

Curso 2004/05  
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/7  
I.S.B.N.: 84-7756-631-3

FRANCISCO ESPINOSA LARA  
Modos de oscilación en estrellas  
con simetría axial

Directores  
FERNANDO PÉREZ HERNÁNDEZ  
TEODORO ROCA CORTÉS



SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS  
Serie Tesis Doctorales

---

## Resumen

La rotación juega un papel importante en la estructura y evolución de las estrellas. La mayoría de las estrellas con tipos espectrales más tempranos que el Sol presentan altas velocidades de rotación. Por ello, si queremos aplicar las técnicas de la Astrosismología al estudio de estas estrellas, debemos comprender cómo afecta la rotación a las oscilaciones estelares. En la actualidad, existe una gran cantidad de observaciones de estrellas de tipo  $\delta$  Scuti en las cuales se han detectado frecuencias de oscilación, aunque su estructura no está aún bien entendida. Desafortunadamente, hasta la fecha los métodos disponibles para calcular las oscilaciones en estrellas en rotación se basan en técnicas perturbativas, las cuales solamente son válidas para velocidades de rotación bajas. El objetivo de esta tesis doctoral es la elaboración de un algoritmo matemático y el correspondiente código numérico (OMASS2d) para calcular los modos acústicos de oscilación en una estrella cuya estructura está fuertemente deformada por la rotación.

Partiendo de las ecuaciones de los fluidos en un caso de simetría axial y realizando ciertas aproximaciones (aproximación de Cowling, oscilaciones acústicas, despreciar la fuerza de Coriolis) se ha obtenido la ecuación de oscilación que gobierna el comportamiento de las perturbaciones adiabáticas en el interior de la estrella. Gracias a las aproximaciones realizadas, es posible escribir esta ecuación en términos de una única variable escalar que describe las autofunciones. A diferencia del caso sin rotación (con simetría esférica), la ecuación no es separable y es necesario resolver el problema de valores propios en un recinto bidimensional. Para la resolución se ha utilizado un método de diferencias finitas implícito, utilizando el método de Arnoldi implícitamente reinicializado para calcular los valores y vectores propios de la matriz asociada. Para comprobar la fiabilidad del código se han realizado varias pruebas en diversos escenarios para los cuales se puede conocer la solución de manera independiente, obteniendo en todos los casos resultados satisfactorios.

Utilizando este nuevo código se han calculado los modos de oscilación para dos conjuntos de modelos estelares. El primero está compuesto por modelos estelares con densidad uniforme, para los que se dispone de una amplia muestra de velocidades de rotación. El segundo lo componen tres modelos basados en una física realista con diferentes velocidades de rotación, calculados por A. Claret (Claret, 1999). Para ambos conjuntos se han obtenido conclusiones similares:

- La rotación tiene una influencia diferenciada en los modos según su tipo de simetría respecto al plano del ecuador. Los modos antisimétricos tienden a aumentar su frecuencia respecto a los simétricos.
- La estructura de los multipletes (igual  $n$  y  $l$ ) viene determinada principalmente por dos efectos. Un efecto de compresión, según el cual la distancia entre las frecuencias de los modos del multiplete disminuye hacia la parte superior de éste, y un efecto de apareamiento entre las frecuencias de modos consecutivos de distinta paridad.
- En la aproximación utilizada, las frecuencias de los modos de igual  $l$  y  $m$  están igualmente espaciadas en frecuencia.
- Se observan fenómenos de acoplamiento entre modos, más importantes para  $l$  bajo y  $n$  alto, que dificultan en gran medida su clasificación.

- La visibilidad de los modos está fuertemente afectada por el acoplamiento, siendo frecuente que la estructura superficial de los modos sea diferente a la que poseen en las zonas más internas de la estrella.

Todos los efectos descritos son más importantes en el rango de  $l$  bajo y alta frecuencia, acentuándose a medida que aumenta la velocidad de rotación. Estas conclusiones pueden ser de gran ayuda para la clasificación de los espectros de oscilaciones observados en estrellas con velocidades de rotación elevadas, como por ejemplo las estrellas de tipo  $\delta$  Scuti.

---

## Summary

Rotation plays an important role in the structure and evolution of stars. Most of stars with spectral types earlier than the Sun present high rotation velocities. For that reason, if we want to apply the techniques from Asteroseismology to the study of these stars, we must understand the effect of rotation in stellar oscillations. At the present time, there are many  $\delta$  Scuti stars whose oscillation frequencies has been detected by ground-based observations, although its structure is not still well understood. Unfortunately, to date the methods available for calculating the oscillations spectra in rotating stars are based on perturbative techniques, which are only valid for low speeds of rotation. The objective of this PhD thesis is the development of a mathematical algorithm and the corresponding numerical code (OMASS2d) to calculate the acoustic oscillation modes in a strongly deformed rotating star.

Starting from the equations of fluids in a case of axial symmetry and making certain approximations (Cowling approximation, acoustic oscillations, neglect Coriolis force) the oscillation equation has been obtained that governs the behavior of the adiabatic perturbations inside the star. With these approximations, it is possible to write this equation in terms of one scalar variable that describes the eigenfunctions. Unlike the case without rotation (with spherical symmetry), the equation is not separable and it is necessary to solve the eigenvalue problem in a bidimensional mesh. An implicit finite differences method has been used for the resolution, using the implicitly restarted Arnoldi method to calculate the eigenvalues and eigenvectors of the associate matrix. In order to verify the reliability of the code several tests have been made in different scenarios for which the solution can be known in a independent way, obtaining in all the cases satisfactory results.

Using this new code we have calculated the oscillation modes for two sets of stellar models. The first is composed of stellar models with uniform density, for which we have a wide sample of rotation velocities. The second set consist of three models based on realistic physics with different rotation velocities, calculated by A. Claret (Claret, 1999). For both sets we have obtained similar conclusions:

- The influence of rotation in the oscillation modes is different according to its type of symmetry with respect to the plane of the equator. The anti-symmetrical modes tend to increase their frequency with respect to the symmetrical ones.
- The structure of multiplets (equal  $n$  and  $l$ ) is determined mainly by two effects. An effect of compression, according to which the distance between the frequencies of the modes diminishes towards the superior part of the multiplet, and an effect of pairing between the frequencies of consecutive modes with different parity.
- In the approximation used, the frequencies of the modes of equal  $l$  and  $m$  are equally spaced in frequency.
- We observe the effect of coupling between oscillation modes, more important for low  $l$  and high  $n$ , making difficult their classification.



- The visibility of the modes is strongly affected by coupling, being frequent that the superficial structure of the modes is different from which they have in the most internal zones of the star.

All the described effects are more important for low  $l$  and high frequency. These conclusions can be helpful for the classification of the spectra of oscillations observed in stars with high rotation velocities, for example in  $\delta$  Scuti stars.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Astrosismología . . . . .	1
1.2	Rotación estelar . . . . .	3
1.3	Sismología de estrellas en rotación . . . . .	5
1.4	Astrosismología de estrellas de tipo $\delta$ Scuti . . . . .	7
1.5	Motivación y objetivos de este trabajo . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ecuación de Oscilación</b>	<b>9</b>
2.1	Planteamiento del problema . . . . .	9
2.2	Desarrollo de las ecuaciones . . . . .	11
2.3	Aproximaciones y ecuación final . . . . .	16
2.3.1	Condiciones de contorno . . . . .	17
2.4	Resumen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Método de Integración</b>	<b>21</b>
3.1	Malla de integración . . . . .	21
3.1.1	Coordenadas de integración . . . . .	22
3.1.2	Corrección de paso variable . . . . .	24
3.2	Método de integración implícito: Matriz de diferencias finitas . . . . .	27
3.2.1	Método de integración . . . . .	27
3.2.2	Aproximación de las derivadas . . . . .	28
3.2.3	Comportamiento en la frontera . . . . .	30
3.2.4	Proyección sobre funciones de Legendre . . . . .	32
3.2.5	Cálculo de los autovalores y autofunciones . . . . .	34
3.3	Implementación del código OMASS2d . . . . .	35
3.3.1	Generación de la matriz de diferencias finitas . . . . .	35
3.3.2	Método de Arnoldi . . . . .	36
3.4	Resumen . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Comprobación del Funcionamiento de OMASS2d</b>	<b>41</b>
4.1	Caso primero: Modelo con simetría esférica . . . . .	41
4.1.1	Dependencia angular . . . . .	42
4.1.2	Dependencia radial . . . . .	44

---

4.2	Caso segundo: Elipsoide homogéneo . . . . .	45
4.3	Caso tercero: Desplazamiento del origen de coordenadas en un modelo esférico (Caso general) . . . . .	47
4.4	Resumen . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Oscilaciones en Modelos Estelares en Rotación: Modelos con Densidad Uniforme</b>	<b>51</b>
5.1	Modelos con densidad uniforme . . . . .	51
5.2	Efecto de la rotación en los modos normales . . . . .	52
5.3	Ruptura de la degeneración en $m$ . . . . .	56
5.4	Acoplamiento de modos . . . . .	65
5.4.1	Definición de acoplamiento: Modos indistinguibles . . . . .	65
5.4.2	Acoplamiento por cruces prohibidos . . . . .	69
5.5	Resumen . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Oscilaciones en Modelos Estelares en Rotación: Modelos Realistas</b>	<b>73</b>
6.1	Modelos estelares en rotación . . . . .	73
6.2	Propiedades de los modos de oscilación . . . . .	74
6.3	Acoplamiento y clasificación . . . . .	77
6.3.1	Modos con $l$ alto . . . . .	77
6.3.2	Modos con $l$ bajo . . . . .	79
6.3.3	Modos con $n$ alto . . . . .	81
6.4	Equidistancia de las frecuencias . . . . .	84
6.5	Visibilidad de los modos . . . . .	86
6.6	Resumen . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Modelos en Rotación con Densidad Uniforme</b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Resultados del Cálculo de las Oscilaciones en Modelos Realistas</b>	<b>101</b>
B.1	Modelo 1 ( $\Omega = 0$ rd/s) . . . . .	102
B.2	Modelo 2 ( $\Omega = 1.18 \cdot 10^{-4}$ rd/s) . . . . .	111
B.3	Modelo 3 ( $\Omega = 1.81 \cdot 10^{-4}$ rd/s) . . . . .	122
<b>C</b>	<b>Cálculo del Elemento Diferencial de Superficie</b>	<b>133</b>
<b>D</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>137</b>

# 1

---

## Introducción

El principal objetivo de este trabajo es el estudio de las oscilaciones en estrellas en rotación. Con el objeto de proporcionar un marco histórico y técnico sobre los temas que se abordan en la tesis, durante el transcurso de este capítulo introduciremos brevemente los conceptos de rotación y oscilaciones estelares, así como la relación entre ellas. Al mismo tiempo se intentará proporcionar una visión del estado actual de los estudios relacionados con este campo de investigación y sus posibles aplicaciones, orientadas a mejorar nuestro entendimiento de la Física estelar, tanto desde el punto de vista teórico como observacional.

### 1.1 Astrosismología

Las estrellas son capaces de oscilar en una gran cantidad de modos normales como respuesta a las pequeñas perturbaciones que en ellas se produzcan. La frecuencia de estas oscilaciones o pulsaciones depende fuertemente de la estructura interna de las estrellas, de forma que su estudio puede proporcionar una valiosa herramienta para la Física estelar. La Astrosismología es la rama de la Astrofísica que trata de obtener información sobre los interiores estelares a partir del estudio de las oscilaciones.

Los primeros estudios sobre pulsaciones estelares se refieren a las variables de gran amplitud, como por ejemplo las cefeidas. Aunque originariamente las variaciones de brillo fueron atribuidas a efectos geométricos (Campbell, 1901; Russell, 1902), posteriormente se reconoció que, en la mayoría de los casos, la variabilidad era debida a pulsaciones intrínsecas de las estrellas. Más concretamente, las variaciones de las cefeidas pueden ser entendidas como pulsaciones del modo radial fundamental, en el cual la estrella se expande y se contrae manteniendo la simetría esférica. En 1914, Shapley se dió cuenta de que el periodo de esta oscilación está relacionado con la escala de tiempo dinámico de la estrella, que depende únicamente de su densidad media. Sin embargo, fue Sir Arthur Eddington, en 1918, quien sentó las bases de la teoría de oscilaciones lineales radiales y adiabáticas (Eddington, 1918a; Eddington, 1918b).

El nacimiento de la sismología moderna lo marca el descubrimiento de la oscilación de 5 minutos en el Sol (Leighton et al., 1962). Estas primeras observaciones eran de corta duración y estaban limitadas a una pequeña región de la superficie solar. Debido

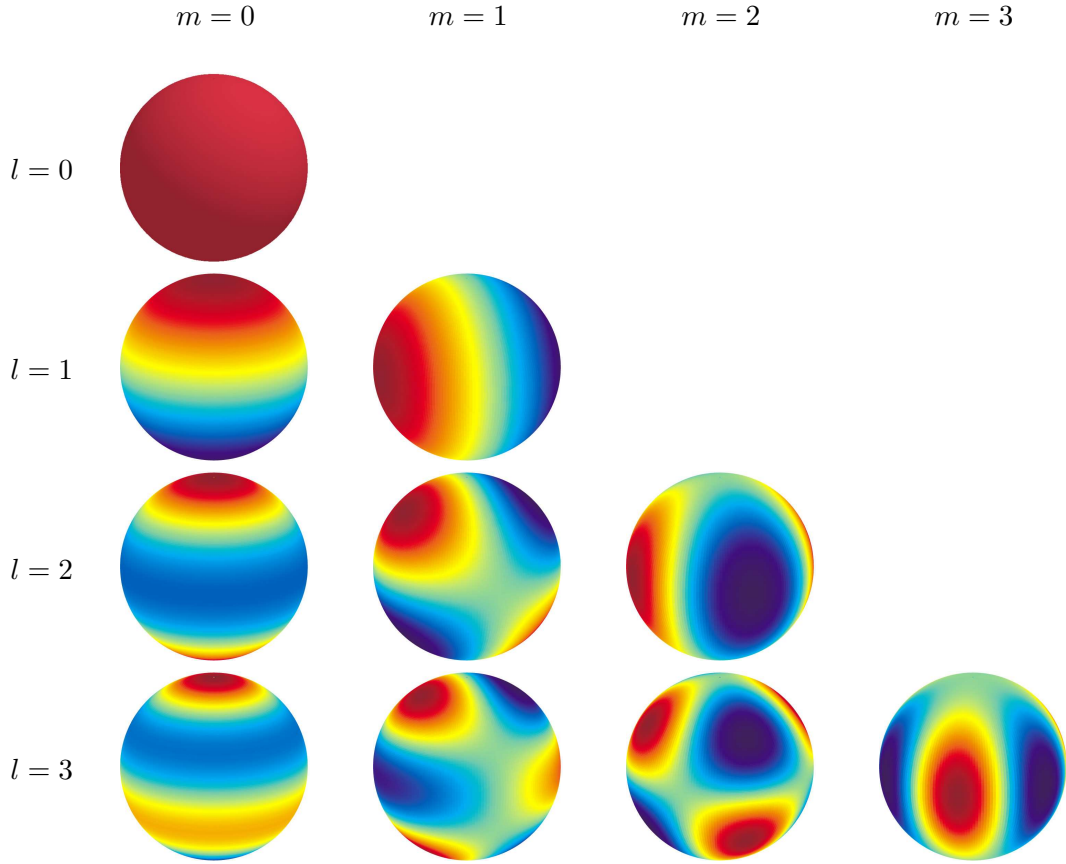


Figura 1.1: Representación gráfica de algunos armónicos esféricos. El color rojo corresponde a valores positivos y el azul a valores negativos.

a esto, la oscilación se interpretó inicialmente como un fenómeno local en la atmósfera del Sol producido por ondas inducidas por la convección (Bahng & Schwarzschild, 1963; Schatzman & Souffrin, 1967). No fue hasta que los datos con mayor resolución de Deubner (1975) y las observaciones de luz integrada sobre todo el disco solar de Claverie et al. (1979) estuvieron disponibles, cuando la oscilación de 5 minutos se interpretó como el resultado de la excitación de modos normales globales en el Sol, tanto radiales como no radiales. De hecho, el patrón de frecuencias, con picos regularmente espaciados coincidía bastante bien con las predicciones teóricas basadas en la teoría asintótica de modos acústicos de alto orden radial (Christensen-Dalsgaard & Gough, 1980).

De acuerdo con la teoría lineal de oscilaciones adiabáticas en estrellas con simetría esférica, la evolución temporal de una perturbación en el interior estelar se puede expresar como una superposición de modos normales, cuya distribución espacial y evolución temporal viene dada por una expresión de la forma:

$$f_{nlm}(r, \theta, \varphi, t) = f_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_{nlm}t}, \quad (1.1)$$

donde  $f$  es una perturbación escalar cualquiera (presión, densidad, ...),  $\omega$  es la frecuencia asociada al modo normal y  $r, \theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas esféricas habituales. La distribución

espacial de los modos de oscilación se puede separar en dos partes, una parte radial, cuya forma depende de la estructura de la estrella, y una parte angular que viene dada por los armónicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  (ver figura 1.1). Los índices  $n$ ,  $l$  y  $m$  caracterizan unívocamente a un modo. El índice  $l$  se conoce como grado angular y coincide con el número de líneas nodales en la superficie de la estrella. El índice  $m$  recibe el nombre de índice azimutal y representa el número de nodos que posee el modo normal en la dirección axial, siendo en todo caso  $|m| \leq l$ . Por último, al índice  $n$  se le denomina orden radial y está relacionado con el número de nodos en la dirección radial, aunque, para ciertos modos de oscilación, ambos valores pueden no coincidir. Los modos con distinto valor de  $n$  y  $l$  tendrán, en general, distinta frecuencia, sin embargo las frecuencias de los modos no dependen del índice azimutal  $m$ . Por tanto para un valor de  $n$  y  $l$  dado existen  $2l + 1$  modos con idéntica frecuencia.

Los modos de oscilación se suelen dividir en dos grupos, atendiendo a su naturaleza, pudiendo ser clasificados como modos p o modos g. Los modos g se producen a frecuencias bajas, por debajo de la denominada frecuencia de Brunt-Väisälä, que habitualmente se denota con la letra  $N$ . Están constituidos por ondas internas de gravedad, y se propagan únicamente en las zonas radiativas de las estrellas. Los modos p se producen a frecuencias más elevadas y son de naturaleza acústica. Estos modos son los únicos que se han podido detectar en el Sol hasta la fecha.

## 1.2 Rotación estelar

Las primeras evidencias de rotación en una estrella surgieron a comienzos del siglo XVII, gracias al descubrimiento de las manchas solares. Fue Johannes Fabricius, en 1611, el primero en documentar el movimiento de las manchas a lo largo del disco solar, que él interpretó como una consecuencia de la rotación del Sol. Sin embargo existían detractores de esta teoría, encabezados por Christopher Scheiner, quien argumentaba que las manchas eran pequeños planetas que giraban alrededor del Sol. Galileo Galilei en *Istoria e Dimostrazioni intorno alle Macchie Solari e loro Accidenti*, publicada en 1613, presentó sus propias observaciones, que apoyaban la teoría de rotación. Galileo observó que las manchas modificaban su velocidad y su forma cuando se aproximaban al limbo del Sol. Estas observaciones convencieron a los que apoyaban la hipótesis de los pequeños planetas y fue el propio Scheiner quien, en un trabajo publicado en 1630, presentó la primera medida del periodo de rotación solar de aproximadamente 27 días, además de ser el primero en detectar la rotación diferencial al observar que las manchas se movían con diferente velocidad a distintas latitudes.

La llegada de la espectroscopía significó una revolución en el estudio de las estrellas. En 1871, Hermann Vogel demostró que la rotación del Sol podía ser detectada midiendo el desplazamiento Doppler relativo de las líneas de absorción del espectro solar en los dos extremos del disco. Pocos años después, en 1877, William de Wiveleslie Abney propuso un método similar para medir la rotación en estrellas, observando el ensanchamiento de las líneas espectrales debido al efecto Doppler. Sin embargo, esta idea fue acogida con escepticismo en su época, ya que se dudaba de su viabilidad. Hubo que esperar hasta 1929, para que Otto Struve y Grigori Shajn midieran la velocidad de rotación de un cierto número de estrellas utilizando esta idea. Para ello desarrollaron un método gráfico por

el cual ajustaban el contorno observado de la línea espectral a uno calculado aplicando diferentes cantidades de ensanchamiento Doppler. Estas medidas indicaban que los valores de la velocidad proyectada ( $v \text{ sen } i$ ) se situaban en el rango entre 0 y 250 km/s, llegando ocasionalmente a los 400 Km/s. En 1930, Struve fue el primero en darse cuenta de que existe una fuerte correlación entre velocidad de rotación y tipo espectral, de forma que las estrellas de tipo O, B, A y F temprano suelen mostrar altas velocidades de rotación, mientras que en los tipos más tardíos la velocidad de rotación disminuye de forma drástica.

Tipo espectral	$M$ ( $M_{\odot}$ )	$R$ ( $R_{\odot}$ )	$v$ (km/s)	$\Omega$ ( $10^{-5}\text{s}^{-1}$ )	$P_{\text{rot}}$ (días)
O5	39.5	17.2	190	1.5	4.85
B0	17.0	7.6	200	3.8	1.91
B5	7.0	4.0	210	7.6	0.96
A0	3.6	2.6	190	10.0	0.73
A5	2.2	1.7	160	13.0	0.56
F0	1.75	1.3	95	10.0	0.73
F5	1.4	1.2	25	3.0	2.42
G0	1.05	1.04	12	1.6	4.55

Tabla 1.1: Velocidades medias de rotación de estrellas de la secuencia principal.

En la tabla 1.1 se muestran los valores típicos de la velocidad de rotación para estrellas de distinto tipo espectral, así como otras magnitudes relacionadas (McNally, 1965). En ella podemos ver que la velocidad ecuatorial es claramente mayor para tipos tempranos, con un máximo en torno al tipo B5, mientras que las estrellas de tipos más tardíos poseen velocidades mucho menores. Sin embargo, en lo que se refiere al periodo de rotación, la máxima rotación se desplaza a estrellas de tipo A y F temprano. Existe a su vez cierta dependencia entre la velocidad de rotación y la edad de las estrellas de tipo tardío, de forma que las estrellas más evolucionadas rotan más lentamente que las más jóvenes (Fukuda, 1982). Esto se explica debido a que las estrellas de tipo tardío, con envoltura convectiva, poseen vientos estelares asociados a campos magnéticos y episodios de eyección de masa que ejercen un frenado de la rotación de la estrella durante su evolución (Tassoul, 2000).

Como hemos visto, la rotación es un fenómeno importante para entender la estructura y evolución de las estrellas, tanto en las de tipo temprano, que suelen presentar velocidades de rotación elevadas, como en las de tipo tardío, cuya evolución está claramente influenciada por la interacción entre campo magnético y rotación. Para ilustrar la importancia de la rotación en función del tipo espectral, en la figura 1.2 se muestra el cociente entre la velocidad angular de rotación ( $\Omega$ ) y la velocidad crítica ( $\Omega_c$ ), para la cual la fuerza centrífuga compensa a la fuerza gravitatoria en el ecuador. En la figura se han utilizado los valores presentados en la tabla 1.1. Se puede ver que para tipos espectrales F y más tempranos el valor de  $\Omega$  es del orden de  $\Omega_c$ , lo cual tendrá un efecto importante en la estructura de la estrella.



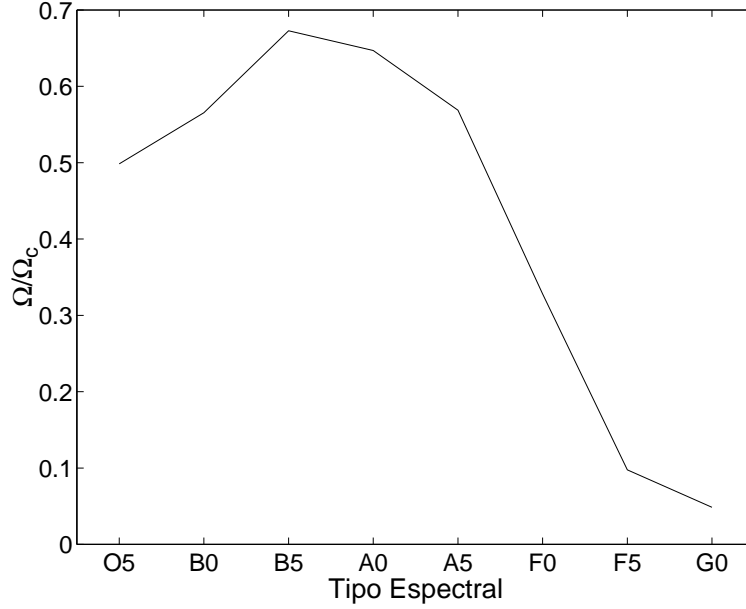


Figura 1.2: Cociente entre la velocidad angular de rotación  $\Omega$  y la velocidad crítica  $\Omega_c = \sqrt{\frac{8GM}{27R^3}}$  en función del tipo espectral.

### 1.3 Sismología de estrellas en rotación

La rotación tiene un efecto importante en la estructura de una estrella y, por tanto, en la propagación de las ondas en su interior. Esto tiene como efecto la modificación de las frecuencias de oscilación de la estrella respecto de las que tendría en ausencia de rotación.

Una primera aproximación surge al tener en cuenta que los modos que avanzan en la misma dirección en que rota la estrella ( $m$  positivo) verán incrementada su frecuencia, mientras que los que avanzan en dirección contraria ( $m$  negativo) sufrirán una disminución de la misma. Teniendo en cuenta este efecto, la frecuencia de un modo de oscilación determinado vendrá dada por:

$$\omega = \omega_0 + m\Omega, \quad (1.2)$$

siendo  $\omega_0$  la frecuencia del modo en ausencia de rotación y  $\Omega$  la velocidad de rotación de la estrella. La consecuencia más importante derivada de la ecuación (1.2) es la ruptura de la degeneración en  $m$  presente en los modos sin rotación. Sin embargo, esta descripción no tiene en cuenta el efecto de la fuerza de Coriolis en las oscilaciones. Un cálculo más detallado nos da la perturbación hasta primer orden en  $\Omega$  de las frecuencias de oscilación, de la forma (Cowling & Newing, 1949; Ledoux, 1951):

$$\omega^{(1)} = \beta_{nl}m\Omega, \quad (1.3)$$

con lo que sería  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ . El parámetro  $\beta_{nl}$  se determina a partir de la autofunción que describe el modo correspondiente sin rotación. Esta aproximación de primer orden sólo

es válida para estrellas con velocidades de rotación bajas y rotación uniforme.

Si consideramos que la estrella posee rotación diferencial, la aproximación de primer orden toma la forma (Hansen et al., 1977; Cuypers, 1980; Gough, 1981):

$$\omega_{nlm}^{(1)} = m \int_0^R \int_0^\pi K_{nlm}(r, \theta) \Omega(r, \theta) r dr d\theta, \quad (1.4)$$

donde las funciones  $K_{nlm}$  se denominan *kernels* y pueden ser calculadas a partir de las autofunciones de la estrella sin rotación. La inversión de la expresión (1.4) usando las frecuencias de oscilación observadas en el Sol ha permitido medir de forma directa la velocidad de rotación en el interior solar en función de la profundidad y la latitud, lo cual no es posible con ninguna otra técnica de observación. Usando este procedimiento se ha observado que el núcleo del Sol rota como un sólido rígido (Eff-Darwich et al., 2002) y se ha descubierto la existencia de una región estrecha donde se produce una gran cizalladura denominada *tacoclina* y cuya posición coincide con la base de la zona de convección solar (Goode & Dziembowski, 1991; Spiegel & Zahn, 1992).

En la aproximación de primer orden, los multipletes resultantes son simétricos, sin embargo, esta simetría desaparece cuando se extiende el cálculo hasta segundo orden en  $\Omega$  (Saio, 1981; Dziembowski & Goode, 1992). En el caso de rotación uniforme, la corrección de segundo orden se puede determinar usando la siguiente expresión:

$$\omega^{(2)} = 2\pi(X_{nl} + m^2 D_{nl}) \frac{\Omega^2}{\omega^{(0)}}, \quad (1.5)$$

donde el parámetro  $D_{nl}$  es responsable de la ruptura de la simetría y el parámetro  $X_{nl}$  produce un desplazamiento global del multiplete.

Es posible obtener una corrección de hasta tercer orden utilizando un modelo con rotación esféricamente simétrico llamado *modelo pseudo-rotante* (Soufi et al., 1998). Las frecuencias calculadas a partir de este modelo incluirán el efecto de la parte esféricamente simétrica de la fuerza centrífuga. Para obtener los efectos de la fuerza de Coriolis y la parte no esféricamente simétrica de la fuerza centrífuga se usa un formalismo de segundo orden. Debido a que las correcciones obtenidas dependen implícitamente de  $\Omega^3$ , éste se considera un método de tercer orden. El efecto de tercer orden predice por primera vez el acoplamiento entre los modos de oscilación cuando éstos poseen frecuencias cercanas.

Los métodos anteriores son de naturaleza perturbativa y hacen uso de las autofunciones obtenidas para un modelo estelar esféricamente simétrico, relacionadas con los armónicos esféricos. Sin embargo, estos métodos perturbativos no pueden dar cuenta de forma completa del achatamiento de las estrellas con velocidades de rotación elevadas. Este achatamiento modifica la geometría de la cavidad de resonancia en la que se propagan los modos, produciendo un acoplamiento importante entre la parte radial y la parte angular de las autofunciones. Por todo esto, para calcular correctamente las frecuencias de oscilación en una estrella en rotación claramente deformada, es necesario resolver el problema completo en un recinto bidimensional, lo cual no se ha realizado con éxito hasta la fecha debido a su complejidad. Este problema constituye el principal objetivo de la presente tesis doctoral, en la que se calculan las oscilaciones de modelos estelares deformados con rotación resolviendo las ecuaciones de los fluidos en un recinto bidimensional bajo ciertas aproximaciones.

## 1.4 Astrosismología de estrellas de tipo $\delta$ Scuti

Las estrellas de tipo  $\delta$  Scuti son estrellas pulsantes situadas en la parte baja de la franja de inestabilidad de las cefeidas del diagrama HR, en el punto donde ésta intercepta a la secuencia principal o abandonando la secuencia principal hacia la rama de gigantes. Son estrellas de masa comprendida entre 1.5 y 2.5  $M_{\odot}$ , con tipos espectrales que van desde A2 a F5. Actualmente se conoce un gran número de estas estrellas, en el catálogo revisado de estrellas  $\delta$  Scuti (Rodríguez et al., 2000), hasta enero de 2000 habían sido incluidas 636 estrellas, muchas de ellas descubiertas recientemente. El catálogo cuenta además con 1149 referencias relacionadas con estrellas  $\delta$  Scuti, lo que demuestra que el estudio de estas estrellas representa un campo de investigación bastante activo actualmente.

Las estrellas  $\delta$  Scuti suelen presentar periodos de oscilación entre 0.02 y 0.25 días con amplitudes que suelen ser de unas pocas milimagnitudes, lo que hace que puedan ser detectadas con observaciones fotométricas realizadas desde tierra. Algunas de estas estrellas son pulsadores puramente radiales, sin embargo, la mayoría oscilan en una gran cantidad de modos no radiales. Las oscilaciones observadas fotométricamente corresponden a modos p de bajo grado ( $l \leq 3$ ) y orden entre  $n = 0$  y  $n \sim 7$  (Breger, 2000), aunque estudios espectroscópicos han revelado la existencia de modos no radiales de hasta  $l = 20$  (Kennelly et al., 1998). Estas estrellas suelen presentar además altas velocidades de rotación, con valores de la velocidad proyectada ( $v \sin i$ ) típicamente situados entre 100 y 250 km/s, en muchos casos cercanos a la velocidad crítica. Todo esto convierte a las estrellas  $\delta$  Scuti en el candidato ideal para estudiar la interacción de la rotación en los modos normales de oscilación.

La observación de los modos de oscilación en las estrellas  $\delta$  Scuti ha experimentado un gran avance en los últimos años gracias a la puesta en marcha de campañas de observación multisitio, que permiten la observación de una misma estrella desde varios lugares, eliminando así las interrupciones temporales en la curva de luminosidad. Entre estas campañas podemos destacar DSN (Delta Scuti Network; Breger et al., 1995), STACC (Small Telescope Array with CCD Cameras; Frandsen et al., 1996), STEPHI (Stellar Photometry International; Michel et al., 1995) y WET (Whole Earth Telescope; Nather et al., 1990). De esta forma se han podido detectar un elevado número de modos en algunas estrellas, por ejemplo, hasta 34 frecuencias en FG Vir (Breger et al., 1999). Sin embargo, los estudios encaminados a identificar y clasificar las frecuencias observadas no han producido resultados concluyentes, en gran parte debido a que la estructura de los espectros observados no coincide con las predicciones teóricas. Esto es una prueba de que los métodos perturbativos utilizados actualmente para el cálculo de las frecuencias no funcionan bien para estrellas con altas velocidades de rotación, como son las  $\delta$  Scuti.

## 1.5 Motivación y objetivos de este trabajo

La rotación es un fenómeno muy común en las estrellas, y que además juega un papel decisivo en su evolución. El uso de las técnicas astrosismológicas en estrellas en rotación podría suponer un avance importante en nuestro conocimiento de la estructura de estas estrellas. Hoy en día se conocen estrellas en rotación, como son las  $\delta$  Scuti, que oscilan en una gran cantidad de modos no radiales que además pueden ser observados desde

tierra con pequeños telescopios. Esto ha hecho que en los últimos años surjan numerosas campañas de observación dedicadas a este fin, gracias a las cuales hemos obtenido espectros de oscilación de un elevado número de estrellas. El problema radica en que no disponemos de ninguna herramienta teórica efectiva para comprender la estructura de los espectros, ya que los métodos perturbativos utilizados actualmente no funcionan bien en estrellas con rotación elevada. El objetivo de este trabajo es, precisamente, la elaboración de un código informático que nos permita calcular los modos acústicos de oscilación que se producen en estrellas en rotación, lo que proporcionará una valiosa herramienta en el campo de la Astrosimología.

# 2

---

## Ecuación de Oscilación

En el presente capítulo se plantearán las ecuaciones que describen las pequeñas oscilaciones de una estrella con simetría axial. Para ello, en primer lugar (§2.1), se hará una descripción del problema a resolver, enunciando las características de los objetos a los que va dirigido. En §2.2 se llevará a cabo la aproximación de pequeñas oscilaciones en las ecuaciones de los fluidos para obtener una expresión, en la cual se realizarán ciertas aproximaciones (§2.3) con el fin de obtener la ecuación de oscilación que intentará resolverse en los próximos capítulos. En §2.3.1 se discutirán las condiciones de contorno que se aplicarán al problema. Por último, en §2.4 se hace un resumen del capítulo.

### 2.1 Planteamiento del problema

Las estrellas, como cualquier sistema mecánico, responden a las pequeñas perturbaciones que en ellas se producen de diversas maneras: la mayor parte serán amortiguadas, pero algunas de ellas, las que correspondan con frecuencias de resonancia de la estrella, darán lugar a una oscilación que permanecerá excitada durante un periodo más largo de tiempo. Nos interesa calcular precisamente estas frecuencias de resonancia.

Para empezar, describiremos las características que deben cumplir los objetos a los que se les aplicará el cálculo, que son las siguientes:

- **Equilibrio hidrostático.** Más concretamente, la estrella se encontrará en situación estacionaria, es decir, sus propiedades no deben variar significativamente en la escala de tiempo de las oscilaciones. Por lo que respecta a la evolución esto es cierto prácticamente durante toda la vida de las estrellas.
- **Simetría axial.** La estrella debe poseer un eje de simetría, de forma que sus propiedades en un plano que corte perpendicularmente a este eje sólo dependen de la distancia al mismo. De esta forma el problema se reduce a un problema bidimensional. Nótese que no es necesario que exista simetría respecto al ecuador<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Simetría bipolar respecto a un plano perpendicular al eje de simetría axial del objeto.

- **Rotación rígida.** La estrella debe rotar como un sólido rígido (velocidad angular  $\Omega$  constante) en torno a un eje que llamaremos eje de rotación, siendo éste el único movimiento que posea el fluido. El eje de rotación debe coincidir con el eje de simetría, lo cual será el caso más normal, ya que es precisamente la rotación la que hace que la estrella pierda la simetría esférica.

El segundo supuesto (simetría axial) estará asegurado en la mayoría de las estrellas aisladas, o bien que posean alguna compañera lo suficientemente lejana. El tratamiento será válido para cualquier estrella con simetría axial, independientemente de que la pérdida de simetría esférica sea causada por la rotación o por cualquier otro fenómeno.

Aunque en general las estrellas pueden poseer rotación diferencial, se puede esperar que las variaciones respecto a una rotación rígida no sean demasiado grandes. La difusión del momento angular tiende a homogeneizar la rotación en el interior de las estrellas a lo largo de su evolución. Por ejemplo, en el Sol, se ha observado que la rotación es prácticamente rígida en el interior, mientras que en la envoltura, que sí presenta rotación diferencial, las desviaciones no son muy superiores al 10 % (Eff-Darwich et al., 2002).

Para representar las oscilaciones se utilizará un sistema de coordenadas esféricas (figura 2.1), en el que la coordenada  $r$  representa la distancia al origen de coordenadas o centro<sup>2</sup> de la estrella,  $\theta$  indica la colatitud medida desde el eje polar y  $\varphi$  es el ángulo azimutal.

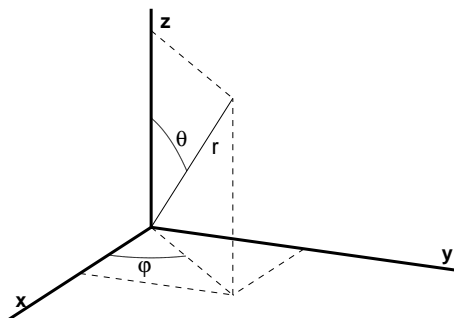


Figura 2.1: Coordenadas esféricas.

Si hacemos coincidir el eje polar ( $z$ ) con el eje de simetría de la estrella, las magnitudes que definen la estructura de la estrella en equilibrio serán función únicamente de  $r$  y  $\theta$ .

El esquema a seguir para resolver el problema será el habitual para el cálculo de pequeñas oscilaciones. Se plantearán las ecuaciones generales que describen el comportamiento del fluido en el interior de la estrella, una solución particular de estas ecuaciones vendrá dada por la estructura de la estrella en equilibrio (modelo estelar). Se perturbará la estructura en equilibrio introduciéndola en las ecuaciones, que se aproximarán quedándonos con los términos lineales en la perturbación. Añadiendo las condiciones de contorno apropiadas, el problema se reduce a un problema de valores propios. Calculando los valores propios obtenemos las frecuencias de resonancia ( $\omega$ ), mientras que las autofunciones nos darán la distribución espacial de la perturbación.

<sup>2</sup>La definición de centro no está ligada a ninguna consideración geométrica ni de otra índole. La única restricción es que se encuentre sobre el eje de simetría.

## 2.2 Desarrollo de las ecuaciones

El comportamiento general de los fluidos viene determinado por un conjunto de ecuaciones, que expresaremos de la siguiente forma (Unno et al., 1989):

- Ecuación de continuidad o de conservación de la masa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

- Ecuación de movimiento o de conservación del momento lineal.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \phi \quad (2.2)$$

- Ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio.

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho \quad (2.3)$$

En las ecuaciones anteriores  $\rho$  representa la densidad,  $p$  la presión,  $\mathbf{v}$  la velocidad y  $\phi$  el potencial gravitatorio. Se ha supuesto que el fluido es ideal y que la única fuerza de volumen que existe es la fuerza gravitatoria creada por el propio cuerpo. El modelo estelar en equilibrio será una solución particular de estas ecuaciones para el caso estacionario ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ). En adelante denotaremos las variables referidas al modelo en equilibrio con un subíndice 0. La velocidad en el equilibrio, dado que hemos exigido rotación rígida, tendrá la forma:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, \theta) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.4)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular y  $\mathbf{e}_\varphi$  es un vector unitario en la dirección azimutal.

Introducimos una pequeña perturbación en el equilibrio, que denotaremos con variables primadas:

$$\begin{cases} \rho &= \rho_0 + \rho' \\ p &= p_0 + p' \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \\ \phi &= \phi_0 + \phi' \end{cases} \quad (2.5)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) y quedándonos sólo con los términos en primer orden de la perturbación, por considerar que ésta es mucho menor que la magnitud de la variable correspondiente en el equilibrio<sup>3</sup>, tenemos que:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho' \mathbf{v}_0) + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}') = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}' + \rho_0 (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p' - \rho_0 \nabla \phi' + \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \rho', \quad (2.7)$$

$$\Delta \phi' = 4\pi G \rho', \quad (2.8)$$

<sup>3</sup>Esto es cierto para  $\rho$ ,  $p$  y  $\phi$ , sin embargo la condición para la perturbación de la velocidad no es  $v' \ll v_0$ , sino  $v' \ll c$ , siendo  $c$  la velocidad del sonido en el medio.



donde se ha tenido en cuenta que las magnitudes en el equilibrio cumplen (2.1), (2.2) y (2.3).

Antes de continuar con el desarrollo de las ecuaciones introduciremos algunos conceptos importantes para el cálculo. Las simetrías presentes en el problema y la linealidad de las ecuaciones nos permiten introducir algunos números cuánticos basados en un desarrollo de Fourier de las soluciones. Los coeficientes de las ecuaciones no dependen del tiempo ( $t$ ) ni de la coordenada azimutal ( $\varphi$ ), por lo que podremos expresar una perturbación cualquiera ( $f'$ ) como una superposición lineal de funciones de la forma<sup>4</sup>:

$$f'(r, \theta, \varphi, t) = f'(r, \theta) e^{i(-\omega t + m\varphi)}, \quad (2.9)$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria,  $\omega$  representa la frecuencia de la oscilación y  $m$ , por continuidad de la solución, debe ser un número entero. De esta forma, las derivadas temporal y azimutal se reducen a:

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = -i\omega f' \quad ; \quad \frac{\partial f'}{\partial \varphi} = imf' \quad (2.10)$$

Introduciremos el desplazamiento lagrangiano  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)$ , que representa el desplazamiento que experimenta un elemento de fluido que en el equilibrio se encontraría en el punto  $\mathbf{r}$ . La relación entre  $\mathbf{v}'$  y  $\boldsymbol{\xi}$  no es trivial cuando existe una cierta velocidad en el equilibrio  $\mathbf{v}_0$ . Empecemos por introducir la perturbación lagrangiana de la velocidad<sup>5</sup>:

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  es la perturbación de velocidad que tiene un elemento de fluido que en equilibrio estaría situado en el punto  $\mathbf{r}$ , y que por tanto se encuentra en  $\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}$ . Para calcular la perturbación euleriana debemos hallar la velocidad del elemento de fluido que se encuentra en  $\mathbf{r}$  (Unno et al., 1989):

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

y por tanto:

$$\mathbf{v}' = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \quad (2.13)$$

Teniendo en cuenta (2.4) y (2.10) y realizando algunos cálculos la expresión (2.13) se reduce a:

$$\mathbf{v}' = -i(\omega - m\Omega) \boldsymbol{\xi} \quad (2.14)$$

Volvamos ahora a la ecuación de continuidad (2.6). Usando (2.10) y (2.14):

$$-i\omega\rho' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho' + \rho' \operatorname{div} \mathbf{v}_0 - i(\omega - m\Omega) \operatorname{div}(\rho_0 \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad (2.15)$$

<sup>4</sup>Por conveniencia se usará el mismo símbolo para la perturbación y para su dependencia en  $(r, \theta)$ .

<sup>5</sup>La perturbación lagrangiana de la velocidad coincide con la derivada material o lagrangiana del desplazamiento  $\boldsymbol{\xi}$  respecto al tiempo  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ .

y teniendo en cuenta la forma de  $\mathbf{v}_0$ , ecuación (2.4), vemos que  $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$ , con lo que:

$$-i(\omega - m\Omega)\rho' - i(\omega - m\Omega)\text{div}(\rho_0\xi) = 0 \quad (2.16)$$

Introducimos la variable  $\zeta$ , definida como:

$$\zeta = \rho_0\xi, \quad (2.17)$$

con lo cual la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\rho' = -\text{div } \zeta \quad (2.18)$$

Continuaremos con la ecuación de movimiento. Partiendo de (2.7) e introduciendo (2.14), (2.4) y (2.10):

$$\begin{aligned} -\rho_0\omega(\omega - m\Omega)\xi - i\rho_0(\omega - m\Omega)\Omega r \text{sen } \theta (\mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla)\xi - \\ - i\rho_0(\omega - m\Omega)(\xi \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = -\nabla p' - \rho_0\nabla\phi' + \frac{\nabla p_0}{\rho_0}\rho' \end{aligned} \quad (2.19)$$

Desarrollando algunos términos, en particular teniendo en cuenta que:

$$(\mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla)\xi = \frac{1}{r \text{sen } \theta} (im\xi + \mathbf{e}_z \times \xi), \quad (2.20)$$

$$(\xi \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = \Omega\mathbf{e}_z \times \xi, \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{e}_z$  es un vector unitario en la dirección axial (eje de rotación). Sustituyendo éstos en la ecuación (2.19), haciendo  $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$  e introduciendo (2.17):

$$-(\omega - m\Omega)^2\zeta - 2i(\omega - m\Omega)\mathbf{\Omega} \times \zeta = -\nabla p' - \rho_0\nabla\phi' + \frac{\nabla p_0}{\rho_0}\rho' \quad (2.22)$$

En la ecuación de Poisson (2.8) no se introducirán modificaciones.

Las ecuaciones (2.18), (2.22) y (2.8) forman un sistema de 5 ecuaciones escalares con 6 incógnitas ( $\rho'$ ,  $p'$ ,  $\phi'$  y las 3 componentes de  $\zeta$ ), por tanto necesitamos otra ecuación para cerrar el sistema. La nueva ecuación surge de considerar el balance energético en las oscilaciones. Para ello supondremos que éstas tienen naturaleza adiabática, es decir que los elementos de fluido desplazados de su posición de equilibrio no intercambian calor con el fluido circundante. Esto es válido en general, ya que el periodo de las oscilaciones será del orden de la escala de tiempo dinámica de la estrella ( $\tau_{\text{din}}$ ), mucho menor que la escala de ajuste térmico o de Kelvin-Helmholtz ( $\tau_{\text{KH}}$ ), es decir:

$$\tau_{\text{din}} \sim \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} = 0.443 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2} \text{ horas}, \quad (2.23)$$

$$\tau_{\text{KH}} \sim \frac{GM^2}{RL} = 3.1 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-1} \text{ años}, \quad (2.24)$$

y tomando, para estrellas de la secuencia principal,  $L \propto M^4$  y  $R \propto M^{0.6}$ :

$$\frac{\tau_{\text{din}}}{\tau_{\text{KH}}} \sim 1.6 \times 10^{-12} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \quad (2.25)$$

Sin embargo, para frecuencias muy altas, la energía del modo se concentra cerca de la atmósfera de la estrella, donde la escala de ajuste térmico se reduce, llegando a ser del orden o incluso menor que la escala dinámica de tiempo, siendo menos adecuada para estos modos la hipótesis de adiabaticidad.

Bajo esta hipótesis, las perturbaciones lagrangianas de la presión ( $\delta p$ ) y la densidad ( $\delta \rho$ ) estarán relacionadas de la siguiente forma:

$$\frac{\delta p}{p_0} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (2.26)$$

siendo  $\Gamma_1$  el primer coeficiente adiabático:

$$\Gamma_1 = \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right|_s, \quad (2.27)$$

donde el subíndice  $s$  indica que la derivada se efectúa a entropía ( $s$ ) constante. La relación entre la perturbación lagrangiana y euleriana de la presión viene dada por<sup>6</sup>:

$$\delta p = p' + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 \quad (2.28)$$

y análogamente para la densidad. Usando esta relación y la definición de  $\boldsymbol{\zeta}$ , ecuación (2.17):

$$\frac{p'}{c^2} = \rho' + \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{A}, \quad (2.29)$$

en donde se han introducido las definiciones de  $c^2$  (cuadrado de la velocidad del sonido) y  $\mathbf{A}$ , magnitud relacionada con la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N$ ) por  $N^2 = \rho_0^{-1} \nabla p_0 \cdot \mathbf{A}$ .

$$c^2 = \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{A} = \nabla \ln \rho_0 - \frac{1}{\Gamma_1} \nabla \ln p_0 \quad (2.31)$$

---

<sup>6</sup>Para un magnitud cualquiera  $f$ , la perturbación lagrangiana se calcula de la forma:

$$\delta f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) - f_0(\mathbf{r}),$$

como  $f(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) = f(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f_0(\mathbf{r})$  (hasta primer orden en  $\boldsymbol{\xi}$ ) y  $f'(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - f_0(\mathbf{r})$ :

$$\delta f(\mathbf{r}) = f'(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f_0(\mathbf{r})$$

En un fluido en el que no exista gradiente de composición química, la magnitud  $\mathbf{A}$  estará relacionada con el gradiente de entropía de la siguiente forma<sup>7</sup>:

$$\mathbf{A} = -\frac{\chi_T}{c_p \chi_\rho} \nabla s, \quad (2.32)$$

donde  $c_p$  es el calor específico a presión constante  $c_p = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p$  y las magnitudes  $\chi_\rho = \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right|_T$  y  $\chi_T = \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right|_\rho$  dependen de la ecuación de estado. Si la composición química de la estrella no es uniforme, aparecerá un término adicional en (2.32) dependiente del gradiente del peso molecular medio  $\mu$ .

Resumiendo, el problema queda descrito por el sistema de ecuaciones que se presenta a continuación.

$$\begin{cases} \rho' = -\operatorname{div} \zeta \\ -(\omega - m\Omega)^2 \zeta - 2i(\omega - m\Omega) \mathbf{\Omega} \times \zeta = -\nabla p' - \rho_0 \nabla \phi' + \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \rho' \\ \frac{p'}{c^2} = \rho' + \zeta \cdot \mathbf{A} \\ \Delta \phi' = 4\pi G \rho' \end{cases} \quad (2.33)$$

Este conjunto de ecuaciones representa el problema completo que deberíamos resolver para obtener los modos de oscilación en estrellas con simetría axial. Sin embargo la resolución de las ecuaciones tal como se han planteado es bastante compleja, por lo que se hace conveniente realizar algunas aproximaciones con el objeto de simplificar el cálculo. En concreto nos centraremos en el cálculo de los modos de oscilación acústicos o modos  $p$ , para lo cual efectuaremos las simplificaciones pertinentes, que se detallan en la siguiente sección.

<sup>7</sup>Según la teoría de la termodinámica es posible encontrar una relación de la forma  $s = s(p, \rho)$ , por tanto podemos escribir:

$$ds = \left. \frac{\partial s}{\partial \ln \rho} \right|_p d \ln \rho + \left. \frac{\partial s}{\partial \ln p} \right|_\rho d \ln p$$

donde

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \ln p} \right|_\rho = -\left. \frac{\partial s}{\partial \ln \rho} \right|_p \left. \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln p} \right|_s = -\left. \frac{\partial s}{\partial \ln \rho} \right|_p \frac{1}{\Gamma_1}$$

y

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \ln \rho} \right|_p = \left. \frac{\partial s}{\partial \ln T} \right|_p \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right|_p = -\left. \frac{\partial s}{\partial \ln T} \right|_p \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right|_\rho \left. \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right|_T = -c_p \frac{\chi_\rho}{\chi_T}$$

de forma que

$$ds = -c_p \frac{\chi_\rho}{\chi_T} \left( d \ln \rho - \frac{1}{\Gamma_1} d \ln p \right)$$

y por tanto:

$$\nabla s = -c_p \frac{\chi_\rho}{\chi_T} \mathbf{A}$$

de donde se obtiene (2.32).

### 2.3 Aproximaciones y ecuación final

Una aproximación muy utilizada en el cálculo de pequeñas oscilaciones consiste en despreciar el efecto del desplazamiento de masas en el campo gravitatorio de la estrella ( $\phi' = 0$ ), conocida con el nombre de aproximación de Cowling. Esta aproximación nos permite agrupar el sistema en una sola ecuación, eliminando también la ecuación de Poisson, que bajo este supuesto carece de sentido. Tras unas sencillas operaciones, el sistema (2.33) puede ponerse como:

$$\begin{aligned} c^2 \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}) + \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} - c^2 \nabla (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{A}) - \nabla c^2 (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{A}) = \\ = -(\omega - m\Omega)^2 \boldsymbol{\zeta} - 2i(\omega - m\Omega) \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\zeta} \end{aligned} \quad (2.34)$$

La ecuación anterior es una ecuación de valores propios, aunque no está expresada de la forma habitual. Sin embargo, introduciendo una nueva magnitud  $\boldsymbol{\nu}$ , obtenemos la ecuación:

$$\mathcal{L}_1 \boldsymbol{\zeta} + \mathcal{L}_2 \boldsymbol{\nu} = -i(\omega - m\Omega) \boldsymbol{\nu} \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\nu} = -i(\omega - m\Omega) \boldsymbol{\zeta}, \quad (2.36)$$

que sí está expresada del modo tradicional. Los operadores  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  se definen como:

$$\mathcal{L}_1 \boldsymbol{\zeta} = c^2 \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}) + \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta} - c^2 \nabla (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{A}) - \nabla c^2 (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.37)$$

$$\mathcal{L}_2 \boldsymbol{\nu} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\nu} \quad (2.38)$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) forman un sistema de 2 ecuaciones vectoriales (6 ecuaciones escalares) de valores propios. En principio debería ser posible resolverlas sin necesidad de hacer más aproximaciones, sin embargo el alto número de variables involucradas y la dificultad de expresar las condiciones de contorno de forma apropiada aumentan considerablemente la complejidad del problema. Esto nos ha llevado a la decisión de realizar algunas aproximaciones más con el fin de simplificar la ecuación y posponer la resolución exacta de la ecuación (2.34) para futuros trabajos.

La siguiente aproximación que utilizaremos será sustituir la ecuación del balance energético (2.29) por otra forma más simple:

$$p' = c^2 \rho' \quad (2.39)$$

Para obtener esta expresión hemos despreciado el efecto de los gradientes asociados a la magnitud  $\mathbf{A}$  en el balance energético. Esto puede ser válido bajo dos supuestos diferentes. El primero sería el caso de estratificación adiabática, en el cual el gradiente de entropía se anula y por tanto  $\mathbf{A} = 0$  (siempre que el gradiente de composición química no sea muy importante), lo cual ocurre, por ejemplo, en las zonas convectivas de las estrellas. El segundo supuesto es que la longitud de onda del modo que queremos calcular sea mucho menor que la escala de longitud característica de variación de la presión y la densidad en

el equilibrio, de forma que la onda resultante no “nota” la estratificación del medio de forma local. Esto ocurrirá cuando la frecuencia sea lo suficientemente alta. Realizando esta aproximación ( $\mathbf{A} \approx 0$ ), estamos anulando a su vez la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N$ ), lo que conlleva la no aparición de ondas internas de gravedad.

Otra aproximación que se utilizará será despreciar el efecto de la fuerza de Coriolis, último término en (2.34), en las oscilaciones. La fuerza de Coriolis es responsable de las llamadas ondas inerciales. Al igual que ocurre con las ondas internas de gravedad, la frecuencia de las ondas inerciales está siempre por debajo de una cierta cota, que en esta ocasión viene dada por la velocidad de rotación de la estrella ( $\Omega$ ) (Unno et al., 1989), por tanto, al igual que en el caso anterior, esta aproximación sólo afectará de forma sustancial a modos con frecuencias por debajo de la cota.

Teniendo en cuenta estas aproximaciones, la ecuación (2.34) queda como sigue:

$$c^2 \nabla (\operatorname{div} \zeta) + \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \operatorname{div} \zeta = -(\omega - m\Omega)^2 \zeta \quad (2.40)$$

Tomando la divergencia de esta expresión y definiendo  $\psi = \operatorname{div} \zeta$ :

$$c^2 \Delta \psi + \left( 2\nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \cdot \nabla \psi + \left[ \Delta c^2 - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \right] \psi = -(\omega - m\Omega)^2 \psi \quad (2.41)$$

De esta forma hemos reducido el problema a una ecuación escalar de valores propios, que depende de una única variable  $\psi$ . Añadiendo condiciones de contorno adecuadas, que se verán en §2.3.1 tendremos el problema completo que se resolverá de forma numérica en el próximo capítulo.

Es posible recuperar las variables originales a partir de la nueva variable  $\psi$  sin mucho esfuerzo adicional. Atendiendo a (2.18) es fácil ver que:

$$\rho' = -\psi \quad (2.42)$$

Además por (2.39):

$$p' = -c^2 \psi \quad (2.43)$$

Por último, mediante (2.40) podemos obtener a partir de  $\psi$ , sin más que realizar algunas derivadas, la variable  $\zeta$  así como el desplazamiento lagrangiano  $\xi$ .

$$\zeta = \rho_0 \xi = -\frac{1}{(\omega - m\Omega)^2} \left[ c^2 \nabla \psi + \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \psi \right] \quad (2.44)$$

### 2.3.1 Condiciones de contorno

El planteamiento no estará completo hasta que no introduzcamos las condiciones de contorno que deben cumplir las soluciones. Para expresarlas se supondrá que la estrella no posee atmósfera, o bien ésta es lo suficientemente delgada como para no tomarla en consideración (más adelante se comentará con mayor profundidad este punto). En esta situación, los puntos de la superficie de la estrella estarán en contacto directo con el medio

interestelar circundante y, por lo tanto, deberán estar en equilibrio mecánico, es decir, mantendrán su presión constante e igual a la del medio interestelar. En definitiva, en la superficie:

$$\delta p = 0 \quad (2.45)$$

Esta condición es suficiente para resolver el problema y, por tanto, será la única que se utilice. Sin embargo, para su uso debemos referirla a la variable  $\psi$ . Utilizando la definición de perturbación lagrangiana (2.28):

$$p' + \xi \cdot \nabla p_0 = 0 \quad (2.46)$$

Introduciendo la variable  $\zeta$  (2.17) y la relación entre  $p'$  y  $\psi$  (2.43):

$$-c^2\psi + \zeta \cdot \frac{\nabla p_0}{\rho_0} = 0 \quad (2.47)$$

Si sustituimos la relación entre  $\zeta$  y  $\psi$  (2.44) en la expresión anterior:

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} \cdot \nabla \psi + \frac{1}{c^2} \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \cdot \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \psi = -(\omega - m\Omega)^2 \psi \quad (2.48)$$

Como ya se ha mencionado, esta condición solamente es válida cuando el espesor de la atmósfera se puede despreciar. En la práctica esto sucederá cuando el modo de oscilación resultante no varíe significativamente en amplitud en el interior de la atmósfera de la estrella. Los modos con frecuencia muy alta sufren una amortiguación importante en la atmósfera, y por tanto no estarán bien caracterizados por esta condición.

El contorno real del problema es la superficie de la estrella, por lo que debería ser suficiente con la condición desarrollada en el presente capítulo. Sin embargo, debido al método empleado para integrar las ecuaciones, se hace necesario hacer una consideración sobre el comportamiento de las soluciones en el centro y en todo el eje de simetría de la estrella. La condición exigida a las soluciones en estos puntos será solamente que cumplan la simetría inherente al problema.

## 2.4 Resumen

A lo largo del presente capítulo se han efectuado una serie de aproximaciones con el fin de simplificar el problema, las cuales se enumeran a continuación:

1. Aproximación de Cowling ( $\phi' = 0$ ).
2. Adiabaticidad de las perturbaciones.
3. Despreciar el efecto del gradiente de entropía (y de composición química) en equilibrio en la ecuación de balance energético ( $p' = c^2 \rho'$ ).
4. Despreciar la fuerza de Coriolis.
5. Suponer una atmósfera delgada ( $\delta p = 0$ ).



