Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Karim Omar Jerez Santana

# *Espacios recubridores*

## Covering spaces

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2020

Dirigido por
*Juan Carlos Marrero González*

Juan Carlos Marrero González
*Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa*
*Universidad de La Laguna*
*38200 La Laguna, Tenerife*

# Resumen · Abstract


## *Resumen*

*Este trabajo está dedicado a una introducción al estudio de los espacios recubridores de un espacio topológico $X$. Esta teoría está estrechamente relacionada con los subgrupos del grupo fundamental $\pi_1(X)$ de $X$ y, al mismo tiempo, puede ser usada para calcular tal grupo. De hecho, bajo ciertas condiciones razonables, probamos que el recubridor asociado al subgrupo trivial de $\pi_1(X)$ existe y es simplemente conexo. Se trata del recubridor universal de $X$ cuyo grupo de transformaciones de recubrimiento es isomorfo a $\pi_1(X)$. Además, bajo las mismas condiciones, demostramos que existe una correspondencia biyectiva entre los recubridores de $X$ (salvo isomorfismos) y los subgrupos de $\pi_1(X)$ (módulo conjugación), y que el recubridor universal recubre a cada uno de los recubridores de $X$. Una herramienta esencial para probar los anteriores resultados son los teoremas de elevación para espacios recubridores cuyo estudio se aborda en la primera parte del trabajo. A lo largo del trabajo, también se presentan ejemplos adecuados que ilustran los resultados teóricos demostrados.*



**Palabras clave:** *Espacio recubridor – Grupo fundamental – Teoremas de elevación – Transformaciones de recubrimiento – Acciones propias y discontinuas – Espacios de órbita – Recubridor universal – Espacios simplemente conexos.*

## *Abstract*

*The aim of this undergraduate thesis project is to develop an introduction to the covering space theory of a topological space $X$. This theory is closely related to the subgroups of the fundamental group $\pi_1(X)$ of $X$ and, in addition, it may be used to describe $\pi_1(X)$. In fact, under certain natural conditions, we prove that the covering space $\widetilde{X}$, which is associated with the trivial subgroup of $\pi_1(X)$, exists and is simply connected. $\widetilde{X}$ is the universal covering space of $X$ and its group of covering transformations is isomorphic to $\pi_1(X)$. Moreover, under the same conditions, we deduce that there exists a one-to-one correspondence between the equivalence classes of isomorphic covering spaces and the conjugacy classes of subgroups of $\pi_1(X)$. Furthermore, $\widetilde{X}$ is a covering space of each one of the covering spaces of $X$. An essential tool in order to prove the previous results are the lifting theorems for covering spaces which we discuss in the first part of the dissertation. Throught the undergraduate thesis project, we also present several interesting examples which illustrate all the theoretical results.*


**Keywords:** *Covering space – Fundamental group – Lifting theorems – Covering transformations – Proper and discontinuous actions – Orbit spaces – Universal covering space – Simply connected space.*

# Contenido

# Introducción

En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

*John von Neumann (1903-1957)*

En las matemáticas modernas, tal y como afirmó el matemático francés Jean Dieudonné en [5], pocos términos están tan interconectados de la manera que lo están el grupo fundamental, el espacio recubridor y las acciones propiamente discontinuas sobre espacios topológicos. La razón es que cada uno de estos objetos determina esencialmente a los otros dos. Sin embargo, tal y como se expone a continuación, el orden de aparición de estos objetos es inverso al anterior.

Como no podía ser de otra manera, fue Carl Friedrich Gauss quien en relación al primer ejemplo descubierto sobre funciones modulares, introdujo un ejemplo no trivial de un grupo propiamente discontinuo, el grupo de las transformaciones del semiplano complejo. También, estableció el concepto de **dominio fundamental**. Este último, se trata de un subconjunto de un espacio topológico que contiene exactamente un punto de cada órbita de una acción –siendo esto un objeto de estudio de la presente memoria–. Años más tarde, las funciones modulares fueron redescubiertas y estudiadas por varios matemáticos prusianos, estando entre ellos Felix Klein, quien conjeturó el teorema de uniformización. El desarrollo de dicho teorema está vinculado a la teoría de espacios recubridores, pues cuando Klein descubrió el teorema, informó mediante correspondencia (véase [2]) a Henri Poincaré y a Hermann Schwarz quien para abordar el estudio de este nuevo resultado introdujo el concepto de **espacio recubridor universal**. No obstante, unos años antes de este hecho, Bernhard Riemann fue la primera persona (no hay constancia de lo contrario) en pensar que las superficies consistían de muchas hojas superpuestas unas sobre otras que cubrían varias veces la misma parte del plano. La aplicación de esta idea a la teoría de funciones analíticas por su parte, demuestran que Riemann tenía en mente el concepto moderno de **recubridor ramificado**. Finalmente, fue Henri Poincaré quien en *Analysis Situs* definió el grupo fundamental de una variedad conexa $X$, siendo esta definición esencialmente la que conocemos hoy en día.

A partir del trabajo de Poincaré, se pudo desarrollar toda la teoría de espacios recubridores que conocemos en la actualidad y cuyo estudio nos concierne en esta memoria.

En este trabajo, presentaremos una introducción a la teoría de espacios recubridores de un espacio topológico $X$. Estos son un tipo particular de espacios localmente homeomorfos a $X$ y cuyo estudio (teóricamente, más sencillo) permite deducir interesantes propiedades topológicas de $X$.

Nuestros objetivos finales son dos:

- Caracterizar la existencia y, desde ahí, la unicidad de un recubridor especial de $X$: el recubridor universal $\widetilde{X}$. La diferencia esencial de $\widetilde{X}$ con otros recubridores es su carácter simplemente conexo.
- Bajo la hipótesis de existencia de $\widetilde{X}$, clasificar todos los espacios recubridores de $X$ en términos de las clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental de $X$. Como consecuencia, mostraremos que $\widetilde{X}$ es, a su vez, recubridor de cada uno de los recubridores de $X$. Esta es una buena motivación para justificar la terminología usada de recubridor universal.

Para acceder a este trabajo, se supone que el lector está familiarizado con los rudimentos básicos de la topología conjuntista y del grupo fundamental. Así que cualquier estudiante del Grado en Matemáticas de la ULL que haya cursado las asignaturas de Topología General e Introducción a la Topología Algebraica, está en condiciones de entender la teoría contenida en este trabajo.

La memoria está estructurada en tres capítulos.

En el primer capítulo, se introduce la noción de espacio recubridor de un espacio topológico y se presentan los teoremas de elevación para espacios recubridores, necesarios para justificar los resultados que se exponen a lo largo de la memoria. Asimismo, se prueba que el grupo fundamental de un recubridor puede ser considerado como un subgrupo del grupo fundamental del espacio recubierto. En el segundo capítulo, se presentan los homomorfismos de espacios recubridores, los cuales permiten saber cómo se relacionan los distintos espacios recubridores a uno dado. Naturalmente, procede introducir los automorfismos de un espacio recubridor y el grupo que generan, el cual aportará una herramienta para el cálculo del grupo fundamental del espacio recubierto. Para cerrar el capítulo, se demuestra que el espacio de órbitas de una acción propia y discontinua de un grupo $G$ es recubierto por el espacio de partida, y el grupo de automorfismos de tal recubridor es $G$. En el tercer y último capítulo, se define el espacio recubridor universal asociado a un espacio topológico para posteriormente, probar su unicidad y aportar una condición necesaria y suficiente de existencia. Además, se demuestra que para los espacios topológicos que admiten recubridor universal, se puede establecer una clasificación completa de sus espacios recubridores. Finalizamos la memoria con un apéndice que contiene algunos resultados básicos sobre la relación de conjugación para subgrupos de un grupo y sobre la teoría de acciones de grupos sobre conjuntos. Estos resultados son usados en diferentes partes de la memoria.

A lo largo del trabajo se han ido incorporando ejemplos adecuados que ilustran los resultados teóricos presentados.

# 1

# Teoremas de elevación para espacios recubridores

Cuando se estudió el grupo fundamental de la circunferencia $S^1$, se tuvo que recurrir a la aplicación exponencial $exp : \mathbb{R} \to S^1$ que aplica a cada punto de la recta real sobre un punto de la circunferencia. Fue entonces cuando se introdujo el concepto de **elevación** y se demostraron los siguientes resultados de la aplicación exponencial: la **propiedad de la elevación única**, el **teorema de elevación de caminos** y el **teorema de elevación de homotopías**. De hecho, el par $(\mathbb{R}, exp)$ es un **espacio recubridor** de $S^1$.

Los objetivos primordiales de este capítulo introductorio consisten en exponer qué se entiende por espacio recubridor y en establecer las versiones generalizadas de los resultados anteriores, a la par que se introduce el **teorema de monodromía**. En la noción de espacio recubridor, tal y como se presentará a continuación, intervienen dos espacios topológicos y una aplicación continua que los relaciona mediante la cual es posible estudiar vínculos entre los grupos fundamentales de ambos espacios, los cuales se establecerán también en este capítulo.

Salvo que se diga lo contrario, se asume que todos los espacios topológicos que se presentarán en todo el trabajo son conexos por caminos y localmente conexos por caminos (cada punto del espacio topológico posee una base de entornos abiertos conexos por caminos o equivalentemente, cada punto del espacio topológico posee una base de entornos conexos por caminos).

## 1.1. Espacios recubridores: definición y ejemplos

La presente sección tiene como objetivo introducir la noción de espacio recubridor sirviéndose de diversos ejemplos que ayudarán a entender la naturaleza de tales espacios. Posteriormente, se presentarán diversos resultados básicos que permitirán construir una amplia gama de ejemplos que serían muy difíciles de obtener mediante la definición de espacio recubridor. Finalmente, se presentarán el concepto de fibra –en el campo que esta memoria atañe– y una propiedad que por su naturaleza y uso posterior, se ha decidido encuadrarla aquí.

**Definición 1.1.** ***(Espacio recubridor de un espacio topológico).***
*Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, un* ***espacio recubridor de X*** *consiste en un par $(\widetilde{X}, p)$, donde $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ es un espacio topológico y $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación continua y sobreyectiva, satisfaciendo que: todo punto $x$ de $X$ admite un entorno abierto conexo por caminos $U$, para el que cada componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ es homeomorfa a $U$ vía restricción de $p$ a dicha componente.*

*A la aplicación $p$ se le denomina* ***proyección*** *o* ***recubrimiento****, a $\widetilde{X}$ como el* ***espacio total de la aplicación recubridora****, a $X$ como el* ***espacio base de la aplicación recubridora*** *y a los entornos $U$ de cada punto $x$ de $X$, que satisfacen las propiedades anteriores,* ***entornos elementales*** *o* ***admisibles****.*

Una definición equivalente a la anterior es asumida por otros autores: $(\widetilde{X}, p)$ *es un espacio recubridor de* $X$ *si todo punto* $x$ *de* $X$ *admite un entorno abierto* $U$ *que está* ***propiamente recubierto por p****, es decir, que su antiimagen es unión disjunta de subconjuntos abiertos de* $\widetilde{X}$*, donde cada uno de estos abiertos es homeomorfo a* $U$ *vía restricción de* $p$ *a dicho abierto.*

Esto no genera incoherencia ninguna con la definición presentada inicialmente, ya que las componentes conexas por caminos de un espacio topológico generan una partición del mismo y son subconjuntos abiertos al tener que $p^{-1}(U)$ es localmente conexo por caminos (todo subconjunto abierto de un espacio localmente conexo por caminos es localmente conexo por caminos).

Un ejemplo canónico de espacio recubridor surge de tomar como espacio base de la aplicación recubridora a $\mathbb{R}^+$ y como proyección a $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $p(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $(\mathbb{R}, p)$ es el espacio recubridor de $\mathbb{R}^+$.[1]


**Figura 1.1.** $(\mathbb{R}, p)$ es el espacio recubridor de $\mathbb{R}^+$

Otro ejemplo básico que ilustra el concepto de espacio recubridor, es el siguiente. Consideramos la aplicación $p : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(t) = (\sin(t), \cos(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, se tiene que $(\mathbb{R}, p)$ es espacio recubridor de $S^1$, ya que cualquier subintervalo abierto de amplitud menor que $2\pi$ de la circunferencia es un entorno admisible.

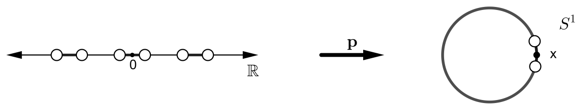



**Figura 1.2.** $(\mathbb{R}, p)$ es espacio recubridor de $S^1$

Un análisis del primer ejemplo nos conduce al siguiente resultado.

**Proposición 1.2.** *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *dos espacios topológicos. Si* $f : Y \to X$ *es homeomorfismo, entonces* $(Y, f)$ *es espacio recubridor de* $X$*.*

*Demostración.* La prueba es inmediata, pues se sigue del hecho que $X$ e $Y$ son espacios conexos por caminos y localmente conexos por caminos, y para cada punto $x$ de $X$ se selecciona como entorno admisible al propio $X$. $\square$

A continuación, se probará que el producto cartesiano de dos espacios recubridores es un espacio recubridor del producto cartesiano de los espacios bases.

[1] Nótese que se ha tomado como espacios topológicos a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $(\mathbb{R}^+, \mathcal{T}_{u|\mathbb{R}^+})$ donde $\mathcal{T}_u$ denota a la topología usual de $\mathbb{R}$.

**Proposición 1.3.** *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *dos espacios topológicos. Si* $(\widetilde{X}, p)$ *e* $(\widetilde{Y}, q)$ *son espacios recubridores de* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*, respectivamente, entonces* $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ *es un espacio recubridor de* $X \times Y$*.*

*Demostración.* La demostración puede ser realizada usando la definición 1.1 de espacio recubridor y los dos siguientes resultados:

(I) Si $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ son entornos abiertos conexos por caminos de $x$ en $X$ y de $y$ en $Y$, respectivamente, entonces $U \times V \subset X \times Y$ es un entorno abierto conexo por caminos de $(x, y)$ en $X \times Y$.

(II) Si $\mathcal{C}_1(\tilde{x}) \subseteq \widetilde{X}$ y $\mathcal{C}_2(\tilde{y}) \subseteq \widetilde{Y}$ son las componentes conexas por caminos de $\tilde{x}$ en $\widetilde{X}$ y de $\tilde{y}$ en $\widetilde{Y}$, respectivamente, $\mathcal{C}_1(\tilde{x}) \times \mathcal{C}_2(\tilde{y})$ es la componente conexa por caminos de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ en $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$.

□

Esta propiedad proporciona un amplio abanico de ejemplos nuevos de espacios recubridores, ya que, por ejemplo, se puede afirmar que el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$ (que es homeomorfo a $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n-veces)) junto a la aplicación $p \times \ldots \times p$ (n-veces), donde p es la aplicación definida en el segundo ejemplo de los presentados anteriormente, es un espacio recubridor del toro de dimensión n, esto es, $S^1 \times \ldots \times S^1$ (n-veces). De igual forma, se puede deducir que el plano euclídeo junto a la aplicación que surge de hacer el producto de la aplicación del primer ejemplo con la del segundo, es un espacio recubridor del subconjunto abierto del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}^+$.

Para cerrar esta sección introductoria, se presentarán una propiedad y definición intrínsecas del estudio de espacios recubridores y, más particularmente, de las aplicaciones recubridoras.

**Definición 1.4.** ***(Fibra de una aplicación recubridora sobre un punto).*** *Sean* $(\widetilde{X}, p)$ *un espacio recubridor de* $X$ *y* $x \in X$*. Al conjunto* $p^{-1}(x)$ *se le denomina* ***fibra de p sobre x****.* [2]

**Proposición 1.5.** *Si* $(\widetilde{X}, p)$ *es un espacio recubridor de* $X$*, entonces* $p$ *es una aplicación abierta.*

*Demostración.* Sea $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ y suponemos que $\widetilde{A} \neq \emptyset$, pues en otro caso, $p(\widetilde{A}) = p(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$. Para ver que $p(\widetilde{A}) \in \mathcal{T}$, resta ver que para todo $y \in p(\widetilde{A})$, se tiene que existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $y \in U \subseteq p(\widetilde{A})$, pues eso implicaría que $p(\widetilde{A}) \in \mathcal{T}$.

Sea $y \in p(\widetilde{A}) \subseteq X$. Por hipótesis, existe $U$ entorno admisible de $y$. Por ello, si $\widetilde{U}$ es una componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$, se tiene que $p_{|\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ es homeomorfismo y $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{T}}$. De este modo, $p_{|\widetilde{U}}(\widetilde{A} \cap \widetilde{U}) \in \mathcal{T}_{|U}$, ya que $\widetilde{A} \cap \widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{T}}_{|\widetilde{U}}$. Al tener que $U \in \mathcal{T}$, se sigue que $p_{|\widetilde{U}}(\widetilde{A} \cap \widetilde{U}) \in \mathcal{T}$. Así, se ha demostrado lo que se quería ver, pues

[2] Según Jean Dieudonné en [5] (p. 387), el término *fibra* (en alemán “ Faser ”) fue introducido por primera vez, aunque de una manera distinta al actual, en Seifert, H.,(1932), *Topologie dreidimensionaler gefaserter*,Dresde,Alemania,Acta Mathematica, 60. El concepto actual (en inglés “ Fibre”, aunque también suele identificarse con “ Fiber”) apareció por vez primera en Steenrod , N. E.,(1951), *The Topology of Fibre Bundles*,Nueva Jersey,Estados Unidos, Princeton University Press.

$$y \in p_{|\widetilde{U}}(\widetilde{A} \cap \widetilde{U}) = p(\widetilde{A} \cap \widetilde{U}) \subseteq p(\widetilde{A}).$$

□

## 1.2. Elevación de caminos a un espacio recubridor

En todo lo que sigue, $I = [0, 1]$ y $\sim$ denota la homotopía de caminos relativa a $\{0, 1\}$ en un espacio topológico. Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$. Entonces los dos siguientes resultados son inmediatos:

I) Si $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ es un camino en $\widetilde{X}$, entonces $p \circ \widetilde{\alpha} : I \to X$ es un camino en $X$.
II) Si $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ son caminos en $\widetilde{X}$ tales que $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$, entonces $p \circ \widetilde{\alpha} \sim p \circ \widetilde{\beta}$.

El objetivo de esta sección consistirá en tratar de demostrar dos resultados "recíprocos" a I) y II) que surgen de las siguientes cuestiones naturales:

a) Si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$ y $\alpha : I \to X$ es un camino en $X$, entonces ¿puede encontrarse $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ camino en $\widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$?
b) Si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$ y $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} :\to \widetilde{X}$ son caminos en $\widetilde{X}$ tales que $p \circ \widetilde{\alpha} \sim p \circ \widetilde{\beta}$ , entonces ¿es $\widetilde{\alpha}$ homótopo a $\widetilde{\beta}$?

Ambas cuestiones tendrán respuesta afirmativa pero con ciertos matices que se establecerán a continuación. Para ello, primero se probará un resultado que garantizará la unicidad del camino $\widetilde{\alpha}$ en a).

**Lema 1.6.** *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico conexo y $f, g : Y \to \widetilde{X}$ dos aplicaciones continuas. Si $p \circ f = p \circ g$, entonces las aplicaciones $f$ y $g$ son idénticas o no coinciden en ningún punto.*

*Demostración.* Como $Y$ es conexo basta ver que el conjunto

$$S = \{y \in Y : f(y) = g(y)\}$$

es abierto y cerrado en $(Y, \mathcal{T}_Y)$, es decir, que el interior de $S$, $Int(S)$, y la clausura topológica de S, $Cl(S)$, coinciden con $S$.

Veamos únicamente que

$$Cl(S) = S, \tag{1.1}$$

pues la prueba de $Int(S) = S$ es análoga.

