \mu \in \mathbb{C})$$

sea absolutamente integrable en cualquier intervalo de la forma $(0, T)$*,* $0 < T < \infty$*. Supongamos que existe un complejo* β *tal que*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\gamma} f(t) = \beta \tag{1.7.7}$$

donde $\gamma \in \mathbb{C}$ *con* $-R_e\alpha < R_e\gamma < R_e(\mu - \alpha)$*,* $R_e\gamma > R_e(\frac{\mu}{2} - \alpha) - \frac{1}{2}$*. Entonces*

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)] = 0$$

con $H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)$ *y* $F(\tau)$ *definidos por (1.7.3) y (1.2.2), respectivamente.*

Demostración:

Por (1.7.4) sigue:

$$|F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)| \leq \int_0^\infty \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt =$$

$$\int_0^T \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt+$$

$$+\int_T^\infty \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt+$$

$$+\sup_{t\geq T}\left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| \int_T^\infty |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt$$

Utilizando la Proposición 1.5.1, se tiene

$$|F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)| \leq$$

$$\leq C\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}\int_0^T \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| [t(t+1)]^{-\frac{1}{2}-\frac{R_e\mu}{2}} t^{R_e(\alpha+\gamma)}dt+$$

$$+\sup_{t\geq T}\left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| \int_0^T |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)t^\gamma|\, dt$$

mas, por (1.7.7), dado $\varepsilon > 0$, el segundo sumando de la anterior expresión se puede hacer menor que ε para T suficientemente grande, y así

$$|F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)| <$$

$$< C\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}\int_0^T \left|t^{-\gamma}f(t)-\beta\right| [t(t+1)]^{-\frac{1}{2}-\frac{R_e\mu}{2}} t^{R_e(\alpha+\gamma)}dt+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora bien, siendo $R_e\gamma > R_e(\frac{\mu}{2} - \alpha) - \frac{1}{2}$ y cumpliendo f las hipótesis del teorema, esta última integral converge absolutamente y, por consiguiente, si $\tau \to \infty$ el primer sumando de la anterior desigualdad se puede hacer menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, teniéndose con esto que

$$|F(\tau) - \beta G(\alpha, \mu, \gamma, \tau)| < \varepsilon$$

y

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta G(\alpha, \mu, \gamma, \tau)] = 0.$$

C A P Í T U L O II

La ${}_2\mathcal{F}_1$–transformada índice distribucional.

2.1. Preámbulo.

En este capítulo se estudia la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada en un espacio de funciones generalizadas. Para ello, en primer lugar, se construye un espacio numerablemente multinormado $U_{a,\mu,\alpha}$ de funciones prueba que contiene al núcleo de la transformación y se le dota de una topología generada por una familia de seminormas. Se analizan propiedades de este espacio y se establecen las principales propiedades del mismo, definiéndose en él la ${}_2\mathcal{F}_1$-tranformación generalizada de un elemento f del dual de $U_{a,\mu,\alpha}$ como la aplicación de f al núcleo de la transformación. Además, se prueba un teorema de analiticidad para la transformada generalizada y se demuestra una fórmula de inversión generalizada. Se pone de manifiesto asímismo la relación de $U_{a,\mu,\alpha}$ con otros espacios construidos por Glaeske [20] y [21] para la transformada generalizada de Mehler-Fock. Por otra parte, la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada es también estudiada por el denominado *método del operador adjunto* (véase [89]). El capítulo acaba con la prueba de algunos teoremas de tipo abeliano para la transformación generalizada.

En lo que sigue $\mathbf{I}$ denotará el intervalo real $(0,\infty)$, $\mathbb{N}_0$ el conjunto de los enteros positivos y $\mathbb{R}_+$ el conjunto de los números reales positivos.

2.2. El espacio de funciones prueba y su dual.

Sea $U_{a,\mu,\alpha}$ el conjunto de todas las funciones complejas ϕ, regulares definidas en el intervalo abierto $\mathbf{I} = (0, \infty)$ y tales que para todo entero no negativo k, exista

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) = \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t)\right| \tag{2.2.1}$$

con $a \in [0, \frac{1}{2})$, μ, $\alpha \in \mathbb{C}$, y siendo A_t el operador diferencial definido por:

$$t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu} D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1} D_t t^{-\alpha}. \tag{2.2.2}$$

Es obvio que, provisto de las operaciones usuales de adición de funciones y producto de un escalar complejo por una función, $U_{a,\mu,\alpha}$ constituye un espacio vectorial. Además, el conjunto $\{\gamma_{k,a,\mu,\alpha}\}_k$ representa una familia de seminormas sobre $U_{a,\mu,\alpha}$, ya que:

i) $\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi + \varphi) \leq \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) + \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\varphi), \quad \forall \phi, \varphi \in U_{a,\mu,\alpha},\ k \in \mathbb{N}_0$

ii) $\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\lambda\phi) = |\lambda| \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0, \phi \in U_{a,\mu,\alpha}$.

Además, para $k = 0$, $\gamma_{0,a,\mu,\alpha}$ representa una norma por cuanto

iii) $\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi) = 0$ si, y sólo si $\phi = 0$.

En efecto, si $\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi) = 0$, como para cualquier compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$ existe

$$\inf_{t\in K} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}\right| = A$$

y puesto que la función $(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}$ es continua, se tendrá para $t \in \mathbb{K}$:

$$0 \leq A|\phi(t)| \leq \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} \phi(t)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in K} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} \phi(t)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}\phi(t)\right| = \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) = 0.$$

Ahora bien, como en general $A \neq 0$ y $0 \leq A|\phi(t)| \leq 0$ sobre $\mathbb{K}$, ello implica que $\phi(t) \equiv 0$ sobre $\mathbb{K}$. Luego, teniéndose para cualquier dominio $\mathbf{I}$, que existe una sucesión $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ de conjuntos compactos con

$$\mathbf{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

sigue que $\phi(t) \equiv 0$ en $\mathbf{I}$. Por consiguiente, $\{\gamma_{k,a,\mu,\alpha}\}_k$ constituye una familia numerable de seminormas sobre $U_{a,\mu,\alpha}$ que, además es separadora. Se trata pues, de una multinorma numerable que dota a $U_{a,\mu,\alpha}$ de una topología que convierte a $U_{a,\mu,\alpha}$ en un espacio numerablemente multinormado.

Para demostrar que $U_{a,\mu,\alpha}$ es, además, secuencialmente completo, anteponemos el siguiente

Lema 2.2.1 *Para toda función regular $\phi(t)$ y todo entero positivo k, se tiene*

$$A_t^k \phi(t) = \sum_{j=0}^{2k} t^{j-k} p_{j,k}(t) D_t^j \phi(t) \tag{2.2.3}$$

con

$$p_{2k,k}(t) = (t+1)^k \quad y \quad p_{2k-1,k}(t) = k(t+1)^{k-1}[\mu - 2\alpha + k + 2t(\mu - \alpha + k)]$$

siendo $p_{j,k}(t)$ un polinomio de grado k, $0 \leq j \leq 2k$.

Demostración:

Procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ resulta evidente, puesto que

$$A_t = t(t+1)D_t^2 + [\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]D_t + \left[\alpha(\alpha - 2\mu - 1) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right] \tag{2.2.4}$$

Supongamos que (2.2.3) es cierto para k y probémoslo para $k+1$.

En efecto:

$$A_t^{k+1}\phi(t) = A_t\left(A_t^k\phi(t)\right) =$$

$$= t(t+1)D_t^2 A_t^k\phi(t) + [\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]D_t A_t^k\phi(t) +$$

$$+\left[\alpha(\alpha - 2\mu - 1) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right] A_t^k\phi(t).$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$D_t A_t^k\phi(t) = \sum_{j=0}^{2k+1} t^{j-k-1} q_{j,k}(t) D_t^j\phi(t)$$

$$D_t^2 A_t^k\phi(t) = \sum_{j=0}^{2k+2} t^{j-k-2} r_{j,k}(t) D_t^j\phi(t)$$

con $q_{j,k}(t)$ y $r_{j,k}(t)$ polinomios de grado k en t, resultará

$$A_t^{k+1}\phi(t) = t(t+1)\sum_{j=0}^{2k+2} t^{j-k-2} r_{j,k}(t) D_t^j\phi(t) +$$

$$+[\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]\sum_{j=0}^{2k+2} t^{j-k-2} r_{j,k}(t) D_t^j\phi(t) +$$

$$+\left[\alpha(\alpha - 2\mu - 1) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]\sum_{j=0}^{2k} t^{j-k} p_{j,k}(t) D_t^j\phi(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k+2} t^{j-k-1} s_{j,k+1}(t) D_t^j\phi(t)$$

donde

$$s_{j,k+1}(t) = (t+1)r_{j,k}(t) + [\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]q_{j,k}(t) +$$

$$+[t(\alpha^2-\alpha-2\alpha\mu)+\alpha(\mu-\alpha)]p_{j,k}(t)$$

con $0\leq j\leq 2k$, es un polinomio de grado $k+1$ en t.

Para $j=2k+1$ y $j=2k+2$ basta aplicar la hipótesis de inducción y comprobar que los factores que multiplican a $D_t^{2k+1}\phi(t)$ y $D_t^{2k+2}\phi(t)$ en el desarrollo de A_t^{k+1}, son los que se pretende obtener.

Proposición 2.2.1 *El espacio $U_{a,\mu,\alpha}$ es secuencialmente completo y, por tanto, un espacio de Fréchet.*

Demostración:

Sea $\{\phi_n\}_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en $U_{a,\mu,\alpha}$. Probaremos que existe $\phi\in U_{a,\mu,\alpha}$ tal que $\phi_n\to\phi$ en $U_{a,\mu,\alpha}$ para $n\to\infty$. Para ello, mediante un proceso de inducción se demostrará que, para todo $\varepsilon>0$,

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n-\phi)<\varepsilon,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Sea $\mathbb{K}$ cualquier subconjunto compacto de $\mathbf{I}$. Si $\phi_n\in U_{a,\mu,\alpha}$, se tendrá que $\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n)<\infty$, $k=0,1,2,\ldots$, y en particular

$$\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi_n)=\sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}\phi_n(t)\right|<\infty.$$

Pero al ser $\{\phi_n\}_{n\in N}$ de Cauchy en $U_{a,\mu,\alpha}$, resulta

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n-\phi_{n'})\to 0,\quad \text{si}\ \ n,n'\to\infty,$$

y en particular, para $k=0$:

$$\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi_n-\phi_{n'})=$$

$$=\sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}(\phi_n(t)-\phi_{n'}(t))\right|\to 0$$

si $n,n'\to\infty$.

Cualquiera que sea el compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$, la función

$$(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}$$

es acotada en $\mathbb{K}$. Sea

$$A = \inf_{t \in K} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}\right|.$$

Entonces, podrá escribirse, para cualquier $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$:

$$0 \leq A|\phi_n(t) - \phi_{n'}(t)| \leq \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}(\phi_n(t) - \phi_{n'}(t))\right| \leq$$

$$\leq \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}(\phi_n(t) - \phi_{n'}(t))\right| =$$

$$= \gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi_n - \phi_{n'}) \to 0$$

cuando $n, n' \to \infty$, esto es,

$$|\phi_n - \phi_{n'}| \to 0, \quad n, n' \to \infty,$$

lo cual representa la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en todo $\mathbb{K}$, por lo que ϕ_n converge uniformemente en todo compacto de $\mathbf{I}$.

Sea, ahora, $k = 1$. Se tendrá:

$$\gamma_{1,a,\mu,\alpha}(\phi_n - \phi_{n'}) =$$

$$= \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t(\phi_n(t) - \phi_{n'}(t))\right| \to 0,$$

si $n, n' \to \infty$. Aplicando el mismo razonamiento anterior sigue que $\{A_t\phi_n(t)\}_{n\in N}$ converge uniformemente en cualquier $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbf{I}$ si $n \to \infty$. Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$A_t = t(t+1)D_t^2 + [\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]D_t + \left[\alpha(\alpha - 2\mu - 1) + \frac{\alpha(\alpha - \mu)}{t}\right]$$

y que

$$\left[\alpha(\alpha-2\mu-1)+\frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]\phi_n(t)$$

también converge uniformemente en cualquier compacto $\mathbb{K}$ de $\mathbf{I}$, resulta:

$$A_t\phi_n(t)-\left[\alpha(\alpha-2\mu-1)+\frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]\phi_n(t)=$$

$$=t(t+1)D_t^2\phi_n(t)+[\mu-2\alpha+1+2t(\mu-\alpha+1)]D_t\phi_n(t). \tag{2.2.5}$$

Si integramos entre ξ y t en el segundo miembro de (2.2.5) se mantiene la convergencia uniforme en $\mathbb{K}$ y se tendrá que

$$t(t+1)D_t\phi_n(t)-\xi(\xi+1)D_\xi\phi_n(\xi)+$$

$$+[\mu-2\alpha+2t(\mu-\alpha)]\phi_n(t)-$$

$$-[\mu-2\alpha+2\xi(\mu-\alpha)]\phi_n(\xi)-2(\mu-\alpha)\int_\xi^t\phi_n(x)dx$$

converge uniformemente en $\mathbb{K}$ (ξ es un punto fijo de $\mathbb{K}$). Además, como

$$\xi(\xi+1)D_\xi\phi_n(\xi)$$

y

$$[\mu-2\alpha+2\xi(\mu-\alpha)]\phi_n(\xi)$$

convergen y

$$\phi_n(t),\quad [\mu-2\alpha+2t(\mu-\alpha)]\phi_n(t),\quad \int_\xi^t\phi_n(x)dx$$

convergen uniformemente en $\mathbb{K}$, se infiere que

$$t(t+1)D_t\phi_n(t)$$

converge uniformemente en $\mathbb{K}$. Lo mismo le ocurrirá a $D_t\phi_n(t)$.

Por otra parte, $A_t\phi_n(t)$, $\phi_n(t)$ y $D_t\phi_n(t)$ convergen uniformemente en $\mathbb{K}$ y por la relación que los liga, $D_t^2\phi_n(t)$ converge uniformemente en $\mathbb{K}$. Continuando el proceso de inducción se supone probado el resultado para $2k-2$.

Como

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n) = \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi_n(t)\right| < \infty$$

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n - \phi_{n'}) =$$

$$= \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k (\phi_n(t) - \phi_{n'}(t))\right| \to 0$$

para $n, n' \to \infty$, se induce que $A_t^k\phi_n(t)$ converge uniformemente en $\mathbb{K}$.

Igualmente

$$\sum_{j=0}^{2k-2} t^{j-k} p_{j,k}(t) D_t^j \phi_n(t)$$

converge uniformemente en $\mathbb{K}$, estando los $p_{j,k}(t)$ determinados en el Lema 2.2.3. Con esto, la diferencia

$$A_t^k\phi_n(t) - \sum_{j=0}^{2k-2} t^{j-k} p_{j,k}(t) D_t^j \phi_n(t) =$$

$$= p_{2k,k}(t) D_t^{2k}\phi_n(t) + p_{2k-1,k}(t) D_t^{2k-1}\phi_n(t)$$

converge uniformemente en $\mathbb{K}$.

Integrando ahora entre ξ y t, se mantiene la convergencia uniforme y por el mismo proceso que para $k=1$, se concluye que

$$D_t^{2k}\phi_n(t)$$

y

$$D_t^{2k-1}\phi_n(t)$$

convergen uniformemente en $\mathbb{K}$.

Entonces, para cualquier $k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$D_t^k \phi_n(t)$$

converge uniformemente en cualquier compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$; por consiguiente, sigue de un resultado conocido ([1], pág. 402) que existe una función regular ϕ tal que

$$D_t^k \phi_n(t) \to D_t^k \phi(t)$$

uniformemente para todo $t \in \mathbf{I}$ y $k = 0, 1, 2, \cdots$. Además, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' > n_0$,

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n - \phi_{n'}) < \varepsilon$$

y tomando límite para $n' \to \infty$:

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n - \phi) \leq \varepsilon \qquad n > n_0. \tag{2.2.6}$$

Así, para $n \to \infty$,

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n - \phi) \to 0,$$

para cada k.

Finalmente, en virtud de la convergencia uniforme y el hecho de que para todo k, existe un C_k (independiente de n) tal que

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n) < C_k,$$

se tiene

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) = \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi - \phi_n + \phi_n) \leq$$

$$\leq \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_n) + \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi - \phi_n) \leq C_k + \varepsilon$$

lo que demuestra que $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$.

El espacio $U_{a,\mu,\alpha}$ es un espacio vectorial topológico, localmente convexo, Hausdorff y secuencialmente completo. Además:

Proposición 2.2.2 *$U_{a,\mu,\alpha}$ es un espacio de funciones prueba.*

DEMOSTRACIÓN:

En efecto, cumple ([89]):

i) Es un espacio de funciones regulares.

ii) Es un espacio numerablemente multinormado y completo.

iii) Si $\phi_n \to 0$ en $U_{a,\mu,\alpha}$, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}_0$: $D_t^k \phi_n \to 0$ uniformemente en cualquier compacto $\mathbb{K}$ de $\mathbf{I}$.

$U'_{a,\mu,\alpha}$ denotará el dual de $U_{a,\mu,\alpha}$. Así f es un elemento de $U'_{a,\mu,\alpha}$ si, y sólo si es un funcional lineal y continuo en $U_{a,\mu,\alpha}$. Por la Proposición anterior, $U'_{a,\mu,\alpha}$ es un espacio de funciones generalizadas que dotado de las definiciones usuales de igualdad, adición y producto por un escalar complejo es un espacio vectorial. Si asignamos a $U'_{a,\mu,\alpha}$ la topología débil, sigue del Teorema 1.8-3 [89] que $U'_{a,\mu,\alpha}$ es también completo.

Es inmediato comprobar que si $0 \leq a < b < \frac{1}{2}$, entonces $U_{b,\mu,\alpha} \subset U_{a,\mu,\alpha}$ y que la topología de $U_{b,\mu,\alpha}$ es más fuerte que la inducida en él por $U_{a,\mu,\alpha}$.

Seguidamente se pone de manifiesto una caracterización de los elementos de $U_{a,\mu,\alpha}$. Para ello es preciso anteponer la prueba de los siguiente lemas:

Lema 2.2.2 *Para una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{I})$, se tiene:*

$$A_t^k \phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty, \quad 0 \leq k \leq l \tag{2.2.7}$$

si, y sólo si

$$t^k D_t^k \phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty, \quad 0 \leq k \leq 2l \tag{2.2.8}$$

siendo l un entero no negativo.

Demostración:

Haciendo uso de la representación (2.2.3) dada para A_t^k en el Lema 2.2.1 y puesto que los polinomios $p_{j,k}(t)$ son de grado k, si se tiene (2.2.8) es obvio que se cumple (2.2.7).

Recíprocamente, si (2.2.7) es cierto, en particular,

$$\phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty \tag{2.2.9}$$

$$A_t\phi(t) = t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu} D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1} D_t t^{-\alpha}\phi(t) =$$
$$= O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty$$

con lo cual,

$$D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1} D_t t^{-\alpha}\phi(t) = O\left(t^{R_e\mu-a}\right), \quad t \to \infty.$$

Integrando esta relación y operando de forma adecuada:

$$D_t t^{-\alpha}\phi(t) = O\left(t^{-1-R_e\mu-a}\right), \quad t \to \infty \tag{2.2.10}$$

con lo que, de (2.2.9) y (2.2.10) sigue:

$$D_t\phi(t) = O\left(t^{-1-R_e(\mu-\alpha)-a}\right), \quad t \to \infty$$

de donde

$$tD_t\phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty$$

Ahora, de la expresión de $A_t\phi(t)$ por sustracción se obtiene

$$t^2 D_t^2 \phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty$$

Mediante un proceso de inducción y utilizando argumentos similares, se prueba (2.2.8) para $k > 2$.

Lema 2.2.3 *Para toda función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{I})$, se tiene:*

$$A_t^k \phi(t) = t^\alpha \sum_{j=0}^{2k} q_{j,k}(t) D_t^j \left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) \tag{2.2.11}$$

con

$$q_{2k,k}(t) = t^k (t+1)^k, \quad q_{2k-1,k}(t) = t^{k-1}(t+1)^{k-1}(2t+1)[2k\mu + k(k+1)]$$

siendo $q_{j,k}$ un polinomio de grado j en t independiente de ϕ.

Demostración:

Una vez más procederemos por inducción en k. Para $k = 0$ es trivial. Para $k > 0$ se tiene

$$A_t^k \phi(t) = t^\alpha \left(t^{-\mu}(t+1)^{-\mu} D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1} D_t\right)^k \left(t^{-\alpha}\phi(t)\right).$$

Si denotamos por B_t al operador diferencial

$$t^{-\mu}(t+1)^{-\mu} D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1} D_t$$

puede escribirse

$$A_t^k \phi(t) = t^\alpha B_t^k \left(t^{-\alpha}\phi(t)\right)$$

y por lo tanto, el Lema quedará probado si se cumple que

$$B_t^k \varphi(t) = \sum_{j=0}^{2k} q_{j,k}(t) D_t^j \varphi(t) \tag{2.2.12}$$

con

$$q_{2k,k}(t) = t^k(t+1)^k, \quad q_{2k-1,k}(t) = t^{k-1}(t+1)^{k-1}(2t+1)[2k\mu + k(k+1)]$$

Obsérvese que

$$B_t = t(t+1)D_t^2 + 2(\mu+1)(2t+1)D_t.$$

Si se supone (2.2.12) válido para un cierto k, resulta:

$$B_t^{k+1} = B_t\left(\sum_{j=0}^{2k} q_{j,k}(t)D_t^j\varphi(t)\right) =$$

$$t(t+1)D_t^2\left(\sum_{j=0}^{2k} q_{j,k}(t)D_t^j\varphi(t)\right) + 2(\mu+1)(2t+1)\left(\sum_{j=0}^{2k} q_{j,k}(t)D_t^j\varphi(t)\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k+2} s_{j,k}(t)D_t^j\varphi(t)$$

donde $s_{j,k}(t)$ es un polinomio de grado j en t, y el resto de la demostración es inmediato siguiendo el desarrollo de los factores que multiplican a $D_t^{2k+1}\varphi(t)$ y a $D_t^{2k+2}\varphi(t)$, respectivamente.

Lema 2.2.4 *Para una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{I})$, se tiene:*

$$A_t^k\phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}\right), \quad t \to 0^+, \quad 0 \le k \le l \tag{2.2.13}$$

si, y sólo si

$$D_t^k\left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O\left(t^{-\frac{R_e\mu}{2}}\right), \quad t \to 0^+, \quad 0 \le k \le 2l \tag{2.2.14}$$

siendo $l \in \mathbb{N}_0$

Demostración:

Que (2.2.14) implica (2.2.13) es inmediato a la vista del Lema 2.2.3.

Para probar que (2.2.13) implica (2.2.14), procederemos a aplicar una vez más el método de inducción en l. Para $l = 0$ es obvio. Supongamos el aserto válido para un cierto $l > 0$. Aplicando (2.2.14) a $A_t\phi(t)$, se infiere

$$D_t^l\left(t^{-\alpha}A_t\phi(t)\right) = O\left(t^{-\frac{Re\mu}{2}}\right), \quad t \to 0^+.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$D_t^l\left(t^{-\alpha}A_t\phi(t)\right) = D_t^l\left(t^{-\mu}(t+1)^{-\mu}D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1}D_t t^{-\alpha}\phi(t)\right) =$$

$$= D_t^l\left(t(t+1)D_t^2 t^{-\alpha}\phi(t) + 2(\mu+1)(2t+1)D_t t^{-\alpha}\phi(t)\right) =$$

$$t(t+1)D_t^{l+2}t^{-\alpha}\phi(t) + (2t+1)(2\mu+l+2)D_t^{l+1}t^{-\alpha}\phi(t) +$$

$$+l(l+2\mu+1)D_t^l t^{-\alpha}\phi(t) =$$

$$= t^{-\mu-l-1}(t+1)^{-\mu-l-1}D_t t^{\mu+l+2}(t+1)^{\mu+l+2}D_t^{l+1}t^{-\alpha}\phi(t) +$$

$$+l(l+2\mu+1)D_t^l t^{-\alpha}\phi(t)$$

de lo que sigue

$$t^{-\mu-l-1}(t+1)^{-\mu-l-1}D_t t^{\mu+l+2}(t+1)^{\mu+l+2}D_t^{l+1}t^{-\alpha}\phi(t) =$$

$$= D_t^l\left(t^{-\alpha}A_t\phi(t)\right) - l(l+2\mu+1)D_t^l t^{-\alpha}\phi(t),$$

y como la primera expresión diferencial de la última línea es de $O\left(t^{-\frac{Re\mu}{2}}\right)$, y la segunda, por hipótesis, tiene el mismo comportamiento para $t \to 0^+$, se deduce que existe el

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\mu+l+2}(t+1)^{\mu+l+2}D_t^{l+1}t^{-\alpha}\phi(t).$$

Aún más:

$$t^{\mu+l+2}(t+1)^{\mu+l+2}D_t^{l+1}t^{-\alpha}\phi(t) = \tilde{\phi} + O\left(t^{l+\frac{R_e\mu}{2}+2}\right), \quad t \to 0^+$$

siendo además $\tilde{\phi} = 0$ ya que de lo contrario, incurriríamos en contradicción con la hipótesis hecha para las derivadas de orden inferior.

