Modelos de planificación: Programación de las actividades de una oficina de correos

Scheduling models: Application to the activity programming of a post office

Abel Lorenzo Ventura

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 13 de septiembre de 2016

Dr. D. **Joaquín Sicilia Rodríguez**, con N.I.F. 42033231-H, Catedrático de Universidad, adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna.

Dr. D. **David Alcaide López de Pablo**, con N.I.F. 43356377-C, Profesor Titular de Universidad, adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna.

C E R T I F I C A N

Que la presente memoria titulada:

"*Modelos de planificación: Programación de las actividades de una oficina de correos*"

ha sido realizada bajo nuestra dirección por el alumno D. **Abel Lorenzo Ventura**, con N.I.F. 42417005-Z.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 13 de septiembre de 2016

Agradecimientos

El presente estudio se ha realizado bajo la dirección de los profesores Dr. D. Joaquín Sicilia Rodríguez y Dr. D. David Alcaide López de Pablo, a quienes agradezco profundamente toda la ayuda que me han ofrecido para la elaboración de este Trabajo Fin de Grado.

Quiero agradecer también a mi profesora de Matemáticas de 2º de Bachiller, Gloria Taño, por motivarme a estudiar Matemáticas y darme su apoyo permanente.

Y finalmente un agradecimiento especial para mi familia que siempre ha estado a mi lado durante todo este camino.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar y analizar el funcionamiento de la oficina de correos situada en Los llanos de Aridane (La Palma). Para ello, describiremos los conceptos básicos de los modelos de Investigación Operativa que nos ayudarán a alcanzar dicho objetivo. En concreto, primero se presentan los fundamentos de los Modelos de Planificación y los conceptos básicos de los Modelos de Colas para, posteriormente, aplicar los desarrollos y resultados teóricos que nos ofrecen dichos modelos al estudio y análisis de los servicios realizados en dicha oficina de correos, de forma que se atienda, de la forma más adecuada posible, la demanda de los clientes

Se presenta una planificación eficiente de las tareas de atención a los clientes por parte de los empleados de la oficina, que permite reducir el número medio de clientes en cola y el tiempo máximo de permanencia en la oficina.

Abstract

The aim of this work is to study and analyze the performance of the post office located in Los Llanos (La Palma). To do this, we will describe the basic concepts of operations research models that will help us achieve that objective. Specifically, first the fundamentals of scheduling models and basic concepts of queuing models to occur, then apply the developments and theoretical results that we provide these models to the study and analysis of the services performed in that office so that treats the most efficient possible way the customer demand.

Efficient planning of care tasks is presented to customers by employees of the office, which reduces the average number of customers in queue and the maximum time in office.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Motivación y objetivos

1.1. Motivación

Desde que empecé mis estudios del Grado en Matemáticas era consciente de que el camino para lograr mi graduación no iba a resultar sencillo. Tenía claro de que me esperaban unos años de esfuerzo en los que sería puesto a prueba de muchas maneras distintas y que tendría qué dedicar muchas horas al estudio a la comprensión de las nuevas materias que iba a recibir.

En el último curso cuando se me planteó que eligiera un tema para mi trabajo de fin de grado, entendía que debería escoger alguna materia que estuviera en relación con el estudio y análisis de problemas reales. Por ello, elegí realizar un trabajo en Investigación Operativa, ya que ésta es una de las ramas de las matemáticas que estudia y aborda la resolución de problemas aplicados.

Para la realización de este trabajo nos planteamos analizar el funcionamiento de una oficina de correos. Más concretamente, estudiamos la oficina de los Llanos de Aridane, en la isla de la Palma. Se eligió dicha oficina ya que anteriormente había trabajado en ella un familiar cercano y debido a ésto, conocía su funcionamiento y el tipo de problemas que se encuentran los empleados a diario para satisfacer la demanda de los clientes.

1.2. Objetivos

Dentro del amplio número de modelos con los que trabaja la Investigación Operativa es de especial interés el estudio de los modelos de Planificación (Scheduling models). Es una materia muy importante en la actualidad, ya que busca planificar adecuadamente las tareas a realizar por los empleados o trabajadores, buscando una mayor productividad de los mismos y consiguiendo así un mayor rendimiento de las empresas. Otro tipo de modelos que consideramos en este trabajo son los modelos de Colas (Queuing models) que estudian las líneas de espera que se forman cuando los clientes acuden a un sistema a demandar cierto servicio.

El objetivo de este trabajo es doble, por un lado buscamos dar una descripción de los fundamentos de estos modelos, y por otro aplicarlos al estudio del funcionamiento de la oficina de correos.

Así se pretende encontrar un modelo matemático que describa la llegada de clientes en la oficina de correos que vamos a analizar, y buscar formas eficientes de planificar los trabajos que se ejecutan por los empleados de la oficina.

Capítulo 2

Generalidades sobre el proceso de modelización y los modelos de planificación

En este capítulo comenzamos explicando las fases principales del proceso de modelización, para luego comentar brevemente la génesis y los principios de la Investigación Operativa. Finalmente expondremos los modelos de planificación y las características que configuran estos modelos.

2.1. El proceso de modelización

Antes de entrar en la definición de modelo es conveniente aclarar lo que es un sistema. Se entiende por sistema, una colección de diversas unidades de la naturaleza, por lo general, muy diversa; funcionando interactivamente, e integradas en un ambiente, con el propósito de lograr un objetivo común, mediante la manipulación y control de recursos como información, energía y vida. Desde el punto de vista que interesa, se entiende como modelo una representación simplificada de algún sistema real, dicha representación no es tan perfecta como el sistema real al que sustituye.

Existe un esquema metodológico que ayuda a desarrollar modelos matemáticos para permitir el estudio y análisis de sistemas reales. Eso significa que se debe recorrer de manera implícita o explícita un proceso para establecer una relación entre una modelización matemática y una situación real. Dicho de otra forma, con el fin de crear y usar un modelo matemático es necesario, en principio, recorrer todo el camino del proceso de modelización, un esquema que describe este proceso está formado por los siguientes sub-procesos.

(a) Formalización

Este paso consiste en la creación y construcción del modelo propiamente dicho. Para llevar a cabo esta etapa es necesario coordinar, contrastar y debatir diversas cuestiones, con el fin de tomar decisiones sobre que aspectos del sistema son esenciales para el modelo y cuáles son irrelevantes. Con frecuencia, es necesario repetir, debatir y analizar varias veces la etapa de formalización, antes de que aparezca de forma clara el camino a seguir.

(b) Deducción

La deducción lleva consigo técnicas que dependen de la naturaleza del modelo y que pretenden dar solución a los problemas planteados sobre el modelo. Suponiendo que la formalización fue correcta esta etapa no debe ser sometida a opinión, sino que es una etapa científico-técnica.

(c) Interpretación

En este paso se admiten nuevamente opiniones, debates y discrepancias. Esta fase consiste en traducir, con fino tacto y sagacidad, las conclusiones obtenidas sobre el modelo, en información sobre el sistema real de referencia; tratando de lograr un conocimiento profundo y completo de las diferencias entre ambos. Aspectos del sistema real que se obviaron deliberadamente o sin intención durante la primera etapa, pueden aparecer en la tercera como de suma importancia para la bondad del modelo.

(d) Validación

En este último paso se busca validar la idoneidad del modelo, se admitirá el modelo como válido cuando se comprueba que es útil y beneficioso para los fines a los que fue destinado.

El proceso de modelización siempre toma la forma de un proceso cíclico. Una de las ramas científicas que utiliza con frecuencia el proceso de modelización en el estudio de los problemas reales es la Investigación Operativa. En la sección siguiente se describe de manera sucinta los objetivos de esta disciplina y se presenta una pequeña reseña histórica de la misma.

2.2. La Investigación Operativa

A lo largo de las sucesivas civilizaciones de la humanidad han ocurrido diferentes sucesos que ponen de manifiesto el empeño de muchos hombres de mentalidad científica para esclarecer cuales son los factores y variables esenciales que permitan, en situaciones de incertidumbre parcial, analizar los problemas reales de forma objetiva.

Un notable impulso sobre el estudio y análisis de este tipo de cuestiones surgió durante la segunda guerra mundial. El almirantazgo británico tuvo la brillante idea de reunir a un grupo de científicos, con el propósito de estudiar e investigar algunos de los daños ocasionados por los primeros bombarderos alemanes. Es de especial interés mencionar el gran número de preguntas que, carentes de interés para los militares, se hacían constantemente los científicos, como por ejemplo qué distancia debia existir entre los camiones de un convoy para minimizar el daño producido por los bombarderos.

Otro ejemplo de los logros obtenidos, por este grupo de científicos, fue el éxito conseguido por los británicos en su lucha contra los submarinos alemanes en el Canal de la Mancha. Los científicos observaron que las bombas lanzadas por la aviación, estallaban a más de 35 pies bajo la superficie del mar, y se formularon la siguiente pregunta: ¿Por qué, si es posible, no se intenta que las bombas exploten a menor profundidad?, pensando en la respuesta, sus reflexiones pusieron en duda, si la forma en la que las aeronaves se aproximaban a sus objetivos era la correcta. Tras la realización de algunos experimentos se comprobó que, como consecuencia de explotar las bombas a menor profundidad, aumentó considerablemente el número de submarinos destruidos.

Como consecuencia de los distintos éxitos conseguidos, las fuerzas armadas británicas crearon una unidad especial, formada por grupos de científicos con un amplio espectro de conocimientos. Uno de los primeros grupos fue conocido como el Circo de Blackett. Estos equipos fueron la célula inicial de la actual Investigación Operativa. Acabada la guerra muchos de los científicos que formaron parte de algún grupo de Investigación Operativa pensaron en la posibilidad de aplicar métodos similares a problemas civiles. Algunos de estos científicos regresaron a sus universidades de origen, para tratar de encontrar un sólido fundamento a las técnicas descubiertas previamente, mientras que otros se colocaron en diversos sectores de la economía, adaptando estos métodos a problemas particulares de la industria, o bien estudiando y analizando otros nuevos.

Las organizaciones pioneras en la aplicación de la reciente metodología obtuvieron, en general, grandes beneficios, cosa que ocurrió en las grandes compañías petrolíferas, que fueron las primeras en utilizar la programación lineal en problemas de planificación a gran escala.

A pesar del éxito conseguido en la industria, las aplicaciones de la Investigación Operativa no empezaron a florecer en empresas públicas y del sector servicios, hasta la década de los 60, cuando empezaron a desarrollarse los ordenadores electrónicos. El computador liberó de la pesada tarea de ejecutar numerosas rutinas de cálculo imposibles de llevar a la práctica, en casi todos los casos, sin la ayuda del calculador electrónico. Gracias a la rapidez y a la precisión con que estas máquinas realizan cálculos complejos, sirvió para atreverse a pensar en cuestiones mas intrincadas y difíciles y para incentivar la imaginación de nuevos problemas y puntos de vista que surgieron al socaire del propio ordenador.

Para acabar con esta sección se presenta a continuación dar la definición de Investigación Operativa dada por la sociedad inglesa de Investigación Operativa.

La Investigación Operativa es la aplicación del método científico, a los complejos problemas que aparecen en la dirección y gestión de grandes sistemas; constituidos por hombres, *máquinas, materiales o dinero, entre otras peculiaridades; y surgen preferentemente en la industria, gobierno, banca, etc.. Su método característico consiste en el desarrollo de un modelo científico matemático del sistema incorporando, frecuentemente, medidas tales como el azar y riesgo, que se emplea para reducir y (o) contrastar los resultados de determinadas decisiones políticas, estratégicas o controles alternativos. Su objetivo es ayudar científicamente a la gestión en la elección de sus acciones.*

Una de las principales materias que se incluyen dentro de la Investigación Operativa, es la Planificación de Tareas o Actividades, la cual aglutina un cuerpo teórico-práctico que recoge procedimientos y algoritmos para la resolución de problemas de programación de tareas sobre máquinas o recursos disponibles. En la sección siguiente se recogen los fundamentos de los modelos de Planificación o Programación de Actividades.

