

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

**«Cuestiones notables en optimización robusta
sobre redes estocásticas»**

**Autor: Carmen Elvira Ramos Domínguez
Director: Dr. Laureano F. Escudero Bueno**

Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Computación

D. LAUREANO F. ESCUDERO BUENO, PROFESOR ASOCIADO DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID Y DIRECTOR DE TECNOLOGÍA DE LA EMPRESA U.I.T.E.S.A. DEL GRUPO IBERDROLA.

CERTIFICA: Que la presente memoria titulada "*Cuestiones Notables en Optimización Robusta sobre Redes Estocásticas*" presentada por la licenciada en Ciencias Matemáticas Dña. Carmen E. Ramos Domínguez y realizada bajo mi dirección, reúne las condiciones de contenido y forma exigidas para que se admita a trámite su lectura, con el fin de obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, firmo el presente en Madrid a 25 de Enero de mil novecientos noventa y nueve.

Este trabajo de investigación ha sido realizado bajo la dirección del profesor D. Laureano F. Escudero Bueno, a quien quiero expresar mi más profundo agradecimiento por su estímulo, eficaz ayuda y permanente dedicación.

Merece una especial atención mi familia ya que tengo el convencimiento de que gran parte de la presentación de este trabajo se debe a la encomiable ayuda y gran apoyo que he recibido de ellos.

Deseo mostrar también mi agradecimiento a los compañeros del Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación de la Universidad de La Laguna por su aliento y sus apoyos continuos. Quiero expresar así mismo mi gratitud a los miembros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid, los cuales me han manifestado su afecto y enorme hospitalidad durante mis estancias en dicho Departamento.

Finalmente me gustaría agradecer a todas aquellas personas que de una u otra forma han contribuido en la realización de este trabajo.

ÍNDICE

PRÓLOGO	7
---------------	---

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN	11
1.1 REDES DETERMINÍSTICAS	11
1.2 ENTORNO DE INCERTIDUMBRE	13
1.3 FORMULACIÓN GENERAL	15
1.4 INMUNIZACIÓN DE ESCENARIOS	16
1.5 POLÍTICAS NO ANTICIPATIVAS	19
1.6 APROXIMACIONES DEL MODELO	24

Capítulo 2

FORMULACIÓN COMPACTA DEL MODELO	31
2.1 REPRESENTACIÓN .	
2.2 OPTIMIZACIÓN BASADA EN SUBMODELOS	38
2.3 DESCOMPOSICIÓN DE BENDERS	44
2.4 ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS DE PUNTO INTERIOR	49
2.4.1 <i>El Método Proyectivo de Karmakar</i>	49
2.4.2 <i>Métodos Logarítmicos de Barrera</i>	52
2.4.3 <i>El Método de Predicción-Corrección de Mehrotra</i>	57
2.4.4 <i>Métodos de Punto Interior aplicados a la Formulación Compacta</i> ..	59

Capítulo 3

FORMULACIÓN EXTENDIDA DEL MODELO	59
3.1 REPRESENTACIÓN	59
3.2 DESCOMPOSICIÓN LAGRANGIANA AUMENTADA	63
3.2.1 <i>Caso General</i>	63
3.2.2 <i>Aproximación Cuadrático Separable</i>	71
3.3 DESCOMPOSICIÓN DE BENDERS	79
3.3.1 <i>Caso Lineal</i>	79
3.3.2 <i>Aproximación con Valores Absolutos</i>	91

3.4 DESCOMPOSICIÓN DE DANTZIG-WOLFE	102
3.5 METODOLOGÍA DE PUNTOS INTERIORES	107

Capítulo 4

JUSTIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE ESCENARIOS	115
4.1 MODELIZACIÓN DETERMINISTA ANTICIPATIVA	115
4.2 MODELIZACIÓN DETERMINISTA NO ANTICIPATIVA	123
4.3 MODELIZACIÓN DETERMINISTA CON CONDICIONES DE DIVERSIFICACIÓN ..	129
4.4 DIVERSIFICACIÓN NATURAL. ANÁLISIS DE ESCENARIOS	134
4.5 RECURSO TOTAL CON CONDICIONES DE DIVERSIFICACIÓN	140
4.6 MODELO DETERMINISTA CON GANANCIAS PONDERADAS	143
4.7 ANÁLISIS DE ESCENARIOS NO EQUIPROBABLES	146

Capítulo 5

ANÁLISIS DE ESCENARIOS EN DOS ETAPAS	155
5.1 REPRESENTACIÓN COMPACTA DEL MODELO BIETÁPICO	157
5.2 REPRESENTACIÓN EXTENDIDA DEL MODELO BIETÁPICO	158
5.3 DUALIZACIÓN DE LAS RESTRICCIONES DE NO ANTICIPATIVIDAD	159

Capítulo 6

GENERALIZACIÓN DE PROGRAMAS ESTOCÁSTICOS	165
6.1 RECURSO SIMPLE	163
6.2 RECURSO TOTAL. VARIABLES ENGANCHE MULTITAPA	166
6.2.1 Variables Enganche entre dos Etapas Consecutivas	169
6.2.2 Variables Enganche entre Etapas Cualesquiera.....	172

Capítulo 7

ALGUNAS APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA	181
7.1 PLANIFICACIÓN DE PRODUCCIÓN VÍA MODELIZACIÓN DE ESCENARIOS ...	181
7.1.1 Representación Determinística.....	183
7.1.2 Modelos de Planificación de Producción Estocástica	185
7.1.3 Modelización con Recurso Simple	188

7.1.4 Modelización con Recurso Total	189
7.1.5 Modelización con Recurso Parcial	191
7.1.6 Resultados Computacionales	193
7.2 OBTENCIÓN DE ESTRATEGIAS ROBUSTAS EN PLANIFICACIÓN FINANCIERA .	196
7.2.1 Activos Financieros	196
7.2.2 Modelo Estocástico del Mercado Financiero	200
7.3 PLANIFICACIÓN HIDROELÉCTRICA CON INCERTIDUMBRE EN LAS APOR- TACIONES EXÓGENAS	204
7.3.1 Descripción del Problema Determinístico	205
7.3.2 Modelo Estocástico de Generación de Hidroenergía	208
7.3.3 Resultados Computacionales	209
 RESULTADOS COMPUTACIONALES	 213
 CONCLUSIONES	 225
 BIBLIOGRAFÍA.....	 229

Índice de Figuras

1.1	Relación entre Escenarios y Perspectivas del Ejemplo 1.1	22
2.1	Estructura Cuasi-Escalera de la Formulación Compacta	36
2.2	Formulación Compacta Reordenada	37
2.3	Procedimiento Acelerado	42
2.4	Matriz A de la Formulación Compacta	59
2.5	Representación de (ADA^t)	60
3.1	Estructura Cuasi-Escalera de la Formulación Extendida	62
3.2	Matriz A de la Formulación con Variables Divididas	110
3.3	Representación de (ADA^t)	111
3.4	Formulación Extendida Reordenada	113
4.1	Función 1 de Utilidad sobre el Beneficio W	117
4.2	Función 2 de Utilidad sobre el Beneficio W	117
4.3	Árbol de Escenarios del Problema de Planificación de Inversiones	120
4.4	Árbol de Escenarios con Inversión única en Acciones	121
4.5	Árbol de Escenarios con Inversión única en Bonos	122
4.6	Árbol Solución del Modelo Determinista pero No Anticipativo	128
4.7	Árbol de Escenarios con Inversión Diversificada	131
4.8	Solución del Modelo No Anticipativo con Condiciones de Diversificación	133
4.9	Árbol de Escenarios Generalizado	135
4.10	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total con Escenarios Equiprobables	139
4.11	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total con Restricciones de Diversificación	142

4.12	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.3)	148
4.13	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.4)	149
4.14	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.5)	150
4.15	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.6)	151
4.16	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.7)	152
4.17	Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.8)	153
5.1	Árbol de Escenarios del Ejemplo 1.1 para el Modelo Multietápico	156
5.2	Árbol de Escenarios del Ejemplo 1.1 para el Modelo Bietápico	157
6.1	Representación del Árbol de Escenarios Multietápico	168
6.2	Ejemplo de Árbol de Escenarios Multietápico para las condiciones u y u' . . .	175
7.1	Árbol de Escenarios para la Demanda de la Producción	187

Prólogo

En la actualidad es muy habitual encontrarnos con situaciones económico-empresariales en las que se debe abordar un proceso de toma de decisiones bajo ciertos criterios y en un entorno no totalmente determinístico, en pos de la consecución de una serie de objetivos preestablecidos. Son muchos los casos que podríamos citar a modo de ejemplo: tales como la planificación de la producción, la planificación de comunicaciones, la distribución de canales de riego, la distribución de red eléctrica, la localización de determinados recursos económicos, la administración de inversiones en carteras de valores, mercados de divisas, etc Todos estos ejemplos podrían ser abordados de forma determinística, pero estaríamos asumiendo unas hipótesis iniciales, que pudieran ser violadas en la realidad. Con este trabajo intentamos abordar el entorno de incertidumbre que rodea a dichos problemas, por medio de una disciplina optativa de la Programación Estocástica, a la que se denomina "*Análisis de Escenarios*". En dicha disciplina se considera que los elementos del proceso de decisión no están bajo un entorno de total desconocimiento, sino que se dispone de cierta información sobre las componentes estocásticas de los mismos. Con esta información se determinan un número finito de clases representadas cada una de ellas por un valor diferente de las componentes estocásticas. Estas clases generan por tanto, diferentes entornos del problema determinístico a los cuales llamamos *Escenarios*.

El objetivo de este trabajo es entre otros, ofrecer una forma de representar la incertidumbre de los problemas de optimización sobre redes a gran escala. El esquema que seguimos, consiste en buscar similitudes entre las soluciones de los problemas determinísticos para cada escenario, que nos permitan construir una política de decisión conjunta, que minimice la toma de decisiones erróneas. Característica esta última esencial de una política de decisión robusta.

Por otra parte, debido a la existencia de una amplia variedad de problemas de optimización enmarcados en un ambiente de incertidumbre, nos centramos en los consistentes en la optimización multiperíodo sobre redes a gran escala. Es decir, en aquellos problemas de optimización con decisiones en diversos períodos a través del tiempo, decisiones que están enfocadas al flujo que debe circular por una determinada red, ante un entorno de riesgo. La estructura específica de este tipo de problemas de flujos en redes, que permite la simplificación de muchos algoritmos, es la razón de la elección de los mismos. En cuanto al entorno de incertidumbre, esta monografía se ocupa de aquellos casos, donde la estocasticidad radica tanto en los coeficientes de la función objetivo como en el término independiente del modelo.

Teniendo en cuenta el tipo de problemas que se consideran, es decir, sistemas multiperíodos, se intenta además, que la política propuesta por el modelo no anticipe todas las decisiones desde el comienzo, sino que con el paso del tiempo se vaya incorporando información al sistema, de manera que la política vaya siendo propuesta de forma escalonada y de acuerdo a cada etapa del proceso de decisión. Esto por supuesto conduce a un modelo de grandes dimensiones. Sin embargo, dicho modelo tiene la ventaja de presentar una estructura en forma de cuasi-escalera, que podemos explotar con propósitos computacionales. En los capítulos dos y tres se formulan dos tipos diferentes de aproximaciones para expresar las denominadas restricciones de no anticipatividad, así como los algoritmos a que estas aproximaciones nos conducen para resolver el modelo de la forma más sencilla posible. La primera aproximación se la denomina "*Formulación con Variables Enganche*" o "*Formulación Compacta*" y la segunda "*Formulación con Restricciones Enganche*", o "*Formulación Extendida*" (la representación para este segundo caso es mediante variables divididas). También se proponen algunos algoritmos, basados en las técnicas de descomposición como son la de Benders, la de Dantzig-Wolfe, y la Lagrangiana Aumentada, adaptados a ambas formulaciones, y que varían según la aproximación del modelo a la que se aplica.

Aparte del planteamiento del modelo, y la forma de resolución expuesta en los capítulos dos y tres, se explica en el capítulo cuarto la razón del uso de la disciplina de Análisis de Escenarios y no otra, a la hora de representar la incertidumbre de esta clase de problemas. Para ello se usa un problema de planificación de inversiones en una cartera de valores.

A lo largo del trabajo hemos utilizado aproximaciones multietápicas, no obstante, se

ha dedicado el quinto capítulo a las denominadas aproximaciones bietápicas, para aquellos casos en los que se ha de simplificar, ya que las dimensiones del problema que resulta nos impedirían la resolución del mismo.

Por otra parte, en el capítulo seis se muestra una generalización de los programas estocásticos vistos en esta memoria, en el sentido de permitir en el modelo una ligazón entre varias etapas no necesariamente consecutivas.

Por último, se recogen tres aplicaciones reales, a las cuales se aplican las técnicas vistas en los capítulos dos y tres, para la resolución de los mismos. En consecuencia, a partir de los resultados computacionales de estas aplicaciones se realizan algunas comparaciones entre las formulaciones utilizadas, así como entre los algoritmos de resolución aplicados, con los que concluimos esta memoria.

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 1

Introducción

1.1 Redes Determinísticas

Como se ha indicado en el prólogo de este trabajo, nuestro interés se centra en los problemas de optimización multiperíodo sobre redes estocásticas a gran escala. Con el fin de construir el modelo matemático que represente tales problemas, partimos de la representación genérica que poseen los problemas de programación lineal sobre redes determinísticas con variables acotadas (PL).

$$Z = \min \quad c^t X \quad (1.1)$$

$$\text{s.a.} \quad AX = b \quad (1.2)$$

$$l \leq X \leq u \quad (1.3)$$

donde

X es el vector columna de variables de decisión, de orden n .

c es el vector columna de costos, de orden n .

A es la matriz de incidencia nodo-arco, de orden $m \times n$, para un grafo dirigido $G = (V, E)$, en el que V es el conjunto de nodos (con $m \equiv |V|$), y E es el conjunto de arcos (con $n \equiv |E|$). Por tanto, no más de dos elementos en cada columna de A son distintos de cero, siendo en este caso 1, el elemento positivo.

b es el vector de recursos de orden m , y por último,

l y u son los vectores de cotas inferiores y superiores del vector de variables X , respectivamente.

Por consiguiente, cada arco $e \sim (i, j) \in E$, siendo $i, j \in V$ los nodos inicio y fin, respectivamente, tendrá asociado los correspondientes valores c_e, l_e y u_e (con $l_e \leq u_e$). Al mismo tiempo y sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el vector de cotas inferiores de las variables de decisión es nulo, esto es, $l = 0$. En caso contrario, se realizaría un ligero cambio de variables.

El modelo de Programación Lineal (1.1)-(1.3), se considera como un problema de flujos en un grafo dirigido, con restricciones sobre los suministros y las demandas. La función objetivo representa el coste total del transporte del flujo a través de los arcos. Como consecuencia, las ecuaciones (1.2) tendrán la estructura de las denominadas "*Ecuaciones de Balance*" o de "*Conservación*" (1.4), llamadas así por modelizar el balance oferta-demanda del flujo en cada nodo $i \in V$. Sean éstas las siguientes:

$$\sum_{j \in \delta_i^+} x_{ij} - m_{ji} \sum_{j \in \delta_i^-} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in V \quad (1.4)$$

donde

x_{ij} es el flujo que circula por el arco $e \sim (i, j)$, que debe satisfacer un mínimo l_e , y un máximo u_e .

m_{ji} es un multiplicador sobre el arco (j, i) , que representa el resultado, pérdida o ganancia, del flujo que circula por dicho arco.

b_i es el aporte exógeno o la demanda exógena del flujo que se concentra en el nodo i , según sea positivo o negativo, respectivamente.

$\delta_i^- \subset V$ es el conjunto de nodos inicio de los arcos que llegan al nodo i , y

$\delta_i^+ \subset V$ es el conjunto de nodos fin de los arcos que salen del nodo i .

Aunque de forma general los parámetros m_{ji} del sistema (1.4) pueden tomar valores arbitrarios, a efectos ilustrativos se supone que dichos multiplicadores m_{ji} valen 1 para todo (j, i) , es decir, se asume que el flujo se conserva en los arcos de la red, que no hay pérdidas ni

ganancias de éste. Esta simplificación no afecta al desarrollo metodológico que se propone sobre el estudio de la estocasticidad de la función objetivo y el término independiente.

1.2 Entorno de Incertidumbre

Dada la complejidad de los problemas que hoy en día se abordan, el investigador trata de caracterizarlos de la forma más precisa posible, sin que la complejidad del modelo resultante obstaculice su resolución. Esto hace que se añadan progresivamente nuevas dificultades sobre los problemas de optimización. Así, hasta hace poco, las componentes de los modelos que se investigaban, se consideraban totalmente conocidas. No obstante, la mayoría de los sistemas que se proponen estudiar o analizar, implican algunos niveles de incertidumbre, en relación con los valores que pueden tomar determinados parámetros, o en la disposición de ciertos elementos dentro del sistema. Esto es, en los problemas (1.1)-(1.3) de optimización sobre redes, normalmente algún elemento como la matriz de restricciones A , el vector de costos c , o el vector de recursos b , no se conoce con la suficiente certeza. Véase Dembo (1991) [12], Escudero (1986) [18], Escudero (1990) [19], Glover, Klingman y Phillips (1992) [28], Sartenaer (1991) [61], Toint y Tuyttens (1990) [65]. Así ejemplos de este tipo pueden encontrarse en muy diversos campos como los siguientes:

1. Planificación de la Producción, donde la demanda de los productos b , no es del todo conocida; o si se trata de un estudio de competencia de productos, su costo de producción sería el parámetro no determinístico. Véase Escudero, Kamesam, King, y Wets (1993) [22].
2. La Generación de Energía Hidroeléctrica, en la que la afluencia de agua b , debida por ejemplo a la lluvia, tampoco se conoce con exactitud. Véase Alvarez, Cuevas, Escudero, de la Fuente, García y Prieto (1994) [3].
3. El Mercado de Divisas, donde los tipos de cambio, los multiplicadores m_{ji} en el modelo, son los elementos estocásticos. Véase Mulvey y Vladimirou (1989) [51].
4. La Administración de Inversiones en Carteras de valores, donde los valores aleatorios b ,

corresponden a los factores que describen los activos. Véase Ahn, Escudero, Guignard-Spielberg, y Jörnsten (1993) [2]. Etc ...

Como se puede apreciar el marco de este tipo de modelos es muy amplio, y no lo podemos abordar completamente. Por este motivo este trabajo se ocupa de los problemas cuyo carácter estocástico está vinculado con el vector de costos c , y el término independiente b . Para dichos casos, necesitamos de una aproximación que modelice la incertidumbre. La aproximación tradicional consiste en establecer supuestos sobre la distribución que sigue el parámetro desconocido, estimar aquellos otros parámetros de los cuales va a depender dicha distribución a partir de los datos históricos, y desarrollar entonces el modelo estocástico, que de esta forma contemple la incertidumbre. Sin embargo, esta aproximación sólo refleja parte de la información que implica el parámetro desconocido, (la procedente de los datos históricos), y en muchas ocasiones, se precisa considerar también otro tipo de información complementaria (como la que se genera en nuevos mercados, nuevos productos, etc ...). Además, dicha aproximación es muy compleja y no resulta viable actualmente para problemas de medio y gran tamaño, como los que nos ocupan. En tales casos, es preferible emplear la técnica denominada "*Análisis de Escenarios*", en la cual la incertidumbre se modeliza teniendo en cuenta un histograma de frecuencias de cada parámetro no determinístico. Dicha técnica consiste en agrupar por clases, la información que se dispone de los elementos estocásticos, de tal forma que a cada clase le corresponda un determinado valor de dichos elementos. Como consecuencia de esta clasificación, se obtienen diferentes entornos del problema de partida, a los cuales denominamos "*Escenarios*", y para cada escenario se obtiene un subproblema de optimización determinístico.

El siguiente paso consiste en resolver los problemas asociados con cada uno de los escenarios, y examinar la sensibilidad de sus soluciones óptimas. En base a esto, se intenta recopilar información que permita establecer ciertos márgenes para la solución, y decidimos heurísticamente por una solución apropiada. Básicamente consiste en identificar similitudes entre los valores óptimos y las correspondientes soluciones óptimas, que nos lleven a alguna solución relativamente próxima a la óptima de cada problema determinístico. Para llevar a cabo esto, es preciso crear un subconjunto significativo del colectivo de posibles escenarios, tal que la muestra elegida represente las condiciones más heterogéneas que se puedan

presentar. Con el fin de crear este conjunto de escenarios se han de aplicar algunas de las disciplinas de la Estadística de Muestras Multivariantes, como son la Teoría de Muestras, Los Contrastes de Hipótesis, El Análisis Multivariante, etc.

Debido a que los problemas considerados incluyen una dimensión temporal (es decir, son sistemas multiperíodos), en lugar de seleccionar directamente los escenarios que constituyen el problema, se eligen escalonadamente en cada período de tiempo entre diferentes alternativas o posibilidades de los elementos estocásticos del problema, correspondientes a dicho período de tiempo. La elección adecuada de un número reducido de dichas alternativas en cada período, es un problema especialmente crítico, dado su impacto en el número total de escenarios que resultan, y por tanto, en la dimensión final del problema.

1.3 Formulación General

Entre las distintas alternativas que se pueden plantear como objetivo del problema, la más inmediata es la de obtener aquella solución, que sea la más favorable en lo relativo al valor esperado como óptimo del problema. En términos de optimización, esto se traduce en minimizar el costo esperado del flujo que circula por la red. Para formalizar esta idea, se denota por S , el conjunto finito de posibles escenarios, y se reemplazan las componentes del vector de costos, del término independiente, y del vector de variables del modelo (1.1)-(1.3), por las siguientes componentes:

c^s vector de costos bajo el escenario s , para $s \in S$.

b^s vector de recursos (término independiente), bajo el escenario s , para $s \in S$.

X^s vector de flujos que circula por la red bajo el escenario s , para $s \in S$.

Además de estos elementos, se necesita conocer las ponderaciones w^s que reflejen la importancia relativa de cada escenario s , para $s \in S$, dentro del entorno de incertidumbre, tal que:

$$w^s > 0 \quad \forall s \in S \quad y \quad \sum_{s \in S} w^s = 1 \quad (1.5)$$

Estas ponderaciones son elementos muy importantes dentro del modelo, ya que su modificación fuera de ciertos límites supondría un modelo significativamente diferente. Por otro lado, estadísticamente cada ponderación se puede considerar como la probabilidad de ocurrencia asociada a cada escenario, y se genera también como resultado del estudio necesario para construir el conjunto de escenarios.

Bajo las consideraciones previas, la formulación general del modelo se puede desarrollar como sigue:

$$\min \sum_{s \in S} w^s (c^s)^t X^s \quad (1.6)$$

$$\text{s.a.} \quad AX^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (1.7)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \quad (1.8)$$

Cabe señalar en el modelo anterior (1.6)-(1.8), un aumento tanto del número de restricciones (de m a $m|S|$), como del número de variables (de n a $n|S|$), respecto al modelo determinístico (1.1)-(1.3). Sin embargo, dicho aumento no supone una rotura en la estructura de red que tenía el modelo, sino que el nuevo modelo presenta una red mayor.

1.4 Inmunización de Escenarios

El modelo (1.6)-(1.8) se puede descomponer en $|S|$ submodelos de redes independientes, que tienen la siguiente expresión para cada escenario $s \in S$,

$$Z^s(*) = \min (c^s)^t X^s \quad (1.9)$$

$$\text{s.a.} \quad AX^s = b^s \quad (1.10)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad (1.11)$$

donde

$Z^s(*)$ denota el valor óptimo del modelo, y

X^s la correspondiente solución óptima.

No obstante, el modelo (1.6)-(1.8) no es robusto, puesto que ofrece una solución óptima para cada escenario, en lugar de proponer una solución que pueda adoptarse considerando todos

los escenarios pero sin subordinarse a ninguno de ellos. Ante esta situación, una posible estrategia alternativa al planteamiento de la sección anterior, sería construir una política de decisión conjunta a partir de las soluciones que se obtienen para cada escenario. La finalidad de esta política es encontrar una solución, que además de ser favorable en relación con el valor esperado como el óptimo del problema, ofrezca una cierta garantía de que el error que se comete no es demasiado grande, si ocurriera uno de los escenarios menos probables. A dicha política, se la denomina "*Política del Mínimo Arrepentimiento*".

Son varias las sugerencias que se pueden dar al respecto de esta política, aunque tal vez la respuesta más satisfactoria sea buscar aquella solución, lo más próxima en forma ponderada a las soluciones óptimas bajo cada escenario. Véase Dembo (1991) [12]. Este otro planteamiento se formaliza matemáticamente, minimizando la suma ponderada de las diferencias positivas entre el valor que toma la función objetivo para la solución propuesta, y el valor para la solución óptima bajo cada escenario. La solución resultante de este proceso se la denomina "*Solución Robusta*", ya que con ella se intenta eliminar la dependencia de las condiciones iniciales del problema.

Para representar la búsqueda en cada escenario, se define la parte positiva de un número real arbitrario, $r \in R$, como sigue

$$(r)_+ = \max \{0, r\} \quad (1.12)$$

A partir de esta definición y utilizando las ponderaciones w^s , la implementación del modelo, al cual se hace referencia como modelo de "*Inmunización de Escenarios*" (IE), se puede expresar de la siguiente forma:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \|(c^s)^t X - \hat{Z}^s(*)\|_+^d + \alpha H(X_a) \quad (1.13)$$

$$\text{s.a} \quad AX + X_a^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (1.14)$$

$$0 \leq X \leq u \quad (1.15)$$

donde

$\hat{Z}^s(*)$ denota la tolerancia de optimalidad (Véase [Jensen y King (1991) [35]]), es decir,

$$\hat{Z}^s(*) = Z^s(*) + \epsilon \quad (1.16)$$

con $\epsilon \geq 0$ un valor suficientemente pequeño,

d representa una norma paramétrica arbitraria,

α es un factor de ponderación positivo,

X es el vector solución robusto,

X_a^s es un vector de variables de holgura de orden m , que permite controlar la infactibilidad de la solución candidata con respecto al escenario s , y por último,

$H(X_a)$ es una función de penalización sobre las soluciones infactibles, que puede tomar diversas expresiones, (Véase Mulvey, Vanderbei, y Zenios (1991) [50]) entre las que cabe destacar

$$H(X_a) = \max_{s \in S} w^s \xi^s \quad (1.17)$$

$$H(X_a) = \sum_{s \in S} w^s \xi^s \quad (1.18)$$

con

$$\xi^s = \|X_a^s\| \quad (1.19)$$

Sólo especificamos las diferencias positivas en (1.13), debido a que con ello se evita penalizar dos veces a aquellas soluciones, que aún siendo infactibles producen un óptimo mejor. No obstante, en el caso particular de que $H(X_a)$ tuviese la expresión

$$H(X_a) = \sum_{s \in S} w^s \left(\|X_a^s\| - \sum_{s' \in S} w^{s'} \|X_a^{s'}\| \right)^2 \quad (1.20)$$

es decir, fuese la varianza de las infactibilidades de la solución candidata con respecto a cada escenario, en la función objetivo (1.13) se deberán tener en cuenta tanto las diferencias positivas como las negativas. Esto es, la función objetivo del modelo de Inmunización de Escenarios sería la siguiente función:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \|(c^s)^t X - \hat{Z}^s(*)\|^d + \alpha \sum_{s \in S} w^s \left(\|X_a^s\| - \sum_{s' \in S} w^{s'} \|X_a^{s'}\| \right)^2 \quad (1.21)$$

Ya que en caso contrario, la varianza podría ser nula para una determinada solución infactible, con lo cual la correspondiente solución no resultaría penalizada.

Nótese que en el modelo (1.13)-(1.15) la búsqueda de la solución no se realiza en las regiones factibles de los distintos escenarios, por ello se utiliza la función de penalización. Esto hace que dicho modelo sea de menores dimensiones. Sin embargo, como se puede observar, el número de elementos no nulos en cada columna de la matriz de condiciones es superior a dos, luego se rompe la estructura de red que presentaba el modelo determinista (1.1)-(1.3).

1.5 Políticas No Anticipativas

Como ya se indicó al final de la sección 1.2, una característica común de los sistemas es que son procesos multiperíodos. Por tanto, más que trabajar con el sistema globalmente, separamos lo que sucede en cada uno de los distintos períodos de tiempo. Teniendo en cuenta este hecho, surge la cuestión de si las decisiones a tomar se deben fijar desde un principio hasta que finalice el proceso, o por el contrario, se las deba permitir variar en períodos de tiempo posteriores, al ir disponiendo de más información sobre el escenario que ocurre. El hecho de incluir en un modelo los posibles cambios en las opciones futuras, de forma que se tengan en cuenta a la hora de tomar una decisión, es uno de los aspectos más atrayentes de la Programación Estocástica. Además, parece lógico que en un proceso con varias etapas de decisión, al comienzo del mismo se fijen las decisiones de la primera etapa, pero no tiene por que ocurrir lo mismo con las decisiones de las etapas restantes. Según sea la extensión de los cambios permitidos sobre dichas decisiones, podremos diferenciar entre tres tipos de modelos:

Modelo de Recurso Simple: En este modelo no se tienen en cuenta para nada las variaciones en la incertidumbre futura. Por tanto, las decisiones a tomar en cualquier etapa se establecen desde el inicio del proceso, sin darles opción a algún posible cambio, aún cuando se disponga de información adicional con el paso del tiempo. Este hecho facilita las cosas en cuanto a la representación del modelo y resolución del mismo. Sin embargo, hace que el modelo pierda flexibilidad ya que no incorpora la nueva información

que se origina de una etapa a la otra. En consecuencia, las conclusiones que deriben del modelo pueden alejarse de los resultados reales del sistema, luego habría que tener en cuenta cierta tolerancia de error. Claros ejemplos de este modelo son la Formulación General (1.6)-(1.8), y el modelo de Inmunización de Escenarios (1.13)-(1.15).

Modelo de Recurso Parcial: El actual modelo es una situación intermedia entre anticipar las decisiones desde una primera etapa, y el poder modificarlas a medida que se conoce nueva información sobre el problema. Es decir, en este caso las decisiones de las primeras r etapas se determinan al principio, y las decisiones de las etapas restantes se ajustan a los posibles cambios que se produzcan.

Modelo de Recurso Total: Este último modelo es quizás el más general, en el sentido que contempla las posibles fluctuaciones de los elementos desconocidos del problema. En él todas las decisiones son ajustadas en el tiempo, cuando se consigue nueva información sobre las mismas, excepto las decisiones correspondientes al primer período de tiempo.

Por supuesto la opción más adecuada es la de un modelo dinámico como es el de Recurso Total. No obstante, si partimos del supuesto de que cada período de tiempo es una etapa de decisión, esto conlleva un problema en relación con las dimensiones del modelo resultante. Es más, el tamaño de los modelos crece exponencialmente con el número de etapas de decisión, e incluso para un número de escenarios moderado, el modelo que se obtiene es bastante grande (del orden de 25000 restricciones y 75000 variables). Una forma de solventar dicha dificultad consiste en distribuir los diferentes períodos de tiempo que forman parte del proceso, en sólo unas pocas etapas de decisión. Es decir, si el modelo está formado por P períodos de tiempo, se considera que sólo $R < P$ etapas constituyen el proceso. Siendo R lo suficientemente pequeño en relación con P , pero significativo. Luego a partir de aquí, nótese la diferencia entre períodos de tiempo y etapas de decisión, aunque haya ocasiones en que coincidan.

Veamos como obtener la representación matemática del modelo de Recurso Total, sobre el que se centrarán los distintos algoritmos de resolución del problema. Según lo indicado anteriormente, el modelo de Recurso Total busca una política de decisión cuyas decisiones sean consistentes con la información disponible en cada período de tiempo dado. Con vistas a conseguirlo se propone como política idónea, aquella que se obtiene de incorporar las

características comunes de las soluciones bajo cada escenario individual, y de exigirle además, la siguiente condición denominada de "No Anticipatividad" o "Implementabilidad". Véase Rockafellar y Wets (1991) [57].

"Si en un modelo con varias etapas existen dos escenarios s y s' idénticos hasta una etapa r , entonces en base a la información disponible sobre ellos en dicha etapa r , se concluye que los valores de las variables X , deben ser los mismos desde el principio hasta dicha etapa r inclusive".

Con esta condición se garantiza una solución, que no depende en cualquier etapa, de la información que no se conozca en dicha etapa. Por otra parte, obviamente una política efectiva no requiere diferentes líneas de acción en una etapa cualquiera r , en lo relativo a dos escenarios s y s' , si en dicho instante no se puede afirmar cual de los dos escenarios va a ocurrir. Por tanto, la solución en cada etapa ha de ser implementable.

Para darle una estructura matemática a la condición de no anticipatividad, se introduce la información de cada escenario estructurada por etapas, de tal manera que en cada etapa r se distingue entre un número finito, pero significativo de posibilidades de las componentes estocásticas relacionadas con la etapa correspondiente, las cuales reciben el nombre de "Perspectivas". No es necesario que dicho número de posibilidades sea igual en cada etapa, aunque así lo consideremos en esta memoria. Por otro lado, cada perspectiva forma parte de uno o varios escenarios. En base a esta descomposición, se puede representar gráficamente la información, mediante un árbol de decisión. Como ejemplo hemos considerado el árbol que recoge la Figura 1.1, en el que se supone que el número de etapas de decisión son tres ($R = 3$), y se considera también que la etapa 1 incluye sólo el primer período de tiempo, la etapa 2 el segundo, y finalmente la etapa 3 contiene todos los períodos de tiempo restantes (del 3 al $P = 12$). Cada nodo de la Figura 1.1 representa un instante en el tiempo en el que se debe tomar una decisión. Una vez seleccionada la decisión correspondiente a una etapa, en la siguiente etapa se dispone de nueva información, que apunta a una serie de posibilidades. En el ejemplo considerado son tres dichas posibilidades, salvo en la primera etapa que es una. Cada una de estas posibilidades, que parten de un nodo cualquiera representa una perspectiva, y cada camino desde el nodo raíz hasta los nodos hojas del árbol representa un escenario.

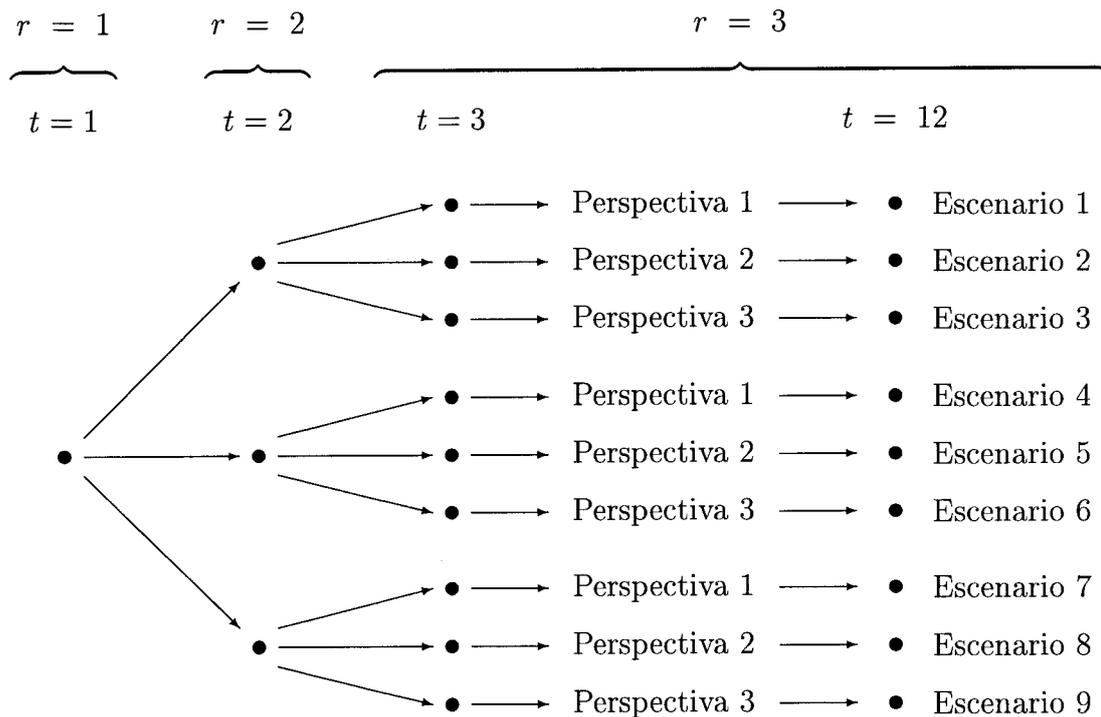


Figura 1.1: Relación entre Escenarios y Perspectivas del Ejemplo 1.1

Si designamos por $p_{r,s}$, la perspectiva en la etapa r que pertenece al escenario s , para todo $s \in S$, (Véase la Figura 1.1), entonces cualquier escenario \bar{s} estaría formado por el conjunto de perspectivas $p_{r,\bar{s}}$, para todo $r = 1, \dots, R$. Por otra parte, nótese también como en una etapa dada, los escenarios se consideran indistinguibles, si las perspectivas que forman parte de los mismos hasta esa etapa coinciden. Por tanto, y para prevenir el que la política elegida no viole la condición de no anticipatividad, cabe esperar que las decisiones que se tomen en una etapa cualquiera r , sean constantes en lo relativo a aquellos escenarios s_1, s_2, \dots, s_q , en los cuales se verifica $p_{k,s_1} = p_{k,s_2} = p_{k,s_q}$, para todo $k = 1, 2, \dots, r$. En consecuencia, la política óptima del modelo de Recurso Total (RT) ha de satisfacer dicha condición. Denotemos entonces por N el conjunto de soluciones que satisfacen las denominadas restricciones de no anticipatividad, esto es,

$$N = \{X_e^s / X_e^s = X_e^{s'} \text{ para todo } s \text{ y } s' \text{ escenarios idénticos hasta la etapa } r\} \quad (1.22)$$

Dependiendo del entorno que se considere para el modelo de Recurso Total, se distingue entre:

1. El modelo de Recurso Total con la Formulación General, y
2. El modelo de Recurso Total con Inmunización de Escenarios.

Operativamente el primer modelo se consigue simplemente, imponiendo a la solución de la Formulación General la restricción de no anticipatividad, como muestra el siguiente modelo:

$$\min \sum_{s \in S} w^s (c^s)^t X^s \quad (1.23)$$

$$\text{s.a} \quad AX^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (1.24)$$

$$X^s \in N \quad \forall s \in S \quad (1.25)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \quad (1.26)$$

Mientras que en el segundo caso, se ha de trasladar la búsqueda de la solución a las regiones factibles de cada uno de los escenarios, y a la solución que se obtiene, se le impone la restricción de no anticipatividad. En consecuencia, el modelo tendría la siguiente expresión

$$\min \sum_{s \in S} w^s \|(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)\|^d \quad (1.27)$$

$$\text{s.a} \quad AX^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (1.28)$$

$$X^s \in N \quad \forall s \in S \quad (1.29)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \quad (1.30)$$

Nótese que en el modelo anterior (1.27)-(1.30), ya no aparece la función de penalización en la función objetivo, ni el vector de variables de holgura. Ante esto, se podría dudar de la robustez del modelo. Sin embargo, dada la fuerte aleatoriedad inherente a las últimas etapas de decisión hay grandes posibilidades de obtener resultados robustos.

Por otra parte, es preciso mencionar que tanto en el modelo (1.23)-(1.26) como en el modelo (1.27)-(1.30), las regiones factibles no disponen de la estructura de red, debido a

las restricciones de no anticipatividad (1.25). Veremos como tratar este problema en los capítulos 2 y 3.

1.6 Aproximaciones del Modelo

Ante un modelo de programación a gran escala como los modelos (1.23)-(1.26) y (1.27)-(1.30) el procedimiento a seguir es el siguiente. Se intenta mantener la linealidad de la función objetivo al tiempo que se efectúan los cambios necesarios sobre el mismo para reducir sus dimensiones. Si no fuese posible, la alternativa es conseguir al menos una función objetivo separable. Por otro lado, a veces es más conveniente sacrificar la linealidad de la función objetivo, para no perder la estructura de red que presenta el modelo. En el caso del modelo (1.23)-(1.26) la función objetivo es lineal. Sin embargo, en el modelo (1.27)-(1.30) debemos poner especial énfasis en la norma paramétrica d , ya que dependiendo de como sea ésta, la función objetivo y en consecuencia el problema, cambia de manera importante. Según las distintas formas que pueda tomar la norma d , distinguimos entre varios modelos que se exponen a continuación:

1. Una alternativa para d es la norma L_1 o norma rectangular. Con ésta se obtiene un problema de programación como el siguiente, cuya función objetivo presenta valores absolutos.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{s \in S} w^s |(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)| \\ \text{s.a} \quad & (1.28), (1.29) \text{ y } (1.30) \end{aligned} \tag{1.31}$$

2. También se puede considerar la norma euclídea, y en este caso se obtiene entonces un problema de programación cuadrático como el que sigue:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \left\| \sum_{e \in E} (c_e^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*) \right\|^2 \quad (1.32)$$

s.a (1.28), (1.29) y (1.30)

3. Otra posibilidad consiste en asumir aquella norma d , resultante de aplicar dos normas de forma secuencial como se indica a continuación:

(a) En primer lugar se aplica la norma L_∞

$$\min_{X^s} \left\{ \max_{s \in S} w^s \|(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)\| \right\} \quad (1.33)$$

s.a (1.28), (1.29) y (1.30)

(b) A continuación, sea V el óptimo del modelo (1.33), entonces además de aplicar la norma L_1 , y como consecuencia del resultado anterior, se incluyen en el modelo un bloque de restricciones adicionales como se muestra seguidamente:

$$\min \sum_{s \in S} w^s |(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)| \quad (1.34)$$

$$\text{s.a } w^s |(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)| \leq V \quad \forall s \in S \quad (1.35)$$

$$(1.28), (1.29) \text{ y } (1.30)$$

El significado intuitivo de ambos modelos (1.33) y (1.34)-(1.35) es minimizar la mayor desviación de la solución de cada escenario con respecto al valor óptimo, para luego, resolver el problema sin que las desviaciones superen dicho mínimo.

Ahora veamos los distintos modos de resolver los modelos propuestos anteriormente. En el primer modelo (1.31), es decir, cuando se considera la norma L_1 se pueden aplicar dos políticas encaminadas a alcanzar diferentes objetivos.

a).- Con la primera se intenta conseguir que el modelo presente una región factible con estructura de red, independientemente de la no linealidad de la función objetivo. Para ello se

aplican determinadas técnicas de descomposición, como la de Benders, la de Lagrange, la de Dantzig-Wolfe, etc . . . (Véanse los capítulos 2 y 3), en las cuales se eliminan las restricciones de no anticipatividad (1.29). De esta forma, se divide el modelo original en varios submodelos de redes de menores dimensiones, aunque con funciones objetivos no lineales.

b).- Mientras la segunda política opta por la aproximación lineal del modelo, al precio de sacrificar la estructura arborescente de la matriz de condiciones como vemos en la siguiente representación:

$$\min \sum_{s \in S} (V_s^+ + V_s^-) \quad (1.36)$$

$$\text{s.a. } w^s [(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)] = V_s^+ - V_s^- \quad \forall s \in S \quad (1.37)$$

$$AX^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (1.38)$$

$$X^s \in N \quad \forall s \in S \quad (1.39)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \quad (1.40)$$

$$0 \leq V_s^+, V_s^- \quad \forall s \in S \quad (1.41)$$

Esta aproximación (1.36)-(1.41) se puede resolver directamente como un problema de programación lineal aplicando el método del Simplex. No obstante, debido a las dimensiones de la misma, esto ralentizaría el proceso, por lo que habría que descomponerla. En el capítulo 3 se muestra el desarrollo de la técnica de descomposición de Benders teniendo en cuenta la estructura de esta aproximación.

Del segundo modelo (1.32), es decir, en el caso de la norma euclídea, derivan dos posibles aproximaciones, una cuadrático separable y la otra lineal. Veamos como son ambas. Si nos fijamos, al desarrollar el cuadrado en (1.32), los dobles productos de las componentes del vector de variables X^s , para $s \in S$ (véase * en (1.42)), nos impiden la separación de dichas variables, lo que obstaculiza la descomposición del modelo.

$$\sum_{s \in S} w^s \left(\sum_{e \in E} (c_e^s)^2 (X_e^s)^2 + \underbrace{\sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s X_e^s X_{e'}^s}_* - 2\hat{Z}^s(*) \sum_{e \in E} c_e^s X_e^s + [\hat{Z}^s(*)]^2 \right) \quad (1.42)$$

Por ello se recomienda transformar la función objetivo en una función cuadrático separable mediante la aproximación de Stephanopoulos y Westerberg (1975) [63], en la que el producto de dos reales cualesquiera u y v se puede expresar en función de otros dos reales conocidos \bar{u} y \bar{v} , mediante la siguiente relación:

$$uv = \bar{u}v + u\bar{v} - \bar{u}\bar{v}(u - v)^2 \quad (1.43)$$

o de manera equivalente

$$uv \cong \bar{u}v + u\bar{v} - \bar{u}\bar{v} \quad (1.44)$$

Utilizando la aproximación (1.44), en cada doble producto de las componentes del vector de variables X^s , para todo $s \in S$, cuando se considera como vectores conocidos las soluciones \bar{X}^s , de los submodelos (1.9)-(1.11) para cada escenario $s \in S$, entonces la función objetivo (1.42) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \sum_{s \in S} w^s \left\{ \sum_{e \in E} (c_e^s)^2 (X_e^s)^2 + \sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s \bar{X}_e^s X_{e'}^s + \sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s X_e^s \bar{X}_{e'}^s - \right. \\ \left. - \sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s \bar{X}_e^s \bar{X}_{e'}^s - 2\hat{Z}^s(*) \sum_{e \in E} c_e^s X_e^s + [\hat{Z}^s(*)]^2 \right\} \quad (1.45) \end{aligned}$$

Conviene indicar que la aproximación cuadrática (1.45), es una función separable, es decir, cumple los requisitos necesarios para realizar una descomposición del modelo por etapas. Por tanto, esta podría ser una posible vía de solución para el mismo. Sin embargo, se puede profundizar más considerando la siguiente aproximación lineal.

Dado $u \in R$ un número real arbitrario, una aproximación de su cuadrado es la siguiente:

$$u^2 \cong \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u}) \quad (1.46)$$

donde \bar{u} representa un número real conocido. Operando tal aproximación (1.46), se obtiene la siguiente expresión:

$$u^2 \cong -\bar{u}^2 + 2\bar{u}u \quad (1.47)$$

Aplicando simultáneamente ambas aproximaciones (1.44), y (1.47) sobre las componentes de los vectores X^s , para todo $s \in S$, en la función (1.42), se consigue la siguiente función lineal:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{s \in S} w^s & \left\{ - \sum_{e \in E} (c_e^s)^2 (\bar{X}_e^s)^2 + 2 \sum_{e \in E} (c_e^s)^2 (\bar{X}_e^s)^2 X_e^s + \sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s \bar{X}_e^s X_{e'}^s + \right. \\
& \left. + \sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s X_e^s \bar{X}_{e'}^s - \sum_{e \neq e' \in E} c_e^s c_{e'}^s \bar{X}_e^s \bar{X}_{e'}^s - 2 \hat{Z}^s(*) \sum_{e \in E} c_e^s X_e^s + [\hat{Z}^s(*)]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Para la última alternativa propuesta, se aplicaban dos normas secuenciales. Con el fin de proponer posibles vías de resolución de los modelos resultantes de estas normas (1.33), y (1.34)-(1.35), comentamos las ventajas e inconvenientes que presentan los mismos.

El modelo (1.33) tiene una función objetivo no lineal y su región factible presenta estructura de red, salvo por las restricciones de no anticipatividad. Como consecuencia de estas observaciones podemos considerar dos alternativas:

a).- Sustituir el modelo por una aproximación equivalente cuya función objetivo sea lineal, como se ve a continuación:

$$\min \quad T \tag{1.49}$$

$$\text{s.a} \quad V_s^+ + V_s^- \leq T \quad \forall s \in S \tag{1.50}$$

$$w^s [(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)] = V_s^+ - V_s^- \quad \forall s \in S \tag{1.51}$$

$$AX^s = b^s \quad \forall s \in S \tag{1.52}$$

$$X^s \in N \quad \forall s \in S \tag{1.53}$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \tag{1.54}$$

$$0 \leq \quad V_s^+ \quad V_s^- \quad \forall s \in S \tag{1.55}$$

Nótese que en la aproximación (1.49)-(1.55) del modelo desaparece por completo la estructura de red. Por tanto, ésta se resuelve directamente mediante las técnicas conocidas de Programación Lineal.

b).- Eliminar las restricciones de no anticipatividad de la región factible del modelo mediante alguna de las vías que se proponen en los capítulos 2 y 3, para garantizar la estructura de red y poder así descomponerlo.

Por otro lado, el modelo (1.34)-(1.35) tiene una estructura similar a la del modelo (1.31), salvo por las restricciones (1.35). Sin embargo, sólo se resuelve de una única forma, transformándolo en uno lineal, ya que es muy difícil conservar la estructura de red en este caso. La aproximación que se propone del mismo es la siguiente:

$$\min \quad \sum_{s \in S} (V_s^+ + V_s^-) \quad (1.56)$$

$$\text{s.a} \quad V_s^+ + V_s^- \leq V \quad \forall s \in S \quad (1.57)$$

$$w^s [(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(\ast)] = V_s^+ - V_s^- \quad \forall s \in S \quad (1.58)$$

$$AX^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (1.59)$$

$$X^s \in N \quad \forall s \in S \quad (1.60)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \quad (1.61)$$

$$0 \leq \quad V_s^+ \quad V_s^- \quad \forall s \in S \quad (1.62)$$

Dicha aproximación se resuelve aplicando el método del Simplex, aunque la rapidez computacional de su resolución se verá sujeta a las dimensiones del problema.

Capítulo 2

Formulación compacta del modelo

Capítulo 2

Formulación Compacta del Modelo

2.1 Representación

Comenzamos este capítulo mostrando una formulación del modelo de Recurso Total, a la cual se denomina "*Formulación Compacta*". En dicha formulación se sustituyen aquellas variables, que son iguales en el modelo debido a la imposición de las restricciones de no anticipatividad (1.29), por variables únicas a las que se denomina "*Variables Enganche*". De esta manera las restricciones de no anticipatividad no se necesitan implícitamente, lo que supone una ventaja puesto que de esta manera se reduce el tamaño del mismo. Antes de introducir la Formulación Compacta, comentamos las características más sobresalientes que presenta el modelo de Recurso Total (RT), tanto en el caso de Inmunización de Escenarios, como en el caso de la Formulación General:

1. - La matriz A de restricciones presenta una estructura en forma de cuasi-escalera.
2. - Los escenarios difieren los unos de los otros, en los coeficientes de la función objetivo y en el término independiente.
3. - El número de variables enganche entre las distintas etapas no es significativo.

Debemos resaltar la estructura de cuasi-escalera del modelo, ya que gracias a ella se facilita el trabajo de la descomposición del mismo. Por tanto, retornando al ejemplo de la

Figura 1.1 en que se consideran tres etapas de decisión y nueve escenarios. Los requisitos de estructurar la información por etapas, nos conducen a la partición del conjunto de nodos de la región factible V según las etapas consideradas, de tal forma que todo nodo pertenece a una única etapa. Se denota entonces por Q_r el conjunto de nodos que pertenecen a la etapa r , tal que $Q_r \cap Q_{r'} = \emptyset$, para cualquier par de etapas r y r' . Bajo el supuesto de que existen sólo tres etapas, se tiene que $V = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$. Simultáneamente a dicha partición, se divide también el conjunto de arcos E de la región factible. Como otra simplificación, se supone en principio que las variables enganche sólo se presentan entre etapas consecutivas. Es decir, el nodo destino de cualquier arco, o bien pertenece a la misma etapa que su nodo origen, o bien pertenece a la etapa inmediatamente siguiente a la que pertenece su nodo origen. Teniendo en cuenta esto, se utiliza la siguiente notación:

R_r representa el conjunto de arcos que pertenecen a la etapa r , es decir, cuyos nodos terminales pertenecen ambos al conjunto Q_r es decir, $e \in R_r$ si y sólo si $i, j \in Q_r$, para $e \sim (i, j)$, y para $r = 1, 2, 3$.

R_{12} representa el conjunto de arcos enganche entre las etapas 1 y 2, tales que $e \in R_{12}$ si y sólo si $i \in Q_1$ y $j \in Q_2$, para $e \sim (i, j)$.

R_{23} representa el conjunto de arcos enganche entre las etapas 2 y 3, tales que $e \in R_{23}$ si y sólo si $i \in Q_2$ y $j \in Q_3$, para $e \sim (i, j)$.

Tal y como se muestra en la Figura 1.1, se considera que el número de perspectivas disponibles en cada etapa son tres, salvo en la primera que sólo hay una. Por consiguiente, en términos del número de etapas y perspectivas que aparecen en dicha Figura 1.1, se particionan los vectores de variables X^s para todo escenario $s \in S$, obteniendo las siguientes variables que se denotan por Y :

Y_0 es el vector de variables que pertenecen únicamente a la etapa 1.

Y^{12} es el vector de variables enganche entre la etapa 1 y la etapa 2, el cual constituye el final de la etapa 1.

Y_i son los vectores de variables que sólo están implicados en la etapa 2, para cada perspectiva $i = 1, 2, 3$.

Y_i^{23} son los vectores de variables enganche entre la etapa 2 y la etapa 3, para el conjunto de perspectivas $i = 1, 2, 3$, los cuales vienen a representar el final de la etapa 2.

Y_{ij} son los vectores de variables englobadas total y exclusivamente dentro de la etapa 3, para cada par de perspectivas $i, j = 1, 2, 3$.

Análogamente a como se hizo con las variables, se particiona por etapas la matriz A , originando las siguientes submatrices:

A_0 es la submatriz de restricciones asociada a la etapa 1, que multiplica al vector de variables compuesto por Y_0 , e Y^{12} .

A_i es la submatriz de restricciones asociada con la etapa 2 y cada perspectiva i , para $i = 1, 2, 3$, que multiplica al vector de variables formado por Y^{12} , Y_i , e Y^{23} , y

A^j es la submatriz de restricciones asociada con la etapa 3 y la perspectiva j , para $j = 1, 2, 3$, que multiplica al vector de variables compuesto por Y_i^{23} , e Y_{ij} .

Dado que los escenarios difieren los unos de los otros en función del vector de costos y el término independiente, se deduce que varios bloques de la matriz de condiciones A se repiten, esto es,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A_3 \\ A^1 &= A^2 = A^3 \end{aligned}$$

Se realiza además otra partición de las matrices A_0 , A_i , y A^j , dividiéndolas en submatrices que multiplican a los vectores de variables implicadas en una sola etapa, y submatrices que multiplican a los vectores de variables enganche, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} A_0 &= (D_0, D_0^{12}) \\ A_i &= (D_i^{12}, D_i, D_{i0}^{23}) \quad \forall i \\ A^j &= (D_{ij}^{23}, D_{ij}) \quad \forall i, j \end{aligned}$$

de forma que

D_0 , y D_0^{12} representan las submatrices relacionadas con los conjuntos de arcos R_1 , y R_{12} , para el conjunto de nodos Q_1 , respectivamente.

D_i^{12} , D_i , y D_{i0}^{23} representan las submatrices relacionadas con los conjuntos de arcos R_{12} , R_2 , y R_{23} , para el conjunto de nodos Q_2 , y cada perspectiva $i = 1, 2, 3$, respectivamente.

D_{ij}^{23} , y D_{ij} representan las submatrices relacionadas con los conjuntos de arcos R_{23} , y R_3 , para el conjunto de nodos Q_3 , y cada par de perspectivas $i, j = 1, 2, 3$, respectivamente.

También se divide por etapas el correspondiente vector de cotas superiores "u" en $(u_0, u^{12}, u_i, u^{23}, u_{ij})$, para todo $i, j = 1, 2, 3$. Se debe tener en cuenta, que dicho vector de variables de cotas superiores es el mismo para todos los escenarios. Bajo tales circunstancias se han de verificar las siguientes igualdades.

$$u_1 = u_2 = u_3, \quad u_{11} = u_{12} = u_{13}, \quad u_{21} = u_{22} = u_{23}, \quad u_{31} = u_{32} = u_{33}.$$

Y por último, sean b_0 , b_i , y b^j , los términos independientes correspondientes a las restricciones $AX^s = b^s$, $\forall s \in S$, que se obtienen al trasladar sobre b las particiones hechas sobre A y X^s , para la etapa 1, para la etapa 2 y la perspectiva i con $i = 1, 2, 3$, y para la etapa 3 y la perspectiva j con $j = 1, 2, 3$, respectivamente.

En función de las particiones establecidas sobre las componentes de la región factible del modelo de Recurso Total, representamos dicho modelo sustituyendo las restricciones de no anticipatividad por las correspondientes variables enganche.