En definitiva:

$$D_t^{l+1}\left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O\left(t^{-\frac{R_e\mu}{2}}\right), \quad t \to 0^+,$$

lo que termina la prueba del Lema.

Proposición 2.2.3 *Una función* $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{I})$ *es un elemento de* $U_{a,\mu,\alpha}$ *si, y sólo si, para todo* $k \in \mathbb{N}_0$

(a) $D_t^k\left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O(1), \quad t \to 0^+$

(b) $t^k D_t^k \phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty$

Demostración:

Si $\phi(t) \in U_{a,\mu,\alpha}$, se tiene que

$$|A_t^k\phi(t)| \leq \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi)(2t+1)^{-a}t^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(t+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}, \quad t \in \mathbf{I}.$$

Entonces, por los lemas anteriores,

$$D_t^k\left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O\left(t^{-R_e\frac{\mu}{2}}\right), \quad t \to 0^+$$

$$t^k D_t^k\phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty$$

Ahora bien, si m representa la parte entera de $R_e\frac{\mu}{2}+1$, puede escribirse

$$D_t^{k+m}\left(t^{-\alpha}\phi(t)\right), \quad t \to 0^+$$

y tras m integraciones se deduce:

$$D_t^k\left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O(1), \quad t \to 0^+$$

(nótese que a la misma conclusión se llega si se aplica la integración fraccionaria).

El recíproco es inmediato a la vista de los lemas anteriores.

En particular, de esta Proposición sigue:

Corolario 2.2.1 *El núcleo de la transformación,*

$$\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)$$

es un elemento de $U_{a,\mu,\alpha}$.

2.3. Propiedades de $U_{a,\mu,\alpha}$ y de $U'_{a,\mu,\alpha}$.

En este apartado se dan algunas propiedades de los espacios $U_{a,\mu,\alpha}$ y $U'_{a,\mu,\alpha}$ que serán requeridas posteriormente.

Proposición 2.3.1 $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ *es un subespacio de* $U_{a,\mu,\alpha}$.

Demostración:

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$. Existe una sucesión $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ de conjuntos compactos de $\mathbf{I}$ tal que

$$\mathcal{D}(\mathbf{I}) = \bigcup_{n\in N} \mathcal{D}_{K_n}(\mathbf{I}),$$

y en estas condiciones:

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) = \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t)\right| =$$

$$= \sup_{t\in K_n} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t)\right|$$

para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por (2.2.3) esta última expresión es igual a

$$\sup_{t\in K_n} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{2k} t^{j-k} p_{j,k}(t) D_t^j \phi(t)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in K_n} \sum_{j=0}^{2k} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha+j-k} p_{j,k}(t)\right| \left|D_t^j \phi(t)\right| \tag{2.3.1}$$

Pero en el compacto K_n se mantiene acotada la función

$$\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha+j-k} p_{j,k}(t)\right|$$

y por consiguiente, (2.3.1) resulta menor o igual que

$$\sum_{j=0}^{2k} C_{jk} \sup_{t\in K_n} |D_t^j \phi(t)|$$

y, al ser $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$,

$$\gamma_{K,j}(\phi) = \sup_{t\in K} |D_t^j \phi(t)|$$

se mantiene acotado para todo $K \subset \mathbf{I}$, y por tanto que $\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, de donde se desprende que $\mathcal{D}(\mathbf{I}) \subset U_{a,\mu,\alpha}$.

Además,

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) \leq \sum_{j=0}^{2k} C_{jk} \gamma_{K_n,j}(\phi).$$

Lo anterior implica que la topología de $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ es más fuerte que la que en él induce $U_{a,\mu,\alpha}$. Así, la convergencia en $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ implica la convergencia en $U_{a,\mu,\alpha}$.

Por otra parte se tiene que $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ no es denso en $U_{a,\mu,\alpha}$, pudiéndose encontrar dos elementos en $U'_{a,\mu,\alpha}$ cuya restricción a $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ sea la misma.

Proposición 2.3.2 *$U_{a,\mu,\alpha}$ es un subespacio denso de $\mathcal{E}(\mathbf{I})$.*

Demostración:

Claramente, desde un punto de vista conjuntista, $U_{a,\mu,\alpha} \subset \mathcal{E}(\mathbf{I})$. Por otra parte, si la sucesión $\{\phi_n\}_{n\in N} \subset U_{a,\mu,\alpha}$ converge en $U_{a,\mu,\alpha}$ será de Cauchy en $U_{a,\mu,\alpha}$ y en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ (la prueba sería la misma que la de la Proposición 2.2.1). Como $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ es completo, $\{\phi_n\}_{n\in N}$ converge en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$; y por la unicidad del límite, se tiene que $\{\phi_n\}_{n\in N}$ converge en la topología de $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ y al mismo límite que en $U_{a,\mu,\alpha}$. Ello ya es suficiente para afirmar que la topología de $U_{a,\mu,\alpha}$ es más fuerte que la inducida en él por $\mathcal{E}(\mathbf{I})$, puesto que estamos tratando con espacios metrizables.

Por último, como $\mathcal{D}(\mathbf{I}) \subset U_{a,\mu,\alpha} \subset \mathcal{E}(\mathbf{I})$ y $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ es denso en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$, se concluye el aserto.

Proposición 2.3.3 *Para todo $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ existen una constante $C > 0$ y un entero no negativo r dependientes de f, tales que si $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$ se tiene*

$$| < f, \phi > | \leq C \max_{0\leq k\leq r} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) \tag{2.3.2}$$

Demostración:

Es una consecuencia inmediata del Teorema 1.8-1 [89].

Proposición 2.3.4 *El operador diferencial A_t dado por (2.2.2) representa una aplicación lineal y continua de $U_{a,\mu,\alpha}$ en si mismo.*

Demostración:

En efecto, dado que A_t puede ser expresado en la forma dada en (2.2.4) y $\phi(t)$ es regular, sigue que $A_t\phi(t)$ es también regular. Además,

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(A_t\phi) = \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^{k+1}\phi(t)\right| =$$

$$= \gamma_{k+1,a,\mu,\alpha}(\phi) < \infty.$$

Obviamente, A_t es lineal y su continuidad se desprende de lo últimamente escrito y del Lema 1.10-1 de [89].

El operador A_t', adjunto de A_t, es el operador diferencial generalizado

$$A_t' : U_{a,\mu,\alpha}' \mapsto U_{a,\mu,\alpha}'$$

$$f \hookrightarrow A_t' f$$

que se define del siguiente modo:

$$< A_t' f, \phi > = < f, A_t \phi >$$

Con esto, además, A_t' es una aplicación lineal y continua de $U_{a,\mu,\alpha}'$ en si mismo.

2.4. Funciones generalizadas regulares en $U_{a,\mu,\alpha}'$.

Sea $f(t)$ una función localmente integrable en $\mathbf{I}$, tal que

$$(2t+1)^{-a} t^{\alpha - \frac{\mu}{2}} (t+1)^{-\frac{\mu}{2}} f(t) \quad (\alpha, \mu \in \mathbb{C})$$

sea absolutamente integrable en dicho intervalo. Esta función $f(t)$ engendra un elemento regular en $U_{a,\mu,\alpha}'$ que también se denotará por f y que se define mediante

$$< f, \phi > = \int_0^\infty f(t)\phi(t)dt, \qquad \phi \in U_{a,\mu,\alpha}. \tag{2.4.1}$$

Basta considerar que

$$| < f, \phi > | = \left| \int_0^\infty f(t)\phi(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi) \int_0^\infty \left|(2t+1)^{-a} t^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(t+1)^{-\frac{\mu}{2}} f(t)\right| dt$$

y por la convergencia absoluta de la última integral, existe una constante $C > 0$ tal que

$$| < f, \phi > | \leq C\, \gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi) \tag{2.4.2}$$

Así, el funcional definido por (2.4.1) es lineal y además continuo (por (2.4.2)); por tanto $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$.

El espacio de todas las funciones que satisfacen las precedentes condiciones será denotado por $U'_{a,\mu,\alpha,reg}$.

Proposición 2.4.1 *Si $R_e(2\alpha - \frac{\mu}{2}) > -1$ y $a + R_e(\mu - \alpha) > -\frac{1}{2}$, el espacio $U_{a,\mu,\alpha}$ puede ser identificado con un subespacio de $U'_{a,\mu,\alpha}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Por la Proposición 2.2.3, para todo elemento $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$ se tiene

$D_t^k \left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O(1), \quad t \to 0^+$

$t^k D_t^k \phi(t) = O\left(t^{R_e(\alpha-\mu)-a}\right), \quad t \to \infty.$

Por consiguiente, si se cumplen las hipótesis, ϕ se encuentra en las condiciones de la Proposición anterior y genera un elemento regular en $U'_{a,\mu,\alpha}$. Así, $U_{a,\mu,\alpha}$ se identifica con una parte de $U'_{a,\mu,\alpha}$.

Proposición 2.4.2 *Dos elementos diferentes de $U_{a,\mu,\alpha}$ no pueden dar origen a un mismo elemento de $U'_{a,\mu,\alpha}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Procederemos por reducción al absurdo, suponiendo que dos elementos φ y ψ generan el mismo elemento de $U'_{a,\mu,\alpha}$. Por ser $\varphi \neq \psi$ existe un $t_0 \in \mathbf{I}$ tal que $(\varphi - \phi)(t_0) \neq 0$. Asumimos que esta expresión sea mayor que cero (en caso contrario se procedería de forma similar).

Dado que $\varphi - \psi$ es una función continua existirá un entorno J de t_0, en el cual $\varphi - \psi > 0$. Sea ahora $\varrho(t) \in \mathcal{D}(\mathbf{I}) \subset U_{a,\mu,\alpha}$ de modo que $\varrho(t) \geq 0$ para $t \in \mathbf{I}$ y *sop* $\varrho \subset J$

$$< \varphi - \psi, \varrho >= \int_0^\infty (\varphi - \psi)(t)\varrho(t)dt > 0$$

con lo que $< \varphi, \varrho > \neq < \psi, \varrho >$, en contra de lo supuesto; luego efectivamente $U_{a,\mu,\alpha} \subset U'_{a,\mu,\alpha}$.

2.5. La transformación generalizada. Método del núcleo.

Nos proponemos dar en este punto la definición de la transformación integral generalizada mediante el denominado *método del núcleo*. Para ello construiremos un espacio $U_{a,\mu,\alpha}$ que contenga a $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)$, definiendo la transformación generalizada de una función $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ de la siguiente forma

Definición 2.5.1 *La ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación índice generalizada de $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ se define por*

$${}_2\mathcal{F}_1(f) = F(\tau) = \langle f(t), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) \rangle . \qquad (2.5.1)$$

La definición anterior tiene perfecto sentido, pues representa la aplicación de $f(t) \in U'_{a,\mu,\alpha}$ a $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) \in U_{a,\mu,\alpha}$.

De ahora en adelante, nos referiremos a la aplicación

$$\begin{array}{llll} {}_2\mathcal{F}_1 : & U'_{a,\mu,\alpha} & \mapsto & \mathbb{C} \\ & f & \hookrightarrow & F(\tau) = \langle f(t), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) \rangle \end{array}$$

como *la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación generalizada índice de f.*

Debe observarse que, bajo ciertas condiciones, la ${}_2\mathcal{F}_1$ -transformación índice generalizada contiene a la clásica. En particular, si $f(t)$ es una función localmente integrable en $\mathbf{I} = (0, \infty)$ y

$$(2t+1)^{-a} t^{\alpha - \frac{\mu}{2}} (t+1)^{-\frac{\mu}{2}} f(t)$$

absolutamente integrable en $\mathbf{I}$, resulta, por (2.4.1), que f engendra una función generalizada regular en $U'_{a,\mu,\alpha}$ cuya ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación índice generalizada, mediante (2.5.1), adquiere la forma

$${}_2\mathcal{F}_1(f) = F(\tau) = \langle f(t), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) \rangle =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)\, dt$$

la cual coincide con (1.2.2).

Seguidamente se recogen algunas propiedades de la ${}_2\mathcal{F}_1$- transformación índice generalizada.

Proposición 2.5.1 *La ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación índice generalizada es una función par.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta recordar la bien conocida propiedad de la función hipergeométrica de Gauss:

$${}_2F_1(a, b; c; -t) = {}_2F_1(b, a; c; -t)$$

en virtud de la cual, y según (2.5.1), $F(\tau) = F(-\tau)$

Proposición 2.5.2 *Si A'_t denota el operador adjunto de A_t, puede afirmarse que para todo $k \in \mathbb{N}_0$, se tiene:*

$${}_2\mathcal{F}_1(A_t'^k f) = (-1)^k \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^k {}_2\mathcal{F}_1(f). \tag{2.5.2}$$

Demostración:

Dado que

$$A_t^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) = (-1)^k \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)$$

se infiere

$${}_2\mathcal{F}_1({A'_t}^k f) = \left\langle {A'_t}^k f(t), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right\rangle = \left\langle f(t), A_t^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right\rangle =$$

$$= \left\langle f(t), (-1)^k \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right\rangle =$$

$$= (-1)^k \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^k {}_2\mathcal{F}_1(f).$$

2.6. Analiticidad de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación generalizada.

Establecemos ahora la analiticidad de la ${}_2\mathcal{F}_1$ -transformación índice generalizada y para ello anticiparemos algunos lemas.

En primer lugar, si se tiene en cuenta que el núcleo de la transformada admite la siguiente representación integral (ver [13] pág. 155), válida para $R_e\mu > -\frac{1}{2}$:

$$\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)t^\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}cos\ \xi\right)^{-\mu-\frac{1}{2}-i\tau} (sen\ \xi)^{2\mu}\, d\xi \quad (2.6.1)$$

se deduce al derivar m veces respecto de τ:

$$D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)t^{\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}cos\ \xi\right)^{-\mu-\frac{1}{2}-i\tau}.$$

$$(-i)^m\left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right)cos\ \xi\right]^m(sen\ \xi)^{2\mu}\,d\xi$$

con lo que:

$$|D_\tau^m\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\Gamma(\mu+1)t^{\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right|\left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right)\right]^m.$$

$$\int_0^{\pi}\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}cos\ \xi\right)^{-R_e\mu-\frac{1}{2}}(sen\ \xi)^{2R_e\mu}\,d\xi =$$

$$= Mt^{R_e\alpha}\left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right)\right]^m[t(t+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}}\,P_{-\frac{1}{2}}^{-R_e\mu}(2t+1)$$

donde $P_{-\frac{1}{2}}^{-R_e\mu}$ representa la función asociada de Legendre [13].

Lo anterior permite enunciar el siguiente

Lema 2.6.1 *Si $m\in\mathbb{N}_0$ y $\mu\in\mathbb{C}$ con $R_e\mu > -\frac{1}{2}$, se tiene:*

$$|D_\tau^m\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)| \leq$$

$$\leq Mt^{R_e\alpha}\left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right)\right]^m[t(t+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}}\,P_{-\frac{1}{2}}^{-R_e\mu}(2t+1) \quad (2.6.2)$$

para un M adecuado.

Como consecuencia cabe probar además este otro:

Lema 2.6.2 *Si μ es un parámetro complejo con $R_e\mu > -\frac{1}{2}$, k y m enteros no negativos y $a \in [0, \frac{1}{2})$, existe una constante C (dependiente de $a, k, m, y\mu$), tal que*

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)) \leq C\left|\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right|^k. \qquad (2.6.3)$$

Demostración:

Para $k=0$

$$\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)) =$$

$$= \sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right| \leq$$

$$\leq M_1 \sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a\left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right)\right]^m P_{-\frac{1}{2}}^{-R_e\mu}(2t+1)\right| \quad (2.6.4)$$

Teniendo en cuenta que (véase [59] pág. 173, (12.20))

$$P_{-\frac{1}{2}}^{-R_e\mu}(2t+1) \sim \frac{1}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\left(\frac{2}{\pi(2t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\log(2t+1), \qquad t\to\infty$$

se constata que (2.6.4) está acotado por

$$M_2 \sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a\left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right)\right]^m (2t+1)^{-\frac{1}{2}}\log(2t+1)\right| <$$

$$< M_3$$

puesto que $a < \frac{1}{2}$ y $M_i > 0$, $i = 1,2,3$.

Por otra parte,

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)) =$$

$$= \sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right| =$$

$$= \sup_{0<t<\infty}\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} D_\tau^m A_t^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right| =$$

$$= \sup_{0<t<\infty} \left| (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} D_\tau^m \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2 \right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) \right| =$$

$$= \sup_{0<t<\infty} \left| (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} D_\tau^j \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2 \right]^k D_\tau^{m-j}\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) \right| \leq$$

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} N_j \left| D_\tau^j \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2 \right]^k \right|.$$

$$\sup_{0<t<\infty} \left| (2t+1)^a \left[\log\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\right) \right]^{m-j} P_{-\frac{1}{2}}^{-R_e\mu}(2t+1) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} H_j \left| D_\tau^j \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2 \right]^k \right| \leq C \left| \left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2 \right|^k$$

con $H_j > 0$ $(0 \leq j \leq m)$, dado que $0 \leq a < \frac{1}{2}$.

Con esto, además, queda probado que $D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)$ pertenece a $U_{a,\mu,\alpha}$ para todo entero no negativo m.

Teorema 2.6.1 (Analiticidad) *Si $F(\tau) = \langle f(t), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) \rangle$ con $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ y $R_e\mu > -\frac{1}{2}$, se tiene que $F(\tau)$ es una función regular y además:*

$$D_\tau^m F(\tau) = \langle f(t), D_\tau^m \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) \rangle \tag{2.6.5}$$

Demostración:

Basta efectuar una demostración para el caso $m = 1$, puesto que por un proceso inductivo, y utilizando la misma técnica, se prueba para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

A tenor del Lema 2.6.2, la expresión (2.6.5) tiene sentido. Sea τ fijo, $\Delta\tau \neq 0$, y consideremos

$$\frac{F(\tau+\Delta\tau) - F(\tau)}{\Delta\tau} - \langle f(t), D_\tau \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) \rangle = \langle f(t), \Upsilon_{\Delta\tau}(t) \rangle \tag{2.6.6}$$

donde

$$\Upsilon_{\Delta\tau}(t) = \frac{1}{\Delta\tau}[\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau+\Delta\tau,t) - \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)] - D_\tau \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t).$$

Se tiene:

$$A_t^k \Upsilon_{\Delta\tau}(t) = \frac{(-1)^k}{\Delta\tau}\left[\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + (\tau+\Delta\tau)^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau+\Delta\tau,t) - \right.$$

$$\left. -\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\Delta\tau}\int_\tau^{\tau+\Delta\tau} dx \int_\tau^x D_\eta^2 \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\eta,t)d\eta.$$

Si se denota por Λ el intervalo $\tau - |\Delta\tau| < \eta < \tau + |\Delta\tau|$, se infiere

$$\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \Upsilon_{\Delta\tau}(t)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\Delta\tau|}{2}\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}\right| \sup_{\eta\in\Lambda}\left|D_\eta^2\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\eta,t)\right|;$$

mas, dado el comportamiento asintótico para $t \to 0$ y para $t \to \infty$ de la función hipergeométrica de Gauss, sigue que

$$\left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}\right| \sup_{\eta\in\Lambda}\left|D_\eta^2\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\eta,t)\right|$$

está acotado en $0 < t < \infty$. Por consiguiente

$$A_t^k \Upsilon_{\Delta\tau}(t) \leq B|\Delta\tau|, \qquad B > 0$$

de donde se deduce que $\Upsilon_{\Delta\tau}(t)$ converge en $U_{a,\mu,\alpha}$ a cero cuando $\Delta\tau \to 0$, y comoquiera que $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, (2.6.6) tenderá a cero para $\Delta\tau \to 0$, lo que acaba la prueba.

El siguiente teorema pone de manifiesto el comportamiento de la ${}_2\mathcal{F}_1$ -transformación índice generalizada $F(\tau)$ para $\tau \to 0$ y $\tau \to \infty$.

Teorema 2.6.2 *Sea $\tau > 0$ y $F(\tau)$ la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación índice generalizada de una cierta función $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$. Entonces*

$$\left.\begin{array}{l} i)\ Para\quad \tau \to 0, \quad se\ \ tiene\quad F^{(m)}(\tau) = O(1), \quad para\ \ todo\ \ m \in \mathbb{N}_0 \\ ii)\ Existe\ \ un\ \ p \in \mathbb{N}_0\ \ tal\ \ que\ \ F(\tau) = O\left(\tau^{2p - R_e\mu - \frac{1}{2}}\right), \quad \tau \to \infty \end{array}\right\} \tag{2.6.7}$$

Demostración:

Por la Proposición 2.3.3

$$|F(\tau)| = | < f(t), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) > | \leq C \max_{0 \leq k \leq r} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)) =$$

$$= C \max_{0 \leq k \leq r} \sup_{0 < t < \infty} \left| (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2} - \alpha} (t+1)^{\frac{\mu}{2}} \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^k \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) \right| =$$

$$= C \sup_{0 < t < \infty} \left| (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2} - \alpha} (t+1)^{\frac{\mu}{2}} \left[\left(\mu + \frac{1}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^p \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) \right| \tag{2.6.8}$$

para un cierto $p \in \mathbb{N}_0$. Ahora bien, para $\tau \to 0$, (2.6.8) es una $O(1)$ dado el comportamiento asintótico de la función hipergeométrica.

Para $\tau \to \infty$ y por la Proposición 1.5.1

$$|\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)| \leq M t^{-\frac{1}{2} - R_e(\alpha - \frac{\mu}{2})} (t+1)^{-\frac{1}{2} - R_e \frac{\mu}{2}} \tau^{-\frac{1}{2} - R_e \mu}$$

lo que conduce a que

$$| < f(t), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) > | = O\left(\tau^{2p - R_e\mu - \frac{1}{2}}\right), \quad \tau \to \infty.$$

2.7. Fórmula de inversión generalizada.

La fórmula de inversión generalizada que se expone en esta sección constituye el resultado fundamental de esta primera parte del capítulo y para su demostración se requiere la prueba de algunos lemas previos.

Lema 2.7.1 *Sea* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}$ *el espacio dado en la definición 1.4.1. Se tiene:* $\mathcal{D}(\mathbf{I}) \subset \mathfrak{M}_{0,n}^{-1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Sea $\phi(t) \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$ con soporte contenido en el intervalo cerrado $[c, d]$ donde $0 < c < d < \infty$ y consideremos

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \phi(t)\ t^{s-1} dt = \int_c^d \phi(t)\ t^{s-1} dt.$$

Para todo número natural n, se tiene

$$(-1)^n s^n \Phi(s) = \int_c^d \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \phi(t)\ t^{s-1}\ dt$$

y por ser $\phi(t)$ un elemento de $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ sigue que existe un $M > 0$ tal que

$$|s^n \Phi(s)| < M$$

esto es,

$$|\Phi(s)| < M\ s^{-n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que, trivialmente, $\Phi(s) = s^{-n}\Phi(s)s^n$ y que, además, $\Phi(s)s^n \in L(\sigma)$ (por cuanto tomando $m > n$ es $|\Phi(s)| < N\ s^{-m}$), se infiere, al ser

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Phi(s)\ t^{-s} ds$$

que $\phi(t) \in \mathfrak{M}_{0,n}^{-1}$.

Lema 2.7.2 *Si* $F(\tau) = {}_2\mathcal{F}_1(f)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$ *y ponemos*

$$\varphi(\tau) = S(\mu,\tau)\int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \tag{2.7.1}$$

se tiene

$$\int_0^T \varphi(\tau) < f(x), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x) > d\tau = \left\langle f(x), \int_0^T \varphi(\tau)\, \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\, d\tau \right\rangle \tag{2.7.2}$$

para cualquier número real fijo $T > 0$.