Como $S \subseteq Cl(S)$ por la definición de clausura topológica, resta ver que $Cl(S) \subseteq S$. Procedemos por reducción al absurdo. Sea $y \in Cl(S)$ y suponemos que $f(y) \neq g(y)$. Por hipótesis,

$$(p \circ f)(y) = (p \circ g)(y),$$

identificando a este punto por $x$. Si $U$, $V_{f(y)}$ y $V_{g(y)}$ son un entorno admisible de $x$, la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ que contiene a $f(y)$ y la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ que contiene a $g(y)$, respectivamente, por la continuidad de $f$ y $g$, existe $W \subseteq Y$ entorno de $y$ que verifica

$$f(W) \subseteq V_{f(y)} \text{ y } g(W) \subseteq V_{g(y)}.$$

Pero, al tener que $y \in Cl(S)$, está claro que

$$W \cap S \neq \emptyset$$

y por lo tanto,

$$V_{f(y)} \cap V_{g(y)} \neq \emptyset,$$

lo que conduce a que

$$V_{f(y)} = V_{g(y)}.$$

Llegamos así a un absurdo, pues como $f(y) \neq g(y)$ se tendría que $p_{|V_{f(y)}}$ no sería inyectiva, ya que $(p \circ f)(y) = (p \circ g)(y)$. Concluimos así, que $y \in S$ y por lo tanto,

$$Cl(S) \subseteq S.$$

□

Ahora estamos en condiciones de dar una respuesta afirmativa a la cuestión a) planteada anteriormente.

**Teorema 1.7.** ***(Teorema de elevación de caminos).***
*Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$. Si $\alpha : I \to X$ es un camino en $X$ con punto inicial $p(\widetilde{x}_0)$, entonces existe un único camino $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ en $\widetilde{X}$ tal que su inicio es $\widetilde{x}_0$ y $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.*

*Demostración.* Abordaremos en primer lugar el caso base. Supongamos que $\alpha(I) \subseteq U$ donde $U$ es un entorno admisible. Si $V$ es la componente conexa por caminos de $\widetilde{x}_0$ en $p^{-1}(U)$, definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} \colon I &\to \widetilde{X} \\ t &\mapsto p_{|V}^{-1}(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Es obvio que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}_0$ y $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

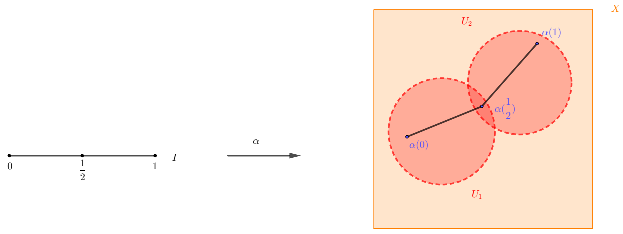
Supongamos ahora que $\alpha(I)$ no está contenido en ningún entorno admisible. Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento de $X$ por entornos admisibles. Luego, $\{\alpha^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$ es un recubrimiento de $I$ mediante subconjuntos abiertos, con lo cual, al tener que $I$ es compacto, dicho recubrimiento tiene un número de Lebesgue asociado que denotaremos por $\epsilon$.

Ahora, elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. De esta forma, podemos construir $\{\frac{k}{n}\}_{k=0}^{n}$ que es una partición de $I$ por $n+1$ puntos que generan $n$ subintervalos de $I$:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Nótese que si $k \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$diam([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} < \epsilon$$




con lo cual existe $j_k \in J$ tal que $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \subseteq \alpha^{-1}(U_{j_k})$. En esta situación, se puede definir $\widetilde{\alpha}$ a trozos como se expone a continuación. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $n = 2$.

Luego, definimos $\widetilde{\alpha}$ de la siguiente forma:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \begin{cases} p^{-1}_{|V_1}(\alpha(t)) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ p^{-1}_{|V_2}(\alpha(t)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

donde $V_1$ y $V_2$ son las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(U_1)$ y $p^{-1}(U_2)$ que contienen a $\widetilde{x_0}$ y $p^{-1}_{|V_1}(\alpha(\frac{1}{2}))$, respectivamente. Nótese que $\widetilde{\alpha}$ es continua por el lema de continuidad[3].

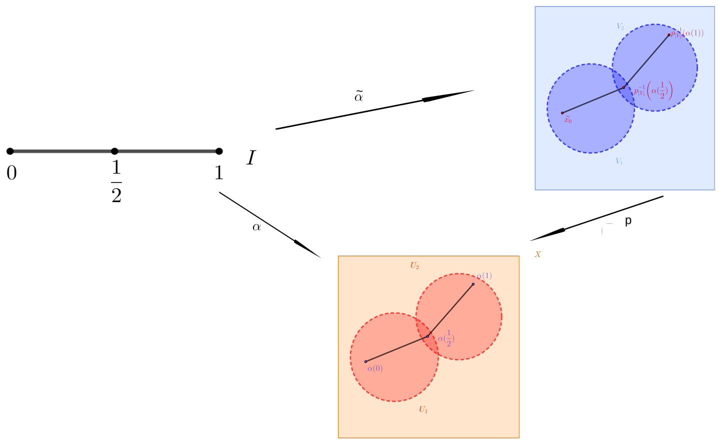



**Figura 1.3.** Esquema final de la prueba del teorema de elevación de caminos (teorema 1.7).

La construcción realizada queda reflejada en la figura 1.3.

Tanto en el caso base como en este último, la unicidad del camino $\widetilde{\alpha}$ está garantizada por el Lema 1.6. □

Al camino $\widetilde{\alpha}$ del teorema 1.7 se le denomina **"elevación"** o **"levantamiento"** de $\alpha$. También, se dice que $\alpha$ puede ser **"levantado"** o **"elevado"** a $\widetilde{\alpha}$.

*Ejemplo 1.8.* Consideramos la proyección recubridora $p : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(t) = (cos(2\pi t), sen(2\pi t))$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Si para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos

[3] **Lema de continuidad**: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{F_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento de $X$ por subconjuntos cerrados. Si para $1 \leq i \leq n$ ocurre que $f_i : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua y $f_{i_{|F_i \cap F_j}} = f_{j_{|F_i \cap F_j}}$ para $i \neq j$, entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ definida por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in F_i$ es también una aplicación continua.

el camino $\alpha_n : [0,1] \to S^1$ dado por $\alpha_n(s) = (cos(n\pi s), sen(n\pi s))$, para cada $s \in [0,1]$, se obtiene que la correspondiente única elevación a $\mathbb{R}$ con origen en 0 es la aplicación $\widetilde{\alpha_n} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{\alpha_n}(s) = \frac{n}{2}s$, para cada $s \in [0,1]$.

Como una aplicación del teorema 1.7, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.9.** *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $A$ es un subespacio de $X$ conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si $\widetilde{A}$ es una componente conexa por caminos de $p^{-1}(A)$, entonces $(\widetilde{A}, p_{|\widetilde{A}})$ es un espacio recubridor de $A$.*

*Demostración.* Debido a que la prueba no aporta ninguna idea relevante y es excesivamente técnica, únicamente demostraremos que $p_{|\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to A$ es sobreyectiva y presentaremos quiénes serán los entornos admisibles.

Veamos primero que $p_{|\widetilde{A}}$ es sobreyectiva.

Sea $a \in A$. Probemos que existe $\widetilde{a} \in \widetilde{A}$ tal que $p(\widetilde{a}) = a$. Para ello, fijamos arbitrariamente $\widetilde{a}' \in \widetilde{A}$. Así, $p(\widetilde{a}') \in A$ y como $A$ es conexo por caminos, existe

$$\alpha : I \to A \subseteq X$$

camino en $A \subseteq X$ con inicio en $p(\widetilde{a}')$ y final en $a$. Por el teorema 1.7, existe un único camino

$$\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$$

con inicio en $\widetilde{a}'$ tal que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$. Además, por definición

$$\widetilde{\alpha}(1) \in \widetilde{A}.$$

Con lo cual, llamando $\widetilde{a} = \widetilde{\alpha}(1)$ es claro que verifica la tesis.

Ahora, presentaremos un entorno admisible de $a$ en $A$.

Si $U$ es un entorno admisible de $a$ en $X$, entonces un entorno admisible de $a$ en $A$ es la componente conexa por caminos de $a$ en $U \cap A$. Este conjunto es un abierto en $A$, pues lo es en $U \cap A$ (que es un abierto en $A$), ya que toda componente conexa por caminos de un espacio localmente conexo por caminos es un subconjunto abierto de dicho espacio topológico. □

A continuación, se presentará una respuesta afirmativa a la cuestión b) planteada anteriormente.

**Teorema 1.10.** ***(Teorema de monodromía).***
*Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ dos caminos en $\widetilde{X}$ con el mismo punto inicial $\widetilde{x_0}$. Si $p \circ \widetilde{\alpha} \sim p \circ \widetilde{\beta}$, entonces $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$.*

*Demostración.* Por hipótesis, existe $H : I \times I \to X$ aplicación continua que verifica las siguientes propiedades:

a) $H(t,0) = (p \circ \widetilde{\alpha})(t) = p[\widetilde{\alpha}(t)]$, para todo $t \in I$.
b) $H(t,1) = (p \circ \widetilde{\beta})(t) = p[\widetilde{\beta}(t)]$, para todo $t \in I$.
c) $H(0,s) = (p \circ \widetilde{\alpha})(0) = (p \circ \widetilde{\beta})(0) = p(\widetilde{x_0})$, para todo $s \in I$.
d) $H(1,s) = (p \circ \widetilde{\alpha})(1) = (p \circ \widetilde{\beta})(1)$, para todo $s \in I$.

Para lograr nuestro objetivo, probemos primero que basta encontrar $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$ aplicación continua tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x_0}$.

Suponemos $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$ aplicación continua con tales propiedades. Del teorema 1.7 y de a), se deduce que

$$\widetilde{H}(t,0) = \widetilde{\alpha}(t)$$

para todo $t \in I$, pues $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x_0}$ y $p[\widetilde{H}(t,0)] = H(t,0) = p[\widetilde{\alpha}(t)]$ para todo $t \in I$.

Si $\mathcal{C}_{\widetilde{x_0}} : I \to \widetilde{X}$ es el camino constante en $\widetilde{x_0}$, del teorema 1.7 y de c) se tiene que

$$\widetilde{H}(0,s) = \widetilde{x_0} = \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$$

para todo $s \in I$, pues $p[\widetilde{H}(0,s)] = H(0,s) = p[\mathcal{C}_{\widetilde{x_0}}(s)]$ para todo $s \in I$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x_0}$.

Como se ha probado ya que $\widetilde{H}(0,s) = \widetilde{x_0}$ para todo $s \in I$, del lema 1.6 y de b) se sigue que

$$\widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\beta}(t)$$

para todo $t \in I$, pues $p[\widetilde{H}(t,1)] = H(t,1) = p[\widetilde{\beta}(t)]$ y $\widetilde{H}(0,1) = \widetilde{x_0}$.

Finalmente, si $\mathcal{C}_{\widetilde{\alpha}(1)} : I \to \widetilde{X}$ y $\mathcal{C}_{\widetilde{\beta}(1)} : I \to \widetilde{X}$ son el camino constante en $\widetilde{\alpha}(1)$ y $\widetilde{\beta}(1)$, respectivamente, como $\widetilde{H}(t,0) = \widetilde{\alpha}(t)$ y $\widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\beta}(t)$ para todo $t \in I$, del lema 1.6 y de d), se tiene que

$$\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{H}(1,s) = \widetilde{\beta}(1)$$

para todo $s \in I$, pues: $p[\mathcal{C}_{\widetilde{\alpha}(1)}(s)] = H(1,s) = p[\mathcal{C}_{\widetilde{\beta}(1)}(s)]$, $\mathcal{C}_{\widetilde{\beta}(1)}(1) = \widetilde{H}(1,1)$ y $\mathcal{C}_{\widetilde{\alpha}(1)}(0) = \widetilde{H}(1,0)$.

Luego, se concluye que si existiese $\widetilde{H}$ aplicación continua tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x_0}$, $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ serían caminos homótopos.

Procedemos a demostrar que existe $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$ aplicación continua tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x_0}$ mediante una técnica puramente constructivista, similar a la del teorema 1.7.

Al igual que en dicho teorema, es posible encontrar $\{t_i\}_{i=0}^n$ y $\{s_k\}_{k=0}^m$ particiones de $I$ tales que para cada $(i,k) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$,

$$H([t_{i-1},t_i] \times [s_{k-1},s_k]) \subseteq U_i^k$$

donde $U_i^k$ es un entorno admisible de $X$. Así definiremos $\widetilde{H}$ en primer lugar sobre $[0,t_1] \times [s_{k-1},s_k]$ para $k \in \{1,\ldots m\}$, teniendo sumo cuidado en las intersecciones de cada subrectángulo para evitar posibles discontinuidades. Una vez se tenga definido $\widetilde{H}$ en $[0,t_1] \times I$, hacemos lo propio en $[t_{i-1},t_i] \times I$ para $i \in \{1,\ldots,n\}$, garantizando, como en el caso anterior, la continuidad.

Para ver en más detalle como se definiría esta aplicación $\widetilde{H}$, reducimos nuestra situación a un caso más sencillo sin perder generalidad, pues todos los demás surgen de repetir el proceso de una manera análoga un número finito de veces. Supongamos que $n = m = 2$. La figura 1.4 ilustra la situación. Los puntos naranjas observados de izquierda a derecha, son $(p\circ\widetilde{\alpha})(0) = (p\circ\widetilde{\beta})(0)$ y $(p\circ\widetilde{\alpha})(1) = (p\circ\widetilde{\beta})(1)$, respectivamente, el punto rojo sobre $X$ es $(p \circ \widetilde{\alpha})(\frac{1}{2})$ y el azul es $(p \circ \widetilde{\beta})(\frac{1}{2})$.

Primero definimos $\widetilde{H}$ en $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

Si $V_1$ es la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U_1)$ que contiene a $\widetilde{x_0}$, para cada $(t, s) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ definimos

$$\widetilde{H}(t, s) := p^{-1}_{|V_1}[H(t, s)].$$

Ahora, definamos $\widetilde{H}$ en $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Si $V_2$ es la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U_2)$ que contiene a $p^{-1}_{|V_1}[H(t, \frac{1}{2})]$ para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$, definimos

$$\widetilde{H}(t, s) := p^{-1}_{|V_2}[H(t, s)]$$

para cada $(t, s) \in [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$. Se ha conseguido así, tener a $\widetilde{H}$ definida en $[0, \frac{1}{2}] \times I$, así que toca hacer lo propio en $[\frac{1}{2}, 1] \times I$.

Si $V_3$ es la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U_3)$ que contiene a $p^{-1}_{|V_1}[H(\frac{1}{2}, s)]$ para cada $s \in [0, \frac{1}{2}]$, definimos

$$\widetilde{H}(t, s) := p^{-1}_{|V_3}[H(t, s)]$$

para cada $(t, s) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$.

Finalmente, resta definir $\widetilde{H}$ en $[\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Si $V_4$ es la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U_4)$ que contiene a $p^{-1}_{|V_2}[H(\frac{1}{2}, s)]$ para cada $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ y $p^{-1}_{|V_3}[H(t, \frac{1}{2})]$ para cada $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, definimos

$$\widetilde{H}(t, s) := p^{-1}_{|V_4}[H(t, s)]$$

para cada $(t, s) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Por como se ha definido $\widetilde{H}$, está claro que la correspondencia $\widetilde{H}$ es una aplicación cuya continuidad se puede garantizar mediante el lema de continuidad 3. □

Una aplicación inmediata de dicho teorema es demostrar que el grupo fundamental de la circunferencia es no finito, pues en muchos textos para hallar dicho grupo, demuestran por separado que es cíclico y no finito.

*Ejemplo 1.11.* Consideramos la proyección recubridora $p : \mathbb{R} \to S^1$, definida por $p(t) = (sin(t), cos(t))$ para $t \in [0, 1]$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha_n} : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ t &\to 2\pi n t. \end{aligned}$$

Obsérvese que para $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\alpha}_k$ tiene condición inicial 0 y $[p \circ \widetilde{\alpha_k}] \in \pi_1(S^1, (0, 1))$. Además, si $n, m \in \mathbb{N}$ distintos, entonces $[p \circ \widetilde{\alpha_n}] \neq [p \circ \widetilde{\alpha_m}]$, pues en otro caso, por el teorema de monodromía se tendría que $\widetilde{\alpha_n} \sim \widetilde{\alpha_m}$ y por lo tanto, $2\pi n = 2\pi m$ lo que contradice nuestra suposición inicial.

Siguiendo la prueba del teorema 1.10, se deduce el teorema de elevación de homotopías cuyo enunciado preciso es el siguiente.

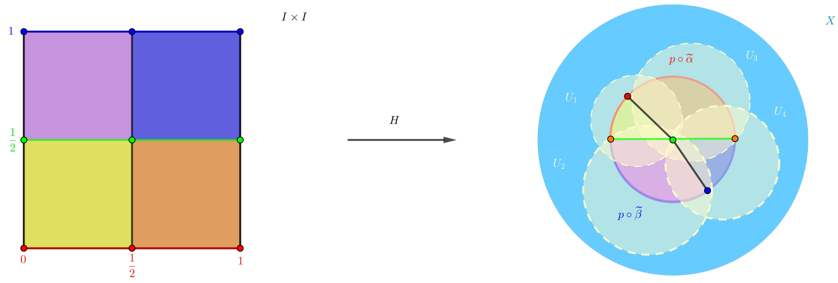



**Figura 1.4.** Ilustración gráfica de la situación base propuesta en la demostración del teorema 1.10.

**Teorema 1.12.** ***(Teorema de elevación de homotopías).***
*Sean* $(\widetilde{X}, p)$ *un espacio recubridor de* $X$ *y* $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$*. Si* $H : I \times I \to X$ *es una homotopía tal que* $H(0,0) = p(\widetilde{x}_0)$*, entonces existe una única homotopía* $\widetilde{H} : I \times I \to \widetilde{X}$ *tal que* $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x}_0$ *y* $p \circ \widetilde{H} = H$*.*[4]

*Demostración.* Se encuentra implícita en la demostración del teorema 1.10. □

Finalmente, para cerrar la sección se presentarán un resultado y una definición que son fundamentales en la teoría de espacios recubridores. Por la justificación teórica que precisan, se ha decidido presentarlos aquí.

**Lema 1.13.** *Sea* $(\widetilde{X}, p)$ *un espacio recubridor de* $X$*. Si* $x, y \in X$*, entonces las fibras de* $p$ *sobre* $x$ *e* $y$*,* $p^{-1}(x)$ *y* $p^{-1}(y)$*, poseen el mismo cardinal.*

*Demostración.* Basta encontrar una biyección entre $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$.

Para ello, usando que $(X, \mathcal{T})$ es conexo por caminos, consideramos un camino $\alpha : I \to X$ en $X$ tal que

$$\alpha(0) = x \text{ y } \alpha(1) = y.$$

Entonces definimos la aplicación

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$$

como sigue.

Sea $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. El teorema 1.7 nos permite encontrar un único camino $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ en $\widetilde{X}$ satisfaciendo

$$\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x} \text{ y } p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha.$$

Entonces,

$$\varphi_\alpha(\widetilde{x}) := \widetilde{\alpha}(1).$$

Nótese que

$$p(\varphi_\alpha(\widetilde{x})) = p(\widetilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = y$$

y, en consecuencia, $\varphi_\alpha(\widetilde{x}) \in p^{-1}(y)$.

A continuación, usando el camino opuesto a $\alpha$

$$\bar{\alpha} : I \to X$$

[4] La unicidad está garantizada por el lema 1.6.

$$t \mapsto \bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$$

introduciremos una aplicación $\varphi_{\bar{\alpha}} : p^{-1}(y) \to p^{-1}(x)$.

De hecho, si $\widetilde{y} \in p^{-1}(y)$, entonces por el teorema 1.7, existe un único camino $\widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ tal que

$$\widetilde{\beta}(0) = \widetilde{y},\ p \circ \widetilde{\beta} = \bar{\alpha}.$$

Así, podemos definir

$$\varphi_{\bar{\alpha}}(\widetilde{y}) = \widetilde{\beta}(1)$$

y, como antes, se tiene que $\varphi_{\bar{\alpha}}(\widetilde{y}) \in p^{-1}(x)$.