Modelo de Recurso Total
con Formulación General

Modelo de Recurso Total
con Inmunización de Escenarios

$$Z = \min \sum_{s \in S} w^s (c^s)^t Y^s \qquad Z = \min \sum_{s \in S} w^s \|(c^s)^t Y^s - \hat{Z}^s(*)\|^d \quad (2.1)$$

$$\text{s.a } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y^{12} = b_0 \quad (2.2)$$

$$D_i^{12} Y^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_i^{23} = b_i \quad \forall i \quad (2.3)$$

$$D_{ij}^{23} Y_i^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (2.4)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (2.5)$$

$$0 \leq Y^{12} \leq u^{12} \quad (2.6)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (2.7)$$

$$0 \leq Y_i^{23} \leq u^{23} \quad \forall i \quad (2.8)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (2.9)$$

donde

$$Y^s \equiv (Y_0, Y^{12}, Y_i, Y_i^{23}, Y_{ij}) \quad (2.10)$$

es el vector de variables, para $s = 3(i - 1) + j$, e $i, j = 1, 2, 3$.

A dicha representación se la denomina "Formulación con Variables Enganche" ó "Formulación Compacta". Como se puede apreciar, el conjunto de restricciones (2.2)-(2.4) tiene estructura de cuasi-escalera, y ésta se utilizará con vistas a la descomposición del modelo. La Figura 2.1 muestra más claramente esta estructura. Véase también la Figura 2.2, resultado de reordenar las columnas de la matriz de condiciones.

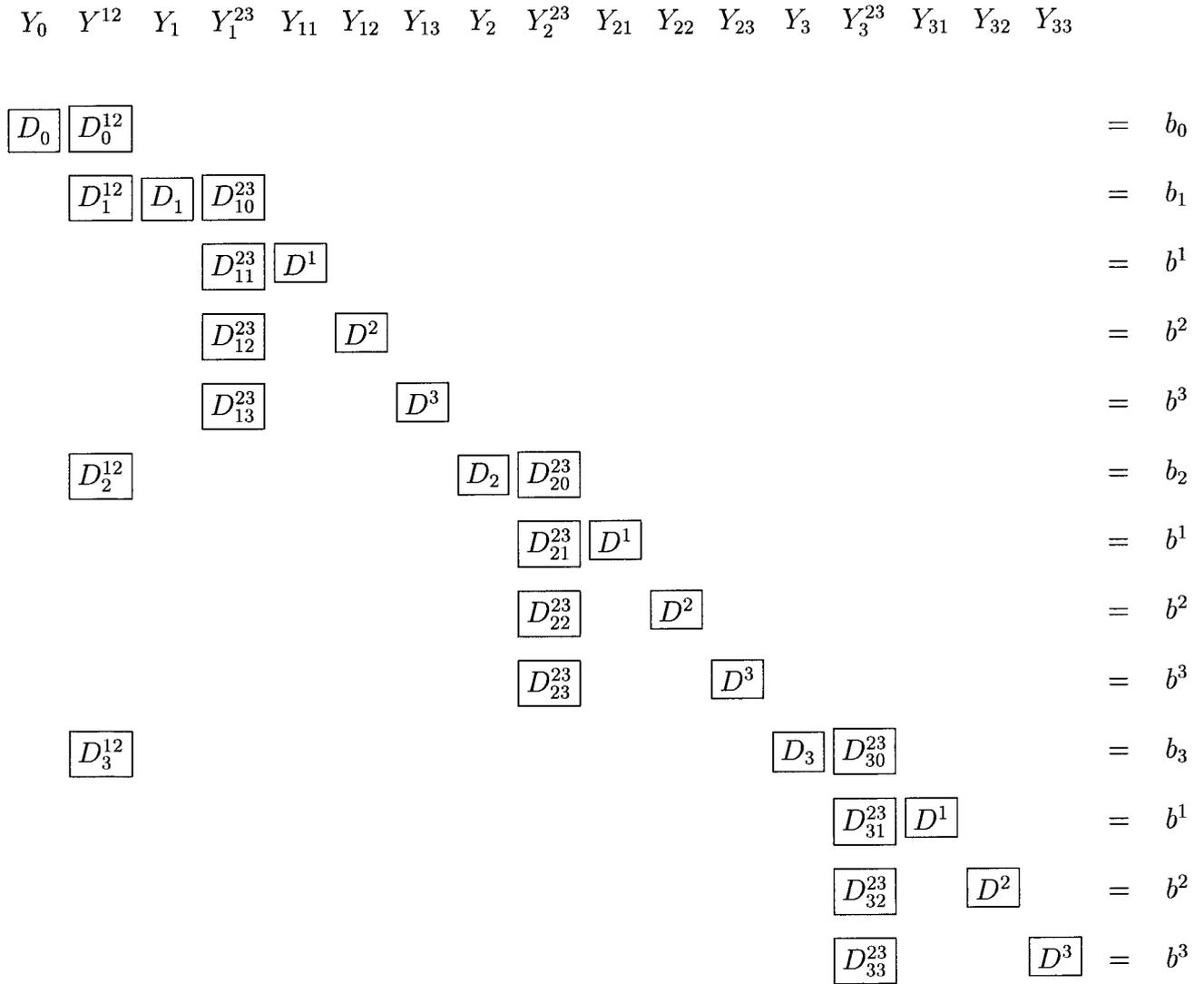


Figura 2.1: Estructura Cuasi-Escalera de la Formulación Compacta

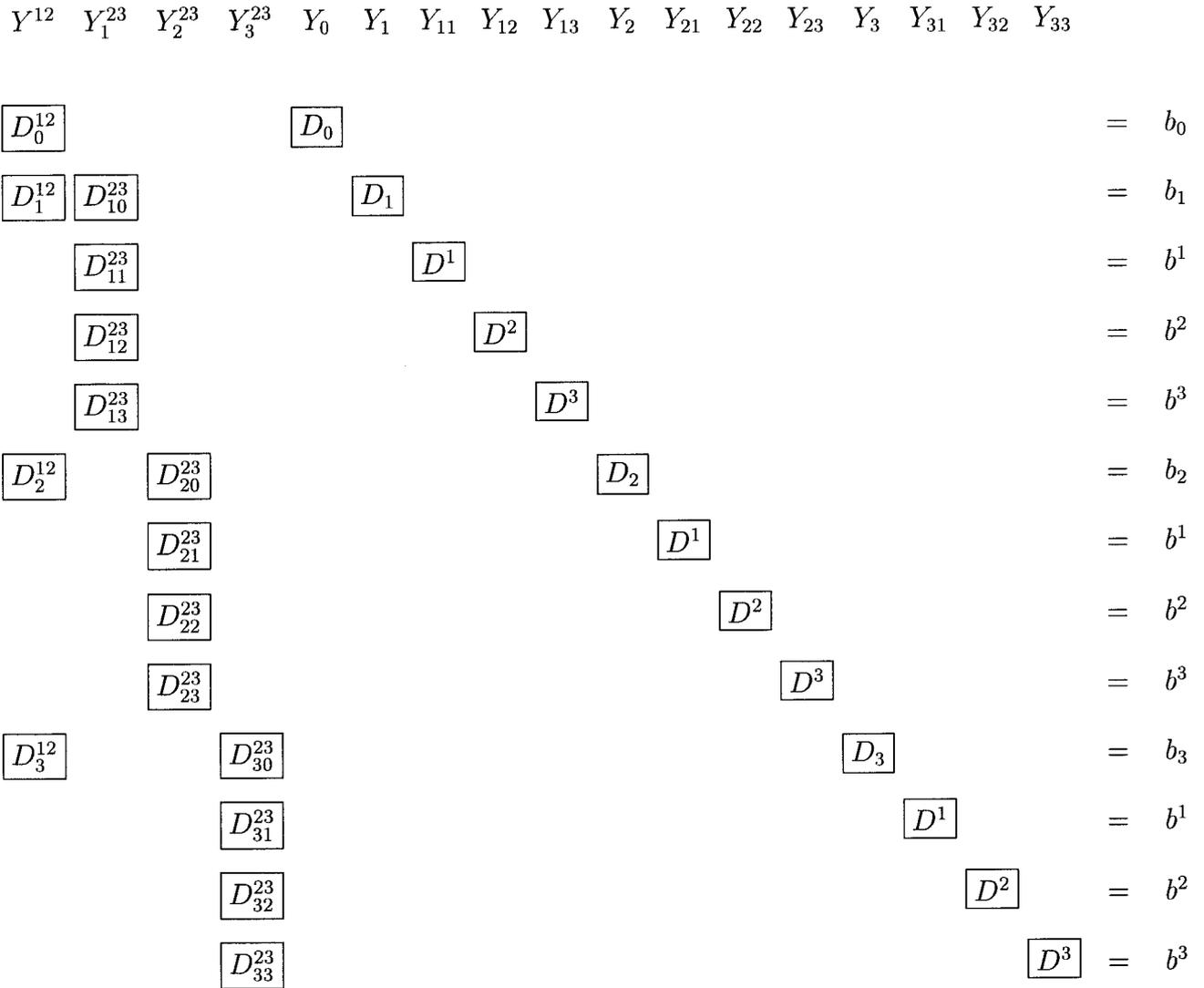


Figura 2.2: Formulación Compacta Reordenada

2.2 Optimización Basada en Submodelos

En este apartado se propone una metodología para solucionar el modelo, tal y como se expresa en la formulación (2.1)-(2.10), para el caso lineal. En un principio, se introduce un procedimiento computacional que determina una solución básica inicial en aquellos casos donde la función objetivo del modelo es lineal (esto es, para el modelo de Recurso Total con la Formulación General (1.23)-(1.26), y para la aproximación lineal del modelo de Recurso Total con Inmunización de Escenarios (1.48)). Por supuesto, bajo la condición de linealidad los coeficientes de la función objetivo se pueden separar de forma similar a como se ha hecho con las restantes componentes del modelo, siendo los nuevos coeficientes para cada una de las etapas los siguientes:

$$\begin{aligned} & (h_0, h_0^{12}) \\ & (h_0^{12}, h_i, h_{i0}^{23}) \quad \forall i \\ & (h_{i0}^{23}, h^j) \quad \forall i, j \end{aligned}$$

De esta manera, la función objetivo (2.1) se puede expresar como en (2.11) para los modelos indicados anteriormente, y por consiguiente, separarse por etapas.

$$Z = \min h_0 Y_0 + h_0^{12} Y^{12} + \sum_{i=1,2,3} (h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_i^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \quad (2.11)$$

Debe hacerse notar, que en el caso en que la estocasticidad del sistema sólo se deba al término independiente, algunas componentes de los vectores de costos serán iguales entre sí, al igual que ocurría con las submatrices de restricciones A , y el vector de cotas superiores u ,

$$h_1 = h_2 = h_3 \quad h_{10}^{23} = h_{20}^{23} = h_{30}^{23} \quad h^1 = h^2 = h^3$$

La ventaja de la linealidad de la función objetivo (2.11), unido al hecho de que el modelo presenta una estructura de cuasi-escalera, hace que se pueda descomponer totalmente según las distintas etapas en los siguientes submodelos de redes independientes.

ETAPA 1:

$$P_0 = \min \left\{ h_0 Y_0 + h_0^{12} Y^{12} / D_0 Y_0 + D_0^{12} Y^{12} = b_0, \right. \\ \left. 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y^{12} \leq u^{12} \right\} \quad (2.12)$$

donde (h_0, h_0^{12}) es el vector de coeficientes de la función objetivo, e (Y_0, Y^{12}) el vector de variables, para los períodos de tiempo que forman parte de la etapa 1.

ETAPA 2:

$$P_i = \min \left\{ h_0^{12} Y^{12} + h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_i^{23} / D_i^{12} Y^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_i^{23} = b_i, \right. \\ \left. 0 \leq Y^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_i^{23} \leq u^{23} \right\} \quad \forall i \quad (2.13)$$

donde $(h_0^{12}, h_i, h_{i0}^{23})$ es el vector de coeficientes de la función objetivo, e (Y^{12}, Y_i, Y_i^{23}) es el vector de variables asociados con la perspectiva i del vector de costos y del término independiente, cuando i toma los valores 1, 2, 3, para los períodos de tiempo en la etapa 2. Notemos que Y^{12} pertenece a todos los submodelos P_i , para $i = 1, 2, 3$.

ETAPA 3:

$$P_{ij} = \min \left\{ h_{i0}^{23} Y_i^{23} + h^j Y_{ij} / D_{ij}^{23} Y_i^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \right. \\ \left. 0 \leq Y_i^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \right\} \quad \forall i, j \quad (2.14)$$

donde (h_{i0}^{23}, h^j) es el vector de coeficientes de la función objetivo, e (Y_i^{23}, Y_{ij}) el vector de variables asociado con la perspectiva j del vector de costos y del término independiente, para los períodos de tiempo en la etapa 3, donde $i, j = 1, 2, 3$. Nótese que Y_i^{23} forma parte de todos los submodelos P_{ij} , para $j = 1, 2, 3$.

La descomposición del modelo (2.11) sujeto a (2.2)-(2.10), en los submodelos anteriores P_0 , P_i , y P_{ij} , para todo i, j , origina un procedimiento cuyo propósito es el de generar una solución inicial ventajosa para resolver el modelo de partida, utilizando el método del Simplex. La base de este procedimiento al que se denomina "*Procedimiento Acelerado*", consiste en resolver primero los submodelos relacionados con las etapas más tempranas, y utilizar sus soluciones en los submodelos de las siguientes etapas. De esta manera, mientras se resuelve cualquiera de los submodelos (2.13) de la etapa 2, ó (2.14) de la etapa 3, las variables enganche entre dos etapas serán iguales a la solución óptima de la etapa una o dos, respectivamente. El siguiente pseudocódigo describe dicho procedimiento acelerado.

Procedimiento Acelerado

1. Se resuelve P_0 , y sea $(\bar{Y}_0, \bar{Y}^{12})$ la solución óptima.
2. Se fijan las variables enganche entre la etapa 1 y la etapa 2 a los correspondientes valores de la solución anterior, es decir, se asigna $Y^{12} = \bar{Y}^{12}$.
3. Se resuelven los submodelos P_1, P_2 , y P_3 . Nótese que debido al paso 2, dichos submodelos P_1, P_2 , y P_3 , se pueden resolver independientemente. Sean $(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_i^{23})$, para $i = 1, 2, 3$, las soluciones óptimas de los mismos.
4. Se fijan las variables enganche entre las etapas 2 y 3 a los correspondientes valores de las soluciones anteriores, es decir, se asigna $Y_i^{23} = \bar{Y}_i^{23}$, para todo $i = 1, 2, 3$.
5. Por último, se resuelven los submodelos $\{P_{1j}\}, \{P_{2j}\}$, y $\{P_{3j}\}$, para $j = 1, 2, 3$. Al fijar las variables enganche en el paso 4, se permite resolver estos submodelos independientemente. Sean $(\bar{Y}_i^{23}, \bar{Y}_{ij})$, con $i, j = 1, 2, 3$, las soluciones óptimas.
6. Con todas las soluciones obtenidas, se genera la siguiente solución inicial básica

$$(\bar{Y}_0, \bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_i^{23}, \bar{Y}_{ij})$$

no necesariamente factible ¹ para el modelo de partida (2.2)-(2.10) y (2.11). Sin embargo, dicha solución sirve como solución inicial para resolver el modelo, ya que además de conseguirse de una forma rápida, está próxima a la óptima pues verifica muchas de las restricciones del modelo.

Los modelos (2.13) para $i = 1, 2, 3$, y los modelos (2.14) para $i, j = 1, 2, 3$, se pueden resolver mediante el método del Simplex de forma paralela. No obstante, la estrategia del procedimiento acelerado de fijar las variables enganche a los valores óptimos de las etapas más tempranas, origina submodelos muy parecidos en cuanto a su estructura, pero cuya diferencia radica en el vector de costos y en el término independiente (véanse los submodelos P_{11} , P_{12} y P_{13}). Por consiguiente, la resolución de los mismos también se puede realizar de forma secuencial, ahorrando muchas iteraciones y tiempo de computación, teniendo en cuenta que al resolver uno de ellos se puede partir de la solución óptima de otro de la misma etapa ya resuelto previamente. En particular, si la estocasticidad sólo proviene del término independiente, se tiene que la solución de P_1 , es solución inicial factible dual de P_2 , ya que como se ha dicho

$$A_1 = A_2 = A_3 \quad h_1 = h_2 = h_3, \quad \text{y} \quad h_{10}^{23} = h_{20}^{23} = h_{30}^{23},$$

con lo cual, nos sirve como información a priori para resolver P_2 . De forma similar, la solución óptima de P_2 es una solución inicial factible dual para P_3 , y se puede utilizar en la resolución de P_3 . Pero además, lo mismo se podría aplicar para resolver los submodelos P_{1j} , P_{2j} , y P_{3j} para $j = 1, 2, 3$, por ser

$$A^1 = A^2 = A^3 \quad \text{y} \quad h^1 = h^2 = h^3$$

Es decir, la solución óptima de $P_{i,j-1}$ es una solución inicial factible dual de P_{ij} , para $j = 2, 3$, siempre y cuando, la incertidumbre sólo proceda del término independiente. Aún más, la solución óptima de $P_{i-1,j}$ también es solución inicial factible dual de P_{ij} .

¹Puede que la solución que se consiga no sea factible para el modelo que estudiamos, ya que al fijar las variables enganche, las restricciones que determinan las regiones factibles de los submodelos no tienen por que coincidir con las mismas restricciones sin fijar tales variables.

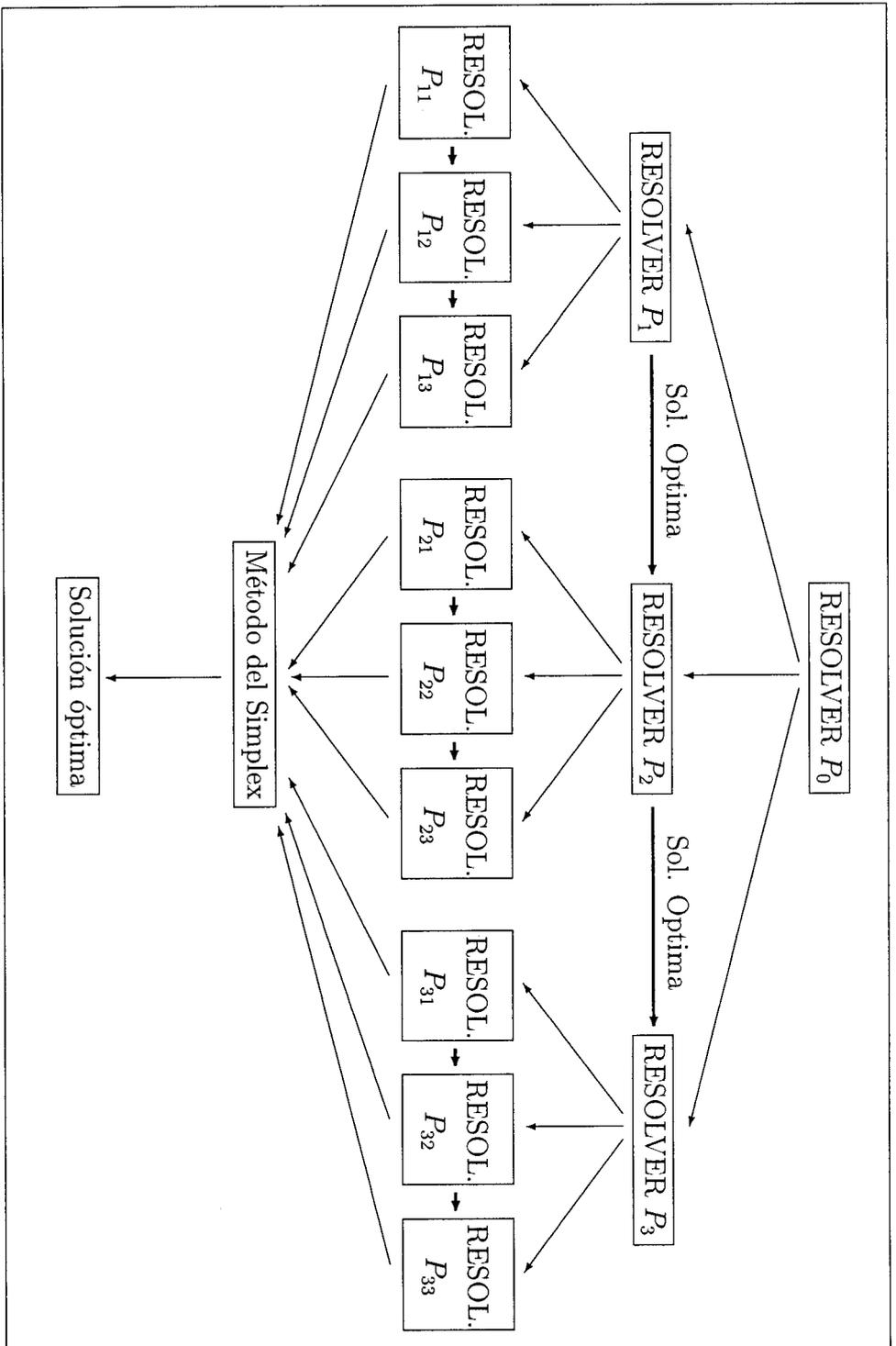


Figura 2.3: Procedimiento Acelerado

La Figura 2.3 representa el esquema del procedimiento acelerado descrito anteriormente, donde las líneas gruesas indican el flujo de información que circula entre los submodelos. Dicha información nos posibilita una computación más efectiva desde el punto de vista secuencial, pero a la vez limita la extensión del paralelismo entre ellos. La efectividad de la computación se refiere a la ventaja que supone partir de la solución del modelo inmediatamente anterior al resolver cualquiera de los submodelos. Sin embargo, otra alternativa es resolver los submodelos simultáneamente sin contar con dicha información.

Una vez se ha obtenido la solución inicial del modelo, aunque no necesariamente factible, se podría aplicar el método del Simplex para resolverlo. Sin embargo, nos enfrentamos a un modelo demasiado grande para resolver directamente, por ello, empleamos el método, reconocido con el nombre de *Sprint* de Martin Beale, que pasamos a explicar.

La base de este método consiste en eliminar del modelo global, aquellas variables que se anulan en el vector solución obtenido a través del Procedimiento Acelerado y aquellas restricciones que se verifican para tal solución. De esta forma, el modelo resultante es bastante más reducido, ya que en dicho vector solución muchas de las variables son nulas, debido a las características propias del modelo. A continuación se aplica el método del Simplex y se obtiene su correspondiente solución. Para luego comprobar si esta nueva solución verifica las restricciones anteriormente eliminadas. Si las satisface, el siguiente paso es calcular los costes reducidos de aquellas variables que se encuentran fuera del modelo en ese instante, y si son todos positivos, esa solución sería la óptima; si hay alguna variable cuyo coste reducido es negativo, se introduce en el modelo y se vuelve a reoptimizar. A veces incluso no sólo se introduce una única variable sino un subconjunto de ellas, por supuesto con el coste reducido adecuado. En caso contrario, es decir, si existe alguna restricción que no se verifica se añade al modelo y se resuelve otra vez.

Este proceso se repite iterativamente, lo que supone un aumento de las dimensiones del modelo. Por ello, si al cabo de cierto número prudente de iteraciones, se observa que algunas restricciones han sido verificadas por casi todas las soluciones obtenidas hasta el momento, entonces se retiran del modelo tales restricciones, para que éste no aumente demasiado sus dimensiones durante el proceso. Por otro lado, a pesar de que se han eliminado aquellas variables que eran nulas para la solución inicial, es conveniente cada cierto número

de iteraciones comprobar si dichas variables tienen un coste reducido adecuado para incluirlas en el modelo, independientemente de que hayamos o no encontrado una solución que verifique todas las restricciones. También, aquellas otras variables que forman parte del modelo, y que se anulan en muchas de las soluciones obtenidas durante el proceso, se extraen del mismo.

Como se deduce de la explicación anterior, este algoritmo se apoya en la solución de partida para no trabajar con el modelo en su totalidad.

Hasta ahora el planteamiento de resolución del problema ha estado enfocado al caso lineal, ya que es el más sencillo. De hecho, en el primer capítulo vimos como transformar la mayoría de los modelos resultantes de manera que no se perdiera la linealidad, siempre que fuera posible. Dichos modelos (1.31), (1.32), (1.33) y (1.34)-(1.35) también se podrían tratar directamente, pero a diferencia del caso lineal, en estos casos el modelo (2.1)-(2.10) no se podría descomponer en submodelos de redes independientes tan fácilmente. Otra peculiaridad de los modelos no lineales con los que se trabaja, es que en la función objetivo aparecen valores absolutos, con lo cual dicha función no va a ser diferenciable. Por tanto, en la resolución directa de los mismos no se puede aplicar algunos de los métodos de gradiente reducido, de uso más frecuente. Se verá en el capítulo 3 una alternativa para los mismos.

2.3 Descomposición de Benders

En este epígrafe se describe un procedimiento basado en la optimización global del modelo bajo la formulación compacta para el caso lineal, en el que se personaliza la descomposición de Benders. (véase Benders 1962 [4]). Dicha descomposición consiste en separar el modelo en dos problemas lineales, uno con un conjunto de restricciones generales, el "*Problema Maestro*" y otro con un conjunto de restricciones, que tienen una estructura específica en forma de escalera, el "*Problema Auxiliar*". A partir de ellos, la idea principal del procedimiento se basa en el flujo de información que circula de un problema a otro y que nos conduce a alcanzar el óptimo. El problema maestro le proporciona un nuevo conjunto de coeficientes de costo al problema auxiliar, y recibe una nueva fila del conjunto de restricciones basada en tales coeficientes. Esta separación facilita el aspecto dimensional, ya que no sólo nos conduce a dos modelos bastantes más pequeños, sino que además el problema auxiliar,

debido a su estructura en forma de escalera, se puede descomponer por etapas en submodelos independientes con estructura de red.

Obsérvese que la formulación compacta en el caso lineal tiene la propiedad de que fijados los valores de las variables Y^{12} e Y_i^{23} , se pueden obtener los valores óptimos de las otras variables (Y_0 , Y_i , Y_{ij}), mediante la resolución de un conjunto de subproblemas independientes. Más adelante se verá como estos subproblemas independientes, preservan la estructura de red del problema original determinístico. Esta aproximación permite abordar problemas cuyo número de escenarios y etapas es muy superior a las dimensiones permitidas por la optimización clásica del modelo global compacto.

Para desarrollar un esquema que permita la descomposición del modelo (2.2)-(2.10) con función objetivo (2.11) utilizando determinados valores para las variables de enganche, se considera la siguiente formulación equivalente a dicho modelo

$$\min h_0^{12}Y^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_{i0}^{23}Y_i^{23} + \varphi(Y^{12}, Y_i^{23}) \quad (2.15)$$

$$\text{s.a} \quad 0 \leq Y^{12} \leq u^{12} \quad (2.16)$$

$$0 \leq Y_i^{23} \leq u^{23} \quad \forall i \quad (2.17)$$

donde se han aislado las variables enganche, tal que el submodelo de las restantes variables se recoge en la función $\varphi(Y^{12}, Y_i^{23})$. Esta función se expresa de la forma siguiente:

$$\varphi(Y^{12}, Y_i^{23}) = \min h_0Y_0 + \sum_{i=1,2,3} h_iY_i + \sum_{i,j=1,2,3} h^jY_{ij} \quad (2.18)$$

$$\text{s.a} \quad D_0Y_0 = b_0 - D_0^{12}Y^{12} \quad (2.19)$$

$$D_iY_i = b_i - D_i^{12}Y^{12} - D_{i0}^{23}Y_i^{23} \quad \forall i \quad (2.20)$$

$$D^jY_{ij} = b^j - D_{ij}^{23}Y_i^{23} \quad \forall i, j \quad (2.21)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (2.22)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (2.23)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (2.24)$$

Como se ha mencionado anteriormente, una vez fijados ciertos valores para las variables enganche Y^{12} e Y_i^{23} , el problema (2.2)-(2.10) con función objetivo (2.11) se convierte en la unión de un subconjunto de submodelos de redes independientes en las variables Y_0 , Y_i , e Y_{ij} , tal y como se puede observar en (2.18)-(2.24).

Continuando con el proceso, se expresa la función $\varphi(Y^{12}, Y_i^{23})$ en términos del dual de (2.18)-(2.24).

$$\begin{aligned} \varphi(Y^{12}, Y_i^{23}) &= \\ &= \max_{\lambda, \beta} (b_0 - D_0^{12}Y^{12})\lambda_0 + \sum_{i=1,2,3} (b_i - D_i^{12}Y^{12} - D_{i0}^{23}Y_i^{23})\lambda_i + \\ &+ \sum_{i,j=1,2,3} (b^j - D_{ij}^{23}Y_i^{23})\lambda_{ij} + u_0\beta_0 + \sum_{i=1,2,3} u_i\beta_i + \sum_{i,j=1,2,3} u_{ij}\beta_{ij} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{s.a } D_0^t\lambda_0 + \beta_0 \leq h_0 \quad (2.26)$$

$$D_i^t\lambda_i + \beta_i \leq h_i \quad \forall i \quad (2.27)$$

$$D^{jt}\lambda_{ij} + \beta_{ij} \leq h^j \quad \forall i, j \quad (2.28)$$

$$\beta_0, \quad \beta_i, \quad \beta_{ij} \geq 0 \quad (2.29)$$

En el problema (2.25)-(2.29) las variables que denotamos por el vector $\lambda = (\lambda_0, \lambda_i, \lambda_{ij})$, no tienen restricción de signo dado que cada variable λ se corresponde con una condición de igualdad en el problema primal (2.18)-(2.24), situación que no se da con el vector de variables $\beta = (\beta_0, \beta_i, \beta_{ij})$, donde todas son positivas.

Se asume como condición inicial, que el problema (2.25)-(2.29) tiene un conjunto de soluciones factibles no vacío y acotado. Por consiguiente, el valor óptimo del mismo, independientemente del valor fijado para las variable enganche Y^{12} e Y_i^{23} se obtiene para uno de los puntos extremos de dicho problema. Específicamente, sea $(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23})$ un punto arbitrario dado para las variables enganche, y denotemos por $(\bar{\lambda}^k, \bar{\beta}^k)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$, los puntos extremos de la región factible del modelo (2.25)-(2.29), entonces una expresión alternativa para $\varphi(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23})$ es:

$$\varphi(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23}) = \min Z \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad Z \geq & (b_0 - D_0^{12}\bar{Y}^{12})\bar{\lambda}_0^k + \sum_{i=1,2,3} (b_i - D_i^{12}\bar{Y}^{12} - D_{i0}^{23}\bar{Y}_i^{23})\bar{\lambda}_i^k + \\ & + \sum_{i,j=1,2,3} (b^j - D_{ij}^{23}\bar{Y}_i^{23})\bar{\lambda}_{ij}^k + u_0\bar{\beta}_0^k + \sum_{i=1,2,3} u_i\bar{\beta}_i^k + \sum_{i,j=1,2,3} u_{ij}\bar{\beta}_{ij}^k \quad \forall k \end{aligned} \quad (2.31)$$

Podemos utilizar esta caracterización de la función objetivo $\varphi(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23})$ en el problema (2.15)-(2.17), para obtener el siguiente problema equivalente.

$$\rho = \min h_0^{12}Y^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_{i0}^{23}Y_i^{23} + Z \quad (2.32)$$

$$\text{s.a} \quad \left(D_0^{12}\bar{\lambda}_0^k + \sum_{i=1,2,3} D_i^{12}\bar{\lambda}_i^k \right) Y^{12} + \left(\sum_{i=1,2,3} D_{i0}^{23}\bar{\lambda}_i^k + \sum_{i=1,2,3} D_{ij}^{23}\bar{\lambda}_{ij}^k \right) Y_i^{23} + Z \geq \varepsilon_k \quad \forall k \quad (2.33)$$

$$0 \leq Y^{12} \leq u^{12} \quad (2.34)$$

$$0 \leq Y_i^{23} \leq u^{23} \quad \forall i \quad (2.35)$$

donde

$$\varepsilon_k = b_0\bar{\lambda}_0^k + u_0\bar{\beta}_0^k + \sum_{i=1,2,3} (b_i\bar{\lambda}_i^k + u_i\bar{\beta}_i^k) + \sum_{i,j=1,2,3} (b^j\bar{\lambda}_{ij}^k + u_{ij}\bar{\beta}_{ij}^k) \quad \forall k \quad (2.36)$$

Es preciso notar que el número de puntos extremos en el problema (2.25)-(2.29), y por tanto, el número de condiciones en el problema (2.32)-(2.36) puede ser muy elevado. Esto hace que no sea viable la obtención de todos los puntos extremos de (2.25)-(2.29), a pesar de su estructura en submodelos separables que les proporciona la estructura tipo red de que dispone, y además, aunque fuese posible calcularlos, la resolución del problema (2.32)-(2.36) sería imposible debido a sus grandes dimensiones.

En su lugar hemos diseñado un procedimiento que de forma iterativa obtiene los puntos extremos de (2.25)-(2.29), que se necesitan para la obtención del valor óptimo de (2.32)-(2.36).

Llamemos a (2.32)-(2.36) "*Problema Maestro*" y a (2.25)-(2.29) "*Problema Auxiliar*". En consecuencia, denominaremos "*Problema Maestro Relajado*" al siguiente problema (2.37)-(2.41), donde r representa un subconjunto de puntos extremos del problema auxiliar (2.25)-(2.29).

$$\hat{\rho} = \min h_0^{12} Y^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_{i0}^{23} Y_i^{23} + \theta \quad (2.37)$$

$$\text{s.a } \left(D_0^{12} \bar{\lambda}_0 + \sum_{i=1,2,3} D_i^{12} \bar{\lambda}_i \right) Y^{12} + \left(\sum_{i=1,2,3} D_{i0}^{23} \bar{\lambda}_i + \sum_{i=1,2,3} D_{ij}^{23} \bar{\lambda}_{ij} \right) Y_i^{23} + \theta \geq \varepsilon_k$$

con $k = 1, 2, 3, \dots, r$ (2.38)

$$0 \leq Y^{12} \leq u^{12} \quad (2.39)$$

$$0 \leq Y_i^{23} \leq u^{23} \quad \forall i \quad (2.40)$$

donde

$$\varepsilon_k = b_0 \bar{\lambda}_0 + u_0 \bar{\beta}_0 + \sum_{i=1,2,3} (b_i \bar{\lambda}_i + u_i \bar{\beta}_i) + \sum_{i,j=1,2,3} (b^j \bar{\lambda}_{ij} + u_{ij} \bar{\beta}_{ij}) \quad k = 1, \dots, r \quad (2.41)$$

Veamos entonces el siguiente algoritmo para resolver el problema (2.15)-(2.17), según la descomposición de Benders anteriormente indicada.

Algoritmo

Paso 1: Asignar unos valores iniciales a las variables enganche Y^{12} e Y_i^{23} y hacer $k = 1$.

Paso 2: Con los actuales valores de las variables enganche, sean estos \bar{Y}^{12} e \bar{Y}_i^{23} , se resuelve el problema auxiliar (2.25)-(2.29). Como resultado de esto, se obtiene el correspondiente valor de las variables duales, el punto extremo $(\bar{\lambda}^k, \bar{\beta}^k)$.

Paso 3: Se añade una condición de la forma (2.38) para $\bar{\lambda}^k$ y $\bar{\beta}^k$, al problema maestro relajado (2.37)-(2.41). Se resuelve dicho problema, obteniéndose el valor óptimo de θ , sea éste $\bar{\theta}$.

Paso 4: Si $\bar{\theta} = \varphi(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23})$, parar. Se ha encontrado la solución óptima, siendo ésta la formada por:

- las variables enganche Y^{12} e Y^{23} cuyo valor es el obtenido en la última ejecución del **Paso 3**, \bar{Y}^{12} e \bar{Y}^{23} , y
- las variables de cada etapa Y_0 , Y_i , e Y_{ij} , que se obtienen como producto de la solución óptima del problema dual (2.25)-(2.29), ya que son las variables duales de las condiciones de ese problema, y obviamente constituyen la solución del correspondiente primal (2.18)-(2.24).

Paso 5: En caso de que $\bar{\theta} \neq \varphi(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23})$, se hace $k = k + 1$, y se vuelve al **Paso 2**, a resolver el problema auxiliar con los nuevos valores de las variables enganche \bar{Y}^{12} e \bar{Y}_i^{23} , obtenidos en la solución del último problema maestro relajado.

Nótese que los valores de las variables enganche que se utilizan en la función $\varphi(\bar{Y}^{12}, \bar{Y}_i^{23})$, al compararla con respecto a $\bar{\theta}$ en el paso 4, son los valores óptimos del problema (2.37)-(2.41) ejecutado en la iteración inmediatamente anterior a la actual. Por otro lado, se puede observar que el valor óptimo $\hat{\rho}$ del problema (2.37)-(2.41), es una cota inferior del valor óptimo ρ del problema (2.32)-(2.35). Mediante el algoritmo anterior se consiguen cotas inferiores $\hat{\rho}$, cada vez más proximas al correspondiente valor óptimo ρ del problema (2.32)-(2.35).

2.4 Análisis de los Métodos de Punto Interior

Existen muchos métodos basados en puntos interiores que se pueden aplicar para resolver el problema (2.1)-(2.10) en el caso lineal. Entre ellos cabe citar el método proyectivo de Karmakar, los métodos logarítmicos de barrera y sus variantes, el método de predicción y corrección de Mehrotra, etc ... Sea la siguiente introducción a los métodos más característicos.

2.4.1 El Método Proyectivo de Karmakar

El modelo de programación lineal considerado por Karmakar (véase Karmakar (1984) [36]) es el siguiente:

$$\min \quad c^t x \quad (2.42)$$

$$\text{s.a } Ax = 0 \quad (2.43)$$

$$e^t x = 1 \quad (2.44)$$

$$x \geq 0 \quad (2.45)$$

donde

A es una matriz de orden $m \times n$

x y c son vectores de orden n y

e es el vector de orden n , todo de unos.

Karmakar asume que el valor óptimo del problema (2.42)-(2.45) es $c^t x^* = 0$, siendo x^* la solución del mismo. Es decir, que dicho óptimo se alcanza en el cero. Por otro lado, fijémonos en que el modelo (2.42)-(2.45) no presenta la forma estándar de los problemas de programación lineal como ocurre en (2.55)-(2.57), pero Karmakar demostró que cualquier problema de programación lineal se puede expresar en la forma anterior (2.42)-(2.45).

El algoritmo de Karmakar comienza con una estimación inicial x^0 de la solución de (2.42)-(2.45), tal que $Ax^0 = 0$, $e^t x^0 = 1$, y $x^0 > 0$, y se mueve a un nuevo estimador x^1 mediante el uso de transformaciones proyectivas.

Sea

$$T(x) = \frac{D^{-1}x}{e^t D^{-1}x} \quad (2.46)$$

la transformación proyectiva que desplaza x^0 al punto $\frac{1}{n}e$, siendo D una matriz diagonal definida como sigue:

$$d_{jj} = x_j^0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se considera así mismo la matriz B definida por

$$B = \begin{bmatrix} AD \\ e^t \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

y el vector δ de desplazamiento desde $\frac{1}{n}e$ hacia un nuevo punto ξ , que se expresa como sigue:

$$\delta = \gamma[I - B^t(BB^t)^{-1}B]Dc \quad (2.48)$$

donde γ es un escalar. Por tanto, el nuevo punto factible ξ será

$$\xi = \frac{1}{n}e + \delta \quad (2.49)$$

A partir de éste se obtiene el nuevo estimador x^1 , mediante la inversa de la transformación proyectiva, es decir,

$$x^1 = T^{-1}(\xi) = \frac{D\xi}{e^t D\xi} \quad (2.50)$$

Karmakar demostró que para una elección apropiada de γ en (2.48), el algoritmo obtiene el punto óptimo x^* en $\mathcal{O}(nL)$ iteraciones, siendo L el número de bits necesario para representar las entradas de A y c .

Como ya se indicó, el algoritmo de Karmakar parte de la suposición de que $c^t x^* = 0$. Una forma de conseguir esta suposición consiste en usar una modificación de la función objetivo de la que se parte, como ocurre en Todd y Burrell (1986) [64], esto es, si c^* es el valor óptimo de la función objetivo se toma en su lugar

$$\begin{aligned} \hat{c} &= c^t x - c^* e^t x \\ &= (c - c^* e)^t x \end{aligned} \quad (2.51)$$

la cual alcanza el valor óptimo en 0, puesto que $e^t x = 1$. Todd y Burrell se apoyaron en la teoría de la dualidad para determinar una sucesión convergente de bajoestimadores para el valor óptimo c^* .

Las dos mayores dificultades para implementar el método original de Karmakar es por un lado, la necesidad de convertir un modelo de programación lineal en la forma estándar en uno en la forma requerida por Karmakar, lo que supone una pérdida de flexibilidad, y por otro, el tener que estimar c^* en cada iteración. Además, en Powell (1991) [55] se demostró que el número de iteraciones requerido por el algoritmo de Karmakar suele ser significativamente mayor que el número necesario por los métodos logarítmicos de barrera, que se presentan a continuación.

2.4.2 Métodos Logarítmicos de Barrera

Los métodos logarítmicos de barrera fueron introducidos por Frish (véase Frish (1955) [25]) y desarrollados por Fiacco y McCormick (véase Fiacco y McCormick (1968) [23]) entre otros. Inicialmente su atención se centraba en problemas no lineales como el que sigue

$$\min f(x) \quad (2.52)$$

$$\text{s.a } g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.53)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, y transformaban el modelo (2.52)-(2.53) en un conjunto de problemas no restringidos de la forma

$$\min f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^m \ln g_i(x), \quad (2.54)$$

donde μ_k es un parámetro escalar de barrera, que verifica que $\mu_k > 0$, y además, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$. El algoritmo general para resolver (2.52)-(2.53), siguiendo los métodos logarítmicos de barrera, es el siguiente:

Algoritmo

Paso 1: Elegir $\mu_0 > 0$, y x^0 , tal que $g_i(x^0) > 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Paso 2: Sea $\tilde{x}^k = \min \left(f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^m \ln g_i(x) \right)$.

Paso 3: Si $\mu_k < \epsilon$, entonces parar. En otro caso, tomar $\mu_{k+1} < \mu_k$. Asignar $x^{k+1} = \tilde{x}^k$, especificar $k = k + 1$, e ir al **Paso 2**.

Fiacco y McCormick demostraron que cuando $f(x)$ y $g_i(x)$ cumplen ciertas condiciones generales, el algoritmo converge a la solución de (2.52)-(2.53), y el $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k / g_i(\tilde{x}^k) = \lambda_i$, donde λ_i es el multiplicador de Lagrange óptimo asociado a $g_i(x) \geq 0$ para $1 \leq i \leq m$.

Método Logarítmico Primal de Barrera para Programación Lineal

En este caso, se parte del modelo de programación lineal en la forma estándar

$$\min \quad c^t x \quad (2.55)$$

$$\text{s.a } Ax = b, \quad (2.56)$$

$$x \geq 0, \quad (2.57)$$

y se aplica la siguiente transformación logarítmica:

$$\min \quad c^t x - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j \quad (2.58)$$

$$\text{s.a } Ax = b \quad (2.59)$$

A continuación se considera el correspondiente lagrangiano de (2.58)-(2.59), que es como sigue

$$L(x, y, \mu) = c^t x - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j - y^t (Ax - b), \quad (2.60)$$

y se calculan las condiciones de primer orden para el mismo modelo (2.58)-(2.59),

$$\nabla_x L = c - \mu X^{-1} e - A^t y = 0, \quad (2.61)$$

$$\nabla_y L = -Ax + b = 0, \quad (2.62)$$

donde X es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son las variables x_j para $1 \leq j \leq n$, a la cual se denota por X_k cuando ha sido evaluada en la k -ésima iteración.

Bajo el supuesto de que existe un punto factible estrictamente interior x^k , es decir, tal que $x^k > 0$ y $Ax^k = b$, el método de Newton se aplica a las condiciones (2.61)-(2.62) para determinar un estimador mejor de la solución de (2.55)-(2.57). De esta forma se obtiene la siguiente dirección de búsqueda

$$\Delta x^k = - \frac{1}{\mu_k} X_k P X_k c + X_k P e, \quad (2.63)$$

donde

$$P = (I - X_k A^T (A X_k^2 A^T)^{-1} A X_k), \quad (2.64)$$

y por consiguiente, el nuevo estimador x^{k+1} vendrá dado por

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \Delta x^k \quad (2.65)$$

donde α_k es una amplitud de paso apropiada. Lo siguiente es comprobar si el parámetro de barrera μ_k es el adecuado, y sino, se reduce a $\mu_{k+1} = \rho\mu_k$ con $0 < \rho < 1$, volviendo a repetir el proceso con el nuevo μ_{k+1} . Es preciso indicar que éste método tiene la ventaja sobre el algoritmo inicial de Fiacco-McCormick, en que sólo realiza un paso de Newton para cada valor de μ_k .

Por otro lado, en Gill y otros (1986) [27] se muestra la relación entre el método anterior y el método de Karmakar, teniendo en cuenta las direcciones definidas en (2.63) y (2.48). Dichos autores demostraron que si se aplica el algoritmo con la dirección de búsqueda definida en (2.63)-(2.64) al problema en la forma de Karmakar (2.42)-(2.45), entonces en cada iteración existe un valor de μ_k , para el cual las direcciones de búsqueda (2.63) y (2.48) son idénticas. En otro sentido, Gay indicó la forma en la que se puede aplicar el algoritmo de Karmakar a los problemas en la forma estándar (2.55)-(2.57) (véase Gay (1987) [26]). Además, con la modificación de la función objetivo mediante bajoestimadores propuesta por Todd-Burrell, se prueba que el método de Karmakar es un caso especial de los métodos generales logarítmicos de barrera. Véase Gonzaga (1989) [29] y Shano y Bagchi (1990) [62].

Método Logarítmico Dual de Barrera

Dado el modelo de programación lineal en la forma estándar (2.55)-(2.57), su dual se expresa de la siguiente forma

$$\max \quad b^T y \quad (2.66)$$

$$\text{s.a } A^T y \leq c \quad (2.67)$$

Añadiendo las variables de holgura z_j con $1 \leq j \leq n$ al modelo (2.66)-(2.67), se obtiene la forma dual equivalente.

$$\max \quad b^T y \quad (2.68)$$

$$\text{s.a } A^T y + z = c, \quad (2.69)$$

$$z \geq 0 \quad (2.70)$$

Renegar propuso inicialmente aplicar el método de los centros de Huard al modelo (2.66)-(2.67), lo que dió lugar a un algoritmo con una complejidad $\mathcal{O}(\sqrt{n}L)$ (véase Renegar (1988) [56]). Sin embargo, más tarde, se demostró que este algoritmo también era un caso especial de los métodos logarítmicos de barrera (véase Gonzaga (1992) [30]). Esto es, aplicando el método logarítmico primal de barrera a (2.66)-(2.67), resulta

$$\max b^T y + \mu \sum_{j=1}^n \ln(c_j - a_j^T y), \quad (2.71)$$

donde a_j es la columna j -ésima de la matriz A , y c_j el elemento j -ésimo del vector de costos. Entonces, la condición de primer orden es

$$b - \mu AZ^{-1}e = 0, \quad (2.72)$$

donde Z es la matriz diagonal de orden $n \times n$, cuyos elementos son $z_j = c_j - a_j^T y$. Aplicando el método de Newton se obtiene la siguiente dirección

$$\Delta y = \frac{1}{\mu} (AZ^{-2}A^T)^{-1}b - (AZ^{-2}A^T)^{-1}AZ^{-1}e, \quad (2.73)$$

donde el primer término de (2.73) representa una dirección hacia la optimalidad, y el segundo es una dirección para centrar la búsqueda en el espacio dual.

Independientemente de los métodos logarítmicos de barrera, Adler y otros introdujeron una variante dual afín que utiliza la siguiente dirección de búsqueda, (véase Adler y otros (1989) [1]).

$$\Delta y = (AZ^{-2}A^T)^{-1}b, \quad (2.74)$$

En cualquier caso, el nuevo estimador de la solución óptima de (2.66)-(2.67) será

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_k \Delta y^k \quad (2.75)$$

donde α_k es la amplitud de paso y Δy^k es la dirección de búsqueda (2.73) ó (2.74), según sea el método aplicado, para la k -ésima iteración.

Método Logarítmico Primal-Dual de Barrera

Los desarrollos teóricos de los métodos de punto interior primal-dual se recogen en Megiddo (1989) [47] entre otros, y originalmente fueron desarrollados a partir de un algoritmo de Kojima y otros (1989) [40]. El algoritmo surge a partir de las condiciones de primer orden (2.61)-(2.62) del problema primal (2.55)-(2.57), o alternativamente, de aplicar el método logarítmico de barrera al problema dual (2.68)-(2.70), al cual se han añadido las variables de holgura. De esta forma el problema que se plantea es el siguiente:

$$\max b^T y + \mu \sum_{j=1}^n \ln z_j \quad (2.76)$$

$$\text{s.a. } A^T y + z = c, \quad (2.77)$$

y su correspondiente lagrangiano

$$L(x, y, \mu) = b^T y + \mu \sum_{j=1}^n \ln z_j - x^T (A^T y + z - c). \quad (2.78)$$

Las condiciones de primer orden para (2.78) son

$$XZe = \mu e, \quad (2.79)$$

$$Ax = b, \quad (2.80)$$

$$A^T y + z = c, \quad (2.81)$$

donde X y Z son las matrices diagonales definidas anteriormente, y e es el vector unitario de orden n . Las condiciones (2.80) y (2.81) son las de optimalidad comunes en programación lineal para la factibilidad primal y dual, mientras que (2.79) es la condición de complementariedad en el límite cuando $\mu \rightarrow 0$.

Al igual que anteriormente, el método de Newton se puede aplicar a las condiciones (2.79), (2.80), y (2.81), resultando

$$\Delta y = -(AXZ^{-1}A^T)^{-1}AZ^{-1}\nu(\mu), \quad (2.82)$$

$$\Delta z = -A^T \Delta y, \quad (2.83)$$

$$\Delta x = Z^{-1}\nu(\mu) - XZ^{-1}\Delta z, \quad (2.84)$$

donde $\nu(\mu) = \mu e - XZe$.

El método primal-dual presenta dos ventajas. La primera es que dado "x" un punto factible primal, "y" un punto factible dual, y siendo "z" el vector de holgura en (2.81) se tiene que

$$c^T x - b^T y = x^T z, \quad (2.85)$$

Por tanto, dicha relación (2.85) nos proporciona una buena medida de la aproximación de la solución propuesta a la solución óptima. Una segunda ventaja del método primal-dual es que permite que las amplitudes de los pasos en los espacios primal y dual sean independientes, es decir,

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_P^k \Delta x^k, \quad (2.86)$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_D^k \Delta y^k, \quad (2.87)$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_D^k \Delta z^k, \quad (2.88)$$

La implementación de este algoritmo llevada a cabo por McShane y otros, ha demostrado que el mismo es muy eficiente en la práctica. Véase McShane y otros (1989) [46].

Comparando los métodos primal, dual y primal-dual, es preciso notar que todos consideran una matriz de la forma ADA^T , donde D es una matriz diagonal. La forma de D varía de un método a otro, pero el trabajo computacional no. Dicha matriz es la misma que la utilizada en el método de Karmakar. En la sección 2.4.4 veremos la influencia de la forma de esta matriz ADA^T , en la resolución del problema (2.1)-(2.10) para el caso lineal.

2.4.3 El Método de Predicción-Corrección de Mehrotra

En Lustig y otros (1991) [42] se presenta una variante del algoritmo primal-dual, pero para problemas con variables acotadas. Este sigue el mismo esquema que los métodos recogidos en los apartados anteriores. Por otra parte, Mehrotra propone un método de predicción-corrección que se obtiene directamente de las condiciones de primer orden (2.79), (2.80), y (2.81) (véase Mehrotra (1992) [48]). Sustituyendo $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, y $z + \Delta z$ en (2.79), (2.80), y (2.81), respectivamente, se espera entonces que los nuevos estimadores satisfagan

las siguientes relaciones

$$(X + \Delta X)(Z + \Delta Z)e = \mu e, \quad (2.89)$$

$$A(x + \Delta x) = b, \quad (2.90)$$

$$A^T(y + \Delta y) + z + \Delta z = c. \quad (2.91)$$

Operando el sistema anterior obtenemos la siguiente expresión

$$X\Delta z + Z\Delta x = \mu e - XZe - \Delta X\Delta Ze, \quad (2.92)$$

$$A\Delta x = b - Ax, \quad (2.93)$$

$$A^T\Delta y + \Delta z = c - A^Ty - z, \quad (2.94)$$

donde ΔX y ΔZ son matrices diagonales de orden $n \times n$, cuyos elementos son Δx_j y Δz_j , respectivamente. Mehrotra propone en primer lugar resolver el sistema afín

$$X\Delta\hat{z} + Z\Delta\hat{x} = -XZe, \quad (2.95)$$

$$A\Delta\hat{x} = b - Ax, \quad (2.96)$$

$$A^T\Delta\hat{y} + \Delta\hat{z} = c - A^Ty - z, \quad (2.97)$$

para luego sustituir los valores de los vectores $\Delta\hat{x}$ y $\Delta\hat{z}$ obtenidos de dicho sistema (2.95)-(2.97), en el término $\Delta X\Delta Ze$ del vector del lado derecho de (2.92)-(2.94). Además sugiere comprobar la reducción en la complementariedad $(x + \alpha_P\Delta\hat{x})(z + \alpha_D\Delta\hat{z})$, donde α_P y α_D se eligen de forma que $x \geq 0$ y $z \geq 0$. De esta forma el estimador de Mehrotra es como sigue

$$\mu = \left(\frac{\hat{g}}{x^T z} \right)^2 \left(\frac{\hat{g}}{n} \right). \quad (2.98)$$

donde

$$\hat{g} = (x + \alpha_P\Delta\hat{x})^T(z + \alpha_D\Delta\hat{z}), \quad (2.99)$$

Dicho valor de μ será pequeño cuando la dirección afín produzca un gran decremento en complementariedad (véanse Lustig y otros (1992) [44] y [45]).

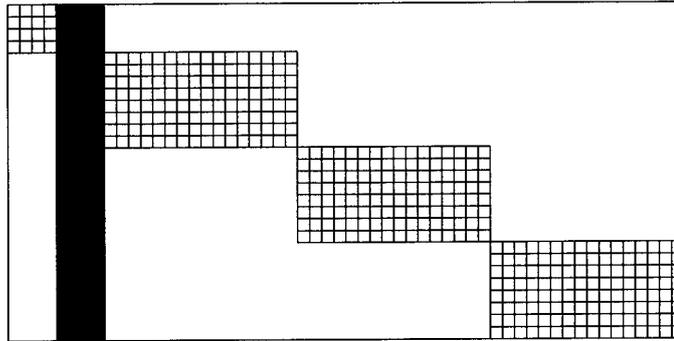


Figura 2.4: Matriz A de la Formulación Compacta

2.4.4 Métodos de Punto Interior aplicados a la Formulación Compacta

Al aplicar cualquiera de los métodos de punto interior recogidos en los apartados anteriores, al modelo (2.1)-(2.10) en el caso lineal, existe el inconveniente de que algunas de las columnas de la matriz de condiciones A son relativamente densas, lo que dificulta la aplicación de dichos métodos con la Formulación Compacta. A título ilustrativo, veamos donde radica el problema. Considérese el problema (2.1)-(2.10) en el caso lineal, cuando se expresa en la forma estándar (2.55)-(2.57), y su correspondiente dual (2.68)-(2.70).

En cada iteración de cualquiera de los algoritmos logarítmicos de barrera cuando se resuelve el modelo (2.55)-(2.57), es preciso resolver el sistema

$$(ADA^t)d = r \quad (2.100)$$

para obtener el valor de d . Tal y como se ha indicado en la sección anterior, D es una matriz diagonal positiva, cuya expresión varía dependiendo del método logarítmico aplicado. Es decir,

$$D = \left\{ \begin{array}{ll} X^2 & \text{Método Primal} \\ Z^{-2} & \text{Método Dual Afin} \\ XZ^{-1} & \text{Método Primal-Dual} \end{array} \right\},$$

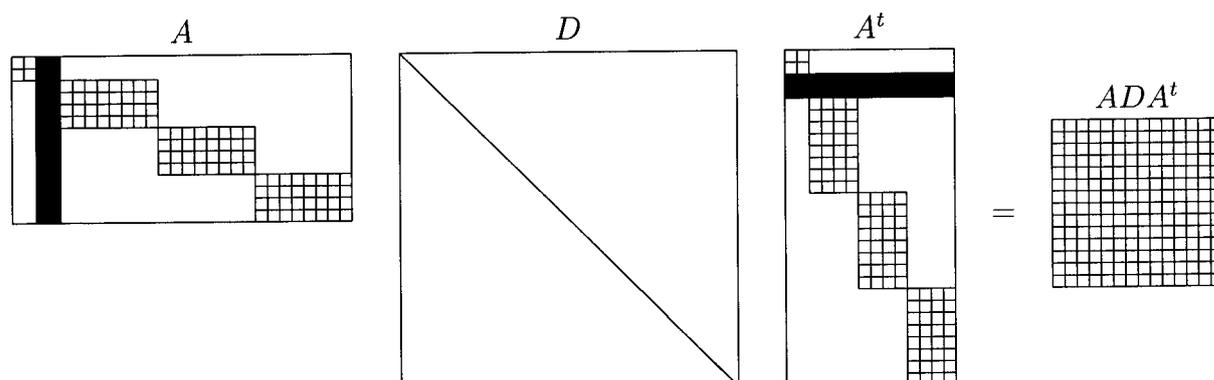


Figura 2.5: Representación de (ADA^t)

En cuanto a la matriz A se refiere, si se observa la Figura 2.4 correspondiente a la Formulación Compacta se puede ver que la densidad de sus columnas es bastante considerable, lo que supone que la matriz resultante (ADA^t) sea muy densa (véase Figura 2.5), y por tanto, la resolución del sistema (2.100) requiera mucho esfuerzo computacional. De aquí, el hecho de que los métodos de Punto Interior no sean tan efectivos en su aplicación a la formulación compacta del modelo en comparación con la metodología del Simplex (véase Lustig y otros (1991) [43]). Sin embargo, la metodología de Puntos Interiores es mucho más eficiente en su aplicación a una formulación equivalente del modelo, denominada Formulación Extendida (véase el capítulo 3), donde el tiempo necesario para la resolución del problema es menor que el requerido por el método del Simplex.