Estas aproximaciones limitan el rango de validez del cálculo. La tercera aproximación tendrá como efecto que en la estrella no se produzcan ondas internas de gravedad, asociadas con los modos  $g$ . Estas ondas se producen en el rango de bajas frecuencias, por debajo de la frecuencia de Brunt Väisälä ( $N$ ). En cuanto a la cuarta aproximación, la fuerza de Coriolis es la responsable de la aparición de las llamadas ondas inerciales, ligadas a las ondas internas de gravedad, y de las ondas de Rossby (modos  $r$ ), ambas con muy baja frecuencia por debajo de  $2\Omega$  (Unno et al., 1989). Al eliminar el término de Coriolis ninguno de los dos tipos de ondas aparecerán en los resultados. Estas aproximaciones (3 y 4) establecen un límite de baja frecuencia por debajo del cual el cálculo no producirá buenos resultados. Otra consecuencia directa es que solamente aparecerán modos  $p$  en el cálculo, que están asociados con ondas acústicas.

La aproximación de adiabaticidad, como se ha apuntado anteriormente, solamente será válida cuando el periodo de las oscilaciones sea mucho menor que el tiempo característico de intercambio de calor (Kelvin-Helmholtz). Esta aproximación no será válida en estrellas de tipo variable pulsante (Cefeidas, RR Lyrae, etc.), en las que el flujo de calor juega un papel importante en la oscilación. Tampoco será válida, en general, en la atmósfera de la estrella, donde el tiempo de Kelvin-Helmholtz disminuye de forma drástica. Esto último será importante para modos de muy alta frecuencia que muestran variaciones de amplitud significativas en la zona atmosférica. Algo similar sucede con la aproximación de atmósfera delgada (condición 5), por lo cual estas dos aproximaciones marcarán el límite de alta frecuencia, por encima del cual el cálculo no será válido.

En resumen, el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$c^2 \Delta \psi + \left( 2 \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \cdot \nabla \psi + \left[ \Delta c^2 - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \right] \psi = -(\omega - m\Omega)^2 \psi \quad (2.49)$$

con la condición de contorno:

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} \cdot \nabla \psi + \frac{1}{c^2} \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \cdot \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \psi = -(\omega - m\Omega)^2 \psi \quad (2.50)$$

La ecuación (2.49) tiene estructura de ecuación de ondas, lineal, homogénea y con coeficientes variables, que junto con la condición (2.50) forman un problema de valores propios con valor propio  $-(\omega - m\Omega)^2$ . Debido a la condición de contorno no todos los valores del término  $(\omega - m\Omega)$  darán lugar a una solución, sino que existirá un conjunto infinito pero discreto de valores permitidos (autovalores), cada uno ellos asociado a una autofunción,  $\psi_m(\omega; \mathbf{r})$ , que describe la distribución espacial de la perturbación. Al conjunto de una autofunción y su autovalor correspondiente le llamaremos modo normal de oscilación.

Aunque no se aprecia a primera vista, los términos de la izquierda de la ecuación (2.49) dependen implícitamente de  $m$  a través de  $\Delta \psi$ <sup>8</sup>, que como ya se ha visto debe ser un número entero. Debido a esto, en la práctica, se considerará que el autovalor es  $\omega$ , y por tanto para cada valor de  $m$  obtendremos un conjunto distinto de autovalores ( $\omega$ ) y autofunciones.

<sup>8</sup>La componente en la dirección azimutal de  $\nabla \psi$  también dependerá de  $m$ , sin embargo, al hacer el producto escalar con gradientes de magnitudes en equilibrio del modelo, que no dependen de  $\varphi$ , ésta dependencia desaparece.

Nótese que la frecuencia  $\omega$  es aquella que mediría un observador situado en un sistema de referencia fijo en el espacio. Sin embargo, la ecuación (2.49) sólo depende de  $\omega$  mediante el término  $\omega - m\Omega$ , lo cual es lógico, ya que éste representa la frecuencia de oscilación propia medida desde un sistema de referencia que rota con la estrella.

# 3

---

## Método de Integración

En el capítulo anterior se obtuvo la ecuación diferencial que describe las oscilaciones en una estrella con simetría axial bajo ciertas aproximaciones. El objetivo del capítulo que nos ocupa es desarrollar un método para resolver de forma numérica esta ecuación. Al tratarse de una ecuación en derivadas parciales, en primer lugar, debemos definir la malla de integración, lo que se llevará a cabo en §3.1. En §3.2 se explicará el procedimiento a seguir para integrar numéricamente las ecuaciones, mientras que en §3.3 daremos algunos apuntes específicos sobre la implementación del algoritmo. Por último, en §3.4 se presentará un resumen sobre el contenido del capítulo.

### 3.1 Malla de integración

El primer paso en la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales es la definición de la malla de integración que se va a utilizar. Con el nombre de malla de integración se denomina al conjunto de puntos del espacio  $(r_{ij}, \theta_{ij})$  en los cuales se evalúan las diferentes magnitudes que intervienen en la ecuación.

Antes de proseguir, definiremos una serie de magnitudes con el fin de simplificar la notación<sup>1</sup>:

$$\mathbf{A} = 2\nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \quad (3.1)$$

$$B = \Delta c^2 - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \quad (3.2)$$

$$C = \frac{1}{c^2} \left( \nabla c^2 - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \right) \cdot \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \quad (3.4)$$

$$W = \omega - m\Omega \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>No confundir la magnitud  $\mathbf{A}$  con la definida en (2.31) en la página 14.

Con lo que la ecuación de oscilación (2.49) del capítulo 2 queda de la forma:

$$c^2 \Delta \psi + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + B\psi = -W^2 \psi, \quad (3.6)$$

con la condición de contorno:

$$\mathbf{D} \cdot \nabla \psi + C\psi = -W^2 \psi \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Coordenadas de integración

Las simetrías del problema sugieren el uso de coordenadas esféricas para representar las variables, sin embargo éstas no permiten una representación sencilla de la superficie de la estrella (no esférica). Por tanto, realizaremos un cambio de coordenadas de la siguiente forma:

- Sea  $r = \mathcal{S}(\theta)$  la curva que contiene todos los puntos de la superficie de la estrella<sup>2</sup>; definimos la coordenada  $\gamma$  como:

$$\gamma = \frac{r}{\mathcal{S}(\theta)}, \quad (3.8)$$

de forma que la superficie queda definida por  $\gamma = 1$ .

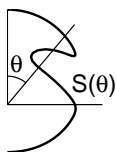
El nuevo sistema de coordenadas no es ortogonal, por lo tanto los vectores unitarios en la dirección de crecimiento de las variables  $\gamma$  y  $\theta$  no son perpendiculares. Debido a esto expresaremos los vectores en términos de sus componentes en las coordenadas esféricas habituales (ver figura 3.1). Esto es:

$$\mathbf{v}(\gamma, \theta) = v_r(\gamma, \theta) \mathbf{e}_r + v_\theta(\gamma, \theta) \mathbf{e}_\theta, \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$  y  $\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$  sí son vectores ortonormales.

Para obtener una ecuación que podamos resolver con un método de diferencias finitas, debemos expresar los operadores diferenciales vectoriales en función de derivadas parciales respecto de las nuevas variables  $\gamma$  y  $\theta$ . Las expresiones que relacionan las derivadas en función de las coordenadas esféricas  $r$  y  $\theta$  y las derivadas en el nuevo sistema coordenado se detallan a continuación:

<sup>2</sup>Se ha hecho la afirmación de que la superficie puede describirse por una expresión de la forma  $r = \mathcal{S}(\theta)$ , lo cual no siempre será estrictamente cierto. Supongamos, por ejemplo, el caso del objeto de la figura, en el cual para un único valor de  $\theta$  existen varios valores de  $r$  que definen puntos en la superficie. No obstante, las estrellas reales no poseen superficies tan complejas y, en general, su forma podrá ser expresada como una función univaluada de  $\theta$ .



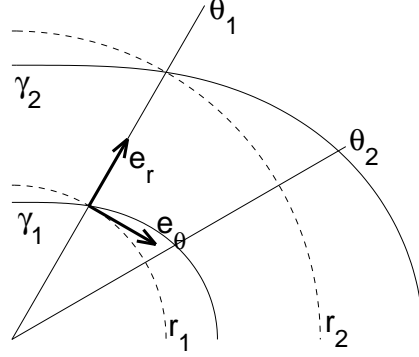


Figura 3.1: Representación del cambio de coordenadas.

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\theta} = \frac{1}{S} \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} \right|_{\theta}, \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_r = -\frac{\gamma S'}{S} \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} \right|_{\theta} + \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\gamma}, \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right|_{\theta} = \frac{1}{S^2} \left. \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right|_{\theta}, \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right|_r = \frac{\gamma^2 S'^2}{S^2} \left. \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right|_{\theta} + \left. \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right|_{\gamma} - \frac{2\gamma S'}{S} \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} \right|_{\theta} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\gamma} + \gamma \left( \frac{2S'^2}{S^2} - \frac{S''}{S} \right) \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} \right|_{\theta}, \quad (3.13)$$

donde  $\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\theta}$  representa la derivada parcial con respecto a  $r$  manteniendo  $\theta$  constante,

$S' = \frac{dS}{d\theta}$  y  $S'' = \frac{d^2S}{d\theta^2}$ . Usando las expresiones de los operadores vectoriales en coordenadas esféricas y recordando (2.10), la ecuación de oscilación toma la siguiente forma:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma \partial \theta} + \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \alpha_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + (\alpha_6 + m^2 \alpha_7) \psi = -W^2 \psi, \quad (3.14)$$

con la condición de contorno:

$$\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \beta_3 \psi = -W^2 \psi, \quad (3.15)$$

donde:

$$\alpha_1 = \frac{c^2}{\mathcal{S}^2} \left( 1 + \frac{\mathcal{S}'^2}{\mathcal{S}^2} \right) \quad (3.16)$$

$$\alpha_2 = \frac{c^2}{\gamma^2 \mathcal{S}^2} \quad (3.17)$$

$$\alpha_3 = -\frac{2\mathcal{S}'c^2}{\gamma \mathcal{S}^3} \quad (3.18)$$

$$\alpha_4 = \frac{c^2}{\gamma \mathcal{S}^2} \left( 2 + \frac{2\mathcal{S}'^2}{\mathcal{S}^2} - \frac{\mathcal{S}''}{\mathcal{S}} - \frac{\mathcal{S}' \cos \theta}{\mathcal{S} \sin \theta} \right) + \frac{A_r}{\mathcal{S}} - \frac{\mathcal{S}' A_\theta}{\mathcal{S}^2} \quad (3.19)$$

$$\alpha_5 = \frac{c^2 \cos \theta}{\gamma^2 \mathcal{S}^2 \sin \theta} + \frac{A_\theta}{\gamma \mathcal{S}} \quad (3.20)$$

$$\alpha_6 = B \quad (3.21)$$

$$\alpha_7 = -\frac{c^2}{\gamma^2 \mathcal{S}^2 \sin^2 \theta} \quad (3.22)$$

$$\beta_1 = \frac{D_r}{\mathcal{S}} - \frac{\mathcal{S}' D_\theta}{\mathcal{S}^2} \quad (3.23)$$

$$\beta_2 = \frac{D_\theta}{\gamma \mathcal{S}} \quad (3.24)$$

$$\beta_3 = C \quad (3.25)$$

### 3.1.2 Corrección de paso variable

Cuando se utiliza un método de diferencias finitas para resolver una ecuación diferencial, es más sencillo trabajar con una malla de integración con puntos equiespaciados. Esto funcionará bien para la coordenada  $\theta$ , para la cual utilizaremos un paso fijo que denotamos por  $h_\theta$ , con lo que las variables estarán evaluadas en los puntos  $\theta_j$ , que cumplen:

$$\theta_j = \left( \frac{1}{2} + j \right) h_\theta \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, n_\theta - 1 \quad , \quad (3.26)$$

siendo  $n_\theta = \frac{\pi}{h_\theta}$  el número de puntos de la malla en la dirección de  $\theta$ . Definiendo la malla de esta forma evitamos los puntos singulares  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , lo cual no implica una pérdida de generalidad, como se verá en detalle en §3.2.3, donde se tratará el comportamiento en la frontera de las soluciones.

Sin embargo, en el caso de la coordenada  $\gamma$ , utilizar un paso fijo no es una buena idea. Esto se debe a que los modelos estelares en equilibrio suelen presentar mayor cantidad de detalle conforme nos acercamos a la superficie. Además, a medida que aumenta la frecuencia, los cruces por cero de los modos  $p$  se concentran en las zonas más externas de la estrella. Por todo esto, un buen muestreo sería aquel que utilizase un paso más pequeño en la zona cercana a la superficie que el utilizado en la zona central. Mediante un pequeño truco podemos utilizar una técnica de resolución con paso uniforme al mismo tiempo que

muestreamos correctamente las zonas altas de la estrella. Para ello definimos una variable auxiliar de la forma:

$$\lambda = g(\gamma) \quad (3.27)$$

Para la variable  $\lambda$  utilizaremos una malla de paso fijo, de forma que si denotamos por  $i$  al índice que especifica el punto de muestreo se tiene:

$$\lambda_i = \lambda_0 + ih_\lambda, \quad (3.28)$$

con  $h_\lambda = \text{cte}$ . Si tomamos  $i$  como una variable continua, podemos escribir:

$$h_\lambda = \frac{d\lambda}{di} \quad (3.29)$$

De la misma forma, podremos definir el paso en la variable  $\gamma$  como:

$$h_\gamma = \frac{d\gamma}{di} = \frac{1}{g'} h_\lambda, \quad (3.30)$$

donde  $g' = \frac{dg(\gamma)}{d\gamma}$ .

La forma de  $h_\gamma$  dependerá de la función  $g(\gamma)$ . Escogemos  $h_\gamma$  de la siguiente forma:

$$h_\gamma = k_c (c_1 - \gamma) h_\lambda, \quad (3.31)$$

donde  $k_c$  y  $c_1$  son constantes que determinaremos más adelante. De esta forma, si  $k_c > 0$ , el paso disminuye linealmente con  $\gamma$ . Si recordamos la definición de  $\gamma$  (3.8), para un ángulo  $\theta$  dado,  $\gamma$  es lineal con  $r$ , de forma que si  $r = 0$  entonces  $\gamma = 0$  y en la superficie es  $\gamma = 1$ . Con la definición anterior conseguiremos que  $h_\lambda$  disminuya cuando nos acerquemos a la superficie, obteniendo un muestreo más fino en esa zona.

De las expresiones anteriores podemos ver que:

$$g'(\gamma) = \frac{1}{k_c (c_1 - \gamma)}, \quad (3.32)$$

y por tanto:

$$\lambda = g(\gamma) = -\frac{1}{k_c} \ln |c_1 - \gamma| + \ln c_2, \quad (3.33)$$

donde  $c_2$  es una constante de integración. Imponiendo que  $\gamma = 0$  cuando  $\lambda = 0$ , obtenemos  $\ln c_2 = \frac{1}{k_c} \ln c_1$ . Por tanto:

$$\gamma = c_1 \left(1 - e^{-k_c \lambda}\right) \quad (3.34)$$

Imponiendo además que para  $\lambda = 1$  sea  $\gamma = 1$ :

$$c_1 = \frac{1}{1 - e^{-k_c}} \quad (3.35)$$



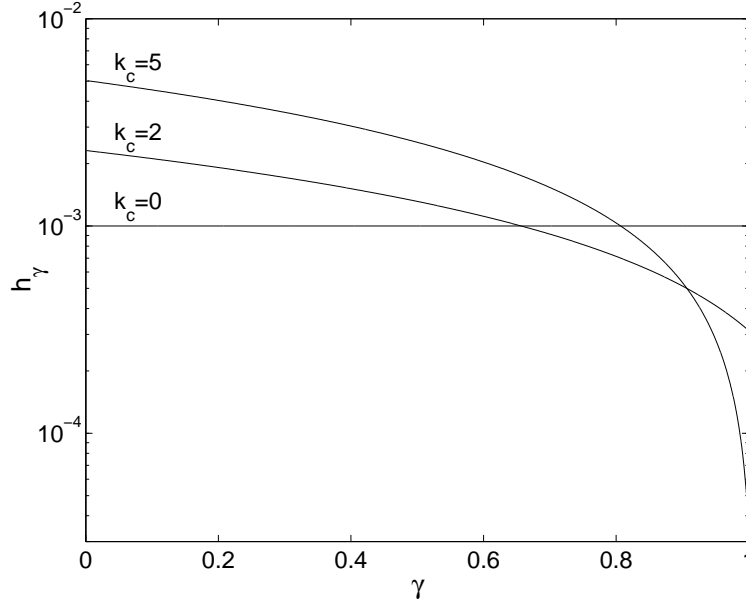


Figura 3.2: Representación del paso  $h_\gamma$  frente a  $\gamma$  para distintos valores de  $k_c$  manteniendo el número de puntos  $n_r = 1000$  ( $h_\lambda = 10^{-3}$ ).  $\gamma = 1$  representa la superficie de la estrella.

En la figura 3.2 se representa el paso  $h_\gamma$  frente al valor de  $\gamma$  para distintos valores de la constante  $k_c$ , manteniendo el número de puntos. Se puede observar que para valores mayores de  $k_c$  se produce un muestreo más fino en las capas más externas, y dado que el número de puntos se ha de mantener, el paso en el interior se hace más grande. Para valores negativos de  $k_c$  el comportamiento sería precisamente el opuesto, muestreando más finamente en el interior. De las expresiones (3.34) y (3.35) se puede ver que para el límite de  $k_c \rightarrow 0$  obtenemos  $\gamma = \lambda$  que corresponde a un muestreo de paso fijo.

La relación entre las derivadas con respecto a  $\gamma$  y las derivadas con respecto a  $\lambda$  viene dada por las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = g' \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} = (g')^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + g'' \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (3.37)$$

donde  $g'' = \frac{d^2 g(\gamma)}{d\gamma^2} = \frac{1}{k_c (c_1 - \gamma)^2}$ .

Para introducir la nueva variable de integración en las ecuaciones (3.14) y (3.15) basta con reemplazar  $\gamma$  por  $\lambda$  y sustituir los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  y  $\beta_1$  por:

$$\alpha'_1 = (g')^2 \alpha_1 \quad (3.38)$$

$$\alpha'_3 = g' \alpha_3 \quad (3.39)$$

$$\alpha'_4 = g' \alpha_4 + g'' \alpha_1 \quad (3.40)$$

$$\beta'_1 = g' \beta_1 \quad (3.41)$$

La ecuación de oscilación queda entonces como:

$$\alpha'_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \alpha'_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \theta} + \alpha'_4 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \alpha_5 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + (\alpha_6 + m^2 \alpha_7) \psi = -W^2 \psi, \quad (3.42)$$

con la condición de contorno:

$$\beta'_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \beta_3 \psi = -W^2 \psi \quad (3.43)$$

Los puntos de la malla de integración en la dirección de  $\lambda$  vendrán dados por:

$$\lambda_i = g(\gamma_i) = \left( \frac{1}{2} + i \right) h_\lambda \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, n_r - 1, \quad (3.44)$$

donde  $n_r = \frac{1}{h_\lambda} + \frac{1}{2}$  es el número de puntos. Tomando los puntos de esta forma, evitamos el punto singular  $r = 0$  y hacemos que el último punto  $\lambda_{n_r-1} = 1$  quede sobre la superficie, permitiéndonos expresar la condición de contorno en este punto.

En resumen, la malla de integración vendrá dada por los puntos  $(i, j)$  de forma que:

$$\psi_{ij} = \psi(\gamma_i, \theta_j) \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, n_r - 1 \quad \text{y} \quad j = 0, 1, \dots, n_\theta - 1 \quad (3.45)$$

En la práctica no será necesario utilizar la variable  $\lambda$  de forma explícita. Utilizaremos las expresiones (3.34) y (3.44) para calcular los puntos  $\gamma_i$  y sustituiremos los coeficientes  $\alpha'_1$ ,  $\alpha'_3$ ,  $\alpha'_4$  y  $\beta'_1$  en las ecuaciones, de forma que, para aproximar las derivadas, podremos utilizar las expresiones de diferencias finitas correspondientes a un paso fijo e igual a  $h_\lambda$ .

## 3.2 Método de integración implícito: Matriz de diferencias finitas

### 3.2.1 Método de integración

Una vez que hemos definido la malla de integración que se va a utilizar, el siguiente paso es definir la estrategia a seguir para llevar a cabo la integración propiamente dicha. En un principio existen varias posibilidades, de entre las cuales debemos elegir aquella que, proporcionando buenos resultados, sea más económica en cuanto a uso de memoria y tiempo de proceso, conservando asimismo la máxima simplicidad posible.

La primera opción en cuanto a sencillez es utilizar un método explícito. En un método de este tipo, las derivadas en cada punto se expresan usando los valores de la función en puntos previamente calculados. Esto permite ir calculando la solución capa por capa hasta completar todo el dominio de integración. El autovalor se obtendría mediante un proceso iterativo, partiendo de una estimación inicial y perturbándola hasta que se satisfaga la condición de contorno.

La otra opción consiste en plantear un método implícito. En este caso, las derivadas en un punto pueden depender del valor de la solución en otro punto no conocido. Estos métodos dan lugar a un sistema de ecuaciones que ha de ser resuelto de forma conjunta.

La utilización de un método explícito para integrar la ecuación (3.42) plantea varios problemas que hacen que no sea posible su resolución. En primer lugar, supongamos que intentamos integrar partiendo del centro de la estrella hacia la superficie. En el caso en que existe simetría esférica, las distintas componentes de Legendre de la parte angular de la solución crecen como  $r^l$ , siendo  $l$  el orden del polinomio de Legendre correspondiente  $P_l(\cos\theta)$  (Christensen-Dalsgaard, 1998), es decir, las componentes con mayor  $l$  crecen a mayor velocidad. El ruido numérico que se produce en la integración tiene componentes de Legendre con  $l$  muy alto, por lo que tenderá a amplificarse al integrar las capas sucesivas, dando lugar a una inestabilidad que imposibilita la resolución de la ecuación. Este mismo problema se ha comprobado que aparece en el caso no esférico. Una forma de intentar contrarrestar este efecto sería proyectar las ecuaciones sobre polinomios de Legendre y resolver cada componente por separado, sin embargo, debido a que en nuestro caso no esférico los coeficientes poseen dependencia angular, aparece acoplamiento entre las distintas componentes, aumentando en gran medida la complejidad del problema.

Otra posibilidad en la que se hace uso de un método explícito es llevar a cabo la integración desde la superficie de la estrella. Sin embargo, en este caso, las ecuaciones se muestran muy sensibles al valor de  $W = \omega - m\Omega$ , de forma que una pequeña desviación respecto del valor real provoca una inestabilidad a una cierta profundidad. Esto hecho, unido a la dificultad de elegir una forma para la solución en la superficie, hace que este sistema no sea el más adecuado.

De lo dicho anteriormente, vemos que se hace necesaria la utilización de un método implícito para resolver la ecuación. Con un método de este tipo, al utilizar las aproximaciones de diferencias finitas obtendremos un sistema de ecuaciones lineales, que además dependerá de  $W$ , con lo que el problema se reduce a calcular los valores y vectores propios de una matriz. Para hacernos una idea de la dimensión de esta matriz consideremos, por ejemplo, que utilizamos una malla de integración con  $n_r = 5000$  y  $n_\theta = 200$ . La matriz de diferencias finitas resultante sería de tamaño  $10^6 \times 10^6$ . Sin embargo, aunque pueda parecer un tamaño exagerado, veremos que existen procedimientos para disminuir sus dimensiones y optimizar su almacenamiento, además de algoritmos muy eficientes para calcular los valores y vectores propios.

### 3.2.2 Aproximación de las derivadas

El primer paso para construir la matriz de diferencias finitas es determinar las aproximaciones que se van a emplear para realizar las derivadas. Para el caso que nos ocupa se utilizará una representación simétrica, tal y como se detalla a continuación:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_{ij} = \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{i-1j}}{2h_\lambda} \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{ij} = \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij-1}}{2h_\theta} \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right)_{ij} = \frac{\psi_{i+1j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i-1j}}{h_\lambda^2} \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)_{ij} = \frac{\psi_{ij+1} - 2\psi_{ij} + \psi_{ij-1}}{h_\theta^2} \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\theta}\right)_{ij} = \frac{\psi_{i+1j+1} - \psi_{i+1j-1} - \psi_{i-1j+1} + \psi_{i-1j-1}}{4h_\lambda h_\theta} \quad (3.50)$$

Al sustituir estas aproximaciones en las ecuaciones (3.42) y (3.43) obtendremos un sistema de  $n_r \cdot n_\theta$  ecuaciones algebraicas, que formarán las filas de la matriz de diferencias finitas  $\mathcal{M}$ , de forma que:

$$\mathcal{M}\psi = -W^2\psi \quad (3.51)$$

Denotamos con  $\mathcal{M}_{ab}$  al elemento de la fila  $a$  y columna  $b$  de la matriz, que vendrá dado por el coeficiente que multiplica a  $\psi_{i_2j_2} = \psi(\gamma_{i_2}, \theta_{j_2})$  en la ecuación evaluada en el punto  $(\gamma_{i_1}, \theta_{j_1})$ , de tal forma que  $a = i_1 \cdot n_\theta + j_1$  y  $b = i_2 \cdot n_\theta + j_2$ .

Con esta definición, la matriz  $\mathcal{M}$  queda organizada en bloques de tamaño  $n_\theta \times n_\theta$  formando un estructura tridiagonal. Cada bloque  $\mathcal{B}_{ii'}$  está asociado al conjunto de ecuaciones de la capa  $\gamma_i$  para todos los valores de  $\theta_j$ .

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{B}_{00}) & (\mathcal{B}_{01}) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ (\mathcal{B}_{10}) & (\mathcal{B}_{11}) & (\mathcal{B}_{12}) & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & (\mathcal{B}_{ii-1}) & (\mathcal{B}_{ii}) & (\mathcal{B}_{ii+1}) & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & (\mathcal{B}_{n_r-2n_r-3}) & (\mathcal{B}_{n_r-2n_r-2}) & (\mathcal{B}_{n_r-2n_r-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (\mathcal{B}_{n_r-1n_r-2}) & (\mathcal{B}_{n_r-1n_r-1}) \end{bmatrix}$$

Cada uno de los bloques  $\mathcal{B}_{ii'}$  tiene a su vez una estructura interna tridiagonal originada por la aproximación utilizada para calcular las derivadas en la variable  $\theta$ . De esta forma, la mayor parte de los  $n_r^2 n_\theta^2$  elementos de la matriz son nulos, siendo necesario almacenar únicamente los, aproximadamente,  $9n_r n_\theta$  elementos distintos de cero, con lo que se optimiza en gran medida el uso de memoria. Siguiendo el ejemplo de la sección anterior, en el que utilizabamos una malla con  $n_r = 5000$  y  $n_\theta = 200$ , el número de elementos se reduce de  $10^{12}$  a aproximadamente  $9 \cdot 10^6$ .

### 3.2.3 Comportamiento en la frontera

La única frontera real del problema es la superficie de la estrella, sin embargo debido al sistema de coordenadas elegido para realizar la integración, en la práctica el contorno del dominio de integración se extiende también a otras regiones, que son los polos ( $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ ) y el centro de la estrella ( $\gamma = 0$ ). Para realizar la integración correctamente, primero debemos estudiar el comportamiento de las soluciones en estos puntos fronterizos. Para ello haremos uso de las simetrías que posee el problema.

En primer lugar, veremos cómo se comporta la solución en los polos. Analizaremos el caso  $\theta = 0$ , ya que la extrapolación para el polo opuesto ( $\theta = \pi$ ) es inmediata. El problema aparece cuando intentamos calcular una derivada angular en el punto  $(\gamma_i, \theta_0)$ , ya que usando las aproximaciones de las derivadas de la sección anterior necesitamos conocer el valor de la solución en el punto  $(\gamma_i, \theta_{-1})$ , que no pertenece al dominio de integración. Sabemos que la solución debe ser continua y derivable en el punto  $\theta = 0$ , además conocemos la dependencia de la solución con la coordenada  $\varphi$ :

$$\psi(\gamma, \theta, \varphi) = \psi(\gamma, \theta) e^{im\varphi} \quad (3.52)$$

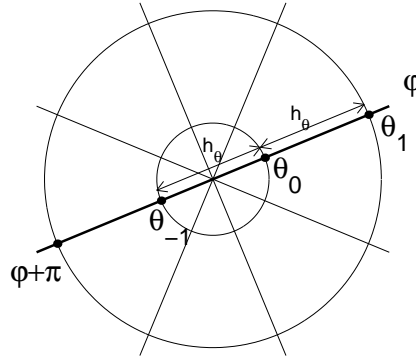


Figura 3.3: Comportamiento de la solución en el polo.

Si seguimos la solución a lo largo de un meridiano (ver figura 3.3) y recordamos la definición de los puntos  $\theta_j$  (3.26) es inmediato ver que el punto  $\theta_{-1}$  coincide con el punto  $\theta_0$  para un valor de la coordenada axial igual a  $\varphi + \pi$ . Por tanto, el valor de la solución en ese punto se puede expresar de la forma:

$$\psi(\gamma_i, \theta_{-1}) = \psi(\gamma_i, \theta_0) e^{im\pi} = (-1)^m \psi(\gamma_i, \theta_0), \quad (3.53)$$

con lo que la derivada angular en el punto  $(\gamma_i, \theta_0)$  se puede calcular usando la siguiente expresión:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{i0} = \frac{\psi_{i1} - (-1)^m \psi_{i0}}{2h_\theta}, \quad (3.54)$$

y de forma similar podemos expresar la segunda derivada y la derivada mixta.

El segundo caso que requiere cierta consideración es el cálculo de las derivadas en la zona central de la estrella. El tratamiento es, en principio, parecido al efectuado en el caso de los polos, sin embargo existe una dificultad añadida, ya que la solución es derivable en el centro respecto de la coordenada  $r$ , pero no respecto de la coordenada  $\lambda$ , como se verá más adelante.

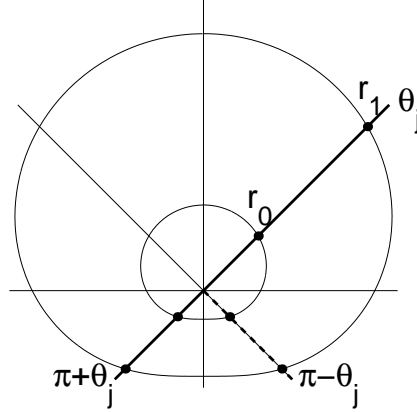


Figura 3.4: Comportamiento de la solución en el centro u origen de coordenadas  $r = 0$ .

Para estudiar la forma de efectuar la derivada radial en el punto  $\gamma_0$  observemos la figura 3.4. Siguiendo una trayectoria radial que cruce el centro de la estrella, vemos que para realizar la derivada en el punto  $(r_0, \theta_j) \equiv (\gamma_0, \theta_j)$  necesitamos usar el valor de la solución en los puntos  $(\gamma_1, \theta_j)$  y  $(\gamma_0, \pi + \theta_j)$ , el segundo de los cuales no pertenece al dominio de integración. Sin embargo, podemos usar las propiedades de simetría del problema para ver que, de forma similar al caso anterior, se tiene:

$$\psi(\gamma_0, \pi + \theta_j) = (-1)^m \psi(\gamma_0, \pi - \theta_j) \quad (3.55)$$

Una vez que hemos visto los puntos que debemos utilizar para llevar a cabo la integración, aún queda otro problema por resolver. Como ya se ha comentado la solución debe ser continua y derivable en el punto  $r = 0$ , sin embargo esto es cierto solamente si la derivación se realiza frente a la coordenada  $r$ . Debido a la definición de  $\gamma = r/\mathcal{S}(\theta)$ , la métrica asociada a esta coordenada no coincide a uno y otro lado del centro (es decir para  $\theta = \theta_j$  y para  $\theta = \pi - \theta_j$ ), dando lugar a una discontinuidad en la derivada en el punto  $r = 0$  (ver figura 3.5). Lo mismo se puede decir para la coordenada  $\lambda$ .

En un pequeño entorno del centro de la estrella, donde podemos considerar que la coordenada  $\lambda$  depende linealmente de  $r$ , este hecho se puede caracterizar como una dilatación de la métrica en un factor  $\frac{\mathcal{S}(\theta)}{\mathcal{S}(\pi - \theta)}$ , que debe ser compensado. Por tanto, consideraremos que el paso en la coordenada  $\lambda$  entre los puntos  $(\lambda_0, \theta_j)$  y  $(\lambda_0, \pi - \theta_j)$  es igual a:

$$h_\lambda^{\text{centro}} = \frac{h_\lambda}{2} + \frac{\mathcal{S}(\pi - \theta)}{\mathcal{S}(\theta)} \frac{h_\lambda}{2}, \quad (3.56)$$

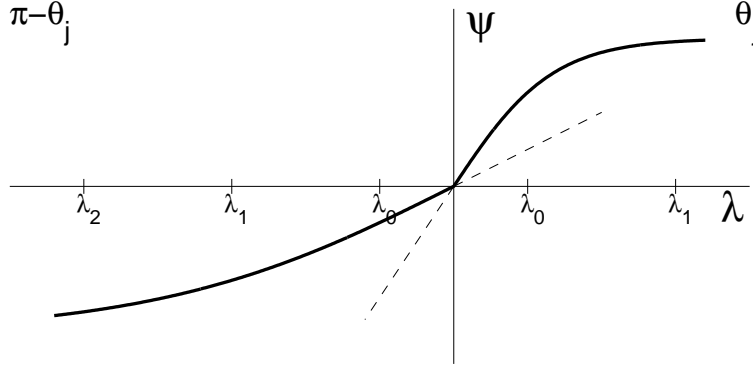


Figura 3.5: Representación de la variable  $\psi$  a lo largo de la línea marcada en la figura 3.4.

y efectuaremos las derivadas teniendo en cuenta esta corrección.

Nótese que en el caso en que exista simetría respecto al ecuador de la estrella, se puede tomar el origen  $r = 0$  tal que se cumpla que  $\mathcal{S}(\theta) = \mathcal{S}(\pi - \theta)$ , y por tanto esta corrección no sea necesaria.

Por último debemos considerar lo que sucede en los puntos que pertenecen a la superficie de la estrella ( $i = n_r - 1$ ). En estos puntos debemos plantear la ecuación (3.43), correspondiente a la condición de contorno, en lugar de la ecuación (3.42) utilizada para los puntos del interior. La ecuación (3.43) está expresada de forma que tiene estructura de ecuación de valores propios con idéntico autovalor ( $-W^2$ ) al de la ecuación (3.42), de manera que se puede introducir directamente en la matriz.

Sin embargo, debido a que no podemos conocer el valor de la solución en puntos exteriores a la estrella, no es posible plantear la derivada radial de forma simétrica. Por tanto, en estos puntos, se utilizará una formulación alternativa de la derivada:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_{ij} = \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{h_\lambda} \quad (3.57)$$

### 3.2.4 Proyección sobre funciones de Legendre

Existen dos motivaciones principales que nos inducen a llevar a cabo una última modificación en la matriz de diferencias finitas. En primer lugar la necesidad de reducir, en la medida de lo posible, el tamaño de la matriz, consiguiendo un mayor rendimiento en cuanto a uso de memoria y tiempo de proceso. La segunda motivación, y quizá la más importante, está relacionada con la naturaleza de las soluciones que genera la matriz expuesta en las secciones anteriores.

El problema reside en que aparece un comportamiento análogo al que ocurre en el caso en que existe simetría esférica. En este último caso se puede observar que al aumentar el número de nodos de la autofunción en la dirección radial ( $n$ ) se produce un incremento significativo de la frecuencia, mientras que si aumentamos el número de nodos en la dirección angular ( $l$ ), el incremento es notablemente menor. El efecto global es un aumento de la

densidad de modos por unidad de frecuencia conforme aumentamos ésta. En el caso que nos ocupa no existe simetría esférica y por tanto no podemos diferenciar a priori los modos según su número de nodos en la dirección angular. Sin embargo, también aparece un incremento importante en el número de autofunciones conforme aumentamos la frecuencia. A esto hay que añadir que este incremento en el número de modos es debido mayoritariamente a autofunciones que poseen una gran cantidad de nodos en la dirección angular (a diferencia del caso con simetría esférica, este número de ceros puede ser distinto en cada capa), que poseerán un gran error debido a la aproximación de diferencias finitas. Por tanto, debemos utilizar una representación que elimine estos modos de las soluciones.

La representación escogida debe permitirnos diferenciar las funciones que varían de forma suave con el ángulo  $\theta$ , de aquellas que lo hacen más fuertemente. La base de funciones más adecuada para representar la dependencia angular de las autofunciones son las funciones asociadas de Legendre  $P_l^m(\cos \theta)$ . De esta forma, las autofunciones vendrán expresadas de la forma:

$$\psi(\gamma, \theta) = \sum_{l=m}^{l_{\max}+m-1} \psi_l(\gamma) P_l^m(\cos \theta), \quad (3.58)$$

donde el valor de  $m$  escogido para la descomposición coincide con el índice azimutal del modo de oscilación definido en (2.9). De esta forma aseguramos que el comportamiento en los extremos sea el adecuado dadas las condiciones de simetría, continuidad y derivabilidad.

Cabe destacar que en la expresión (3.58) se ha truncado el desarrollo de forma que sólo contenga  $l_{\max}$  términos. Haciendo esto, seremos capaces de eliminar de las soluciones aquellas autofunciones no deseadas.

La forma de introducir la descomposición en funciones de Legendre en la resolución del problema difiere de otros tratamientos más usuales, sin embargo es igualmente válido. En lugar de introducir la expresión (3.58) directamente en las ecuaciones, lo que haremos será proyectar la matriz de diferencias finitas  $\mathcal{M}$  sobre el subespacio  $\mathcal{S}$  de funciones asociadas de Legendre  $P_l^m(\cos \theta)$  con  $l$  entre  $l = m$  y  $l = l_{\max} + m - 1$ . Para ello definiremos la matriz de proyección  $P$  de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_m^m(\cos \theta_0) & P_{m+1}^m(\cos \theta_0) & \cdots & P_{n_\theta+m-1}^m(\cos \theta_0) \\ P_m^m(\cos \theta_1) & P_{m+1}^m(\cos \theta_1) & \cdots & P_{n_\theta+m-1}^m(\cos \theta_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_m^m(\cos \theta_{n_\theta-1}) & P_{m+1}^m(\cos \theta_{n_\theta-1}) & \cdots & P_{n_\theta+m-1}^m(\cos \theta_{n_\theta-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

de forma que para un cierto  $\gamma_i$ :

$$\begin{bmatrix} \psi(\gamma_i, \theta_0) \\ \psi(\gamma_i, \theta_1) \\ \vdots \\ \psi(\gamma_i, \theta_{n_\theta-1}) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \psi_m(\gamma_i) \\ \psi_{m+1}(\gamma_i) \\ \vdots \\ \psi_{n_\theta+m-1}(\gamma_i) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$



La transformación de la matriz  $\mathcal{M}$  se lleva a cabo proyectando los bloques  $\mathcal{B}_{ii'}$  individualmente de la forma:

$$\mathcal{B}_{ii'}^S = P^{-1}\mathcal{B}_{ii'}P \quad (3.61)$$

Los bloques proyectados son todavía de tamaño  $n_\theta \times n_\theta$ . Para completar la proyección, truncamos los bloques  $\mathcal{B}_{ii'}^S$  dejando únicamente las primeras  $l_{\max}$  filas y  $l_{\max}$  columnas. Colocando los bloques nuevamente en la matriz de diferencias finitas obtenemos la matriz proyectada  $\mathcal{M}^S$  cuyo tamaño es  $n_r l_{\max} \times n_r l_{\max}$ .

Dado que los elementos de los bloques proyectados  $\mathcal{B}_{ii'}^S$  pueden ser todos no nulos, el número total de elementos distintos de cero en la matriz  $\mathcal{M}^S$  es aproximadamente  $3n_r l_{\max}^2$ . Continuando con el ejemplo expuesto anteriormente ( $n_r = 5000$  y  $n_\theta = 200$ ) y tomando  $l_{\max} = 20$  este número desciende de  $9 \cdot 10^6$  a  $6 \cdot 10^6$ . Como se puede ver, la reducción de tamaño no es muy significativa, sin embargo, mediante la proyección conseguimos una mejora notable en la calidad de las soluciones.

Hay que notar que el error en la integración va a seguir dependiendo del valor de  $n_\theta$ . Sin embargo, este valor no va a influir en el tamaño de la matriz  $\mathcal{M}^S$ . La elección del parámetro  $l_{\max}$  determinará, no sólo la cantidad de autofunciones que aparezcan como solución, sino también si están bien caracterizadas. Un modo que contenga componentes angulares con  $l$  tanto por encima como por debajo de  $l_{\max}$  podrá aparecer en la solución, pero no estará correctamente calculado.

### 3.2.5 Cálculo de los autovalores y autofunciones

Llegados a este punto, ya conocemos la forma de la matriz  $\mathcal{M}^S$  y estamos en disposición de calcular sus autovalores y autofunciones. Para ello debemos resolver la ecuación de valores propios, que en lugar de (3.51) es ahora:

$$\mathcal{M}^S \psi^S = -W^2 \psi^S, \quad (3.62)$$

donde el autovector  $\psi^S$  está distribuido de la siguiente forma:

$$\psi^S = \begin{bmatrix} \psi_m(\gamma_0) \\ \vdots \\ \psi_{l_{\max}+m-1}(\gamma_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_m(\gamma_{n_r-1}) \\ \vdots \\ \psi_{l_{\max}+m-1}(\gamma_{n_r-1}) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Para calcular los valores y vectores propios de la matriz  $\mathcal{M}^S$  se utilizará el método de Arnoldi implícitamente reinicializado (Lehoucq et al., 1996; Radke, 1996; Sorensen, 1995). La ventaja de este método es que no es necesario calcular de forma conjunta todos los autovalores de la matriz, sino que es posible calcular un conjunto pequeño de ellos que se

ajuste a una condición preestablecida. Esto se consigue reduciendo el problema a otro de dimensión mucho menor, con lo que se logra una gran eficiencia.

El método de Arnoldi funciona mejor para calcular los autovalores de mayor magnitud. Por tanto se empleará la estrategia de desplazamiento e inversión (Radke, 1996), que se describe a continuación. Supongamos el problema de valores propios:

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (3.64)$$

Queremos calcular los autovalores más próximos a un cierto valor  $\sigma$ . En lugar de resolver el problema anterior, se calculan los autovalores de mayor magnitud de la matriz  $(M - \sigma I)^{-1}$  que denotaremos por  $\bar{\lambda}$ . Una vez hecho esto, los autovalores de  $M$  se pueden recuperar con la expresión:

$$\lambda = \bar{\lambda}^{-1} + \sigma \quad (3.65)$$

En la práctica no es necesario invertir la matriz ya que el método de Arnoldi sólo requiere calcular el producto de ésta por un vector, con lo cual solamente es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraicas  $(M - \sigma I)y = x$ .

### 3.3 Implementación del código OMASS2d

El algoritmo descrito a lo largo del presente capítulo ha sido implementado en un código en lenguaje C++ con el nombre de OMASS2d, acrónimo de *Oscillation Modes in Axially Symmetric Stars*. En este apartado se describe cómo se han tratado los puntos clave del algoritmo, indicando a su vez una medida del rendimiento del código.

#### 3.3.1 Generación de la matriz de diferencias finitas

Tal como se ha explicado en secciones anteriores, la matriz de diferencias finitas tiene una estructura dispersa formada por bloques cuadrados  $\mathcal{B}_{ii'}^S$  de tamaño  $l_{\max} \times l_{\max}$ . Cada uno de los bloques se genera por separado, calculando en primer lugar la forma no proyectada ( $\mathcal{B}_{ii'}$ ) haciendo uso de las aproximaciones de diferencias finitas, que luego se proyecta sobre el subespacio de funciones asociadas de Legendre siguiendo el método descrito en §3.2.4. Para realizar la proyección de manera eficaz es preciso realizar ciertas manipulaciones.

La proyección se lleva a cabo utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{B}_{ii'}^S = P^{-1}\mathcal{B}_{ii'}P \quad (3.66)$$

La matriz de proyección  $P$  está formada por las funciones asociadas de Legendre evaluadas en los puntos de la malla y colocadas por columnas. Las funciones de Legendre se calculan haciendo uso de las fórmulas de recursión conocidas (Spiegel & Abellanas, 1988). Para evitar problemas derivados de la precisión finita de los cálculos, se normalizan las

funciones mediante el coeficiente  $\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ .

La matriz  $P$  tiene, en principio,  $n_\theta \times n_\theta$  elementos, por lo que es necesario calcular  $n_\theta$  funciones de Legendre con  $l$  entre  $m$  y  $m + n_\theta - 1$ . Para llevar a cabo la proyección

deberíamos invertir esta matriz, sin embargo, en la práctica esto no es necesario. Definimos la matriz  $P'$ , formada por las primeras  $l_{\max}$  columnas de  $P$  y la matriz  $P''$  que contiene las primeras  $l_{\max}$  filas de  $P^{-1}$ , de forma que:

$$\mathcal{B}^S_{ii'} = P'' \mathcal{B}_{ii'} P' \quad (3.67)$$

El bloque  $\mathcal{B}^S_{ii'}$  así calculado tiene  $l_{\max} \times l_{\max}$  elementos, por lo que no necesita ser recortado. Para calcular  $P''$ , en primer lugar descomponemos  $P$  en el producto de una matriz ortogonal  $Q$  y una triangular inferior  $L$ :

$$P = QL, \quad (3.68)$$

dado que  $Q$  es ortogonal,  $Q^{-1} = Q^T$ , donde el superíndice  $T$  denota la matriz traspuesta. Definimos  $L'$  formada por las primeras  $l_{\max}$  filas y  $l_{\max}$  columnas de  $L$  y  $Q'$  formada por las primeras  $l_{\max}$  columnas de  $Q$ . El bloque proyectado vendrá dado por la expresión:

$$L' \mathcal{B}^S_{ii'} = Q'^T \mathcal{B}_{ii'} P', \quad (3.69)$$

donde, tras calcular el término de la derecha de forma directa, podemos obtener el bloque  $\mathcal{B}^S_{ii'}$  mediante un algoritmo de sustitución hacia adelante, dado que  $L'$  es triangular inferior.

El número de operaciones necesarias para generar la matriz es proporcional a  $n_r n_\theta^2 l_{\max}$ . Tomando  $n_r = 1000$ ,  $n_\theta = 200$  y  $l_{\max} = 20$  el cálculo de la matriz de diferencias finitas requiere aproximadamente 80 s en un PC con procesador Pentium 4 a 2 GHz y 450 Mb de memoria RAM.

### 3.3.2 Método de Arnoldi

El algoritmo utilizado para calcular los valores y vectores propios de la matriz es el método de Arnoldi implícitamente reinicializado (Radke, 1996; Sorensen, 1995). Este método se basa en la proyección sobre subespacios de Krylov para reducir un problema de dimensión  $n \times n$  a otro equivalente de dimensión  $k \times k$  con  $k \ll n$ . De esta forma el método permite calcular un conjunto limitado de autovalores que se ajusten a un determinado criterio arbitrario.

Supongamos dos matrices  $A$  y  $H$  ( $n \times n$ ) que cumplen la condición:

$$AV = VH, \quad (3.70)$$

donde  $V$  es una matriz ortogonal ( $V^T V = I$ ). Se dice entonces que  $A$  y  $H$  son semejantes y tienen los mismos valores propios, mientras que sus vectores propios están relacionados por la expresión:

$$x_A = V x_H \quad (3.71)$$

Éste es el fundamento de la iteración QR (Radke, 1996), donde  $H$  es una matriz de Hessenberg, en la cual todos los elementos por debajo de la subdiagonal inferior son nulos. Mediante un proceso iterativo, se transforma la matriz  $H$  en una matriz triangular superior, cuyos autovalores coinciden con los elementos de la diagonal. El método de Arnoldi trabaja de forma similar, pero truncando la relación (3.70) de forma que  $H$  sea de tamaño  $k \times k$ ,

con lo que  $V$  tendrá solamente  $n \times k$  elementos. Para que la relación se cumpla debemos añadir un término que de cuenta del error cometido:

$$AV = VH + fe_k^T, \quad (3.72)$$

donde  $f$  es un vector columna de  $k$  elementos y  $e_k$  es un vector cuyas componentes son nulas excepto la componente  $k$ -ésima que es igual a 1. Usando un proceso iterativo es posible conseguir  $f = 0$ , de forma que los autovalores de  $H$  son a su vez autovalores de  $A$  y los autovectores correspondientes están relacionados por la expresión (3.71).

En la práctica, para agilizar la factorización se realizan unas pocas iteraciones del método QR tras cada iteración de Arnoldi. De esta forma se consigue la factorización con una media de aproximadamente 10 iteraciones.

	$n_r = 200$	$n_r = 500$	$n_r = 1000$	$n_r = 2000$
$l_{\max} = 10$	0.16 s 12 Mb	0.43 s 25 Mb	1.3 s 40 Mb	2.2 s 90 Mb
$l_{\max} = 20$	0.31 s 17 Mb	1.3 s 35 Mb	2.8 s 70 Mb	6.4 s 135 Mb
$l_{\max} = 30$	0.56 s 30 Mb	2.2 s 70 Mb	4.5 s 140 Mb	11 s 275 Mb
$l_{\max} = 40$	1.0 s 50 Mb	3.2 s 120 Mb	7.5 s 235 Mb	18 s 470 Mb

Tabla 3.1: Rendimiento del método de Arnoldi en un PC con procesador Pentium 4 a 2 GHz y 450 Mb de memoria RAM. Se indica el tiempo consumido por autovalor y el consumo máximo de memoria.

Como se apuntó anteriormente este algoritmo da mejores resultados al calcular los autovalores de mayor magnitud. Por ello se utiliza una estrategia de desplazamiento e inversión, que en un principio requiere la inversión de la matriz lo cual sería muy costoso computacionalmente. Sin embargo, dado que el método solamente requiere el cálculo del producto de la matriz por un vector, es posible sustituir la inversión de la matriz por la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para ello utilizamos un algoritmo de eliminación gaussiana o descomposición LU. La descomposición LU de una matriz requiere un esfuerzo computacional considerable, aunque se ha conseguido una implementación bastante eficiente basada en el conocimiento de la estructura de la matriz, necesitando únicamente 0.5 s en un PC con procesador Pentium 4 a 2 GHz y 450 Mb de memoria RAM para descomponer una matriz  $20000 \times 20000$  ( $n_r = 1000$ ,  $l_{\max} = 20$ ,  $1.2 \cdot 10^6$  elementos no nulos).

Un problema del método de desplazamiento e inversión se produce cuando la frecuencia de prueba coincide de forma exacta con un autovalor de la matriz, ya que los valores propios de la matriz invertida tienden a infinito, impidiendo que se obtenga la convergencia deseada. Para resolver esto, el código incluye un procedimiento por el cual, si el cálculo no ha convergido al cabo de  $n$  iteraciones, se modifica ligeramente la frecuencia de partida con la intención de hacer que no coincida con ningún autovalor.

El rendimiento de la iteración de Arnoldi en la máquina citada está recogido en la tabla 3.1, donde se indica el tiempo empleado por autovalor y el consumo máximo de memoria

para diferentes situaciones. Los valores de la tabla han sido calculados tomando  $k = 10$ , es decir, calculando 10 valores propios en cada ejecución del algoritmo. Los tiempos expresados en la tabla 3.1 no dependen del valor de  $n_\theta$ , que solamente influye en el cálculo de la matriz.

### 3.4 Resumen

A lo largo de este capítulo se ha descrito el procedimiento a seguir para resolver numéricamente la ecuación de las oscilaciones en una estrella con simetría axial planteada en el capítulo 2. Para llevar a cabo este cometido el primer paso fue definir la malla que se va a usar para la integración. Definimos una nueva variable  $\gamma = \frac{r}{\mathcal{S}(\theta)}$ , de forma que  $\gamma = 1$  representa todos los puntos de la superficie  $\mathcal{S}(\theta)$  de la estrella. A continuación se hace una corrección no lineal  $\lambda = g(\gamma)$ , de forma que un paso constante en la nueva variable  $\lambda$  da lugar a un paso variable en  $\gamma$  y por tanto en  $r$ . Esto nos permite definir de forma sencilla una malla de integración cuyos puntos esten más apretados cerca de la superficie o en el interior según nos convenga. Para la coordenada angular se adopta un paso constante. La malla de integración queda pues definida de la siguiente forma:

$$\psi_{ij} = \psi(\gamma_i, \theta_j) \quad (3.73)$$

con

$$\lambda_i = g(\gamma_i) = \left(\frac{1}{2} + i\right) h_\lambda \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, n_r - 1 \quad (3.74)$$

y

$$\theta_j = \left(\frac{1}{2} + j\right) h_\theta \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, n_\theta - 1 \quad (3.75)$$

Para efectuar la integración se opta por un método implícito, transformando la ecuación diferencial, mediante la aproximación por diferencias finitas, en un sistema de  $n_r \times n_\theta$  ecuaciones algebraicas que se pueden expresar en forma matricial. De esta forma el problema se traduce al cálculo de los valores y vectores propios de una matriz, que debido a su estructura dispersa<sup>3</sup> se puede almacenar de forma eficiente. Por último se proyecta la parte angular sobre el subespacio de funciones asociadas de Legendre con  $l$  entre  $m$  y  $m + l_{\max} - 1$ . El parámetro  $l_{\max}$  determinará entonces el grado máximo de las funciones de Legendre que pueden contener las soluciones.

Para resolver el problema de valores propios de la matriz se utiliza el método de Arnoldi implícitamente reinicializado, que es una variación de la iteración QR para matrices de grandes dimensiones.

---

<sup>3</sup>Traducción del término inglés *sparse* utilizado para matrices con un gran número de elementos nulos. En algunos textos se designan como matrices huecas.

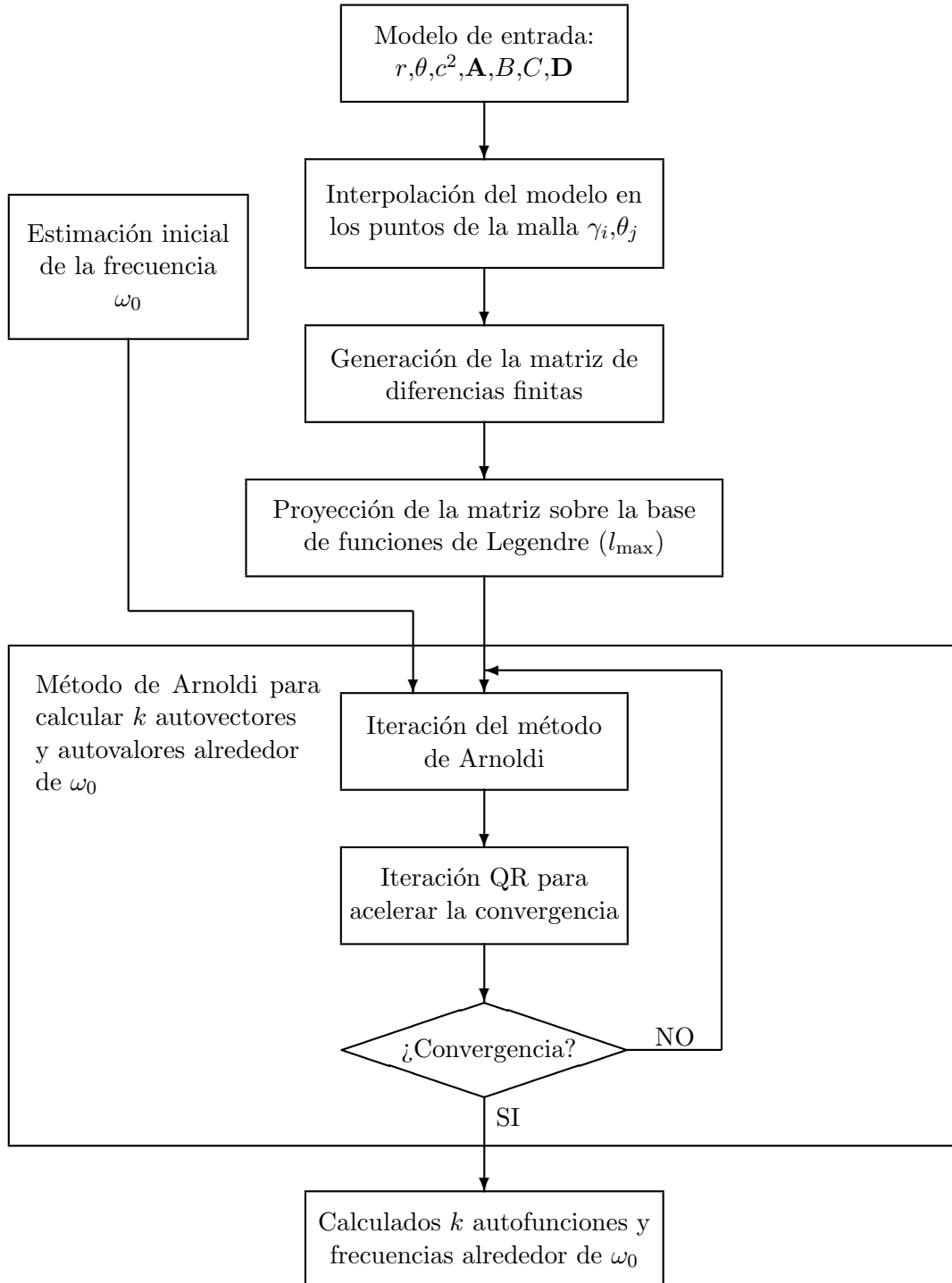


Figura 3.6: Esquema del funcionamiento de OMASS2d

# 4

---

## Comprobación del Funcionamiento de OMASS2d

**E**n el capítulo anterior se desarrolló un código capaz de calcular los modos acústicos de oscilación en una estrella con simetría axial. El cometido del presente capítulo será poner a prueba el funcionamiento de dicho código. Para ello se plantearán diversos escenarios de los cuales podamos conocer los resultados de manera independiente, para así verificar los obtenidos mediante nuestro código OMASS2d.

Empezaremos, en §4.1, calculando los modos de oscilación en un modelo sin rotación con simetría esférica, ya que disponemos de códigos unidimensionales con los que comparar los resultados. A continuación, en §4.2, comprobaremos el funcionamiento del código en un caso en el que ya no existe simetría esférica, pero que aún es resoluble mediante separación de variables. Este es el caso del elipsoide homogéneo. Sin embargo, esta comprobación no es completa debido a que las magnitudes en equilibrio del modelo se mantienen constantes en todos los puntos, anulando los gradientes. Para conseguir un caso más general, en §4.3, usaremos los modelos sin rotación de §4.1, pero desplazando la posición del centro, de forma que obtenemos un problema matemático diferente, sin ningún tipo de simetría, salvo la axial, pero que ha de producir los mismos resultados. Por último, en §4.4 se expondrán las conclusiones del capítulo.

### 4.1 Caso primero: Modelo con simetría esférica

El código desarrollado debe ser capaz de resolver el problema de las oscilaciones en una estrella con simetría esférica, ya que éste es un caso particular de simetría axial. La ventaja de resolver este caso más sencillo es que se conoce sobradamente la naturaleza de las soluciones que debe producir, por lo que nos permitirá verificar el correcto funcionamiento del código.

Para llevar a cabo el cálculo se ha utilizado un modelo del Sol actual ( $M = 1M_{\odot}$ , edad= $4.52 \cdot 10^9$  años) sin rotación, calculado con el código CESAM (Morel, 1993).

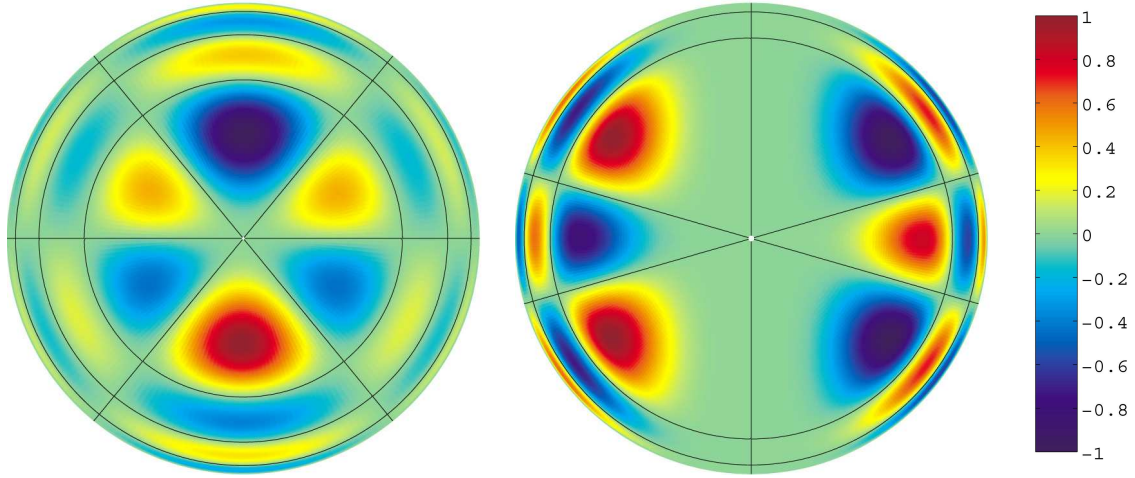


Figura 4.1: Autofunciones  $\psi(r, \theta)$  de un modelo solar con simetría esférica. A la izquierda  $n = 3$ ,  $l = 3$ ,  $m = 0$ , y a la derecha  $n = 2$ ,  $l = 7$ ,  $m = 5$ . La figura muestra un corte de la autofunción a lo largo del meridiano  $\varphi = 0, \pi$ , de forma que el centro corresponde al centro de la estrella y el borde exterior a su superficie. Las líneas negras representan los nodos de la autofunción. Se adjunta un código de color que indica la magnitud normalizada en cada punto.

