UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Modelización matemática con curvas de crecimiento. Aplicación en el análisis del desarrollo de una comarca de Tenerife

Autor: Carrillo Fernández, Marianela

Director: José Manuel González Rodríguez

Departamento de Economía Aplicada

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Departamento de Economía Aplicada

D. José Manuel González Rodríguez, Profesor Titular del Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de La Laguna

CERTIFICA: Que la presente Memoria titulada "**MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON CURVAS DE CRECIMIENTO. APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE UNA COMARCA DE TENERIFE**" presentada por Marianela Carrillo Fernández, licenciada en Ciencias Matemáticas, ha sido realizada bajo mi dirección y reúne las condiciones de contenido y forma exigidas para que sea admitida a trámite su lectura con el fin de obtener el Grado de Doctor.

Para que así conste y surta los efectos oportunos, firmo la presente en La Laguna, a treinta de Octubre de dos mil.

Fdo: Dr. José Manuel González Rodríguez.

a Jesús y a mis padres,
por el tiempo, la energía y
el cariño que habéis
invertido en mí

Agradecimientos

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al profesor José Manuel González Rodríguez, no sólo por la esmerada labor de dirección que ha llevado a cabo en este trabajo, sino también por haberme acogido en aquél momento, para mí crítico, introduciéndome en esta línea de investigación y contribuyendo activamente a mi formación como investigadora.

En ese sentido, también debo agradecer al profesor Casiano Rodríguez León el haberme puesto en contacto con José Manuel Rodríguez.

Gracias a Silvio Martínez por las sugerencias realizadas en la fase de elaboración del modelo, así como por las referencias bibliográficas que nos proporcionó y que resultaron de gran interés para el desarrollo de la investigación. Gracias también a José Sabina por esa buena disposición que siempre encontré en él y a Jaume Llibre por la revisión del último capítulo de la Memoria.

Asimismo quiero agradecer a todos los miembros del Departamento de Economía Aplicada y muy especialmente a mis compañeros de la subárea de Matemáticas, las constantes muestras de interés y el ánimo que me han brindado desde mi incorporación al departamento, así como la valiosa ayuda con que siempre he contado cuando la he necesitado. Gracias en particular a Concepción González por tantos consejos y enriquecedores comentarios que me ha ofrecido en mis tareas docentes e investigadoras.

No hay palabras suficientes para recoger con precisión la gratitud que debo a mis padres, artífices a través de sus enseñanzas de mis logros profesionales. Su ayuda, desinteresada y generosa siempre, ha sido en los últimos años inestimable para la finalización de esta tesis.

Y a ti, Jesús, gracias por cada día que has compartido conmigo.

INDICE

Introducción

Se presenta a continuación el contenido de esta Memoria Doctoral, comenzando por señalar las motivaciones que nos han acercado a los temas tratados. Intentaremos aclarar los objetivos perseguidos abundando en los comentarios de aquellos que se han conseguido. Finalizaremos dando una visión general de la organización de la Tesis.

El Turismo en el Sur

A lo largo de la presente Memoria se mostrará el fruto de cierto trabajo de investigación que, no debemos olvidar, se ha desarrollado en un contexto académico. Aún así, responde a motivaciones de tipo más bien social, pues se puede encontrar en la realidad que día tras día vivimos los canarios, ya sea directa o indirectamente.

Hablamos, claro está, del fenómeno turístico, pues de todos es sabido cómo el negocio turístico se ha visto incrementado en las islas desde los años sesenta hasta convertirse en la actividad económica predominante en todo el Archipiélago Canario. Los que vivimos aquí ya nos hemos acostumbrado a aceptar a los turistas de todas las nacionalidades como parte integrante de nuestro entorno, con todos los beneficios y perjuicios que ello comporta.

Pero para entender el desarrollo reciente de esta Industria, emblemática en la Historia reciente de las Islas, habremos de explicitar con todo detalle los condicionantes que, en una primera fase de su expansión, alejaron a los municipios de la vertiente de sotavento de Tenerife de los intereses de promotores y otros agentes del sector.

El Turismo en Canarias conoce una vasta tradición histórica, pues las relaciones comerciales y culturales del Archipiélago con distintos países europeos (principalmente Gran Bretaña) conformaron una dilatada actividad de intercambio cultural que, en particular, propició una continua visita de numerosos viajeros ilustrados al Archipiélago. Ya en la centuria pasada Canarias se convirtió en una de las estaciones privilegiadas donde los turistas continentales demoraban su estancia cuando realizaban pesados y costosos viajes transcontinentales. La bondad del clima y el aprovechamiento de las condiciones inmejorables para la cura de enfermedades, originó un considerable desarrollo de la oferta turística, localizada sobre todo en lugares de renombre paradisíaco, el Puerto de la Cruz en Tenerife o el municipio de Santa Brígida en la isla de Gran Canaria.

En todo caso, este turismo incipiente nada tuvo que ver con el posterior boom de la demanda terciaria de ocio, por cuanto en el primero de los casos contó con visitantes de élite, de reconocida solvencia económica y pertenecientes a los estratos más adinerados de la sociedad europea, de tal modo que la oferta turística de las Islas a finales del diecinueve se reconoce aún hoy en día en la prestancia arquitectónica de los edificios o en la calidad de servicios cubiertos por éstos. Por contra el Turismo de Masas que explotó en torno a los años sesenta surgió de igual forma a como lo hiciera en el resto del Estado español, y que Callizo (1991) explica perfectamente para el caso de la Costa Brava. En resumen, este "boom" de consumidores de ocio se caracterizó por:

- Búsqueda de mar y sol; esto es, de un tipo de ocio exclusivamente heliotalasotrópico.

- Desarrollo, abusivo y desmesurado de la especulación inmobiliaria, que, a través de una urbanización hacinada, ha transformado el litoral de las islas en mero soporte de alojamiento.

- Crecimiento intensivo de la oferta, que, surgida de modo espontáneo, ha desconocido todo principio de planificación.

- Relanzamiento de los movimientos migratorios, tanto de carácter interior como exterior, que han conducido a un crecimiento demográfico evidente en las zonas de atracción turística.

- Implicación selectiva de los municipios isleños en la evolución del sector, lo que ha provocado un claro diferencial de renta entre municipios turísticos y no turísticos.

Esto es, la Industria del Ocio insular queda enteramente vinculada a partir de la década de los 60 a la explotación casi en exclusiva del Sol, las playas y las diversiones nocturnas. Entonces, y habida cuenta del potencial insular en estos recursos,

¿Cómo se puede entender el apreciable retraso del sector turístico en la comarca que hemos denominado Chasna-Arona[1], que no conoció la explosión inicial de otras comarcas menos ricas en tales recursos?

Como bien argumentan los expertos en Geografía Humana que se han ocupado del fenómeno (Domínguez, 1992, Martín, 1991, Sabaté, 1993 …), nos encontramos ante un medio insular inhóspito y frágil, escasamente poblado y sometido a sucesivas crisis de producción (cuando las condiciones pluviométricas eran francamente desastrosas), que obligaba a sus habitantes a masivas diásporas migratorias. La escasez de recursos productivos, la particular estructura de clases

---

[1] Comprende los municipios de Adeje, Arona, Granadilla y San Miguel de Abona.

y el régimen de tenencia de la tierra, propia del modelo de señorío, expulsaron al Sur tinerfeño del tradicional modelo económico insular, caracterizado por la explotación intensiva de su renta de situación, e identificado con el binomio "Centro y Periferia". La vertiente de sotavento de la Isla no encaja en la descripción que propusiera E. Burriel, (1981) sobre la Historia Económica de Canarias, y se emparenta con mejor criterio con las condiciones de desarrollo reconocibles en otros ámbitos insulares, que han evolucionado a despecho de la lucha por recursos escasos.

El notable retraso económico, demográfico e inversor que acumularon las comarcas ajenas a la Agricultura de Exportación determinó en gran medida el instante en que reconocieron el "pistoletazo de salida" en la expansión de la industria turística. Así, los municipios comprendidos entre las comarcas de Agache y de Santiago del Teide desconocían en los años sesenta las condiciones idóneas para que pudiera cuajar un sector fuertemente necesitado de mano de obra abundante y barata, de excedentes de producción locales y de inversión pública e infraestructura adecuadas. Estos indicadores de desarrollo sí existieron en el Norte de Tenerife en los comienzos de dicha década, como bien se reconoce en los trabajos de J.M. González y A. Álvarez, mas no se conocieron en el Sur de dicha isla hasta bien avanzada la década siguiente (con la expansión de los cultivos de regadío y la construcción de la Autopista del sur en 1971, del aeropuerto Reina Sofía, en 1978 y del muelle de Los Cristianos, en 1975).

Con todo, la expansión del sector y su posterior "boom" en el Sur quedan caracterizados por una serie de pautas que individualizan su evolución en el propio entorno canario. Singularidades tales como la evolución continuada de la oferta y demanda turísticas, la escasa o nula concentración temporal, la homogeneidad por países, la fidelidad al destino y otras que, por su relevancia, merecen mención especial: la dependencia del exterior, pues la actuación de agentes externos (Tour operadores, compañías hoteleras supranacionales e inversores extranjeros) determina en gran medida la evolución del sector; la especialización, ya que el destino Sur de Tenerife queda perfectamente identificado como producto de oferta polarizada hacia el consumo de sol, playa y tranquilidad[2], de tal modo que esta imagen idealizada de nuestra isla queda meridianamente ilustrada por las encuestas periódicas que realiza el Cabildo[3]; o la escasa planificación de la oferta. En efecto, el desarrollo de la oferta tinerfeña ha desconocido cualquier principio de planificación continuada. Tal como reconoce J. Cuadrado, 1983: *"...el turista... ha sido la mejor razón o pantalla del proceso especulativo; pues ha elevado, casi sin límites, el valor de uso del suelo".* Y, justamente la interacción especulación inmobiliaria-expansión de la oferta es la relación causal que más incide en la desvinculación de esa otra natural entre ésta y la demanda.

Con todo lo expuesto anteriormente son múltiples los factores que determinan la evolución de la oferta y explican el desarrollo no planificado de ésta, imposibilitando la aplicación en Tenerife del modelo general de oferta propuesto por Cr. Labeau (ver Figuerola, 1985[b]) que combina conjuntamente las expectativas de la demanda y del ingreso. Además, la implicación diferente de cada zona y el estado actual de desarrollo de sus respectivos ciclos de vida obligan a una modelización individualizada de la oferta. Por consiguiente, se encarece la elección de un modelo teórico que pueda aportar las relaciones causales precisas. Y este modelo se explica en la Memoria con ayuda de la teoría del Ciclo de Vida de un Producto.

Esta propuesta forma el cuerpo central del modelo reseñado, que queda completado con los diagramas de interacción reconocibles entre los sistemas demográficos, de empleo y de expansión urbanística.

---

[2]*"los turistas vienen a Tenerife por conocer la isla, pasar tranquilamente unos días y disfrutar de sus condiciones naturales y climáticas agradables"* (Monteverde, 1985, p. 386)

[3] Según la elaborada en el año 1981, el 51,49% de los turistas eligieron Tenerife por sus condiciones naturales, el 19,87% por conocer la Isla y el 9,94% por la tranquilidad.

El modelo.

Todos los factores anteriormente descritos han sido analizados en profundidad para el destino norteño por J.M. González Rodríguez (1992 y 1993), en un modelo dinámico con el cual se analizó la evolución del impacto del sector turístico sobre el crecimiento de la población, la ocupación del territorio y la economía, incidiendo también en la evolución cualitativa del desarrollo comarcal.

Como continuación lógica de ese primer trabajo se planteó la construcción de un modelo de similares características que se adaptara al nuevo marco que representaba el destino Tenerife-Sur.

Se erigió así en un primer objetivo de esta Tesis Doctoral

> *la representación de la realidad económica del Sur de Tenerife a través de un modelo dinámico*,

que resultó a su vez motivador de nuevos temas, también tratados en la Memoria.

Sin embargo, en ningún momento se pretendió hacer una mera réplica de un trabajo ya realizado en otra situación, pues se persiguió una actitud crítica, sobre todo en el análisis riguroso de la metodología.

A la hora de elaborar modelos de realidades altamente complejas se mostraba atractivo el empleo de la técnica conocida como Dinámica de Sistemas, ideada por J.W. Forrester a principios de la década de los sesenta precisamente como herramienta para simular modelos en los que aparecían multitud de variables inmersas en relaciones no lineales y efectos de feedback o realimentación entre ellas.

Dicha técnica ha visto su aplicación en diversas disciplinas (urbanismo, ecología, desarrollo económico...) y, sin embargo, nosotros consideramos que adolece de cierto rigor en algunos aspectos, que los partidarios de la técnica justifican con la intención de lograr un entendimiento del comportamiento cualitativo del sistema.

No obstante, una de las características más destacables de la técnica la encontramos en la etapa de construcción del modelo, donde el énfasis se pone en el análisis de la estructura interna del sistema, que se entiende como la causante de su dinámica. De este modo, con la ayuda de las opiniones de los expertos en las distintas materias que abarca el sistema, la construcción del modelo se reduce a desenredar el entresijo de relaciones que se dan entre las variables relevantes.

Es precisamente este aspecto el que hemos tenido en cuenta en el proceso de construcción del modelo. Pero en ocasiones ha sido necesario también acudir a otro tipo de herramientas, impelidas por una realidad excesivamente compleja que necesitaba de una simplificación notoria.

En este contexto surgió, como paso intermedio en el proceso de modelización, el estudio de los fenómenos de crecimiento.

Los modelos de crecimiento.

La modelización matemática con ayuda de curvas de crecimiento constituye una de las ramas más fructíferas de la profusa investigación de especialistas varios, que a lo largo del siglo XX han apostado firmemente por apuntalar los cimientos rigurosos de la *"matematización de la realidad"* (Israel, 1996). En particular, esta empresa ha concitado el éxito buscando en la Biología, la Economía y otras Ciencias Sociales. Contando con el amplio bagaje de resultados que el modelo newtoniano de análisis e interpretación de la realidad física dotó a la Física Matemática, los esfuerzos espurios por avanzar modelos teóricos análogos en las ciencias del hombre, contestados y criticados en el siglo XIX (ver Israel, 1996, o Crèpel, 1999) se vieron compensados con los trabajos de distintos investigadores aplicados en la segunda década del siglo que acaba: V. Volterra, A. Lotka, B.L. van der Pol y J. Von Neumann, entre otros.

La razón del éxito de estos investigadores en el tratamiento matemático de la realidad estriba en buena parte en la renovación del planteamiento epistemológico. Visto el agotamiento del ideal reduccionista newtoniano, apoyado en esencia en la analogía mecánica, los nuevos paradigmas que incidieron en los conceptos universales de isomorfismo y sistema, coadyuvaron a la búsqueda de analogías menos estrictas, que debieron fructificar en la *"analogía matemática"*, que ya se apercibía en los planteamientos de V. Volterra o B.L. van der Pol.

Con todo, la dura lucha de estos innovadores, enfrentados tanto a los postulados formalistas del programa hilbertiano, como a los cultivadores de la nueva física cuántica y relativista, contó desde los primeros ensayos generales de la modelización con el cuestionamiento de sus métodos. En definitiva, la analogía matemática que permite identificar con rigor la evolución de todos aquellos sistemas que muestran pautas de comportamiento isomórfico, no conduce siempre a la elaboración de teorías concluyentes que «expliquen» con justeza la razón esencial que las rigen.

Se conoce un precedente histórico común en las técnicas de modelado o modelización, herederas de los primeros intentos de matematización de las ciencias del hombre provenientes de la *Aritmética Política* de William Petty y Jan de Witt o de las *Matemáticas Sociales*, de Condorcet, y que inspiraron los trabajos de economistas varios, Walras, Pareto o Cournot, entre otros (Israel, 1996; Crèpel, 1999). Mas, con todo, el fracaso de estas primeras propuestas dieciochescas conllevó el estancamiento de los esfuerzos en avanzar en una teoría general de la Modelización Matemática, hasta bien entrado el siglo XX. Sólo los trabajos aislados de B. Gompertz, (1779-1886) en Oncología y del belga P.F. Velhurst (1804-1849) en Demografía; el análisis propuesto por D. Bernouilli (1760) sobre la inoculación variólica y algunos desarrollos cercanos a la Biometría, debidos sobre todo al sabio belga Adolphe Quételet, (1848), pueden ofrecernos algunos rasgos de un ejercicio de la Ciencia Matemática, próximos a la temática que nos ocupa.

Como bien reconoce R.B. Banks, (1994, p. 2), en torno a 1925 se produce la edad de oro de estos ensayos, que en su creciente expansión *"aún no ha alcanzado su punto de inflexión"*. Trabajos pioneros ya anotados, junto a

- las investigaciones de Gause (1934) en la teoría de la Lucha por la Existencia,

- de Kostitzin (1937), en Biología Matemática;

- de Fisher (1937), en Genética;
- de Feller (1940), en el Análisis Logístico,

y otros muchos más, han abierto un amplio abanico de aplicaciones de las curvas de crecimiento en todos los procesos donde se reconocen fenómenos de difusión, crecimiento o transferencia[4].

En Demografía, los primeros intentos de Fibonacci por explicar la «aritmética de la población humana» con ayuda de la progresión geométrica, la similitud con el crecimiento de las poblaciones animales y la heterogeneidad temporal, fueron seguidos por los trabajos del comerciante de tejidos londinense John Graunt, que en 1662 analiza los fallecimientos en Londres; trabajos que inspiraron las predicciones de crecimiento de la población mundial, publicados por William Petty y los análisis más sofisticados de John Wallace en 1750 y los posteriores de L. Euler. Los presupuestos teóricos de estas contribuciones se ceñían casi en exclusiva a distintas interpretaciones de la progresión geométrica, y debió ser el pastor Thomas Malthus quien apuntalara la evidencia del crecimiento expansivo de la población contando con una formulación axiomática.

Con todo, el modelo logístico, inicialmente ideado por Verlhust y retomado luego por los estadísticos americanos Raymond Pearl y Lowell J. Reed ha demostrado su validez en la descripción de un buen número de fenómenos que atañen a la demografía así como a otros diversos campos tecnológicos (ver Mar-Molinero, 1980; García, 1983; Bewley y Fiebig, 1988; Duffy, 1997; Mckelve, 1996; Harvey, 1984). Estuvo desprestigiado en las décadas precedentes, mas en la actualidad vuelve a interesar a un buen número de especialistas próximos a los estudios de la población (véase Le Bras, 1995; Leguina, 1992; Martín-Guzmán y Martín, 1993; Vinuesa y otros, 1994).

---

[4] Los ensayos de Mahajan y Bass (1990) o de Meade (1984) aportan la necesaria visión histórica y de conjunto sobre los trabajos que atañen a este corpus de investigación.

En biología celular y en el estudio del crecimiento de poblaciones bacterianas ha venido siendo utilizado con profusión el modelo de crecimiento propuesto inicialmente por B. Gompertz en su estudio de 1825 sobre tumores cancerígenos. La formulación inicial del biólogo belga se basó en una ley de carácter experimental, según la cual *"la velocidad de crecimiento del volumen V(t) de un tumor es proporcional no al volumen solamente, sino al producto del volumen por una función decreciente de forma exponencial"* (Israel, p. 93).

Entonces, el modelo de Gompertz puede entenderse como una variante del crecimiento exponencial malthusiano (Banks, 1994, p. 150), donde el coeficiente de difusión decrece exponencialmente, y permite de nuevo ilustrar la analogía matemática que permite modelizar un buen número de procesos biológicos, incluida la propia evolución de la población humana (Neher, 1995; Eich, 1998; Franses, 1994[a] y 1994[b]).

La presencia de asimetría en las gráficas que describen el crecimiento de distintos procesos se ha mostrado determinante en el análisis estadístico de la simulación, y, en particular, en las técnicas de estimación de los parámetros libres (Evans, 1996) de sus especificaciones funcionales. Por ello, numerosos autores han propuesto nuevas curvas de crecimiento, que, generalizando el modelo logístico, posibilitan el tratamiento de series de datos expandidos en forma de S alargadas, pero no enteramente simétricas: La ley de la alometría o "power law" (Bertalanffy, 1986) regida por la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = a\,N^{a}\,, \tag{1}$$

la ley de Weibull (Banks, 1994; Sharif e Islam, 1980; McCullagh y Nelder, 1983), cuya curva solución viene expresada por

$$N(t) = OB(1 - e^{\frac{t}{b}})\,, \tag{2}$$

el modelo de Richards (Banks, 1994; Seber y Wild, 1989), con una EDO

$$\frac{dN}{dt} = \frac{a}{s} N \left(1 - \left(\frac{N}{OB} \right)^{s} \right), \tag{3}$$

que describe un crecimiento sigmoidal claramente no simétrico, por la presencia del parámetro s en (3) y que se generaliza, bien con el modelo de crecimiento propuesto por Bertalanffy, p. 170

$$\frac{dN}{dt} = a N^{x} - b N^{h} \tag{4}$$

o con la ecuación de mayor complejidad, que determina el crecimiento hiperlogístico, según la terminología de Peschel y Mende, 1986:

$$\frac{dN}{dt} = a N^{r} \left(1 - \left(\frac{N}{OB} \right)^{s} \right)^{n} \tag{5}$$

Todos los anteriores son ejemplos de ecuaciones de comportamiento que permiten adaptar la evolución de diferentes procesos de crecimiento, transferencia o difusión, de acuerdo con los valores posibles de los parámetros libres que comparecen en cada una de ellas.

Muchos autores han optado por una metodología ecléctica en la elección de una curva/ecuación que, en particular, consiga aproximar con buen ajuste las observaciones reales (Banks, 1994; Young, 1993; Nelder, 1961 y 1962; Gottlieb, 1995). En definitiva, el resultado "óptimo" de la estimación puede justificar la elección del modelo de crecimiento y/o las técnicas de estimación adoptadas. Mas, de acuerdo con el criterio de L. von Bertalanffy, p. 179, quien asevera que: *"es de sobra sabido que es posible aproximarse a casi cualquier curva si se permiten tres o más parámetros libres..."*, con lo cual: "*el ajuste de curvas llega a volverse un deporte de gabinete, útil para pronósticos de interpolación y extrapolación"*, habremos de perseguir en cada ejercicio de simulación la búsqueda de paradigma teórico o de la analogía matemática que justifique la implementación de un modelo concreto.