Demostración:

Si

$$\int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt = 0,$$

(2.7.2) es evidente. Supongamos pues, que

$$\int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \neq 0.$$

En primer lugar, vamos a probar que

$$\Theta_T(x) = \int_0^T \varphi(\tau)\, \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\, d\tau \tag{2.7.3}$$

es un elemento de $U_{a,\mu,\alpha}$, para lo cual consideraremos

$$A_x^k \Theta_T(x) = \int_0^T \varphi(\tau)\, (-1)^k \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\, d\tau$$

Ahora bien,

$$\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_x^k \Theta_T(x)\right| \leq$$

$$\leq (2x+1)^a x^{R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)}(x+1)^{R_e\frac{\mu}{2}}.$$

$$\int_0^T \left|\varphi(\tau)\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right| d\tau <$$

$$< C \int_0^T \left| \varphi(\tau) \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2 \right]^k \right| d\tau \tag{2.7.4}$$

y puesto que

$$|\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)| < B_1 x^{R_e \alpha}, \quad x \to 0^+$$

$$|\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)| < B_2 x^{R_e(\alpha - \mu) - \frac{1}{2}}, \quad x \to \infty$$

sigue, que existe una constante $B > 0$, tal que

$$|\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)| < B\, x^{R_e \alpha} (1 + x)^{-R_e \mu - \frac{1}{2}}, \qquad x \in \mathbf{I}.$$

Así podemos concluir de (2.7.4) que $\Theta_T(x) \in U_{a,\mu,\alpha}$, con lo cual (2.7.2) tiene sentido.

Por otra parte, sea

$$Q(x, n) = \frac{T}{n} \sum_{p=1}^{n} \varphi\left(\frac{pT}{n}\right) \mathbf{F}\left(\mu, \alpha, \frac{pT}{n}, x\right).$$

Podrá escribirse

$$< f(x), Q(x, n) >= \frac{T}{n} \sum_{p=1}^{n} \varphi\left(\frac{pT}{n}\right) \left\langle f(x), \mathbf{F}\left(\mu, \alpha, \frac{pT}{n}, x\right) \right\rangle \tag{2.7.5}$$

y por la continuidad de las funciones que intervienen, para $n \to \infty$, (2.7.5) tiende a

$$\int_0^T \varphi(\tau) \ < f(x), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) > d\tau$$

Nótese que $Q(x, n)$ también es un miembro de $U_{a,\mu,\alpha}$.

Escribamos ahora:

$$(2x + 1)^a x^{\frac{\mu}{2} - \alpha} (x + 1)^{\frac{\mu}{2}} A_x^k [\Theta_T(x) - Q(x, n)] =$$

$$= (2x + 1)^a x^{\frac{\mu}{2} - \alpha} (x + 1)^{\frac{\mu}{2}} \int_0^T \varphi(\tau)\ A_x^k \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)\, d\tau -$$

$$-(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{T}{n}\sum_{p=1}^{n}\varphi\left(\frac{pT}{n}\right) A_x^k\, \mathbf{F}\left(\mu,\alpha,\frac{pT}{n},x\right).$$

Por el comportamiento asintótico de la función hipergeométrica de Gauss,

$$\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}}\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right| \qquad (2.7.6)$$

tiende a cero uniformemente en $0 \leq \tau \leq T$ para $x \to \infty$, y por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que, si $x > N$, (2.7.6) está acotado por

$$\frac{\varepsilon}{3}\left[\int_0^T |\varphi(\tau)|d\tau\right]^{-1}$$

expresión que representa una cantidad finita puesto que

$$\int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \neq 0.$$

Por tanto

$$\sup_{x>N}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \Theta_T(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

También, para todo n

$$\sup_{x>N}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k Q(x,n)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}\left[\int_0^T |\varphi(\tau)|d\tau\right]^{-1}\frac{T}{n}\sum_{p=1}^{n}\left|\varphi\left(\frac{pT}{n}\right)\right|.$$

Así, existe un n_0 tal que para $n > n_0$ el segundo miembro de la última desigualdad está acotada por $\frac{2\varepsilon}{3}$, con lo cual si $n > n_0$ y $x > N$

$$\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_x^k[\Theta_T(x) - Q(x,n)]\right| < \varepsilon.$$

Además, en el dominio $E = \{(x,\tau) : \quad 0 \leq x \leq N, \quad 0 \leq \tau \leq T\}$, $\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)$ $(R_e\alpha > 0)$ constituye una función uniformemente continua en (x,τ), y por consiguiente, existirá un $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que si $n > n_1$,

$$\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_x^k[\Theta_T(x) - Q(x,n)]\right| < \varepsilon$$

para $0 \leq x \leq N$. Tomando ahora $n > máx\{n_0, n_1\}$, se deduce por último, que

$$\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_x^k[\Theta_T(x) - Q(x,n)]\right| < \varepsilon$$

en $0 < x < \infty$, con lo que

$$Q(x,n) \to \Theta_T(x),$$

lo cual completa la prueba.

Lema 2.7.3 *Para cada subconjunto compacto $\mathbb{K}$ contenido en $\mathbf{I}$ y $k \in \mathbb{N}_0$, sea $\gamma_{k,K}$ la seminorma dada por*

$$\gamma_{k,K}(\phi) = \sup_{t\in K} \left|A_t^k \phi(t)\right|, \qquad \phi \in \mathcal{E}(\mathbf{I})$$

donde A_t es el operador definido mediante (2.2.2). En estas condiciones, $\{\gamma_{k,K}\}$ genera una topología en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ que coincide con su topología usual.

DEMOSTRACIÓN:

Por la expresión de A_t^k dada en el Lema 2.2.1 se tiene, que si una sucesión $\{\phi_n(t)\}_{n\in N} \subset \mathcal{E}(\mathbf{I})$ converge a cero en la topología usual de $\mathcal{E}(\mathbf{I})$, también converge a cero en la topología generada por $\gamma_{k,K}$.

Recíprocamente, sea $\{\phi_n(t)\}_{n\in N}$ una sucesión en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ que converge a cero en la topología generada por $\gamma_{k,K}$. Es obvio que $\phi_n(t)$ y $A_t\phi_n(t)$ convergen a cero uniformemente en cada compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$. Además,

$$A_t\phi_n(t) = t(t+1)D_t^2\phi_n(t) + [\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]D_t\phi_n(t) + \\ + \left[\alpha(\alpha - 2\mu - 1) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]\phi_n(t) \qquad (2.7.7)$$

Así,

$$A_t\phi_n(t) - \left[\alpha(\alpha - 2\mu - 1) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]\phi_n(t) =$$

$$= t(t+1)D_t^2\phi_n(t) + [\mu - 2\alpha + 1 + 2t(\mu - \alpha + 1)]D_t\phi_n(t) \qquad (2.7.8)$$

converge a cero uniformemente en $\mathbb{K}$ y teniendo en cuenta que (2.7.8) puede escribirse como:

$$t^{2\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}D_t\left[t^{\mu-2\alpha+1}(t+1)^{\mu+1}D_t\phi_n(t)\right] \qquad (2.7.9)$$

se deduce que

$$D_t\left[t^{\mu-2\alpha+1}(t+1)^{\mu+1}D_t\phi_n(t)\right]$$

también converge uniformemente a cero en cualquier compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$. Por medio de una integración se infiere que lo mismo le ocurre a

$$t^{\mu-2\alpha+1}(t+1)^{\mu+1}D_t\phi_n(t)$$

y por consiguiente, $D_t\phi_n(t) \to 0$ uniformemente en $\mathbb{K}$. Ahora de (2.7.7) se desprende que a $D_t^2\phi_n(t)$ le sucede lo mismo.

Con un argumento similar puede probarse que, para todo entero no negativo k, $D_t^k\phi_n(t)$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{K}$.

Finalmente, basta tener en cuenta que $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ es metrizable para que siga la conclusión.

Lema 2.7.4 *Sea $\Theta_T(x)$ la dada por (2.7.3) y ϕ un miembro de $\mathcal{D}(\mathbf{I})$. Si α y μ son parámetros complejos tales que $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu-\alpha) < \frac{1}{4}$ y $R_e(\mu - 2\alpha) < -1$, entonces $\Theta_T(x)$ converge en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ a $\phi(x)$ para $T \to \infty$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si el soporte de ϕ está contenido en el intervalo cerrado $[c, d]$ con $0 < c < d < \infty$, se tiene

$$\Theta_T(x) = \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)d\tau \int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \qquad (2.7.10)$$

Denotemos $\phi^{(k)}(x) = A_x^k\phi(x)$. Por la regularidad de las funciones que intervienen y siendo finitos los límites de integración se podrá derivar la expresión anterior bajo el signo integral, con lo que al hacer uso de (2.2.7), la (2.7.10) se puede escribir como:

$$A_x^k \Theta_T(x) =$$

$$\int_0^T S(\mu,\tau)(-1)^k \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\; d\tau \int_c^d \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt =$$

$$= \int_0^T S(\mu,\tau)\; \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\; d\tau.$$

$$\int_c^d \phi(t)(-1)^k \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^k \mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt.$$

Ahora, si A_t' designa el operador adjunto de A_t y tenemos en cuenta que se verifica

$$A_t'\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t) = -\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t) \tag{2.7.11}$$

una integración por partes conduce a

$$A_x^k\Theta_T(x) = \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)d\tau \int_c^d \phi^{(k)}(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)\; dt \tag{2.7.12}$$

y por propiedades de la función hipergeométrica de Gauss, (2.7.12) podrá escribirse

$$A_x^k\Theta_T(x) = \int_0^T S(\mu,\tau)x^\alpha(x+1)^{-\mu}\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)d\tau.$$

$$\int_c^d \phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^\mu \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t)\; dt. \tag{2.7.13}$$

Mas, si se tiene en cuenta que $\mathcal{D}(\mathbf{I}) \subset \mathfrak{M}_{0,n}^{-1}(L)$, al aplicar la Proposición 1.4.1, la (2.7.13) cabe expresarla así:

$$2x^\alpha(x+1)^{-\mu}\int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)d\tau\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}.$$

$$\int_\sigma \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha+i\tau-s)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-i\tau-s)\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)}.$$

$$\left[\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}\right]^*(1-s)ds \tag{2.7.14}$$

donde

$$\left[\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}\right]^*(1-s)$$

representa la transformada de Mellin de la función

$$\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}$$

calculada en el punto $1-s$, para cualquier entero no negativo k y $\sigma=\{s\in \mathbb{C}\ : R_e s=\frac{1}{2}\}$.

Cambiando el orden de integración (lo cual es lícito ya que el comportamiento asintótico de las funciones que intervienen aseguran la convergencia absoluta) y aplicando el Lema 1.4.2 resulta:

$$A_x^k\Theta_T(x)=$$

$$=\frac{4x^\alpha(x+1)^{-\mu}}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)}\left[\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}\right]^*(1-s)ds.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty z^{\mu-\alpha-s}C_\mu(xz)dz\int_{-\infty}^\infty e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}d\theta.$$

$$\int_{|\theta|}^\infty C_0(ze^\theta\Psi)\left[\int_0^T \tau\ sen\ 2\tau u\ d\tau\right]du$$

(recuérdese que $\Psi=ch\ u-ch\ \theta$) expresión que puede escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{x^\alpha(x+1)^{-\mu}}{2\pi i}\int_\sigma \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1+\mu-\alpha-s)}\left[\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}\right]^*(1-s)ds.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty z^{\mu-\alpha-s}C_\mu(xz)dz\int_{-\infty}^\infty e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}d\theta.$$

$$\int_{|\theta|}^\infty C_0(ze^\theta\Psi)\left(-\frac{\partial}{\partial u}\frac{sen\ 2Tu}{u}\right)du.$$

Por las circunstancias que comparecen, podremos cambiar una vez más el orden de la integración, para obtener

$$A_x^k\Theta_T(x)=\frac{x^\alpha(x+1)^{-\mu}}{\pi}\int_0^\infty\left(-\frac{\partial}{\partial u}\frac{sen\ 2Tu}{u}\right)du\int_{-u}^u e^{2\theta(\mu-\alpha+\frac{1}{2}-s)}d\theta.$$

$$\int_0^\infty z^{\mu-\alpha}C_\mu(xz)C_0\left(ze^\theta\Psi\right)dz.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\left(\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^\mu\right)^*(1-s)\left(ze^{2\theta}\right)^{-s}ds. \tag{2.7.15}$$

Pondérese aquí que la expresión

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\left(\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^\mu\right)^*(1-s)\left(ze^{2\theta}\right)^{-s}ds \tag{2.7.16}$$

es el valor de la G_{02}^{10}-transformada de

$$\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^\mu$$

en el punto $ze^{2\theta}$ (ver [81]), la cual existe por el Lema 2.7.1. Denotaremos (2.7.16) por $G(\phi_k)(ze^{2\theta})$.

Si hacemos el cambio de variable $ze^{2\theta}=y$, (2.7.15) adopta la forma

$$\frac{x^\alpha(x+1)^{-\mu}}{\pi}\int_0^\infty\left(-\frac{\partial}{\partial u}\frac{sen\ 2Tu}{u}\right)du\int_{-u}^u e^{-\theta}d\theta.$$

$$\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha}C_\mu\left(xye^{-2\theta}\right)C_0\left(ye^{-2\theta}\Psi\right)dy \tag{2.7.17}$$

y si integramos por partes se tiene:

$$A_x^k \Theta_T(x) = -\frac{sen\ 2Tu}{u} \frac{x^\alpha (x+1)^{-\mu}}{\pi} \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta.$$

$$\left. \int_0^\infty G(\phi_k)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu \left(xye^{-2\theta} \right) C_0 \left(ye^{-2\theta}\Psi \right) dy \right|_0^\infty +$$

$$+\frac{x^\alpha (x+1)^{-\mu}}{\pi} \int_0^\infty \Phi(x,u) \frac{sen\ 2Tu}{u} du \qquad (2.7.18)$$

siendo

$$\Phi(x,u) = e^{-u} \int_0^\infty G(\phi_k)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu \left(xye^{2u} \right) dy +$$

$$+e^{u} \int_0^\infty G(\phi_k)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu \left(xye^{-2u} \right) dy +$$

$$+\int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \frac{\partial}{\partial u} \int_0^\infty G(\phi_k)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu \left(xye^{-2\theta} \right) C_0 \left(ye^{\theta}\Psi \right) dy. \qquad (2.7.19)$$

De la misma forma que se procedió para la fórmula de inversión clásica, puede comprobarse que el primer sumando de (2.7.18) tiende uniformemente a cero para $u \to 0$ y $u \to \infty$ cuando x varía en un compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$, si $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$.

Llegados a este punto, denotemos por $F(x,u)$ el último término de (2.7.19). Si sopesamos el comportamiento asintótico de las funciones involucradas, se puede diferenciar bajo el signo integral debido a su convergencia absoluta, de lo que sigue

$$F(x,u) = \int_{-u}^{u} e^{-\theta} d\theta \int_0^\infty G(\phi_k)(y) y^{\mu-\alpha} C_\mu \left(xye^{-2\theta} \right) \frac{\partial}{\partial u} C_0 \left(ye^{\theta}\Psi \right) dy$$

y si, como en la fórmula de inversión clásica, hacemos uso de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial u} C_0 \left(ye^{-\theta}\Psi \right) = 2ye^{-2\theta}(e^{\theta-u} - 1) C_1 \left(ye^{-\theta}\Psi \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} C_0 \left(ye^{-\theta}\Psi \right)$$

se obtiene

$$F(x,u)=$$

$$=2e^{-u}\int_{-u}^{u}e^{-2\theta}d\theta\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha+1}C_\mu(tye^{-2\theta})C_1(ye^{-\theta}\Psi)dy-$$

$$-2\int_{-u}^{u}e^{-3\theta}d\theta\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha+1}C_\mu(tye^{-2\theta})C_1(ye^{-\theta}\Psi)dy-$$

$$-\int_{-u}^{u}e^{-\theta}d\theta\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha}C_\mu(tye^{-2\theta})\frac{\partial}{\partial\theta}C_0\left(ye^{-\theta}\Psi\right)dy$$

con lo que aplicando los mismos procedimientos que en la demostración de la citada fórmula de inversión clásica, se puede escribir

$$\Phi(x,u)=$$

$$=2e^{u}\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha}C_\mu\left(xye^{-2u}\right)dy+F_1(x,u)-F_2(x,u)-F_3(x,u) \tag{2.7.20}$$

donde

$$F_1(x,u)=$$

$$=2e^{-u}\int_{-u}^{u}e^{-2\theta}d\theta\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha+1}C_\mu(xye^{-2\theta})C_1(ye^{-\theta}\Psi)dy$$

$$F_2(x,u)=2\int_{-u}^{u}e^{-3\theta}d\theta\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha+1}C_\mu(xye^{-2\theta})C_1(ye^{-\theta}\Psi)dy$$

$$F_3(x,u)=$$

$$\int_{-u}^{u}e^{-\theta}d\theta\int_0^\infty G(\phi_k)(y)y^{\mu-\alpha}\left[e^{-\theta}C_\mu(xye^{-2\theta})+2xye^{-3\theta}C_{\mu+1}(xye^{-2\theta})\right]dy.$$

A continuación, debemos tener presente que la primera integral de (2.7.20), por las condiciones que se dan, representa la transformada de Hankel-Clifford (ver [24] y [49]) de

$$\phi^{(k)}(t)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}$$

con lo que, si se aplica la correspondiente fórmula de inversión, se tiene

$$\Phi(x,u) =$$

$$= 2x^{\alpha-\mu}(xe^{2u}+1)^{\mu}e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})}\phi^{(k)}(xe^{2u}) + F_1(x,u) - F_2(x,u) - F_3(x,u). \tag{2.7.21}$$

Así concluimos que:

$$A_x^k\Theta_T(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} 2e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})}\left(\frac{xe^{2u}+1}{x+1}\right)^{\mu}\phi^{(k)}(xe^{2u})\frac{sen\ 2Tu}{u}du+$$

$$+x^{\alpha}(x+1)^{-\mu}\int_0^{\infty}\left(F_1(x,u)-F_2(x,u)-F_3(x,u)\right)\frac{sen\ 2Tu}{u}du.$$

Para demostrar que $\Theta_T(x) \to \phi(x)$ en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$, hemos de tener en cuenta lo siguiente

$$A_x^k(\Theta_T(x) - \phi(x)) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})}\left(\frac{xe^{2u}+1}{x+1}\right)^{\mu}\phi^{(k)}(xe^{2u}) - \phi^{(k)}(x)\right]\frac{sen\ 2Tu}{u}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(F_1(x,u)-F_2(x,u)-F_3(x,u)\right)\frac{sen\ 2Tu}{u}du. \tag{2.7.22}$$

Supongamos que x pertenece a un compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$ y pongamos

$$A_x^k(\Theta_T(x) - \phi(x)) =$$

$$= \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\infty \right) v(x,u) sen\ 2Tu\, du +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(F_1(x,u) - F_2(x,u) - F_3(x,u) \right) \frac{sen\ 2Tu}{u} du \tag{2.7.23}$$

siendo

$$v(x,u) = \frac{2}{\pi u} \left[e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})} \left(\frac{xe^{2u}+1}{x+1} \right)^\mu \phi^{(k)}(xe^{2u}) - \phi^{(k)}(x) \right]$$

con $\delta > 0$.

Analicemos (2.7.23), estudiando en primer lugar:

$$\int_0^\delta v(x,u)\ sen\ 2Tu\, du.$$

La función $v(x,u)$ está acotada en el dominio $E = \{(x,u) :\ x \in \mathbb{K},\ 0 \leq u \leq 1\}$; por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que para cualquier $\delta \in (0, \delta_1]$ y cualquier $T > 0$:

$$\left| \int_0^\delta v(x,u) sen\ 2Tu\, du \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En segundo lugar y por lo que se refiere a la $\int_\delta^\infty$ de (2.7.23), si

$$\lambda(x,u) = \frac{1}{u} e^{-2u(\mu-\alpha-\frac{1}{2})} \left(\frac{xe^{2u}+1}{x+1} \right)^\mu \phi^{(k)}(xe^{2u})$$

se tiene que, como $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$, existirá una constante $h > \delta$ tal que el soporte de $\lambda(x,u)$ respecto a u está acotado por h para $x \in \mathbb{K}$. Así, integrando por partes sigue:

$$\int_\delta^\infty \lambda(x,u)\ sen\ 2Tu\, du =$$

$$= \frac{1}{2T} \left[(cos\ 2T\delta\ ) \lambda(x,\delta) \right] + \int_\delta^h (cos\ 2Tu\ ) \frac{\partial}{\partial u} \lambda(x,u)\, du$$

y como $\lambda(x,u)$ es una función acotada de x, y

$$\frac{\partial}{\partial u} \lambda(x,u)$$

se mantiene acotada para todo $x \in \mathbb{K}$ y cualquier $u \in [\delta, h]$, y, además,

$$\int_{2T\delta}^{\infty} \frac{sen\ u}{u} du \to 0, \qquad T \to \infty,$$

existirá un T_1 tal que, para $T > T_1$ y todo $x \in \mathbb{K}$

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} v(x,u)\ sen\ 2Tu\ du \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para terminar la demostración probaremos que para $x \in \mathbb{K}$,

$$\frac{F_i(x,u)}{u} \in L(0,\infty), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Por la acotación de las funciones $x^{\frac{1}{4}} C_0(x)$ y $x^{\frac{1}{4}} C_1(x)$, y la relación (1.4.17), se tiene que

$$|F_1(x,u)| < A_1 e^{-u} x^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}} \int_{-u}^{u} \frac{e^{\theta(2\ R_e(\mu-\alpha)+\frac{3}{4})}}{(ch\ u - ch\ \theta)^{\frac{1}{4}}} d\theta$$

con lo cual, al igual que en la demostración del teorema de inversión clásico:

$$\int_0^{\infty} \frac{|F_1(x,u)|}{u} du < A_2 x^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{5}{4}}.$$

siendo $A_i > 0$, $i = 1, 2$.

De esta manera

$$x^{\alpha}(x+1)^{-\mu} \frac{F_1(x,u)}{u} \in L(0,\infty), \quad x \in \mathbb{K}.$$

De igual forma

$$\int_0^{\infty} \frac{|F_2(x,u)|}{u} du < B x^{-R_e(\mu-\alpha)-\frac{5}{4}}, \quad B > 0$$

teniéndose así que

$$x^{\alpha}(x+1)^{-\mu} \frac{F_2(x,u)}{u} \in L(0,\infty), \quad x \in \mathbb{K}.$$

Y también,

$$\int_0^{\infty} \frac{|F_3(x,u)|}{u} du < C x^{-R_e(\mu-\alpha)-\frac{1}{4}}, \quad C > 0$$

con lo que

$$x^{\alpha}(x+1)^{-\mu}\frac{F_3(x,u)}{u} \in L(0,\infty), \quad x \in \mathbb{K}.$$

Ahora bien, por el Lema de Riemann se tiene

$$x^{\alpha}(x+1)^{-\mu}\int_0^{\infty} F_i(x,u)\frac{sen\, 2Tu}{u}du \to 0$$

uniformemente en $\mathbb{K}$ para $T \to \infty$, i = 1, 2, 3.

Con esto hemos probado que

$$A_x^k\Theta_T(x) \to A_x^k\phi(x)$$

uniformemente en cualquier compacto $\mathbb{K} \subset \mathbf{I}$, de donde se desprende que

$$\Theta_T(x) \to \phi(x)$$

en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ lo que termina la prueba del Lema.

Teorema 2.7.1 *Sea $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ y pongamos*

$$F(\tau) =< f(t), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,t) > .$$

Si $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$ y $\frac{1}{8} < R_e(\mu-\alpha) < \frac{1}{4}$, $R_e(\mu-2\alpha) < -1$, se tiene que:

$$< f,\phi >= \lim_{T\to\infty}\left\langle \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)F(\tau)d\tau, \phi(t)\right\rangle \qquad (2.7.24)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$.

Demostración:

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$. Hemos de probar que

$$\left\langle \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)F(\tau)d\tau, \phi(t)\right\rangle \qquad (2.7.25)$$

tiende a $< f,\phi >$ para $T \to \infty$.

Por la regularidad de $F(\tau)$ y el hecho de que el soporte de $\phi(t)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{I}$, sigue que (2.7.25) es una integral iterada en (t,τ), teniendo un integrando continuo sobre un dominio compacto de integración. De esta manera, cabe cambiar el orden de integración, infiriéndose que (2.7.25) coincide con

$$\int_0^T S(\mu,\tau) < f(x), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x) > d\tau \int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt$$

Además, por el Lema 2.7.2 esta expresión es igual a

$$\left\langle f(x), \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)d\tau \int_0^\infty \phi(t)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)dt \right\rangle. \qquad (2.7.26)$$

Por consiguiente, como $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ y en virtud del Lema 2.7.4, la función prueba de (2.7.26) converge en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ a $\phi(x)$ cuando $T \to \infty$, se tiene que (2.7.26) tiende a $< f, \phi >$, lo que completa la demostración.