Finalmente,

$$\varphi_{\bar{\alpha}} \circ \varphi_{\alpha} = id_{p^{-1}(x)} \text{ y } \varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\bar{\alpha}} = id_{p^{-1}(y)}.$$

De hecho, si $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ es la elevación de $\alpha$ con condición inicial $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}$ entonces el camino opuesto a $\widetilde{\alpha}$, $\bar{\widetilde{\alpha}}$, es la elevación de $\bar{\alpha}$ con condición inicial $\bar{\widetilde{\alpha}}(0) = \widetilde{\alpha}(1) = \varphi_{\alpha}(\widetilde{x})$. Por tanto,

$$\varphi_{\bar{\alpha}}(\varphi_{\alpha}(\widetilde{x})) = \bar{\widetilde{\alpha}}(1) = \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}.$$

Con un razonamiento similar se prueba que $\varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\bar{\alpha}} = id_{p^{-1}(y)}$. □

El resultado anterior nos permite introducir la siguiente definición.

**Definición 1.14.** ***(Número de hojas de un espacio recubridor).***
*Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $x \in X$. Al cardinal de la fibra de $p$ sobre $x$, $p^{-1}(x)$, se le denomina* ***número de hojas del espacio recubridor $(\widetilde{X}, p)$ respecto a $X$****. Se hablará así de* ***espacios recubridores con $n-$hojas*** *o* ***espacios recubridores con infinitas hojas****.*

## 1.3. Grupo fundamental de un espacio recubridor

En esta sección, se establecerá una relación algebraica entre un espacio recubridor y el espacio base asociado, estando determinada esta por el grupo fundamental de ambos. La relación será de vital importancia en el desarrollo de la memoria, pues permite establecer cuando dos espacios recubridores de un mismo espacio topológico son "iguales".

Para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $x_0$ un punto de $X$, denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$ el grupo fundamental de $X$ con punto base $x_0$, esto es,

$$\pi_1(X, x_0) = \big\{[\alpha] \mid \alpha : I \to X \text{ camino y } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\big\}$$

Aquí, $[\alpha]$ denota la clase de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ del lazo $\alpha$ con punto base $x_0$.

Recordemos que si $\gamma : I \to X$ es un camino con punto inicial $x_0$ y punto final $x_1$, entonces $\gamma$ induce un isomorfismo de grupos

$$\mathcal{I}_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

definido por

$$\mathcal{I}_\gamma[\alpha] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma], \text{ para } [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$$

donde $\bar{\gamma} : I \to X$ es el camino opuesto a $\gamma$ y $*$ es la concatenación de caminos.

También usaremos la siguiente notación para el homomorfismo inducido entre los grupos fundamentales del espacio de partida y de llegada de una aplicación continua. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua tal que $f(x_0) = y_0$. Entonces, $f$ induce un homomorfismo de grupos

$$f_{*x_0} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

dado por

$$f_{*x_0}([\alpha]) = [f \circ \alpha], \text{ para } [\alpha] \in \pi_1(X, x_0).$$

Con las definiciones previas en mente, el primer resultado que probaremos en esta sección es que una aplicación recubridora induce un monomorfismo de grupos entre los grupos fundamentales del espacio total y base sobre puntos correspondientes. Así, el grupo fundamental del espacio total puede ser considerado como un subgrupo del grupo fundamental del espacio base.

**Teorema 1.15.** *Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$. Si $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, entonces el homomorfismo inducido $p_{*\widetilde{x}} : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1(X, p(\widetilde{x}))$ es un monomorfismo.*

*Demostración.* Sean $[\widetilde{\gamma}], [\widetilde{\gamma}'] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ tales que

$$p_{*\widetilde{x}}([\widetilde{\gamma}]) = p_{*\widetilde{x}}([\widetilde{\gamma}']).$$

Aplicando la definición, se tiene que $[p \circ \widetilde{\gamma}] = [p \circ \widetilde{\gamma}']$, es decir, $p \circ \widetilde{\gamma} \sim p \circ \widetilde{\gamma}'$. De lo que se concluye, por el teorema 1.10, que $\widetilde{\gamma} \sim \widetilde{\gamma}'$, o lo que es equivalente,

$$[\widetilde{\gamma}] = [\widetilde{\gamma}'].$$

□

A continuación, probaremos que dada una aplicación recubridora $p$, las imágenes de los grupos fundamentales (por el homomorfismo inducido por $p$) del espacio total con puntos base en la misma fibra de $p$ son subgrupos conjugados [5] del grupo fundamental del espacio base.

**Teorema 1.16.** *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$. Si $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{y})$, entonces $p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}))$ y $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, p(\widetilde{x}))$.*

*Demostración.* Al punto $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{y})$ lo identificaremos por la letra $x$.

En primer lugar, $p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}))$ y $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ son subgrupos de $\pi_1(X, x)$, pues la imagen por un homomorfismo de grupos de un subgrupo es un subgrupo. Ahora, veamos que son conjugados. Como $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ es conexo por caminos, existen

$$\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$$

camino en $\widetilde{X}$, con inicio en $\widetilde{x}$ y final en $\widetilde{y}$, e

[5] véase el apartado A.1 en el apéndice.

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}} : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})$$

isomorfismo de grupos definido por

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}}([\widetilde{\gamma}]) = [\bar{\widetilde{\alpha}} * \widetilde{\gamma} * \widetilde{\alpha}], \text{ para cada } [\widetilde{\gamma}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}).$$

Asimismo, se puede encontrar otro isomorfismo de grupos

$$\mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x),$$

definido por

$$\mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}}([\xi]) = [\overline{p \circ \widetilde{\alpha}} * \xi * p \circ \widetilde{\alpha}], \text{ para cada } [\xi] \in \pi_1(X, x),$$

que hace el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \arrow[r, "p_{*\widetilde{x}}"] \arrow[d, "\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}}"'] & \pi_1(X, x) \arrow[d, "\mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}}"] \\
\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}) \arrow[r, "p_{*\widetilde{y}}"] & \pi_1(X, x)
\end{tikzcd}$$

conmutativo.

Nótese que

$$\mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}}([\xi]) = [p \circ \widetilde{\alpha}]^{-1} \cdot [\xi] \cdot [p \circ \widetilde{\alpha}], \text{ para cada } [\xi] \in \pi_1(X, x)$$

y, así, $\mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}}$ es exactamente el automorfismo interior en $\pi_1(X, x)$ asociado a $[p \circ \widetilde{\alpha}]$.

Así se tiene que

$$p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})) = p_{*\widetilde{y}}[\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))] = \mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}}[p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))].$$

Por lo tanto, $p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}))$ y $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$, pues existe un automorfismo interior en $\pi_1(X, x)$, $\mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}}$, que aplica $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ sobre $p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}))$. □

Ahora, se demostrará una especie de recíproco del teorema 1.16.

**Teorema 1.17.** *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$. Si $H$ es un subgrupo de $\pi_1(X, p(\widetilde{x}))$ que pertenece a la clase de conjugación de $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, entonces existe $\widetilde{y} \in p^{-1}(p(\widetilde{x}))$ tal que $p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})) = H$.*

*Demostración.* Por hipótesis, existe $[\alpha] \in \pi_1(X, p(\widetilde{x}))$ tal que

$$H = [\alpha]^{-1} p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))[\alpha].$$

Ahora, por el teorema 1.7 se puede encontrar un único camino $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ camino en $\widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ y $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}$. Definimos así

$$\widetilde{y} := \widetilde{\alpha}(1)$$

y procedamos a ver que $p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})) = H$.

Al igual que en el teorema 1.16, podemos considerar

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}} : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}) \text{ e } \mathcal{I}_{p\circ\widetilde{\alpha}} : \pi_1(X, p(\widetilde{x})) \to \pi_1(X, p(\widetilde{x}))$$

isomorfismos de grupos, definidos por

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}}([\widetilde{\gamma}]) = [\bar{\widetilde{\alpha}} * \widetilde{\gamma} * \widetilde{\alpha}] \text{ para todo } [\widetilde{\gamma}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$$

y por

$$\mathcal{I}_{\alpha}([\xi]) = [\bar{\alpha} * \xi * \alpha] = [\alpha]^{-1}[\xi][\alpha] \text{ para todo } [\xi] \in \pi_1(X, p(\widetilde{x})),$$

respectivamente, que hacen el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \arrow[r, "p_{*\widetilde{x}}"] \arrow[d, "\widetilde{\mathcal{I}}_{\widetilde{\alpha}}"'] & \pi_1(X, p(\widetilde{x})) \arrow[d, "\mathcal{I}_{\alpha}"] \\
\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}) \arrow[r, "p_{*\widetilde{y}}"] & \pi_1(X, p(\widetilde{x}))
\end{tikzcd}$$

Así se deduce que,

$$p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})) = [\alpha]^{-1} p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))[\alpha],$$

lo que prueba el resultado. $\square$

Finalmente, combinando los teoremas 1.16 y 1.17, se obtiene el principal resultado de este apartado con el cual cerramos el mismo.

**Teorema 1.18.** *Sea $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$. Si $x \in X$, entonces el conjunto $\left\{p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \mid \widetilde{x} \in p^{-1}(x)\right\}$ es una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x)$.*

## 1.4. Elevación de aplicaciones a un espacio recubridor

En la sección 1.2, se demostró que para un espacio recubridor $(\widetilde{X}, p)$ sobre $X$, es posible elevar un camino en $X$ a un camino en $\widetilde{X}$. En esta sección, únicamente se demostrará que, bajo ciertas condiciones, es posible realizar la misma construcción con una aplicación continua $f : Y \to X$, donde $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico. Es decir, que se puede elevar $f$ a una aplicación continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ (esto significa que $p \circ \widetilde{f} = f$).

**Teorema 1.19.** ***(Teorema de elevación de aplicaciones continuas).*** *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico localmente conexo por caminos y conexo por caminos, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e $y_0 \in Y$. Si $f : Y \to X$ es una aplicación continua tal que $f(y_0) = p(\widetilde{x}_0)$, entonces existe una única aplicación continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$ y $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$ si y solo si $f_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_{*\widetilde{x}_0}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.*

*Demostración.* Procederemos en tres etapas:

- $\boxed{\text{Primera etapa}}$ Se probará que si existe una única aplicación continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$ y $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$, entonces $f_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_{*\widetilde{x}_0}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.
- $\boxed{\text{Segunda etapa}}$ Se demostrará que si $f_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_{*\widetilde{x}_0}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$, entonces existe una única aplicación $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$ y $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$.
- $\boxed{\text{Tercera etapa}}$ Se probará que la aplicación encontrada en la segunda etapa es continua.

Procedamos con la primera etapa.

Supongamos que existe una única aplicación continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$ y $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$. Luego,

$$f_{*y_0} = (p \circ \widetilde{f})_{*y_0} = p_{*\widetilde{x}_0} \circ \widetilde{f}_{*y_0}.$$

Así, $f_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0)) = p_{*\widetilde{x}_0}[\widetilde{f}_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0))]$ y como $\widetilde{f}_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, está claro que

$$p_{*\widetilde{x}_0}(\widetilde{f}_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_{*\widetilde{x}_0}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$$

y por lo tanto,

$$f_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_{*\widetilde{x}_0}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)).$$

Proseguimos con la segunda etapa.

Supongamos que $f_{*y_0}(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_{*\widetilde{x}_0}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$. Procedemos a definir la aplicación $\widetilde{f}$. Para ello, sea $y \in Y$ un punto fijo pero arbitrario. Como $Y$ es conexo por caminos, se puede encontrar un camino

$$\alpha : I \to Y$$

en $Y$ cuyo inicio y final sean $y_0$ e $y$, respectivamente. Luego,

$$f \circ \alpha : I \to X$$

es un camino en $X$ con origen en $p(\widetilde{x}_0)$ y final en $f(y)$. Así, por el teorema 1.7 existe un único camino

$$\widetilde{f \circ \alpha} : I \to \widetilde{X}$$

en $\widetilde{X}$ con inicio en $\widetilde{x}_0$ tal que

$$p \circ \widetilde{f \circ \alpha} = f \circ \alpha.$$

Pudiendo definir de esta manera,

$$\widetilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \alpha}(1).$$

La figura 1.5 ilustra la definición de $\widetilde{f}$.

Como en la definición de $\widetilde{f}(y)$ interviene $\widetilde{f \circ \alpha}$ que es dependiente de $\alpha$, hay que asegurarse que $\widetilde{f}(y)$ es independiente de $\alpha$. Así, sea $\gamma : I \to Y$ otro camino en $Y$ con inicio en $y_0$ y final en $y$. Distinguimos dos casos:

I) $\boxed{\alpha \sim \gamma}$ Con lo cual, $f \circ \alpha \sim f \circ \gamma$ y por los teoremas 1.7 y 1.10, $f \circ \gamma$ puede ser “levantado” a un camino en $\widetilde{X}$ que sería homótopo a $\widetilde{f \circ \alpha}$ y por lo tanto, con el mismo punto final.

II) $\boxed{\alpha \not\sim \gamma}$ Es claro que
$$[\alpha * \bar{\gamma}] \in \pi_1(Y, y_0).$$

Luego, por hipótesis se puede encontrar $[\xi] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ que verifica que $f_{*y_0}([\alpha * \bar{\gamma}]) = p_{*\widetilde{x}_0}([\xi])$, o lo que es lo mismo,
$$[f \circ (\alpha * \bar{\gamma})] = [p \circ \xi].$$

Como $f \circ (\alpha * \bar{\gamma})$ puede ser levantado a un único camino
$$\widetilde{f \circ (\alpha * \bar{\gamma})} : I \to \widetilde{X}$$

en $\widetilde{X}$ con inicio en $\widetilde{x}_0$, por el teorema 1.10 deducimos que
$$\widetilde{f \circ (\alpha * \bar{\gamma})} \sim \xi$$

y por ello, $[\ \widetilde{f \circ (\alpha * \bar{\gamma})}\ ] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Esto junto al hecho que
$$f \circ (\alpha * \bar{\gamma}) = (f \circ \alpha) * (f \circ \bar{\gamma}),$$

permite deducir que
$$\widetilde{f \circ (\alpha * \bar{\gamma})}\ (t) = \widetilde{f \circ \alpha}(2t)$$

cuando $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Así,
$$\widetilde{\epsilon}(t) = \widetilde{f \circ (\alpha * \bar{\gamma})} \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right), \text{ para } t \in [0,1],$$

representa al único levantamiento de $f \circ \bar{\gamma}$ con origen en $\widetilde{f \circ \alpha}(1)$. Por lo tanto, $\bar{\widetilde{\epsilon}}$ será el levantamiento de $f \circ \gamma$ con inicio en $\widetilde{x}_0$ que tiene como punto final $\widetilde{f \circ \alpha}(1)$.

Se tiene así que $\widetilde{f}$ está bien definida y por la propia construcción, $p \circ \widetilde{f} = f$. Además, en virtud del lema 1.6 la aplicación $\widetilde{f}$ es única.
La figura 1.6 ilustra la construcción previa.
Finalizamos la demostración con la tercera etapa.
Veamos que $\widetilde{f}$ es continua en todo punto de $Y$. Para ello, fijamos $y \in Y$ y definimos
$$x := f(y) \text{ y } \widetilde{x} := \widetilde{f}(y).$$

Sean $U \subseteq X$ el entorno admisible de $x$ y $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{X}$ la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{x}$. Como $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio localmente conexo por caminos y $f$ es una aplicación continua, es posible encontrar $\Lambda \subseteq Y$ entorno de $y$ conexo por caminos tal que
$$f(\Lambda) \subseteq U,$$

así si $\widetilde{f}(\Lambda) \subseteq \widetilde{U}$, se tendría que en $\Lambda$:
$$\widetilde{f} = p^{-1}_{|\widetilde{U}} \circ f$$

que sería composición de funciones continuas y por lo tanto, continua.

Veamos así, que $\widetilde{f}(\Lambda) \subseteq \widetilde{U}$.

Para ello, sea $y' \in \Lambda$ un punto fijo pero arbitrario y demostremos que $\widetilde{f}(y') \in \widetilde{U}$, para lo que se ha de recurrir a la definición de $\widetilde{f}$. De este modo, sea

$$\alpha : I \to Y$$

un camino en $Y$ con origen en $y_0$ y final en $y$. Al ser $\Lambda$ conexo por caminos, podemos concatenarlo con otro camino

$$\beta : I \to \Lambda \subseteq Y$$

en $\Lambda$ con inicio en $y$ y final en $y'$. Como se ha justificado previamente, es posible "elevar" los caminos

$$f \circ \alpha,\ f \circ \beta : I \to X$$

en $X$, a unos únicos caminos

$$\widetilde{f \circ \alpha},\ \widetilde{f \circ \beta} : I \to \widetilde{X}$$

en $\widetilde{X}$, verificando que:

$$\widetilde{f \circ \alpha}(0) = \widetilde{x}_0 \text{ y } \widetilde{f \circ \beta}(0) = \widetilde{f \circ \alpha}(1) = \widetilde{f}(y) = \widetilde{x}.$$

Por esto,

$$\widetilde{f \circ \alpha} * \widetilde{f \circ \beta}$$

es el único levantamiento de $f \circ (\alpha * \beta)$ con inicio en $\widetilde{x}_0$ y por lo tanto,

$$\widetilde{f}(y') = (\widetilde{f \circ \alpha} * \widetilde{f \circ \beta})(1) = \widetilde{f \circ \beta}(1)$$

y como la traza de $f \circ \beta$ está contenida en $U$, la traza de $\widetilde{f \circ \beta}$ está contenida en $\widetilde{U}$, pues es la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{x}$.

La figura 1.7 ilustra el proceso anterior.

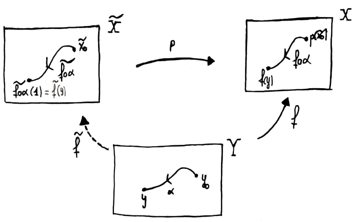


**Figura 1.5.**

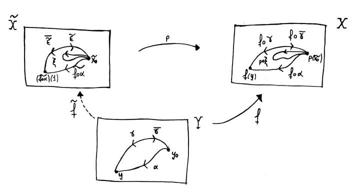


**Figura 1.6.**

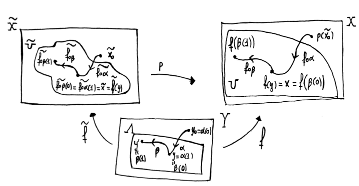


**Figura 1.7.**

□

Si la aplicación $\widetilde{f}$ del teorema 1.19 existe, se dice que $f$ puede ser **"levantada"** o **"elevada"** a $\widetilde{f}$, o que $\widetilde{f}$ es una **"elevación"** o **"levantamiento"** de $f$.

# 2

# Homomorfismos de espacios recubridores y espacios de órbita

En el presente capítulo, primero se estudiará cómo se relacionan los espacios recubridores de un espacio dado, teniendo que introducir para ello los conceptos de homomorfismos y automorfismos de espacios recubridores. También, se presentará un criterio que establece cuando dos espacios recubridores de un mismo espacio son esencialmente iguales.

Luego, se probará que el conjunto de todos los automorfismos de un espacio recubridor forma un grupo y se analizará este en detalle, pues, como se verá en el próximo capítulo, aporta una herramienta para el cálculo del grupo fundamental del espacio base. Para este propósito, es necesario introducir una acción del grupo sobre una fibra de la aplicación recubridora.

Por último, se presentará un método que permite construir espacios recubiertos por uno dado.

A lo largo del capítulo, si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $Homeom(X)$ es el conjunto de todos los homeomorfismos de $X$ sobre sí mismo.

## 2.1. Homomorfismos y automorfismos de espacios recubridores

Hay una regla no escrita en todos los campos de las matemáticas cuando se investiga sobre una estructura recién descubierta, que reside en estudiar el grupo de los automorfismos de dicha estructura para investigar que propiedades se pueden inferir. La topología algebraica no es ajena a esta técnica y mucho menos la teoría de espacios recubridores. Así, se procede a introducir en primer lugar qué se entiende por un homomorfismo entre espacios recubridores.