Con el fin de alcanzar dicho propósito, nos planteamos como segundo objetivo, que no secundario, de la presente Tesis Doctoral,

> *la definición de un método general de identificación de una curva de crecimiento que se encuentre justificada con evidencia teórica y empírica, y pueda ser utilizada para realizar predicciones.*

Encontrar ese tal método supondría, a nuestro parecer, un avance en la modelización matemática con curvas sigmoidales, pues permitiría la aproximación de los datos reales minimizando la subjetividad del proceso.

También dentro del campo de la modelización sigmoidal hemos prestado especial atención a una especificación concreta, el llamado modelo hiperlogístico, que constituye, como ya se ha dicho, el modelo más general conocido en la bibliografía, a pesar de lo cual su utilización en casos prácticos no se encuentra extendida.

En la Memoria queda patente la idoneidad de la especificación hiperlogística para modelizar los ciclos de vida de los destinos turísticos, en la terminología de Butler (1980). Dicha teoría, extraída de la ciencia del marketing ha sido profusamente implementada en el análisis del crecimiento de la demanda de turistas en diferentes tipos de destino, que ven incrementar sus flujos de visitantes de acuerdo a un esquema teórico similar al que sucede en el crecimiento animal: nacimiento, crecimiento, madurez y muerte (véase Cooper, 1990; Haywood, 1986; Callizo, 1991; Gordon, 1989; Gordon, 1996; Vera, 1997). En esencia, el modelo teórico explica la evolución de la demanda de acuerdo a una analogía matemática, característica del crecimiento sigmoidal, donde se pueden advertir al menos cinco fases diferenciadas.

La implementación del modelo de Butler en ecuaciones de comportamiento específicas, particularizadas en cada tipo de destino, fue reconocida por Banks (1994), pp. 419-420 como una de las cuestiones abiertas en la teoría de las curvas de crecimiento. En el análisis de la demanda se han intentado diversos ensayos, que cuentan con un notable refrendo entre los expertos (ver Haywood, 1986;

Gutiérrez y Oreja, 1994 o Gutiérrez y Melchior, 1995). Mas, se desconocía un tratamiento análogo para el estudio de la oferta, esto es, de la capacidad alojativa.

González y Gutiérrez (1995) emprendieron la implementación de los modelos logístico e hiperlogístico en el estudio del ciclo de vida de diferentes destinos turísticos en Canarias y la Memoria Doctoral refleja el acertado enfoque teórico que en su momento no fue enteramente dilucidado, compendiando todo el intrincado entramado de cuestiones teóricas y prácticas que conlleva el análisis de la planta alojativa insular.

En particular, uno de los objetivos hacia el que caminamos con más entusiasmo se dirigía a

> *la búsqueda de un procedimiento de estimación estandarizado de los parámetros de la ecuación diferencial hiperlogística*,

cuestión aún sin resolver por entero, por cuanto en la mayoría de los casos los modelos son estimados por métodos no lineales utilizando la expresión integrada (y no la ecuación diferencial), imposible de obtener en el caso hiperlogístico.

Entonces, a través del análisis de la oferta alojativa en el Sur de la isla de Tenerife se han abordado un buen número de cuestiones y problemas abiertos que atañen a la correcta utilización de las curvas de crecimiento y a otros aspectos de los procesos de modelización. Así, en particular:

- La identificación de cada tipo de crecimiento con una expresión concreta en forma de Ecuación Diferencial Ordinaria, que interesara sobremanera a los expertos en Dinámica de Sistemas (véase Forrester, 1972; Meadows y Meadows, 1972; Meadows y Randers, 1992; Aracil, 1986; Aracil y Gordillo, 1997; Martínez, 1986).

- El análisis de algunas variables auxiliares en el estudio de las economías regionales, desconocido en el rastreo bibliográfico. Se usaron diversas técnicas, propias de la Dinámica de Sistemas y de la Simulación Dinámica para apuntar algunos principios de modelización del empleo, la población activa y otras, que en definitiva, sólo acertaron a "estampar" en diagramas causales las ecuaciones bien conocidas en Economía (Andrés, 1994; Andrés y García, 1994; Cáceres, 1986; Fullerton, 1975; Jimeno, 1997; Lindbeck, 1994; Myro, 1983; Pedreño, 1993).

- Búsqueda de una analogía universal que permite identificar en cada proceso la especificación funcional de la ecuación de crecimiento que lo simule con el mayor grado de ajuste. Los trabajos de Young (1993) y colaboradores Young y Ord (1990), sólo habían alcanzado a avanzar hipótesis poco sólidas sobre la optimalidad de ciertas distribuciones de acuerdo con la estructura de los datos:

    - con presencia o no de simetría,
    - contando con pocas o numerosas observaciones,
    - si éstas se encuentran próximas al objetivo de saturación o, por lo contrario, se hallan más próximas a las observaciones iniciales, etc.

  Tales argumentos heurísticos, contrastados con múltiples ensayos de simulación eran, casi en exclusiva, las herramientas metodológicas que destacan casi la totalidad de los investigadores (Evans, 1996; Meade, 1985; Franses, 1994). En la Memoria se asume que todo modelo de crecimiento sigmoidal se puede entender como una modificación más o menos compleja del logístico más sencillo, alterado por procesos de estiramiento y contracción regulares, que quedan validados por los resultados de los teoremas presentados en el Capítulo 3.

- La cuestión de la especificación funcional es tratada con el uso de novedosas técnicas específicas, que se basan en el empleo de las herramientas de aproximación polinómica de funciones.

- El problema de identificación de los parámetros, cuestión que más interesa a los especialistas en curvas de crecimiento y sistemas dinámicos más generales, y que, aún en la actualidad, está lejos de ser resuelta por entero (Aracil y Gordillo, 1997; Mass y Senge, 1978; Morrison, 1991; Estrada y otros, 1995). Los primeros intentos en la formalización aparecen ya en los trabajos pioneros de

Verhulst, Pearl y Reed, y otros. En el análisis del problema para la ecuación logística, estos investigadores proponen métodos de estimación elementales, que serían recogidos en un planteamiento unificado, conocido como "Point Matching Method" (Banks, 1994, p. 45). Tal procedimiento ha venido siendo usado con profusión en la estimación de parámetros de la ecuación logística (Franses, 1994[a] y 1994[b] y Banks, 1994) y en algunas de sus generalizaciones. En concreto, Banks (1994) lo utiliza para los modelos de Richards e hiperlogístico, estableciendo un procedimiento de carácter iterativo.

Sin embargo, con este procedimiento no se alcanzan los resultados de ajuste deseados, pues las ecuaciones no lineales que comparecen al prefijar algunos valores destacados en la serie de datos no consiguen determinar estimaciones de los parámetros que alcancen el mismo grado de ajuste en el resto de observaciones. Por consiguiente, los expertos han propuesto múltiples alternativas de estimación, entre las que cabe destacar:

- linealización en los parámetros y estimación por mínimos cuadrados ordinarios;
- transformación logarítmica de la especificación, cuando sea posible y posterior estimación con procedimientos lineales (Sharif e Islam, 1980; Franses, 1994[a]);
- aplicación de distintos modelos de estimación no lineal, contando con ciertas restricciones en la distribución de los residuos (Jain y Rao, 1990; Mahajan y Muller, 1996);
- otros procedimientos novedosos, sólo implementables en casos particulares y con especificaciones funcionales concretas.

Según esto, las propuestas de la Memoria se pueden entender como contribuciones novedosas, que de algún modo persiguen ese procedimiento universal, aún por encontrar.

El análisis del modelo

Una vez construido el modelo, empleando las herramientas a nuestro alcance, la cuestión radica en el modo de emplearlo, esto es, su utilidad como medio descriptivo o de análisis.

En general, los modelos matemáticos pretenden reproducir la fluctuación de las magnitudes que permiten representar la parcela de realidad que se está estudiando. En este aspecto, los modelos construidos en términos de ecuaciones diferenciales se han mostrado particularmente útiles para describir el comportamiento dinámico de sistemas en diversos campos. Su uso se ha ido extendiendo con el desarrollo de la ciencia, impulsado principalmente por la Física.

La tendencia más reciente en el estudio de los modelos de ecuaciones diferenciales se centra en la búsqueda de información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones, aunando propiedades geométricas y topológicas. Se considera que la teoría cualitativa se debe a Poincaré, quien introdujo este punto de vista en sus trabajos sobre mecánica celeste en 1880 (Simmons, 1977).

En el análisis cualitativo de sistemas dinámicos cobra especial relevancia el estudio de los puntos críticos o estacionarios del sistema que, en las aplicaciones físicas, se relacionan con los estados de reposo (equilibrio) de las partículas. Pero un estado estacionario tiene poca importancia física a menos que tenga un grado razonable de permanencia, es decir, a menos que sea estable (Simmons, 1977), de tal forma que una pequeña perturbación de la solución en torno a un punto de equilibrio proporcione valores próximos para los sucesivos instantes del tiempo.

En el marco de la teoría cualitativa surge el concepto de estabilidad estructural, introducido por Andronov y Pontriaguin en 1937 (Freire, 1982). La estabilidad estructural estudia la persistencia de las propiedades cualitativas de sistemas dinámicos perturbados, por ejemplo, a través de los parámetros de sus ecuaciones. Este concepto resulta de gran importancia en aplicaciones prácticas, donde las ecuaciones diferenciales que definen los modelos se conocen sólo aproximadamente.

En el caso concreto de nuestro modelo, su capacidad descriptiva deberá ser constatada mediante simulación por ordenador, para comprobar que el modelo representa razonablemente la realidad conocida hasta el momento y por consiguiente, es posible su utilización para retratar la realidad. Además, es posible extraer información adicional, dada la idoneidad de los métodos de simulación como instrumento de valoración de determinadas acciones políticas, gracias a las facilidades de cálculo y representación gráfica que nos ofrecen los ordenadores. Un primer intento en este sentido ya ha sido realizado con el modelo de desarrollo del sur (Carrillo y González, 1999), aunque hemos optado por no incluir ese tipo de análisis en la Memoria Doctoral.

En su lugar nos hemos planteado un nuevo propósito que consideramos también de interés y que se relaciona con la utilidad del modelo como medio de análisis, el cual se centra en

> *realizar un análisis cualitativo del modelo, avanzando hacia la comprensión de las propiedades y naturaleza de sus soluciones*,

que nos permita indagar en el comportamiento futuro esperado de las variables (supuesto que no se produzcan cambios significativos en las relaciones), en busca de puntos de equilibrio estable que guíen en alguna medida la evolución del sistema.

Además, dado que el modelo se ha construido fijando en primer lugar las ecuaciones y a continuación los valores de los parámetros que aparecen en las mismas, sería deseable contar con cierta garantía que arroje información sobre su fiabilidad, asegurando un comportamiento similar en los aspectos cualitativos en el caso (más que probable) de que algún parámetro fuera estimado con cierto margen de error.

Los resultados

Con todo, y teniendo presente que algunos de los objetivos fijados constituyen verdaderos desafíos en las áreas en que se definen, podemos afirmar que dichos objetivos han sido alcanzados más que aceptablemente. A la vez, creemos haber realizado algunas contribuciones que esperamos sinceramente puedan ser de utilidad en investigaciones venideras.

A través de los resultados anotados se ha conseguido alcanzar el doble propósito de dotar del rigor matemático preciso los entresijos naturales que conlleva todo ejercicio de modelización con curvas de crecimiento y profundizar en aquellos aspectos cualitativos que quedaron por resolver en la simulación dinámica de numerosos entornos de la vida socio-económica de las comarcas canarias afectadas por el fenómeno explosivo del Turismo de Masas. En concreto, la metodología exhaustiva que se recoge en la Memoria ha posibilitado la resolución de no pocos aspectos de aquellos estudios que han analizado el desarrollo reciente de dicha Industria del Ocio en el Sur de la isla de Tenerife.

No abundan los estudios sobre la evolución de la demanda turística en las Islas, ni sobre su incidencia en el crecimiento de la oferta alojativa. Los trabajos pioneros, elaborados por expertos peninsulares (Modelo CANAGUA, 1978; Proyecto Canhidro, INITEC, 1980) no maduraron en propuestas novedosas y, en la actualidad, sólo se conocen las predicciones puntuales del Patronato del Cabildo Insular de Tenerife, algunas investigaciones recientes, vinculadas a la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ver Herce y Sosvilla, 1998 y Esteban, 1995) y estimaciones concretas de diversos Organismos (ISTAC, Cabildo Insular de Lanzarote y otros). La metodología en estos trabajos incide en el uso de varias herramientas propias del tratamiento de series temporales (análisis de tendencia, métodos extrapolativos del tipo Box-Jenkins, etc.) o recurre a modelos causales, característicos del análisis de regresión.

En la Memoria se ha implementado un modelo complejo que intenta recoger todas las relaciones causales entre variables de carácter demográfico, económico y turísticas. Con ayuda de las técnicas propias de la Simulación Dinámica y de la Teoría de Curvas de Crecimiento se ha querido recuperar el tratamiento de los estudios seminales del modelo CANAGUA, para retomar la visión interdisciplinar y sistémica en el análisis del Turismo y de sus implicaciones en el entorno insular. Por tanto, hemos contribuido a la modelización matemática en general a través del análisis de un caso práctico y a la mayor aplicabilidad de estas técnicas a las Ciencias Sociales mediante la construcción de un modelo socioeconómico concreto (Carrillo y González, 1997; Carrillo y González, 2000[a]).

En particular, hemos aportado nuevos conocimientos a la modelización de curvas sigmoidales que han conducido al establecimiento de una metodología genérica, no conocida hasta el momento, que proporciona ajustes históricos excelentes en numerosos ejemplos estudiados (Carrillo y González, 2000[b]). También en este campo hemos realizado propuestas novedosas para la estimación de parámetros en el modelo hiperlogístico, cuestión que aún requiere un esfuerzo de análisis exhaustivo que permita asegurar la universalidad de la metodología y la enjundia del rigor que se le exige a toda técnica de estimación.

Y, cómo no, también hemos pretendido colaborar a través de este modelo a un mayor entendimiento de la sociedad sureña, y por extensión, de la canaria, y a la concienciación de la posibilidad de utilización de ciertos recursos matemáticos como herramienta de ayuda a la toma de decisiones en la política turística canaria.

Todo lo referido en párrafos anteriores lo podremos encontrar en la Memoria distribuido de la siguiente forma:

Se comenzará en el capítulo 1 describiendo la situación histórica de la comarca Chasna-Arona, así como los factores y circunstancias relevantes en su evolución, para concluir con la construcción del Modelo de Desarrollo del Sur (MDS), el cual se hará explícito tanto gráficamente, mediante el empleo del diagrama de Forrester, propio de la Dinámica de Sistemas, como a través de un conjunto de expresiones matemáticas que pretenden reflejar las interrelaciones existentes en el modelo.

En el capítulo 2 se analizarán algunos de los obstáculos encontrados en el proceso de modelización, en relación a la disponibilidad de datos y calidad de las fuentes estadísticas, y se detallará el modo en que se han superado. Asimismo se repasarán algunas cuestiones metodológicas.

A continuación, en el capítulo 3 se estudiarán más exhaustivamente las características de los procesos de crecimiento o sigmoidales, las cuales nos permitirán avanzar una metodología general de modelización partiendo del que llamaremos teorema de caracterización del comportamiento sigmoidal. Abordaremos también la cuestión de la estimación de parámetros en el modelo hiperlogístico.

Para finalizar, ya en el capítulo 4, se modificará convenientemente el modelo original con el fin de expresarlo como un sistema de ecuaciones diferenciales, de manera que sea posible realizar un análisis cualitativo clásico, del que extraeremos información acerca de las tendencias en el crecimiento de las variables de interés y, en definitiva, de su comportamiento a largo plazo.

CAPÍTULO 1
El modelo del Sur de Tenerife.

En este primer capítulo llevaremos a cabo la tarea de la construcción de un Modelo con el que se pretende simular el desarrollo económico que ha tenido lugar en el Sur de Tenerife como consecuencia de la llegada del fenómeno turístico. Comenzaremos describiendo las condiciones generales del sistema socioeconómico, que justifican la elección de las ecuaciones matemáticas que lo describen.

1.1. Introducción. Descripción General del Sistema

A partir de la década de los sesenta comienzan a producirse fuertes transformaciones en la estructura económica del Archipiélago Canario, que tuvieron repercusiones en los aspectos sociales, demográficos y territoriales. Dichas transformaciones se originaron por la irrupción del fenómeno turístico, que en pocos años se consolidó como actividad económica predominante, hasta llegar a representar en 1991 algo más del 76% del P.I.B. total canario (según datos del BBV)

Si bien es conocido que ya desde los siglos XVI y XVII Canarias era frecuentada por comerciantes, no podemos hablar de fenómeno turístico hasta bien entrado el siglo XIX, cuando las islas comenzaron a adquirir cierta fama como balneario entre aquellos visitantes que encontraban en la bondad de su clima el entorno ideal para recuperarse de sus dolencias.

Se entendería así el turismo de salud, por vía marítima, como pionero del actual modelo turístico, contando a principios de siglo con un promedio de 5000 visitantes por año. Más adelante, a finales de los años 50, la irrupción del turismo por vía aérea abre una nueva vía de su desarrollo, dando pie a la instauración del turismo de masas. Pero ese impulso en la actividad turística no sólo fue apreciado en las islas Canarias. Durante los años 60 y principio de los 70 el turismo conoció un crecimiento espectacular a nivel mundial. En palabras de M.Figuerola (1985)[a], "*es un hecho comprobable (...) que la causa desencadenante del turismo de masas fue el aumento de las rentas*". Junto a ese hecho influyeron también la duración del tiempo libre, un interés creciente hacia la cultura, o el deseo de conocer y explorar, haciendo que la actividad turística se impusiera con más facilidad frente a otro tipo de actividades.

En el caso de la isla de Tenerife la actividad turística se implantó inicialmente en la zona Norte, principalmente en el Puerto de la Cruz y con menor intensidad en Bajamar, que, en poco tiempo perdió cuota de mercado. Sin embargo, en el Puerto de la Cruz se observó un desarrollo espacial espectacular cuyo ritmo fue disminuyendo a medida que se acercaba su saturación, en la década de los setenta.

En aquellos años, la zona Sur de la isla no parecía mostrar atisbos de crecimiento económico próximo. Más bien al contrario, durante toda la primera mitad de siglo los municipios de la zona se habían caracterizado por una fuerte emigración generada por los escasos recursos de la comarca, que, unida al enorme crecimiento vegetativo con altas tasas de natalidad y progresiva disminución de las tasas de mortalidad, hacía equilibrar los niveles de población.

A partir de los años 50 se produce un cambio cualitativo en la economía de la comarca, marcado por la finalización del Canal del Sur (Martín, 1991), gracias al cual se produjeron trasvases de agua a los municipios sureños que permitieron un gran avance en el modo de explotación agrícola. En esos años la emigración se vio frenada gracias a las posibilidades de empleo que ofrecía la agricultura de exportación, y los municipios de la comarca se convirtieron en inmigratorios.

Pero el verdadero impulsor del despegue económico de la comarca lo constituyó la explotación del turismo como fenómeno de masas, cuya instauración fue posible en aquellos momentos, pues la saturación del destino norteño forzaba la búsqueda de nuevos espacios de expansión turística. La conjunción de factores de tipo climático y morfológico, o económicos, en relación a la disponibilidad de la tierra en un primer momento, junto a la creación de la autopista del sur en 1971 y el aeropuerto Reina Sofía en 1978, propiciaron el desarrollo de la zona sur como polo turístico de interés, que, si bien no desbancó por completo a la zona Norte, sí que le restó importancia, a la vez que creó una clara diversificación en las características de los visitantes, como se desprende del análisis estadístico de los datos disponibles (Ramos, 1999).

Como consecuencia de dicho desarrollo se produjeron cambios notables en la configuración espacial de la comarca. De hecho, no es difícil encontrar unanimidad en la opinión de los autores al afirmar que el turismo ha sido el responsable de la más intensa transformación que se ha producido en el espacio canario a lo largo de su historia (v. Machado ,1990, p.33)

El desarrollo de la actividad turística se encamina en su fin último hacia la oferta de un determinado servicio, pero entre tanto arrastra otro tipo de actividades dirigidas a poder sostenerlo y, por tanto, se ven implicadas en todo el proceso: la edificación, creación de infraestructuras y equipamientos, e incluso los trasvases poblacionales de las zonas rurales a las turísticas para cubrir los puestos de trabajo. Todo ello ha significado un cambio radical, progresivo pero vertiginoso a la vez, en la ocupación del territorio: construcciones de hoteles y apartamentos, urbanizaciones, zonas de servicios y ocio..., que establecen una clarísima conexión entre el sector turístico y el sector de la construcción. Tras el rápido aumento sucedido en la demanda turística y, por ende, en la oferta, el turismo pasó a convertirse en la excusa ideal para crear en torno a él todo un negocio inmobiliario, como queda claro en la bibliografía, posibilitando la acumulación de capitales a partir de la especulación del suelo, propiciada precisamente por un incremento repentino en la demanda de suelo urbano, cuya extensión resultaba a todas luces insuficiente para satisfacer las ambiciosas expectativas de crecimiento turístico.

Los inversores, nacionales o extranjeros, adquirían terrenos rústicos a muy bajos precios, para promover a continuación su recalificación, tras lo cual se producía una fuerte revalorización de los terrenos y con ello grandes beneficios. Este proceso especulativo consiguió elevar el valor del suelo y con ello el coste de la explotación turística, los precios de la vivienda en general y el coste de la vida, afectando por tanto a toda la economía insular. Además, la onda expansiva creada por la especulación inmobiliaria consiguiente alcanzó el campo de la construcción, donde se produjo un aumento de las posibilidades de empleo para aquellas personas con un bajo nivel de cualificación. Todo lo anterior trata de describir cómo el fenómeno turístico incide sobre los sectores terciario y de construcción, que son los que proporcionan dinamismo a la economía sureña. (No en vano, en 1991 los servicios y la construcción aportaban conjuntamente a Tenerife el 86% de su PIB).