#### 4.1.1 Dependencia angular

Las ecuaciones que describen las pequeñas oscilaciones en una estrella con simetría esférica son separables en un sistema de coordenadas esféricas. Mientras que la dependencia radial de las soluciones depende del modelo estelar empleado, la dependencia angular viene expresada en términos de las funciones propias de la parte angular del operador laplaciano, es decir, los armónicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Esto nos permite clasificar los modos según el grado  $l$ , cosa que no es posible en un caso general de simetría axial.

Tras calcular diversos modos con nuestro código para distintos valores de  $m$  e intervalos de frecuencia se verifica que la dependencia angular es la correspondiente a armónicos esféricos con el valor de  $m$  dado. A modo de ejemplo, en la figura 4.1 se representan 2 autofunciones calculadas mediante el código OMASS2d. El diagrama empleado para dibujar las funciones propias será el mismo a lo largo de los capítulos sucesivos. En él se muestra el valor de  $\psi(r, \theta)$  en un corte a lo largo del plano definido por el meridiano  $\varphi = 0, \pi$ , de forma que el centro de la estrella queda en el interior del diagrama, mientras que el borde exterior se corresponde con la superficie de la estrella. Las líneas negras indican los nodos (cruces por cero) de la autofunción. El código de colores empleado para representar los distintos valores del modo en cada punto se adjunta a la derecha de la figura (salvo posibles excepciones este será el código empleado en todos los diagramas sucesivos y ya no se volverá a incluir en las figuras).

El modo de la izquierda de la figura 4.1 ha sido calculado para  $m = 0$  y corresponde a un  $n = 3$  con  $l = 3$ , como se puede ver los nodos corresponden a líneas de igual  $r$  y a líneas de igual  $\theta$ , como cabría esperar, ya que el problema es separable en coordenadas esféricas. A la derecha podemos ver otra autofunción calculada con  $m = 5$  y que corresponde a un  $n = 2$ ,  $l = 7$ . Ambas figuras muestran claramente que la dependencia angular es la esperada.



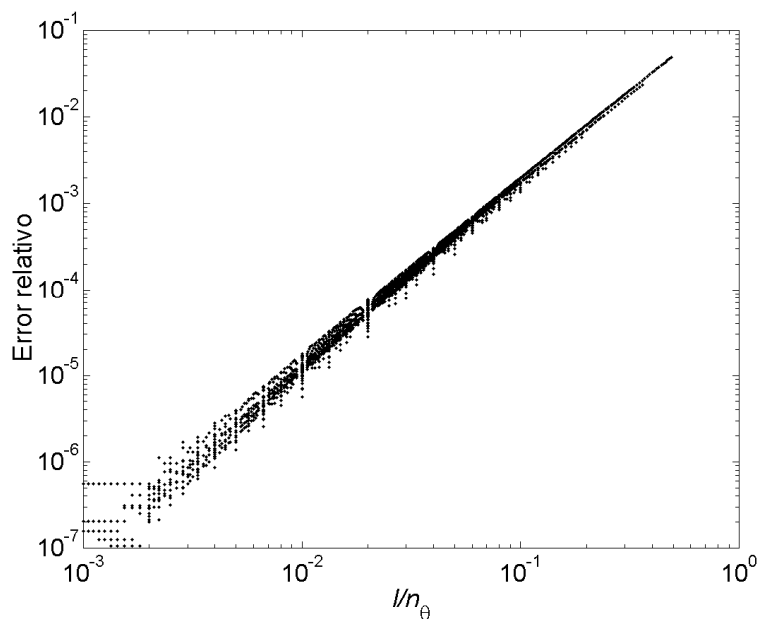


Figura 4.2: Error relativo en la frecuencia obtenido con el código OMASS2d asociado a la dependencia angular en función de  $l/n_\theta$ .

Este caso sencillo nos permite además analizar como afecta el valor de  $n_\theta$  al error cometido en la frecuencia para distintos valores de  $l$ . Esto nos dará una estimación del número de puntos en la dirección de  $\theta$  que debemos emplear dependiendo del valor de  $l_{\max}$  que utilizemos. En la figura 4.2 se puede ver el error relativo ( $\varepsilon$ ) cometido en la determinación de la frecuencia frente al cociente  $l/n_\theta$ . Se han efectuado cálculos con  $n_\theta$  entre 100 y 1000 y con  $l$  entre 0 y 50. Para la determinación del error se ha tomado como valor exacto de la frecuencia el correspondiente a  $n_\theta = 2000$ . Se observa que los puntos se ajustan a una línea recta en representación logarítmica. Ajustando la dependencia a una relación de potencias se obtiene:

$$\varepsilon = \left( \frac{0.4l}{n_\theta} \right)^2, \quad (4.1)$$

lo que nos da la siguiente regla para elegir el valor de  $n_\theta$  en función de la tolerancia requerida (que supondremos válido en un caso general de simetría axial):

$$n_\theta = \frac{0.4l_{\max}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (4.2)$$

Por ejemplo, para  $l_{\max} = 20$  se obtiene un error  $\varepsilon \sim 10^{-3}$  con  $n_\theta = 200$  puntos. La dependencia angular del modelo de entrada podría modificar este error, sin embargo es de esperar que, por lo general, esta modificación sea pequeña, por lo que no será la fuente dominante del error.

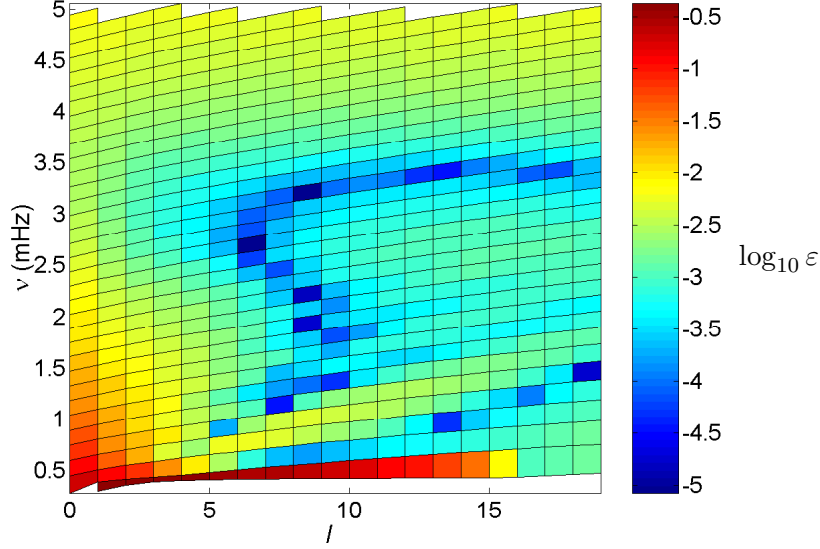


Figura 4.3: Logaritmo del error relativo en el cálculo de la frecuencia  $\log_{10} \varepsilon = \log_{10} \left| \frac{\nu_{\text{omass}} - \nu_{\text{adip}}}{\nu_{\text{adip}}} \right|$  frente al grado  $l$  y la frecuencia (en mHz).

#### 4.1.2 Dependencia radial

El análisis de la parte radial de las autofunciones requiere un poco más de esfuerzo, ya que para su verificación necesitamos comparar con los resultados obtenidos mediante otro código diferente. En nuestro caso se utilizó el *Aarhus adiabatic pulsation package* (Christensen-Dalsgaard & Berthomieu, 1991), en adelante ADIPACK, que es un código unidimensional para calcular las oscilaciones adiabáticas en una estrella con simetría esférica. El cálculo se hizo en la aproximación de Cowling y tomando como condición de contorno  $\delta p = 0$ , con el objeto de que los resultados fueran lo más parecidos posible a los obtenidos mediante el código OMASS2d. La principal diferencia entre los dos cálculos estriba en que el ADIPACK no desprecia el valor de la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N^2$ ).

Para el cálculo con OMASS2d se utilizó  $n_r = 2000$  puntos,  $n_\theta = 200$  puntos,  $l_{\text{max}} = 20$  y  $k_c = 10$  (de forma que el muestreo en  $r$  es más fino hacia el exterior de la estrella, ver ecuación 3.34), lo cual proporciona una tolerancia relativa en la determinación de la frecuencia de  $\sim 10^{-3}$ . La influencia del valor de  $n_\theta$  en la tolerancia se obtiene directamente de (4.2), mientras que la influencia de  $n_r$  se obtuvo realizando un estudio de la convergencia de la solución para distintos valores de  $n_r$ .

La figura 4.3 muestra la diferencia relativa  $\varepsilon = \left| \frac{\nu_{\text{omass}} - \nu_{\text{adip}}}{\nu_{\text{adip}}} \right|$ , entre la frecuencia calculada con OMASS2d ( $\nu_{\text{omass}}$ ) y la calculada con ADIPACK ( $\nu_{\text{adip}}$ ) para distintos modos. Los distintos colores representan valores diferentes de  $\log_{10} \varepsilon$  frente al grado  $l$  (eje horizontal) y la frecuencia cíclica  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  en mHz (eje vertical).

En la figura 4.3 podemos distinguir varias regiones en función de la magnitud del error cometido en el cálculo de la frecuencia:

- **Zona A** ( $l$  baja,  $\nu$  baja). Corresponde a la región en la parte inferior izquierda de la figura 4.3, donde el error está por encima de la tolerancia requerida, siendo del orden de  $10^{-1}$  a  $10^{-2}$ . Este error es debido mayoritariamente a la aproximación de  $N^2 \ll \omega^2$ , ya que en esta zona los modos penetran muy profundamente hacia el interior del Sol, donde el valor de  $N$  ( $\lesssim 450 \mu\text{Hz}$ ) es comparable a las frecuencias de los modos.
- **Zona B** ( $n = 0$ ). Está compuesta por la línea inferior de la figura. Para valores de  $l$  menores que  $\sim 15$  el error es importante ( $\sim 10^{-1}$ ), mientras que a partir de  $l \sim 16$  éste se reduce drásticamente a valores dentro de la tolerancia admitida ( $10^{-3}$ ). La explicación de este comportamiento radica, como en el caso anterior, en la profundidad de penetración de los modos, y por tanto, en la influencia de  $N^2$ .
- **Zona C** ( $l$  intermedia,  $\nu$  intermedia). En esta zona el error se mantiene siempre dentro de la tolerancia permitida ( $10^{-3}$ ). Este es el rango en el que, para el modelo utilizado, funcionan mejor las aproximaciones efectuadas.
- **Zona D** ( $\nu$  alta). Las discrepancias entre los dos códigos en esta zona son debidas principalmente a errores numéricos, que podrían resolverse disminuyendo el paso de integración.

En la figura 4.4 se comparan las autofunciones  $\psi(r)$  obtenidas con ambos programas. Podemos comprobar que, como se ha dicho anteriormente, las discrepancias se localizan en la zona más interior de la estrella, donde el efecto de  $N^2$  es importante.

La conclusión que se desprende de este análisis es que el código desarrollado funciona de manera correcta, ya que las discrepancias observadas con los resultados del código ADIPACK se deben únicamente a las aproximaciones efectuadas.

## 4.2 Caso segundo: Elipsoide homogéneo

Un caso interesante en el que no existe simetría esférica es el del elipsoide homogéneo, es decir, una cavidad de forma elipsoidal en la que las magnitudes que definen el modelo (presión, densidad, ...) son uniformes en el espacio. Bajo estos supuestos, la ecuación (2.49) se reduce a una ecuación de ondas convencional.

$$c^2 \Delta \psi = -(\omega - m\Omega)^2 \psi \quad (4.3)$$

La ventaja de analizar este caso concreto, es que la ecuación (4.3) se puede resolver mediante separación de variables utilizando coordenadas esferoidales, que son las adecuadas para este dominio de integración. Esto nos permite transformar el problema bidimensional en dos problemas unidimensionales, más sencillos de resolver. Además proporciona un método alternativo cuyos resultados deben coincidir con los que proporciona el código OMASS2d. Debido a la uniformidad del modelo de entrada, la condición de contorno  $\delta p = 0$  es equivalente a  $p' = 0$ , y por tanto  $\psi = 0$  en la superficie –ver (2.43)–.

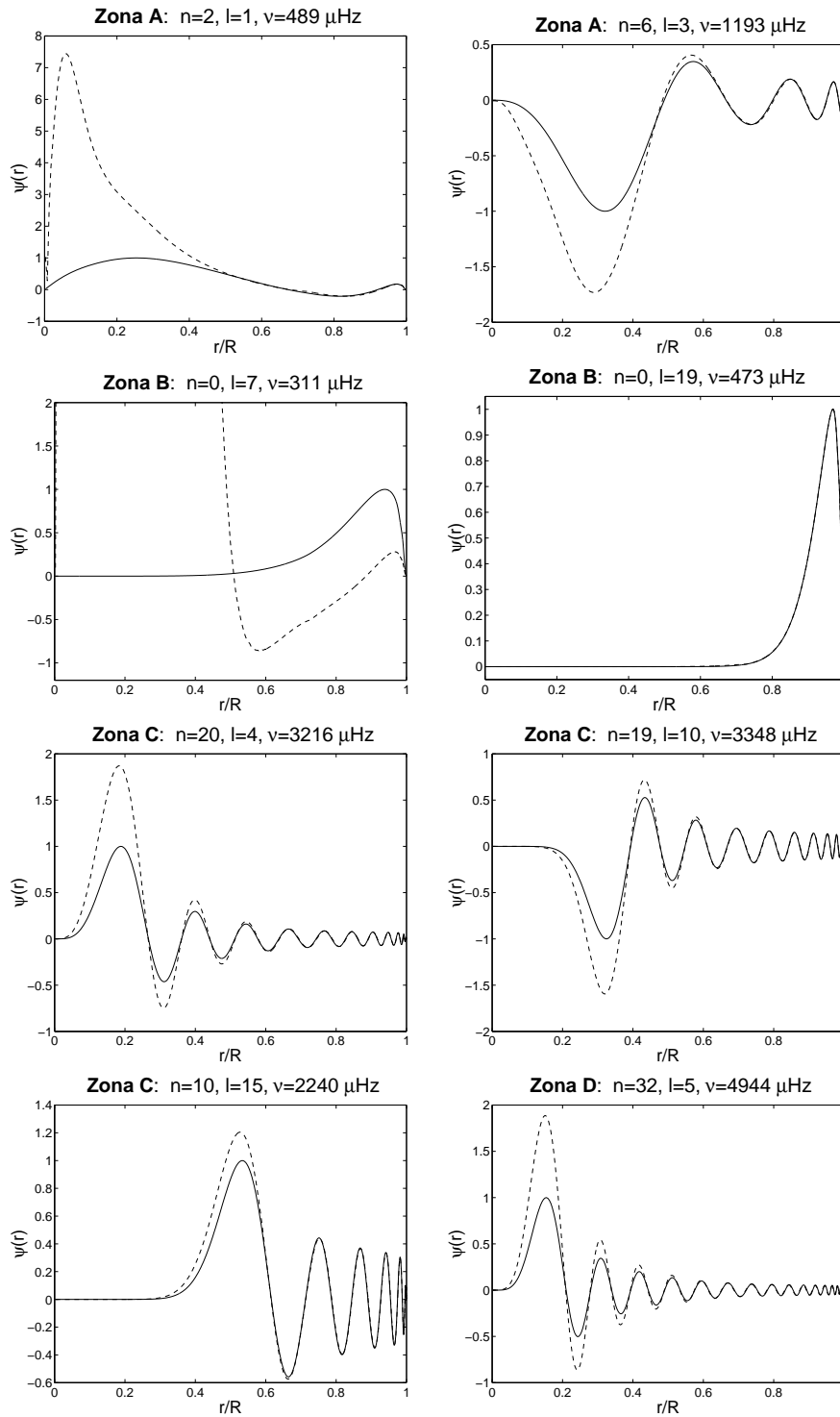


Figura 4.4: Comparación entre las autofunciones (parte radial) calculadas con OMASS2d (línea continua) y con ADIPACK (línea discontinua).

En nuestro caso utilizaremos un elipsoide alargado con excentricidad  $e = 0.5$ . Las coordenadas esferoidales alargadas  $(\xi, \eta, \varphi)$  se definen de la siguiente manera:

$$x = f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad (4.4)$$

$$y = f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \quad (4.5)$$

$$z = f\xi\eta, \quad (4.6)$$

donde  $f$  actúa como un factor de escala. La ecuación de ondas expresada en estas coordenadas tiene la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 (\xi^2 - \eta^2) \psi = 0, \quad (4.7)$$

con  $k^2 = \frac{(\omega - m\Omega)^2}{c^2} f^2$ . Esta ecuación es separable respecto de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ :

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{dR_{mn}(\xi)}{d\xi} \right] - \left( \lambda_{mn} - k^2 \xi^2 + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right) R_{mn}(\xi) = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{dS_{mn}(\eta)}{d\eta} \right] + \left( \lambda_{mn} - k^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) S_{mn}(\eta) = 0, \quad (4.9)$$

donde  $\lambda_{mn}$  es un autovalor que surge de la separación de variables y se ha hecho la descomposición  $\psi = R_{mn}(\xi) S_{mn}(\eta) e^{im\varphi}$ .

Estas ecuaciones se pueden resolver analíticamente (Abramowitz & Stegun, 1972), aunque el proceso es bastante tedioso. En nuestro caso la resolución se hizo de forma numérica mediante una pequeña rutina escrita en MATLAB. Para resolver la ecuación relativa a la coordenada  $\eta$  se usaron polinomios de Legendre, debido a su carácter angular, mientras que para la ecuación en la coordenada  $\xi$  se optó por un método de integración numérico de paso variable.

Se calcularon los modos de oscilación de un elipsoide homogéneo usando nuestro código OMASS2d y usando las ecuaciones (4.8) y (4.9). En la figura 4.5 se muestran algunos ejemplos de los resultados. Se observa que la estructura de la autofunción coincide bastante bien en ambos casos, mientras que la diferencia relativa entre las frecuencias se mantiene del orden de  $10^{-3}$ , coincidiendo con la tolerancia exigida en los dos cálculos.

### 4.3 Caso tercero: Desplazamiento del origen de coordenadas en un modelo esférico (Caso general)

Hasta este momento se ha verificado el correcto funcionamiento del código en casos muy particulares. En primer lugar se utilizó un modelo con simetría esférica, en el que se anulan todas las derivadas angulares en el equilibrio, en segundo lugar usamos un modelo de elipsoide homogéneo, en el que se pierde la simetría esférica, pero anulando todas las derivadas. En el presente apartado vamos a comprobar la validez de los resultados para

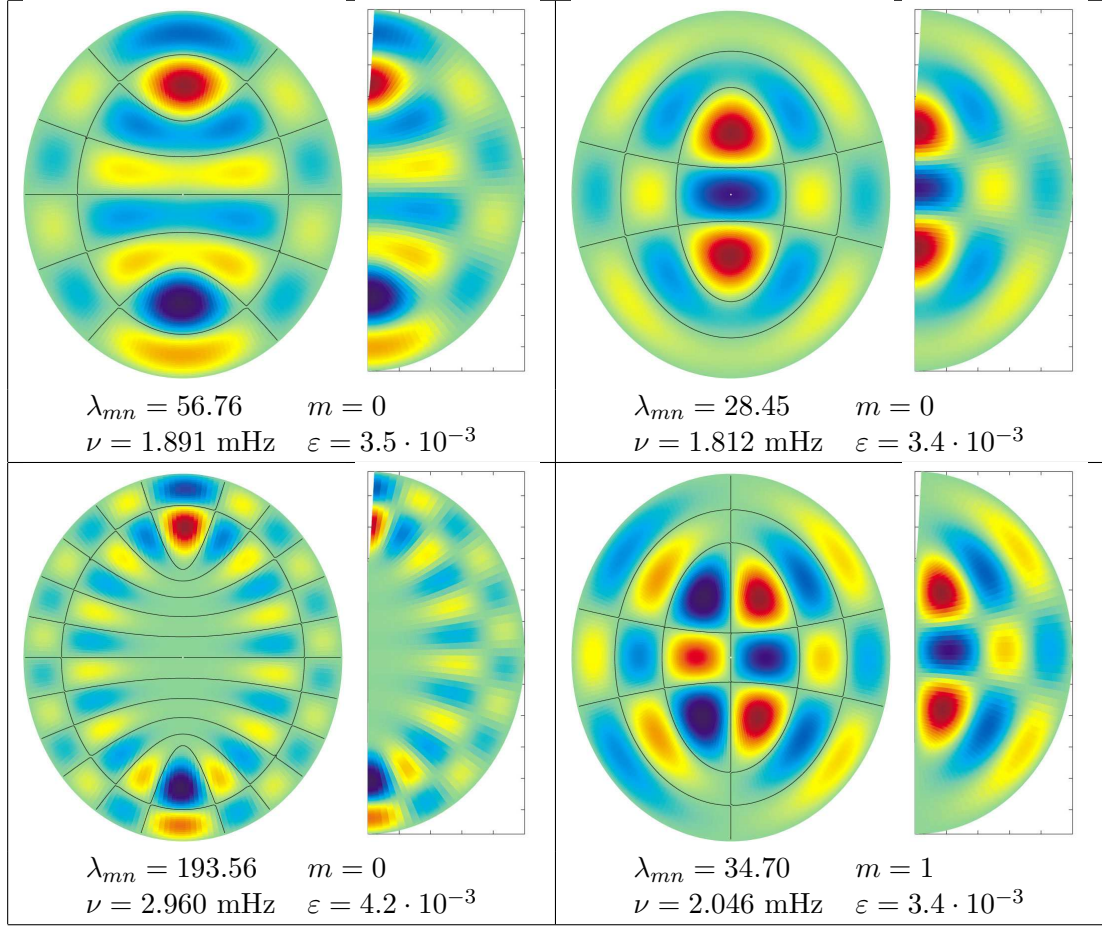


Figura 4.5: Comparación de los modos calculados mediante el código OMASS2d (izquierda) y los calculados resolviendo las ecuaciones de variables separadas (4.8) y (4.9) (derecha). Se muestran los valores correspondientes de  $\lambda_{mn}$ ,  $m$  y la frecuencia  $\nu$ , así como la diferencia relativa  $\varepsilon = \left| \frac{\nu_{\text{sep}} - \nu_{\text{omass}}}{\nu_{\text{sep}}} \right|$  entre las frecuencias calculadas usando uno u otro método.

un caso general, usando un modelo en el que no exista ninguna simetría (a excepción de la simetría axial) y en el cual las derivadas, tanto radiales como angulares, del modelo no se anulen.

No es fácil encontrar un caso que cumpla las características citadas y para el cual además conozcamos de forma independiente los modos de oscilación. Sin embargo, realizando un pequeño truco podemos utilizar el modelo solar sin rotación de §4.1 para fabricar el modelo deseado. Para ello, en primer lugar realizamos un cambio de coordenadas de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z + \delta R, \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde  $R$  es el radio solar y  $\delta$  un parámetro entre -1 y 1. Con esta transformación desplazamos el origen de coordenadas a lo largo del eje vertical. En coordenadas esféricas,

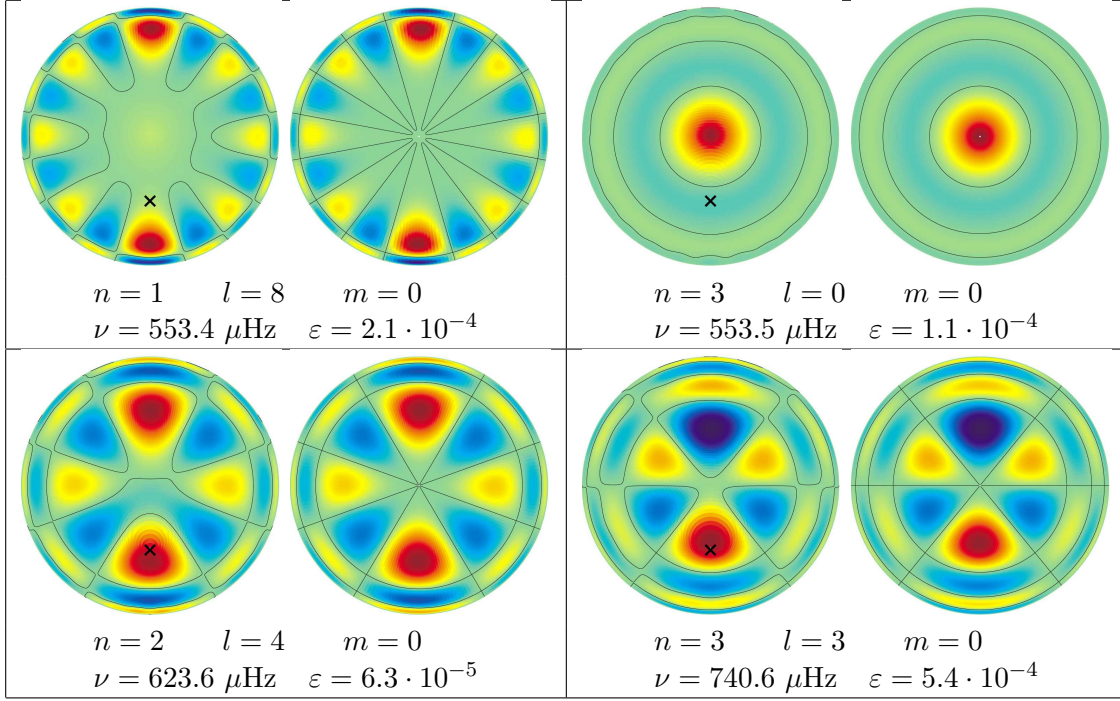


Figura 4.6: Comparación de los modos calculados mediante el código OMASS2d para el modelo solar sin rotación de §4.1 (derecha) y para el mismo modelo con el origen de coordenadas desplazado a lo largo del eje vertical (izquierda). Se muestra la clasificación de cada modo en términos de  $n$ ,  $l$  y  $m$  y su frecuencia  $\nu$ , así como la diferencia relativa  $\varepsilon = \left| \frac{\nu_{\text{sol}} - \nu_{\text{des}}}{\nu_{\text{sol}}} \right|$  entre las frecuencias calculadas usando uno u otro modelo. La “X” en los modos de la izquierda marca la posición del origen de coordenadas.

la transformación será la siguiente:

$$\begin{aligned}
 r' &= \sqrt{r^2 + \delta^2 R^2 + 2\delta R r \cos \theta}, \\
 \tan \theta' &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \delta \frac{R}{r}}, \\
 \varphi' &= \varphi
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Una vez calculadas las nuevas coordenadas de todos los puntos, interpolamos el modelo sobre una malla regular en  $r'$  y  $\theta'$ . De esta forma hemos conseguido un modelo matemáticamente distinto, con centro en  $r' = 0$ , es decir,  $z = -\delta R$ , y que carece de simetría esférica, dado que las magnitudes en equilibrio dependen de  $\theta'$ . Sin embargo, los modos normales y las frecuencias de oscilación deben ser las mismas que para el modelo solar con simetría esférica de §4.1, lo cual nos permitirá comprobar la validez de los resultados obtenidos con el código OMASS2d.

Para realizar el cálculo con este modelo se ha utilizado  $n_r = 2000$ ,  $n_\theta = 200$  y  $k_c = 10$  igual que en §4.1, pero aumentando el valor de  $l_{\text{max}}$  a 40. Este aumento es necesario si queremos reproducir los resultados obtenidos en §4.1, ya que en aquel cálculo el origen de coordenadas coincidía con el centro de la estrella, y por tanto, la parte angular de las autofunciones podía representarse usando un solo polinomio de Legendre con  $l$  bien

definido. Sin embargo, al desplazar el origen de coordenadas, la dependencia angular será más complicada, lo que hace necesario el uso de polinomios de Legendre de orden  $l$  más elevado.

Mediante este cálculo conseguimos reproducir los mismos resultados que en §4.1, siempre dentro de los márgenes de error admitidos. En la figura 4.6 podemos ver algunas de las autofunciones calculadas usando ambos modelos, así como la diferencia relativa en las frecuencias, que en todo caso se encuentra muy por debajo de la tolerancia requerida ( $10^{-3}$ ). La “X” de los modos correspondientes al modelo desplazado de la figura 4.6 representa el punto escogido como origen de coordenadas.

La prueba efectuada en esta sección es bastante concluyente, ya que el modelo de entrada posee todas las complejidades posibles dentro de los límites de la simetría axial. De hecho, incluso es asimétrico con respecto al ecuador. Por tanto, estos resultados nos permiten asegurar, con un alto grado de confianza, que el código OMASS2d funciona correctamente.

#### 4.4 Resumen

Durante el transcurso de este capítulo se han realizado varias pruebas del funcionamiento del código OMASS2d, cuya complejidad se ha ido incrementando sucesivamente. Hemos visto que los modos calculados usando nuestro código en un caso de simetría esférica, daban buenos resultados al compararlos con un código unidimensional de probada eficacia, de acuerdo con las aproximaciones realizadas en las ecuaciones. A continuación se han verificado los resultados en casos más generales de simetría axial, incluyendo el problema del elipsoide homogéneo, que es separable en coordenadas esferoidales y un modelo sin rotación para el cual se ha desplazado el origen de coordenadas.

Por tanto, concluimos que el programa es capaz de calcular correctamente las frecuencias y los modos normales de oscilación de una estrella con simetría axial dentro de las aproximaciones efectuadas en el capítulo 2, por lo que estamos preparados para realizar un estudio de las propiedades de los modos acústicos de oscilación en este tipo de estrellas.



# 5

---

## Oscilaciones en Modelos Estelares en Rotación: Modelos con Densidad Uniforme

Durante los capítulos anteriores se ha desarrollado una herramienta (OMASS2d) para calcular los modos de oscilación en estrellas con simetría axial. En los dos capítulos que siguen se empleará esta herramienta para estudiar las propiedades de las oscilaciones en un conjunto de modelos estelares con rotación. Los primeros modelos que usaremos serán con densidad uniforme según se describe en §5.1. En §5.2 se presentarán, de forma general, los resultados del cálculo. A continuación, en §5.3, se centrará el estudio en la ruptura de la degeneración según el valor de  $m$  y en las propiedades de los multipletes resultantes. Posteriormente, en §5.4 comentaremos el efecto de acoplamiento entre los modos, presentando algunos ejemplos. Por último se efectuará un resumen del capítulo (§5.5), destacando las características más relevantes de los resultados.

### 5.1 Modelos con densidad uniforme

Nos interesa estudiar cómo afecta la rotación a las propiedades de los modos normales de oscilación en una estrella con simetría axial. Para ello debemos contar con un amplio conjunto de modelos estelares para diferentes velocidades de rotación ( $\Omega$ ). Debido a que el cálculo de modelos realistas (que en cualquier caso se discutirán en el capítulo 6) es bastante costoso, se ha optado por utilizar modelos sencillos con densidad uniforme, de forma que podamos disponer de un muestreo en  $\Omega$  tan fino como sea necesario.

Resolviendo la ecuación de Poisson con densidad  $\rho_0$  constante, obtenemos el potencial gravitatorio en el interior de la estrella:

$$\phi_g = \frac{2\pi}{3} G \rho_0 r^2, \quad (5.1)$$

que sumado al potencial centrífugo  $\phi_c = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$  nos da el potencial total:

$$\phi = \alpha r^2 (1 + f_2 P_2(\cos \theta)), \quad (5.2)$$

donde  $P_2$  es un polinomio de Legendre y

$$\alpha = \frac{2\pi G\rho_0}{3}(1 - \chi) \quad (5.3)$$

$$f_2 = \frac{\chi}{1 - \chi} \quad (5.4)$$

$$\chi = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_0} \quad (5.5)$$

El parámetro  $\chi$  es el cociente entre la energía cinética de rotación y la energía potencial gravitatoria, por lo que da una idea de la importancia de la rotación en la estructura de la estrella. Por otra parte, resolviendo la ecuación de equilibrio hidrostático obtenemos la presión:

$$p_0 = p_c - \rho_0\phi, \quad (5.6)$$

siendo  $p_c$  la presión central, que para una estrella de masa  $M$  vendrá dada por la expresión (ver apéndice A):

$$p_c = \left(\frac{3M}{8\pi}\right)^{2/3} (1 + f_2)^{1/3} (2 - f_2)^{2/3} \alpha\rho_0^{1/3} \quad (5.7)$$

En este trabajo, se calculó una serie de modelos con valores de  $\chi$  comprendidos entre 0 y 0.3, con  $M = M_\odot$  y  $\rho_0 = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3}$ , de forma que el volumen se mantiene constante, e igual al volumen solar, para todos los modelos. Dado que el valor del coeficiente adiabático  $\Gamma_1$  no interviene directamente en los modelos, pero sí es necesario para el cálculo de las oscilaciones, se escogió  $\Gamma_1 = 5/3$ , que corresponde a un valor típico en los interiores estelares, uniforme en toda la estrella.

En la figura 5.1 se muestra el achatamiento, es decir, el cociente entre el radio ecuatorial ( $R_e$ ) y el radio polar ( $R_p$ ) de la estrella, en función del valor de  $\chi$ . De esta forma podemos hacernos una idea de la desviación con respecto a la simetría esférica que posee cada modelo.

## 5.2 Efecto de la rotación en los modos normales

Utilizamos nuestro código OMASS2d para calcular los modos normales de oscilación en los modelos con densidad uniforme descritos en el apartado anterior. En los resultados se observa que el acoplamiento es relativamente débil en este tipo de modelos (no ocurrirá igual con los modelos más realistas utilizados en el capítulo siguiente), permitiéndonos realizar una clasificación según el orden  $n$  y el grado  $l$  de forma análoga a la que se emplea en el caso de simetría esférica. Para asignar una clasificación a un modo concreto nos basaremos únicamente en su aspecto, sin tener en cuenta la continuidad de la frecuencia en función de  $\chi$  (esto se explicará con profundidad en la sección §5.4 dedicada al acoplamiento entre modos). Para ilustrar este hecho se presentan en la figuras 5.2 y 5.3 algunos ejemplos de autofunciones para distintas velocidades de rotación. Vemos que es posible calcular el grado  $l$  de las autofunciones según el número de nodos que poseen en la superficie, mientras que el orden  $n$  se asigna de la forma usual en un caso de simetría esférica, es decir, por ordenación

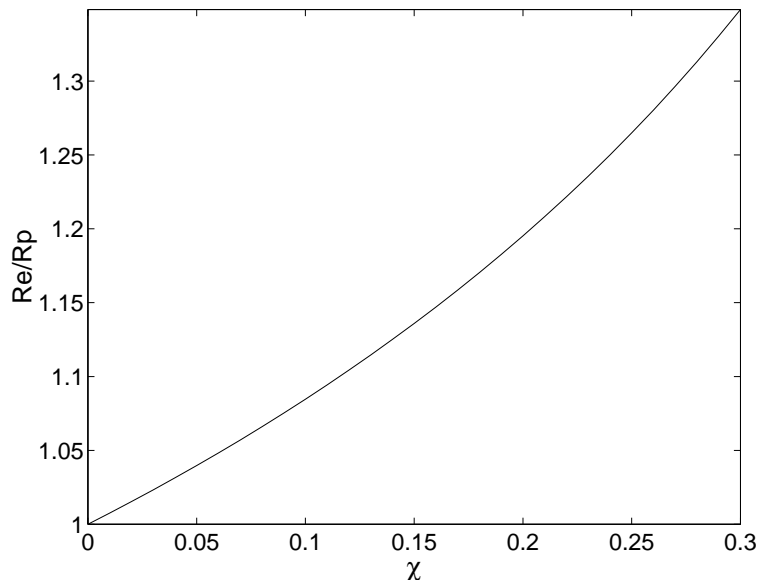


Figura 5.1: Achatamiento de un modelo con densidad uniforme para distintas velocidades de rotación.

de los modos con igual  $l$ . Hay que destacar que éste no será el caso más general, dado que la importancia del acoplamiento puede hacer imposible la clasificación siguiendo este criterio.

En las figuras 5.2 y 5.3 vemos cómo el efecto que tiene la rotación sobre la estructura de la autofunción depende del valor de  $l$ . De esta forma, los modos con  $l$  más alto conservan una clara semejanza para diferentes velocidades de rotación. Sin embargo, esta semejanza no es tan evidente en el caso del modo con  $l = 0$  que, aun manteniendo la ausencia de nodos en la superficie, comienza a parecerse a un  $l = 2$  al aumentar la rotación. Este carácter selectivo en cuanto al grado  $l$  también se aprecia en la figura 5.4 en la que se representa la frecuencia normalizada<sup>1</sup> de los modos con  $m = 0$  en función de  $l$  para un caso sin rotación ( $\chi = 0$ ) y para  $\chi = 0.3$ . La gráfica correspondiente a  $\chi = 0$  tiene la apariencia habitual para un caso de simetría esférica, donde para cada orden  $n$ , la frecuencia es una función suave y monótonamente creciente con  $l$ . Por el contrario, al aumentar la rotación vemos como esta estructura presenta fuertes anomalías para modos con  $l$  bajo, llegando incluso a producirse cambios en la ordenación de los modos dentro de cada orden  $n$ .

Debido a que el modelo estelar de equilibrio empleado es simétrico respecto del plano del ecuador, los modos normales presentarán también cierta simetría respecto de este plano. De esta forma podemos clasificar las autofunciones en simétricas  $\psi(r, \theta) = \psi(r, \pi - \theta)$  y antisimétricas  $\psi(r, \theta) = -\psi(r, \pi - \theta)$ . Los modos simétricos serán aquellos que tengan un valor de  $l + m$  par, mientras que los antisimétricos tendrán  $l + m$  impar. Si observamos la figura 5.5, en la que se presenta la frecuencia normalizada de los modos de oscilación frente al grado  $l$  para  $m = 1$  (izquierda) y  $m = 2$  (derecha) en un modelo con  $\chi = 0.3$ , junto con

<sup>1</sup>Se define la frecuencia normalizada como  $\sigma = \frac{\omega}{(GM/R_{\text{eq}}^3)^{1/2}}$ , donde  $R_{\text{eq}}$  es el radio de una esfera con el mismo volumen que la estrella.

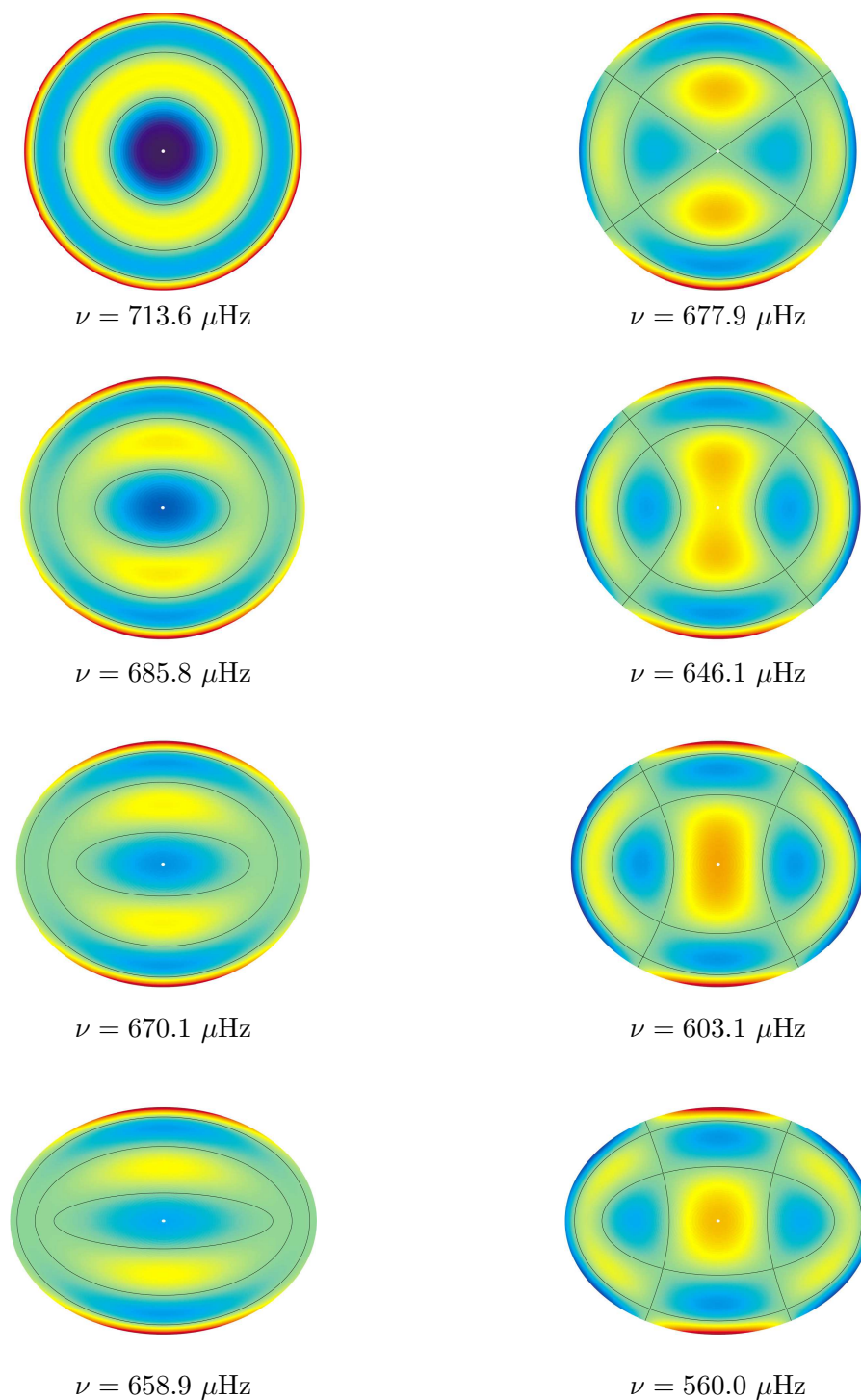


Figura 5.2: Modos normales en un modelo con densidad uniforme para diferentes velocidades de rotación. A la izquierda  $n = 3, l = 0, m = 0$  y a la derecha a  $n = 2, l = 2, m = 0$ . De arriba a abajo  $\chi = 0, 0.1, 0.2$  y  $0.3$ .

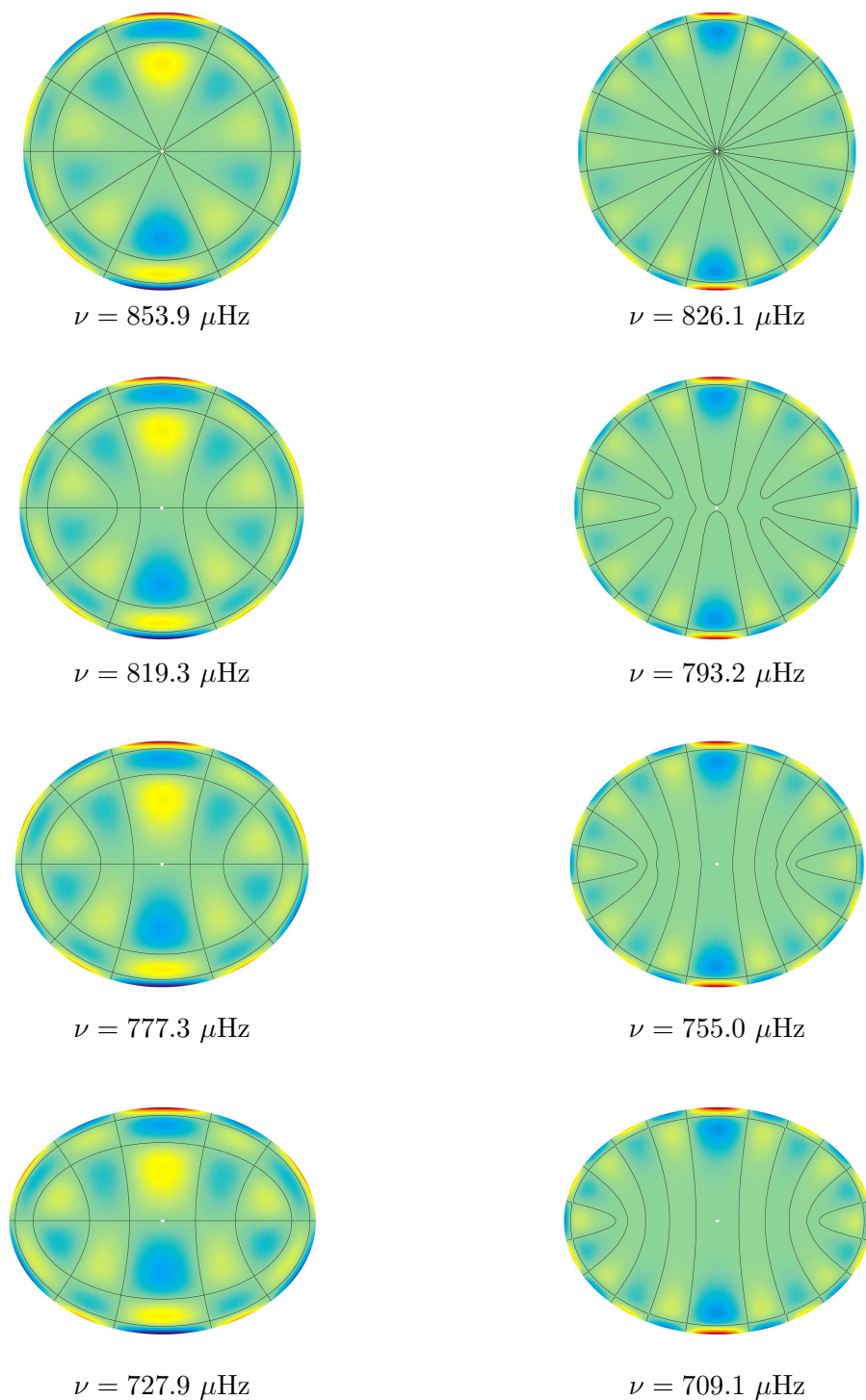


Figura 5.3: Modos normales en un modelo con densidad uniforme para diferentes velocidades de rotación. A la izquierda  $n = 2, l = 5, m = 0$  y a la derecha a  $n = 1, l = 10, m = 0$ . De arriba a abajo  $\chi = 0, 0.1, 0.2$  y  $0.3$ .

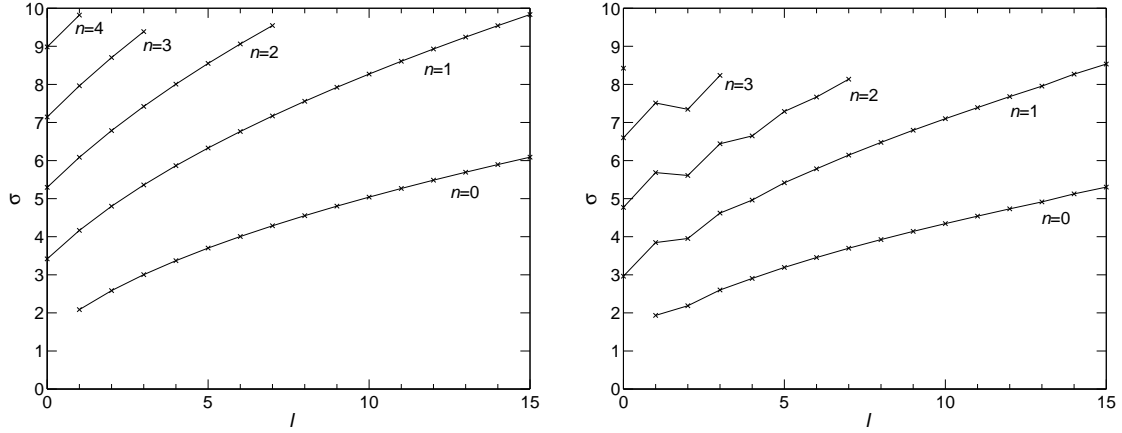


Figura 5.4: Frecuencia normalizada  $\sigma = \frac{\omega}{(GM/R_{\text{eq}}^3)^{1/2}}$  de los modos normales axisimétricos ( $m = 0$ ) de un modelo con densidad uniforme en función de  $l$ . Se han unido los modos con igual orden  $n$ . La figura de la izquierda corresponde a  $\chi = 0$  y la de la derecha a  $\chi = 0.3$ . Se aprecia como la rotación distorsiona la estructura para  $l$  bajo.

la figura 5.4 podemos percibir que los modos antisimétricos ven incrementada su frecuencia frente a los modos simétricos, siendo este efecto el responsable del rizado que presentan las líneas de igual orden  $n$  para  $l$  bajo. Además, si nos restringimos a los modos dentro de un solo tipo de simetría, se conserva la ordenación según el valor de  $l$  dentro de cada orden.

### 5.3 Ruptura de la degeneración en $m$

En un caso de simetría esférica las frecuencias de los modos normales de oscilación están degeneradas en  $m$ , es decir, modos con igual orden  $n$  y grado  $l$  tienen la misma frecuencia independientemente del valor de  $m$ . Sin embargo, al introducir la rotación, la aparición de un eje privilegiado de simetría provoca que se rompa esta degeneración. Existen dos efectos que contribuyen a la ruptura de la degeneración. El primero de ellos está relacionado con el efecto Doppler; dado que una onda con  $m$  positivo viaja en el mismo sentido que la rotación de la estrella, ésta verá incrementada su frecuencia, ocurriendo lo contrario para el caso de  $m$  negativo. Esta corrección de la frecuencia se conoce como aproximación de primer orden<sup>2</sup> en  $\Omega$  y viene dada por la expresión:

$$\omega = \omega_0 + m\Omega, \quad (5.8)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia medida por un observador externo fijo en el espacio y  $\omega_0$  la frecuencia propia medida por un observador que rota con la estrella. De esta forma definiremos la frecuencia propia como  $\omega_0 = \omega - m\Omega$ . Es inmediata la importancia de esta frecuencia ya que

<sup>2</sup>En realidad, la corrección de primer orden es  $\omega = \omega_0 + \beta_{nl}m\Omega$ , donde  $\beta_{nl} \sim 1$ . El parámetro  $\beta_{nl}$  aparece debido a la fuerza de Coriolis, cuyo efecto se ha despreciado en el cálculo de las oscilaciones, por tanto consideraremos  $\beta_{nl} = 1$ .

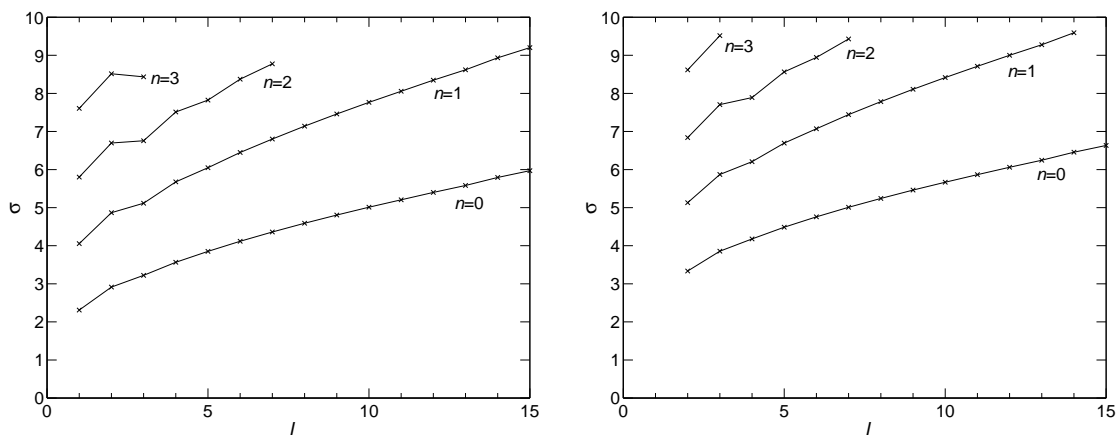


Figura 5.5: Frecuencia normalizada de los modos normales de un modelo con densidad uniforme y  $\chi = 0.3$  en función de  $l$ . Se han unido los modos con igual orden  $n$ . La figura de la izquierda corresponde a  $m = 1$  y la de la derecha a  $m = 2$ . Se observa que los modos antisimétricos ( $l + m$  impar) incrementan su frecuencia frente a los modos simétricos ( $l + m$  par).

si nos fijamos en la ecuación de oscilación (2.49), el autovalor es precisamente el cuadrado de la frecuencia propia.

El segundo fenómeno que contribuye a la ruptura de la degeneración es la variación de la frecuencia propia debida a la geometría del modelo estelar. Éste es el efecto que más nos interesa, dado que se produce como consecuencia de la pérdida de esfericidad y, al contrario que en el caso del efecto Doppler, su magnitud no sería fácil de estimar analíticamente. Para poder evaluar la importancia de este efecto definiremos un valor de  $m$  efectivo de la forma:

$$m_{\text{ef}} = \frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl0}}{\Omega}, \quad (5.9)$$

donde  $\omega_{nlm}$  es la frecuencia del modo clasificado con  $n$ ,  $l$ ,  $m$  y  $\omega_{nl0}$  es la frecuencia del modo correspondiente con  $m = 0$ . De esta forma, la frecuencia del modo  $(n, l, m)$  viene dada por:

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m_{\text{ef}}\Omega \quad (5.10)$$

La magnitud  $m_{\text{ef}}$  solamente está relacionada con el desdoblamiento de la frecuencia y no tiene que ver con consideraciones geométricas relacionadas con el número de nodos en la dirección azimutal. Se puede comprobar que si para un modo dado  $m_{\text{ef}} = m$ , su frecuencia propia es igual a la frecuencia propia del modo correspondiente con  $m = 0$ , y por tanto el único fenómeno que provoca el desdoblamiento es el efecto Doppler. Si  $m_{\text{ef}} \neq m$ , el efecto Doppler no puede dar cuenta por sí solo del desdoblamiento, lo que indica una variación de la frecuencia propia para distintos valores de  $m$ .

Nótese que debido a las aproximaciones utilizadas (en particular despreciar la fuerza de Coriolis) el operador que aparece en la ecuación de oscilación (2.49) no depende del signo de  $m$  de forma que los modos con igual  $n$  y  $l$ , pero con  $m$  de distinto signo tendrán la misma frecuencia propia y por tanto la diferencia entre sus frecuencias será siempre  $2m\Omega$ , es decir,

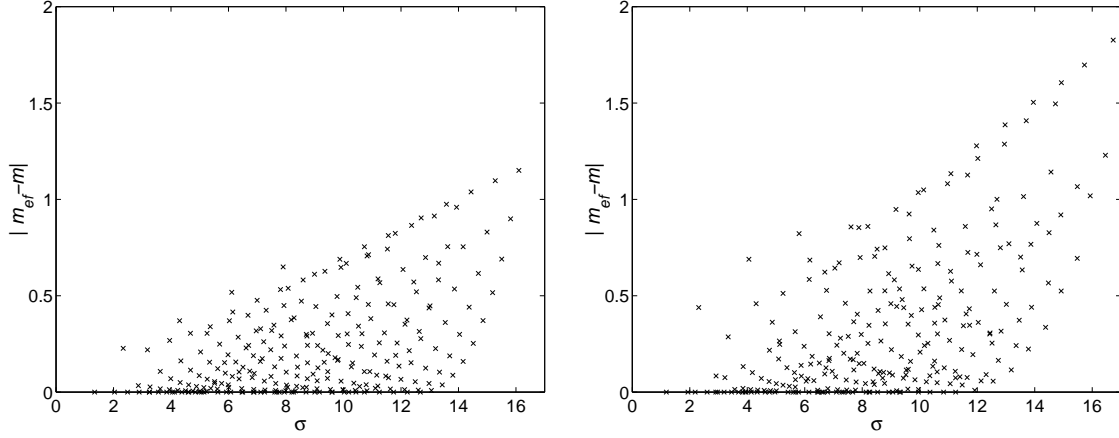


Figura 5.6: Diferencia entre  $m_{\text{ef}}$  y  $m$  de los modos normales frente a la frecuencia normalizada para  $\chi = 0.1$  (izquierda) y  $\chi = 0.3$  (derecha). Los valores representan la desviación respecto de la aproximación de primer orden en  $\Omega$ .

$m_{\text{ef}}(n, l, m) - m_{\text{ef}}(n, l, -m) = 2m$ , permitiéndonos centrar el estudio sólo en los modos con  $m$  positivo. No obstante, esto no significa que los multipletes con igual  $n$  y  $l$  estén centrados, es decir, por ejemplo para un  $l = 1$  las frecuencias correspondientes a  $m = -1$  y  $m = 1$  se diferencian en  $2\Omega$ , pero la frecuencia del modo con  $m = 0$  no se encuentra centrada entre las dos anteriores.

Para medir la importancia de la variación de la frecuencia propia frente al efecto Doppler se representa, en la figura 5.6 la diferencia entre los valores de  $m$  y  $m_{\text{ef}}$  de los modos de oscilación para  $\chi = 0.1$  (izquierda) y  $\chi = 0.3$  (derecha) frente a la frecuencia normalizada. Esta diferencia llega a ser del orden de 1 para  $\chi = 0.1$ , siendo incluso mayor para rotaciones más elevadas.

Con el objeto de analizar en detalle las desviaciones respecto de la corrección de primer orden ajustaremos la diferencia  $m_{\text{ef}} - m$  por una parábola centrada en  $m = 0$ , de la forma:

$$m_{\text{ef},nlm} - m = -k_{2,nl}m^2 + k_{0,nl}, \quad (5.11)$$

donde  $k_0$  y  $k_2$  son coeficientes a ajustar. La forma general para las frecuencias de los modos de un multiplete será por tanto:

$$\omega_{nlm} = \bar{\omega}_{nl} + m\Omega - k_{2,nl}\Omega m^2 + r_{nlm}\Omega, \quad (5.12)$$

donde se han agrupado los residuos del ajuste en el término  $r_{nlm}$  y se define la frecuencia intermedia del multiplete  $\bar{\omega}_{nl} = \omega_{nl0} + k_{0,nl}\Omega$ . Los dos últimos términos de la ecuación (5.12) representan las desviaciones respecto de la corrección de efecto Doppler.