2.3. Modelos de Planificación

Al hablar de planificación se habla de un conjunto de modelos y técnicas de Investigación Operativa que permiten resolver muchos problemas que surgen en diversos ámbitos como son: el sector industrial, el comercio, las actividades financieras, la sanidad, los sectores administrativos y de gestión, etc. En estos contextos surgen frecuentemente situaciones en las que se precisa asignar, a lo largo de un periodo de tiempo, un conjunto de tareas a ciertas entidades, las cuales suelen ser personas o máquinas capaces de ejecutar dichas actividades, describiendo además no solo la mejor manera de asignarlos, sino también la especificación de otros posibles recursos, generalmente más escasos, que han de usarse en la realización de las mencionadas tareas.

En los problemas de planificación siempre aparecen tres componentes muy bien diferenciadas que responden a ciertas preguntas, las cuales se pueden resumir de manera simple: ¿qué?, ¿quién? y ¿para qué?.
¿Qué?: Se refiere a qué es lo que hay que hacer, que trabajos o actividades se pretenden realizar.
¿Quién?: Preguntamos qué personas o máquinas en concreto tienen que hacer dichas actividades.
¿Para qué?: Significa qué objetivos se persiguen, ¿para qué han de hacerse dichas actividades? (Esta última componente permite la comparación de soluciones).

En un sentido amplio el término planificación (scheduling), puede entenderse como la asignación de máquinas o procesadores a lo largo del tiempo para realizar un conjunto de trabajos(Baker (1974)), o bien para resolver el problema de encontrar la asignación temporal óptima de ciertos recursos a determinadas tareas (Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan y Shmoys (1993)).

Un modelo de planificación se denomina determinístico cuando todos los datos del problema de planificación son conocidos a priori. Como se pretende determinar planificaciones de conjuntos discretos finitos, estos modelos son estudiados por la Optimización Combinatoria.

La Optimización combinatoria es la área de la Investigación Operativa que estudia, en general, problemas en los que se tiene que determinar una asignación (no ordenación) óptima de un conjunto finito de objetos. Este tipo de problemas suelen ser fáciles de plantear, pero muy difíciles de resolver. Por lo que para su resolución se exige el uso de medios de computación adecuados.

A la hora de diseñar y analizar algoritmos para el análisis de este tipo de problemas, hay que tener en cuenta que un problema se considera que está bien resuelto o es fácil cuando se puede resolver por un algoritmo cuyo tiempo de ejecución está acotado por, una función polinomial del tamaño del problema. La existencia de dicho algoritmo no es fácil de asegurar en una gran mayoría de los problemas de planificación, entonces surge la cuestión de probar si el problema es NP-duro o puede resolverse en tiempo polinomial.

Si el problema es NP-duro, como ocurre en la mayoría de los problemas prácticos, se pueden adoptar dos aproximaciones diferentes a la solución. La primera se basa en elegir algún método exacto para resolver el problema. Como ejemplos de este tipo de métodos se pueden citar la programación dinámica, las técnicas de ramificación y acotación, las técnicas de ramificación y corte, etc. Este tipo de métodos con frecuencia requerirán un tiempo de búsqueda de la solución invariablemente exponencial. La segunda opción requerirá encontrar un método heurístico rápido para encontrar una solución aproximada. Para luego realizar un análisis comparativo de contraste de la calidad de la solución obtenida. Esta opción está justificada en muchos de los problemas de planificación debido a la elevada complejidad que presentan la mayoría de ellos.

2.4. Conceptos básicos de planificación

Como se ha comentado, cuando se tiene la necesidad de realizar algunos trabajos o actividades ("¿qué? "), por determinadas entidades ("¿quién? "), capaces de realizarlas, con el propósito de conseguir determinadas finalidades u objetivos ("¿para qué? "), estamos ante un problema de planificación.

Las entidades capaces de realizar los trabajos o actividades reciben el nombre genérico de "máquinas ", independientemente de que estas sean físicamente personas, máquinas, fases de un proceso u otras entidades de cualquier otra naturaleza. Las actividades o tareas a realizar reciben el nombre de trabajos. Faltaría por nombrar el criterio o criterios de optimización. Esta separación en tres componentes bien diferenciadas dio lugar a que Graham y otros (1979) propusieran un esquema triparamétrico ($\alpha \mid \beta \mid \gamma$). Este esquema sirve tanto para modelar los problemas como para catalogar los diferentes modelos de planificación. Los modelos de planificación pueden en la mayoría de los casos formalizarse de la siguiente forma.

Se precisa realizar n, trabajos o tareas J_j (j= 1..n) y se dispone de m máquinas o procesadores M_i (i=1..m).Siempre que no haya lugar a confusión se puede hablar de trabajo (j) y de máquina (i). Se supone que una máquina es incapaz de procesar varios trabajos simultáneamente y que en un instante dado cada trabajo puede realizarse a lo sumo en una máquina, estas hipótesis se las denomina hipótesis de no simultaneidad.

Hay que tener en cuenta que estas hipótesis de no simultaneidad de trabajos distintos en una misma máquina y de no simultaneidad de varias máquinas distintas actuando sobre un mismo trabajo, pueden en ocasiones relajarse para facilitar la construcción de algoritmos para la resolución de determinados problemas. Estos algoritmos se mueven por soluciones no factibles para llegar finalmente a una solución factible que respete dichas hipótesis básicas de no simultaneidad.

Estas diferentes características de los trabajos y de las máquinas junto con distintos criterios de optimalidad, originan una gran variedad de modelos de planificación que se catalogan con la clasificación triparamétrica ($\alpha \mid \beta \mid \gamma$).

α: Se recogen las características de las "m "máquinas M_i (i=1..m).

β: Se recogen los "n "trabajos a procesar J_j (j= 1..n).

γ: Criterios y modos de optimización considerados.

Cada trabajo J_j tiene asociados los siguientes datos:

- Un número m_j de operaciones $O_{1j}, ..., O_{m_j j}$ en las que puede dividirse el trabajo J_j, de modo que, fijada una planificación, cada operación se procesa en una única máquina.

- Se define $\mu_{ij} = k$ si la operación O_{ij} debe realizarse en la máquina M_k. Si el trabajo j consta de una única operación ($m_j = 1$), se puede denotar $\mu_j = k$ al hecho de que dicha operación sea asignada a la máquina M_k.

- Uno o más tiempos de procesamiento p_j o p_{ij} $(i = 1..m)$ necesarios para procesar el trabajo J_j en cualquier máquina ($p_j = p_{ij}$ $\forall i$) o en la máquina M_i (i=1..m).

- Una fecha de disponibilidad r_j a partir de la cual puede empezar a procesarse el trabajo J_j. Si $r_j = 0$ $\forall j$, entonces se tiene que todos los trabajos pueden empezar a realizarse desde el instante inicial.

- Una fecha de comienzo S_j, la cual indica en que instante de tiempo empieza a procesarse el trabajo. Esta fecha puede variar dependiendo de la planificación.

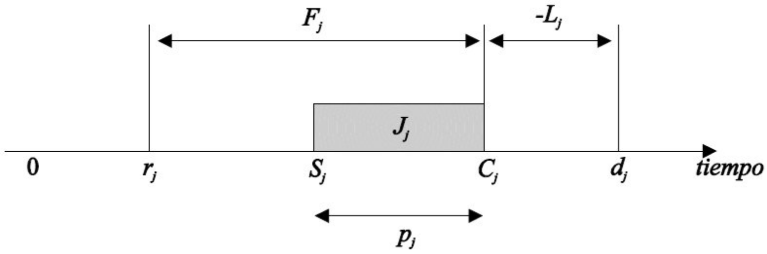

Figura 2.1: Datos y variables asociadas a la ejecución de un trabajo

Una fecha límite o de vencimiento d_j, para la cual el trabajo J_j debe estar finalizado ya que en caso contrario habría una tardanza.

- Un peso o ponderación ω_j^k el cual indica la importancia relativa del trabajo J_i con respecto a otros trabajos según el criterio k, con $1 \leq k \leq K$, donde K es el número de criterios considerados.

- Una función de costo f_j^k para cada criterio k, con $1 \leq k \leq K$, donde $f_{j(t)}^k$ es el coste asociado, según el criterio k, al trabajo J_k cuando este es completado en el instante t. Por lo general esta función depende de los parámetros anteriores.

Los datos m_j, r_j o p_j, p_{ij}, d_j, ω_j^k pueden ser conocidos (caso determinístico) o bien algunos de esos valores pueden ser aleatorios (caso estocástico).

Ahora se comentarán los valores de los parámetros($\alpha \mid \beta \mid \gamma$) que hacen referencia a los distintos problemas de planificación determinísticos.

2.4.1. Caracterización de las máquinas α

Desde que se disponga de mas de una máquina, ($\alpha = n$) existe la posibilidad de que varias de ellas ejecuten trabajos distintos u operaciones de distintos trabajos de forma simultánea. En estos casos se hablan de paralelismos. Es conveniente además distinguir los problemas en los que las máquinas pueden realizar las mismas funciones (máquinas no especializadas), de aquellos problemas en los que ciertas máquinas están especializadas en ciertas tareas y no pueden realizar otro tipo de tareas.

Máquinas no especializadas $\alpha \in \{1, P, Q, R\}$: Todas las máquinas ejecutan las mismas funciones.

-($\alpha = 1$)
En este caso solo se dispone de una máquina.

-Idénticas ($\alpha = P$)

Las máquinas tienen la misma velocidad de proceso.

-Uniformes ($\alpha = Q$)
Tienen distintas velocidades de proceso, pero son constantes e independientes de los trabajos.

-No relacionadas ($\alpha = R$)
La velocidad de proceso depende tanto de la máquina como del trabajo, no hay relación entre las velocidades de las máquinas.

Máquinas especializadas $\alpha \in \{F, O, J\}$: Existe especialización de las máquinas en ciertas tareas. Van asociadas a problemas en donde los trabajos a realizar se dividen en varias operaciones o tareas.

-Sistemas Flow-Shop ($\alpha = F$)
Cada trabajo se procesa por todos o algunos procesadores siguiendo un orden prefijado por un patrón común. Dicho orden es relevante y es siempre el mismo. No es necesario que el trabajo j pase por todas las máquinas. Para hacer esto simplemente se considera que $p_{ij} = 0$. Una observación interesante sobre los sistemas Flow-Shop es que son bastante parecidos a una cadena de montaje.

-Sistemas Open-Shop ($\alpha = O$)
Cada trabajo se procesa en todos los procesadores y el procesamiento puede realizarse en cualquier orden. En un sistema Open-Shop, cada trabajo J_j consiste en un conjunto (y no cadena) de $m = m_j$ operaciones $O_{1j}, ..., O_{m_j j}$, donde O_{ij} se procesa en la máquina M_i en un tiempo p_{ij}. En este caso, el orden en el que se realizan las operaciones es irrelevante.

-Sistemas Job-Shop ($\alpha = J$)
En un sistema Job-Shop, cada trabajo J_j consiste en una cadena de m_j operaciones $O_{1j}, ..., O_{m_j j}$. No tiene por que ser $m = m_j$, puede incluso ser $m < m_j$ por lo que puede darse la situación de que una máquina procese dos o más operaciones de un mismo trabajo. La trayectoria de máquinas de cada trabajo esta dada, pero no tiene que ser la misma para todo los trabajos. Es decir O_{1j} se procesa en la máquina μ_{ij} en un tiempo p_{ij}.

2.4.2. Caracterización de los trabajos β

Las condiciones impuestas por los trabajos para su ejecución se recogen en el parámetro $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$, que se estructura a su vez en diversos subcampos o parámetros en relación, entre otros, a los siguientes conceptos que caracterizan los trabajos.

-**Interrupciones** $\beta_1 \in \{pmtn, \emptyset\}$:
Permitir interrupciones significa que el procesamiento de cualquier operación puede interrumpirse y continuarse más tarde. Esto solo tiene sentido si se puede retomar el trabajo

en el estado en que cual se había dejado.

-Relaciones de precedencia $\beta_2 \in \{prec, tree, \emptyset\}$:
Caracterizan las relaciones de dependencia o de precedencia entre los trabajos. Dos trabajos u operaciones serán dependientes si el comienzo de la ejecución de una de ellas está condicionada a la conclusión de la otra. Estas relaciones se suelen representar con un grafo dirigido acíclico ($\beta_2 = prec$) que en ocasiones puede ser tipo árbol ($\beta_2 = tree$).