**Definición 2.1.** ***(Homomorfismo entre espacios recubridores).*** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ espacios recubridores de $X$. Un* ***homomorfismo $\varphi$ de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$*** *consiste en una aplicación continua $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ que haga conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \widetilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Aplicando la definición, es sencillo demostrar que si $(\widetilde{X}, p)$ es espacio recubridor de $X$, entonces $id_{\widetilde{X}}$ es un homomorfismo de $(\widetilde{X}, p)$ en $(\widetilde{X}, p)$. Asimismo y sin mayor dificultad, se puede probar el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$, $(\widetilde{X}_2, p_2)$ y $(\widetilde{X}_3, p_3)$ espacios recubridores de $X$. Si $\varphi$ y $\Psi$ son homomorfismos de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ y de $(\widetilde{X}_2, p_2)$ en $(\widetilde{X}_3, p_3)$, respectivamente, entonces, $\Psi \circ \varphi$ es un homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_3, p_3)$.*

A continuación, introduciremos de forma natural la noción de isomorfismo entre espacios recubridores.

**Definición 2.3.** ***(Isomorfismo entre espacios recubridores y automorfismo de un espacio recubridor).***
*Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ espacios recubridores de $X$. Un **isomorfismo $\boldsymbol{\varphi}$ de $\boldsymbol{(\widetilde{X}_1, p_1)}$ en $\boldsymbol{(\widetilde{X}_2, p_2)}$** consiste en un homomorfismo $\varphi$ de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ para el cual existe un homomorfismo $\Psi$ de $(\widetilde{X}_2, p_2)$ en $(\widetilde{X}_1, p_1)$ tal que $\Psi \circ \varphi = id_{\widetilde{X}_1}$ y $\varphi \circ \Psi = id_{\widetilde{X}_2}$[1]. Si $(\widetilde{X}_1, p_1) = (\widetilde{X}_2, p_2)$, se dice que $\varphi$ es un **automorfismo**[2].*

Cuando existe un isomorfismo entre dos espacios recubridores de un espacio $X$, se dice que ambos espacios son **isomorfos**. Además, si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$, el conjunto de automorfismos de $(\widetilde{X}, p)$, que se denotará por $\boldsymbol{\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)}$, junto a la operación composición de aplicaciones es un grupo.

Ahora, se presentarán algunas propiedades básicas sobre los homomorfismos y automorfismos entre espacios recubridores que permitirán esclarecer una serie de resultados de suma utilidad más adelante.

**Lema 2.4.** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ dos espacios recubridores de $X$. Si $\varphi$ es un homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$, entonces para todo punto $x \in X$ existe $U \subseteq X$ que es entorno admisible de $x$ para $p_1$ y $p_2$.*

*Demostración.* Sea $x \in X$. Por definición, existen $U_1$, $U_2 \subseteq X$ que son entornos admisibles de $x$ para $p_1$ y $p_2$, respectivamente. Si $W$ es la componente conexa por caminos de $x$ en $U_1 \cap U_2$, veamos que es el entorno admisible buscado.

En primer lugar, es claro que $W$ es conexo por caminos y es abierto al tener que $X$ es localmente conexo por caminos.[3]

Resta ver que las componentes conexas por caminos de $p_1^{-1}(W)$ y $p_2^{-1}(W)$ son homeomorfas a $W$ vía $p_1$ y $p_2$ restringidas a dichas componentes. Probémoslo para $p_1^{-1}(W)$ pues para $p_2^{-1}(W)$ es análogo. Sea $\widetilde{W}$ una componente conexa por caminos de $p_1^{-1}(W)$ y veamos que

$$p_{1|\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to W$$

es homeomorfismo. Al ser $\widetilde{W}$ conexo por caminos y estar contenido en $p_1^{-1}(W)$, existe $\widetilde{C}_1$ componente conexa por caminos de $p_1^{-1}(U_1)$ tal que

$$\widetilde{W} \subseteq \widetilde{C}_1.$$

Por definición,

[1] $\varphi$ es homeomorfismo.
[2] $\varphi$ puede ser o no la aplicación identidad.
[3] $X$ es localmente conexo por caminos si y solo si las componentes conexas por caminos de conjuntos abiertos, son abiertas.

$$p_{1|\widetilde{C}_1} : \widetilde{C}_1 \to U_1$$

es homeomorfismo y se puede comprobar fácilmente que

$$p_{1|\widetilde{C}_1}(\widetilde{W}) = W,$$

con lo cual $p_{1|\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to W$ sería homeomorfismo. $\square$

**Lema 2.5.** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ dos espacios recubridores de $X$. Si $\varphi$ es un homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$, entonces $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ es sobreyectiva.*

*Demostración.* Sea $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$. Probemos que existe $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. Para ello, fijamos arbitrariamente $\widetilde{x}'_1 \in \widetilde{X}_1$. Así, $\varphi(\widetilde{x}'_1) \in \widetilde{X}_2$ y como $\widetilde{X}_2$ es conexo por caminos, existe

$$\widetilde{\alpha}_2 : I \to \widetilde{X}_2$$

camino en $\widetilde{X}_2$ con inicio en $\varphi(\widetilde{x}'_1)$ y final en $\widetilde{x}_2$. De esta manera,

$$p_2 \circ \widetilde{\alpha}_2 : I \to X$$

es un camino en $X$ con inicio en $p_2(\varphi(\widetilde{x}'_1))$ y final en $p_2(\widetilde{x}_2)$. Por el teorema 1.7, existe un único camino

$$\widetilde{\alpha}_1 : I \to \widetilde{X}_1$$

con inicio en $\widetilde{x}'_1$ tal que $p_1 \circ \widetilde{\alpha}_1 = p_2 \circ \widetilde{\alpha}_2$ y como $p_1 = p_2 \circ \varphi$,

$$p_2 \circ (\varphi \circ \widetilde{\alpha}_1) = p_2 \circ \widetilde{\alpha}_2.$$

Por tanto, usando de nuevo el teorema 1.10, se deduce que

$$\varphi \circ \widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_2,$$

pues $\varphi \circ \widetilde{\alpha}_1$ y $\widetilde{\alpha}_2$ son caminos en $\widetilde{X}_2$ con inicio en $\varphi(\widetilde{x}'_1)$. Por ello, se concluye que

$$\widetilde{x}_2 = \widetilde{\alpha}_2(1) = \varphi[\widetilde{\alpha}_1(1)].$$

$\square$

**Lema 2.6.** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ dos espacios recubridores de $X$. Si $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son dos homomorfismos de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ que coinciden en un punto, entonces coinciden en todos los puntos.*

*Demostración.* Basta aplicar el lema 1.6 teniendo en cuenta que $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son levantamientos continuos de la aplicación continua $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$. $\square$

Como una consecuencia del lema 2.6, se puede probar el siguiente resultado interesante.

**Corolario 2.7.** *Si $(\widetilde{X}, p)$ es espacio recubridor de $X$, entonces el grupo $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ opera sin punto fijo. Es decir, si $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ y $\varphi \neq id_{\widetilde{X}}$, entonces $\varphi$ no tiene puntos fijos.*

Comprobar si dos espacios recubridores de un espacio $X$ son isomorfos por definición puede ser complicado, así que conviene conseguir una caracterización útil en la práctica. Para que la demostración de esta última sea fluida, se probarán una serie de hechos previos que ayudarán en el desarrollo de la prueba.

**Lema 2.8.** ***(Criterio del homomorfismo recubridor).***
*Sean* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *y* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *dos espacios recubridores de* $X$ *y* $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$ *para* $i \in \{1,2\}$*. Si* $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$*, entonces existe un único homomorfismo* $\varphi$ *de* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *en* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *tal que* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ *si y solo si* $p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \subseteq p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.

*Demostración.* Es suficiente aplicar el teorema 1.19 con $\widetilde{X} = \widetilde{X}_2$, $p = p_2$, $Y = \widetilde{X}_1$, $\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_2$, $y_0 = \widetilde{x}_1$ y $f = p_1$. □

*Ejemplo 2.9.* Para cada $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, la aplicación

$$\begin{aligned} p_k : S^1 &\to S^1 \\ z &\to z^k, \end{aligned}$$

es una proyección recubridora para la cual se verifica que

$$p_{k*(1,0)}(\pi_1(S^1, (1,0))) = k\mathbb{Z}.$$

Si $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, por el criterio del homomorfismo recubridor, existe $\varphi$ homomorfismo de $(S^1, p_n)$ en $(S^1, p_m)$ tal que $\varphi(1,0) = (1,0)$ si y solo si $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$. Es decir, siempre y cuando $m$ divida a $n$.

Puede comprobarse que este homomorfismo coincide con la aplicación $p_{\frac{n}{m}}$.

**Corolario 2.10.** *Sean* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *y* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *dos espacios recubridores de* $X$ *y* $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$ *para* $i \in \{1,2\}$*. Si* $p(\widetilde{x}_1) = p(\widetilde{x}_2)$*, entonces existe* $\varphi$ *isomorfismo de* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *en* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *tal que* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ *si y solo si* $p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.

*Demostración.* Es consecuencia de aplicar la definición 2.3, el corolario 2.7 y el lema 2.8. □

**Corolario 2.11.** *Sean* $(\widetilde{X}, p)$ *espacio recubridor de* $X$ *y* $x \in X$*. Si* $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$*, entonces existe* $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ *tal que* $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ *si y solo si* $p_{*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)) = p_{*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_2))$.

*Demostración.* Es un caso particular del corolario 2.10. □

Se está así en condiciones de enunciar y demostrar la caracterización previamente anunciada.

**Teorema 2.12.** ***(Teorema del isomorfismo recubridor).***
*Si* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *y* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *son dos espacios recubridores de* $X$*, entonces* $(\widetilde{X}_1, p_1)$ *y* $(\widetilde{X}_2, p_2)$ *son isomorfos si y solo si para cada dos puntos cualesquiera* $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ *y* $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ *tales que* $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2) = x$*,* $p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1))$ *y* $p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$ *pertenecen a la misma clase de conjugación en* $\pi_1(X, x)$.

*Demostración.* En primer lugar, supongamos que existe $\varphi$ isomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ y sean $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ y $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ tales que $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2) = x$. Luego,

$$x = p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\varphi(\widetilde{x}_1))$$

y por el corolario 2.10,

$$p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = p_{2*\varphi(\widetilde{x}_1)}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \varphi(\widetilde{x}_1))).$$

Finalmente, por el teorema 1.16, $p_{2*\varphi(\widetilde{x}_1)}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \varphi(\widetilde{x}_1)))$ y $p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$ son subgrupos conjugados en $\pi_1(X, x)$.

Recíprocamente, veamos que $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ son isomorfos. Para ello, sean $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ y $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ tales que $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2) = x$. Por hipótesis,

$$p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \text{ y } p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

pertenecen a la misma clase de conjugación en $\pi_1(X, x)$ y por el teorema 1.17, existe $\widetilde{y}_1 \in p_1^{-1}(x)$ tal que

$$p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)) = p_{1*\widetilde{y}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{y}_1)).$$

Así por el corolario 2.10, existe $\varphi$ isomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ tal que $\varphi(\widetilde{y}_1) = \widetilde{x}_2$. □

A continuación, se probará que todo homomorfismo entre espacios recubridores de un espacio topológico es una aplicación recubridora.

**Lema 2.13.** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ dos espacios recubridores de $X$. Si $\varphi$ es un homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$, entonces $(\widetilde{X}_1, \varphi)$ es un espacio recubridor de $\widetilde{X}_2$.*

*Demostración.* $\varphi$ es continua y sobreyectiva por definición y por el lema 2.5, respectivamente. Así, resta ver que todo punto $\widetilde{x}_2$ de $\widetilde{X}_2$ admite un entorno abierto conexo por caminos $\widetilde{W}_2$, para el que cada componente conexa por caminos de $\varphi^{-1}(\widetilde{W}_2)$ es homeomorfa a $\widetilde{W}_2$ vía restricción de $\varphi$ a dicha componente.

Sea $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$. Por el lema 2.4, es posible encontrar $U \subseteq X$ entorno admisible de $p_2(\widetilde{x}_2)$ para $p_1$ y $p_2$. Si $\widetilde{W}_2$ es la componente conexa por caminos de $p_2^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{x}_2$, veamos que es el entorno admisible de $\widetilde{x}_2$ para $\varphi$.

En primer lugar, está claro que $\widetilde{W}_2$ es conexo por caminos y es abierto, pues es la componente conexa por caminos de un conjunto abierto en un espacio localmente conexo por caminos como es $\widetilde{X}_2$.

Ahora, sea $\widetilde{C}_1$ una componente conexa por caminos de $\varphi^{-1}(\widetilde{W}_2)$ y veamos que

$$\varphi_{|\widetilde{C}_1} : \widetilde{C}_1 \to \widetilde{W}_2$$

es homeomorfismo. Demostraremos que $\widetilde{C}_1$ es una componente conexa por caminos de $p_1^{-1}(U)$ pues así se tendría que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C}_1 \arrow[r, "\varphi_{|\widetilde{C}_1}"] \arrow[dr, "p_{1|\widetilde{C}_1}"'] & \widetilde{W}_2 \arrow[d, "p_{2|\widetilde{W}_2}"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $p_{1|\widetilde{C}_1}$ y $p_{2|\widetilde{W}_2}$ son homeomorfismos y por lo tanto,

$$\varphi_{|\widetilde{C}_1} = p^{-1}_{2|\widetilde{W}_2} \circ p_{1|\widetilde{C}_1}$$

que es composición de homeomorfismos y, en consecuencia, homeomorfismo.

Ahora,

$$\widetilde{C}_1 \subseteq \varphi^{-1}(\widetilde{W}_2) \subseteq \varphi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p_1^{-1}(U)$$

pues $p_1 = p_2 \circ \varphi$. Luego, existe una única componente conexa por caminos de $p_1^{-1}(U)$, denotémosla por $\widetilde{W}_1$, tal que $\widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{W}_1$.

Veremos que $\widetilde{C}_1 = \widetilde{W}_1$.

Tenemos que

$$U = p_1(\widetilde{W}_1) = p_2(\varphi(\widetilde{W}_1))$$

con lo cual, $\varphi(\widetilde{W}_1) \subseteq p_2^{-1}(U)$. Como $\varphi(\widetilde{W}_1)$ es conexo por caminos, al ser imagen de un conexo por caminos a través de una aplicación continua, existe una única componente conexa por caminos de $p_2^{-1}(U)$, $\widetilde{W}_2'$, tal que $\varphi(\widetilde{W}_1) \subseteq \widetilde{W}_2'$. Así,

$$\widetilde{W}_1 \subseteq \varphi^{-1}(\widetilde{W}_2')$$

y como,

$$\widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{W}_1 \text{ y } \widetilde{C}_1 \subseteq \varphi^{-1}(\widetilde{W}_2)$$

se observa que

$$\emptyset \neq \varphi^{-1}(\widetilde{W}_2') \cap \varphi^{-1}(\widetilde{W}_2) = \varphi^{-1}(\widetilde{W}_2' \cap \widetilde{W}_2)$$

y por lo tanto,

$$\widetilde{W}_2' = \widetilde{W}_2$$

ya que $\widetilde{W}_2' \cap \widetilde{W}_2$ es no vacío. Luego, $\widetilde{W}_1$ está contenida en una única componente conexa por caminos de $\varphi^{-1}(\widetilde{W}_2)$. Como las componentes conexas por caminos de $\varphi^{-1}(\widetilde{W}_2)$ son disjuntas y $\widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{W}_1$, es evidente que

$$\widetilde{C}_1 = \widetilde{W}_1.$$

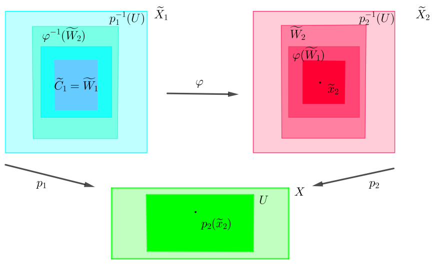



**Figura 2.1.** Situación del lema 2.13

La figura 2.1 ilustra la situación. □

Para finalizar, se probará que si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$ y $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ es simplemente conexo, entonces para cualquier $(\widetilde{X}', p')$ espacio recubridor de $X$ se tiene que $\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}'$ son el espacio total y base, respectivamente, de una aplicación recubridora.

**Proposición 2.14.** *Sean $(\widetilde{X}_1, p_1)$ y $(\widetilde{X}_2, p_2)$ dos espacios recubridores de $X$. Si $(\widetilde{X}_1, \widetilde{\mathcal{T}}_1)$ es simplemente conexo, entonces existe $\varphi$ homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ tal que $(\widetilde{X}_1, \varphi)$ es espacio recubridor de $\widetilde{X}_2$.*

*Demostración.* Sean $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ y $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ tales que $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$. Como

$$p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \subseteq p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

pues $\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \cong \{e\}$[4], por el lema 2.8, existe $\varphi$ homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ en $(\widetilde{X}_2, p_2)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. Finalmente, por el lema 2.13, se tiene que $(\widetilde{X}_1, \varphi)$ es espacio recubridor de $\widetilde{X}_2$. □

## 2.2. Estructura del grupo de automorfismos de un espacio recubridor

Una vez introducido el concepto de automorfismo de un espacio recubridor, lo que sigue es estudiar el grupo que generan todos los automorfismos de un espacio recubridor. Para ello, veremos que para un espacio recubridor de $(\widetilde{X}, p)$ de $X$, cada fibra $p^{-1}(x)$ es un $\pi_1(X, x)-$espacio homogéneo y que el grupo de automorfismos de $(\widetilde{X}, p)$ es isomorfo al grupo de automorfismos de $p^{-1}(x)$ como espacio homogéneo. Esto nos permitirá vincular el grupo de automorfismos del espacio recubridor con el espacio total y base del mismo. Además de demostrar esto, se introduce un nuevo tipo de espacio recubridor en el cual el hecho anterior adquiere un mayor interés.

Para desarrollar esta tarea, usaremos los rudimentos básicos de la teoría de $G-$espacios que han sido recogidos en la sección A.2 del apéndice. De hecho, en primer lugar, veremos que dado un espacio recubridor, es posible definir una acción del grupo fundamental del espacio base sobre la correspondiente fibra de la proyección recubridora.

**Definición 2.15.** ***(Acción de $\pi_1(X, x)$ sobre $p^{-1}(x)$).***
*Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$ y $x \in X$. Se define la aplicación*

$$\begin{aligned} \cdot : p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) &\to p^{-1}(x) \\ (\widetilde{x}, [\alpha]) &\mapsto \widetilde{x} \cdot [\alpha] = \widetilde{\alpha}(1) \end{aligned}$$

*donde $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ es el levantamiento de $\alpha$ con condición inicial $\widetilde{x}$, esto es,*

$$p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha \text{ y } \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}.$$

[4] $\{e\}$ es el grupo trivial.

En primer lugar, probaremos que $\cdot$ es una acción por la derecha de $\pi_1(X,x)$ sobre $p^{-1}(x)$.

**Proposición 2.16.** *La correspondencia descrita en la definición 2.15 es una acción de $\pi_1(X,x)$ sobre $p^{-1}(x)$.*

*Demostración.* Para ello, hay que ver que:

I) La correspondencia es aplicación.
II) Para todo $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, se tiene que $\widetilde{x} \cdot [\mathcal{C}_x] = \widetilde{x}$ donde $\mathcal{C}_x$ es el neutro del grupo $\pi_1(X,x)$, es decir, $\mathcal{C}_x$ es el camino constante en $x$.
III) Para cualesquiera $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $[\alpha],[\beta] \in \pi_1(X,x)$, se verifica que $(\widetilde{x}\cdot[\alpha])\cdot[\beta] = \widetilde{x} \cdot ([\alpha][\beta])$.

En primer lugar, veamos I).

Tenemos que probar que para todo $(\widetilde{x},[\alpha]), (\widetilde{y},[\beta]) \in p^{-1}(x) \times \pi_1(X,x)$ tales que $(\widetilde{x},[\alpha]) = (\widetilde{y},[\beta])$, se tiene que $\widetilde{x}\cdot[\alpha] = \widetilde{y}\cdot[\beta]$.