Pese a lo delicado de la situación isleña, el desarrollo turístico no se ha llevado a cabo de una forma correcta, como coinciden en señalar la totalidad de los autores que han analizado el tema; por el contrario, ha supuesto un impedimento en el desarrollo de actividades paralelas (Barber y Artiles, 1978). En efecto, si continuamos en el aspecto territorial, no cabe duda que la ocupación del suelo para uso turístico se ha llevado a cabo indiscriminadamente y de una manera totalmente desordenada.

El aumento en la llegada de turistas precisó la creación de planes de ordenación territorial que posibilitaran una racional explotación de la isla. Sin embargo, y hasta el momento, tales planes no parecen haber cumplido dichos fines, más bien al contrario, se produjo una situación en la que cada municipio actuaba según su propia política (Santana, 1992). Como consecuencia de lo anterior deviene una degradación del paisaje isleño, el cual constituye un factor de atracción importante para la gran mayoría de los turistas que nos visitan, tal y como demuestran algunos estudios en las preferencias de los turistas (Ramos, 1999), así como una alta densidad en las zonas turísticas, que redunda en una peor calidad de la oferta y, en última instancia, en una posible disminución de la demanda futura.

Tanto las características socioeconómicas existentes en la zona anteriores a la implantación del turismo como las posteriores son definitorias de un tipo concreto de fenómeno turístico: el llamado "turismo de masas"

La implantación del turismo de masas requiere un marco físico y económico adecuados. El escenario físico ofrece al turista potencial atractivos de tipo climático (sol y playa) y paisajístico (marco ecológico virgen). Entre las características económicas que propician el desarrollo de la oferta turística se cuentan una situación de marginalidad regional, existencia de mano de obra abundante y barata, grandes superficies de terreno disponibles y a bajo costo, y medidas liberalizadoras por parte de una Administración ávida de innovaciones que facilitan las inversiones extranjeras al sector (López, 1984).

Todas las condiciones anteriormente mencionadas se dieron en el caso de la zona sur de la isla, así como las posteriores consecuencias, también comunes al desarrollo del fenómeno, entre las que destacamos:

- Un rápido movimiento urbanizador, generador de gran número de empleos en el sector de la construcción, unido irremediablemente a un fenómeno especulativo cuyas dimensiones varían y, en muchos casos, caracterizado también por la ausencia de planificación urbana, lo que motiva a la larga claras deficiencias en infraestructura y equipamientos adecuados.

- Existencia de graves desajustes poblacionales, fruto del crecimiento desordenado de los núcleos y del creciente monto de turistas, provocando la creación de pueblos-dormitorio, en la cercanía de los núcleos turísticos.

- Inmigración predominantemente de baja cualificación para cubrir los puestos creados en construcción, hostelería y restauración.

- Desarrollo de actividades económicas generadoras de capitales que, en ocasiones, lejos de tirar de la estructura económica local, actúa de freno para el desarrollo de actividades alternativas.

1.2. El Modelo de Desarrollo del Sur (MDS): Marco Teórico

Tras haber analizado los factores determinantes en los cambios acaecidos en la zona Sur de la isla de Tenerife, nos disponemos a continuación a construir un primer modelo explicativo de su actividad económica. Para ello, con miras a asentarlo sobre bases sólidas, contenidas en un marco teórico fundamentado, será necesario emplear las ideas extraídas de la extensa bibliografía que analiza diversos aspectos económicos canarios, para concretar un conjunto de variables y relaciones, las cuales serán siempre justificadas en su contexto.

Y habiendo quedado suficientemente claro, a raíz de lo expuesto, que el desencadenante de tal actividad ha sido el turismo, comenzaremos a desenredar el entramado del modelo tirando de las características de su dinámica.

El fenómeno del turismo ha evolucionado a lo largo de la historia para pasar de ser un privilegio de las clases sociales más altas a ser disfrutado por una parte importante de la población. Sin embargo, el estudio del origen y las causas del turismo no podría llevarse a cabo sin tener en cuenta consideraciones de tipo social, político, ecológico, geográfico y, por supuesto, económico: se trata sin duda de una actividad que atrae la atención de especialistas de múltiples campos.

En concreto, el carácter económico que se reconoce en el turismo justifica la incidencia en él de las variables más importantes que condicionan una economía. Pero el turismo también es una actividad social, por lo que cualquier estudio tendrá que tener en cuenta ambas componentes.

En la cuantificación del desarrollo turístico caben dos puntos de vista: el enfoque de la demanda y el de la oferta.

1.2.1. La demanda turística.

En el estudio de la actividad turística la pauta predominante consiste en realizar un análisis desde el punto de vista de la demanda (Figuerola 1985[b], Espasa y otros 1990, Buisán 1995). Con un fuerte carácter estacional, y afectada también por aspectos coyunturales como *la moda*, la demanda turística experimenta en ocasiones un crecimiento exagerado concentrado en zonas determinadas, lo que provoca la saturación o congestión de los destinos. Para corregir esos desequilibrios se producen movimientos adaptativos de la oferta, así como la estimulación del turismo en temporadas bajas.

Los objetivos de los distintos trabajos realizados son de variada naturaleza (Esteban y Reinares, 1996), aunque se pueden englobar en dos categorías: los *estudios de mercado*, investigaciones que describen el comportamiento de la demanda, así como las características, pautas de conducta y grado de satisfacción de los turistas; y, por otro lado, la *previsión*, tal vez más atractiva debido al interés que despierta la predicción del futuro. Las técnicas econométricas han sido aplicadas a la demanda turística desde que se despertó el interés por su análisis, sobre todo por las herramientas que aporta su método científico (Alcaide 1964), de cara al tratamiento y verificación de modelos estructurales. Con el tiempo, como señalan Esteban y Figuerola (1984), la utilización de modelos econométricos para la previsión de la demanda turística ha demostrado su adecuación, sobre todo a medio plazo. En dichos modelos las variables elegidas para cuantificar la demanda turística agrupan tanto el "número de visitantes", "número de pernoctaciones" o también, en algunos estudios, "ingresos en concepto de turismo". Las variables relacionadas y candidatas a explicativas se cuentan de entre las de tipo económico, social, político o incluso psicológico (Esteban y Figuerola, 1984), aunque las más utilizadas son las primeras, como "nivel de renta", "tipo de cambio" o "nivel de precios" y, en alguna ocasión (Espasa y otros, 1990), una tendencia lineal que recoge la evolución producida en la oferta turística.

Sin embargo en la isla de Tenerife se presentan ciertas características propias: Por un lado, la bondad del clima en la isla a lo largo de todo el año permite prolongar la temporada turística (Sabaté y Núñez, 1985), eliminando así el factor de estacionalidad. De otra parte, la dependencia de agentes externos, entre los que destacan los operadores turísticos, compañías hoteleras, o la inversión extranjera (Santana, 1992), y la fidelidad que suscita el destino (González Rodríguez, 1998), deberían demostrar su influencia en la dinámica de la demanda cuando fueran incluidas en la modelización.

1.2.2. La oferta turística.

En el otro lado del análisis encontramos la oferta turística, que, entendida en su sentido más amplio (Cruz, 1985), podría agrupar los siguientes conceptos:

- Patrimonio turístico: integrado por los atractivos naturales de las islas, su cultura y su historia.
- Alojamiento: hoteles, apartamentos, bungalows…
- Infraestructura: carreteras, aeropuertos, transportes y comunicaciones en general.
- Servicios complementarios: alimentación, ocio, sanidad y centros comerciales.

Tener en cuenta todos estos sectores complicaría en exceso el estudio de la oferta turística, de forma que nosotros la entenderemos únicamente como el "número de plazas turísticas (camas) disponibles", *OF*, pues asumimos que es la definición más próxima a los conceptos económicos de oferta y demanda.

La principal característica de la oferta así valorada es su rigidez (Figuerola, 1985[b]); debido a las fuertes inversiones que precisan y la duración de las construcciones, cuando la oferta es insuficiente, y a la difícil reconversión inmediata y a su imposibilidad de almacenaje, cuando es excesiva. Todo ello imposibilita obtener una respuesta rápida de la oferta ante las variaciones que se producen en la demanda, de dinámica más flexible, ya que el equipamiento turístico no puede modificarse tan fácilmente.

Por otra parte, el crecimiento desordenado y no programado de la oferta puede conducir a la infrautilización de importantes inversiones y a graves pérdidas provocadas por el mantenimiento de los altos costes fijos (Bull, 1994), pese a la presencia de cierto grado de desocupación. Todo ello puede desencadenar períodos de crisis que afecten al buen desarrollo de la actividad turística, como ha sucedido de hecho en la zona que estamos analizando.

A mediados de la década de los ochenta se produjo un aumento en el número de visitantes que recibía Canarias y, en particular, en el Sur de Tenerife, que ha sido calificado por algunos autores de excepcional. Distintos factores coadyuvaron a este boom: la favorable coyuntura de la economía europea, la proliferación de líneas "charter" dentro del transporte aéreo, la activa intervención de los agentes tour-operadores, o la situación política adversa de destinos potencialmente competitivos.

En este escenario se crearon expectativas demasiado optimistas de evolución futura, ante lo cual la oferta reaccionó rápidamente, aumentando de un modo desproporcionado en pocos años. Ello fue posible gracias al sistema de financiación bancario, que atendió más al aspecto inmobiliario de la actividad turística que al de la viabilidad de los proyectos, y a las inversiones extranjeras en el sector, que en aquellos años alcanzaron cifras considerables (Becerra y Navarro, 1992).

La intensidad de la respuesta en la oferta y el carácter no planificado de la misma tuvieron serias repercusiones en el desarrollo de la actividad turística, pues generó un desequilibrio entre la oferta y la demanda que forzó una disminución en los precios con la consecuente reducción en la rentabilidad económica de las explotaciones. Esta caída de precios permitió la recuperación momentánea del sector, mas lo fue introduciendo en un círculo vicioso que exigía un elevado nivel de ocupación para mantener la rentabilidad, por lo que se hacía necesario disminuir los precios, lo cual una vez más, incrementaba los niveles de ocupación mínimos.

Todo ello desencadenó en el modelo turístico conocido como turismo de masas, de bajo poder adquisitivo, que contrata sus vacaciones a través de agentes tour-operadores (se estima que, en 1994, el 95% de la contratación de plazas se realizaba por este medio, según los estudios realizados por el Cabildo de Tenerife, 1995) y generalmente, con baja cultura medioambiental, lo cual redunda en la aceleración de la degradación del paisaje, dificultando con ello el avance de otros segmentos de mercado.

En lo que se refiere a la modelización de la oferta turística hemos encontrado bien poco en la bibliografía, pues la mayoría de las investigaciones turísticas se dirigen, como ya mencionamos anteriormente, hacia temas relacionados con la demanda: la recopilación de modelos que presenta Figuerola (1985)[b] o el trabajo de Esteban y Reinares (1996) es prueba de ello. Uno de los pocos intentos en esa dirección lo podemos encontrar en el texto de Figuerola. Se trata de un modelo de previsión de plazas turísticas, propuesto por Labeau, en el que se obtiene el número de plazas precisas en función del grado de ocupación y de la estimación de las pernoctaciones diarias, realizadas a partir de la previsión de la demanda. En definitiva, este modelo explicaría la evolución de las plazas turísticas como consecuencia de las expectativas en este último flujo, incapaz de recoger las restantes influencias que se reconocen en lo sucedido en el Sur.

En cualquier caso, atendiendo a todo lo expuesto, se puede concretar el siguiente diagrama de Forrester[1] para la variable Oferta Turística, en el que se pretende reflejar la importancia de los agentes externos (tour-operadores, inversores o la propia demanda) en la creación de plazas turísticas, siempre teniendo en cuenta la existencia de un límite máximo (L) al número de plazas que permite albergar el entorno:

---

[1] Ver apéndice.

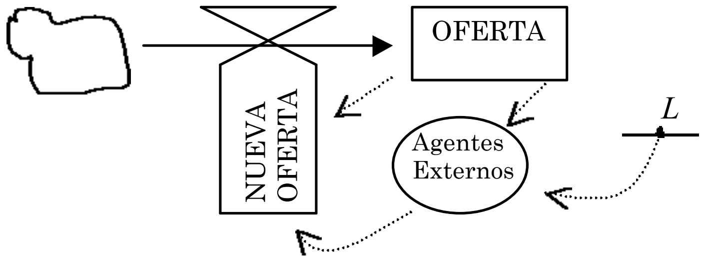


Gráfico 1. Diagrama de Forrester de la Oferta Turística

1.2.3. El Suelo Urbano.

Otro de los aspectos más representativos de la realidad comarcal es el espacio físico o territorio (que cuantificaremos en la variable Suelo Urbano, *SU*), el cual está empezando a adquirir la relevancia que merece en los estudios económicos, pues se muestra como un recurso imprescindible para el desarrollo de las actividades económicas y, en especial, constituye un input esencial del producto turístico. Así lo constataba también Seco (1985) al apuntar que "*una de las características más evidentes del fenómeno turístico es su consumo de territorio*". Un recurso que en el caso de las islas Canarias es limitado, (y cada vez más) escaso, y como tal necesita de una gestión consciente, reguladora y específica, pues afecta directamente a la capacidad de carga de la zona. Acudiremos una vez más a una cita, en este caso de A. Machado (1990), que nos parece sumamente expresiva: "*Canarias no puede ser homologada a un territorio cualquiera. Desarrollar en Canarias es como jugar a la pelota en una tienda de porcelana*" (p.30).

Además, ya ha quedado patente en párrafos anteriores la relación bidireccional existente en el binomio turismo-construcción, pues el aumento del primero es quien impulsa la construcción (se calcula que entre el 50-75% del sector constructivo e inmobiliario se ha vinculado, en la última década, al efecto de arrastre del sector turístico, según un estudio realizado para la Consejería de

Turismo y Transporte[2]), y éste a su vez se considera como motor fundamental de la actividad turística (Santana, 1992), con lo que se crea un bucle de realimentación, entendible también a través de los multiplicadores del turismo (Bull, 1994).

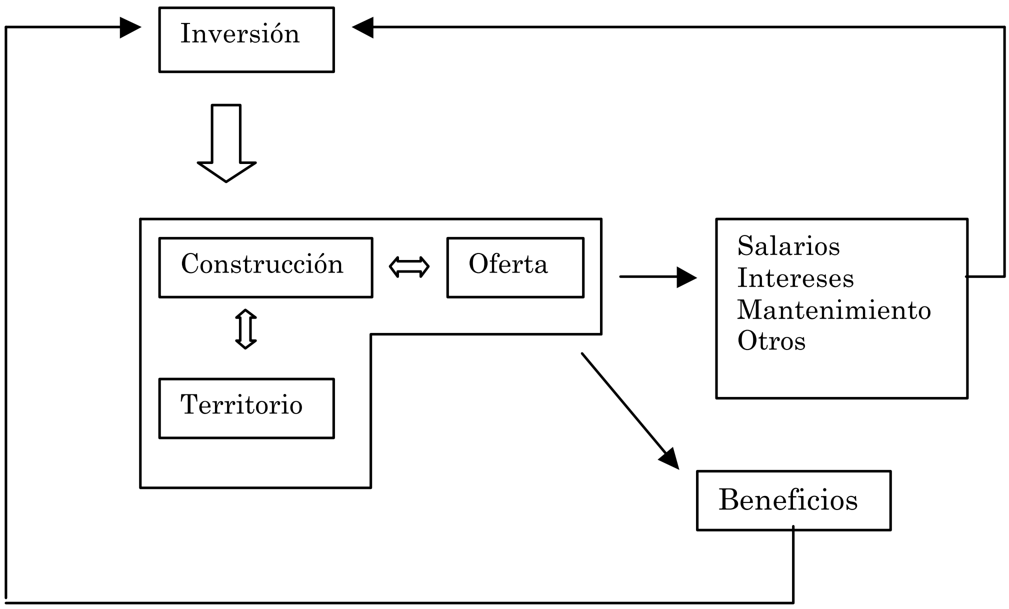


Gráfico 2. El efecto multiplicador

Los multiplicadores del turismo han sido desarrollados durante algunos años basándose sobre todo en principios keynesianos de la recirculación de una proporción de ingresos por receptores en el gasto de consumo, que crea posteriores ingresos y empleo. Básicamente, y aplicado al submodelo urbanización, la idea explica cómo una inversión de capital en el sector de la construcción tiene consecuencias en el territorio y en el incremento de la oferta turística. De este último lado, se producirán por parte de las empresas turísticas beneficios, que en buena proporción serán reinvertidos en el sector, y también una serie de gastos (salarios, intereses, mantenimiento de la calidad, etc.), cuyos receptores (particulares, compañías de luz, agua, teléfono, grandes distribuidores) pueden a su vez invertir de igual forma en la industria turística, creando con ello un aumento

---

[2] Libro Blanco del turismo canario, p.71.

de los ingresos inducidos. Sin entrar en mayores consideraciones referentes al valor numérico de dicho multiplicador, el proceso descrito, que aparece recogido en el gráfico 2, nos ayuda a comprender el entresijo de relaciones que subyace en torno a la urbanización del territorio.

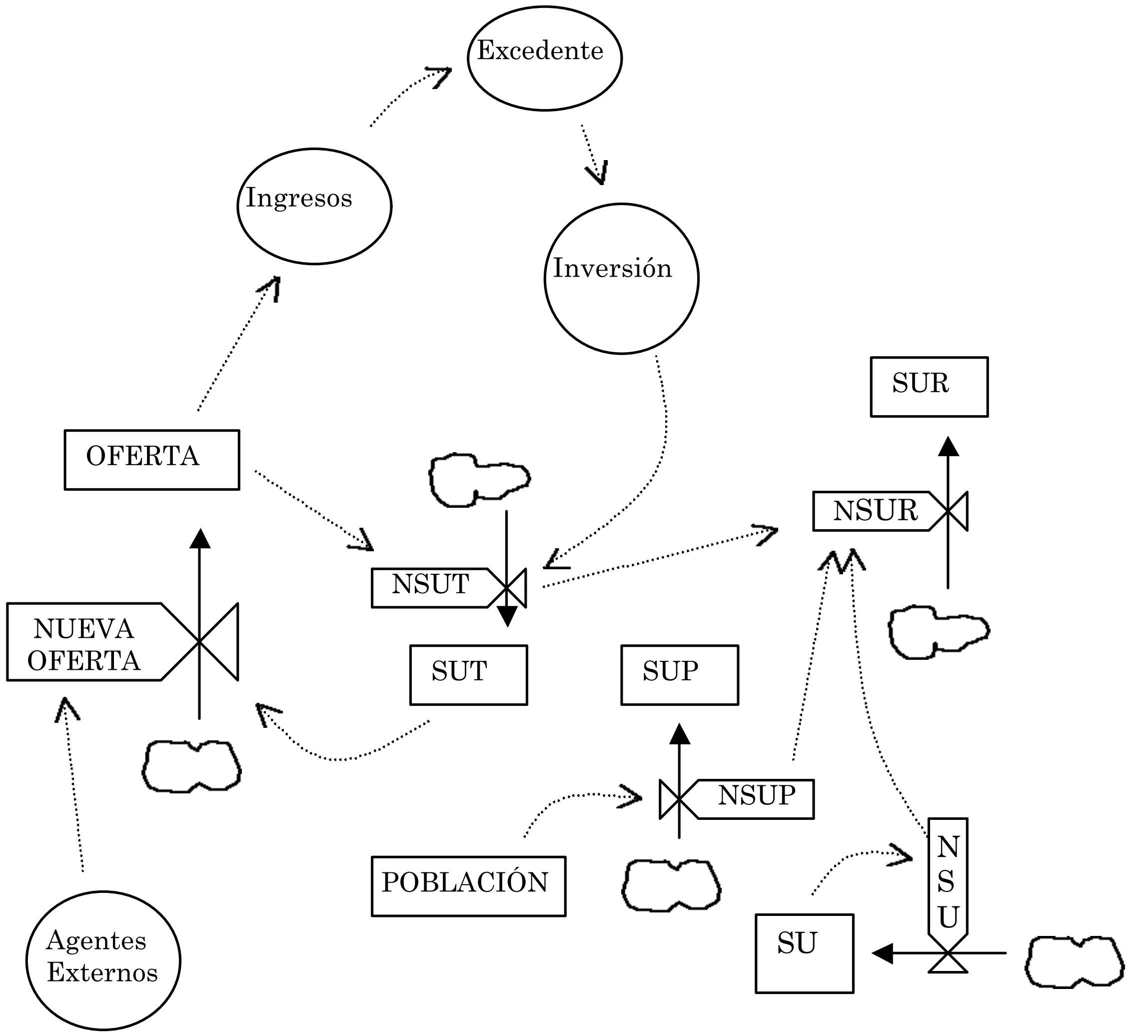


Gráfico 3. Diagrama del Suelo Urbano

A tenor de lo comentado anteriormente, podemos afirmar que una parte fundamental de la variación del *SU* se debe a la creación de infraestructuras dedicadas a la actividad turística, que llamaremos Suelo Urbano para el Turismo, *SUT*. Sin olvidar que la propia población autóctona, en su crecimiento, demanda creación de nuevas zonas residenciales, escolares, de servicios, etc., con lo que también influye en el aumento del *SU* en una cantidad que denotaremos por *SUP* (Suelo Urbano para la Población). Por otra parte, ambas especies urbanas coexisten en el Sur con una gran cantidad de construcciones no dedicadas al turismo, sino a la población tinerfeña en general. Constituyen segundas viviendas de residentes de otros municipios, que se trasladan a la zona en fines de semana o épocas vacacionales. Su participación en el *SU* quedará recogida en la variable Suelo Urbano para las segundas residencias (*SUR*).

Entonces, cada una de esas variables se incrementará con los respectivos flujos que generan nuevo suelo para uso turístico, de población o de segundas residencias (*NSUT*, *NSUP*, *NSUR*). Ello, junto con las relaciones que se desvelan en el gráfico 2, nos permite ilustrar, a través del diagrama que se recoge en el gráfico 3, las relaciones en que interviene la variable *SU*, las cuales dependerán de las presiones ejercidas por los usuarios del suelo (Oferta-Población) así como de las inversiones que se realicen.

1.2.4. La Población.

Si continuamos explorando el sistema llegaremos, sin ningún lugar a dudas, a la conclusión de que una de las variables de nivel de mayor relevancia es la Población *(P)*. Es una variable afectada en gran medida por la irrupción del fenómeno turístico, que concitó la creación de empleo, el aumento de las migraciones y, con ello, el crecimiento demográfico.