Los resultados del ajuste se muestran en las figuras 5.7 ( $\chi = 0.1$ ) y 5.8 ( $\chi = 0.3$ ). En la parte de la izquierda se representa el valor del coeficiente  $k_{2,nl}$  en función del grado  $l$  (arriba) y de la frecuencia normalizada  $\sigma$  (abajo). En primer lugar se observa que el coeficiente siempre es positivo, aumentando de valor conforme aumenta la frecuencia y disminuye el grado  $l$ , por lo que el efecto será más importante en el rango de  $l$  bajo y  $n$



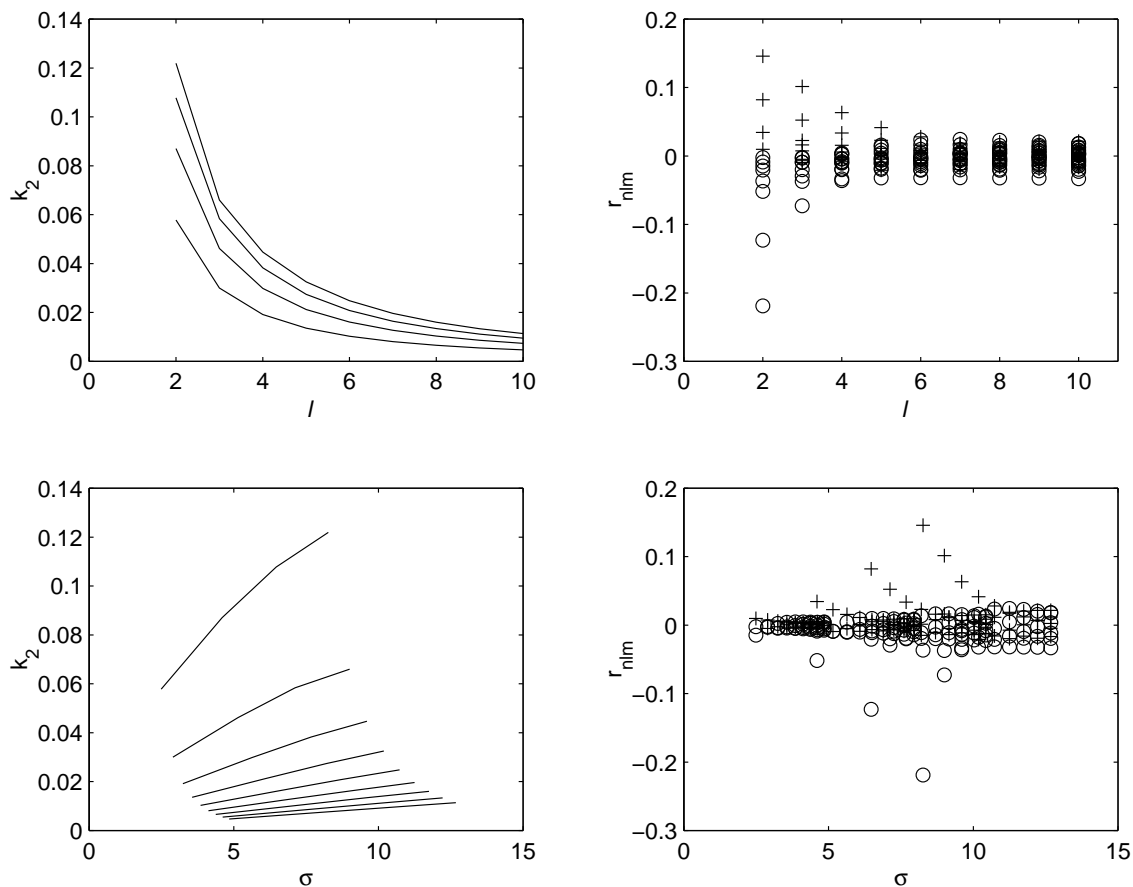


Figura 5.7: Resultados del ajuste de la ecuación (5.11) para  $\chi = 0.1$ . En la parte superior izquierda se representan los valores del coeficiente  $k_{2,nl}$  en función de  $l$ , donde se han unido las líneas de igual  $n$ . En la parte inferior izquierda, los valores de  $k_{2,nl}$  en función de la frecuencia normalizada, uniendo los modos de igual  $l$ . En la parte derecha se muestran los residuos  $r_{nlm}$  del ajuste en función de  $l$  (arriba) y de la frecuencia (abajo). Con círculos los residuos correspondientes a modos simétricos y con cruces los asociados a modos antisimétricos.

alto. Comparando los resultados para  $\chi = 0.1$  y  $\chi = 0.3$  se aprecia que existe un ligero incremento en el valor de  $k_{2,nl}$  al aumentar la rotación, pero de forma limitada. El efecto del término con  $k_{2,nl}$  en la ecuación (5.12) se traduce en una compresión de las frecuencias de los modos hacia la parte superior del multiplete, que será más importante conforme aumenta la rotación.

Otro efecto importante que se puede deducir de los resultados del ajuste proviene del análisis de los residuos. En la parte derecha de las figuras 5.7 y 5.8 se representan los residuos  $r_{nlm}$  frente a  $l$ , en la parte superior, y frente a la frecuencia, en la parte inferior. Los círculos corresponden a modos simétricos respecto del ecuador y las cruces a modos antisimétricos. Se observa una clara tendencia de los modos a aumentar o disminuir su frecuencia según su carácter antisimétrico o simétrico respectivamente. Esto concuerda con lo expuesto en la sección §5.2, donde se afirmaba que los modos antisimétricos incrementaban su frecuencia

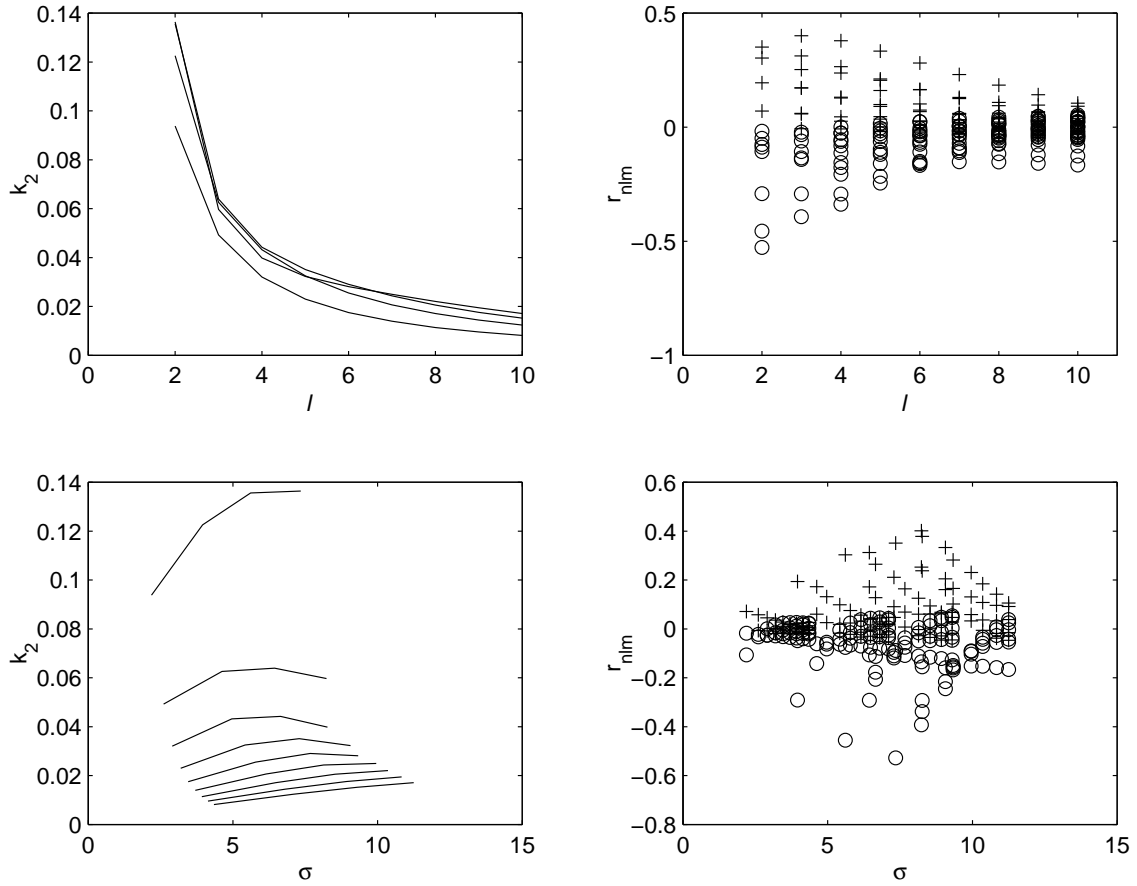


Figura 5.8: Resultados del ajuste de la ecuación (5.11) para  $\chi = 0.3$ . En la parte superior izquierda se representan los valores del coeficiente  $k_{2,nl}$  en función de  $l$ , donde se han unido las líneas de igual  $n$ . En la parte inferior izquierda, los valores de  $k_{2,nl}$  en función de la frecuencia normalizada, uniendo los modos de igual  $l$ . En la parte derecha se muestran los residuos  $r_{nlm}$  del ajuste en función de  $l$  (arriba) y de la frecuencia (abajo). Con círculos los residuos correspondientes a modos simétricos y con cruces los asociados a modos antisimétricos.

respecto de los simétricos. Este efecto es más importante en el rango de  $l$  bajo y  $n$  alto, y aumenta claramente con la velocidad de rotación, como se puede ver en las figuras.

Del análisis del ajuste se extrae que existen dos efectos principales que modifican la estructura de los multipletes. El primero de ellos produce una compresión de las frecuencias hacia la parte superior del multiplete, mientras que el segundo afecta de forma diferencial a los modos según su tipo de simetría. Para comprobar que este análisis se refleja en los resultados, se muestran en la figura 5.9 los ajustes individuales para un conjunto de multipletes. En línea continua se muestran los ajustes calculados según la expresión (5.11), y unidos con línea discontinua se muestran los resultados reales. Vemos que la tendencia real se puede dividir en dos partes, una de ellas continua en  $m$ , que es la que se pretende ajustar con la parábola, y un rizado superpuesto debido al comportamiento diferencial de los modos según su simetría. Los multipletes seleccionados reflejan las diferentes situaciones

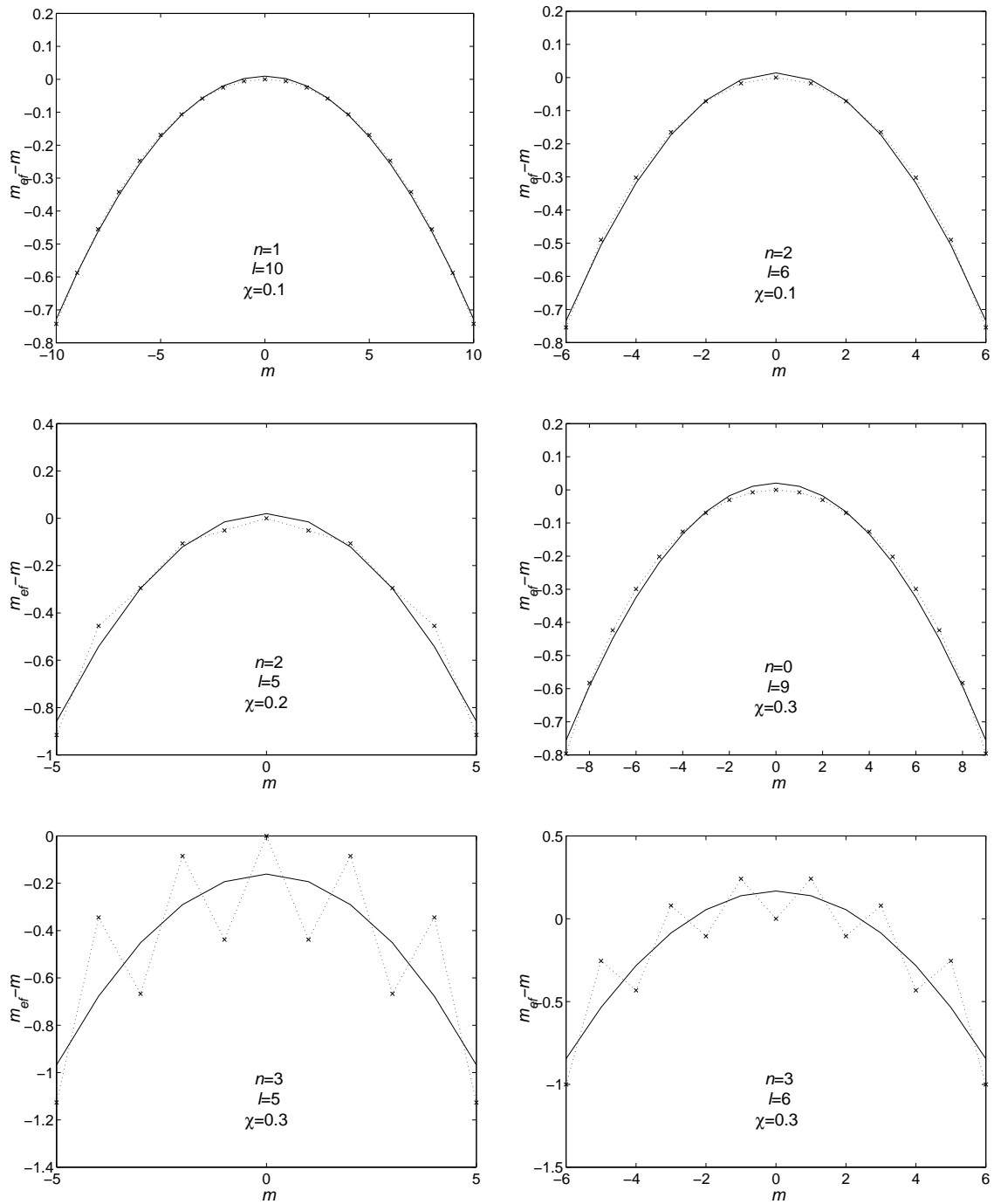


Figura 5.9: Ajustes individuales de la estructura de los multipletes. En línea continua los valores del ajuste y con discontinua los resultados reales. Se aprecia que existe una variación continua con  $m$ , a la que se superpone un rizado debido al efecto diferenciado de la rotación sobre modos simétricos y antisimétricos.

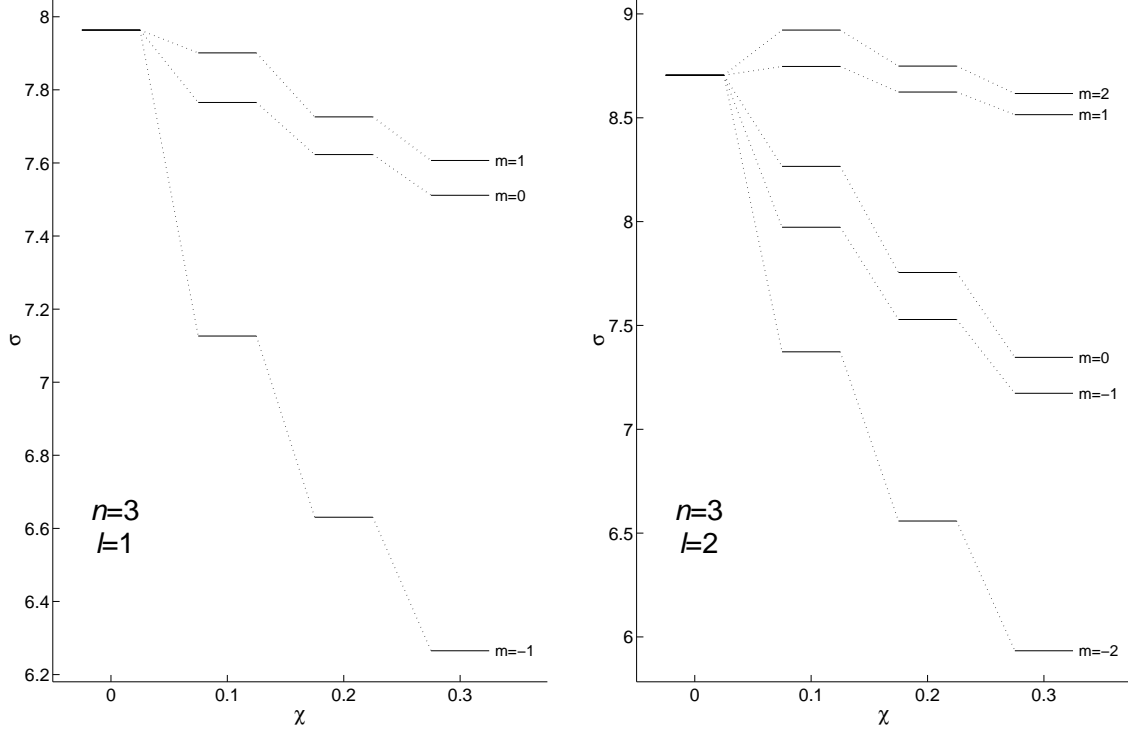


Figura 5.10: Estructura de niveles de los multipletes para distintas velocidades de rotación. El eje vertical representa frecuencia normalizada.

que aparecen en los cálculos. Los dos multipletes de la parte superior se sitúan en el rango de rotación moderada ( $\chi = 0.1$ ) con  $n$  bajo y  $l$  no muy bajo, donde el ajuste funciona razonablemente bien. En la zona media de la figura, se muestran dos situaciones en las que sería necesario un término adicional en  $m^4$  para dar cuenta del comportamiento continuo, así como comienza a aparecer un pequeño rizado. En la parte inferior de la figura se muestran multipletes con rotación elevada y  $n$  alto, en los cuales el rizado comienza a ser dominante. En estas gráficas se puede observar que el rizado crece con  $|m|$  dentro del mismo multiplete, aunque no es nulo para  $m = 0$ . Basándonos en estos datos podemos emplear la siguiente expresión genérica para modelizar las frecuencias de los modos dentro de un multiplete:

$$\omega_{nlm} = \bar{\omega}_{nl} + m\Omega - f_{nl}(m^2, \Omega) - (-1)^{l+m} g_{nl}(m^2, \Omega), \quad (5.13)$$

donde el primer término es la frecuencia intermedia del multiplete y el segundo da cuenta de la corrección de efecto Doppler. Por tanto la desviación respecto de la aproximación de primer orden viene expresada por los dos términos adicionales. El tercer término, que denominaremos término de compresión, es siempre positivo y se anula para  $m = 0$ . El último término depende de la simetría del modo y lo denominaremos término de apareamiento, por razones que se aclararán más adelante. Las funciones  $f_{nl}$  y  $g_{nl}$  son definidas positivas, crecientes con  $\Omega$ ,  $n$  y  $m^2$  y decrecientes con  $l$ . Estas dos funciones son

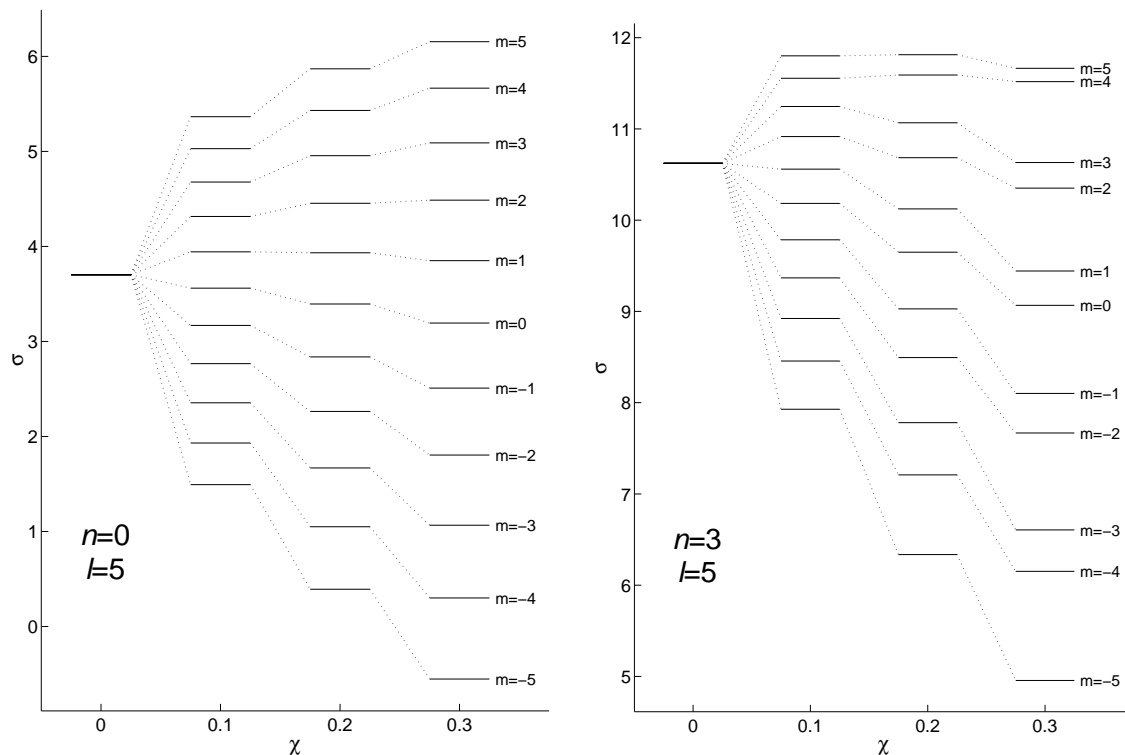


Figura 5.11: Estructura de niveles de los multipletes para distintas velocidades de rotación. El eje vertical representa frecuencia normalizada.

continuas y simétricas respecto a  $m = 0$  debido a que la distancia entre el modo  $(n, l, m)$  y el modo  $(n, l, -m)$  se ha de mantener constante e igual a  $2m\Omega$ .

En las figuras 5.10 y 5.11 se muestra la evolución de la estructura de niveles de varios multipletes conforme aumenta la velocidad de rotación. Una característica importante de los resultados obtenidos es que en ningún caso se altera la ordenación dentro de cada multiplete, y por tanto, el efecto diferencial sobre los dos tipos de simetría de los modos de oscilación se traduce en un apareamiento de éstos, que se acentúa al aumentar la velocidad de rotación. En la figura 5.10 se presentan dos modos de  $l$  bajo, en los cuales los niveles se aparean de forma claramente visible, pero debido a la distinta paridad, en el caso del  $l = 1$  el modo correspondiente a  $m = 0$  se aparea con el  $m = 1$ , mientras que en el multiplete correspondiente a  $l = 2$ , éste se aparea con el  $m = -1$ . Este apareamiento de los modos podría haber sido observado en estrellas de tipo  $\delta$  Scuti (Breger & Bischof, 2002).

En la figura 5.11 se muestra un  $l = 5$  para dos valores distintos de  $n$ . Se puede ver que para el multiplete con  $n = 0$  el único efecto visible es el de compresión hacia las frecuencias altas, mientras que para  $n = 3$  el efecto del apareamiento también está presente. Nótese que la frecuencia del modo  $n = 0, l = 5, m = -5$  se ha representado con un valor negativo para mayor claridad, sin embargo la frecuencia medida debe ser el valor absoluto (positivo)

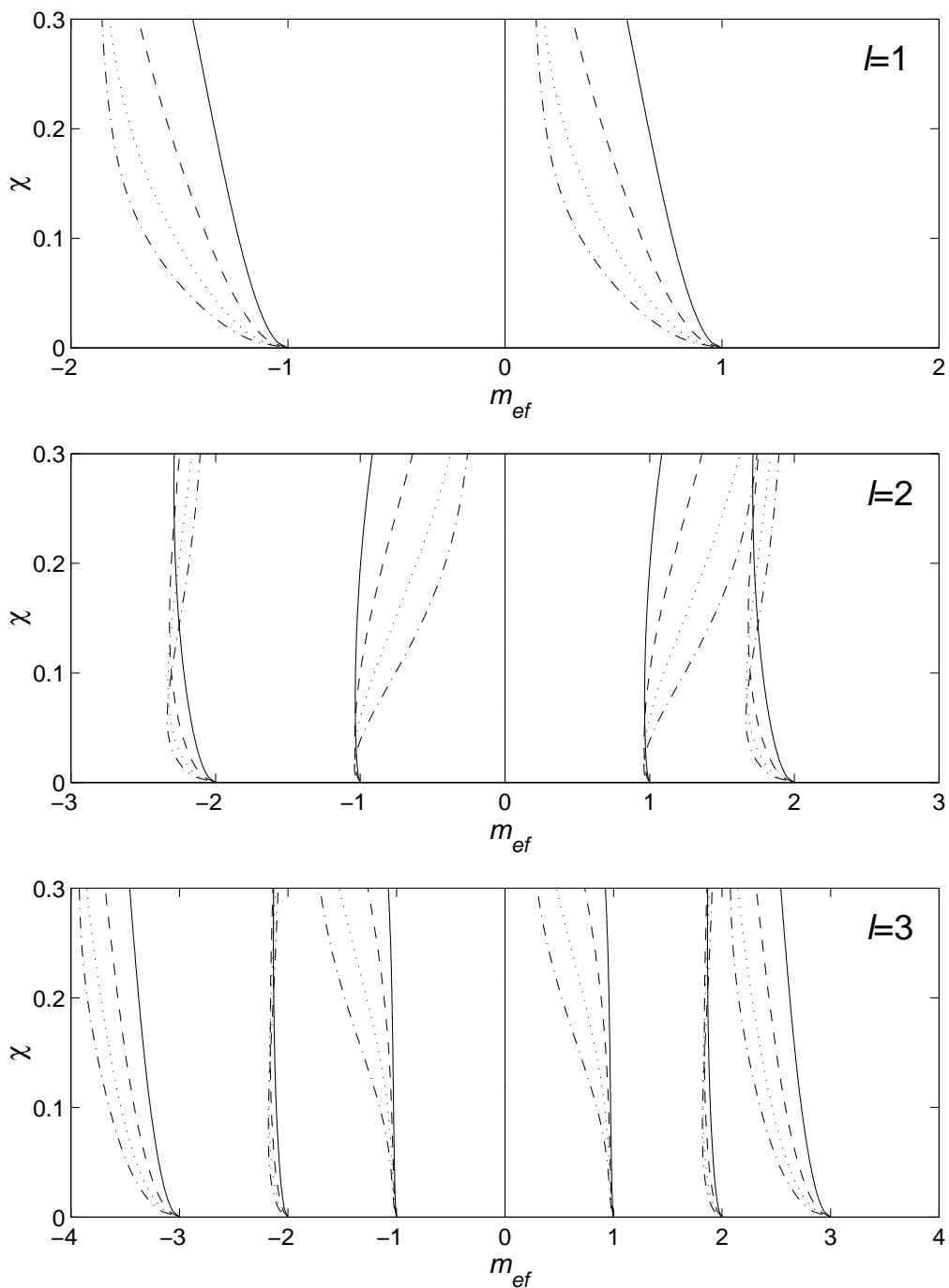


Figura 5.12: Variación de la estructura de los multipletes en función de la velocidad de rotación ( $\chi$ ). De arriba a abajo  $l = 1$ ,  $l = 2$  y  $l = 3$  con  $n = 0$  (línea continua),  $n = 1$  (discontinua),  $n = 2$  (punteada) y  $n = 3$  (rayas y puntos).

de la frecuencia representada<sup>3</sup>. El cambio de signo de la frecuencia calculada representa un cambio en el sentido de propagación de la onda vista desde un sistema de referencia fijo en el espacio, causado por la superposición de la velocidad de rotación de la estrella (en sentido directo) y la velocidad de propagación en el sistema propio de la onda con  $m$  negativo (en sentido inverso). Dependiendo de cuál de las dos velocidades sea mayor, la onda resultante viajará en un sentido o en otro. En cualquier caso, el modo  $n = 0, l = 5, m = -5$  no estará bien calculado debido a las aproximaciones efectuadas ( $\omega \gg \Omega$ ).

En la muestra analizada, el efecto diferencial de la rotación sobre los modos según su tipo de simetría provoca un apareamiento de los modos dentro de cada multiplete. Sin embargo no queda claro si las frecuencias de los modos de distinta simetría pueden llegar a cruzarse, alterando el orden del multiplete. Para analizar esto, se muestra en la figura 5.12 la evolución de la estructura de varios multipletes conforme aumenta el valor de  $\chi$ . Da la impresión de que las frecuencias de los modos que se aparean se acercan entre sí asintóticamente, por lo que no parece que vayan a cruzarse. Esto significaría que el orden de los multipletes permanece inalterado al aumentar la rotación. Sin embargo, hay que señalar que este orden se refiere a la frecuencia observada desde un sistema de referencia fijo en el espacio y no a la frecuencia propia, que es la que aparece en la ecuación de oscilación. Dado que el operador de la ecuación de oscilación (2.49) no depende del valor de  $\Omega$ , si hipotéticamente se pudieran tener dos modelos estelares ficticios idénticos pero con valores distintos de  $\Omega$ , éstos tendrían las mismas frecuencias propias, y será el valor concreto de  $\Omega$  el que determine si los frecuencias observadas se cruzan o no. Por tanto concluimos que el hecho de que no se altere el orden de los multipletes dependerá únicamente del modelo estelar en equilibrio empleado y no de la ecuación de oscilación.

## 5.4 Acoplamiento de modos

### 5.4.1 Definición de acoplamiento: Modos indistinguibles

Para poder comprender el fenómeno del acoplamiento de modos, en primer lugar debemos definir una serie de conceptos relativos a la naturaleza de las autofunciones en el problema que nos ocupa. Por lo general un modo se identifica mediante un conjunto de números cuánticos, en nuestro caso éstos son  $n, l$  y  $m$ , aunque también podríamos incluir la frecuencia  $\omega$ . Sin embargo, no todos estos parámetros son buenos números cuánticos, en particular el orden  $n$  y el grado  $l$ . En un problema lineal de valores propios cada una de las simetrías presentes llevará asociado un buen número cuántico. En el caso que nos ocupa las simetrías existentes y sus buenos números cuánticos asociados son los siguientes:

- **Simetría temporal.** La ecuación de oscilación no depende explícitamente del tiempo, lo que hace que el problema sea invariante frente a traslaciones temporales. El buen número cuántico asociado a la simetría temporal es la frecuencia ( $\omega$ ).
- **Simetría axial.** Esta es la principal restricción que se le impone al modelo estelar en equilibrio. El buen número cuántico asociado es el índice azimutal  $m$ .

<sup>3</sup>En este caso sí se produciría una alteración del orden del multiplete.

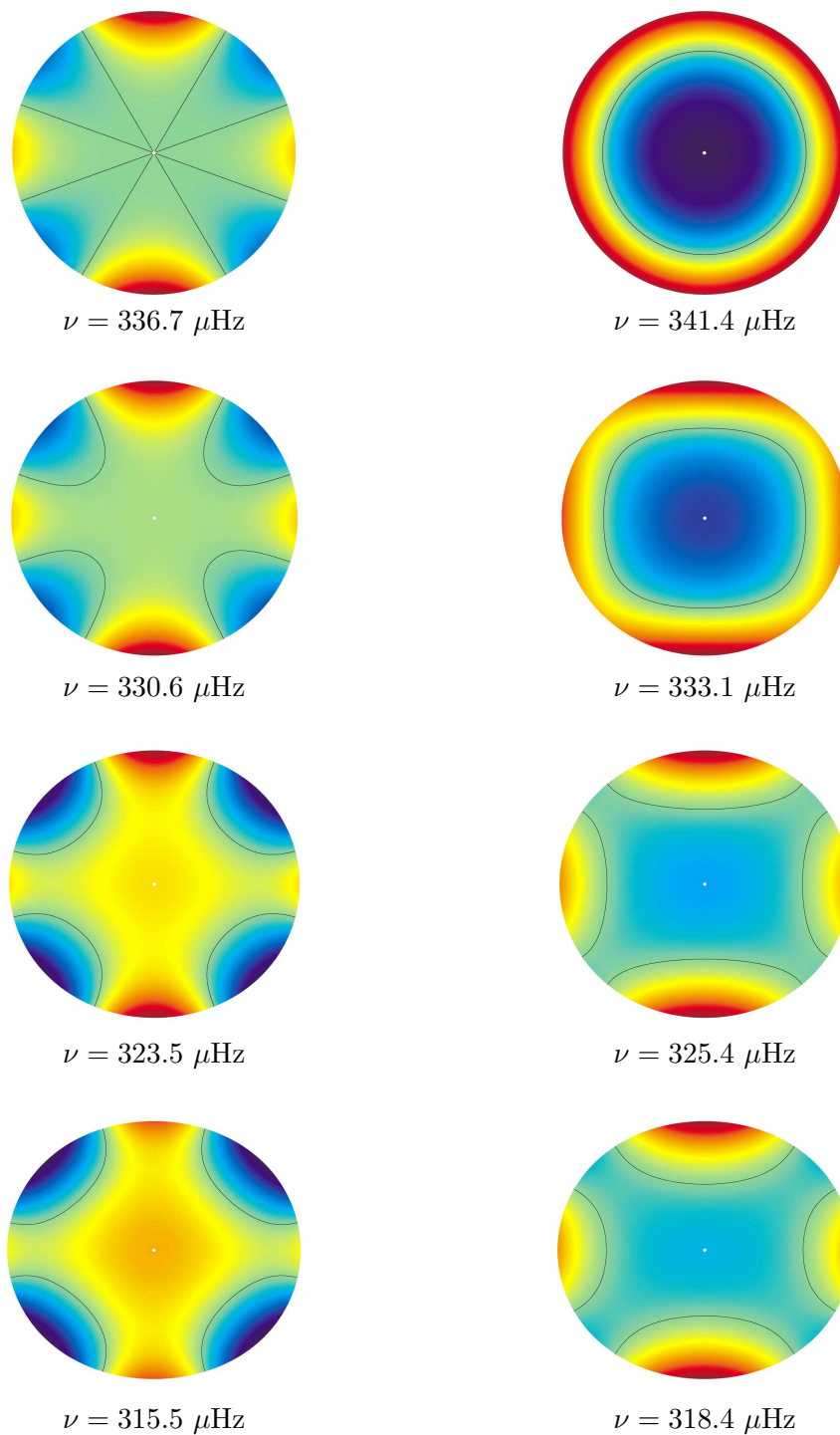


Figura 5.13: Acoplamiento entre el modo  $n = 0, l = 4, m = 0$  (izquierda) y el modo  $n = 1, l = 0, m = 0$  (derecha). De arriba a abajo  $\chi = 0, 0.05, 0.1$  y  $0.15$ .



- **Simetría respecto al plano del ecuador.** Existen dos posibilidades respecto al buen número cuántico asociado a esta simetría, aunque ambas son equivalentes. La primera posibilidad es la paridad del modo. Se dice que un modo es par ( $l$  par) cuando  $\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$  e impar ( $l$  impar) cuando  $\psi(\mathbf{r}) = -\psi(-\mathbf{r})$ . La otra posibilidad es escoger como número cuántico el tipo de simetría del modo, definido anteriormente. Un modo simétrico ( $l + m$  par) cumple  $\psi(r, \theta) = \psi(r, \pi - \theta)$ , mientras que un modo antisimétrico ( $l + m$  impar) cumple  $\psi(r, \theta) = -\psi(r, \pi - \theta)$ . Es fácil ver que un modo par será simétrico si  $m$  es par y antisimétrico si  $m$  es impar y de forma equivalente para los modos impares.

Basándonos en lo expuesto hasta ahora, diremos que dos modos son indistinguibles cuando todos sus buenos números cuánticos sean iguales, a excepción de la frecuencia. En nuestro caso, dos modos con la misma paridad y el mismo valor de  $m$  serán indistinguibles.

El acoplamiento es un fenómeno que se produce cuando dos modos indistinguibles poseen frecuencias próximas entre sí. Debido a este acercamiento se produce una interferencia entre los dos modos de forma que éstos adoptan un carácter híbrido entre las configuraciones que tendrían si no hubiera acoplamiento.

El grado de acercamiento de las frecuencias necesario para que se produzca acoplamiento entre dos modos de oscilación dependerá del caso concreto que estemos estudiando. Como regla general, podemos suponer que el acoplamiento será más fuerte (es decir, aparecerá entre modos más alejados) cuando aumente la velocidad de rotación, sin embargo también dependerá en gran medida de la forma de la superficie y la estructura del modelo estelar empleado.

En el caso de los modelos de densidad uniforme introducidos en el apartado §5.1 el acoplamiento es bastante débil. Esto nos ha permitido realizar una clasificación satisfactoria en las secciones anteriores, pero dificulta el estudio del acoplamiento. Para obtener una serie de modelos en los que exista un acoplamiento más fuerte, se perturbarán los modelos de densidad uniforme. En particular perturbamos el potencial total (5.2), poniéndolo de la forma:

$$\phi = \alpha r^2 (1 + f_2 P_2(\cos \theta) + f_4 P_4(\cos \theta)), \quad (5.14)$$

donde  $P_4$  es el polinomio de Legendre con  $l = 4$  y  $f_4 = \beta f_2$ . Escogemos  $\beta = 0.1$ . El resto de las magnitudes se calculan de forma idéntica al modelo sin perturbar.

Se han realizado diversos cálculos para este tipo de modelos variando la velocidad de rotación. En la muestra analizada encontramos dos modos cuyas frecuencias permanecen próximas conforme aumenta la rotación, lo cual produce un acoplamiento continuado entre ellos, como se puede ver en la figura 5.13. Inicialmente, para  $\chi = 0$ , los modos no están acoplados, dado que el grado  $l$  es un buen número cuántico en el caso de simetría esférica. Esto nos permite clasificarlos como  $n = 0, l = 4, m = 0$  y  $n = 1, l = 0, m = 0$ . Al aumentar el valor de  $\chi$  comienza a aparecer el acoplamiento de forma progresiva, mezclando las configuraciones de ambos modos y dificultando su clasificación. Esto tiene implicaciones importantes en cuanto a la clasificación en  $n$  y  $l$  de los modos de oscilación, ya que conforme se pierde la simetría esférica, la distancia mínima para que se produzca acoplamiento se va haciendo mayor y por tanto existirá un mayor número de modos acoplados. Esto hace

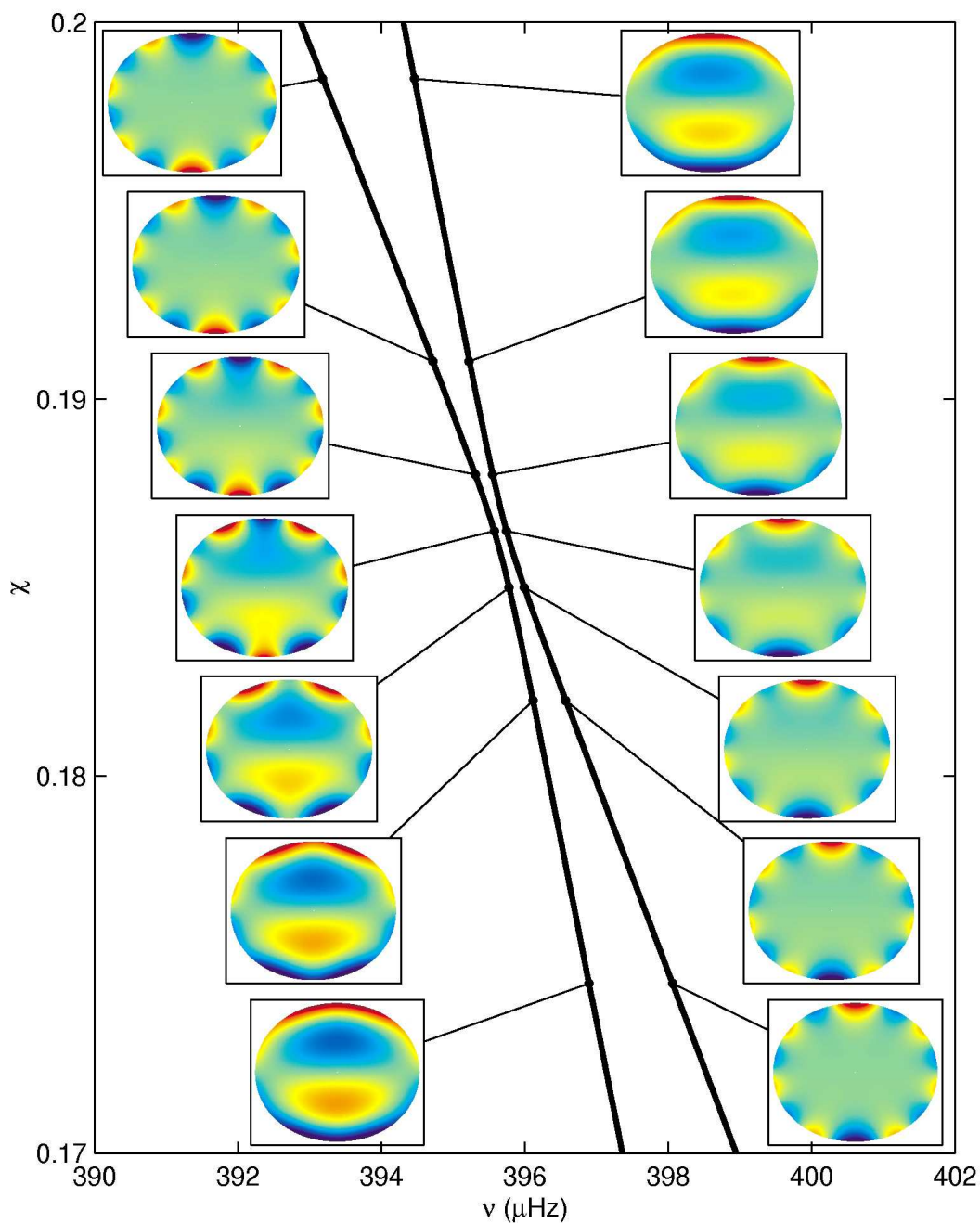


Figura 5.14: Cruce prohibido entre el modo  $n = 0, l = 7, m = 0$  y el modo  $n = 1, l = 1, m = 0$ . Al tratarse de dos modos indistinguibles entre sí, no pueden poseer los dos idéntica frecuencia, por lo que no se produce una intersección entre las dos curvas. Sin embargo, se puede apreciar como los modos se acoplan fuertemente al disminuir la diferencia entre sus frecuencias, intercambiando sus configuraciones después del cruce. Las curvas representan los valores de las frecuencias de los modos en función de la velocidad de rotación. Se ha representado la estructura de los modos en diferentes puntos de las curvas.

que, aunque la cuenta de modos debe permanecer constante, no sea posible asignar una clasificación natural única para cada modo.

#### 5.4.2 Acoplamiento por cruces prohibidos

El tipo de acoplamiento de los modos de la figura 5.13 se produce de forma continuada en un amplio rango de velocidades de rotación. Sin embargo existe otro tipo de acoplamiento, que tiene lugar de forma más puntual. Este acoplamiento está relacionado con los denominados cruces prohibidos. Dos modos indistinguibles entre sí no pueden tener la misma frecuencia. Esto tiene una consecuencia importante cuando las frecuencias de dos modos con igual paridad y valor de  $m$  muestran tendencia a cruzarse al aumentar la velocidad de rotación. Dado que los dos modos no pueden tener idéntica frecuencia, el cruce no puede llegar a producirse. Es en este caso cuando hablamos de un cruce prohibido. En las figuras 5.14 y 5.15 podemos ver dos ejemplos de este tipo de cruce. Como se aprecia en las figuras, el cruce no llega a producirse, aunque, una vez atravesada la zona de máximo acercamiento, los dos modos intercambian su carácter. Esto hace que, en la práctica, a efectos de clasificación, sea más conveniente suponer que el cruce se ha producido. De esta forma, la clasificación no se haría por continuidad en  $\chi$ , sino en base al aspecto de las autofunciones.

### 5.5 Resumen

Se han calculado los modos de oscilación para un conjunto de modelos estelares en rotación con densidad uniforme. De los resultados obtenidos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- En general, cuando no existe acoplamiento, los modos guardan una gran similitud con los armónicos esféricos, lo cual permite establecer una clasificación en función de  $n$  y  $l$ .
- Los modos normales presentan un comportamiento diferenciado según su tipo de simetría respecto al ecuador. Los modos antisimétricos tienden a incrementar su frecuencia por encima de los modos simétricos.
- Los efectos de la rotación se ven acentuados en el rango de  $l$  bajo y  $n$  alto.
- En la muestra analizada, dentro de cada tipo de simetría y de cada orden  $n$  se mantiene la ordenación de los modos en la dirección creciente de  $l$ . Asimismo, también se mantiene la colocación en orden ascendente de  $m$  dentro de cada multiplete, formado por los modos de igual  $n$  y  $l$ .
- En la estructura de los multipletes, formados debido a la ruptura de la degeneración en  $m$ , se pueden distinguir tres efectos. En primer lugar, el debido al efecto Doppler, que causa un desdoblamiento equiespaciado de las frecuencias y será el único importante en el rango de muy bajas velocidades de rotación. En segundo lugar aparece un efecto de compresión en la separación de los modos situados hacia la zona de más alta frecuencia. Por último se produce un efecto de apareamiento de los modos con distinto tipo de simetría dentro del multiplete.

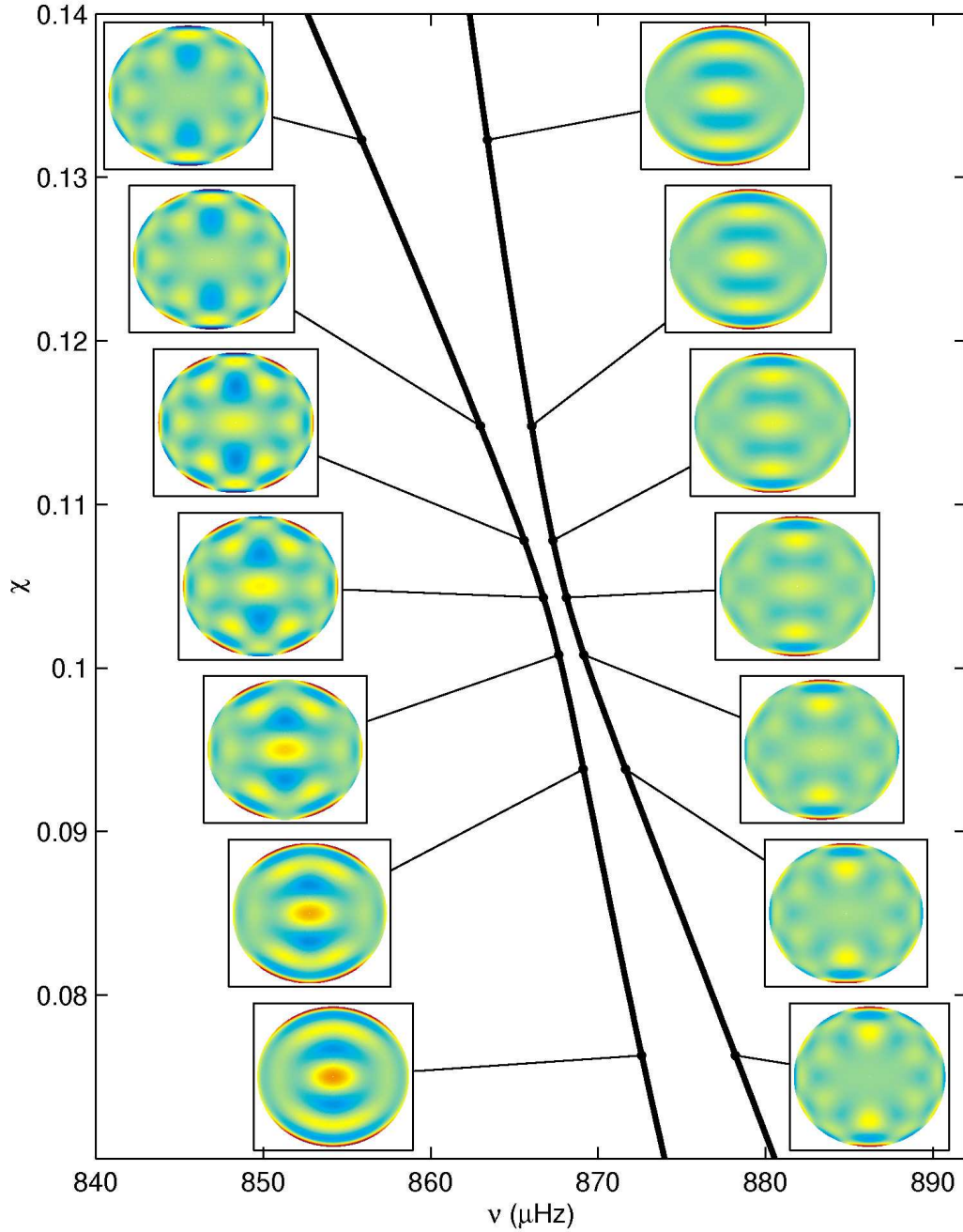


Figura 5.15: Cruce prohibido entre el modo  $n = 2, l = 6, m = 0$  y el modo  $n = 4, l = 0, m = 0$ . Al tratarse de dos modos indistinguibles entre sí, no pueden poseer los dos idéntica frecuencia, por lo que no se produce una intersección entre las dos curvas. Sin embargo, se puede apreciar como los modos se acoplan fuertemente al disminuir la diferencia entre sus frecuencias, intercambiando sus configuraciones después del cruce. Las curvas representan los valores de las frecuencias de los modos en función de la velocidad de rotación. Se ha representado la estructura de los modos en diferentes puntos de las curvas.

- El acoplamiento entre modos con frecuencias cercanas dificulta la clasificación de éstos. Podemos distinguir dos tipos de acoplamiento, que son en realidad dos facetas del mismo fenómeno. Un acoplamiento continuado, que se produce en un amplio rango de velocidades de rotación y un acoplamiento debido a los cruces prohibidos, que aparece de forma más puntual.

# 6

---

## Oscilaciones en Modelos Estelares en Rotación: Modelos Realistas

En el capítulo anterior se estudiaron las propiedades de los modos normales de oscilación en un conjunto de modelos en rotación con densidad uniforme. El propósito de este capítulo será comprobar si estas propiedades son aplicables también en el caso de modelos construidos utilizando una física más realista. Además intentaremos encontrar técnicas que nos permitan hacer una clasificación de los modos en términos de  $n$  y  $l$ .

Empezaremos, en §6.1, describiendo los modelos que van a ser empleados en el cálculo. En §6.2 se comprobará si los resultados del capítulo 5 siguen siendo válidos para estrellas realistas. En §6.3 estudiaremos el acoplamiento presente en los modos e intentaremos dar claves para efectuar una clasificación. A continuación, en §6.4, trataremos el fenómeno del equiespaciamiento en frecuencia de los modos de oscilación. En §6.5 se hará un estudio del efecto de la rotación en la visibilidad de los modos. Por último, en §6.6, efectuaremos un resumen de los resultados más destacados aparecidos a lo largo del capítulo.

### 6.1 Modelos estelares en rotación

Para el desarrollo del presente capítulo se ha utilizado un conjunto de modelos calculados por A. Claret (Claret, 1999). Se trata de modelos estelares en rotación calculados usando la aproximación cuasiesférica con algunas modificaciones. Se basan en superficies equipotenciales, en las cuales las magnitudes en equilibrio (presión, densidad, ...) toman un valor constante en toda la superficie. El potencial total, a partir del cual se calculan los modelos, tiene en cuenta la deformación de la estrella, dividiéndose en tres contribuciones: un potencial esférico, el potencial centrífugo debido a la rotación y una corrección que da cuenta de la distorsión de la distribución de masa.

El conjunto consta de tres modelos de  $1.8M_{\odot}$  con velocidades de rotación diferentes. Las características relevantes de cada modelo se resumen en la tabla 6.1. El modelo 1 corresponde a una estrella sin rotación y, por tanto, con simetría esférica, mientras que los modelos 2 y 3 poseen velocidades de rotación importantes, del orden de la velocidad crítica ( $\Omega_c$ ), para la cual la fuerza centrífuga en el ecuador es igual a la fuerza gravitatoria.

	$M (M_{\odot})$	$\Omega (\text{cd}^{-1})$	$\Omega (\mu\text{Hz})$	$\Omega/\Omega_c$	$\epsilon$
Modelo 1	1.8	0	0	0	0
Modelo 2	1.8	1.62	18.8	0.51	0.05
Modelo 3	1.8	2.49	28.8	0.78	0.13

Tabla 6.1: Características de los modelos estelares utilizados. De izquierda a derecha: masa en unidades de masa solar, velocidad de rotación en ciclos por día, en  $\mu\text{Hz}$  y en unidades de la velocidad crítica  $\Omega_c^2 = \frac{8GM}{27R_p^3}$ , en último lugar el achatamiento  $\epsilon = \frac{R_e - R_p}{R_p}$ .  $R_e$  y  $R_p$  son el radio ecuatorial y polar respectivamente.

## 6.2 Propiedades de los modos de oscilación

Se ha utilizado nuestro código OMASS2d para calcular los modos de oscilación de los modelos de la sección anterior con frecuencias entre 0 y 0.5 mHz y grado azimutal  $m$  entre 0 y 3. Para realizar el cálculo se han empleado 2000 puntos en la dirección radial y un valor de  $l_{\text{max}} = 40$ , seleccionando únicamente los modos con grado  $l$  entre 0 y 19, debido a que los restantes podrían tener un error apreciable. La tabla completa de los modos calculados de esta forma se detalla en el apéndice B. Más adelante se describirá un segundo cálculo realizado para estudiar los modos axisimétricos de más alta frecuencia.

La clasificación de los modos en términos de  $n$  y  $l$  se ha realizado principalmente atendiendo a su apariencia, tal como se hizo en el capítulo anterior, sin embargo la presencia de un intenso acoplamiento entre algunos modos hace necesario el uso de criterios alternativos para establecer una clasificación. Esto se detallará en profundidad en la sección 6.3, por el momento sólo es necesario destacar que el acoplamiento es más acentuado para los modos con  $l$  y  $m$  muy bajo y en mayor medida para los que tienen  $l+m$  par (simétricos).

En los resultados del capítulo 5 se observó que existía un comportamiento claramente diferenciado de los modos en función de su carácter simétrico o antisimétrico, de forma que los modos antisimétricos ( $l+m$  impar) tienden a aumentar su frecuencia frente a los modos simétricos ( $l+m$  par). Este comportamiento también se observa, en general, en el cálculo actual, como se muestra en la figura 6.1. En esta figura se representa la frecuencia de los modos en función del grado  $l$  para diferentes casos, y se observa claramente que existe un rizado en las curvas de igual orden  $n$  para  $l$  bajo. Este hecho nos lleva a pensar que este comportamiento constituye una propiedad general de los modos de oscilación en estrellas en rotación. Sin embargo, en el caso de modelos realistas esta regla no es tan estricta, por ejemplo, en la gráfica correspondiente al modelo 3 con  $m = 0$  (abajo a la izquierda) los modos clasificados con  $l = 4$  y  $n$  entre 0 y 3 muestran un comportamiento diferente, contrario al descrito. Esto puede ser debido a una clasificación incorrecta o a algún otro efecto que no estaba presente en los modelos de densidad uniforme. En todo caso, este comportamiento irregular solo aparece en modos para los cuales el rizado es muy pequeño.

Una propiedad importante que se aprecia en la figura 6.1 es que las frecuencias de los modos de igual grado  $l$  están prácticamente equiespaciadas, al igual que sucede en una estrella con simetría esférica para frecuencias altas. Aunque el número de órdenes  $n$  calculados es relativamente bajo como para poder afirmar con rotundidad esta propiedad, en principio no existe ninguna razón para pensar que este comportamiento no se pueda extrapolar a órdenes más altos.

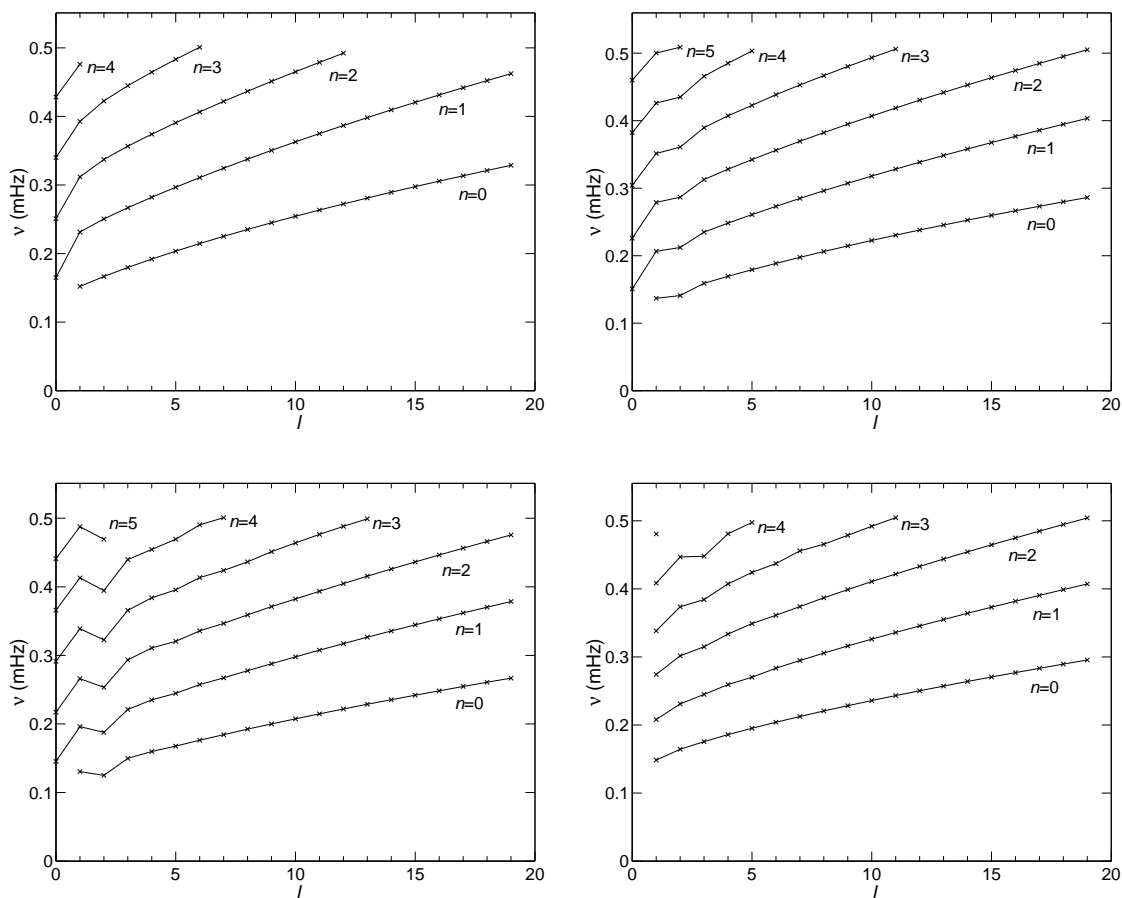


Figura 6.1: Frecuencia de los modos de oscilación frente al grado  $l$ . Se han unido los modos con igual orden  $n$ . Arriba a la izquierda los modos correspondientes al modelo 1 con  $m = 0$ , a la derecha el modelo 2 con  $m = 0$ , abajo a la izquierda el modelo 3 con  $m = 0$  y a la derecha el modelo 3 con  $m = 1$ . Se puede observar cómo la rotación afecta de forma diferente a los modos según su tipo de simetría.