Capítulo 3

Formulación extendida del modelo

Capítulo 3

Formulación Extendida del Modelo

3.1 Representación

En este capítulo se recoge una formulación alternativa del modelo de Recurso Total, cuya región factible también dispone de una estructura en forma de cuasi-escalera, aunque algo más amplia que la tratada en el capítulo anterior. A pesar de la extensión de la nueva matriz de condiciones la densidad de sus columnas es menor que la de la Formulación Compacta. En esta otra formulación se desdoblan las variables enganche entre las etapas según las distintas perspectivas, y se imponen las condiciones de no anticipatividad. Esto es, se añaden las restricciones que fuerzan a estas variables a tomar el mismo valor. Por este motivo, a esta aproximación se la denomina "*Formulación con Restricciones Enganche*" o "*Formulación Extendida*" y como ya se ha indicado, se caracteriza por tener una representación con variables divididas.

Retomemos el caso particular con 3 etapas y 9 escenarios planteado en el capítulo 1. Teniendo en cuenta las características del mismo, se muestra en la Figura 3.1 la Formulación Extendida, en la cual las variables enganche Y^{12} e Y_i^{23} se han dividido según las distintas perspectivas de cada etapa. A diferencia de la Formulación Compacta que utiliza variables enganche entre las etapas (véase Figura 2.1), en esta otra representación se usan restricciones enganche entre las variables divididas, para unir bloques de restricciones de etapas consecutivas (véase Figura 3.1).

Para mayor claridad se utiliza la siguiente notación de las variables.

Variables Y en (2.1)-(2.10)	Variables Y en (3.2)-(3.13)
Y_0 Y^{12} Y_i Y_i^{23} Y_{ij}	Y_0 Y_0^{12}, Y_i^{12} Y_i Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} Y_{ij}

con $i, j = 1, 2, 3$. Según esta notación las variables enganche Y^{12} e Y_i^{23} se dividen teniendo en cuenta los escenarios, y más concretamente las perspectivas, en

$$Y_0^{12} = Y_i^{12}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{e} \quad Y_{i0}^{23} = Y_{ij}^{23} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

respectivamente. Por tanto, las igualdades (3.1) son las condiciones de no anticipatividad o implementabilidad que se deben agregar al modelo. En consecuencia, la Formulación con Restricciones Enganche o Formulación Extendida del modelo de Recurso Total para ambos casos, es como sigue:

Modelo de Recurso Total
con Formulación General

Modelo de Recurso Total
con Inmunización de Escenarios

$$Z_1 = \min \sum_{s \in S} w^s (c^s)^t Y^s \quad Z_2 = \min \sum_{s \in S} w^s \|(c^s)^t Y^s - \hat{Z}^s(\ast)\|^d \quad (3.2)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.3)$$

$$Y_0^{12} - Y_i^{12} = 0 \quad \forall i \quad (3.4)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.5)$$

$$Y_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23} = 0 \quad \forall i, j \quad (3.6)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.7)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.8)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.9)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.10)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.11)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.12)$$

donde

$$Y^s \equiv (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij}) \quad (3.13)$$

es el nuevo vector de variables, para $s = 3(i-1) + j$, e $i, j = 1, 2, 3$, y las matrices de restricciones D son iguales a las de la Formulación Compacta (2.1)-(2.10).

La función objetivo (3.2) en el caso lineal (es decir, para Z_1 y para la aproximación lineal de Z_2 cuando se utiliza la norma euclídea), se puede separar por etapas de forma análoga a como se hizo en el capítulo 2, siendo entonces de la siguiente manera:

$$Z = \min h_0 Y_0 + h_0^{12} Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} (h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_{i0}^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij}, \quad (3.14)$$

3.2 Descomposición Lagrangiana Aumentada

3.2.1 Caso General

Las restricciones de no anticipatividad (3.4) y (3.6) constituyen el mayor obstáculo en la descomposición de la Formulación Extendida (3.2)-(3.13). Para solventar este problema se utiliza una aproximación, que consiste básicamente en la relajación de las restricciones de no anticipatividad, y penalización de la función objetivo mediante un término generalmente no lineal sobre tales restricciones. De esta manera, se eliminan dichas restricciones (3.4) y (3.6) de la región factible del modelo, y se supera parcialmente la dificultad de la descomposición. Por tanto, dada la Formulación Extendida (3.2)-(3.13), se dualiza las citadas restricciones enganche, siendo el modelo resultante:

- En el caso de la Formulación General

$$D_{P_1}(\rho) = \min \sum_{s \in S} w^s (c^s)^t Y^s + \rho^0 Y_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} \rho^i Y_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} \rho^{i0} Y_{i0}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} \rho^{ij} Y_{ij}^{23} + \xi(Y^s) \quad (3.15)$$

- En el caso de Inmunización de Escenarios

$$D_{P_2}(\rho) = \min \sum_{s \in S} w^s \|(c^s)^t Y^s - \hat{Z}^s(\cdot)\|^d + \rho^0 Y_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} \rho^i Y_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} \rho^{i0} Y_{i0}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} \rho^{ij} Y_{ij}^{23} + \xi(Y^s) \quad (3.16)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.17)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.18)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.19)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.20)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.21)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.22)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.23)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.24)$$

donde ρ^0 , ρ^i , ρ^{i0} , y ρ^{ij} son los vectores multiplicadores de Lagrange apropiados para las restricciones enganche $Y_0^{12} = Y_i^{12}$ e $Y_{i0}^{23} = Y_{ij}^{23}$, con $i, j = 1, 2, 3$, respectivamente. Por tanto, han de verificar la siguiente igualdad:

$$\rho^0 = \sum_{i=1,2,3} \rho^i \quad (3.25)$$

$$\rho^{i0} = \sum_{j=1,2,3} \rho^{ij} \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad (3.26)$$

Mientras que $\xi(Y^s)$ es un término de penalización sobre las restricciones relajadas, que se define como sigue:

$$\xi(Y^s) = \frac{p}{2} \left[\sum_{i=1,2,3} \|Y_0^{12} - Y_i^{12}\|^2 + \sum_{i,j=1,2,3} \|Y_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23}\|^2 \right] \quad (3.27)$$

siendo p un parámetro de penalidad positivo o nulo y $\| \cdot \|$ la norma euclídea L_2 . Esto es, se penaliza a aquellas soluciones que no verifican las condiciones de no anticipatividad. La tendencia es elegir un p positivo, en cuyo caso, las funciones (3.15) y (3.16) serían funciones Lagrangianas Aumentadas. No obstante, en aquellos casos en que el problema original sea de variables 0 – 1 existe una preferencia por tomar $p = 0$.

Por otro lado, como la función objetivo del modelo (3.15) es lineal se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_{P_1}(\rho) = \min h_0 Y_0 + (h_0^{12} + \rho^0) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \left[-\rho^i Y_i^{12} + h_i Y_i + (h_{i0}^{23} + \rho^{i0}) Y_{i0}^{23} \right] + \\ + \sum_{i,j=1,2,3} (-\rho^{ij} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij}) + \xi(Y^s) \end{aligned} \quad (3.28)$$

con igual significado para los ρ . En este caso, se intenta eliminar el término cuadrático de penalización propiciado por la función $\xi(Y^s)$, para evitar la no linealidad de la función objetivo. La forma más sencilla de hacerlo es aproximar la función $\xi(Y^s)$ mediante una función lineal como se muestra en la siguiente sección.

Volviendo a la aproximación Lagrangiana Aumentada (3.15)-(3.24), se tiene que dada cualquier elección de los multiplicadores de Lagrange ρ , el valor óptimo de dicha aproximación

(3.15)-(3.24), $D_{P_t}(\rho)$, proporciona una cota inferior del valor óptimo de la Formulación Extendida (3.2)-(3.13), Z_t . Para obtener la cota inferior más fina se tendría que resolver el problema de optimización denominado Lagrangiano dual, que se muestra a continuación

$$D_t^* = \max \left\{ D_{P_t}(\rho) / \rho \in R^L \text{ con } t = 1 \text{ ó } 2 \right\} \quad (3.29)$$

donde L es el número de condiciones enganche en (3.4) y (3.6), y

$$\rho = (\rho^i, \rho^{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3) \in R^L \quad (3.30)$$

es el vector de variables duales para las mismas condiciones.

Luego la relación existente entre los valores de las funciones objetivos en los distintos modelos es la siguiente:

$$D_{P_t}(\rho) \leq D_t^* \leq Z_t \quad \text{para } t = 1 \text{ ó } 2 \quad (3.31)$$

Por otro lado, si para alguna elección del vector de multiplicadores de Lagrange $\bar{\rho}$, la solución de la aproximación Lagrangiana Aumentada (3.15)-(3.24), \bar{Y}^s , verifica las restricciones de enganche (3.4) y (3.6), entonces \bar{Y}^s es la solución de la Formulación Extendida (3.2)-(3.13) y $\bar{\rho}$ es la solución del Lagrangiano dual (3.29). Como consecuencia, toda solución del modelo (3.15)-(3.24), para cualquier valor de ρ se puede utilizar como base inicial para resolver la Formulación Extendida (3.2)-(3.13). Así mismo, el proceso para resolver dicho modelo (3.2)-(3.13) va encaminado a maximizar la función dual (3.29), y para ello, se aplica iterativamente el siguiente algoritmo, basado en la técnica de optimización del subgradiente ya que su función objetivo no es diferenciable.

La base del algoritmo consiste en partir de un vector de multiplicadores inicial ρ_0 , y generar una secuencia de multiplicadores ρ_k , para $k = 1, 2, 3, \dots$, de forma que todo multiplicador en una iteración dada, se obtiene a partir del multiplicador de la iteración previa más un cierto desplazamiento en la dirección del gradiente, determinado por el tamaño de paso σ_k . La dirección del gradiente viene dada por la distancia entre las variables divididas, y el tamaño de paso elegido σ_k , tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_k = \frac{\lambda_k (CS - D_{P_i}(\rho_k))}{\left[\sum_{i=1,2,3} \|Y_0^{12}(k) - Y_i^{12}(k)\|^2 + \sum_{i,j=1,2,3} \|Y_{i0}^{23}(k) - Y_{ij}^{23}(k)\|^2 \right]} \quad (3.32)$$

donde

λ_k es un escalar elegido entre 0 y 2,

CS es una cota superior del óptimo de la Formulación Extendida (3.2)-(3.13), y

$D_{P_i}(\rho_k)$ es el óptimo de la aproximación Lagrangiana Aumentada construida con el vector de multiplicadores de Lagrange de la k-ésima iteración.

Antes de ver el algoritmo considérese la siguiente notación:

$\epsilon > 0$, un valor real lo suficientemente pequeño, es decir, próximo a cero,

ρ_k , el vector de multiplicadores de Lagrange correspondiente a la k-ésima iteración,

$Y^s(k) \equiv (Y_0(k), Y_0^{12}(k), Y_i^{12}(k), Y_i(k), Y_{i0}^{23}(k), Y_{ij}^{23}(k), Y_{ij}(k))$, el vector de variables solución de la aproximación Lagrangiana Aumentada para la k-ésima iteración,

$\sigma_k > 0$, el tamaño de paso de la k-ésima iteración,

$INFTOT(k)$, la suma total de la norma al cuadrado de las distancias entre los vectores de variables divididas para la solución de la aproximación Lagrangiana Aumentada $Y^s(k)$, correspondiente a la k-ésima iteración, es decir,

$$INFTOT(k) = \left[\sum_{i=1,2,3} \|Y_0^{12}(k) - Y_i^{12}(k)\|^2 + \sum_{i,j=1,2,3} \|Y_{i0}^{23}(k) - Y_{ij}^{23}(k)\|^2 \right] \quad (3.33)$$

$SVC(k)$, la suma de la norma al cuadrado de los vectores de variables divididas correspondientes a la solución de la aproximación Lagrangiana Aumentada $Y^s(k)$, de la k-ésima iteración, esto es,

$$SVC(k) = \|Y_0^{12}(k)\|^2 + \sum_{i=1,2,3} (\|Y_i^{12}(k)\|^2 + \|Y_{i0}^{23}(k)\|^2) + \sum_{i,j=1,2,3} \|Y_{ij}^{23}(k)\|^2 \quad (3.34)$$

Algoritmo

PASO 1: Sea $k = 0$ y fijemos $\rho_k = 0$.

PASO 2: Resolver $D_{P_t}(\rho_k)$ y asignar a

$$(Y_0(k+1), Y_0^{12}(k+1), Y_i^{12}(k+1), Y_i(k+1), Y_{i0}^{23}(k+1), Y_{ij}^{23}(k+1), Y_{ij}(k+1))$$

el vector de variables solución de $D_{P_t}(\rho_k)$.

PASO 3: Analizar si

$$(Y_0(k+1), Y_0^{12}(k+1), Y_i^{12}(k+1), Y_i(k+1), Y_{i0}^{23}(k+1), Y_{ij}^{23}(k+1), Y_{ij}(k+1))$$

verifica las restricciones enganche del problema (3.2)-(3.13). Esto es, se comprueba si

$$\frac{INFOTOT(k+1)}{SVC(k+1)} < \epsilon.$$

Si es así, se ha detectado el punto óptimo, parar. En caso contrario, continuar.

PASO 4: Hacer $\rho_{k+1}^i = \rho_k^i + \sigma_{k+1} [Y_0^{12}(k+1) - Y_i^{12}(k+1)]$ para $i = 1, 2, 3$, siendo σ_{k+1} el tamaño de paso definido en (3.32), y asignar $\rho_{k+1}^0 = \sum_{i=1,2,3} \rho_{k+1}^i$.

PASO 5: Hacer $\rho_{k+1}^{ij} = \rho_k^{ij} + \sigma_{k+1} [Y_{i0}^{23}(k+1) - Y_{ij}^{23}(k+1)]$ para $i, j = 1, 2, 3$, siendo σ_{k+1} el tamaño de paso definido en (3.32), y asignar $\rho_{k+1}^{i0} = \sum_{j=1,2,3} \rho_{k+1}^{ij}$.

PASO 6: Hacer $k = k + 1$ e ir al **PASO 2**.

Debemos indicar que si el modelo (3.2)-(3.13) tiene solución, el algoritmo anterior converge en un número finito de pasos (véase Bertsekas (1992) [5]). Por otra parte, el algoritmo propone resolver en cada iteración la aproximación Lagrangiana Aumentada (3.15)-(3.24), a la que debemos descomponer debido a sus grandes dimensiones. Tanto la función objetivo (3.15) como la (3.16) son no lineales debido a $\xi(Y^s)$. Sin embargo, el tratamiento dado a cada una es diferente, ya que en (3.15) sólo es no lineal $\xi(Y^s)$, y en (3.16) también lo es la propia función. Se distingue entre ambos casos:

→ En el primer caso, la principal dificultad para la descomposición del modelo (3.15) (3.17)-(3.24), es la no separabilidad de la función cuadrática de penalización $\xi(Y^s)$. La solución más inmediata para subsanar esto, es fijar $p = 0$ en (3.27). En dicho caso, la aproximación Lagrangiana (3.28) sería lineal y por tanto, separable en las distintas etapas. En consecuencia, se podría resolver a través de la optimización de varios submodelos de redes independientes de menores dimensiones, como son los siguientes:

$$P_0 = \min \left\{ h_0 Y_0 + (h_0^{12} + \rho^0) Y_0^{12} \ / \ D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \right. \\ \left. 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12} \right\} \quad (3.35)$$

$$P_i = \min \left\{ -\rho^i Y_i^{12} + h_i Y_i + (h_{i0}^{23} + \rho^{i0}) Y_{i0}^{23} \ / \ D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \right. \\ \left. 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23} \right\} \quad \forall i \quad (3.36)$$

$$P_{ij} = \min \left\{ -\rho^{ij} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij} \ / \ D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \right. \\ \left. 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \right\} \quad \forall i, j \quad (3.37)$$

Sin embargo, esta idea de fijar $p = 0$ no es la más adecuada, puesto que entontes se trataría de una aproximación Lagrangiana cuya convergencia es más lenta que la de la aproximación Lagrangiana Aumentada. En cualquier caso, esta alternativa no sería viable para los modelos no lineales (aquellos con función objetivo (3.16)), ya que se ven afectados también por la no separabilidad de la propia función objetivo.

→ El procedimiento alternativo que se propone, es el siguiente. Sea

$$\bar{Y}^s = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})$$

una solución factible inicial del modelo (3.15)-(3.24), es decir, una solución óptima de dicho modelo para un determinado ρ_k . Con esta solución se puede descomponer el modelo (3.15)-(3.24), tanto en el caso lineal como en el no lineal, según las distintas etapas en los siguientes submodelos (véanse Dembo (1987) [10]; Escudero (1986) [18]; Toint y Tuytens (1990) [65]; y Sartenaer (1991) [61]).

Modelo Lineal

$$P_0 \equiv \min h_0 Y_0 + (h_0^{12} + \rho^0) Y_0^{12} + \frac{p}{2} \left[\sum_{i=1,2,3} \|Y_0^{12} - \bar{Y}_i^{12}\|^2 \right] \quad (3.38)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$P_i \equiv \min \left[-\rho^i Y_i^{12} + h_i Y_i + (h_{i0}^{23} + \rho^{i0}) Y_{i0}^{23} \right] + \frac{p}{2} \left\| \bar{Y}_0^{12} - Y_i^{12} \right\|^2 + \frac{p}{2} \left[\sum_{j=1,2,3} \|Y_{i0}^{23} - \bar{Y}_{ij}^{23}\|^2 \right] \quad \forall i \quad (3.39)$$

$$\text{s.a: } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$P_{ij} \equiv \min (-\rho^{ij} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij}) + \frac{p}{2} \left\| \bar{Y}_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23} \right\|^2 \quad \forall i, j \quad (3.40)$$

$$\text{s.a: } D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

Modelo no Lineal

$$\begin{aligned}
L_0 \equiv \min \sum_{s \in S} w^s \left\| h_0 Y_0 + h_0^{12} Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} (h_i \bar{Y}_i + h_{i0}^{23} \bar{Y}_{i0}^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} h^j \bar{Y}_{ij} - \hat{Z}^s(*) \right\|^d + \\
+ \rho^0 Y_0^{12} + \frac{p}{2} \left[\sum_{i=1,2,3} \|Y_0^{12} - \bar{Y}_i^{12}\|^2 \right] \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\text{s.a.: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$\begin{aligned}
L_i \equiv \min \sum_{j=1,2,3} w^s \left\| h_0 \bar{Y}_0 + h_0^{12} Y_i^{12} + h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} + \sum_{j=1,2,3} h^j \bar{Y}_{ij} - \hat{Z}^s(*) \right\|^d - \\
- \rho^i Y_i^{12} + \rho^{i0} Y_{i0}^{23} + \frac{p}{2} \|\bar{Y}_0^{12} - Y_i^{12}\|^2 + \frac{p}{2} \left[\sum_{j=1,2,3} \|Y_{i0}^{23} - \bar{Y}_{ij}^{23}\|^2 \right] \quad \forall i \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\text{s.a.: } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$\begin{aligned}
L_{ij} \equiv \min w^s \left\| h_0 \bar{Y}_0 + h_0^{12} \bar{Y}_0^{12} + h_i \bar{Y}_i + h_{i0}^{23} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij} - \hat{Z}^s(*) \right\|^d - \\
- \rho^{ij} Y_{ij}^{23} + \frac{p}{2} \|\bar{Y}_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23}\|^2 \quad \forall i, j, \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\text{s.a.: } D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

donde se considera $s = 3(i-1) + j$, en los submodelos (3.41), (3.42) y (3.43). Como se puede apreciar, la descomposición anterior es posible gracias a la asignación de los valores

de la solución inicial \bar{Y}^s , a las variables de las etapas distintas a la etapa correspondiente al submodelo en cuestión. De esta forma, mediante un procedimiento iterativo similar al algoritmo propuesto anteriormente, se puede llegar a la solución de (3.15)-(3.24) y también a la de su Lagrangiano dual (3.29), resolviendo en cada iteración los submodelos independientes (3.38), (3.39), y (3.40), ó (3.41), (3.42), y (3.43), según sea el modelo considerado.

El procedimiento de resolución se resume como sigue. Una vez obtenida la solución inicial, se estima un valor de ρ . Con éste y la solución se construyen los submodelos independientes (3.38), (3.39), y (3.40), o (3.41), (3.42), y (3.43), en función del tipo de modelo. A continuación, se resuelven dichos submodelos obteniendo una nueva solución factible para cada escenario. El siguiente paso es comprobar si dicha solución verifica las restricciones enganche. En caso afirmativo, esa es la solución del problema de partida, la cual se ha de corresponder con aquel ρ que maximiza $D_{P_t}(\rho)$, para $t = 1$, ó 2 , según sea el caso. Si no las verifica, se vuelve a repetir el proceso, pero tomando como \bar{Y}^s la solución obtenida en la iteración previa. De esta forma, se consiguen soluciones factibles cada vez más próximas a la óptima, que se identificará cuando se cumplan las condiciones enganche, es decir, cuando Y_0^{12} sea igual a $Y_i^{12} \forall i$, e Y_{i0}^{23} sea igual a $Y_{ij}^{23} \forall i, j$.

Un hecho importante del procedimiento anterior, es que permite su implementación en paralelo a la hora de resolver los submodelos (3.38), (3.39), y (3.40), en el caso lineal y los submodelos (3.41), (3.42), y (3.43), en el no lineal, debido a que la estructura de descomposición propuesta por etapas es bastante apropiada.

3.2.2 Aproximación Cuadrático Separable

Otra alternativa de descomposición de la aproximación Lagrangiana Aumentada en el caso lineal (3.28), consiste en sustituir la función cuadrática de penalización $\xi(Y^s)$ por una función cuadrático separable. La aproximación que se utiliza es la misma que se vió en el capítulo 1, donde aproximabamos el modelo de Recurso Total con Inmunización de Escenarios bajo la norma euclídea por una función separable, e incluso, por una lineal. Veámosla ahora en el término de penalización que nos ocupa.

Si se desarrolla la norma euclídea L_2 en (3.27), se obtiene:

$$\xi(Y^s) = \frac{p}{2} \sum_{i=1,2,3} \left(\sqrt{\sum_k (y_{0k}^{12} - y_{ik}^{12})^2} \right)^2 + \frac{p}{2} \sum_{i,j=1,2,3} \left(\sqrt{\sum_t (y_{i0t}^{23} - y_{ijt}^{23})^2} \right)^2 \quad (3.44)$$

donde y_{0k}^{12} , y_{ik}^{12} , y_{i0t}^{23} e y_{ijt}^{23} , $\forall k$ y $\forall t$, representan las componentes de los vectores Y_0^{12} , Y_i^{12} , Y_{i0}^{23} , e Y_{ij}^{23} , respectivamente. Nótese que la expresión anterior (3.44) es una función cuadrática no separable. Para convertirla en separable, desarrollamos primero los cuadrados de las diferencias de las componentes de los vectores Y_0^{12} , Y_i^{12} , Y_{i0}^{23} , e Y_{ij}^{23} en (3.44).

$$\begin{aligned} \xi(Y^s) &= \frac{p}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_k \left((y_{0k}^{12})^2 + (y_{ik}^{12})^2 - 2y_{0k}^{12}y_{ik}^{12} \right) + \\ &+ \frac{p}{2} \sum_{i,j=1,2,3} \sum_t \left((y_{i0t}^{23})^2 + (y_{ijt}^{23})^2 - 2y_{i0t}^{23}y_{ijt}^{23} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Los dobles productos de dichas componentes impiden la separación de las variables, pero ésta se puede realizar haciendo uso de la la aproximación (1.45) presentada en el capítulo 1. A partir de la cual el producto de dos reales cualesquiera u y v , se puede expresar en función de otros dos reales conocidos \bar{u} y \bar{v} , como sigue:

$$uv \cong \bar{u}v + u\bar{v} - \bar{u}\bar{v} \quad (3.46)$$

Utilizamos esta aproximación (3.46) en cada doble producto $y_{0k}^{12}y_{ik}^{12}$ dado cualquier k , y en cada doble producto $y_{i0t}^{23}y_{ijt}^{23}$ dado cualquier t (véanse Mulvey y Ruszczyński (1992) [49] y Ruszczyński (1993) [60]), tomando como componentes conocidas las soluciones de los problemas determinísticos (1.9)-(1.11) bajo cada escenario. De lo que se obtiene la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \xi(Y^s) &\equiv \frac{p}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_k \left((y_{0k}^{12})^2 + (y_{ik}^{12})^2 - 2\bar{y}_{0k}^{12}y_{ik}^{12} - 2y_{0k}^{12}\bar{y}_{ik}^{12} + 2\bar{y}_{0k}^{12}\bar{y}_{ik}^{12} \right) + \\ &+ \frac{p}{2} \sum_{i,j=1,2,3} \sum_t \left((y_{i0t}^{23})^2 + (y_{ijt}^{23})^2 - 2\bar{y}_{i0t}^{23}y_{ijt}^{23} - 2y_{i0t}^{23}\bar{y}_{ijt}^{23} + 2\bar{y}_{i0t}^{23}\bar{y}_{ijt}^{23} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde se denotan las componentes conocidas con una barra encima. Esta aproximación de la función $\xi(Y^s)$ es cuadrático separable, lo que nos permite descomponer la aproximación Lagrangiana Aumentada en los siguientes submodelos de redes independientes.

$$L_0 \equiv \min h_0 Y_0 + (h_0^{12} + \rho^0) Y_0^{12} + \frac{p}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_k \left((y_{0k}^{12})^2 - 2y_{0k}^{12} \bar{y}_{ik}^{12} \right) \quad (3.48)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$L_i \equiv \min \left[-\rho^i Y_i^{12} + h_i Y_i + (h_{i0}^{23} + \rho^{i0}) Y_{i0}^{23} \right] +$$

$$+ \frac{p}{2} \sum_k \left((y_{ik}^{12})^2 - 2\bar{y}_{0k}^{12} y_{ik}^{12} \right) + \frac{p}{2} \sum_{j=1,2,3} \sum_t \left((y_{i0t}^{23})^2 - 2y_{i0t}^{23} \bar{y}_{ijt}^{23} \right) \quad \forall i \quad (3.49)$$

$$\text{s.a: } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$L_{ij} \equiv \min \left(-\rho^{ij} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij} \right) + \frac{p}{2} \sum_t \left((y_{ijt}^{23})^2 - 2\bar{y}_{i0t}^{23} y_{ijt}^{23} \right) \quad \forall i, j \quad (3.50)$$

$$\text{s.a: } D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

Estos subproblemas procedentes de la descomposición tienen una función objetivo no lineal, pero sus dimensiones son mucho menores y se pueden resolver de forma directa. Además se puede conseguir que sean lineales, aproximando también los cuadrados. Esto es, sea $u \in R$, un real cualquiera y $\bar{u} \in R$, un real conocido, se considera la aproximación (1.48) vista en el primer capítulo, y que retomamos a continuación:

$$u^2 \cong -\bar{u}^2 + 2\bar{u}u \quad (3.51)$$

Si consideramos ambas aproximaciones (3.46) y (3.51) sobre la diferencia de un cuadrado, se tiene que

$$(u - v)^2 \equiv -\bar{u}^2 + 2\bar{u}u - \bar{v}^2 + 2\bar{v}v - 2\bar{u}v - 2u\bar{v} + 2\bar{u}\bar{v} \quad (3.52)$$

y operando resulta la siguiente relación:

$$(u - v)^2 \equiv -(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + 2\bar{u}\bar{v} + 2(\bar{u} - \bar{v})u + 2(\bar{v} - \bar{u})v \quad (3.53)$$

A continuación aplicamos esta relación (3.53) a las diferencias al cuadrado de las componentes de los vectores, lo que origina la siguiente aproximación lineal de $\xi(Y^s)$.

$$\begin{aligned} \xi(Y^s) \equiv & \frac{p}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_k \left(- [(\bar{y}_{0k}^{12})^2 + (\bar{y}_{ik}^{12})^2] + 2\bar{y}_{0k}^{12}\bar{y}_{ik}^{12} + 2(\bar{y}_{0k}^{12} - \bar{y}_{ik}^{12})y_{0k}^{12} + 2(\bar{y}_{ik}^{12} - \bar{y}_{0k}^{12})y_{ik}^{12} \right) + \\ & + \frac{p}{2} \sum_{i,j=1,2,3} \sum_t \left(- [(\bar{y}_{i0t}^{23})^2 + (\bar{y}_{ijt}^{23})^2] + 2\bar{y}_{i0t}^{23}\bar{y}_{ijt}^{23} + 2(\bar{y}_{i0t}^{23} - \bar{y}_{ijt}^{23})y_{i0t}^{23} + 2(\bar{y}_{ijt}^{23} - \bar{y}_{i0t}^{23})y_{ijt}^{23} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Utilizando entonces la aproximación de $\xi(Y^s)$ (3.54), en la función objetivo (3.28) del modelo, éste se puede descomponer de forma análoga a la vista anteriormente, pero en submodelos esta vez lineales.

$$P_0 \equiv \min h_0 Y_0 + (h_0^{12} + \rho^0) Y_0^{12} + \frac{p}{2} \sum_{i=1,2,3} \sum_k \left(2(\bar{y}_{0k}^{12} - \bar{y}_{ik}^{12}) y_{0k}^{12} \right) \quad (3.55)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$\begin{aligned} P_i \equiv & \min \left[-\rho^i Y_i^{12} + h_i Y_i + (h_{i0}^{23} + \rho^{i0}) Y_{i0}^{23} \right] + \\ & + \frac{p}{2} \sum_k \left(2(\bar{y}_{ik}^{12} - \bar{y}_{0k}^{12}) y_{ik}^{12} \right) + \frac{p}{2} \sum_{j=1,2,3} \sum_t \left(2(\bar{y}_{i0t}^{23} - \bar{y}_{ijt}^{23}) y_{i0t}^{23} \right) \quad \forall i \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\text{s.a: } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$P_{ij} \equiv \min (-\rho^{ij}Y_{ij}^{23} + h^jY_{ij}) + \frac{p}{2} \sum_t (2(\bar{y}_{ijt}^{23} - \bar{y}_{i0t}^{23})y_{ijt}^{23}) \quad \forall i, j \quad (3.57)$$

$$\text{s.a: } D_{ij}^{23}Y_{ij}^{23} + D^jY_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

La resolución de dichos submodelos (3.55), (3.56), y (3.57), también se puede llevar a cabo de forma concurrente.

Por supuesto, las aproximaciones de $\xi(Y^s)$ (3.47) y (3.54), también se pueden utilizar en el caso no lineal. Sin embargo, con sólo esto no se podría realizar la descomposición, puesto que se tendría que llevar a cabo algún otro tipo de aproximación adicional, lo cual no sería muy efectivo.

A continuación se expone un algoritmo para la resolución de la Formulación Extendida (3.2)-(3.13) en el caso lineal, similar al propuesto en la sección anterior. La diferencia entre ambos algoritmos radica en la aproximación que se utiliza de $\xi(Y^s)$. En el nuevo algoritmo se resuelve de forma iterativa el modelo (3.15)-(3.24), cuando $\xi(Y^s)$ toma la expresión (3.54) en lugar de (3.27). En este caso, la descomposición del modelo en submodelos de redes independientes no requiere fijar las variables.

Se denota entonces por

$\epsilon > 0$, un valor real lo suficientemente pequeño.

ρ_n el vector de multiplicadores de Lagrange en la n-ésima iteración,

$Y^s(n) \equiv (Y_0(n), Y_0^{12}(n), Y_i^{12}(n), Y_i(n), Y_{i0}^{23}(n), Y_{ij}^{23}(n), Y_{ij}(n))$, el vector de variables solución de la aproximación Lagrangiana Aumentada correspondiente a la n-ésima iteración,

σ_n , el tamaño de paso en la n-ésima iteración, cuya definición viene dada por (3.32),

$INFTOT(n)$, la suma total de la norma de las infactibilidades para la solución de la n-ésima iteración $Y^s(n)$, que tiene la expresión dada en (3.33) y

$SVC(n)$, la suma de las normas al cuadrado de los vectores de variables divididas para la solución de la n -ésima iteración $Y^s(n)$, (veáse (3.34)).

Algoritmo

PASO 1: Sean $n = 0$, $m = 0$, y se fija $\rho_n = 0$.

PASO 2: Resolver los submodelos (1.9)-(1.11), $\forall s = 3(i - 1) + j$, e $i, j = 1, 2, 3$, y asignar a

$$(Y_0(n), Y_0^{12}(n), Y_i^{12}(n), Y_i(n), Y_{i0}^{23}(n), Y_{ij}^{23}(n), Y_{ij}(n))$$

el vector de variables compuesto por las soluciones de dichos submodelos (1.9)-(1.11) para cada escenario, y como componentes de las variables conocidas $\forall k$, y $\forall t$, las siguientes:

$$\bar{y}_{0k}^{12}(m) = y_{0k}^{12}(n); \quad \bar{y}_{ik}^{12}(m) = y_{ik}^{12}(n); \quad \bar{y}_{i0t}^{23}(m) = y_{i0t}^{23}(n); \quad \text{e} \quad \bar{y}_{ijt}^{23}(m) = y_{ijt}^{23}(n);$$

PASO 3: Construir los submodelos (3.55), (3.56), y (3.57), a partir del correspondiente vector dual ρ_n , y las componentes $\bar{y}_{0k}^{12}(m)$, $\bar{y}_{ik}^{12}(m)$, $\bar{y}_{i0t}^{23}(m)$, $\bar{y}_{ijt}^{23}(m)$.

PASO 3.1: Resolver dichos submodelos (3.55), (3.56), y (3.57), y asignar a

$$(Y_0(n+1), Y_0^{12}(n+1)), (Y_i^{12}(n+1), Y_i(n+1), Y_{i0}^{23}(n+1)), \text{ e } (Y_{ij}^{23}(n+1), Y_{ij}(n+1)),$$

los vectores soluciones de tales submodelos (3.55), (3.56), y (3.57), respectivamente.

PASO 3.2: Si

$$\begin{aligned} \|(y_{0k}^{12}(n+1) - \bar{y}_{0k}^{12}(m))\| &\leq \epsilon, \\ \|(y_{ik}^{12}(n+1) - \bar{y}_{ik}^{12}(m))\| &\leq \epsilon, \\ \|(y_{i0t}^{23}(n+1) - \bar{y}_{i0t}^{23}(m))\| &\leq \epsilon, \\ \|(y_{ijt}^{23}(n+1) - \bar{y}_{ijt}^{23}(m))\| &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

$\forall k$ y $\forall t$, entonces ir al **PASO 4**. En caso contrario, hacer $m = m + 1$ y continuar.

PASO 3.3: Asignar

$$\bar{y}_{0k}^{12}(m) = y_{0k}^{12}(n+1);$$

$$\bar{y}_{ik}^{12}(m) = y_{ik}^{12}(n+1);$$

$$\bar{y}_{i0t}^{23}(m) = y_{i0t}^{23}(n+1);$$

$$\bar{y}_{ijt}^{23}(m) = y_{ijt}^{23}(n+1)$$

$\forall k$ y $\forall t$, y repetir el **PASO 3**.

PASO 4: Analizar si

$$(Y_0(n+1), Y_0^{12}(n+1), Y_i^{12}(n+1), Y_i(n+1), Y_{i0}^{23}(n+1), Y_{ij}^{23}(n+1), Y_{ij}(n+1))$$

verifica las restricciones enganche. Esto es, se comprueba si

$$\frac{INFTOT(n+1)}{SVC(n+1)} < \epsilon.$$

Si es así, se ha detectado el punto óptimo, parar. En caso contrario, continuar.

PASO 5: Hacer $\rho_{n+1}^i = \rho_n^i + \sigma_{n+1}[Y_0^{12}(n+1) - Y_i^{12}(n+1)]$ para $i = 1, 2, 3$, y asignar

$$\rho_{n+1}^0 = \sum_{i=1,2,3} \rho_{n+1}^i.$$

PASO 6: Hacer $\rho_{n+1}^{ij} = \rho_n^{ij} + \sigma_{n+1}[Y_{i0}^{23}(n+1) - Y_{ij}^{23}(n+1)]$ para $i, j = 1, 2, 3$, y

$$\text{asignar } \rho_{n+1}^{i0} = \sum_{j=1,2,3} \rho_{n+1}^{ij}.$$

PASO 7: Hacer $n = n + 1$ e ir al **PASO 3**.

Lógicamente, la aproximación (3.54) será mejor cuanto más próximas estén las variables y_{0k}^{12} , y_{ik}^{12} , y_{i0t}^{23} e y_{ijt}^{23} , $\forall k$ y $\forall t$, de los valores conocidos \bar{y}_{0k}^{12} , \bar{y}_{ik}^{12} , \bar{y}_{i0t}^{23} e \bar{y}_{ijt}^{23} , respectivamente. En el **PASO 3.2** se comprueba si la aproximación lineal que se utiliza no se aleja demasiado de $\xi(Y^s)$. De hecho, en cada iteración del algoritmo se toma como componentes de las variables conocidas, las de la solución obtenida en la iteración previa. Esto hace que el algoritmo conste de dos bloques de iteraciones, uno interior al **PASO 3** en lo que se refiere a la aproximación de $\xi(Y^s)$, y otro exterior en lo relacionado a la estimación de las variables duales.

Básicamente lo que hace el algoritmo anterior es lo siguiente. Se parte de la solución inicial formada por las soluciones óptimas bajo cada escenario. A continuación con dicha solución y con el vector nulo como vector de variables duales, se construyen los submodelos de redes independientes (3.55), (3.56) y (3.57), y se resuelven. A partir de la solución que se obtiene, se comprueba si la aproximación que se ha utilizado es aceptable. Si no lo es, se repite el proceso de construir los submodelos pero con la nueva solución. En caso contrario, se comprueba si esta solución verifica las condiciones enganche. Si es así, esa es la solución del problema de partida, la cual se ha de corresponder con aquel ρ , que maximiza $D_{P_t}(\rho)$, para $t = 1$, ó 2 , según se trate del modelo lineal o el no lineal. Si no, se estima un nuevo ρ a partir de la solución que se tiene y se vuelve a repetir el proceso, pero ahora considerando como Y^s la solución obtenida en la iteración anterior.

En los dos algoritmos propuestos se ha tomado una estimación de las variables duales ρ bastante sencilla, pero efectiva. En cualquier caso, el tipo de estimación que se utilice ha de ser tal que el método iterativo resultante sea un método suficientemente creciente, es decir, que al ir cambiando de solución vayamos aumentando el ρ en una cantidad considerable para no relantizar el proceso. Además, la estimación de ρ en cada iteración debe estar cada vez más próxima a su estimación en la iteración previa, a medida que disminuye la diferencia entre las variables divididas.

Por otro lado, la aproximación (3.54) también presenta ciertas desventajas. Esto es, puede ocurrir que el bloque de iteraciones interior no converja a la verdadera expresión de $\xi(Y^s)$. Ya que puede darse el caso que para una determinada solución \bar{Y}^s la aproximación utilizada esté dentro de unos márgenes de confianza no del todo aceptables, pero cerca de serlo. Sin embargo, al continuar con el proceso y cambiar a otra solución, la nueva aproximación que se utilice, puede ser peor. Una forma de acelerar entonces el proceso de convergencia consiste en añadir a la función objetivo del modelo una condición de región de confianza. Con esta condición se intenta que el bucle de iteraciones interior al paso 3 no se cicle.

3.3 Descomposición de Benders

3.3.1 Caso Lineal

En esta sección se recoge la descomposición de Benders adaptada a la Formulación Extendida del modelo (véase Benders (1962) [4]). Siguiendo este esquema de descomposición se resuelve la Formulación Extendida, particionando su correspondiente dual y resolviendo de forma iterativa una linealización externa de esta partición hasta alcanzar el óptimo. Veamos el desarrollo de tal descomposición partiendo del modelo en el caso lineal:

$$Z = \min h_0 Y_0 + h_0^{12} Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} (h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_{i0}^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \quad (3.58)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.59)$$

$$Y_0^{12} - Y_i^{12} = 0 \quad \forall i \quad (3.60)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.61)$$

$$Y_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23} = 0 \quad \forall i, j \quad (3.62)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.63)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.64)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.65)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.66)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.67)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.68)$$

A continuación se construye el problema dual del modelo anterior, en el cual se denota por $(W_0, V_i, W_i, V_{ij}, W_{ij}, \alpha_0, \alpha_0^{12}, \alpha_i^{12}, \alpha_i, \alpha_{i0}^{23}, \alpha_{ij}^{23}, \alpha_{ij})$ el vector de variables duales asociadas con las restricciones (3.59)-(3.68) para todo $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
 & \max W_0 b_0 + \sum_{i=1,2,3} W_i b_i + \sum_{i,j=1,2,3} W_{ij} b^j + \\
 & + \alpha_0 u_0 + \alpha_0^{12} u^{12} + \sum_{i=1,2,3} \alpha_i^{12} u^{12} + \sum_{i=1,2,3} \alpha_i u_i + \sum_{i=1,2,3} \alpha_{i0}^{23} u^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \alpha_{ij}^{23} u^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \alpha_{ij} u_{ij} \\
 & \text{s.a: } W_0 D_0 + \alpha_0 \leq h_0 \tag{3} \\
 & W_0 D_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i + \alpha_0^{12} \leq h_0^{12} \tag{3} \\
 & -V_i + W_i D_i^{12} + \alpha_i^{12} \leq 0 \quad \forall i \tag{3} \\
 & W_i D_i + \alpha_i \leq h_i \quad \forall i \tag{3} \\
 & W_i D_{i0}^{23} + \sum_{j=1,2,3} V_{ij} + \alpha_{i0}^{23} \leq h_{i0}^{23} \quad \forall i \tag{3} \\
 & -V_{ij} + W_{ij} D_{ij}^{23} + \alpha_{ij}^{23} \leq 0 \quad \forall i, j \tag{3} \\
 & W_{ij} D^j + \alpha_{ij} \leq h^j \quad \forall i, j \tag{3} \\
 & W_0, V_i, W_i, V_{ij}, W_{ij}, \text{ sin restricciones} \quad \forall i, j \tag{3} \\
 & \alpha_0, \alpha_0^{12}, \alpha_i^{12}, \alpha_i, \alpha_{i0}^{23}, \alpha_{ij}^{23}, \alpha_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \tag{3}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que dado un valor arbitrario de las variables $(V_i, V_{ij}), \forall i, j$, se obtiene un problema de programación lineal en las variables $(W_0, W_i, W_{ij}, \alpha_0, \alpha_0^{12}, \alpha_i^{12}, \alpha_i, \alpha_{i0}^{23}, \alpha_{ij}^{23}, \alpha_{ij}), \forall i, j$. En particular, este problema tiene una estructura especial en forma de escalera, que permite su descomposición en submodelos independientes según las distintas etapas. Esto sirve de gran ayuda a la hora de resolverlo. Además, las variables $(V_i, V_{ij}), \forall i, j$, no aparecen en la función objetivo, por lo que se puede particionar el problema dual (3.69)-(3.78) de la siguiente forma, considerando $(V_i, V_{ij}), \forall i, j$, como el vector denominado de variables complicantes.

$$\begin{aligned} \max_{(V_i, V_{ij})} \quad & \text{sin restricción} \left\{ \max W_0 b_0 + \sum_{i=1,2,3} W_i b_i + \sum_{i,j=1,2,3} W_{ij} b^j + \right. \\ & + \alpha_0 u_0 + \alpha_0^{12} u^{12} + \sum_{i=1,2,3} \alpha_i^{12} u^{12} + \sum_{i=1,2,3} \alpha_i u_i + \\ & \left. + \sum_{i=1,2,3} \alpha_{i0}^{23} u^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \alpha_{ij}^{23} u^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \alpha_{ij} u_{ij} \right. \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\text{s.a: } W_0 D_0 + \alpha_0 \leq h_0 \quad (3.80)$$

$$W_0 D_0^{12} + \alpha_0^{12} \leq h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \quad (3.81)$$

$$W_i D_i^{12} + \alpha_i^{12} \leq V_i \quad \forall i \quad (3.82)$$

$$W_i D_i + \alpha_i \leq h_i \quad \forall i \quad (3.83)$$

$$W_i D_{i0}^{23} + \alpha_{i0}^{23} \leq h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \quad \forall i \quad (3.84)$$

$$W_{ij} D_{ij}^{23} + \alpha_{ij}^{23} \leq V_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.85)$$

$$W_{ij} D^j + \alpha_{ij} \leq h^j \quad \forall i, j \quad (3.86)$$

$$W_0, \quad W_i, \quad W_{ij}, \quad \text{sin restricciones} \quad \forall i, j \quad (3.87)$$

$$\alpha_0, \alpha_0^{12}, \alpha_i^{12}, \alpha_i, \alpha_{i0}^{23}, \alpha_{ij}^{23}, \alpha_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (3.88)$$

El modelo (3.79)-(3.88) se puede representar de forma equivalente, sustituyendo el problema de maximización en las variables $(W_0, W_i, W_{ij}, \alpha_0, \alpha_0^{12}, \alpha_i^{12}, \alpha_i, \alpha_{i0}^{23}, \alpha_{ij}^{23}, \alpha_{ij}), \forall i, j$, por su correspondiente dual. Tras esta operación el modelo se transforma en el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{(V_i, V_{ij}) \text{ sin restricción}} \left\{ \min h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i Y_i^{12} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \right\} \quad (3.89) \end{aligned}$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.90)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.91)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.92)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.93)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.94)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.95)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.96)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.97)$$

Si el conjunto de restricciones (3.90)-(3.97) es no vacío y acotado, entonces el problema de minimización recogido entre llaves alcanza su óptimo en un punto extremo de la región factible del mismo. Esto supondría una ventaja ya que dicho problema se podría expresar en función de sus puntos extremos. Ahora bien, dicha suposición requiere el cumplimiento de una serie de restricciones sobre los rayos extremos del espacio factible determinado por (3.90)-(3.97). Denotando los mencionados rayos extremos por $d_t = (d_0, d_0^{12}, d_i^{12}, d_i, d_{i0}^{23}, d_{ij}^{23}, d_{ij})_t$ con $t = 1, 2, 3, \dots, q$, veamos dichas restricciones:

$$\begin{aligned}
& h_0 d_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) d_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i d_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i d_i + \\
& + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) d_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} d_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j d_{ij} \geq 0 \quad (3.98)
\end{aligned}$$

$$\forall (d_0, d_0^{12}, d_i^{12}, d_i, d_{i0}^{23}, d_{ij}^{23}, d_{ij})_t \quad \text{con } t = 1, 2, \dots, q \quad (3.99)$$

Por tanto, si añadimos las restricciones (3.98)-(3.99) al modelo (3.89)-(3.97), se garantiza que el problema de minimización recogido entre llaves tenga solución acotada. Siendo entonces el modelo resultante como sigue.

$$\begin{aligned}
& \max_{(V_i, V_{ij})} \left\{ \min h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i Y_i^{12} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \right\} \quad (3.100)
\end{aligned}$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.101)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.102)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.103)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.104)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.105)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.106)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.107)$$

$$0 \leq \left. Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \right\} \quad (3.108)$$

$$\text{s.a: } h_0 d_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) d_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i d_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i d_i +$$

$$+ \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) d_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} d_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j d_{ij} \geq 0 \quad (3.109)$$

$$\forall (d_0, d_0^{12}, d_i^{12}, d_i, d_{i0}^{23}, d_{ij}^{23}, d_{ij})_t \quad \text{con } t = 1, 2, 3, \dots, q \quad (3.110)$$

Por consiguiente, si la región factible dada por (3.90)-(3.97) es no acotada, significa que alguna de las condiciones (3.98)-(3.99) para un determinado t , no se verifica. En consecuencia, el problema anterior (3.100)-(3.110) sería no factible. En caso contrario, se puede considerar el problema de minimización (3.100)-(3.108), en función de sus puntos extremos. Se denota entonces por $Y_k = (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k$ con $k = 1, 2, 3, \dots, p$, un punto extremo arbitrario de la región factible (3.90)-(3.97) y se expresa el modelo (3.100)-(3.110) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \max_{(V_i, V_{ij}) \text{ sin restricción}} & \left\{ \min h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i Y_i^{12} + \right. \\ & \left. \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \right. \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\left. (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, p \right\} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a: } h_0 d_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) d_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i d_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i d_i + \\ + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) d_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} d_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j d_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\forall (d_0, d_0^{12}, d_i^{12}, d_i, d_{i0}^{23}, d_{ij}^{23}, d_{ij})_t \quad \text{con } t = 1, 2, 3, \dots, q \quad (3.114)$$

Resulta obvio que la transformación del modelo de partida (3.58)-(3.68) en el modelo (3.111)-(3.114), no modifica su óptimo. Es más, el óptimo del problema de minimización

(3.111)-(3.112), dado cualquier valor de $(V_i, V_{ij}), \forall i, j$, proporciona una cota inferior del óptimo del problema de partida (3.58)-(3.68). Teniendo en cuenta esto, y puesto que la función objetivo del modelo (3.111)-(3.114) es no lineal, se aproxima linealmente mediante la generación de hiperplanos tangentes que describen la función de minimización recogida entre llaves. Función ésta definida a trozos, lineal y cóncava en las variables $(V_i, V_{ij}), \forall i, j$. Al problema que se obtiene se le denomina "Problema Maestro de Benders" *PMB*.

$$PMB: \quad \max Z \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a: } Z \leq & h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i Y_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \\ & + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$(Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k \text{ con } k = 1, 2, \dots, p \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} h_0 d_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) d_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i d_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i d_i + \\ + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) d_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} d_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j d_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\forall (d_0, d_0^{12}, d_i^{12}, d_i, d_{i0}^{23}, d_{ij}^{23}, d_{ij})_t \text{ con } t = 1, 2, \dots, q \quad (3.119)$$

$$Z, V_i \text{ y } V_{ij} \text{ sin restricciones } \quad \forall i, j \quad (3.120)$$

El modelo anterior (3.115)-(3.120) presenta tantas restricciones como puntos extremos "p" y direcciones extremas "q" tenga la región determinada por las ecuaciones (3.90)-(3.97), siendo usual un número elevado de éstas. Además, el cálculo de los puntos extremos y de las direcciones extremas supone un gran trabajo computacional. Por tanto, se podría adoptar una estrategia de relajación, y considerar en su lugar un problema maestro de Benders, que sólo tenga parte de dichas restricciones, es decir, con un número reducido de hiperpla-

nos tangentes y condiciones de acotación. Denotemos entonces por $(\bar{Z}, \bar{V}_i, \bar{V}_{ij}), \forall i, j$, la solución del problema maestro de Benders relajado. En consecuencia, \bar{Z} sería una cota superior del óptimo del problema de partida. Es más, si dicho valor \bar{Z} verifica

$$\begin{aligned} \bar{Z} \leq & h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i Y_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \\ & + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} \bar{V}_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{V}_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$(Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, p \quad (3.122)$$

y se cumplen para los correspondientes $(\bar{V}_i, \bar{V}_{ij}), \forall i, j$, las siguientes condiciones de acotación

$$\begin{aligned} h_0 d_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i \right) d_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i d_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i d_i + \\ + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} \bar{V}_{ij} \right) d_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{V}_{ij} d_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j d_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\forall (d_0, d_0^{12}, d_i^{12}, d_i, d_{i0}^{23}, d_{ij}^{23}, d_{ij})_t \quad \forall t = 1, 2, \dots, q \quad (3.124)$$

entonces coincidiría con el óptimo del problema de partida. Esto equivale a comprobar, si \bar{Z} es menor o igual que el óptimo del siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \theta = \min h_0 Y_0 + & \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i Y_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \\ & \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} \bar{V}_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{V}_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.126)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.127)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.128)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.129)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.130)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.131)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.132)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.133)$$

A este problema (3.125)-(3.133) se le denomina "Subproblema o Problema Auxiliar de Benders". En dicho Problema Auxiliar el vector de variables

$$(Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij}),$$

representa un punto arbitrario, no necesariamente extremo, de la región factible determinada por las restricciones (3.90)-(3.97). Se concluye que si \bar{Z} es menor o igual que el óptimo del subproblema de Benders (3.125)-(3.133), entonces \bar{Z} sería el óptimo del problema (3.58)-(3.68). Incluso en tal caso, se podría afirmar que \bar{Z} es igual al óptimo de (3.125)-(3.133), ya que coincidiría con algún hiperplano tangente (3.121)-(3.122) para algún k . En caso contrario, pueden ocurrir dos cosas:

1. Que $\bar{Y}_k = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})_k$ sea la solución del subproblema de Benders (3.125)-(3.133), y \bar{Z} sea mayor que el óptimo de dicho subproblema, en cuyo

caso se genera la siguiente condición de optimalidad o hiperplano tangente

$$\begin{aligned} Z \leq h_0 \bar{Y}_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) \bar{Y}_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i \bar{Y}_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i \bar{Y}_i + \\ + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) \bar{Y}_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} \bar{Y}_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j \bar{Y}_{ij} \end{aligned} \quad (3.134)$$

y se añade al problema maestro de Benders relajado actual para su reoptimización.

2. La otra posibilidad es que el subproblema de Benders (3.125)-(3.133) sea no acotado. Siendo $\bar{d}_t = (\bar{d}_0, \bar{d}_0^{12}, \bar{d}_i^{12}, \bar{d}_i, \bar{d}_{i0}^{23}, \bar{d}_{ij}^{23}, \bar{d}_{ij})_t$ el correspondiente rayo extremo que indica la dirección en que se produce tal no acotación. Entonces se añade el siguiente corte de acotación al problema maestro de Benders relajado y se reoptimiza.

$$\begin{aligned} h_0 \bar{d}_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} V_i \right) \bar{d}_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} V_i \bar{d}_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i \bar{d}_i + \\ + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} V_{ij} \right) \bar{d}_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} V_{ij} \bar{d}_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j \bar{d}_{ij} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

Este proceso iterativo proporciona cotas superiores e inferiores del óptimo del problema de partida (3.58)-(3.68), en cada iteración. Se define como cota superior \bar{Z}^l el correspondiente óptimo del problema maestro de Benders relajado en la iteración l , y como cota inferior θ^l el óptimo del subproblema de Benders en dicha iteración. El proceso finaliza cuando ambas cotas se igualen. No obstante, cuando

$$\frac{(\bar{Z}^l - \theta^{l+1})}{\theta^{l+1}} \leq TOL \quad (3.136)$$

donde TOL representa la tolerancia o margen de confianza en la resolución del problema, se le considera resuelto con la suficiente precisión. En este punto, la solución del problema original se obtiene como la suma ponderada de los puntos extremos Y_k , que intervienen en las restricciones (3.116)-(3.117) del último problema maestro de Benders relajado. Mientras

que las ponderaciones son los correspondientes multiplicadores duales no negativos λ_k de esas mismas restricciones (3.116)-(3.117).

Por otro lado, es preciso mencionar que el subproblema de Benders (3.125)-(3.133), debido a su estructura se puede descomponer en los siguientes submodelos de redes independientes cuyas dimensiones son notablemente más reducidas.

$$L_0 \equiv \min h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i \right) Y_0^{12} \quad (3.137)$$

$$\text{s.a } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$L_i \equiv \min \sum_{i=1,2,3} \bar{V}_i Y_i^{12} + \sum_{i=1,2,3} h_i Y_i + \sum_{i=1,2,3} \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1,2,3} \bar{V}_{ij} \right) Y_{i0}^{23} \quad \forall i \quad (3.138)$$

$$\text{s.a } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$L_{ij} \equiv \min \sum_{i,j=1,2,3} \bar{V}_{ij} Y_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.139)$$

$$\text{s.a } D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

Por tanto, en vez de resolver el subproblema de Benders (3.125)-(3.133) directamente, se resuelven los submodelos (3.137), (3.138), y (3.139), que incluso se podrán optimizar en paralelo para aumentar así la velocidad de resolución del problema global.

El algoritmo que recoge el procedimiento de resolución del problema (3.58)-(3.68), siguiendo la denominada técnica de descomposición de Benders anteriormente explicada, es el siguiente:

Algoritmo:

PASO 1: Sea $l = 0$. Buscar una solución básica factible o punto extremo del sistema de ecuaciones (3.90)-(3.97)¹.