Una consecuencia inmediata del anterior teorema de inversión es el siguiente teorema de unicidad:

Teorema 2.7.2 (Unicidad) *Sean $F(\tau) = {}_2\mathcal{F}_1(f)$ y $G(\tau) = {}_2\mathcal{F}_1(g)$ con $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ y supongamos que $F(\tau) = G(\tau)$ para todo $\tau > 0$. Entonces $f = g$.*

DEMOSTRACIÓN:

Por el teorema anterior,

$$f(t) - g(t) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)F(\tau)d\tau -$$

$$-\lim_{T\to\infty}\int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)G(\tau)d\tau =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,t)[F(\tau)-G(\tau)]d\tau = 0$$

con lo cual $f = g$ sobre $\mathcal{E}(\mathbf{I})$.

2.8. Relación de $U_{a,\mu,\alpha}$ con otros espacios.

Si consideramos los espacios $U_{a,n}$ y $\tilde{U}_{a,n}$ estudiados por Glaeske-Hess [20] y el $U_{a,\mu,\alpha}$ aquí tratado, podemos establecer el siguiente esquema:

Las igualdades siguientes prueban los homeomorfismos mencionados:

$$\tilde{C}_t(t^2-1)^{-\frac{n}{2}}\phi(t) = (t^2-1)^{-\frac{n}{2}}C_t\phi(t)$$

$$\bar{C}_t\phi(2t+1) = \tilde{C}_{2t+1}\phi(2t+1)$$

$$\hat{C}_t t^\alpha\phi(t) = t^\alpha\bar{C}_t\phi(t)$$

A la vista del esquema anterior se observa que la clase de los espacios $U_{a,\mu,\alpha}$ estudiados en esta Memoria resulta ser más amplia (con μ complejo) que la de los analizados por Glaeske-Hess [20] en los que dicho parámetro queda restringido a ser un número natural.

2.9. Caracterización de los elementos de $U'_{a,\mu,\alpha}$.

Proposición 2.9.1 *Si $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, existe un $r \in \mathbb{N}$ y $r+1$ funciones $h_0,\ h_1,\ \cdots\ h_r \in L_\infty(\mathbf{I})$ tales que, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$:*

$$< f,\phi >= \left\langle \sum_{k=0}^{r} \left(A_t^k\right)'(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}(-D_t)h_k(t),\phi(t) \right\rangle$$

Demostración:

Si $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, por la Proposición 2.3.3 existe una constante $C > 0$ y un $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$|< f,\phi >| \leq C \max_{0\leq m\leq r} \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m\phi(t)\right|,$$

cuyo último término se mantiene acotado por

$$C \max_{0\leq m\leq r} \|D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m\phi(t)\|_1$$

donde $\| \ \|_1$ denota la norma usual de $L_1(\mathbf{I})$. Así, si escribimos

$$\mathcal{D}(\mathbf{I}) \longrightarrow L_1^{r+1}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi \to \left(D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\right)_{m=0,1,2,\cdots r} \to < f, \phi >$$

y siendo

$$| < f, \phi > | \leq C \max_{0 \leq m \leq r} \|D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\|_1,$$

será continua la aplicación:

$$Im\,(\mathcal{D}(\mathbf{I})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\left(D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\right)_{m=0,1,2,\cdots r} \to < f, \phi > \tag{2.9.1}$$

siendo $Im\,(\mathcal{D}(\mathbf{I})) \subset L_1^{r+1}(\mathbf{I})$.

Ahora, por el Teorema de Hahn-Banach, se puede extender (2.9.1) a una aplicación continua

$$L_1^{r+1}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Por último, como consecuencia del isomorfismo existente entre $\left(L_1^{r+1}\right)'$ y L_∞^{r+1}, si aplicamos el teorema de representación de Riesz, existen funciones $h_k,\ k = 0, 1, \cdots r$ de L_∞ tales que

$$< f, \phi > =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \left\langle h_k(t), D_t[(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t)] \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{r} \left(A_t^k\right)' (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} (-D_t) h_k(t), \phi(t) \right\rangle$$

2.10. Aplicación del método del operador adjunto.

En este apartado se estudia la transformación generalizada utilizando el método del operador adjunto, obteniendo de esta manera una extensión de los resultados precedentes. Nuestro proceso permite probar la existencia de funciones generalizadas cuya ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada es una función entera $F(\tau)$ con comportamiento asintótico conocido en 0 y en ∞.

En primer lugar introducimos un nuevo espacio de funciones prueba

Definición 2.10.1 *Sea V el espacio vectorial definido por*

$$V = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{I}) \ : \gamma_k(\phi) < \infty, \quad k \in \mathbb{N}_0\}$$

donde

$$\gamma_k(\phi) = \sup_{t\in\mathbf{I}} \left| t^{-\alpha}(t+1)^{\mu+\frac{3}{2}} A_t^k \phi(t) \right|$$

y A_t es el operador definido por (2.2.2).

El espacio V, provisto de la topología generada por la familia de seminormas $\{\gamma_k\}_k$ es un espacio de Fréchet contenido en cualquier espacio $U_{a,\mu,\alpha}$.

En efecto, la prueba de que es un espacio de Fréchet es completamente análoga a la realizada para $U_{a,\mu,\alpha}$. Por otra parte, si $\phi \in V$:

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) = \sup_{t\in\mathbf{I}} \left| (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha} (t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t) \right| \leq$$

$$\leq \gamma_k(\phi) \ \sup_{t\in\mathbf{I}} |(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}} (t+1)^{-\frac{\mu}{2}-\frac{3}{2}}| < M \ \gamma_k(\phi)$$

siendo $M > 0$.

Por procedimientos similares a los empleados para caracterizar los elementos de $U_{a,\mu,\alpha}$, se demuestra la siguiente proposición:

Proposición 2.10.1 *Una función $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{I})$ es un elemento de V, si, y sólo si, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, se tiene*

$$(a) \quad t^k D_t^k \phi(t) = O\left(t^{Re(\alpha-\mu)-\frac{3}{2}}\right), \quad t \to \infty$$

$$(b) \quad D_t^k \left(t^{-\alpha}\phi(t)\right) = O(1), \quad t \to 0^+$$

Las funciones que pueden expresarse en la forma en que a continuación se describe, serán utilizadas más adelante.

Para cada $f \in V$ consideremos

$$\psi_f(\tau) = S(\mu,\tau)\mathcal{T}[f](\tau) \tag{2.10.1}$$

donde

$$\mathcal{T}[f](\tau) = \int_0^\infty f(x)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)dx. \tag{2.10.2}$$

Nótese que por la Proposición 2.10.1, al ser f un elemento de V, la integral (2.10.2) converge absolutamente.

De la representación integral (2.6.1), sigue que $\psi_f(\tau)$ es una función entera par de τ.

En la siguiente proposición analizamos el comportamiento asintótico de $\psi_f(\tau)$ para $\tau \to 0^+$ y $\tau \to \infty$.

Proposición 2.10.2 *Si $\psi_f(\tau)$ viene dada por (2.10.1) y f es un elemento del espacio V, se tiene:*

i) $\psi_f(\tau) = O(\tau^2)$, *para* $\tau \to 0^+$

ii) *para cualquier* $r \in \mathbb{N}$, $\psi_f(\tau) = O(\tau^{-r})$, $\tau \to \infty$.

Demostración:

Para probar i), basta tener en cuenta que $sh\,\pi\tau \sim \pi\tau$ para $\tau \to 0^+$, con lo cual

$$|\psi_f(\tau)| \leq C_1\,\tau^2 \int_0^\infty |\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)|f(x)dx \leq C_2\,\tau^2$$

siendo C_1 y C_2 constantes adecuadas.

Para ii), si se pondera que el operador adjunto A_x' de A_x satisface la relación

$$A_x'\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x) = -\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)$$

y que si $f(x) \in V$, $(-A_x)^n f(x) \in V$, cualquiera que sea el número natural n, integrando por partes resulta:

$$\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^n \mathcal{T}[f](\tau) = \int_0^\infty \mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)(-A_x)^n f(x)dx.$$

Como, además, para $\tau \to \infty$

$$|\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)| < Mx^{-\frac{1}{2}+R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)}(x+1)^{-\frac{1}{2}+R_e\frac{\mu}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu} \tag{2.10.3}$$

con $M > 0$, (esto último sigue de [64], pág. 231, (24)) se tiene que

$$|\mathcal{T}[f](\tau)| < M\left|\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right|^{-n}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu}.$$

Por otra parte, como

$$\left|\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)\right| = O\left(\tau^{2R_e\mu}e^{-\pi\tau}\right), \quad \tau\to\infty$$

y

$$sh\,\pi\tau = O\left(e^{\pi\tau}\right), \quad \tau\to\infty$$

resulta

$$|\psi_f(\tau)| < M_1\tau^{\frac{1}{2}+R_e\mu-2n}, \quad \tau\to\infty, \quad n\in\mathbb{N}, \quad M_1>0$$

de lo que se infiere inmediatamente ii).

Para definir la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación generalizada, se requiere el siguiente espacio de funciones

$$W = \{\psi(\tau) \ \text{ entera, } \ \text{par} : \rho_r(\psi) < \infty, \quad r\in\mathbb{N}_0\}$$

siendo

$$\rho_r(\psi) = \sup_{t\in\mathbf{I}} \left| t^{\frac{3}{2}} e^t \left(\frac{\widehat{\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^r \psi(\tau)}}{\tau\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)} \right)(t) \right| \qquad (2.10.4)$$

donde $\hat{}$ denota la transformada de Fourier.

La familia de seminormas $\{\rho_r\}_r$ genera una topología en W que le confiere una estructura de espacio numerablemente multinormado.

Conviene observar que, para cualquier $\psi(\tau) \in W$ y todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^n \psi(\tau) \in W.$$

En estas condiciones puede darse la siguiente

Definición 2.10.2 *Para $\psi \in W$, el operador $\mathcal{L}\psi$ se define por*

$$\left(\mathcal{L}\psi\right)(x) = \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\psi(\tau)d\tau, \quad x>0 \qquad (2.10.5)$$

Proposición 2.10.3 *Si $\mu \in \mathbb{C}$ con $R_e\mu > -\frac{1}{2}$, $\mathcal{L}$ representa un operador lineal y continuo de W en V.*

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, se tiene:

$$A_x^k\left(\mathcal{L}\psi\right)(x) = (-1)^k \int_0^\infty \left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^k \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\psi(\tau)d\tau. \qquad (2.10.6)$$

Haciendo ahora uso de la representación integral ([13] 3.7(11))

$$\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x) =$$

$$= \frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})x^\alpha}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)} \int_0^\infty (2x+1+ch\ \xi)^{-\mu-\frac{1}{2}} cos\ \tau\xi\ d\xi \quad (2.10.7)$$

válida para $R_e\mu > -\frac{1}{2}$, e integrando por partes, sigue que

$$\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x) =$$

$$\frac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})x^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}\tau\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\int_0^{\infty}(2x+1+ch\ \xi)^{-\mu-\frac{3}{2}}sh\ \xi\ sen\ \tau\xi\ d\xi$$

con lo que al sustituir esta representación en (2.10.6) y cambiando el orden de integración (lo cual es factible por la convergencia absoluta de la integral), queda:

$$A_x^k\left(\mathcal{L}\psi\right)(x)=$$

$$=\frac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})x^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\int_0^{\infty}(2x+1+ch\ \xi)^{-\mu-\frac{3}{2}}sh\ \xi\left(\frac{\widehat{\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^r\psi(\tau)}}{\tau\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\right)(\xi)d\xi.$$

En consecuencia:

$$\left|x^{-\alpha}(x+1)^{\mu+\frac{3}{2}}A_x^k\left(\mathcal{L}\psi\right)(x)\right|\leq M_1\ (x+1)^{R_e\mu+\frac{3}{2}}(2x+1)^{-R_e\mu-\frac{3}{2}}.$$

$$\int_0^{\infty}\left(1+\frac{ch\ \xi}{2x+1}\right)^{-R_e\mu-\frac{3}{2}}sh\ \xi\ e^{-\xi}\xi^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\left|e^{\xi}\xi^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\widehat{\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)+\tau^2\right]^r\psi(\tau)}}{\tau\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\right)(\xi)\right|d\xi\leq$$

$$\leq M_2\ \rho_k(\psi)\int_0^{\infty}\frac{e^{-\xi}\ sh\ \xi}{\xi^{\frac{3}{2}}}d\xi\leq M_3\ \rho_k(\psi)$$

donde $M_i,\quad i=1,2,3$ son constantes adecuadas, siguiéndose sin dificultad la conclusión.

Para demostrar la proposición que luego se enuncia, es preciso probar el lema siguiente:

Lema 2.10.1 *Sean α, μ y s parámetros complejos con $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$ y $R_e s = \frac{1}{2}$. En estas condiciones, si $\psi \in V$*

$$(t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \psi(t) \in \mathfrak{M}_{0,n}^{-1}(L)$$

para cualquier número natural n.

Demostración:

Sea

$$\varphi(s) = \int_0^\infty (t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \psi(t) t^{s-1} dt.$$

Por las condiciones del Lema esta integral converge absolutamente, siendo entonces lícito diferenciar bajo el signo integral, con lo cual

$$(-1)^n s^n \varphi(s) = \int_0^\infty \left(t\frac{d}{dt}\right)^n [(t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \psi(t)] t^{s-1} dt. \tag{2.10.8}$$

Ahora bien, mediante un proceso de inducción, se demuestra sin dificultad que

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n [(t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \psi(t)] = (t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t) D_t^k \psi(t)$$

con

$$\alpha_k(t) = \sum_{j=0}^{n-k} a_{jk} (t+1)^{-j} t^{j+k}$$

y también que

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n [(t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \psi(t)] = (t+1)^{\mu} t^{\mu-\alpha} \sum_{k=0}^{n} \beta_k(t) D_t^k \left(t^{-\alpha}\psi(t)\right)$$

con

$$\beta_k(t) = \sum_{j=0}^{n-k} b_{jk} (t+1)^{-j} t^{j+k}.$$

Ahora bien, del comportamiento asintótico de los elementos de V en 0 y en ∞ reflejado en la Proposición 2.10.1, sigue que

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n [(t+1)^{\mu} t^{\mu-2\alpha} \psi(t)] = O\left(t^{R_e(\mu-\alpha)-\frac{3}{2}}\right), \quad t \to \infty$$

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n [(t+1)^\mu t^{\mu-2\alpha}\psi(t)] = O\left(t^{R_e(\mu-\alpha)}\right), \quad t \to 0^+$$

y como, por hipótesis $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$, se tiene que (2.10.8) converge absolutamente, de lo que se infiere que

$$|s^n \varphi(s)| < M,$$

es decir:

$$|\varphi(s)| < M\ s^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.10.9}$$

para un cierto $M > 0$.

Por la fórmula de inversión de la transformada de Mellin

$$(t+1)^\mu t^{\mu-2\alpha}\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \varphi(s)t^{-s}ds$$

y habida cuenta de que

$$\varphi(s) = s^{-n}\varphi(s)s^n$$

sigue de (2.10.9):

$$\varphi(s)s^n \in L(\sigma)$$

de donde se deduce que

$$(t+1)^\mu t^{\mu-2\alpha}\psi(t) \in \mathfrak{M}_{0,n}^{-1}(L)$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tal y como queríamos demostrar.

Nos encontramos ahora en condiciones de demostrar la siguiente

Proposición 2.10.4 *Si α y μ son parámetros complejos con $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$ y $R_e(\mu - 2\alpha) < -1$, se tiene que, para todo elemento ψ de W, existe un $f \in V$, tal que:*

$$\psi_f(\tau) = S(\mu, \tau)\, T[f](\tau)$$

con $T[f](\tau)$ dado por (2.10.2).

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\psi \in W$, y definamos $f(x) = (\mathcal{L}\psi)(x)$, $x > 0$, cuya existencia viene garantizada por la Proposición 2.10.3.

En primer lugar, denotemos por

$$\bar{\psi}(\tau) = S(\mu,\tau)\mathcal{T}[f](\tau).$$

Veamos ahora que $\bar{\psi}(\tau) = \psi(\tau)$. En efecto, se tiene:

$$\left(\mathcal{L}\bar{\psi}\right)(x) = \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\ \bar{\psi}(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)S(\mu,\tau)d\tau \int_0^\infty \mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)f(t)dt$$

de donde por propiedades de la función hipergeométrica (ver Apéndice) se puede escribir, tras el cambio del orden de integración:

$$\left(\mathcal{L}\bar{\psi}\right)(x) =$$

$$x^{2\alpha-\mu}(x+1)^{-\mu}\int_0^\infty S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)d\tau \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)t^{\mu-2\alpha}f(t)dt.$$

Entonces, por las hipótesis asumidas y el Lema anterior, se puede aplicar la fórmula de inversión de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada, quedando

$$\left(\mathcal{L}\bar{\psi}\right)(x) = f(x) = (\mathcal{L}\psi)(x).$$

Para finalizar, sólo nos resta comprobar que $\mathcal{L}$ es inyectiva.

Suponiendo $(\mathcal{L}\psi)(x) = 0$, por (2.10.7) se tiene

$$0 = \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\psi(\tau)d\tau =$$

$$\frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})x^\alpha}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\int_0^\infty (2x+1+ch\ t)^{-\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi(\tau)}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\right)(t)dt =$$

$$= \frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})x^\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (2x+1+\zeta)^{-\mu-\frac{1}{2}}\Psi(\zeta)d\zeta$$

con

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2+\zeta}\left(\frac{\widehat{\psi(\tau)}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\right)(\log(\zeta+1+\sqrt{\zeta^2+2\zeta})).$$

Y como

$$\int_0^\infty (2x+1+\zeta)^{-\mu-\frac{1}{2}}\Psi(\zeta)d\zeta$$

es la transformada generalizada de Stieltjes, sigue por su fórmula de inversión ([73] pág. 180) que $\Psi(\zeta) = 0$, pero siendo $\Psi(\zeta)$ la transformada de Fourier de

$$\frac{\psi(\tau)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}$$

resulta $\psi(\tau) = 0$, concluyéndose así la demostración.

Si V' y W' designan los duales de V y W, respectivamente, se define la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación generalizada como el operador adjunto de $\mathcal{L}$ dado por (2.10.5), es decir,

$$< \mathcal{L}'f, \psi > = < f, \mathcal{L}\psi >, \quad f \in V', \quad \psi \in W \tag{2.10.10}$$

$\mathcal{L}'f$ se denominará la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de f. Tal y como se ha definido, $\mathcal{L}'$ es un operador lineal y continuo de V' en W'.

En la siguiente proposición se demuestra que la definición (2.10.10) coincide con la dada en la sección 2.5 para distribuciones de soporte compacto.

Proposición 2.10.5 *Sea $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ y α, μ parámetros complejos con $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu - \alpha) < \frac{1}{4}$ y $R_e(\mu - 2\alpha) < -1$. En estas condiciones, para cualquier $\psi \in W$, se tiene:*

$$< \mathcal{L}'f, \psi >= \int_0^\infty F(\tau)\psi(\tau)d\tau \tag{2.10.11}$$

donde

$$F(\tau) =< f(x), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) >$$

es la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada introducida en la sección 2.5.

Demostración:

Se tiene que $\mathcal{D}(\mathbf{I}) \subset V \subset \mathcal{E}(\mathbf{I})$ siendo la topología de V más fuerte que la inducida en él por $\mathcal{E}(\mathbf{I})$; además, el espacio V es denso en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$, y por tanto $\mathcal{E}'(\mathbf{I})$ es un subespacio de V'. Por otra parte, por las Proposiciones 2.6.1 y 2.6.2, $F(\tau)$ es una función entera tal que:

$$\left.\begin{array}{l} i)\text{ Para } \ \tau \to 0, \ \text{ se tiene } \ F(\tau) = O(1), \\ ii)\text{ Existe un } \ r \in \mathbb{N}_0 \ \text{ tal que } \ F(\tau) = O\left(\tau^{2r - R_e\mu - \frac{1}{2}}\right), \quad \tau \to \infty \end{array}\right\} \tag{2.10.12}$$

Con esto y las Proposiciones 2.10.2 y 2.10.4, se desprende que la integral de (2.10.11) converge.

Es obvio que, si $f \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$, la Proposición es cierta.

Consideremos ahora que f es una distribución de soporte compacto. Por el Corolario del Teorema 28.2 de [76], existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ tal que converge a f en $\mathcal{E}'(\mathbf{I})$ y, por tanto, en V'. Además, como $\mathcal{L}'$ es continuo, $\{\mathcal{L}'f_n\}_{n\in N}$ converge a $\mathcal{L}'f$ en W', y como se tiene

$$\mathcal{L}'f_n(\tau) =< f_n(x), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) >$$

sigue que $\mathcal{L}'f(\tau) = F(\tau)$ en W', esto es,

$$< \mathcal{L}'f, \psi >= \int_0^\infty F(\tau)\psi(\tau)d\tau$$

como queríamos demostrar.

A continuación probamos un teorema que garantiza que una función entera que satisface condiciones del tipo (2.10.12), es la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada de un elemento de V'.

Teorema 2.10.1 *Sea $F(\tau)$ una función entera par tal que existe un entero no negativo r y una constante $C > 0$ de modo que $|F(\tau)| \leq C\ (1+\tau^{2r})$ para $\tau > 0$, α y μ parámetros complejos con $R_e\alpha > 0$, $R_e\mu > 0$, $\frac{1}{8} < R_e(\mu-\alpha) < \frac{1}{4}$ y $R_e(\mu-2\alpha) < -1$. En estas condiciones, $F(\tau)$ es la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de un elemento $f \in V'$:*

$$< \mathcal{L}'f, \psi >= \int_0^\infty F(\tau)\psi(\tau)d\tau, \quad \forall \psi \in W.$$

Además, para cualquier $\phi \in V$

$$< f, \phi >= \lim_{T\to\infty} \left\langle \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)F(\tau)d\tau, \phi(x) \right\rangle.$$

Demostración:

Consideremos en primer lugar una función $G(\tau)$ analítica en $\mathbf{I}$ tal que:

$$|G(\tau)| \leq C\ (1+\tau)^{-R_e\mu-2}$$

y definamos para $x > 0$,

$$g(x) = \int_0^\infty S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)G(\tau)d\tau. \tag{2.10.13}$$

La acotación (2.10.3) y las condiciones impuestas, aseguran que g es localmente integrable en $\mathbf{I}$, y

$$\int_0^\infty |x^\alpha(x+1)^{\mu-\frac{3}{2}}g(x)|dx < \infty$$

de lo que se infiere que g genera un elemento regular en V'. Probemos ahora que $G(\tau)$ es la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de $g(x)$.

Sea $\psi \in W$. Por la Proposición 2.10.4:

$$\psi(\tau) = S(\mu, \tau)\mathcal{T}[\phi](\tau)$$

con $\phi = \mathcal{L}\psi \in V$. Así:

$$< \mathcal{L}'g, \psi >=< g, \mathcal{L}\psi >= \int_0^\infty g(t)\phi(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \phi(t)dt \int_0^\infty S(\mu, \tau)\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, x)G(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^\infty G(\tau)d\tau \int_0^\infty S(\mu, \tau)\mathbf{G}(\mu, \alpha, \tau, x)\phi(t)dt = \int_0^\infty G(\tau)\psi(\tau)d\tau$$

es decir, $\mathcal{L}'g = G$ sobre W'.

Supongamos ahora que $F(\tau)$ satisface las hipótesis del teorema y denotemos

$$G(\tau) = \frac{F(\tau)}{\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^{r+p}}$$

siendo p la parte entera de $R_e\frac{\mu}{2} + 1$ y $g(x)$ la definida por (2.10.13)

Según lo visto hasta aquí, $\mathcal{L}'g(\tau) = G(\tau)$. Si se considera la distribución $f = (A_x^{r+p})'g$ definida por

$$< f, \phi >=< g, (-A_x)^{r+p}\phi >, \quad \forall \phi \in V$$

se tiene que, cualquiera que sea $\psi \in W$:

$$< \mathcal{L}'f, \psi >=< f, \mathcal{L}\psi >=< g, (-A_x)^{r+p}\mathcal{L}\phi >=$$

$$\left\langle g, \mathcal{L}\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^{r+p}\psi\right\rangle = \left\langle \mathcal{L}'g, \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^{r+p}\psi\right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty G(\tau)\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]^{r+p}\psi(\tau)d\tau = \int_0^\infty F(\tau)\psi(\tau)d\tau.$$

Además, si $\phi \in V$,

$$< f, \phi >= \left\langle \int_0^\infty S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)G(\tau)d\tau, (-A_x)^{r+p}\phi(x)\right\rangle =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\langle \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)F(\tau)d\tau, \phi(x)\right\rangle.$$

2.11. Teoremas abelianos para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación generalizada.

Siguiendo una técnica utilizada por Zemanian [91], probamos en este apartado dos teoremas de tipo abeliano para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de ciertos elementos de $U'_{a,\mu,\alpha}$.

Antes de abordar dichos teoremas, se hace preciso recordar la forma en que Zemanian asigna límite a ciertas funciones generalizadas.