-Existencia de fechas de disponibilidad $\beta_3 \in \{r_j, \emptyset\}$:
Permite distinguir entre los problemas estáticos (todos los trabajos están disponibles desde el instante inicial) y los problemas dinámicos, en los que cada trabajo tiene su propio instante de disponibilidad.

-Cotas al número de operaciones $\beta_4 \in \{m_j \leq m_{UB}, \emptyset\}$:
En ocasiones y con más frecuencia en los problemas Job-Shop, donde puede ocurrir que el número de operaciones sea mayor al número de máquinas disponibles, puede ser conveniente acotar superiormente el número de operaciones.

-Tiempo de proceso $\beta_5 \in \{p_{ij} = 1, \emptyset\}$:
Muchos problemas son resolubles con tiempos de proceso unitarios y no lo son con tiempos de proceso generales.

-Recursos adicionales $\beta_6 \in \{\emptyset, res\lambda\sigma\rho\}$:
Algunas veces puede considerarse en el modelo de planificación la existencia de recursos adicionales. Conviene notar que las máquinas y los recursos adicionales son conceptos distintos. Si se requieren recursos adicionales deben especificarse cuáles son y las cantidades que se necesitan de esos recursos para ejecutar las diferentes tareas.

2.4.3. Criterios de optimalidad γ

Para concluir este capítulo se va a hablar del parámetro γ, que expresa el número de funciones objetivo a considerar, sus características y en caso de más de un criterio, el tipo de optimización en el que se está interesado. Es decir, si se buscan puntos eficientes, puntos extremos, realizar una optimización simultánea o una optimización jerárquica. Recuérdese que fijada una planificación se pueden calcular las siguientes variables:

- Tiempo de completación C_j, que indica el instante en el que el procesamiento del trabajo J_j concluye.

- La demora $L_j = C_j - d_j$, donde una demora positiva indica la tardanza en la completación del trabajo, mientras que, por otro lado, una demora negativa indica una conclusión anticipada del trabajo a su fecha límite d_j. En este caso el valor absoluto de la demora es la cantidad de tiempo anticipada.

- La tardanza que viene dada por $T_j = max(0, L_j)$, indica el retraso en la ejecución del trabajo J_j.

- El indicador del trabajo tardío U_j, que valdrá 1 si $C_j > d_j$, es decir, si el trabajo no se concluye antes de su fecha límite, y valdrá 0 en cualquier otro caso.

En función de las variables anteriores se definen las funciones objetivo a minimizar. Estas pueden hacer referencia al coste máximo o al total. Sea pues γ^k uno de los criterios considerados con $1 \leq k \leq K$, siendo K en número de criterios que intervienen en el problema. Dicha función será en general una función $\gamma^k = \gamma^k(C_1, ..., C_n)$, de los tiempos de completación $(C_j,\ j = 1, ..., n)$. Usualmente se trabajan con funciones crecientes de los tiempos de completación. Este tipo de funciones se denominan funciones regulares. Dependiendo de la naturaleza del problema interesará o no incorporar tiempo ocioso en la máquina.

Normalmente suelen ser funciones de tipo máximo ($\gamma^k = f^k_{max} = max_{j=1,\ldots,n}(f^k_j)$), o de tipo suma ($\gamma^k = \sum_{j=1}^{n} f^k_j$), donde$f^k_j = f^k_j(C_j)$ es el costo asociado de terminar el trabajo j en el instante de tiempo C_j, según en el criterio k

Se concluye el capítulo indicando que la clasificación triparamétrica $(\alpha \mid \beta \mid \gamma\ )$ es una clasificación abierta y subceptible de ser ampliada según la necesidad del sistema a estudiar.

Capítulo 3

Introducción al estudio de las colas o líneas de espera

La Teoría de Colas es el estudio matemático de las colas o líneas de espera que se forman dentro de un determinado proceso de atención al cliente cuando los usuarios requieren cierto servicio que se ofrece en el sistema. Estudia indicadores que permiten evaluar el funcionamiento del servicio como el tiempo de espera en las colas o la capacidad de trabajo del sistema sin que llegue a colapsarse. La Teoría de Colas tiene aplicaciones en diversos campos como el comercio, la industria, el sector de servicios, o las telecomunicaciones. Esta teoría permite modelar sistemas en los que varios agentes que demandan cierto servicio, confluyen en un mismo servidor y, por lo tanto, pueden registrarse esperas desde que un cliente llega al sistema hasta que el servidor atiende sus demandas.

El primer artículo sobre la Teoría de Colas fue escrito por el matemático danés Agner Krarup Erlang, trabajador de la Copenhagen Telephone Exchange en el año 1909. Dicho artículo trataba sobre el estudio del problema de dimensionamiento de líneas y centrales de conmutación telefónica para el servicio de llamadas.

El objetivo de la teoría de colas es la la obtención de diferentes indicadores que indiquen como evoluciona el sistema de colas. Una cola se produce cuando la demanda de un servicio por parte los clientes sobrepasa la capacidad del servicio. Un sistema de colas se puede describir como un conjunto de clientes que llega a un sistema buscando un servicio, para el cual los usuarios deben de esperar antes de ser atendidos. En el proceso de una cola se distinguen tres etapas; primero, la entrada de clientes al sistema, luego vendría la línea de espera para recepción del servicio y por último quedaría la salida del cliente del sistema.

Diferentes ejemplos de sistemas de colas se pueden encontrar en la vida real, algunos de los cuales se citan a continuación.

- La venta de artículos en un comercio. En este caso se tiene que los servidores son los dependientes de la tienda y los agentes son los clientes.

- Las operaciones financieras en un banco. Aquí se tiene que los servidores son los empleados que atienden las ventanillas y los agentes son clientes del banco.

- La caja de un supermercado, en este caso se tiene que los servidores son los cajeros y los agentes los clientes del supermercado.

- La reparación de la avería de vehículos en un taller de reparaciones. Para este caso los servidores son los mecánicos del taller y los agentes o clientes son los vehículos.

- La atención médica en un centro sanitario. En este caso, los servidores son los médicos y los agentes o clientes los enfermos que vienen al centro.

En la siguiente sección se pretende introducir las principales características de la Teoría de Colas, las cuales sirven de base para el planteamiento del problema que se presenta en la oficina de correos.

3.1. Fundamentos de la Teoría de Colas

Los conceptos básicos de los sistemas de colas son los siguientes:

-Tamaño de la población: Este parámetro indica el número total de clientes potenciales que tiene el sistema, dicho número puede ser finito (sistema cerrado) o infinito (sistema abierto). Generalmente se supone que el tamaño de la población es abierto.

-Entrada o fuente: Esto indica como es la entrada de agentes en el sistema, esta, puede ser, unitaria o por bloques. Supondremos que los clientes entran al sistema individualmente.

-Tiempo entre llegadas: Los tiempos de llegadas pueden ser conocidos (caso determinista) o aleatorios (probabilistas). En este caso debe especificarse la distribución de probabilidad.

-Tasa media de llegada (λ): Es el número medio de llegadas de clientes por unidad de tiempo. Estas entradas son independientes e idénticamente distribuidas.

-Servidores o canales de servicio: Son los que proporcionan el servicio al cliente. Denotaremos por (s) al número de servidores

- Tiempo de servicio: Es el tiempo requerido para atender al usuario. Este puede ser determinista o probabilista. En este caso, hay que especificar la distribución de probabilidad del servicio.

- Tasa media de servicio (μ) : Es el número medio de clientes que son atendidos en un servidor por unidad de tiempo. Estas salidas son independientes e idénticamente distribuidos.

- A la hora de seleccionar los miembros de la cola para ser atendidos se distinguen cuatro sistemas.

Sistemas FIFO: Se atiende primero al que llegue antes.

Sistemas LIFO: Se atiende primero al último en llegar.

Sistemas SIRO: Se atiende de forma aleatoria.

Por prioridad

La siguiente notación A/B/C/D/E..., se utiliza para especificar el tipo de sistema de colas que se desea estudiar donde cada parámetro representa lo siguiente:

A: Distribución del tiempo de llegadas

B: Distribución del tiempo de servicio

C: Número de servidores

D: Número máximo de clientes en el sistema

E: Disciplina de la cola

En los primeros parámetros (A y B), se utiliza la letra M para indicar que los tiempos entre llegadas o salidas siguen la distribución Exponencial, la letra D que los tiempos de llegada o salidas son constantes o determinísticos, la letra E, que la distribución de llegadas o salidas es una distribución de Erlang y G que es una distribución general.

Medidas de eficacia de un sistema de colas

Se denota por λ la tasa media de llegada y por μ la tasa media de servicio. De esa forma $\frac{1}{\lambda}$ representa el tiempo medio entre llegadas consecutivas y $\frac{1}{\mu}$ indica el tiempo medio de servicios.

Sea s el número de canales o servidores del sistema. Se define intensidad de tráfico ρ como el cociente $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$. Esta medida ρ tiene que ser ≤ 1 para que la cola sea finita. Si $\rho > 1$, la cola se hace infinita. Asumiendo que la cola es finita ($\rho \leq 1$), podemos determinar unos indicadores o medidas de eficiencia del sistema de colas. Estos indicadores son:

N: Número de clientes en el sistema (Cola + servicio)

L: Número medio de clientes en el sistema L = E[N]

N_q : Número de clientes en la cola

L_q : Número medio de clientes en la cola $L_q = E[N_q]$

T: Tiempo de estancia de los clientes en el sistema

W: Tiempo medio de estancia de los clientes en el sistema $W = E[T]$

T_q : Tiempo de espera de los clientes en la cola

W_q : Tiempo medio de espera de los clientes en la cola $W_q = E[T_q]$

$\bar{c}$: Número medio de servidores ocupados

En este trabajo vamos a considerar colas markovianas; estas, son colas donde las llegadas y salidas de clientes al sistema siguen procesos de Poisson.

Antes de estudiar los procesos de Poisson conviene recordar la distribución de Poisson de una variable aleatoria.

3.2. Distribución de Poisson

Una variable aleatoria X discreta sigue una distribución de Poisson si puede tomar los valores enteros 0, 1, 2, ..., n, ...; siendo la probabilidad de que X = r la siguiente

$$\mathrm{P}(X = \mathrm{r}) = \tfrac{\lambda^r}{r!}\, e^{-\lambda} \qquad \mathrm{r} = 0, 1, 2, ..., \mathrm{n}, ...$$

Se escribe $P(\lambda)$ donde λ (media aritmética de las observaciones) es el parámetro de la distribución. Fue descubierta por Siméon-Denis Poisson, que la dio a conocer en 1838 en su trabajo *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles). La distribución de Poisson es aplicada a fenómenos discretos que se producen en la naturaleza (esto es, aquellos fenómenos que ocurren 0, 1, 2, ..., n, ... veces durante un periodo definido de tiempo o en un área determinada) cuando la probabilidad del fenómeno es constante en el tiempo o en el espacio. Un ejemplo de una situación que puede ser modelada mediante una distribución de Poisson puede ser el número de llamadas telefónicas que recibe una central telefónica en un minuto. Por lo tanto esta distribución es la adecuada para representar la llegada de clientes por hora a la oficina.

Se verifica que $P(X = r) \geq 0$ y que la suma de las probabilidades es 1, esto es

$\sum_{r=0}^{\infty} P(X = r) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda}\ e^{\lambda} = 1$

Esperanza matemática: Se tiene que $E(X) = \lambda$, es decir

E$(X) = \sum_{r=0}^{\infty} r.P(X = r) = \sum_{r=0}^{\infty} r\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r-1)!}\ e^{-\lambda} =$

$\lambda \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1!)}\ e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda} = \lambda.e^{\lambda}.e^{-\lambda} = \lambda$

Varianza: La varianza de la variable es $Var(X) = \lambda$, es decir

Var$(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \lambda)^2 = \sum_{r=0}^{\infty}(r - \lambda)^2\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} =$

$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2 - 2r\lambda + \lambda^2)\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} r^2\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda}$ -2 $\sum_{r=0}^{\infty} r\lambda\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^2\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} =$
$= \lambda(\lambda + 1)$ - $2\lambda^2$ + $\lambda^2 = \lambda$

Desviación típica: Se define la desviación típica de como $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda}$

Para una distribución de Poisson, se define:

Momento respecto al origen de orden k

Se define el momento respecto al origen como

$$a_k = E(X^k) = \sum_{r=0}^{\infty} r^k\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda}$$

Momento central

Se define el momento respecto al origen de orden k como

$$\mu_k = E(X - E(X))^k = E(X - \lambda)^k = \sum_{r=0}^{\infty}(r - \lambda)^k\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda}$$

Función generatriz y función característica:

Función generatriz

Se define la función generatriz de una distribución de Poisson como $E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t-1)}$, esto es

$E(e^{tX}) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{tr}\frac{\lambda^r}{r!}\ e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^r}{r!} = e^{-\lambda}\ e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$ a partir de esta función se pueden obtener la media y la varianza.