PASO 2: Sea $\bar{Y}_l = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})_l$ dicha solución, construir el problema maestro de Benders relajado (*PMB*) con una única restricción de la forma (3.134) para \bar{Y}_l , y resolverlo.

PASO 3: Sea $(\bar{Z}^l, \bar{V}_i^l, \bar{V}_{ij}^l)$ la solución del *PMB*, construir a partir de la misma el subproblema de Benders y resolverlo.

- Si dicho subproblema es acotado, asignar a

$$\bar{Y}_{l+1} = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})_{l+1}$$

la solución de dicho subproblema y a θ^{l+1} el óptimo del mismo, e ir al **PASO 4**.

- Si no lo es, añadir la correspondiente restricción (3.135) al actual *PMB* y resolverlo. Hacer $l = l + 1$ y repetir el **PASO 3**.

PASO 4: Si se verifica (3.136) con \bar{Z}^l y θ^{l+1} , entonces parar. \bar{Z}^l sería el óptimo del problema original (3.58)-(3.68) y su solución sería

$$Y = \sum_{i=1, \dots, k} \lambda_i \bar{Y}_i,$$

donde $\lambda_i \forall i = 1, \dots, k$, son los multiplicadores duales de las restricciones (3.116)-(3.117) del último problema maestro de Benders relajado. En caso contrario, añadir la restricción (3.134) para \bar{Y}_{l+1} al actual *PMB* y resolverlo. Hacer $l = l + 1$ e ir al **PASO 3**.

El algoritmo anterior nos conduce a la optimalidad del problema, siempre que esté acotada la región determinada por (3.90)-(3.97), en un número finito de iteraciones, ya que el número de vértices de tal región sería finito. A esta técnica de descomposición también se la denomina de Generación de Filas, debido a que en cada iteración se genera un nuevo corte de acotación o corte de optimalidad.

¹La solución con la que comienza el algoritmo, puede ser la solución unión de las soluciones bajo cada uno de los escenarios.

3.3.2 Aproximación con Valores Absolutos

En la sección anterior se propuso una particularización de la descomposición de Benders, aplicada a la Formulación Extendida del modelo en el caso lineal, cuya región factible posee una estructura en forma de cuasi-escalera. En esta sección se utiliza el mismo esquema de descomposición sobre un modelo, en el que mantener la linealidad ha supuesto la pérdida de la estructura en forma de cuasi-escalera que disponía, al añadirse nuevas restricciones a éste. La importancia de esta estructura en forma de cuasi-escalera se debe como se ha indicado, a que facilita la descomposición del modelo por etapas, en submodelos de menores dimensiones y por tanto, más manejables. Sea el siguiente modelo, planteado en el capítulo 1.

$$\min \sum_{s \in S} (V_s^+ + V_s^-) \quad (3.140)$$

$$\text{s.a } w^s [(c^s)^t X^s - \hat{Z}^s(*)] = V_s^+ - V_s^- \quad \forall s \in S \quad (3.141)$$

$$AX^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (3.142)$$

$$X^s \in N \quad \forall s \in S \quad (3.143)$$

$$0 \leq X^s \leq u \quad \forall s \in S \quad (3.144)$$

$$0 \leq V_s^+, V_s^- \quad \forall s \in S \quad (3.145)$$

Para expresar este modelo mediante la Formulación Extendida, en la que se dividen las variables enganche entre dos etapas, se ha de recurrir a las particiones realizadas en el capítulo 2 sobre las componentes del modelo de Recurso Total. También se particiona de forma similar a las restantes particiones, es decir, por etapas, los vectores de variables V_s^+ y V_s^- obteniendo los siguientes vectores:

$$V_s^+ \equiv (V_0^+, V_i^+, V_{ij}^+)$$

$$V_s^- \equiv (V_0^-, V_i^-, V_{ij}^-)$$

En este caso como se trata de variables artificiales no existen variables enganche entre dos etapas. Usando entonces la partición anterior además de las otras particiones señaladas, se construye la Formulación Extendida del modelo (3.140)-(3.145).

$$\min V_0^+ + V_0^- + \sum_{i=1,2,3} (V_i^+ + V_i^-) + \sum_{i,j=1,2,3} (V_{ij}^+ + V_{ij}^-) \quad (3.146)$$

$$\text{s.a: } h_0 Y_0 + h_0^{12} Y_0^{12} + h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} + h^j Y_{ij} - \quad (3.147)$$

$$- V_0^+ + V_0^- - V_i^+ + V_i^- - V_{ij}^+ + V_{ij}^- = Z^{3(i-1)+j} (*) \quad \forall i, j$$

$$D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.148)$$

$$Y_0^{12} - Y_i^{12} = 0 \quad \forall i \quad (3.149)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.150)$$

$$Y_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23} = 0 \quad \forall i, j \quad (3.151)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.152)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.153)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.154)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.155)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.156)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.157)$$

$$V_0^+, V_0^-, V_i^+, V_i^-, V_{ij}^+, V_{ij}^- \geq 0 \quad \forall i, j \quad (3.158)$$

donde $Z^{3(i-1)+j} (*)$ representa los valores óptimos de los subproblemas de redes (1.9)-(1.11) para cada escenario $s = 3(i-1) + j$, con $i, j = 1, 2, 3$. Para simplificar la metodología utilizada, se supone que el conjunto de soluciones que satisfacen las restricciones (3.148), (3.150) y (3.152)-(3.157) constituyen un conjunto no vacío y acotado. Bajo tal suposición, se parte entonces del problema dual de (3.146)-(3.158) cuyas características con vistas a aplicar la técnica de descomposición de Benders, son más favorables que las del mismo. Sea éste el siguiente:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} Z^{3(i-1)+j}(\ast) + R_0 b_0 + \sum_{i=1,2,3} R_i b_i + \sum_{i,j=1,2,3} R_{ij} b^j + \\ & + Q_0 u_0 + Q_0^{12} u^{12} + \sum_{i=1,2,3} Q_i^{12} u_{i2} + \sum_{i=1,2,3} (Q_i u_i + Q_{i0}^{23} u^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} (Q_{ij}^{23} u^{23} + Q_{ij} u_{ij}) \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 + R_0 D_0 \leq 0 \quad (3.160)$$

$$\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0^{12} + R_0 D_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i + Q_0^{12} \leq 0 \quad (3.161)$$

$$- S_i + R_i D_i^{12} + Q_i^{12} \leq 0 \quad \forall i \quad (3.162)$$

$$\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_i + R_i D_i \leq 0 \quad \forall i \quad (3.163)$$

$$\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_{i0}^{23} + R_i D_{i0}^{23} + \sum_{j=1,2,3} S_{ij} + Q_{i0}^{23} \leq 0 \quad \forall i \quad (3.164)$$

$$- S_{ij} + R_{ij} D_{ij}^{23} + Q_{ij}^{23} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (3.165)$$

$$T_{ij} h^j + R_{ij} D^j \leq 0 \quad \forall i, j \quad (3.166)$$

$$- \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} \leq 1 \quad (3.167)$$

$$\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} \leq 1 \quad (3.168)$$

$$- \sum_{j=1,2,3} T_{ij} \leq 1 \quad \forall i \quad (3.169)$$

$$\sum_{j=1,2,3} T_{ij} \leq 1 \quad \forall i \quad (3.170)$$

$$- T_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \quad (3.171)$$

$$T_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j \quad (3.172)$$

$$T_{ij}, R_0, S_i, R_i, S_{ij}, R_{ij}, \text{ sin restriccion } \forall i, j \quad (3.173)$$

$$Q_0, Q_0^{12}, Q_i^{12}, Q_i, Q_{i0}^{23}, Q_{i0}, Q_{ij}^{23}, Q_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j \quad (3.174)$$

donde

$$(T_{ij}, R_0, S_i, R_i, S_{ij}, R_{ij}, Q_0, Q_0^{12}, Q_i^{12}, Q_i, Q_{i0}^{23}, Q_{ij}^{23}, Q_{ij}) \quad \forall i, j$$

son los vectores de variables duales asociados a las restricciones (3.147)-(3.158).

Nótese que si se asignan determinados valores a los vectores de variables T_{ij} , S_i , y S_{ij} , $\forall i, j$, en el modelo (3.159)-(3.174), se obtiene un problema de programación lineal en las variables R_0 , R_i , R_{ij} , Q_0 , Q_0^{12} , Q_i^{12} , Q_i , Q_{i0}^{23} , Q_{ij}^{23} , y Q_{ij} , cuya región factible dispone de una estructura en forma de cuasi-escalera. Como consecuencia inmediata, se fijan dichas variables a unos valores arbitrarios, teniendo en cuenta por supuesto que los valores asignados a las variables T_{ij} , $\forall i, j$, satisfagan las restricciones (3.167)-(3.172), y se separa el modelo tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} Z^{3(i-1)+j} (*) + \\
& \left\{ \begin{array}{l} \max R_0 b_0 + \sum_{i=1,2,3} R_i b_i + \sum_{i,j=1,2,3} R_{ij} b^j + Q_0 u_0 + Q_0^{12} u^{12} + \sum_{i=1,2,3} (Q_i^{12} u_{i2} + Q_i u_i + Q_{30}^{23} u^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} (Q_{ij}^{23} u^{23} + Q_{ij} u_{ij}) \\ \text{s.a. } R_0 D_0 + \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 \leq - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 \\ R_0 D_0^{12} + Q_0^{12} + \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0^{12} - \sum_{i=1,2,3} S_i \\ R_i D_i^{12} + Q_i^{12} + \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_i \\ R_i D_i + Q_i + \sum_{j=1,2,3} T_{ij} h_i \\ R_i D_{30}^{23} + Q_{30}^{23} + \sum_{j=1,2,3} T_{ij} h_{30}^{23} - \sum_{j=1,2,3} S_{ij} \forall i \\ R_{ij} D_{ij}^{23} + Q_{ij}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h^{ij} \\ R_{ij} D_{ij} + Q_{ij} + \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h^j \\ R_0, R_i, R_{ij}, \text{ sin restricciones} \\ Q_0, Q_0^{12}, Q_i^{12}, Q_i, Q_{30}^{23}, Q_{ij}^{23}, Q_{ij}, Q_{ij} \geq 0 \\ \text{s.a. } \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} \leq -1 \\ \sum_{j=1,2,3} T_{ij} \leq -1 \forall i \\ T_{ij} \leq -1 \forall i, j \\ S_i, S_{ij}, T_{ij}, \text{ sin restricciones} \end{array} \right. \\
\end{aligned}
\tag{3.175}$$

$$\tag{3.176}$$

$$\tag{3.177}$$

$$\tag{3.178}$$

$$\tag{3.179}$$

$$\tag{3.180}$$

$$\tag{3.181}$$

$$\tag{3.182}$$

$$\tag{3.183}$$

$$\tag{3.184}$$

$$\tag{3.185}$$

$$\tag{3.186}$$

$$\tag{3.187}$$

$$\tag{3.188}$$

A pesar de los cambios realizados sobre el problema de partida, los modelos (3.146)-(3.158) y (3.175)-(3.188) tienen ambos el mismo valor óptimo. Incluso podemos expresar el modelo (3.175)-(3.188) de forma equivalente, mediante el dual del modelo de maximización recogido entre llaves.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} Z^{3(i-1)+j} (*) + \\ \left\{ \min \right. & - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 Y_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i Y_i^{12} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_i Y_i - \\ & - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} Y_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.189)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.190)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.191)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.192)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.193)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.194)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.195)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.196)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.197)$$

$$\text{s.a } \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} \leq -1 \quad (3.198)$$

$$\sum_{j=1,2,3} T_{ij} \leq -1 \quad \forall i \quad (3.199)$$

$$T_{ij} \leq -1 \quad \forall i, j \quad (3.200)$$

$$S_i, S_{ij}, T_{ij}, \quad \text{sin restricciones} \quad (3.201)$$

Puesto que todo problema de optimización sobre una región no vacía y acotada alcanza su óptimo en un punto extremo, el problema de minimización (3.189)-(3.197) tendrá el suyo en un punto extremo del poliedro determinado por las restricciones (3.190)-(3.197). Por tanto, se puede reducir la búsqueda del óptimo de dicho problema (3.189)-(3.197) al conjunto de sus puntos extremos. Se denota entonces por $Y_k = (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k$, para $k = 1, 2, \dots, q$, un punto extremo arbitrario de la región factible de tal modelo, transformándose el mismo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \quad & - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 Y_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i Y_i^{12} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_i Y_i - \\ & - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} Y_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.202)$$

$$\forall (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.203)$$

Por otra parte, resaltemos el hecho de que el modelo (3.189)-(3.201) no es un modelo lineal. Sin embargo, como el óptimo del modelo anterior (3.202)-(3.203) dado cualquier T_{ij} , S_i , y S_{ij} , $\forall i, j$, es una cota inferior del modelo de maximización (3.189)-(3.201), una alternativa para evitar este problema es sustituir el modelo (3.189)-(3.201) por una aproximación lineal, a base de hiperplanos tangentes que describen la función de minimización (3.202) de forma análoga a como se hizo en la sección anterior. Dicha aproximación es el correspondiente "*Problema Maestro de Benders*" (*PMB*) para el modelo actual que nos ocupa, y se representa como sigue:

$$PMB : \quad \max Z \quad (3.204)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a: } Z \leq & \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} Z^{3(i-1)+j(*)} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 Y_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i \right) Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i Y_i^{12} - \\ & - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_i Y_i - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} Y_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.205)$$

$$\forall (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.206)$$

$$\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} \leq -1 \quad (3.207)$$

$$\sum_{j=1,2,3} T_{ij} \leq -1 \quad \forall i \quad (3.208)$$

$$T_{ij} \leq -1 \quad \forall i, j \quad (3.209)$$

$$S_i, S_{ij}, T_{ij}, \quad \text{sin restricciones} \quad (3.210)$$

Debemos tener en cuenta que el número q de puntos extremos

$$Y_k = (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k$$

es bastante elevado, por consiguiente, el problema maestro de Benders que se genera, es de grandes dimensiones y su resolución es casi imposible. Para solventar esta dificultad, se propone un algoritmo iterativo que en función de las necesidades, obtiene un nuevo punto extremo y en consecuencia, genera una nueva restricción del problema maestro de Benders, que incorpora al mismo hasta alcanzar su óptimo. Es decir, el algoritmo trabaja con problemas maestros de Benders relajados, cuyas regiones factibles están formadas con parte de las restricciones determinadas por los puntos extremos anteriores, junto con las restricciones (3.207)-(3.210). Este proceso de generación de puntos extremos y por tanto de restricciones, se detiene de la forma siguiente. Denótese por \bar{Z} , \bar{T}_{ij} , \bar{S}_i , y $\bar{S}_{ij} \quad \forall i, j$, la solución del problema maestro de Benders relajado, entonces \bar{Z} es una cota superior del problema (3.205)-(3.210), que coincide con el óptimo del mismo si verifica las restricciones (3.205)-(3.206) para todo valor de k . Por tanto, con la solución que se obtiene del correspondiente

problema maestro de Benders relajado en cada iteración del algoritmo, habrá que comprobar si verifica o no las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \bar{Z} \leq & \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} Z^{3(i-1)+j(*)} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_0 Y_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \bar{S}_i \right) Y_0^{12} + \\ & + \sum_{i=1,2,3} \bar{S}_i Y_i^{12} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_i Y_i - \left(\sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{S}_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{S}_{ij} Y_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.211)$$

$$\forall (Y_0, Y_0^{12}, Y_i^{12}, Y_i, Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23}, Y_{ij})_k, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.212)$$

Tales restricciones se pueden sustituir por la resolución del siguiente problema de programación lineal, llamado "Subproblema de Benders" o "Problema Auxiliar de Benders"

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} Z^{3(i-1)+j(*)} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_0 Y_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \bar{S}_i \right) Y_0^{12} + \\ & + \sum_{i=1,2,3} \bar{S}_i Y_i^{12} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_i Y_i - \left(\sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{S}_{ij} \right) Y_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{S}_{ij} Y_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h^j Y_{ij} \end{aligned} \quad (3.213)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.214)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.215)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.216)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.217)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.218)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.219)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \quad \forall i, j \quad (3.220)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.221)$$

y la posterior comprobación de si \bar{Z} es igual al óptimo de (3.213)-(3.221). Se elimina la posibilidad de que \bar{Z} sea menor que el óptimo del subproblema de Benders, porque el óptimo del problema maestro de Benders \bar{Z} , se alcanza en un hiperplano tangente de la forma (3.211) para algún k . Luego si fuese igual, ese \bar{Z} sería el óptimo buscado. En caso contrario, es decir, si el óptimo del correspondiente subproblema de Benders se alcanza en el punto extremo $\bar{Y}_k = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})_k$, y \bar{Z} es mayor que dicho óptimo, se genera la nueva restricción

$$\begin{aligned}
Z \leq & \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} Z^{3(i-1)+j(*)} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0 \bar{Y}_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} S_i \right) \bar{Y}_0^{12} + \\
& + \sum_{i=1,2,3} S_i \bar{Y}_i^{12} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_i \bar{Y}_i - \left(\sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} \right) \bar{Y}_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} S_{ij} \bar{Y}_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} T_{ij} h^j \bar{Y}_{ij}
\end{aligned} \tag{3.222}$$

que se añade al problema maestro de Benders relajado actual y se procede de nuevo a la optimización. Este proceso de generación de hiperplanos se repite hasta que algún \bar{Z} coincida con el óptimo del correspondiente subproblema de Benders. Entonces \bar{Z} sería el óptimo del problema de partida (3.140)-(3.145), y su solución la suma ponderada de los correspondientes puntos extremos Y_k , asociados con las restricciones (3.222) del último problema maestro de Benders relajado. Las ponderaciones de dicha suma serían los correspondientes multiplicadores duales de las mismas restricciones.

Nótese además, la ventaja que presenta el subproblema de Benders (3.213)-(3.221), cuya estructura en forma de escalera, permite su descomposición según las diferentes etapas en los siguientes submodelos de redes independientes.

$$L_0 \equiv \min - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_0 Y_0 - \left(\sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} \bar{S}_i \right) Y_0^{12} \tag{3.223}$$

$$\text{s.a. } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$L_i \equiv \min \sum_{i=1,2,3} \bar{S}_i Y_i^{12} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_i Y_i - \left(\sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h_{i0}^{23} + \sum_{i,j=1,2,3} \bar{S}_{ij} \right) Y_{i0}^{23} \quad (3.224)$$

$$\text{s.a } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$L_{ij} \equiv \min \sum_{i,j=1,2,3} \bar{S}_{ij} Y_{ij}^{23} - \sum_{i,j=1,2,3} \bar{T}_{ij} h^j Y_{ij} \quad (3.225)$$

$$\text{s.a } D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

Para finalizar esta sección se describe un algoritmo que resuelve el modelo (3.140)-(3.145), en el que se recogen las características más importantes de la descomposición de Benders, que se han desarrollado a lo largo de la misma.

Algoritmo:

PASO 1 Sea $k = 0$, buscar una solución básica factible o punto extremo de la región determinada por las restricciones (3.214)-(3.221).

PASO 2 Sea $\bar{Y}_k = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})_k$ dicha solución, construir el problema maestro de Benders relajado (3.204)-(3.210), con el único hiperplano tangente (3.222) generado por dicho \bar{Y}_k y las restantes restricciones sobre T_{ij} , y resolverlo.

PASO 3 Sea $(\bar{Z}, \bar{T}_{ij}, \bar{S}_i, \bar{S}_{ij})_k$ la solución del problema maestro de Benders relajado, construir los submodelos (3.223), (3.224) y (3.225) y resolverlos. Asignar a $\bar{Y}_{k+1} = (\bar{Y}_0, \bar{Y}_0^{12}, \bar{Y}_i^{12}, \bar{Y}_i, \bar{Y}_{i0}^{23}, \bar{Y}_{ij}^{23}, \bar{Y}_{ij})_{k+1}$ la solución conjunta de los mismos.

PASO 4 Si se verifica (3.222) para $(\bar{Z}, \bar{T}_{ij}, \bar{S}_i, \bar{S}_{ij})_k$ e \bar{Y}_{k+1} , entonces \bar{Z} es el óptimo del problema original (3.140)-(3.145), y su solución es $Y = \sum_{i=1, \dots, k+1} \lambda_i \bar{Y}_i$, donde \bar{Y}_i y λ_i son los puntos extremos y los multiplicadores duales de las correspondientes restricciones (3.222), $\forall i = 1, 2, \dots, k+1$, respectivamente.

En caso contrario, añadir la restricción (3.222) al actual problema maestro de Benders relajado y resolverlo. Hacer $k = k + 1$, e ir al **PASO 3**.

3.4 Descomposición de Dantzig-Wolfe

En esta sección se desarrolla el esquema de descomposición de Dantzig-Wolfe (véase Dantzig-Wolfe (1960) [8]) sobre el modelo de Recurso Total en el caso lineal, cuando éste se expresa bajo la Formulación Extendida. A diferencia del esquema basado en la descomposición de Benders que se lleva a cabo sobre el problema dual, esta otra técnica de descomposición se aplica directamente sobre el problema primal. No obstante, la estrategia de ambas descomposiciones es muy similar. En la descomposición de Dantzig-Wolfe se opera sobre dos modelos lineales, uno con un conjunto de restricciones generales llamadas restricciones complicantes y otro con un conjunto de restricciones con estructura de escalera que permite su descomposición por etapas. Al primero se le denomina *Problema Maestro* y al segundo *Problema Auxiliar*. Entre ambos problemas existe un flujo de información que nos aproxima cada vez más a la solución del problema original. Esto es, el problema maestro le da al problema auxiliar un vector de coeficientes de costo y recibe una nueva columna de la matriz de restricciones basada en dichos coeficientes. Por este motivo este esquema de descomposición también se le denomina de Generación de Columnas.

Retomemos la Formulación Extendida o Formulación con Restricciones Enganche presentada al principio del capítulo:

$$Z = \min h_0 Y_0 + h_0^{12} Y_0^{12} + \sum_{i=1,2,3} (h_i Y_i + h_{i0}^{23} Y_{i0}^{23}) + \sum_{i,j=1,2,3} h^j Y_{ij} \quad (3.226)$$

$$\text{s.a: } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0 \quad (3.227)$$

$$Y_0^{12} - Y_i^{12} = 0 \quad \forall i \quad (3.228)$$

$$D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i \quad \forall i \quad (3.229)$$

$$Y_{i0}^{23} - Y_{ij}^{23} = 0 \quad \forall i, j \quad (3.230)$$

$$D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j \quad \forall i, j \quad (3.231)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.232)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \quad \forall i \quad (3.233)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.234)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \forall i, j \quad (3.235)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \forall i, j \quad (3.236)$$

donde

$$Y^s \equiv (Y_0, Y^{12}, Y_i, Y_i^{23}, Y_{ij}) \quad (3.237)$$

Para simplificar el desarrollo, se supone que el conjunto de restricciones en forma de escalera, es decir,

$$X = \left\{ D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} \right. = b_0 \quad (3.238)$$

$$\left. D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} \right. = b_i \quad \forall i \quad (3.239)$$

$$\left. D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} \right. = b^j \quad \forall i, j \quad (3.240)$$

$$0 \leq Y_0 \leq u_0 \quad (3.241)$$

$$0 \leq Y_0^{12}, Y_i^{12} \leq u^{12} \forall i \quad (3.242)$$

$$0 \leq Y_i \leq u_i \quad \forall i \quad (3.243)$$

$$0 \leq Y_{i0}^{23}, Y_{ij}^{23} \leq u^{23} \forall i, j \quad (3.244)$$

$$0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij} \forall i, j \quad (3.245)$$

está acotado. Bajo tal suposición y puesto que X es convexo, todo punto de dicho poliedro X se puede expresar como una combinación lineal convexa de los puntos extremos del mismo. Esto es, si se denota por $Y_1^s, Y_2^s, \dots, Y_q^s$, dichos puntos extremos y sea Y^s un punto cualquiera del conjunto X , entonces se tiene que

$$Y^s = \sum_{k=1}^q \lambda_k Y_k^s \quad (3.246)$$

$$1 = \sum_{k=1}^q \lambda_k \quad (3.247)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (3.248)$$

Como consecuencia de (3.246)-(3.248), podemos transformar la Formulación con Restricciones Enganche (3.226)-(3.236) en un nuevo modelo cuyas variables sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, y al que se denomina "*Problema Maestro*".

$$Z = \min \sum_{k=1}^q \left\{ h_0 Y_{0k} + h_0^{12} Y_{0k}^{12} + \sum_{i=1}^3 (h_i Y_{ik} + h_{i0}^{23} Y_{i0k}^{23}) + \sum_{i,j=1}^3 h^j Y_{ijk} \right\} \lambda_k \quad (3.249)$$

$$\text{s.a: } \sum_{k=1}^q (Y_{0k}^{12} - Y_{ik}^{12}) \lambda_k = 0 \quad \forall i \quad (3.250)$$

$$\sum_{k=1}^q (Y_{i0k}^{23} - Y_{ijk}^{23}) \lambda_k = 0 \quad \forall i, j \quad (3.251)$$

$$\sum_{k=1}^q \lambda_k = 1 \quad (3.252)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (3.253)$$

Así mismo, el número de puntos extremos Y_k^s , de la región X es muy elevado, por lo que se intenta resolver el problema maestro (3.249)-(3.253) sin determinar explícitamente todos los puntos extremos. Esto nos conduce a un algoritmo basado en el esquema de descomposición de Dantzig-Wolfe, que consiste en introducir un nuevo punto extremo Y_p^s en el problema, siempre y cuando su correspondiente ponderación λ_p pueda ser pivoteada en la base, es decir, cuando el coste reducido de λ_p sea negativo, y por tanto, se pueda introducir en la base. Veamos a continuación el desarrollo de éste esquema de descomposición.

Se parte de una solución básica factible $\lambda = (\lambda_B, \lambda_N)$, la cual se puede obtener aplicando algunas de las modalidades del método del Simplex, como puede ser el método de penalización o el método de las dos fases. Esto es, en vez de considerar el problema maestro con todos los puntos extremos de X , se elige uno menos denso, con tantas columnas como variables λ_k haya en la base. Dada la solución λ , ésta se considera óptima o que debe ser incrementado el número de sus componentes mediante una variable no básica λ_p , según sea el signo de su coste reducido.

El coste reducido de cualquier variable no básica λ_k viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \bar{c}(\lambda_k) = & h_0 Y_{0k} + h_0^{12} Y_{0k}^{12} + \sum_{i=1}^3 (h_i Y_{ik} + h_{i0}^{23} Y_{i0k}^{23}) + \\ + & \sum_{i,j=1}^3 h^j Y_{ijk} - \sum_{i=1}^3 (Y_{0k}^{12} - Y_{ik}^{12}) \alpha^i - \sum_{i,j=1}^3 (Y_{i0k}^{23} - Y_{ijk}^{23}) \alpha^{ij} - \gamma \end{aligned} \quad (3.254)$$

donde $(\alpha^i, \alpha^{ij}, \gamma)$ es el vector de variables duales de las restricciones del problema maestro (3.249)-(3.253). La variable candidata para entrar en la base será aquella con el menor coste reducido negativo, es decir, aquella λ_p tal que

$$\bar{c}(\lambda_p) = \min_k \bar{c}(\lambda_k) \quad (3.255)$$

$$\text{s.a:} \quad \bar{c}(\lambda_k) \leq 0 \quad (3.256)$$

La determinación directa de la variable " λ_p " es computacionalmente casi imposible, debido a que el número q de puntos extremos es muy grande y los puntos extremos Y_k^s , correspondientes a las variables no básicas λ_k , no se conocen en su totalidad. No obstante, dicha variable λ_p coincide con la ponderación correspondiente al punto extremo Y_p^s , solución del siguiente problema lineal al que se hace referencia como "*Problema Auxiliar*".

$$\begin{aligned} \min & h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1}^3 \alpha^i \right) Y_0^{12} + \\ + & \sum_{i=1}^3 \left[\alpha^i Y_i^{12} + h_i Y_i + \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1}^3 \alpha^{ij} \right) Y_{i0}^{23} \right] + \sum_{i,j=1}^3 (\alpha^{ij} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij}) \end{aligned} \quad (3.257)$$

$$\text{s.a:} \quad Y^s \in X \quad (3.258)$$

Nótese que el modelo (3.257)-(3.258) posee la estructura en forma de escalera, que nos permite su descomposición en los siguientes submodelos de redes independientes de menores dimensiones.

$$P_0 \equiv \min h_0 Y_0 + \left(h_0^{12} - \sum_{i=1}^3 \alpha^i \right) Y_0^{12} \quad (3.259)$$

$$\text{s.a } D_0 Y_0 + D_0^{12} Y_0^{12} = b_0, \quad 0 \leq Y_0 \leq u_0, \quad 0 \leq Y_0^{12} \leq u^{12}$$

$$P_i \equiv \min \alpha^i Y_i^{12} + h_i Y_i + \left(h_{i0}^{23} - \sum_{j=1}^3 \alpha^{ij} \right) Y_{i0}^{23} \quad (3.260)$$

$$\text{s.a } D_i^{12} Y_i^{12} + D_i Y_i + D_{i0}^{23} Y_{i0}^{23} = b_i, \quad 0 \leq Y_i^{12} \leq u^{12}, \quad 0 \leq Y_i \leq u_i, \quad 0 \leq Y_{i0}^{23} \leq u^{23}$$

$$P_{ij} \equiv \alpha^{ij} Y_{ij}^{23} + h^j Y_{ij} \quad (3.261)$$

$$\text{s.a } D_{ij}^{23} Y_{ij}^{23} + D^j Y_{ij} = b^j, \quad 0 \leq Y_{ij}^{23} \leq u^{23}, \quad 0 \leq Y_{ij} \leq u_{ij}$$

Otro aspecto a resaltar de los subproblemas (3.260) para todo i , y (3.261) para todo i, j , es que se pueden resolver aplicando técnicas de computación en paralelo, lo que agiliza la resolución del problema auxiliar (3.257)-(3.258). Fijémonos además, que la función objetivo del problema auxiliar (3.257)-(3.258), contiene una constante " γ ". Esto no supone ningún problema, ya que tan sólo bastaría con inicializar el valor de Z en vez de a 0 como es la norma habitual, a γ .

Por consiguiente, si el coste reducido de la variable " λ_p " asociada con el óptimo del problema auxiliar Y_p^s es positivo, la solución actual es óptima. En caso contrario, habrá que introducirla en la base llevando a cabo el correspondiente pivotaje de acuerdo con el procedimiento del Simplex. Esto implica el que se añada la columna correspondiente a dicho punto extremo Y_p^s al problema maestro actual. Una vez hecho esto se repite el proceso.

A partir del procedimiento de descomposición de Dantzig-Wolfe, se presenta el siguiente algoritmo que resuelve la Formulación Extendida o Formulación con Restricciones Enganche (3.226)-(3.236).

Algoritmo

PASO 1: Inicializar $s = 1$. Construir un problema maestro (3.249)-(3.253), con tantas columnas como restricciones haya, y resolverlo. Sea $\lambda_s = (\lambda_B, \lambda_N)$ la solución óptima del mismo.

PASO 2: Calcular las variables duales $(\alpha^i, \alpha^{ij}, \gamma)$ de las restricciones del actual problema maestro (3.249)-(3.253).

PASO 3: Con el actual vector $(\alpha^i, \alpha^{ij}, \gamma)$ construir el problema auxiliar (3.257)-(3.258) y resolverlo. Sea Y_p^s la solución del mismo.

PASO 4: Si el coste reducido correspondiente a la ponderación de Y_p^s , $\bar{c}(\lambda_p) \geq 0$, parar. La solución básica factible del actual problema maestro es la óptima.

En caso contrario, actualizar $s = s + 1$, añadir la columna correspondiente a tal punto extremo Y_p^s al problema maestro actual, y resolverlo. Ir al **PASO 2**.

Como se puede observar en cada iteración del algoritmo anterior, el problema maestro mejora la solución factible del problema original, mientras que el problema auxiliar revisa los costes reducidos de las variables no básicas. Este algoritmo alcanza la solución en un número finito de pasos, puesto que aunque el número de puntos extremos del conjunto X es elevado, también es finito.

3.5 Metodología de Puntos Interiores

Si se compara la Formulación Compacta (2.1)-(2.10), con la Formulación Extendida (3.2)-(3.13), se puede apreciar como ésta última formulación reduce la densidad de las columnas de la matriz de condiciones. Esto supone una ventaja a la hora de aplicar cualquiera de los métodos de Puntos Interiores (véase Lusting y otros (1991) [43]), ya que en estos se ha de resolver de forma iterativa un sistema de ecuaciones de la forma ADA^t , donde D es una matriz diagonal que varía en función del tipo de método utilizado, y A es la matriz de condiciones global del modelo (véase sección 2.4). Obsérvese en la Formulación Extendida del

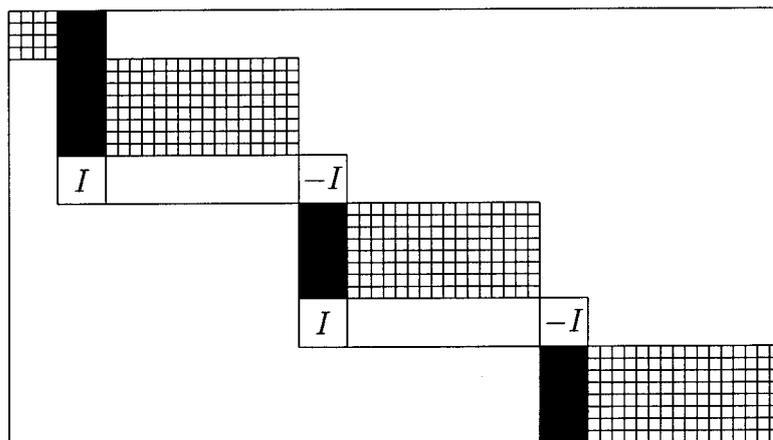


Figura 3.2: Matriz A de la Formulación con Variables Divididas

modelo que al desdoblar las variables enganche entre las etapas según los distintos escenarios e imponer las condiciones de implementabilidad, se reduce la densidad de las columnas de la matriz de condiciones (véanse las Figuras 3.1 y 3.2).

Por otro lado, la representación (3.2)-(3.13) aumenta las dimensiones del modelo, lo que perjudica la aplicación del método del Simplex, aunque reduce notablemente el esfuerzo computacional cuando se utilizan los algoritmos de Puntos Interiores. El motivo de ello, es que los valores no nulos de la matriz de restricciones tienden a estar más en la diagonal (véanse las Figuras 3.1 y 3.2). De aquí, el que la matriz resultante ADA^t no sea demasiado densa (véase Figura 3.3).

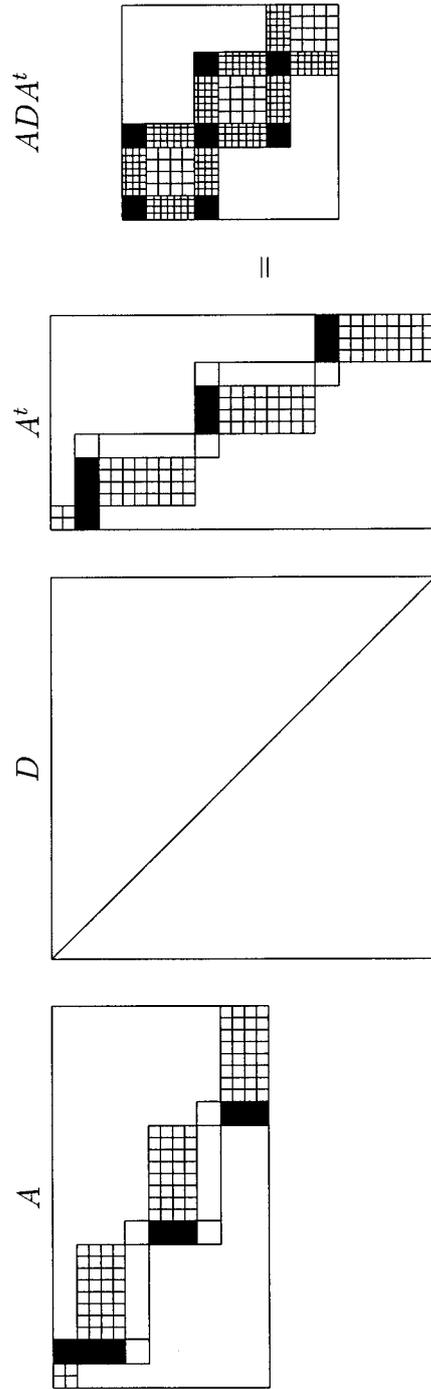


Figura 3.3: Representación de (ADA^t)

Por otra parte, una desagregación más fuerte a la indicada anteriormente, pero con unas características más apropiadas para la utilización de la metodología de Puntos Interiores, consiste en reemplazar las restricciones enganche

$$Y_0^{12} = Y_i^{12} \quad \text{e} \quad Y_{i0}^{23} = Y_{ij}^{23} \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

por las siguientes restricciones matemáticamente equivalentes (véase Figura 3.4)

$$Y_0^{12} = Y_1^{12} \tag{3.262}$$

$$Y_{i-1}^{12} = Y_i^{12} \quad \forall i = 2, 3, \tag{3.263}$$

$$Y_{i0}^{23} = Y_{i1}^{23} \quad \forall i = 1, 2, 3, \tag{3.264}$$

$$Y_{i,j-1}^{23} = Y_{ij}^{23} \quad \forall j = 2, 3, \tag{3.265}$$

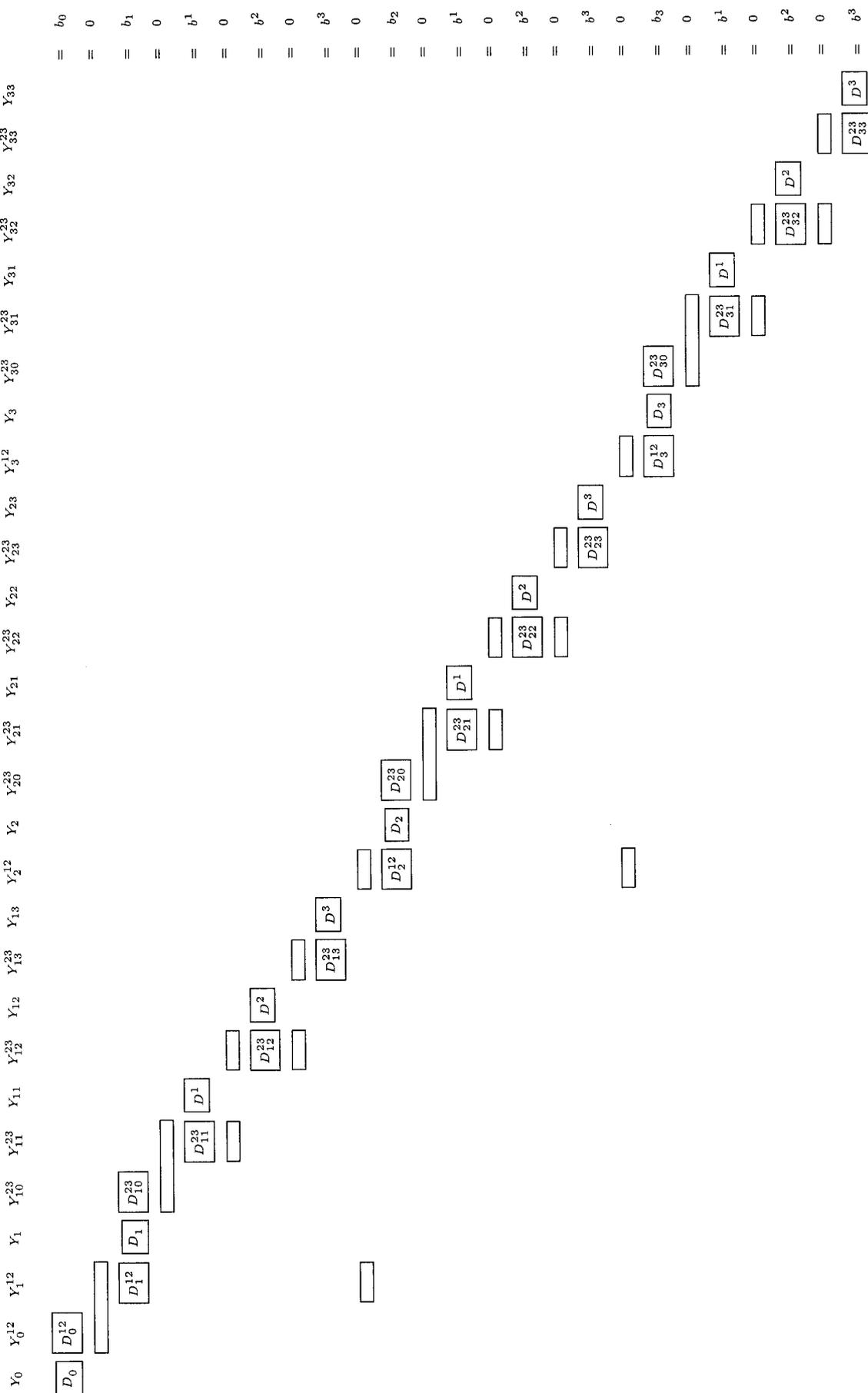


Figura 3.4: Formulación Extendida Reordenada

Capítulo 4
Justificación de la metodología de
análisis de escenarios

Capítulo 4

Justificación de la Metodología de Análisis de Escenarios

4.1 Modelización Determinista Anticipativa

Hasta ahora se ha considerado los problemas de optimización multiperíodo en redes bajo incertidumbre, mediante la técnica de "Análisis de Escenarios". Sin embargo, alternativa-mente a esta estrategia que propone como solución la más próxima a las soluciones óptimas de los problemas determinísticos bajo cada uno de los escenarios, se podría tomar como solución la del problema determinístico construido a partir del valor medio de los parámetros estocásticos, que determinan cada uno de los escenarios. No obstante esto supondría un inconveniente, veamos cual sería con un caso particular de este tipo de problemas, el de Planificación de Inversiones. Así como las ventajas de utilizar el Análisis de Escenarios junto con el principio de No Anticipatividad sobre dicho ejemplo de Planificación de Inversiones.

Consideremos el problema de planificación de inversiones en una cartera de valores con varios activos financieros bajo un entorno de incertidumbre. Utilizando la siguiente notación:

K , conjunto de activos financieros en los que invertir, es decir, Acciones, Bonos, Letras del Tesoro, etc.

T , conjunto de períodos anuales que constituyen el horizonte temporal de planificación.

I , capital inicial disponible para invertir en la cartera de valores.

W , beneficio objetivo del inversor, que se intenta superar o al menos alcanzar al final del horizonte temporal de planificación. En esta cantidad se considera la inversión inicial I más el propio beneficio de la inversión.

Se supone que no existe coste de transacción en la compra-venta de los activos financieros, y que el inversor valora más el incremento del beneficio cuando está por debajo del establecido W , que el mismo incremento cuando lo supera.

El objetivo del problema consiste en proponer una política de inversión financiera, que maximice el beneficio al finalizar el horizonte temporal de planificación. La forma más simple de representar dicha política, es establecer una función de utilidad del beneficio W , la cual suele ser lineal y definida en intervalos, variando su expresión según se supere el umbral W , o no se alcance. En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran algunos ejemplos de la forma de la citada función de utilidad. En dichas figuras se considera:

- p , ponderación favorable asignada al exceso de beneficio, y
- q , penalización para el defecto del mismo.

Sean además las siguientes componentes del modelo:

r_{kt} , tasa de rentabilidad al final del período de tiempo t , por unidad invertida en el activo financiero k al comienzo de dicho período de tiempo, para $k \in K$ y $t \in T$

e , exceso de beneficio con respecto al fijado por el inversor W .

d , defecto de beneficio con respecto al fijado por el inversor W .

Variables de Decisión

x_{kt} , capital invertido en el activo financiero k al comienzo del período de tiempo t , para $k \in K$ y $t \in T$.

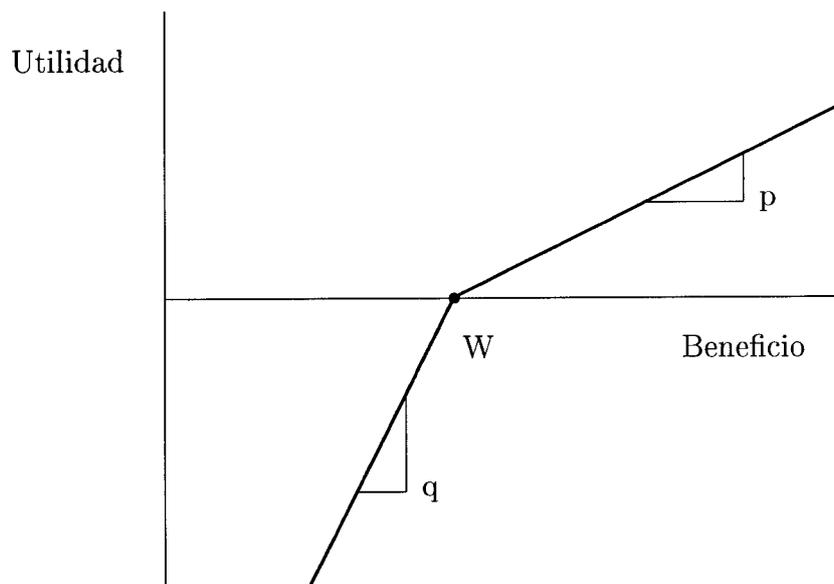


Figura 4.1: Función 1 de Utilidad sobre el Beneficio W

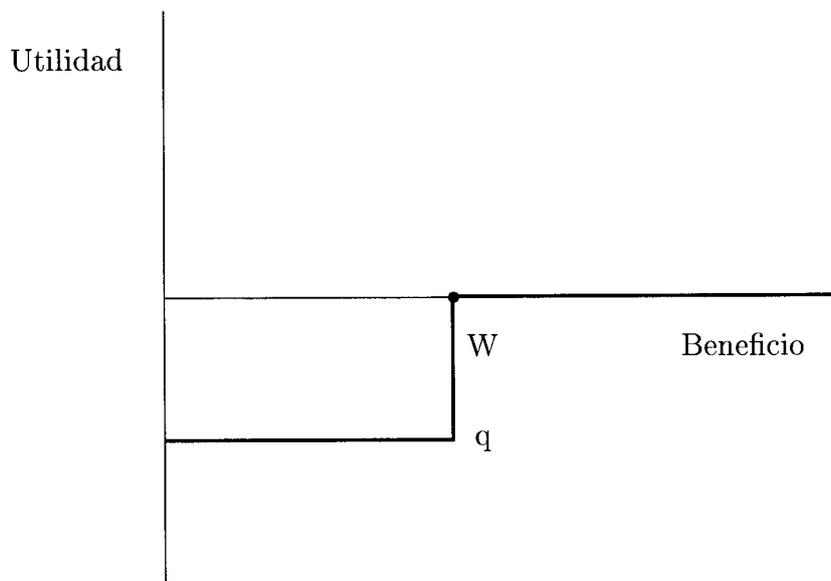


Figura 4.2: Función 2 de Utilidad sobre el Beneficio W

Objetivo

El objetivo del problema de planificación de inversiones en una cartera de valores, consiste en obtener la política de inversión financiera $\{x_{kt}\}$, que maximice la utilidad del beneficio objetivo del inversor, es decir, maximice el exceso de beneficio ponderado y minimice el defecto de beneficio penalizado. Dicho planteamiento se recoge en el siguiente modelo.

$$\max \quad pe - qd \quad (4.1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{k \in K} x_{k1} = I \quad (4.2)$$

$$- \sum_{k \in K} r_{kt-1} x_{kt-1} + \sum_{k \in K} x_{kt} = 0 \quad \forall t \in T - \{1\} \quad (4.3)$$

$$\sum_{k \in K} r_{k|T|} x_{k|T|} - e + d = W \quad (4.4)$$

$$x_{kt}, \quad e, \quad d \geq 0 \quad \forall k \in K, t \in T \quad (4.5)$$

El conjunto de restricciones del modelo anterior tiene el siguiente significado. La primera restricción (4.2) indica que la suma de las cantidades invertidas en cada uno de los activos financieros en el primer período de tiempo, ha de ser igual al capital inicial disponible para invertir. Las siguientes $(|T| - 1)$ restricciones, o sea, el bloque de restricciones (4.3), representa la ecuación de equilibrio entre el rendimiento total que se obtiene a partir de la inversión hecha sobre los activos al final de un período de tiempo dado, y la inversión que se realiza sobre los mismos activos al inicio del siguiente período. La última restricción (4.4) indica que el beneficio obtenido en el último período del horizonte de planificación, menos el exceso de beneficio que se haya producido, o en su caso, más el defecto si no se ha alcanzado, tiene que coincidir con el beneficio establecido a priori por el inversor.

Ejemplo 4.1: Supongamos el caso de dos activos financieros $k = \{1, 2\}$, tres períodos de tiempo anuales $T = \{1, 2, 3\}$, y los siguientes valores de los parámetros del modelo:

- inversión inicial $I = 55$.
- beneficio objetivo $W = 80$.
- ponderación del exceso de beneficio $p = 1$.
- penalización del defecto de beneficio $q = 4$.

Además, en la Tabla 4.1 se muestran las tasas de rentabilidad por unidad invertida en los dos activos financieros (acciones y bonos). Se consideran dos perspectivas, o en la terminología de decisión estados de la naturaleza de la tasa de rentabilidad, cada una con igual probabilidad.

Tabla 4.1: Parámetros del Ejemplo 4.1

Activos Financieros	Acciones	Bonos
Perspectivas de las Tasas de Rentabilidad		
Alta	1.25	1.14
Baja	1.06	1.12
Tasa de Rentabilidad Media	1.155	1.13

Para simplificar el problema se considera que cada nivel de perspectiva se da al mismo tiempo para ambos activos financieros. Bajo estas condiciones, la Figura 4.3 recoge el árbol de escenarios y posibles perspectivas de los beneficios en bonos y acciones en cada período de tiempo.

El modelo lineal determinístico construido a partir de la tasa de rentabilidad media recogida en la Tabla 4.1 tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 55 \\
 & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + x_{12} + x_{22} = 0 \\
 & \quad \quad \quad -1.155x_{12} - 1.13x_{22} + x_{13} + x_{23} = 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1.155x_{13} + 1.13x_{23} - e + d = 80 \\
 & x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, x_{13}, x_{23}, e, d \geq 0
 \end{aligned}$$

Resolviendo dicho problema de programación lineal se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 55, & x_{12} &= 63.525, & x_{13} &= 73.372, \\
 x_{21} &= 0, & x_{22} &= 0, & x_{23} &= 0, \\
 e &= 4.74, & d &= 0
 \end{aligned}$$

Se denominará Valor Medio Determinístico (*VMD*) al valor óptimo del modelo determinístico construido con la tasa de rentabilidad media. Como se puede ver dicho óptimo vale $VMD = 4.74$.

En realidad, si al inversor le recomendasen la política financiera anterior, dudaría mucho de la precisión de las decisiones, ya que sólo se invierte en uno de los activos financieros, por

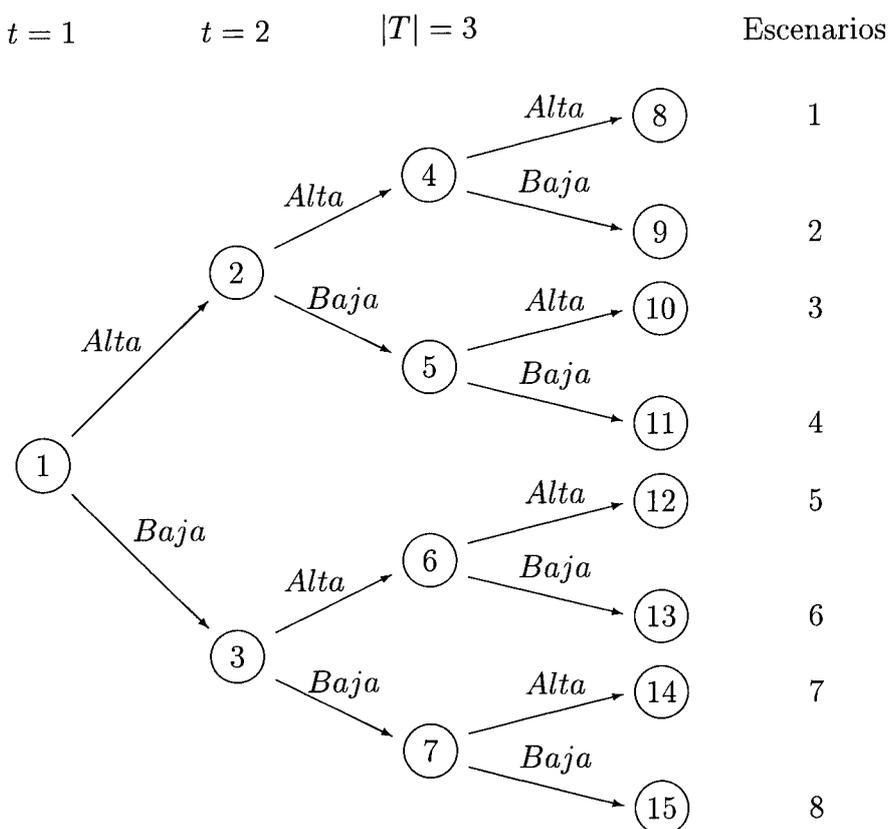


Figura 4.3: Árbol de Escenarios del Problema de Planificación de Inversiones

tanto, el plan de inversión sería muy arriesgado. De hecho, dicha política no es la adecuada si comparamos el valor medio determinístico con el valor medio esperado de la función objetivo cuando únicamente se invierte en acciones. Independientemente de la inversión que se realice, el valor medio esperado como óptimo del modelo viene dado por la siguiente expresión:

$$VME = \sum_{j=1, \dots, 8} w^j (e^j - 4d^j) \quad (4.6)$$

donde

w^j , es la probabilidad del escenario $j = 1, 2, \dots, 8$, y

e^j y d^j , son el exceso y el defecto del beneficio fijado W , para cada escenario $j = 1, 2, \dots, 8$.