En la modelización de la Población se pueden distinguir al menos dos tipos de métodos. Por un lado se encuentran los métodos de extrapolación, según los cuales la evolución de la población de un área se puede explicar a partir del conocimiento de sus valores pasados. Dentro de este tipo de métodos encontramos distintas variantes, atendiendo a las hipótesis que se realicen acerca del modo de crecimiento de los niveles poblacionales. Algunos de ellos serían:

- El modelo lineal, que supone que los incrementos de población son constantes y aproximadamente iguales año tras año, esto es, la variable población evoluciona como una línea recta. Matemáticamente, expresable en la forma: $P_t = P_0 + ct$

- El modelo exponencial, considera por el contrario que la población crece con una razón geométrica, según la expresión $P_t = P_0(1+r)^t$, de forma que los incrementos son cada vez mayores. Gráficamente, la variable evolucionaría como una curva exponencial, lo cual indica que este patrón no puede permanecer válido a largo plazo.

- El modelo logístico, más realista, elimina los efectos de un crecimiento exponencial mediante la consideración de un límite o población máxima al que la variable se acercará indefinidamente sin llegar a sobrepasarla. En su evolución, la función logística presenta un crecimiento rápido hasta llegar a un punto de inflexión, a partir del cual se produce una reducción del ritmo de crecimiento. La expresión matemática de dicha función es $P_t = \dfrac{P_{max}}{1+e^{-r(t-t_0)}}$.

Los métodos anteriores presentan una estructura causal bastante simple, pues solamente consideran como causantes de la evolución de la población de un área el pasado de la propia serie. Es este detalle el que favorece la sencillez de su aplicación, a costa, por otra parte, de no tener en cuenta los distintos componentes que influyen en su evolución, como sucedería en los métodos de componentes.

En efecto, en la dinámica demográfica, las causas del cambio poblacional son el aumento natural o crecimiento vegetativo y el saldo migratorio o, expresado en otros términos, el nivel de población se llena con los nacimientos e inmigraciones y se vacía con las muertes y emigraciones.

Cuando la modelización se realiza con fines predictivos (proyecciones) es el método de los componentes el más utilizado, pues permite desglosar la población según tantas características como se desee, normalmente sexo y edad, a la vez que determina la evolución de cada componente por separado.

De hecho, el procedimiento consiste en realizar proyecciones de cada componente independientemente, dados los datos de partida, y combinarlos a continuación para obtener la proyección de población deseada (Krueckeberg y Silvers, 1978, cap. 8).

Puesto que hemos elegido la técnica DS para ayudarnos en la etapa de conceptualización del modelo, habremos de decantarnos por el método de componentes para explicar la evolución de la población, pues aporta mayor información sobre la causalidad de la variable que los métodos de extrapolación. No obstante, debemos matizar que nuestro objetivo no es tanto realizar una proyección de población (aunque podamos obtenerla al final del estudio) sino explicar su evolución a partir de otras variables e introducir todo ello en un modelo más amplio.

En definitiva, teniendo en cuenta la estructura causal descrita, podemos establecer para la población el siguiente diagrama de flujo:

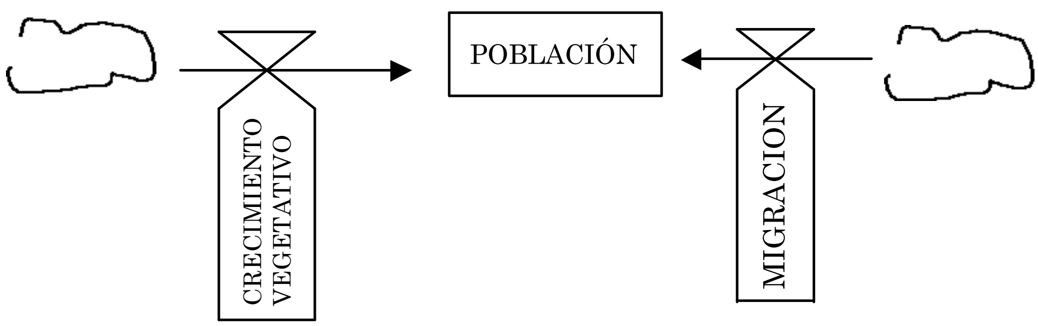


Gráfico 4. Diagrama de Población

Para modelizar el crecimiento vegetativo podemos elegir entre varias alternativas. La más sencilla de todas consiste en establecer que el crecimiento vegetativo será una proporción constante de la población, recogida dicha proporción en la tasa de crecimiento vegetativo, *TCV*.

Esta sencillez en formulación viene acompañada por aceptar la fuerte hipótesis de que la tasa permanece constante a lo largo del tiempo, sobre todo cuando es constatable su decrecimiento reciente. Además, considerar la tasa constante equivale a no tener en cuenta otros aspectos importantes que influyen sobre el crecimiento vegetativo, incluida la renta. Este factor se puede introducir en la ecuación como multiplicador, que expresa la relación existente entre la renta y el TCV, y se podría llamar, siguiendo a Pérez Ríos (1989), *efecto de la renta sobre la tasa de crecimiento vegetativo*.

Sin embargo, la introducción de esta nueva variable no contrarresta totalmente el efecto constante de la tasa *TCV*, de forma que la consideración de esta opción puede conducir a resultados simulados para la población afectados de una fuerte inflación (González Rodríguez, 1993).

Así pues, la única opción posible consiste en considerar la tasa *TCV* variable, con lo que se completaría el diagrama anterior de la siguiente manera:

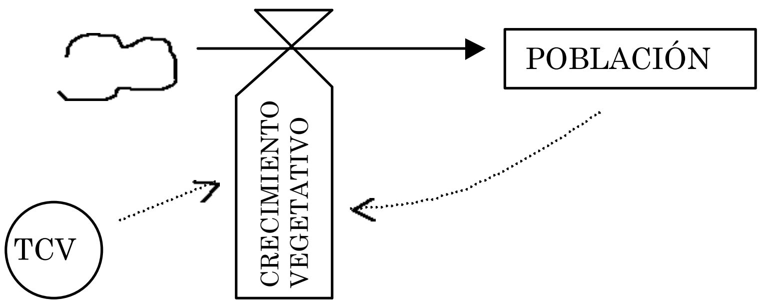


Gráfico 5. Diagrama de Crecimiento Vegetativo

1.2.5. Los Movimientos Migratorios.

El fenómeno migratorio, considerado por algunos autores más como un proceso que como un fenómeno demográfico, constituye un tema lleno de dificultades para la demografía.

A pesar de que ya había despertado interés social desde finales del s. XIX, no se le había atribuido la relevancia que merece, concentrándose las investigaciones demográficas en torno a los fenómenos de mortalidad y fecundidad.

Sólo ha sido a partir de la década de los setenta, con la disminución del crecimiento natural y el interés surgido por el análisis regional y la microdemografía, cuando los problemas migratorios han cobrado protagonismo, tanto para los demógrafos como para los organismos responsables de realización de estadísticas.

Sin embargo, ese tardío interés hacia el tema ha provocado que las técnicas de medición y análisis existentes se encuentren menos desarrolladas que las correspondientes a otros fenómenos demográficos. Afortunadamente, en los últimos años se está planteando una gran renovación metodológica en el tratamiento del fenómeno (Vinuesa y otros,1994).

En el caso que nos ocupa, los movimientos migratorios desempeñan un papel primordial en la dinámica demográfica de la zona en estudio. La relevancia que sin duda tiene este fenómeno, junto a las dificultades que le acompañan convierte en un tema especialmente delicado la modelización de la variable Migración, tanto en su relación con otras variables como en la disponibilidad de datos.

Algunos análisis realizados de cara a explicar los movimientos migratorios han conducido a la definición de diferentes modelos.

Los *modelos espaciales* de migración han sido ampliamente estudiados desde su inicio con los modelos de gravedad, cuya idea fundamental, heredada del concepto físico, cabe expresar como sigue: *Las corrientes migratorias entre dos zonas son directamente proporcionales a las poblaciones de ambas zonas e inversamente proporcional a la distancia que las separa,* $M_{ij} = KP_iP_jd_{ij}^b \quad b<0$.

La formulación matemática de dichos modelos es no lineal, de escasa dificultad de cara a su aplicación, puesto que se puede linealizar mediante una transformación logarítmica. El inconveniente principal que nos disuade de su aplicación es la necesidad de considerar las migraciones desagregadas por zonas de origen-destino, lo cual complicaría demasiado el modelo conjunto del Sur.

Los *modelos demográficos* surgieron tras ser descubiertas ciertas regularidades en las distribuciones por edad de las tasas de migración, relacionadas también con el ciclo de vida de la familia (Zamora, 1993): Los niños y adolescentes (0-16) sólo entran a formar parte en un movimiento migratorio si lo hacen sus padres; por su parte, los jóvenes y adultos (16-35) trasladan su residencia por razones de estudio, trabajo o matrimonio, principalmente, mientras que los mayores (60 en adelante) lo hacen a causa de su retiro laboral o en busca de mejores condiciones de vida (tranquilidad, buen clima, etc).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, uno de los modelos más sencillos que se pueden formular contiene 7 parámetros :

$$m_x = a_1 e^{-ax} + a_2 e^{-b(x-m)-e^{-l(x-d)}} + C$$

donde m_x indica la tasa de migración para la edad x. Este modelo se puede describir como suma de tres funciones, la primera de las cuales describe las tasas migratorias por edad del componente dependiente (menores de edad). La segunda parte describe el componente laboral y matrimonial, mientras que la tercera función, constante, marca el mínimo de las tasas migratorias por edad (Vinuesa y otros, 1994; Recaño, 1993).

Como se puede apreciar, el tercer componente descrito arriba no se ha introducido en la anterior expresión. En modelos más complejos donde aparece un máximo en torno a la edad de jubilación, el conjunto de parámetros se eleva a once.

Pero aun si nos quedamos con el modelo descrito, tenemos un grave problema no sólo por el número de parámetros existentes sino por el alto grado de no linealidad que presenta la ecuación, circunstancia que eleva la complejidad de la cuestión hasta límites que desbordan el objetivo de este trabajo. Dejaremos, pues, a un lado los modelos demográficos, al menos en esta ocasión.

Otro tipo de modelos, que podrían denominarse *modelos causales,* surgen tras el análisis de la estructura causal en la que se mueve la variable Migración.

En esta dirección se pueden citar los resultados de la investigación de González Pérez, (1991)[a] y (1991)[b] en los que analiza las motivaciones económicas de los individuos hacia la movilidad, para concluir que los flujos migratorios netos dependen de las desviaciones de las tasas de desempleo de las regiones respecto de la tasa media de desempleo nacional, junto con los flujos migratorios del año anterior, que presenta un fuerte peso en la regresión estimada.

En la búsqueda de las causas de las migraciones algunos autores (Vinuesa y otros, 1994) hablan de una "tensión migratoria", que recoge las motivaciones, tanto de rechazo de un área como de atracción, que provocan el fenómeno. Simplificando el conjunto de posibles motivaciones en una sola, podríamos situar al Empleo como máximo responsable de las migraciones, cuestión en la que coinciden la totalidad de los autores consultados.

Así, basándose en lo anterior, pero teniendo en cuenta la inclinación a emigrar de no todas las personas desempleadas, Pérez Ríos (1989) considera la migración como una proporción de la población desempleada, que recoge a través de lo que llama "tasa de movilidad", definida a su vez como una tabla de datos, para dar lugar a diferencia de tendencias emigratorias según el nivel de paro de la población.

Algo parecido realiza Aracil (1986) en una primera modelización de la migración, cuando la hace depender de una variable llamada Tensión de Empleo *(TE)*, que representa la demanda de empleo no satisfecha por la población activa existente[3].

Mas, como quiera que estos movimientos no serán instantáneos, pues es lógico pensar que un trabajador es reacio a marcharse aunque no tenga empleo, dados los costes económicos y sociales que ello supone, pasará cierto tiempo entre el momento de quedarse desempleado y el momento de emigrar a otras zonas.

---

[3] Notar que si dicha variable toma un valor negativo, entonces indicaría la existencia de desempleo en la zona y se produciría la emigración

Además tampoco se percibirá de forma instantánea el signo de la Tensión de Empleo, y así la atracción que ejerce un área aumenta o disminuye con un cierto retardo respecto al aumento o disminución de la demanda de empleo. El propio Aracil modificó la relación introduciendo una nueva variable: la Tensión Efectiva de Empleo, que tiene en cuenta, además de la necesidad de emigrar, la existencia de cierto porcentaje de población que puede permanecer en la zona a pesar de estar desempleado, a través de lo que se llama "tasa de absorción de desempleo".

Otra posible modificación pasa por establecer una ecuación que delimite el retardo existente en la apreciación de la atracción de la zona, antes mencionado (Martínez y Requena, 1983), de forma que la migración sea función de la variable TE en el mismo instante y en uno o más instantes anteriores.

Todo lo comentado en párrafos anteriores contribuye a clarificar, a nuestro parecer de manera indiscutible, la estructura causal de la variable Migración *(MIG)*, que resumimos en el siguiente diagrama:

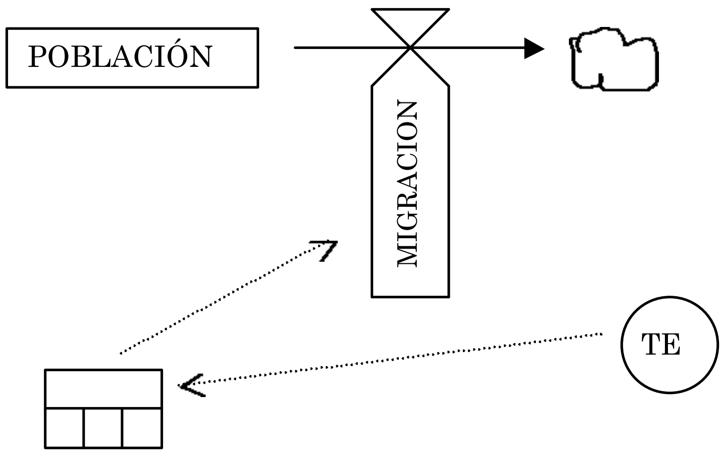


Gráfico 6. Diagrama de Migración

Y habiendo postulado que el Empleo es uno de los causantes de los movimientos migratorios, y reconociéndolo a la vez como una de las consecuencias del aumento de la actividad turística, entonces no queda ya ninguna duda de la necesidad de estudiar sus características.

1.2.6. El Empleo.

Dentro de la variable Empleo, *E*, pretendemos medir lo que se conoce en el mercado laboral como demanda de trabajo, esto es, el volumen de mano de obra requerida para el proceso productivo general. A la hora de cuantificar esta variable nos encontramos con la dificultad dada por la inexistencia de datos estadísticos que contemplen tal concepto. Algunos autores, ante estas circunstancias, han optado por tomar en sustitución los datos correspondientes a la Población Ocupada, esto es, el número de personas que se encuentran ocupando un empleo. Dicha variable se puede identificar con la demanda de trabajo a modo de aproximación (Cáceres, 1986; Toharia y Jimeno, 1994), sin que ello suponga incongruencia alguna con la realidad, puesto que la distinción entre ambas no queda siempre clara. Sin embargo, esta identificación resultaría perjudicial a todas luces para nuestro modelo, en el que hemos asumido como hipótesis básica que la existencia de empleo atrae migración, cuestión que será aclarada en el siguiente capítulo. Por consiguiente, es imprescindible establecer una distinción entre las dos cantidades, población que está ocupando un puesto de trabajo y número de puestos de trabajo que hay que cubrir, cantidad ésta última que será estimada utilizando una función de demanda.

El aspecto opuesto a la demanda de trabajo lo constituye la oferta de trabajo, integrada por todas las personas disponibles para la producción de bienes y servicios. Dicha variable viene contabilizada en la variable Población Activa, *PA*, cuyas series de datos se pueden obtener a partir de la EPA que (según Toharia y Jimeno, 1994) goza de una fiabilidad aceptable.

Para establecer las características de la demanda de trabajo en las islas Canarias (Cáceres, 1986) y en particular en la zona sur de la isla de Tenerife, habremos de estudiar qué factores influyen en ella.

Por un lado destacamos parámetros de tipo estructural, inherentes a la propia estructura económica del Archipiélago, como la limitación de recursos naturales y el tamaño del mercado, que imponen serias dificultades al crecimiento económico de la región, y por lo tanto a la creación de empleo, y la insularidad que, además de inflacionar los costes a través del transporte, concentran la distribución del empleo en las islas mayores.

Por otra parte, se encuentran los parámetros de tipo sectorial, que se originan a partir de las diferencias existentes entre los sectores de producción de la economía canaria. En concreto cabe destacar la terciarización de la actividad económica regional y la actividad del sector de la construcción.

No es desconocido el deterioro que ha venido sufriendo la agricultura desde la década de los sesenta, tanto a nivel nacional como canario. En las islas, la pérdida de peso relativo del sector primario se ha acompañado de un aumento de la participación del sector servicios en la economía, constatable tanto desde la óptica del producto interior bruto como del empleo. Así, se ha pasado de una economía con el sector primario como fuente mayoritaria de generación de empleo a otra en la que el predominio corresponde al sector servicios.

Podemos afirmar, pues, que la terciarización de la actividad económica regional (*TR*) junto con el proceso de desagrarización, son los dos fenómenos que mayor trascendencia han tenido en la estructura de la demanda de trabajo (Cáceres, 1986, p.102).

En lo que concierne a la oferta de trabajo, cabe mencionar la acepción dada por Armando Sáez (Cáceres, 1986, p.90) en la que considera que "*el volumen de la población activa, o sea del conjunto de personas disponibles para la producción de bienes y servicios, depende, como subpoblación que es de la total, del volumen de ésta y del comportamiento de sus miembros*".

Precisamente, el comportamiento de la población en lo que respecta a lo que se podría llamar "propensión a integrarse en la actividad", se recoge en la Tasa de Actividad, que se obtiene como cociente entre el monto de población activa y la población total.

A nivel nacional, la tasa de actividad ha mostrado una evolución no estrictamente creciente (Toharia y Jimeno, 1994), pues ha aumentado cuando la creación de empleo era significativa, mientras que en períodos de recesión económica se produce una disminución de la población activa, provocada posiblemente por un desánimo generalizado. Este escenario es característico del fenómeno de histéresis, de cuya existencia en el mercado de trabajo español hay suficiente evidencia (Jimeno, 1997).

Un desajuste entre la oferta y la demanda de trabajo puede crear una demanda excedentaria de trabajo, cuando la demanda de trabajo –*E*– es mayor que la oferta –*PA*–, o bien provocar desempleo cuando la diferencia se produce en el sentido opuesto. Ya nos hemos referido a la variable que mide dicho desajuste, conocida como Tensión de Empleo. Entonces, según lo expuesto hasta el momento, la hipótesis que explica buena parte del crecimiento demográfico en la zona se resume en considerar dicha variable con signo positivo, atrayendo, por tanto, fuerza de trabajo del exterior, si bien es verdad que lo anterior no implica la desaparición de paro en la comarca. Por el contrario, existe un (pequeño) contingente de población desempleada en la comarca, el cual se puede explicar en términos de "expectativas de empleo".

La tasa de paro, esto es, la proporción de la población activa que no tiene empleo, que se encuentra desde hace años entre las más altas de Europa, se suele utilizar para medir el "grado de éxito" en el mercado de trabajo. Sin embargo, hay que apuntar que el ya comentado fenómeno de histéresis puede provocar que una buena política de creación de empleo quede enmascarada por el subsiguiente aumento en la población activa, que no permitiría una disminución significativa en la tasa de paro. Además de la PA, otros factores que pueden influir en la tasa de paro son los salarios, precios o cambios tecnológicos (Jimeno, 1997), así como, en algunas condiciones, una desaceleración de la productividad (Andrés, 1994).

Muchos esfuerzos se han venido realizando de cara a la determinación de las causas del paro (y sus posibles soluciones). Desde un punto de vista econométrico, los modelos utilizados para analizar el mercado laboral introducen variables como salarios, precios, productividad, ... y no parecen haber conducido a conclusiones reveladoras (Jimeno, 1997, Andrés, 1994). En el caso canario, no hay mejores resultados, y los intentos de modelización econométrica, con las limitaciones lógicas debidas a la escasez y deficiencia de los datos, han finalizado con una tímida señal de precaución (Cáceres, 1986).

Desde el punto de vista de la Dinámica de Sistemas, los autores han considerado distintas opciones para introducir la variable Empleo en el modelo. Aracil (1986), en un modelo de dinámica urbana, introducía el Empleo como variable exógena que actuaba en el sistema por medio de una tabla de interpolación de datos. Pérez Ríos (1989) consideraba el Empleo como variable auxiliar, que quedaba determinada como una proporción del stock de capital, a través de cierto coeficiente que llamaba *coeficiente de capital-empleo* y que era susceptible de ser modificado, de cara a permitir la simulación de diferentes escenarios. Por otra parte, y en el entorno canario, podemos citar el trabajo realizado por Martínez y otros en el modelo CANAGUA, quienes establecieron para el Empleo en el sector Servicios una función de demanda del tipo de Cobb-Douglas dependiendo de la Población y el Turismo, que viene a recoger las principales características de la demanda de trabajo en Canarias.

Una vez repasadas tanto las características de oferta y demanda de trabajo como las distintas modelizaciones que encontramos en la literatura, sólo nos resta establecer el diagrama parcial.