<u>Función Característica</u>

Se define la función característica como $E(e^{itX})$. Mediante un procedimiento análogo al anterior se obtiene que

$E(e^{itX}) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. A partir de esta función se obtienen los momentos centrales y respecto al origen.

Para concluir este apartado se cita una propiedad la distribución de Poisson que será de utilidad para modelar la situación de llegada y salida de clientes en una oficina.

La suma de dos o más variables independientes que tengan una distribución de Poisson de distintos parámetros λ_i (distintas medias) es otra variable aletoria que se distribuirá también como una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Por simplicidad se demuestra solo para dos variables y la extensión a n variables se hace de forma análoga. Sean X e Y dos variables aleatorias que se distribuyen con dos distribuciones de Poisson de distintos parámetros siendo X e Y independientes, X de distribuye como $P(\lambda_1)$ e Y se distribuye como $P(\lambda_2)$. Se quiere probar que la variable $Z = X+Y$ seguirá una Poisson con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Para ello se utilizará la función generatriz de una distribución de Poisson.

$E(e^{tX}) = e^{\lambda_1(e^t-1)}$

y

$E(e^{tY}) = e^{\lambda_2(e^t-1)}$

Como ambas distribuciones son independientes se tiene que la función generatriz de la suma de ambas variables Z será el producto de ambas, de manera que

$E(e^{tZ}) = E(e^{tX}).E(e^{tY}) = e^{\lambda_1(e^t-1)}.\ e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$, función generatriz de una Poisson de parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Esta propiedad es de gran importancia para el modelo ya que permite considerar diferentes distribuciones dependiendo del turno considerado.

En nuestro sistema de colas consideramos que los tiempos entre llegadas y entre salidas consecutivas siguen la distribución exponencial con parámetros λ y μ respectivamente. Por ello, recordamos en la sección siguiente las principales características de la distribución exponencial.

3.3. Distribución Exponencial

La distribución exponencial T es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\alpha > 0$ cuya función de densidad es:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Es una función estrictamente decreciente en t. Ademas, se tiene.

E$[T] = \frac{1}{\alpha}$

Var$[T] = \frac{1}{\alpha^2}$

Función Generatriz $(1 - \frac{t}{\alpha})^{-1}$

Función Característica $(1 - \frac{it}{\alpha})^{-1}$

Una característica importante de la distribución exponencial es que la distribución de probabilidad del tiempo que falta para que ocurra el evento es siempre la misma independientemente del tiempo que haya pasado.

Un ejemplo para esta distribución es el tiempo transcurrido en una centralita hasta recibir la primer llamada del día.

3.4. Proceso de Poisson

Cuando los tiempos entre llegadas o los tiempos entre servicios se distribuyen según una distribución exponencial, entonces el número de llegadas o el número de salidas hasta un cierto tiempo es un proceso de Poisson.

Se define $\xi(t)$ como el número de llegadas en el tiempo t ($t \geq 0$). $\xi(t)$ es un proceso de Poisson si para todo t se distribuye como una Poisson de parámetro λt, siendo λ el número medio de llegadas por unidad de tiempo.

P$(\xi(t) = \text{n}) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$, con n = 0, 1, 2,...

P$(\xi(t) = 0) = e^{-\lambda t} = P(T > t)$, siendo T el tiempo entre llegadas que se distribuye como una exponencial.

E$[\xi(t)] = \lambda t$

Para un intervalo de tiempo pequeño $\triangle t$, la probabilidad de llegada de un cliente es

$\lambda \triangle t$.

Se define $\zeta(T)$ como el número de salidas en el tiempo t ($t \geq 0$). $\zeta(T)$ es un proceso de Poisson si para todo t se distribuye como una Poisson de parámetro μt, siendo μ el número medio de salidas por unidad de tiempo.

P($\zeta(T)$ = n) = $\frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}$, con n = 0, 1, 2,...

P($\zeta(T) = 0) = e^{-\mu t} = P(T^* > t)$, siendo T^* el tiempo de servicio o tiempo entre salidas que se distribuye como una exponencial.

E[$\zeta(T)$] = μt

Para un intervalo de tiempo pequeño $\triangle t$, la probabilidad de llegada de un cliente es $\mu \triangle t$.

Dos propiedades interesantes de los procesos de Poisson son:

Propiedad Reproductiva

La suma de procesos de entrada de Poisson es también un proceso de entrada de Poisson, siendo la nueva tasa la suma de las tasas respectivas.

Divisibilidad

Si las llegadas a un sistema son de tipo de Poisson con tasa λ y cada llegada es encaminada a un subsistema s con una probabilidad p_i, el proceso de llegada a cada subsistema es también de Poisson con tasa λp_i.

3.5. Proceso de Nacimiento y Muerte

Se define nacimiento como la llegada de clientes al sistema, mientras que por muerte se entiende su salida del sistema una vez estén servidos. Se define como *N(t)* al número de clientes en el sistema. Este número coincide con la diferencia $\xi(T) - \zeta(T)$.

En estos sistemas se supone que la distribución del tiempo entre llegadas consecutivas de clientes al sistema es exponencial con parámetro λ_n, con n = 0, 1, 2,..., siendo λ_n la tasa de llegada de clientes al sistema cuando hay n clientes en el sistema. La distribución del tiempo entre salidas consecutivas de clientes al sistema es exponencial con parámetro μ_n, con n = 0, 1, 2,..., siendo μ_n la tasa de salida de clientes del sistema cuando hay n clientes. Se supone que los tiempos entre la próxima salida y la próxima llegada son independientes.

Se tiene que en un proceso de Poisson, la probabilidad de ocurrencia de un suceso en un $\triangle t$ es proporcional a $\triangle t$ cuando $\triangle t \rightarrow 0$. Tanto la tasa de llegada como la salida son procesos de Poisson e independientes, luego de un estado $n > 0$ dado solo se puede permanecer en él o pasar a dos posibles estados n-1 o n+1.

Se define $p_n(t)$ la probabilidad de que haya n clientes en el sistema en el tiempo t.

La ecuación diferencial que rige el proceso de nacimiento y muerte es:

$$p'_n(t) = \begin{cases} -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_n(t) + \mu_{n+1}p_n(t) & n > 0 \\ \\ -\lambda_n p_n(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) & n = 0 \end{cases}$$

En un régimen permanente o estacionario, las probabilidades se mantienen constantes e independientes del tiempo, esto es, $p_n(t) = p_n$, siendo p_n la probabilidad de que haya n clientes en el sistema de manera estacionaria. Para el sistema estacionario las ecuaciones que rigen el proceso de nacimiento y muerte son:

$$p'_n(t) = \begin{cases} -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) & n > 0 \\ \\ -\lambda_n p_n(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) & n = 0 \end{cases}$$

Al tratarse de un sistema estacionario para cualquier estado n se tiene que las tasas medias de llegada y de salida son iguales.

Se tiene que:

El número medio de clientes en el sistema es L = $\sum_{n=0}^{\infty} np_n$.

El número medio de clientes en cola con s servidores es $L_q = \sum_{n=0}^{\infty}(n-s)p_n$.

Tasa media de llegadas $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}(n-s)\lambda_n p_n$.

En el punto siguiente, se analizan dos sistemas de colas poissonianos donde el tamaño de la población de usuarios es infinito.

3.6. Sistemas de colas con población ilimitada de clientes

3.6.1. Sistema M/M/1

Las hipótesis para este tipo de sistemas son:

-La tasa media de llegada λ es constante e independiente del sistema ($\lambda_n = \lambda$).

-La tasa media de servicio μ es constante e independiente del sistema ($\mu_n = \mu$).

- Se considera un solo canal o estación de servicio (s = 1).

Se define el Factor de utilización o Intensidad de tráfico como $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Para que el sistema alcance el estado de estabilidad se debe cumplir que $\rho \leq 1$.

Si p_n es la probabilidad de que haya n clientes en el sistema, se tiene $p_n = \rho^n P_0$. Como $p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho$, luego se puede poner $P_n = (1-\rho)\rho^n$.

Conocidas las probabilidades se pueden introducir las Medidas o indicadores de funcionamiento de la cola M/M/1. Así tenemos:

Número medio de clientes en el sistema $\quad L = \sum_0^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

Número medio de clientes en cola $\quad L_q = \sum_0^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Tiempo medio de los clientes en el sistema $\quad W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

Tiempo medio de los clientes en cola $\quad W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

Factor de utilización del servidor $\quad \rho = L - L_q = 1 - P_0$

Probabilidad de que el tiempo de espera en cola sea nulo $\quad P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$

Probabilidad de que el tiempo de espera en cola supere t $\quad P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$

Probabilidad de que el tiempo en el sistema sea mayor que t $\quad P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}$

3.6.2. Sistema M/M/s

Las hipótesis para este tipo de sistemas son:

- La tasa media de llegada λ es constante e independiente del estado del sistema $(\lambda_n = \lambda)$.

- Hay s canales o estaciones de servicio en este sistema.

- La tasa media de servicio μ $\quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & si \quad n \leq s \\ s\mu & si \quad n > s \end{cases}$

siendo μ la tasa de servicio de un servidor.

Se define el Factor de utilización o Intensidad de tráfico como $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$. Para que el sistema alcance el estado de estabilidad se debe cumplir que $\rho \leq 1$.

Se tiene que p_n es la probabilidad de que haya n clientes en el sistema y p_0 la probabilidad de que no haya nadie en el sistema.

En este caso, $p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{S-1}\frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n+\sum_{n=s}^{\infty}\frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s(\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}} = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{S-1}\frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n+\frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^s(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}})}$
$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^n}{n!}+\frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}}$

El valor de p_n viene determinado por.

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 & n \leq s \\ \frac{1}{s!}(\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{s^{n-s}} P_0 & n > s \end{cases}$$

Ahora se introducen las medidas o indicadores del funcionamiento de las colas M/M/s.

Número medio de clientes en cola con s servidores $\quad L_q = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s\rho}{s!(1-\rho)^2}P_0$

Número medio de clientes en el sistema $\quad$ L $= L_q + \frac{\lambda}{\mu}$

Tiempo medio de los clientes en cola $\quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Tiempo de los clientes en el sistema $\quad$ W $= \frac{L}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$

Probabilidad de que el tiempo de estancia en el sistema sea mayor que t

$$P(W > t) = e^{-\mu t}(1 + \frac{P_0(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!(1-\rho)}\frac{1-e^{-\mu t(s-1-\frac{\lambda}{\mu})}}{s-1-\frac{\lambda}{\mu}})$$

Probabilidad de que el tiempo de espera en cola sea mayor que t

$$P(W_q > t) = (1 - P((W_q = 0))e^{-s\mu(1-\rho)t}$$

Probabilidad de que el tiempo de espera en cola sea nulo $\quad P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{s-1} P_n$

Capítulo 4

Descripción del problema de planificación de una oficina de correos

Una vez introducidos los modelos de planificación y los modelos de cola, se va a proceder a aplicar estos conocimientos a un caso práctico. Para ello se eligió la oficina de correos de Los Llanos de Aridane (La Palma). Esta oficina de correos presenta un problema de acumulación de clientes en varios periodos de tiempo a lo largo de la semana, lo que provoca la aparición de colas de clientes, provocando cierto malestar entre los usuarios y un exceso de trabajo en los empleados. El objetivo de este trabajo consistirá en estudiar y tratar de solucionar este problema de carga de trabajo en los empleados.