Si f es una función generalizada regular en un intervalo abierto (a, b), existe una función medible $h(t)$, integrable Lebesgue en cualquier intervalo (c, d) con $a < c < d < b$ y

$$< f, \phi >= \int_a^b h(t)\phi(t)dt$$

para cualquier función regular ϕ en (a, b) cuyo soporte sea un subconjunto compacto de (a, b).

Se tiene que f es la representación distribucional de la clase de todas las funciones en (a, b) que difieren de $h(t)$ en un conjunto de medida nula. Además, si se supone que una función de la clase (por ejemplo $h(t)$) posee $\lim_{t\to a^+} h(t) = \lambda$, puede demostrarse que cualquier otra función de esta clase tiene el mismo límite λ o carece de límite para $t \to a^+$, y que es imposible que otra función de la misma clase posea un límite diferente. De esta manera, se asigna el límite único λ a la función generalizada f para $t \to a^+$ cuando al menos una función de la clase de f tenga este límite, escribiéndose en este caso

$$\lim_{t\to a^+} f(t) = \lambda.$$

Supongamos ahora que $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ y $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$, y asumamos asímismo que $< f, \phi >= 0$ si $\phi(t) \equiv 0$ en $T \leq t < \infty$, $(T > 0)$. En este caso se dice que el soporte de f está contenido en el intervalo cerrado $[T, \infty)$. Como f es cero en $(0, T)$, escribiremos

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0.$$

De la misma forma, si $< f, \phi >= 0$ cuando $\phi(t) \equiv 0$ en $0 \leq t \leq T$, $(T < \infty)$, se dice que el soporte de f está contenido en $[0, T]$ y por la misma razón se escribe

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = 0.$$

Por otra parte, definimos el *orden de una función generalizada* f como el menor entero no negativo r que verifica

$$| < f, \phi > | \leq C \max_{0\leq k\leq r} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi).$$

La definición queda justificada ya que, en cierto modo, generaliza la dada por Schwartz [69] para el orden de una distribución, por cuanto la Proposición 2.9.1 contiene un representación análoga (para funciones generalizadas de $U'_{a,\mu,\alpha}$) a la existente para las distribuciones de orden m en $\mathcal{E}(\mathbf{I})$.

Antes de demostrar el primer teorema de tipo abeliano, estableceremos el siguiente Lema:

Lema 2.11.1 *Sea $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ con soporte contenido en $[T,\infty)$, $(T > 0)$ de orden r, siendo $2r - R_e\mu < \frac{1}{2}$. Entonces, si $F(\tau) = {}_2\mathcal{F}_1[f]$, se tiene*

$$\lim_{\tau\to\infty} F(\tau) = 0.$$

Demostración:

Por la Proposición 2.3.3, existe una constante $C > 0$ y un entero r, dependientes de f, tales que

$$| < f, \phi > | \leq C \max_{0\leq n\leq r} \gamma_{n,a,\mu,\alpha}(\phi), \quad \forall \phi \in U_{a,\mu,\alpha}$$

Si $\xi(x)$ es una función regular en $[0,\infty)$ tal que $\xi(x) = 1$ en un entorno de $[T,\infty)$ y $\xi(x) = 0$ en $[0,\rho]$ con $0 < \rho < T$, se tendrá que

$$|F(\tau)| = |\langle f(x), \xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\rangle| \leq$$

$$\leq C \max_{0\leq n\leq r} \gamma_{n,a,\mu,\alpha}\left(\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right).$$

Pero, por otra parte,

$$\gamma_{n,a,\mu,\alpha}\left(\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right) =$$

$$= \sup_{\rho<x<\infty} \left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} A_x^n \xi(x)\, \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right|$$

y por la expresión de A_x^n dada en (2.2.3), esta última expresión está acotada por

$$\sup_{\rho<x<\infty} \left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{k=0}^{2n} x^{k-n} p_{j,n}(x) D_x^k \xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right| \leq$$

$$\leq M_1 \sum_{k=0}^{2n} \sup_{\rho<x<\infty} \left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k D_x^k \xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right| \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{k=0}^{2n} \sup_{\rho<x<\infty} \left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k\right. .$$

$$\left.\sum_{j=0}^{k} D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha] D_x^j \ {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau, \mu+\frac{1}{2}-i\tau; \mu+1; -x)\right| \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{k} \sup_{\rho<x<\infty} \left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k .\right.$$

$$\left. D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha] D_x^j {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau, \mu+\frac{1}{2}-i\tau; \mu+1; -x)\right| .$$

Teniendo en cuenta ahora que:

$$\sup_{\rho<x<\infty} \left|D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha]\right| < Ax^{R_e\alpha}, \quad A>0$$

y que

$$D_x^j {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau, \mu+\frac{1}{2}-i\tau; \mu+1; -x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j-i\tau)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)\Gamma(\mu+j+1)} .$$

$${}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau, \mu+\frac{1}{2}+j-i\tau; \mu++j+1; -x)$$

y como, además, se tiene, para $\tau \to \infty$

$$\left|{}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau, \mu+\frac{1}{2}+j-i\tau; \mu+1; -x)\right| \leq$$

$$\leq B_j \tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu-j}[x(x+1)]^{-\frac{1}{2}-R_e\frac{\mu}{2}-j}, \quad B_j>0$$

y

$$\left|\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j-i\tau)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\right| = O(\tau^{2j}),$$

se deduce que

$$\sup_{\rho<x<\infty}\Big|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha].$$

$$D_x^j\, {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x)\Big| \leq$$

$$\leq B_j \sup_{\rho<x<\infty}\Big|(2x+1)^a x^k[x(x+1)]^{-\frac{1}{2}-j}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+j}\Big| \leq C_j\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+j}$$

con lo cual

$$\gamma_{n,a,\mu,\alpha}\left(\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right) \leq$$

$$M_3\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k}\sup_{\rho<x<\infty} C_j\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+j} \leq M_4\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+2n}$$

infiriéndose entonces:

$$|F(\tau)| \leq M_5\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+2n}$$

con $M_i>0$ $(1\leq i\leq 5)$ de donde, al ser $2r-R_e\mu<\frac{1}{2}$ se concluye:

$$\lim_{\tau\to\infty} F(\tau)=0.$$

.

Teorema 2.11.1 *Sea $f\in U'_{a,\mu,\alpha}$ tal que $f=f_1+f_2$, siendo f_1 una función ordinaria que satisface las hipótesis del Teorema 1.7.1 y f_2 una función generalizada a la que es aplicable el Lema anterior. Entonces,*

$$\lim_{\tau\to\infty}[F(\tau)-\beta H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)]=0$$

siendo $F(\tau)$ la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de f y estando β y $H(\alpha,\mu,\gamma,\tau)$ definidos en el Teorema 1.7.1.

DEMOSTRACIÓN:

Por las consideraciones sobre límites de funciones generalizadas hechas anteriormente, es:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\gamma} f_2(x) = 0,$$

con lo cual

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\gamma} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \beta.$$

Además, la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada F_1 de f_1 es igual a su ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada ordinaria y por consiguiente, por el Teorema 1.7.1:

$$\lim_{\tau\to\infty} [F_1(\tau) - \beta H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)] = 0.$$

Si F_2 denota la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de f_2, resulta por el Lema anterior,

$$\lim_{\tau\to\infty} F_2(\tau) = 0.$$

Como $F(\tau) = F_1(\tau) + F_2(\tau)$, el teorema queda probado.

A continuación, se establece un teorema de tipo abeliano que relaciona el comportamiento de cierto tipo de funciones generalizadas para $x \to \infty$ con el de su ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada para $\tau \to \infty$.

Teorema 2.11.2 *Sea $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ con $f = f_1 + f_2$, donde f_1 es una función ordinaria que satisface las hipótesis del Teorema 1.7.2 y f_2 una distribución de soporte compacto. Entonces, si $F(\tau)$ es la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada de f, se tiene que*

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)] = 0$$

estando β y $H(\alpha, \mu, \gamma, \tau)$ determinados en el Teorema 1.7.2.

Demostración:

Como la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada contiene a la clásica como caso particular, sigue inmediatamente la conclusión por el Teorema 1.7.2 y la asignación de límite para $x \to \infty$ sobre distribuciones de soporte compacto.

Es de destacar que si f_2 tiene soporte compacto entonces,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\gamma} f_2(x) = 0$$

y

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\gamma} f(x) = \beta,$$

a tenor de las consideraciones hechas sobre límites de funciones generalizadas, teniéndose así una generalización del correspondiente teorema de tipo abeliano clásico. En caso contrario, no queda demasiado claro que se pueda asignar límite para $x \to \infty$ a la función generalizada f_2 y la constante β que aparece en el Teorema sería simplemente el límite para $x \to \infty$ de $x^{-\gamma} f_1(x)$.

CAPÍTULO III

Una convolución para la ${}_2\mathcal{F}_1$–transformada índice.

3.1. Preámbulo.

En este capítulo se introduce una convolución para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformación clásica haciendo uso de un operador traslación generalizado introducido a partir de una fórmula producto para la función $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)$, estudiándose también sus propiedades fundamentales. Seguidamente, se define otro operador traslación generalizado que permite considerar una convolución relativa a la transformación generalizada siguiendo técnicas empleadas en la definición de convolución de otras transformadas de tipo índice (véase [19], [20], [18], [55]). Se analizan asímismo las principales propiedades de esta convolución.

3.2. Una fórmula integral para el producto de dos funciones hipergeométricas.

En [34] (pág. 1003) se prueba la siguiente fórmula de adición para funciones asociadas de Legendre

$$(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^{-\mu}(z) = 2^\mu \Gamma(\mu)(x^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}(y^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu+n)(-1)^n(\mu+\nu+1)_n(\mu-\nu)_n P_\nu^{-\mu-n}(x) P_\nu^{-\mu-n}(y) C_n^\mu(cos\,\theta) \quad (3.2.1)$$

siendo

$$z = xy + [(x^2-1)(y^2-1)]^{\frac{1}{2}} cos\,\theta \quad (3.2.2)$$

$$(\mu+\nu+1)_n = \frac{\Gamma(\mu+\nu+1+n)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}$$

$$(\mu+\nu+1)_0 = 1$$

y C_n^μ el polinomio de Gegenbauer de primera especie y orden μ (véase [13]). La validez de (3.2.1) queda condicionada a que $R_e\mu > -\frac{1}{2}$, $x > 1$, $y > 1$.

Multiplicando ambos miembros de (3.2.1) por $sen^{2\mu}\theta$ e integrando respecto a θ entre 0 y π, se tiene:

$$\int_0^\pi (z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^{-\mu}(z) sen^{2\mu}\theta d\theta =$$

$$2^\mu\Gamma(\mu)(x^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}(y^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty (\mu+n)(-1)^n(\mu+\nu+1)_n(\mu-\nu)_n P_\nu^{-\mu-n}(x)P_\nu^{-\mu-n}(y)C_n^\mu(cos\,\theta)sen^{2\mu}\theta d\theta \tag{3.2.3}$$

Puesto que el comportamiento de las funciones de Gegenbauer (ver [13]) garantiza la convergencia uniforme de la serie, se podrá integrar término a término y escribir (3.2.3) de la siguiente forma

$$2^\mu\Gamma(\mu)(x^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}(y^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

$$\sum_{n=0}^\infty (\mu+n)(-1)^n(\mu+\nu+1)_n(\mu-\nu)_n P_\nu^{-\mu-n}(x)P_\nu^{-\mu-n}(y)\int_0^\pi C_n^\mu(cos\,\theta)sen^{2\mu}\theta d\theta \tag{3.2.4}$$

Teniendo en cuenta ahora que ([13], pág. 177)

$$\int_0^\pi C_n^\mu(cos\;\theta)sen^{2\mu}\theta\; d\theta = \begin{cases} 0, & n=1,2,3,\cdots \\ \frac{2^{-2\mu}\pi\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)^2}, & n=0 \end{cases}$$

resulta

$$\int_0^{\pi}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}P_\nu^{-\mu}(z)sen^{2\mu}\theta d\theta =$$

$$2^\mu\Gamma(\mu)(x^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}(y^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\mu P_\nu^{-\mu}(x)P_\nu^{-\mu}(y)\frac{2^{-2\mu}\pi\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)^2}$$

de donde sigue

$$P_\nu^{-\mu}(x)P_\nu^{-\mu}(y) =$$

$$\frac{2^\mu\Gamma(\mu+1)}{\pi\Gamma(2\mu+1)}[(x^2-1)(y^2-1)]^{\frac{\mu}{2}}\int_0^{\pi}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}P_\nu^{-\mu}(z)sen^{2\mu}\theta d\theta$$

con z dado por (3.2.2).

Así, y como:

$$\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z) = \Gamma(\mu+1)z^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(z+1)^{-\frac{\mu}{2}}P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(2z+1)$$

se tendrá

$$\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^\alpha\int_0^{\pi} z^{-\alpha}\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)sen^{2\mu}\theta\ d\theta \qquad (3.2.5)$$

con

$$z = 2xy + x + y + 2[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}}cos\ \theta \qquad (3.2.6)$$

y si en (3.2.5) se toma z como nueva variable:

$$\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y) =$$

$$= \int_0^\infty K(x,y,z)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)dz = {}_2\mathcal{F}_1\left(K(x,y,\cdot)\right) \tag{3.2.7}$$

siendo

$$K(x,y,z) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{-2\mu}\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^{\alpha-\mu}[(x+1)(y+1)]^{-\mu}z^{-\alpha}Y(x,y,z)^{\mu-\frac{1}{2}}, & Y>0 \\ \\ 0, \quad Y \leq 0 \end{cases} \tag{3.2.8}$$

con

$$Y(x,y,z) = 4xyz + 2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2. \tag{3.2.9}$$

Obsérvese que

$$K(x,y,z) = K(y,x,z).$$

Incluímos ahora un Lema que será requerido posteriormente.

Lema 3.2.1 *Si $x,y \in \mathbf{I}$, $\theta \in [0,\pi]$ y z viene dado por (3.2.6), se tiene que:*

$$Y(x,y,z) \leq 4[xyz(x+1)(y+1)(z+1)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.2.10}$$

$$z(z+1) \geq xy(x+1)(y+1)\ sen^4\theta. \tag{3.2.11}$$

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, es fácil comprobar que si $x,y \in \mathbf{I}$, puede escribirse:

$$2xy + x + y - 2[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

de donde se infiere:

$$(2x+1)(2y+1) - 4[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}} \geq 1 \tag{3.2.12}$$

y tras algunas operaciones:

$$(2z+1)^2 \geq \left[(2x+1)(2y+1) - 4[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}}\right]^2 +$$

$$+16xy(x+1)(y+1)(1+cos\ \theta)^2 +$$

$$8\left((2x+1)(2y+1) - 4\sqrt{xy(x+1)(y+1)}\right)(1+cos\ \theta)[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.13}$$

Ahora, de (3.2.12) y (3.2.13), se deduce:

$$4z(z+1) \geq 16xy(x+1)(y+1)(1+cos\ \theta\ )^2 \geq 4xy(x+1)(y+1)\ sen^4\theta$$

desigualdad que no es otra que la (3.2.11).

Para demostrar (3.2.10) basta ver que la desigualdad es obvia si $Y \leq 0$; y si fuera $Y > 0$ se tendría:

$$Y(x,y,z) = 4xy(x+1)(y+1)\ sen^2\theta$$

que por la (3.2.11), se concluye la (3.2.10).

Añadamos, por último, que de la definición de $K(x,y,z)$ y del Lema anterior resulta:

$$|K(x,y,z)| \leq C(xy)^{R_e(\alpha-\mu)}[(x+1)(y+1)]^{-R_e\mu} z^{-R_e\alpha} Y^{R_e\mu-\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M(xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})-\frac{1}{4}}[(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} z^{R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)-\frac{1}{4}}(z+1)^{R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} \tag{3.2.14}$$

con $M > 0$, y en particular:

$$K(x,y,z) = \begin{cases} O\left(y^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})-\frac{1}{4}}\right), & y \to 0 \\ O\left(y^{R_e(\alpha-\mu)-\frac{1}{2}}\right), & y \to \infty \end{cases} \tag{3.2.15}$$

3.3. Un operador traslación generalizado.

En base a la fórmula integral (3.2.7), definiremos ahora un operador traslación generalizado sobre los elementos de un cierto espacio.

Denotamos por $E^{\alpha,\mu}$ el espacio de las funciones f localmente integrables en $(0,\infty)$, tales que:

$$f(t) = O(t^{\beta}), \quad t \to 0$$

$$f(t) = O(t^{\lambda}), \quad t \to \infty$$

con

$$\beta > R_e(\frac{\mu}{2} - \alpha) - \frac{3}{4}, \quad \lambda < R_e(\mu - \alpha) - \frac{1}{2}.$$

Entonces, para $g \in E^{\alpha,\mu}$, puede definirse el siguiente operador traslación generalizado $\mathcal{T}_x$:

$$\mathcal{T}_x g(z) = \int_0^{\infty} K(x,y,z) g(y) dy. \tag{3.3.1}$$

Obsérvese que, de (3.2.15) sigue inmediatamente:

$$\mathcal{T}_x g(z) = \begin{cases} O\left(x^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) - \frac{1}{4}}\right), & x \to 0 \\ \\ O\left(x^{R_e(\alpha-\mu) - \frac{1}{2}}\right), & x \to \infty. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

En la siguiente proposición se recoge una interesante propiedad del operador traslación que se acaba de definir:

Proposición 3.3.1 *Si $g \in E^{\alpha,\mu}$, $R_e\mu > \frac{1}{2}$, se tiene:*

$${}_2\mathcal{F}_1\left[\mathcal{T}_x g(z)\right] = \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\, {}_2\mathcal{F}_1\left[g(z)\right]. \tag{3.3.3}$$

Demostración:

En primer lugar, y puesto que:

$${}_2\mathcal{F}_1[\mathcal{T}_x g(z)] = \int_0^{\infty} \mathcal{T}_x g(z) \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z) dz =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, z) dz \int_0^\infty K(x, y, z) g(y) dy \tag{3.3.4}$$

resulta, por el comportamiento asintótico de $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, z)$, que se puede encontrar un $M_1 > 0$ de modo que

$$|\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, z)| \leq z^{R_e \alpha}(z+1)^{-R_e \mu - \frac{1}{2}}$$

con lo cual,

$$\int\int_{G_x} |\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, z) K(x, y, z) g(y)| dy\, dz \leq$$

$$\leq M_2 \int\int_{G_x} |g(y)| y^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) - \frac{1}{4}} (y+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} z^{R_e \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} (z+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} - \frac{3}{4}} dy\, dz \tag{3.3.5}$$

y como la función $z^{R_e \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}}(z+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} - \frac{3}{4}}$ está acotada para $z > 0$ si $R_e \mu > \frac{1}{2}$, la (3.3.5) se conserva menor o igual que

$$M_3 \int\int_{G_x} |g(y)| y^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) - \frac{1}{4}} (y+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}} dy\, dz =$$

$$= \int_0^\infty |g(y)| y^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) + \frac{1}{4}} (y+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}} dy < \infty$$

pues $g \in E^{\alpha, \mu}$, y viniendo el recinto G_x dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < y < \infty \\ 2xy + x + y - 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} < z < \\ \qquad\qquad < 2xy + x + y + 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} \end{array} \right\}$$

Así pues, podrá cambiarse el orden de integración en (3.3.4), y por (3.2.7) inferirse:

$$\int_0^\infty g(y) dy \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, z) K(x, y, z) dz =$$

$$= \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, y) g(y) dy = \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) {}_2\mathcal{F}_1[g].$$

3.4. Convolución para la transformada clásica.

Si f y g pertenecen a $E^{\alpha,\mu}$, se define la convolución $f * g$ así:

$$(f * g)(z) = \int_0^\infty f(x)\mathcal{T}_x g(z)dx. \tag{3.4.1}$$

El siguiente teorema pone de manifiesto las principales propiedades de esta convolución:

Teorema 3.4.1 *Si $f, g, h \in E^{\alpha,\mu}$ con $R_e\mu > \frac{1}{2}$, se tiene:*

$$\begin{array}{rrcl} i) & f * g & = & g * f \\ ii) & {}_2\mathcal{F}_1[f * g] & = & {}_2\mathcal{F}_1[f]{}_2\mathcal{F}_1[g] \\ iii) & f * (g + h) & = & f * g + f * h \end{array}$$

Demostración:

i) Dado que $f, g \in E^{\alpha,\mu}$, por (3.2.15) tiene sentido definir $g * f$. Además:

$$(g * f)(z) = \int_0^\infty g(x)\mathcal{T}_x f(z)dx = \int_0^\infty g(x)dx \int_0^\infty K(x, y, z)f(y)dy \tag{3.4.2}$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.2.14):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(y)g(x)K(x, y, z)|dx\, dy \leq$$

$$\leq M \int_0^\infty \int_0^\infty |f(y)g(x)|(xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})-\frac{1}{4}}[(x + 1)(y + 1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}dx\, dy, \quad M > 0$$

la cual existe por ser f y g elementos de $E^{\alpha,\mu}$. Por tanto, podremos cambiar en (3.4.2) el orden de integración, resultando:

$$\int_0^\infty f(y)dy \int_0^\infty K(x, y, z)g(x)dx = \int_0^\infty f(y)\mathcal{T}_y g(z)dy = (f * g)(z).$$

ii) Por definición de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada:

$${}_2\mathcal{F}_1[f * g] = \int_0^\infty (f * g)(z)\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, z)dz =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)dz \int_0^\infty f(x)\mathcal{T}_x g(z)dx =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)dz \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(x,y,z)g(y)dy. \tag{3.4.3}$$

Al igual que en la Proposición anterior, será posible encontrar una constante real $M_1 > 0$ tal que

$$|\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)| \leq M_1 z^{R_e\alpha}(z+1)^{-R_e\mu-\frac{1}{2}} \tag{3.4.4}$$

Ahora bien, en virtud de la definición de $K(x,y,z)$, existe

$$\int\int\int_G |\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)f(x)g(y)K(x,y,z)| \; dx\; dy\; dz \tag{3.4.5}$$

siendo G el recinto:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \\ 2xy + x + y - 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} < z < \\ \qquad\qquad\qquad < 2xy + x + y + 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} \end{array} \right\}$$

y por (3.2.14) y (3.4.4), la integral (3.4.5) está acotada por:

$$M_2 \int\int\int_G |f(x)g(y)|(xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})-\frac{1}{4}}.$$

$$[(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} z^{R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{3}{4}} dx\; dy\; dz \tag{3.4.6}$$

Así, si tenemos en cuenta que $z^{R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{3}{4}}$ se mantiene acotada para $z > 0$ y $R_e\mu > \frac{1}{2}$, (3.4.6) se conserva menor o igual que

$$M_3 \int\int\int_G |f(x)g(y)|(xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})-\frac{1}{4}}[(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} dx\; dy\; dz \leq$$

$$\leq M_4 \int_0^\infty |f(x)| x^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) + \frac{1}{4}} (x+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}} dx.$$

$$\int_0^\infty |g(y)| y^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2}) + \frac{1}{4}} (y+1)^{-R_e \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}} dy$$

siendo $M_i > 0$, $(1 \leq i \leq 4)$ y como ambas integrales existen, por ser $f, g \in E^{\alpha,\mu}$, queda garantizada la existencia de (3.4.5), lo que faculta el cambio del orden de integración en (3.4.3), obteniéndose, en definitiva (recordando (3.2.7)):

$$\int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty g(y)dy \int_0^\infty K(x,y,z)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,z)dz =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)dx \int_0^\infty g(y)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y)dy = {}_2\mathcal{F}_1[f]{}_2\mathcal{F}_1[g].$$

Para probar iii), pongamos:

$$[f * (g+h)](z) = \int_0^\infty f(x)\mathcal{T}_x(g+h)(z)dx =$$

$$= \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(x,y,z)\left(g(y) + h(y)\right)dy$$

que, por la convergencia absoluta de la integral, se puede expresar en la forma:

$$\int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(x,y,z)g(y)dy + \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty K(x,y,z)h(y)dy =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\mathcal{T}_x g(z)dx + \int_0^\infty f(x)\mathcal{T}_x h(z)dx = (f*g)(z) + (f*h)(z).$$

3.5. La convolución generalizada.

Para definir la convolución de dos funciones generalizadas, se precisa definir un nuevo operador traslación que introducimos a partir de (3.2.5) mediante la siguiente:

Definición 3.5.1 *Si $x, y \in (0,\infty)$ y $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$, se define el operador $\mathfrak{T}_x$ así:*

$$\mathfrak{T}_x\phi(y) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^{\alpha}\int_0^{\pi} z^{-\alpha} sen^{2\mu}\theta \ \phi(z)d\theta \qquad (3.5.1)$$

viniendo z dado por (3.2.6).

Si en la integral (3.5.1), se toma z como nueva variable, puede escribirse:

$$\mathfrak{T}_x\phi(y) = \int_0^{\infty} K(x,y,z) \ \phi(z) \ dz \qquad (3.5.2)$$

donde $K(x,y,z)$ está dado por (3.2.8).