Otro efecto interesante que surgía del cálculo de las oscilaciones de un modelo de densidad uniforme, llevado a cabo en el capítulo 5, está relacionado con la estructura de niveles de los multipletes de igual  $n$  y  $l$ . Como ya se explicó el comportamiento diferenciado de los modos según su tipo de simetría tenía como consecuencia el apareamiento de los modos en el interior del multiplete, ya que en éste se alternan modos simétricos y antisimétricos. Conjuntamente con el apareamiento, también se produce un efecto de compresión de las frecuencias hacia la parte superior del multiplete. Tras el análisis de los resultados del presente capítulo, se observa que este comportamiento también aparece en los modos normales de los modelos realistas. En la figura 6.2 se muestran varios ejemplos representativos de estos dos fenómenos. Arriba a la izquierda se muestra el multiplete correspondiente a  $n = 2$ ,  $l = 1$  en donde se aprecia con claridad un apareamiento de los modos  $m = 0$  y  $m = 1$ . Arriba a la derecha ( $n = 3$ ,  $l = 3$ ) vemos un multiplete en el que se combinan los dos efectos de apareamiento y compresión. Abajo a la izquierda ( $n = 3$ ,



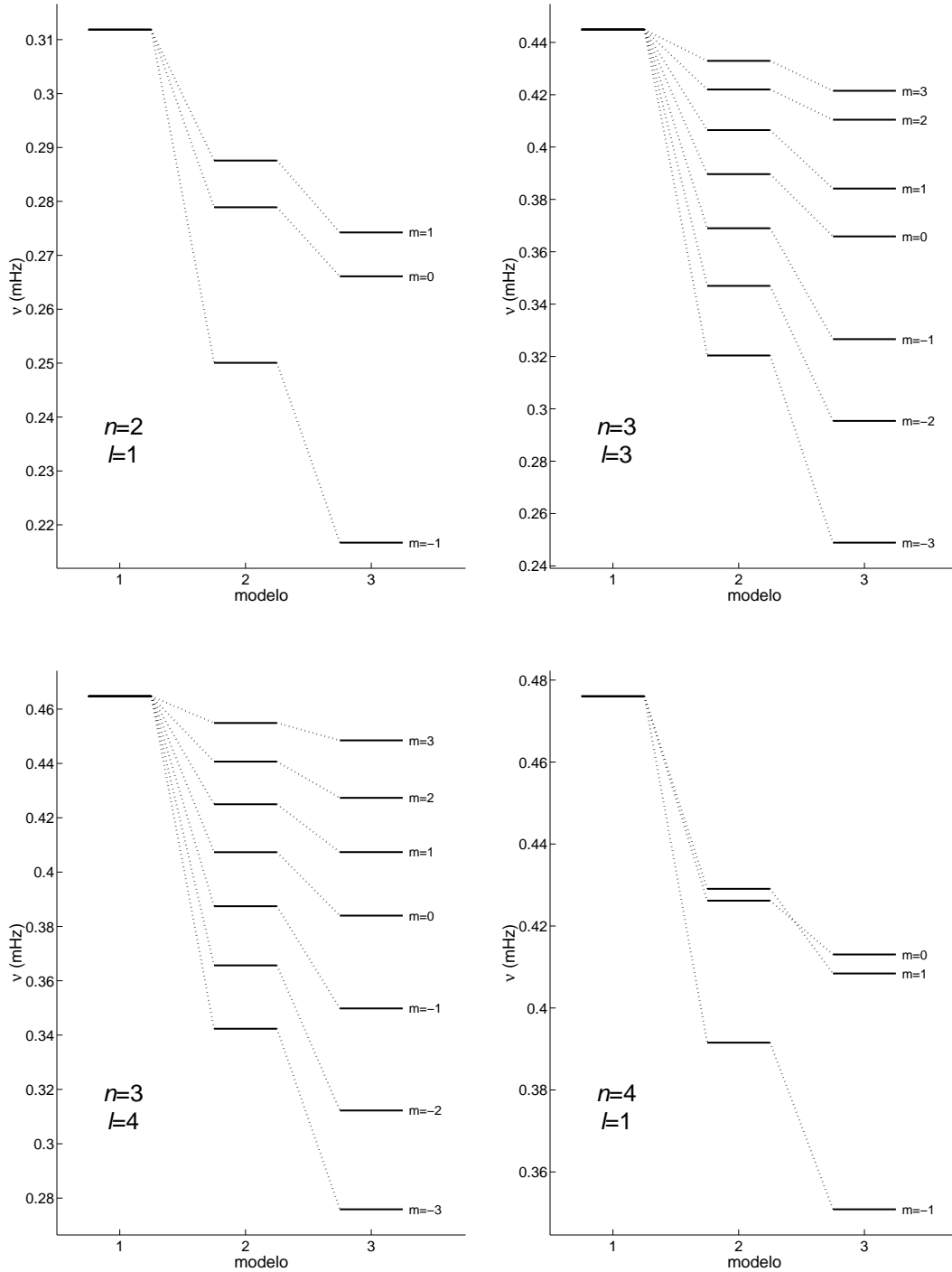


Figura 6.2: Estructura de niveles de los multipletes para los distintos modelos.

$l = 4$ ) aparece un multiplete<sup>1</sup> poco afectado de apareamiento pero en el cual el fenómeno de compresión es significativo. Por último abajo a la derecha se muestra el multiplete  $n = 4$ ,  $l = 1$ , en el cual el efecto de apareamiento es suficientemente grande para que las frecuencias de los modos  $m = 0$  y  $m = 1$  lleguen a cruzarse, alterando el orden del multiplete. Esto no ocurría en los modelos de densidad uniforme, en los cuales daba la impresión de que las frecuencias de los modos apareados se acercaban asintóticamente sin llegar nunca a cruzarse. Como ya se discutió en el capítulo 5, el hecho de que llegue a producirse o no el cruce de las frecuencias dentro del multiplete depende únicamente del modelo utilizado y en particular de la relación entre la estructura del modelo y la velocidad de rotación. Por tanto para poder afirmar que el cruce no puede llegar a producirse debería existir alguna regla inherente a los modelos estelares en rotación que condicionase este hecho. Dentro de nuestros resultados, este cruce solamente se produce en el multiplete  $n = 4$ ,  $l = 1$ , mostrado en la figura 6.2, y en mucha menor medida en el  $n = 3$ ,  $l = 1$ , que corresponden a los multipletes más afectados por apareamiento. Ésto podría indicar que, en principio, es posible que se altere el orden de los multipletes, aunque no se puede realizar esta afirmación con absoluta certeza, ya que en cualquier caso los modelos estelares empleados surgen de un cálculo aproximado y la diferencia de frecuencias es bastante pequeña.

En esta sección se ha demostrado que los efectos debidos a la rotación que aparecían en los modelos de densidad uniforme del capítulo 5 siguen estando presentes en los modelos realistas de este capítulo. Además debemos añadir que, al igual que en el capítulo 5, estos fenómenos son más importantes en los modos con  $l$  bajo y  $n$  alto. En las secciones siguientes se hablará de las particularidades de los modos de oscilación en los modelos realistas.

### 6.3 Acoplamiento y clasificación

En el capítulo 5 vimos que en los modos normales resultantes de los modelos de densidad uniforme no aparecía acoplamiento, e incluso después de perturbar la estructura el acoplamiento era relativamente débil. Sin embargo, en los modelos realistas utilizados en este capítulo, el acoplamiento juega un papel muy importante en la estructura de las autofunciones, llegando a ser predominante para algunos modos. En los resultados se observa cierta dependencia entre el acoplamiento y la clasificación de los modos, de esta forma los modos menos afectados corresponden a los que tienen  $l$  y  $m$  más alto y  $n$  más bajo. También se observa que los modos simétricos poseen mayor acoplamiento que los antisimétricos para  $n$ ,  $l$  y  $m$  similares (ver apéndice B).

#### 6.3.1 Modos con $l$ alto

Entre los modos que menos se acoplan ( $l$  alto) a veces puede ocurrir lo que llamaremos acoplamiento accidental, que correspondería a los cruces prohibidos del capítulo 5. Ocurre cuando dos modos indistinguibles (igual simetría e igual  $m$ ) poseen frecuencias muy cercanas para una cierta velocidad de rotación. En las figuras 6.3 y 6.4 se muestran dos ejemplos de acoplamiento accidental en los modelos 2 y 3.

<sup>1</sup>El hecho de que el multiplete no esté completo (faltan los modos  $m = 4, -4$ ) se debe a que solamente han sido calculados los modos con  $m$  entre 0 y 3, las frecuencias de los modos con  $m$  negativo se han obtenido de la misma forma que en el capítulo 5.

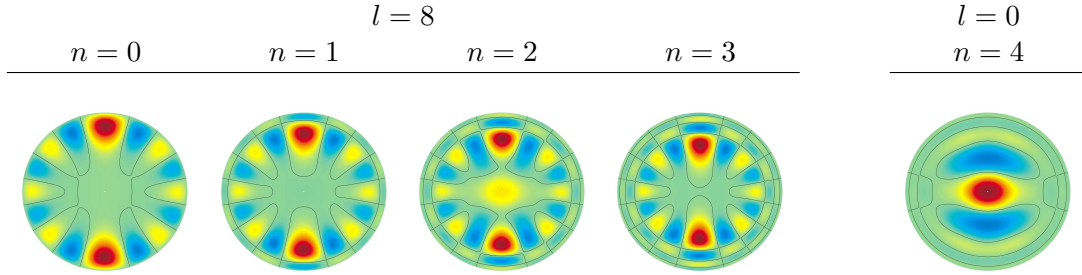


Figura 6.3: Modos normales ( $m = 0$ ) correspondientes al modelo 2. Nótese el acoplamiento accidental entre el modo  $n = 2, l = 8$  y el modo  $n = 4, l = 0$  debido a la proximidad de sus frecuencias  $\Delta\nu = 0.13 \mu\text{Hz}$ .

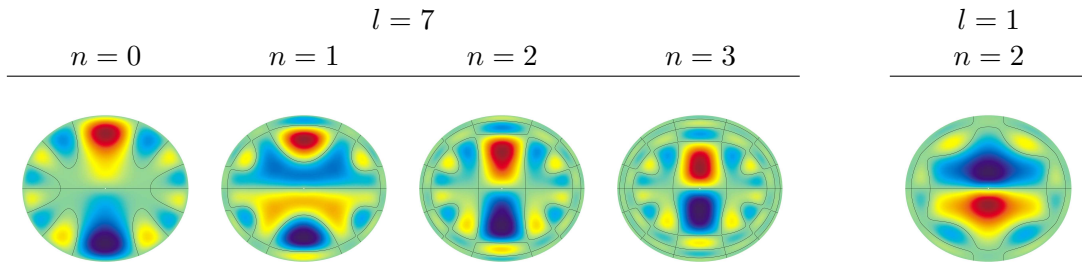


Figura 6.4: Modos normales ( $m = 0$ ) correspondientes al modelo 3. Nótese el acoplamiento accidental entre el modo  $n = 1, l = 7$  y el modo  $n = 2, l = 1$  debido a la proximidad de sus frecuencias  $\Delta\nu = 1.1 \mu\text{Hz}$ .

La figura 6.3 corresponde al modelo 2, en ella podemos ver la serie formada por los modos con  $l = 8$  y  $m = 0$  para diferentes valores de  $n$ . Los modos  $n = 0, n = 1$  y  $n = 3$  no están afectados de acoplamiento y su forma recuerda a la de los armónicos esféricos. Sin embargo, el modo  $n = 2, l = 8$  está acoplado con el modo  $n = 4, l = 0$  debido a que ambos poseen frecuencias muy cercanas ( $\Delta\nu = 0.13 \mu\text{Hz}$ ). Podemos reconocer el acoplamiento cuando los dos modos poseen una configuración con rasgos similares, pero, en cierto modo, complementarios. En este caso el acoplamiento no es muy pronunciado, sin embargo se puede detectar por un aumento en el valor de la autofunción del modo  $n = 2, l = 8$  en la parte central de la estrella, que no está presente en el resto de la serie.

La figura 6.4 corresponde al modelo 3 y muestra la serie de modos con  $l = 7$  y  $m = 0$  para distintos órdenes  $n$ . El acoplamiento se produce entre el modo  $n = 1, l = 7$  y el modo  $n = 2, l = 1$ , mostrando ambos un carácter híbrido. En este caso la diferencia de frecuencias es  $\Delta\nu = 1.1 \mu\text{Hz}$ , que es claramente mayor a la del ejemplo del modelo 2. Ésta es una característica importante del acoplamiento accidental, de forma que la diferencia de frecuencias necesaria para que éste se produzca es mayor al aumentar la rotación, haciendo que este tipo de acoplamiento sea más frecuente en estrellas con mayor velocidad de rotación. De la misma forma, se puede apreciar en los resultados que el acoplamiento accidental es más probable entre modos con menor  $l$  y mayor  $n$ , siendo más acentuado cuando los dos modos involucrados tienen valores de  $l$  más próximos.

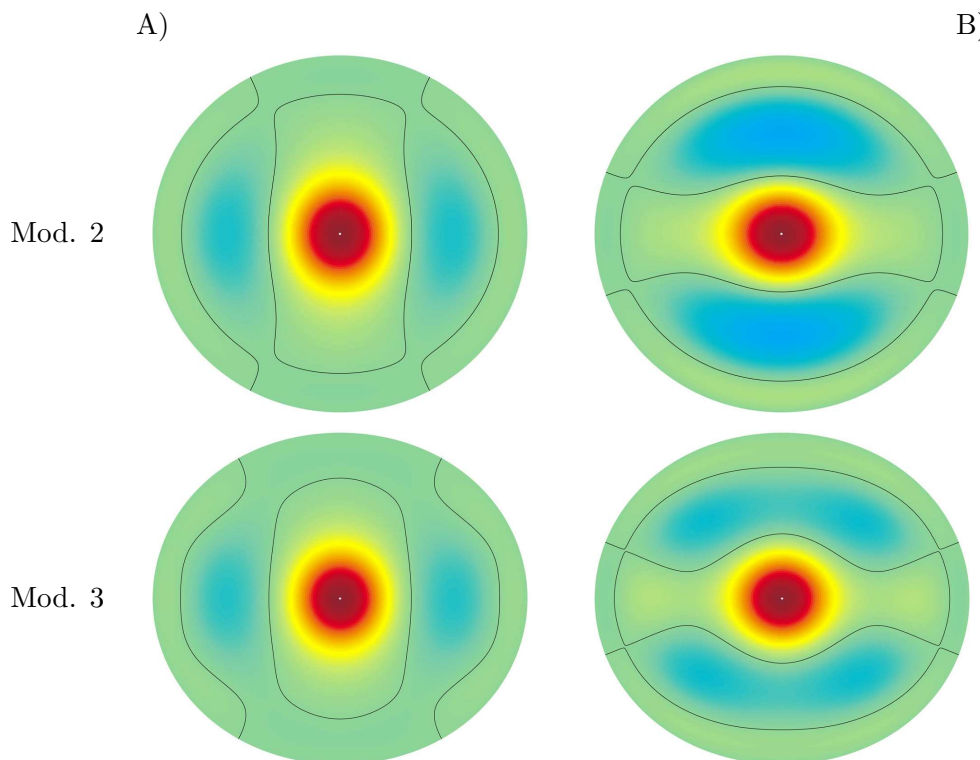


Figura 6.5: Modos con  $l = 0$  y  $l = 2$  afectados por acoplamiento esencial. Los modos de la parte superior corresponden al modelo 2 y los de la inferior son los equivalentes en el modelo 3. Llamaremos modo A al modo de la izquierda y modo B al de la derecha.

### 6.3.2 Modos con $l$ bajo

Los modos de  $l$  más bajo pueden verse afectados por el acoplamiento accidental descrito en la sección anterior, que ocurre de forma puntual. Sin embargo, a diferencia de los modos de  $l$  alto, los modos de  $l$  más bajo también se acoplan fuertemente entre sí hasta el punto de modificar su propia naturaleza. Un ejemplo claro es el que involucra a los modos con  $l = 0$  y  $l = 2$ .

En la figura 6.5 se muestran los modos  $n = 2, l = 0$  y  $n = 1, l = 2$ , para el modelo 2 (arriba) y para el modelo 3 (abajo), sin embargo a priori no es posible saber cual de los modos corresponde a una determinada clasificación. Por ello, a partir de ahora nos referiremos al modo de la izquierda como modo A y al de la derecha como modo B. Si observamos la figura con atención, veremos que tanto el modo A como el B poseen nodos en la superficie, en concreto dos nodos entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , como correspondería al  $l = 2$ , sin embargo, en el centro de la estrella el comportamiento es más parecido al de un  $l = 0$ . Resulta también curioso que ambos modos sean similares para los dos modelos, lo que indica que este acoplamiento representa en realidad un cambio en la naturaleza de éstos. De hecho estos modos son similares a los que uno esperaría ver en un cilindro, siendo los nodos correspondientes al modo A prácticamente verticales y los del modo B horizontales. Por todo esto, denominaremos a este efecto como acoplamiento esencial.

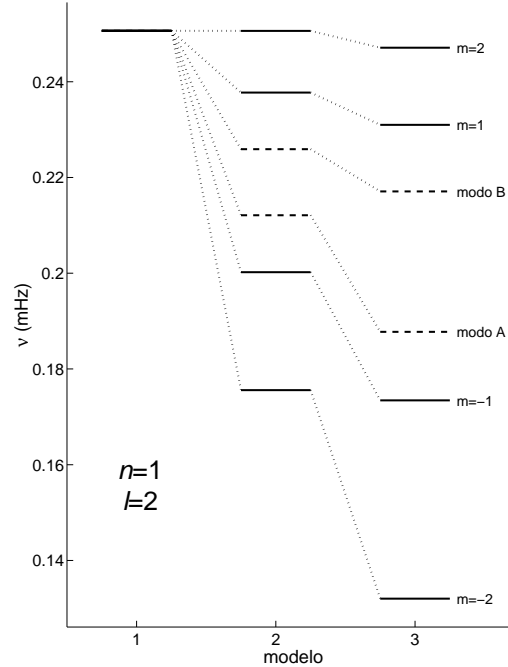


Figura 6.6: Estructura de niveles del multiplete  $n = 1$ ,  $l = 2$  para los distintos modelos. En línea continua se muestran los modos no axisimétricos y en discontinua los candidatos para la clasificación  $n = 1$ ,  $l = 2$ ,  $m = 0$ . De acuerdo con el fenómeno de apareamiento el modo A debe ser el clasificado con  $l = 2$ , y por tanto el modo B será un  $n = 2$ ,  $l = 0$ ,  $m = 0$ .

Resulta obvio que el acoplamiento esencial dificulta la clasificación de los modos si nos basamos únicamente en su aspecto, sin embargo para el análisis de los resultados se han utilizado diversas técnicas adicionales que nos permiten asignar una clasificación objetiva basada en parámetros físicos. Entre los parámetros que nos permiten establecer una clasificación se encuentran el equiespaciamiento en frecuencia de los modos y la estructura de los multipletes. En nuestro caso ha sido esta última la más útil y, por tanto, la que se ha empleado.

En la figura 6.6 se muestra el multiplete  $n = 1$ ,  $l = 2$ . Los niveles marcados con línea continua corresponden a los modos no axisimétricos ( $m \neq 0$ ) para los cuales no existe duda sobre su clasificación. Los modos A y B de la figura 6.5 se muestran con línea discontinua. Si suponemos cierto el fenómeno de apareamiento descrito anteriormente, el modo  $n = 1$ ,  $l = 2$ ,  $m = 0$  debería aparearse con el  $m = -1$ , haciendo que el candidato más probable entre los modos A y B a tener  $l = 2$  es el modo A, con lo cual el modo B sería clasificado como  $n = 2$ ,  $l = 0$ ,  $m = 0$ .

Este mismo procedimiento se ha empleado para la clasificación de los demás modos afectados por acoplamiento esencial. Mientras que en el modelo 2 los únicos modos afectados de forma importante son los  $l = 0$  y  $l = 2$  con  $m = 0$  y cualquier valor de  $n$ , para el modelo 3 este tipo de acoplamiento se extiende también a los modos con  $l = 4$  y, en menor medida, entre los  $l = 1$  y  $l = 3$  aunque solamente para modos con  $m = 0$ .

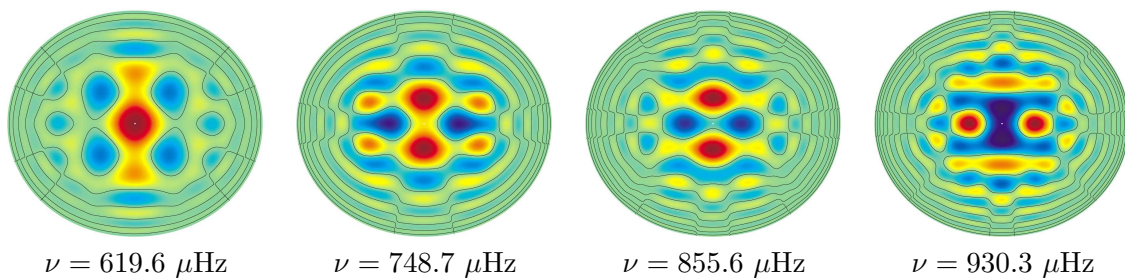


Figura 6.7: Ejemplos de modos con frecuencia por encima de  $500 \mu\text{Hz}$  para los cuales no se ha podido establecer una clasificación.

Por último cabe destacar que, aunque el acoplamiento esencial es importante sólo para los modos anteriormente citados, siempre está presente, haciendo que los modos con  $l$  más bajo estén más deformados que los que poseen un valor de  $l$  más alto, cuya estructura es prácticamente la de un armónico esférico.

### 6.3.3 Modos con $n$ alto

Para estudiar las propiedades de los modos con frecuencias más elevadas se realizó un segundo cálculo usando el código OMASS2d, llegando a frecuencias de hasta  $1 \text{ mHz}$  ( $n \sim 12$  para  $l = 0$ ). El cálculo se hizo con el modelo 3 y únicamente para modos axisimétricos ( $m = 0$ ). Lo primero que se observa en los resultados es un aumento claro del acoplamiento al incrementar la frecuencia, haciendo que los modos dejen de parecerse a los armónicos esféricos. En la figura 6.7 se muestran algunos ejemplos de modos con frecuencia entre  $0.5$  y  $1 \text{ mHz}$ . Es evidente la creciente dificultad a la hora de establecer una clasificación satisfactoria para los modos cuando incrementamos la frecuencia, y por tanto, el orden  $n$ .

Sin embargo, se observan ciertas series regulares para las cuales sí se ha podido establecer una clasificación. Éste es el caso de la serie de modos con  $l = 1$ , que se muestra en la figura 6.8. Como se puede ver, existe cierta similitud entre los modos de la serie, lo cual, unido al hecho de que presentan un marcado equiespaciamiento en frecuencia, nos permite establecer esta clasificación. En la serie faltan los modos con  $n$  entre 7 y 11. Esto es debido a que a partir de  $n = 7$ , no existen modos con las mismas características para los rangos de frecuencias adecuados, sin embargo para  $n = 12$  volvemos a encontrar un modo cuya estructura concuerda con el resto de la serie y que además se encuentra en la frecuencia apropiada, de acuerdo con el equiespaciamiento. Si analizamos con profundidad la serie de  $l = 1$  de la figura 6.8 veremos que tiene lugar un fenómeno curioso, según el cual los modos empiezan a aparecer “descentrados”, de forma que la estructura que al principio se encontraba en el centro de la estrella para valores bajos de  $n$ , aparece contenida dentro de un toroide alrededor del centro para los modos con  $n$  más alto. Este mismo comportamiento se produce en otra serie, en este caso la de  $l = 4$ , que se muestra en la figura 6.9. En esta serie, para  $n = 4$  comienza a aparecer el mismo efecto de descentramiento de los modos, aunque en este caso existen ciertas diferencias. Por similitud con la serie de  $l = 1$ , los modos con  $l = 4$  y  $n \geq 4$  podrían clasificarse como  $l = 0$ , de hecho su aspecto externo es el de un  $l = 0$ , ya que carecen de nodos en la superficie. Sin embargo, como se verá en §6.4, existe cierta regularidad en la serie en cuanto a equiespaciamiento en frecuencia,



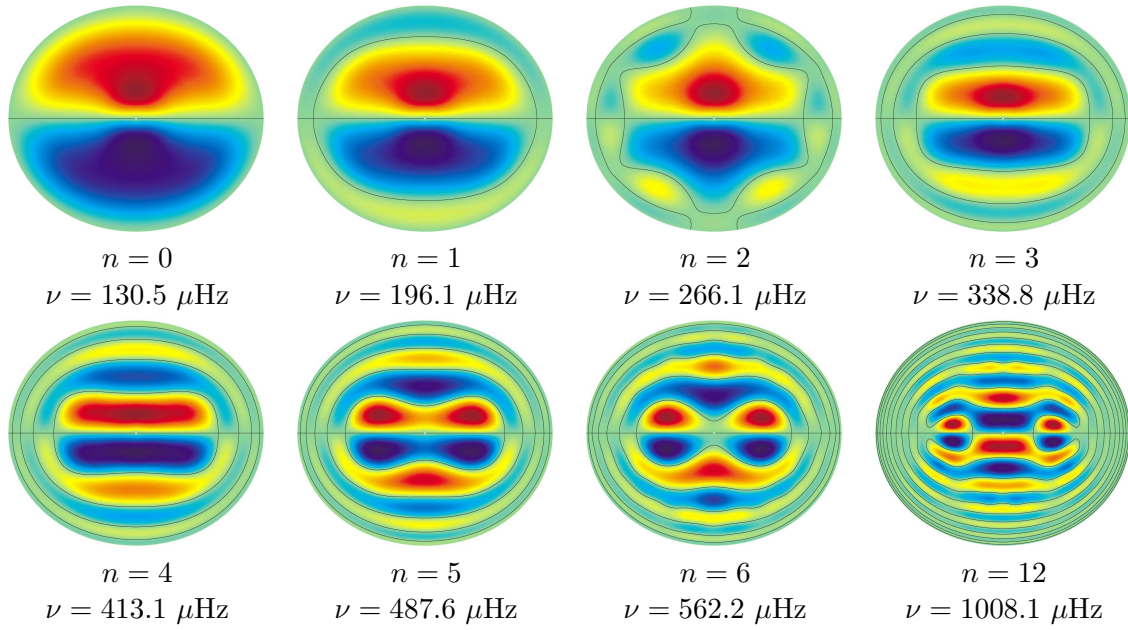


Figura 6.8: Serie correspondiente a los modos axisimétricos con  $l = 1$ . Los modos con  $n$  entre 7 y 11 no han podido ser identificados.

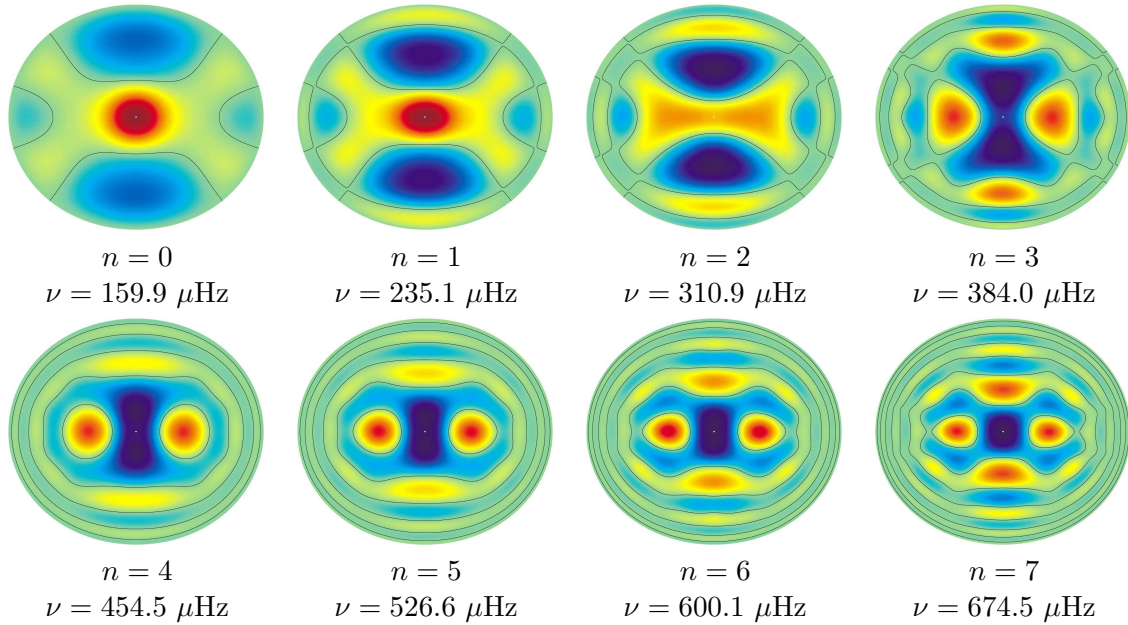


Figura 6.9: Serie correspondiente a los modos axisimétricos con  $l = 4$ . Nótese que a partir de  $n = 4$  la estructura de los modos en la zona más externa de la estrella es prácticamente radial.

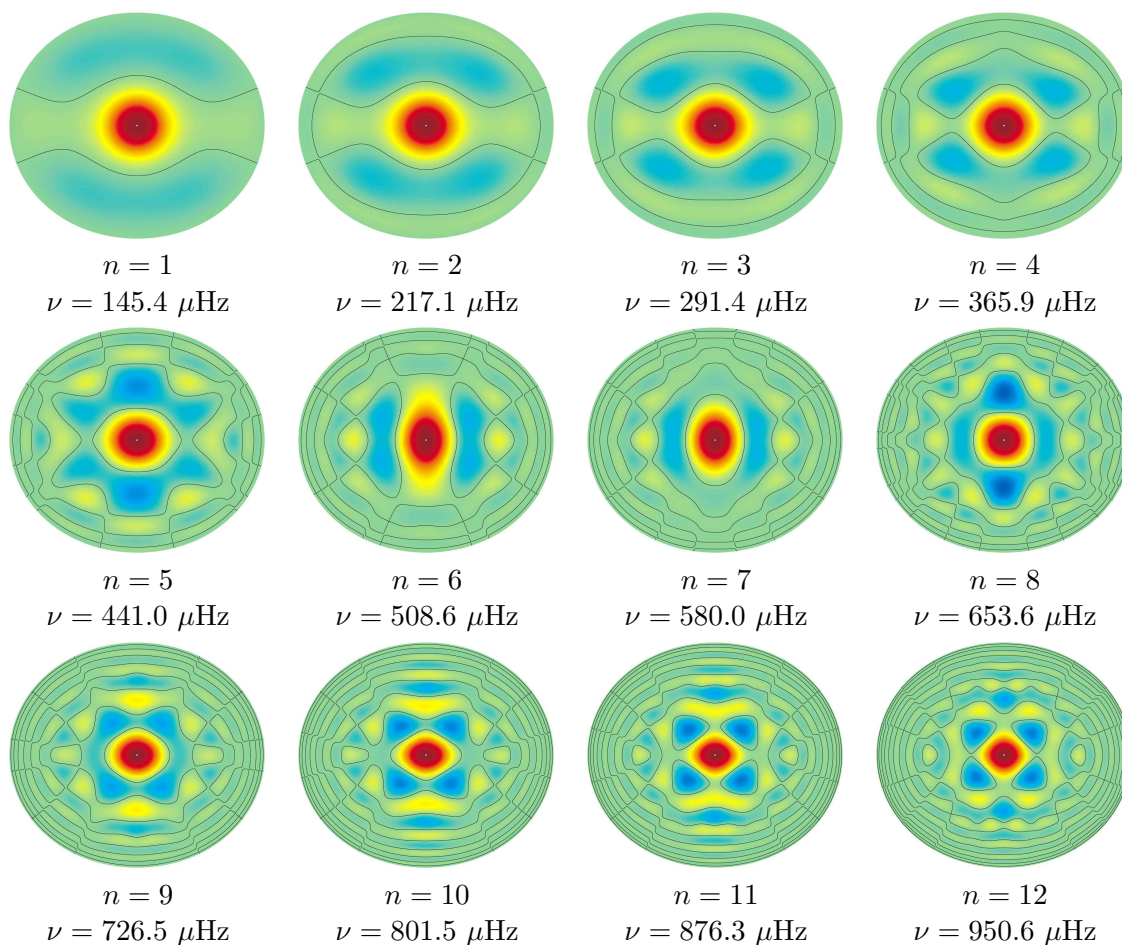


Figura 6.10: Serie correspondiente a los modos clasificados con  $l = 0$ .

que no existiría si los clasificáramos como  $l = 0$ . Esto nos lleva a pensar que lo que ocurre realmente es que los modos con  $l = 4$  cambian completamente de carácter al aumentar el orden  $n$ , adquiriendo una estructura marcadamente radial, que normalmente asociaríamos con un  $l = 0$ . Esta estructura se pierde para los modos con  $n > 7$ , por lo que no han podido ser identificados.

En las series de  $l = 1$  y  $l = 4$  se observa claramente que existe un equiespaciamiento en frecuencia de los modos. Basándonos en este hecho, se ha realizado la clasificación de los modos con  $l = 0$ , que se muestran en la figura 6.10. Para ello, en primer lugar se estimaron las frecuencias que debían tener los modos de la serie mediante un ajuste lineal de los  $l = 0$  con  $n$  bajo clasificados en secciones anteriores (por ejemplo, el modo B de la figura 6.5, panel inferior, corresponde al  $n = 2$  de la figura 6.10). Teniendo en cuenta esta estimación, se escogieron los modos con frecuencia cercana al valor esperado y cuya apariencia fuera similar a la de los modos anteriores. De esta forma se pudo completar toda la serie de  $l = 0$  dentro del rango de frecuencias en que se realizó el cálculo. Un dato importante a destacar es que, aunque se observa una clara evolución a lo largo de toda la serie, para valores altos de  $n$  los modos están lejos de ser radiales. De hecho, muestran un gran número de nodos en



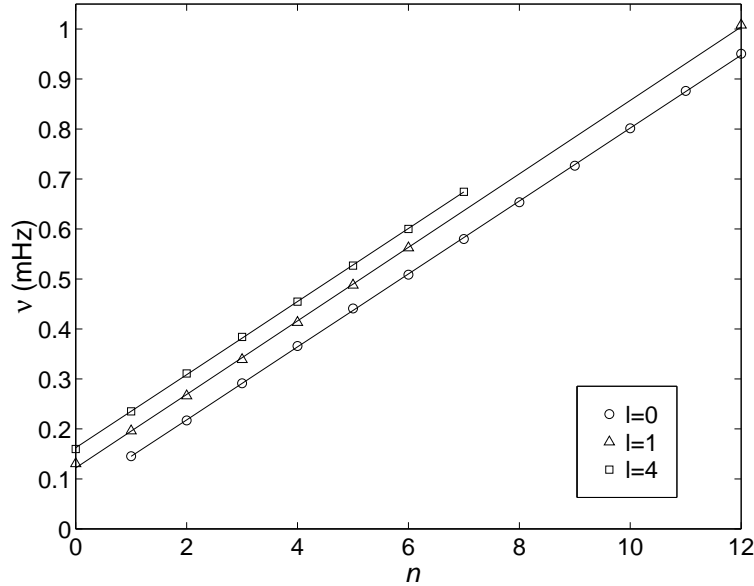


Figura 6.11: Ajuste lineal de las frecuencias de los modos de oscilación frente al orden  $n$  para distintos grados  $l$ . Se han utilizado los datos descritos en §6.3.3.

la dirección angular, incluso en la superficie. Este es otro caso en el que un modo cambia completamente su carácter al aumentar el orden  $n$ .

#### 6.4 Equidistancia de las frecuencias

Durante el presente capítulo se ha mencionado en varias ocasiones el hecho de que los modos normales de oscilación con el mismo grado  $l$  y  $m$  se hallan igualmente espaciados en frecuencia. En esta sección se tratará de ofrecer una justificación de este fenómeno. Para ello se utilizarán los resultados del cálculo efectuado en §6.3.3.

En la figura 6.11 se muestran las frecuencias de los modos clasificados en §6.3.3 frente al orden  $n$ . Los modos correspondientes a  $l = 0$  se representan con círculos, los correspondientes a  $l = 1$  con triángulos y los  $l = 4$  con cuadrados. Se han realizado ajustes lineales de las frecuencias en función de  $n$  para cada grado  $l$ , que corresponden a las líneas continuas de la figura 6.11. Se puede apreciar que las frecuencias se ajustan bastante bien a una recta. El ajuste realizado es de la forma:

$$\nu_{nl} = \alpha + n\Delta\nu_l, \quad (6.1)$$

donde  $\Delta\nu_l$  es la pendiente del ajuste y  $\alpha$  es la ordenada en el origen, que será distinta para cada  $l$ . Las pendientes ajustadas son muy similares para las tres series (como se puede apreciar en la figura 6.11) y sus valores concretos se detallan a continuación:

$$\begin{aligned}
\Delta\nu(l=0) &= 72.98 \mu\text{Hz} \\
\Delta\nu(l=1) &= 73.53 \mu\text{Hz} \\
\Delta\nu(l=4) &= 73.14 \mu\text{Hz}
\end{aligned}
\tag{6.2}$$

A la vista de estos resultados, podemos afirmar que los modos de igual grado  $l$  en una estrella en rotación están equiespaciados en frecuencia, al igual que ocurre en una estrella con simetría esférica en la misma aproximación. De hecho, las aproximaciones realizadas para el cálculo de las oscilaciones son bastante similares a la aproximación asintótica que se usa en simetría esférica para el rango de alta frecuencia, lo que nos lleva a pensar que, aunque en un cálculo completo de las oscilaciones podría no existir equiespaciamiento para los modos con  $n$  bajo, este seguirá estando presente para modos con  $n$  alto.

El comportamiento de los modos de oscilación en una estrella con simetría esférica en la aproximación asintótica ha sido estudiado con bastante detalle y se sabe que el valor de  $\Delta\nu$  esta relacionado con el tiempo que tarda una onda de sonido en ir de un punto en la superficie de la estrella hasta el punto opuesto, pasando por el centro (Christensen-Dalsgaard, 1998), que se puede calcular como:

$$\tau = 2 \int_0^R \frac{dr}{c},
\tag{6.3}$$

donde  $R$  es el radio de la estrella y  $c$  la velocidad del sonido. En primera aproximación, el valor de  $\Delta\nu$  será simplemente la inversa de  $\tau$ :

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}
\tag{6.4}$$

En nuestro caso intentaremos estimar un valor para  $\Delta\nu$  usando un planteamiento similar. Dado que la estrella en rotación que estamos considerando no posee simetría esférica, obtendremos un valor diferente del tiempo de viaje<sup>2</sup>  $\tau$  para cada valor de  $\theta$ , donde  $\theta$  será la coordenada angular del punto de la superficie del que parte la onda:

$$\tau_\theta = 2 \int_{\theta \text{ cte.}}^{\mathcal{S}(\theta)} \frac{dr}{c},
\tag{6.5}$$

donde  $\mathcal{S}(\theta)$  representa la superficie de la estrella y la integral se realiza a lo largo de la línea  $\theta = \text{constante}$ . Los valores de  $\Delta\nu_\theta = \tau_\theta^{-1}$  calculados de esta forma se muestran en la figura 6.12. Como se puede apreciar, los valores calculados son del mismo orden de magnitud que el valor de  $\Delta\nu$  obtenido del ajuste de las frecuencias de los modos  $\sim 73 \mu\text{Hz}$ .

Sin embargo, aún podemos llevar el cálculo un poco más lejos, intentando obtener un valor promedio de  $\Delta\nu$ . Para realizar el promedio debemos tener en cuenta que los distintos valores de  $\theta$  no son igualmente probables, por lo que debemos asignar una función peso adecuada. Para ello supondremos que la superficie de la estrella es esférica (lo cual no introducirá un error significativo), y el peso vendrá dado por la superficie cubierta por un intervalo de  $\theta$  cuando variamos el ángulo azimutal  $\varphi$ . En la práctica esto se traduce a pesar los datos con la función  $\sin \theta$ :

---

<sup>2</sup>del inglés *travel time*.

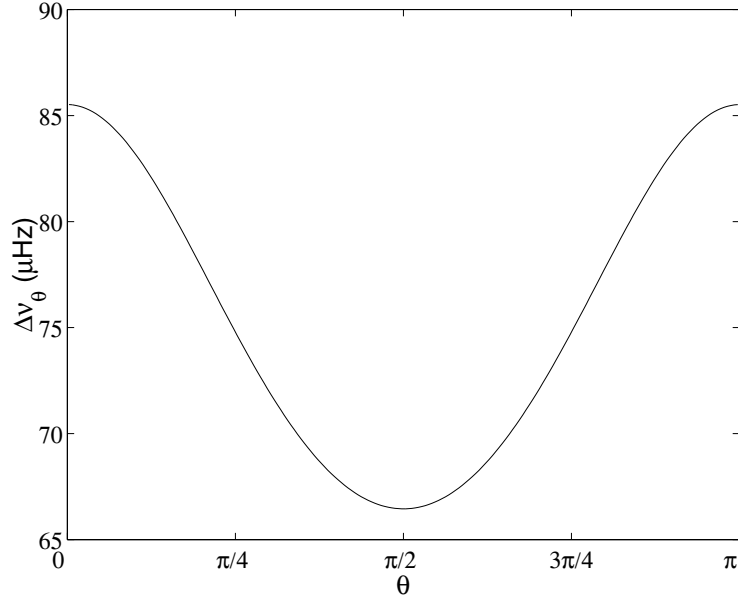


Figura 6.12: Inversa del tiempo de viaje  $\tau_\theta$  para diferentes valores de  $\theta$ , donde  $\theta$  representa la coordenada angular del punto de partida de la onda.

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{\pi/2} \tau_\theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta} = \int_0^{\pi/2} \tau_\theta \sin \theta d\theta, \quad (6.6)$$

y por tanto:

$$\Delta\nu = \bar{\tau}^{-1} = 71.8 \mu\text{Hz}, \quad (6.7)$$

valor que se ajusta bastante bien al obtenido a partir del ajuste de las frecuencias de los modos, que estaba en torno a  $73 \mu\text{Hz}$ .

## 6.5 Visibilidad de los modos

Hemos visto que la estructura de los modos en una estrella en rotación es claramente diferente a la de una estrella con simetría esférica, lo cual debe influir en su visibilidad. Cuando se observa una estrella, generalmente se hace sin resolución espacial, por lo que las oscilaciones que medimos son en realidad la suma de las contribuciones de todos los puntos de su superficie. Esto hace que, en el caso de simetría esférica, los modos con un grado  $l$  alto no puedan ser observados debido a que las contribuciones de los distintos puntos se anulan entre sí. Por tanto, es de gran interés para la observación conocer de qué forma influye la rotación en la visibilidad de los modos de oscilación.

En Astrosismología se suelen medir las variaciones en brillo de la estrella. Sin embargo, no es fácil obtener una expresión exacta para la perturbación en intensidad lumínica. Por

ello haremos un pequeño cálculo aproximado para intentar relacionar la variación en flujo luminoso con la autofunción  $\psi$ .

Supongamos que la estrella emite energía como un cuerpo negro, entonces cumplirá:

$$F = \sigma T^4, \quad (6.8)$$

donde  $F$  es el flujo radiativo,  $T$  la temperatura y  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann. Si además suponemos que el material se comporta como un gas ideal, se cumplirá:

$$p = \rho \frac{kT}{\mu}, \quad (6.9)$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad,  $\mu$  la masa molecular media y  $k$  la constante de Boltzmann. Diferenciando estas dos expresiones, obtenemos:

$$dF = 4\sigma T^3 dT \quad (6.10)$$

$$dp = \frac{k}{\mu} \rho dT + \frac{k}{\mu} T d\rho \quad (6.11)$$

Es posible identificar los incrementos diferenciales con las perturbaciones. Si además tenemos en cuenta que, en los modelos utilizados, las magnitudes que caracterizan el modelo en equilibrio (presión, densidad, ...) se mantienen constantes en toda la superficie de la estrella, a partir de (6.10) podemos afirmar que:

$$F' \propto T' \quad \text{en la superficie,} \quad (6.12)$$

es decir, la perturbación de flujo radiativo en la superficie de la estrella es proporcional a la perturbación de temperatura. Además, si recordamos (2.39), podemos escribir  $dp = c^2 d\rho$ , con lo que (6.11) queda de la forma:

$$\left( c^2 - \frac{kT}{\mu} \right) d\rho = \frac{k\rho}{\mu} dT, \quad (6.13)$$

de forma que la perturbación de densidad en la superficie es proporcional a la perturbación de temperatura, y por tanto también a la perturbación en el flujo radiativo. Si además recordamos que  $\rho' = -\psi$ , podemos escribir:

$$F' \propto \psi \quad \text{en la superficie,} \quad (6.14)$$

y dado que las perturbaciones se definen salvo una constante multiplicativa, podemos usar los valores de la autofunción  $\psi$  (que es la que hemos usado en la representación de los modos) en la superficie, para el cálculo de la visibilidad.

Calcularemos la visibilidad  $V_{nlm}$  usando la siguiente expresión:

$$V_{nlm} = \left| \frac{\int_{S_+} \tilde{\psi}_{nlm}(r, \theta) e^{im\varphi} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}}{\frac{1}{2} \int_S dS} \right|, \quad (6.15)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector que define la línea de visión, orientado hacia el observador. La integral del denominador se extiende a toda la superficie de la estrella y la del numerador a la

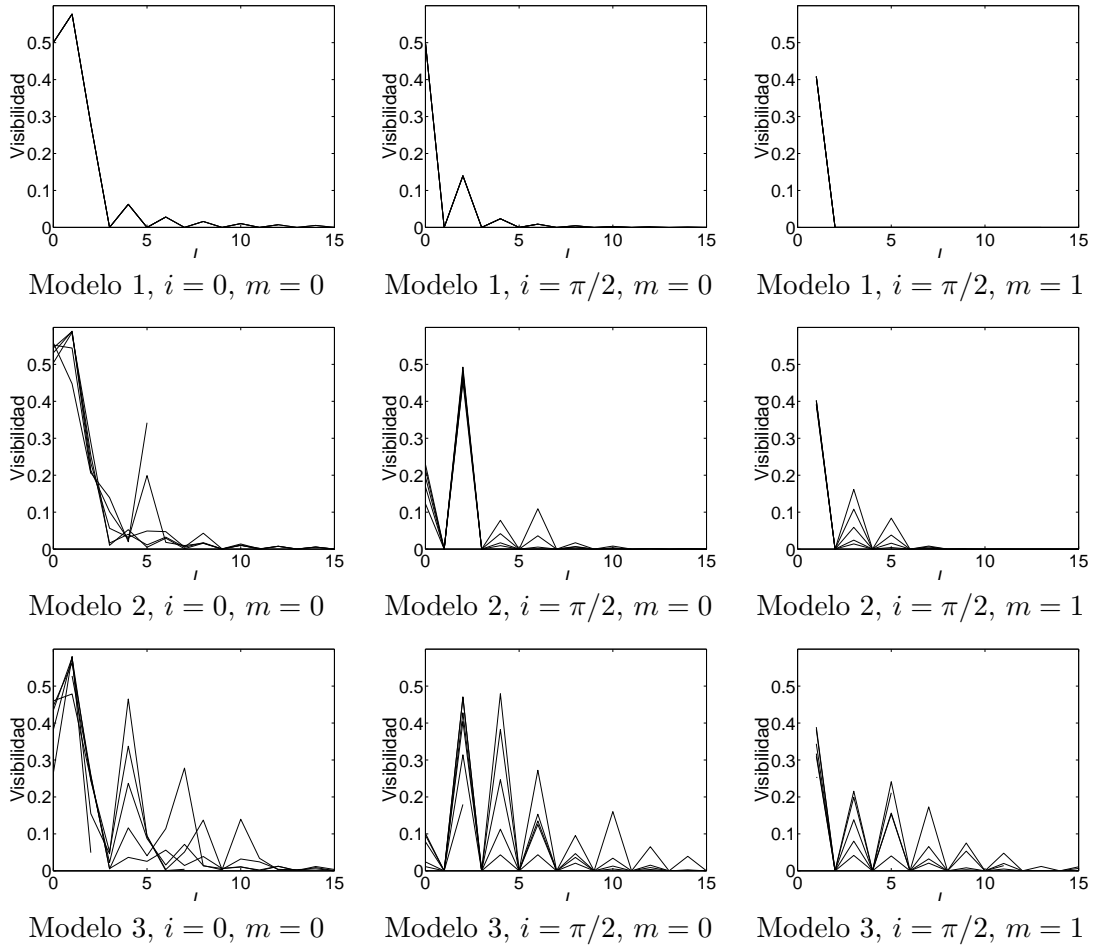


Figura 6.13: Visibilidad de los modos de oscilación para los distintos modelos con diferentes ángulos de inclinación ( $i$ ). Se han unido los puntos de igual  $n$ .

superficie de la estrella visible por el observador, es decir, donde  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} > 0$ . El término  $\tilde{\psi}_{nlm}(r, \theta)$  representa la autofunción normalizada en la superficie, de modo que cumple:

$$\frac{\int_S |\tilde{\psi}_{nlm}|^2 dS}{\int_S dS} = 1 \quad (6.16)$$

La forma de los diferenciales de superficie  $dS$  y  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}$  no es trivial y su cálculo se detalla en el apéndice C.

$$dS = r^2 \sin \theta \sqrt{1 + \frac{S'^2}{S^2}} d\theta d\varphi, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = r^2 \left[ \left( \sin \theta - \frac{S'}{S} \cos \theta \right) \cos \varphi \sin i + \left( \cos \theta + \frac{S'}{S} \sin \theta \right) \cos i \right] \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6.18)$$

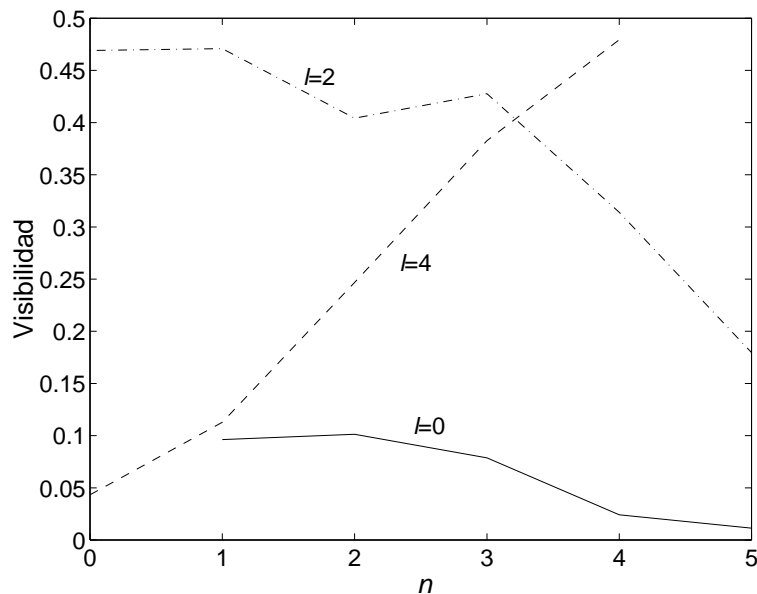


Figura 6.14: Variación con el orden  $n$  de la visibilidad de los modos  $l = 0, 2$  y  $4$  con  $m = 0$ . Los datos corresponden al modelo 3 con  $i = \pi/2$ .

donde el ángulo de visión  $i$  está definido de forma que si  $i = 0$  observamos la estrella desde el polo y si  $i = \pi/2$  (caso del Sol), observaremos la estrella desde el ecuador.

En la figura 6.13 se muestra la visibilidad de los modos para cada uno de los tres modelos en diferentes situaciones. El principal resultado que observamos es que la visibilidad de los modos con  $l$  alto aumenta al incrementar la velocidad de rotación. Esto tiene cierta lógica, ya que en un modelo sin rotación (modelo 1) la simetría presente hace que se produzcan cancelaciones en las contribuciones de los diferentes puntos de la superficie, lo cual no tiene por qué suceder cuando se pierde la simetría. Por otra parte, existen modos con  $l$  alto cuya visibilidad es bastante mayor que la que les correspondería, esto es debido a que se acoplan con modos de  $l$  bajo. Con estos resultados, deberíamos esperar que el espectro de oscilaciones de una estrella en rotación esté más poblado que el de una estrella sin rotación equivalente. Sin embargo, esto también dependerá de la potencia que tenga el modo en la superficie en relación con su energía total, cosa que no se ha tenido en cuenta en este cálculo.

Un efecto interesante que podemos destacar es lo que ocurre con algunos modos de  $l$  bajo al aumentar el orden  $n$ . En la figura 6.14 se muestra la variación con  $n$  de la visibilidad de los modos axisimétricos con  $l = 0, 2$  y  $4$  para el modelo 3 y con un ángulo de inclinación  $i = \pi/2$ , mientras que en la figura 6.15 podemos ver la estructura de los modos en la superficie de la estrella. Si nos fijamos en la serie de  $l = 4$ , vemos que para los valores de  $n$  más bajos, la estructura de la autofunción se corresponde bastante bien con lo que esperaríamos ver en una estrella sin rotación para  $l = 4$ , sin embargo, al aumentar el valor de  $n$ , las zonas donde la autofunción es negativa van disminuyendo en amplitud hasta que, para  $n = 4$ , la perturbación tiene el mismo signo en toda la superficie o, lo que es lo mismo,

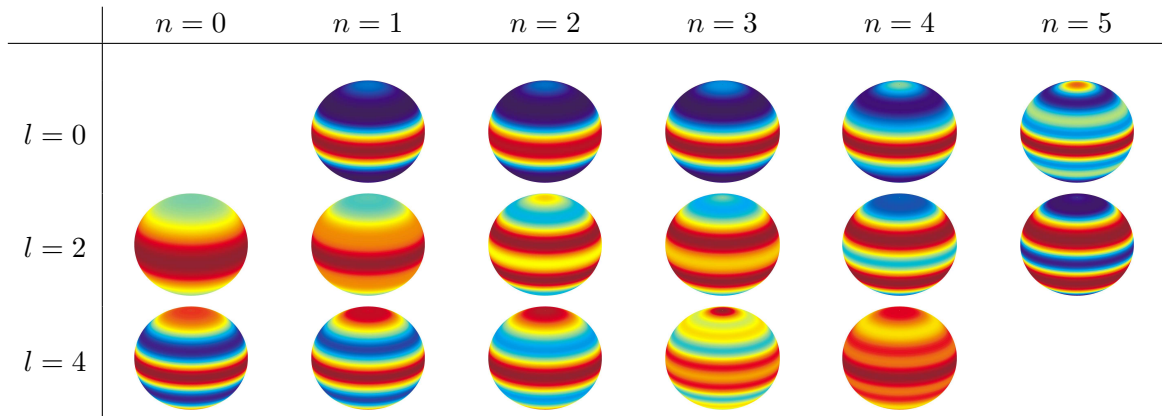


Figura 6.15: Estructura en la superficie de los modos  $l=0, 2$  y  $4$  con  $m=0$  para el modelo 3.

no existen líneas nodales en la superficie. Esto tiene como consecuencia un aumento drástico en la visibilidad del modo, como se observa en la figura 6.14. En cuanto a los modos con  $l=0$  y  $l=2$ , el efecto es contrario, ya que al aumentar el valor de  $n$  van apareciendo mayor número de nodos en la superficie, lo que disminuye claramente su visibilidad al cancelarse las zonas de amplitud positiva con las que tienen amplitud negativa.

Existe un detalle sobre la figura 6.15 que merece la pena comentar. Como se vio anteriormente, la clasificación de los modos  $l=0$  y  $l=2$  se efectuó de forma que fuera compatible con la estructura de los multipletes observada en otros modos de oscilación, esto es posible ya que los modos con  $l=2$  y  $m \neq 0$  guardan una gran similitud con los armónicos esféricos correspondientes. Sin embargo, si observamos la estructura de estos modos en superficie para  $n$  muy bajo, parece que la clasificación más probable es precisamente la contraria. La configuración superficial del modo clasificado como  $n=1$ ,  $l=0$  es claramente similar a la del armónico esférico  $l=2$ ,  $m=0$ , por lo que a efectos observacionales quizá sería más práctico clasificarlo como  $n=0$ ,  $l=2$ ,  $m=0$ . Por otro lado, el modo clasificado con  $n=0$ ,  $l=2$ ,  $m=0$ , corresponde a una oscilación en la que las zonas de la estrella más próximas al ecuador se expanden y se contraen de manera uniforme mientras que la oscilación es prácticamente nula en los polos. Aunque la configuración superficial de este modo no es completamente radial, desde el punto de vista observacional está más relacionado con un  $l=0$ .

Esto es una muestra de la dificultad existente para establecer un criterio adecuado en la clasificación de los modos. Aunque una clasificación basada en la apariencia superficial de la perturbación podría ser más práctica en términos observacionales, no sería de gran ayuda para describir las propiedades generales de los modos de oscilación. Esto es debido a que los modos modifican su apariencia externa a medida que aumenta  $n$  por efecto del acoplamiento, con lo que, con este tipo de clasificación, algunas de las propiedades descritas a lo largo del capítulo dejarían de verificarse, como por ejemplo el equidistanciamiento de las frecuencias de los modos de igual  $l$  y  $m$ . Por todo esto, consideramos que la clasificación efectuada es la más apropiada para el tipo de análisis realizado en el presente trabajo, ya que permite establecer una clasificación única para cada modo de oscilación, aunque en muchos casos el valor de  $l$  no guarde relación con la apariencia externa del modo.

## 6.6 Resumen

En el presente capítulo hemos estudiado las propiedades de los modos de oscilación en un conjunto de estrellas en rotación, cuya estructura se basa en modelos estelares realistas proporcionados por A. Claret (Claret, 1999). Se ha comprobado que los efectos descritos en el capítulo 5, para el caso de modelos simples con densidad uniforme, siguen estando presentes en modelos basados en una física más precisa. Entre estos efectos podemos destacar el comportamiento de las frecuencias en función de su tipo de simetría, de forma que los modos antisimétricos tienden a tener una frecuencia más elevada que sus equivalentes simétricos, y la estructura de los multipletes de igual  $n$  y  $l$ . En los multipletes se observan también los efectos de apareamiento y compresión estudiados en el capítulo 5, aunque en este caso aparece algún multiplete desordenado, que no consideraremos representativo.

En cuanto al acoplamiento de los modos, hemos observado dos tipos diferenciados. El primero, que denominamos acoplamiento accidental, se produce entre modos que alcanzan frecuencias muy cercanas para una determinada rotación, mientras que el segundo tipo, que denominamos acoplamiento esencial, ocurre para un rango amplio de velocidades de rotación y se da entre modos de bajo grado  $l$ . También se ha observado que al aumentar el orden  $n$ , el acoplamiento empieza a ser generalizado entre todos los modos, dificultando en gran medida su clasificación.

La clasificación de los modos en términos de  $n$  y  $l$  se hace bastante complicada con velocidades de rotación elevadas. Sin embargo, se han encontrado propiedades de los modos que pueden servir como una potente herramienta para ayudar a la clasificación. La primera de ellas es la estructura de los multipletes, que ya se ha estudiado en profundidad. La segunda corresponde al hecho de que los modos de igual  $l$  se hayan equiespaciados en frecuencia, y que la diferencia de frecuencias entre dos modos consecutivos puede ser estimada de forma análoga a como se hace en el caso de simetría esférica. La clasificación así obtenida es formalmente correcta pero, en muchos casos, no concuerda con la apariencia del modo. Hemos observado como algunos modos cambian de naturaleza al aumentar el orden  $n$ , por ejemplo, la serie de  $l = 4$ ,  $m = 0$ , comienza a tener una apariencia externa que correspondería a un  $l = 0$ , sin embargo sí que posee un multiplete asociado.

Se ha visto también que la rotación hace que aumente, en general, la visibilidad de los modos. Esto es debido a que, al perder la simetría, no es frecuente que se anulen las contribuciones de los distintos puntos de su superficie.



# 7

---

## Conclusiones y Trabajo Futuro

El presente trabajo puede dividirse en dos partes fundamentales. En la primera parte se ha desarrollado un método para calcular las oscilaciones en una estrella en rotación de forma no perturbativa, es decir, resolviendo el problema en un recinto bidimensional para poder representar de forma adecuada la geometría de la estrella. Esta primera parte ha dado como resultado el desarrollo de un código informático (OMASS2d) que realiza esta tarea. La segunda parte de este trabajo se centra en el cálculo de las oscilaciones utilizando distintos modelos estelares en rotación, cuyo análisis nos ha permitido obtener ciertas propiedades que pueden ser importantes para la clasificación de las frecuencias de oscilación observadas en estrellas en rotación, como por ejemplo estrellas de tipo  $\delta$  Scuti.

El primer paso para calcular las oscilaciones consiste en obtener una ecuación diferencial que las caracterice, que llamamos ecuación de oscilación. Para intentar simplificar el problema, se han hecho una serie de aproximaciones que nos han permitido reducir el sistema de ecuaciones que surge de la mecánica de fluidos a una sola ecuación de valores propios para una variable escalar que representa la autofunción. Para llegar a la ecuación de oscilación se ha despreciado la perturbación en el potencial gravitatorio (aproximación de Cowling) y el efecto de la fuerza de Coriolis. Además se ha considerado que las oscilaciones son adiabáticas y solamente se deben a ondas acústicas (se ha despreciado el gradiente de entropía). Para caracterizar la condición de contorno en la superficie de la estrella se ha supuesto que la atmósfera es delgada y por tanto la presión en este punto se debe mantener constante e igual a la presión del medio circundante. Estas aproximaciones limitan el rango de validez del cálculo pero, de forma general, podemos suponer que no son muy restrictivas para modos con frecuencias mucho mayores que la frecuencia de rotación de la estrella. Además, el hecho de realizar estas aproximaciones no sólo simplifica el problema a resolver, sino que también facilita el análisis de los resultados, permitiéndonos analizar por separado las contribuciones de los distintos fenómenos que intervienen en la rotación estelar. La aportación más importante del presente trabajo es que nos permite estudiar el efecto que tiene la deformación de la estrella en los modos de oscilación.

Una vez obtenida la ecuación de oscilación, debemos encontrar un método para resolverla. La principal complicación existente es que el recinto de integración es bidimensional y por tanto son necesarias dos coordenadas independientes para describir la

autofunción. Esto se debe a que la ecuación de oscilación no es separable, como ocurre en un caso sin rotación con simetría esférica. Para resolver la ecuación se ha utilizado un método de diferencias finitas, muestreando la solución en puntos caracterizados por su distancia al origen de coordenadas ( $r$ ) y su colatitud ( $\theta$ ). Debido a la inestabilidad de la ecuación, se deben plantear las expresiones de diferencias finitas de forma implícita, obteniendo una matriz  $N \times N$  que caracteriza el problema, siendo  $N$  el número total de puntos en los que se muestrea el recinto de integración. La matriz resultante posee grandes dimensiones, por lo que se ha optado por emplear el método de Arnoldi para su resolución. Este procedimiento se ha implementado en el código OMASS2d y ha sido probado en distintos escenarios, obteniendo en todos los casos resultados satisfactorios.