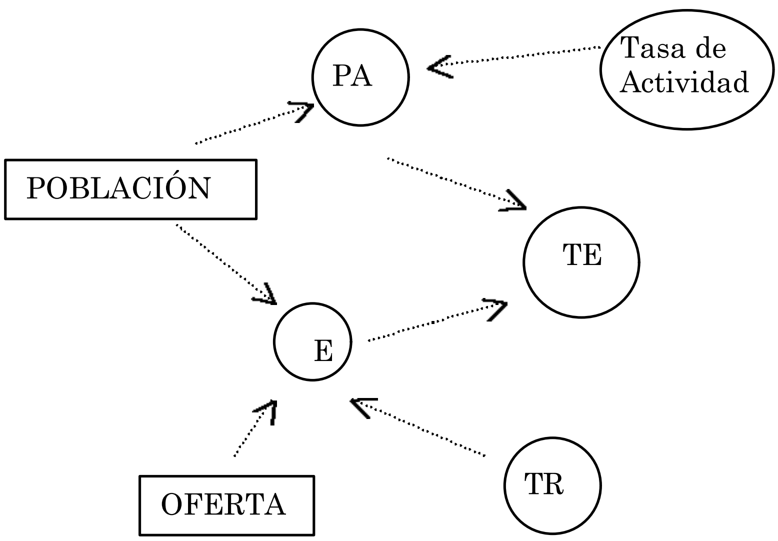


Gráfico 7. Diagrama del Empleo

1.2.7. La Renta.

La influencia positiva del turismo en un marco regional como el nuestro se deja sentir en dos aspectos primordiales relacionados con la población y su calidad de vida (Figuerola, 1985[b]): en lo social, al mejorar el nivel cultural y profesional de la población de la zona, y sobre todo, en lo económico, pues al aumentar la proporción de ocupados se producen, automáticamente, incrementos en el nivel de renta por habitante (Fina, 1997), uno de los indicadores de bienestar y nivel de vida más comúnmente utilizados.

El Turismo representa, además, la principal aportación a la economía insular (como ya se ha comentado, explica un 76% del PIB provincial). Como señala J.A Rodríguez (1985, p.243), "*la correlación entre turismo y crecimiento económico cuenta con suficiente evidencia y literatura como para insistir en su demostración*". Incluiremos en el modelo, como indicador del crecimiento económico experimentado en la región, la variable Renta-per-capita (Y), la cual también nos enfrenta a una difícil situación en términos de disponibilidad de datos, como comentaremos en el capítulo siguiente.

A pesar de dichas dificultades y contando con la existencia de relaciones de la Renta con otras variables que permitan explicar su evolución se conocen en la bibliografía dos premisas de interés. Por un lado, Gil (1985) recuerda lo que, según la autora, constituye uno de los principios más reiterados de la economía urbana: "*el índice de crecimiento económico de un país ya desarrollado, viene a ser aproximadamente igual a la tasa media de crecimiento de sus zonas urbanas*". Esta información ya fue utilizada por González Rodríguez (1993) para introducir la variable Renta en su modelo. Por otra parte, Andrés (1994) afirma que "*la evolución de la renta per capita de una economía depende de la conducta de la productividad, del paro y de la tasa de actividad*", lo que una vez más nos lleva a razonar que en un entorno turístico fuertemente generador de empleo se producirá un aumento en los niveles de renta.

En cualquier caso, por motivos metodológicos, consideraremos en esta primera pasada del modelo la variable Renta per capita disponible como una

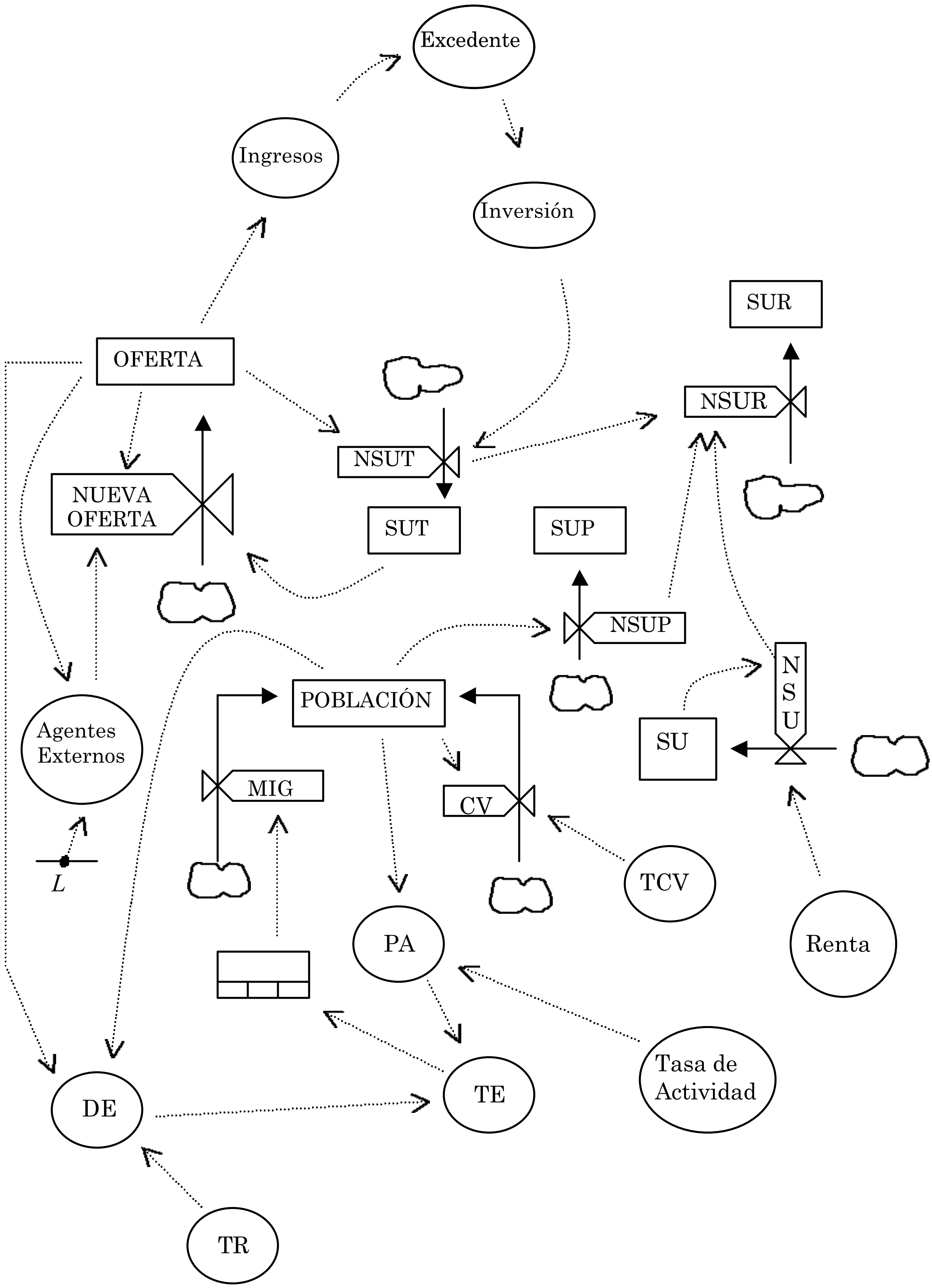


Gráfico 8. Diagrama de Forrester del Modelo MDS

variable exógena, aunque posteriormente será modelizada con ayuda de la teoría de curvas de crecimiento.

1.3. El Modelo de Desarrollo del Sur (MDS): Una Aproximación Empírica

En el apartado anterior realizamos una exposición pormenorizada de los hechos (constatados a través de la bibliografía) que condujeron a modificar el espacio físico y económico del Sur de Tenerife, y de las consecuencias de dichos cambios. Todo ello nos condujo a la construcción de un modelo teórico, cuya estructura queda reflejada claramente en el diagrama causal final (gráfico 8).

Sin embargo, en el empeño de llevar a la práctica el anterior modelo surgieron fuertes dificultades tales como:

- En general, todas las series de datos recopiladas (necesarias para contrastar la bondad del modelo) presentaban deficiencias, bien en calidad, bien en cantidad, o simplemente, en disponibilidad. En concreto, uno de los mayores inconvenientes se produjo en el estudio de la serie de población, que exigió un procedimiento de corrección, descrito en el capítulo siguiente.

- Aunque se reconocía la existencia de relaciones causales entre las variables, se desconocía la manera de explicitarlas matemáticamente, lo cual nos forzaba a buscar relaciones alternativas implementables. Un ejemplo de esta situación lo tenemos en la modelización de la Oferta turística, una de las variables más relevantes del modelo, o de la Renta.

- Algunos conceptos en el modelo no podían ser materializados en forma de variable cuantificable, por lo que finalmente no pudieron ser incluidos. Tal es el caso por ejemplo, de los Agentes Externos que inciden fuertemente en la Oferta (Tour-operadores, Fidelización...).

Como consecuencia de lo anterior nos vimos obligados a simplificar en algunos aspectos la estructura del modelo para permitir su formulación matemática, simulación en ordenador y posterior contrastación.

En los apartados siguientes repasaremos las conclusiones más importantes obtenidas en el transcurso de la construcción del modelo teórico y veremos de qué manera se han implementado en la práctica.

1.3.1. Submodelo Demográfico.

Puesto que aceptamos válido el método de las componentes para explicar la evolución de la Población, sólo nos resta traducir el diagrama elemental presentado en la sección anterior en las correspondientes ecuaciones.

Dicho diagrama se interpreta como sigue: la variable población, *P*, constituye un nivel sobre el que actúan dos flujos, a saber, el crecimiento vegetativo, *CV*, y la migración, *MIG*. La ecuación correspondiente será entonces:

N 1 $$\frac{dP}{dt} = CV + MIG$$

La ecuación correspondiente al crecimiento vegetativo es, sin lugar a dudas,

F 1 $$CV = TCV \times P$$

siendo la modelización de la variable *TCV* la que resta por determinar. Sabemos que el principio de siglo se caracterizó por las altas tasas de crecimiento vegetativo que disminuían lentamente, pero manteniéndose elevadas, hasta que, en torno a los 80 se produjo un descenso vertiginoso de la tasa, que de nuevo continuó decreciendo a un ritmo más lento, correspondiendo a la actual transición demográfica que se conoce en todo el ámbito canario.

Esta descripción nos recuerda fácilmente a una curva de tipo logístico decreciente, de manera que, si asumimos la hipótesis de desaceleración futura hasta alcanzar un valor estable u objetivo tendencial, en torno al 7.5 por mil, y a falta de otra información relativa al comportamiento de la variable, nos ayudaremos de una ecuación de tipo logístico para modelizar adecuadamente la variación de la TCV en el último tramo de su evolución:

A 1 $$TCV = \frac{7.5}{1 - 0.66e^{-0.04t}}$$

La modelización del flujo migratorio no plantea demasiadas dificultades, a la vista del diagrama presentado en la sección anterior en el que se representa su estructura, habida cuenta de que el único retardo de la *TE* significativo resultó ser el tercero. Añadimos a continuación la ecuación correspondiente:

F 2 $$MIG = \mathbf{a} + \mathbf{b}\,TE_{t\text{-}3}$$

donde sabemos que, por definición,

A 2 $$TE = DE - PA$$

La demanda de empleo en servicios la introduciremos en el modelo utilizando una función de demanda del tipo de Cobb-Douglas que depende de la Población y del Turismo, pues nos parece justificado tanto desde un punto de vista económico como práctico, al contar ya con el antecedente del modelo CANAGUA:

$$ES = \mathbf{a}\,(P + T)^{\mathbf{d}}$$

Puesto que nuestro propósito es englobar en la variable Demanda de Empleo, no sólo el empleo en servicios sino en todos los sectores de actividad, tendremos que efectuar una corrección en la anterior ecuación que haga referencia a la importancia relativa que el sector servicios tiene en la zona. Dicha corrección se llevará a cabo a través de la variable Indice de Terciarización (*TR*), que recoge el porcentaje de participación del sector servicios en el total de empleos de la provincia, información que facilita la Fundación BBV en sus publicaciones sobre la Renta Nacional de España.

Esta variable será modelizada con un crecimiento asintótico, de tipo logístico, cuyo límite tendencial estableceremos en torno al 0.9, contando con el hecho de que en otras áreas de la geografía mundial con desarrollo similar del turismo, la capacidad de carga alcanzada por la tendencia hacia la terciarización progresiva de la economía alcanza el 90%. (González Rodrígez, 1993).

Por todo ello, la ecuación que recogerá la evolución de la demanda de empleo será:

A 3 $$DE = \boldsymbol{a}\,\frac{(P+T)^{\boldsymbol{d}}}{TR}$$

junto con

A 4 $$TR = \frac{0.9}{1+0.77e^{-0.08t}}$$

La población activa, por su parte, presenta características en cierto modo similares al crecimiento vegetativo, en tanto que se obtiene como una proporción de la población. En la sección anterior razonábamos cómo dicha proporción, la tasa de actividad, presentaba ciertos movimientos cíclicos motivados por la presencia de histéresis. Sin embargo, ese fenómeno sólo se observa cuando los períodos temporales considerados son cortos, y no es relevante cuando se manejan datos anuales (como es nuestro caso). Por este motivo, y manteniéndonos coherentes con nuestro propósito de no complicar innecesariamente el modelo, consideraremos la tasa de actividad *TA* como una proporción constante de la tasa de actividad provincial *(TAPRO)*, intentando así recoger el efecto diferenciador que a nivel comarcal imprime la terciarización de la economía *(efter)*:

A 5 $$TA = efter \times TAPRO$$

1.3.2. Submodelo Turístico.

En los apartados anteriores quedó suficientemente clara la influencia que el turismo ejerce sobre la realidad física del entorno, la cual quedó recogida, además, en un diagrama causal.

Hemos extraído de la bibliografía (Gil, 1985) información que nos habla de la relación existente entre las tasas de crecimiento de la Renta y Suelo Urbano, cuya expresión matemática nos conduce a la ecuación que explica la evolución del Suelo Urbano:

$$\text{N 2} \quad \frac{dSU}{dt} = \frac{SU}{Y}\frac{dY}{dt}$$

Por otra parte, la variable *SU* se descomponía en otras tres variables atendiendo a su uso final (población, turismo o segundas residencias).

En lo que respecta a la cantidad del suelo urbano destinado a la población y al turismo, éstas crecerán presumiblemente en proporción directa al crecimiento de, respectivamente, la Población y la Oferta turística *(OF)*:

$$\text{N 3} \quad \frac{dSUP}{dt} = a_1 \frac{dP}{dt}$$

y

$$\text{N 4} \quad \frac{dSUT}{dt} = a_2 \frac{dOF}{dt}$$

Ante la ausencia de información referente al suelo urbano destinado a las segundas residencias, éste será modelizado como un residuo, esto es, la parte de suelo urbano que no se destina a población ni a turismo, de modo que la ecuación correspondiente será:

$$\text{N 5} \quad \frac{dSUR}{dt} = \frac{dSU}{dt} - \frac{dSUP}{dt} - \frac{dSUT}{dt}$$

En el crecimiento de la Oferta, habremos de obviar las barreras que impiden la especificación y elección de variables ya que, según lo comentado anteriormente acerca de sus características, existen multitud de factores y variables que condicionan la evolución temporal del número de plazas turísticas: la dependencia de los tour-operadores, las acciones especulativas que se desarrollan como consecuencia del auge urbanizador, las inversiones, nacionales y extranjeras, las decisiones de gobierno o la intervención en el sector canario de compañías de ámbito nacional o internacional. En general, todos estos factores comparten su dificultad de ser caracterizados cuantitativamente.

En la búsqueda de alternativas de modelización que tengan un buen grado de ajuste a la realidad observable y que a la vez se apoyen sobre una base teórica, nos encontramos con el concepto de "Ciclo de Vida de un Destino Turístico" (CVDT), que trata de explicar la evolución de las zonas turísticas. Tal concepto surge a raíz de la aplicación a los estudios turísticos de una teoría más amplia, como es la Teoría del Ciclo de Vida de un Producto. Ideada en el campo de la biología, aunque aplicada ya en otros estudios del ámbito empresarial, dicha teoría sostiene que todo producto tiene un ciclo de vida que se asemeja a la evolución de los organismos biológicos: el producto se lanza al mercado (nacimiento) y al tiempo comienza a experimentar un gran volumen de ventas (crecimiento), tras lo cual las ventas tienden a estabilizarse (madurez), para decaer al final de su vida (muerte).

El concepto de CVDT, desarrollado por varios autores desde los sesenta hasta la actualidad, sugiere que los destinos turísticos evolucionan también de una forma parecida, atravesando distintas etapas en su ciclo de vida. Aunque han sido varias las propuestas realizadas en este sentido, se considera el modelo de Butler (1980) como uno de los más completos, y muchos otros autores se han basado en su trabajo.

Butler establece que los destinos turísticos atraviesan seis fases. El ciclo comenzaría en la fase de *exploración*, en el que tan sólo un pequeño número de visitantes, tal vez huyendo de áreas saturadas, eligen el destino por ser desconocido. A continuación, en la fase de *implicación*, las autoridades locales se ocupan de crear infraestructura adecuada para atender la inesperada llegada de visitantes, atraídos por el aumento de publicidad. En una tercera fase, de *desarrollo*, las compañías tour-operadoras incluyen el destino en sus ofertas, lo que provoca que continúen aumentando los visitantes, llegando el número de turistas a igualar o incluso superar a la población local. En la etapa de *consolidación* el turismo se ha convertido en una parte importante de la economía de la zona, a pesar de lo cual la llegada de visitantes se ve sensiblemente frenada. En la siguiente fase, de *estancamiento*, la oferta de plazas se mueve en torno a su valor máximo, o capacidad de carga, que cuando se sobrepasa, da lugar a graves consecuencias de tipo medioambiental. Estas etapas pueden concluir en una fase de *declive*, cuando el número de turistas cae fruto de la atracción ejercida por otros destinos, o bien una etapa de *rejuvenecimiento* que dé comienzo a un nuevo ciclo.

La descripción anterior caracteriza la evolución del crecimiento de la oferta turística: presenta una tasa de crecimiento lenta al principio que va aumentando poco a poco, y en un momento experimenta un “tirón”, que provoca una aceleración en el crecimiento de la oferta. Después de ese “boom” turístico se produce un cambio que se refleja por un punto de inflexión, a partir del cual el avance del nivel comienza a disminuir hasta aproximarse asintóticamente a un límite constante.

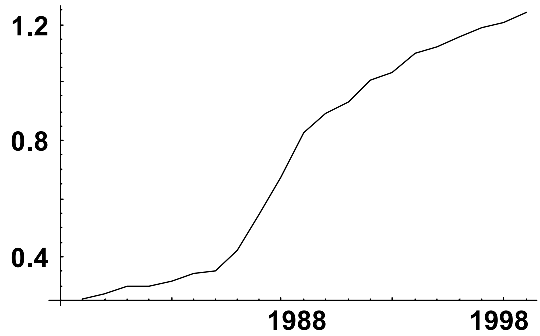


Figura 1.1 Oferta Turística

Esta descripción recuerda fácilmente a la propia de las curvas de tipo sigmoidal o logístico (en forma de S alargada), con un primer período de crecimiento rápido, de tipo exponencial, seguido de otro cada vez más lento, de tipo asintótico. Además, dicha forma de crecimiento no contradice la observada en los datos disponibles (figura 1.1), lo cual nos anima aún más a su aplicación.

Estas curvas se pueden simular con ayuda de una ecuación diferencial denominada *hiperlogística* (cuestión que justificaremos en los capítulos que siguen), abundando en una generalización de la clásica ecuación logística:

$$\frac{dOF}{dt} = aOF^{r}(L - OF)^{n}$$

Esta ecuación ya ha sido utilizada para modelizar el crecimiento de la variable (Carrillo y González, 1998[a]), obteniendo resultados muy satisfactorios. Sin embargo, creemos conveniente hacer alguna puntualización más. Resulta evidente que el ciclo de vida de un producto es característico de ese producto, al igual que las etapas de crecimiento, madurez y muerte lo son en el ser vivo; pero igual de evidente es el hecho de que factores externos pueden actuar para alterar dicho ciclo natural, como en efecto hemos constatado que ocurre con la Oferta.

Al simular la Oferta Turística con ayuda de una ecuación diferencial hiperlogística estamos explicando el crecimiento de la variable exenta de influencias de otros factores, de forma que los errores cometidos se podrían justificar, en cierta medida, por el efecto de la actuación de los agentes exógenos, no incluido en el modelo actual.

Por consiguiente, en un intento de englobar dichas alteraciones, consideraremos la intervención de dos componentes: por un lado, el componente natural o endógeno, que explicaría la parte del crecimiento atribuible a su propio ciclo de vida y, por otra parte, el componente exógeno, que abarcaría todos los imponderables no explicados por éste, pues se deben a la intervención de agentes externos a la propia variable.

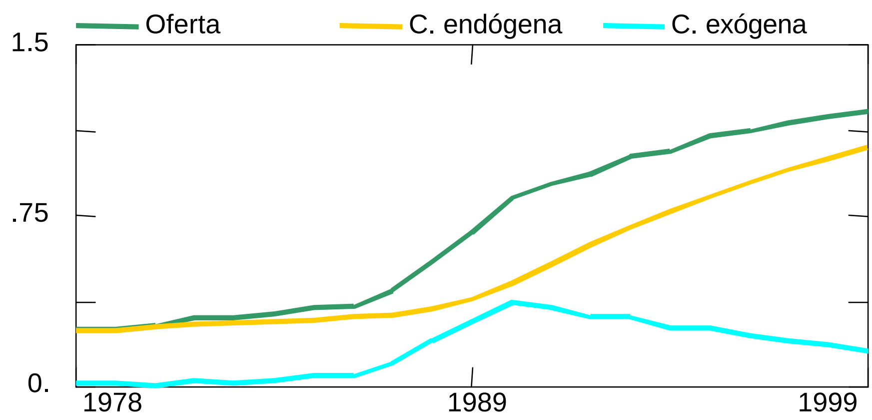


Figura 1.2 Descomposición de la Oferta

Al investigar en esta nueva vía de trabajo, hemos identificado la parte endógena con el componente tendencial de la serie, que obtendremos mediante técnicas de suavizado, mientras que el componente exógeno se correspondería con el residual, la diferencia entre el valor real de la variable y el obtenido a partir del componente endógeno. De esta manera obtendríamos la descomposición que se muestra en la figura 1.2.

Con respecto a la modelización de ambas componentes, tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

Componente endógena de la Oferta.

Según lo comentado en párrafos anteriores, la hipótesis básica de esta nueva estrategia de trabajo consiste en asumir que tan sólo una parte de la variable, su tendencia, se puede explicar en función de su ciclo de vida (*OFCV*). Puesto que hemos establecido ya la relación ciclo de vida-crecimiento sigmoidal, y dado que demostraremos en adelante la relación crecimiento sigmoidal-ecuación diferencial hiperlogística, sólo resta encontrar los valores de los parámetros de la ecuación correspondiente que mejor ajustan tal componente endógena, teniendo en cuenta que le valor del límite tendencial, L, será prefijado desde el exterior atendiendo a razones de capacidad física del territorio.