4.1. Entorno geográfico y socioeconómico de la oficina

La oficina que se va a analizar se encuentra en el municipio de Los Llanos de Aridane. Este municipio está situado en la vertiente oeste de la isla de La Palma en el archipiélago de las Islas Canarias. El municipio cuenta con una superficie de 36,2 km^2, una temperatura media anual que se encuentra entre los 16 y 23 grados centígrados, y con su zona central a 325 metros sobre el nivel del mar. El municipio es uno de los principales motores económicos de la isla, su economía se basa en el plátano y el turismo.

Según los datos del INE referidos al 1 de enero de 2015 la ciudad cuenta con 20.227 habitantes, siendo el municipio más poblado de la isla de La Palma. Según datos del ayuntamiento, la mayoría de la población reside en el núcleo urbano, mientras que la restante en la zonas rurales, siendo el barrio más habitado el de Los Llanos, con unos 3.580 habitantes. En 1900 el municipio contaba con 7.704 habitantes, en 1930 tuvo 3.357 habitantes menos debido a la segregación de Tazacorte. A partir de 1950 como consecuencia de un desarrollo urbanístico espectacular el número de habitantes llegó a superar los 15.311 en 1981. Con la democracia el crecimiento fue más lento llegándose a 17.774 en 1998. Desde entonces el incremento de la inmigración ha causado un nuevo auge demográfico que ha

Población de los Llanos de Aridane por grupos y edad (grupos quiquenales)			
Edad	Hombres	Mujeres	Total
(0-5]	414	354	768
(5-10]	516	480	996
(10-15]	536	499	1035
(15-20]	499	527	1026
(20-25]	618	561	1179
(25-30]	573	584	1157
(30-35]	672	720	1392
(35-40]	822	832	1654
(40-45]	890	897	1787
(45-50]	841	883	1724
(50-55]	783	806	1589
(55-60]	612	619	1231
(60-65]	460	554	1014
(65-70]	449	516	965
(70-75]	435	472	907
(75-80]	291	353	644
(80-85]	255	385	640
Mayor 85	167	352	519
Total	9833	10394	20227

Figura 4.1: Población de Los LLanos de Aridane en relación con la edad y el sexo.

hecho que se sobrepasen los 20.000 habitantes, siendo un 19,6 % de la población de otras nacionalidades, entre los que destacan alemanes y venezolanos. En lo que respecta a la edad de la población (véase la Figura 4.1), se observa que la población del municipio está algo envejecida ya que un alto porcentaje supera los 30 años, mientras que solo un pequeño porcentaje es menor de 30 años.

4.2. Descripción del problema de planificación de la oficina

Una vez descrito el entorno en el que se encuentra la oficina y las características sociodemográficas, se va a proceder a la exposición de los datos de la oficina, que serán necesarios para la construcción del modelo.

4.2.1. Datos del flujo de clientes de la oficina

Se dedicará este apartado a mostrar los datos suministrados por la oficina con respecto a la demanda de servicios a lo largo de una semana. Para una mejor visualización de los datos se usarán 3 tablas. En las dos primeras se recogen los datos en el periodo de lunes a viernes, mientras que en la tercera los datos del sábado. A continuación, se presentan tres diagramas de barras en donde las alturas indican el número de clientes por hora que tiene la oficina en distintos intervalos de horas, mostrados en el eje horizontal, para cada turno.

Tabla 4.1: Demanda diaria prevista de lunes a viernes en turno de mañana

Intervalo de Tiempo	Nº de Clientes	Periodo de horas	Nº de clientes por hora
8:30-9:30	5,00	1,00	5,00
9:30-10:30	20,00	1,00	20,00
10:30-11:30	25,00	1,00	25,00
11:30-12:30	32,00	1,00	32,00
12:30-13:30	38,00	1,00	38,00
13:30-14:00	10,00	0,50	20,00

Fuente: La propia oficina, elaboración propia.

Figura 4.2: Distribución de la demanda de clientes de lunes a viernes(turno de mañana)

Datos: Para cada intervalo de tiempo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ se recogen los parámetros siguientes.

n_i: frecuencia (absoluta)

a_i : periodo de tiempo (medido en horas)

h_i : $\frac{n_i}{a_i}$, número de clientes/hora (tasa de demanda)

Con los datos observados en la tabla 3.1, se puede obtener el número medio de clientes por hora que acuden a la oficina de lunes a viernes en turno de mañana, dato que será de utilidad más adelante.

Nº medio de clientes por hora $= \frac{5+20+25+32+38+10}{5{,}5} = \frac{130}{5{,}5} = 23,64$ clientes/hora

Tabla 4.2: Demanda diaria prevista de lunes a viernes en turno de tarde.

Intervalo de Tiempo	Nº de Clientes	Periodo de horas	Nº de clientes por hora
14:00-15:00	9,00	1,00	9,00
15:00-16:00	11,00	1,00	11,00
16:00-17:00	12,00	1,00	12,00
17:00-18:00	13,00	1,00	13,00
18:00-19:00	12,00	1,00	12,00
19:00-20:00	10,00	1,00	10,00
20:00-20:30	3,00	1,00	6,00

Fuente: La propia oficina, elaboración propia.

Figura 4.3: Distribución de la demanda de clientes (turno de tarde)

Datos: Para cada intervalo de tiempo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ se recogen los parámetros siguientes.

n_i: frecuencia (absoluta)

a_i : periodo de tiempo (medido en horas)

h_i : $\frac{n_i}{a_i}$, número de clientes/hora (Tasa de demanda)

Ahora se obtiene el número medio de clientes por hora que acuden a la oficina durante el turno de tarde de lunes a viernes.

Nº medio de clientes por hora $= \frac{9+11+12+13+12+10+3}{6{,}5} = \frac{70}{6{,}5} = 10,77$ Clientes/hora

Tabla 4.3: Demanda del turno del sábado.

Intervalo de Tiempo	Nº de Clientes	Periodo de horas	Nº de clientes por hora
9:30-10:30	10	1	10
10:30-11:30	28	1	28
11:30-12:30	37	1	37
12:30-13:00	15	0,5	7,5

Fuente: La propia oficina, elaboración propia.

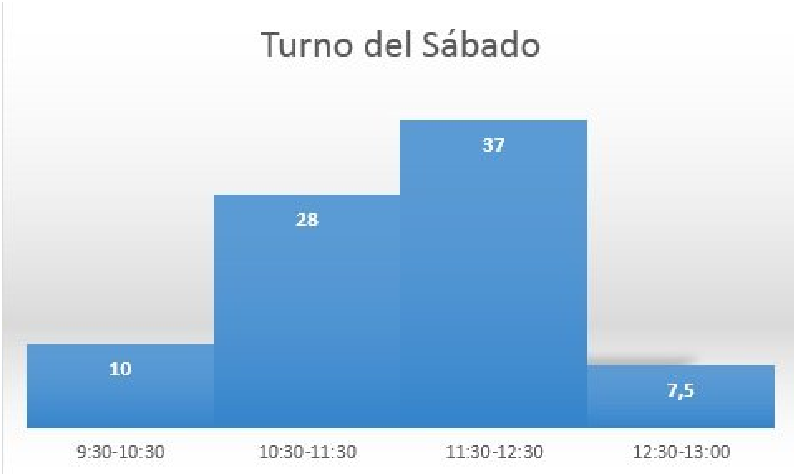

Figura 4.4: Distribución de la demanda de clientes en sábado.

Datos: Para cada intervalo de tiempo $i = 1, 2, 3, 4$ se recogen los parámetros siguientes.

n_i: frecuencia (absoluta)

a_i : periodo de tiempo (medido en horas)

h_i : $\frac{n_i}{a_i}$, número de clientes/hora (tasa de demanda)

Ahora como se hizo con los casos anteriores se calcula el nº medio de clientes por hora que acude a la oficina en el turno del sábado.

Nº medio de clientes por hora $= \frac{10+28+37+15}{3,5} = \frac{70}{6,5} = 25{,}71$ clientes/hora

Se aprecia que el número medio de clientes por hora que acude a la oficina en sábado es bastante mayor que en el resto de la semana.

Nota: Los datos facilitados por la oficina son una aproximación del flujo de clientes producido en una semana normal de trabajo, omitiéndose los momentos en los que hay una mayor demanda servicios (época de elecciones, mudanzas de estudiantes, periodo de navidades, etc.).

4.2.2. Recursos humanos disponibles y tareas que se desarrollan en la oficina

Una vez expuesto como es la demanda de servicios de la oficina, se procederá ahora a describir las distintas actividades que son llevadas a cabo por los empleados de la misma.

En la oficina de correos trabajan siete personas: un director y seis empleados. De los seis empleados disponibles en la oficina, uno de ellos actualmente se dedica a tareas de clasificación, recogida y reparto de cartería y paquetería, en los turnos de mañana de lunes a sábado, por lo que no atiende directamente a los clientes que llegan. Los cuatro empleados restantes atienden al público y se reparten entre ellos los turnos de trabajo. Cada empleado deberá trabajar una media de 40 horas a la semana. En la oficina de correos, el número de trabajadores en mostrador varía dependiendo del turno de trabajo que se este realizando. En la actualidad se realizan tres turnos.

- **Turno 1 De lunes a viernes (Mañana):** comprendido de lunes a viernes en horario de mañana (De ocho de la mañana a dos de la tarde). Para este periodo hay tres empleados en mostrador.

- **Turno 2 De lunes a viernes (Tarde):** es el periodo que va de lunes a viernes desde las dos de la tarde a las ocho y media de la tarde. Para este periodo hay dos empleados en mostrador.

- **Turno 3 sábado:** hace referencia al turno del sábado en horario de nueve de la mañana a una de la tarde. Para este periodo hay dos empleados en mostrador.

Las tareas realizadas en el mostrador de la oficina se dividen en 4 modalidades, cuya descripción y tiempo medio de servicio se muestran en la Tabla 4.4, donde la columna x_i muestra el tiempo estimado en minutos requerido para realizar las actividades de la modalidad i.

Tabla 4.4: Descripción de las tareas y sus tiempos estimados de duración.

Modalidad i	**Descripción**	x_i **(min)**	**Nombre asignado**
1	Cobro de recibos, multas y venta de productos	2	S_2
2	Recargas telefónicas	5	S_5
3	Entrega de paquetería	10	S_{10}
4	Admisión de paquetería, envío y recepción de giros	15	S_{15}

Fuente: La propia oficina, elaboración propia.

Teniendo en cuenta las frecuencias con las que se requieren los servicios de cada modalidad, se les debería asignar unos pesos w_i a las modalidades. A continuación, asignamos un peso estimado a cada grupo de tareas en función de la frecuencia con la que se realizan dichas tareas, dichos pesos se muestran en la tabla 4.5.

Tabla 4.5: Pesos dados a las actividades en función de la frecuencia de su demanda.

Tareas	x_i **(min)**	**Pesos** $= w_i$
S_2	2	6
S_5	5	1
S_{10}	10	8
S_{15}	15	3

Fuente: La propia oficina, elaboración propia.

La importancia de estos pesos es la siguiente: las actividades de las modalidades S_2, S_{10}, S_{15} son respectivamente 6, 8, 3 veces más frecuentes respectivamente que la modalidad S_5. Con estos datos se puede calcular una estimación aproximada del tiempo medio empleado por servicio que se realiza en la oficina.

Tiempo medio estimado de cada servicio $= \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i . w_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} = 7,89$ min/cliente.

Teniendo esto en cuenta se puede obtener una estimación de la tasa de servicio que puede dar un empleado en 1 hora.

Tasa de servicio por empleado $= \frac{60 min/hora}{7{,}89 min/cliente} =$ 7,61 clientes/hora.

Sabiendo que de promedio cada empleado puede atender a 7,61 clientes en una hora se puede estimar cuantos clientes pueden ser atendidos en promedio con 2, 3 y 4 empleados.

Tabla 4.6: Tasa de servicios por hora en función del nº de empleados.

Nº de empleados	**Tasa de servicio por hora**
1	7,61
2	15,22
3	22,83
4	30,44

Con los datos mostrados obtenidos en este capítulo se pueden calcular la Intensidad de Tráfico existente en la oficina para cada uno de los tres turnos.

Turno de mañana (lunes a viernes)

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{23{,}64}{22{,}83} = 1{,}035 > 1.$

Nótese que este sistema no es estable y por la tanto se producirán colas.

Turno de tarde (lunes a viernes)

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{10{,}77}{15{,}22} = 0{,}7076 < 1.$

Se tiene que este sistema es estable por la tanto no habrá problemas de acumulación de clientes.