La segunda parte del trabajo consiste en el cálculo y posterior análisis de las oscilaciones en distintos modelos estelares en rotación. Para ello se han utilizado dos conjuntos de modelos. En primer lugar se utilizaron modelos en rotación con densidad uniforme, cuya simplicidad nos ha permitido realizar un análisis exhaustivo de todos los efectos relacionados con la rotación que aparecen en el espectro de frecuencias de oscilación. En segundo lugar utilizamos modelos realistas calculados por A. Claret (Claret, 1999), obteniendo conclusiones similares a las obtenidas para el caso de densidad uniforme. Del análisis realizado se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Aunque con rotaciones moderadas los modos pueden guardar cierta similitud con sus equivalentes sin rotación, para rotaciones elevadas la estructura de las autofunciones puede verse seriamente afectada, modificando la naturaleza de los modos y dificultando su clasificación. Esto es debido al acoplamiento que existe entre los modos de igual índice azimutal ( $m$ ) e igual paridad, más acentuado para modos con grado  $l$  más bajo y orden  $n$  más alto.
- Podemos dividir los modos de oscilación en simétricos respecto del ecuador de la estrella y antisimétricos. Se ha comprobado que ambos grupos muestran comportamientos diferentes, de forma que los antisimétricos tienden a incrementar su frecuencia con respecto a los simétricos cuando aumenta la velocidad de rotación.
- La propiedad anterior tiene un efecto importante en la estructura de los multipletes de igual  $n$  y  $l$ , ya que produce un apareamiento de los modos que forman el multiplete. Otro efecto que se observa en los multipletes es una compresión de la distancia entre modos hacia la parte superior del espectro.
- En la aproximación considerada, las frecuencias de los modos con igual  $l$  y  $m$  están igualmente espaciadas en frecuencia, y su separación está relacionada con el tiempo que tarda una onda de sonido en atravesar la estrella.

De las conclusiones obtenidas hay dos que pueden resultar especialmente importantes para la clasificación de las frecuencias observadas en estrellas en rotación. El apareamiento de las frecuencias de en el interior de los multipletes tiene como consecuencia la aparición de frecuencias muy cercanas en el espectro de la estrella, lo cual constituye un rasgo característico y muy fácil de identificar en las observaciones. Además, al producirse entre modos con el mismo grado  $l$ , su visibilidad relativa dependerá principalmente de efectos

geométricos, por lo que, salvo en casos extremos, la totalidad del multiplete podrá ser visible. Otro rasgo importante que puede ayudar a la clasificación de las frecuencias observadas es el hecho de que los modos de igual  $l$  y  $m$  estén prácticamente equiespaciados, aunque esto último podría no ser del todo válido a bajas frecuencias debido a las aproximaciones efectuadas.

En definitiva, este trabajo constituye un primer paso para entender la naturaleza de las oscilaciones en estrellas en rotación y esperamos que contribuya muy positivamente en el análisis de las oscilaciones que se observan en este tipo de estrellas permitiéndonos conocer mejor su estructura interna y los mecanismos involucrados en la generación de las oscilaciones.

### Trabajo futuro

El trabajo aquí expuesto nos proporciona una valiosa herramienta para el cálculo de las oscilaciones en estrellas en rotación. Sin embargo, aún quedan aspectos por mejorar. En primer lugar, es posible sustituir el método de integración empleado por otro mejor, obteniendo un código más rápido y robusto. En segundo lugar, el futuro trabajo debería ir encaminado a resolver el problema completo, reduciendo el nivel de aproximación y ampliando así el rango de validez del cálculo.

También sería interesante utilizar las conclusiones de este trabajo para intentar clasificar las frecuencias de oscilación observadas en estrellas de tipo  $\delta$  Scuti y comprobar en la práctica los fenómenos estudiados aquí de forma teórica.

# A

---

## Modelos en Rotación con Densidad Uniforme

En el capítulo 5 se utilizó una serie de modelos estelares en rotación con densidad uniforme. En este apéndice se explica con detalle los pasos a seguir para el cálculo de estos modelos.

Supongamos una estrella en rotación con masa  $M$ , velocidad angular  $\Omega$  y densidad  $\rho_0$  uniforme en toda la estrella. Según la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio  $\phi_g$ , en el interior de la estrella se debe cumplir:

$$\Delta\phi_g = 4\pi G\rho_0 \quad (\text{A.1})$$

Integrando la ecuación anterior obtenemos:

$$\phi_g = \frac{2\pi}{3}G\rho_0r^2, \quad (\text{A.2})$$

donde se ha supuesto que la estrella posee simetría esférica, despreciando el efecto de la deformación de la distribución de masa en el potencial gravitatorio. Esta aproximación se conoce como aproximación de Roche. Debido a la rotación, la estrella también posee un potencial centrífugo:

$$\phi_c = -\frac{1}{2}\Omega^2r^2\sin^2\theta, \quad (\text{A.3})$$

que sumado al potencial gravitatorio nos da el potencial total  $\phi$ :

$$\phi = \phi_g + \phi_c = \frac{2\pi}{3}G\rho_0r^2 - \frac{1}{2}\Omega^2r^2\sin^2\theta \quad (\text{A.4})$$

Sea  $P_2(\theta)$  el polinomio de Legendre de segundo orden:

$$P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \quad (\text{A.5})$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2 \quad (\text{A.7})$$

Introduciendo (A.7) en (A.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2\pi}{3} G \rho_0 r^2 - \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 + \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 P_2 = \\ &= \frac{2\pi G \rho_0 - \Omega^2}{3} r^2 + \frac{\Omega^2}{3} r^2 P_2 = \\ &= \frac{2\pi G \rho_0 - \Omega^2}{3} r^2 \left( 1 + \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_0 - \Omega^2} P_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Definimos:

$$\alpha = \frac{2\pi G \rho_0 - \Omega^2}{3}, \quad (\text{A.9})$$

$$f_2 = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_0 - \Omega^2}, \quad (\text{A.10})$$

de forma que podemos reescribir la ecuación (A.8) de la forma:

$$\phi = \alpha r^2 (1 + f_2 P_2) \quad (\text{A.11})$$

De acuerdo con la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\nabla p + \rho_0 \nabla \phi = 0 \quad (\text{A.12})$$

Esta ecuación puede ser integrada directamente, obteniendo:

$$p = p_c - \rho_0 \phi, \quad (\text{A.13})$$

siendo  $p_c$  la presión en el centro de la estrella. Definimos la coordenada  $a$  como:

$$a^2 = r^2 (1 + f_2 P_2), \quad (\text{A.14})$$

de forma que podemos escribir:

$$p = p_c - \rho_0 \alpha a^2 \quad (\text{A.15})$$

Nos interesa calcular la masa de la estrella, con el fin de obtener un valor para  $p_c$ . Para ello, en primer lugar, debemos definir los límites físicos de la estrella. Supondremos que la presión en la superficie de la estrella es nula, por tanto:

$$0 = p_c - \rho \alpha a_s^2, \quad (\text{A.16})$$

con lo que la superficie queda definida por el parámetro:

$$a_s = \sqrt{\frac{p_c}{\rho_0 \alpha}} \quad (\text{A.17})$$

La masa se puede calcular mediante la integral de volumen:

$$M = \int_V \rho_0 dV = \rho_0 \int_V dV, \quad (\text{A.18})$$

donde:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \left| \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(a, \theta, \varphi)} \right| r^2 \sin \theta da d\theta d\varphi \quad (\text{A.19})$$

Se puede demostrar que el determinante jacobiano de la transformación viene dado por:

$$\left| \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(a, \theta, \varphi)} \right| = \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_2 P_2}}, \quad (\text{A.20})$$

con lo que  $dV$  queda de la forma:

$$dV = \frac{a^2}{(1 + f_2 P_2)^{3/2}} \sin \theta da d\theta d\varphi, \quad (\text{A.21})$$

y por tanto:

$$M = 2\pi \rho_0 \int_0^{a_s} a^2 da \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1 + f_2 P_2)^{3/2}} d\theta \quad (\text{A.22})$$

Las integrales pueden ser calculadas analíticamente, resultando:

$$\int_0^{a_s} a^2 da = \frac{a_s^3}{3} = 13 \left( \frac{p_c}{\rho_0 \alpha} \right)^{3/2} \quad (\text{A.23})$$

y

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1 + f_2 P_2)^{3/2}} d\theta = \frac{4}{\sqrt{1 + f_2} (2 - f_2)}, \quad (\text{A.24})$$

de forma que la masa de la estrella viene dada por la siguiente expresión:

$$M = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + f_2} (2 - f_2)} \left( \frac{p_c}{\rho_0^{1/3} \alpha} \right)^{3/2} \quad (\text{A.25})$$

Invirtiendo esta última ecuación, podemos obtener una expresión para la presión central:

$$p_c = \left( \frac{3M}{8\pi} \right)^{2/3} (1 + f_2)^{1/3} (2 - f_2)^{2/3} \alpha \rho_0^{1/3} \quad (\text{A.26})$$

Una vez escogido un valor para  $M$ ,  $\rho_0$  y  $\Omega$ , las ecuaciones (A.14), (A.15) y (A.26), junto con la definición de las constantes  $\alpha$  y  $f_2$  definen completamente el modelo estelar.

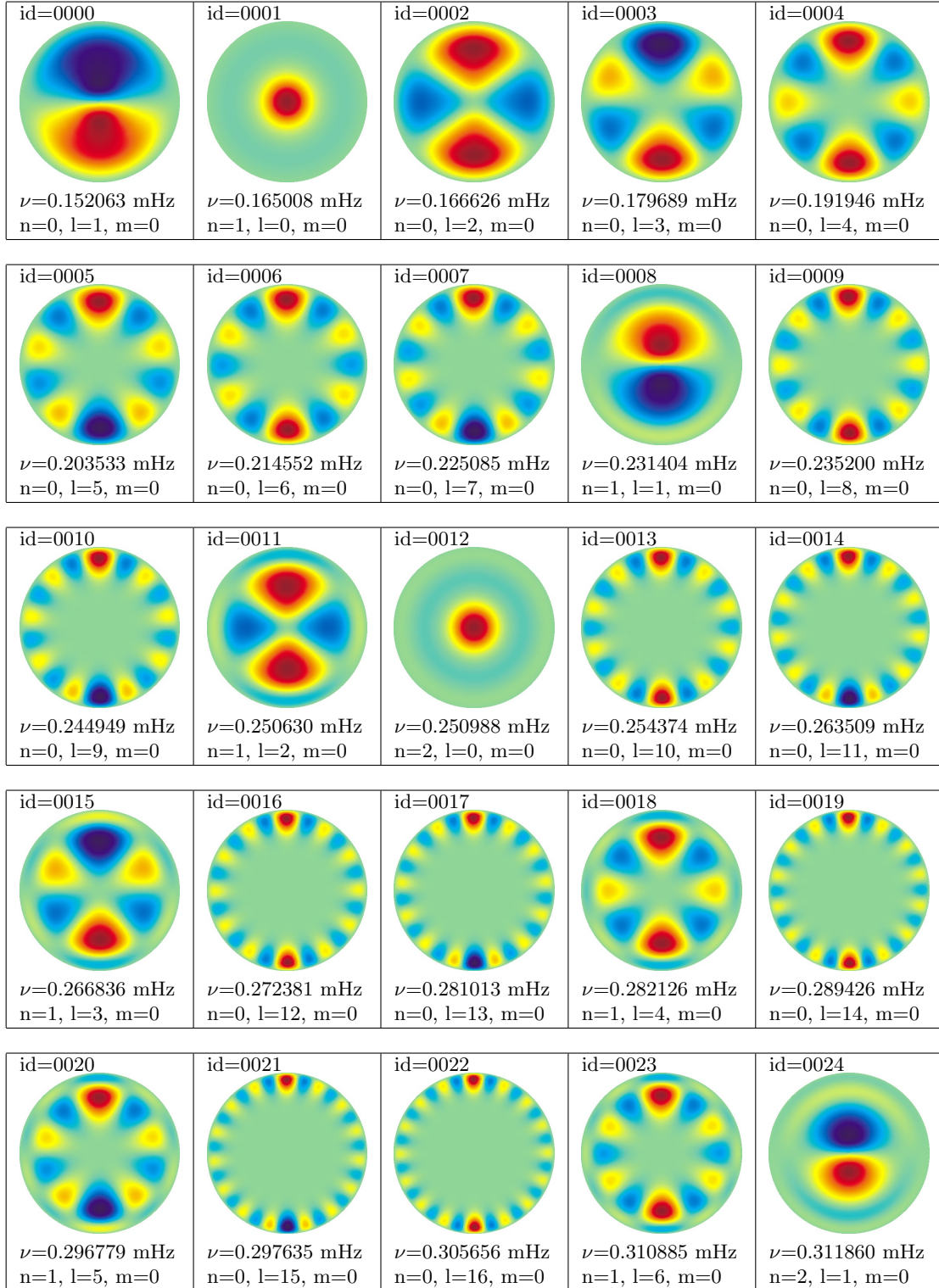
# B

---

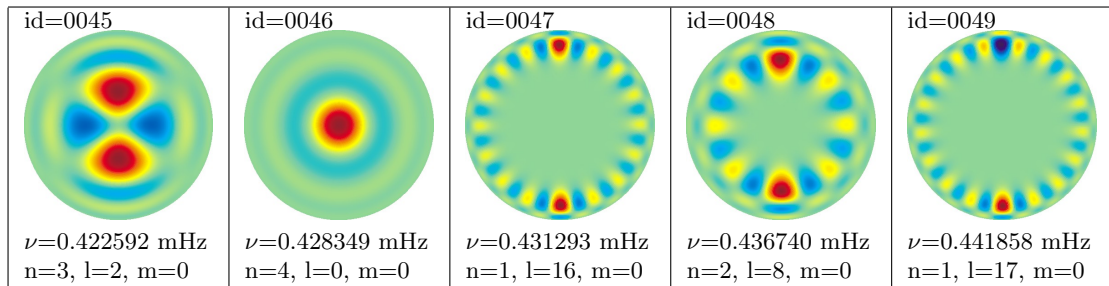
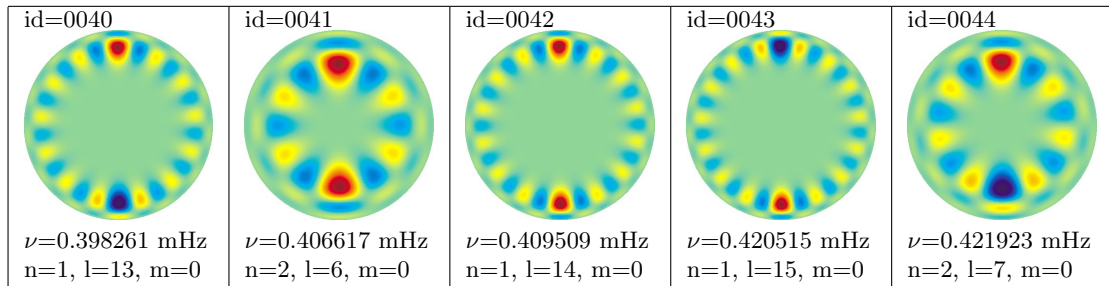
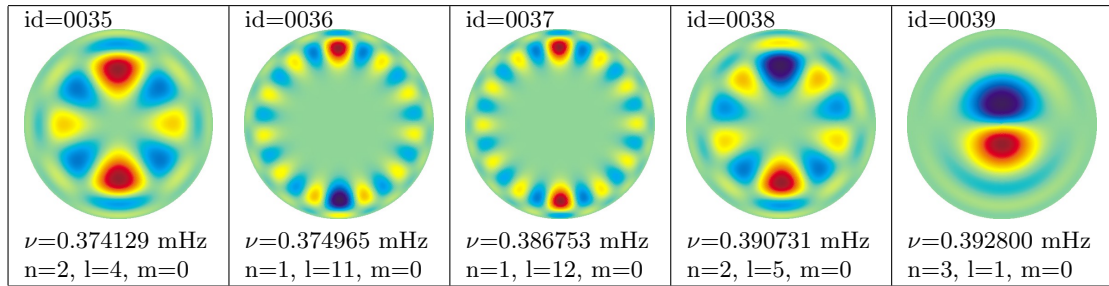
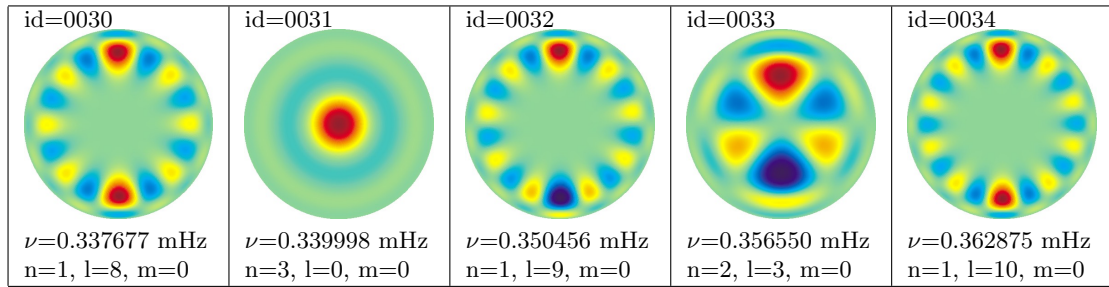
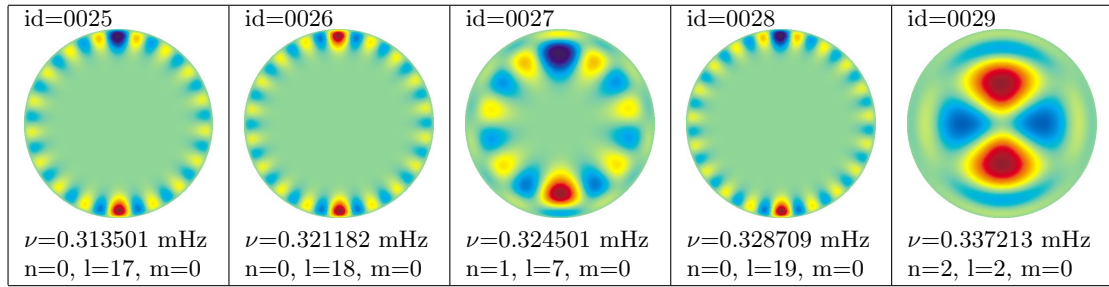
## Resultados del Cálculo de las Oscilaciones en Modelos Realistas

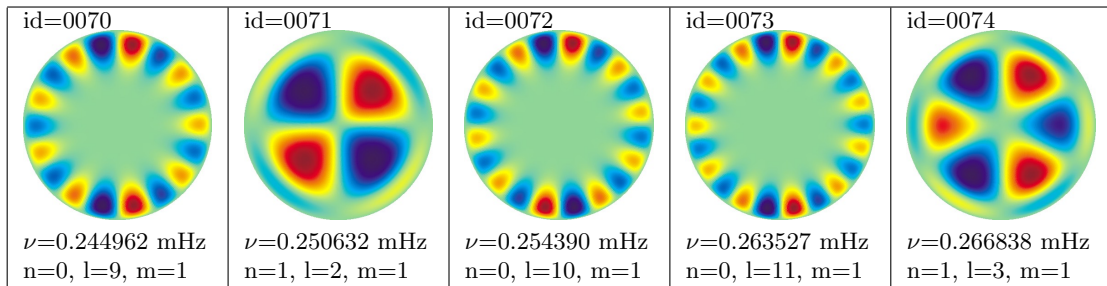
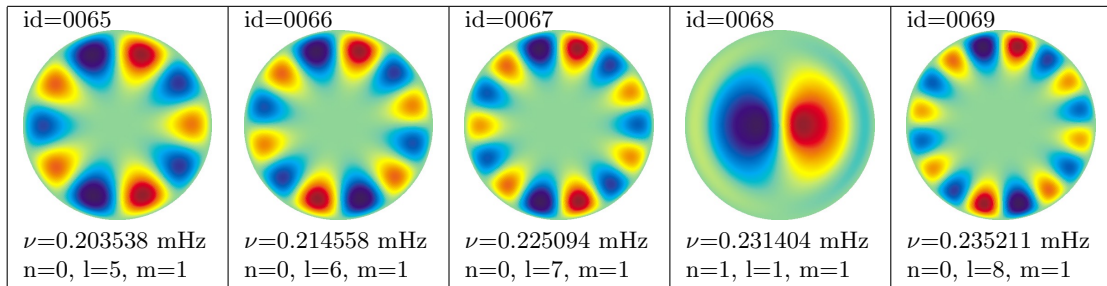
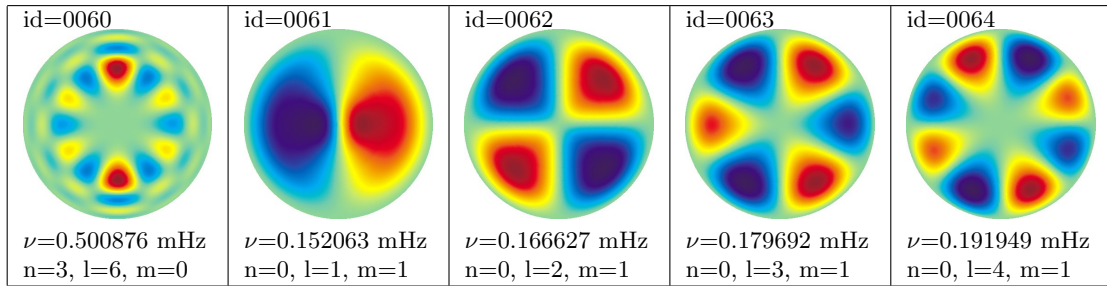
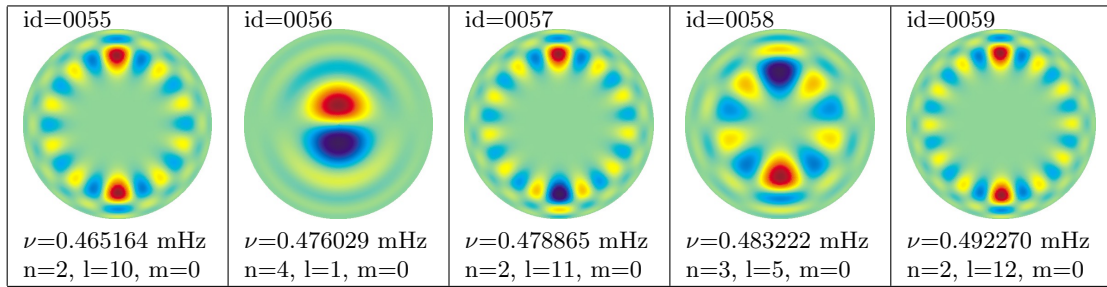
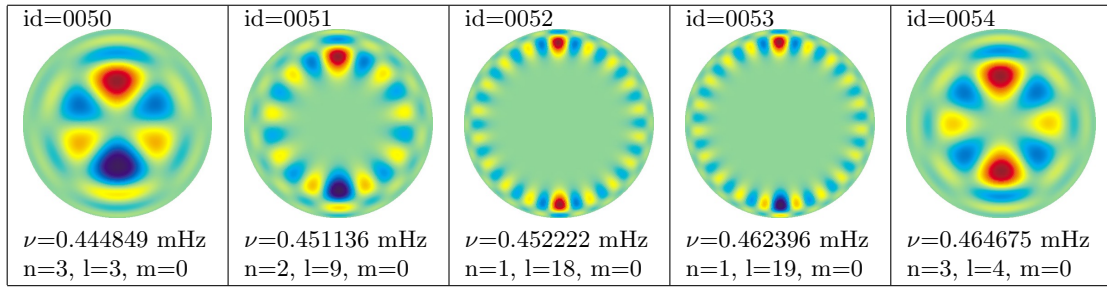
En el presente apéndice se muestran los resultados del cálculo de oscilaciones realizado usando nuestro código OMASS2d para los modelos en rotación del capítulo 6 proporcionados por A. Claret (Claret, 1999). Las autofunciones están ordenadas según su grado azimutal  $m$ , y para cada valor de  $m$  se muestran en orden creciente de frecuencia. Junto a cada modo se muestra la clasificación asignada en términos de  $n$ ,  $l$  y  $m$  y la frecuencia correspondiente.

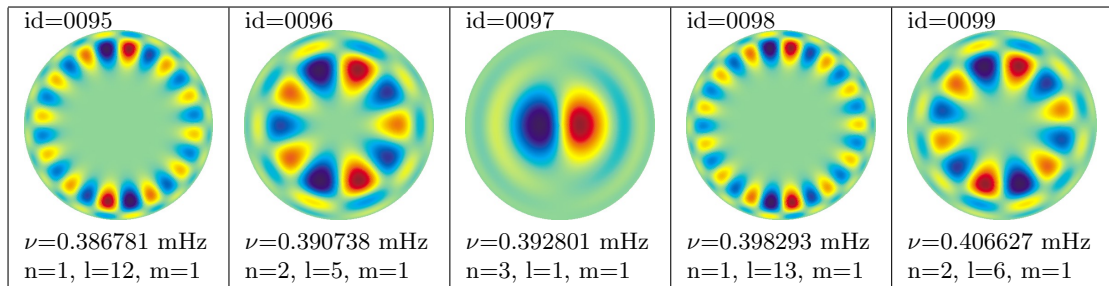
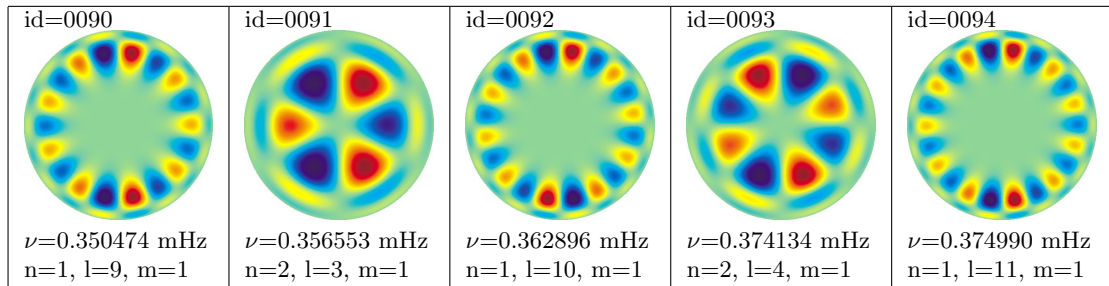
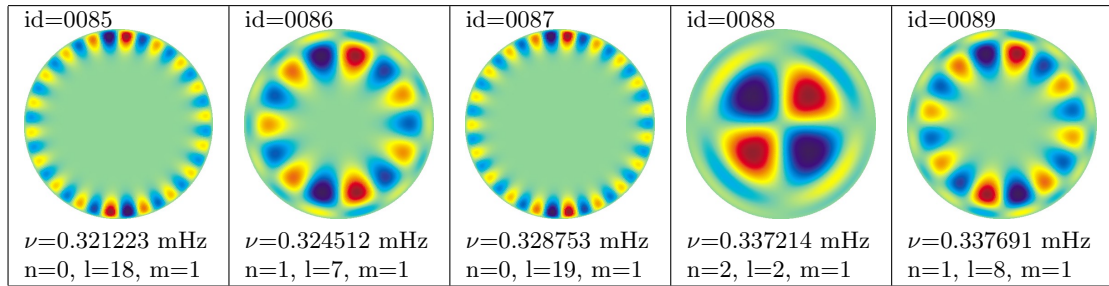
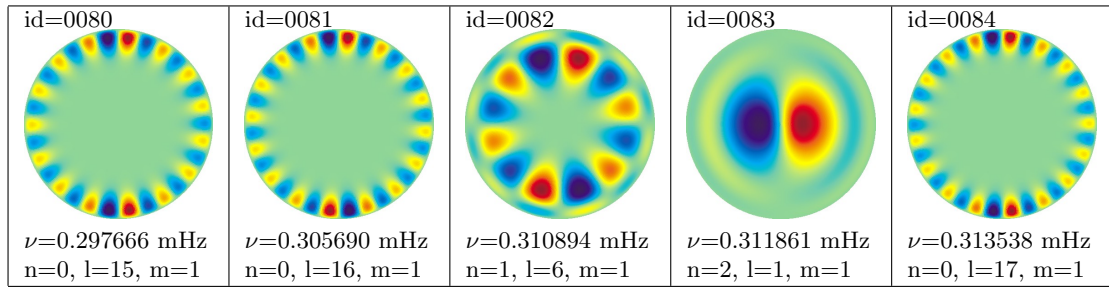
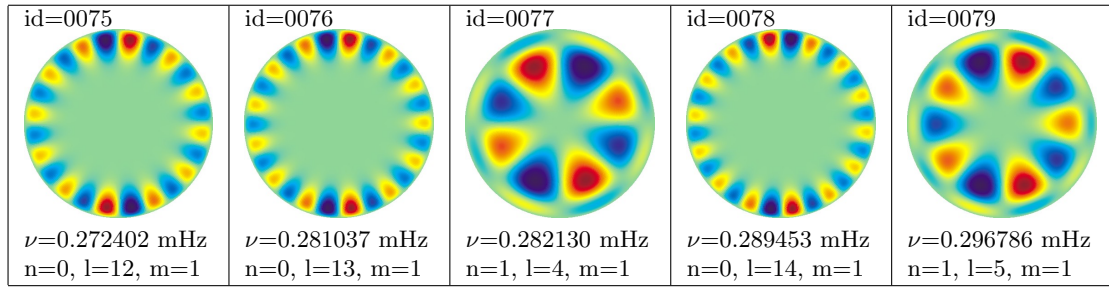
Se emplearon  $n_r = 2000$  puntos en la dirección radial y  $l_{\max} = 40$ . Para asegurarnos de que las autofunciones calculadas están bien caracterizadas con este valor de  $l_{\max}$ , se realizó un segundo cálculo usando  $l_{\max} = 20$  y se seleccionaron los modos que aparecían simultáneamente en ambos cálculos sin variar apreciablemente su estructura.

B.1 Modelo 1 ( $\Omega = 0$  rd/s)

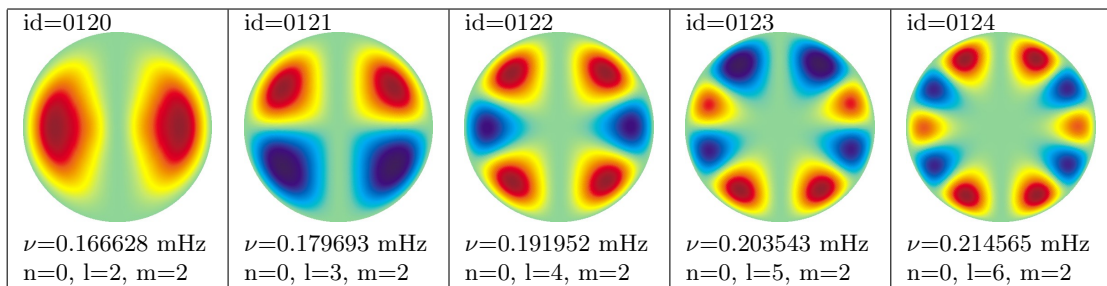
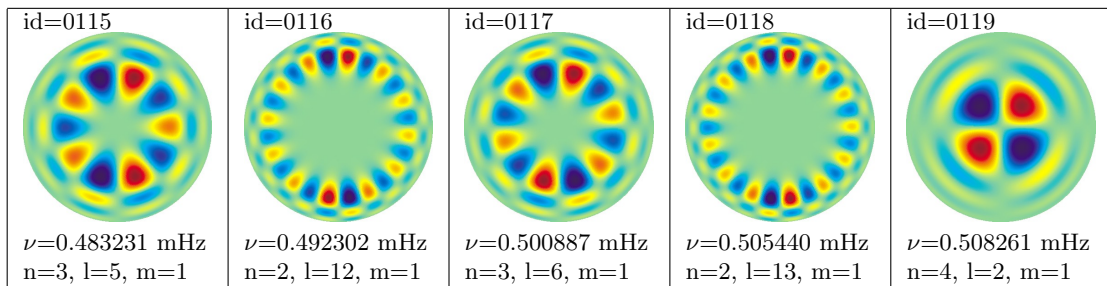
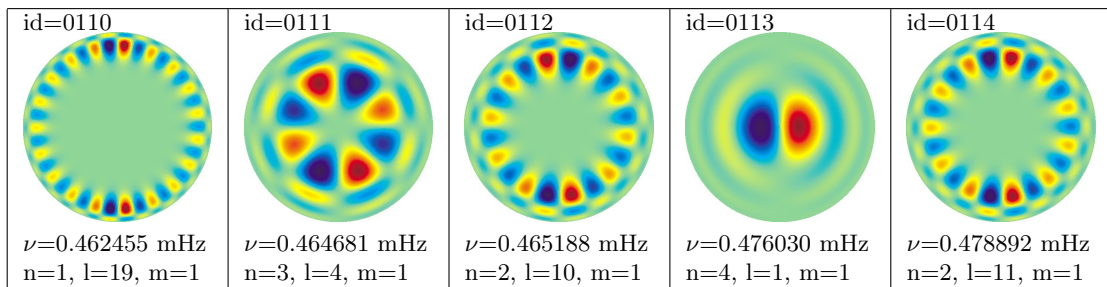
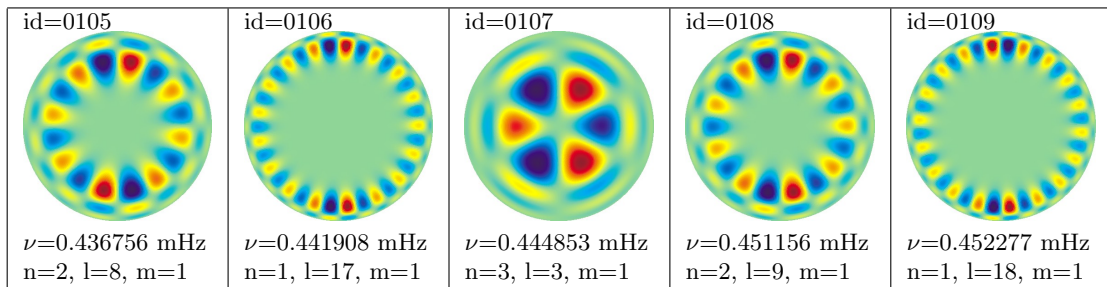
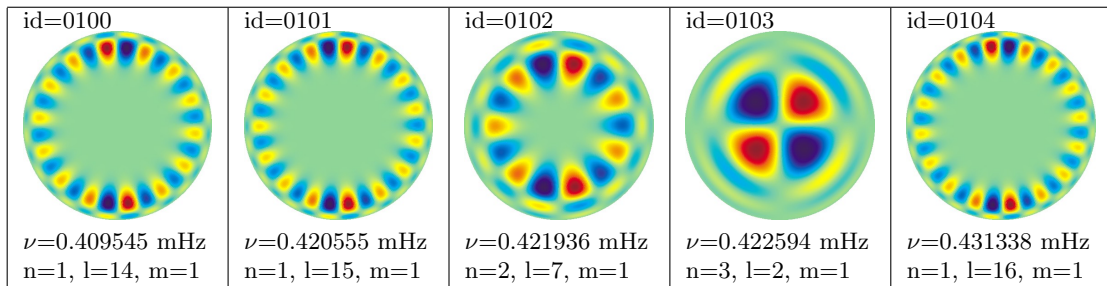


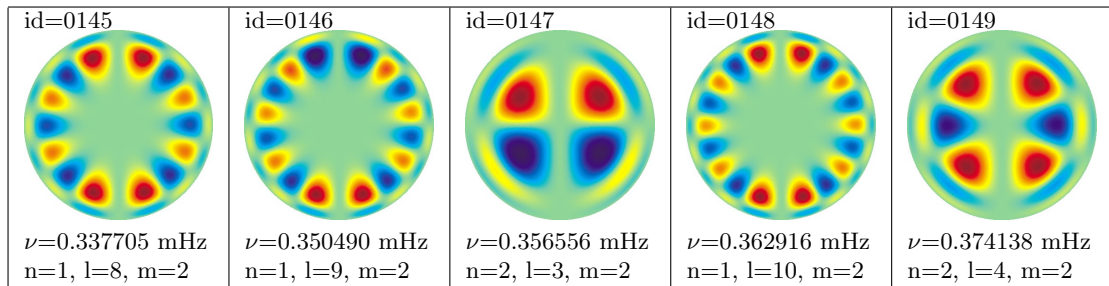
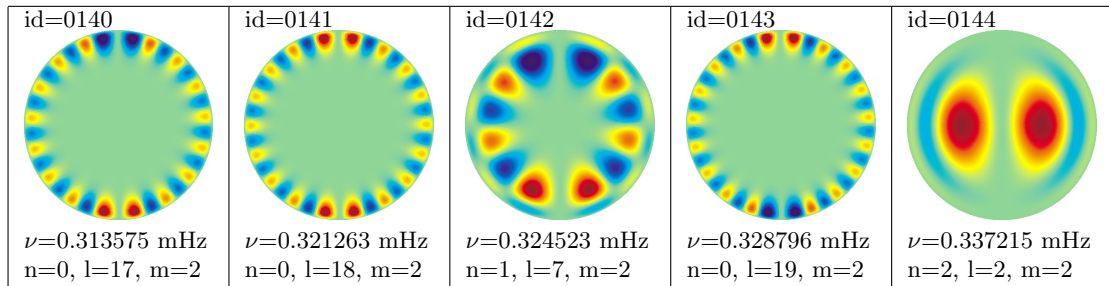
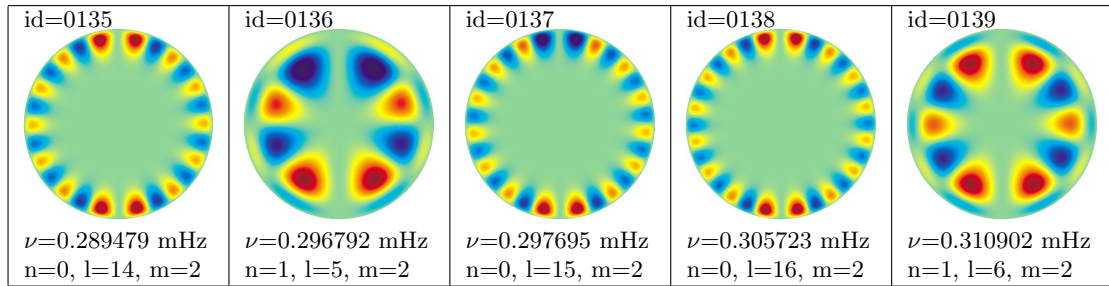
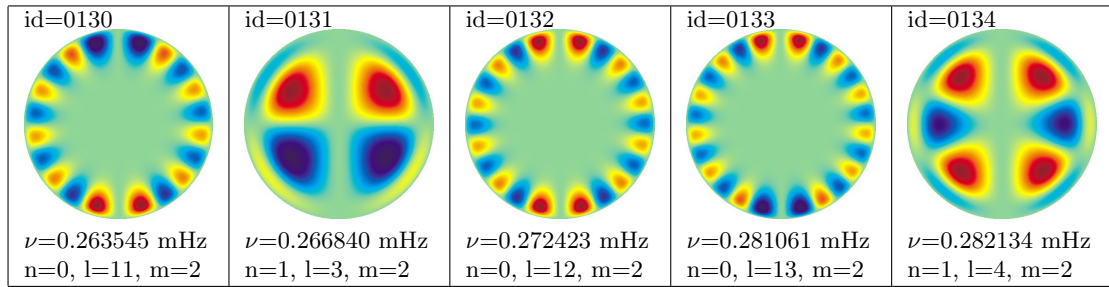
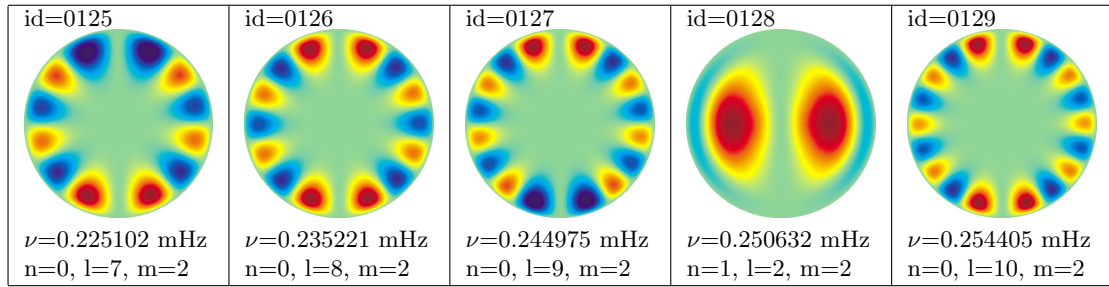


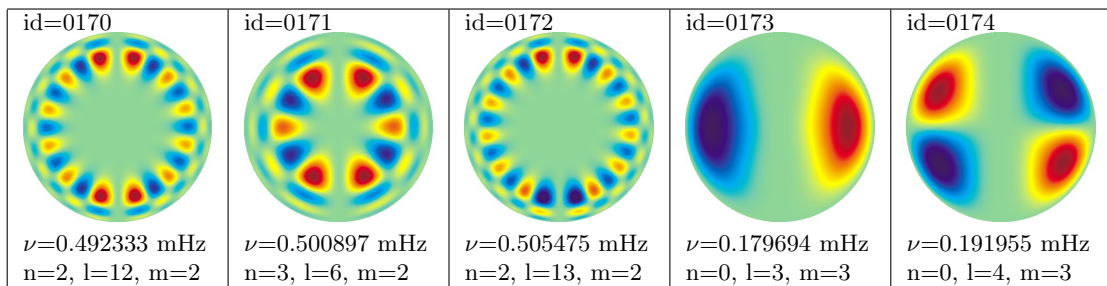
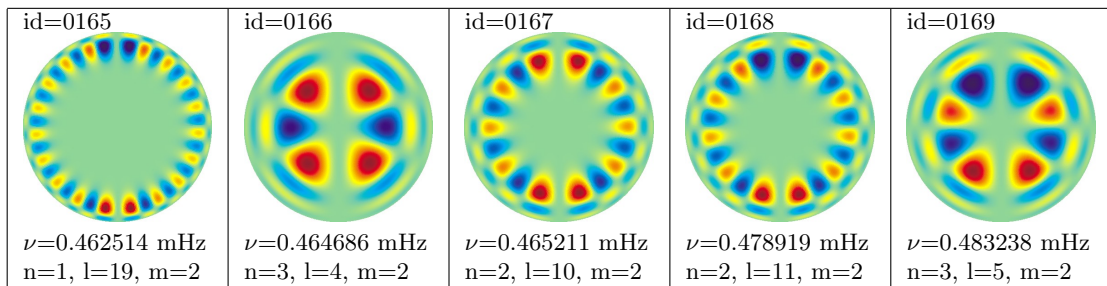
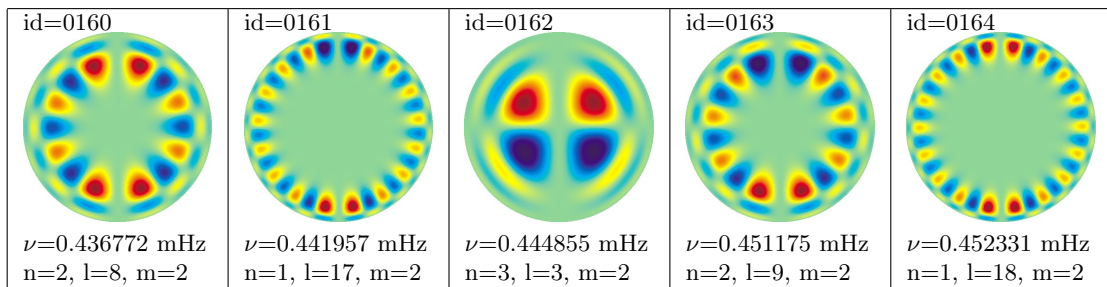
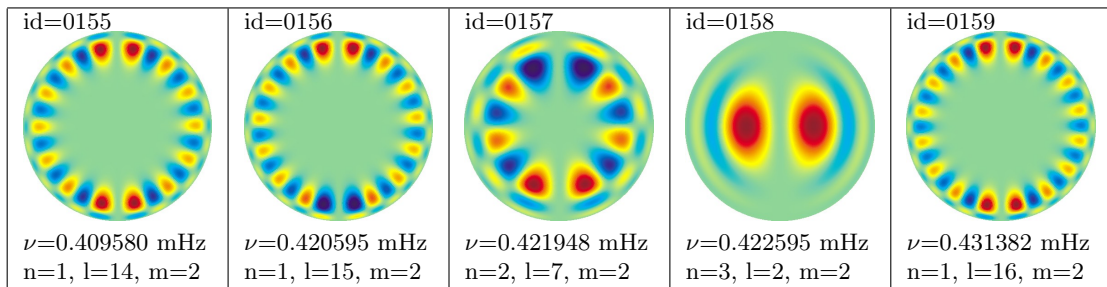
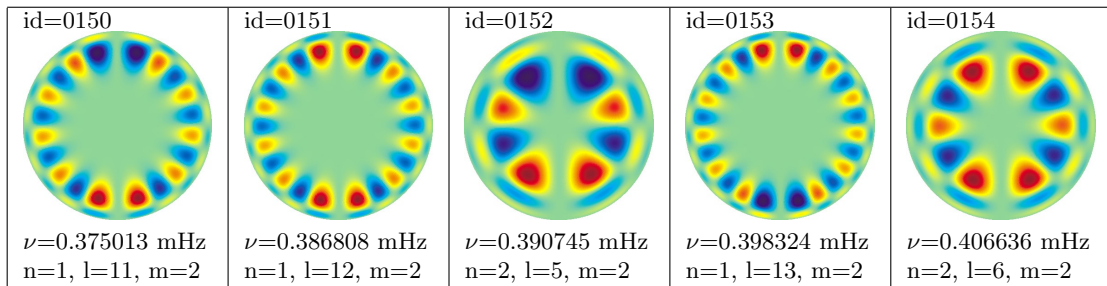




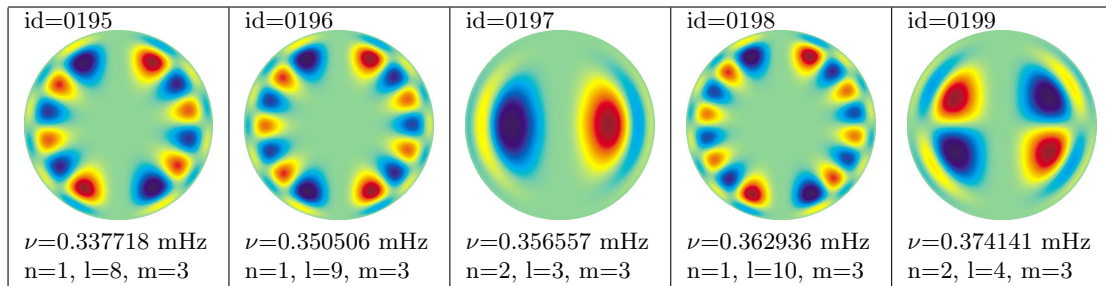
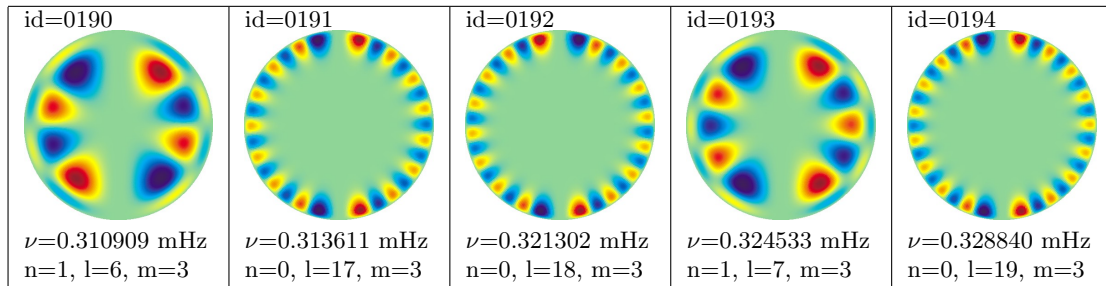
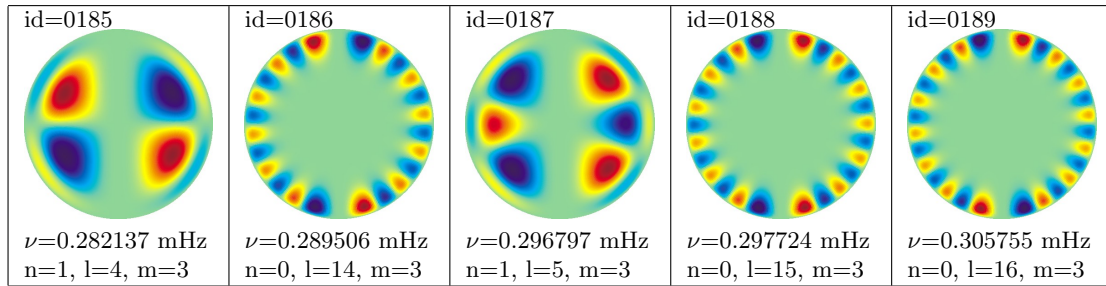
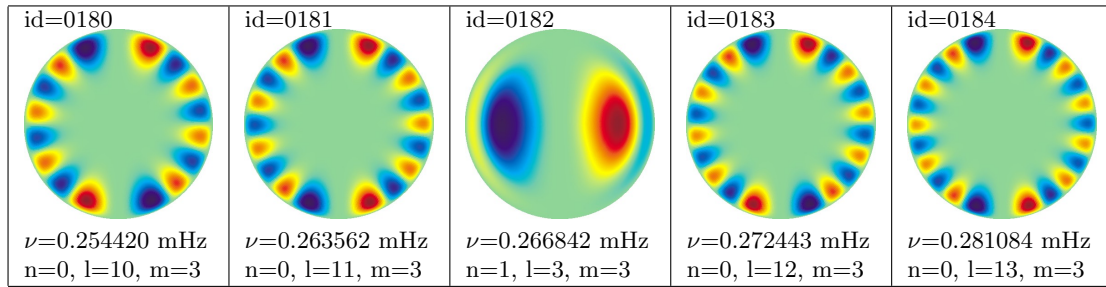
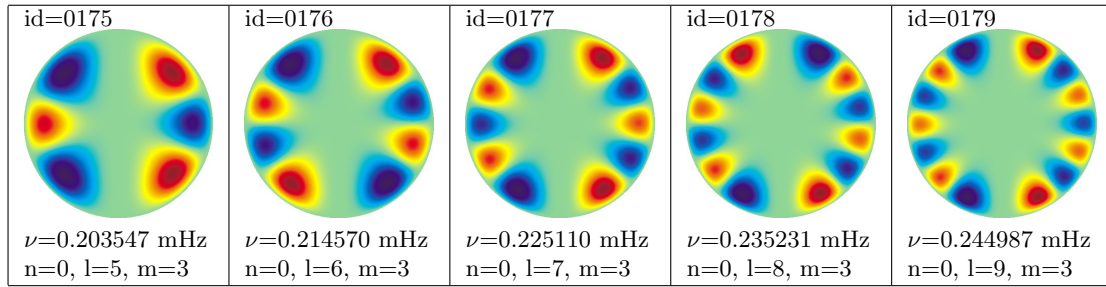


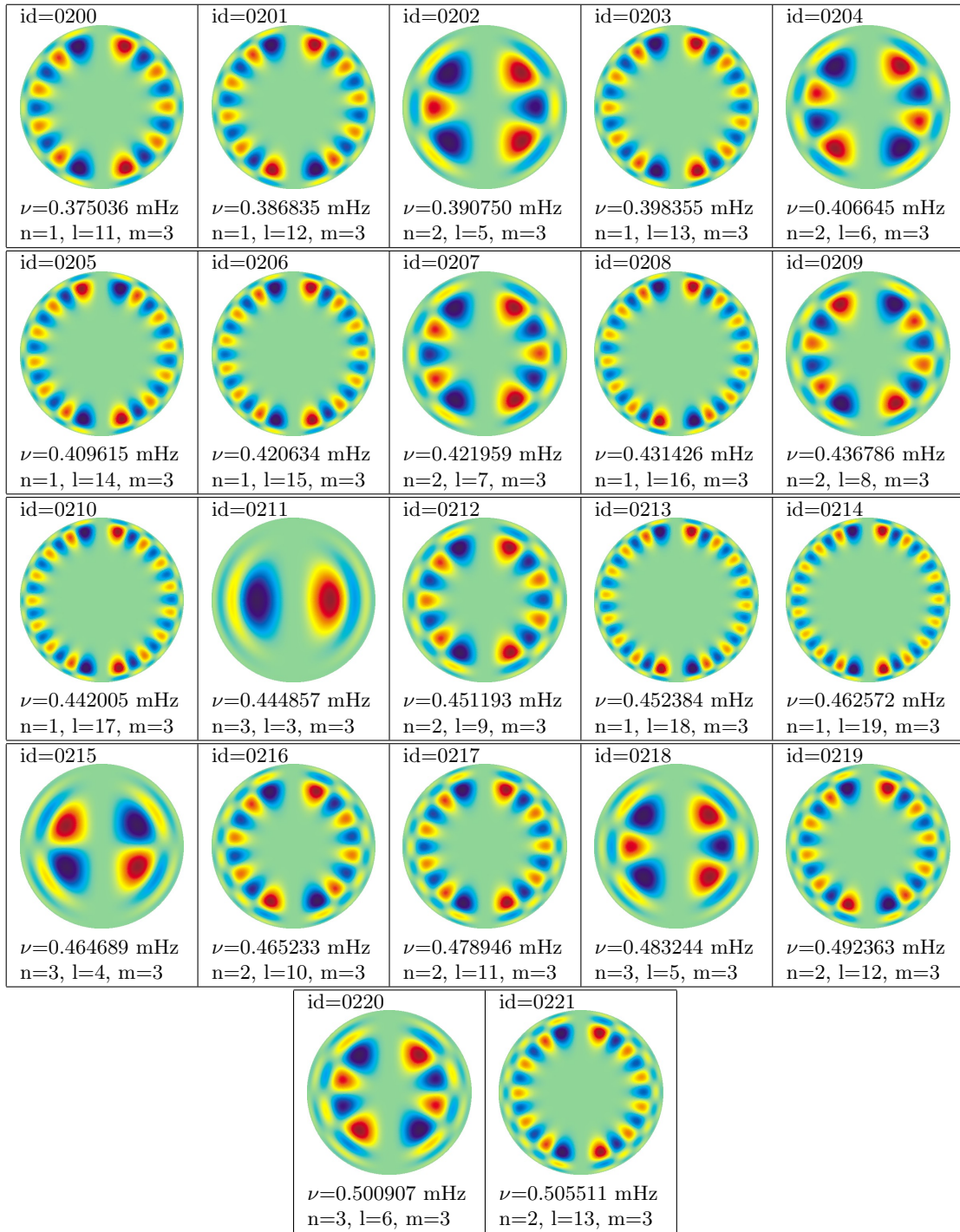




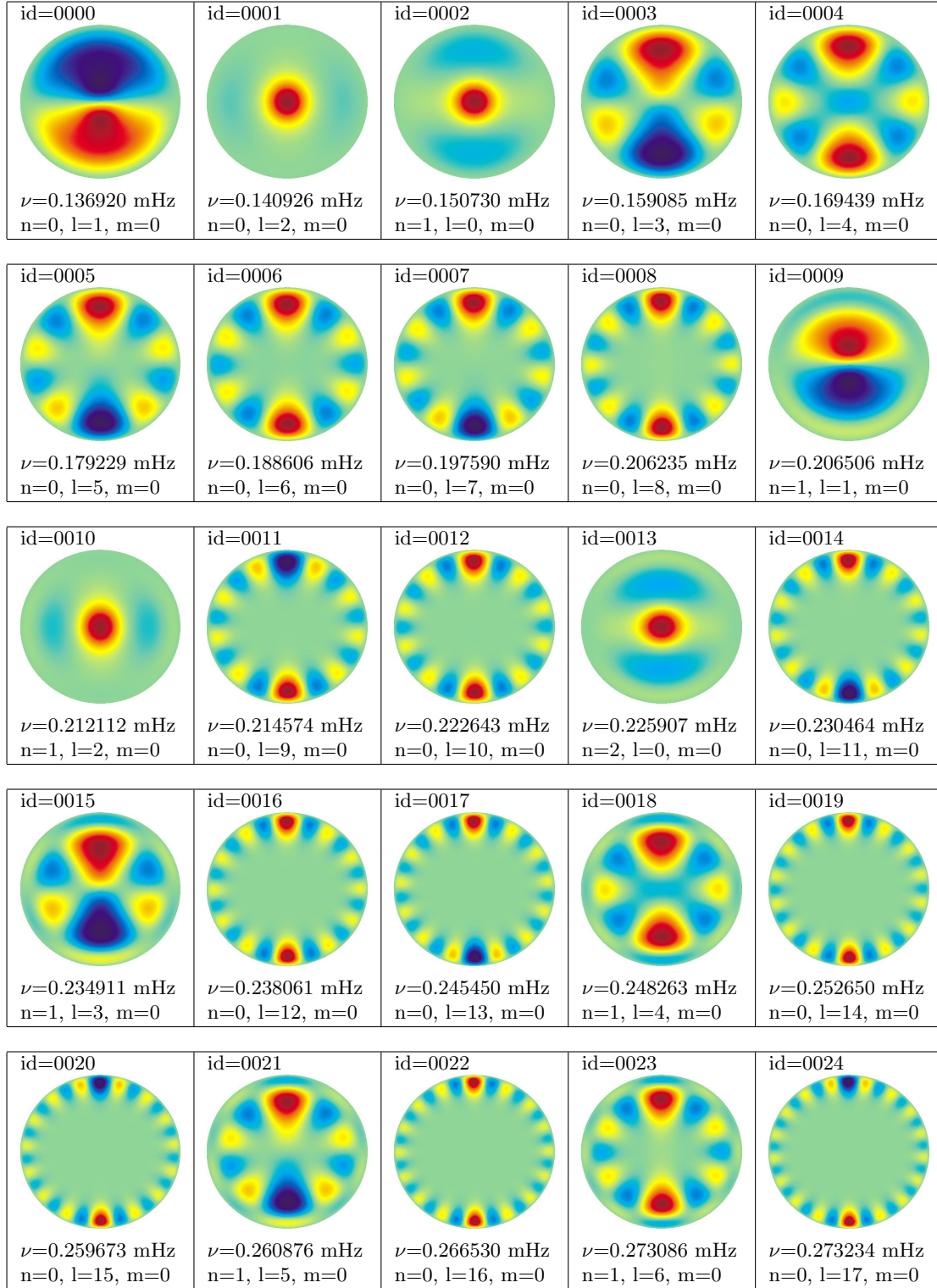


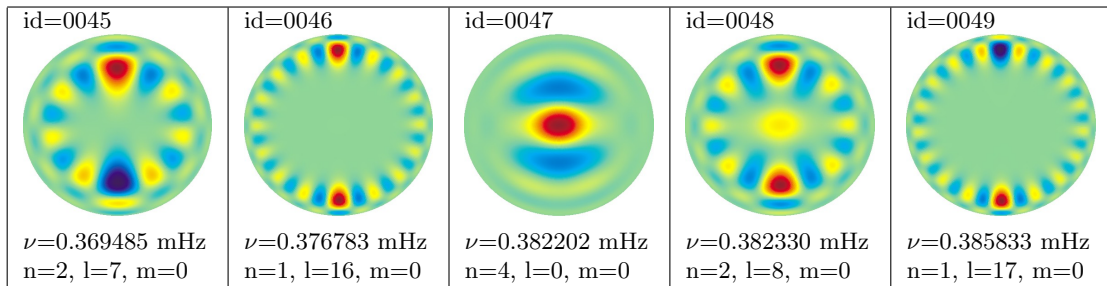
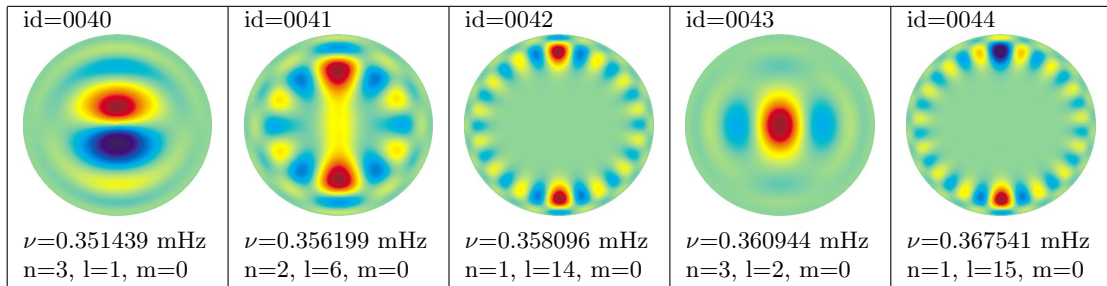
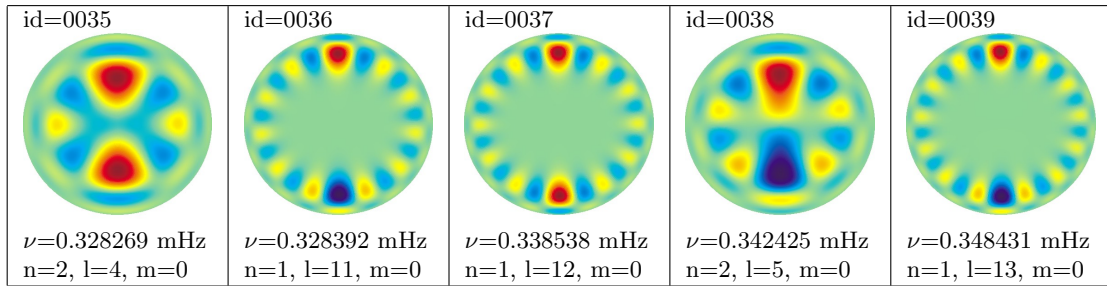
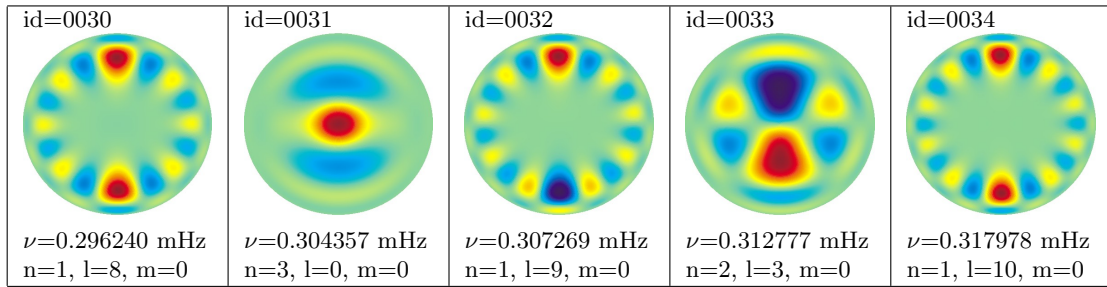
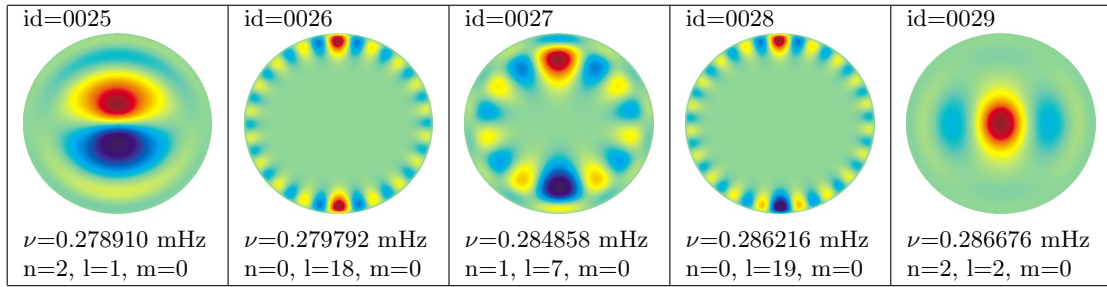