N 6 $$\frac{dOFCV}{dt} = aOFCV^{r}(L - OFCV)^{n}$$

Componente exógena de la Oferta.

En la modelización de la componente exógena (*OFFE*) intentaremos recoger algunos de los agentes externos que influyen en la Oferta. Sin embargo, continúa presente la problemática que comporta la cuantificación de dichos factores, lo que imposibilita en la mayoría de los casos su introducción en el modelo.

Una de las variables que se pueden considerar influyentes en el crecimiento de la Oferta es la Demanda turística (Bote, 1995), cuyas series de datos, medidas en términos de número de visitantes, sí están disponibles en las Estadísticas de Turismo Receptivo que edita el Cabildo de Tenerife.

Sobre la base de la demanda turística analizaremos una serie que nos informará de la inversión interna del sector, generadora de nuevas plazas. El procedimiento seguido se describe a continuación.

Tanto el Cabildo como el ISTAC han estimado, a través de encuestas realizadas a los turistas en los aeropuertos tinerfeños, el gasto realizado en Tenerife. Conocido el 53% del gasto realizado en el lugar de procedencia que, según el Libro Blanco del turismo canario (1997), revierte en Tenerife, podemos obtener una aproximación del ingreso medio por turista.

Una proporción de los ingresos por turismo se traduce en beneficios del sector, que a su vez, podrán ser destinados a la creación de nuevas plazas, mantenimiento o mejora de las plazas existentes, o bien otro tipo de inversiones ajenas al sector. La parte correspondiente a las plazas de nueva creación las obtendremos según una tasa que hemos denominado "Tasa de Reinversión Turística" (*TRT*), inversión que se traducirá posteriormente en plazas creadas, a razón del Coste Unitario por Plaza (*CUP*). Todo lo expuesto se puede resumir con el diagrama representado en el gráfico 8, en el que se recoge el mismo efecto multiplicador que fue mencionado con anterioridad, y que explica cómo el conjunto Oferta-Demanda genera beneficios que se traducen en inversiones que vuelven a generar más oferta.

Evidentemente la *TRT* es una variable que no se encuentra tabulada, pues opera como un mero instrumento dentro de un modelo de inversión simplificado. Sin embargo, siguiendo la senda del crecimiento turístico observado, podríamos aventurar que dicha tasa mantuvo una evolución creciente hasta el fin de la década de los ochenta, debido justamente al "boom" inmobiliario, generador de riqueza pero, a partir de los noventa, comenzó a decrecer, fruto de la baja rentabilidad del sector. Este hecho tendría su repercusión en el crecimiento de la Oferta, que se vería frenado, tal y como se observa en la serie histórica, al disminuir la participación del sector en la creación de plazas, quedando la dinámica interna de la variable como la principal causante de su evolución.

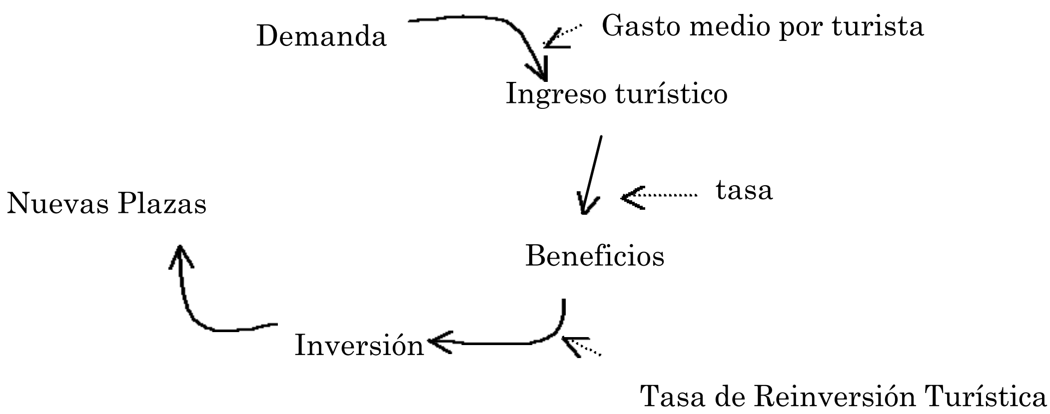


Gráfico 8. Inversión interna del sector turístico

Tras haber especificado un modo de comportamiento para la tasa de reinversión turística podemos pasar a calcular una estimación del número de plazas creadas por los agentes externos al ciclo de vida de la variable, que atenderá a la siguiente ecuación:

A 6 $$OFFE = \frac{TRT \times tasa \times ING}{CUP},$$

donde *OFFE* representa el número de plazas de nueva creación debidas a los agentes externos, e *ING* representan los ingresos en concepto de turismo.

Una vez que dispongamos de estas modelizaciones parciales de cada una de las componentes de la Oferta Turística, la simulación de la misma para el período histórico surge como agregado de ambas:

A 7 $$OF = OFCV + OFFE$$

En este punto podemos dar por finalizada la etapa de formalización matemática de las relaciones desveladas durante el rastreo bibliográfico. La idoneidad de las mismas como instrumento representativo de la realidad ya ha sido mostrada en otros foros (Carrillo y González, 1998[b] y 1999) y no insistiremos más en ella en esta ocasión, pasando a continuación a profundizar en otros temas de nuestro interés.

CAPÍTULO 2
Metodología e Información Estadística

En los párrafos que siguen nos disponemos a realizar un breve recorrido a través de un compendio de distintas metodologías de uso común en el Análisis Regional, justificando al mismo tiempo la elección de la metodología seguida en este trabajo. Seguidamente, insistiremos en la importancia que tiene la información estadística para conducir a buen término la modelización y posterior simulación del sistema en estudio. Comentaremos asimismo los obstáculos encontrados en el camino y el modo en el que los hemos superado, con el uso de algunas técnicas novedosas.

2.1. Introducción.

En el capítulo anterior hemos asistido a la construcción de un modelo teórico que será utilizado en adelante como una representación matemática de la realidad socioeconómica observada en el sur de Tenerife. En la construcción del modelo subyace, como paso previo condicionante de la actitud con que se encare todo el proceso, la elección de la metodología que se va a emplear para la consecución de los objetivos prefijados. En función de dichos objetivos se puede establecer la siguiente clasificación (González Rodríguez, 1997[a]):

- Modelos de previsión, que pretenden predecir el comportamiento de las variables relevantes del estudio.

- Modelos de optimización, cuyo interés se encamina a la elección de variables que maximizan (o minimizan) uno o varios criterios.

- Modelos de simulación, que se centran en la representación del comportamiento conjunto de las variables con la finalidad de alcanzar su entendimiento y/o de evaluar las consecuencias de determinadas estrategias sobre el sistema.

Los modelos de estas categorías están ligados con distintas metodologías de trabajo, pues cada una de ellas se caracteriza por el empleo de sus propias teorías, técnicas matemáticas, lenguajes o procedimientos y, en definitiva, por un modo concreto de actuar. En palabras de D.H. Meadows (1980), "*cada método de modelización está basado en su propio modelo de cómo se debe modelizar*". Así, por ejemplo, los modelos de previsión se relacionan con las técnicas econométricas y de análisis de series temporales, mientras que los modelos de optimización están más ligados a la teoría de la programación matemática. Los modelos de simulación, por su parte, constituyen una clase más amplia que, en general, comparten la característica de contener un número elevado de ecuaciones (lineales y no lineales) cuya resolución analítica es compleja o imposible. Ello fuerza una resolución numérica (simulación por ordenador) en la que el modelo se emplea como instrumento de experimentación, muchas veces a modo de ensayo-error, para comprobar los efectos de distintas acciones (Pidd, 1998). Este tipo de modelos se pueden encuadrar, por tanto, dentro de distintas disciplinas, aunque es posible identificar los pasos básicos del proceso, comunes a todos los tipos de estudio (Gordon, 1989, p.37), y que podemos resumir en:

- Descripción del problema

- Formulación del modelo matemático (ecuaciones)

- Validación del modelo

- Ejecución de la simulación

- Análisis de resultados.

Independientemente de su construcción, el modelo, por definición, constituye siempre en mayor o menor medida, una simplificación de un sistema cuya complejidad natural llega a desbordar los límites de la imaginación. Como bien señala P.A. Paulos (1999), "*la realidad* (...) *es indefinidamente compleja e imposible de encerrar del todo en un modelo*". Evidentemente, resultaría deseable que el conjunto de supuestos e hipótesis que se formulen durante su elaboración, a pesar de su carácter simplificador, no se desvíe en demasía de los hechos reales. Más concretamente, un modelo resulta tanto más útil cuanto más se parezca su ejecución a la evolución histórica del sistema real; por el contrario, su interés se reduce a los aspectos puramente teóricos si no es capaz de emular de un modo aproximado el comportamiento del sistema que pretende reproducir.

Ahora bien, para constatar el grado de similitud entre modelo y realidad, es imprescindible disponer de cierta información sobre ella. Además, dado el perfil matemático de nuestro modelo, la información que se precisa debe ser de carácter cuantitativo, susceptible de materializarse en determinadas series de datos correspondientes a las variables más relevantes del estudio.

Esas series de datos serán utilizadas durante el proceso de estimación de los parámetros contenidos en las ecuaciones ya especificadas del modelo, de manera que se asignarán a dichos parámetros aquellos valores que proporcionen un mejor ajuste entre valores simulados y observados o, ante la imposibilidad de emplear una técnica que garantice optimalidad, estar en disposición de exigir un ajuste satisfactorio.

La carencia de datos o la no utilización de los mismos conduce, en la mayoría de las investigaciones, a desarrollar estimaciones basadas en la intuición o, en algunos casos, a elaborar procedimientos de estimación con algún grado de coherencia interna en sus planteamientos. En realidad, incluso el mismo proceso de especificación de las ecuaciones está hasta cierto punto condicionado tanto por la disponibilidad de datos como por los requerimientos funcionales de algunas técnicas de estimación (Pindick y Rubinfeld, 1991). Por ello podemos afirmar que, no sólo la información que se necesita está condicionada por la metodología que se utiliza, sino también la metodología a emplear dependerá de la cantidad de información disponible.

Según estamos viendo, la disponibilidad de datos se convierte en un tema fundamental para garantizar la fidelidad del modelo, esto es, la precisión con la que representa la realidad. Pero no es el único.

Otro aspecto de igual importancia lo encontramos en la calidad de esos datos. En efecto, no hay ningún sentido en un ajuste a una "supuesta realidad" caracterizada por una información que no proviene del sistema real pero, además, ninguna técnica estadística proporcionará resultados de calidad cuando se trabaja con series de datos que, ya de por sí, resultan poco fiables o contienen un número insuficiente de observaciones.

De todo lo comentado se desprende que objetivos, metodología e información constituyen los pilares sobre los que construir el edificio, que es el modelo. Y puesto que los objetivos han quedado ya suficientemente esclarecidos con anterioridad, en el presente capítulo nos disponemos a analizar, por un lado, la metodología (o conjunto de metodologías) sobre las que nos hemos apoyado en el proceso de elaboración del modelo, y por otro lado, los recursos teóricos con los que fueron solventadas las dificultades encontradas en relación con los aspectos de disponibilidad y calidad de la información estadística utilizada.

2.2. Métodos matemáticos en la Economía Regional.

Existen numerosas metodologías de análisis dentro de la Economía Regional, algunas de ellas específicas y otras que, heredadas de la Teoría Macroeconómica, son aplicadas teniendo en cuenta las restricciones y características regionales.

Una de las diferencias que más relevancia tienen a la hora de elegir una metodología de estudio entre economías regionales y nacionales, estriba en el mayor interés mostrado por los responsables de la política regional hacia los modelos de planificación, propios de análisis a largo plazo, frente a los modelos predictivos a corto plazo, así como por los modelos de simulación de impactos debidos a la incorporación de nuevas actividades. (Richardson, 1986)

Comentaremos a continuación algunas de las técnicas más utilizadas en la Economía Regional (Richardson, 1986; Pérez Ríos, 1989), haciendo especial énfasis en las que consideramos de mayor relevancia para nuestro estudio.

1. Modelos de Gravedad. Este tipo de modelos resultan de utilidad a la hora de estudiar interacciones espaciales entre puntos distantes, y se suelen encontrar integrados dentro de modelos económicos multiregionales. Algunos ejemplos de su aplicabilidad los podríamos encontrar en el análisis de las migraciones, flujos de bienes y tráfico, etc. (Wilson, 1992)

2. Modelos Input-Output. Estos modelos describen la estructura endógena de la economía, que se considera dividida en sectores de producción, y se analizan las relaciones existentes entre dichos sectores a través de las demandas finales, las demandas de inputs interindustriales y sus outputs. La técnica permite realizar análisis sobre el impacto de una variación exógena en la demanda final, además de otros estudios de dependencia intersectorial. Una de sus mayores desventajas se centra en el alto costo que supone la construcción de las tablas de datos necesarias para realizar el análisis. Además, por su carácter estático, no pueden ser utilizados para analizar la dinámica de los cambios estructurales, si bien es cierto que existen investigaciones encaminadas a la dinamización de las tablas Input-Output y consiguiente predicción (Pérez García, 1997).

3. Análisis Shift-Share (o de cambio en las participaciones). Se trata de medir el cambio total del comportamiento de una región (en términos de variables como Empleo, Producción o Renta) en relación al de la nación, que se ha producido entre dos instantes de tiempo. Ese cambio se descompone a su vez en dos componentes, uno de los cuales (diferencial) tiene por objeto identificar las ventajas locacionales de la región, mientras que el otro (proporcional) mide el efecto de la composición industrial nacional sobre la región. A pesar

de su amplia aplicabilidad y sus escasas exigencias en lo que a datos se refiere, el método ha sido sometido a numerosas críticas debido a la alta sensibilidad que presenta a la división sectorial y, en ocasiones, a lo inconcluyente de sus resultados.

4. Modelos de Análisis Multivariante. Se utilizan principalmente para efectuar análisis de distinta índole, casi siempre de carácter descriptivo, de representación de datos o bien de identificación de similitudes entre las distintas observaciones que permiten determinar posibles propiedades asociadas a las variables. Las técnicas más comúnmente utilizadas son, entre otras, el análisis factorial, análisis cluster, análisis de correspondencias, etc.

5. Modelos Econométricos. Estos modelos se constituyen a partir de un conjunto de variables que se suponen, en función de cierta base teórica, relacionadas entre sí, estando formalizadas dichas relaciones matemáticamente. A nivel regional, los modelos econométricos comparten las ventajas y también las desventajas que encontramos en su aplicación a nivel nacional, a saber, la especificación lineal de sus ecuaciones, la disponibilidad de datos, la limitación de las predicciones en el corto plazo, etc. En concreto, a nivel regional, el grado de validez de estos modelos estará condicionado por la adecuación de las mismas teorías macroeconómicas al ámbito regional. Además, el problema de la obtención de datos se acentúa notablemente.

6. Modelos de Programación. Estos modelos ofrecen una visión optimizadora, más ligada al clásico problema económico de la maximización del bienestar ante la escasez de recursos disponibles. El planteamiento en el que se basa es el de un decisor que tiene que elegir entre un conjunto de alternativas, para lo cual escoge aquella que más se aproxime a la consecución de un objetivo, previamente determinado, ya fuera de tipo maximizador o minimizador. Aunque es aplicable a muchos tipos de problemas, existen dificultades cuando el número de variables y restricciones es grande. Además, con frecuencia resulta difícil elegir una función objetivo pues, de hecho, no es raro en los sistemas económicos encontrar múltiples objetivos a maximizar o minimizar,

y en ese caso, la dificultad del problema crecería al no ser siempre posible encontrar una solución óptima.

7. Modelos de Simulación Dinámica. Un modelo de simulación dinámica se compone de un conjunto de ecuaciones que tiene como fin describir el comportamiento dinámico de un sistema. La construcción de un modelo de simulación dinámica es un proceso iterativo, pues después de especificar las ecuaciones, con sus condiciones iniciales y parámetros, el modelo no se resuelve, sino se ejecuta (se simula) para comparar cómo es el comportamiento simulado en relación al comportamiento real (histórico). A continuación, la estructura entera del modelo debería ser revisada para comprobar si se puede mejorar dicha ejecución. Una vez validado, el mismo modelo se puede utilizar para predecir el comportamiento futuro del sistema ante determinados escenarios que representan distintas hipótesis de evolución futura de las variables. Gracias al desarrollo tecnológico experimentado en el campo de la informática, que permite realizar múltiples ejecuciones a un coste relativamente bajo, este tipo de modelos goza de gran flexibilidad para evaluar las consecuencias de modificaciones diversas en las hipótesis o parámetros del modelo y, por tanto, se muestra como una eficaz herramienta de cara a la implementación de políticas.

Dentro de la Simulación Dinámica se puede encuadrar la metodología de Dinámica de Sistemas (DS). Esta técnica, de reciente aunque fructífera incorporación a la investigación económica (ver Pérez Ríos, 1989), se muestra como una de las más atractivas por las múltiples posibilidades que plantea. La Dinámica de Sistemas pretende estudiar la evolución en el tiempo de un sistema concreto, cuya estructura interna, compuesta por un conjunto de bucles de realimentación, se supone responsable de los cambios que se producen en su dinámica. La formulación del modelo se realiza, por tanto, analizando minuciosamente las características estructurales del sistema, y en el proceso se recogen las opiniones de expertos en las distintas áreas que el modelo abarca. Los modelos construidos en DS son capaces de albergar gran número de variables y relaciones (tanto lineales como no lineales), mostrándose especialmente idóneos a la hora de realizar estudios interdisciplinares. Además, la técnica permite, gracias a la simulación por ordenador, el ensayo de formas de comportamiento distintas a las observadas, por lo que puede emplearse en ese sentido como un instrumento de planificación de políticas de actuación.

En cualquier caso, a la hora de seleccionar la metodología adecuada para abordar un problema concreto, se debería contrastar las características del problema y el objetivo del estudio con las características propias de cada una de las metodologías, ya que no todas las técnicas citadas anteriormente podrían ser utilizadas para responder con eficacia a las mismas cuestiones.

Por esta razón, señalemos de nuevo entonces el objetivo bidireccional de nuestro modelo, a saber, la representación,

- en primer lugar, ajustada y fiel, (aunque simplificada, por definición), de la realidad socioeconómica observada en los últimos veinte años en la zona sur de Tenerife, en relación a, principalmente, el desarrollo turístico, el crecimiento demográfico, urbanización del territorio o desarrollo del nivel de vida y,

- en una segunda etapa, la simulación del comportamiento futuro del sistema junto con un análisis en prospectiva de la evolución esperada de las variables más importantes del estudio.

Palabras que cobran especial relevancia en la descripción de nuestro objetivo son <u>ajuste</u> y <u>simulación</u>. Planteado en esos términos, algunos de los métodos que rechazamos desde un primer momento para su aplicación en este trabajo serían los relacionados con modelos de gravedad o input-output, cuyas características no concuerdan en absoluto con las de nuestro problema.

Otras de las técnicas han sido ya aplicadas a estudios de similar naturaleza al que pretendemos realizar en esta ocasión, aunque no tan ambiciosos en cuanto a aspectos a considerar. En concreto, el análisis Shift-Share fue utilizado por García y Palomino (1998) para analizar la evolución del sector turístico extremeño en los últimos años e intentar comprobar si, de acuerdo con las ventajas locacionales de la zona, resultaría beneficioso relanzar el sector. Sin embargo, no incluye variables demográficas ni territoriales, ni es capaz de realizar simulaciones. Por otra parte, Caballero y otros (1998) utilizan un modelo de programación lineal para averiguar, a través de la maximización de cierta variable proxy del desarrollo económico, qué sectores deben ser potenciados de cara a impulsar el desarrollo regional. Trabajan para ello con datos obtenidos de las tablas I/O andaluzas y constituye por tanto un análisis intersectorial de interés que, sin embargo, se aleja de nuestros objetivos. También las técnicas de análisis multivariante han sido aplicadas en diversos estudios turísticos (Jiménez y Ramos, 1998), pero su carácter principalmente descriptivo nos fuerza a descartarlas en nuestro trabajo.

Todo lo ya expuesto nos conduce a considerar, como técnicas candidatas a aplicar en nuestro estudio, la Econometría y la Dinámica de Sistemas, que además, si pensamos en las descripciones realizadas, encajan perfectamente con las 'palabras clave' que seleccionamos en párrafos anteriores, respectivamente, ajuste y simulación.

2.2.1. Controversia: DS vs EC.

La Econometría (EC) ha sido ampliamente utilizada en distintos ámbitos de la Economía, generando resultados satisfactorios en muchos casos, aunque criticados en algunas ocasiones. Esta disciplina tiene por objeto la medición de relaciones económicas, basándose para ello en la teoría económica, por un lado, que interviene en la fase de formulación del modelo, y en las técnicas estadísticas, por otro lado, las cuales constituyen las herramientas fundamentales en la etapa de calibrado. Como todo, tiene sus limitaciones, que se centran en las hipótesis básicas necesarias para su correcta aplicación (linealidad de las ecuaciones, datos fiables, errores independientes, etc.)

A partir de principios de los setenta, con los trabajos de J. Forrester, comenzó a cobrar importancia una nueva metodología ideal para el estudio de sistemas dinámicos conocida como Dinámica de Sistemas (DS). Al principio se empezó a utilizar en modelos de dinámica industrial y urbana, pero posteriormente su aplicabilidad se extendió a todo tipo de sistemas socioeconómicos, convirtiéndose en una técnica alternativa a la ya consolidada Econometría.

Desde entonces se ha abierto el debate ante la idoneidad de aplicar una u otra metodología en el contexto de los sistemas dinámicos. Los más fervientes seguidores de la DS (Forrester, Senge,...) consideran incluso inaceptable el uso de herramientas estadísticas en sus modelos, pues ambas metodologías parten de supuestos básicos bien distintos (paradigmas) que condicionan en gran medida la visión que se tiene del proceso de modelado en su conjunto.

Los métodos de modelización se podrían clasificar por la información que usan, por los procedimientos matemáticos a los que recurren, por las relaciones que definen, o también por el uso que se va a hacer del modelo, de tal forma que incluso diferentes preguntas pueden requerir diferentes modelos (Meadows, 1980). Por consiguiente, en todas las características mencionadas, la DS y la EC presentan claras diferencias.