Turno del sábado

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{25{,}71}{15{,}22} = 1{,}6892 > 1.$

Este sistema no es estable y por la tanto habrá problemas de acumulación de clientes.

Con esto queda planteado el problema de planificación que se tiene en la oficina, en el próximo capítulo se mostrará el modelo matemático que representa esta situación.

Capítulo 5

Planteamiento del problema y propuesta de modelo para su resolución

Una vez explicado como es el funcionamiento de la oficina y la distribución de llegada de clientes se procederá a la construcción del modelo que mejor representa dicha realidad. La idea es diseñar una planificación de los empleados en los mostradores para los diferentes turnos, de manera que se eviten las colas y que no haya un desequilibrio de carga de trabajo entre los trabajadores. Es decir, evitar pocos empleados en el turno de mañana cuando hay muchos clientes o existencia de empleados ociosos en turno de tarde cuando hay con poca gente. Para conseguir esto se va a trabajar con la tasa de llegadas de clientes y la tasa de servicio de los empleados.

5.1. Planteamiento del problema

Para estudiar la situación de la oficina, debemos mostrar con detalle que la causa de la existencia de colas, es consecuencia de que el número de empleados en los mostradores es insuficiente para satisfacer toda la demanda de servicios que tiene la oficina a lo largo de una semana.

5.1.1. Los Clientes

Con los datos mostrados en capítulo 4, se puede obtener la tasa máxima de demanda (n^o máximo de clientes/hora) a lo largo de la semana. Estos datos se recogen en la siguiente tabla.

Tabla 5.1:Tasa máxima(aprox) de demanda de servicios a lo largo de la semana

Periodos	**Tasa máxima de clientes**
lunes a viernes (Mañana)	32
lunes a viernes (Tarde)	12
sábado	37

En el capítulo 4 se obtuvo que la tasa de servicio por empleado era 7,61 clientes/hora, por lo tanto si se divide los datos recogidos en la tabla 5.1 entre este valor se obtendrá el número de empleados necesarios para cubrir las tasas de demanda máxima que se pueden dar a lo largo de la semana. Esos datos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5.2: Empleados necesarios para cubrir las tasas máximas de flujo de clientes.

Periodos	**Empleados necesarios**
lunes a viernes (Mañana)	4
lunes a viernes (Tarde)	2
sábado	5

Con los empleados que actualmente dispone la oficina en el turno de mañana de lunes a viernes y en el turno del sábado no se puede satisfacer estas demandas máximas de servicios, por lo que en caso de producirse dichas demandas el sistema se colapsa porque la tasa de llegada de clientes sería mayor que la tasa de servicio.

Ahora consideremos la tasa media de demanda de servicios en los diferentes turnos, la cual se recoge en la tabla siguiente.

Tabla 5.3: Tasa media(aprox) de demanda de servicios a lo largo de la semana

Periodos	**Tasa media de clientes**
lunes a viernes (Mañana)	23,64
lunes a viernes (Tarde)	10,77
sábado	25,71

Y siguiendo el mismo procedimiento que en la tabla 5.1 se obtienen los empleados necesarios para cubrir esas tasas de demandas.

Tabla 5.4: Empleados necesarios para cubrir las tasas media de flujo de clientes.

Periodos	**Empleados necesarios**
lunes a viernes (Mañana)	4
lunes a viernes (Tarde)	2
sábado	4

Se observa que, en este caso, con los dos empleados que hay en el turno del sábado no se puede cubrir la tasa media de llegadas. Tampoco se puede cubrir adecuadamente el servicio a los clientes en el turno de mañana si solo hay tres empleados en dicho turno.

5.1.2. Los Empleados

En el capítulo 4 se describió como se distribuyen en la oficina los empleados en los distintos turnos. En este apartado se hablará con más detalle de las características de los empleados y de cómo es la política de servicio de la oficina.

Se supone que en esta oficina todos los empleados están igualmente cualificados, es decir, todos los trabajadores pueden ejecutar las mismas tareas y en los mismos tiempos. Por lo tanto, se tiene un problema de planificación con empleados no especializados. Además de eso en la oficina se atiende a los clientes en orden de llegada, es decir a diferencia de otras oficinas no se da prioridad a ningún tipo servicio.

Debido a esto, y a que, por política de la oficina, no es posible llevar a cabo una modificación en la distribución de los empleados, lo único que se puede hacer para tratar de solucionar el problema de un mal funcionamiento del sistema, es ver en que turnos es necesario añadir más empleados, y cuál es el número mínimo de trabajadores a añadir para garantizar un correcto funcionamiento de la oficina.

5.2. Construcción del modelo

Introducida en el capítulo 3 la distribución de Poisson que sirve para representar la situación de la oficina, se procederá a la construcción del modelo. Se distinguen tres distribuciones independientes diferentes dependiendo del turno escogido, en donde el valor λ representa el número medio de clientes por hora que llegan a la oficina. El valor $\tau = 7,89\lambda$ representa el número de minutos requeridos para atender a los clientes que llegan a la oficina durante ese periodo de tiempo. El valor τ es el tiempo estimado de cada servicio (capítulo 3). En la siguiente tabla se recogen los distintos valores de λ, así como el valor $7,89\lambda$.

Tabla 5.5: Valores de λ y tiempo medio requerido para atender la demanda de servicios.

Periodo	**λ (clientes/hora)**	**7,89 λ (min/horas)**
Turno de Mañana	23,64	186,52
Turno de Tarde	10,77	84,98
sábado	25,71	202,85

Para los tres turnos interesa encontrar el número mínimo de clientes que podrían llegar cada hora dependiendo del turno en el que se esté trabajando " K_{min}", es decir, si ξ_1 representa la variable que indica el número de clientes que llegan por hora a la oficina, se busca un número de forma que dado un δ suficientemente pequeño se verifique que

$P(\xi_1 \leq K_{min}) = \delta$. También interesa encontrar el número máximo de clientes que pueden llegar cada hora "K_{max}", es decir un número que verifique que dado un δ suficientemente pequeño se verifique que $P(\xi_1 \leq K_{max}) = 1 - \delta$. Para obtener estos datos en primer lugar, con la ayuda del Excel, se van a generar las tablas de distribución de la Poisson para los distintos valores de λ; posteriormente, para facilitar la comprensión de los datos se mostrarán las respectivas funciones de probabilidad y las funciones de distribución de probabilidad para cada λ(véase apéndice). Con lo valores de la tablas se obtendrán los valores k_{min} y K_{max} buscados.

Turno de mañana (lunes a viernes)

En la siguiente tabla se muestran los distintos valores de K_{min} y K_{max} obtenidos en función de unos valores de δ, fijados.

Tabla 5.6: Valores de K_{min} y K_{max} para distintos valores de δ considerando λ = 23,64

δ	$1-\delta$	k_{min}	k_{max}	$7,89k_{min}$	$7,89\lambda$	$7,89k_{max}$	$7,89k_{min}/60$	$7,89k_{max}/60$
0,05	0,95	15	31	118,35	188,65	244,59	1,97	4,08
0,1	0,9	17	29	134,13	188,65	228,81	2,24	3,81
0,2	0,8	19	27	149,91	188,65	213,03	2,50	3,55

Para el turno de mañana de lunes a viernes se espera que lleguen 23,64 clientes /hora. En la tabla anterior se muestra que con unas probabilidades muy pequeñas pueden llegar a la hora un mínimo de k_{min} clientes y un máximo de K_{max} clientes. Para este turno hay que dedicar 188,65 minutos (más de 3 horas) de trabajo para cubrir la demanda de servicio de una hora.

Con una probabilidad 0.05 la oficina debe emplear 118,35 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, para lo que serán necesarios como máximo 2 empleados, y debe invertir como máximo 244,59 minutos para atender la demanda de clientes, por lo que serán necesarios como mínimo 4 empleados.

Con una probabilidad 0.1 la oficina debe emplear 134,13 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por hora, para lo que serán necesarios como mínimo 2 empleados, y debe emplear como máximo 244,59 minutos para atender a los clientes, por lo que serán necesarios como máximo 4 empleados.

Con una probabilidad 0.2 la oficina debe emplear 149,91 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, para lo que serán necesarios como máximo 3 empleados, y debe tardar como máximo 213,03 minutos para atender la demanda de clientes, por lo que serán necesarios como máximo 4 empleados.

Turno de tarde (lunes a viernes)

Se mostrarán ahora los distintos valores de K_{min} y K_{max} obtenidos en función de unos valores de δ fijados.

Tabla 5.7: Valores de K_{min} y K_{max} para distintos valores de δ considerando $\lambda = 10{,}77$

δ	$1-\delta$	k_{min}	k_{max}	$7,89k_{min}$	$7,89\lambda$	$7,89k_{max}$	$7,89k_{min}/60$	$7,89k_{max}/60$
0,05	0,95	5	15	39,45	84,98	118,35	0,66	1,97
0,1	0,9	6	14	47,34	84,98	110,46	0,79	1,84
0,2	0,8	7	12	55,23	84,98	94,68	0,92	1,58

Para el turno de tarde de lunes a viernes se espera que lleguen 10,77 clientes/hora. En la tabla 16 se muestra que con unas probabilidades muy pequeñas pueden llegar a la hora un mínimo de k_{min} clientes y un máximo de K_{max} clientes. Para este turno, hay que dedicar 84,94 minutos (aproximadamente hora y media) de trabajo para cubrir la demanda de servicio de una hora.

Con una probabilidad 0.05 la oficina debe emplear 39,45 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, para lo que será necesario como máximo 1 empleado, y debe emplear como máximo 118,35 minutos para atender a los clientes, por lo que serán necesarios como máximo 2 empleados.

Con una probabilidad 0.1 la oficina debe emplear 47,34 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, para lo que será necesario como máximo 1 empleado y debe invertir como máximo 110,46 minutos para atender la demanda, por lo que serán necesarios como máximo 2 empleados.

Con una probabilidad 0.2 la oficina debe emplear 55,23 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, para lo que serán necesarios como máximo 1 empleado, y debe tardar como máximo 94,68 minutos para atender a los clientes, por lo que serán necesarios como máximo 2 empleados.

Turno del sábado

Tabla 5.8: Valores de K_{min} y K_{max} para distintos valores de δ considerando $\lambda = 25{,}71$

δ	$1-\delta$	k_{min}	k_{max}	$7,89k_{min}$	$7,89\lambda$	$7,89k_{max}$	$7,89k_{min}/60$	$7,89k_{max}/60$
0,05	0,95	17	33	134,13	202,9	260,37	2,24	4,34
0,1	0,9	18	31	142,02	202,9	244,59	2,37	4,08
0,2	0,8	20	29	157,8	202,9	228,81	2,63	3,81

Para el turno de tarde del sábado se espera que lleguen 25,71 clientes/hora. En la tabla 17 se muestra que con unas probabilidades muy pequeñas pueden llegar a la hora un mínimo de K_{min} clientes y un máximo de K_{max} clientes. Para este turno hay que dedicar 202,9 minutos (más de 3 horas) de trabajo para cubrir la demanda de servicio de una hora.

Con una probabilidad 0.05 la oficina debe emplear 134,13 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, por lo que serán necesarios como mínimo 2 empleados, y debe emplear como máximo 260,37 minutos para atender a los clientes, por lo que serán necesarios como mínimo 4 empleados.

Con una probabilidad 0.1 la oficina debe emplear 142,02 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, por lo que serán necesarios como mínimo 2 empleados y debe emplear como máximo 244,59 minutos para cubrir la demanda de clientes, por lo que serán necesarios como mínimo 4 empleados.

Con una probabilidad 0.2 la oficina debe emplear 157,8 minutos como mínimo para cubrir la demanda de servicios por horas, por lo que serán necesarios como máximo 3 empleados, y debe invertir como máximo 228,81 minutos para satisfacer la demanda de los clientes, por lo que serán necesarios como máximo 4 empleados.

En la siguiente sección se mostrarán los resultados del modelo utilizado para planificar el trabajo de atención a los clientes en la oficina de correos.