Sean $(\widetilde{x},[\alpha]), (\widetilde{y},[\beta]) \in p^{-1}(x) \times \pi_1(X,x)$ tales que $(\widetilde{x},[\alpha]) = (\widetilde{y},[\beta])$, o lo que es equivalente,

$$\widetilde{x} = \widetilde{y} \text{ y } \alpha \sim \beta.$$

Por el teorema 1.7, es posible encontrar a unos únicos caminos $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ en $\widetilde{X}$ que empiecen en $\widetilde{x}$ tales que

$$p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha \text{ y } p \circ \widetilde{\beta} = \beta.$$

De esta manera, por el teorema 1.10 se tiene que $\widetilde{\alpha}$ es homótopo a $\widetilde{\beta}$ y por lo tanto,

$$\widetilde{x}\cdot[\alpha] = \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1) = \widetilde{y}\cdot[\beta].$$

La propiedad II) es inmediata pues la única elevación de $\mathcal{C}_x$ es el camino constante en $\widetilde{x}$ para cada $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Finalmente, veamos III).

Sean $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $[\alpha],[\beta] \in \pi_1(X,x)$. En primer lugar, hallemos $(\widetilde{x}\cdot[\alpha])\cdot[\beta]$. Por el teorema 1.7, es posible encontrar un único camino $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ en $\widetilde{X}$ con origen en $\widetilde{x}$ tal que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$. Luego,

$$\widetilde{x}\cdot[\alpha] = \widetilde{\alpha}(1)$$

y por el mismo argumento, existe un único camino $\widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ en $\widetilde{X}$ con origen en $\widetilde{\alpha}(1)$ tal que $p \circ \widetilde{\beta} = \beta$. Así,

$$(\widetilde{x}\cdot[\alpha])\cdot[\beta] = \widetilde{\alpha}(1)\cdot[\beta] = \widetilde{\beta}(1).$$

Por otro lado, $\widetilde{x}\cdot([\alpha][\beta]) = \widetilde{x}\cdot[\alpha * \beta]$ y por lo justificado previamente, es claro que $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}$ es la elevación de $\alpha * \beta$ en $\widetilde{X}$ con origen en $\widetilde{x}$ y por ende,

$$\widetilde{x}\cdot[\alpha * \beta] = (\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta})(1) = \widetilde{\beta}(1).$$

□

De esta manera, se ha demostrado que dada una aplicación recubridora y fijado un punto del espacio base, la fibra de la aplicación recubridora sobre dicho punto es un $G-$espacio por la derecha, donde $G$ es el grupo fundamental del espacio base con base en el punto fijado.

A continuación, veremos que la acción de $\pi_1(X,x)$ sobre $p^{-1}(x)$ es transitiva, con lo cual $p^{-1}(x)$ es un $\pi_1(X,x)-$espacio por la derecha homogéneo (véase la sección A.2 en el apéndice).

**Proposición 2.17.** *Si $(\widetilde{X},p)$ es un espacio recubridor de $X$ y $x \in X$, entonces $p^{-1}(x)$ es un $\pi_1(X,x)-$espacio por la derecha homogéneo.*

*Demostración.* Por la proposición 2.16, $p^{-1}(x)$ es un $\pi_1(X,x)-$espacio por la derecha. Así que resta ver que $\pi_1(X,x)$ opera transitivamente sobre $p^{-1}(x)$.

Sean $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$. Al ser $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{T}})$ conexo por caminos, existe $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ camino en $\widetilde{X}$ con inicio en $\widetilde{x}$ y final en $\widetilde{y}$. Luego, $p \circ \widetilde{\alpha}$ es un lazo en $X$ con punto base $x$ y por lo tanto,

$$\widetilde{x} \cdot [p \circ \widetilde{\alpha}] = \widetilde{y}.$$

□

Ahora, describiremos el subgrupo de isotropía de la acción transitiva anterior.

**Proposición 2.18.** *Si $(\widetilde{X},p)$ es un espacio recubridor de $X$ y $x \in X$, entonces para todo $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$ es el subgrupo de isotropía correspondiente a $\widetilde{x}$.*

*Demostración.* Se deduce de la definición A.12 (véase el subapéndice A.2). □

A continuación, usando la proposición 2.18, deducimos los siguientes hechos.

**Proposición 2.19.** *Sean $(\widetilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$ y $x \in X$. Si $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, entonces $\pi_1(X,x)/p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$ es isomorfo a $p^{-1}(x)$, como $\pi_1(X,x)-$espacios por la derecha.*

*Demostración.* Es consecuencia de las proposiciones 2.18 y A.14 (véase el subapéndice A.2). □

**Corolario 2.20.** *Sean $(\widetilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$ y $x \in X$. Si $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, entonces el número de hojas del espacio recubridor $(\widetilde{X},p)$ respecto a $X$ es igual al índice de $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$ en $\pi_1(X,x)$, es decir, al cardinal de $\pi_1(X,x)/p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$.*

Con lo probado, es posible estudiar la estructura del grupo de automorfismos de un espacio recubridor. El primer paso consistirá en establecer una relación entre el grupo de automorfismos de un espacio recubridor y el grupo de los automorfismos de una fibra cualquiera de la aplicación recubridora correspondiente.

**Teorema 2.21.** *Sea $(\widetilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$. Si $x \in X$, entonces el grupo de automorfismos de $p^{-1}(x)$ como $\pi_1(X,x)-$espacio por la derecha es isomorfo a $\mathcal{A}(\widetilde{X},p)$. Además, un isomorfismo*

$$T : \mathcal{A}(\widetilde{X},p) \longrightarrow \{f : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x) \mid \ f \textit{ es automorfismo}\}$$

*es dado por*

$$T(\varphi) = \varphi_{|_{p^{-1}(x)}}, \textit{ para } \varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X},p).$$

*Demostración.* Veamos que:

I) $T$ está bien definida.
II) $T$ es homomorfismo.
III) $T$ es inyectiva.
IV) $T$ es sobreyectiva.

En primer lugar, probaremos I), o lo que es equivalente, para todo $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$, se tiene que $T(\varphi) \in \{f : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x) \mid \text{ f es automorfismo}\}$.

Sea $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$. Si vemos que $\varphi(p^{-1}(x)) = p^{-1}(x)$ y $\varphi_{|p^{-1}(x)}$ es $\pi_1(X, x)-$equivariante ya estaría, pues $\varphi$ es aplicación biyectiva. Primeramente, como $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$, se verifica que $p \circ \varphi = p$ con lo cual

$$(p \circ \varphi)^{-1}(x) = p^{-1}(x)$$

y por lo tanto,

$$\varphi[p^{-1}(x)] = p^{-1}(x).$$

Ahora, probemos que para cada $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, se tiene que

$$\varphi_{|p^{-1}(x)}(\widetilde{x} \cdot [\alpha]) = \varphi_{|p^{-1}(x)}(\widetilde{x}) \cdot [\alpha].$$

Por el teorema 1.7, existen unos únicos caminos

$$\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}' : I \to \widetilde{X}$$

en $\widetilde{X}$ que comienzan en $\widetilde{x}$ y $\varphi_{|p^{-1}(x)}(\widetilde{x}) = \varphi(\widetilde{x})$, respectivamente, tales que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha = p \circ \widetilde{\alpha}'$. Luego,

$$\varphi_{|p^{-1}(x)}(\widetilde{x} \cdot [\alpha]) = \varphi(\widetilde{\alpha}(1)) \text{ y } \varphi_{|p^{-1}(x)}(\widetilde{x}) \cdot [\alpha] = \widetilde{\alpha}'(1).$$

Por otra parte, por el teorema 1.10, tenemos que $\varphi \circ \widetilde{\alpha}$ es homótopo a $\widetilde{\alpha}'$ ya que

$$p \circ (\varphi \circ \widetilde{\alpha}) = (p \circ \varphi) \circ \widetilde{\alpha} = p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha = p \circ \widetilde{\alpha}'$$

y $\varphi \circ \widetilde{\alpha}$ tiene el mismo inicio que $\widetilde{\alpha}'$, con lo cual

$$(\varphi \circ \widetilde{\alpha})(1) = \varphi[\widetilde{\alpha}(1)] = \widetilde{\alpha}'(1).$$

Ahora, veamos II).

Si $\varphi, \Psi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$, se tiene que $T(\Psi \circ \varphi) = (\Psi \circ \varphi)_{|p^{-1}(x)} = \Psi_{|p^{-1}(x)} \circ \varphi_{|p^{-1}(x)} = T(\Psi) \circ T(\varphi)$.

La condición III) se deduce del lema 2.6.

Finalmente, veamos IV).

Sea $f : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ automorfismo. Como $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, tenemos que $p^{-1}(x) \neq \emptyset$. Por las proposiciónes 2.18 y A.16 (véase el subapéndice A.2),

$$p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = p_{*f(\widetilde{x})}(\pi_1(\widetilde{X}, f(\widetilde{x}))).$$

Así, por el corolario 2.11 existe $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$. En consecuencia, $T(\varphi)$ y $f$ son automorfismos de $p^{-1}(x)$ que coinciden en el punto $\widetilde{x}$. Esto, por la proposición A.18 (véase el subapéndice A.2), implica que

$$T(\varphi) = \varphi_{|p^{-1}(x)} = f.$$

□

Este teorema permite establecer el principal resultado de la subsección, el cual se expondrá a continuación.

**Teorema 2.22.** *Sean* $(\widetilde{X}, p)$ *un espacio recubridor de* $X$ *y* $x \in X$. *Si* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, *entonces* $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ *es isomorfo a* $N(p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})))/p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ *donde* $N(p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})))$ *es el normalizador de* $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ *en* $\pi_1(X, x)$.

*Demostración.* Es consecuencia de aplicar el teorema 2.21 y la proposición A.23 (véase el subapéndice A.2). □

Para cerrar la subsección, como ya anunciamos, se presentará un nuevo tipo de espacio recubridor que permitirá un uso más amigable del resultado anterior, pues en ocasiones el cálculo del normalizador de un grupo es una ardua tarea.

**Definición 2.23.** ***(Espacio recubridor regular).***
*Sea* $(\widetilde{X}, p)$ *un espacio recubridor de* $X$. *Si para cualesquiera* $x \in X$ *y* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ *se verifica que* $p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ *es subgrupo normal de* $\pi_1(X, x)$, *entonces se dice que* $\boldsymbol{(\widetilde{X}, p)}$ ***es un espacio recubridor regular de*** $\boldsymbol{X}$.

**Corolario 2.24.** *Sean* $(\widetilde{X}, p)$ *un espacio recubridor regular de* $X$ *y* $x \in X$. *Si* $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, *entonces* $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ *es isomorfo a* $\pi_1(X, x)/p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.

*Demostración.* Es consecuencia del teorema 2.22 y del hecho que $N(p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))) = \pi_1(X, x)$ para cada $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. □

## 2.3. Espacios de órbita

En el primer capítulo del presente trabajo se demostró que toda aplicación recubridora era una aplicación abierta. Esto, junto con el hecho que toda aplicación recubridora tiene que ser continua y sobreyectiva por definición, nos permite afirmar que si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$, entonces $(X, \mathcal{T})$ es el espacio identificación de $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ por $p$. Es decir, $X$ se puede construir identificando los puntos de $\widetilde{X}$ de la siguiente manera: si $x \in X$, entonces los elementos de $p^{-1}(x)$ los identificamos con $x$. O lo que es lo mismo, $X$ puede verse como el espacio cociente $\widetilde{X}/\mathcal{R}$ donde $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia en $\widetilde{X}$ siguiente: dados $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$, se tiene que $\widetilde{x}\mathcal{R}\widetilde{y}$ si y solo si $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{y})$.

Bajo ciertas condiciones, la relación presentada en el párrafo anterior es equivalente a otra cuya definición nos dice cómo construir el espacio base de una aplicación recubridora, a partir de un espacio dado siendo este el principal objetivo de esta sección.

Primero, nosotros probaremos el siguiente resultado.

**Lema 2.25.** *Si* $(\widetilde{X}, p)$ *es un espacio recubridor de* $X$, *entonces* $(\widetilde{X}, p)$ *es un espacio recubridor regular de* $X$ *si y solo si para todo* $x \in X$, *se verifica que para cualesquiera* $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$, *existe* $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ *tal que* $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$.

*Demostración.* Primeramente, supongamos que para todo $x \in X$, se verifica que para cualesquiera $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$, existe $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$, y veamos que $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$.

En efecto, sean $x \in X$ y $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Dado $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, por el teorema 1.17, se tiene que existe $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$ tal que

$$p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})) = [\alpha]^{-1} \cdot p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \cdot [\alpha].$$

Pero, por hipótesis y el corolario 2.11, deducimos que

$$p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})).$$

Así,

$$p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \text{ es un subgrupo normal de } \pi_1(X, x).$$

Recíprocamente, supongamos que $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$ y sea $x \in X$. Si $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in p^{-1}(x)$,

$$p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y})),$$

pues ambos pertenecen a la misma clase de conjugación por el teorema 1.18 y

$$p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})),\ p_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{y}))$$

son subgrupos normales de $\pi_1(X, x)$. Así, por el corolario 2.11, es claro que existe $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ tal que

$$\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}.$$

□

De esta manera, se ha demostrado que si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$ y $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$, entonces $\widetilde{x}\mathcal{R}\widetilde{y}$ si y solo si existe $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$. Nótese que $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ es un subgrupo de $Homeom(\widetilde{X})$ y que cada subgrupo de $Homeom(\widetilde{X})$ induce una relación de equivalencia en $\widetilde{X}$ como sigue.

**Definición 2.26.** ***(Relación binaria generada por un grupo de homeomorfismos).***
*Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $G$ un subgrupo de $Homeom(X)$. Se define la relación $\boldsymbol{\sim_G}$ sobre $X$ como sigue: si $x_1$, $x_2 \in X$, entonces $x_1 \sim_G x_2$ si y solo si existe $\varphi \in G$ tal que $\varphi(x_1) = x_2$.*

Es fácil probar el siguiente resultado.

**Proposición 2.27.** *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $G$ un subgrupo de $Homeom(X)$, entonces $\sim_G$ es una relación de equivalencia sobre $X$.*

Recordando que toda relación de equivalencia sobre un conjunto induce una partición del mismo, generando a su vez un conjunto cociente, esto nos lleva a la definición de espacio de órbita que no es más que el conjunto cociente que se genera por la relación de equivalencia de la definición 2.26.

**Definición 2.28.** ***(Espacio de órbita de un grupo de homeomorfismos).*** *Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $G$ un subgrupo de $Homeom(X)$. Al conjunto cociente $X/\sim_G$ inducido por la relación de equivalencia $\sim_G$, se le denomina el* ***espacio de órbita de G****. Dicho espacio de órbita se denotará por* $\boldsymbol{X/G}$.

Así, si $(\widetilde{X},p)$ es un espacio recubridor regular de $X$, entonces el espacio de órbita de $\mathcal{A}(\widetilde{X},p)$ es homeomorfo a $X$, pues dicho espacio de órbita es igual a $\widetilde{X}/\mathcal{R}$ y $X$ es homeomorfo a $\widetilde{X}/\mathcal{R}$. Por ello, es posible encontrar una aplicación $p'$ tal que $(\widetilde{X},p')$ sea un espacio recubridor del espacio de órbita de $\mathcal{A}(\widetilde{X},p)$.

A continuación, veremos que la acción de $\mathcal{A}(\widetilde{X},p)$ sobre $\widetilde{X}$ es especial. Se trata de una acción propia y discontinua.

**Definición 2.29.** ***(Acción propia y discontinua).*** *Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $G$ un subgrupo de $Homeom(X)$. Se dice que* ***G actúa propia y discontinuamente sobre X*** *si para todo punto $x\in X$, existe un entorno $U$ de $x$ tal que para cualesquiera $\varphi$, $\Psi\in G$ distintos entre sí, se tiene que $\varphi(U)\cap\Psi(U)=\emptyset$.*

Ahora, probaremos el resultado anunciado anteriormente.

**Proposición 2.30.** *Si $(\widetilde{X},p)$ es un espacio recubridor de $X$, entonces $\mathcal{A}(\widetilde{X},p)$ actúa propia y discontinuamente sobre $\widetilde{X}$.*

*Demostración.* Sea $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$. Luego, $p(\widetilde{x})\in X$ y por lo tanto, existe $U$ un entorno admisible de $p(\widetilde{x})$. Así, si $\widetilde{U}$ es la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{x}$, entonces se tiene que:

1. ) $\widetilde{U}$ abierto en $\widetilde{X}$, pues es la componente conexa por caminos de un abierto en un espacio localmente conexo por caminos.
2. ) $p_{|\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ es homeomorfismo.

Ahora, usando 2) y el lema 2.6, es sencillo comprobar que para cualesquiera $\varphi$, $\Psi\in\mathcal{A}(\widetilde{X},p)$ tales que $\varphi(\widetilde{U})\cap\Psi(\widetilde{U})\neq\emptyset$ se verifica que $\varphi=\Psi$. Así, si $\varphi\neq\Psi$, entonces necesariamente $\varphi(\widetilde{U})\cap\Psi(\widetilde{U})=\emptyset$. □

Finalmente, para cerrar la sección y el capítulo, probaremos una especie de recíproco del resultado anterior y expondremos una aplicación de dicho resultado con un ejemplo, introduciendo para este fin, los **espacios lenticulares**.

**Teorema 2.31.** *Sean $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{T}})$ un espacio topológico conexo, localmente conexo por caminos y $G$ un subgrupo de $Homeom(\widetilde{X})$. Si $G$ actúa propia y discontinuamente sobre $\widetilde{X}$, entonces $(\widetilde{X},\pi)$ es un espacio recubridor regular de $\widetilde{X}/G$ y $G=\mathcal{A}(\widetilde{X},\pi)$, donde $\pi:\widetilde{X}\to\widetilde{X}/G$ es la proyección canónica.*

*Demostración.* La demostración se va a realizar por etapas, en las que se probará que:

- $\boxed{\text{Primera etapa}}$ $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{T}})$ es conexo por caminos y $(\widetilde{X}/G,\widetilde{\mathcal{T}}_\pi)$[5] es localmente conexo por caminos y conexo por caminos.

[5] $\widetilde{\mathcal{T}}_\pi$ es la topología final asociada a $\pi$.

- $\boxed{\text{Segunda etapa}}$ Todo punto de $\widetilde{X}/G$ admite un entorno $\pi-$admisible.
- $\boxed{\text{Tercera etapa}}$ $(\widetilde{X}, \pi)$ es un espacio recubridor de $\widetilde{X}/G$.
- $\boxed{\text{Cuarta etapa}}$ $G = \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$.
- $\boxed{\text{Quinta etapa}}$ $(\widetilde{X}, \pi)$ es un espacio recubridor regular de $\widetilde{X}/G$.

Empezamos con la primera etapa.

En primer lugar, $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ es conexo por caminos, pues $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ es un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos. Asimismo, $\widetilde{X}/G$ es conexo por caminos, pues $\pi$ es continua y sobreyectiva. De este modo, resta ver que $\widetilde{X}/G$ es localmente conexo por caminos o lo que es equivalente, todo entorno de un punto de $\widetilde{X}/G$, contiene a otro entorno conexo por caminos de dicho punto. Para ello, basta con ver que $\pi$ es abierta, pues de esta manera al ser también continua, la imagen de todo entorno conexo por caminos es un entorno conexo por caminos, con lo que es posible asignarle a cada entorno de un punto de $\widetilde{X}/G$, un entorno conexo por caminos contenido en él que sea imagen de un entorno conexo por caminos de $\widetilde{X}$.

Sea $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Recordemos que la topología $\widetilde{\mathcal{T}}_\pi$ en $\widetilde{X}/G$ es la cociente inducida por $\pi$ y, por tanto,

$$\pi(\widetilde{A}) \in \widetilde{\mathcal{T}}_\pi \text{ si y solo si } \pi^{-1}(\pi(\widetilde{A})) \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Además, por definición es claro que

$$\pi^{-1}(\pi(\widetilde{A})) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(\widetilde{A}),$$

que es unión arbitraria de abiertos, pues para todo $\varphi \in G$, al ser homeomorfismos, se tiene que $\varphi(\widetilde{A}) \in \widetilde{\mathcal{T}}$ y por ende,

$$\pi^{-1}(\pi(\widetilde{A})) \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Se concluye así que $\pi$ es abierta.