Para llevar a cabo la comprobación anterior se presentan las dos alternativas siguientes:

1.- Inversión sólo en acciones. Sustituyendo por los correspondientes valores del Ejemplo 4.1 en la expresión dada del valor medio esperado (véase el árbol de escenarios de la Figura 4.4), se obtiene :

$$VME = (107.42 - 80)0.125 + (91.1 - 80)0.375 -$$

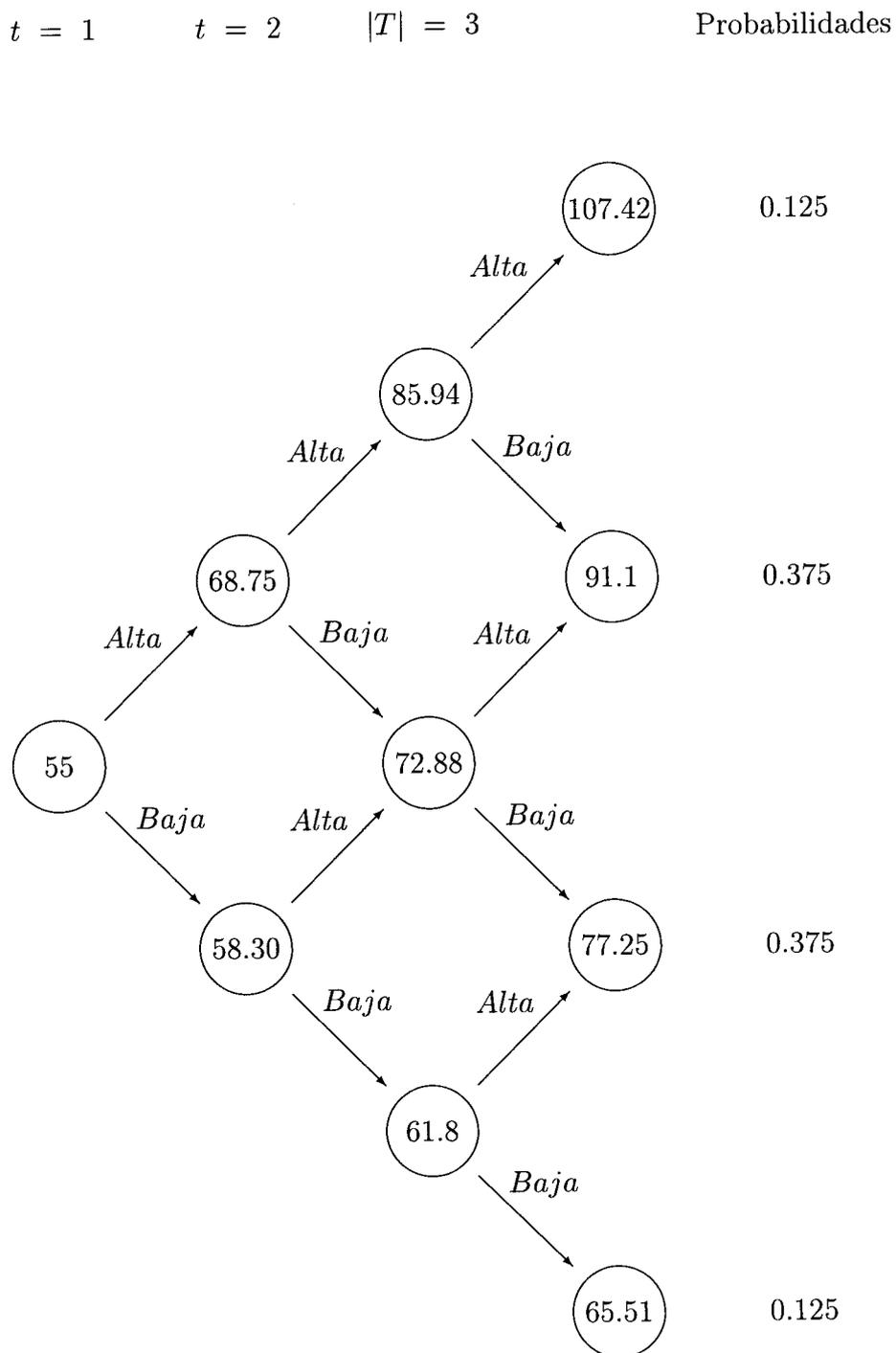


Figura 4.4: Árbol de Escenarios con Inversión única en Acciones

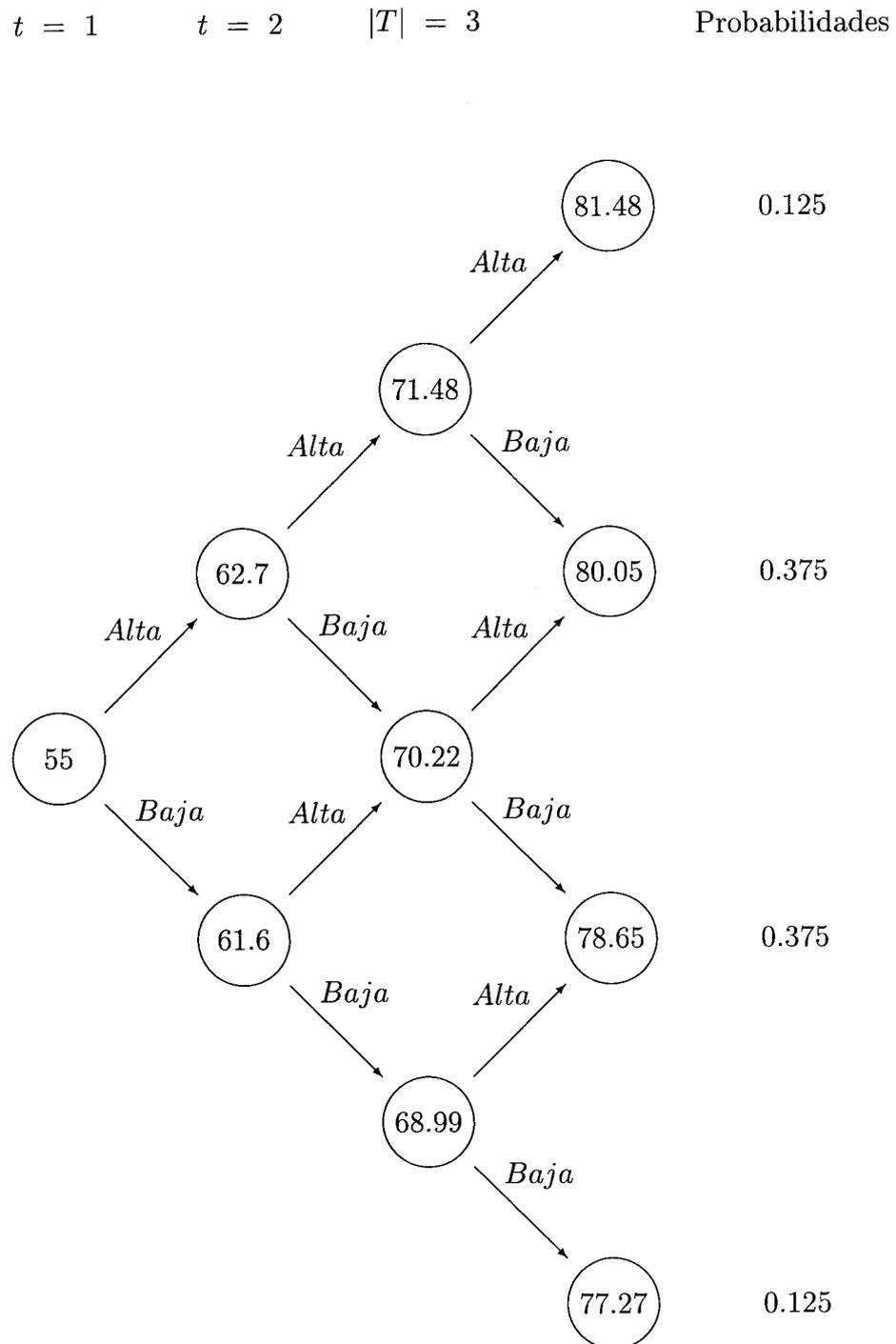


Figura 4.5: Árbol de Escenarios con Inversión única en Bonos

$$- 4[(80 - 77.25)0.375 + (80 - 65.51)0.125]$$

Esto es,

$$VME = - 3.78$$

Este valor medio esperado $VME = -3.78$ indica que el beneficio establecido por el inversor no se alcanza con probabilidad $1/2$. Si se compara dicho valor con el valor medio determinístico VMD , cuya solución sólo invierte en acciones, resulta que

$$VMD = 4.74 > - 3.78 = VME$$

Mientras el primero es positivo y por tanto, indica erróneamente que se supera el beneficio establecido, el segundo es negativo, lo que indica que no lo alcanza. Luego el modelo no sería el adecuado.

2.- Inversión sólo en bonos. El árbol recogido en la Figura 4.5 muestra las posibilidades de este caso. El valor medio esperado como óptimo del problema sería el siguiente:

$$VME = (81.48 - 80)0.125 + (80.05 - 80)0.375 - \\ - 4[(80 - 78.65)0.375 + (80 - 77.27)0.125]$$

Esto es,

$$VME = - 3.186$$

Como conclusión al análisis efectuado sobre la estrategia de inversión en un único activo financiero, se puede indicar que la estrategia sugerida por el modelo determinístico construido a partir de la tasa de rentabilidad media no sólo es errónea en la indicación del resultado a esperar con el plan de inversión propuesto, sino que incluso el plan opuesto, es decir, la inversión única en bonos en lugar de acciones proporcionaría mejores resultados.

4.2 Modelización Determinista No Anticipativa

Otra estrategia que suelen utilizar los inversores consiste en no anticipar completamente el plan de inversiones desde el primer período hasta el último, sino observar lo que sucede en cada uno de los períodos y en función de esto, tomar la decisión más apropiada. Esto es, dependiendo del grupo de escenarios al que corresponda la perspectiva analizada para cada período de tiempo, se aplica un modelo determinístico construido a partir de las tasas de rentabilidad medias del mismo tipo que el modelo anterior, pero con diferente inversión

inicial según el beneficio obtenido en el período previo. Por supuesto, a medida que avanza el proceso, el modelo que se ejecuta en cada nodo del árbol de escenarios va siendo cada vez más pequeño, pues el modelo para un período dado no considera las decisiones de los períodos anteriores. A continuación se utiliza esta estrategia con el *Ejemplo 4.1*. Sea el siguiente modelo para el primer período de tiempo, es decir, el correspondiente al nodo 1 de la Figura 4.3.

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 55 \\
 & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + x_{12} + x_{22} = 0 \\
 & \quad -1.155x_{12} - 1.13x_{22} + x_{13} + x_{23} = 0 \\
 & \quad \quad \quad 1.155x_{13} + 1.13x_{23} - e + d = 80 \\
 & x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, x_{13}, x_{23}, e, d \geq 0
 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 55, & x_{12} &= 63.525, & x_{13} &= 73.372, \\
 x_{21} &= 0, & x_{22} &= 0, & x_{23} &= 0, \\
 e &= 4.74, & d &= 0
 \end{aligned}$$

En el segundo período de tiempo, dependiendo del resultado obtenido, se ejecuta uno de los dos modelos siguientes. Si al final del primer período ha ocurrido la perspectiva de tasa alta de rentabilidad, el modelo para el segundo período, es decir, en el nodo 2 de la Figura 4.3 sería como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 68.75 \\
 & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + x_{12} + x_{22} = 0 \\
 & \quad -1.155x_{12} - 1.13x_{22} - e + d = 80 \\
 & x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, e, d \geq 0
 \end{aligned}$$

con la correspondiente solución

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 68.75, & x_{12} &= 79.406, \\
 x_{21} &= 0, & x_{22} &= 0, \\
 e &= 11.71, & d &= 0
 \end{aligned}$$

En el caso de que se cumplan en el primer período las perspectivas de tasa baja de rentabilidad, el modelo para el segundo período, es decir, en el nodo 3 de la Figura 4.3, sería el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 58.3 \\
 & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + x_{12} + x_{22} = 0 \\
 & -1.155x_{12} - 1.13x_{22} - e + d = 80 \\
 & x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, e, d \geq 0
 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 58.3, & x_{12} &= 67.33, \\
 x_{21} &= 0, & x_{22} &= 0, \\
 e &= 0, & d &= 2.226
 \end{aligned}$$

En el tercer período de tiempo son sólo tres modelos a ejecutar, ya que para este ejemplo dos coinciden. A continuación se presentan estos modelos junto con sus soluciones.

En el nodo 4 de la Figura 4.3:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 85.94 \\
 & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + e + d = 80 \\
 & x_{11}, x_{21}, e, d \geq 0
 \end{aligned}$$

siendo su solución la siguiente:

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 85.94 & e &= 19 \\
 x_{21} &= 0 & d &= 0
 \end{aligned}$$

En los nodos 5 y 6 de la Figura 4.3:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 72.88 \\
 & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + e + d = 80 \\
 & x_{11}, x_{21}, e, d \geq 0
 \end{aligned}$$

con la solución siguiente:

$$\begin{aligned}x_{11} &= 72.88 & e &= 4.17 \\x_{21} &= 0 & d &= 0\end{aligned}$$

En el nodo 7 de la Figura 4.3:

$$\begin{aligned}\max \quad & e - 4d \\ \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 61.8 \\ & -1.155x_{11} - 1.13x_{21} + e + d = 80 \\ & x_{11}, x_{21}, e, d \geq 0\end{aligned}$$

cuya solución es como sigue:

$$\begin{aligned}x_{11} &= 61.8 & e &= 0 \\x_{21} &= 0 & d &= 8.62\end{aligned}$$

La Figura 4.6 recoge las decisiones no anticipativas correspondientes a los modelos anteriores. Estas decisiones son las correspondientes al primer período de tiempo de cada modelo. Como se puede observar, esta estrategia tampoco produce diversificación en la inversión, coincidiendo los resultados con los valores esperados si sólo se invirtiera en acciones.

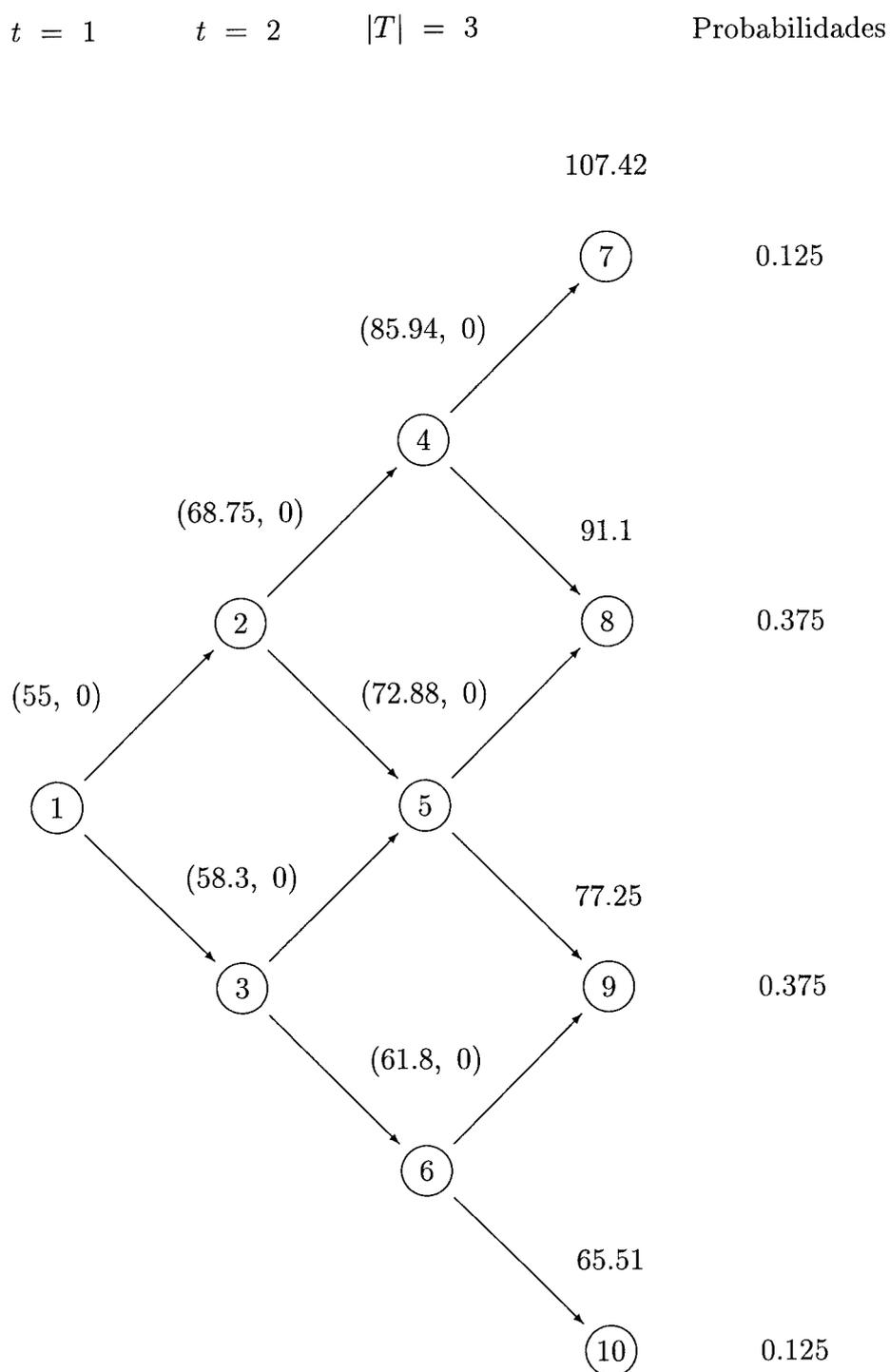


Figura 4.6: Árbol Solución del Modelo Determinista pero No Anticipativo

4.3 Modelización Determinista con Condiciones de Diversificación

Los inversores que basan su estrategia en valores medios de los parámetros son la mayoría hoy en día, sin embargo, ante el riesgo que perciben en la inversión única, éstos suelen imponer unas condiciones para diversificar la inversión. La justificación de estas condiciones no suele ser muy rigurosa, como se argumenta más adelante. Así por ejemplo, sea la condición que exige que la inversión sobre cualquier activo financiero en todo período de tiempo, no supere el 70% de la cuantía total a invertir. Esto se traduce matemáticamente, en añadir las siguientes restricciones al modelo determinista.

$$x_{k1} \leq 0.70 I \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$x_{kt} \leq \sum_{k \in K} 0.70 r_{kt-1} x_{kt-1} \quad \forall k \in K, \quad y \quad \forall t \in T - \{1\} \quad (4.8)$$

Por tanto, el modelo de inversiones con carácter diversificado sería el siguiente:

$$\max \quad pe - qd \quad (4.9)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{k \in K} x_{k1} = I \quad (4.10)$$

$$- \sum_{k \in K} r_{kt-1} x_{kt-1} + \sum_{k \in K} x_{kt} = 0 \quad \forall t \in T - \{1\} \quad (4.11)$$

$$\sum_{k \in K} r_{k|T|} x_{k|T|} - e + d = W \quad (4.12)$$

$$x_{k1} \leq 0.70 I \quad \forall k \in K \quad (4.13)$$

$$x_{kt} \leq \sum_{k \in K} 0.70 r_{kt-1} x_{kt-1} \quad \forall k \in K \quad y \quad \forall t \in T - \{1\} \quad (4.14)$$

$$x_{kt}, \quad e, \quad d \geq 0 \quad \forall k \in K \quad y \quad \forall t \in T \quad (4.15)$$

Para el *Ejemplo 4.1*, el modelo de inversiones anterior tendría la siguiente expresión:

$$\begin{array}{rcl}
& \max & e - 4d \\
\text{s.a:} & x_{11} + x_{21} & = 55 \\
& - 1.155 x_{11} - 1.13 x_{21} + x_{12} + x_{22} & = 0 \\
& & - 1.155 x_{12} - 1.13 x_{22} + x_{13} + x_{23} & = 0 \\
& & & 1.155 x_{13} + 1.13 x_{23} - e + d = 80 \\
& - 0.808 x_{11} - 0.79 x_{21} + x_{12} & \leq 0 \\
& - 0.808 x_{11} - 0.79 x_{21} + x_{22} & \leq 0 \\
& & - 0.808 x_{12} - 0.79 x_{22} + x_{13} & \leq 0 \\
& & - 0.808 x_{12} - 0.79 x_{22} + x_{23} & \leq 0 \\
& x_{11} & \leq 38.5 \\
& & x_{21} & \leq 38.5 \\
& x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, x_{13}, x_{23}, e, d & \geq 0
\end{array}$$

y la solución del mismo la siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
x_{11} = 38.5 & x_{12} = 44.143 & x_{13} = 50.653 \\
x_{21} = 16.5 & x_{22} = 18.97 & x_{23} = 21.767 \\
e = 3.1 & d = 0 &
\end{array}$$

Se puede observar que efectivamente, hay un reparto de la inversión entre los dos activos, pero no debido a la forma de optimización llevada a cabo, sino a las condiciones impuestas por el inversor para evitar dicho problema. En cualquier caso, el *VMD* se ha reducido de 4.74 a 3.1. Por otra parte, también hemos de notar que en la práctica dichas condiciones no tienen por que verificarse. De hecho, si nos fijamos en el árbol que recoge la Figura 4.7, vemos que éstas no se cumplen. Los pares de valores que muestran los nodos del árbol, representan los beneficios obtenidos en el período anterior, e implícitamente la inversión correspondiente al nuevo período para cada uno de los activos. Partiendo de la inversión inicial obtenida en la solución del modelo determinístico con condiciones que fuerzan a la diversificación, y manteniendo la estrategia de que el beneficio obtenido en cada activo, se reinvierte en el mismo activo en el siguiente período de tiempo, se puede observar que se viola la condición de que la inversión en cada activo no supere el 70% del total invertido en la mayoría de los

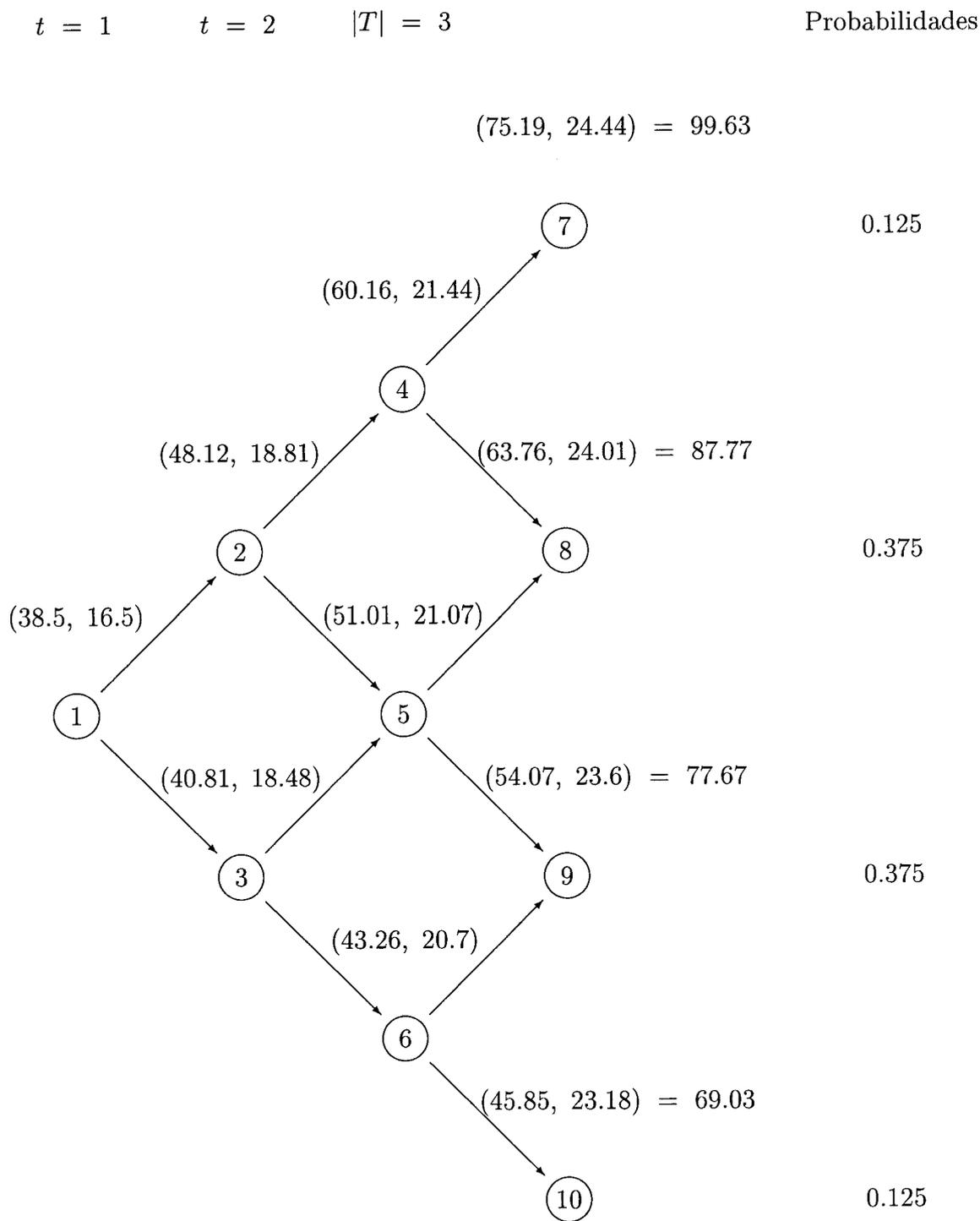


Figura 4.7: Árbol de Escenarios con Inversión Diversificada

escenarios que se presentan. Así por ejemplo, para el caso del nodo 2 de la Figura 4.7, nodo del segundo período de tiempo, se invierte un 48.12 en el primer activo y un 18.81 en el segundo. Sin embargo, 48.12 ya supera a 46.85 que es el 70% de la inversión total en ese período de tiempo.

Por otra parte el valor medio esperado correspondiente al modelo con condiciones que fuerzan a la diversificación es:

$$VME = (99.63 - 80)0.125 + (87.77 - 80)0.375 - \\ - 4[(80 - 77.67)0.375 + (80 - 69.03)0.125]$$

Esto es,

$$VME = -3.612$$

Como vemos dicho valor es negativo, e indica lo contrario que el valor medio determinístico $VMD = 3.1$, es decir, no se alcanza el beneficio fijado por el inversor, y en cambio, según el modelo se supera.

De forma análoga a como se ha descrito para el caso en el que no se fuerza a la diversificación, en la práctica se replantea la estrategia de inversión, forzando obviamente la condición de diversificación, en cada período de tiempo según la perspectiva correspondiente, es decir, se considera el modelo con condiciones de diversificación no anticipativo. No se muestran los dos modelos del segundo período, ni los cuatro del tercero, dado que el planteamiento es muy parecido al efectuado anteriormente. Sin embargo, la Figura 4.8 recoge las soluciones de los mismos, aunque no de forma total, sino solamente las decisiones de los primeros períodos de tiempo correspondientes a los modelos con condiciones de diversificación asociados a cada nodo según la perspectiva que se observe.

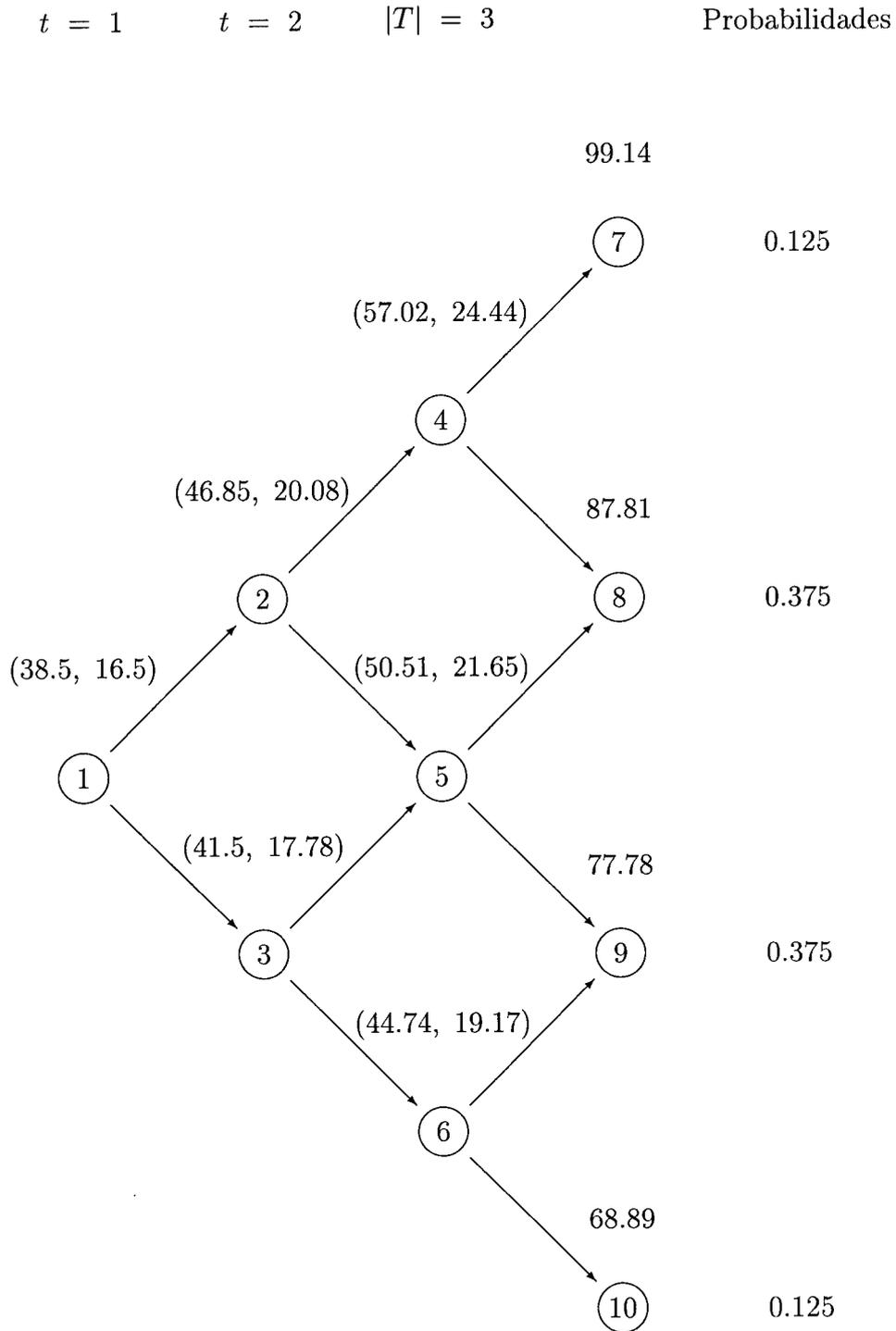


Figura 4.8: Solución del Modelo No Anticipativo con Condiciones de Diversificación

El valor esperado como óptimo bajo esta otra estrategia sería el siguiente:

$$VME = (99.14 - 80)0.125 + (87.81 - 80)0.375 - \\ - 4[(80 - 77.78)0.375 + (80 - 68.89)0.125]$$

Esto es,

$$VME = - 3.531$$

Por supuesto, como se puede ver en los resultados, hay diversificación en la inversión, y como se analiza lo que sucede en cada nodo del árbol, los modelos evitan que se violen las condiciones de diversificación impuestas. Sin embargo, ésta no es una diversificación natural debida al propio modelo, e igualmente se hubiera conseguido una diversificación de la inversión, imponiendo otra clase de restricciones que incluso pudieran ser mejores, en el sentido de que produjesen un valor esperado más adecuado.

4.4 Diversificación Natural. Análisis de Escenarios

El planteamiento del problema cuando se aplica Análisis de Escenarios requiere la siguiente notación:

S , conjunto de escenarios.

G_t , conjunto de grupos de escenarios para el período de tiempo t , con $t \in T$.

$S_i \subseteq S$, conjunto de escenarios en el grupo de escenarios i , para el período de tiempo t , con $i \in G_t$, y $t \in T$.

A , conjunto de arcos en el árbol de escenarios, tal que el arco $(i, j) \in A$, siempre y cuando $S_j \subseteq S_i$, para $i \in G_t$, $j \in G_{t+1}$ y $t \in T$.

r_{kt}^i , tasa de rentabilidad por unidad invertida en el activo financiero k , al final del período de tiempo t bajo el grupo de escenarios i , para $i \in G_{t+1}$ y $t \in T$.

Variables de Decisión

x_{kt}^i , capital invertido en el activo financiero k al comienzo del período de tiempo t , para $i \in G_t$, $k \in K$, y $t \in T$.

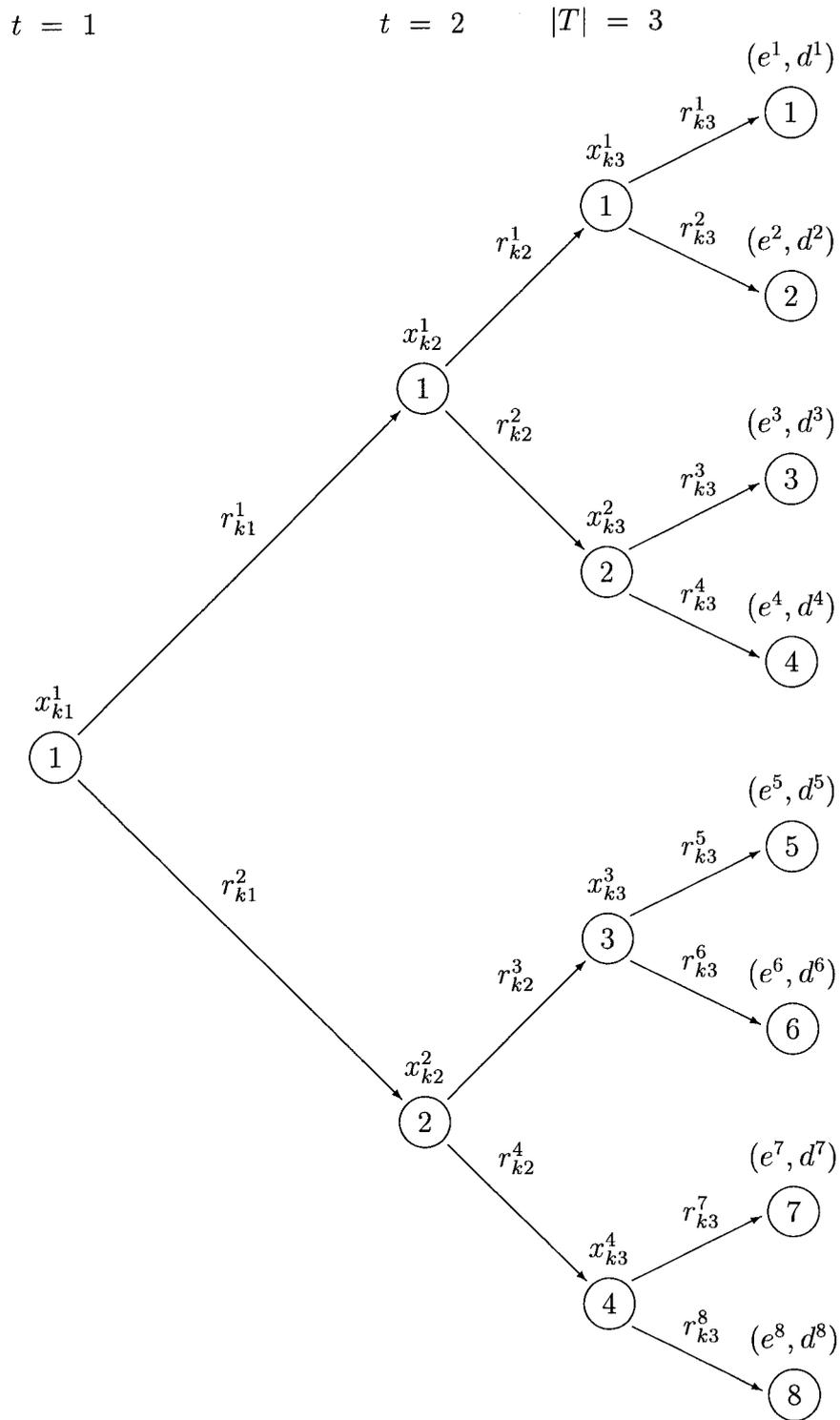


Figura 4.9: Árbol de Escenarios Generalizado

Manteniendo la condición de que si se produce un rendimiento alto o bajo, de uno de los dos productos financieros, lo es también para el otro, la Figura 4.9 presenta el árbol de escenarios para el caso particular considerado, con $|T| = 3$ períodos de tiempo, 2 perspectivas en cada período de tiempo, y en consecuencia $|S| = 8$ escenarios. En dicho árbol se pueden observar los siguientes subconjuntos:

$$G_1 = \{1\}, \quad G_2 = \{1, 2\}, \quad \text{y} \quad G_3 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$S_1 = S = \{1, 2, 3, \dots, 8\}, \quad \text{para } 1 \in G_1$$

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \text{y} \quad S_2 = \{5, 6, 7, 8\} \quad \text{para } 1 \text{ y } 2 \in G_2$$

$$S_1 = \{1, 2\}, \quad S_2 = \{3, 4\}, \quad S_3 = \{5, 6\}, \quad \text{y} \quad S_4 = \{7, 8\} \quad \text{para } 1, 2, 3, \text{ y } 4 \in G_3$$

El modelo de Recurso Total, donde además se contempla el principio de No Anticipatividad, toma entonces la siguiente expresión:

$$\max \quad \sum_{i \in S} w^i (p^i e^i - q^i d^i) \quad (4.16)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{k \in K} x_{k1}^1 = I \quad (4.17)$$

$$- \sum_{k \in K} r_{kt-1}^j x_{kt-1}^i + \sum_{k \in K} x_{kt}^j = 0 \quad \forall i \in G_{t-1}, j \in G_t / (i, j) \in A, t \in T - \{1\} \quad (4.18)$$

$$\sum_{k \in K} r_{k|T|}^j x_{k|T|}^i - e^j + d^j = W \quad \forall i \in G_{|T|}, j \in S_i \quad (4.19)$$

$$x_{kt}^i, \quad e^j, \quad d^j \geq 0 \quad \forall i \in G_t, j \in S, k \in K, t \in T \quad (4.20)$$

Y sustituyendo en (4.16)-(4.20) los valores de los parámetros del *Ejemplo 4.1* se tiene el siguiente modelo:

La solución del modelo anterior se expresa también mediante un árbol (véase la Figura 4.10). En cada nodo de decisión (nodo no hoja) se recoge el par de valores (x_{1t}^i, x_{2t}^i) , esto es, la inversión a realizar en cada activo k y en cada período de tiempo t . En los nodos hojas, estos pares de valores representan (e^j, d^j) , es decir, el exceso y el defecto del beneficio al final del horizonte temporal de planificación para cada escenario j .

Las ventajas de la solución del modelo de Recurso Total son básicamente las siguientes:

→ El valor esperado como óptimo del modelo de Recurso Total es

$$(24.8 + 8.87 + 2 \times 1.43 - 4 \times 12.16) \times 0.125 = -1.52,$$

que es superior al valor medio esperado del modelo determinístico no anticipativo $VME = -3.78$, y también al valor medio esperado del modelo determinístico no anticipativo con condiciones de diversificación $VME = -3.531$.

→ Mediante el modelo de Recurso Total se produce una diversificación natural de la inversión, (véase la Figura 4.10), mientras que en el modelo determinístico sin condiciones de diversificación tanto para el caso anticipativo como para el que no, la solución se ciñe a la inversión sobre un único activo financiero. Por otra parte, en el modelo determinístico con condiciones de diversificación, la diversificación que se produce es impuesta por el inversor, y no es resultado del modelo utilizado.

→ La probabilidad de no alcanzar el beneficio fijado por el inversor en el modelo de Recurso Total es de 0.125, que es claramente menor que el 0.5, que se producía con las soluciones de los modelos determinísticos tanto con condiciones de diversificación como sin ellas.

→ En la solución del modelo de Recurso Total hay un cierto reparto en la inversión inicial entre ambos activos financieros, sin embargo, se mantiene una fuerte inversión en acciones $x_{11}^1 = 41.5$, frente a $x_{21}^1 = 13.5$ que se invierte en bonos. La reacción ante las perspectivas del primer período de tiempo para el grupo de escenarios $i \in G_2$ es la siguiente:

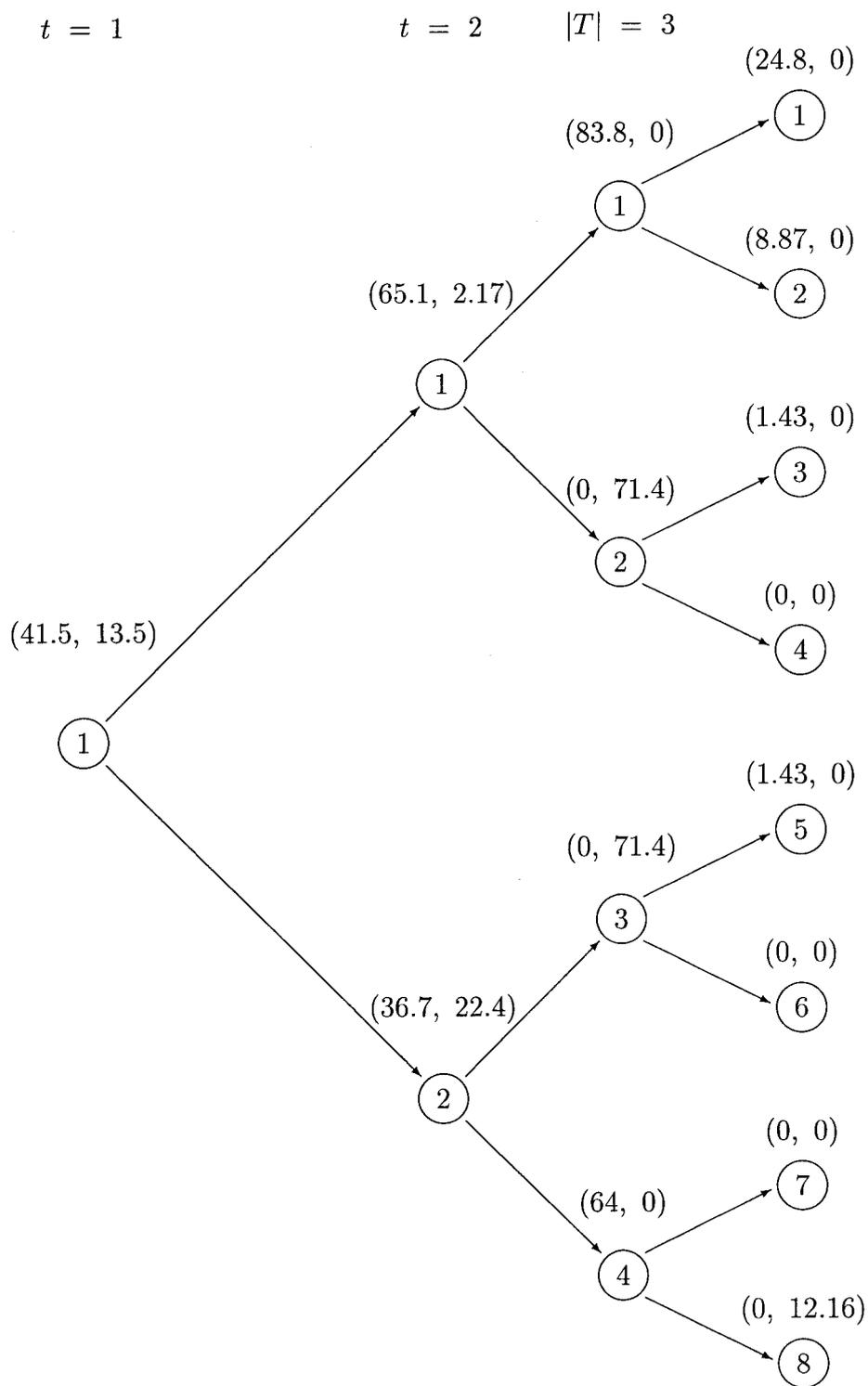


Figura 4.10: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total con Escenarios Equiprobables

1. Si $i = 1$, es decir, si los rendimientos de ambos activos son altos, se arriesga más en la inversión, apostando más fuerte en acciones $x_{12}^1 = 65.1$, que en bonos $x_{22}^1 = 2.17$ en el segundo período de tiempo.
2. Si $i = 2$, es decir, si los rendimientos son bajos, se opta por una cartera más conservadora, aumentando la inversión en bonos ($x_{12}^2 = 36.7$ y $x_{22}^2 = 22.4$).

→ En el último período, las inversiones son sobre un único activo en todos los escenarios, o bien, todo en acciones, o bien, todo en bonos. Esto es, el proceso de optimización seguido conduce a un punto extremo, en el que sólo se efectúa un tipo de inversión.

→ La principal ventaja del modelo estocástico multiperíodo es que permite una aproximación a la solución, llevando a cabo tipos de inversiones múltiples.

4.5 Recurso Total con Condiciones de Diversificación

En esta sección añadimos al modelo de Recurso Total la restricción de que la inversión máxima en un activo, en cualquier período de tiempo, no supere el 70% de la inversión total. En este caso el modelo resultante sería:

$$\max \sum_{i \in S} w^i (p^i e^i - q^i d^i) \quad (4.21)$$

$$\text{s.a: } \sum_{k \in K} x_{k1}^1 = I \quad (4.22)$$

$$- \sum_{k \in K} r_{kt-1}^j x_{kt-1}^i + \sum_{k \in K} x_{kt}^j = 0 \quad \forall i \in G_{t-1}, j \in G_t / (i, j) \in A, t \in T - \{1\} \quad (4.23)$$

$$\sum_{k \in K} r_{k|T|}^j x_{k|T|}^i - e^j + d^j = W \quad \forall i \in G_{|T|}, j \in S_i \quad (4.24)$$

$$x_{k1}^1 \leq 0.70 I \quad \forall k \in K \quad (4.25)$$

$$x_{kt}^j \leq \sum_{k \in K} 0.70 r_{kt-1}^j x_{kt-1}^i \quad \forall k \in K, i \in G_{t-1}, j \in G_t / (i, j) \in A, t \in T - \{1\} \quad (4.26)$$

$$x_{kt}^i, \quad e^j, \quad d^j \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in G_t, j \in S, t \in T \quad (4.27)$$

Utilizando dicho modelo con el *Ejemplo 4.1*, se obtiene:

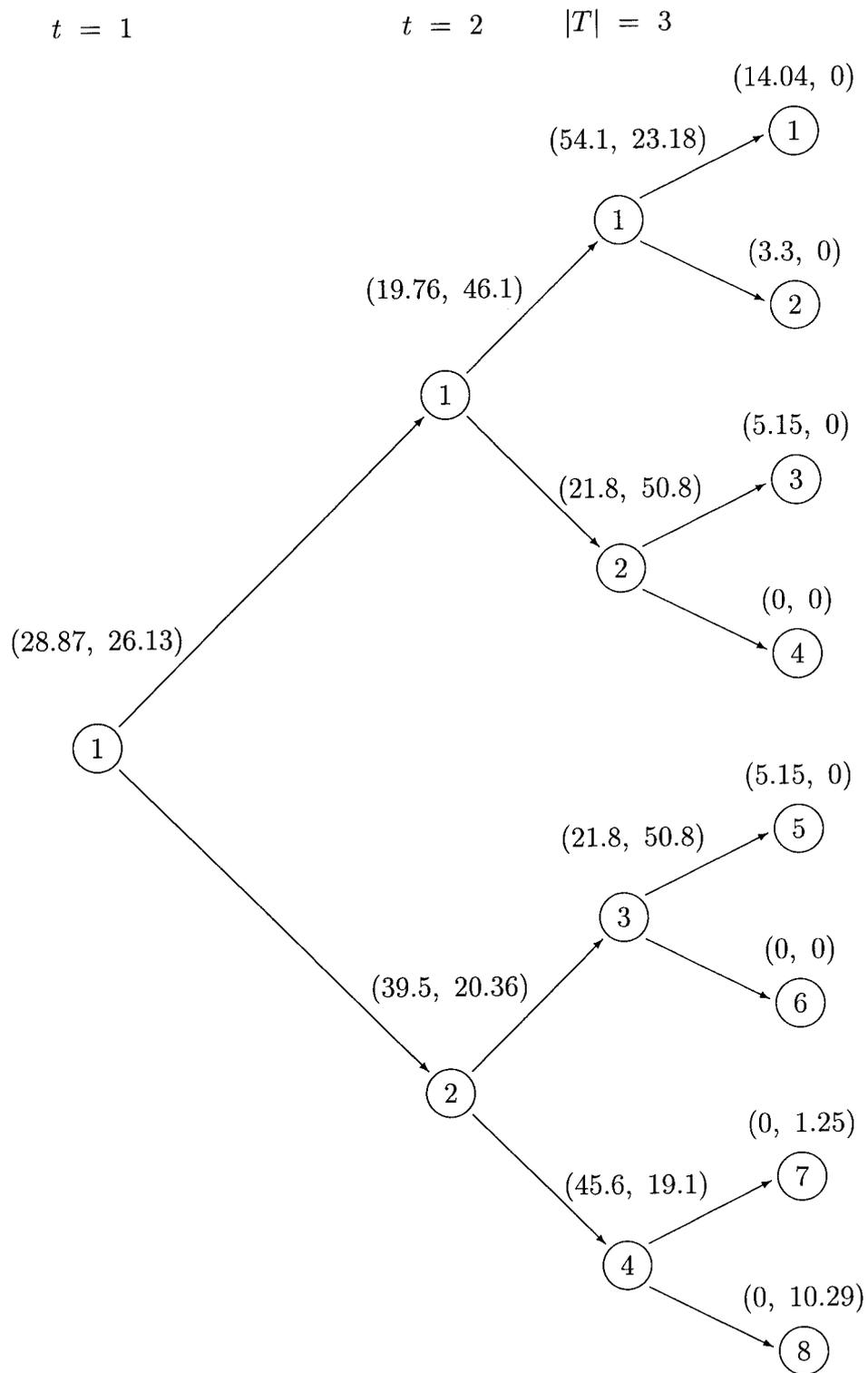


Figura 4.11: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total con Restricciones de Diversificación

La Figura 4.11 recoge la solución del modelo de Recurso Total con condiciones de diversificación. El valor esperado de la función objetivo es el siguiente:

$$(14.04 + 3.3 + 2 \times 5.15 - 4 \times 1.25 - 4 \times 10.29) \times 0.125 = -2.315$$

Dicho resultado es inferior al valor esperado como óptimo del modelo de Recurso Total, pero sin restricciones de diversificación, -1.52. Además, en la solución recogida en la Figura 4.11 la probabilidad de que no se alcance el beneficio fijado por el inversor es 0.25, mientras que en la solución recogida en la Figura 4.10 dicha probabilidad sólo es 0.125. Lo que indica que el modelo de Recurso Total sin condiciones de diversificación es mejor que con ellas.

4.6 Modelo Determinista con Ganancias Ponderadas

Hasta el momento hemos considerado que las perspectivas de los beneficios para cada activo financiero fuesen equiprobables. Veamos el análisis del caso en que se asume una cierta ponderación de las perspectivas de los beneficios para cada activo $(p_1, p_2) \neq (1/2, 1/2)$.

Ejemplo 4.2: Los datos son: $k = \{1, 2\}$, $T = \{1, 2, 3\}$, $I = 55$, $W = 80$, $p = 1$, y $q = 4$. La Tabla 4.2 recoge las tasas de rentabilidad para cada activo financiero.

Tabla 4.2: Parámetros del Ejemplo 4.2

Activos Financieros	Acciones	Bonos
Perspectivas de la Tasa de Rentabilidad		
Alta	1.25	1.14
Baja	1.06	1.12
Tasa de Rentabilidad Ponderada	$u = 1.25p_1 + 1.06p_2$	$v = 1.14p_1 + 1.12p_2$

El modelo determinístico construido a partir de la tasa de rentabilidad ponderada, sin considerar condiciones de diversificación, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad e - 4d \\
 \text{s.a:} \quad & x_{11} + x_{21} = 55 \\
 & -u x_{11} - v x_{21} + x_{12} + x_{22} = 0 \\
 & \quad \quad \quad -u x_{12} - v x_{22} + x_{13} + x_{23} = 0 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad u x_{13} + v x_{23} - e + d = 80 \\
 & x_{11}, \quad x_{21}, \quad x_{12}, \quad x_{22}, \quad x_{13}, \quad x_{23}, \quad e, \quad d \geq 0
 \end{aligned}$$

La Tabla 4.3 muestra las soluciones del modelo anterior para algunos valores de p_1 y p_2 . En la misma se denota por *VFO* el valor de la función objetivo. Tal y como se podría esperar, en ningún caso se produce una diversificación de la inversión.

Tabla 4.3: Resultados del Modelo determinista con $p_1 \neq p_2$

Ejemplos:	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
p_1	0.75	0.6	0.55	0.45	0.4	0.25
p_2	0.25	0.4	0.45	0.55	0.6	0.75
u	1.202	1.174	1.164	1.145	1.136	1.075
v	1.135	1.132	1.131	1.129	1.128	1.125
VFO	15.64	8.995	6.852	2.67	0.63	-6.758
e	15.64	8.995	6.852	2.67	0.63	0
d	0	0	0	0	0	1.69
x_{11}	55	55	55	55	55	0
x_{12}	66.13	64.57	64.05	63	62.48	0
x_{13}	79.53	75.8	74.58	72.17	70.97	0
x_{21}	0	0	0	0	0	55
x_{22}	0	0	0	0	0	61.87
x_{23}	0	0	0	0	0	69.61
VME	13.798	3.841	0.138	-7.927	-12.319	-6.855

4.7 Análisis de Escenarios No Equiprobables

En esta sección se aborda el modelo de Recurso Total para cada uno de los *Ejemplos* 4.3-4.8, vistos anteriormente. En la Tabla 4.4 podemos ver las probabilidades w^j de cada escenario $j = 1, 2, 3, \dots, 8$, que se asigna a cada uno de ellos. Obsérvese que dichas probabilidades w^j dependen de las ponderaciones (p_1, p_2) .