5.3. Resultados del modelo

-Turno de mañana:

Para el turno de mañana se verifica que efectivamente con tres empleados se podría satisfacer una gran parte de la demanda que pueda existir en la oficina. Sin embargo, como se muestra en la tabla 5.6, existe cierta probabilidad de que no fueran suficientes esos trabajadores para satisfacer toda la demanda, por lo que para poder garantizar el mejor servicio a los clientes sería necesario contratar un empleado mas. Se mostrarán en la siguiente tabla los indicadores de cola para este turno, suponiendo que haya cuatro empleados en mostrador.

Turno de Tarde:

Con los datos mostrados en la tabla 5.7 se observa que, en el turno de tarde, con dos empleados se puede cubrir la demanda de servicios solicitada para este turno, por lo que no será necesario contratar a más trabajadores.

Turno del sábado:

En este turno es donde se presenta el mayor problema pues, a pesar de ser el turno donde hay una mayor demanda de servicios, es donde menos trabajadores hay. Con los datos obtenidos en la tabla 5.8 se observa que, para poder garantizar una disminución de los clientes en cola, serán necesarios contratar al menos dos empleados más.

En la tabla 5.9 se muestran las tasas medias de llegadas de clientes(λ), tasas de salidas(μ), intensidad de tráfico (ρ) y número de servidores (s) para cada turno de trabajo.

Tabla 5.9: Parámetros que definen los sistemas de colas estudiados.

Turno de trabajo	s	λ	μ	$s\mu$	$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$
Turno de mañana (lunes a viernes)	4	23,64	7,61	30,44	0,78
Turno de tarde (lunes a viernes)	2	10,77	7,61	15,22	0,71
Turno del sábado	4	25,71	7,61	30,44	0,84

En la tabla 5.10 se recogen los indicadores o medidas de eficiencia de los tres sistemas de colas, añadiendo los dos empleados adicionales en los turnos de Mañana y sábado como se indicó en la sección anterior.

Tabla 5.10: Indicadores de funcionamiento de las colas

Turno	p_0	L_q	L	$W_q(Horas)$	W(Horas)	$P(W_q = 0)$
Mañana	0,0341	2.0590	5,1654	0,0870	0,2185	0,4756
Tarde	0,1712	2,8447	4,2599	0,2641	0,3955	0,2423
sábado	0,0194	3,6937	7,0721	0,1436	0,2750	0,3009

De la tabla anterior se deduce que para el turno de mañana el número medio de clientes en el sistema está en torno a 5, de los cuales hay aproximadamente por término medio unos 2 clientes esperando en cola. Ademas, el tiempo medio de espera en cola es 5,22 minutos (0,0870 horas), lo cual es relativamente aceptable.

Para el turno de tarde el número medio de clientes en el sistema es 4,2599, de los cuales hay casi 3 clientes (2,8447) que esperan en cola. El tiempo medio que un cliente debe esperar en cola para ser atendido es 15,846 minutos (0,2641 horas). Este tiempo de espera ha aumentado en relación con el turno de mañana debido a que solo hay dos servidores en el turno de tarde.

Por último en el turno del sábado, el número medio de clientes en el sistema está alrededor de 7, de los cuales por término medio hay 3,6937 clientes esperando en cola. El tiempo medio de espera es 8,616 minutos (0,1436 horas), lo cual entendemos que es un tiempo asumible y razonable.

Por tanto, si la oficina pudiera contratar un nuevo empleado a dedicación completa, este se asignaría al turno de mañana, con lo cual dicho turno tendría cuatro servidores para atender a los clientes. El turno de sábado deberá cubrirse con todos los empleados dedicados a atender en el mostrador, incluyendo al nuevo empleado, y procurando que haya siempre cuatro empleados en dicho turno, con lo cual no es necesario que vengan los seis empleados cada sábado.

Se sugiere realizar un turno rotativo con los seis empleados de la siguiente forma. Se enumeran los empleados del 1 al 6 y se distribuyen como se indica en la tabla 5.11, de esta forma se igualan las horas de trabajo realizadas.

Tabla 5.11: Turno rotativo de los empleados cada tres semanas

Semana	Mañanas (lunes-viernes y sábado)	Tardes (lunes a viernes)
1	1, 2, 3, 4	5, 6
2	5, 6, 1, 2	3, 4
3	3, 4, 5, 6	1, 2

No obstante si no hubiera dinero para contratar ese nuevo trabajador, sugerimos que el empleado que estaba dedicado solamente a organizar y clasificar la correspondencia, pase a atender a los clientes en el turno de mañana. De forma que, cada vez que haya cuatro o más clientes en la oficina, aplace el trabajo que esté haciendo e inmediatamente atienda a los clientes. De esa forma se disminuiría la cola de clientes en la oficina.

Sería interesante también determinar los porcentajes de tiempo ociosos de los empleados en los tres sistemas de colas. Para ello se debería determinar la probabilidad de que no haya clientes en el sistema (p_0), la probabilidad de que haya un cliente en el sistema (p_1), y así sucesivamente, hasta la probabilidad de que haya $s-1$ clientes en el sistema (p_{s-1}).

Este cálculo debe hacerse independientemente para cada turno de trabajo (mañanas, tardes y sábado). En concreto, como para el turno de mañana se dispone de cuatro empleados para atender a los clientes, el porcentaje de tiempo ocioso de un primer cajero sería p_0. Dicho porcentaje para un segundo empleado sería $p_0 + p_1$. El tercer empleado tendría un porcentaje de tiempo ocioso de $p_0 + p_1 + p_2$. Por último, el cuarto empleado tendría un porcentaje de tiempo en el que no atiende a ningún cliente de $p_0+p_1+p_2+p_3$.

Por tanto, el porcentaje de tiempo total ocioso de los cajeros vendría dado por la fórmula

$$\sum_{n=0}^{s-1}(s-n)p_n$$

.

Para el turno de mañana tenemos s = 4, $p_0 = 0,0341$, $p_1 = 0,1061$, $p_2 = 0,1647$, $p_3 = 0,1706$, luego un primer empleado tendrá un porcentaje de tiempo ocioso de $p_0 = 0,03414$. El tiempo ocioso del segundo empleado será $p_0+p_1 = 0,1402$. El tercer empleado tiene un tiempo ocioso de $p_0+p_1+p_2 = 0,3049$. Y por último, el cuarto empleado tendrá un porcentaje de tiempo ocioso de $p_0+p_1+p_2+p_3 = 0,4756$. Si se aplica la fórmula anterior se tiene que el tiempo total ocioso de los cajeros es 4 (0,0341)+3(0,1061)+2 (0,1647)+ 0,1706 =

0,9549 horas (57,24 minutos), lo que significa que por cada hora que estén trabajando los cuatro empleados hay un total de 57 minutos de tiempo ocioso. Ese tiempo se podría dedicar a realizar las tareas de clasificación, ordenación de recogida de cartería y paquetería. Con ello quedarían cubiertas todas las tareas a realizar en la oficina en el turno de mañana.

En el turno de tarde se tiene que s = 2, $p_0 = 1712$, $p_1 = 0,2421$, por lo tanto el primer empleado tiene un porcentaje de tiempo ocioso de $p_0 = 1712$. El segundo empleado tendrá un porcentaje de tiempo en el que no realiza ninguna labor de atención al cliente de $p_0 + p_1 = 0,4136$. Utilizando la fórmula anterior se deduce que el tiempo total ocioso de los cajeros es 2(0,1712)+0,2421 = 0,5845 horas (35,07 minutos) .

Por último para el turno del sábado se tiene que s = 4, $p_0 = 0,0194$, $p_1 = 0,0655$, $p_2 = 0,1107$, $p_3 = 0,1247$, con esto se deduce que un primer empleado tendrá un porcentaje de tiempo en el cual no atiende a clientes de $p_0 = 0,0194$. El tiempo ocioso de el segundo empleado será de $p_0 + p_1 = 0,0849$. El tercer empleado tendrá un porcentaje de tiempo en el cual no realiza ninguna labor de atención al cliente de $p_0+p_1+p_2$ = 0,1956. Y por último, el cuarto empleado tendrá un porcentaje de tiempo ocioso de $p_0 + p_1 + p_2 + p_3$ = 0,3203. Aplicando la fórmula anterior se obtiene que el total de tiempo ocioso de los empleados es 4(0,0194)+3(0,0655)+2(0,1107)+ 0,1247 = 0,6202 horas (37,212 minutos), lo que significa que por cada hora que estén trabajando los cuatro empleados hay un total de 37 minutos de tiempo ocioso. De igual forma que en el turno de mañana ese tiempo se podría dedicar a realizar las tareas de clasificación, ordenación de recogida de cartería y paquetería. Con ello quedarían cubiertas todas las tareas a realizar en la oficina en el turno de mañana.

Como conclusión, con los cambios realizados en el turno de mañana de lunes a viernes y en el turno del sábado se obtiene estabilidad en los tres sistemas. Por lo tanto, se solucionaría el problema de colas y se realizarán todos los trabajos de la oficina.

Con esto se pone fin a los comentarios de los resultados del modelo. En el siguiente capítulo se recogen las conclusiones del trabajo.

Capítulo 6

Conclusiones

Como se indicó en el primer capítulo de este trabajo, el objetivo que se pretendía en este estudio era doble. Por un lado, dar una descripción de lo que son los modelos de planificación y los modelos de colas, muy presentes en el mundo actual en un gran cantidad de situaciones reales donde intervienen clientes y servidores. Y por otro lado, complementar ese estudio con una parte práctica, donde se pretendía encontrar un modelo matemático que describiera la llegada de clientes a una oficina de correos, para tratar de reducir las colas que se forman en la misma y planificar las tareas a realizar por los empleados de la oficina.

El problema planteado pudo resolverse de forma satisfactoria usando elementos de la teoría de colas y la planificación de tareas. La solución propuesta para esta oficina consiste en asignar cuatro empleados al turno de mañana, dos al turno de tarde y otros cuatro los sábados. Con ello, los sistemas de colas se estabilizan, y tanto el número medio de clientes en el sistema como el tiempo de permanencia de los clientes en cola no son elevados, pudiendo ser asumidos perfectamente por los usuarios.

La propuesta anterior requiere que se contrate a un nuevo trabajador o bien los seis empleados actuales que trabajan en la oficina atiendan directamente al público. Es decir, el empleado dedicado a clasificar y ordenar la distribución de cartas y paquetes debería atender también el público, dejando la labor que estaba realizando en exclusiva para que la ejecuten en conjunto los seis empleados, ¿Cuando debería hacerse esa labor de clasificación y ordenación de la paquetería?. Esto debería realizarse en los periodos de tiempo en los cuales hay empleados ociosos, debido a que hay menos clientes en el sistema que servidores. En ese caso, aquellos empleados que no estuvieran atendiendo, deberían ir a clasificar y catalogar la correspondencia. Para calcular el tiempo que se dispondría para la clasificación y ordenación de la paquetería necesitamos conocer qué porcentaje de tiempo están ociosos los empleados. Ello se calculó al final del capítulo cinco en el apartado 5.3. Allí se mostró que había suficinte porcentaje de tiempo ocioso para cubrir la tarea de clasificación y ordenación de la cartería y paquetría.

Por último, simplemente resaltar que se ha propuesto esta última solución al problema de colas y a la planificación de tareas en la oficina, haciendo un sencillo cambio en el funcionamiento interno de la misma, es decir modificando el sistema de atención al cliente, sin costo adicional alguno.