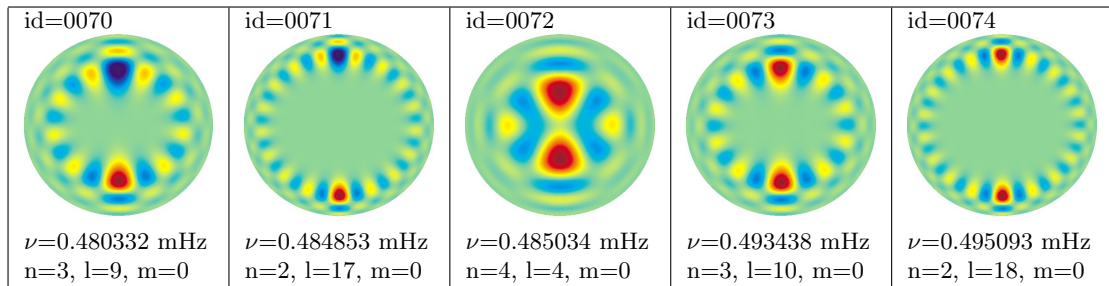
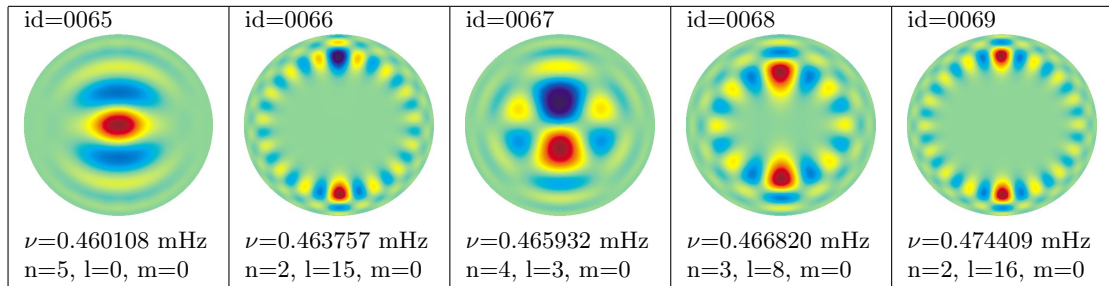
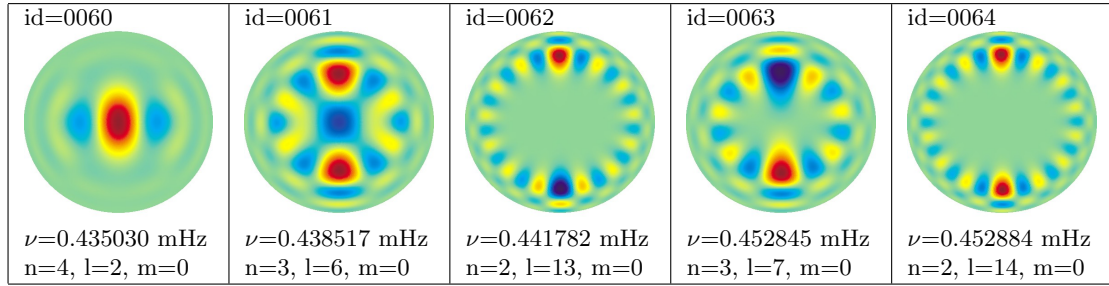
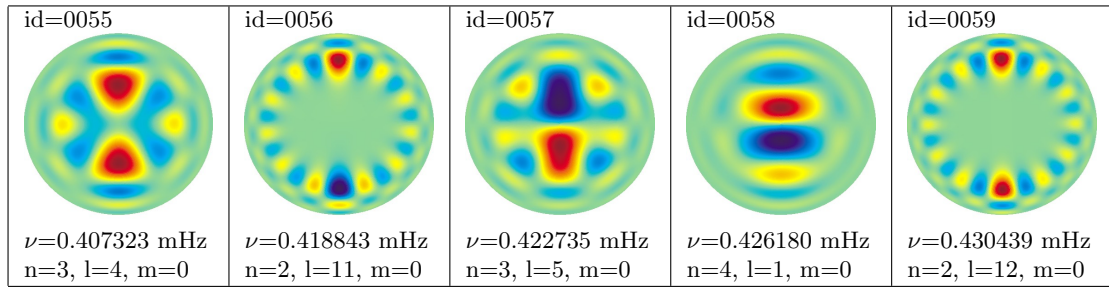
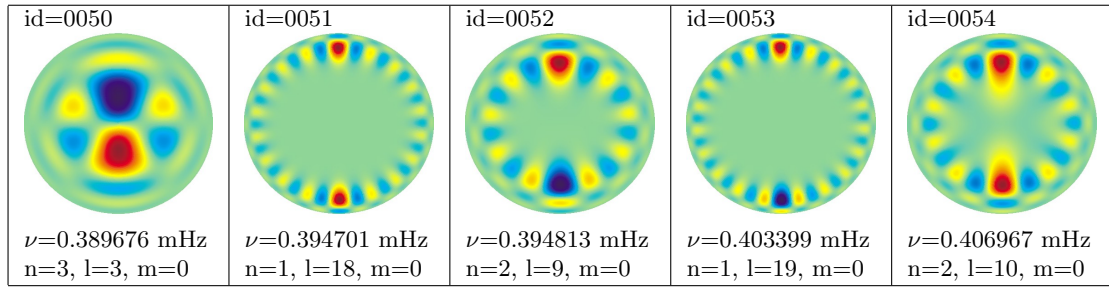




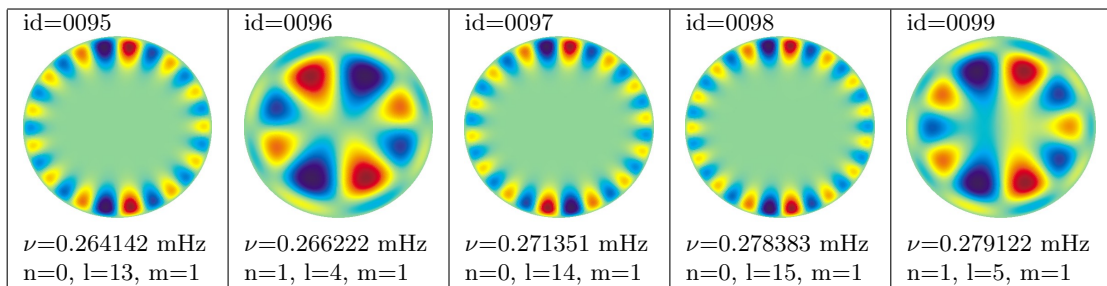
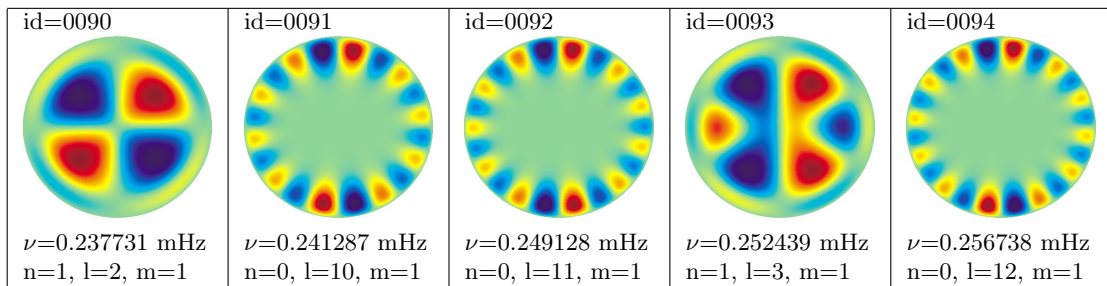
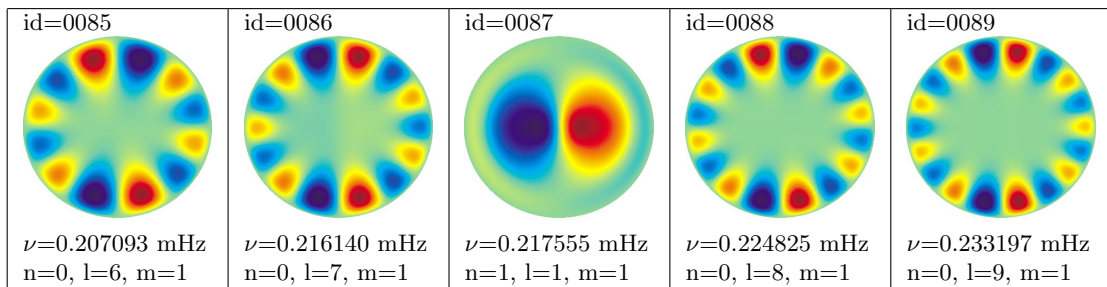
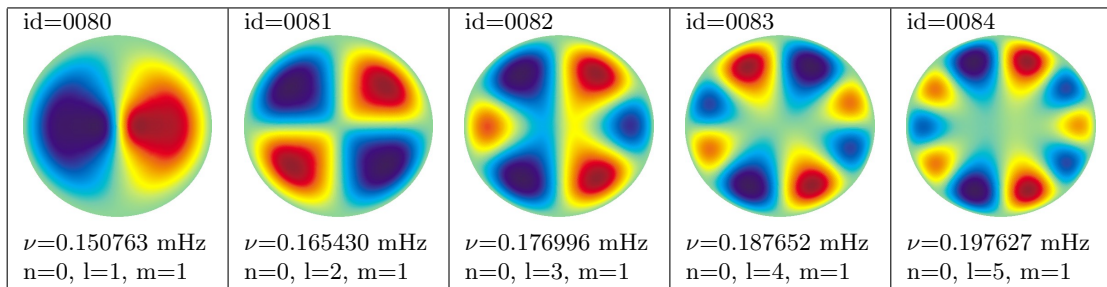
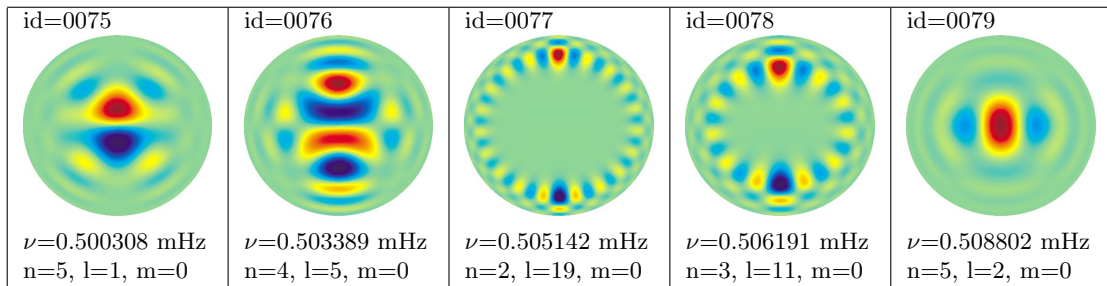


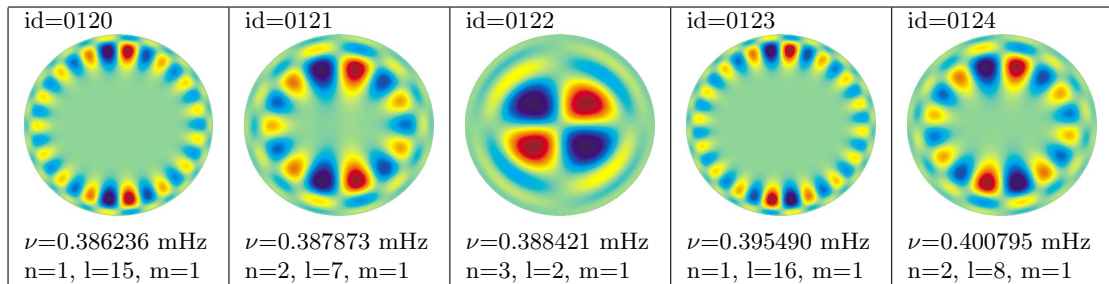
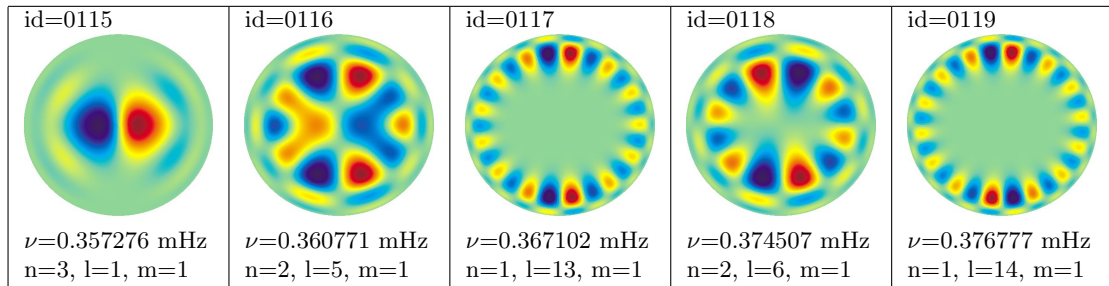
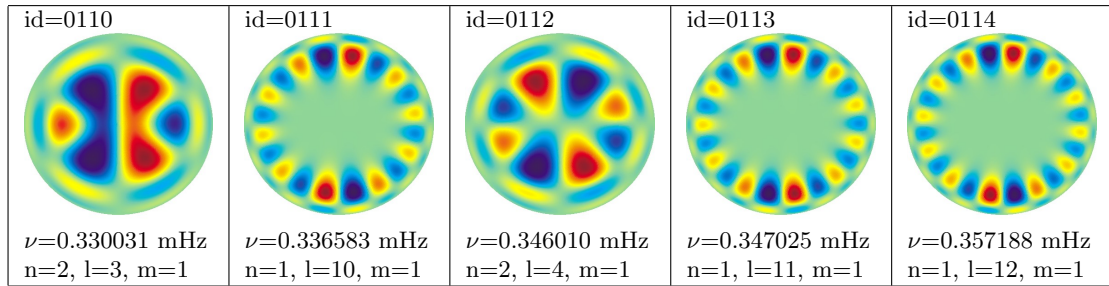
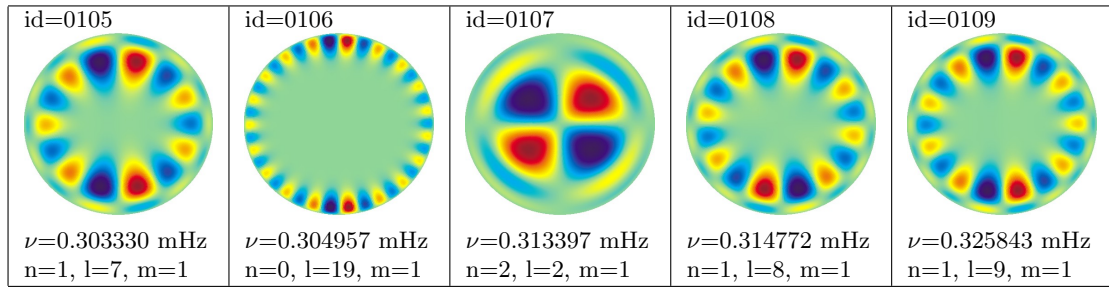
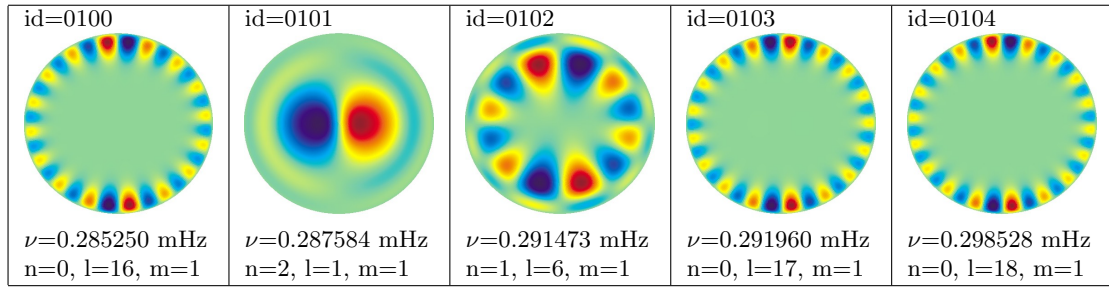
B.2 Modelo 2 ( $\Omega = 1.18 \cdot 10^{-4}$  rd/s)

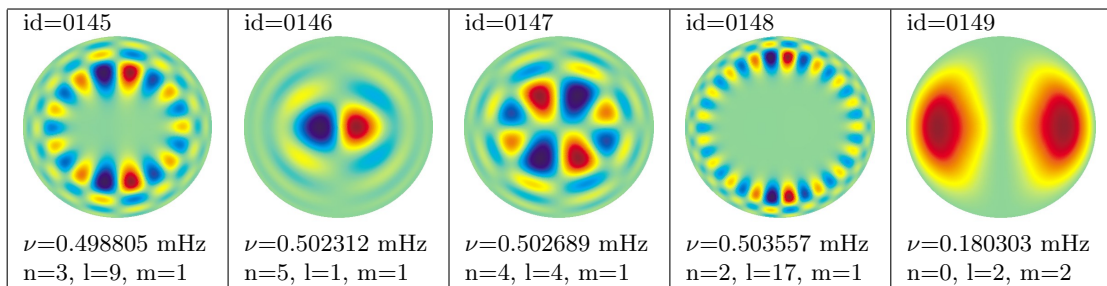
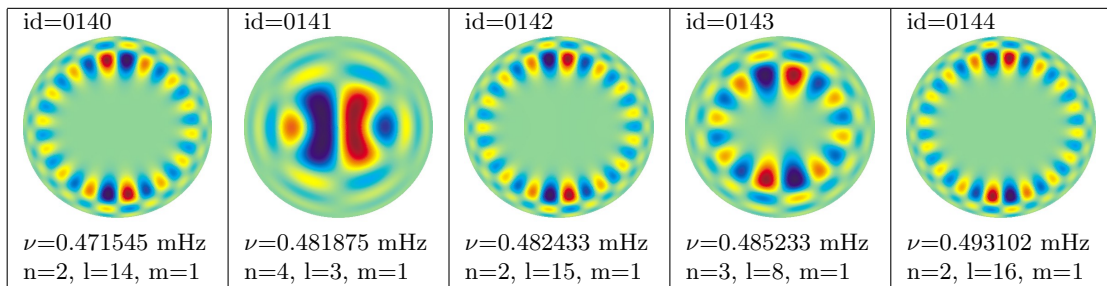
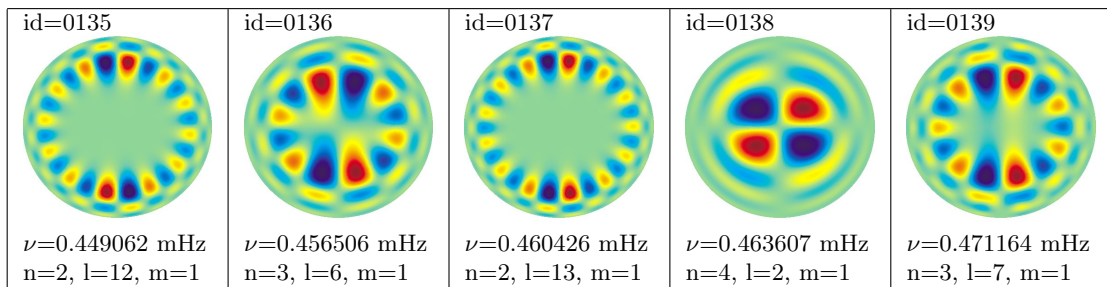
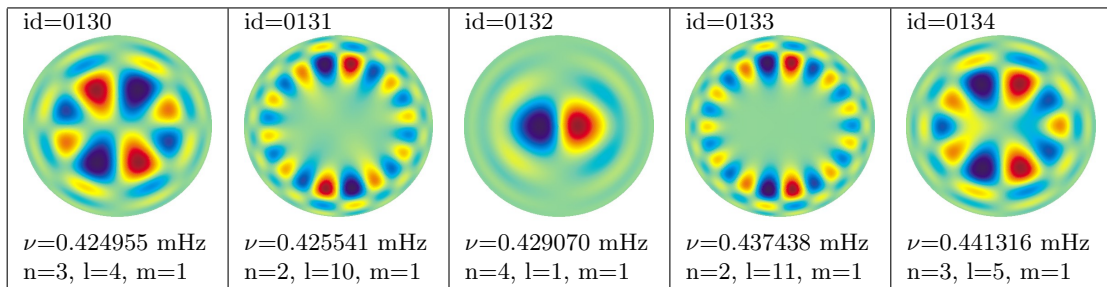
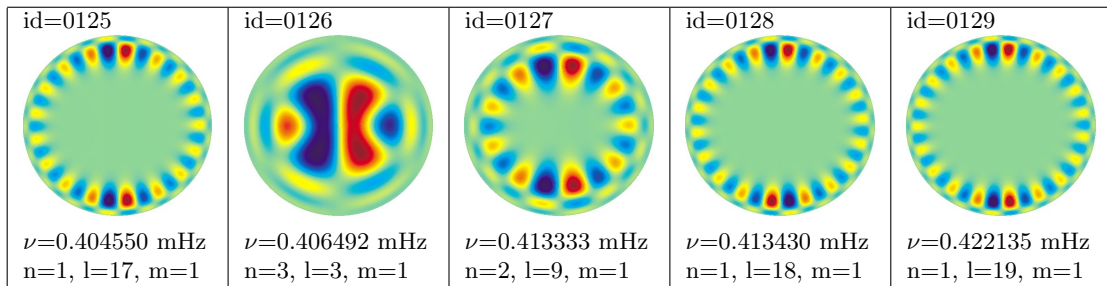




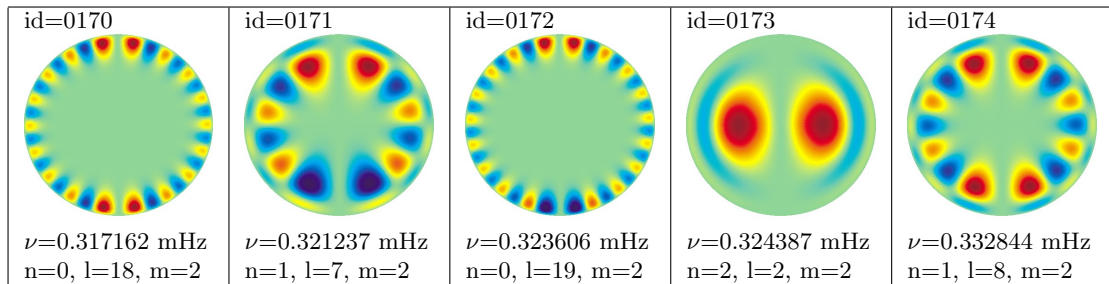
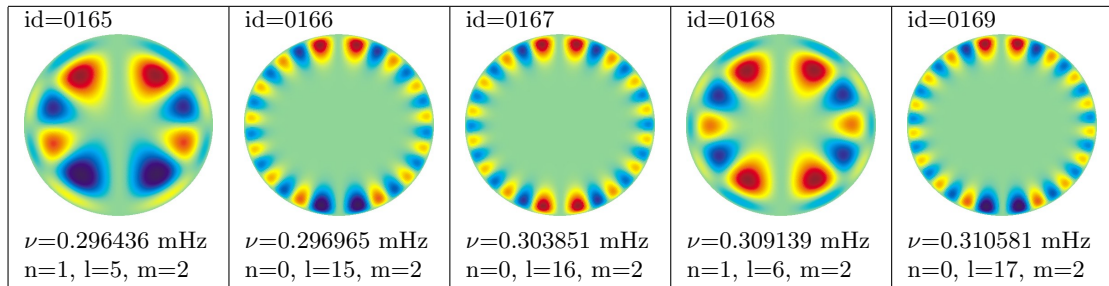
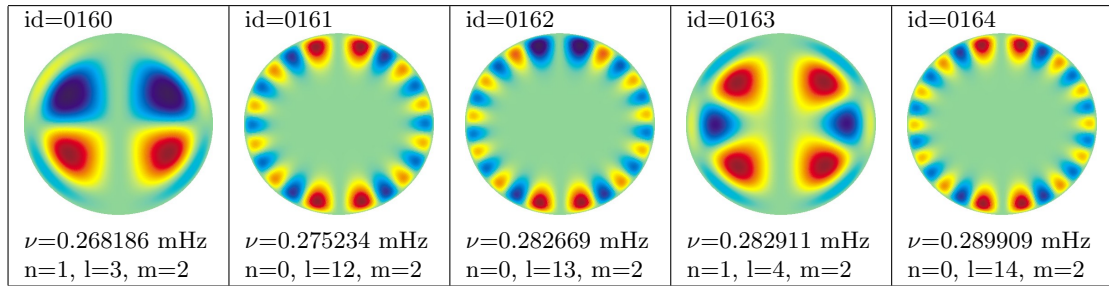
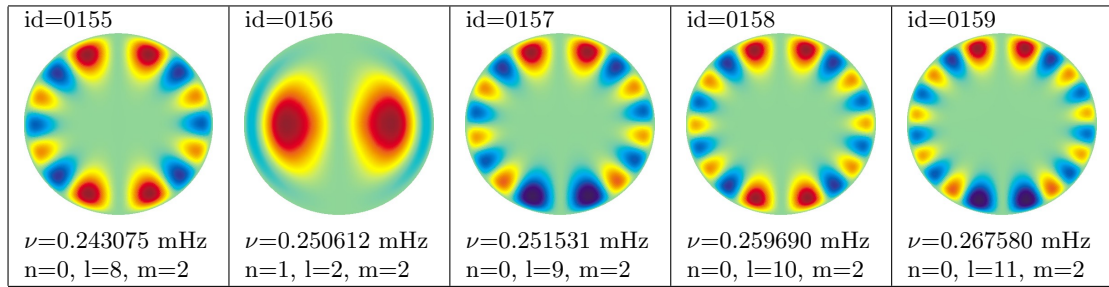
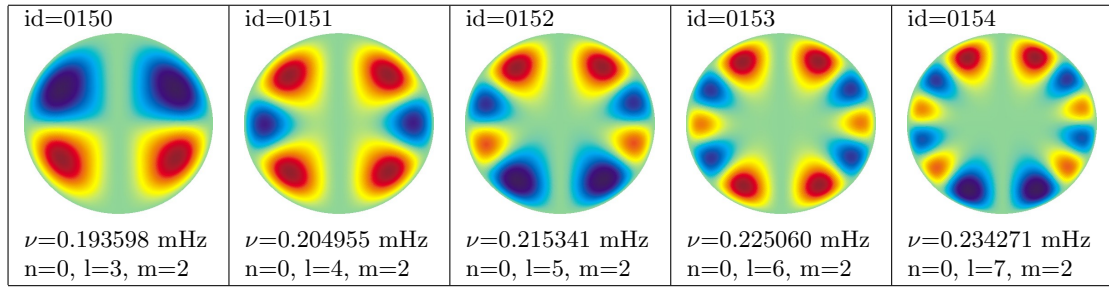


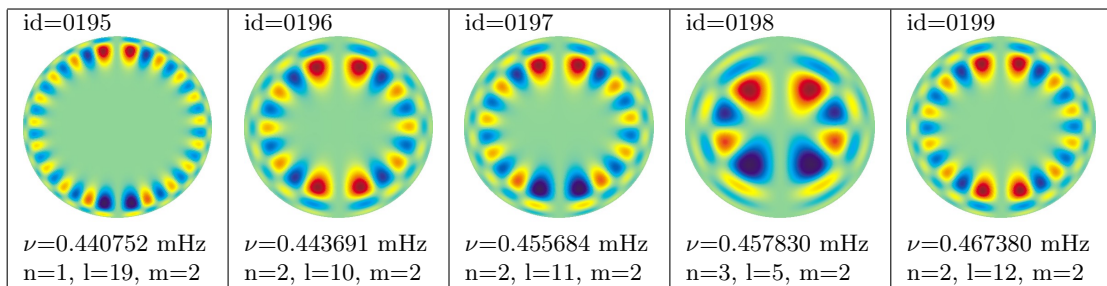
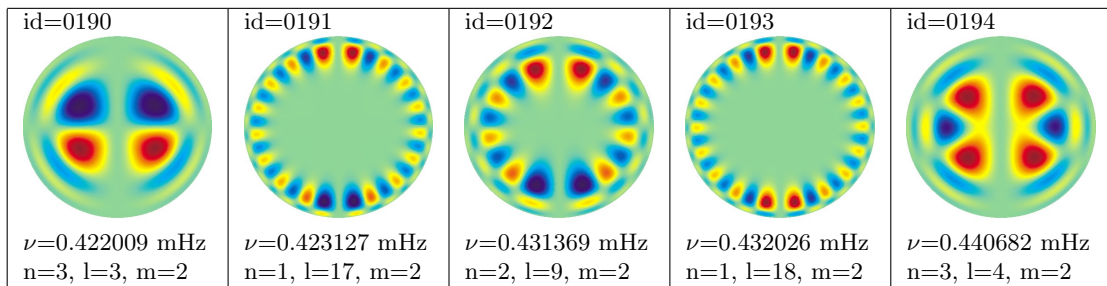
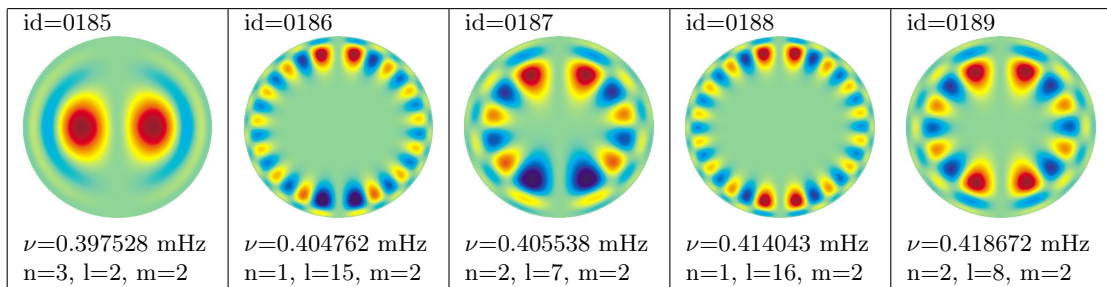
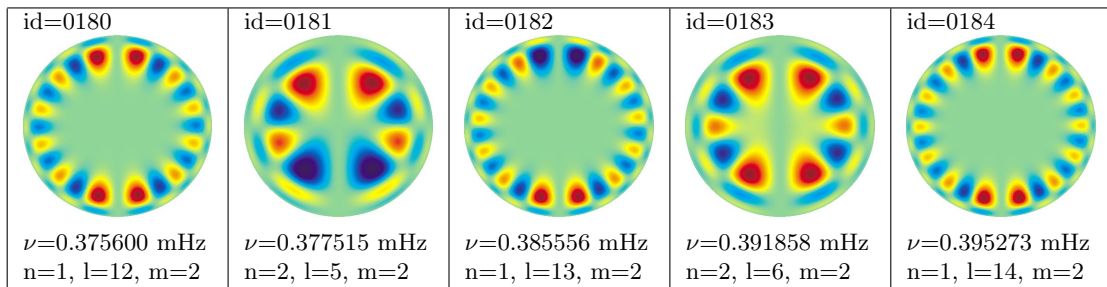
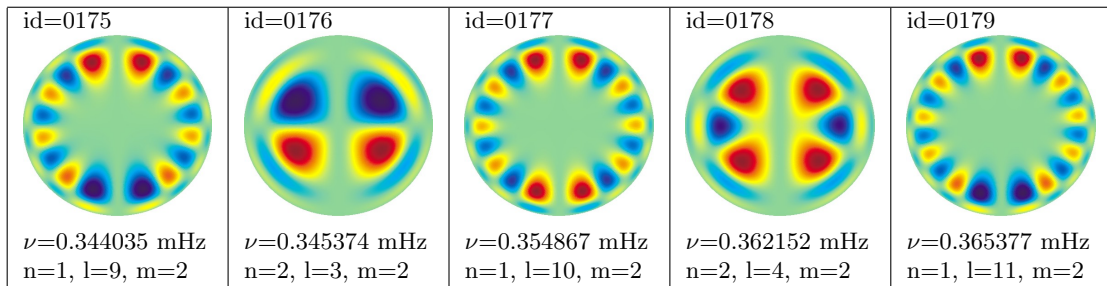




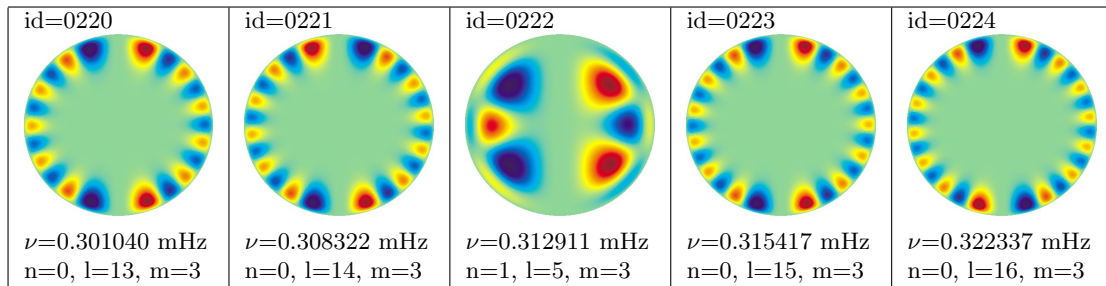
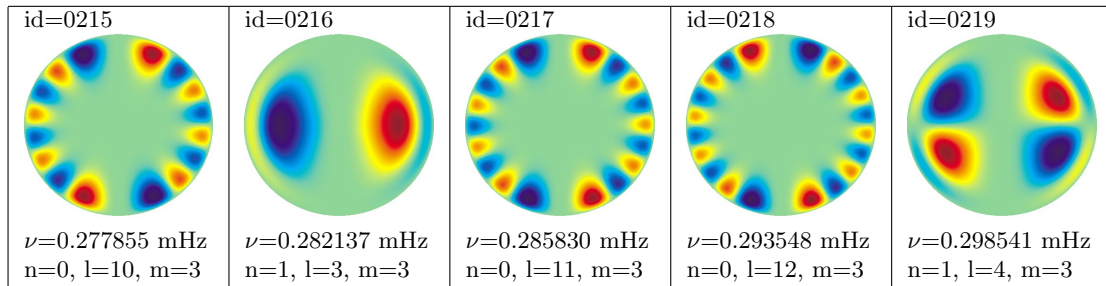
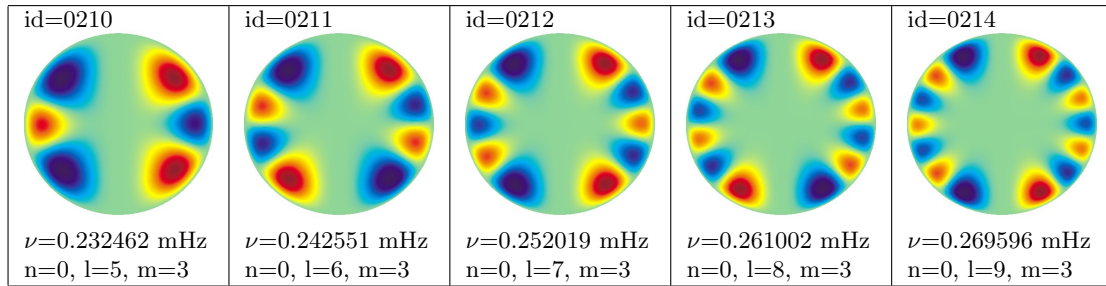
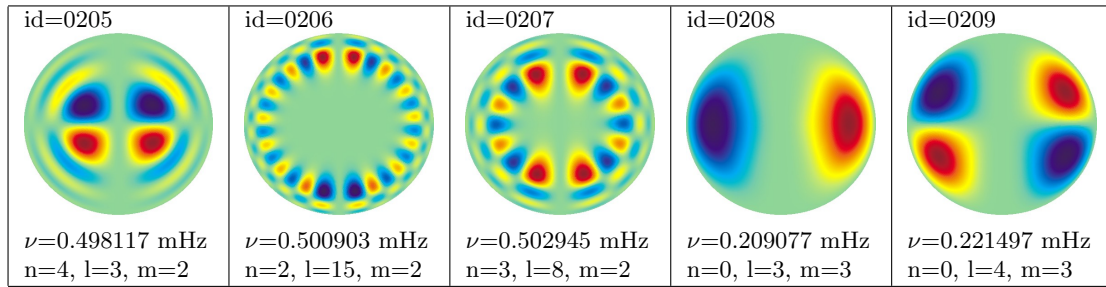
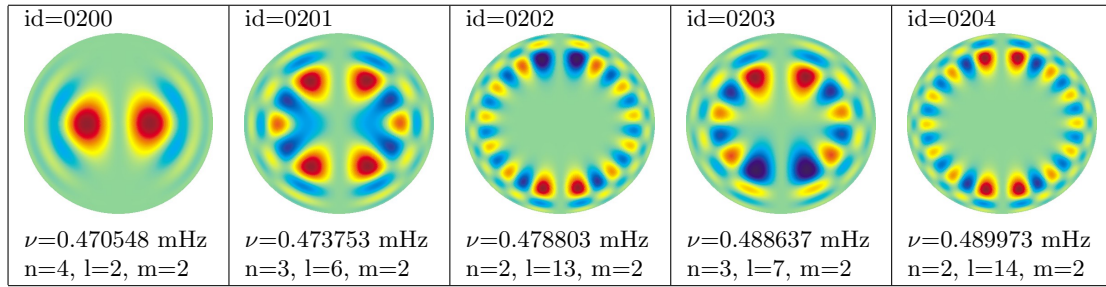


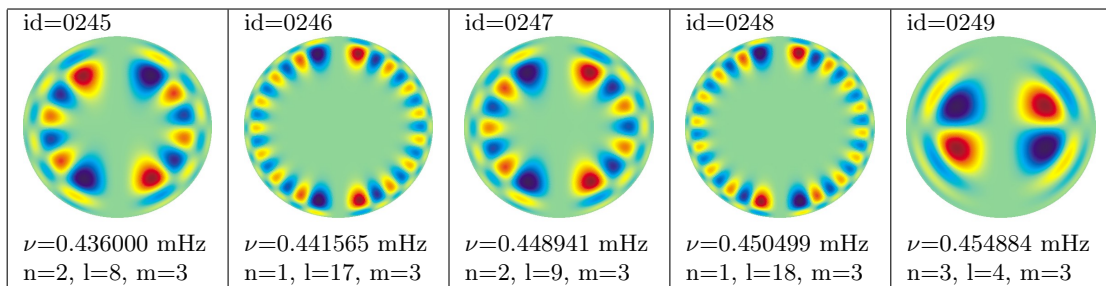
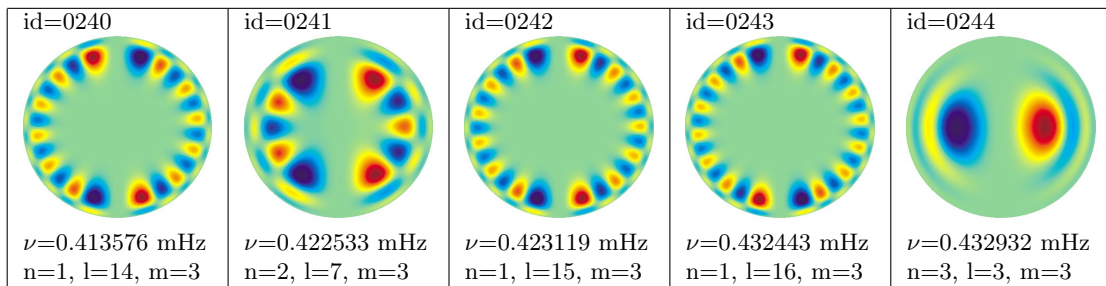
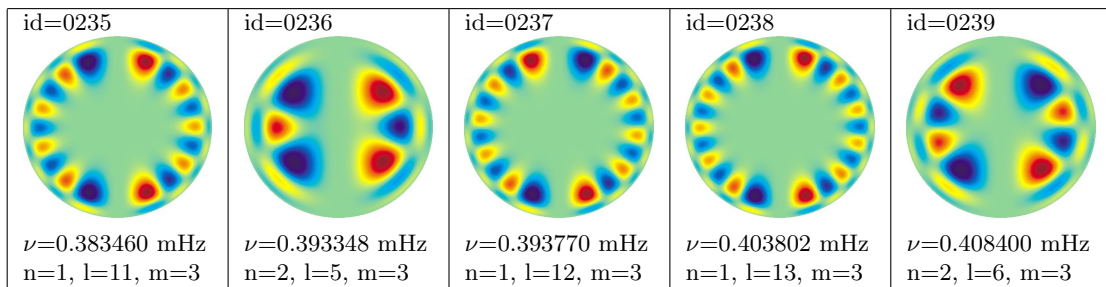
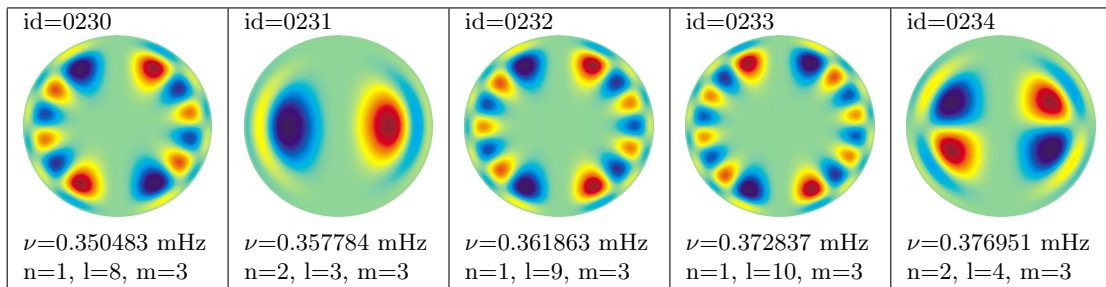
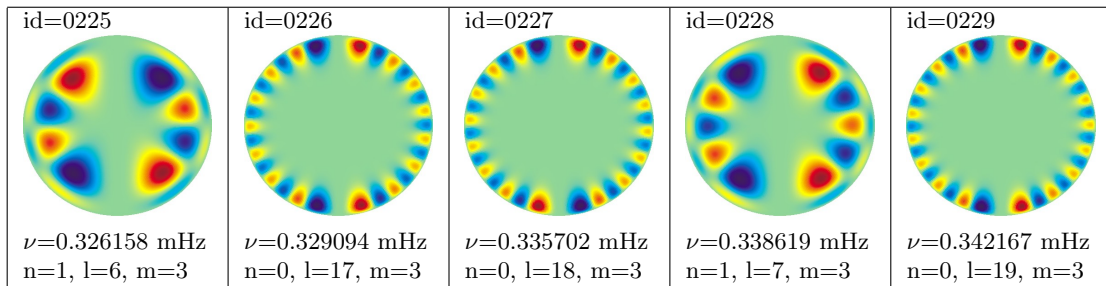


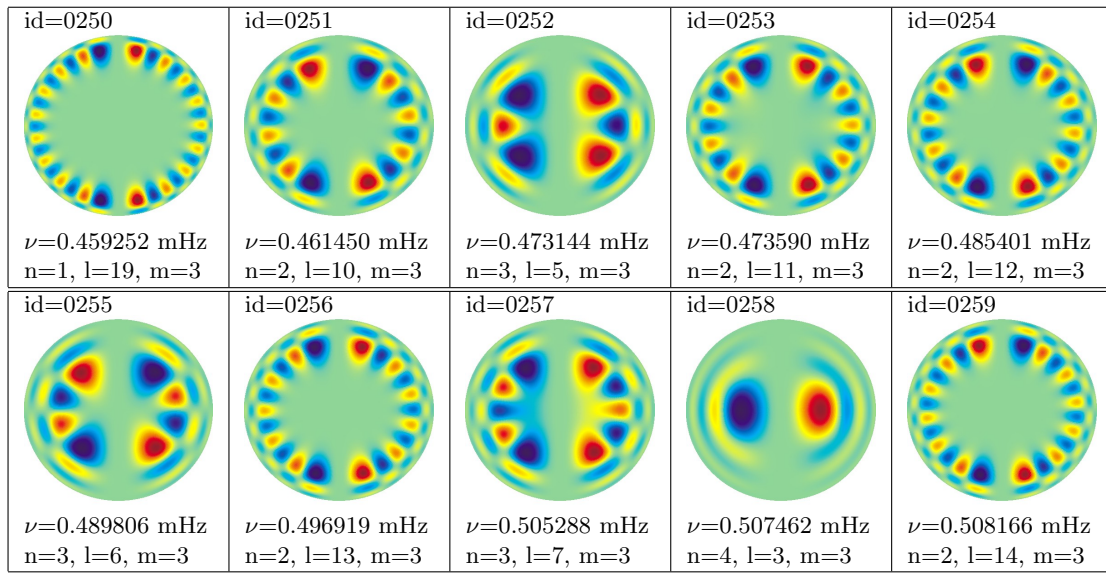




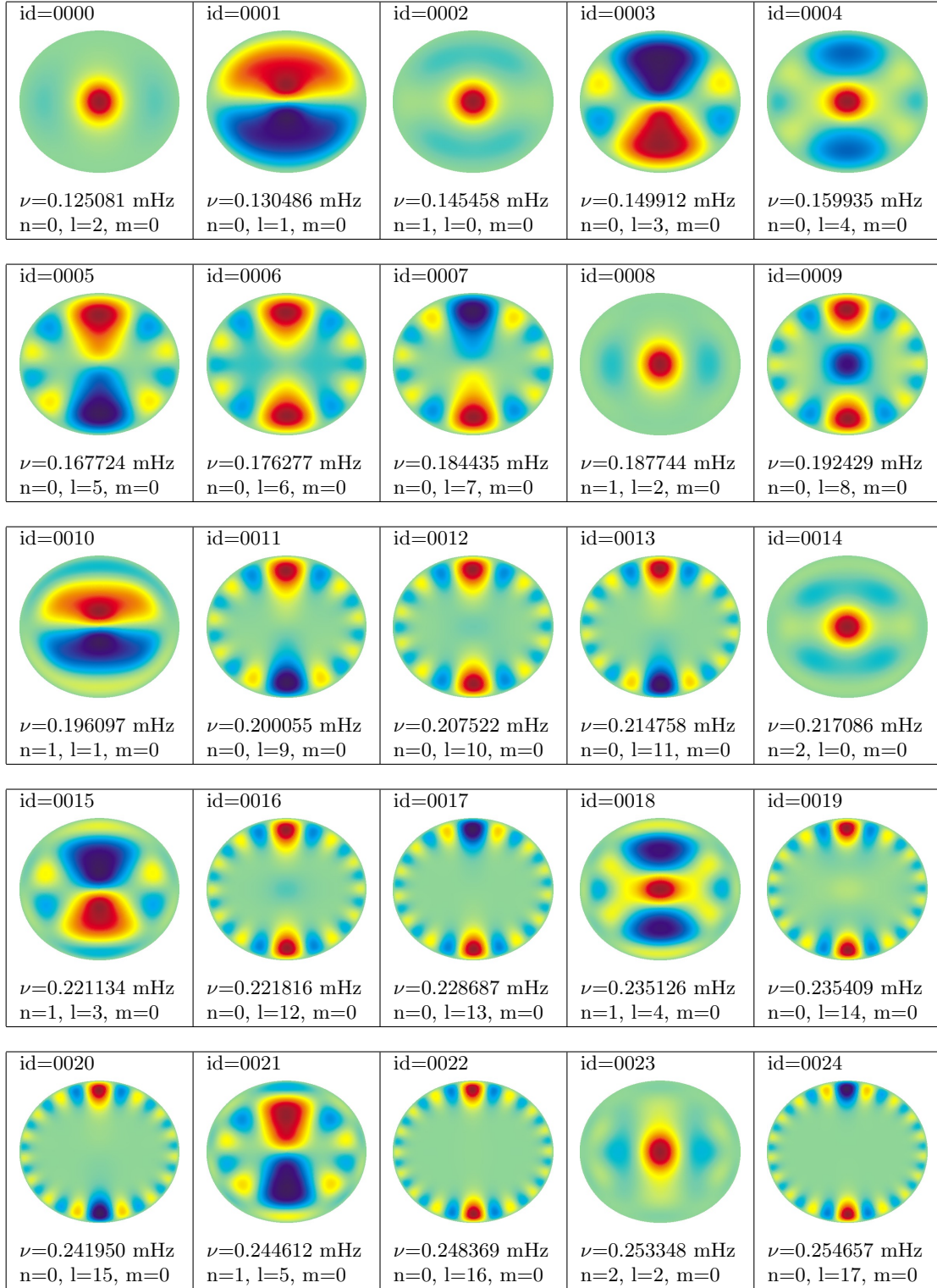




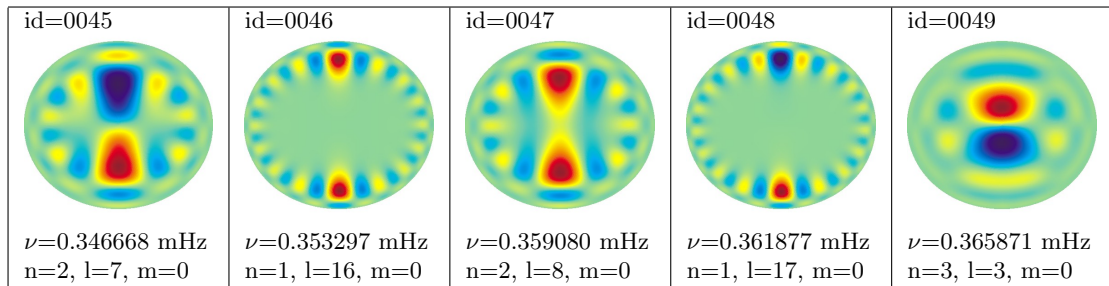
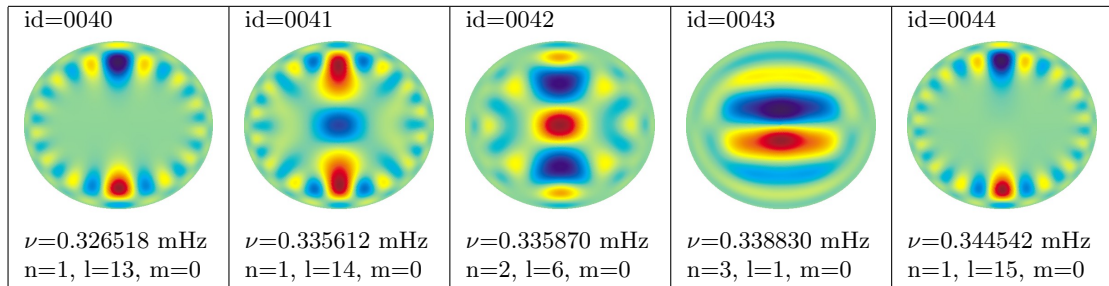
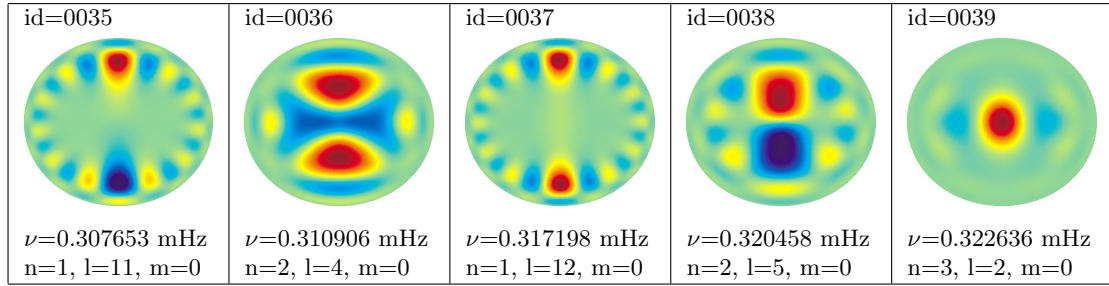
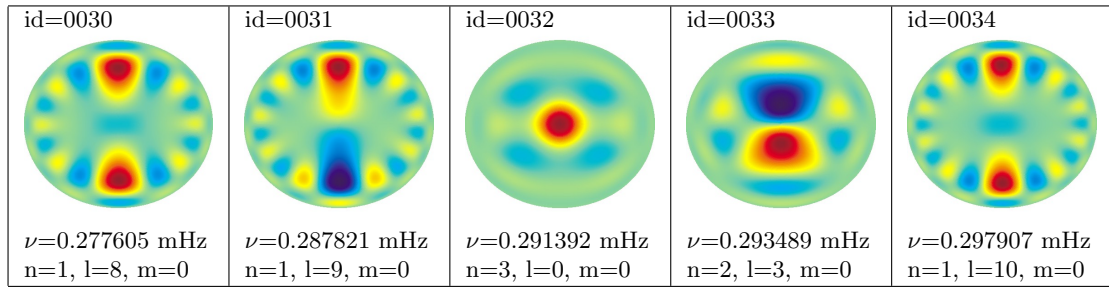
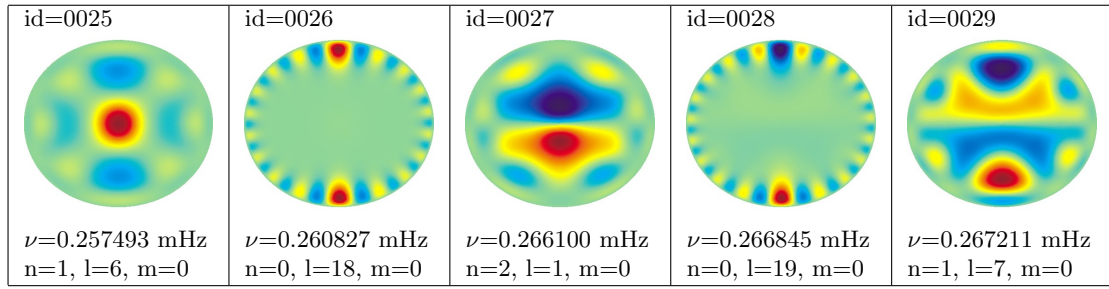