Ahora, procedemos con la segunda etapa.

Sea $[\widetilde{x}] \in \widetilde{X}/G$. Por hipótesis, existe $\widetilde{U}$ entorno, podemos suponer abierto, de $\widetilde{x}$ en $\widetilde{X}$ tal que si $\varphi$, $\Psi \in G$ y son distintas entre sí, entonces $\varphi(\widetilde{U})$ y $\Psi(\widetilde{U})$ son disjuntos. Como $\widetilde{X}$ es localmente conexo por caminos, $\widetilde{U}$ es localmente conexo por caminos. Así, si $\widetilde{V}$ es la componente conexa por caminos de $\widetilde{U}$ que contiene a $\widetilde{x}$, se tiene que

$$\widetilde{x} \in \widetilde{V} \subseteq \widetilde{U},$$

donde $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ y es conexo por caminos. Ahora, definiendo

$$\widetilde{V}' := \pi(\widetilde{V}),$$

veamos que es el entorno admisible de $[\widetilde{x}]$ buscado. Está claro que $\widetilde{V}'$ es abierto y conexo por caminos, pues $\pi$ es abierta y $\widetilde{V}'$ es la imagen, a través de una aplicación continua, de un conjunto conexo por caminos. Por ello, resta ver que si $\widetilde{W}$ es una componente conexa por caminos de $\pi^{-1}(\widetilde{V}')$, entonces

I) $\pi(\widetilde{W}) = \widetilde{V}'$.
II) $\pi_{|\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{V}'$ es homeomorfismo.

Primeramente, veamos I). Se tiene que

$$\widetilde{W} \subseteq \pi^{-1}(\widetilde{V}') = \pi^{-1}(\pi(\widetilde{V})) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(\widetilde{V}).$$

Por otra parte, si $\varphi$, $\varphi' \in G$ y $\varphi \neq \varphi'$, entonces $\varphi(\widetilde{U}) \cap \varphi'(\widetilde{U}) = \emptyset$ y, en consecuencia, $\varphi(\widetilde{V}) \cap \varphi'(\widetilde{V}) = \emptyset$.

Así, $\bigcup_{\varphi \in G} \varphi(\widetilde{V})$ es unión disjunta de abiertos conexos por caminos. Por ello, existe un único $\varphi_0 \in G$ tal que

$$\widetilde{W} \subseteq \varphi_0(\widetilde{V}).$$

Pero, como $\widetilde{W}$ es una componente conexa por caminos de $\bigcup_{\varphi \in G} \varphi(\widetilde{V})$,

$$\varphi_0(\widetilde{V}) \subseteq \widetilde{W}.$$

A continuación, veremos que $\pi_{|\widetilde{V}} = \pi_{|\widetilde{W}} \circ \varphi_{0|\widetilde{V}}$.

Sea $\widetilde{y} \in \widetilde{V}$. Por definición,

$$\pi_{|\widetilde{V}}(\widetilde{y}) = [\widetilde{y}] = [\varphi_0(\widetilde{y})] = (\pi_{|\widetilde{W}} \circ \varphi_{0|\widetilde{V}})(\widetilde{y}).$$

Así I) es cierto.

Probemos II). En este punto, se ha probado ya que $\pi_{|\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{V}'$ es :

- continua, al ser la restricción de una aplicación continua sobre su imagen.
- abierta, al ser la restricción de una aplicación abierta en un subconjunto abierto y tener que su imagen es de nuevo un abierto.
- sobreyectiva por I).

De esta manera, resta ver que es inyectiva para que se verifique II). Para ello, sean $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{W}$ tales que $[\widetilde{x}] = [\widetilde{y}]$. Es decir, existe $\varphi \in G$ tal que $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$. Con lo cual,

$$\varphi(\widetilde{V}) \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$$

y, por la hipótesis,

$$\varphi = id_{\widetilde{X}}.$$

Se concluye así que $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ y por lo tanto,

$$\pi_{|\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{V}'$$

es inyectiva.

Proseguimos con la tercera etapa.

Las dos primeras etapas combinadas con la continuidad y sobreyectividad de $\pi$, permiten verificar que $(\widetilde{X}, \pi)$ es un espacio recubridor de $\widetilde{X}/G$.

Pasamos a la cuarta etapa.

Por definición, para todo $\varphi \in G$, se tiene que $\pi \circ \varphi = \pi$ con lo cual

$$G \subseteq \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi).$$

Entonces, resta ver que $\mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi) \subseteq G$.

Sea $\varphi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$. Asumiendo que $\widetilde{X} \neq \emptyset$, existe $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ y como $\pi \circ \varphi = \pi$,

$$[\widetilde{x}] = \pi(\widetilde{x}) = (\pi \circ \varphi)(\widetilde{x}) = [\varphi(\widetilde{x})].$$

En otras palabras, existe $\Psi \in G$ tal que

$$\Psi(\widetilde{x}) = \varphi(\widetilde{x}).$$

Así, por el lema 2.6 y ya que $\varphi$, $\Psi \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$, se sigue que

$$\varphi = \Psi$$

y, en consecuencia,

$$\varphi \in G.$$

Finalmente, la quinta etapa es cierta, pues se demuestra combinando las dos etapas anteriores junto al lema 2.25. $\square$

*Ejemplo 2.32.* Sean $p \geq 2$ y $n \geq 1$ números naturales, $\mathbb{C}$ los números complejos y

$$S_{\mathbb{C}}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\},$$

la esfera de radio 1 en $\mathbb{C}^{n+1}$.

Ahora, para $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_k : S_{\mathbb{C}}^{2n+1} &\to S_{\mathbb{C}}^{2n+1} \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\to \varphi_k(z_1, \dots, z_{n+1}) := e^{\frac{2\pi k i}{p}}(z_1, \dots, z_{n+1}). \end{aligned}$$

Así, llamando

$$G = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}\},$$

es fácil probar que $G$ es un grupo de homeomorfismos de $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}$ que actúa propia y discontinuamente sobre $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}$.

El espacio cociente $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}/G$ se denomina **espacio lenticular** y lo denotamos por $L_p^{2n+1}$.

Por el teorema anterior, $G = Aut(S_{\mathbb{C}}^{2n+1})$ y, ya que $S_{\mathbb{C}}^{2n+1}$ es simplemente conexo, $\pi_1(L_p^{2n+1})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

# 3

# Recubridores universales

Con este capítulo se culmina el desarrollo teórico llevado a cabo a lo largo de la memoria cuyo propósito era determinar todos los posibles espacios recubridores de un espacio topológico dado. Cuando el espacio admite un tipo de recubridor especial (el recubridor universal), se verá que fijado un punto base del espacio topológico, cada clase de conjugación de subgrupos del grupo fundamental está vinculada con un único recubridor (salvo isomorfismos) del espacio topológico.

Al mismo tiempo se verá que la existencia de recubridor universal para un espacio topológico nos proporcionará una herramienta útil, en algunos casos, para describir el grupo fundamental del espacio topológico original.

## 3.1. El espacio recubridor universal

En matemáticas y más concretamente en la teoría de categorías, se usa el término de ***construcciones universales*** para referirse a aquellas construcciones que satisfacen una ***propiedad universal***. Así, en esta sección se introducirá el espacio recubridor universal y se verá que este nombre no se le ha asignado por simple arbitrariedad, sino que este tipo de espacios recubridores verifican –como su nombre indica– una propiedad universal. Asimismo, se expondrán herramientas asociadas al uso de este nuevo tipo de espacios que son de suma utilidad en topología algebraica, pues proporcionan un nuevo método para calcular grupos fundamentales.

**Definición 3.1.** ***(Espacio recubridor universal).***
*Se dice que* $(\widetilde{X}, p)$ *es el* ***espacio recubridor universal*** *de* $X$ *siempre y cuando* $(\widetilde{X}, p)$ *es un espacio recubridor de* $X$ *y* $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ *sea simplemente conexo.*

*Ejemplo 3.2.* Todos los espacios recubridores expuestos en el primer capítulo.

Nótese que en la definición se habla del y no de un espacio recubridor universal, siendo el motivo de esto el hecho que, como se demostrará en la siguiente sección, el espacio recubridor universal de un espacio topológico es único salvo isomorfismo. Esto, junto a que si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$ y $(\widetilde{X}', p')$ es un espacio recubridor de $X$, es posible encontrar una aplicación recubridora $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ –en virtud de la proposición 2.14–, determinan la propiedad universal anunciada.

A continuación, usando los resultados de la sección 2.2, veremos que en caso de existir el recubridor universal, este nos permite describir el grupo fundamental del espacio base y su orden.

Debido a la naturaleza de los siguientes resultados y sus demostraciones, conviene indicar que de la propia definición se tiene que si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$, entonces $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$.

**Teorema 3.3.** *Si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$, entonces para todo $x \in X$, existe una biyección $\varphi : \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$.*

*Demostración.* Es consecuencia de la proposición 2.19. □

**Teorema 3.4.** *Si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$ y $x \in X$, entonces el orden de $\pi_1(X, x)$ es igual al número de hojas del espacio recubridor $(\widetilde{X}, p)$ respecto de $X$. Además, si $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ la aplicación*

$$\mathcal{I} : \pi_1(X, x) \to \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$$

*definida por*

$$\mathcal{I}([\alpha]) = \varphi_{[\alpha]}, \text{ para } [\alpha] \in \pi_1(X, x),$$

*con $\varphi_{[\alpha]} \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ caracterizada por el hecho que*

$$\varphi_{[\alpha]}(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \cdot [\bar{\alpha}] = \widetilde{\bar{\alpha}}(1)$$

*es un isomorfismo de grupos, donde $\bar{\alpha}$ es lazo opuesto de $\alpha$ y $\widetilde{\bar{\alpha}}$ es su elevación a $\widetilde{X}$ con condición inicial*

$$\widetilde{\bar{\alpha}}(0) = \widetilde{x}.$$

*Demostración.* La primera parte se sigue usando el corolario 2.20 y el hecho que $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ es trivial.

La segunda parte es consecuencia del teorema 2.21, la proposición A.23 y el hecho que $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ es trivial. □

Para finalizar este apartado introductorio, veamos una aplicación de este último teorema. Utilizando este resultado, se puede calcular, por ejemplo, el grupo fundamental de la circunferencia y del plano proyectivo.

*Ejemplo 3.5.* Si se considera la proyección recubridora $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = (sin(t), cos(t))$, para cada $t \in \mathbb{R}$, es claro que $(\mathbb{R}, p)$ es el espacio recubridor universal de $S^1$. Por el teorema anterior, $\mathcal{A}(\mathbb{R}, p)$ es isomorfo a $\pi_1(S^1)$ y es sencillo comprobar que $\mathcal{A}(\mathbb{R}, p) = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, donde para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi_n$ es la aplicación real de variable real, definida por $\varphi_n(t) = t + 2n\pi$, para cada $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia, $\pi_1(S^1)$ es un grupo cíclico infinito y además, $\pi_1(S^1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

*Ejemplo 3.6.* Consideramos $\mathbb{RP}^2 = S^2/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia sobre la esfera definida como sigue. Si $x, y \in S^2$, entonces

$$x \sim y \text{ si y solo si } x \text{ e } y \text{ son antipodales o son el mismo punto.}$$

$\mathbb{RP}^2$ es el plano proyectivo real.

Se puede comprobar fácilmente que la proyección de la esfera sobre el plano proyectivo inducida por la relación de equivalencia anterior, es una proyección recubridora. Llamando $p$ a dicha proyección y usando que $S^2$ es simplemente conexo, también se deduce que $(S^2, p)$ es el espacio recubridor universal de $\mathbb{RP}^2$ y por el teorema anterior, $\mathcal{A}(S^2, p)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$.

Por otro lado, estudiando el grupo de automorfismos anterior se concluye que

$$\mathcal{A}(S^2, p) = \{id_{S^2}, -id_{S^2}\}$$

y por tanto, $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

## 3.2. Existencia y unicidad del espacio recubridor universal

En la presente sección, demostraremos que todo espacio topológico, bajo ciertas hipótesis razonables, es espacio base de una aplicación recubridora cuyo espacio total es simplemente conexo o dicho de otra manera, que el espacio topológico admite un espacio recubridor universal. Para ello, se precisa introducir un nuevo tipo de espacio topológico. Además, se probará que si un espacio topológico admite un espacio recubridor universal, este es único salvo isomorfismo de espacios recubridores.

Empezamos con la prueba de la unicidad, pues con lo argumentado a lo largo del trabajo se puede obtener con relativa facilidad.

**Teorema 3.7.** ***(Unicidad del espacio recubridor universal).***
*Si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$, entonces $(\widetilde{X}, p)$ es único salvo isomorfismo.*

*Demostración.* Supongamos que existe otro $(\widetilde{X}', p')$ espacio recubridor universal de $X$. Sean $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ y $\widetilde{x}' \in \widetilde{X}'$ tales que $p(\widetilde{x}) = p'(\widetilde{x}') = x$. Entonces, como $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = \{e\} = \pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x}')$, se tiene que

$$p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \text{ y } p'_{*\widetilde{x}'}(\pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x}'))$$

pertenecen a la misma clase de conjugación en $\pi_1(X, x)$. Así, por el teorema 2.12, los espacios recubridores $(\widetilde{X}, p)$ y $(\widetilde{X}', p')$ son isomorfos. □

A continuación, presentaremos la condición explícita que debe verificar un espacio topológico para admitir recubridor universal.

Supongamos que $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$, $x \in X$ y $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Si $U$ es un entorno admisible de $x$ y $\widetilde{U}$ la componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{x}$, entonces $p_{|\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ es homeomorfismo. De esta manera, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de grupos fundamentales:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{U}, \widetilde{x}) & \xrightarrow{\widetilde{i}_{*\widetilde{x}}} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \left(p_{|\widetilde{U}}\right)_{*\widetilde{x}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{*\widetilde{x}}} \\ \pi_1(U, x) & \xrightarrow{i_{*x}} & \pi_1(X, x) \end{array},$$

donde $\widetilde{i} : \widetilde{U} \to \widetilde{X}$ e $i : U \to X$ son las correspondientes inclusiones canónicas. Por hipótesis, $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ es isomorfo al grupo trivial y al ser $p_{|\widetilde{U}}$ un homeomorfismo, $\left(p_{|\widetilde{U}}\right)_{*\widetilde{x}}$ es isomorfismo de grupos. Así, se tiene que $i_{*x}$ es el homomorfismo trivial. En consecuencia, hemos demostrado que si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$, entonces el espacio $X$ verifica la siguiente propiedad: todo punto $x \in X$ admite un entorno $U$ tal que el homomorfismo inducido por la inclusión canónica $i_{*x} : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ es el trivial.

A un espacio topológico que verifique la propiedad anterior, se le denomina espacio topológico **semilocalmente simplemente conexo**. A continuación, veremos que en un espacio de este tipo, todos los puntos tienen una base de entornos abiertos y conexos por caminos para las cuales el homomorfismo inducido por la inclusión canónica entre el grupo fundamental de cada uno de los entornos y el grupo fundamental del espacio total es el trivial.

**Proposición 3.8.** *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es semilocalmente simplemente conexo si y solo si todo punto de $X$ posee una base de entornos abiertos y conexos por caminos para los cuales el homomorfismo de grupos inducido por la inclusión canónica de cada uno de los entornos sobre el espacio $X$ el trivial.*

*Demostración.* En primer lugar, supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es semilocalmente simplemente conexo y sea $x \in X$. Ahora, sea $U \subseteq X$ un entorno de $x$ fijo pero arbitrario. Por hipótesis, existe $V \subseteq X$ un entorno de $x$ tal que $i_{*x} : \pi_1(V, x) \to \pi_1(X, x)$ (el homomorfismo inducido por la inclusión canónica) es el homomorfismo trivial. Nótese ahora que $U \cap V \subseteq X$ es un entorno de $x$ y por ello, existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U \cap V \subseteq X$. Así, si $W$ es la componente conexa por caminos de $A$ que contiene a $x$, entonces es un abierto (pues es la componente conexa por caminos de un espacio localmente conexo por caminos) y conexo por caminos. Además, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(W, x) \arrow[r, "i_{*x}"] \arrow[dr, "i_{*x}"'] & \pi_1(X, x) \\ & \pi_1(V, x) \arrow[u, "i_{*x}"] \end{tikzcd},$$

y, en consecuencia, $i_{*x} : \pi_1(W, x) \to \pi_1(X, x)$ es el homomorfismo trivial.

El recíproco es evidente por definición. $\square$

Por la proposición anterior, el conjunto de todos los abiertos conexos por caminos que contengan a un punto de un espacio topológico semilocalmente simplemente conexo y cuyo homomorfismo inducido por la inclusión canónica sea el trivial, es una base de abiertos de la topología. A cada uno de estos abiertos se les denomina **abiertos básicos**.

Que un espacio sea semilocalmente simplemente conexo junto a que sea también un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos, es suficiente para afirmar que el espacio admite un espacio recubridor universal.

**Teorema 3.9.** ***(Existencia del espacio recubridor universal).***
*Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico semilocalmente simplemente conexo, conexo y localmente conexo por caminos, entonces $(X, \mathcal{T})$ admite un espacio recubridor universal.*

*Demostración.* Debido al carácter excesivamente técnico de la prueba, presentaremos solo algunas ideas de la demostración del teorema (para más detalles véase, por ejemplo, [8]).

Fijamos un punto $x \in X$. Entonces, definimos el espacio

$$\widetilde{X} := \{[\alpha] \mid \alpha : I \to X \text{ es camino en } X \text{ y } \alpha(0) = x\}.$$

Aquí, $[\alpha]$ denota la clase de homotopía del camino $\alpha$ relativa a $\{0, 1\}$.

Ahora, introducimos la aplicación $p : \widetilde{X} \to X$ dada por

$$p([\alpha]) := \alpha(1).$$

Nótese que $p$ está bien definida, ya que estamos considerando homotopía relativa a $\{0, 1\}$.

A continuación, definimos una topología sobre $\widetilde{X}$. De hecho, consideramos una base de la topología construida como sigue. Para cada abierto básico $U$ en $X$ y cada camino $\alpha : I \to X$ con origen en $x$, denotamos por $(U, [\alpha])$ el subconjunto de $\widetilde{X}$

$$(U, [\alpha]) := \{[\alpha * \beta] \mid \beta : I \to X \text{ camino, } \beta(0) = \alpha(1) \text{ y } \beta(I) \subseteq U\}.$$

Entonces, uno puede probar que el conjunto

$$\{(U, [\alpha]) \mid U \text{ abierto básico en } X \text{ y } \alpha : I \to X \text{ camino, } \alpha(0) = x\}$$

es base de una topología sobre $\widetilde{X}$.

Por otra parte, se tiene que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\{[\alpha_{x'}] \mid x' \in U\}} (U, [\alpha_{x'}])$$

para cada abierto básico $U$ en $X$, donde $\{[\alpha_{x'}] \mid x' \in U\}$ son todas las clases de homotopía de caminos en $X$ con origen en $x$ y final en $x' \in U$.

Esto demostraría que $p$ es continua.

Ahora, veremos que $p$ es sobreyectiva. En efecto, sea $x' \in X$. Entonces, usando que $X$ es conexo por caminos, existe un camino $\alpha : I \to X$ con origen en $x$ y final en $x'$. En consecuencia,

$$p([\alpha]) = \alpha(1) = x'.$$

Además, se tiene que los subconjuntos $(U, [\alpha_{x'}])$, con $x' \in U$, son justamente las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(U)$ y que $p_{|(U,[\alpha_{x'}])} : (U, [\alpha_{x'}]) \to U$ es un homeomorfismo.

Esto probaría varios hechos:

- $p$ es una aplicación recubridora y los abiertos básicos de $X$ son entornos admisibles.
- Ya que los abiertos básicos de $X$ son conexos por caminos, se sigue que los subcojuntos de $\widetilde{X}$ que constituyen la base de la topología en $\widetilde{X}$ son conexos por caminos y, en consecuencia, $\widetilde{X}$ es localmente conexo por caminos.