Apéndice A

Tabulación de la Distribución de Poisson

Turno de mañana (lunes a viernes)

Tabla A.1: P(x=k) y $\sum_{j=0}^{k} P(x=k)$ con λ= 23,64

Cantidad de clientes k	**P(x=k)**	**Probabilidad acumulada** $\sum_{j=0}^{k} P(x=k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0001
8	0,0001	0,0002
9	0,0003	0,0005
10	0,0008	0,0013
11	0,0017	0,0031
12	0,0034	0,0065
13	0,0063	0,0128
14	0,0106	0,0234
15	0,0167	0,0400
16	0,0246	0,0646
17	0,0342	0,0988
18	0,0449	0,1438
19	0,0559	0,1997
20	0,0661	0,2658
21	0,0744	0,3402
22	0,0799	0,4201
23	0,0822	0,5023
24	0,0809	0,5823
25	0,0765	0,6597
26	0,0696	0,7293
27	0,0609	0,7902
28	0,0514	0,8417
29	0,0419	0,8836
30	0,0330	0,9166
31	0,0252	0,9418
32	0,0186	0,9604
33	0,0133	0,9738
34	0,0093	0,9830
35	0,0063	0,9893
36	0,0041	0,9934
37	0,0026	0,9960
38	0,0016	0,9977
39	0,0010	0,9987
40	0,0006	0,9993
41	0,0003	0,9996
42	0,0002	0,9998
43	0,0001	0,9999
44	0,0001	0,9999
45	0,0000	1,0000

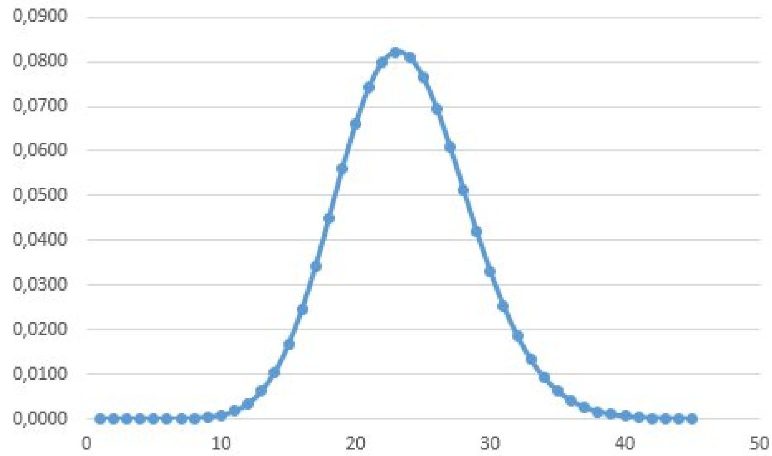

Figura A.1: Función de probabilidad para el turno de mañana

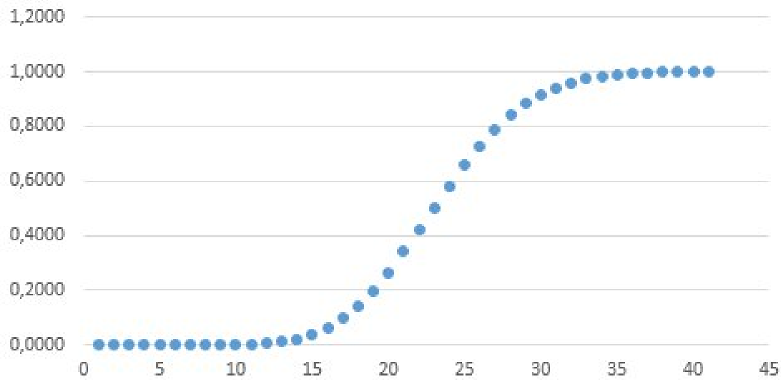

Figura A.2: Función de distribución de probabilidad para el turno de mañana

Turno de tarde (lunes a viernes)

Tabla A.2: P(x=k) y $\sum_{j=0}^{k} P(x = k)$ con $\lambda = 10{,}77$

Cantidad de clientes k	P(x=k)	Probabilidad acumulada $\sum_{j=0}^{k} P(x = k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0002
2	0,0012	0,0015
3	0,0044	0,0058
4	0,0118	0,0176
5	0,0254	0,0430
6	0,0456	0,0886
7	0,0701	0,1587
8	0,0944	0,2530
9	0,1129	0,3660
10	0,1226	0,4876
11	0,1191	0,6067
12	0,1069	0,7136
13	0,0885	0,8021
14	0,0681	0,8702
15	0,0489	0,9192
16	0,0329	0,9521
17	0,0209	0,9729
18	0,0125	0,9854
19	0,0071	0,9925
20	0,0038	0,9963
21	0,0020	0,9982
22	0,0010	0,9992
23	0,0004	0,9997
24	0,0002	0,9999
25	0,0001	0,9999
26	0,0001	1,0000

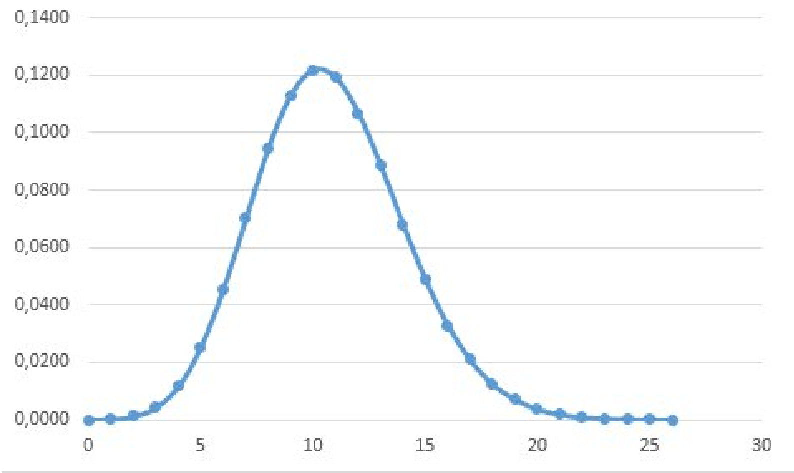

Figura A.3: Función de probabilidad para el turno de tarde

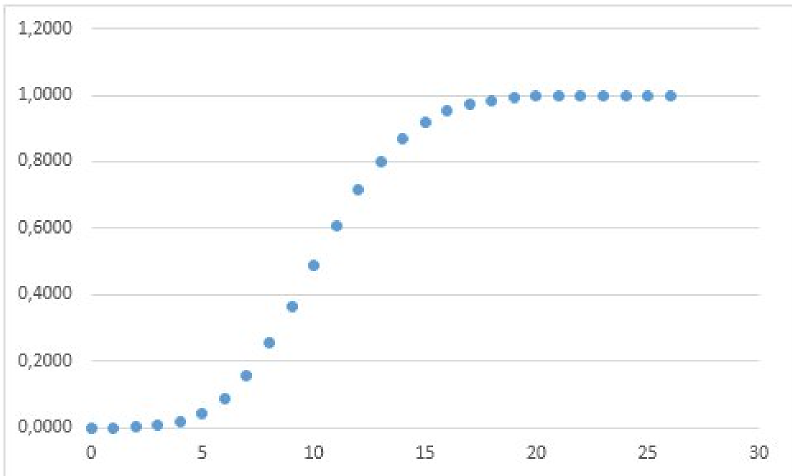

Figura A.4: Función de distribución de probabilidad para el turno de tarde

Turno del sábado

Tabla A.3: P(x=k) y $\sum_{j=0}^{k} P(x = k)$ con $\lambda = 25{,}71$

Cantidad de clientes k	P(x=k)	Probabilidad acumulada $\sum_{j=0}^{k} P(x = k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000
9	0,0001	0,0001
10	0,0002	0,0004
11	0,0006	0,0009
12	0,0012	0,0021
13	0,0024	0,0045
14	0,0043	0,0088
15	0,0074	0,0162
16	0,0119	0,0281
17	0,0180	0,0461
18	0,0257	0,0718
19	0,0348	0,1065
20	0,0447	0,1512
21	0,0547	0,2059
22	0,0639	0,2699
23	0,0715	0,3413
24	0,0766	0,4179
25	0,0787	0,4966
26	0,0779	0,5745
27	0,0741	0,6486
28	0,0681	0,7167
29	0,0604	0,7771
30	0,0517	0,8288
31	0,0429	0,8717
32	0,0345	0,9062
33	0,0269	0,9330
34	0,0203	0,9533
35	0,0149	0,9682
36	0,0107	0,9789
37	0,0074	0,9863
38	0,0050	0,9913
39	0,0033	0,9946
40	0,0021	0,9967
41	0,0013	0,9981
42	0,0008	0,9989
43	0,0005	0,9994
44	0,0003	0,9996
45	0,0002	0,9998
46	0,0001	0,9999
47	0,0000	0,9999
48	0,0000	1,0000

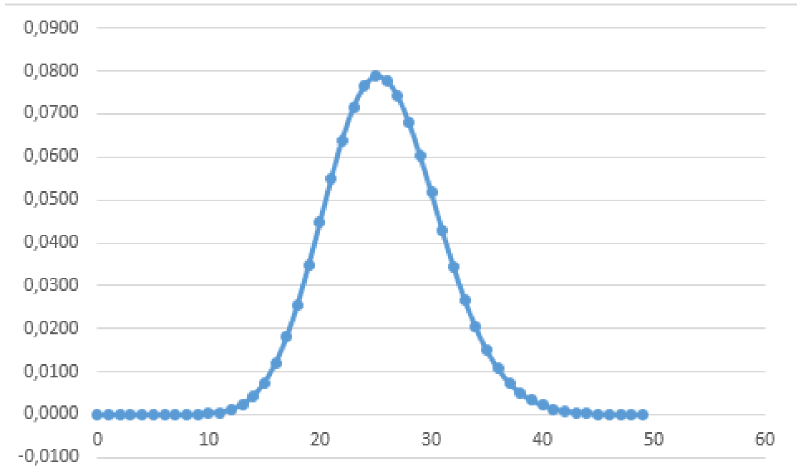

Figura A.5: Función de probabilidad para el turno del sábado

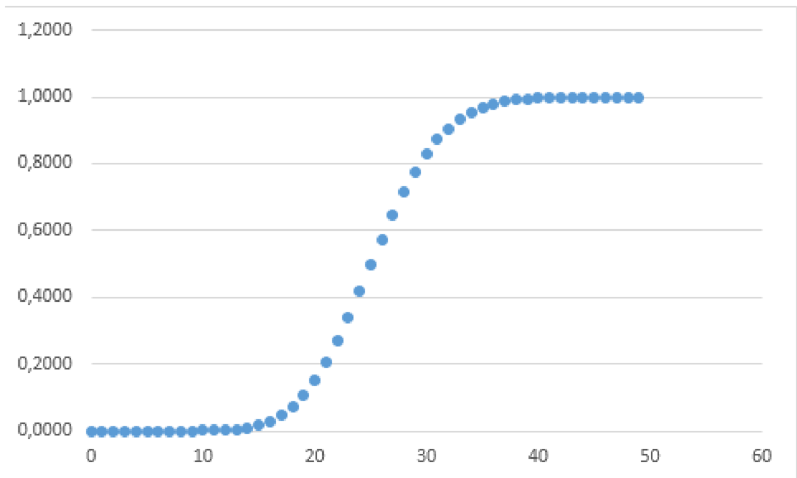

Figura A.6: Función de distribución de probabilidad para el turno del sábado

Bibliografía

[1] ALCAIDE LÓPEZ DE PABLO, D. (1995).*"Problemas de Planificación y secuenciación determinística: modelización y técnicas de resolución"*. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de la Laguna. Tenerife. España. Tesis Doctoral.

[2] ALCAIDE LÓPEZ DE PABLO, D. (2008). *"On Scheduling Models"*. Boletín de la Sociedad Española de Estadística e investigación Operativa. Vol 24, Cap 2, pp. 11-21

[3] BAKER, K.R.(1974) *"Introduction to sequencing and scheduling"*, John Wiley

[4] BLOMHØJ, M.; HØJGAARD JENSEN, T. (2003) *"Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning"*.Teaching Mathamatics and Its applications. Vol 22, nº 3

[5] GRAHAM, R.L.; E.L. LAWLER; J.K. LENSTRA; A.H.G. RINNOOY KAN (1979) *Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey* Annals of discrete mathematics, vol 5, pp. 287-326.

[6] HILLIER, F.S; LIEBERMAN, G.J (2010) *"Introducción a la investigación de Operaciones"*. Mcgraw-Hill

[7] NORTES CHECA, A. (1977) *Estadística teórica y aplicada.* Editorial Santiago Rodriguez, S.A; Burgos (España) 1º Edición. Pag 326-332

[8] LAWLER, E.L; J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, D.B. SHMOYS (1993) *Sequencing and scheduling: algorithms and complexity* En S.C. Graves, A.H.G. RinnoK Kan, P.H. Zipkin (eds.) *Handbooks in Operations Research and Management Science*, capítulo 9, vol.4, North Holland.

[9] SAATY, T.L(1967) *"Elementos de Teoría de colas"*, Ed. Aguilar

[10] SANCHEZ GARCIA, MIGUEL (1981).*"El proceso de la modelización en la investigación actual"*. Discurso inaugural, Universidad de La Laguna.