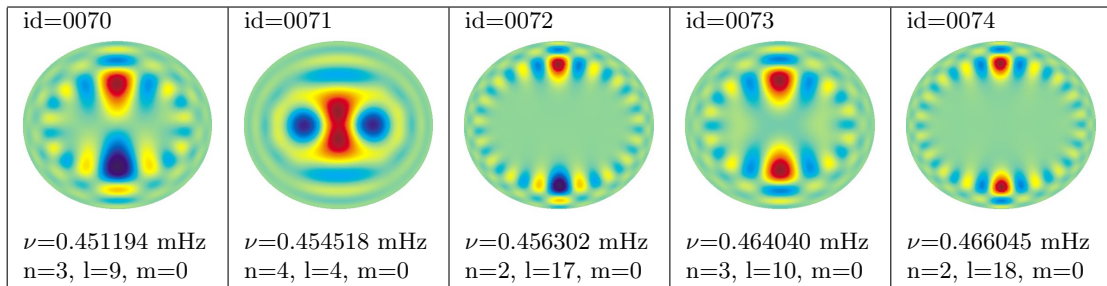
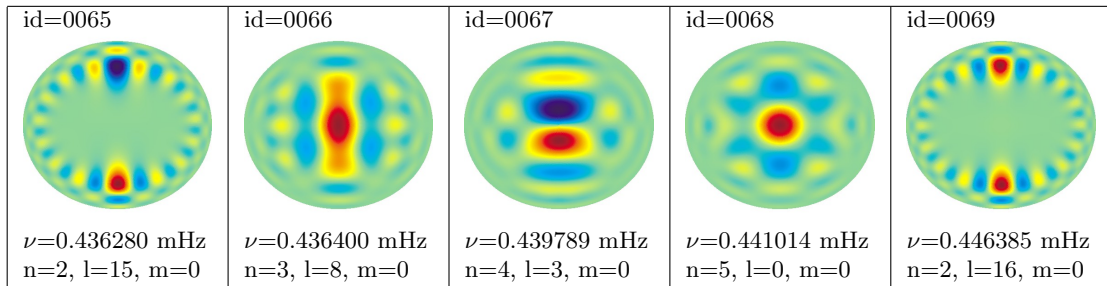
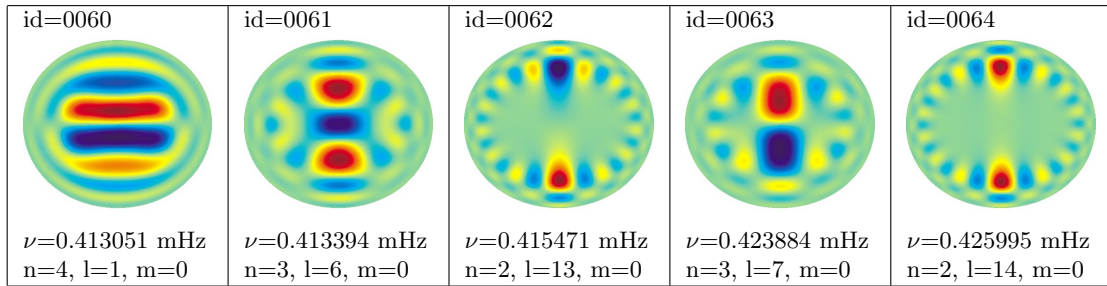
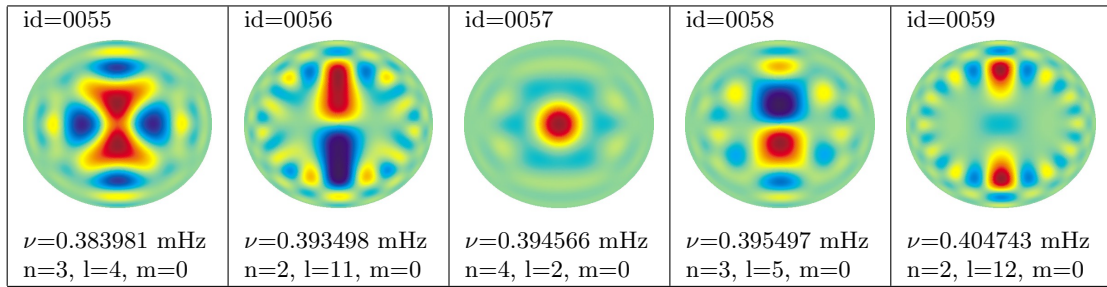
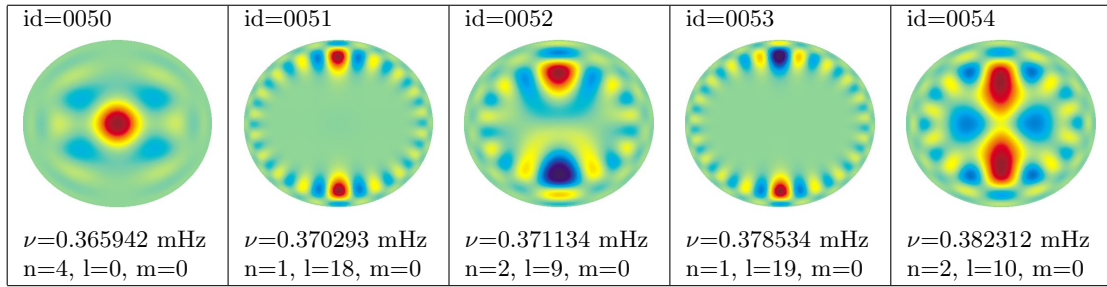


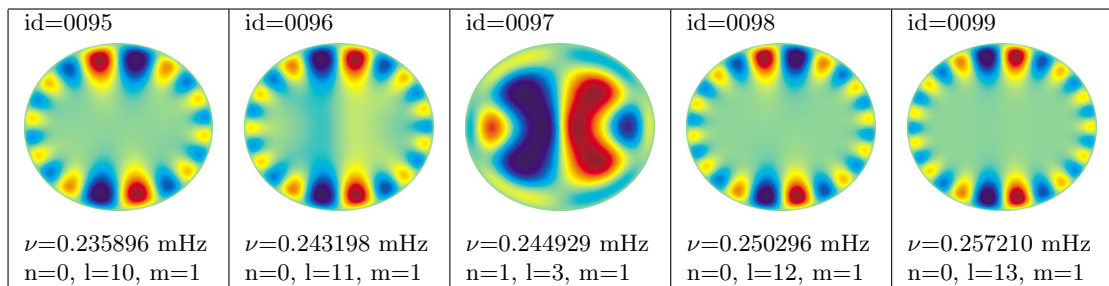
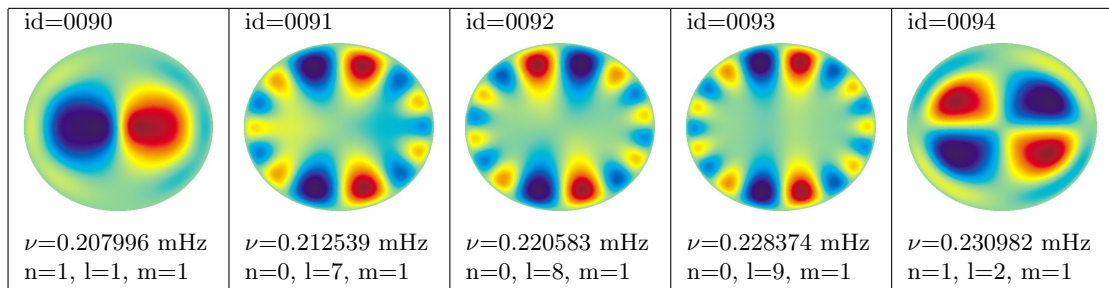
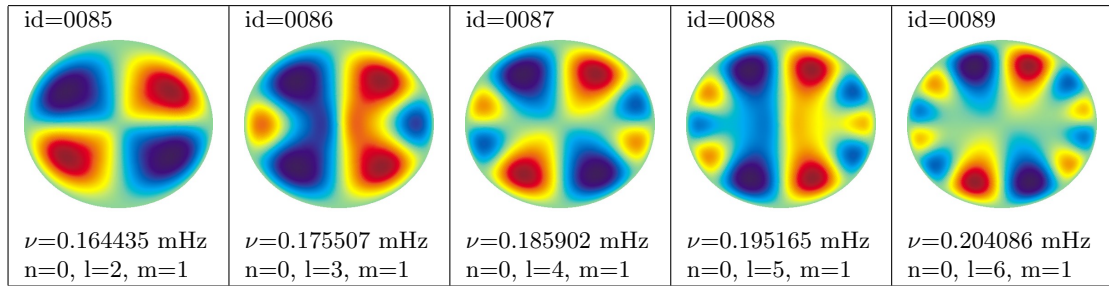
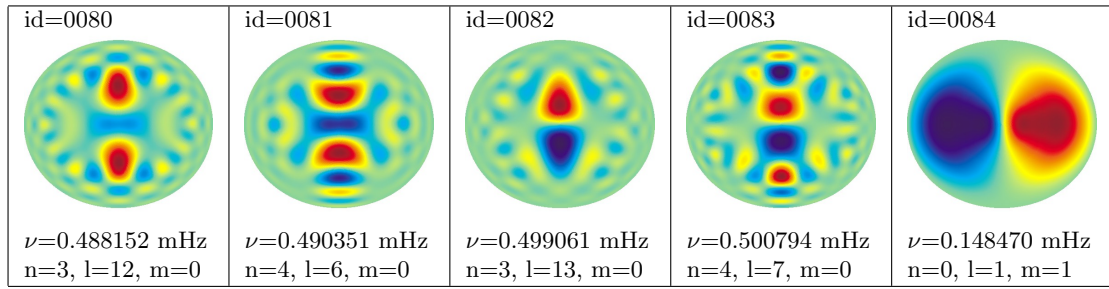
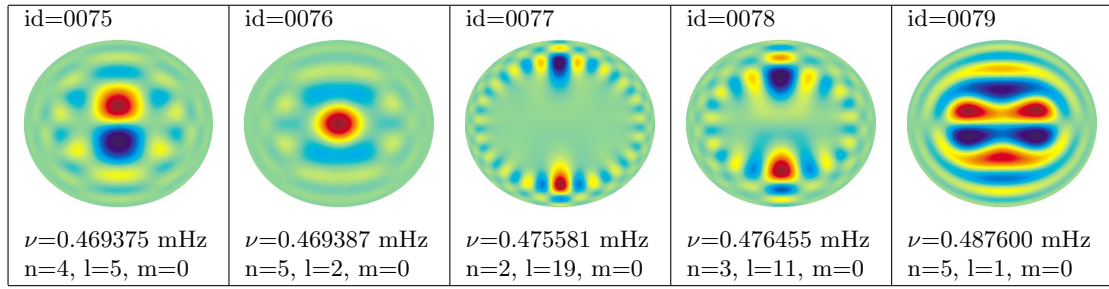
### B.3 Modelo 3 ( $\Omega = 1.81 \cdot 10^{-4}$ rd/s)



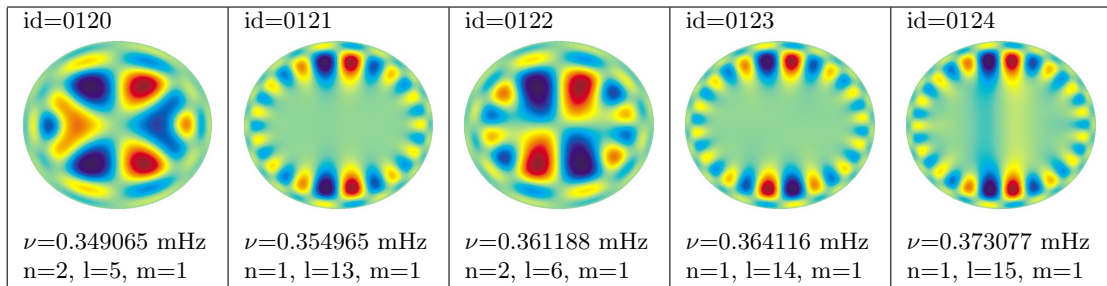
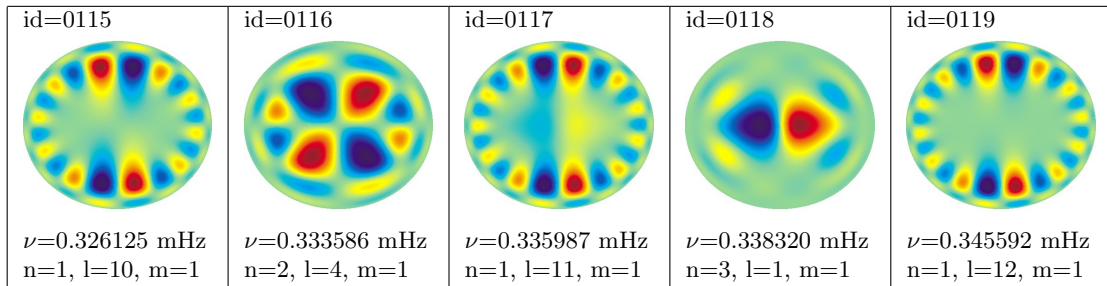
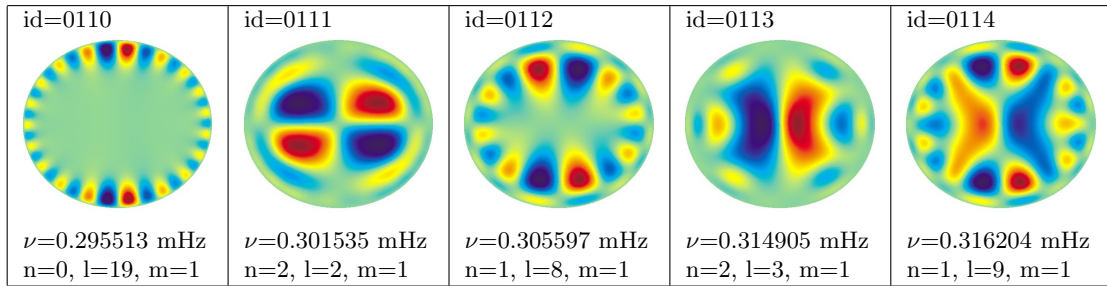
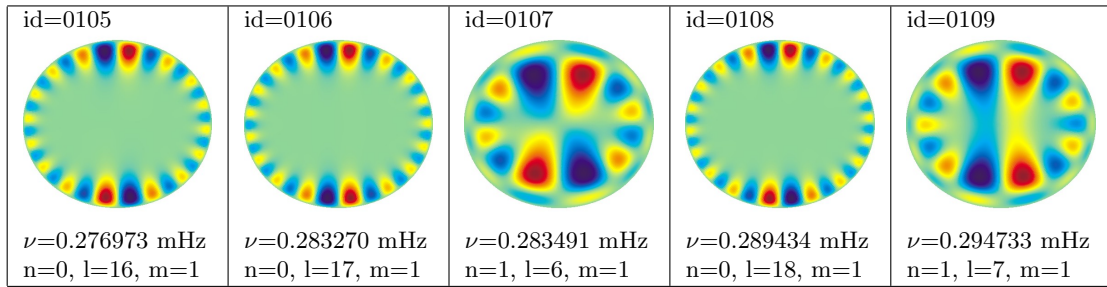
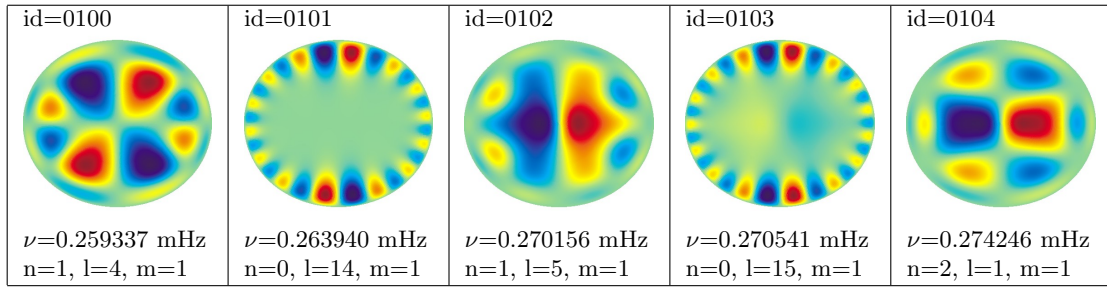




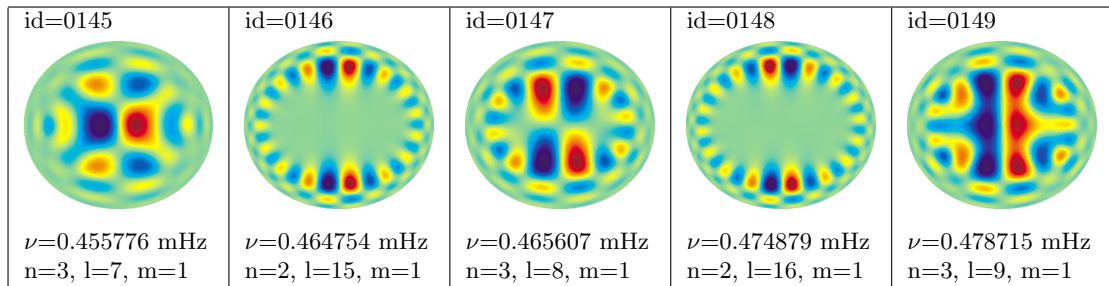
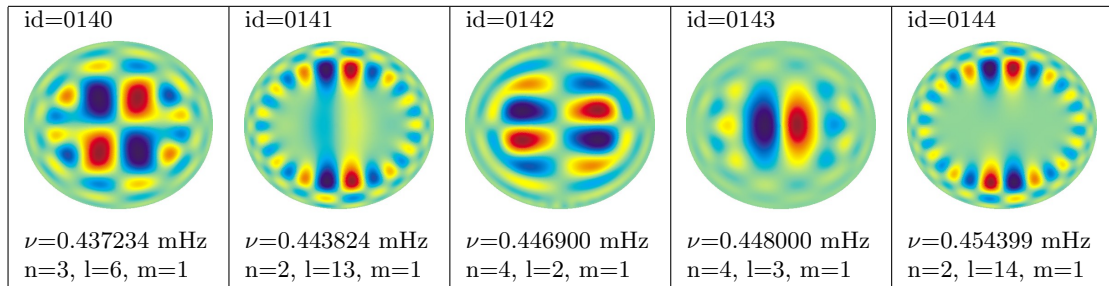
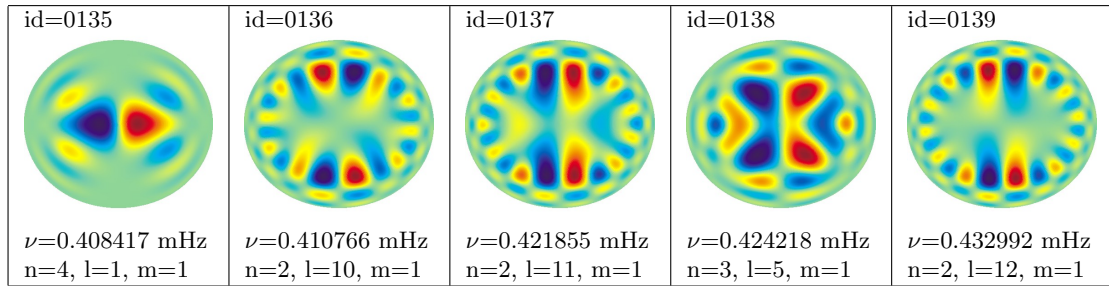
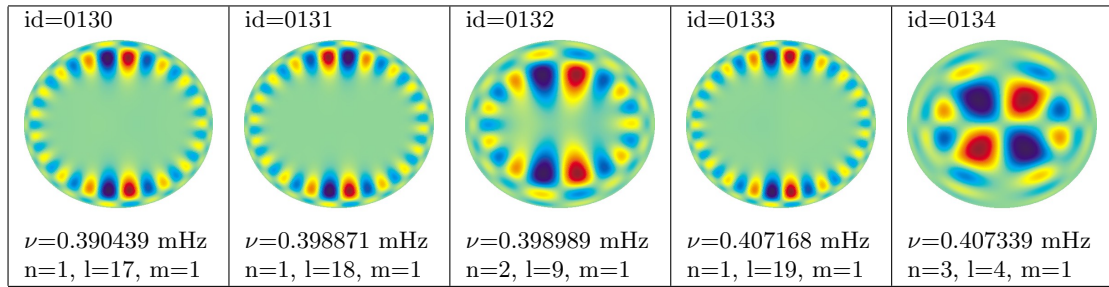
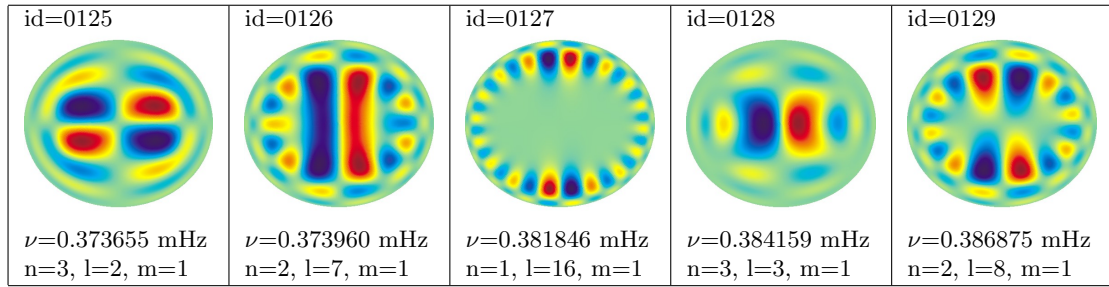


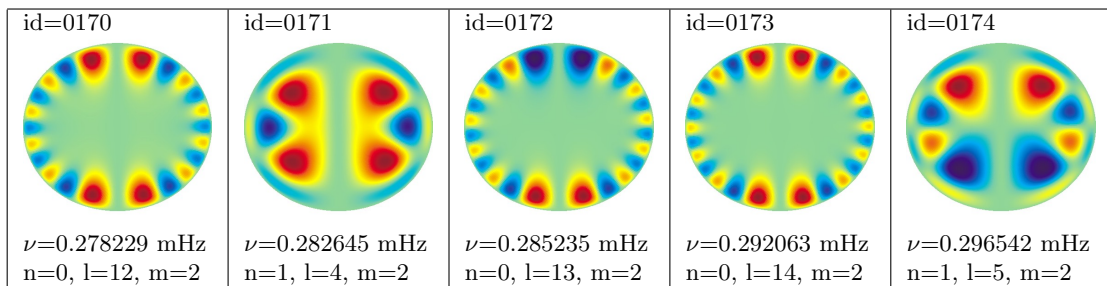
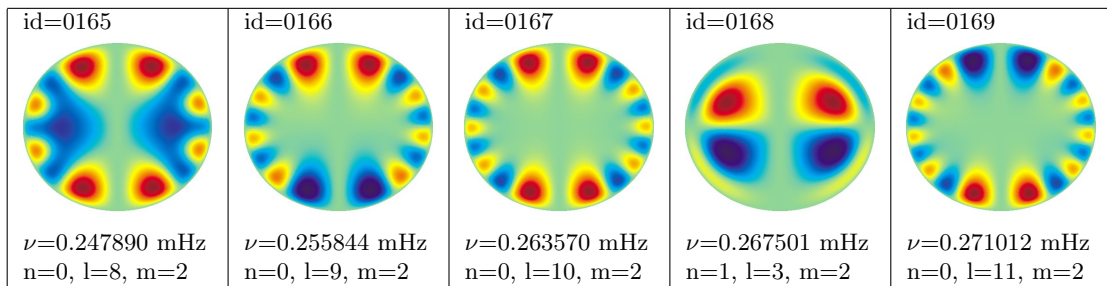
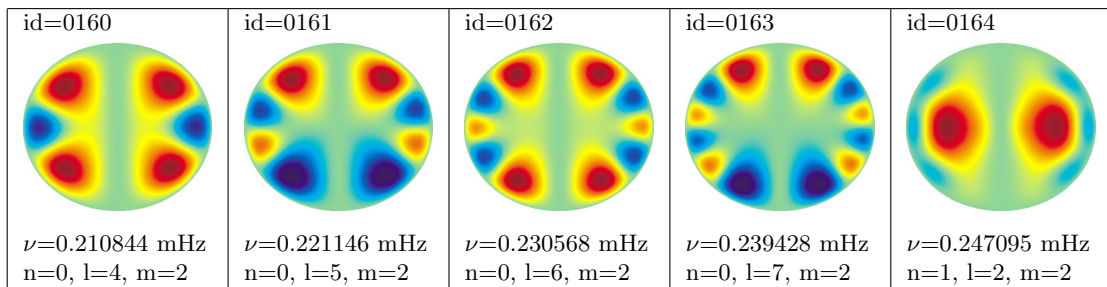
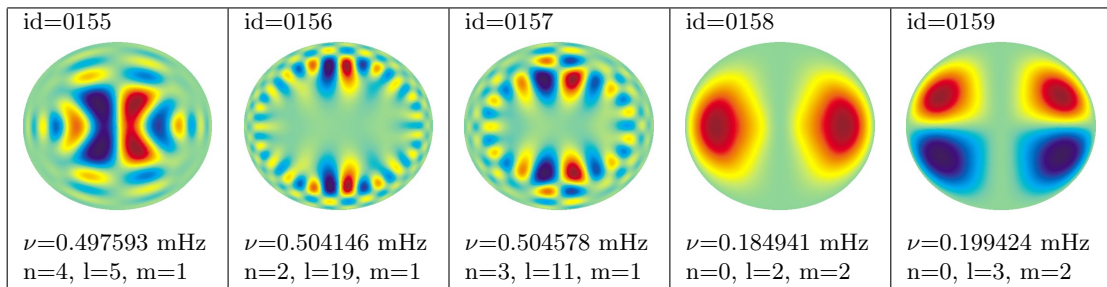
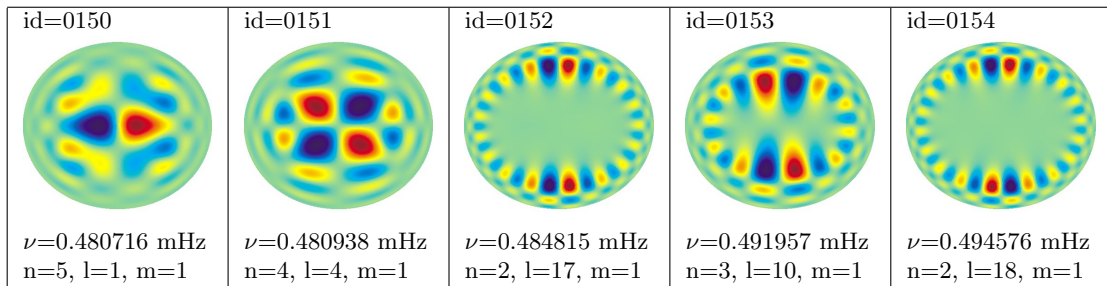


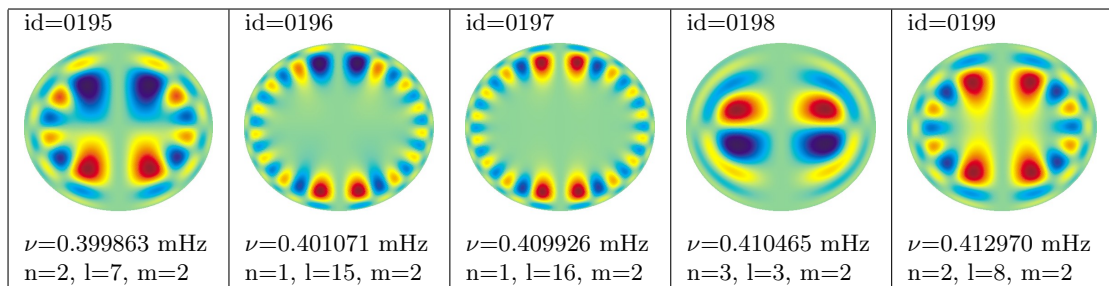
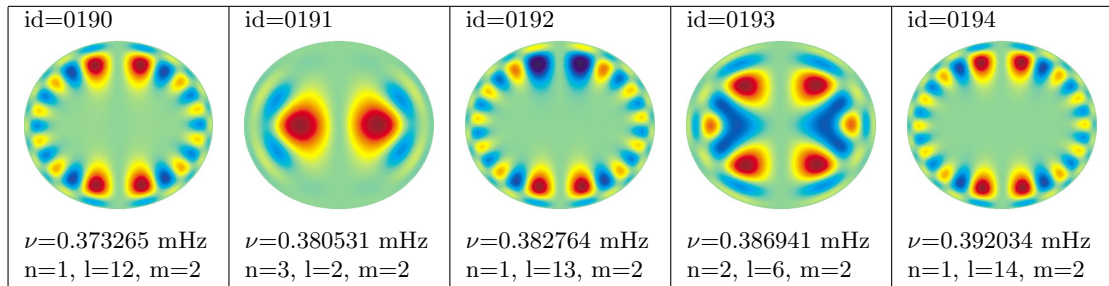
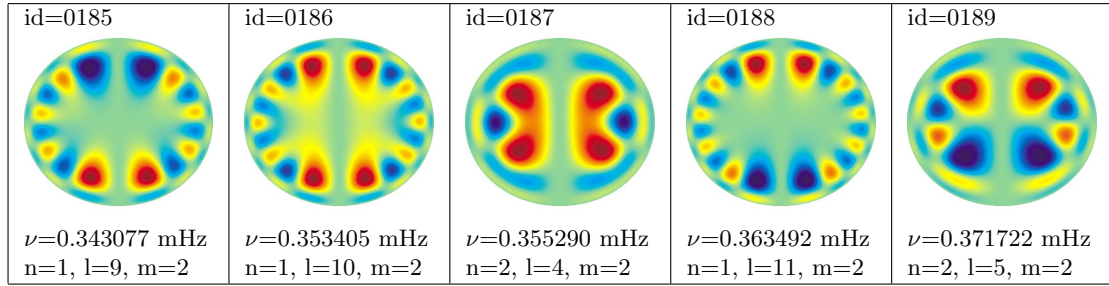
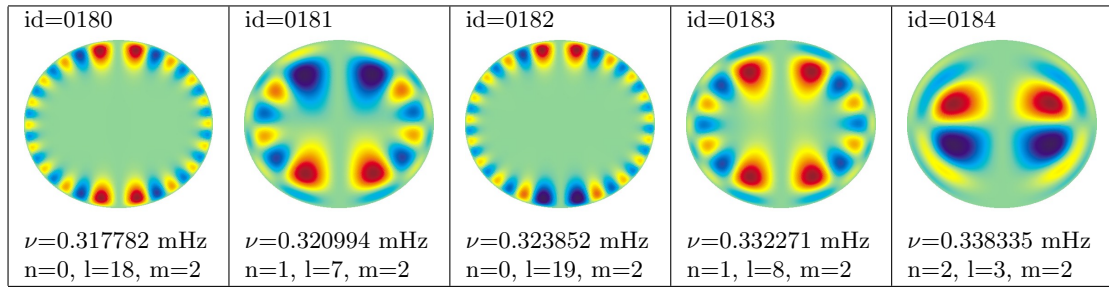
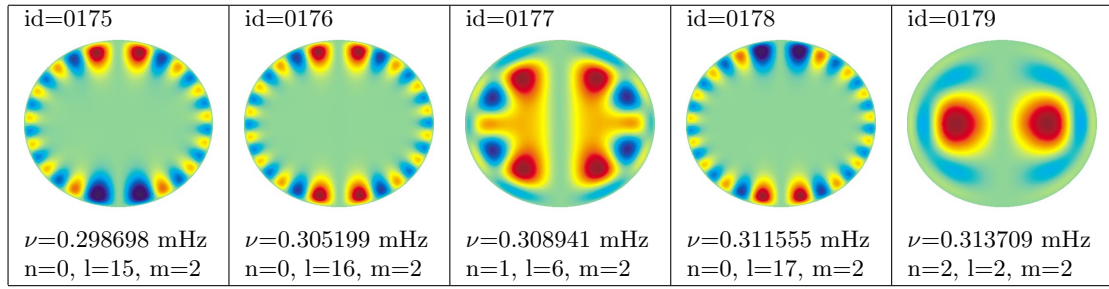




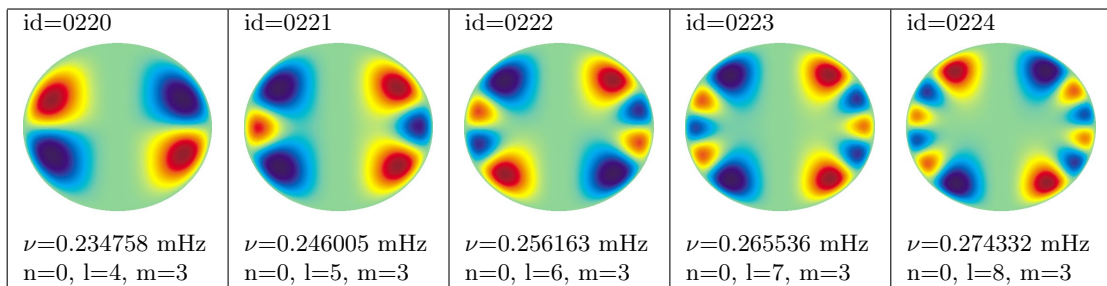
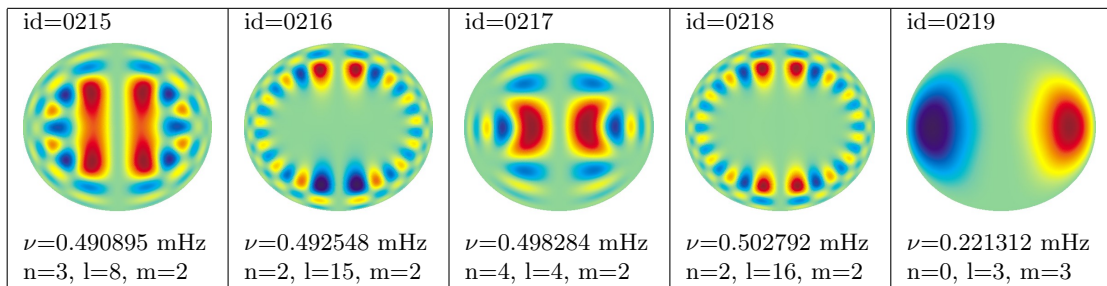
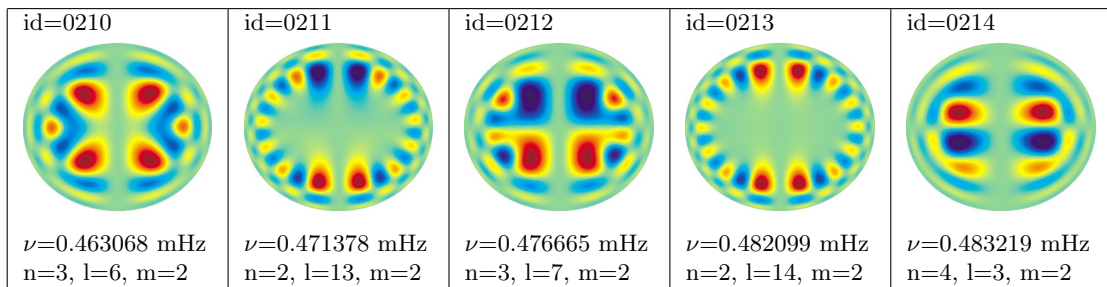
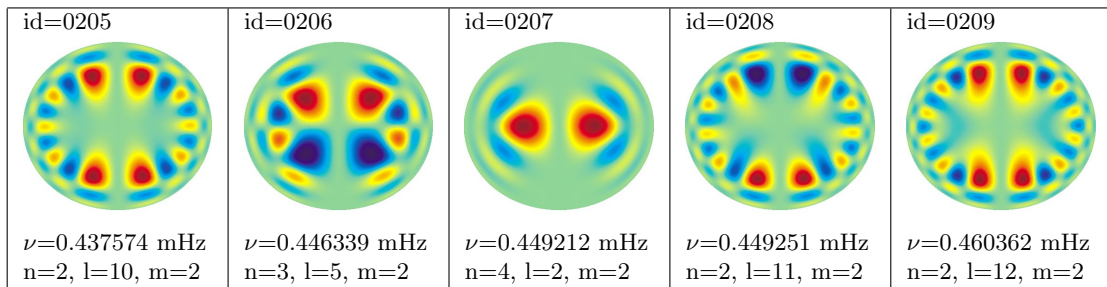
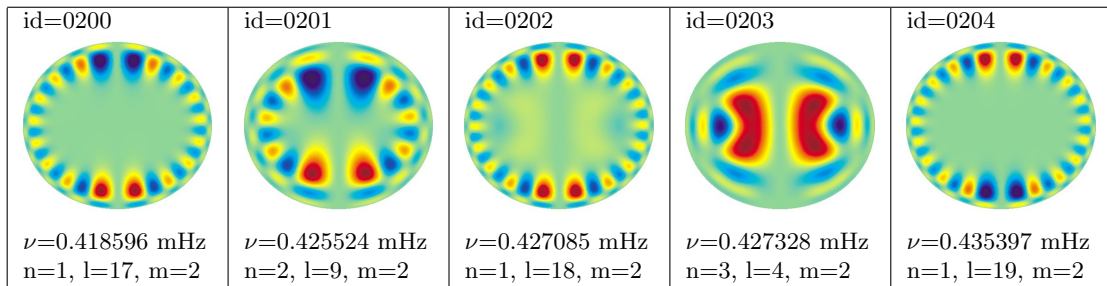


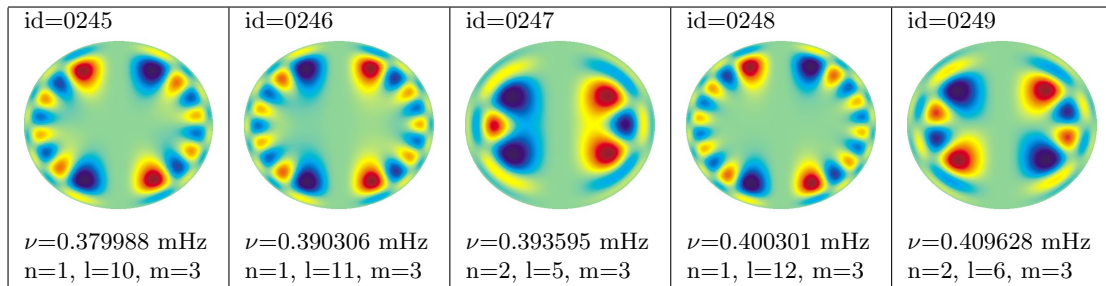
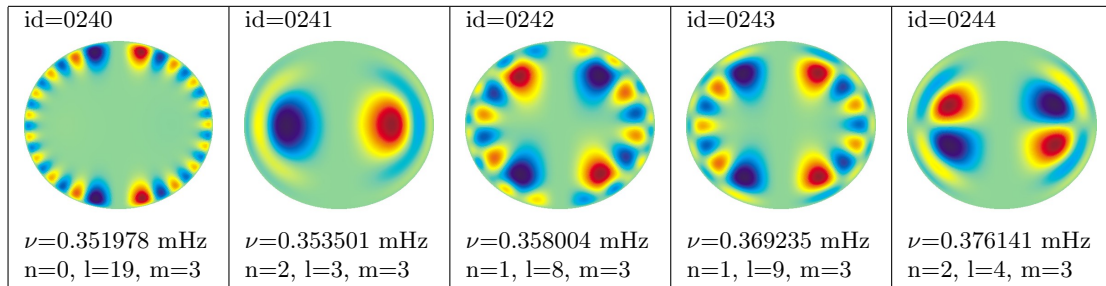
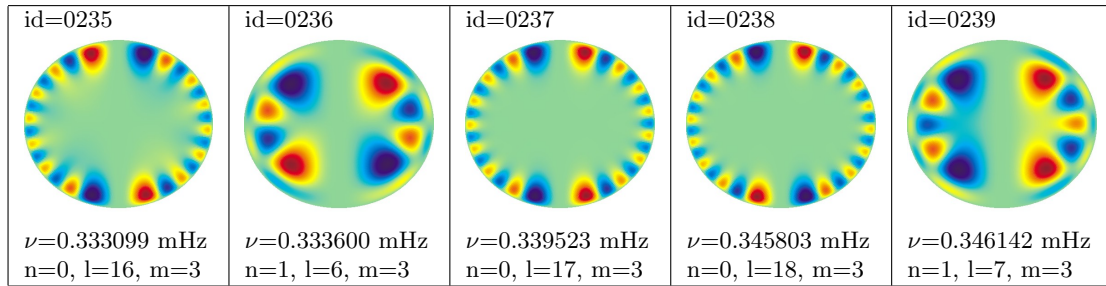
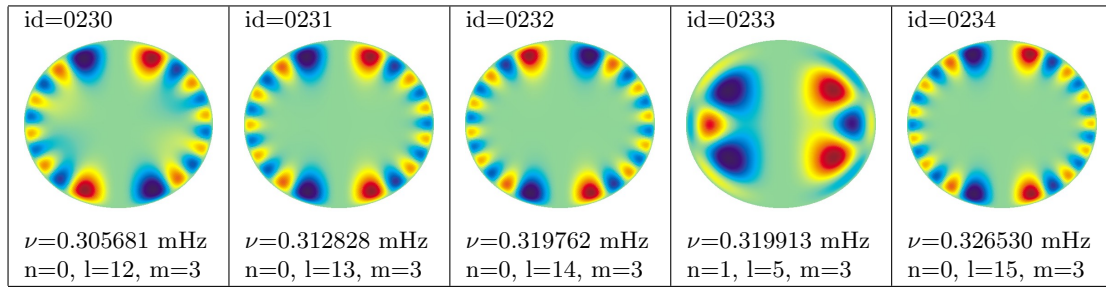
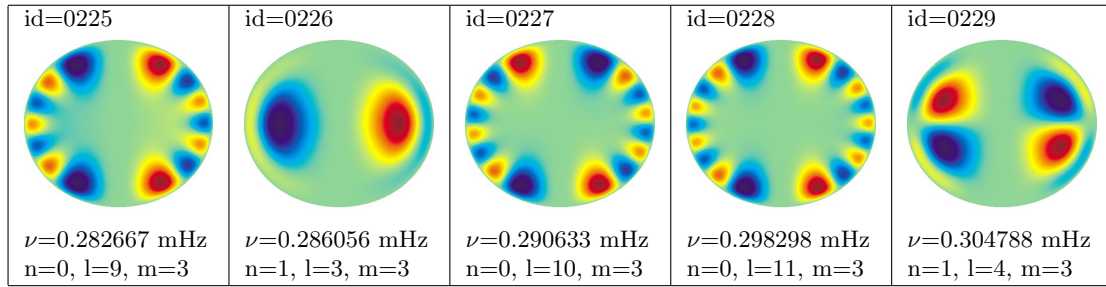


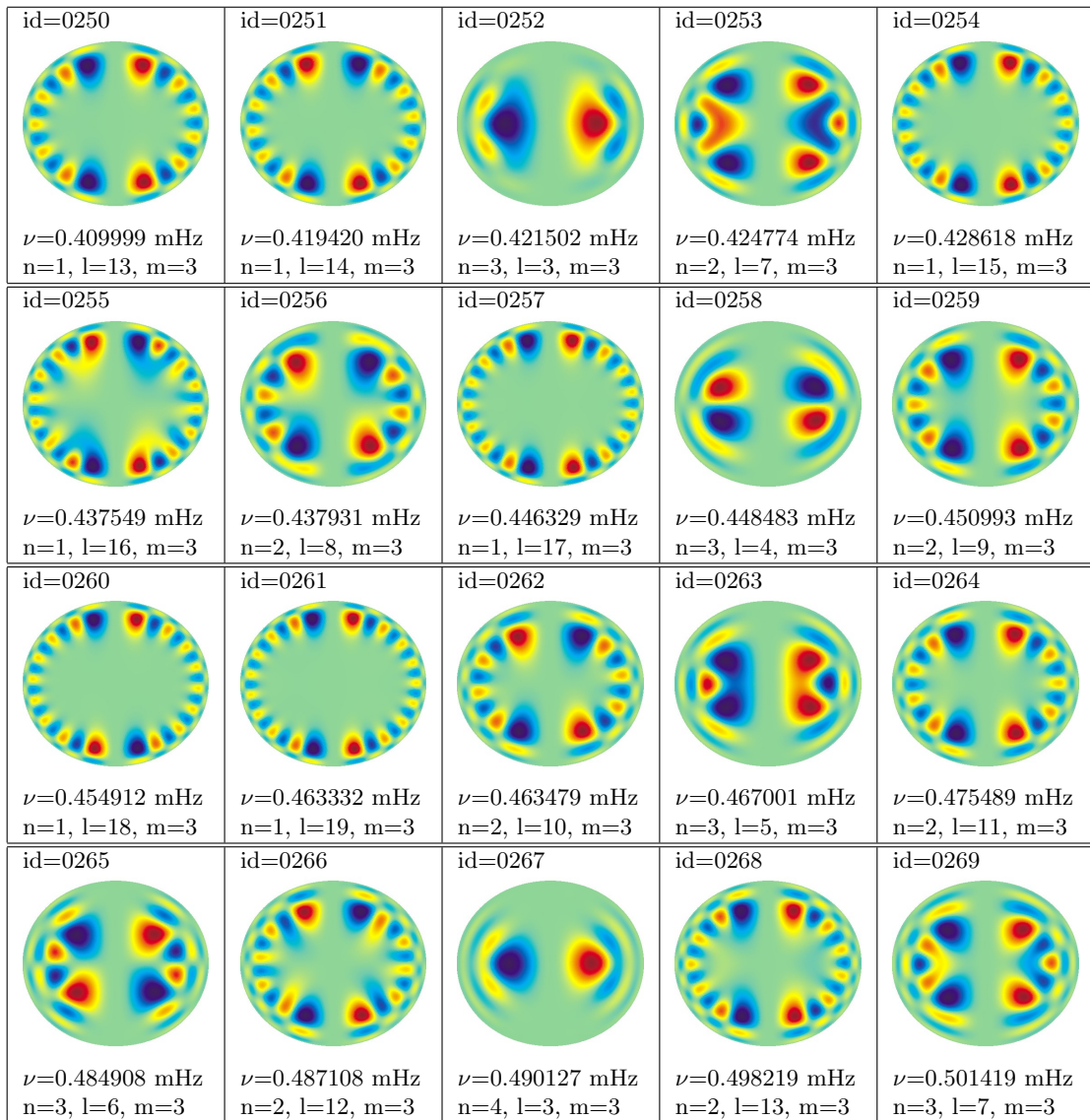












# C

## Cálculo del Elemento Diferencial de Superficie

Para el cálculo de la visibilidad de los modos normales de oscilación realizado en el capítulo 6 es necesario conocer la forma del elemento diferencial de superficie  $d\mathbf{S}$  en el sistema de coordenadas no ortogonales utilizado. Recordando lo expuesto en el capítulo 3, utilizamos un sistema de coordenadas  $(\gamma, \theta', \varphi')$ , tal que  $\gamma = 1$  represente la superficie de la estrella. Siendo  $(r, \theta, \varphi)$  las coordenadas esféricas, la transformación es la siguiente:

$$\begin{cases} r = \gamma \mathcal{S}(\theta'), \\ \theta = \theta', \\ \varphi = \varphi', \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathcal{S}(\theta')$  representa la superficie. Para simplificar la notación, en adelante no se escribirá explícitamente la dependencia con  $\theta'$  y se denotará con  $\mathcal{S}'$  a la derivada de  $\mathcal{S}$  con respecto a  $\theta'$ .

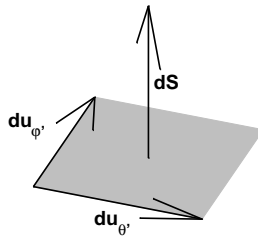


Figura C.1: Elemento diferencial de superficie.

Nos interesa calcular  $d\mathbf{S}$  en una superficie de la forma  $\gamma = \text{constante}$ . Para ello definimos dos vectores diferenciales (ver figura C.1), en primer lugar  $d\mathbf{u}_{\theta'}$  representa el desplazamiento en el vector de posición al movernos una cantidad  $d\theta'$  a lo largo de la línea definida por  $(\gamma, \varphi')$  constantes, mientras que  $d\mathbf{u}_{\varphi'}$  representa el desplazamiento producido en el vector de posición al movernos una cantidad  $d\varphi'$  a lo largo de la línea  $(\gamma, \theta')$  constantes. El elemento diferencial de superficie puede ser calculado mediante la expresión:

$$\mathbf{dS} = \mathbf{du}_{\theta'} \times \mathbf{du}_{\varphi'} \quad (\text{C.2})$$

El vector  $\mathbf{dS}$  está definido de forma que su módulo es  $dS$  y su dirección es perpendicular a la superficie. Además, en la expresión (C.2), lo hemos elegido de forma que su sentido sea hacia el exterior de la estrella. Atendiendo a la definición de los vectores diferenciales  $\mathbf{du}_{\theta'}$  y  $\mathbf{du}_{\varphi'}$ , es fácil ver que:

$$\begin{aligned} \mathbf{du}_{\theta'} &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} d\theta' \\ \mathbf{du}_{\varphi'} &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} d\varphi' \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

El vector  $\mathbf{dr}$  se expresa en coordenadas esféricas de la siguiente forma:

$$\mathbf{dr} = \mathbf{e}_r dr + r \mathbf{e}_\theta d\theta + r \operatorname{sen} \theta \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad (\text{C.4})$$

donde  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\varphi$  son vectores unitarios en la dirección de  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  respectivamente. Usando esta expresión podemos escribir:

$$\mathbf{du}_{\theta'} = \mathbf{e}_r \left. \frac{\partial r}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} d\theta' + r \mathbf{e}_\theta \left. \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} d\theta' + r \operatorname{sen} \theta \mathbf{e}_\varphi \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} d\theta' \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{du}_{\varphi'} = \mathbf{e}_r \left. \frac{\partial r}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} d\varphi' + r \mathbf{e}_\theta \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} d\varphi' + r \operatorname{sen} \theta \mathbf{e}_\varphi \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} d\varphi' \quad (\text{C.6})$$

Atendiendo a (C.1):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial r}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} &= \gamma S', & \left. \frac{\partial \theta}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} &= 1, & \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta'} \right|_{\gamma, \varphi'} &= 0, \\ \left. \frac{\partial r}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} &= 0, & \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} &= 0, & \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} \right|_{\gamma, \theta'} &= 1, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

y por tanto:

$$\mathbf{du}_{\theta'} = \gamma (S' \mathbf{e}_r + S \mathbf{e}_\theta) d\theta' \quad (\text{C.8})$$

y

$$\mathbf{du}_{\varphi'} = \gamma S \operatorname{sen} \theta' \mathbf{e}_\varphi d\varphi' \quad (\text{C.9})$$

Usando (C.2) y teniendo en cuenta que  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\theta$  y  $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r$ , obtenemos la expresión para  $\mathbf{dS}$ .

$$\mathbf{dS} = \gamma^2 S \operatorname{sen} \theta' (S \mathbf{e}_r - S' \mathbf{e}_\theta) d\theta' d\varphi' \quad (\text{C.10})$$

Como  $\theta = \theta'$  y  $\varphi = \varphi'$ , debe ser  $d\theta' = d\theta$  y  $d\varphi' = d\varphi$ , además  $r = \gamma S$ , por lo que podemos simplificar la notación escribiendo:

$$\mathbf{dS} = r^2 \operatorname{sen} \theta \left( \mathbf{e}_r - \frac{S'}{S} \mathbf{e}_\theta \right) d\theta d\varphi \quad (\text{C.11})$$



El diferencial de superficie escalar  $dS$  lo podemos obtener tomando el módulo de la expresión anterior:

$$dS = \|\mathbf{dS}\| = r^2 \sin \theta \sqrt{1 + \frac{\mathcal{S}'^2}{\mathcal{S}^2}} d\theta d\varphi \quad (\text{C.12})$$

Para el cálculo de la visibilidad necesitamos también una expresión para la proyección del vector  $\mathbf{dS}$  sobre la línea de visión. Denotemos por  $\mathbf{n}$  el vector que apunta hacia el observador, que será perpendicular al plano del cielo. Suponiendo que  $\mathbf{n}$  está contenido en el plano  $\varphi = 0$ , definimos el ángulo de visión  $i$  de forma que:

$$\mathbf{n} = \sin i \mathbf{e}_x + \cos i \mathbf{e}_z = n_r \mathbf{e}_r + n_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\text{C.13})$$

De esta forma, si  $i = 0$  estaremos observando la estrella desde el polo, mientras que si  $i = \pi/2$ , la observamos desde el ecuador (ver figura C.2).

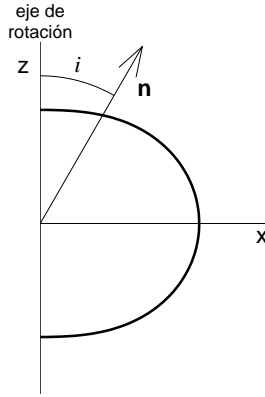


Figura C.2: Definición del ángulo de visión  $i$ .

Para calcular  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{dS}$ , necesitamos conocer las componentes de  $\mathbf{n}$  en coordenadas esféricas. Sabiendo que:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{e}_z = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (\text{C.14})$$

y

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.15})$$

entonces:

$$n_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = \sin i \sin \theta \cos \varphi + \cos i \cos \theta \quad (\text{C.16})$$

$$n_\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\theta = \sin i \cos \theta \cos \varphi - \cos i \sin \theta \quad (\text{C.17})$$

Usando estas expresiones y la forma de  $\mathbf{dS}$  (C.11), obtenemos:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{dS} = r^2 \left[ \left( \operatorname{sen} \theta - \frac{\mathcal{S}'}{\mathcal{S}} \cos \theta \right) \cos \varphi \operatorname{sen} i + \left( \cos \theta + \frac{\mathcal{S}'}{\mathcal{S}} \operatorname{sen} \theta \right) \cos i \right] \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi \quad (\text{C.18})$$

# D

---

## Bibliografía

- Abney W., Effect of a Star's Rotation on its Spectrum, *MNRAS*, 37, 278, 1877.
- Abramowitz M. and Stegun I. A., Handbook of Mathematical Functions. Dover publications, Inc., New York, 1972.
- Bahng J. and Schwarzschild M., Hydrodynamic Oscillations in the Solar Chromosphere, *ApJ*, 137, 901, 1963.
- Breger M., Asteroseismology of Delta Scuti Stars, *Baltic Astronomy*, 9, 149, 2000.
- Breger M. and Bischof K. M., Close Frequency Pairs in Delta Scuti Stars, *A&A*, 385, 537-545, 2002.
- Breger M., Handler G., Garrido R. et al., 30+ Frequencies for Delta Scuti Variable 4 Canum Venaticorum: Results of the 1996 Multisite Campaign, *A&A*, 349, 225, 1999.
- Breger M., Zima W., Handler G. et al., The Delta Scuti Star FG Vir. III. The 1995 Multisite Campaign and the Detection of 24 Pulsation Frequencies, *A&A*, 331, 271, 1998.
- Campbell W. W., The Motion of  $\zeta$  Geminorum in the Line of Sight, *ApJ*, 13, 90, 1901.
- Christensen-Dalsgaard J., Lecture Notes on Stellar Oscillations, Fourth Edition, 1998.
- Christensen-Dalsgaard J. and Berthomieu G., in Solar Interior and Atmosphere, eds A. N. Cox, W. C. Livingston & M. Matthews, Space Science Ser. (Tucson: Univ. of Arizona Press), 401, 1991.
- Christensen-Dalsgaard J. and Gough D. O., Implications of the Whole-disk Doppler Observations of the Sun, in *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation*, Lecture Notes in Physics 125, edited by H. A. Hill and W. Dziembowsky (Springer, Berlin) p. 184-190, 1980.
- Claret A., Studies on Stellar Rotation: I. The theoretical apsidal motion for evolved rotating stars, *A&A*, 350, 56, 1999.
- Claverie A., Isaak G. R., McLeod C. P., Van der Raay H. B. and Roca Cortés T., Solar Structure from Global Studies of the 5-minute Oscillation, *Nature*, 282, 591, 1979.

- Cowling T. G. and Newing R. A., The Oscillations of a Rotating Star, *ApJ*, 109, 149, 1949.
- Cuypers J., On the Calculation of the Frequency Splitting of Adiabatic Nonradial Stellar Oscillations by Slow Differential Rotation, *A&A*, 89, 207, 1980.
- Deubner F.-L., Observation of Low Wavenumber Nonradial Eigenmodes of the Sun, *A&A*, 44, 371, 1975.
- Dziembowski W. A. and Goode P. R., Effects of Differential Rotation on Stellar Oscillations: a Second-Order Theory, *ApJ*, 394, 670, 1992.
- Eddington A. S., The Problem of the Cepheid Variables, *MNRAS*, 79, 2, 1918.
- Eddington A. S., The Problem of the Cepheid Variables, *MNRAS*, 79, 177, 1918.
- Eff-Darwich A., Korzennik S. G. and Jiménez-Reyes S. J., Inversion of the Internal Solar Rotation Rate, *ApJ*, 573, 857-863, 2002.
- Espinosa F., Pérez Hernández F., Roca Cortés T., Oscillation Modes in Axially Symmetric Stars, in Proc. SOHO14/GONG2004 workshop, Helio- and Asteroseismology: Towards a Golden Future, New Haven, Connecticut (USA), 2004 (pendiente de publicación).
- Frandsen S., Balona L. A., Viskum M. et al., Multisite CCD Photometry of Delta Scuti Stars in the Open Cluster NGC6134 (the First STACC Campaign), *A&A*, 308, 132, 1996.
- Fukuda I., A Statistical Study of Rotational Velocities of the Stars, *PASP*, 94, 271, 1982.
- Goode P. R. and Dziembowsky W. A., Solar-cycle Dependence of the Sun's Deep Internal Rotation shown by Helioseismology, *Nature*, 349, 223, 1991.
- Gough D. O., A new Measure of the Solar Rotation, *MNRAS*, 196, 731, 1981.
- Hansen C. J., Cox J. P. and Van Horn H. M., The Effects of Differential Rotation on the Splitting of Nonradial Modes of Stellar Oscillation, *ApJ*, 217, 151, 1977.
- Kenelly E. J., Brown T. M., Kotak R. et al., The Oscillations of Tau Pegasi, *ApJ*, 495, 440, 1998.
- Ledoux P., The Nonradial Oscillations of Gaseous Stars and the Problem of Beta Canis Majoris, *ApJ*, 114, 373, 1951.
- Lehoucq R. B., Sorensen D. C. and Yang C., ARPACK User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems by Implicitly Restarted Arnoldi Methods. Technical Report, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, 1996.
- Leighton R. B., Noyes R. W. and Simon G. W., Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report, *ApJ*, 135, 474, 1962.
- McNally D., The Distribution of Angular Momentum among Main Sequence Stars, *The Observatory*, 85, 166, 1965.
- Michel E., Chevreton M., Goupil M.-J. et al., The STEPFI Network: Results and Prospects, in *Proceedings of Fourth SOHO Workshop: Helioseismology*, ESA SP-376, 533, 1995.

- Morel P., The Evolutionary Code CESAM: Numerical Techniques. In: Inside the Stars, Weiss W. W., Baglin A. (Eds), *ASP Conf. Ser.*, vol. 40, p 445, 1993.
- Nather R. E., Winget D. E., Clemens J. C. et al., The Whole Earth Telescope - A New Astronomical Instrument, *ApJ*, 361, 309, 1990.
- Radke R. J., A Matlab Implementation of the Implicitly Restarted Arnoldi Method for Solving Large-Scale Eigenvalue Problems, Master's thesis, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, 1996.
- Rodríguez E., López-González M. J. and López de Coca P., A Revised Catalogue of  $\delta$  Sct Stars, *A&AS*, 144, 469, 2000.
- Russell H. N., An Improved Method of Calculating the Orbit of a Spectroscopic Binary, *ApJ*, 15, 252, 1902.
- Saio H., Rotational and Tidal Perturbations of Nonradial Oscillations in a Polytropic Star, *ApJ*, 244, 299, 1981.
- Schatzman E. and Souffrin P., Waves in the Solar Atmosphere, *A&A*, 5, 67, 1967.
- Shajn G. and Struve O., On the Rotation of the Stars, *MNRAS*, 89, 222, 1929.
- Shapley H., On the Nature and Cause of Cepheid Variation, *ApJ*, 40, 448, 1914.
- Sorensen D. C., Implicitly Restarted Arnoldi/Lanczos Methods for Large Scale Eigenvalue Calculations. In D. E. Keyes, A. Sameh and V. Venkatakrishnan editors, *Parallel Numerical Algorithms: Proceedings of an ICASE/LaRC Workshop, May 23-25, 1994, Hampton, VA*. Kluwer, 1995.
- Soufi F., Goupil M. J. and Dziembowsky W. A., Effects of moderate rotation on stellar pulsation, *A&A*, 334, 911, 1998.
- Spiegel M. R. y Abellanas L., *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, Serie de compendios Schaum, McGraw-Hill, 1988.
- Spiegel E. A. and Zahn J.-P., The Solar Tachocline, *A&A*, 265, 106, 1992.
- Struve O., On the Axial Rotation of Stars, *ApJ*, 72, 1S, 1930.
- Tassoul J. L., *Stellar Rotation*, Cambridge University Press, 2000.
- Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H. and Shibahashi H., *Nonradial Oscillations of Stars*, Second Edition, University of Tokyo Press, 1989.

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer al Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC) y a su director Prof. Francisco Sánchez por haberme concedido una beca de astrofísico residente para la realización de esta tesis doctoral y por haberme permitido trabajar en sus instalaciones. También quiero extender este agradecimiento al proyecto “Sismología Solar y Estelar y Búsqueda de Exoplanetas”, en el marco del cual he tenido la oportunidad de trabajar.

Agradezco muy especialmente a mis directores, Prof. Teodoro Roca Cortés y Dr. Fernando Pérez Hernández por haber contribuido en mi formación en el campo de la Astrosismología y por todo el apoyo que me han brindado durante el transcurso de la tesis. También quiero agradecerle a Dr. Antonio Claret, del Instituto de Astrofísica de Andalucía, por la elaboración de los modelos estelares utilizados en el capítulo 6.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi novia Lourdes Benito, que me ha ayudado día tras día en la elaboración de este trabajo, sobre todo en los momentos más difíciles, aportando ideas y ejerciendo como primera revisora de mi trabajo. Sin su inestimable ayuda y apoyo, no hubiera sido posible terminar este trabajo.

También quiero agradecer a mi familia su apoyo incondicional, que me ha permitido completar mi formación y dedicarme al campo de la investigación científica.

Por último, quiero dar las gracias a todo el que haya dedicado su tiempo a la lectura de esta tesis doctoral.