Esta última integral debe ser entendida como una integral impropia de Riemann, esto es:

$$\lim_{\substack{s_1\to z_1\\ s_2\to z_2}} \frac{2^{-2\mu}\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_{s_1}^{s_2} \phi(z)[(z-z_1)(z_2-z)]^{\mu-\frac{1}{2}}(xy)^{\alpha-\mu}[(x+1)(y+1)]^{-\mu}z^{-\alpha}dz$$

siendo

$$z_1 = 2xy + x + y - 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)}$$

$$z_2 = 2xy + x + y + 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)}$$

Además, $z(x,y,\theta) \geq z_1 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbf{I}$, $\theta \in [0,\pi]$ y $z = 0$ si y sólo si $x = y$, $\theta = \pi$.

El siguiente lema es de interés para demostraciones posteriores:

Lema 3.5.1 *Si $x, y \in \mathbf{I}$, $K(x,y,\cdot)$ genera un elemento regular en $U'_{a,\mu,\alpha}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si $x, y \in \mathbf{I}$, con $x \neq y$, se tiene:

$$\int_0^\infty \left| K(x,y,z)(2z+1)^{-a} z^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(z+1)^{-\frac{\mu}{2}} \right| dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \left| K(x,y,z)(2z+1)^{-a} z^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(z+1)^{-\frac{\mu}{2}} \right| dz < \infty$$

pues, por (3.2.14):

$$|K(x,y,z)| \leq M(xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})-\frac{1}{4}}[(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} z^{-R_e\alpha+R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}(z+1)^{R_e\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}$$

Con esto tiene sentido definir el operador traslación generalizado sobre $U_{a,\mu,\alpha}$ mediante la igualdad

$$\mathfrak{T}_x\phi(y) =< K(x,y,z), \phi(z) >= \int_0^\infty K(x,y,z)\phi(z)\, dz.$$

En relación con este operador, es válida la siguiente

Proposición 3.5.1 *Para todo $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$:*

$$\mathfrak{T}_x\phi(y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{I} \times \mathbf{I}).$$

Además, $\mathfrak{T}_x\phi(y)$ es simétrico respecto a x e y.

DEMOSTRACIÓN:

Se tiene que

$$\mathfrak{T}_x\phi(y) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^\alpha \int_0^\pi z^{-\alpha} sen^{2\mu}\theta\ \phi(z) d\theta$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{T}_x\phi(y) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^\alpha \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{-\alpha}\ \phi(t)\right) sen^{2\mu}\theta\ \frac{\partial z}{\partial x} d\theta.$$

Al ser $D_z^k\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) = O(1)$ para $z \to 0^+$, la integral anterior y cualquier otra similar sobre derivadas de ϕ representa una integral en sentido de Riemann de una función continua, con lo cual $\mathfrak{T}_x\phi(y)$ es indefinidamente derivable respecto de ambas variables. La simetría en x e y es evidente, a la vista de la propia definición del operador traslación generalizado.

Proposición 3.5.2 *Si $\mathfrak{T}_x$ es el operador traslación generalizado definido en (3.5.1) y A_x el operador diferencial (2.2.2), se tiene:*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & A_y\mathfrak{T}_x\phi(y) & = & A_y\mathfrak{T}_y\phi(x) \\ (2) & & = & \mathfrak{T}_x A_y\phi(y) \\ (3) & & = & \mathfrak{T}_y A_x\phi(x) \\ (4) & & = & A_x\mathfrak{T}_x\phi(y) \end{array}$$

Demostración:

La igualdad (1) es trivial por la simetría del operador $\mathfrak{T}_x$.

Para probar (2), hay que tener en cuenta que:

$$A_y\mathfrak{T}_x\phi(y) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} A_y (xy)^\alpha \int_0^\pi z^{-\alpha} sen^{2\mu}\theta\ \phi(z)d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

$$(xy)^\alpha\ y^{-\mu}(y+1)^{-\mu}D_y y^{\mu+1}(y+1)^{\mu+1}D_y \int_0^\pi z^{-\alpha} sen^{2\mu}\theta\ \phi(z)d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

$$(xy)^\alpha \int_0^\pi sen^{2\mu}\theta \left[y^{-\mu}(y+1)^{-\mu}D_y y^{\mu+1}(y+1)^{\mu+1}D_y\right]\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right)d\theta.$$

Por otra parte,

$$\mathfrak{T}_x A_y\phi(y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^{\alpha}.$$

$$\int_0^{\pi} sen^{2\mu}\theta \left[z^{-\mu}(z+1)^{-\mu}D_z z^{\mu+1}(z+1)^{\mu+1}D_z\right]\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) d\theta.$$

Por consiguiente, para el aserto (2) será suficiente comprobar que

$$\int_0^{\pi} sen^{2\mu}\theta \left[y^{-\mu}(y+1)^{-\mu}D_y y^{\mu+1}(y+1)^{\mu+1}D_y\right]\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} sen^{2\mu}\theta \left[z^{-\mu}(z+1)^{-\mu}D_z z^{\mu+1}(z+1)^{\mu+1}D_z\right]\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) d\theta$$

mas, está última igualdad sigue sin dificultad ponderando que, por la relación (3.2.6) existente entre x, y y z,

$$D_y = \frac{2yz+z-x+y}{2y(y+1)}D_z$$

$$D_y^2 = \left(\frac{2yz+z-x+y}{2y(y+1)}\right)^2 D_z^2 + \frac{2xy+x+y-z}{4y^2(y+1)^2}D_z$$

y, además, que

$$D_z\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) = -\frac{1}{2[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}} sen\,\theta}D_\theta\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right)$$

$$D_z^2\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{4xy(x+1)(y+1)sen^2\theta}\left[D_\theta^2\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right) - ctg\,\theta\; D_\theta\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right)\right]$$

bastaría ya la aplicación de una integración por partes.

La prueba de (3) es trivial, dada la simetría del operador en x e y.

Para demostrar (4), tengamos en cuenta que:

$$\mathfrak{T}_y A_x \phi(x) = \mathfrak{T}_x A_y \phi(y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^{\alpha}.$$

$$\int_0^{\pi} sen^{2\mu}\theta \left[z^{-\mu}(z+1)^{-\mu}D_z z^{\mu+1}(z+1)^{\mu+1}D_z\right]\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right)d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^{\alpha}.$$

$$\int_0^{\pi} sen^{2\mu}\theta \left[x^{-\mu}(x+1)^{-\mu}D_x x^{\mu+1}(x+1)^{\mu+1}D_x\right]\left(z^{-\alpha}\phi(z)\right)d\theta$$

probándose igual que (2), por la simetría entre x e y, que esta última integral es igual a

$$A_x\mathfrak{T}_x\phi(y).$$

Proposición 3.5.3 *El operador* $\mathfrak{T}_x$, $(\forall x \in (0,\infty))$ *es una aplicación lineal y continua de* $U_{a,\mu,\alpha}$ *en* $U_{a,\mu,\alpha}$.

DEMOSTRACIÓN:

La linealidad es evidente. Para ver la continuidad, sea $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$. Se tiene que $\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) < \infty$. Por consiguiente,

$$\left|A_y^k\mathfrak{T}_x\phi(y)\right| = \left|\mathfrak{T}_x A_y^k\phi(y)\right| =$$

$$= \left|\frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}(xy)^{\alpha}\int_0^{\pi} z^{-\alpha} sen^{2\mu}\theta\ A_z^k\phi(z)d\theta\right| \leq$$

$$\leq \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi)\left|\frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right|(xy)^{R_e\alpha}.$$

$$\int_0^{\pi} z^{-R_e\alpha}\ sen^{2R_e\mu}\theta(2z+1)^{-a}z^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}d\theta =$$

$$= \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) \left| \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \right| (xy)^{R_e\alpha} \int_0^\pi \left[z^{-1}(z+1)^{-1} sen^4\theta \right]^{R_e \frac{\mu}{2}} (2z+1)^{-a} d\theta$$

y por el Lema 3.2.1, esta última expresión está acotada por

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) \left| \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \right| 4^{R_e\mu} (xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})} [(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}} \int_0^\pi (2z+1)^{-a} d\theta =$$

$$= \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) \left| \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \right| 4^{R_e\mu} (xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})} [(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}} .$$

$$\int_0^\pi \left[(2x+1)(2y+1) + 4[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}} cos\theta \right]^{-a} d\theta =$$

$$= \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) \left| \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \right| 4^{R_e\mu} (xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})} [(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}} .$$

$$[(2x+1)(2y+1)]^{-a} \pi T^a P_{-a}(T)$$

siendo

$$T = (2x+1)(2y+1)(4x^2+4y^2+2x+2y+1)^{-\frac{1}{2}}$$

y $P_{-a}(T)$ la función asociada de Legendre de orden 0 y grado $-a$ (Erdelyi [13] 3.7(14), pág. 157).

Además, $T^a P_{-a}(T)$ está acotada para $0 \leq a < \frac{1}{2}$ (ver [59] 12.18, pág. 173).

Con esto,

$$\left| A_y^k \mathfrak{T}_x \phi(y) \right| \leq B (xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})} [(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}} [(2x+1)(2y+1)]^{-a} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi)$$

y así:

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\mathfrak{T}_x\phi(y)) \leq B x^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})} (x+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}} (2x+1)^{-a} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi),$$

la constante B dependiendo de μ y de a.

El operador $\mathfrak{T}_x$ tiene asociado el correspondiente operador adjunto $\mathfrak{T}_x'$ de $U'_{a,\mu,\alpha}$ en $U'_{a,\mu,\alpha}$, y se puede enunciar:

Proposición 3.5.4 *Si $f \in E^{\alpha,\mu}$, entonces f y $\mathcal{T}_x f$ son elementos del espacio $U'_{a,\mu,\alpha,reg}$, y sobre $U_{a,\mu,\alpha}$ se tiene la igualdad:*

$$\mathfrak{T}_x' f = \mathcal{T}_x f.$$

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar, el hecho de que $f \in U'_{a,\mu,\alpha,reg}$, resulta inmediato a la vista del comportamiento asintótico en 0 y en ∞ de las funciones de dicho espacio.

Sea ahora $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$. Por definición de $\mathfrak{T}_x'$, se puede escribir:

$$\langle \mathfrak{T}_x' f(y), \phi(y) \rangle = \int_0^\infty f(y)dy \int_0^\infty K(x,y,z)\phi(z)dz.$$

Como la integral iterada

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K(x,y,z)||\phi(z)||f(y)|dz\ dy$$

existe, puesto que el interior de la integral sobre z está acotado por

$$B\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi)(xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}[(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}}[(2x+1)(2y+1)]^{-a}|f(y)| \quad (3.5.3)$$

según se desprende de la demostración de la proposición anterior y esta última función es integrable sobre $(0,\infty)$ por ser f una función generalizada regular, se puede aplicar el teorema de Fubini, obteniéndose:

$$\langle \mathfrak{T}_x' f(y), \phi(y) \rangle = \int_0^\infty \phi(z)dz \int_0^\infty f(y)K(x,y,z)dy =$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{T}_x f(z)\phi(z)dz = \langle \mathcal{T}_x f, \phi \rangle .$$

Con esto se tiene

$$\mathfrak{T}'_x f = \mathcal{T}_x f$$

sobre $U_{a,\mu,\alpha}$. Ahora bien, $\mathcal{T}_x f$ es un elemento de $U'_{a,\mu,\alpha,reg}$ puesto que, como hemos visto,

$$\int_0^\infty \phi(y)\mathcal{T}_x f(y)dy$$

existe para todo $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$ y, por consiguiente, para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$. De ello sigue ([6] 13.13) que esta función es localmente integrable en $\mathbf{I}$. Además, como

$$\gamma_{0,a,\mu,\alpha}\left((2y+1)^{-a} y^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(y+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}\right) = 1,$$

por ser f un miembro de $U'_{a,\mu,\alpha,reg}$, sigue que $|f(y)| \in U'_{a,\mu,\alpha,reg}$, de donde por (3.5.3):

$$\int_0^\infty (2y+1)^{-a} y^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(y+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}} \left|\mathcal{T}_x f(y)\right| dy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty (2y+1)^{-a} y^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(y+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}} dy \int_0^\infty |K(x,z,y)f(z)|dz \leq$$

$$\leq Bx^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(x+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}} \int_0^\infty (2z+1)^{-a} z^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}|f(z)|dz < \infty$$

Se desprende ya fácilmente que $\mathcal{T}_x f \in U'_{a,\mu,\alpha,reg}$ y coincide con $\mathfrak{T}'_x f$ sobre $U_{a,\mu,\alpha}$.

En la siguiente proposición se pone de manifiesto la relación existente entre la transformación generalizada objeto de estudio y el operador adjunto de $\mathfrak{T}_x$ definido anteriormente.

Proposición 3.5.5 *Para* $x, y \in (0, \infty)$ *y* $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$*, la transformación generalizada de* $\mathfrak{T}'_x f$ *es igual a*

$$ {}_2\mathcal{F}_1[\mathfrak{T}'_x f(y)] = \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) {}_2\mathcal{F}_1[f(y)] \tag{3.5.4}$$

Demostración:

$$ {}_2\mathcal{F}_1\left(\mathfrak{T}'_x f\right)(y) = \langle \mathfrak{T}'_x f(y), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, y) \rangle =$$

$$= \langle f(y), \mathfrak{T}_x \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, y) \rangle =< f(y), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)\ \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, y) >=$$

$$= \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)\ < f(y), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, y) >= \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x)\ {}_2\mathcal{F}_1(f)(y).$$

Definimos seguidamente una convolución para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice generalizada en base al operador traslación que se ha definido.

Sean $f, g \in U'_{a,\mu,\alpha}$ y $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$. Una convolución $f{*}g$ sobre $U_{a,\mu,\alpha}$ puede definirse de la siguiente forma:

$$< f{*}g, \phi >= \langle f(x), \langle \mathfrak{T}'_x g(y), \phi(y) \rangle \rangle . \tag{3.5.5}$$

Antes de probar las propiedades más destacadas de esta convolución, necesitamos probar algunos lemas previos. En primer lugar:

Lema 3.5.2 *Para toda* $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$*,* $x \in \mathbf{I}$*, y siendo* k *un entero no negativo, se tiene:*

$$D_x^k \mathfrak{T}_x \phi(y) \in U_{a,\mu,\alpha}$$

como función de y*.*

DEMOSTRACIÓN:

Utilizando un argumento inductivo, se demuestra que existen funciones $\alpha_{jk}(x),\ \beta_{jk}(x) \in \mathcal{C}^\infty$, tales que

$$D_x^k = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{jk}(x) D_x A_x^j + \sum_{j=0}^{m} \beta_{jk}(x) A_x^j,$$

siendo m la parte entera de $\frac{k}{2}$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$A_x^k \mathfrak{T}_x \phi(y) = \mathfrak{T}_x A_x^k \phi(y) \in U_{a,\mu,\alpha}$$

como función de y, nos bastaría probar que $D_x \mathfrak{T}_x \psi(y) \in U_{a,\mu,\alpha}$, para toda $\psi \in U_{a,\mu,\alpha}$.

Por los Lemas 2.2.4 y 2.2.8, se tiene:

$$D_z\left(z^{-\alpha} A_z \psi(z)\right) = O\left(z^{-R_e \frac{\mu}{2}}\right), \quad z \to 0^+$$

$$D_z\left(z^{-\alpha} A_z \psi(z)\right) = O\left(z^{-R_e \mu - a - 1}\right), \quad z \to \infty$$

con lo cual, existe una constante $L > 0$, dependiente de k y de ψ, tal que

$$\left| D_z\left(z^{-\alpha} A_z^k \psi(z)\right)\right| \leq L\ z^{-R_e \frac{\mu}{2}} (z+1)^{-R_e \frac{\mu}{2}} (2z+1)^{-a-1-R_e \frac{\mu}{2}}$$

y, procediendo de forma similar a la demostración de la Proposición 3.5.3, sigue que para todo entero no negativo k:

$$\left| A_y^k D_x \mathfrak{T}_x \psi(y)\right| = \left| D_x \mathfrak{T}_x A_y^k \psi(y)\right| =$$

$$= \left| \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} (xy)^\alpha \int_0^\pi \frac{2xz+z-y+x}{2x(x+1)} D_z\left[z^{-\alpha} A_z^k \psi(z)\right] sen^{2\mu}\theta d\theta \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right| (xy)^{R_e \alpha}.$$

$$\int_0^\pi \left|\frac{2xz+z-y+x}{2x(x+1)}\right| \left|D_z\left[z^{-\alpha}A_z^k\psi(z)\right]\right| \left|sen^{2\mu}\theta\right| d\theta \leq$$

$$\leq L\ \left|\frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right| \frac{x^{R_e\alpha}y^{R_e\alpha}}{2x(x+1)}.$$

$$\int_0^\pi |2xz+z-y+x| z^{-R_e\frac{\mu}{2}}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}(2z+1)^{-a-R_e\frac{\mu}{2}-1}\left|sen^{2\mu}\theta\right| d\theta$$

y como $z = 2xy + x + y + 2[xy(x+1)(y+1)]^{\frac{1}{2}}cos\ \theta$, teniendo en cuenta (3.2.11), esta expresión está acotada por

$$\leq L\ \left|\frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right| \frac{x^{R_e\alpha}y^{R_e\alpha}}{2x(x+1)}[x(x+1)y(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}}.$$

$$\int_0^\pi |2xz+z-y+x|(2z+1)^{-a-R_e\frac{\mu}{2}-1}d\theta.$$

Ahora, de la definición de z, sigue que $Y(x,y,z) \geq 0$, estando $Y(x,y,z)$ dado por (3.2.9). Por consiguiente, existe un $\eta \in [0,\pi]$, tal que

$$y = 2xz + x + z + 2[xz(x+1)(z+1)]^{\frac{1}{2}}cos\ \eta.$$

Con esto:

$$|2xz+z-y+x| = |2[xz(x+1)(z+1)]^{\frac{1}{2}}cos\ \eta| \leq$$

$$\leq 2\sqrt{x(x+1)}\sqrt{z(z+1)} \leq 2\sqrt{x(x+1)}(2z+1)$$

de donde:

$$\left|A_y^k D_x \mathfrak{T}_x \psi(y)\right| \leq$$

$$L\ \left|\frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right| \frac{x^{R_e\alpha-\frac{1}{2}}y^{R_e\alpha}}{\sqrt{x+1}}[xy(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}}[(2x+1)(2y+1)]^{-a-R_e\frac{\mu}{2}}$$

infiriéndose así el aserto.

Lema 3.5.3 *Si $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$, $x \in \mathbf{I}$ y n es un entero no negativo, se tiene:*

$$D_x^n \langle f(y), \mathfrak{T}_x \phi(y) \rangle = \langle f(y), D_x^n \mathfrak{T}_x \phi(y) \rangle .$$

Demostración:

Lo probaremos para $n = 1$, ya que para $n > 1$, y por inducción, se procedería de forma similar.

Consideremos, para $h \neq 0$,

$$\frac{1}{h} \langle f(y), \mathfrak{T}_{x+h}\phi(y) - \mathfrak{T}_x \phi(y) \rangle - \langle f(y), D_x \mathfrak{T}_x \phi(y) \rangle = \langle f(y), \xi_h(x,y) \rangle \quad (3.5.6)$$

donde

$$\xi_h(x,y) = \frac{\mathfrak{T}_{x+h}\phi(y) - \mathfrak{T}_x \phi(y)}{h} - \frac{d}{dx}\mathfrak{T}_x \phi(y).$$

Teniendo en cuenta que

$$\xi_h(x,y) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt \int_x^t \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mathfrak{T}_\eta \phi(y) \, d\eta$$

se deduce:

$$A_y^k \xi_h(x,y) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt \int_x^t \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mathfrak{T}_\eta A_y^k \phi(y) \, d\eta$$

y así,

$$\left| (2y+1)^a y^{\frac{\mu}{2}-\alpha} (y+1)^{\frac{\mu}{2}} A_y^k \xi_h(x,y) \right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{2} \sup_{x-|h| \leq \eta \leq x+|h|} \left| (2y+1)^a y^{\frac{\mu}{2}-\alpha} (y+1)^{\frac{\mu}{2}} D_\eta^2 \mathfrak{T}_\eta A_y^k \phi(y) \right| . \quad (3.5.7)$$

Ahora, si $|h| < 1$, resulta, por el Lema anterior que

$$\left| (2y+1)^a y^{\frac{\mu}{2}-\alpha} (y+1)^{\frac{\mu}{2}} D_\eta^2 \mathfrak{T}_\eta A_y^k \phi(y) \right| \quad (3.5.8)$$

está acotado para $y \in \mathbf{I}$. Por tanto, por (3.5.7), $\xi_h(x,y)$ converge en $U_{a,\mu,\alpha}$ a cero para $h \to 0$; y como $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, se tiene de (3.5.7), que (3.5.6) converge a cero para $h \to 0$, como queríamos demostrar.

Lema 3.5.4 *Bajo las mismas hipótesis impuestas en los Lemas 3.5.2 y 3.5.3, la aplicación*

$$\phi \longmapsto \phi_f$$

donde $\phi_f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *está dada por*

$$\phi_f(x) = \langle \mathfrak{T}'_x f, \phi \rangle \, ,$$

es una transformación continua de $U_{a,\mu,\alpha}$ *en* $U_{a,\mu,\alpha}$*.*

Demostración:

Por el Lema anterior y la Proposición 3.5.2, se puede escribir

$$A_x^n \phi_f(x) = \langle f(y), A_x^n \mathfrak{T}_x \phi(y) \rangle = \left\langle f(y), A_y^n \mathfrak{T}_x \phi(y) \right\rangle .$$

Ahora bien, existen una constante $C > 0$ y un entero no negativo r dependientes de f, de manera que

$$|A_x^n \phi_f(x)| \leq C \max_{0 \leq k \leq r} \gamma_{k,a,\mu,\alpha} \left(A_y^n \mathfrak{T}_x \phi(y) \right) \leq C \max_{0 \leq k \leq r+n} \gamma_{k,a,\mu,\alpha} \left(\mathfrak{T}_x \phi(y) \right) \leq$$

$$\leq C\, B\, (xy)^{R_e(\alpha - \frac{\mu}{2})} [(x+1)(y+1)]^{-R_e \frac{\mu}{2}} [(2x+1)(2y+1)]^{-a} \max_{0 \leq k \leq r+n} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi)$$

teniéndose así:

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi_f) \leq M \max_{0 \leq k \leq r+n} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi)$$

habiéndose hecho uso de la Proposición 3.5.3. Esto nos permite afirmar la continuidad de la transformación $\phi \mapsto \phi_f$ de $U_{a,\mu,\alpha}$ en sí mismo.

En el siguiente teorema se recogen las principales propiedades de la convolución definida anteriormente.

Teorema 3.5.1 *Sean $f, g \in U'_{a,\mu,\alpha}$ y A'_x el operador adjunto de A_x. Se tiene:*

1. *$f\dot{*}g$ es un elemento de $U'_{a,\mu,\alpha}$.*

2. *La convolución así definida es distributiva.*

3. ${}_2\mathcal{F}_1(f\dot{*}g) = {}_2\mathcal{F}_1(f){}_2\mathcal{F}_1(g)$.

4. $A'_x(f\dot{*}g) = (A'_x f)\dot{*}g = f\dot{*}(A'_x g)$.

5. *Para todo $x \in \mathbf{I}$, las ecuaciones siguientes son válidas siendo $f, g, h \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$:*

   a) $f\dot{*}g = g\dot{*}f$

   b) $f\dot{*}(g\dot{*}h) = (f\dot{*}g)\dot{*}h$

   c) $\mathfrak{T}'_x(f\dot{*}g) = (\mathfrak{T}'_x f)\,\dot{*}g = f\dot{*}\,(\mathfrak{T}'_x g)$

Demostración:

De la definición de $f\dot{*}g$ y el Lema 3.5.4, sigue obviamente que la convolución $f\dot{*}g$ es un elemento de $U'_{a,\mu,\alpha}$, $\forall f, g \in U'_{a,\mu,\alpha}$.