Tabla 4.4: Valores de los w^j para los distintos Ejemplos

Ejemplos:	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
$w^1 = (p_1)^3$	0.421875	0.216000	0.166375	0.091125	0.064000	0.015625
$w^2 = (p_1)^2 p_2$	0.140625	0.144000	0.136125	0.111375	0.096000	0.046875
$w^3 = (p_1)^2 p_2$	0.140625	0.144000	0.136125	0.111375	0.096000	0.046875
$w^4 = p_1 (p_2)^2$	0.046875	0.096000	0.111375	0.136125	0.144000	0.140625
$w^5 = (p_1)^2 p_2$	0.140625	0.144000	0.136125	0.111375	0.096000	0.046875
$w^6 = p_1 (p_2)^2$	0.046875	0.096000	0.111375	0.136125	0.144000	0.140625
$w^7 = p_1 (p_2)^2$	0.046875	0.096000	0.111375	0.136125	0.144000	0.140625
$w^8 = (p_2)^3$	0.015625	0.064000	0.091125	0.166375	0.216000	0.421875

De forma general, el modelo de Recurso Total es el siguiente:

Ejemplo 4.3: $p_1 = 0.75$ y $p_2 = 0.25$, Func. Objetivo = 13.79

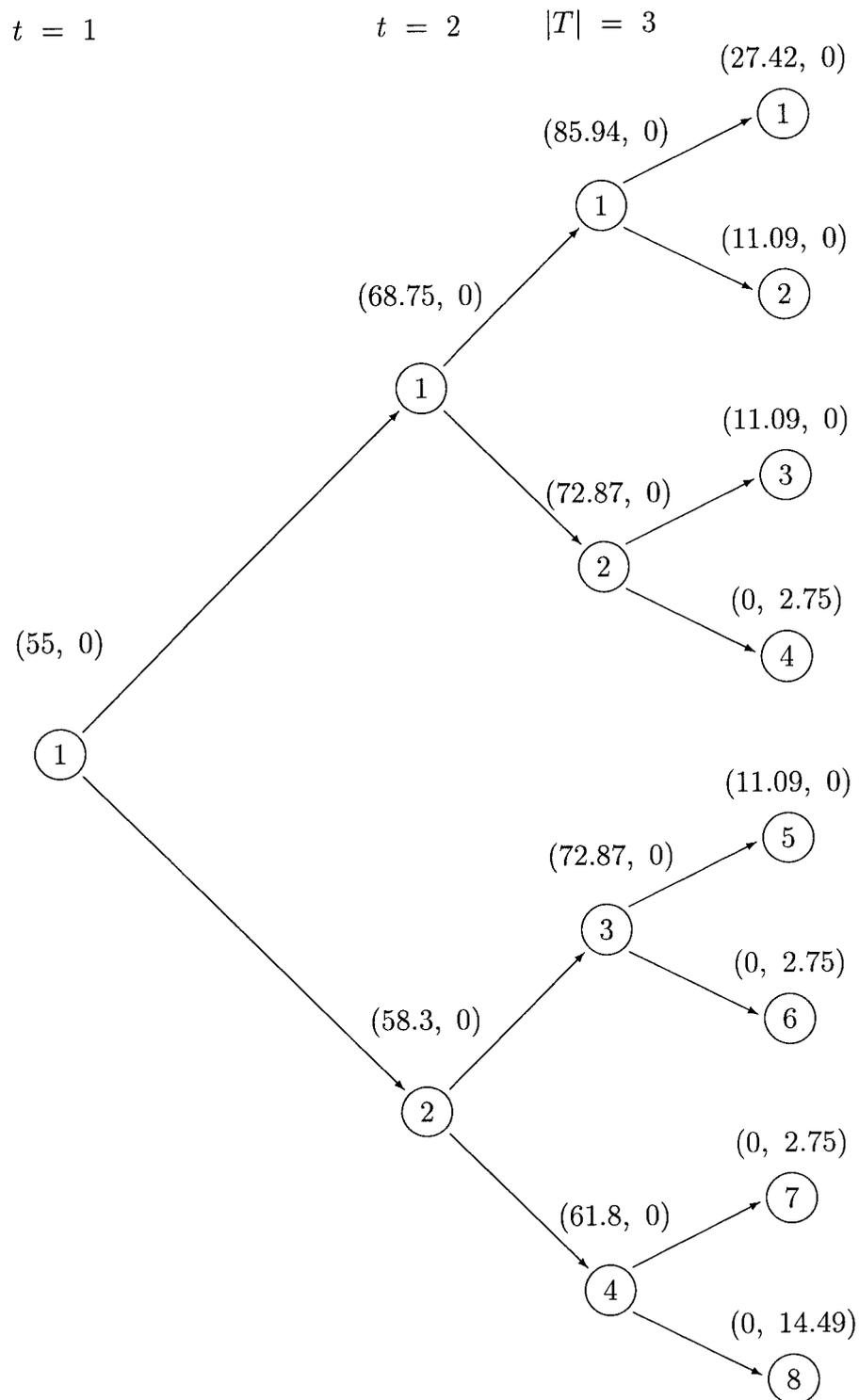


Figura 4.12: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.3)

Ejemplo 4.5: $p_1 = 0.55$ y $p_2 = 0.45$, Func. Objetivo = 1.325

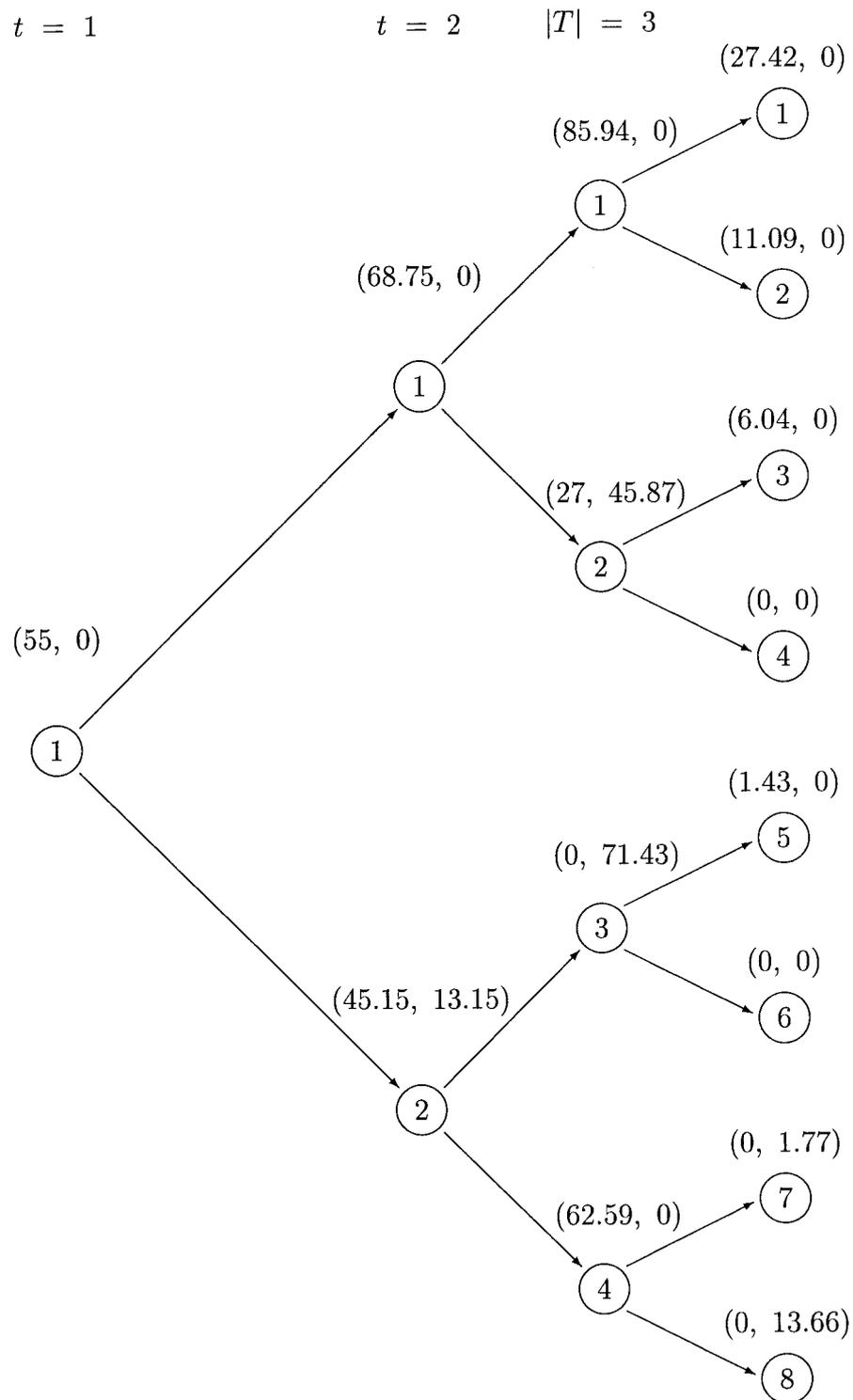


Figura 4.14: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.5)

Ejemplo 4.6 : $p_1 = 0.45$ y $p_2 = 0.55$, Func. Objetivo = -3.432

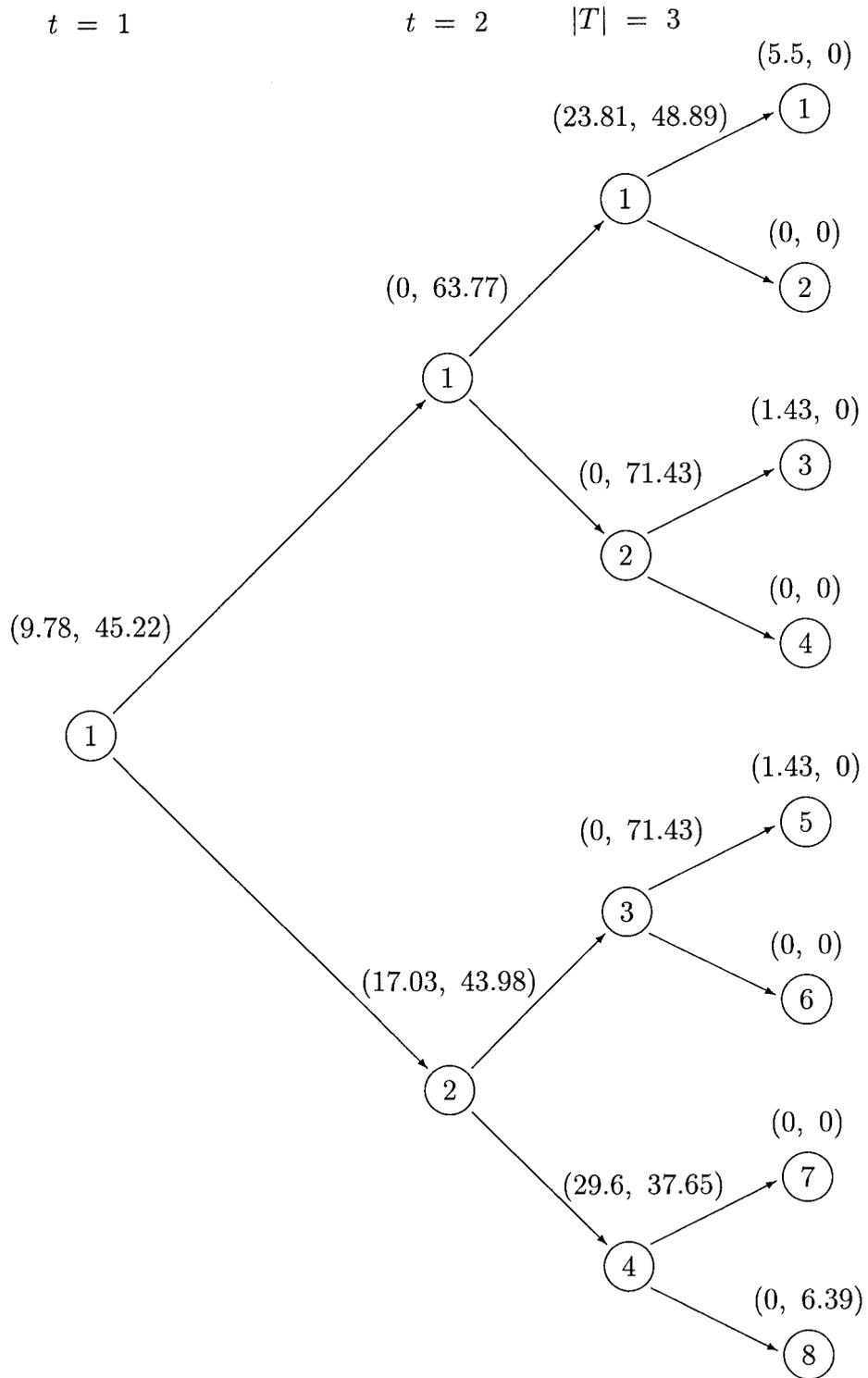


Figura 4.15: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.6)

Ejemplo 4.7: $p_1 = 0.4$ y $p_2 = 0.6$, Func. Objetivo = -4.436

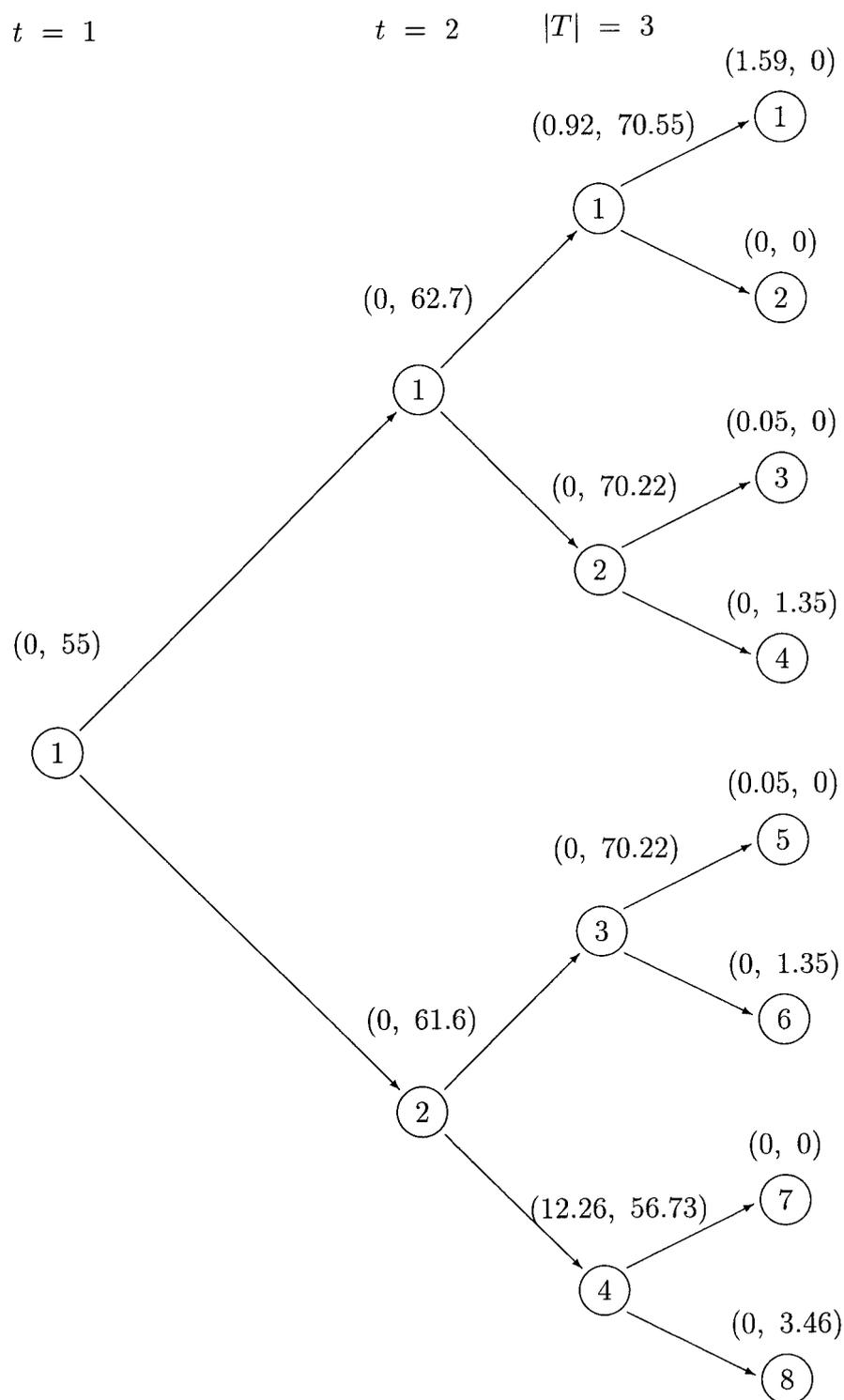


Figura 4.16: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.7)

Ejemplo 4.8: $p_1 = 0.25$ y $p_2 = 0.75$, Func. Objetivo = -6.85

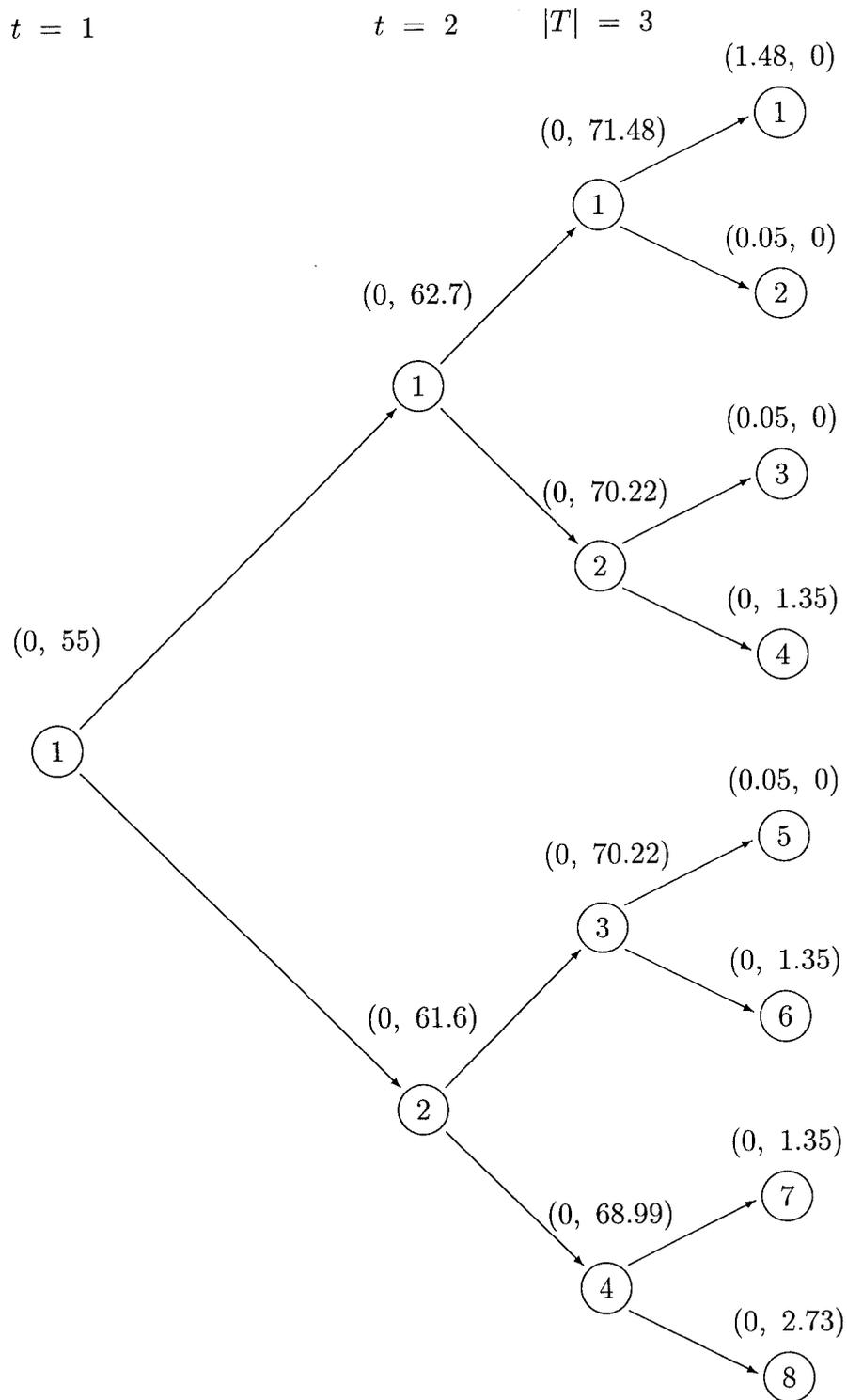


Figura 4.17: Árbol Solución del Modelo de Recurso Total (Ejemplo 4.8)

Las Figuras 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, y 4.17 recogen las soluciones del modelo de Recurso Total para los distintos valores de p_1 y p_2 . Nótese que las soluciones de las Figuras 4.13, 4.14, 4.15, y 4.16 presentan una cierta diversificación de la inversión entre los dos activos, al contrario de lo que ocurre en los modelos determinísticos. En cambio, las estrategias recogidas en las Figuras 4.12 y 4.17 no presentan esta diversificación. Esto se debe a que las ponderaciones utilizadas en estos casos ($p_1 = 0.25$ y $p_2 = 0.75$ en el *Ejemplo 4.3* y $p_1 = 0.75$ y $p_2 = 0.25$ en el *Ejemplo 4.8*) son muy diferentes. De hecho, a medida que las ponderaciones tienden a igualarse, lógicamente la dispersión de la inversión entre los dos activos es mayor, alcanzándose la máxima dispersión para $p_1 = p_2 = 1/2$.

La Tabla 4.5 recoge el valor de la función objetivo del modelo de Recurso Total y el valor medio esperado del correspondiente modelo determinista para cada ejemplo, con objeto de poder compararlos.

Tabla 4.5: Resultados de los Ejemplos del Modelo de Recurso Total

Ejemplos:	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
<i>VFO</i>	13.79	4.495	1.325	-3.432	-4.436	-6.85
<i>VME</i>	13.79	3.841	0.138	-7.927	-12.319	-6.85

Como era de esperar, se puede ver que $VFO = VME$ para los *Ejemplos 4.3* y *4.8* en los que no hay diversificación en la inversión ni siquiera cuando se utiliza la metodología de Recurso Total, al ser muy grande la diferencia entre las ponderaciones. En cambio, existe diversificación en los restantes casos y por este motivo, el valor de la función objetivo en el modelo de Recurso Total es significativamente mayor que el valor medio esperado.

Capítulo 5

Análisis de escenarios en dos etapas

Capítulo 5

Análisis de Escenarios en Dos Etapas

En los capítulos anteriores, para modelizar el problema estocástico se consideraba en la primera etapa un único nodo común a todos los escenarios, mientras que en las restantes etapas había un nodo para cada grupo de escenarios (véase el árbol de escenarios de la Figura 5.1 correspondiente al *Ejemplo 1.1*). Esta clase de modelos recogen con gran precisión lo que sucede en el sistema, pero su representación matemática suele ser de grandes dimensiones y dado que consta de varias etapas se les denomina "*Multietápicos*". Una alternativa a esta estrategia es considerar un modelo con dos etapas, denominado por ello *Bietápico*, la primera con un único nodo común a todos los escenarios y la segunda con un nodo por cada escenario, lo cual reduce considerablemente las dimensiones de dicho modelo. En los períodos de tiempo $\Gamma \subset P$ pertenecientes a la primera etapa, se exige que las decisiones sean comunes para todos los escenarios. Mientras que las decisiones de los períodos de tiempo $P - \Gamma$ correspondientes a la segunda etapa, no se anticipan. En dicho caso, el árbol de escenarios del *Ejemplo 1.1* se transformaría en el de la Figura 5.2.

Bajo esta alternativa, la representación matemática del problema es la siguiente:

$$\min \quad c_1^t X_1 + E[c_2^t(w)X_2] \quad (5.1)$$

$$\text{s.a:} \quad A_{11}X_1 = b_1 \quad (5.2)$$

$$A_{21}(w)X_1 + A_{22}(w)X_2 = b_2(w) \quad (5.3)$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0 \quad (5.4)$$

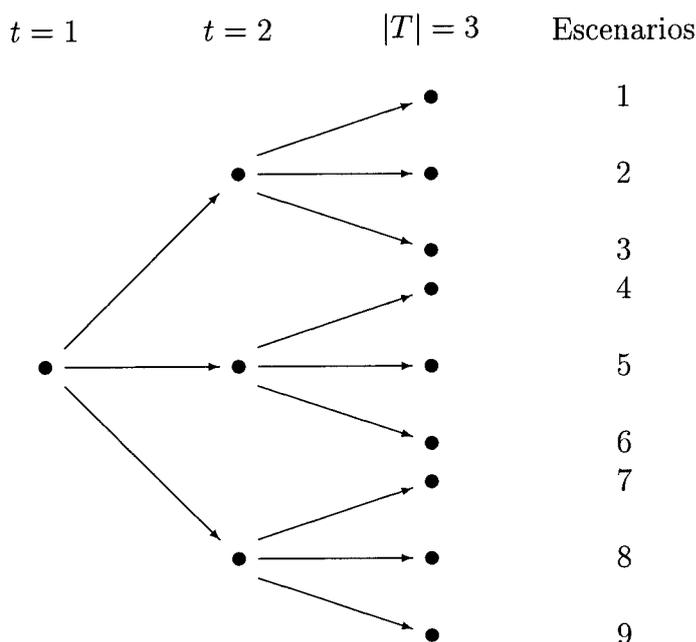


Figura 5.1: Árbol de Escenarios del Ejemplo 1.1 para el Modelo Multietápico

donde

X_1 y X_2 representan los vectores de decisión de la etapa 1 y la etapa 2, respectivamente.

c_1 , A_{11} , y b_1 son el vector de costos, la matriz de restricciones, y el vector del término independiente para las decisiones de la primera etapa.

$c_2(w)$, $A_{21}(w)$, $A_{22}(w)$ y $b_2(w)$ son el vector de costos, las matrices de restricciones, y el vector del término independiente para las decisiones de la segunda etapa.

Las componentes del modelo asociadas con las decisiones de la segunda etapa se desconocen en la primera. Esto es, se considera un espacio probabilístico (Ω, A, P) , tal que $A_{21}(w)$ con $w \in \Omega$, indica que A_{21} es una matriz aleatoria que depende del resultado w . La misma interpretación se da a las restantes componentes $A_{22}(w)$, $b_2(w)$, y $c_2(w)$. Así mismo, se supone que el espacio muestral Ω es finito y se representa por S el conjunto de escenarios que origina dicho espacio muestral. De esta forma, el conjunto de datos $(c_2(w), A_{21}(w), A_{22}(w), b_2(w))$ constituye el escenario $i \in S$, correspondiente al resultado w .

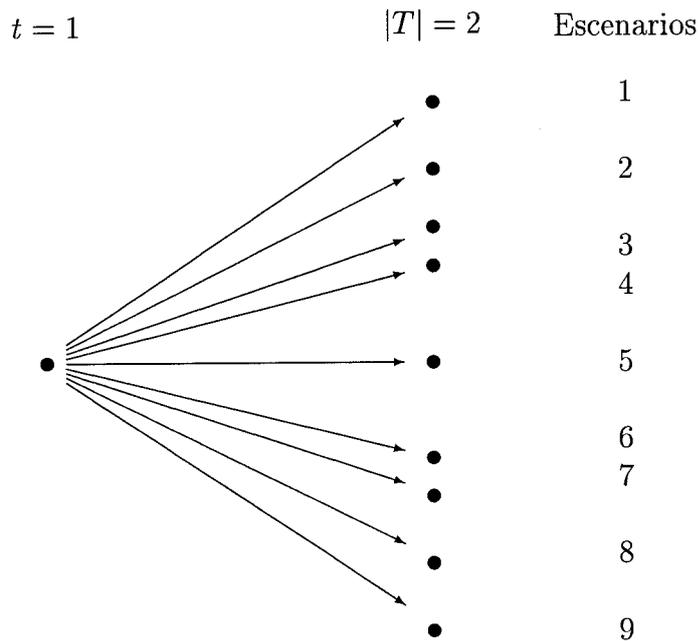


Figura 5.2: Árbol de Escenarios del Ejemplo 1.1 para el Modelo Bietápico

5.1 Representación Compacta del Modelo Bietápico

Dado el modelo de Recurso Total Bietápico (5.1)-(5.4), se intenta representar de manera más adecuada para llevar a cabo algún tipo de descomposición según los diferentes escenarios. Por este motivo, se repiten las componentes del modelo correspondientes a la segunda etapa para cada uno de los escenarios, como se muestra a continuación:

- El vector de decisiones de la segunda etapa X_2 , se transforma en $X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^s$. Es decir, se considera un vector de decisión distinto para cada escenario $i \in S$.
- El vector de costos relacionado con la segunda etapa $c_2(w)$, pasa a ser $c_2^1, c_2^2, \dots, c_2^s$, donde cada c_2^i representa el vector de costos correspondiente a la etapa 2 y al escenario $i \in S$.
- El vector independiente $b_2(w)$ se separa en $b_2^1, b_2^2, \dots, b_2^s$, siendo cada b_2^i el correspondiente vector independiente bajo el escenario $i \in S$.
- Por último, las matrices de condiciones $A_{21}(w)$, y $A_{22}(w)$, se desdoblan en $A_{21}^1, A_{21}^2, \dots, A_{21}^s$, y $A_{22}^1, A_{22}^2, \dots, A_{22}^s$, respectivamente.

Atendiendo a las particiones realizadas sobres las componentes del modelo, éste se puede expresar de la siguiente forma:

$$\min \quad c_1^t X_1 + p_1(w)c_2^{1t} X_2^1 + p_2(w)c_2^{2t} X_2^2 + \dots + p_s(w)c_2^{st} X_2^s \tag{5.5}$$

$$\text{s.a: } A_{11}X_1 = b_1 \quad (5.6)$$

$$A_{21}^1X_1 + A_{22}^1X_2 = b_2^1 \quad (5.7)$$

$$A_{21}^2X_1 + A_{22}^2X_2 = b_2^2 \quad (5.8)$$

$$\vdots \quad \ddots \quad \vdots$$

$$A_{21}^sX_1 + A_{22}^sX_2 = b_2^s \quad (5.9)$$

$$X_1, \quad X_2^1, \quad X_2^2, \quad \dots \quad X_2^s \geq 0 \quad (5.10)$$

donde

$p_i(w) = P\{w\}$ es la probabilidad del resultado w , o de manera equivalente del escenario determinado por $(c_2^i(w), A_{21}^i(w), A_{22}^i(w), b_2^i(w))$, $\forall i \in S$.

X_1 es el vector de decisión para la etapa 1 y

X_2^i es el vector de decisión para la etapa 2 bajo el escenario i , con $i \in S$.

Dicha representación (5.5)-(5.10) es a la que se conoce con el nombre de "*Representación Compacta Bietápica*" o "*Bloque Angular L-Métrico*". Para solucionar el modelo (5.5)-(5.10), se suele utilizar el esquema de descomposición de Benders (véase el capítulo 2).

5.2 Representación Extendida del Modelo Bietápico

De forma análoga al proceso multietápico, otra representación alternativa tal vez más apropiada para la resolución del modelo, consiste en dividir las variables de la primera etapa en cada uno de los escenarios y la exigencia posterior de igualdad de las mismas. La representación que se obtiene aunque es de mayores dimensiones que la compacta, tiene una estructura mejor para la descomposición del modelo en submodelos independientes, uno por cada escenario. Dicha representación a la que se denomina "*Representación Extendida Bietápica*" es como sigue:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c_1^t X_1^1 + c_2^t X_1^2 + \dots + c_1^t X_1^s + p_1(w)c_2^H X_2^1 + p_2(w)c_2^H X_2^2 + \dots + p_s(w)c_2^s X_2^s & (5.11) \\
 \text{s.a.} \quad & A_{11} X_1^1 & (5.12) \\
 & A_{21}^1 X_1^1 + A_{22}^1 X_2^1 & (5.13) \\
 & A_{11} X_1^2 & (5.14) \\
 & A_{21}^2 X_1^2 + A_{22}^2 X_2^2 & (5.15) \\
 & \dots & \\
 & A_{11} X_1^s & (5.16) \\
 & A_{21}^s X_1^s + A_{22}^s X_2^s = b_2^s & (5.17) \\
 & X_1^1 - X_1^2 & (5.18) \\
 & \dots & \\
 & X_1^{s-1} - X_1^s & (5.19) \\
 & -X_1^1 + X_1^s & (5.20) \\
 & X_1^1, X_1^2, X_1^s, X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^s \geq 0 & (5.21)
 \end{aligned}$$

Las últimas $|S|$ restricciones del modelo que fuerzan la igualdad entre las variables, son las denominadas restricciones de no anticipatividad. El problema que se plantea, consiste en la toma de decisiones para ambas etapas, teniendo en cuenta que las decisiones correspondientes a los períodos de tiempo de la primera etapa han de ser iguales para todos los escenarios, mientras que las de la segunda etapa difieren las unas de las otras para los distintos escenarios.

Sea la siguiente estructuración de los vectores y las matrices de (5.11)-(5.21):

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^i \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} c_1 \\ p_i(w)c_2^i \end{pmatrix}, \quad x_i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}, \quad \forall i \in S$$

A partir de los mismos se construye una representación más simplificada de la representación extendida del modelo (5.11)-(5.21), como sigue:

$$\min \sum_{i \in S} c_i^t X_i \quad (5.22)$$

$$\text{s.a: } A_i X_i = b_i \quad \forall i \in S \quad (5.23)$$

$$NX_i - NX_{i+1} = 0 \quad \forall i \in S \quad (5.24)$$

$$X_i \leq 0 \quad \forall i \in S \quad (5.25)$$

donde el valor $i + 1 = |S| + 1$ representa el valor 1. Y la matriz N es una matriz diagonal definida de la siguiente forma:

$$N = \begin{cases} N_{jj} = 1 & \text{Si el } j\text{-ésimo elemento del vector } X_i, \text{ pertenece a la primera etapa} \\ N_{jj} = 0 & \text{Si el } j\text{-ésimo elemento del vector } X_i, \text{ pertenece a la segunda etapa} \\ N_{ij} = 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

A las restricciones (5.24) se las conoce con el nombre de *Enlace Redundante Circular*.

Desglosando entonces en los distintos escenarios, el modelo queda de la siguiente manera:

$$v(*) = \min c_1^t X_1 + c_2^t X_2 + \cdots + c_{s-1}^t X_{s-1} + c_s^t X_s \quad (5.26)$$

$$\text{s.a: } A_1 X_1 = b_1 \quad (5.27)$$

$$A_2 X_2 = b_2 \quad (5.28)$$

$$\vdots$$

$$A_{s-1} X_{s-1} = b_{s-1} \quad (5.29)$$

$$A_s X_s = b_s \quad (5.30)$$

$$NX_1 - NX_2 = 0 \quad (5.31)$$

$$\vdots$$

$$NX_{s-1} - NX_s = 0 \quad (5.32)$$

$$- NX_1 + NX_s = 0 \quad (5.33)$$

5.3 Dualización de las Restricciones de No Anticipatividad

El problema de minimización (5.26)-(5.33) es casi separable en los distintos escenarios, salvo por las restricciones de implementabilidad o no anticipatividad. El siguiente desarrollo tiene como objetivo descomponer el sistema de condiciones del modelo en $|S|$ sistemas independientes, uno por cada escenario, sin que tengan en común ninguna variable. Para esto, sea el siguiente problema dual

$$v(*) = \max_{\pi} v(LD_{\rho}(\pi)) \quad (5.34)$$

en el que $v(LD_{\rho}(\pi))$ viene dado por el siguiente problema

$$v(LD_{\rho}(\pi)) = \min \sum_{i \in S} c_i^t X_i + \sum_{i \in S} \pi_i^t (NX_i - NX_{i+1}) + \frac{\rho}{2} \sum_{i \in S} \|NX_i - NX_{i+1}\|^2 \quad (5.35)$$

$$\text{s.a: } A_i X_i = b_i \quad \forall i \in S \quad (5.36)$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i \in S \quad (5.37)$$

donde

π_i son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de no anticipatividad, y

$\rho > 0$ es un parámetro de penalidad.

Se puede observar que la función objetivo del modelo (5.35)-(5.37) es una función cuadrática no separable, debido a los términos de penalización de la forma:

$$\|x_i(j) - x_{i+1}(j)\|^2 \quad (5.38)$$

donde $x_i(j)$ es el elemento j -ésimo del vector X_i . Los términos del producto cruzado se pueden aproximar en un entorno de un punto conocido $(\tilde{x}_i(j), \tilde{x}_{i+1}(j))$ por:

$$x_i(j)x_{i+1}(j) \simeq x_i(j)\tilde{x}_{i+1}(j) + \tilde{x}_i(j)x_{i+1}(j) - \tilde{x}_i(j)\tilde{x}_{i+1}(j) \quad (5.39)$$

Sustituyendo entonces por (5.39) los dobles productos en cada par de elementos j -ésimos de los vectores X_i y X_{i+1} , y llevando el resultado a (5.35)-(5.37), el problema original de minimización se puede aproximar por $|S|$ subproblemas independientes en un entorno del vector de puntos conocidos \tilde{X} . Esto es, el término de penalización de la función objetivo (5.35) se aproxima de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \sum_{i \in S} \|N(X_i - X_{i+1})\|^2 &= \sum_{i \in S} \frac{\rho}{2} e^t (X_i - X_{i+1})^2 \simeq \\ &\simeq \sum_{i \in S} \frac{\rho}{2} e^t N(X_i^2 - X_{i+1}^2 - 2\tilde{X}_{i+1}X_i - 2\tilde{X}_iX_{i+1} + 2\tilde{X}_i\tilde{X}_{i+1}) = \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$= \sum_{i \in S} (-e^t \rho N(\tilde{X}_{i+1} + \tilde{X}_{i-1})X_i + X_i^t \rho N X_i) + H_\rho(\tilde{X}) \quad (5.41)$$

donde

$$H_\rho(\tilde{X}) = e^t \rho \sum_{i \in S} N\tilde{X}_i\tilde{X}_{i+1} \quad (5.42)$$

y \tilde{X}_{i-1} representa \tilde{X}_s para $i = 1$, mientras que \tilde{X}_{i+1} representa \tilde{X}_1 para $i = |S|$.

En consecuencia, el modelo siguiente

$$v(LD_\rho(\pi)) = \min \sum_{i \in S} (c_i^t + (\pi_i - \pi_{i-1})^t N) X_i + \frac{\rho}{2} \sum_{i \in S} \|N X_i - N X_{i+1}\|^2 \quad (5.43)$$

$$\text{s.a:} \quad A_i X_i = b_i \quad \forall i \in S \quad (5.44)$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i \in S \quad (5.45)$$

se aproxima por

$$v(\hat{L}D_\rho(\pi, \tilde{X})) = \min \sum_{i \in S} (h_i^t X_i + X_i^t \rho N X_i) + H_\rho(\tilde{X}) \quad (5.46)$$

$$\text{s.a:} \quad A_i X_i = b_i \quad \forall i \in S \quad (5.47)$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall i \in S \quad (5.48)$$

con

$$h_i = c_i + (\pi_i - \pi_{i-1} - \rho(\tilde{X}_{i+1} + \tilde{X}_{i-1}))N$$

De esta manera, el modelo anterior (5.46)-(5.48) se puede descomponer en los siguientes submodelos independientes, $\forall i \in S$:

$$\hat{LD}_\rho^i(\pi, \tilde{X}) = \min h_i^t X_i + X_i^t \rho N X_i \quad (5.49)$$

$$\text{s.a: } A_i X_i = b_i \quad (5.50)$$

$$X_i \geq 0 \quad (5.51)$$

Teniendo en cuenta la aproximación (5.46)-(5.48) y los submodelos en que se descompone la misma, se presenta el siguiente algoritmo para resolver la Formulación Extendida Bietápica (5.11)-(5.21).

Se denota por

- $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ una constante y

- $0 \leq \epsilon \leq 1$, aquel valor que representa la tolerancia de separación entre las variables divididas.

Algoritmo:**PASO 1:** Inicializar

- el contador de iteraciones $k = 0$,
- las variables duales $\pi_i^k = 0, \forall i \in S$, y
- el factor de penalidad $\rho = 0$.

Para cada escenario $i \in S$, resolver el siguiente problema lineal:

$$\{\min c_i^t X_i \mid A_i X_i = b_i \ X_i \geq 0\}$$

PASO 2: Si $\|X_i - X_{i+1}\| \leq \epsilon, \forall i \in S$, parar. Se ha alcanzado la optimalidad.

En caso contrario, asignar a ρ un valor distinto de 0.

PASO 3: Hacer lo siguiente:

- Especificar $k = k + 1$.
- Actualizar π^k por $\pi_i^k = \pi_i^{k-1} + \beta^k N(X_i - X_{i+1}), \forall i \in S$, siendo β^k el tamaño de paso correspondiente a la k -ésima iteración.
- Asignar $\tilde{X}_i = X_i, \forall i \in S$.
- Fijar la tolerancia de la aproximación ξ^k , de forma que $\xi^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

PASO 4: Para cada escenario $i \in S$, resolver los subproblemas cuadráticos $\hat{L}D_\rho^i(\pi, \tilde{X})$ (5.49)-(5.51).

PASO 5: Si $\|X_i - \tilde{X}_i\| \leq \xi^k, \forall i \in S$, ir al **PASO 7**.

PASO 6: Actualizar $\tilde{X} \leftarrow \tilde{X} + \alpha(X - \tilde{X})$ e ir al **PASO 4**.

PASO 7: Si $\|X_i - X_{i+1}\| \leq \epsilon, \forall i \in S$, parar. Se ha alcanzado la optimalidad.

En caso contrario, actualizar ρ e ir al **PASO 3**.

Capítulo 6

Generalización de programas estocásticos

Capítulo 6

Generalización de Programas Estocásticos

6.1 Recurso Simple

Sea el siguiente problema determinístico

$$\min \quad c^t x \tag{6.1}$$

$$\text{s.a: } Ax = b \tag{6.2}$$

$$x \geq 0 \tag{6.3}$$

donde c es el vector de los coeficientes de la función objetivo, A es la matriz de restricciones (de orden $m \times n$), b es el término independiente (de orden m) y x es el vector de variables de decisión (de orden n). Igual que en capítulos anteriores se supone que la estocasticidad es debida a la incertidumbre que envuelve a los coeficientes de la función objetivo c , y al término independiente b . Para simplificar la notación no se considera la estocasticidad en la matriz A , pero su introducción no ofrece ninguna dificultad conceptual.

Sea S el conjunto de escenarios que representan la estocasticidad de los vectores c y b , de manera que $h^s = (c^s, b^s)$ recoge la correspondiente realización de dichos vectores para el escenario s , para $s \in S$, y considérese además w^s , como la probabilidad que el modelizador asigna a cada escenario s .

Una forma de tratar la incertidumbre y que utilizamos en esta memoria consiste en obtener la solución x que mejor se adapta a cada escenario, satisfaciendo simultáneamente las condiciones de cada uno de ellos. Esto se puede conseguir a través de la denominada política de *Recurso Simple*, contemplada en el primer capítulo y en la que el vector total de variables de decisión es anticipado desde la primera etapa. Sea entonces el siguiente modelo

de Recurso Simple, cuyo objetivo es minimizar el valor esperado de la función objetivo.

$$\min \sum_{s \in S} w^s c^t x \quad (6.4)$$

$$\text{s.a: } Ax = b^s \forall s \in S \quad (6.5)$$

$$x \geq 0 \quad (6.6)$$

Notemos que el valor de cada componente x es único e independiente del escenario cuyas condiciones se han de satisfacer.

6.2 Recurso Total. Variables Enganche Multietapa

Sea R el conjunto de etapas del problema, de manera que cada etapa puede estar formada por un bloque de condiciones con sus correspondientes variables. Denotemos entonces por x^s , el vector de variables bajo el escenario s , con $s \in S$, y x_r^s , el subvector de x^s relacionado con la etapa r , para $s \in S$ y $r \in R$. Otra alternativa al modelo (6.4)-(6.6) consiste en considerar la política de *No anticipatividad*, que requiere una única solución para las variables correspondientes a la etapa 1 (de tal forma que la solución para dicha etapa no se subordina a ningún escenario, pero tiene en cuenta todos ellos), mientras que para cada grupo de escenarios en las etapas siguientes se obtendrá la correspondiente solución, que dependerá a su vez de la solución obtenida en los grupos de escenarios que pertenecen a las correspondientes etapas anteriores. Tal planteamiento se basa en el denominado principio de No Anticipatividad de Rockafellar y Wets (1991) [57], que dice así:

"Si dos escenarios diferentes s y s' son idénticos hasta una etapa r , en base a la información disponible sobre ellos en dicha etapa, entonces los valores de las variables x deben ser los mismos hasta esa etapa r (es decir, $x_t^s = x_t^{s'} \quad \forall t = 1, \dots, r$, y $\forall r \in R$)".

Con esta condición se pretende una solución que en cada etapa no dependa de la información que no esté disponible en la misma. Se muestra la Figura 6.1 para aclarar este concepto. Dicha figura estructura la información mediante un árbol, cuyos nodos son los instantes de tiempo donde se ha de tomar una decisión y los arcos que salen de estos son las diversas alternativas que pueden suceder una vez tomada tal decisión (de forma que la información relacionada con tales alternativas está disponible al comienzo de la siguiente etapa para todos los períodos que forman parte de ella). Teniendo en cuenta esto, cada camino desde el nodo raíz (nodo correspondiente a la etapa 1) a cualquiera de los nodos hojas (nodos de la última etapa $|R|$) representa un escenario, lo que equivale a una realización del vector de la función objetivo c y del término independiente b , ($h^s = (c^s, b^s)$, $\forall s \in S$). Para el caso del modelo determinístico el camino sería único. En la Figura 6.1 se distinguen 4 etapas. Denotemos por h_r el subvector de h^s asociado con la etapa r , entonces h_1 toma

un único valor para todos los escenarios (h_1^1), mientras que las componentes del vector h_2 pueden tomar dos valores diferentes (h_2^1 y h_2^2), uno por cada realización de la incertidumbre según se corresponde con la segunda etapa. Las componentes del vector h_3 toman cuatro valores diferentes cada una, y por último el vector h_4 puede tomar hasta $|S| = 10$ valores diferentes para cada una de sus componentes, siendo éste el número total de escenarios.

Para modelizar la condición de no anticipatividad, se considera en cada etapa $r \in R$, las siguientes definiciones:

G_r , conjunto de grupos de escenarios tal que todos los escenarios incluidos en cada grupo tienen la misma realización de la incertidumbre para las etapas, que incluyen la etapa 1 hasta la etapa r . Por ejemplo, G_1 en la Figura 6.1 está formado por un único grupo de escenarios ($G_1 = \{1\}$); G_2 incluye dos grupos de escenarios tal que cada uno de ellos consta de 5 escenarios ($G_2 = \{1, 2\}$); G_3 está compuesto por cuatro grupos de escenarios ($G_3 = \{1, 2, 3, 4\}$); y G_4 está compuesto por $|S| = 10$ grupos de escenarios, cada uno formado por un único escenario.

S_r^g , conjunto de escenarios que pertenecen al grupo de escenarios g en la etapa r , siendo $S_r^g \subseteq S$, $g \in G_r$, y $r \in R$. Por ejemplo, $S_3^2 = \{3, 4, 5\}$, en la Figura 6.1.

A partir de estas definiciones el árbol de escenarios de la Figura 6.1 queda determinado mediante la siguiente notación:

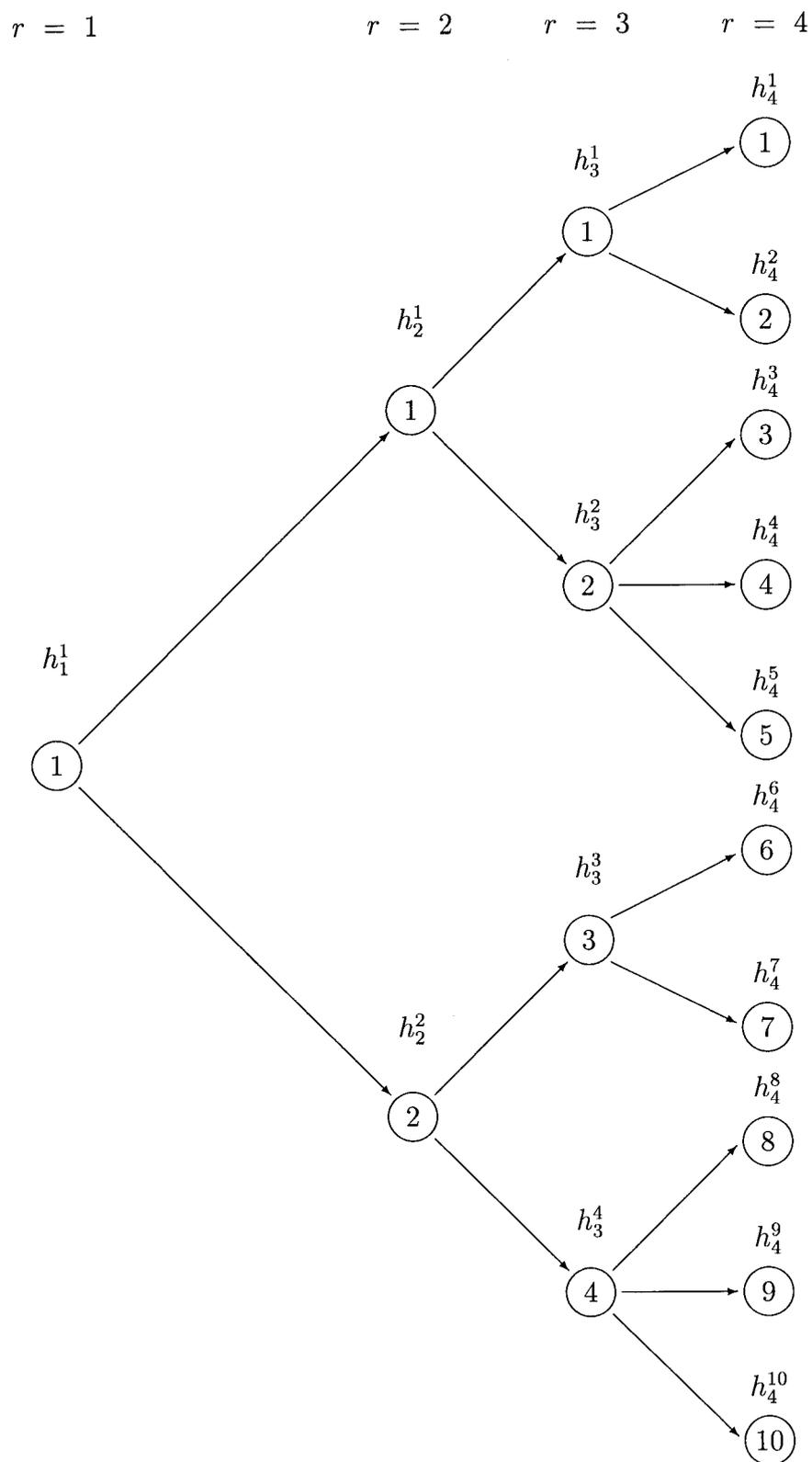


Figura 6.1: Representación del Árbol de Escenarios Multietápico

G , conjunto de nodos en el árbol, de forma que $G = \bigcup_{r \in R} G_r$,

E , conjunto de arcos dirigidos en el grafo, tal que $(l, g) \in E$ sii $l \in G_r$, $g \in G_{r+1}$ y $S_{r+1}^g \subseteq S_r^l$,

y de forma adicional, se define $G_r^l = \{g \in G_{r+1} / (l, g) \in E\}$.

Como ya indicamos, el principio de no anticipatividad requiere una única solución para cada grupo de escenarios g en la etapa r , es decir, para cada $g \in G_r$ y cada etapa $r \in R$. Como consecuencia, el conjunto N que recoge las soluciones que satisfacen las condiciones de no anticipatividad sería como sigue:

$$x \in N = \{x_r^s / x_r^s = x_r^{s'} \quad \forall s, s' \in S_r^g, g \in G_r, y r \in R\} \quad (6.7)$$

Por consiguiente, la versión estocástica con política de Recurso Total del modelo (6.1)-(6.3) añade dichas restricciones de no anticipatividad a su región factible, siendo de la siguiente manera:

$$\min \sum_{s \in S} w^s c^t x^s \quad (6.8)$$

$$\text{s.a. } Ax^s = b^s \quad \forall s \in S \quad (6.9)$$

$$x \in N \quad (6.10)$$

$$x^s \geq 0 \quad \forall s \in S \quad (6.11)$$

6.2.1 Variables Enganche entre dos Etapas Consecutivas

En esta sección se supone que las etapas que incluye el problema, tienen sólo una ligazón a través de ciertas variables, tal que éstas tienen coeficientes no nulos en condiciones de etapas consecutivas, de aquí que se las denomine *Variables Enganche entre dos Etapas Consecutivas*. En la siguiente sección se relaja esta restricción y se permite la conexión entre variables de varias etapas cualesquiera. Volviendo al caso de variables enganche entre etapas consecutivas, el modelo (6.8)-(6.11) tiene dos representaciones matemáticas, una la *Representación Compacta* y otra la *Representación Extendida*.

En la Representación Compacta se utilizan las condiciones de no anticipatividad (6.7) para eliminar así algunas variables del modelo (6.8)-(6.11) y reducir sus dimensiones, de

manera que sólo haya un vector de variables por cada grupo de escenarios de cada etapa, aunque se destruye la estructura especial de las condiciones del modelo determinístico (6.1)-(6.3), como puede ser una estructura en forma de red, que es muy frecuente. En este caso, sea:

x_r^g , el vector de variables con coeficientes no nulos sólo en las condiciones correspondientes al grupo de escenarios g de la etapa r , e

$y_r^{g_0}$, las variables enganche entre las etapas consecutivas r y $r + 1$, para el grupo de escenarios $g \in G_r$, (es decir, son las variables con coeficientes no nulos en las condiciones correspondientes a las etapas r y $r + 1$).

La Representación Compacta del problema es entonces la siguiente:

$$\min_{x, y} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0}) \quad (6.12)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B_r' y_{r-1}^{l_0} + B_r y_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, r \in R, \text{ donde } l: g \in G_{r-1}^l \quad (6.13)$$

$$x_r^g, y_r^{g_0} \geq 0 \quad \forall g \in G_r, r \in R \quad (6.14)$$

tal que

$$w_r^g = \sum_{s \in S_r^g} w^s,$$

$c_r^g = (a_r^g, d_r^g)$ es el vector de coeficientes de la función objetivo asociado con el vector de variables $(x_r^g, y_r^{g_0})$, para el grupo de escenarios g de la etapa r .

A_r, B_r' , y B_r son las matrices de condiciones correspondientes a los vectores $x_r^g, y_{r-1}^{l_0}$ e $y_r^{g_0}$, respectivamente, y

b_r^g es el término independiente correspondiente al grupo de escenarios g de la etapa r , con $r \in R$.

Nótese que en la restricción (6.13), las correspondientes componentes de B_r' son nulas para $r = 1$.

La resolución del modelo (6.12)-(6.14) se puede efectuar directamente mediante la utilización del método del Simplex o de algún método de Puntos Interiores, siempre y cuando

las dimensiones del mismo lo permitan. Para el caso de modelos de tamaño medio o grande se podría aplicar el Procedimiento acelerado visto en el capítulo 2, junto con el algoritmo de eliminación de filas y columnas (reconocido por *Sprint*) que trataría de reducirlo, o alternativamente la metodología de Descomposición de Benders.

Por otra parte, en la Representación Extendida se crean tantas copias de las variables enganche $y_r^{g_0}$ como grupos de escenarios divergen hacia la etapa $r + 1$, a partir del grupo de escenarios g en la etapa r , es decir, se crearán $|G_r^g|$ copias de $y_r^{g_0}$. Sea entonces $y_r^{g_l}$ para todo $l \in G_r^g$, la copia de la variable $y_r^{g_0}$ que interviene en las condiciones del subproblema asociado al grupo de escenarios l de la etapa $r + 1$, en lugar de la propia variable $y_r^{g_0}$. Bajo esta otra representación, las condiciones de no anticipatividad se recogen mediante el denominado esquema de *Enlace Circular Redundante* que se presenta a continuación:

$$y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}} = 0 \quad \forall l \in G_r^{g*}, \quad g \in G_r, \quad r \in R - \{|R|\} \quad (6.15)$$

donde $G_r^{g*} = \{0\} \cup G_r^g$, y además, se considera que:

- (1) el superíndice l , para $l \in G_r^{g*}$ no se refiere técnicamente a un grupo de escenarios en G_r^g , sino exactamente al l -ésimo grupo de escenarios en G_r^g y
- (2) $l + 1$ se toma como 0 para el caso en que $l = |G_r^g|$, para poder establecer la condición circular.

En base a dichas restricciones (6.15) sea la siguiente Representación Extendida:

$$\min_{x, y} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0}) \quad (6.16)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B_r' y_{r-1}^{l_g} + B_r y_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, \quad r \in R, \quad \text{donde } l: g \in G_{r-1}^l \quad (6.17)$$

$$y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}} = 0 \quad \forall l \in G_r^{g*}, \quad g \in G_r, \quad r \in R - \{|R|\} \quad (6.18)$$

$$x_r^g, y_r^{g_l} \geq 0 \quad \forall l \in G_r^g, \quad g \in G_r, \quad r \in R \quad (6.19)$$

La forma más eficiente para resolver el modelo (6.16)-(6.19) consiste en dualizar las restricciones de no anticipatividad (6.18), además de penalizarlas en la función objetivo del modelo mediante una función cuadrática. De esta manera se obtiene la siguiente Aproximación Lagrangiana Aumentada.

$$D_p(\mu) = \min_{x, y} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0}) + \sum_{r \in R - \{|R|\}} \sum_{g \in G_r} \sum_{l \in G_r^{g*}} (\mu_r^{g_l}) (y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}})$$

$$+ \frac{p}{2} \sum_{r \in R - \{R\}} \sum_{g \in G_r} \sum_{l \in G_r^{g*}} \|y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}}\|^2 \quad (6.20)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B_r' y_{r-1}^{l_g} + B_r y_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, r \in R, \text{ donde } l : g \in G_{r-1}^l \quad (6.21)$$

$$x_r^g, y_r^{g_l} \geq 0 \quad \forall l \in G_r^g, g \in G_r, r \in R \quad (6.22)$$

donde

$\mu_r^{g_l}$ es el vector de los multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones de no anticipatividad (6.15), para $g \in G_r$ y $r \in R$, y

$p > 0$, el parámetro de penalidad.

La aproximación anterior permite descomponer el modelo de partida en tantos submodelos independientes como nodos haya en el árbol de escenarios, mediante la técnica de Descomposición Lagrangiana Aumentada vista en el capítulo 3. En el ejemplo de la Figura 6.1 son 17 los submodelos que habría que resolver. Aunque pudiera parecer que el número de submodelos es bastante elevado, sus dimensiones son mucho menores en comparación con las del modelo global y se pueden resolver mediante procesadores en paralelo gracias a la independencia existente entre los mismos.

Alternativamente se pueden utilizar los esquemas basados en la Descomposición de Benders, donde el modelo (6.16)-(6.19) se descompone también, en tantos problemas auxiliares como nodos del árbol de escenarios. Estos problemas son lineales y la función objetivo de cada uno varía iterativamente dependiendo de los multiplicadores obtenidos por la resolución del así llamado problema maestro; (Veáse el capítulo 3).

6.2.2 Variables Enganche entre Etapas Cualesquiera

Otro grupo de modelos multietápicos más general a los considerados anteriormente son aquellos en los que las variables con elementos no nulos en las condiciones cuyo término independiente corresponde a una etapa dada, también pertenecen a algunas otras etapas anteriores a la etapa considerada, es decir, no tan sólo se permiten variables enganche entre una etapa dada y la siguiente, sino además entre etapas no consecutivas, o consecutivas pero más de dos etapas.

Para este nuevo tipo de enfoque del problema consideramos tres tipos diferentes de variables.

x_r^g , vector de variables cuyos coeficientes de la matriz de condiciones son no nulos sólo en las condiciones correspondientes al grupo de escenarios $g \in G_r$, y $r \in R$.

$y_r^{g_0}$, vector de variables enganche entre las etapas consecutivas r y $r + 1$, para el grupo de escenarios $g \in G_r$ y $r \in R$.

z_r^g , vector de variables que además de tener coeficientes no nulos en las condiciones correspondientes al grupo de escenarios $g \in G_r$, y $r \in R$, tienen también coeficientes no nulos en las condiciones cuyo término independiente se corresponde a otras etapas posteriores.

Antes de plantear las distintas formulaciones del problema, sea la siguiente notación relacionada con las variables z .

U , conjunto de condiciones en las que sólo intervienen las variables z , es decir, condiciones de enlace entre varias etapas no necesariamente consecutivas. A dichas condiciones se las denomina *Restricciones de Enlace Multietápico*.

R_u , conjunto de etapas a las que pertenecen la variables z con coeficientes no nulos en la condición u , $\forall u \in U$. Se denota así mismo por r_u , la primera etapa en R_u y por \bar{r}_u , la última etapa en R_u .

N_{ug} , conjunto de nodos en el árbol de escenarios, que pertenecen al camino Hamiltoniano que va desde un nodo determinado en la etapa r_u al nodo g de la etapa \bar{r}_u , para $u \in U$, y $r_u, \bar{r}_u \in R_u$. Por supuesto, el nodo en la etapa r_u desde el que parte el camino hasta el nodo g , es único y pertenece al conjunto de nodos correspondientes a los grupos de escenarios G_{r_u} , mientras que el nodo final $g \in G_{\bar{r}_u}$.

En consecuencia, las restricciones de enlace multietápico tendrán la siguiente representación:

$$\sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^k = p_u^g \quad \forall g \in G_{\bar{r}_u}, u \in U, \text{ donde } k \in N_{ug} \quad (6.23)$$

tal que

D_{ur} es la matriz de la condición u asociada a las variables z correspondiente a la etapa r , y p_u^g es el término independiente de la condición u para el grupo de escenarios g , donde g pertenece al conjunto de grupos de escenarios de la última etapa \bar{r}_u de R_u , en cuya condición la correspondiente variable z tiene coeficientes no nulos.

Es preciso notar que toda condición u , para $u \in U$, tiene $|G_{\bar{r}_u}|$ versiones estocásticas y para obtenerlas se deben analizar $|G_{\bar{r}_u}|$ subárboles del árbol de escenarios.

Para una mayor comprensión de las restricciones de enlace multietápico (6.23), hagamos hincapié en el superíndice k del vector de variables z_r^k , para $k \in G_r$. Dicho k representa un nodo en el árbol de escenarios que pertenece al camino N_{ug} para el nodo final g y la condición u . Por supuesto, el nodo k puede pertenecer a más de un conjunto de tipo $N_{.,.}$, bien para un g' distinto en $G_{\bar{r}_u}$ (con tal que $k \in N_{u,g'}$), o bien para una condición u' distinta en U . Esto equivale a decir, que la variable z_r^k pertenece a más de una restricción de enlace multietápico. De hecho, z_r^k interviene en todas las versiones de la condición u , $\forall u \in U$, tal que:

1. $r \in R_u$ y además,
2. Existe un camino Hamiltoniano que incluye al nodo k y que nace en algún nodo l con $l \in G_{\bar{r}_u}$ y llega hasta g , para $g \in G_{\bar{r}_u}$.