En efecto, la EC tiene por objeto principal la *predicción a corto plazo* de un conjunto de variables de interés. Para ello, acude a la teoría económica para que proporcione una serie de relaciones matemáticas entre dichas variables, y aplica procedimientos matemático-estadísticos más o menos complejos para encontrar los valores de los parámetros que mejor ajustan tales relaciones a los datos históricos disponibles. Las hipótesis más restrictivas se centran, por una parte, en la especificación del modelo, al que habría que exigir condiciones de linealidad y otras que aseguren la fiabilidad de las estimaciones realizadas, y por otro lado, en la suposición de estabilidad de la realidad económica, esto es, la no existencia de cambios estructurales que invaliden las relaciones formuladas. De hecho, en algunos casos la especificación del modelo es criticada por simplificar o forzar demasiado la teoría para que las hipótesis anteriores se cumplan.

Por su parte, la DS tiene como objetivo fundamental la *comprensión de las características dinámicas* del sistema y el análisis de su *comportamiento* *cualitativo*, restando importancia a los valores numéricos exactos de las variables del modelo. Todos los modelos de DS tienen en común lo que se considera la principal característica de la técnica: el efecto de feedback o realimentación presente en la estructura causal del modelo, que aparece como la primera responsable de todo su comportamiento, y que conlleva como consecuencia la inclusión de muy pocas variables exógenas en el modelo.

Tal característica condiciona en gran medida los aspectos relacionados con la formulación matemática del modelo, compuesto de un conjunto de ecuaciones interrelacionadas, donde todas las variables serán explicativas y explicadas (ecuaciones simultáneas en EC). Además, descartados los procedimientos de estimación, las ecuaciones podrán ser de tipo no lineal y contener un gran número de variables.

Resulta indispensable que no sólo las relaciones incluidas en el modelo, sino cada uno de los elementos (variables o tasas) en ellas contenidos tengan su correspondencia claramente identificable en el mundo real, ya que algunos de sus valores serán calculados en función de la información suministrada por diversas fuentes expertas.

En definitiva, la DS trabaja hacia un horizonte temporal a largo plazo y, por consiguiente, no está ligada tanto a la toma de decisiones inmediata como a la formulación de políticas de actuación que mejoren el estado futuro del sistema.

La cuestión que ya ha sido abierta y planteamos nosotros ahora es la siguiente: ¿podrían ambas metodologías combinarse de alguna forma, y las características de una de ellas complementar las de la otra incrementando así sus ventajas?

Desde luego que el tema ha planteado cierta controversia para la que existen diversas opiniones. Por lo pronto, algunos autores (ver Sommer, 1984[a]) han trabajado en la modificación de la técnica de DS (MDS), al menos en lo que se refiere a la utilización de datos más objetivos en los modelos. De todas formas, no existe evidencia sobre la aceptación de tales modificaciones por un número importante de investigadores del tema.

Uno de los autores más citados en los trabajos relacionados con la metodología DS, D.H.Meadows, afirma que la superposición de ambas metodologías, DS y EC, difícilmente podrá llevarse a cabo aunque una de ellas use herramientas de la otra. La razón de esta, tal vez para algunos contradictoria afirmación, se encuentra en las diferencias existentes en la propia base de cada una de las técnicas: sus objetivos no coinciden, tampoco el horizonte temporal al que encaminan sus conclusiones; "*la diferencia entre paradigmas hace que palabras como validación, sensitividad y predicción tengan diferentes significados*".

Otros autores, como M.Sommer, parecen mostrar una actitud más optimista, al menos en lo que se refiere a la posibilidad de aplicar algunos métodos econométricos en modelos de DS sin causar conclusiones desafortunadas.

Y es precisamente en esa dirección, de integración o cooperación de ambas metodologías, en la que pretendemos movernos en este trabajo. Tengamos en cuenta que una de las críticas que se pueden verter sobre la técnica de DS radica en la ambigüedad de sus modelos, capaces tal vez de alcanzar distintas conclusiones o resultados a través de la simulación de multitud de posibilidades, así como en la filosofía subyacente, que conduce al modelador a transformar ideas e intuiciones no científicas sobre el sistema en conjeturas acerca del futuro, las cuales serán, por consiguiente, igualmente inciertas y carentes de base científica.

En efecto, nosotros reconocemos la idoneidad de la técnica DS cuando un objetivo primordial del estudio se centra en conocer o predecir las características cualitativas futuras del sistema, pero creemos firmemente que la utilización adecuada de técnicas estadísticas-econométricas enriquecería en gran medida la formulación del modelo y la obtención de resultados. De esta manera no sólo estaríamos en disposición de simular diversos estados futuros del sistema, sino aseguraríamos también que el modelo simulado ciertamente se parece al sistema real, lo cual nos permitiría realizar predicciones a corto plazo bajo el supuesto de que las condiciones del entorno no se distanciaran demasiado de las históricas.

Por lo tanto, y a modo de síntesis, podemos concluir diciendo que, en la elaboración de nuestro modelo, seguiremos una metodología basada en la Simulación Dinámica, pues pretendemos indagar en los factores causantes del comportamiento dinámico del sistema. En concreto, nos apoyaremos en la Dinámica de Sistemas, sobre todo en la fase de especificación del modelo, que fundamentaremos sobre la estructura causal del sistema y las fuentes expertas, pero intentaremos complementar lo que consideramos como un aspecto incompleto de esta técnica: el de estimación de parámetros. Así, emplearemos siempre que sea posible, métodos estadístico-econométricos de estimación, de forma que podamos aspirar a conseguir aproximar el comportamiento real del sistema no sólo en el aspecto cualitativo sino también en el cuantitativo.

2.3. Disponibilidad y calidad de los datos.

Los inconvenientes que hemos encontrado en relación a los temas de disponibilidad y calidad de los datos han sido abundantes, pues las variables relevantes del modelo son de carácter social, económico y demográfico, y en cualquiera de esos tres campos la medición de los fenómenos se convierte en una tarea compleja y delicada, con frecuencia descuidada en nuestro país. Pero todo este abanico de dificultades se ve incrementado cuando pretendemos obtener, como en nuestro caso, información en el ámbito municipal, donde encontramos gran variedad de complicaciones de distinta naturaleza: ausencia de coherencia interna, no continuidad de las series o falta de homogeneidad entre las diversas fuentes consultadas, características todas comunes tanto en las estadísticas españolas (Vinuesa y otros, 1994) como en las de carácter internacional (Witt y Witt, 1992).

2.3.1. Variables Turísticas.

Son las series de datos de la Oferta y Demanda Turísticas, medidas en término de "número de plazas" y "número de visitantes", respectivamente, las que menos dificultades ofrecen en esta dimensión del problema. La información relativa a ambas variables ha sido recopilada por el Servicio de Desarrollo Económico del Cabildo Insular de Tenerife desde 1975, y publicada en sus Estadísticas de Turismo Receptivo, que el propio Servicio califica de "*información completa y fiable*", tanto por los métodos seguidos en su elaboración como por el alto grado de participación observado entre los empresarios del sector.

Tabla 2.1 Oferta y Demanda Turísticas.

Año	Oferta Turística	Demanda Turística	Año	Oferta Turística	Demanda Turística
1979	25461	351106	1990	89044	1782709
1980	26882	385391	1991	93273	2154217
1981	29845	487560	1992	100956	2349962
1982	29962	544833	1993	103285	2527196
1983	31618	608296	1994	109793	2856096
1984	34095	664171	1995	112404	2952413
1985	35395	755252	1996	115544	3016068
1986	42052	962410	1997	118816	3155258
1987	54345	1294954	1998	120534	3222691
1988	67511	1553295	1999	124183	

Fuente: Estadísticas de Turismo Receptivo. Cabildo Insular de Tenerife.

Dicha información se encuentra desagregada en cuatro zonas en las que se ha dividido la isla de Tenerife a efectos de desarrollo turístico. La comarca que analizamos en nuestro trabajo constituye tan sólo una parte del total geográfico que representa la Zona 4; sin embargo, como quiera que las restantes comarcas de la zona resultan poco o nada significativas en cuanto a recepción de visitantes y alojamientos ofrecidos, las series de datos históricas correspondientes a las variables Oferta y Demanda Turística de nuestro modelo se identificarán con las correspondientes a las que el Cabildo asigna a dicha Zona 4.

Es necesario mencionar que estas series no coinciden con las proporcionadas por otras fuentes estadísticas (ver, por ejemplo, ISTAC: Anuario Estadístico de Canarias, 1997). La elección de las series del Cabildo como válidas no se basa en otro criterio más que una apuesta por su mayor fiabilidad.

2.3.2. Variables Demográficas.

Analizaremos en este apartado las series de crecimiento vegetativo, migración y población, de importancia notoria en el modelo: las dos primeras, por ser las causantes de la evolución de la tercera, y ésta por ser la máxima indicadora de la movilidad demográfica originada por el turismo, asumida como variable explicativa en otras relaciones del modelo.

Tabla 2.2 Crecimiento Vegetativo.

Año	Crecimiento Vegetativo	Año	Crecimiento Vegetativo
1979	539	1988	524
1980	625	1989	536
1981	599	1990	772
1982	557	1991	587
1983	453	1992	645
1984	379	1993	534
1985	369	1994	543
1986	499	1995	538

Fuente: ISTAC

El crecimiento natural o vegetativo, que se define como diferencia entre nacimientos y defunciones, se puede entender recopilado con un alto grado de fiabilidad suficiente y permite extrapolar errores despreciables. Una hipótesis contraria no puede ser sostenida a la vista de los datos disponibles, imposible de comprobar careciendo de información al respecto. En cualquier caso, la aceptación de dichas series es generalizada en las investigaciones económicas y sociodemográficas, puesto que, como se aclara en CES (1996), tanto los nacimientos como las defunciones raramente son ocultados, por las implicaciones que conlleva, lo que confiere a las estadísticas del Movimiento Natural de Población un elevado grado de fiabilidad.

Una afirmación de similar naturaleza no puede ser vertida sobre las series de Migración y Población. Más bien al contrario, ambas variables vienen acompañadas, por su naturaleza fuertemente condicionada por factores socioeconómicos o políticos, de serias dificultades para su correcta medición.

Para el caso de las migraciones, la situación se presenta bastante desfavorable, puesto que no existen fuentes estadísticas que profundicen en el conocimiento de los movimientos migratorios a escala municipal o comarcal. Esta ausencia total y absoluta de datos provoca que los investigadores tiendan a sustituir el efecto diferenciador que imprime la distinción entre inmigraciones y emigraciones por el efecto neto que representa el saldo migratorio, desechando las limitaciones que supone. En ese caso, es corriente obtener el saldo migratorio a partir de la ecuación compensadora o de balance demográfico, de donde se puede calcular la migración neta como la diferencia entre el crecimiento real de la población y el crecimiento natural, tal y como se realiza en numerosas investigaciones (Albarracín, 1982; ITUR, 1991; Macías, 1992; Burriel, 1981; Martín Ruiz, 1989; Díaz, 1982). Otros autores utilizan la información que sobre los migrantes se puede inferir a partir de los datos de los censos y padrones municipales (Pérez, 1993; Ortega y Gutiérrez, 1997; Domínguez, 1992; Martín, 1991), información limitada debido a la propia formulación de los cuestionarios correspondientes. Tanto es así, que los datos obtenidos de estas fuentes no concuerdan con los calculados mediante la ecuación de los balances, como se comprueba en PIOF(1997).

Con todo, el método más comúnmente empleado para estimar o proyectar los saldos migratorios se basa en la ecuación compensadora, no exento de críticas, por los graves problemas que acarrea.

Así, y en primer lugar, al representar la migración neta un residuo, acumula todos los errores contenidos en los restantes componentes de la ecuación.

En concreto, cuando el estudio se refiere a un contingente poblacional elevado, del que los saldos migratorios representan una reducida proporción, cualquier error relativamente pequeño por ejemplo, en la población censada, se propaga al saldo migratorio distorsionándolo de tal manera que hace imposible su utilización (Leguina, 1992). En otra dimensión, en zonas menos pobladas, como a nivel municipal, el problema radica en que los nacimientos y defunciones se pueden ver alterados por inscribirse en zonas limítrofes, repercutiendo, por consiguiente, en los saldos estimados.

Existen, por descontado, otro tipo de medidas indirectas de la migración, de uso menos frecuente. Algunas de ellas se basan en combinar el conocimiento de la población en dos censos consecutivos junto con la probabilidad de supervivencia (Vinuesa, 1994 y Leguina, 1992), de las que existen a su vez distintas variantes. Otros métodos, ideados para realizar proyecciones de patrones migratorios, proponen una modelización matemática basada en funciones exponenciales (Recaño, 1993), pero su complejidad aparente (y sin duda real) lo hacen poco atractivo en la práctica.

Los datos de población se encuentran alterados como consecuencia, en parte, de los fenómenos que se producen por la existencia de bajas o altas de efectivos no declaradas en los organismos correspondientes. Se trata del sobre-empadronamiento y el sub-empadronamiento, respectivamente (ISTAC[h]), más característico el último de ellos en las zonas destino de la migración, como la comarca objetivo de nuestro estudio. Esta circunstancia se pone de manifiesto a la vista de las diferencias entre las poblaciones de hecho y de derecho, reveladoras de la existencia de personas que no residen en el mismo lugar en que están empadronados y, a la vez, se puede comprobar con una simple mirada crítica al conjunto de valores poblacionales, los cuales ofrecen en su evolución una serie de altibajos nada coherentes con la realidad canaria.

En efecto, se observa sistemáticamente cómo, al año siguiente de un recuento censal, las poblaciones municipales aumentan, manteniendo esa tónica creciente hasta el año anterior a la siguiente operación censal, en el que se produce una disminución llamativa (CES, 1996), proceso que se repite a lo largo del tiempo.

Tabla 2.3 Población de la Comarca Chasna-Arona.

Año	Población	Año	Población
1977	36311	1987	46885
1978	37088	1988	50758
1979	**38382**	1989	54652
1980	-	**1990**	**57488**
1981	**38009**	**1991**	**54431**
1982	39019	1992	56825
1983	40826	1993	61560
1984	42105	1994	64455
1985	43196	**1995**	**67712**
1986	45283	**1996**	**66521**

Fuente: ISTAC

Ante este panorama nos planteamos como imprescindible una *corrección de la serie de población*, de manera que obtengamos una nueva serie sin las anteriores incongruencias y, por tanto, más realista. El punto de partida de esta serie corregida lo encontraremos en los Censos (1981,1991) y Padrones municipales (1986,1996), que consideraremos información suficientemente fiable, y a partir de ellos habremos de generar una estimación de los valores poblacionales para los restantes años del período 1981-1996.

No conocemos antecedentes en este tipo de iniciativas. La gran mayoría de las investigaciones que incluyen algún tipo de tratamiento de las series de población, trabajan tan sólo con datos procedentes de censos y padrones, analizando la situación demográfica en los años censales (Picornell y Seguí, 1989; González y Delgado, 1995; POOTF, 1983). En muchas ocasiones se asume indirectamente un comportamiento lineal en los períodos intercensales, bien a través de una representación gráfica, lineal a trozos (Burriel de Orueta, 1981; Martín Ruiz, 1989; González Morales, 1994; González y Betancort, 1994; Acosta y Díaz, 1994; Domínguez, 1992), bien a través del cálculo de la tasa media de crecimiento anual (Acosta, 1993; Cañizares, 1993; Díaz, 1982; PIOF, 1997).

También hemos encontrado estimaciones de los valores intercensales con ayuda de algún procedimiento de interpolación que no se especifica claramente (Martín Ruiz, 1985; Burriel y Martín Ruiz, 1980), o una corrección realizada mediante técnicas de alisado por el método de las medias móviles (ISTAC[h]). Cuando el motivo del análisis se centra en realizar una proyección o previsión futura de la población, el método más ampliamente utilizado es el de los componentes, bien basado en el cálculo de supervivientes o probabilidades de paso (ITUR, 1991; Navarro, 1993), o bien estableciendo una serie de escenarios posibles para la evolución de los distintos integrantes de la ecuación (Blanes, 1993; ISTAC[h]). Por otra parte, Sanz (1983) reconoce la existencia de métodos alternativos de proyección, mas recurre a un comportamiento lineal para marcar la evolución futura de la población a corto plazo cuando encuentra dificultades en su aplicación.

Así, tras haber repasado numerosas referencias en temas geodemográficos y socioeconómicos, podemos afirmar que, en cierta medida, el procedimiento que hemos llevado a cabo con motivo de la construcción de nuestro modelo resulta novedoso, como cabe comprobar en detalle.

Corrección de la serie de población.

Partimos de la hipótesis inicial, identificando en los años intercensales un gran número de altas y bajas inadvertidas porque no se declaran, hasta que el propio censo genera la ocasión más propicia de acudir a los organismos correspondientes.

Así pues, el período que se está revisando, 1981-1996, se divide en tres subperíodos de 5 años, en los que se consideran fiables y ciertos los valores de la población en el primer y último año de cada uno de ellos. A continuación se efectúa el siguiente razonamiento para cada subperíodo:

Si conocemos (y aceptamos como válida) la serie de crecimiento vegetativo, es posible obtener una subserie que nos informa sobre la "población debida únicamente al crecimiento natural". Al final del período, la diferencia entre la población real y esa población parcial debe aludir por fuerza al saldo migratorio real. Sólo una parte de ese número total de migrantes (entendido como número de altas menos número de bajas) se encuentra contemplada en la serie que consideramos "defectuosa", que denominaremos migrantes declarados. Entonces, la diferencia entre los migrantes reales y el total de los migrantes declarados serán los migrantes no declarados, que habrán de ser repartidos a lo largo de todo el período. Tal distribución se realiza identificando el porcentaje de no declarados en cada año con el porcentaje de los declarados. En la siguiente tabla se muestra dicho procedimiento, aplicado a la subserie 1981-1986.

Tabla 2.4 Corrección de la serie de Población.

Año	Población	Crec. Veget.	Pob.+ C.V.	Migr. declarados (%)	Migr. no declarados	Migr. total estimada	Población corregida
1981	38009	599		830 (18.9)	99	929	38009
1982		557	38608	1250 (28.47)	150	1400	39537
1983		453	39165	826 (18.81)	99	925	41494
1984		379	39618	712 (16.22)	85	797	42872
1985		369	39997	773 (17.6)	93	866	44048
1986	45283	499	40366				45283

4917 mig. reales	4391 mig. declarados	526 mig. no declarados

De esta forma hemos obtenido en un mismo procedimiento, una estimación indirecta del saldo migratorio en la comarca, a la vez que una serie corregida de población.

La superposición de las dos series de datos evidencia la adecuación del método utilizado, pues no contiene caídas bruscas en el caso corregido y éste concuerda con las expectativas reales en los saldos migratorios.

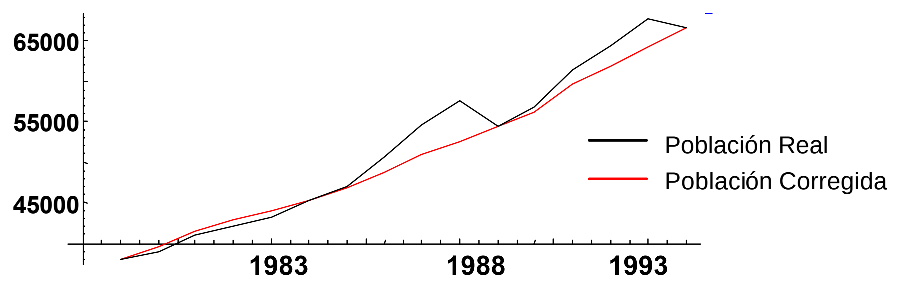


Figura 2.1

2.3.3. Variables Económicas.

Pretendemos abordar en esta ocasión las dificultades encontradas al manejar alguna de las variables económicas de nuestro modelo: Empleo y Renta per-capita.

En el mercado de trabajo se suelen utilizar los términos de "demanda de trabajo" y "oferta de trabajo" para designar, según Cáceres (1986), el volumen de mano de obra requerida para el proceso productivo general y las personas disponibles para la producción de bienes y servicios, respectivamente.

En función de estas definiciones, queda claro que la oferta de trabajo se recoge perfectamente a través de la población activa. La demanda de trabajo, por su parte, se suele identificar con la población ocupada (Jimeno, 1997; Rivero, 1997; Albarracín, 1982), al menos a efectos de confección estadística (Cáceres, 1986), ya que, como señalan Toharia y Jimeno (1994), la distinción entre ambos conceptos no queda siempre perfectamente aclarada.

De este modo, la información de ambas variables, oferta y demanda de trabajo, proviene de la EPA. Se trata de una encuesta seria, con un diseño adecuado, que se realiza con periodicidad trimestral, cuya fiabilidad es, en principio, aceptable, aunque sus resultados han sido cuestionados en ocasiones[1]. En todo caso, la EPA sólo proporciona información provincial y, para obtener los datos correspondientes al nivel municipal, habría que recurrir a la información contenida en los censos.

A pesar de que esta identificación entre población ocupada y demanda de trabajo se encuentra extendida y aceptada en la literatura económica, nosotros creemos que, en nuestro modelo, resultaría perjudicial, pues no recogería el fuerte crecimiento real que el empleo ha experimentado en la comarca.

---

[1] Por no recoger la economía sumergida, de tal manera que, supuestamente, inflacionaría el número de parados y subestimaría el empleo.

Lo anterior es consecuencia de la práctica de actividades sumergidas dentro del conjunto de la economía insular. Ruesga (1988) describe las características propias de espacios económicos susceptibles de albergar y propagar con mayor facilidad este tipo de actividades. Muchas de esas características se reconocen en la zona sur de Tenerife, donde se advierte la hegemonía de los sectores de servicios (turismo, hostelería, comercio, etc.) y de construcción, así como la existencia de empresas de reducidas dimensiones y empresarios autónomos. No es de extrañar por tanto que, según el mismo autor, la estimación realizada por el Ministerio de Economía y Hacienda en relación a la economía sumergida en nuestro país, "*parece indicar un volumen de empleo no declarado relativamente importante*", tal y como sospechamos que puede estar sucediendo en el Sur.