La idea para demostrar que $\widetilde{X}$ es conexo por caminos es la siguiente. Basta probar que si $[\alpha] \in \widetilde{X}$, entonces existe un camino $\widetilde{X}$ con origen en $[\mathcal{C}_x]$ y final en $[\alpha]$, donde $\mathcal{C}_x : I \to X$ es el camino constante en $x$. Para ello, para cada $s \in I$, se considera el camino $\alpha_s : I \to X$ dado por

$$\alpha_s(t) = \alpha(st), \text{ para } t \in I.$$

Entonces, $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ definido por

$$\widetilde{\alpha}(s) := [\alpha_s]$$

es el camino en $\widetilde{X}$ buscado. De hecho, $\widetilde{\alpha}$ es la elevación de $\alpha$ con origen en $[\mathcal{C}_x]$.

Finalmente, veremos que $\widetilde{X}$ es simplemente conexo. Como $\widetilde{X}$ es conexo por caminos, basta demostrar que el grupo fundamental de $\widetilde{X}$ con punto base $[\mathcal{C}_x]$ es trivial.

Ahora, sea $\widetilde{\alpha}$ un lazo con punto base $[\mathcal{C}_x]$. Entonces, como ya se indicó anteriormente, la elevación $\widetilde{p \circ \widetilde{\alpha}}$ de $p \circ \widetilde{\alpha}$ está dada por

$$\widetilde{p \circ \widetilde{\alpha}}(s) = [(p \circ \widetilde{\alpha})_s], \text{ para cada } s \in I,$$

donde $(p \circ \widetilde{\alpha})_s : I \to X$ es el camino en $X$ definido por

$$(p \circ \widetilde{\alpha})_s(t) = p(\widetilde{\alpha}(st)), \text{ para cada } t \in I.$$

Por otra parte, por el teorema 1.7,

$$\widetilde{p \circ \widetilde{\alpha}} = \widetilde{\alpha}$$

y, así,

$$[\mathcal{C}_x] = \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{p \circ \widetilde{\alpha}}(1) = [p \circ \widetilde{\alpha}].$$

Esto implica que $p \circ \widetilde{\alpha} \sim \mathcal{C}_x$ y, usando el teorema 1.10, concluimos que

$$\widetilde{\alpha} \sim \mathcal{C}_{[\mathcal{C}_x]}.$$

□

## 3.3. Clasificación de los espacios recubridores

En esta sección, daremos una clasificación completa de los espacios recubridores de un espacio dado. Usando el teorema 2.12, se sigue que dos espacios recubridores de un espacio dado son isomorfos si y solo si determinan la misma clase de conjugación de subgrupos del grupo fundamental del espacio base.

A continuación, probaremos que si el espacio admite recubridor universal, entonces cada clase de conjugación de subgrupos del grupo fundamental del espacio tiene asociada un recubridor. Esto permitirá identificar clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental con espacios recubridores.

Para alcanzar el objetivo anterior, debemos probar el siguiente resultado previo.

**Lema 3.10.** *Sea el siguiente diagrama conmutativo de espacios topológicos y aplicaciones continuas:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & Y \arrow[d, "r"] \\ & Z \end{tikzcd}.$$

*Si $(X, p)$ es espacio recubridor de $Y$ y $(X, q)$ es espacio recubridor de $Z$, entonces $(Y, r)$ es espacio recubridor de $Z$.*

*Demostración.* En primer lugar, $r$ es sobreyectiva pues $q = r \circ p$ es sobreyectiva y por hipótesis, se tiene que tanto $(Y, \mathcal{T}_Y)$ como $(Z, \mathcal{T}_Z)$ son espacios topológicos conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

Por otro lado, puede demostrarse que los entornos admisibles en $Z$ para $q$ son los mismos que para $r$. En efecto, sea $z \in Z$ y $U_z^Z$ un entorno admisible de $z$ para $q$. Sea ahora $U^Y$ una componente conexa por caminos de $r^{-1}(U_z^Z)$ y veamos que $r_{|U^Y} : U^Y \to U_z^Z$ es homeomorfismo.

Obsérvese que si $U^X$ es una componente conexa por caminos de $p^{-1}(U^Y)$, entonces $U^X$ es también una componente conexa por caminos de $q^{-1}(U_z^Z)$. En efecto, sea $C^X \subseteq q^{-1}(U^Y) = p^{-1}(r^{-1}(U^Y))$ conexo por caminos que contiene a $x \in U^X$. Entonces, $p(C^X) \subseteq r^{-1}(U^Y)$ es un conexo por caminos en $r^{-1}(U^Y)$ que contiene a $p(x) \in U^Y$. En consecuencia,

$$p(C^X) \subseteq U^Y$$

lo que implica que

$$C^X \subseteq p^{-1}(U^Y) \text{ y } x \in C^X \cap U^X.$$

Así,

$$C^X \subseteq U^X.$$

Por tanto, por la proposición 1.9, $(U^X, p_{|U^X})$ es espacio recubridor de $U^Y$. Entonces, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U^X \arrow[r, "p_{|U^X}"] \arrow[dr, "q_{|U^X}"'] & U^Y \arrow[d, "r_{|U^Y}"] \\
& U_z^Z
\end{tikzcd}$$

donde $q_{|U^X}$ es homeomorfismo y $p_{|U^X}$ es sobreyectiva. Así, como $r_{|U^Y} \circ p_{|U^X} = q_{|U^X}$, se deduce que $p_{|U^X}$ es inyectiva y, en consecuencia, $p_{|U^X}$ es homeomorfismo. Por tanto, $r_{|U^Y}$ también es homeomorfismo, ya que $r_{|U^Y} = q_{|U^X} \circ p_{|U^X}^{-1}$. □

Como para los espacios topológicos conexos, localmente conexos por caminos y semilocalmente simplemente conexos es posible garantizar la existencia de su espacio recubridor universal, el teorema siguiente permite establecer la clasificación buscada en dichos espacios.

**Teorema 3.11.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Si $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$ y $\mathcal{C}$ una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x)$, entonces existen $(\widetilde{Y}, q)$ espacio recubridor de $X$ e $\widetilde{y} \in q^{-1}(x)$ tal que $q_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y})) \in \mathcal{C}$.*

*Demostración.* Al tener que $(\widetilde{X}, p)$ es el espacio recubridor universal de $X$, por el teorema 3.4, $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x)$. De hecho, si $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$, denotaremos por $\mathcal{I} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ el isomorfismo dado por

$$\mathcal{I}([\alpha]) = \varphi_{[\alpha]},$$

donde $\varphi_{[\alpha]} \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ está caracterizada por el hecho que

$$\varphi_{[\alpha]}(\widetilde{x}) = \widetilde{\bar{\alpha}}(1),$$

con $\widetilde{\bar{\alpha}}$ el levantamiento a $\widetilde{X}$ del lazo opuesto $\bar{\alpha}$ a $\alpha$ con condición inicial $\widetilde{\bar{\alpha}}(0) = \widetilde{x}$.

Así, si $G \in \mathcal{C}$ es claro que $\mathcal{I}(G)$ es un subgrupo de $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$. Ahora, por la proposición 2.30, $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$ actúa propia y discontinuamente sobre $\widetilde{X}$ y, en consecuencia, $\mathcal{I}(G)$ también. De esta manera, por el teorema 2.31, $(\widetilde{X}, \pi)$ es un espacio recubridor regular de $\widetilde{X}/\mathcal{I}(G)$ e $\mathcal{I}(G) = \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$, donde $\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/\mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$ es la proyección canónica.

Ahora, definimos $\widetilde{Y}$ el espacio cociente $\widetilde{X}/\mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$ y la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned} q : \widetilde{Y} &\to X \\ [\widetilde{x}'] &\mapsto q([\widetilde{x}']) := p(\widetilde{x}') \end{aligned}$$

que está bien definida pues $\mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi) = \mathcal{I}(G)$ es un subgrupo de $\mathcal{A}(\widetilde{X}, p)$.

Así, hemos obtenido el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd},$$

y, usando el lema 3.10, deducimos que $(\widetilde{Y}, q)$ es espacio recubridor de $X$.

Finalmente, si $\widetilde{y} = \pi(\widetilde{x})$ probaremos que

$$G = q_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y}))$$

o, equivalentemente, que

$$\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(q_{*\widetilde{y}}(\pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y}))) \subseteq \mathcal{A}(\widetilde{X}, p). \tag{3.1}$$

Ahora, ya que $\widetilde{X}$ es el recubridor universal de $\widetilde{Y}$ entonces, usando de nuevo el teorema 3.4, tenemos un isomorfismo

$$\widetilde{\mathcal{I}} : \pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y}) \to \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi) = \mathcal{I}(G)$$

dado por

$$\widetilde{\mathcal{I}}([\beta]) = \widetilde{\varphi}_{[\beta]}, \text{ para } [\beta] \in \pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y}),$$

donde $\widetilde{\varphi}_{[\beta]} \in \mathcal{A}(\widetilde{X}, \pi)$ está determinado por la condición

$$\widetilde{\varphi}_{[\beta]}(\widetilde{x}) = \widetilde{\bar{\beta}}(1)$$

con $\widetilde{\bar{\beta}}$ la elevación a $\widetilde{X}$ de $\bar{\beta}$ con condición inicial $\widetilde{\bar{\beta}}(0) = \widetilde{x}$.

Por otra parte,

$$\mathcal{I}(q_{*\widetilde{y}}([\beta])) = \mathcal{I}([q \circ \beta]) = \varphi_{[q \circ \beta]}.$$

Así, como la elevación de $\overline{q \circ \beta}$ a $\widetilde{X}$ es $\widetilde{\widetilde{\beta}}$, resulta que

$$\varphi_{[q\circ\beta]}(1) = \widetilde{\widetilde{\beta}}(1)$$

y, en consecuencia,

$$\widetilde{\varphi}_{[\beta]} = \varphi_{[q\circ\beta]}$$

lo que prueba 3.1. □

A continuación, usando el teorema 2.12 y el teorema 3.11, deducimos el resultado final de este trabajo.

**Teorema 3.12.** ***(Teorema de clasificación de los espacios recubridores).*** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico conexo, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Si $x \in X$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre las clases de espacios recubridores de $X$ y las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x)$.*

Atendiendo a este teorema, es posible determinar todos los espacios recubridores de un espacio dado.

*Ejemplo 3.13.* En el ejemplo 3.6, se demostró que $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Así, solo hay dos clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ posibles. Una debe ser isomorfa a $\mathbb{Z}_2$ y la otra a $\{[0]_2\}$. Por lo que si $p$ es la proyección presentada en el ejemplo 3.6, se concluye que $(\mathbb{RP}^2, id_{\mathbb{RP}^2})$ y $(S^2, p)$ son, salvo isomorfismos de recubridores, los únicos espacios recubridores de $\mathbb{RP}^2$.

Obsérvese que cada espacio recubridor de un espacio $X$ está recubierto por el universal y las aplicaciones recubridoras intermedias pueden construirse mediante cocientes por acciones de grupos adecuadas.

*Ejemplo 3.14.* Atendiendo a lo expuesto en el capítulo 1, está claro que $\mathbb{R}^2$ es el espacio total del recubridor universal de $\mathbb{T}^2$, es decir, el toro de dimensión 2. A la proyección recubridora asociada la denotaremos por $p$. Además, se sabe que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y por tanto, el grupo de automorfismos

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^2, p) = \{\varphi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}},$$

donde para cada $m$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \varphi_{m,n}(x, y) := (x + m, y + n) \ , \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ahora, construiremos un espacio recubridor de $\mathbb{T}^2$. Para ello, consideremos el subgrupo $2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cuyo grupo de automorfismos asociado es $\{\varphi_{2k,3l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ que llamaremos $H$.

Se puede demostrar que cada punto de $\mathbb{R}^2$ mediante la relación $\sim_H$ es equivalente a un punto de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$$

que es homeomorfo al espacio de órbita de $H$, $\mathbb{R}^2/H$. Este último consiste en el recubridor construido y su proyección recubridora asociada se consigue "pegando" las aristas izquierda y derecha, y la superior con la inferior del rectángulo anterior con la dirección que se indica en la figura 3.1, obteniendo así el toro de 2 dimensiones.

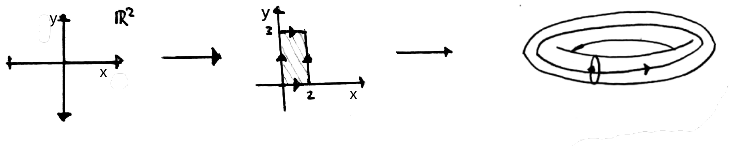



**Figura 3.1.** Obtención del nuevo recubridor del toro de dimensión 2

Como último ejemplo del trabajo, presentaremos un espacio topológico compacto con grupo fundamental no abeliano: la famosa variedad de Kodaira-Thurston. Esta fue el primer ejemplo de una variedad compacta simpléctica, la cual por razones topológicas, no admite estructuras Kähler (para más detalles, véase [12]).

Se trata de un espacio topológico con una descripción bastante simple, pero con propiedades geométricas y topológicas muy interesantes.

*Ejemplo 3.15. (La variedad de Kodaira-Thurston y algunos recubridores).*
En $\mathbb{R}^4$ consideramos la estructura de grupo algebraico con multiplicación definida como sigue

$$(x,y,z,t)\cdot(x',y',z',t') = (x+x', y+y', z+z'+xy', t+t')$$

para $(x,y,z,t)$, $(x',y',z',t')$, $\in \mathbb{R}^4$.

$\mathbb{R}^4$ con la operación anterior es un grupo de Lie conexo, simplemente conexo no abeliano y nilpotente (véase [1]).

Ahora, es fácil probar que $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}^4$ con la multiplicación anterior. Denotaremos por $G$ a tal subgrupo. Entonces, $G$ induce de forma natural un subgrupo de $Homeom(\mathbb{R}^4)$ como sigue

$$G \longrightarrow Homeom(\mathbb{R}^4),\ \ (m,n,p,q) \in G \to \varphi_{(m,n,p,q)} \in Homeom(\mathbb{R}^4)$$

donde

$$\varphi_{(m,n,p,q)}(x,y,z,t) = (x,y,z,t)\cdot(m,n,p,q) = (x+m, y+n, z+p+nx, t+q)$$

para $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

La acción de $G$ sobre $\mathbb{R}^4$, como un subgrupo de $Homeom(\mathbb{R}^4)$, es propia y discontinua. Así, usando el teorema 2.31, deducimos que $\mathbb{R}^4$ es el espacio total del recubridor universal del espacio cociente

$$KT = \mathbb{R}^4/G.$$

Además, por el teorema 3.4, el grupo fundamental de $KT$, $\pi_1(KT)$, es isomorfo a $G$.

$KT$ es la **variedad de Kodaira-Thurston**. Es el espacio total de una fibración sobre el toro $\mathbb{T}^2$ con fibra $\mathbb{T}^2$ (véase [12]) y por tanto, un espacio compacto.

A continuación, describiremos algunos recubridores de $KT$. Para ello, consideraremos algunos subgrupos de $\pi_1(KT)$ y entonces, usaremos el teorema 3.12.

En efecto, es fácil ver que

$$H_1 = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ H_2 = \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

son subgrupos abelianos de $G$. Así, los espacios cocientes

$$\widetilde{X}_1 = \mathbb{R}^4/H_1,\ \widetilde{X}_2 = \mathbb{R}^4/H_2$$

son espacios recubridores de la variedad de Kodaira-Thurston $KT$ con proyecciones canónicas

$$p_1 : \widetilde{X}_1 \to KT,\ p_2 : \widetilde{X}_2 \to KT.$$

También, es sencillo probar que $H_1$ y $H_2$ no son subgrupos conjugados de $G = \pi_1(KT)$. Por tanto, $\widetilde{X}_1$ y $\widetilde{X}_2$ no son isomorfos como espacios recubridores de $KT$.

Sin embargo, se puede ver fácilmente que

$$\widetilde{X}_1 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \text{ y } \widetilde{X}_2 \cong S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2,$$

donde $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ y $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, son el toro de dimensión 2 y 3, respectivamente. En consecuencia, $\widetilde{X}_1$ y $\widetilde{X}_2$ son homeomorfos como espacios topológicos.

El siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{X} = \mathbb{R}^4 \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dd, "p"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
\widetilde{X}_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 = S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& KT &
\end{tikzcd}$$

ilustra la situación. Aquí, $q_1$ y $q_2$ son las proyecciones canónicas (recubridoras) de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ y $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$, respectivamente.

# Conclusiones y algunas líneas de investigación actuales relacionadas con el tópico

En este trabajo, se ha realizado una introducción al estudio de los espacios recubridores de un espacio topológico.

En particular, se ha probado la existencia y unicidad del espacio recubridor universal $\widetilde{X}$ para un espacio topológico $X$ conexo, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. La propiedad esencial que distingue a $\widetilde{X}$ del resto de los recubridores, es su carácter simplemente conexo y el hecho que $\widetilde{X}$ recubre al resto de los recubridores. También, se han clasificado los recubridores de $X$ (salvo isomorfismos) en términos de las clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental de $X$.

Está claro entonces, que el estudio de los espacios recubridores de $X$ está estrechamente relacionado con el estudio del grupo fundamental de $X$.

Por otra parte, es de sobra conocido que, el grupo fundamental de $X$ es un invariante homotópico y, por tanto, puede ser usado para distinguir y clasificar espacios topológicos. Esta idea ha sido ampliamente usada en diferentes direcciones y, en particular, en el estudio de ciertos espacios topológicos como, por ejemplo, las variedades compactas Kähler (véase [3]). Estas son variedades complejas (en consecuencia, de dimensión par) dotadas de una estructura riemanniana compatible, en un adecuado sentido, con la estructura compleja. El espacio proyectivo complejo de dimensión compleja $n$ o los toros de dimensión par son ejemplos distinguidos de variedades compactas Kähler.

Recientemente, las investigaciones anteriores se están tratando de extender a ciertos análogos, en dimensión impar, de las variedades Kähler y algunos resultados interesantes han sido probados en esta dirección.

# A

# Apéndice Relación de conjugación en grupos y G-espacios

## A.1. Subgrupos conjugados de un grupo

Una de las estrategias más recurridas en matemáticas, y más concretamente en álgebra, a la hora de estudiar un conjunto, consiste en establecer una partición del mismo a partir de una relación de equivalencia y estudiar las propiedades de su conjunto cociente, en general más sencillo. Una relación de equivalencia básica entre los subgrupos de un grupo es la relación de conjugación y en esta primera parte del apéndice, presentaremos algunos resultados acerca de esta.

**Definición A.1.** ***(Subgrupos conjugados).***
*Sean $G$ un grupo y $H_1, H_2$ subgrupos de $G$. Decimos que $H_1, H_2$ son* ***subgrupos conjugados de G*** *si existe $g \in G$ tal que $H_1 = g^{-1}H_2g$.*

Es fácil probar que la relación anterior es de equivalencia.

**Proposición A.2.** *Si $G$ es un grupo, entonces la relación "ser subgrupos conjugados de $G$" es una relación de equivalencia en el conjunto formado por todos los subgrupos de $G$.*

Las clases de equivalencia que resultan de la relación de equivalencia establecida en la proposición A.2, se denominarán **clases de conjugación**.

De la definición A.1, se deduce el siguiente resultado que nos permitirá obtener subgrupos conjugados a uno dado a través de los automorfismos interiores.

**Proposición A.3.** *Si $G$ es un grupo y $g \in G$, entonces:*

i) *La aplicación $I_g : G \to G$ definida por $I_g(g') = g^{-1}g'g$, para cada $g' \in G$, es un automorfismo de $G$.*
ii) *Si $H$ es un subgrupo de $G$, entonces $I_g(H)$ y $H$ son subgrupos conjugados.*

Motivados por el resultado anterior, se introduce la siguiente definición que usaremos en la siguiente sección del apéndice.