Así por ejemplo, considerémos en la Figura 6.2, el conjunto de etapas asociada a la restricción u para $R_u = \{2, 3, 4, 5\}$, entonces se tiene que la variable z_3^1 aparece entre otras restricciones en:

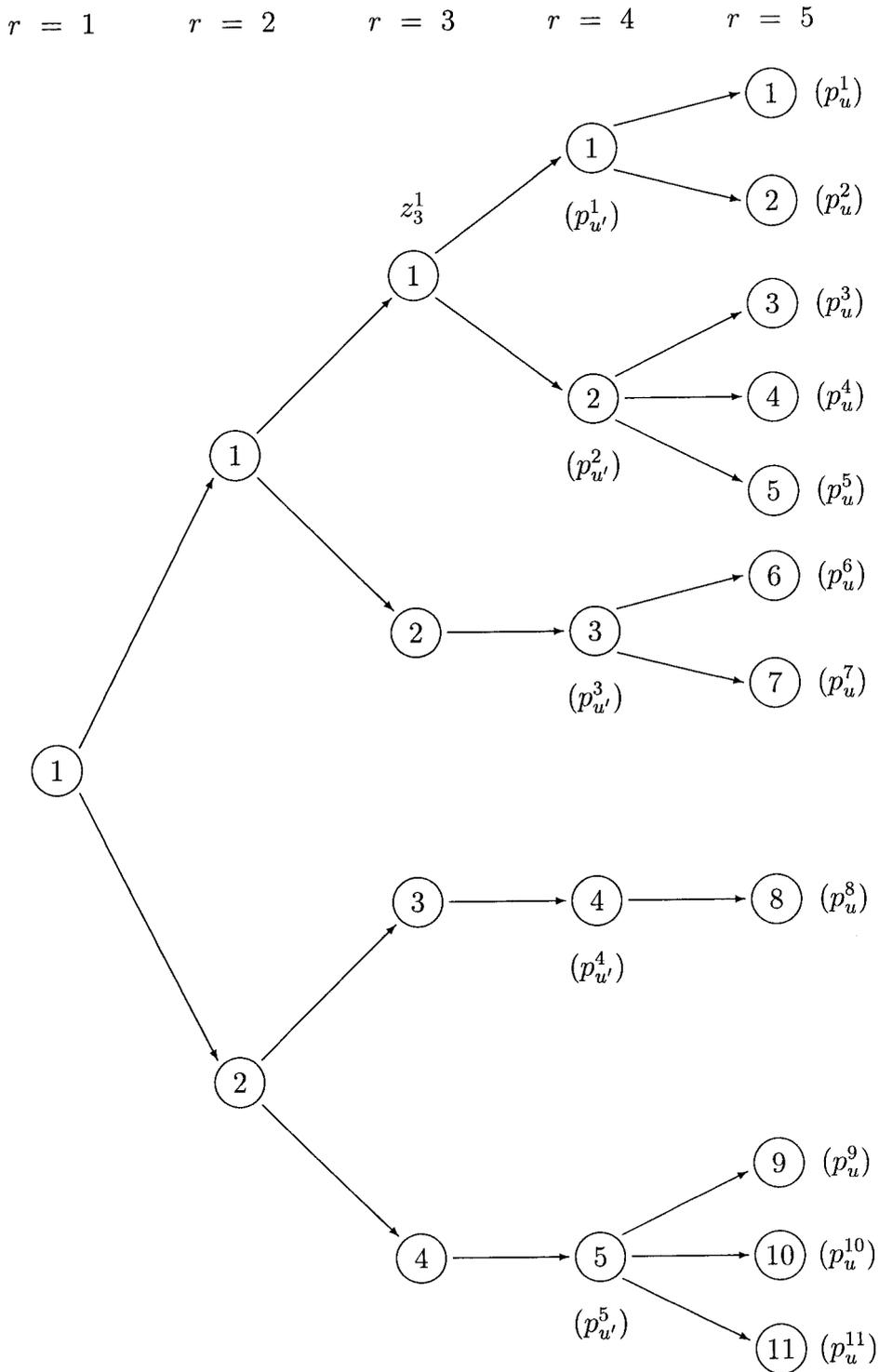


Figura 6.2: Ejemplo de Árbol de Escenarios Multietápico para las condiciones u y u'

$$\begin{aligned}
D_{u_2}z_2^1 + D_{u_3}z_3^1 + D_{u_4}z_4^1 + D_{u_5}z_5^1 &= p_u^1 \\
D_{u_2}z_2^1 + D_{u_3}z_3^1 + D_{u_4}z_4^1 + D_{u_5}z_5^2 &= p_u^2 \\
D_{u_2}z_2^1 + D_{u_3}z_3^1 + D_{u_4}z_4^2 + D_{u_5}z_5^3 &= p_u^3 \\
D_{u_2}z_2^1 + D_{u_3}z_3^1 + D_{u_4}z_4^2 + D_{u_5}z_5^4 &= p_u^4 \\
D_{u_2}z_2^1 + D_{u_3}z_3^1 + D_{u_4}z_4^2 + D_{u_5}z_5^5 &= p_u^5
\end{aligned}$$

que como se puede apreciar son todas diferentes versiones de la restricción u . En este supuesto la estocasticidad sólo se presenta en el término independiente p_u^g . Por otra parte, z_3^1 también aparece en las versiones estocásticas de la restricción u' , determinada por $R_{u'} = \{2, 3, 4\}$, como se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
D_{u'_2}z_2^1 + D_{u'_3}z_3^1 + D_{u'_4}z_4^1 &= p_{u'}^1 \\
D_{u'_2}z_2^1 + D_{u'_3}z_3^1 + D_{u'_4}z_4^2 &= p_{u'}^2
\end{aligned}$$

Obviamente, z_3^1 también puede tener elementos no nulos en otras restricciones. Una vez aclarada la estructura que presentan las restricciones de enlace multietápico (6.23), veamos en el caso que nos ocupa, los distintos tipos de formulaciones que se pueden presentar:

La Representación Compacta respecto a las variables "y", y "z" sería tal vez la más adecuada, siempre y cuando sus dimensiones nos permitieran resolverla directamente mediante algunos de los métodos indicados anteriormente (Simplex, métodos de Puntos Interiores, etc.), situación poco frecuente en los casos prácticos, ya que el número de etapas y de escenarios suele ser muy elevado. No obstante, su representación tiene la siguiente forma:

$$\min_{x, y, z} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0} + (c_r^g)^t z_r^{g_0}) \quad (6.24)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B_r' y_{r-1}^{l_0} + B_r y_r^{g_0} + C_r z_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, r \in R, \text{ donde } l: g \in G_{r-1}^l \quad (6.25)$$

$$\sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^{k_0} = p_u^g \quad \forall g \in G_{\bar{r}_u}, u \in U, \text{ donde } k \in N_{ug} \quad (6.26)$$

$$x_r^g, y_r^{g_0}, z_r^{g_0} \geq 0 \quad \forall g \in G_r, r \in R \quad (6.27)$$

La Representación Extendida sólo respecto de las variables "y", y no respecto de las variables "z", es la siguiente:

$$\min_{x, y, z} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0} + (c_r^g)^t z_r^{g_0}) \quad (6.28)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B'_r y_{r-1}^{l_g} + B_r y_r^{g_0} + C_r z_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, r \in R, \text{ donde } l: g \in G_{r-1}^l \quad (6.29)$$

$$\sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^{k_0} = p_u^g \quad \forall g \in G_{\bar{r}_u}, u \in U, \text{ donde } k \in N_{ug} \quad (6.30)$$

$$y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}} = 0 \quad \forall l \in G_r^*, g \in G_r, r \in R - \{|R|\} \quad (6.31)$$

$$x_r^g, y_r^{g_l}, z_r^{g_0} \geq 0 \quad \forall l \in G_r^g, g \in G_r, r \in R \quad (6.32)$$

En el modelo anterior (6.28)-(6.32), se puede observar que la dualización de las restricciones de enlace multietápico (6.30), y las de no anticipatividad respecto a las variables "y", (6.31), nos permite obtener una región factible del modelo compuesta por un sistema de restricciones independientes por cada grupo de escenarios, o de forma equivalente, por cada nodo del árbol de escenarios. El problema Lagrangiano resultante tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} D_p(\mu, \pi) = & \min_{x, y, z} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0} + (c_r^g)^t z_r^{g_0}) + \\ & + \sum_{u \in U} \sum_{g \in G_{\bar{r}_u}} (\pi_u^g) \left(\sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^{k_0} - p_u^g \right) + \sum_{r \in R - \{|R|\}} \sum_{g \in G_r} \sum_{l \in G_r^{g*}} (\mu_r^{g_l}) (y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}}) + \\ & + \frac{p}{2} \sum_{u \in U} \sum_{g \in G_{\bar{r}_u}} \left\| \sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^k - p_u^g \right\|^2 + \frac{p}{2} \sum_{r \in R - \{|R|\}} \sum_{g \in G_r} \sum_{l \in G_r^{g*}} \|y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}}\|^2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B'_r y_{r-1}^{l_g} + B_r y_r^{g_0} + C_r z_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, r \in R, \text{ donde } l: g \in G_{r-1}^l \quad (6.34)$$

$$x_r^g, y_r^{g_0}, z_r^{g_0} \geq 0 \quad \forall l \in G_r^g, g \in G_r, r \in R \quad (6.35)$$

donde

$\mu_r^{g_l}$ y π_u^g son los vectores de variables duales para las restricciones (6.30) y (6.31), respectivamente y

$p > 0$, el parámetro de penalidad.

Por otra parte, el problema Lagrangiano aumentado (6.33)-(6.35) presenta una grave dificultad a la hora de su resolución, ya que la utilización del esquema de aproximación

propuesto por Stephanopoulos y Westerberg (1975) [63] en los términos cuadráticos de penalización para convertir la función objetivo en separable, tiene el inconveniente del número de dobles productos que aparecen en las restricciones de enlace multietápico, pues es muy elevado y, por tanto, la solución que se consigue no es muy adecuada. Por este motivo, se propone construir la Representación Extendida para ambas variables "y", y "z", y de esta forma poder solucionar tal problema.

Veamos entonces como son las restricciones de no anticipatividad para las variables "z". En este caso, se realizan tantas copias de la variables $z_r^{g_0}$ como versiones distintas haya de entre todas las condiciones u , para $u \in U$, en la que por supuesto intervenga $z_r^{g_0}$, sea cual fuese la etapa final $\bar{r}_u \in R_u$. En consecuencia, las restricciones de no anticipatividad no son otras que la igualdad de tales copias con la variable original, esto es,

$$z_r^{g_0} - z_r^{g_k} = 0 \quad \forall (g, k) \in N^r, \quad r \in R \quad (6.36)$$

donde N^r , para $r \in R$, recoge las parejas de nodos (g, k) tal que $g \in G_r$, $k \in G_{r'}$, $r' \in R$ y $r \neq r'$, y además, existe $u \in U$ con $r' = \bar{r}_u$, y $g \in N_{uk}$. Es decir, g y k son dos nodos del árbol de escenarios tal que existe una condición $u \in U$, en la que $k \in G_{\bar{r}_u}$ y así mismo, $g \in N_{uk}$. Añadiendo dichas restricciones (6.36) al modelo (6.28)-(6.32) se obtiene la Representación Extendida tanto para las variables "y" como para las variables "z".

$$\min_{x, y, z} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((d_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0} + (c_r^g)^t z_r^{g_0}) \quad (6.37)$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B_r' y_{r-1}^{l_g} + B_r y_r^{g_0} + C_r z_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, \quad r \in R, \quad \text{donde } l : g \in G_{r-1}^l \quad (6.38)$$

$$\sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^{k_g} = p_u^g \quad \forall g \in G_{\bar{r}_u}, \quad u \in U, \quad \text{donde } k \in N_{ug} \quad (6.39)$$

$$y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}} = 0 \quad \forall l \in G_r^{g^*}, \quad g \in G_r, \quad r \in R - \{|R|\} \quad (6.40)$$

$$z_r^{g_0} - z_r^{g_k} = 0 \quad \forall (g, k) \in N^r, \quad r \in R \quad (6.41)$$

$$x_r^g, y_r^{g_l}, z_r^{g_k} \geq 0 \quad \forall l \in G_r^g, \quad g \in G_r, \quad (g, k) \in N^r, \quad r \in R \quad (6.42)$$

De esta forma se pueden aplicar esquemas basados en la Descomposición Lagrangiana Aumentada, relajando las restricciones de no anticipatividad de las variables "y" y las variables "z", y llevandolas a la función objetivo con las correspondientes variables duales, a la vez que se penalizan las mismas con un término cuadrático de penalización. En cuanto a la región factible del modelo se refiere, al dividir las variables "z", se consigue que las restricciones

(6.39), también sean independientes para cada grupo de escenarios en cada etapa. En este caso, la representación del problema Lagrangiano aumentado tiene la expresión:

$$\begin{aligned}
 D_p(\mu, \rho) = & \min_{x, y, z} \sum_{r \in R} \sum_{g \in G_r} w_r^g ((a_r^g)^t x_r^g + (d_r^g)^t y_r^{g_0} (c_r^g) z_r^{g_0}) + \\
 & + \sum_{r \in R - \{|R|\}} \sum_{g \in G_r} \sum_{l \in G_r^{g^*}} (\mu_r^{g_l}) (y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}}) + \sum_{r \in R} \sum_{(g,k) \in N^r} (\rho_r^{gk}) (z_r^{g_0} - z_r^{gk}) + \\
 & + \frac{p}{2} \sum_{r \in R - \{|R|\}} \sum_{g \in G_r} \sum_{l \in G_r^{g^*}} \|y_r^{g_l} - y_r^{g_{l+1}}\|^2 + \frac{p}{2} \sum_{r \in R} \sum_{(g,k) \in N^r} \|z_r^{g_0} - z_r^{gk}\|^2 \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

$$\text{s.a: } A_r x_r^g - B_r' y_{r-1}^{l_g} + B_r y_r^{g_0} + C_r z_r^{g_0} = b_r^g \quad \forall g \in G_r, r \in R, \text{ donde } l: g \in G_{r-1}^l \quad (6.44)$$

$$\sum_{r \in R_u} D_{ur} z_r^{k_g} = p_u^g \quad \forall g \in G_{\bar{r}_u}, u \in U, \text{ donde } k \in N_{ug} \quad (6.45)$$

$$x_r^g, y_r^{g_l}, z_r^{gk} \geq 0 \quad \forall l \in G_r^g, g \in G_r, (g, k) \in N^r, r \in R \quad (6.46)$$

donde

$\mu_r^{g_l}$ y ρ_r^{gk} son los vectores de variables duales para las restricciones (6.40) y (6.41), respectivamente y

$p > 0$, el parámetro de penalidad.

La resolución de dicho modelo (6.43)-(6.46) se realiza siguiendo el algoritmo propuesto en el capítulo 3 de esta memoria.

Alternativamente a la utilización de esquemas basados en la Descomposición Lagrangiana, se puede utilizar la Descomposición de Benders o la de Dantzig-Wolfe, para la resolución del problema expresado mediante la Representación Extendida, (6.37)-(6.42), que también se explica en el capítulo 3.

Capítulo 7
Algunas aplicaciones de programación
estocástica

Capítulo 7

Algunas Aplicaciones de Programación Estocástica

7.1 Planificación de Producción Vía Modelización de Escenarios

La planificación de la producción es una de las tareas más importantes para los encargados de la manufacturación en una empresa. El entorno donde se enmarcan las decisiones a tomar se caracteriza por un ambiente de incertidumbre debido a ciertos parámetros del problema. Tal vez, el más importante de estos parámetros es la demanda de mercado de dichos productos.

Los problemas de planificación de la producción por lo general suelen ser de dos clases. El más frecuente consiste en decidir la cantidad a producir, mientras que el segundo tipo es la planificación de su uso. Generalmente, los problemas sobre la capacidad de producción durante un cierto horizonte temporal de planificación se resuelven mediante stocks, reservas adicionales, u otras fuentes alternativas de proveedores. A menudo, la cantidad que se necesita producir no se puede adquirir en el instante deseado, sin embargo, es posible realizar acuerdos con otros productores o proveedores, para conseguir los volúmenes de venta de la producción no anticipados (es decir, desconocidos al principio del proceso). Los modelos que se muestran en este capítulo, representan un proceso dinámico en un determinado horizonte

temporal de planificación.

Tradicionalmente, los modelos de planificación de producción desarrollan planes que minimizan los costes de trabajo y mantenimiento del inventario durante un horizonte de tiempo predefinido y según determinados valores fijos de la demanda. En Dzielinski y Gomory (1965) [14], Florian y Klein (1971) [24] y Lasdon y Terjung (1971) [41] se encuentran algunos ejemplos de estos modelos, donde la demanda se supone conocida y se modeliza de forma determinística. Por otra parte, en estos modelos también se considera de forma determinística la capacidad de producción del sistema, mediante un conjunto de inecuaciones lineales. Sin embargo, en los últimos años se ha producido un aumento del interés por resolver el problema de planificación de producción con capacidad estocástica. De hecho se plantea que la incertidumbre puede ser debida, por un lado al dinamismo estocástico del rendimiento y la disponibilidad de las máquinas, y por otro, a la demanda aleatoria. En muchos trabajos recientes la fábrica se considera como una red de colas, existiendo interacciones entre el dinamismo estocástico dentro de la fábrica y la capacidad de la carga.

Zipkin en 1986 (véase Zipkin (1986) [70]) desarrolló un modelo de equilibrio entre la incertidumbre debida a la demanda y la incertidumbre de los sistemas de producción, mediante un mecanismo de control de inventarios. Kekre y Kekre en 1985 (véase Kekre y Kekre (1985) [39]) combinan un modelo de planificación con capacidades, donde se modeliza explícitamente el trabajo en proceso y el tiempo transcurrido, con un modelo de programación matemática en tiempo discreto con determinadas variaciones de la demanda. En Graves (1986) [32] y Graves y Fine (1988) [33] se puede observar un modelo de planificación a lo largo del tiempo, que permite evaluar la capacidad de carga bajo las condiciones de variación de la demanda. Karmakar (véase Karmakar (1987) [37] y (1989) [38]) subraya la relación entre la capacidad de carga, el tiempo transcurrido de producción y el trabajo en progreso. Eppen y otros en 1989 (véase Eppen y otros (1989) [16]) usan una aproximación mediante escenarios como en este trabajo, aunque su interés se centra en el mayor rango de decisiones a tomar, dependiendo de la facilidad para seleccionar tales decisiones relativas a la manufacturación. Bitran y Yanesse en 1984 (véase Bitran y Yanesse (1984) [6]) desarrollaron aproximaciones determinísticas de un modelo de planificación no secuencial con capacidades y analizaron su efectividad cuando la demanda se caracterizaba por una distribución de probabilidad estándar.

En las próximas secciones vemos como modelizar la incertidumbre y el dinamismo de la demanda de una forma real, y se proporciona una herramienta siguiendo las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores, para alcanzar un plan de producción con múltiples fuentes de suministro.

Es frecuente en esta clase de problemas tener una fuente alternativa de suministro. Por esto consideramos dos fuentes de suministro, una de las cuales se la denomina fuente de "producción propia," y a la otra "oferta del vendedor". Se supone que la capacidad de producción propia es determinista, aunque se puede generalizar al caso de los modelos de colas de equilibrio. Por otro lado, se asume que la oferta procedente de la segunda fuente no tiene capacidad limitada. Por tanto, el problema consiste en determinar ambos planes de producción, para múltiples productos a lo largo de un horizonte con varios períodos de tiempo y con incertidumbre asociada a la demanda.

7.1.1 Representación Determinística

El objetivo es alcanzar unos planes de producción y uso de la capacidad equilibrados, por esto se plantea el problema en un horizonte de tiempo compuesto por varios períodos de tiempo (por ejemplo varios meses). Dichos planes se revisan al comienzo de cada período, incorporando la última información disponible. Dado cualquier período de tiempo, se asume que el exceso de demanda respecto a la producción propia y el stocks es cubierto por el vendedor. Esto es, el nivel de producción fijado por el modelo para cada uno de los períodos se alcanza en dicho período. Para simplificar, supongamos que todos los productos se pueden fabricar con el mismo conjunto de máquinas. En cada período de tiempo, se intenta satisfacer la demanda a través de la producción propia. El objetivo es minimizar el coste total de mantenimiento del inventario y de producción del vendedor. Otra posibilidad podría ser maximizar el valor esperado de la diferencia entre los ingresos totales y el coste correspondiente. Sin embargo, consideremos el siguiente modelo de programación lineal, que se ajusta al primer objetivo:

$$\min \sum_{j \in J, t \in T} h_{jt} I_{jt} + \sum_{j \in J, t \in T} p_{jt} y_{jt} \quad (7.1)$$

$$\text{s.a } I_{jt-1} - I_{jt} + x_{jt} + y_{jt} = d_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (7.2)$$

$$\sum_{j \in J} a_{rj} x_{jt} \leq K_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (7.3)$$

$$x_{jt}, I_{jt}, y_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T \quad (7.4)$$

donde se denota

Conjuntos:

J = conjunto de productos.

T = conjunto de períodos de tiempo.

R = conjunto de máquinas.

Datos Determinísticos:

h_{jt} = coste de mantenimiento del inventario por unidad de producto j , en el período de tiempo t .

p_{jt} = coste por unidad de suministro del producto j procedente de la segunda fuente (el vendedor) en el período de tiempo t .

a_{rj} = nivel de uso de la capacidad de la máquina r que se necesita para producir una unidad de producto j .

K_{rt} = capacidad de producción de la máquina r en el período de tiempo t .

I_{j0} = nivel de inventario inicial del producto j .

Variables:

x_{jt} = volumen de producción propia del producto j en el período de tiempo t .

I_{jt} = inventario del producto j al final del período de tiempo t .

y_{jt} = cantidad del producto j procedente de la segunda fuente en el período de tiempo t .

Datos Estocásticos:

d_{jt} = demanda del producto j en el período de tiempo t .

Este modelo considera importante dos tipos de restricciones. La restricción de que la capacidad de las máquinas no se vea superada, y el que la demanda sea satisfecha por alguna de las fuentes de suministro o el inventario.

7.1.2 Modelos de Planificación de Producción Estocástica

En un problema donde el tiempo y la incertidumbre juegan un papel importante, el modelo de decisión se debe diseñar, de manera que el usuario adopte una política de decisión con la que pueda responder a aquellos sucesos que se presenten con el paso del tiempo. Si las demandas de los productos d_{jt} en (7.2) se consideran aleatorias, entonces se ha de tener en cuenta en el problema dos características adicionales. En primer lugar, se debe modelizar la información disponible a los largo del horizonte de tiempo, lo que conlleva a establecer que tipo de decisiones se han de tomar en cada una de las etapas. Y así mismo, con el fin de optimizar la solución propuesta, se tiene que comparar con otras posibles soluciones. El modelo de programación estocástica multietápico que se propone, permite modelizar la información disponible del problema y mostrar que decisiones estipuladas por el mismo, son óptimas con respecto al criterio del arrepentimiento nulo. Con este criterio se pretende que la solución propuesta por el modelo, no se aleje demasiado de todas las posibles soluciones que se obtienen dados los diferentes valores de la demanda. De manera que el arrepentimiento que se pueda tener si se presenta una determinada demanda y se hubiera propuesto una solución no óptima, fuera nulo o el menor posible. Teniendo en cuenta esto, el criterio del arrepentimiento nulo sólo se alcanza si la demanda futura se puede predecir con exactitud.

La decisiones futuras del proceso dependen de los supuestos que se establecen sobre la disponibilidad de la información. Es decir, el instante en que la información está disponible, y si las decisiones se pueden ajustar a la nueva información. Como se vió en el capítulo 1, según se permitan los posibles ajustes con respecto a la nueva información, se obtendrán

diferentes modelos. Vemos más adelante como es la representación de dichos modelos para el problema de planificación de producción que nos ocupa.

La incertidumbre asociada con los datos del problema se representa a través de los llamados escenarios. Sea S el conjunto de escenarios, supuesto finito. En el problema de planificación de producción los escenarios surgen a partir de los posibles valores de la demanda para cada producto y en cada período de tiempo, es decir, a partir de la distintas perspectivas de la demanda. Se denota entonces por:

d_{jt}^s = demanda para el producto j en el período de tiempo t , bajo el escenario s .

w^s = ponderación asociada al escenario s .

A menudo se usa la demanda media de todos los escenarios en cada período de tiempo, como un estimador de la demanda en ese período. Es decir, se usa $d_{jt} = \bar{d}_{jt}$ en (7.2), donde

$$\bar{d}_{jt} = \sum_{s \in S} w^s d_{jt}^s,$$

pero obviamente tal aproximación ignora la variabilidad de la información disponible. Además, de esta forma se obtienen peores resultados computacionales que los obtenidos mediante los modelos de programación estocástica multietápicas (véase la Tabla 7.3).

En los modelos de programación estocástica multietápicas, en los que se usa el Análisis de Escenarios, lo primero que se hace es resolver los modelos determinísticos (7.1)-(7.4) tomando $d_{jt} = d_{jt}^s, \forall s \in S$, y obtener así las soluciones individuales de cada escenario. Entonces, a partir de la tabla de soluciones individuales de cada escenario, se propone una solución que satisfaga lo mejor posible el criterio del arrepentimiento nulo y que verifique los requisitos necesarios para conseguir una política no anticipativa. Para esto se denota por

x_{jt}^s = la producción óptima del producto j en el período de tiempo t bajo el escenario s ,

y_{jt}^s = la producción óptima del producto j procedente de la segunda fuente, en el período de tiempo t bajo el escenario s , e

I_{jt}^s = la cantidad óptima de inventario del producto j al final del período de tiempo t bajo el escenario s .

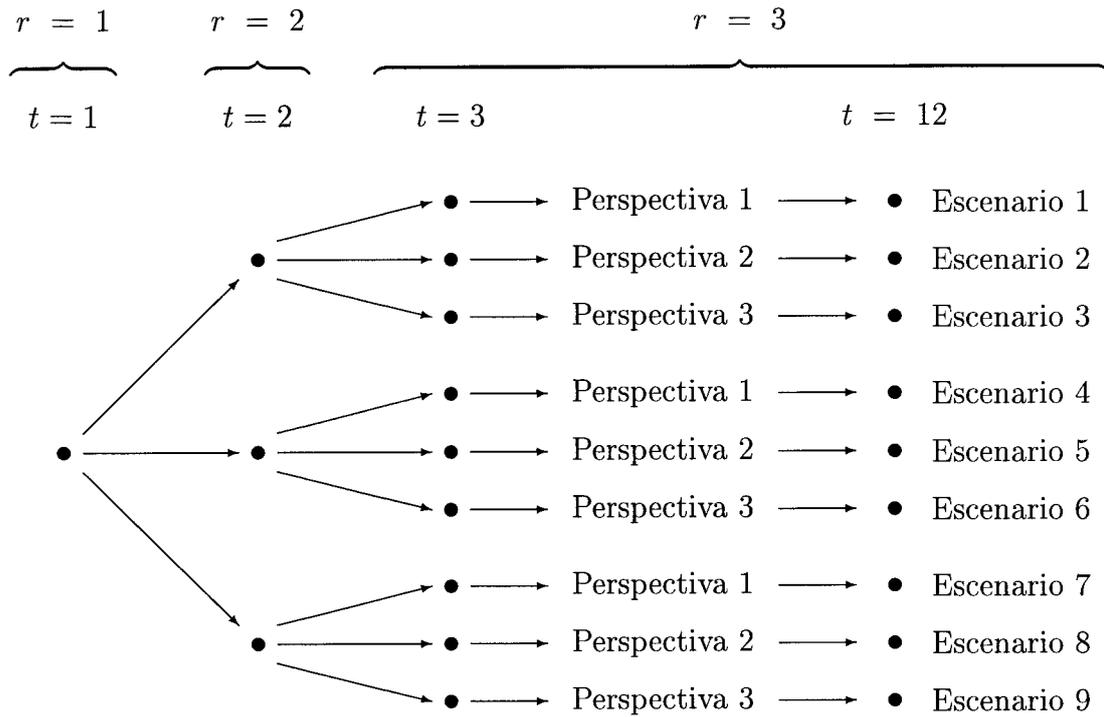


Figura 7.1: Árbol de Escenarios para la Demanda de la Producción

Los requisitos para la no anticipatividad se obtienen a partir del principio de Rockafellar y Wets (1991) (véase Rockafellar y Wets (1991) [57]), que adaptado a esta aplicación dice así:

Si dos escenarios distintos s y s' son idénticos hasta el período de tiempo τ , teniendo en cuenta la información disponible acerca de ellos en dicho período de tiempo τ , se tiene que en ese período de tiempo τ , las decisiones I_{jt}^s , y $I_{jt}^{s'}$, y_{jt}^s e $y_{jt}^{s'}$ y x_{jt}^s , y $x_{jt}^{s'}$, deben ser idénticas para todo período de tiempo t , con $1 \leq t \leq \tau$.

Sea el árbol de escenarios de la Figura 7.1. Cada camino desde la raíz a las hojas se corresponde en esta aplicación con una realización de la demanda aleatoria d_{jt}^s . Fijémonos en la segunda etapa de decisión, en los tres subconjuntos de escenarios mostrados en el árbol. En esta etapa, una decisión a tomar es la cantidad de producto j que se debe producir en el período de tiempo 2. Independientemente del escenario que pueda estar sucediendo, la

información disponible acerca de cada uno de ellos al comienzo del período de tiempo 2 es idéntica, y por tanto, se imponen las condiciones.

$$\begin{aligned}x_{j2}^1 &= x_{j2}^2 = x_{j2}^3 \quad j \in J, \\x_{j2}^4 &= x_{j2}^5 = x_{j2}^6 \quad j \in J, \\x_{j2}^7 &= x_{j2}^8 = x_{j2}^9 \quad j \in J,\end{aligned}\tag{7.5}$$

Dichas restricciones (7.5) forman parte de las denominadas restricciones de no anticipatividad, que representamos de la siguiente manera

$$N = \{x_{jt}^s/x_{jt}^{s'} = x_{jt}^{s'}, \forall s \text{ y } s' \text{ idénticos hasta el período de tiempo } t, \forall t \in T, j \in J\}$$

El conjunto de políticas de producción no anticipativas se define entonces como sigue

$$x = (x_{jt}^s, s \in S, j \in J, t \in T) \in N$$

Similarmente se escribe

$$y \in N \quad \text{e} \quad I \in N$$

para denotar las restricciones de no anticipatividad con respecto a "y" e "I". Véase Wets (1989) [67] para otro tipo de caracterización.

7.1.3 Modelización con Recurso Simple

En cada período de tiempo t las variables de decisión x_{jt} e y_{jt} del modelo (7.1)-(7.4) se las denomina variables control, mientras que las variables inventario I_{jt} , las cuales son resultantes de las otras, se las denomina variables estado. Supóngase que el decisor especifica desde el principio y durante el horizonte de tiempo T , la política óptima x_{jt}^* e y_{jt}^* , no permitiendo cambiar dicha política en ese horizonte de tiempo T aunque se disponga de nueva información. Son muchas las situaciones prácticas en las que se aplican los supuestos anteriores y en tales casos, el decisor intenta que el inventario satisfaga los cambios producidos por la aleatoriedad del sistema. El modelo resultante es como sigue:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \left(\sum_{j \in J, t \in T} h_{jt} I_{jt}^s + \sum_{j \in J, t \in T} p_{jt} y_{jt} \right)\tag{7.6}$$

$$\text{s.a. } I_{jt-1}^s - I_{jt}^s + x_{jt} + y_{jt} = d_{jt}^s \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.7)$$

$$\sum_{j \in J} a_{rj} x_{jt} \leq K_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (7.8)$$

$$I \in N \quad (7.9)$$

$$x_{jt}, I_{jt}^s, y_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.10)$$

Este modelo (7.6)-(7.10) es el denominado modelo de Recurso Simple, ya que los planes de producción propia y del vendedor, x_{jt} e y_{jt} , se fijan desde un principio y por tanto, como resulta obvio, las restricciones de no anticipatividad (7.9) se satisfacen. Por este motivo, en la Tabla 7.1 se hace referencia al mismo como "x, y-fijo".

7.1.4 Modelización con Recurso Total

Este tipo de modelos es el más adecuado de entre todos los basados en escenarios, ya que en cada etapa las variables de control x_{jt} , e y_{jt} , se ajustan a la nueva información que consiga el decisor a lo largo del tiempo. Se le denomina modelo de Recurso Total y su representación es la siguiente:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \left(\sum_{j \in J, t \in T} h_{jt} I_{jt}^s + \sum_{j \in J, t \in T} p_{jt} y_{jt}^s \right) \quad (7.11)$$

$$\text{s.a. } I_{jt-1}^s - I_{jt}^s + x_{jt}^s + y_{jt}^s = d_{jt}^s \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.12)$$

$$\sum_{j \in J} a_{rj} x_{jt}^s \leq K_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T, s \in S \quad (7.13)$$

$$I \in N, x \in N, y \in N, \quad (7.14)$$

$$x_{jt}^s, I_{jt}^s, y_{jt}^s \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.15)$$

En la Tabla 7.1 a este modelo (7.11)-(7.15) se le llama "x, y-recurso". Por otra parte, la definición de ajuste (recurso) de la información puede diferir ligeramente si se tienen en cuenta otras circunstancias como ocurre en el modelo (7.16)-(7.20). Así por ejemplo, en los modelos vistos hasta ahora, las variables y_{jt} representan las decisiones relacionadas con la producción del vendedor, pero si se supone que no hay una fuente alternativa de producción, entonces la demanda no siempre se cubriría. Se considera entonces la siguiente notación:

b_{jt}^s = demanda perdida del producto j en el período de tiempo t bajo el escenario s y

Tabla 7.1: Resumen de la estructura de los modelos

Modelo		Variables Control		Variables Estado
Número	Tipo	Fijo	Recurso	
(7.6)-(7.10)	Recurso Simple	x, y	-	Inventario
(7.11)-(7.15)	Recurso Total	-	x, y	Inventario
(7.16)-(7.20)	Recurso Simple	x	-	Inventario, Demanda perdida
(7.21)-(7.29)	Recurso Parcial	y	x	Inventario, Demanda perdida

l_{jt} = ingresos por unidad vendida del producto j en el período de tiempo t .

El modelo (7.16)-(7.20) representa el caso donde la producción propia se tiene que anticipar desde el comienzo del horizonte temporal de planificación; no se permite la producción del vendedor y toda la demanda no satisfecha se pierde. Por este motivo se denomina como "x-fijo" en la Tabla 7.1.

$$\min \sum_{s \in S} w^s \left(\sum_{j \in J, t \in T} h_{jt} I_{jt}^s + \sum_{j \in J, t \in T} l_{jt} b_{jt}^s \right) \quad (7.16)$$

$$\text{s.a. } I_{jt-1}^s - I_{jt}^s + x_{jt} + b_{jt}^s = d_{jt}^s \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.17)$$

$$\sum_{j \in J} a_{rj} x_{jt} \leq K_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (7.18)$$

$$I \in N, b \in N, \quad (7.19)$$

$$x_{jt}, I_{jt}^s, b_{jt}^s \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.20)$$

Una optimización más robusta se consigue sustituyendo en el modelo (7.16)-(7.20), el término $\sum_s w^s \sum_{j,t} l_{jt} b_{jt}^s$, por cualquiera de las siguientes alternativas:

$$\rho(\xi_1, \dots, \xi_{|S|}) = \max_{s \in S} w_s \xi_s$$

$$\rho(\xi_1, \dots, \xi_{|S|}) = \sum_{s \in S} w_s \xi_s^2$$

$$\rho(\xi_1, \dots, \xi_{|S|}) = \sum_{s \in S} w_s \left(\xi_s - \sum_{s' \in S} w_{s'} \xi_{s'} \right)^2$$

donde

$$\xi_s = \sum_{j,t} l_{jt} b_{jt}^s.$$

La anterior función $\rho(\xi_1, \dots, \xi_{|S|})$ es una función de penalización de la demanda perdida bajo cualquier escenario. Aunque esta formulación introduce la no linealidad al modelo, la ventaja es que conduce a una solución que minimiza las infactibilidades primal y dual bajo cualquier escenario (véase Mulvey y otros (1991) [50]).

7.1.5 Modelización con Recurso Parcial

En esta sección se muestra otro tipo de formulación del problema, en la que se consideran ciertas restricciones adicionales. La mayor ventaja del nuevo modelo (7.21)-(7.29) es que permite la existencia de más de un vendedor, exige que la solución esté dentro de los límites de capacidad de los vendedores, y además, que el esquema de producción sea equilibrado. Para esta nueva representación se necesita la siguiente notación:

Datos:

V = conjunto de vendedores.

a_{jv} = capacidad del vendedor v que se necesita para producir una unidad del producto j .

L_{tv} = capacidad disponible del vendedor v en el período de tiempo t .

y_v = parámetro de equilibrio de la producción del vendedor v , es decir, máximo porcentaje permitido en la desviación de producción del vendedor durante dos períodos consecutivos.

m_v = mínimo uso de la capacidad del vendedor v , si es elegido como suministrador.

p_{jtv} = coste por cada unidad de suministro del producto j procedente del vendedor v en el período de tiempo t .

Variables:

x_{jt}^s , I_{jt}^s , y b_{jt}^s representan lo mismo que en los modelos anteriores.

y_{jtv} = cantidad de producto j , que debe producir el vendedor v en el período de tiempo t .

$$\delta_v = \begin{cases} 1 & \text{si el vendedor } v \text{ es elegido como fuente exterior} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

B_{tv} = nivel de uso de la capacidad total del vendedor v en el período de tiempo t .

El problema consiste en decidir al comienzo del horizonte de planificación, la cantidad a producir de cada producto y por cada vendedor, tal que el coste esperado de la producción de los vendedores y de mantenimiento del inventario sea mínimo. En este caso, las variables control son $x_{jt}^s \forall j \in J, t \in T, s \in S$, e $y_{jtv} \forall j \in J, t \in T, v \in V$, mientras que las variables estado son I_{jt}^s (inventario) y b_{jt}^s (demanda perdida) $\forall j \in J, t \in T, s \in S$. Este modelo no permite que las variables y_{jtv} se ajusten a la nueva información. Esto es debido a que los vendedores tienen muchos compromisos y no existe flexibilidad a la hora de ajustar los volúmenes de producción de éstos en cada período de tiempo. Esto hace que se consideren todos los escenarios posibles de la demanda, se especifique el programa de producción de cada vendedor, y a partir de éstos, se ajuste cada mes el volumen de producción propia con la nueva información disponible. El modelo que se obtiene con este planteamiento es el siguiente:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \left(\sum_{j \in J, t \in T} h_{jt} I_{jt}^s + \sum_{j \in J, t \in T} p_{jtv} y_{jtv} + \sum_{j \in J, t \in T} l_{jt} b_{jt}^s \right) \quad (7.21)$$

$$\text{s.a.} \quad I_{jt-1}^s - I_{jt}^s + x_{jt}^s + \sum_{v \in V} y_{jtv} + b_{jt}^s = d_{jt}^s \quad \forall j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.22)$$

$$\sum_{j \in J} a_{rj} x_{jt}^s \leq K_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T, s \in S \quad (7.23)$$

$$B_{tv} \equiv \sum_{j \in J, s \in S} a_{jv} y_{jtv} \leq L_{tv} \quad \forall t \in T, v \in V \quad (7.24)$$

$$|B_{tv} - B_{(t-1)v}| \leq y_v B_{(t-1)v} \quad \forall t \in T, v \in V \quad (7.25)$$

$$m_v \delta_v \leq \sum_{t \in T} B_{tv} \leq \left(\sum_{t \in T} L_{tv} \right) \delta_v \quad \forall v \in V \quad (7.26)$$

$$I \in N, b \in N, x \in N \quad (7.27)$$

$$x_{jt}^s, I_{jt}^s, y_{jtv}, b_{jt}^s \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T, v \in V, s \in S \quad (7.28)$$

$$\delta_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \quad (7.29)$$

A dicho modelo se le designa en la Tabla 7.1 como "x-recurso, y-fijo". Veamos el significado de cada una de las restricciones del mismo. Las ecuaciones de equilibrio entre la

producción y la demanda vienen dadas por (7.22). Las restricciones (7.23) y (7.24) impiden que se supere la capacidad de producción propia, y la capacidad de producción de los vendedores, respectivamente. Las restricciones (7.25) se encargan de mantener el equilibrio en la producción de los vendedores, acotando la desviación de la producción de cada vendedor entre dos períodos de tiempo consecutivos. Las restricciones (7.26) definen un mínimo nivel de uso de la capacidad del vendedor, tal que si el vendedor no es elegido dicho mínimo vale cero. Estas condiciones (7.26) garantizan de esta forma, que se seleccionen sólo unos pocos vendedores. Por último, las restricciones de no anticipatividad sobre las variables estado y control se recogen en (7.27).

7.1.6 Resultados Computacionales

Aunque los modelos que se utilizan en esta aplicación son lineales, la dimensión de los problemas a resolver es muy grande. De hecho, algunos de los problemas que se han resuelto tienen cerca de 25000 restricciones y más de 75000 variables (véanse las Tablas 7.2 y 7.4). La ventaja radica en la estructura cuasi-escalera que presentan estos problemas, que tal y como hemos indicado en los capítulos anteriores, facilita el proceso de resolución. Véanse otros algoritmos especializados en Ermoliev y Wets (1990) [17].

La experiencia computacional procede de cuatro grandes problemas. El primero fue generado a partir de una aplicación real, mientras que los otros tres son extensiones del primero. En los ejemplos de prueba se consideran 12 períodos de tiempo. Los escenarios se han generado a partir de las perspectivas de las demandas establecidas por planificadores y analistas familiarizados con las mismas. En Danzig y Glynn (1990) [7], Infanger (1989) [34] y Entrinken e Infanger (1990) [15] se describe la creación de escenarios en un contexto diferente. Por otra parte, y ya que el tamaño de los modelos aumenta con el número de escenarios y el número de períodos de tiempo, consideramos, como vimos de forma general, un proceso de decisión 3-etápico de manera que se facilite el manejo de este tipo de modelos, donde la primera etapa de decisión engloba el período de tiempo 1, la segunda etapa el segundo período de tiempo y los restantes períodos de tiempo (del 3 al 12) se incluyen en la tercera etapa (véase la Figura 7.1). Además, en los ejemplos de prueba todas las perspectivas y todos los escenarios presentan la misma demanda en la primera etapa de decisión, y salvo

Tabla 7.2: Dimensiones de los Ejemplos

Ejemplos	Productos	Perspectivas de la Demanda	Número de Escenarios
P1	23	3	9
P2	50	3	9
P3	100	3	9
P4	100	5	25

Tabla 7.3: Resultados del Ejemplo P1

Casos	Planificación con	Coste Esperado
1	Modelo (7.1)-(7.4), perspectiva 1 de la demanda	1.101.614
2	Modelo (7.1)-(7.4), perspectiva 2 de la demanda	1.111.069
3	Modelo (7.1)-(7.4), perspectiva 3 de la demanda	1.195.786
4	Modelo (7.1)-(7.4), demanda media	1.127.081
5	Modelo (7.6)-(7.10), (x-, y-fijo)	1.210.308
6	Modelo (7.16)-(7.20), (x-fijo)	1.083.441
7	Modelo (7.11)-(7.15), (x-, y-recurso)	1.030.016

en el último ejemplo P4, el número de perspectivas de la demanda para las siguientes etapas es tres (véase la Tabla 7.2). También se considera $w^s = 1/|S| \quad \forall s \in S$, es decir, se asume que todos los escenarios son igualmente probables.

En la Tabla 7.3 se pueden comparar los costes esperados de los diferentes modelos para el ejemplo P1. En los casos 5, 6, y 7 el coste esperado es simplemente el valor óptimo de los modelos (7.6)-(7.10), (7.16)-(7.20), y (7.11)-(7.15), respectivamente. Mientras que si se toman las decisiones teniendo en cuenta un único escenario (en los casos 1, 2, y 3), o con la demanda media (en el caso 4) el coste esperado "c" se calcula mediante el siguiente algoritmo.

1. Se denota por x_{jt}^* la solución óptima de (7.1)-(7.4) construido con la correspondiente

Tabla 7.4: Dimensiones de los Modelos y Tiempos Computacionales de Resolución

Ejemplos	Modelo (7.6)-(7.10)			Modelo (7.16)-(7.20)			Modelo (7.11)-(7.15)		
	m	n	t	m	n	t	m	n	t
P1	1883	2360	0	1893	4000	0	1975	4650	0
P2	4055	5074	4	4055	8600	29	4137	12126	49*
P3	8097	10148	13	8097	17200	143	8179	24252	153*
P4	25613	28000	18	15613	52400	7	25857	76800	80

m = número de restricciones.

n = número de variables.

t = tiempo de CPU en segundos en un IBM 3090-400E, VM/CMS.

demanda según el caso elegido.

2. Se especifica $\Delta_{jt}^s = I_{j,t-1} + x_{jt}^* - d_{jt}^s$ para cada combinación j, t, s .

3. Si $\Delta_{jt}^s > 0$, entonces asignar $I_{jt}^s = \Delta_{jt}^s$ e $y_{jt}^s = 0$.

4. En otro caso, hacer $y_{jt}^s = |\Delta_{jt}^s|$ e $I_{jt}^s = 0$.

5. Calcular el coste esperado $c = \sum_{j \in J, t \in T, s \in S} w^s (h_{jt} I_{jt}^s + p_{jt} y_{jt}^s)$.

Nótese en la Tabla 7.3 que la estrategia definida por el modelo de Recurso Total (7.11)-(7.15) produce el coste esperado más pequeño, dado que es más flexible que las otras estrategias, sobre todo si lo comparamos con el coste esperado del modelo (7.6)-(7.10), donde no se permite ningún ajuste en las variables control, de ahí que la demanda sólo se pueda satisfacer llevando a cabo grandes inventarios.

En la Tabla 7.4 se muestra las dimensiones de los modelos (7.6)-(7.10), (7.11)-(7.15) y (7.16)-(7.20) para los cuatro ejemplos y el tiempo de CPU requerido para obtener la solución óptima. La representación que se utilizó de los modelos fue la Representación Compacta, junto con la metodología del Simplex, salvo en los ejemplos señalados con un asterisco, donde

se utilizó la Formulación Extendida y la metodología de Puntos Interiores (Método Primal-Dual de Predicción-Corrección de Mehrotra). Dadas las dimensiones de los problemas los tiempos de CPU necesarios se consideran satisfactorios.

7.2 Obtención de Estrategias Robustas en Planificación Financiera

7.2.1 Activos Financieros

En esta sección se proponen varios modelos mixtos 0-1 que representan el comercio de activos financieros con incertidumbre en las tasas de interés, a lo largo de un horizonte temporal de planificación formado por varios períodos de tiempo, que oscila entre 3 y 6 meses.

El valor de mercado de un activo financiero al comienzo de un período depende del número de períodos hasta alcanzar la madurez del activo, de la evolución de la tasa de interés hasta el período de madurez, de la amortización de la inversión en los períodos dados, y de un factor de ponderación que tiene en cuenta el tipo de activo.

Dado el valor de mercado para cada activo y el efectivo disponible en cada período de tiempo, el objetivo consiste en obtener el volumen de compra y venta de cada activo, que nos sitúe en aquellas posiciones a lo largo del horizonte de planificación que satisfagan ciertas restricciones lógicas. Esto es, se intenta maximizar la ganancia total de la inversión al final del horizonte temporal de planificación.

Para tomar una decisión correcta se requiere información apropiada acerca de los activos financieros disponibles y su valor de mercado. No obstante, la evolución de la tasa de interés a lo largo del horizonte de planificación no siempre se conoce. Veamos como se modeliza la incertidumbre asociada a la tasa de interés empleando la técnica de Análisis de Escenarios. Comenzemos considerando el modelo determinístico, donde la tasa de interés se supone totalmente conocida en cada período de tiempo. Antes de introducir el modelo, se muestra la notación que se utiliza en esta aplicación:

T = número de períodos de tiempo en el horizonte de planificación (t).

I = conjunto de activos financieros (i).

J = conjunto de tipos de activos financieros (j).

I_j = conjunto de activos financieros del tipo j . ($I_j \subseteq I$, $I_j \cap I_g = \emptyset$, $j, g \in J$).

T_i = período de madurez para el activo i , para $i \in I$, $1 \leq T_i$.

K_i = período de emisión del activo i , donde $0 \leq K_i < T_i$.

Nota: Se supone que el período de emisión es nulo, es decir, $K_i = 0$ si el activo fue emitido antes de que comience el horizonte de planificación.

$C_{i\tau}$ = rendimiento del activo i al final del período τ , para cada $K_i < \tau \leq T_i$.

Nota: Para primas de emisión y descuentos nulos $C_{i\tau} = 0$, para $K_i < \tau < T_i$.

r_t = tasa de interés en el período de tiempo t , con $t = 1, 2, \dots, \max\{T, \max_i\{T_i\}\}$.

f_j = factor de ponderación para la tasa de interés, que permite el cálculo del valor de los activos del conjunto I_j , $j \in J$.

$E_{it\tau}$ = valor actualizado al final del período t , por unidad emitida de cualquier activo del tipo j al final del período τ . Este viene dado por la siguiente expresión:

$$E_{jt\tau} = \prod_{t < l \leq \tau} (1 + f_j r_l)^{-1} \quad \text{para } j \in J \quad (7.30)$$

para $0 < t < \tau < T_i$. Aunque en este trabajo se supone que el valor por unidad emitida de cualquier activo es constante, se puede fácilmente extender al caso, donde el valor por unidad emitida sea una función lineal definida a trozos del volumen de comercio. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que la evolución del valor por unidad emitida de los activos pertenecientes a un mismo tipo e igual período de retorno de la inversión τ , es la misma para todos ellos desde el período t hasta el período dado τ . Por ejemplo, los bonos del tesoro a 1, 3, y 6 meses con idénticos períodos de amortización, tienen el mismo valor por unidad emitida en cualquier período t , puesto que la solvencia y liquidez son idénticas para todos ellos.

P_{it} = valor en el mercado por unidad del activo i al final del período de tiempo t . Este se puede expresar por

$$P_{it} = \sum_{t < \tau \leq T_i} C_{i\tau} E_{jt\tau}, \quad i \in I_j, \quad j \in J, \quad 0 < t \leq T_i, \quad t < \tau \leq T_i \quad (7.31)$$

Nota: P_{i0} es el precio inicial en el mercado. El factor de ponderación f_j se usa en (7.30) como un término de ajuste. Este se estima de forma que la evolución de la tasa de interés, minimice la diferencia ponderada entre el precio del mercado observado $P_{i0} \forall i \in I_j$, y el precio que se obtiene de aplicar las hipótesis esperadas basadas en (7.30) y (7.31) para todos los tipos de activos en I_j . Como alternativa de $f_j r_l$, se puede utilizar la suma $f_j + r_l$ (véase Zenios (1991) [69]).

Z_{i0} = stock inicial del activo i .

D_t = efectivo externo disponible al comienzo del período t , para $0 \leq t < T$.

N = número máximo de tipos de activos que se pueden mantener en stock en cualquier momento.

F_i = valor de cruce por unidad del activo i , para $i \in I$.

m_{jt} y M_{jt} = valor mínimo y máximo condicionado del activo del tipo j , que se permite mantener en el período de tiempo t , para $j \in J$ y $0 < t \leq T$.

\bar{X}_{it}^+ y \bar{X}_{it}^- = máximo volumen de compra y de venta permitido del activo i , al final del período de tiempo t , para $0 \leq t < T_i$ e $i \in I$, respectivamente.

γ_j = coste de transacción por unidad del activo del tipo j .

P_{it}^- = $P_{it} - \gamma_j$ = precio de venta por unidad del activo i al final del período t descontado el coste de transacción, para $0 < t < T_i$, $i \in I_j$ y $j \in J$.

P_{it}^+ = $P_{it} + \gamma_j$ = precio de compra por unidad del activo i al final del período t descontado el coste de transacción, para $0 < t < T_i$, $i \in I_j$ y $j \in J$.

Variables:

X_{it}^+ y X_{it}^- = volumen de compra y venta del activo i al final del período de tiempo t , para $0 \leq t < T$ e $i \in I$, respectivamente.

Z_{it} volumen en stock del activo i al comienzo del período t , para $0 < t \leq T$.

$$\delta_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si el tipo de activo financiero } j \text{ es mantenido} \\ & \text{en stock en el período de tiempo } t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

S_t = efectivo neto al final del período t , después del comercio de los activos y el cobro de sus rendimientos, para $0 \leq t \leq T$.

El objetivo del problema es conseguir el volumen de comercio X^+ y X^- , y por consiguiente, el stock de los activos Z y el efectivo neto S , a lo largo del horizonte de planificación, de manera que se maximice el valor final. Esto es, se maximice el efectivo neto y el valor de mercado del stock al final del horizonte de planificación, a la vez que (1) el efectivo disponible externo en cada período no se supere, (2) el volumen de comercio de cada activo y en cada período de tiempo no exceda los valores permitidos, (3) el valor de realización de cada tipo de activo este dentro de los límites permitidos en cada período, y (4) el máximo número de activos a mantener en stock en cualquier período de tiempo no se supere.

Para facilitar la representación del modelo se considera el siguiente parámetro.

ρ_{it} = índice que vale uno en los períodos de comercio del activo i , y cero en otro caso, para $i \in I$, y $0 \leq t \leq T$.

$$\rho_{it} \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } K_i \leq t < T_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.32)$$

El modelo mixto 0-1 entonces es como sigue:

$$V(*) = \max S_T + \sum_{i \in I} \rho_{it} P_{it}^- Z_{it} \quad (7.33)$$

$$\text{s.a} \quad Z_{it} + X_{it}^+ - X_{it}^- = Z_{i,t+1} \quad 0 \leq t < T, i \in I \quad (7.34)$$

$$S_t - S_{t-1} + \sum_{i \in I} [\rho_{it} P_{it}^+ X_{it}^+ - \rho_{it} P_{it}^- X_{it}^- - C_{it} Z_{it}] = D_t, 0 \leq t < T \quad (7.35)$$

$$S_{T-1} + \sum_{i \in I} C_{iT} Z_{iT} = S_T \quad (7.36)$$

$$m_{jt}\delta_{jt} \leq \sum_{i \in I_j} F_i Z_{it} \leq M_{jt}\delta_{jt} \quad 0 < t \leq T, j \in J \quad (7.37)$$

$$\sum_{j \in J} \delta_{jt} \leq N, \quad 0 < t \leq T \quad (7.38)$$

$$0 \leq X_{it}^+ \leq \bar{X}_{it}^+, \quad 0 \leq X_{it}^- \leq \bar{X}_{it}^-, \quad K_i \leq t < T, i \in I \quad (7.39)$$

$$\delta_{jt} \in \{0, 1\}, \quad 0 < t \leq T, j \in J \quad (7.40)$$

$$0 \leq Z_{it}, \quad K_i \leq t \leq T, i \in I \quad (7.41)$$

$$0 \leq S_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.42)$$

Veamos el significado de las restricciones del modelo. En primer lugar, la función (7.33) intenta maximizar el valor final. Las restricciones (7.34) son las ecuaciones de equilibrio del stock de los activos financieros, mientras que las restricciones (7.35) y (7.36) son las ecuaciones de equilibrio del flujo de efectivo, en cualquier período de tiempo del horizonte de planificación. Inicialmente se considera $S_1 = 0$. Las restricciones (7.37) controlan el stock del tipo de activo j , tanto superiormente como inferiormente. Tengamos en cuenta que la menor diferencia $M_{jt} - m_{jt}$ es mayor que la relajación del modelo lineal 0-1. En (7.39) se obliga a que no se mantengan más activos que los permitidos en cualquier período de tiempo. Por último las cotas de las variables vienen dadas por (7.40)-(7.42). Este modelo tiene aproximadamente $T(3 + 3|I| + 2|J|) + 1$ restricciones, $T(1 + 3|I|)$ variables continuas y $|J| |T|$ variables 0-1.

7.2.2 Modelo Estocástico del Mercado Financiero

El valor de mercado por unidad del activo i , P_{it} , para $t > K_i$, no se conoce principalmente, debido a la variabilidad de la tasa de interés en el tiempo. Luego, con el modelo estocástico multietápico que se presenta, se intenta conseguir una política de comercio óptima con respecto al criterio del arrepentimiento nulo. Esta se podría alcanzar, si se pudiera predecir perfectamente la evolución del valor de los activos .

Obviamente, el modelo mixto 0-1 (7.33)-(7.42) es óptimo con respecto al criterio de arrepentimiento nulo, puesto que la tasa de interés se asume perfectamente conocida en todo momento.

A continuación modelizamos la incertidumbre que rodea al problema al igual que en la

aplicación anterior, vía algunos escenarios. Dado S el conjunto de escenarios, en este caso los escenarios representan las diferentes tasas de interés en cada período de tiempo. Denotemos entonces por

$E_{jt\tau}^s$ = valor actualizado en el período t , por unidad de producción de cualquier activo del tipo j en el período τ , bajo el escenario s para $s \in S$.

w^s = ponderación asociada al escenario s .

r_t^s = la tasa de interés en el período de tiempo t , bajo el escenario s para $s \in S$.