Para demostrar el apartado 2), basta observar que

$$< f\dot{*}(g+h), \phi >= \langle f(x), \langle \mathfrak{T}'_x\,(g(y)+h(y))\,, \phi(y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(x), \langle g(y)+h(y), \mathfrak{T}_x\phi(y)\rangle\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \mathfrak{T}_x\phi(y)\rangle + \langle h(y), \mathfrak{T}_x\phi(y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(x), \langle g(y), \mathfrak{T}_x\phi(y)\rangle\rangle + \langle f(x), \langle h(y), \mathfrak{T}_x\phi(y)\rangle\rangle =$$

$$=< f\dot{*}g, \phi > + < f\dot{*}h, \phi > .$$

Para la prueba del apartado 3), obsérvese que

$${}_2\mathcal{F}_1(f\dot{*}g) = \langle (f\dot{*}g)(x), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\rangle =$$

$$= \langle f(x), \langle \mathfrak{T}'_x g(y), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(x), \langle g(y), \mathfrak{T}_x \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(x), \langle g(y), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(x), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\ {}_2\mathcal{F}_1(g)\rangle = \langle f(x), \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\rangle\ {}_2\mathcal{F}_1(g) =$$

$$= {}_2\mathcal{F}_1(f){}_2\mathcal{F}_1(g)$$

En cuanto a 4), tomemos $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$ y partamos de

$$\langle A'_x(f \dot{*} g)(x), \phi(x)\rangle = \langle (f \dot{*} g)(x), A_x\phi(x)\rangle =$$

$$= \langle f(x), \langle \mathfrak{T}'_x g(y), A_y\phi(y)\rangle\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \mathfrak{T}_x A_y \phi(y)\rangle\rangle\,,$$

que, por el Lema 3.5.3, es igual a:

$$\langle f(x), A_x\, \langle g(y), \mathfrak{T}_x\phi(y)\rangle\rangle = \langle A'_x f(x), \langle \mathfrak{T}'_x g(y), \phi(y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle (A'_x f)\, \dot{*} g, \phi\rangle$$

de donde resulta:

$$A'_x(f \dot{*} g) = (A'_x f)\, \dot{*} g$$

sobre $U_{a,\mu,\alpha}$.

De forma similar puede probarse:

$$A'_x(f \dot{*} g) = f \dot{*} (A'_x g)\,.$$

Por último demostremos 5).

(a) Si se aplica la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada a ambos miembros de

$$f \dot{*} g = g \dot{*} f$$

se infiere:

$${}_2\mathcal{F}_1(f){}_2\mathcal{F}_1(g) = {}_2\mathcal{F}_1(g){}_2\mathcal{F}_1(f)$$

quedando el resultado puesto de manifiesto, sin más que aplicar el teorema de unicidad de esta transformada.

El apartado (b) se prueba de forma totalmente análoga.

(c) Es suficiente tener en cuenta que

$$ {}_2\mathcal{F}_1\left(\mathfrak{T}'_x(f\dot{*}g)\right) = \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x){}_2\mathcal{F}_1(f\dot{*}g) = $$

$$ = \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x){}_2\mathcal{F}_1(f){}_2\mathcal{F}_1(g). $$

De la misma forma:

$$ {}_2\mathcal{F}_1\left((\mathfrak{T}'_x f)\dot{*}g\right) = {}_2\mathcal{F}_1\left(\mathfrak{T}'_x f\right){}_2\mathcal{F}_1(g) = $$

$$ = \mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x){}_2\mathcal{F}_1(f){}_2\mathcal{F}_1(g). $$

Mediante un proceso similar al empleado en la demostración de la Proposición 3.5.4 se prueba también la siguiente:

Proposición 3.5.6 *Si $f, g \in E^{\alpha,\mu}$, su convolución $f * g$ definida por (3.5.5) pertenece a $U'_{a,\mu,\alpha,reg}$ y coincide con la convolución generalizada $f\dot{*}g$ sobre $U_{a,\mu,\alpha}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Si ϕ es un elemento del espacio $U_{a,\mu,\alpha}$ se tiene:

$$ < f\dot{*}g, \phi >= \langle f(x), \langle \mathfrak{T}'_x g(y), \phi(y)\rangle\rangle = $$

$$ = \langle f(x), \langle \mathcal{T}_x g(y), \phi(y)\rangle\rangle = \left\langle f(x), \int_0^\infty \mathcal{T}_x g(y)\phi(y)dy \right\rangle = $$

$$ = \int_0^\infty f(x)dx \int_0^\infty \phi(y)dy \int_0^\infty K(x,z,y)g(z)dz. \tag{3.5.9} $$

Ahora bien,

$$ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x)||g(y)||\phi(z)||K(x,y,z)|\, dx\, dy\, dz \leq $$

$$\leq B\gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\phi).$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (xy)^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}[(x+1)(y+1)]^{-R_e\frac{\mu}{2}}[(2x+1)(2y+1)]^{-a}|f(x)||g(y)|dx\, dy$$

que es finito por ser $f, g \in U'_{a,\mu,\alpha,reg}$.

Por consiguiente, cabe cambiar el orden de integración en (3.5.9), infiriéndose:

$$\int_0^\infty \mathcal{T}_z f(y)g(z)dz \int_0^\infty \phi(y)dy = \int_0^\infty (f*g)(y)\phi(y)dy$$

Ahora, de la existencia de $< f*g, \phi(z) >$, para toda ϕ de $U_{a,\mu,\alpha}$, y, en particular, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$ sigue ([6] 13.13) que esta función es localmente integrable en $\mathbf{I}$.

Por último, llamando

$$\vartheta(z) = z^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}(2z+1)^{-a}$$

se tiene que

$$\int_0^\infty z^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(z+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}(2z+1)^{-a}|(f*g)(z)|dz \leq$$

$$\leq B\ \gamma_{0,a,\mu,\alpha}(\vartheta) \int_0^\infty x^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(x+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}(2x+1)^{-a}|f(x)|dx.$$

$$\int_0^\infty y^{R_e(\alpha-\frac{\mu}{2})}(y+1)^{-R_e\frac{\mu}{2}}(2y+1)^{-a}|g(y)|dy$$

y al ser f y g miembros de $U'_{a,\mu,\alpha,reg}$, resulta que $f*g$ también es un elemento de dicho espacio.

Si se consideran ahora α y μ parámetros reales, se tiene que la convolución generalizada de dos elementos f y g de $U'_{a,\mu,\alpha}$ es positiva, siempre que f y g sean positivos. En base a este hecho, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.5.2 *La convolución definida a tenor de (3.5.5), es una aplicación de $E \times E$ en E, donde:*

i) $E = L_1\left(\mathbf{I}, (2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right)$ es el espacio L_1 con la medida $(2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}d\lambda(x)$, siendo $d\lambda(x)$ la medida de Lebesgue.

ii) $E = \mathcal{M}\left(\mathbf{I}, (2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right)$ es el espacio de las medidas de Radon μ en $\mathbf{I}$, con $|\mu|\left((2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right) < \infty$.

iii) $E = U'_{a,\mu,\alpha}$ es el dual de $U_{a,\mu,\alpha}$.

Demostración:

La parte i) es consecuencia de la Proposición 3.5.4.

La parte iii) queda contenida en el Teorema 3.5.1.

El apartado ii) sigue como consecuencia de que, si $\phi \in U_{a,\mu,\alpha}$ y $\mu \in \mathcal{M}\left(\mathbf{I}, (2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right)$, puede escribirse:

$$|<\mu,\phi>| \leq \gamma_{0,\mu,\alpha}(\phi)\left\langle |\mu|, (2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right\rangle =$$

$$= M\gamma_{0,\mu,\alpha}(\phi), \quad M > 0$$

y además, si $f, g \in U'_{a,\mu,\alpha}$ son positivos pueden ser considerados medidas de Radon en $\mathbf{I}$ y mediante la convolución, se aplican al elemento positivo $f\dot{*}g \in U'_{a,\mu,\alpha}$.

Por último, para $\rho, \nu \in \mathcal{M}\left(\mathbf{I}, (2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right)$, se tiene:

$$\rho\dot{*}\nu =$$

$$= \rho^+\dot{*}\nu^+ + \rho^-\dot{*}\nu^- - \rho^+\dot{*}\nu^- - \rho^-\dot{*}\nu^+ \in \mathcal{M}\left(\mathbf{I}, (2x+1)^{-a}x^{\alpha-\frac{\mu}{2}}(x+1)^{-\frac{\mu}{2}}\right).$$

C A P Í T U L O IV

Aplicaciones.

4.1. Preámbulo.

En este capítulo la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice que nos ocupa es aplicada a la investigación de soluciones (tanto en el sentido clásico como en el distribucional) de una clase de ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales que se presentan en diversos campos de la Física e Ingeniería, entre los que destaca, el de los circuitos eléctricos.

La transformación interviene, también, eficazmente en la resolución de un determinado tipo de ecuaciones integrales que involucran la aparición del operador traslación definido en el capítulo anterior.

Al final del capítulo son incluídas, a modo de Tablas, algunas expresiones de interés para el manejo de nuestra transformada.

4.2. Resolución de un tipo de ecuaciones en derivadas parciales.

Consideremos, en primer lugar, la ecuación

$$t(t+1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [2t(\alpha-\mu+1)+1-\mu+2\alpha]\frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+\left[(\alpha+1)(\alpha-2\mu)+\frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]u + \nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (4.2.1)$$

donde ν es un parámetro complejo.

Se procede a una resolución formal del problema:

Si f cumple ciertas condiciones, puede escribirse:

$$ {}_2\mathcal{F}_1\left(A_t' f(t)\right) = -\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right] {}_2\mathcal{F}_1\left(f(t)\right) $$

siendo

$$ A_t' = t(t+1)D_t^2 + [2t(\alpha - \mu + 1) + 1 - \mu + 2\alpha]D_t + $$

$$ +(\alpha+1)(\alpha - 2\mu) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t} $$

con lo cual, si denotamos

$$ U(\tau, x) = {}_2\mathcal{F}_1\left(u(t,x)\right), $$

la ecuación queda reducida a la forma

$$ \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right] U(\tau, x) = \nu \frac{\partial U(\tau, x)}{\partial x} $$

cuya solución es

$$ U(\tau, x) = C(\tau) e^{\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2}{\nu} x} $$

determinándose $C(\tau)$ a la vista de las condiciones que se exijan.

Por ejemplo, si se impone la condición de frontera

$$ u(t, 0) = f(t) $$

se dará lugar a

$$ U(\tau, x) = F(\tau) e^{\frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2}{\nu} x} $$

La fórmula de inversión proporcionará, por último, la solución buscada.

Dada esta otra ecuación:

$$ t(t+1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [2t(\alpha - \mu + 1) + 1 - \mu + 2\alpha]\frac{\partial u}{\partial t} + $$

$$+\left[(\alpha+1)(\alpha-2\mu)+\frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]u+\nu^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{4.2.2}$$

con ν complejo, para la que se imponen las condiciones de frontera

$$u(t,0)=f(t)$$

$$\lim_{x\to 0} U(\tau,x)=0, \quad \tau>0$$

y teniendo $U(\tau,x)$ el mismo significado que se dio anteriormente, resulta, al aplicar nuestra transformación:

$$\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]U(\tau,x)-\nu^2\frac{\partial^2 U(\tau,x)}{\partial x^2}=0$$

de solución

$$U(\tau,x)=C_1(\tau)\, ch\, \frac{\sqrt{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}}{\nu}x+C_2(\tau)\, sh\, \frac{\sqrt{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}}{\nu}x$$

la cual, por las condiciones impuestas se reduce a:

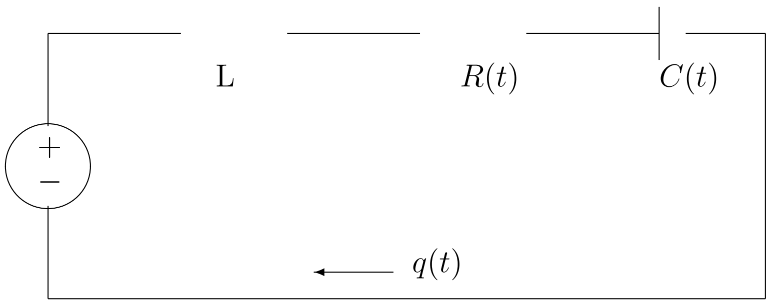
$$U(\tau,x)=F(\tau)\, sh\, \frac{\sqrt{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}}{\nu}x,$$

cuya antitransformada proporciona la solución buscada.

4.3. Circuitos eléctricos dependientes del tiempo.

Se exponen a continuación dos ejemplos que ponen de manifiesto que la transformación estudiada puede ser aplicada a la resolución de situaciones de algunos circuitos eléctricos que dependen del tiempo. En ambos casos interviene el operador generalizado A'_t.

a) Consideremos un circuito como el mostrado en la figura:



El circuito lo forman una fuente de voltaje $v(t)$, una inductancia constante L, una resistencia R que depende del tiempo por medio de la relación (α y μ representan parámetros reales)

$$R(t) = \frac{2t(\alpha - \mu + 1) + 1 - \mu + 2\alpha}{t(t+1)} L \quad ohms.$$

y un condensador (dependiente del tiempo):

$$C(t) = \frac{t(t+1)}{\left[(\alpha+1)(\alpha - 2\mu) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right] L}.$$

Se trata de determinar la carga $q(t)$ que fluye a través del circuito.

Por aplicación de las leyes de Kirchhoff, se deduce la ecuación

$$L\ D_t^2 q(t) + \frac{2t(\alpha - \mu + 1) + 1 - \mu + 2\alpha}{t(t+1)} L\ D_t q(t) + \frac{q(t)}{C(t)} = v(t)$$

en la que, al sustituir $C(t)$ por su valor, resulta

$$t(t+1) D_t^2 q(t) + [2t(\alpha - \mu + 1) + 1 - \mu + \alpha] D_t q(t) +$$

$$+ \left[(\alpha+1)(\alpha - \mu) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right] q(t) = \frac{t(t+1)\ v(t)}{L}$$

la cual puede ser escrita como:

$$A'_t q(t) = \frac{t(t+1)\, v(t)}{L}.$$

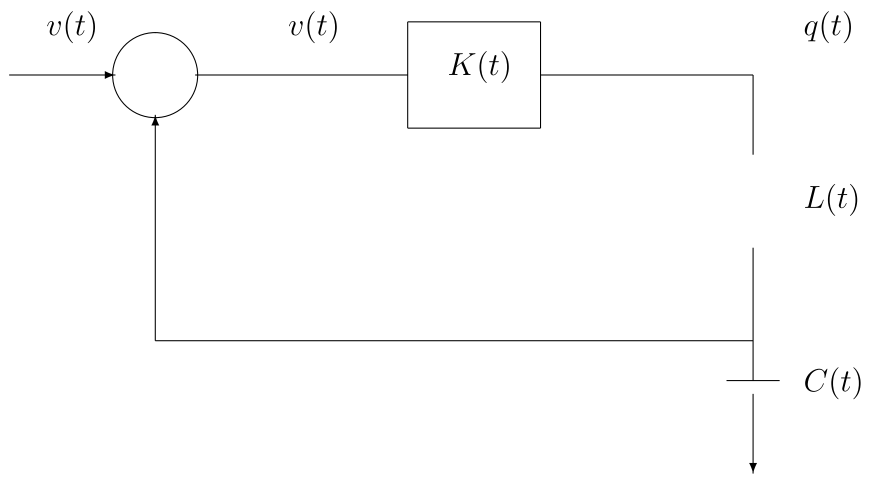
Si aplicamos la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada, se tiene:

$$-\left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right] Q(\tau) = {}_2\mathcal{F}_1\left(\frac{t(t+1)\, v(t)}{L}\right)$$

siendo $Q(\tau)$ la ${}_2F_1$-transformada de $q(t)$. Por tanto,

$$q(t) = {}_2\mathcal{F}_1^{-1}\left(\frac{-1}{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2}\, {}_2\mathcal{F}_1\left(\frac{t(t+1)\, v(t)}{L}\right)\right).$$

b) Supongamos ahora un circuito de la forma



compuesto de una fuente de voltaje $v(t)$, un amplificador $K(t)$, un condensador $C(t)$ y un inductor $L(t)$, todos ellos dependientes del tiempo. Si se tienen, además las relaciones:

$$L(t) = t^{1-\mu+2\alpha}(t+1)^{1-\mu},$$

$$C(t) = \frac{t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}}{(\alpha+1)(\alpha-2\mu)},$$

$$K(t) = \frac{\alpha(\mu-\alpha)}{t(\alpha+1)(\alpha-2\mu)},$$

donde α y μ representan parámetros reales, se trata de determinar la carga $q(t)$ que pasa a través de la red.

Aplicando las Leyes de Kirchhoff, se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left[L(t)\frac{dq(t)}{dt}\right] + \frac{q(t)}{C(t)} = K(t)\left[v(t) + \frac{q(t)}{C(t)}\right]$$

en donde al sustituir $L(t)$, $C(t)$ y $K(t)$, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(t^{1-\mu+2\alpha}(t+1)^{1-\mu}\frac{dq(t)}{dt}\right) + (\alpha+1)(\alpha-2\mu)t^{2\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}q(t) =$$

$$= \frac{\alpha(\mu-\alpha)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}}{t(\alpha+1)(\alpha-2\mu)}\left[v(t) + (\alpha+1)(\alpha-2\mu)t^{2\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu}q(t)\right],$$

la cual puede escribirse:

$$t(t+1)\frac{d^2q(t)}{dt^2} + [2t(\alpha-\mu+1) + 1 - \mu + 2\alpha]\frac{dq(t)}{dt} +$$

$$+\left[(\alpha+1)(\alpha-2\mu) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t}\right]q(t) = \frac{\alpha(\mu-\alpha)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}}{t(\alpha+1)(\alpha-2\mu)}v(t)$$

es decir,

$$A'_t\, q(t) = \frac{\alpha(\mu-\alpha)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}}{t(\alpha+1)(\alpha-2\mu)}v(t)$$

en donde, si aplicamos nuestra transformación resulta

$$-\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]Q(\tau) = {}_2\mathcal{F}_1\left(\frac{\alpha(\mu-\alpha)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}}{t(\alpha+1)(\alpha-2\mu)}v(t)\right)$$

siendo $Q(\tau)$ la transformada de $q(t)$. Invirtiendo:

$$q(t) = {}_2\mathcal{F}_1^{-1}\left(\frac{-1}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2}\,{}_2\mathcal{F}_1\left(\frac{\alpha(\mu-\alpha)t^{\mu-2\alpha}(t+1)^{\mu}}{t(\alpha+1)(\alpha-2\mu)}v(t)\right)\right).$$

4.4. Aplicaciones de la convolución.

La convolución introducida en el Capítulo III, puede ser aplicada a la resolución de ecuaciones integrales en las que intervienen los operadores traslación generalizados definidos en dicho Capítulo. La aplicación que se realiza, se hace tanto en el sentido clásico como en el distribucional.

a) Caso clásico.

Pretendemos resolver la ecuación integral

$$(f * g)(z) = h(z)$$

siendo g y h funciones conocidas y la función f a determinar.

$f * g$ representa la convolución dada por (3.4.1).

Supuestas cumplidas las condiciones requeridas para la aplicación de la transformación, se tiene:

$${}_2\mathcal{F}_1(f * g) = {}_2\mathcal{F}_1(h)$$

de donde, por el teorema 3.4.1, resulta

$$F(\tau)G(\tau) = H(\tau)$$

siendo F, G y H las ${}_2\mathcal{F}_1$-transformadas de f, g y h, respectivamente. Así, en el caso en que G no posea ceros en el dominio que se considere:

$$F(\tau) = \frac{H(\tau)}{G(\tau)}$$

de lo que sigue:

$$f(z) = {}_2\mathcal{F}_1^{-1}\left(\frac{H(\tau)}{G(\tau)}\right).$$

b) Caso distribucional.

Sean $f, g \in U'_{a,\mu,\alpha}$ y $\rho \in U_{a,\mu,\alpha}$, y recordemos que la convolución generalizada fue definida sobre $U'_{a,\mu,\alpha}$ por:

$$< f \dot{*} g, \rho >= \langle f(x), \langle \mathfrak{T}'_x g(y), \rho(y) \rangle \rangle \, .$$

Queremos ahora resolver una ecuación distribucional del tipo:

$$f \dot{*} g = h,$$

con f, g y h distribuciones de soporte compacto. Al aplicar la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada se tiene

$${}_2\mathcal{F}_1(f \dot{*} g) = {}_2\mathcal{F}_1(h)$$

de donde

$$F(\tau)G(\tau) = H(\tau)$$

siendo F, G y H las transformadas de f, g y h, respectivamente.

Entonces, en el caso en que $G \neq 0$, podrá escribirse

$$F(\tau) = \frac{H(\tau)}{G(\tau)}$$

proporcionando la fórmula de inversión la solución buscada.

4.5. Una ecuación operacional.

Consideremos la ecuación operacional:

$$P\left(A'_x\right) u = g \tag{4.5.1}$$

donde $g \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$, $P(z)$ es un polinomio sin ceros en $-\infty < z \leq 0$ y A'_x es el operador diferencial

$$A'_x = x^{-\alpha} D_x x^{\mu+1}(x+1)^{\mu+1} D_x x^{\alpha-\mu}(x+1)^{-\mu}, \quad \alpha, \mu \in \mathbb{R}$$

Nos proponemos encontrar una función generalizada $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ que satisfaga (4.5.1). Para ello, serán de utilidad las fórmulas que expresan el comportamiento asintótico de la transformación generalizada objeto de estudio y que se recogen en el teorema 2.6.2; por otra parte, tendremos en cuenta la siguiente regla operacional:

$$ {}_2\mathcal{F}_1\left((A'_x)^k f\right) = (-1)^k \left[\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^k {}_2\mathcal{F}_1(f), \quad k \in \mathbb{N}. $$

Si en la ecuación (4.5.1), aplicamos la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada generalizada y hacemos uso de esta regla operacional, se obtiene:

$$ P\left(-\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right) U(\tau) = G(\tau) $$

siendo $U(\tau)$ y $G(\tau)$ las transformadas generalizadas de $u(x)$ y $g(x)$, respectivamente.

Al tenerse

$$ P\left(-\left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right) \neq 0, $$

se puede aplicar la fórmula de inversión generalizada, de tal forma que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$, resulta:

$$ < u, \phi >= $$

$$ = \lim_{T\to\infty} \left\langle \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x) \frac{G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right)} d\tau, \phi(x) \right\rangle. \quad (4.5.2) $$

Con esto hemos descrito un método formal de obtención de solución de (4.5.1). El problema que abordaremos ahora es demostrar que (4.5.2) es una función generalizada que satisface (4.5.1).

Por el Teorema 2.6.2, existe un entero no negativo r, tal que

$$ G(\tau) = O\left(\tau^{2r-\mu-\frac{1}{2}}\right), \quad \tau \to \infty. $$

Sea $Q(z)$ un polinomio de grado $r+1$ sin ceros en el semieje $z \leq 0$, siendo r el entero citado anteriormente.

La convergencia del segundo miembro de (4.5.2), puede ser establecida del siguiente modo:

$$\left\langle \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)\frac{G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)}d\tau, \phi(x)\right\rangle =$$

$$\left\langle Q\left(A'_x\right)\int_0^T \frac{S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)Q\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)}d\tau, \phi(x)\right\rangle =$$

$$\left\langle \int_0^T \frac{S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)Q\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)}d\tau, Q\left(A_x\right)\phi(x)\right\rangle$$

dado que

$$A'_x\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x) = -\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+\tau^2\right]\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)$$

Al tener ϕ soporte compacto, la expresión (4.5.2) se puede escribir como

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{S(\mu,\tau)G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)Q\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2-\tau^2\right)}d\tau.$$

$$\int_a^b \mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x)Q(A_x)\phi(x)\,dx \tag{4.5.3}$$

estando el soporte de ϕ contenido en el intervalo $[a,b]$.

Para poder continuar la demostración, precisamos hacer uso del siguiente:

Lema 4.5.1 *Para $x \in [a,b]$, existe un $T_1 > 0$, tal que $\forall\tau \leq T_1$*

$$\left|{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+i\tau,\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x\right)\right| \leq B_1,$$

y existe un $T_2 > 0$, tal que $\forall\tau \geq T_2$

$$\left|{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+i\tau,\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x\right)\right| \leq B_2\,\tau^{-\frac{1}{2}},$$

siendo $B_1 > 0$ y $B_2 > 0$.

Demostración:

Partiendo de la representación integral [78] (pág. 248):

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;-x) = $$

$$ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{4}{x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \int_0^\infty K_{\alpha-\beta}\left(\frac{2s}{\sqrt{x}}\right) J_{\gamma-1}(2s) s^{\alpha+\beta-\gamma} ds $$

válida para $R_e\alpha > 0$, $R_e\beta > 0$ y siendo K y J las conocidas funciones de Bessel, sigue:

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+i\tau, \frac{1}{2}-i\tau; \mu+1; -x\right) = $$

$$ = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\frac{1}{2}-i\tau)} 4x^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty K_{2\tau i}\left(\frac{2s}{\sqrt{x}}\right) J_\mu(2s) s^{-\mu} ds $$

y para un $T_1 > 0$ adecuado, si $\tau \leq T_1$ se tiene,

$$ \left| K_{2\tau i}\left(\frac{2s}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq K_0\left(\frac{2s}{\sqrt{x}}\right) $$

y así, si $\tau \leq T_1$

$$ \left| {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+i\tau, \frac{1}{2}-i\tau; \mu+1; -x\right)\right| \leq C_1 $$

con $C_1 > 0$.