**Definición A.4.** ***(Automorfismo interior de un grupo).***
*Sean $G$ un grupo y $g \in G$. Entonces, la aplicación $I_g : G \to G$ dada por*

$$I_g(g') = g^{-1}g'g, \text{ para cada } g' \in G,$$

*se denomina* ***automorfismo interior de G inducido por g****.*

## A.2. G-espacios

La noción de G-espacio es una de las pocas en matemáticas que permite conectar el álgebra abstracta con casi cualquier rama de las matemáticas, pues está presente en geometría, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, etc. En esta segunda sección del apéndice, presentaremos algunos resultados y construcciones básicas sobre $G-$espacios (para más detalles, véase el apéndice B de [8]).

**Definición A.5.** ***(G−espacio por la derecha o acción de grupo por la derecha).***
*Sean $E$ un conjunto y $G$ un grupo. Se dice que* ***E es un G−espacio por la derecha*** *o que* ***G actúa u opera por la derecha sobre E*** *si existe una aplicación*

$$\begin{aligned} \cdot : E \times G &\to E \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g \end{aligned}$$

*que satisface las siguientes propiedades:*

I) $x \cdot 1_G = x$ *para todo* $x \in E$, *donde* $1_G$ *es el elemento neutro de* $G$.
II) $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$ *para todo* $x \in E$ *y* $g_1, g_2 \in G$.

*A la aplicación se le denomina* ***acción por la derecha de G sobre E****.*

Nótese que si $\cdot : E \times G \to E$ es una acción por la derecha y $g \in G$ entonces podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_g : E &\to E \\ x &\mapsto \varphi_g(x) := x \cdot g \end{aligned}$$

Además, usando las condiciones I) y II) en la definición de $\varphi_g$, se deduce que

$$\varphi_{1_G} = id_E \text{ y } \varphi_{gg'} = \varphi_{g'} \circ \varphi_g, \text{ para } g, g' \in G. \tag{A.1}$$

Como consecuencia, se deduce el siguiente resultado.

**Corolario A.6.** *Sea $E$ un $G-$ espacio por la derecha. Si $g \in G$, entonces la aplicación $\varphi_g$ es biyectiva con inversa $\varphi_{g^{-1}}$.*

Nótese que dados $x \in E$ y $g \in G$, si $x \cdot g = x$ esto no implica necesariamente que $g$ sea el elemento neutro de $G$.

**Definición A.7.** ***(Acción efectiva de un grupo sobre un conjunto).***
*Se dice que* ***G opera o actúa efectivamente sobre el conjunto E*** *si dado $g \in G$ se tiene que $x \cdot g = x$ para todo $x \in E$ si y solo si $g = 1_G$.*

Ahora, introduciremos los isomorfismos entre $G-$espacios, esto es, las aplicaciones $G-$equivariantes.

**Definición A.8.** ***(Aplicación $G-$equivariante entre $G-$espacios).***
*Sean $E_1$ y $E_2$ dos $G-$ espacios por la derecha. Se dice que una aplicación $f: E_1 \to E_2$ es* ***$G-$ equivariante*** *si para cualesquiera $g \in G$ y $x \in E_1$, se tiene que $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$.*

**Definición A.9.** ***(Isomorfismo de $G-$espacios y automorfismo de $G-$espacio).***
*Sea $f: E_1 \to E_2$ una aplicación $G-$equivariante entre dos $G-$espacios por la derecha. Si existe otra aplicación $G-$equivariante $h: E_2 \to E_1$ tal que $h \circ f = id_{E_1}$ y $f \circ h = id_{E_2}$, se dice que $f$ es un* ***isomorfismo de $G-$espacios por la derecha*** [1]. *Si $E_1 = E_2$, se dice que $f$ es un* ***automorfismo de $G-$espacio****.*

Denotaremos por $Aut(E)$ al conjunto de los automorfismos de un $G-$espacio $E$. Está claro que $Aut(E)$ es un grupo con la composición de aplicaciones.

A continuación, introduciremos las acciones transitivas y los $G-$espacios homogéneos.

**Definición A.10.** ***(Acción transitiva de un grupo sobre un conjunto o $G-$espacios homogéneos).***
*Sea $E$ un $G-$ espacio por la derecha. Se dice que* ***$G$ opera o actúa transitivamente sobre el conjunto $E$*** *o que* ***$E$ es un G-espacio por la derecha homogéneo*** *si para todo $x, y \in E$, existe $g \in G$ tal que $x \cdot g = y$.*

*Ejemplo A.11.* Sea $G$ un grupo y $H$ un subgrupo de $G$. Definimos

$$G/H := \{Hg \mid g \in G\},$$

es decir, el conjunto de todas las **clases laterales derechas de $H$ en $G$**. Está claro que si todos los elementos de una clase lateral se multiplican por la derecha por un mismo elemento de $G$, los elementos resultantes pertenecen a una misma clase lateral. Así, se tiene una aplicación

$$\begin{aligned} G/H \times G &\to G/H \\ (Hg, g') &\mapsto Hg \cdot g' := Hgg' \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $Hg \cdot 1_G = Hg$ para todo $Hg \in G/H$.
- $(Hg \cdot g_1) \cdot g_2 = (Hg) \cdot g_1 g_2$ para todo $Hg \in G/H$ y $g_1, g_2 \in G$.
- $G$ opera transitivamente sobre el conjunto $G/H$, pues si $Hg_1$, $Hg_2 \in G/H$, entonces
$$Hg_1 = (Hg_2) \cdot (g_2^{-1} g_1).$$

Por lo tanto, $G/H$ es un $G-$ espacio por la derecha homogéneo.

Un $G-$espacio por la derecha homogéneo es isomorfo al conjunto de las clases laterales derechas en $G$ módulo un subgrupo de $G$, llamado el **subgrupo de isotropía**.

[1] La condición es equivalente a que $h$ sea la inversa de $f$ ya que si $y \in E_2$ y $g \in G$, entonces $h(y \cdot g) = h(f(x) \cdot g) = h(f(x \cdot g)) = x \cdot g = h(y) \cdot g$ donde $x \in E_1$ y $f(x) = y$.

**Definición A.12.** ***(Subgrupo de isotropía).***
*Sea $E$ un $G-$ espacio. Si $x \in E$, entonces el* ***subgrupo de isotropía correspondiente a $x$*** *es el conjunto $H_x = \{g \in G \mid \varphi_g(x) = x\}$.*

De hecho, usando la definición A.12 y el corolario A.6 se prueba lo siguiente.

**Proposición A.13.** *Sea $E$ un $G-$ espacio. Si $x \in E$, entonces el subgrupo de isotropía correspondiente a $x$ es un subgrupo de $G$.*

Ahora, presentamos el resultado anunciado anteriormente.

**Proposición A.14.** *Sean $E$ un $G-$ espacio por la derecha homogéneo y $x \in E$. Si $H_x$ es el subgrupo de isotropía correspondiente a $x$, entonces la aplicación $f : G/H_x \to E$, definida por $f(H_x g) = x \cdot g$ para cada $g \in G$, es isomorfismo de $G-$ espacios por la derecha.*

Nótese que si $E$ es un $G-$espacio, $x \in E$ y $g \in G$, entonces $H_{x\cdot g} = g^{-1}H_x g$ (**Relación de Isotropía**).

En un $G-$espacio homogéneo, los subgrupos de isotropía correspondientes a dos puntos del espacio son conjugados.

**Proposición A.15.** *Sean $E$ un $G-$espacio por la derecha homogéneo y $x, x' \in E$. Si $H_x$ y $H_{x'}$ son los subgrupos de isotropía correspondientes a $x$ y $x'$, respectivamente, entonces, $H_x$ y $H_{x'}$ son subgrupos conjugados.*

También, dos grupos de isotropía de un mismo $G-$espacio correspondientes a dos puntos relacionados vía automorfismo son iguales.

**Proposición A.16.** *Sean $E$ un $G-$ espacio por la derecha homogéneo, $x \in E$ y $\varphi : E \to E$ un automorfismo de $G-$espacio. Si $H_x$ y $H_{\varphi(x)}$ son los subgrupos de isotropía correspondientes a $x$ y $\varphi(x)$, entonces $H_x = H_{\varphi(x)}$.*

Este resultado admite una especie de recíproco.

**Proposición A.17.** *Sean $E$ un $G-$ espacio por la derecha homogéneo y $x, y \in E$. Si el grupo de isotropía correspondiente a $x$ es el mismo que el correspondiente al $y$, entonces existe $\varphi : E \to E$ automorfismo tal que $\varphi(x) = y$.*

La acción del grupo de automorfismos de un $G-$espacio homogéneo sobre el espacio es libre.

**Proposición A.18.** *Sean $E$ un $G-$espacio por la derecha homogéneo y $\varphi_1, \varphi_2$ dos automorfismos en $E$. Si coinciden en un punto, entonces ambos automorfismos son iguales.*

Ahora, usando las proposiciones las proposiciones A.16, A.17 y A.18 deducimos el siguiente resultado.

**Proposición A.19.** *Sea $E$ un $G-$ espacio homogéneo. Si $A$ es un grupo de automorfismos de $E$, entonces $A$ es el conjunto total de automorfismos de $E$ si y solo si para dos puntos cualesquiera $x, y \in E$ con el mismo subgrupo de isotropía, existe un automorfismo $\varphi \in A$ tales que $\varphi(x) = y$.*

Ahora, introducimos la definición del normalizador de un subgrupo de un grupo.

**Definición A.20.** ***(Normalizador de un grupo).***
*Sean $G$ un grupo y $H$ un subgrupo de $G$. Se denomina el* ***normalizador de H*** *al subconjunto $N(H)$ de $G$ dado por $N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.*

Usando la definición previa, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición A.21.** *Sea $G$ un grupo. Si $H$ es un subgrupo de $G$, entonces:*

i) *$N(H)$ es un subgrupo de $G$.*
ii) *$N(H)$ es el mayor subgrupo de $G$ que contiene a $H$ como subgrupo normal.*

También se puede probar el siguiente resultado.

**Lema A.22.** *Sea $E$ un $G-$espacio, $x \in E$ y $H_x$ el subgrupo de isotropía correspondiente a $x$. Si $g \in G$, entonces*

$$g \in N(H_x) \text{ y solo si } H_x = H_{x \cdot g} \quad \textbf{(Relación de Isotropía)}.$$

Finalmente, usando las proposiciones A.16, A.17 y A.18, se puede dar una descripción del grupo de los automorfismos de un $G-$espacio por la derecha homogéneo en términos del subgrupo de isotropía de un punto del espacio.

**Proposición A.23.** *Sean $E$ un $G-$ espacio homogéneo y $x \in E$. Si $H_x$ es el subgrupo de isotropía correspondiente a $x$, entonces $N(H_x)/H_x$ es isomorfo al grupo de los automorfismos de $E$ y un isomorfismo $\psi : N(H_x)/H_x \to Aut(E)$ es dado por*

$$\psi(H_x g) = f_g, \text{ para } g \in N(H_x),$$

*donde $f_g \in Aut(E)$ está caracterizada por el hecho que*

$$f_g(x) = x \cdot g^{-1}.$$

# Bibliografía


[1] ABBENA, E. An example of an almost Kähler manifold which is not Kählerian. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*. 1984, nº 6 3 – A, pp. 383–392.

[2] ABIKOFF, W. The uniformization theorem. *The American Mathematical Monthly*. 1981, nº 8, pp. 574–592.

[3] AMORÓS, J., BURGER, M., CORLETTE, K., KOTSCHICK, D. & TOLEDO, D. *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*. Mathematical Surveys and Monographs, nº 44. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996.

[4] DÍAZ, F.J. & GARCÍA, J.M. *Curso de Topología General*. Madrid: Vision Net, 2005. ISBN: 84-9770-768-0

[5] DIEUDONNÉ, J. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*. New York: Birkhäuser Boston, 2009. Modern Birkhäuser Classics. ISBN: 978-0-8176-4906-7

[6] KOCH, R. *Classifying Covering Spaces* [en línea]. Oregón: University of Oregon, 2006. [consulta: 31 de mayo 2020]. Disponible en: https://pages.uoregon.edu/koch/math432/Classification.pdf.

[7] MACHO, M. *TOPOLOGÍA ALGEBRAICA* [en línea]. Vizcaya: Universidad del País Vasco – Euskal Herriko Unibertsitatea, 2013. [consulta: 16 de mayo 2020]. Disponible en: http://www.ehu.eus/~mtwmastm/TopAlg_Master_1314.pdf.

[8] MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1991. ISBN: 0-387-97430-X

[9] MUNKRES, J. R. "Classification of Covering Spaces". En MUNKRES, J. R. *Topology*. Second edition. New Jersey: Prentice Hall, 2000, pp. 477–500. ISBN: 0131816292

[10] ROTMAN, J. J. "Covering Spaces". En ROTMAN, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1988, pp. 272–311. ISBN: 978-1-4612-8930-2

[11] SRINIVASAN, G.K. *Lecture XX - Orbit Spaces* [en línea]. Bombay: Indian Institute of Technology Bombay, 2012. [consulta: 14 de mayo 2020]. Disponible en: https://nptel.ac.in/content/storage2/courses/111101002/downloads/lecture20.pdf.

[12] THURSTON, W. P. Some simple examples of symplectic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1976, nº 55, pp. 467–468.

[13] URBANO, F. *ESPACIOS RECUBRIDORES* [en línea]. Granada: Universidad de Granada, 2016. [consulta: 16 de mayo 2020]. Disponible en: https://www.ugr.es/~furbano/papers/Recubridores.pdf.

# Covering spaces

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

**Karim Omar Jerez Santana**
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100949155@ull.edu.es

## The aims of the undergraduate project thesis

- The existence and uniqueness of a simply connected covering space of a topological space $X$: **the universal covering space of $\mathbf{X}$.**
- The classification of the covering spaces of $X$ (up to isomorphisms) in terms of the conjugacy classes of subgroups of the fundamental group of $X$.

**Assumption:** All the topological spaces which are considered in this undergraduate project thesis are path-connected and locally path-connected.

## Fundamental group and covering spaces

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and $x_0 \in X$.

**Definition 1: Fundamental group of $X$ at $x_0$**

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] | \alpha : I = [0,1] \to X \text{ is a loop based at } x_0\}$$

$[\cdot]$ is the homotopy class relative to $\{0,1\}$.

**Definition 2: Simply connected space**

$(X, \mathcal{T})$ is **simply connected** iff $\pi_1(X, x)$ is trivial, $\forall x \in X$.

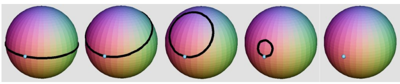


**Figure 1:** *$S^n$ is simply connected for n greater than 1.*

**Definition 3: The group homomorphism induced by a continuous map between topological spaces**

Let $f : Z \to Y$ be a continuous map such that $f(z_0) = y_0 \implies$

$$f_{*z_0} : \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\alpha] \to f_{*z_0}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

**Definition 4: Semilocally simply connected space**

$(X, \mathcal{T})$ is **semilocally simply connected** iff $\forall x \in X$, $\exists U \in \mathcal{T}$ (basic open) such that $x \in U$ and each loop in $U$ is null-homotopic in $X$.

**Definition 5: Covering space $\widetilde{X}$ of $X$**

Let $p : \widetilde{X} \to X$ be a continuous surjective map. $(\widetilde{X}, p)$ is a **covering space** of $X$ iff $\forall x \in X$, $\exists U \in \mathcal{T}$ (elementary neighborhood) arcwise-connected such that $x \in U$ and

$$p_{|\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$$

is a homeomorphism, where $\widetilde{U}$ is any path-connected component of $p^{-1}(U)$.

**Definition 6: Homomorphism between $(\widetilde{X}_1, p_1)$ and $(\widetilde{X}_2, p_2)$, two covering spaces of $X$**

It is a continuous map $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ such that $p_1 = p_2 \circ \varphi$. It is said to be an isomorphism iff $\exists\ \Psi : (\widetilde{X}_2, p_2) \to (\widetilde{X}_1, p_1)$ homomorphism such that $\varphi \circ \Psi = id_{\widetilde{X}_2}$ and $\Psi \circ \varphi = id_{\widetilde{X}_1}$.

## Fundamental results of the undergraduate project thesis

**Theorem 1: *(Uniqueness of Universal Cover)***

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space. If $(\widetilde{X}, p)$ is a simply connected covering space of $X \implies (\widetilde{X}, p)$ is unique (up to isomorphism).

**Sketch of the proof.** *It is just an application of the following result:*
*If $(\widetilde{X}_1, p_1)$ and $(\widetilde{X}_2, p_2)$ are two covering spaces of $X \implies (\widetilde{X}_1, p_1) \simeq (\widetilde{X}_2, p_2) \iff \forall \widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$, $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2 / p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2) = x$, we have that*

$$p_{1*\widetilde{x}_1}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \sim p_{2*\widetilde{x}_2}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2)).$$

*$\sim$ is the conjugacy relation.*

**Theorem 2: *(Existence of Universal Cover)***

If $(X, \mathcal{T})$ is a semilocally simply connected, connected and locally path-connected topological space $\implies (X, \mathcal{T})$ admits an universal covering space.

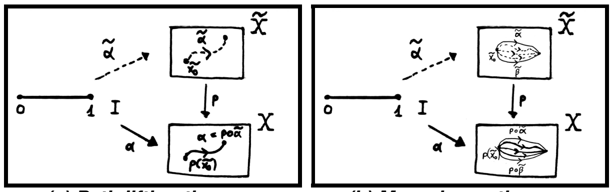
**Sketch of the proof.** *Let $x$ be a point in $X$. First, we define*

$$\widetilde{X} = \{[\alpha] \mid \alpha : I \to X \text{ is a path in } X \text{ y } \alpha(0) = x\}$$

*and*

$$p : \widetilde{X} \to X$$
$$[\alpha] \to p([\alpha]) = \alpha(1)\ .$$

*Then, in order to prove that $\widetilde{X}$ is the universal covering space of $X$, we will use the following theorems.*



**(a) *Path lifting theorem*** **(b) *Monodromy theorem***

**Example. *(*Lens space $L_p^{2n+1}$*)*.** $p, n \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $S_{\mathcal{C}}^{2n+1}$ the unit $2n+1$-sphere in $\mathcal{C}^{n+1}$, $L_p^{2n+1} = S_{\mathcal{C}}^{2n+1}/G$,$G \subseteq Homeom(S_{\mathcal{C}}^{2n+1})$.
$\varphi \in G \iff \exists k \in \{0, 1, \ldots, p-1\} / \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = e^{\frac{2\pi ki}{p}}(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$, $\forall (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \in S_{\mathcal{C}}^{2n+1} \implies S_{\mathcal{C}}^{2n+1}$ is the universal covering space of $L_p^{2n+1}$ and $\mathbb{Z}_p$ is the fundamental group.

**Theorem 3: *(Classification of Covering Spaces)***

Let $(X, \mathcal{T})$ be a connected, locally path-connected and semilocally simply connected topological space. If $x \in X \implies \exists$ a bijective map between conjugacy classes of subgroups of $\pi_1(X, x)$ and the covering spaces of $X$ (up to isomorphisms).

**Sketch of the proof.** *If $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ and $p(\widetilde{x}) = x$ then the correspondence*

$$(\widetilde{X}, p) \text{ is a covering space of } X \implies p_{*\widetilde{x}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \subseteq \pi_1(X, x),$$

*induces the bijective map.*

**Example. *(*A covering space of $KT$ [Kodaira-Thurston manifold]*)*.** $KT = \mathbb{R}^4/G$, $G \subseteq Homeom(\mathbb{R}^4)$.
$\mathcal{B} \in G \iff \exists (m, n, p, q) \in \mathbb{Z}^4 / \mathcal{B}(x, y, z, t) = (x+m, y+n, z+p+xn, t+q), \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \implies \mathbb{R}^4$ is the universal covering space of $KT$ and $G$ is the fundamental group.
$H = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is a subgroup of $G \implies \mathbb{R}^4/H \cong \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ is a covering space of $KT$.

## References

[1] MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1991.

[2] THURSTON, W. P. Some simple examples of symplectic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1976, nº 55, pp. 467–468.