Señalamos la correlación entre las tasas de interés de un período y el siguiente, r_t^s y r_{t+1}^s . Teniendo en cuenta dichas tasas, $E_{jt\tau}^s$ se puede expresar por

$$E_{jt\tau}^s = \prod_{t < l \leq \tau} (1 + f_j r_l^s)^{-1}, \quad j \in J \quad (7.43)$$

para $0 < t < \tau < T_i$ y el valor unitario de mercado del activo financiero i , en el período de tiempo t bajo el escenario s , P_{it}^s , sería como sigue

$$P_{it}^s = \sum_{t < \tau \leq T_i} C_{i\tau} E_{jt\tau}^s \quad (7.44)$$

donde $i \in I_j$, para $0 < t \leq T_i$. Fijémonos que $P_{it}^s = C_{it}$ para $t = T_i$, y $s \in S$, y $P_{i0}^s = P_{i0}^{s'}$ para todo $s, s' \in S$, puesto que es el valor de mercado inicial.

Por otro lado, se supone que el efectivo externo disponible D_t , se estima con bastante precisión.

Según hemos visto en el trabajo, el esquema a seguir es resolver el modelo mixto (7.33)-(7.42) para cada escenario $s \in S$, y obtener las denominadas soluciones de los escenarios individuales. Denotemos por $V^s(*)$ el valor óptimo de (7.33)-(7.42) bajo el escenario s , donde P_{it} se sustituye por P_{it}^s . El objetivo de la política que se pretende alcanzar es que si estamos seguros de que el escenario s es el que va a suceder, se pueda entonces implementar la solución óptima del escenario correspondiente al s . A esto es lo que denominamos arrepentimiento nulo. Dicho arrepentimiento vendría dado por la diferencia entre el valor óptimo de una política de comercio propuesta $y = (X^+, X^-)$, y el valor óptimo de cada escenario $V^s(*)$. En otras palabras, el arrepentimiento es la cantidad de dinero que se pierde cuando el escenario que sucede se revela al decisor, es decir, cuando es conocida perfectamente

la política óptima que se debería haber utilizado. Lo ideal es que no se perdiera ningún dinero en cualquier escenario, pero esto es prácticamente imposible. Dicho arrepentimiento es casi siempre no negativo, pero se intenta minimizar.

Denotemos por $V^s(y)$ el valor de la función objetivo (7.33) para la solución propuesta, tal que

$$V^s(y) = S_T(y) + \sum_{i \in I} \rho_{iT} P_{iT}^{-s} Z_{iT}(y) \quad (7.45)$$

donde $S_T(y)$ y $Z_{iT}(y)$ representan el efectivo y el stock del activo i , al final del horizonte de planificación, respectivamente, cuando se utiliza la política de comercio y . Denotemos también por $H^s(y)$ la penalización por incumplir la ecuación de equilibrio del flujo efectivo (7.35) cuando se usa la política de comercio y .

Existen distintas formas de expresar el arrepentimiento de una política de comercio y . La expresión que usamos es la siguiente:

$$R(y) = \|w(V(y) - V^s)\|^d + \|wH(y)\|^d \quad (7.46)$$

donde w , $V(y)$, $H(y)$, y V^s son vectores de orden $|S|$, siendo w^s , $V^s(y)$, V^s , y $H^s(y)$ los mismos elementos pero correspondientes al escenario s para $s \in S$, y d es una norma paramétrica conveniente como se vió en el capítulo 1.

A continuación veamos el modelo mixto 0-1, que propone aquella política de comercio "y", lo más próxima a alcanzar el criterio de arrepentimiento nulo. Este modelo es al que se reconoce como modelo de "Inmunización de Escenarios" (véase Dembo y King (1991) [13]).

$$\min \sum_{s \in S} w^s \left[S_T + \sum_{i \in I} \rho_{iT} P_{iT}^{-s} Z_{iT} - \hat{V}_s^* \right]_-^d + \alpha H(q)_- \quad (7.47)$$

$$\text{s.a} \quad Z_{it} + X_{it}^+ - X_{it}^- = Z_{it+1} \quad 0 \leq t < T, i \in I \quad (7.48)$$

$$S_t - S_{t-1} + \sum_{i \in I} [\rho_{it} P_{it}^{+s} X_{it}^+ - \rho_{it} P_{it}^{-s} X_{it}^- - C_{it} Z_{it}] - q_t^s = D_t \quad 0 \leq t < T, s \in S \quad (7.49)$$

$$S_{T-1} + \sum_{i \in I} C_{iT} Z_{iT} = S_T \quad (7.50)$$

$$m_{jt} \delta_{jt} \leq \sum_{i \in I_j} F_i Z_{it} \leq M_{jt} \delta_{jt} \quad 0 < t \leq T, j \in J \quad (7.51)$$

$$\sum_{j \in J} \delta_{ij} \leq N, \quad 0 < t \leq T \quad (7.52)$$

$$0 \leq X_{it}^+ \leq \bar{X}_{it}^+, \quad 0 \leq X_{it}^- \leq \bar{X}_{it}^-, \quad 0 \leq t < T, \quad i \in I \quad (7.53)$$

$$\delta_{jt} \in \{0, 1\} \quad 0 < t \leq T, \quad j \in J \quad (7.54)$$

$$0 \leq Z_{it}, \quad K_i \leq t \leq T, \quad i \in I \quad (7.55)$$

$$0 \leq S_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.56)$$

donde

d y α son parámetros positivos,

q_t^s es una variable sin restricción que representa la infactibilidad de la ecuación de equilibrio del flujo de efectivo, para el período t bajo el escenario s (se tiene que $q_0^s = 0, \quad \forall s \in S$),

$H(q)_-$ es una función de penalización sobre $\{(q_t^s)_- \quad \forall t, s\}$ y

$(r)_-$ denota el menor valor parcial de la variable r , tal que

$$(r)_- = \begin{cases} 0 & \text{para } r \geq 0 \\ |r| & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.57)$$

Notése que el efectivo excedente en el período de tiempo t bajo el escenario s no está penalizado. Esto se debe a que las consecuencias de que $q_t^s > 0$ no son tan graves como las de que $q_t^s < 0$.

Por otro lado, $\hat{V}^s(*)$ representa la tolerancia de optimalidad (véase Jensen y King, (1991) [35]) tal que

$$\hat{V}^s(*) = V^s(*) - \epsilon, \quad \text{para } \epsilon \geq 0 \quad (7.58)$$

La función objetivo (7.47) intenta minimizar el arrepentimiento de la toma de decisiones de comercio erróneas. Esta se compone de una función de penalización sobre la menor infactibilidad parcial de las ecuaciones de equilibrio del flujo de efectivo, y la menor desviación parcial esperada del valor final neto óptimo en cualquier escenario.

La principal diferencia entre los modelos (7.33)-(7.42) y (7.47)-(7.56) es el conjunto de restricciones de equilibrio del flujo de efectivo. Se puede ver que el modelo de Inmunización de Escenarios permite considerar el valor residual (q_t^s) en cada período y para cada escenario, y el número de restricciones es $T|S|$, mientras que en el modelo (7.33)-(7.42) el valor residual es siempre el mismo para todos los escenarios y el número de restricciones es aproximadamente $T(3 + 3|I| + 2|J|) + 1$.

Como ya se indicó en la aplicación anterior, en Mulvey, Vanderbei y Zenios (1991) [50] se presenta otro tipo de entorno para una optimización robusta, y en particular, sugieren varias formas de expresar la función de penalización $H(q)$ como son:

$$\begin{aligned} H(\xi) &\equiv \max_{s \in S} \{w^s \xi_s\} \\ H(\xi) &\equiv \sum_{s \in S} w_s \xi_s^2 \end{aligned} \quad (7.59)$$

donde,

$$\xi_s = \sum_{t=1}^{T-1} (q_t^s)_- \quad (7.60)$$

Normalmente se sustituye q_t^s , por $q_t^{+s} - q_t^{-s}$ en (7.49), siendo $0 \leq q_t^{+s}, q_t^{-s}$. De esta forma ξ_s se expresaría por

$$\xi_s = \sum_{t=1}^{T-1} q_t^{-s} \quad (7.61)$$

7.3 Planificación Hidroeléctrica con Incertidumbre en Las Aportaciones Exógenas

En esta sección presentamos una aplicación del modelo que venimos desarrollando, en el campo de la dirección o planificación de la generación de energía hidroeléctrica, teniendo en cuenta la incertidumbre inherente a los valores de entradas y salidas de agua de la red considerada. Un tratamiento determinístico del problema proporciona resultados insatisfactorios, salvo para horizontes de tiempo muy cortos. Se describe entonces el modelo en base al análisis de escenarios, que permite un tratamiento satisfactorio de la incertidumbre de los datos en problemas de planificación a medio y largo plazo.

La representación del modelo que utilizamos es la Formulación Extendida vista en el capítulo 3. Dicha formulación es excesivamente grande dado que está formada por un submodelo de red por cada escenario, más una serie de restricciones de enganche. Se considera más adecuado aplicar en su descomposición el método Lagrangiano Aumentado. Veremos más adelante los resultados obtenidos mediante dos tipos de implementaciones, una en paralelo y la otra en secuencial, empleando para ello un grupo de tres estaciones de trabajo. Los códigos han sido probados sobre datos obtenidos de los embalses de la red de Iberdrola,

una empresa poseedora del 50% de la capacidad total hidroeléctrica instalada en España, que genera el 40% de la demanda de la energía total.

Comenzamos presentando algunos aspectos generales relacionados con el problema en cuestión. La planificación del funcionamiento de un sistema hidrotérmico normalmente se formula mediante la coordinación de las componentes termales e hidráulicas del sistema, teniendo en cuenta cuales son los precios de generación térmica, para obtener así el coste de funcionamiento del sistema. A esto hay que añadir las restricciones enganche sobre la satisfacción de la demanda (véanse Rosenthal (1981) [58], Dembo (1990) [11], Tong y otros (1989) [66] y Oliveira y otros (1993) [52]).

Debido a la complejidad del problema y la naturaleza de la incertidumbre en varios elementos del sistema, este proceso de planificación se divide en dos: los problemas de planificación a largo plazo, esto es, con un horizonte de un año o más, donde la incertidumbre juega un papel crucial, y los problemas de planificación a corto plazo, con un horizonte que va de un día a una semana, donde la incertidumbre es tratada a través de los resultados obtenidos a partir del modelo de planificación a largo plazo. Nos centramos en el tratamiento eficiente de la incertidumbre dentro del problema de planificación a largo plazo. Otras técnicas de descomposición que tienen notable éxito se pueden encontrar en otros trabajos como son Pereira y Pinto (1985) [54] Pereira (1989) [53], Dantzig y otros (1989) [9], Rottling y otros (1992) [59] y Gorestin y otros (1993) [31]. En la mayor parte de dichos trabajos se usan aproximaciones basadas en la descomposición de Benders, sin embargo, nosotros usamos la aproximación Lagrangiana Aumentada.

En este trabajo se estudia la componente hidráulica del sistema, ya que es la más directamente afectada por el entorno de incertidumbre.

7.3.1 Descripción del Problema Determinístico

El objetivo que se persigue es maximizar la hidroenergía generada a lo largo de un horizonte de planificación por un sistema multiembalse. Dicho sistema está formado por una red básica correspondiente al tramo de un río, donde los nodos representan los embalses y los arcos son las secciones del río que conectan los embalses. Así mismo, esta red básica se repite

en varios segmentos, que se corresponden con los distintos períodos de tiempo (normalmente semanas), y los mismos se unen por arcos especiales en algunos nodos.

Las variables de decisión del problema de optimización son la cantidad de agua a ser liberada desde cada embalse a su embalse inmediatamente inferior en un período dado (correspondiente al flujo que circula por los arcos en la red básica), y la cantidad de agua a ser almacenada en los embalses de un período al siguiente (flujo que circula por los arcos especiales que unen los segmentos). Dicha cantidad de agua liberada o de agua almacenada se conoce en el siguiente período de tiempo.

Las restricciones son de dos clases: por un lado, unas ecuaciones lineales que aseguran el equilibrio del flujo de agua en cada embalse, y por otro, unas cotas simples sobre las variables. Con dichas cotas se intenta primero asegurar que el agua liberada satisfaga el torrente deseado para su uso en el riego y la navegación; en segundo lugar, que la cantidad de agua liberada desde un embalse dado a cualquiera de sus embalses directamente inferiores no exceda la capacidad del canal; y por último, que la cantidad de agua almacenada en los embalses permanezca bajo una cota superior dada, y en caso de exceder tal cota penalizarla.

El objetivo del modelo es por tanto, maximizar una función no lineal, generalmente la generación de energía hidroeléctrica durante el horizonte de planificación, o alternativamente, minimizar el coste de la energía térmica generada.

Para introducir el modelo del que hablamos, se usa la siguiente notación:

J el conjunto de embalses,

T el conjunto de períodos de tiempo,

$W \subset J$ corresponde a los embalses de almacenamiento de agua (en consecuencia, $J - W$ es el conjunto de plantas del recorrido del río),

$E \subset J$ es el conjunto de embalses que no se usan para generar hidroenergía y

P_j (Q_j) es el conjunto de embalses inmediatamente superior (inferior) desde el embalse j .

Variables:

r_{tji} la cantidad de agua liberada desde el embalse j al embalse $i \in Q_j$ en el período t , y s_{jt} la cantidad de agua almacenada en el embalse j al comienzo del período t .

Las ecuaciones de equilibrio del flujo de agua en cada embalse y en cada período de tiempo son como sigue:

$$\sum_{i \in P_j} r_{tij} - s_{tj} + \sum_{i \in Q_j} r_{tji} + s_{t+1j} = b_{tj} \quad \forall t \in T, j \in J \quad (7.62)$$

donde b_{tj} es la cantidad de agua exógena que entra al embalse j en el período de tiempo t . Dicha cantidad puede ser negativa, entendiéndose entonces como una salida de agua de la red durante el período t . Además se considera que s_{tj} es fijo para $t = 1$ y $t = |T|$.

Por otra parte, tanto la cantidad de agua que circula por los arcos de las redes básicas en cada período de tiempo, como la que lo hace por los arcos especiales que unen los segmentos están acotadas de la forma siguiente:

$$l_{tji} \leq r_{tji} \leq u_{tji} \quad \forall i \in Q_j, j \in J, t \in T \quad (7.63)$$

$$m_{tj} \leq s_{tj} \leq M_{tj} \quad \forall j \in W, t \in T - 1 \quad (7.64)$$

Se denota también por

R_{tji} la capacidad del canal (j, i) por el que circula el agua para generar energía, siendo $j \in J - E$, donde $l_{ji} \leq R_{tji} \leq u_{ji}$, y

T_{tj} una cota superior de la cantidad de agua que se puede almacenar en el embalse j , para $j \in W$ en el período de tiempo t .

Puesto que el agua sobrante $r_{tji} - R_{tji}$ no se puede usar en la generación de hidroenergía, y además, se debe penalizar el exceso de agua almacenada $s_{tj} - T_{tj}$ en cualquier embalse j , la función objetivo se considera de la siguiente manera:

$$\max \sum_{t \in T} \left(\sum_{j \in J - E, i \in Q_j} h_{tji} - \sum_{j \in W} U_{tj} \max(0, s_{tj} - T_{tj}) \right) \quad (7.65)$$

donde h_{tji} es la hidroenergía generada en el embalse j en el período t , que se define como sigue

$$h_{tji} = K_{tji} \min(r_{tji}, R_{tji}) \quad \forall t \in T, j \in J - E, i \in Q_j \quad (7.66)$$

con K_{tji} una función de las variables s para los embalses de $J - E$,

$$K_{tji} \approx f_{tji}(s_{tj}, s_{t+1j}), \quad (7.67)$$

y U_{tj} una función de penalización sobre el exceso de agua almacenada.

7.3.2 Modelo Estocástico de Generación de Hidroenergía

Dado el modelo de generación de energía hidroeléctrica (7.62)-(7.67), éste no contempla la incertidumbre asociada a las entradas y salidas de agua. Por tanto, modelizamos la incertidumbre vinculada con tal parámetro mediante la técnica de análisis de escenarios. Esto es, para cada uno de los escenarios pertenecientes al conjunto S , el vector independiente de (7.62) toma un valor distinto b_{tj}^s . Estos valores se corresponden con las diferentes entradas y salidas de agua a la red. Considérese también las ponderaciones w^s , que el decisor asocia con cada escenario $s \in S$. Se denota además, por r_{tji}^s la cantidad de agua liberada desde el embalse j al embalse $i \in Q_j$, en el período t bajo el escenario s , y por s_{jt}^s la cantidad de agua almacenada en el embalse j al comienzo del período t , bajo el escenario s .

El planteamiento que hemos adoptado hasta ahora en las otras aplicaciones, es proponer aquella solución que mejor afronte cada uno de los escenarios, de manera que dicha solución este lo más próxima a la solución del problema si ocurriese cualquiera de los escenarios, e incluso el de menor probabilidad, cuyas consecuencias no serían nada favorables para el buen funcionamiento del sistema (véase Dembo (1991) [12]). Esto se puede alcanzar buscando una solución que minimice la diferencia ponderada entre el valor de la solución propuesta y el valor de la solución óptima para cada escenario. Para presentar este modelo, se asume que la función objetivo (7.65) se puede aproximar por alguna función polinomial f . Es decir,

$$f(r, s) \approx \max_{t \in T} \left(\sum_{j \in J-E, i \in Q_j} h_{tji} - \sum_{j \in W} U_{tj} \max(0, s_{tj} - T_{tj}) \right) \quad (7.68)$$

Otra idea que también se recoge en el modelo, es el concepto de no anticipatividad de Rockafellar y Wets (1991) (véase Rockafellar y Wets (1991) [57]). Es decir, sólo se anticipan las decisiones de la etapa $r = 1$, ya que en las restantes etapas podemos volver a analizar los datos, y percatarnos de que han sido cambiados (algunos escenarios hayan desaparecido, etc). Por tanto, lo ideal es que el modelo se pueda reoptimizar a lo largo del horizonte temporal de planificación. Tal principio de no anticipatividad se representa matemáticamente imponiendo

las siguientes condiciones,

$$s_{jt}^s = s_{jt}^{s'} \quad (7.69)$$

para todos los escenarios s y s' , que sean idénticos hasta el período t , siendo t un período de tiempo cualquiera. Según hemos venido utilizando, sea N el conjunto de soluciones que satisfacen las denominadas restricciones de no anticipatividad, y sean r^s y s^s las cantidades de agua liberada y almacenada, respectivamente en los embalses, bajo el escenario s . Entonces el modelo de Recurso Total con Inmunización de Escenarios sería el siguiente:

$$\min \sum_{s \in S} w^s \|f(r^s, s^s) - \bar{z}^s\|_+^d \quad (7.70)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i \in P_j} r_{tij}^s - s_{tj}^s + \sum_{i \in Q_j} r_{tji}^s + s_{t+1j}^s = b_{tj}^s \quad \forall t \in T, j \in J, s \in S \quad (7.71)$$

$$s \in N \quad (7.72)$$

$$l_{tji} \leq r_{tji}^s \leq u_{tji} \quad \forall i \in Q_j, j \in J, t \in T, s \in S \quad (7.73)$$

$$m_{tj} \leq s_{tj}^s \leq M_{tj} \quad \forall j \in W, t \in T - 1, s \in S \quad (7.74)$$

donde $r_+ = \max(0, r)$, d es una norma paramétrica positiva, y \bar{z}^s denota la tolerancia de optimalidad, es decir,

$$\bar{z}^s = z^s + \epsilon \quad \text{para } \epsilon \geq 0 \quad (7.75)$$

siendo z^s el valor de la solución óptima para el modelo (7.62)-(7.67) bajo el escenario s , para $s \in S$. Véase en Escudero y otros (1994) [21] la descripción de un procedimiento bietápico para tratar la no linealidad causada por la norma d de la función objetivo de (7.70).

El modelo de Recurso Total (7.70)-(7.74) es bastante grande, pero posee la estructura cuasi-escalera que hemos visto en los capítulos anteriores, lo que facilita la descomposición del mismo. Usando la Formulación Extendida del modelo en la que las condiciones de no anticipatividad aparecen implícitamente y mediante la aproximación Lagrangiana Aumentada se consigue descomponer en un conjunto de submodelos de redes cuadráticas independientes de dimensiones más reducidas, y así resolverlo.

7.3.3 Resultados Computacionales

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en la implementación del algoritmo para resolver el modelo de Recurso Total, aplicando la técnica de descomposición

Tabla 7.5: Especificaciones del modelo de Recurso Total. Formulación Extendida.

Problemas	$ S $	‡ Subprob.	m	n
red 10-9-6	96	152	1520	1928
red 10-9-7	233	385	3850	4985
red 10-9-14	9235	18448	184480	258162
red 10-9-30	154	3848	38480	71572
red 10-9-50	154	6928	69280	130092
red 10-15-14	9235	18448	184480	368850
red 35-52-12	2301	4586	160510	318447
red 35-60-6	96	152	5320	11080
red 35-60-7	233	385	13475	28420
red 35-60-10	564	1131	39585	87705
red 35-60-12	2301	4586	160510	318447

$|S|$ número de escenarios,

‡ Subprob. número de subproblemas,

m número de variables, y

n número de restricciones.

Lagrangiana Aumentada. Una propiedad relevante de la descomposición utilizada es que el algoritmo debe resolver un conjunto de subproblemas cuadráticos independientes. Por consiguiente, un procedimiento razonable para mejorar la eficiencia del algoritmo es resolver estos subproblemas en paralelo. Por otro lado, se ha desarrollado un código en C, el QPNET, para solucionar los subproblemas de redes cuadráticas, basado en la aproximación de Newton Truncado reducido preconditionado (véanse Dembo (1987) [10], y Escudero (1986) [18]).

Los experimentos computacionales se llevaron a cabo en una red de tres estaciones de trabajo HP 9000/720-30, ejecutándose sobre HP-UX 9.01. Para los programas escritos en C, se usó el compilador HP-UX "cc" y el lenguaje en paralelo que se utilizó, fue el PVM versión 3.1.3.

Los ejemplos se basan en la red de embalses del río Tajo, procedente de la empresa de

Tabla 7.6: Resultados Computacionales

Problemas	SLD		PLD
	Iteraciones	Tiempo	Tiempo
red 10-9-6	910	2:42	1:54
red 10-9-7	726	5:42	2:58
red 10-9-14	1430	8:49:23	4:54:38
red 10-9-30	322	24:08	12:17
red 10-9-50	337	45:08	22:34
red 10-15-14	254	1:33:16	45:48
red 35-52-12	610	4:31:57	2:32:32
red 35-60-6	407	5:47	2:34
red 35-60-7	319	11:21	5:18
red 35-60-10	463	47:39	26:15
red 35-60-12	408	2:51:24	1:31:31

SLD código secuencial.

PLD código en paralelo.

energía española Iberdrola. Esta red está compuesta por 10 embalses. Por este motivo, además se utilizó otro conjunto de problemas de grandes dimensiones que se obtuvieron de una red artificial con 35 embalses.

Las funciones de generación de energía de cada embalse y las cotas de todas las variables de la red se consiguieron a partir de los datos proporcionados por la empresa. Por otra parte, las funciones incluidas en los problemas específicos se consideraron lineales. En cuanto a las entradas y salidas de agua exógena fueron generadas aleatoriamente.

Los problemas difieren los unos de los otros en el horizonte de tiempo estipulado y en el número de escenarios asociado a cada uno. La notación "redx-y-z" utilizada en las Tablas 7.5 y 7.6, indica un problema cuya red básica tiene "x" embalses, "y" enlaces entre los embalses y un horizonte temporal con "z" períodos de tiempo. El número de escenarios y las características de los problemas de prueba se muestran en la Tabla 7.5. La Tabla 7.6 muestra

los resultados computacionales del algoritmo tanto para la implementación secuencial como para la distribuida. En el caso del entorno distribuido se usa un esquema de equilibrio de la carga estática bastante sencillo. Con éste esquema se minimizan los costes de comunicación entre las estaciones de trabajo, pero no se ha alcanzado todavía un equilibrio óptimo.

Los resultados muestran la mejora del algoritmo en los tiempos de ejecución, cuando se emplea la implementación en paralelo, ya que estos tiempos se ajustan razonablemente al número de estaciones de trabajo usadas, tres para todos los problemas. Estos resultados confirman las propiedades prometedoras del algoritmo de descomposición Lagrangiana Aumentada en un entorno de computación en paralelo.

Resultados Computacionales

En esta sección se presentan algunos resultados computacionales, además de los ya vistos en el último capítulo sobre aplicaciones de Programación Estocástica. Estos resultados se han obtenido a partir de la implementación de algunos de los algoritmos descritos en el capítulo 3. Nos centramos en la Formulación Extendida del modelo y no en la Compacta, ya que ésta a pesar de ser menos reducida es más manejable y los resultados que proporciona son mejores. Con el fin de poder realizar comparaciones entre los diferentes algoritmos, se distingue entre dos bloques de resultados computacionales.

Por un lado, se hace referencia a los códigos y resultados correspondientes, al algoritmo basado en la Descomposición de Benders en el caso lineal y a los algoritmos basados en el esquema de Descomposición Lagrangiana Aumentada (tanto para el caso en que se usa la aproximación cuadrático separable sobre el término de penalización, como para el caso general), bajo la Formulación Extendida. También se obtuvieron los resultados sobre los mismos problemas de prueba para el código correspondiente al algoritmo basado en la Descomposición de Dantzig-Wolfe, pero debido a que los resultados eran bastante peores que los de los otros algoritmos se omitieron de las tablas.

En el segundo bloque de resultados nos centramos en la implementación del algoritmo de Descomposición Lagrangiana Aumentada bajo la Formulación Extendida, pero esta vez en comparación con implementaciones muy eficientes de métodos de Punto Interior como son LOQO (veáse Vanderbei y Carpenter, 1993 [68]) y OB1 (veáse Lustig, Marsten, y Shanno, 1992 [45]). Dentro de este segundo bloque se ha descartado la experiencia computacional de las implementaciones basadas en el método del Simplex directamente ya que los resultados son muy inferiores a los obtenidos con las otras metodologías.

Volviendo a los algoritmos basados en las descomposiciones Lagrangiana Aumentada, de

Benders, y de Dantzig-Wolfe, una propiedad relevante de todos ellos es que en determinado paso del algoritmo (por lo general, el más caro desde el punto de vista computacional) se ha de resolver un modelo de grandes dimensiones, cuya solución se puede descomponer trivialmente en la solución de una colección de subproblemas de redes independientes. En estos casos un procedimiento razonable para mejorar la eficiencia de los algoritmos consiste en resolver dichos subproblemas en paralelo. Por este motivo se ha desarrollado un código en C, llamado SPNET, que implementa el algoritmo basado en la Descomposición Lagrangiana Aumentada para ejecutarlo en un entorno distribuido. La elección de implementar este algoritmo en un entorno paralelo sobre los otros, se debe a que el mismo permite que mayor cantidad de trabajo se pueda realizar de forma distribuida, mientras que en los otros no es tan fácil llevarlo a cabo y el coste de transmisión entre los procesadores es muy elevado.

Por otra parte, mientras que en el algoritmo basado en el esquema de Descomposición de Benders se han de resolver subproblemas con estructura de red lineales, en los algoritmos basado en la Descomposición Lagrangiana Aumentada se han de resolver subproblemas de redes cuadráticos. Para resolver dichos subproblemas cuadráticos se utiliza el QPNET, código en C basado en Newton truncado reducido preconditionado.

En los experimentos computacionales realizados para probar los algoritmos basados en los diferentes esquemas de descomposición (Benders, Lagrangiana Aumentada, etc.) se usó una red formada por tres estaciones de trabajo, dos HP9000/720 y una HP9000/730, ejecutandose sobre HP-UX 8.05. Para los códigos escritos en C se utilizó el compilador HP-UX "cc" y el lenguaje paralelo que se usó fue el PVM versión 3.1.3.

Tanto en los experimentos relacionados con los algoritmos basados en esquemas de descomposición como con los que tratan el modelo de forma directa (métodos de Punto Interior), se trabaja con un conjunto de problemas de prueba, aunque diferente en cada caso, procedentes de la explotación de recursos hídricos. Dichos problemas se modelizan mediante la Formulación Extendida (3.2)-(3.13) con función objetivo lineal (3.14), donde las matrices de las restricciones se corresponden con la matriz de incidencia nodo-arco de una red básica dada (que representa un sistema multiembalse del tramo de un río) y que se repite en un cierto número de períodos de tiempo. Los parámetros inciertos son los coeficientes de la función objetivo y del término independiente, y estos han sido generados de forma aleatoria. Los tamaños de las redes básicas y replicadas de los problemas de prueba para los experi-

mentos del primer de bloque de resultados computacionales se muestran en la Tabla 7.1. El número de escenarios, el número total de subproblemas y el tamaño del modelo completo correspondiente a cada problema de prueba se recogen en la Tabla 7.2

Finalmente la Tabla 7.3 muestra los resultados computacionales para los algoritmos basados en los esquemas de Descomposición de Benders, y Descomposición Lagrangiana Aumentada, tanto en su versión secuencial como en su versión distribuida. El criterio de parada que se siguió en todos los problemas, es que la suma de la infactibilidad normalizada y la diferencia normalizada entre los valores objetivos primal y dual fuese menor que 10^{-4} . Los tiempos en dicha Tabla 7.3 vienen dados en el formato (hh:min:seg). Los espacios en blanco en la tabla se corresponden con problemas cuyo tamaño excede la memoria disponible de las estaciones de trabajo, (16Mb de memoria RAM para las HP/720 y 32MB para la HP/730). Nótese que la Descomposición Lagrangiana Aumentada no tiene ningún problema de memoria.

Se ve claro en los resultados computacionales que el procedimiento Lagrangiano Aumentado es la mejor elección como algoritmo de descomposición. Los tiempos secuenciales para el mismo son bastante más inferiores que los de los otros esquemas de descomposición y en cuanto a los tiempos de ejecución, cuando se ejecuta el código en versión paralela se reducen drásticamente en función del número de estaciones de trabajo utilizadas, tres en este caso.

Veamos a continuación un segundo bloque de resultados computacionales que giran en torno a la comparación del algoritmo de Descomposición Lagrangiana Aumentada con otros códigos de programación lineal cuyos niveles de eficiencia son bastantes aceptables. La Tabla 7.4 recoge las dimensiones de las redes básicas y replicadas de los problemas de prueba considerados, mientras que la Tabla 7.5 recoge el número de escenarios, el número total de subproblemas y el tamaño del modelo completo correspondiente a cada problema de prueba.

En la Tabla 7.6 se muestra la experiencia computacional obtenida mediante la comparación de los diferentes procedimientos para resolver el modelo estocástico con Recurso Total bajo la Formulación Extendida. Los sistemas utilizados han sido: DLA, Descomposición Lagrangiana Aumentada; LOQO y OB1, estos dos últimos sistemas se corresponden a implementaciones muy eficientes de métodos de Punto Interior basados en el Primal-Dual. Se ha efectuado el análisis computacional en una estación HP735/125 con 90Mb de memoria RAM. Los resultados de la Tabla 7.6 indican que el tiempo de ejecución de la metodología

Lagrangiana es superior al requerido por las metodología basada en Puntos Interiores. Ahora bien, el incremento del tamaño del problema (fundamentalmente, debido al incremento del número de escenarios) no permite la utilización de métodos directos debido a las limitaciones de memoria. En cambio la metodología basada en la Descomposición Lagrangiana Aumentada, aunque precisa de un mayor esfuerzo computacional, proporciona la solución del problema. En la tabla se puede observar que prácticamente, el 50% de los casos no han podido ser resueltos por los métodos directos, y que OB1 proporciona mejores resultados que LOQO para los casos en que la memoria disponible es suficiente. En cualquier caso, se puede ver que la metodología Lagrangiana Aumentada resuelve el último problema red 35-50-12 ($m = 147316$ restricciones y $n = 372515$ variables) en algo más de 28 minutos.

Como conclusión cabe indicar que a medida que aumentan las dimensiones del problema (principalmente, el número de etapas y el número de escenarios, es decir, el cardinal del conjunto de nodos en el árbol de escenarios), las metodologías directas (Puntos Interiores, Simplex) tienen menos posibilidad de obtener la solución debida a las limitaciones de memoria, pues contemplan globalmente el modelo. Veamos a continuación un segundo bloque de resultados computacionales que giran en torno a la comparación del algoritmo de Descomposición Lagrangiana Aumentada con otros códigos de programación lineal cuyos niveles de eficiencia son bastantes aceptables. La Tabla 7.4 recoge las dimensiones de las redes básicas y replicadas de los problemas de prueba considerados, mientras que la Tabla 7.5 recoge el número de escenarios, el número total de subproblemas y el tamaño del modelo completo correspondiente a cada problema de prueba.

En la Tabla 7.6 se muestra la experiencia computacional obtenida mediante la comparación de los diferentes procedimientos para resolver el modelo estocástico con Recurso Total bajo la Formulación Extendida. Los sistemas utilizados han sido: DLA, Descomposición Lagrangiana Aumentada; LOQO y OB1, estos dos últimos sistemas se corresponden a implementaciones muy eficientes de métodos de Punto Interior basados en el Primal-Dual. Se ha efectuado el análisis computacional en una estación HP735/125 con 90Mb de memoria RAM. Los resultados de la Tabla 7.6 indican que el tiempo de ejecución de la metodología Lagrangiana es superior al requerido por las metodología basada en Puntos Interiores. Ahora bien, el incremento del tamaño del problema (fundamentalmente, debido al incremento del número de escenarios) no permite la utilización de métodos directos debido a las limita-

ciones de memoria. En cambio la metodología basada en la Descomposición Lagrangiana Aumentada, aunque precisa de un mayor esfuerzo computacional, proporciona la solución del problema. En la tabla se puede observar que prácticamente, el 50% de los casos no han podido ser resueltos por los métodos directos, y que OB1 proporciona mejores resultados que LOQO para los casos en que la memoria disponible es suficiente. En cualquier caso, se puede ver que la metodología Lagrangiana Aumentada resuelve el último problema red 35-50-12 ($m = 147316$ restricciones y $n = 372515$ variables) en algo más de 28 minutos.

Como conclusión cabe indicar que a medida que aumentan las dimensiones del problema (principalmente, el número de etapas y el número de escenarios, es decir, el cardinal del conjunto de nodos en el árbol de escenarios), las metodologías directas (Puntos Interiores, Simplex) tienen menos posibilidad de obtener la solución debida a las limitaciones de memoria, pues contemplan globalmente el modelo.

Tabla 7.1: Especificaciones del problema. Versión determinista.

Problemas	Red básica			Red Replicada	
	m	n	T	m	n
red 4-3-7	4	3	7	28	45
red 4-3-10	4	3	10	40	66
red 4-3-30	4	3	30	120	206
red 10-9-6	10	9	6	60	104
red 10-9-7	10	9	7	70	123
red 10-9-30	10	9	30	300	560
red 10-9-50	10	9	50	500	940
red 25-41-5	25	41	5	125	305
red 25-41-6	25	41	6	150	371
red 25-41-7	25	41	7	175	437
red 25-41-10	25	41	10	250	635
red 35-60-5	35	60	5	175	440
red 35-60-6	35	60	6	210	535
red 35-60-7	35	60	7	245	630
red 35-60-10	35	60	10	350	915

m = número de restricciones (nodos).

n = número de variables (arcos).

T = número de períodos de tiempo.

Tabla 7.2: Especificaciones del Modelo Determinista Equivalente. Formulación Extendida

Problemas	$ S $	‡ Subprob.	m	n	nel
red 4-3-7	233	385	1540	1765	4454
red 4-3-10	3625	6027	24108	27689	69874
red 4-3-30	154	3848	15392	26320	53252
red 10-9-6	96	152	1520	1928	4806
red 10-9-7	233	385	3850	4985	12290
red 10-9-30	154	3848	38480	71572	144674
red 10-9-50	154	6928	69280	130920	261714
red 25-41-5	34	56	1400	2846	6517
red 25-41-6	96	152	3800	7632	17639
red 25-41-7	233	385	9625	19585	44970
red 25-41-10	564	1131	28275	60546	135167
red 35-60-5	34	56	1960	4130	9415
red 35-60-6	96	152	5320	11080	25485
red 35-60-7	233	385	13475	28420	64960
red 35-60-10	564	1131	39585	87705	195115

$|S|$, número de escenarios.

‡ Subprob., número de subproblemas.

m , número de restricciones.

n , número de variables.

nel , número de elementos no nulos en la matriz de restricciones.

Tabla 7.3: Resultados Computacionales

Problemas	SBD		SLD			PLD	
	Iterac.	Tiempo	Iterac.	QP Iterac.	Tiempo	Iterac.	Tiempo
red 4-3-7	11	1:30	1010	230250	1:55	1010	1:03
red 4-3-10			906	3311299	27:46	906	10:14
red 4-3-30			122	369359	2:49	122	1:13
red 10-9-6	22	2:45	910	140983	2:07	910	1:05
red 10-9-7			726	288569	4:30	726	1:57
red 10-9-30			322	1426657	21:10	322	9:06
red 10-9-50			337	2679177	42:52	337	16:49
red 25-41-5	69	13:42	214	16497	0:37	214	0:17
red 25-41-6			468	83892	3:13	468	1:11
red 25-41-7			266	135442	5:09	266	1:54
red 25-41-10			321	468872	18:20	321	8:43
red 35-60-5	> 80	> 1:00:00	167	15775	0:45	167	0:20
red 35-60-6			407	79387	4:04	407	1:37
red 35-60-7			319	166053	8:22	319	3:13
red 35-60-10			463	663010	37:11	463	16:14

SBD, Descomposición de Benders.

SLD, Descomposición Lagrangiana Aumentada secuencial.

PLD, Descomposición Lagrangiana Aumentada en paralelo.

QP Iterac. Número total de iteración en programación cuadrática.

Tabla 7.4: Especificaciones del problema. Versión determinista

Problemas	Red básica			Red Replicada	
	m	n	T	m	n
red 5-6-7	5	6	7	35	72
red 7-6-10	7	6	10	60	123
red 9-10-8	9	10	8	72	143
red 15-14-8	15	14	8	120	217
red 20-19-10	20	19	10	200	370
red 25-24-10	25	24	10	250	465
red 30-45-12	30	45	12	360	870
red 35-50-12	35	50	12	420	985
red 35-50-12	35	50	12	420	985
red 35-50-12	35	50	12	420	985
red 35-50-12	35	50	12	420	985
red 35-50-12	40	50	12	480	1040

m = número de restricciones (nodos).

n = número de variables (arcos).

T = número de períodos de tiempo.

Tabla 7.5: Especificaciones del Modelo Determinista Equivalente. Formulación Extendida

Problemas	$ S $	‡ Subprob.	m	n	nel
red 5-6-7	75	362	1181	1520	3563
red 7-6-10	100	373	8682	12621	27612
red 9-10-8	100	373	12612	14617	33615
red 15-14-8	200	615	18920	29615	69620
red 20-19-10	300	1926	21615	47535	128639
red 25-24-10	340	2363	29513	45113	103521
red 30-45-12	400	4966	63314	109523	292514
red 35-50-12	500	5892	98515	205614	467515
red 35-50-12	400	5914	103123	237512	556815
red 35-50-12	500	5717	99512	261613	606516
red 35-50-12	500	5029	78913	163550	369820
red 35-50-12	500	5120	147316	372615	978613

$|S|$, número de escenarios.

‡ Subprob., número de subproblemas.

m , número de restricciones.

n , número de variables.

nel , número de elementos no nulos en la matriz de restricciones.

Tabla 7.6: Resultados Computacionales

Problemas	DLA	LOQO	OB1
red 5-6-7	25.6	7.3	3.5
red 7-6-10	49.3	24.1	17.3
red 9-10-8	53	27.2	20.5
red 15-14-8	1:37.4	32.5	15.3
red 20-19-10	2:03.6	1:02.7	41.8
red 25-24-10	1:49.2	1:07.9	50.1
red 30-45-12	13:18	-	-
red 35-50-12	17:48.4	-	-
red 35-50-12	21:00.3	-	-
red 35-50-12	18:35.2	-	-
red 35-50-12	19:20.3	-	-
red 35-50-12	28:15.7	-	-

Conclusiones

Conclusiones

En esta memoria hemos presentado una metodología basada en el Análisis de Escenarios, para tratar la incertidumbre que rodea la mayor parte de los problemas de optimización multiperíodo sobre redes a gran escala. Nos hemos centrado en aquellos casos, donde la estocasticidad procede tanto de los coeficientes de la función objetivo como del término independiente del modelo. Por supuesto, hemos justificado la utilización de esta metodología antes que otras, mediante una aplicación sobre planificación de inversiones, mostrando las ventajas e inconvenientes que ésta conlleva.

La política de decisión que se ha propuesto en este trabajo cumple dos objetivos. Por un lado minimizar la toma de decisiones erróneas, apoyandonos para ello en la información aportada por los diversos escenarios considerados, y en un segundo plano pero no menos importante, no anticipar todas las decisiones desde el comienzo, sino que a medida que transcurre el tiempo se va incorporando la nueva información que se disponga al sistema y entonces se reoptimiza. Por tanto, la metodología propuesta sólo proporciona soluciones implementables para los primeros períodos del horizonte de planificación que así lo precisen, sin subordinarse a ningún escenario, pero contemplando simultáneamente todos ellos. Esto da lugar a un modelo de grandes dimensiones que hemos representado mediante dos formulaciones alternativas: la Formulación Compacta y la Formulación Extendida. La principal diferencia entre ambas formulaciones radica en la densidad de las columnas de la matriz de condiciones. La Formulación Compacta es de dimensiones más reducida que la Extendida, pero sus columnas son más densas. Esto se debe a que el enganche entre las etapas en la Formulación Compacta se realiza mediante variables iguales, mientras que en la Extendida dichas variables se dividen y el enganche se produce a través de las restricciones de igualdad entre tales variables. No obstante, en ambos casos el modelo presenta una estructura en

forma de cuasi-escalera, muy apropiada para la descomposición del mismo.

Hemos propuesto varias formas de resolución del modelo bajo ambas formulaciones. Así para el caso de la Formulación Compacta se describe un procedimiento (llamado Procedimiento Acelerado) para obtener una solución inicial y a partir de la misma utilizando un método de eliminación de filas y columnas, se resuelve el modelo sin necesidad de trabajar con él de forma global, ya que por lo general el modelo completo es demasiado grande. De hecho, también se analiza la justificación por la que los métodos de Puntos Interiores que trabajan directamente sobre el modelo total no son tan efectivos con esta formulación. Además, se ofrece un algoritmo basado en el esquema de Descomposición de Benders, en el cual se considera como variables complicantes a las variables enganche entre las distintas etapas.

En cuanto a la Formulación Extendida se refiere, se han propuesto varios algoritmos, donde se descompone el modelo en una serie de submodelos de redes independientes. El primer algoritmo se basa en la metodología de Descomposición Lagrangiana Aumentada, cuya idea básica es la dualización de las restricciones de enganche entre las distintas etapas y penalización de las mismas en la función objetivo. También se ofrece para la Formulación Extendida un algoritmo que sigue el esquema de Descomposición de Benders, en el se que considera como restricciones complicantes las restricciones de enganche. Además, se presenta un procedimiento alternativo de descomposición, que se apoya en la Descomposición de Dantzig-Wolfe. Por último, también se propone para la resolución del modelo de manera global la metodología de Puntos Interiores, que en este caso y debido a la densidad de las columnas de la matriz de restricciones tiene resultados más satisfactorios que en la Compacta, aunque en muchos casos, sobre todo cuando se aumenta el número de escenarios y etapas no es posible llevarla a cabo.

La experiencia computacional que presentamos nos permite observar una mayor eficiencia en la Descomposición Lagrangiana Aumentada en comparación con los otros esquemas de descomposición, en cuanto a las necesidades de almacenamiento, tiempos de ejecución en problemas a gran escala e incluso, debido a la flexibilidad para su extensión a casos no lineales y no convexos. Además, es la que presenta unos tiempos de ejecución más próximos a los tiempos de ejecución obtenidos con los mejores códigos de programación lineal, basados en Puntos Interiores (OB1 y LOQO) (en los casos en que los problemas tengan las dimensiones

suficientemente pequeñas para que estos códigos puedan ser utilizados). Por otra parte, también es la que permite más fácilmente su implementación en un entorno distribuido.

Otro aspecto básico que se recoge en esta memoria, es el caso particular del modelo bietápico, ya que en algunas aplicaciones se ha visto la necesidad de simplificar el modelo, debido al desbordamiento que se produce en sus dimensiones al aumentar el número de etapas. Por ello, se presentan ambas formulaciones del modelo considerando sólo dos etapas, y se propone un algoritmo de resolución basado en la descomposición Lagrangiana Aumentada ya que es la que mejores resultados ofrece.

Ya por último hemos generalizado el modelo propuesto, relajando la restricción de sólo permitir un enganche o acoplamiento entre etapas consecutivas a varias etapas de forma arbitraria. Por supuesto, los modelos resultantes son algo más complicados que los anteriores, pero su tratamiento sigue las mismas pautas indicadas anteriormente. De hecho, hemos optado por la Descomposición Lagrangiana Aumentada como la más apropiada en el algoritmo de optimización, aunque no se descarte el uso de las otras. De todas formas, actualmente este es un tema abierto y, por tanto, una futura línea de investigación.

Por supuesto, no hemos querido acabar el trabajo sin mostrar la amplia variedad de ámbitos en que se puede aplicar la Programación Estocástica vía Análisis de Escenarios. Así, en el último capítulo de esta memoria se muestran tres casos claros donde se utiliza esta metodología en tres campos totalmente diferentes, como son Planificación de la Producción, Planificación Financiera, y Planificación de la Generación de Energía Hidroeléctrica.

Bibliografía

Bibliografía

- [1] I. Adler, N.K. Karmarkar, M.G.C. Resende y G. Veiga, *An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming*, Mathematical Programming, 44:297-335, 1989.
- [2] S. Ahn, L.F. Escudero, M. Guignard-Spielberg y K. Jörnsten, *Modelling robust policies for financial trading*, Optimization in Industry (Vol II), John Wiley, Londres 1994, 163-184.
- [3] M. Alvarez, C.M. Cuevas, L.F. Escudero, J.L. de la Fuente, C. García y F.J. Prieto, *Network Planning Under Uncertainty with an Application to Hydropower Generation*, Top 2:25-58, 1994.
- [4] J.F. Benders, *Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems*, Numerische Mathematik 4:238-252, 1962.
- [5] D.P. Bertsekas, *Constrained optimization and Lagrange multipliers*, Academic Press, 1992.
- [6] G.R. Bitran y H.H. Yanasse, *Deterministic approximation to stochastic production problems*, Operations Research, 32:999-1018, 1984.
- [7] G.B. Dantzig y P.W. Glynn, *Parallel processors for planning under uncertainty*, Annals of Operations Research, 22:1-21, 1990.
- [8] G.B. Dantzig y P.Wolfe *A decomposition principle for linear programs*, Operations Research, 8:101-111, 1960.
- [9] G.B. Dantzig, P.W. Glynn, M. Arnel, J. Stone, R. Entrinken y M. Nakayama *Decomposition techniques for multiarea generation and transmission planning under uncertainty*, EPRI Report 2940, 1, 1989.

-
- [10] R.S. Dembo, *A primal truncated Newton algorithm with application to large-scale nonlinear network optimization*, Mathematical Programming Study, 31:43-72, 1987.
- [11] R.S. Dembo y otros, *Managing Hidroelectrica Española's hydroelectric power system*, Interfaces 20:115-135, 1990.
- [12] R.S. Dembo, *Scenario optimization*, Annals of Operations Research, 30:63-80, 1991.
- [13] R.S. Dembo y A.J. King, *Tracking models and the optimal regret distribution in asset allocation*, IBM T.J. Watson Research Center, RC-17156 Yorktown Heights, New York, 1991.
- [14] B.P. Dzielinski y R.E. Gomory, *Optimal programming of lot sizes, inventory and lot size allocations*, Management Science, 11:874-890, 1965.
- [15] R. Entriken y G. Infanger, *Descomposition and importance sampling for stochastic linear models*, Research Report RC-15545, IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, 1990.
- [16] G.D. Eppen, R.K. Martin y L. Schrage, *A scenario approach to capacity planning*, Operations Research, 37:517-527, 1989.
- [17] Y. Ermoliev y R.J-B. Wets, *Numerical techniques for stochastic optimization*, Springer, Berlin, 1990.
- [18] L.F. Escudero, *Performance evaluation of independent superbasic sets*, European Journal of Operational Research, 23:343-355, 1986.
- [19] L. F. Escudero, *On solving a nondifferentiable nonlinear transshipment problem*, Investigación Operativa, 1:199-211, 1990.
- [20] L. F. Escudero y P.V. Kamesam, *On solving stochastic production planning problems via scenario modelling*, A. Kusiak y M. Bielli (eds.), Designing innovations in Industrial logistics modelling. CRCPRESS, London, 95-120.
- [21] L.F. Escudero, J.L. de la Fuente, C. García y F.J. Prieto, *On solving multistage stochastic linear networks*, TOP, 2:25-58, 1994.

-
- [22] L.F. Escudero, P.V. Kamesam, A.J. King y R.J-B.Wets, *Production planning via scenario modelling*, Annals of Operations Research 43:311-335, 1993.
- [23] A.V. Fiacco y G.P. McCormick, *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [24] M. Florian y M. Klein, *Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints*, Management Science, 18:12-20, 1971.
- [25] K.R. Frisch, *The logarithmic potential method for convex programming*, Institute of Economics, University of Oslo, Oslo, Norway, 1955.
- [26] D.M. Gay, *A variant of Karmarkar's linear programming algorithm for problems in standard form*, Mathematical Programming, 37:81-90, 1987.
- [27] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders, J.A. Tomlin y M.H. Wright, *On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method*, Mathematical Programming, 36:183-209, 1986.
- [28] F. Glover, D. Klingman y N.V. Phillips, *Network models in optimization and their applications*, John Wiley, 1992.
- [29] C.C. Gonzaga, *Conical projection algorithms for linear programming*, Mathematical Programming, 43:151-173, 1989.
- [30] C.C. Gonzaga, *Path following methods for linear programming*, SIAM Review, 34:167-227, 1992.
- [31] B.G. Gorenstin, N.M. Campodonico, J.P. Costa y M.V.F. Pereira, *Power system expansion planning under uncertainty*, IEEE Transactions on Power Systems 8, 1993.
- [32] S.C. Graves, *A tactical planning model for a job shop*, Operations Research, 34:522-533, 1986.
- [33] S.C. Graves y C.H. Fine, *A tactical planning model for manufacturing subcomponents of mainframe computers*, J. Manufactured Operations Management, 2:4-34, 1988.

-
- [34] G. Infanger, *Montecarlo (importance) sampling within a Benders decomposition algorithm for stochastic linear programs*, Technical Report SOL89-13, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, CA 1989.
- [35] D. Jensen y A.J. King, *Linear-quadratic efficient frontiers for portfolio optimization*, Report RC-17156. IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y., 1991.
- [36] N.K. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, *Combinatorica* 4:373-395, 1984.
- [37] U.S. Karmarkar, *Lot sizes, lead times in process inventories*, *Management Science*, 33:409-423, 1987.
- [38] U.S. Karmarkar, *Capacity loading and release planning with work in progress and lead times*, *J. Manufactured Operations Management*, 2:105-123, 1989.
- [39] S. Kekre y S. Kekre, *Work-in-process considerations in job shop capacity planning*, Working Paper GSIA, Carnegie Mellon University, 1985.
- [40] M. Kojima, N. Megiddo y S. Mizuno, *A primal-dual infeasible interior point algorithm for linear programming*, Research Report RJ 8500, IBM Almaden Research Center, San José, CA 95120-6099, USA, 1991.
- [41] L.S. Lasdon y R.C. Terjung, *An efficient algorithm for multi-echelon scheduling* *Operations Research*, 19:946-969, 1971.
- [42] I.J. Lustig, R.E. Marsten y D.F. Shanno, *Computational experience with a primal-dual interior point method for linear programming*, *Linear Algebra and its Applications*, 152:191-222, 1991.
- [43] I.J. Lustig, J.M. Mulvey y T.J. Carpenter, *Formulating stochastic programs for interior point methods*, *Operations Research*, 39:757-769, 1991.
- [44] I.J. Lustig, R.E. Marsten y D.F. Shanno, *On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior point method for linear programming*, *SIAM Journal on Optimization*, 2:435-449, 1992.

-
- [45] I.J. Lustig, R.E. Marsten y D.F. Shanno, *Computational experience with a globally convergent primal-dual predictor-corrector algorithm for linear programming*, Technical Report SOR 92-10, School of Engineering and Applied Science, Dept. of Civil Engineering and Operations Research, Princeton University, NJ 08544, USA, 1992.
- [46] K.A. McShane, C.L. Monma y D.F. Shanno, *An implementation of a primal-dual interior point method for linear programming*, ORSA Journal on Computing, 1:70-83, 1989.
- [47] N. Megiddo, *Pathways to the optimal set in linear programming*, Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, ed. Springer Verlag, New York, 131-158, 1989.
- [48] S. Mehrotra, *On the implementation of a primal-dual interior point method*, SIAM Journal on Optimization, 2:575-601, 1992.
- [49] J.M. Mulvey y A. Ruszczyński, *A diagonal quadratic approximation method for large-scale linear programs*, Operations Research Letters, 12:205-221, 1992.
- [50] J.M. Mulvey, R.J. Vanderbei y S.A. Zenios, *Robust optimization of large-scale systems: general modelling framework and computations*, Report 91-06-04. The Wharton School, University of Pennsylvania, 1991.
- [51] J.M. Mulvey y H. Vladimirou, *Stochastic networks, optimization models for investment planning*, Annals of Operations Research, 20:187-217, 1989.
- [52] P. Oliveira, S. McKee y C. Coles, *Optimal scheduling of a hydrothermal power generation system*, European Journal of Operational Research, 71:334-340, 1993.
- [53] M.V.F. Pereira, *Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems*, International Journal of Electrical Power and Energy Systems 11:161-169, 1989.
- [54] M.V.F. Pereira y L.M.V.G. Pinto, *Stochastic optimization of a hydroelectric system: a decomposition approach*, Water Resources Research, 21(6), 1985.
- [55] M.J.D. Powell, *On the number of iterations of Karmarkar's algorithm for linear programming*, Technical Report DAMTP 1991/NA23, Dept. of Applied Mathematics and

-
- Theoretical Physics, University of Cambridge, Silver Street, Cambridge CB39EW, UK, 1991.
- [56] J. Renegar, *A Polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming*, Mathematical Programming, 40:59-93, 1988.
- [57] R.T. Rockafellar y R.J-B. Wets, *Scenario and policy aggregation in optimization under uncertainty*, Mathematics of Operations Research, 16:119-147, 1991.
- [58] R.E. Rosenthal, *A nonlinear network flow algorithm for maximization of benefits in a hydroelectric power system*, Operations Research, 29:763-786, 1981.
- [59] T.A. Rottim y A. Gjelsvik, *Stochastic dual programming for seasonal scheduling in the norwegian power system*, IEEE Transactions on Power Systems, 7:273-279, 1992.
- [60] A. Ruszczyński, *Interior point methods in stochastic programming*, Report WP-93-8, IIASA, Vienna, 1993.
- [61] A. Sartenaer, *On some strategies for handling constraints in nonlinear optimization*, Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematics, FUNDP, Namur, Belgium, 1991.
- [62] D.F. Shanno y A. Bagchi, *A unified view of interior point methods for linear programming*, Annals of Operations Research, 22:55-70, 1990.
- [63] G. Stephanopoulos y W. Westerberg, *The use of Hestenes method of multipliers to resolve dual gaps in engineering system optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications 15:285-309, 1975.
- [64] M.J. Todd y B.P. Burrell, *An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables*, Algorithmica 1:409-424, 1986.
- [65] Ph.L. Toint y D. Tuytens, *On large-scale nonlinear network optimization*, Mathematical Programming 48:125-159, 1990.
- [66] S.K. Tong y S.M. Shahidehpour, *An overview of power generation scheduling in the optimal operation of a large-scale power system*, in Proceedings of the 1989 Power Industry Computer Applications Conference.

-
- [67] R.J-B. Wets, *The aggregation principle in scenario analysis and stochastic optimization*, Algorithms and Model Formulations in Mathematical Programming, ed. S.W. Wallace, Springer, Berlin, 92-113, 1989.
- [68] R.J. Vanderbei y T.J. Carpenter, *Symmetric indefinite systems for interior-point methods*, Mathematical Programming, 58:1-32,1993.
- [69] S.A. Zenios, *Massively parallel computations for financial planning under uncertainty*, Very large scale computation in the 21th Century, ed. J.P. Mesirov, SIAM, Philadelphia, 273-294, 1991.
- [70] P.H. Zipkin, *Models for design and control of stochastic multi-item batch production systems*, Operations Research, 34:91-104, 1986.