Por otra parte, para $\tau \to \infty$,

$$ \left| K_{2\tau i}\left(\frac{2s}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq M_1 e^{-\pi\tau} \tau^{-\frac{1}{2}} $$

siendo $M_1 > 0$ (ver [14] 7.14.2(69)).

Además,

$$ \Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\frac{1}{2}-i\tau) = \frac{\pi}{ch\,\pi\tau}; $$

luego, para $\tau \geq T_2$

$$ \left| {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+i\tau, \frac{1}{2}-i\tau; \mu+1; -x\right)\right| \leq $$

$$\leq M_2 \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\tau} ch\, \pi\tau \int_0^\infty s^{-\mu} \left| J_\mu(2s) \right| ds \leq C_2 \tau^{-\frac{1}{2}},$$

siendo $C_2 > 0$.

De esta forma, la integral (4.5.3) queda acotada por:

$$C \int_0^{T_1} \left| \frac{S(\mu,\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right) Q\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right)} \right| d\tau +$$

$$+D \int_{T_1}^{T_2} \left| \frac{G(\tau) S(\mu,\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right) Q\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right)} \right| d\tau.$$

$$\int_a^b \left| {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + i\tau, \frac{1}{2} - i\tau; \mu+1; -x\right) \right| dx +$$

$$+E \int_{T_2}^{T} \frac{\tau^{2r-\frac{1}{2}} |S(\mu,\tau)|}{\left| P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right) Q\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right) \right|} d\tau$$

Obsérvese ahora que las dos primeras integrales no ofrecen dificultad en cuanto a su acotación; y que para la tercera, basta tener en cuenta que si $\tau \to \infty$,

$$|S(\mu,\tau)| \leq M \tau^{2\mu}$$

y que la elección del grado de Q garantiza la acotación de la integral.

De este modo, existe la integral (4.5.2) y así, por la completitud de $\mathcal{D}'(\mathbf{I})$, existe $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{I})$, tal que:

$$\lim_{T\to\infty} \left\langle \int_0^T S(\mu,\tau) \mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x) \frac{G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right)} d\tau, \phi(x) \right\rangle =$$

$$= \langle f, \phi \rangle . \qquad (4.5.4)$$

Ahora, en virtud de la continuidad de la operación de diferenciación y multiplicación por x y por x^2 en $\mathcal{D}'(\mathbf{I})$, se tiene, para cualquier $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$:

$$\lim_{T\to\infty} \left\langle P\left(A'_x\right) \int_0^T S(\mu,\tau)\mathbf{G}(\mu,\alpha,\tau,x) \frac{G(\tau)}{P\left(-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \tau^2\right)} d\tau, \phi(x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle P\left(A'_x\right) f, \phi \right\rangle$$

y de la expresión anterior, y en base a la fórmula de inversión, sigue que

$$< g, \phi >= \left\langle P\left(A'_x\right) f, \phi \right\rangle,$$

resultado que prueba que la función generalizada f, la cual pertenece a $\mathcal{D}'(\mathbf{I})$ y coincide con la restricción de $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{I})$ a $\mathcal{D}(\mathbf{I})$, satisface la ecuación operacional (4.5.1).

APÉNDICE

La función hipergeométrica.

En este apéndice, se resumen algunas propiedades generalmente conocidas de la función hipergeométrica de Gauss que pueden ser ampliadas en [13].

Es bien sabido que:

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{du}{dx}-abu=0 \tag{1}$$

se denomina *ecuación hipergeométrica*, donde a, b y c son parámetros complejos independientes de x, y que poniendo

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \qquad n=0,1,2,\cdots,$$

se tiene, con $c\neq 0,-1,-2,\cdots$, que

$$u=\sum_0^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}x^n\equiv {}_2F_1(a,b;c;x) \tag{2}$$

constituye una solución de (1).

A la función ${}_2F_1(a,b;c;x)$ se la llama serie hipergeométrica en la variable x, con parámetros a, b, c.

Si a y b son distintos de $0,-1,-2,\ldots$, la serie (2) converge absolutamente para todos los valores de $|x|<1$.

De (2) se deduce inmediatamente que:

$${}_2F_1(a,b;c;x)={}_2F_1(b,a;c;x).$$

Otras propiedades destacadas de la función ${}_2F_1(a,b;c;x)$, son:

$$\begin{array}{rrcl}
1) & \frac{d^n}{dx^n}{}_2F_1(a,b;c;x) & = & \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;x)\\
2) & {}_2F_1(a,b;c;x) & = & (1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;x)
\end{array}$$

La función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b;c;x)$ puede ser prolongada analíticamente para $|x| \geq 1$, con x verificando $|arg\ (1-x)| < \pi$, por medio de la representación integral de Euler

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}\, dt $$

$R_e c > R_e b > 0$, $|arg\ (1-x)| < \pi$.

El comportamiento asintótico de ${}_2F_1(a,b;c;x)$ viene dado así:

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = O(1), \qquad x \to 0 $$

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = O\left(x^{-min\{R_e a, R_e b\}}\right), \qquad x \to \infty $$

Si tomamos $a = \mu + \frac{1}{2} + i\tau$, $b = \mu + \frac{1}{2} - i\tau$ y $c = \mu + 1$ en la ecuación (1), cambiamos x por $-t$ y hacemos $u = t^{-\alpha}v$, resulta la ecuación

$$ t(t+1)\frac{d^2v}{dt^2} + [\mu + 1 - 2\alpha + 2t(\mu - \alpha + 1)]\frac{dv}{dt} + $$

$$ + \left[\alpha(\alpha - 2\mu + 1) + \frac{\alpha(\alpha-\mu)}{t} + \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2\right] v = 0, $$

cuya solución

$$ {}_2F_1\left(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t\right) t^{\alpha} $$

no es otra cosa que el núcleo de la transformada objeto de estudio. Esta función se encuentra relacionada con la función asociada de Legendre de primera especie, mediante la igualdad:

$$ {}_2F_1\left(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -t\right) t^{\alpha} = $$

$$ = \Gamma(\mu+1) t^{\alpha - \frac{\mu}{2}} (t+1)^{-\frac{\mu}{2}} P^{-\mu}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(2t+1). $$

Por último, indicamos que a lo largo del trabajo se hace uso de las representaciones integrales que a continuación se relacionan:

1) ${}_2F_1\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-t\right)=$

$$=\frac{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\int_0^\infty(2t+1+ch\,x)^{-\mu-\frac{1}{2}}cos\,\tau x\,dx$$

2) ${}_2F_1\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-t\right)=$

$$=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty\left(2t+1+2\sqrt{t(t+1)}\,cos\,x\right)^{-\mu-\frac{1}{2}-i\tau}(sen\,x)^{2\mu}\,dx$$

3) ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}+i\tau,\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-t\right)=$

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\frac{1}{2}-i\tau)}4x^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty K_{2\tau i}\left(\frac{2s}{\sqrt{t}}\right)J_\mu(2s)s^{-\mu}\,ds.$$

Cuestiones abiertas.

A continuación, son reseñadas algunas nuevas vías de investigación relacionadas directamente con nuestro trabajo:

i) La ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice respecto a un parámetro complejo.

La transformación integral:

$$F(\nu)=\int_0^\infty f(t)_2F_1(\mu+\nu,\mu-\nu;\mu+1;-t)t^\alpha dt,\quad \nu=-\frac{1}{2}+\sigma+i\tau,\ \sigma,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

constituye una interesante generalización del trabajo que hemos desarrollado. Actualmente nos encontramos dando los primeros pasos en esa dirección, habiéndose presentado ciertas dificultades en relación con la fórmula de inversión, la cual, al ser compleja, requiere ciertos cambios en las técnicas utilizadas aquí.

Los trabajos de Negrín [55] en los que investiga una transformada de tipo Kontorovich-Lebedev con índice arbitrario, son considerados interés para abordar la nueva problemática.

ii) Transformaciones-índice con núcleos más generales.

Otra posible extensión de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice podría lograrse haciendo intervenir la función G de Meijer. En este sentido, ya se han realizado algunos trabajos en el caso clásico (ver [85] y [87]); no obstante, el estudio distribucional de estas nuevas transformadas presenta ciertos inconvenientes, dado que el tipo de ecuación diferencial que satisface el núcleo obliga a hacer uso de operadores que complican en grado sumo las demostraciones. Aún así, consideramos que esta línea incluye el suficiente interés para trabajos futuros. Otro caso aún más general, es la posibilidad de utilizar la función H de Fox como núcleo.

iii) Desarrollos asintóticos para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice.

La obtención de desarrollos asintóticos para transformadas de tipo índice exige el uso de técnicas distintas a las empleadas habitualmente en otras clases de transformadas (ver los trabajos de Erdelyi [12] y de Wong [86]). Ultimamente, se han realizado determinados trabajos en el sentido que hemos apuntado para las transformadas de Kontorovich-Lebedev [51] y de Mehler-Fock [61]. En el caso de la transformación que nos ocupa, existen algunas dificultades para la la consecución de tales desarrollos, ya que es preciso acudir a adecuadas representaciones integrales del núcleo que aún no han podido ser halladas.

iv) Estudio de la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice finita.

Para la transformada de Kontorovich-Lebedev se han efectuado algunos intentos de estudio de la transformación finita que arrojan ideas sobre lo que podría hacerse con la transformada aquí estudiada, si bien no se ha logrado ningún resultado firme.

v) Teoremas tauberianos.

Se han probado teoremas abelianos para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada clásica y distribucional, y sin embargo no hemos visto ningún teorema tauberiano para transformadas de tipo índice. La elaboración de alguno de ellos para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada, supondría una interesante vía de investigación.

vi) Un cálculo operacional para la ${}_2\mathcal{F}_1$-transformada índice en el sentido de Mikusinski.

Partiendo de las operaciones adición de funciones y convolución, cabe la posibilidad de definir un espacio funcional que tenga estructura de anillo conmutativo sin divisores de cero y del cual sea posible pasar a un cuerpo de fracciones. De esta manera, se puede desarrollar un cálculo operacional en la línea de Mikusinski, que permita considerar al operador diferencial como un elemento algebraico y así codificar las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales de un modo sencillo.

vii) Investigación de nuevas aplicaciones.

Hasta el momento se han estudiado las aplicaciones expuestas en el IV capítulo; sin embargo, tenemos previstas algunas que aún no hemos logrado materializar de forma adecuada tales como las relacionadas con el movimiento de fluidos, problemas de lentillas en coordenadas toroidales y otros en los que función hipergeométrica interviene de forma fundamental.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía

[1] **Apostol, T.M.** *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, Reading, Mass., (1957)

[2] **Betancor, J.** *La transformación integral* $F_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2}$. Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna, (1987)

[3] **Braaksma, B.L.J. - Meulenbeld, B.** *Integral transforms with generalized Legendre functions as kernels.* Comp. Math. Vol 18, 235-287, (1967)

[4] **Brychkov, Y.A. - Glaeske, H.J. - Marichev, O.I.** *Factorization of integral transformations of convolution type.* Mathematical analysis, Vol. 21, Itogi Nauki i Tekniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz Inst. Nauchn. i Tkhn. Informatsii, 3-41, (1983)

[5] **Brychkov, Y.A. - Prudnikov, A.P.** *Integral transformations of generalized functions.* Mathematical analysis, Vol. 20, Itogi Nauki i Tekniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz Inst. Nauchn. i Tkhn. Informatsii, 78-115, (1982)

[6] **Dieudonné, J.** *Elements d'Analyse.* Vol. 2, 2^e édition, Gauthier-Villars, Paris, (1974)

[7] **Ditkin, V.A. - Prudnikov, A.P.** *Integral transformations and operational calculus.* Ed. Mir, Moscow, (1978)

[8] **Dixon, A.L. - Ferrar, W.L.** *Integrals for the product of two Bessel functions.* Quart. J. Math. Oxford, Ser. 4, 193-208, (1933)

[9] **Dixon, A.L. - Ferrar, W.L.** *Integrals for the product of two Bessel functions II.* Quart. J. Math. Oxford, Ser. 4, 297-304, (1933)

[10] **Dorta, J.A.** *La transformación integral finita de Hankel-Clifford.* Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna. (1990)

[11] **Dube, L.S - Pandey, J.N.** *On the Hankel transform of distributions.* Tohoku Math. J., 27, 337-354, (1975)

[12] **Erdelyi, A.** *General Asymptotic Expansions of Laplace Integrals.* Arch. Rat. Mech. Anal., 7, 1-20, (1961)

[13] **Erdelyi, A. - Magnus, W. - Oberhettinger, F. - Tricomi, F.** *Higher transcendental functions. Vol I y II.* McGraw-Hill Book Co. Inc., New York (1953)

[14] **Erdelyi, A. - Magnus, W. - Oberhettinger, F. - Tricomi, F.** *Tables of Integral Transforms. Vol I y II.* McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, (1954)

[15] **Fox, C.** *The G and H functions as symmetrical Fourier kernels.* Trans. Amer. Math. Soc. 98, 395-429, (1961)

[16] **Gerardi, F.R.** *Application of Mellin and Hankel transform to networks with time-varying Parameters.* I.R.E. Trans. on Circuit Theory, 197-208, (1959)

[17] **Glaeske, H.J.** *On a convolution structure of a generalized Hermite transformation.* Serdica, Bulgaricae Math. Publ., vol 9, 223-229, (1983)

[18] **Glaeske, H.J. - Hess, A.** *A convolution connected with the Kontorovich-Lebedev transform.* Math. Z., 193, 67-78, (1986)

[19] **Glaeske, H.J. - Hess, A.** *On the convolution theorem of the Mehler-Fock transform for a class of generalized functions (I).* Math. Nachr. 131, 107-117, (1987)

[20] **Glaeske, H.J. - Hess, A.** *On the convolution theorem of the Mehler-Fock transform for a class of generalized functions (II).* Math. Nachr. 136, 119-129, (1988)

[21] **Glaeske, H.J.** *Some investigations concerning the Mehler-Fock and the Kontorovich-Lebedev transformation.* Comp. Anal. and Appl. 85. Sofia, 228-238, (1986)

[22] **González, J.M.** *Sobre el problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con los operadores de tipo Bessel S_μ y DP_μ.* Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna, (1985)

[23] **Hayek, N.** *Estudio de la ecuación diferencial $xy'' + (\nu + 1)y' + y = 0$ y de sus aplicaciones.* Collect. Mat. XVII, 57-174, (1966-67)

[24] **Hayek, N.** *Sobre la transformación de Hankel.* Actas de la VIII Reunión Anual de Matemáticos Españoles, 47-60, (1968)

[25] **Hayek, N. - Negrín, E.R. - González, B.J.** *Una clase de transformada índice relacionada con la de Olevskii.* Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas (Puerto de la Cruz), vol. I, 401-405, (1989)

[26] **Hayek, N. - Negrín, E.R. -González, B.J.** *Abelian theorems for the index ${}_2F_1$-transform.* Aparecerá en Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, vol. 15, (1992)

[27] **Hayek, N. - González, B.J.** *Teoremas abelianos para la* ${}_2F_1$*-transformada índice generalizada.* Aparecerá en Rev. Acad. Can. Cien., vol. IV, fasc. 1, (1992)

[28] **Hayek, N. - González, B.J.** *On the Mehler-Fock transform of generalized functions.* Aparecerá en Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, vol. 61, 3-4, 315-327, (1992)

[29] **Hayek, N. - González, B.J.** *On the distributional index* ${}_2F_1$*-transform.* Aparecerá en Math. Nachr.

[30] **Hayek, N. - González, B.J.** *The* ${}_2F_1$*-index transform of generalized functions.* Preprint. (1992)

[31] **Hayek, N. - González, B.J.** *A convolution theorem for the index* ${}_2F_1$*-transform.* Preprint. (1992)

[32] **Hayek, N. - González, B.J.** *A convolution theorem for the distributional index* ${}_2F_1$*-transform.* Preprint. (1992)

[33] **Hayek, N. - González, B.J.** *An operational calculus for the index* ${}_2F_1$*-transform.* Preprint. (1992)

[34] **Henrici, P.** *Addition theorems for general Legendre and Gegenbauer functions.* J. Rat. Mech. Anal. 4, 983-1018, (1955)

[35] **Hobson, E.W.** *The theory of functions of a real variable and the theory of the Fourier series.* Washington D.C. Harren Press, (1950)

[36] **Hobson, E.W.** *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.* Chelsea Publishing Company. New York (1955)

[37] **Horvath J.** *Topological vector spaces and distributions.* Addison Wesley, New York (1966)

[38] **Jeanquartier, P.** *Transformation de Mellin et Développements Asymptotiques.* L'Enseignement mathematique, T. 25, fasc. 3-4, 385-308, (1979)

[39] **Koh, E.L.** *The n-dimensional distributional Hankel transformations.* Can. J. Math., Vol. XXVII, No. 2, 423-433, (1975)

[40] **Koh, E.L. - Zemanian, A.H.** *The complex Hankel and I-transformations of generalized functions.* SIAM J. Appl. Math., Vol. 16, No. 5, 945-957, (1968)

[41] **Lebedev, N.N.** *Special functions and their applications.* Prentice-Hall, (1965)

[42] **Lebedev, N.N.** *Sur une formule d'Inversion.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR , (N.S.) 52, 655-658, (1946)

[43] **Levitan, B.M.** *Generalized translation operators and some of their applications.* Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, (1964)

[44] **Linares, M.** *La transformación generalizada de Bessel.* Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna. (1990)

[45] **Lisena, B.** *On the Generalized Kontorovich-Lebedev Transform.* Rend. di Mat., Serie VII, vol. 9, 87-101, (1989)

[46] **Lowndes, J.S.** *Note on the generalized Mehler-Fock transform.* Proc. Camb. Phil. Soc., 60, 57-59, (1964)

[47] **Marichev, O.I.** *A method for computing integrals from special functions (theory and tabular formulas).* English transl., "Handbook of integral

transform of higher transcendental functions, theory and algorithmic tables", Horwood, Chichester, Wiley, New York, (1982)

[48] **Mathay, A.M. - Saxena, R.K.** *Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and Physical Sciences.* Lect. Not. in Math., Springer Verlag, Berlin, (1973)

[49] **Méndez J.M.** *La transformación integral de Hankel-Clifford.* Tesis, Secretariado de Publicaciones, Univ. La Laguna, Col. Monog. No. 8, (1981)

[50] **Nasim, C.** *The Mehler-Fock transform of general order and arbitrary index and its inversion.* Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 7, No. 1, 171-180, (1984)

[51] **Naylor, D.** *On an Asymptotic Expansion of the Kontorovich-Lebedev Transform.* Appl. Anal. vol. 39, 249-263, (1990)

[52] **Negrín, E.R.** *Teoremas Abelianos para la* $K_\mu^{\alpha,\gamma}$ *transformación distribucional.* Obra Homenaje al Prof. Dr. Nácere Hayek Calil, Secretariado de Publicaciones, Univ. La Laguna, 217-224, (1990)

[53] **Negrín, E.R.** *The K-transformation index.* Jñanabha, vol. 19, 43-61, (1989)

[54] **Negrín, E.R.** *The K-transformation index on distributions of compact support.* Pure and Appl. Math. Sci. vol XXXIV, No. 1-2, 27-35, (1991)

[55] **Negrín, E.R.** *Una transformación del tipo Kontorovich-Lebedev con índice arbitrario.* Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna, (1988)

[56] **Negrín, E.R.** *Un cálculo operacional en relación con la transformación de Kontorovich-Lebedev.* Actas XI C.E.D.Y.A. (Málaga), 389-393, (1989)

[57] **Negrín, J.R.** *La transformación integral de Laplace-Hankel-Clifford.* Tesis, Secr. Publ. Univ. La Laguna, Col. Monog. No. 25, (1986)

[58] **Olevskii, M.N.** *On the representation of an arbitrary function in the form of an integral with a kernel containing a hypergeometric function.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, (N.S.) vol. 69, No. 1, 11-14, (1949)

[59] **Olver, F.W.J.** *Asymptotics and special functions.* Academic Press, New York, (1967)

[60] **Pandey, R.N.** *Abelian theorems for the Kontorovich-Lebedev transformations.* Ind. J. P. Appl. Math., 21(8) 737-739, (1990)

[61] **Pathak, R.S. - Pandey, R.N.** *Asymptotic expansions of the Mehler-Fock transform.* Proc. Ind. Acad. Sci. (Math. Sci.), vol. 99, No. 2, 175-180, (1989)

[62] **Pathak, R.S. - Pandey, J.N.** *The Kontorovich-Lebedev transformation of distributions.* Math. Z., 165, 29-51, (1979)

[63] **Prudnikov, A.P. - Brichkov, Y.A. - Marichev, O.I.** *Integrals and Series.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1990)

[64] **Robin, L.** *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroidales. Tome II.* Gauthier-Villars, Paris, (1958)

[65] **Rodríguez, J.** *Cálculo operacional de la $L_\nu^{(\rho)}$ transformación integral.* Actas IX C.E.D.Y.A., Univ. Valladolid, (1986)

[66] **Rosenthal, P.** *On an inversion theorem for the general Mehler-Fock transform pair.* Pac. J. of Math., 52, No. 2, 539-545, (1974)

[67] **Sánchez, A.M.** *La transformación integral generalizada de Hankel-Schwartz.* Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna, (1987)

[68] **Schuitman, A.** *A class of integral transforms and associated function spaces.* Ph. D. Thesis. Technische Hogeschool Delft, (1985)

[69] **Schwartz, L** *Théorie des distributions.* Hermann & Cie., Paris, (1966)

[70] **Sneddon, I.N.** *The use of integral transforms.* Mc Graw-Hill, New Delhi, (1974)

[71] **Socas, M.M.** *Sobre la transformación integral de Hankel-Clifford en ciertos espacios de funciones generalizadas.* Tesis. Dep. Anal. Mat. Univ. La Laguna, (1986)

[72] **Spain, B. - Smith, M.G.** *Functions of Mathematical Physics.* Van Nostrand Reinhold Company, London, (1970)

[73] **Sumner, D.B.** *An inversion formula for the generalized Stieltjes transform.* Bull. Amer. Math. Soc., 55, 174-183, (1949)

[74] **Titchmarsh, E.C.** *Introduction to the theory of Fourier integrals.* Oxford University Press, (1959)

[75] **Tiwari, U.N. - Pandey, J.N.** *The Mehler-Fock transform of distributions.* Rocky Mountain J. of Math. **10** 401-408, (1980)

[76] **Treves, F.** *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, New York, (1967)

[77] **Trujillo, J.J. - Moreno, J.C. - Méndez, J.M.** *Sobre la transformación integral de Hankel-Clifford.* Actas VI C.E.D.Y.A. (Jaca) (1983)

[78] **Van der Pol, B. - Bremmer, H.** *Operational Calculus.* Cambridge University Press, New York, (1964)

[79] **Vilenkin, N.Y.** *The matrix element of irreducible unitary representations of a group of Lobatchevski space motion and generalized Fock-Mehler transformation.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 118, 219-222, (1958)

[80] **Vladimirov, V.S.** *Equations of Mathematical Physics.* Mir Publishers, Moscow, (1984)

[81] **Vu Kim Tuan - Marichev, O.I. - Yakubovich, S.B.** *Composition structure of integral transformations.* Sov. Math. Dokl., vol. 33, No. 1, 166-170, (1986)

[82] **Vu Kim Tuan** *On the theory of generalized integral transforms in certain functions space.* Sov. Math. Dokl., vol. 33, No. 1, 103-106, (1986)

[83] **Watson, G.N.** *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, London, (1958)

[84] **Watson, G.N.** *General Transforms.* Proc. L. Math. Soc. II, s. 35, 156-199, (1933)

[85] **Wimp, J.** *A class of integral transforms.* Proc. Edinburgh. Math. Soc. Ser. 2, Vol. 14, No. 1, 33-40, (1964)

[86] **Wong, R.** *Asymptotic Expansions of the Kontorovich-Lebedev Transform.* Appl. Anal. vol. 12, 161-172, (1981)

[87] **Yakubovich, S.B. - Vu Kim Tuan - Marichev, O.I. - Kalla, S.L.** *A class of index integral transforms.* Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, vol. 10, No. 1, Ed. Esp., 105-118, (1987)

[88] **Zemanian, A.H.** *Distributional theory and transform analysis.* McGraw-Hill, New York, (1965)

[89] **Zemanian, A.H.** *Generalized integral transformations.* Interscience Publishers, New York, (1968)

[90] **Zemanian, A.H.** *Some Abelian theorems for the distributional Hankel and K tranformations.* SIAM J. Appl. Math., 14 1255-1265, (1966)

[91] **Zemanian, A.H.** *The Kontorovich-Lebedev transformation on distributions of compact support and its inversion.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **77**, 139-143, (1975)