Por esa razón, interpretaremos que la variable empleo E viene a representar la demanda de trabajo real que se genera en la zona. Así entendida, en su sentido más estricto, esta variable carece de un equivalente cuantitativo al que acudir cuando debamos realizar las estimaciones pertinentes, y tan solo podemos basarnos en algunas consideraciones auxiliares.

En concreto, los parámetros α y δ de la ecuación de demanda de la variable E se han calculado de acuerdo a los valores de las elasticidades empleo-turismo y empleo-población, las cuales han sido estimadas utilizando como referencia la tabla Input-Output para Canarias (ISTAC[i]). En la mencionada publicación del ISTAC, se intenta realizar una valoración de la incidencia del fenómeno turístico sobre el sistema económico canario, de cuyos resultados se desprende que el turismo genera en el Archipiélago aproximadamente 71202 empleos directos más unos 21198 empleos adicionales que se corresponderían con los efectos indirectos de la actividad. Asumiendo que los empleos directos se generan como consecuencia de las plazas existentes y contabilizando un total de 337482 plazas en 1992 para Canarias, se obtendría una ratio de 0.211 empleos por cada plaza. Si asumimos además que los empleos indirectos son generados por las necesidades en servicios de los ocupados en el sector, entonces tendríamos que cada ocupado genera $\frac{21198}{71202} = 0.2977$ empleos, y puesto que la tasa de ocupación en el Archipiélago en 1992 era del 37.82%, se obtiene una ratio de 0.1126 empleos por habitante. Con esta información se procede a la igualación de elasticidades teórica y calculada, lo que permite estimar los parámetros y por consiguiente, la ecuación del Empleo.

La serie resultante presenta un comportamiento, cualitativamente hablando, muy similar al de la Oferta Turística, soportando con ello la hipótesis del turismo como generador básico de empleo.

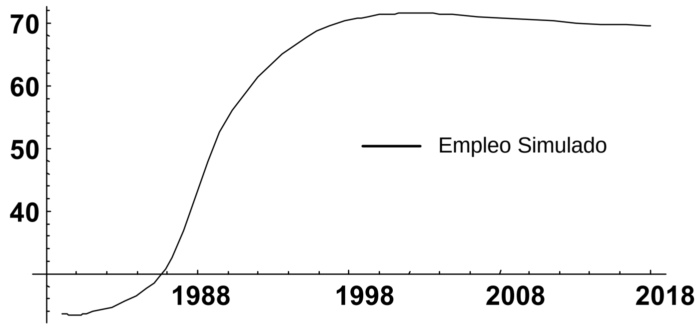


Figura 2.2

En el aspecto cuantitativo la serie refleja lo sucedido en la comarca, si tenemos en cuenta que además de la población residente en la comarca se tiene constancia de la existencia de un contingente importante de "población flotante", no empadronada, tal y como demuestra la información publicada en la prensa local (Nicolás, 1999), así como un número no menos elevado de personas que, aunque residen en otros municipios de la isla, se trasladan diariamente a desempeñar sus funciones a la zona Sur.

Al intentar emplear la variable Renta per-cápita dentro de nuestro modelo nos encontramos, una vez más, con el inconveniente que plantea la carencia de información estadística. En general, en las distintas publicaciones de esta índole tan solo se recogen de manera periódica datos para la renta familiar disponible de las distintas provincias españolas, y ocasionalmente aparecen estimaciones de la variable a nivel municipal. En concreto, la Fundación BBV, en su publicación "La Renta Nacional de España y su distribución provincial", viene ofreciendo estimaciones de la renta per-cápita a nivel provincial, las cuales gozan de un grado de aceptación más que razonable. Por otra parte, en el Anuario de Mercado Español (A.M.E.), publicación presentada por Banesto, se pueden encontrar estimaciones de los niveles de renta a nivel municipal, para todos los municipios de España, aunque no con la periodicidad deseada.

La estimación de la renta municipal se puede realizar, al menos en teoría, por métodos directos o indirectos.

El método directo se basa en la estimación de las distintas variables que definen la renta, procedimiento de muy difícil ejecución, pues tampoco existen a nivel municipal los datos análogos a los utilizados en el cómputo de las rentas provinciales. Ello, junto con las múltiples dificultades que comporta un proceso de tal envergadura y el coste que supone, explica que hayan sido escasos los intentos de estimación en esta dirección (ver Heras y otros, 1993 para referencias). Como consecuencia, son los métodos indirectos los más utilizados por los investigadores de todos los ámbitos.

La mayoría de las estimaciones indirectas que se han realizado de la renta a niveles inferiores al provincial han recurrido a la metodología de regresión múltiple. El procedimiento consiste en explicar la renta provincial en función (lineal) de cierto número de variables adecuadas, esto es, altamente correlacionadas con ella y que, además, puedan observarse a escala municipal con la necesaria fiabilidad. Conviene apuntar que la escasez de información municipal complica sustancialmente la tarea de encontrar un número suficiente de variables de estas características. Tras determinar las variables a incluir en el análisis, en una primera fase del procedimiento se estimarían los parámetros de la ecuación de regresión en un marco referencial provincial utilizando datos de las 50 provincias españolas para un año concreto (corte transversal). En una segunda fase, una vez obtenida la regresión provincial y suponiendo igualdad estructural en las provincias y los municipios españoles, se procedería a calcular la renta por habitante municipal manteniendo la misma especificación pero cambiando el marco de referencia, esto es, aplicando los coeficientes obtenidos en la regresión a los datos municipales.

Tal fue la metodología seguida en el A.M.E., ya mencionado anteriormente, donde las variables explicativas utilizadas fueron "teléfonos", "viviendas secundarias", "oficinas bancarias y cajas de ahorro". Magnitudes de la misma naturaleza, concretamente, “teléfonos”, “vehículos de turismo”, “camiones”, “bancos y cajas”, “actividades comerciales” y “plazas hoteleras” fueron empleadas por los analistas del Anuario Comercial de España (1997), previamente reducidas a tres factores mediante un Análisis Factorial. En la misma línea ha sido realizada también una estimación para los municipios tinerfeños (Arrocha y Pérez, 1992), tomando como variables explicativas “teléfonos y solicitudes”, “vehículos de turismo”, “bancos y cajas de ahorro” y “licencias comerciales no alimentarias”.

Un modelo un tanto más complejo, aunque basado en el descrito, se puede construir añadiendo una ecuación que relacione la variable Renta con la variable Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (Heras y otros, 1993), y resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas resultante. Esta medida enriquecería la estimación obtenida desde el punto de vista económico, gracias a la nueva información proporcionada por el IRPF.

Otros métodos que estiman valores para la renta municipal sin recurrir a regresión multivariante son menos comunes, aunque un ejemplo lo podemos encontrar en el ámbito canario. El ISTAC (ISTAC[h]) ha realizado una estimación indirecta en la que desglosa la renta municipal en suma de distintas componentes, según procedencia (rentas del trabajo, rentas mixtas, rentas del capital, etc.). Como tales datos no son conocidos a nivel municipal, utiliza los datos provinciales análogos, suponiendo que los ratios por población a nivel provincial se mantienen al descender al nivel municipal. De esta forma, conocidas las componentes de la renta en la provincia y las poblaciones de la provincia y de cada municipio, se obtienen estimaciones de cada uno de los sumandos que componen el total de la renta municipal. Los inconvenientes de un procedimiento de este estilo se centran, por un lado, en la ingente cantidad de información provincial que maneja, junto con el modelo simplista en el que se traduce la anterior a una información municipal.

Dada la gran cantidad de dificultades encontradas en la estimación de la renta comarcal, pues cualquiera de los métodos mencionados debería repetirse sucesivas veces hasta construir una serie representativa del período 1979-1999, multiplicándose con ello el volumen de datos necesarios, finalmente se optó por considerar la tasa media de crecimiento de la renta constante a nivel provincial y comarcal.

Habiendo repasado ya diversos aspectos relacionados con la metodología e información disponibles, pasaremos a continuación a estudiar las herramientas teóricas enmarcadas en el análisis de fenómenos de crecimiento que nos permiten formalizar algunas de las ecuaciones del modelo.

CAPÍTULO 3
Caracterización, Especificación y Estimación del crecimiento sigmoidal.

En el siguiente capítulo nos disponemos a analizar los aspectos teóricos de los fenómenos de crecimiento sigmoidales, lo que nos permitirá adelantar una caracterización general novedosa para tales tipos de procesos, así como algunas propiedades de interés. Ello nos servirá de base para trabajar en la especificación práctica de los modelos. Por último, se tratará el tema de la estimación de parámetros en un modelo concreto.

3.1. Introducción.

Acudiendo de nuevo a los dos conceptos que enmarcan el objetivo de nuestro trabajo, a saber, ajuste y simulación, el primero no quedará enteramente analizado sin abordar con detalle el proceso de estimación, problema aún por resolver por completo en el modelo. Si bien algunas tasas con claro significado real, como las que aparecen en las ecuaciones de la Población Activa o el Suelo Urbano, han sido evaluadas acudiendo a los datos disponibles, los parámetros que comparecen en las ecuaciones que describen comportamientos sigmoidales precisan un tratamiento específico, por cuanto carecen de significación material evidente[1].

Cabe entonces profundizar en el análisis de los fenómenos de crecimiento, cuya aparición es común en numerosas áreas de interés científico. El estudio de procesos tales como el crecimiento de la población, en Demografía y Geografía, el crecimiento celular, en Biología y Fisiología, la evolución de la deuda pública, en Economía, la disminución de las zonas verdes, en Ecología o la expansión de las plagas, en Agricultura, son tan sólo una muestra de ello.

Ligados a los fenómenos de crecimiento se encuentran también los fenómenos de difusión: entre otros, la adopción de una nueva tecnología o la propagación de una epidemia, y que, en efecto, miden algún tipo de crecimiento (el número de personas que adoptan la tecnología o que contraen la enfermedad). Entonces, no resulta exagerado afirmar que el crecimiento y la evolución son fenómenos fundamentales para la existencia humana.

En definitiva, tanto los procesos clásicos de crecimiento como los de difusión vienen a representar el aumento continuo y gradual a lo largo del tiempo de cierta cantidad, fenómeno que designaremos genéricamente por *crecimiento*. Y en ese sentido, siguiendo a Berny (1994), una *curva de crecimiento* es aquella que describe cómo cierta cantidad medible, relacionada con la acción, proceso o modo de crecimiento, aumenta en el tiempo.

Según lo anterior, se justifica, pues, la importancia de un estudio centrado en las diferentes curvas de crecimiento dado el amplio abanico de aplicación que tienen en todos los ámbitos del conocimiento humano.

---

[1] Aunque algunos autores insisten en encontrarle interpretación tangible, por lo demás altamente artificiosa (ver Hightower, 1998; Banks, 1994; Bertalanffy, 1986).

En concreto, uno de los objetivos de este trabajo apunta a la modelización para su posterior análisis de varias variables que, como las anteriormente citadas, han evolucionado históricamente según un patrón de crecimiento que pretendemos descubrir o, al menos, aproximar. En particular, la Oferta Turística, como ya se ha justificado, representa una de las piezas más importantes (si no la más) dentro del rompecabezas del sistema económico del Sur, y en su modelización se ha invertido gran cantidad de tiempo, esfuerzo y energía.

El crecimiento se observa a través del comportamiento dinámico de cierta variable, X, y su intensidad se puede medir mediante la tasa de crecimiento o velocidad de cambio de la variable, $\frac{dX}{dt}$, o también por la tasa de crecimiento relativa, dada por $\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}$. Así, por ejemplo, el crecimiento exponencial se produce cuando la primera de las tasas es directamente proporcional al nivel existente en cada momento, o dicho de otro modo, la tasa de crecimiento relativo es constante. En definitiva, una variable que presente un crecimiento exponencial deberá satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = aX \text{ , con } a > 0$$ [2]

El modelo exponencial caracteriza un crecimiento típico de una colonia sobre un medio de capacidad ilimitada, bajo la hipótesis de que cada elemento se reproduce independientemente sin estorbar a los restantes.

Evidentemente, las anteriores circunstancias son poco realistas. De hecho, los procesos de crecimiento se desarrollan por lo general en un entorno de recursos limitados, donde los elementos interactúan y compiten por ellos. Por lo tanto, en ningún caso las condiciones de crecimiento podrán sostener una situación en la que el modelo exponencial permanezca válido a largo plazo, simplemente porque nada

[2] Si $a < 0$ se trataría de un proceso de decrecimiento.

puede crecer indefinidamente. Así, este tipo de modelos sólo pueden describir el crecimiento para pequeños valores del tiempo y a partir de cierto período son otros factores relacionados con el entorno de la variable los que entrarán en escena para frenarlo.

La introducción en el modelo de un límite al crecimiento o capacidad de carga se puede hacer de varias formas, generando con ello distintos modos de crecimiento. El modelo más clásico en esta categoría es sin duda el modelo logístico, cuya característica fundamental se puede enunciar diciendo que *la tasa de crecimiento de la variable es directamente proporcional a lo que le resta en cada instante para alcanzar el límite superior*, lo que viene a representar la interacción de los elementos. Entonces, si denotamos por L la capacidad de carga del entorno, el crecimiento logístico vendría caracterizado por la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = aX(L - X), \text{ con } a > 0, \quad X \in (0, L)$$

En este caso, la tasa de crecimiento de la variable no es creciente, como en el modelo exponencial, pues conoce en primer lugar una fuerte inflación seguida de decrecimiento. En definitiva, la curva resultante se compone de un crecimiento exponencial y un proceso de saturación que depende de la densidad (a mayor densidad de crecimiento de X los elementos se estorban cada vez más).

En general, cualquier tipo de crecimiento vendrá dado por una función continua y creciente del tiempo, $X=F(t)$, que podemos suponer, además diferenciable, y el proceso se puede describir a través de la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X)$$

expresable también en forma autónoma, pues la relación monótona entre X y t garantiza la existencia de la función inversa para $F(t)$.

Por consiguiente, en adelante nos referiremos a una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{dX}{dt} = g(X)$$

para describir un modelo de crecimiento.

3.2. Caracterización del Crecimiento Sigmoidal.

Entendemos por crecimiento sigmoidal aquél que en su evolución pasa por dos fases diferenciadas: una primera fase en la que experimenta un crecimiento de tipo exponencial, más o menos lento, seguido de otra fase en la que se observa un crecimiento amortiguado, de tipo asintótico, de tal forma que, en conjunto, describe una curva en forma de S alargada. Esas características se pueden traducir en propiedades analíticas de la siguiente forma:

Definición 3.2.1

Dada una función $X(t)$ de clase $C^{2)}$ y creciente, se dice que describe un crecimiento sigmoidal si presenta dos asíntotas horizontales (superior e inferior) y tiene un único punto de inflexión en su recorrido.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la asíntota inferior estará en $X=0$, mientras que L denotaría, como ya hemos dicho, el valor de la asíntota superior.

El comportamiento sigmoidal queda asociado de igual manera a una ecuación diferencial específica, determinada por las propiedades que verifica la función derivada.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial asociada, escrita en forma autónoma:

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

Entonces podremos inferir las siguientes propiedades para $F(X)$, teniendo en cuenta que $F(X(t))=X'(t)$ y que X presenta crecimiento sigmoidal:

- F es una función continua y diferenciable, por ser X de clase C$^{2)}$.

- $F(X) \geq 0$, pues siempre $X'(t) \geq 0$ al ser X creciente.

- F tiene un (único) máximo en $X=X^i$, ya que, como X tiene un (único) punto de inflexión en $t=t^i$ se tiene $\{X''(t^i)=0$, con $X''(t^i+e)<0$ y $X''(t^i-e)>0, \ \forall e>0\}$, luego $\{F'(X^i)=0$, con $F'(X^i+d)<0$ y $F'(X^i-d)>0, \forall d>0$, siendo $X^i = X(t^i)\}$.

- $F(L)=0$ y $F(0)=0$, pues por ser $\lim_{t\to\infty} X(t)=L$ y $\lim_{t\to-\infty} X(t)=0$ se tiene $\lim_{t\to\infty} X'(t) = \lim_{t\to-\infty} X'(t)=0$ y entonces queda claro que

  $F(L) = X'(X^{-1}(L)) = \lim_{t\to\infty} X'(t) = 0$. (Análogamente, $F(0)=0$)

  Además, $F(X) \neq 0 \ \ \forall X \in (0,L)$, pues, en otro caso, puesto que $F(X) \geq 0$, $\forall X \in [0,L]$, tendría que darse otro máximo en F, lo cual contradice el segundo punto.

- Las integrales impropias $\int_0^{X_0} \frac{dX}{F(X)}$ y $\int_{X_0}^{L} \frac{dX}{F(X)}$ son ambas divergentes, puesto que realizando el cambio de variable $X = X(s)$ se obtienen las expresiones $\int_0^{X_0} \frac{dX}{F(X)} = \int_{-\infty}^{t_0} ds = \infty$ y $\int_{X_0}^{L} \frac{dX}{F(X)} = \int_{t_0}^{+\infty} ds = \infty$.

  Visto esto, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.2.2 (de caracterización del comportamiento sigmoidal)**.**

"Sea X: IR ® [0,L] una función creciente de clase C$^{2)}$. Entonces X(t) presenta un crecimiento sigmoidal si y sólo si X(t) es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{3.1}$$

siendo F:[0,L] ® $\mathbb{R}$ una función diferenciable que verifica las condiciones:

i) $F(X) > 0,\ .\ X \in (0,L)$

ii) $F(0)=F(L)=0$

iii) *F tiene un único máximo.*

iv) $\int_0^{X_0} \frac{dX}{F(X)}$ *y* $\int_{X_0}^{L} \frac{dX}{F(X)}$ *divergen. "*

Demostración:

"⇒" Si X(t) es creciente, entonces existe su función inversa, t=t(X), y, en ese caso, $\frac{dX}{dt} = X'(t) = X'(t(X)) = F(X)$*, que verifica las condiciones citadas, según se desprende de los razonamientos precedentes.*

"⇐" Si X(t) es solución de la ecuación (3.1), se tiene, por integración en variables separadas:

$$\int_{X_0}^{X} \frac{dX}{F(X)} = t - t_0$$

Entonces, se pueden deducir las siguientes propiedades:

- *X es de clase $C^{2)}$, por ser F diferenciable.*

- *X es creciente, puesto que* $X'(t) = \frac{dX}{dt} = F(X) > 0\ .\ X \in (0,L) \Rightarrow X'(t) > 0\ .$ $t \in$ *(-¥,¥).*

- *X tiene una asíntota inferior en X=0 (y otra superior en X=L), puesto que sabemos que* $\int_0^{X_0} \frac{dX}{F(X)} = \lim_{a->0} \int_a^{X_0} \frac{dX}{F(X)} = \infty$*, expresión que transformamos haciendo el cambio de variable* $X = X(s)$ *para obtener* $\lim_{a->0} \int_{X^{-1}(a)}^{t_0} ds = \infty \Leftrightarrow$

$\lim_{a \to 0} X^{-1}(a) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{t \to -\infty} X(t) = 0$. *(Un razonamiento análogo demostraría que* $\lim_{t \to +\infty} X(t) = L$ *)*

- *X tiene un único punto de inflexión, puesto que* $X''(t) = F'(X)$, *la cual se anula por hipótesis en el único punto en el que F presenta su máximo.*

Y teniendo, pues, que se verifican los cuatro puntos anteriores, queda como consecuencia demostrado que X describe un crecimiento sigmoidal.

El teorema anterior ofrece pautas a seguir a la hora de establecer un modelo dinámico asociado a los comportamiento sigmoidales, como:

$$\frac{dX}{dt} = \cos^2\left(X - \frac{p}{2}\right)$$

$$\frac{dX}{dt} = aX(1 - \sqrt{X})$$

$$\frac{dX}{dt} = aX(\log L - \log X) \qquad \text{(función de Gompertz)}$$

Pero sin duda, la forma más natural y directa de construir una función *F(X)* que verifique las condiciones *i)-iv)* del teorema es la que ofrece el modelo logístico, ya descrito en el apartado anterior, y ampliamente utilizado en modelos de crecimiento en Demografía y Biología:

$$\frac{dX}{dt} = aX(L - X)$$

El teorema que se presenta a continuación demuestra que cualquier curva sigmoidal se puede obtener mediante una transformación conveniente de la curva logística que podríamos llamar "canónica". Como consecuencia, es inmediato deducir que dos curvas sigmoidales pueden transformarse la una en la otra.

Teorema 3.2.3

“ Sea X(t) una curva logística, solución de la ecuación diferencial $\frac{dX}{dt} = X(1-X)$*, y sea Y(t) una curva sigmoidal cualquiera. Entonces existe un difeomorfismo H:(0,L) ® IR, que verifica:*

$$Y(t) = H^{-1}\left(\ln\left(\frac{X}{1-X} \right) + k \right) \text{ ”}$$

Demostración:

X es solución de $\frac{dX}{dt} = X(1-X) \;\Rightarrow$

$\int_{X_0}^{X} \frac{dX}{X(1-X)} = t - t_0 \;\Rightarrow\; g(X) - g(X_0) = t - t_0$, *siendo* $g(X) = \ln\left(\frac{X}{1-X} \right)$ *el valor de la integral por cuadraturas.*

Por otra parte, según el teorema 3.2.2 (de caracterización), Y debe ser solución de (3.1), con alguna función F verificando las propiedades i)-iv) del teorema, para la que se tiene $\int_{Y_0}^{Y} \frac{dX}{F(X)} = t - t_0$.

Sea H(Y) una primitiva de $\frac{1}{F(Y)}$*. Entonces podemos razonar:*

- *H(Y) existe, ″ Y Î (0,L), pues* $\frac{1}{F(Y)}$ *es continua en ese intervalo y es derivable, siendo* $H'(Y) = \frac{1}{F(Y)}$, *y también,*

- *H'(Y)>0, ″ Y Î (0,L), luego H(Y) es creciente y admite inversa.*

Como consecuencia, H es un difeomorfismo en (0,L), teniéndose entonces que

$$g(X) - g(X_0) = H(Y) - H(Y_0),$$

de donde obtenemos

$$Y = H^{-1}\left(\ln\left(\frac{X}{1-X}\right)+k\right).$$

El anterior teorema demuestra, por tanto, que todas las funciones sigmoidales están relacionadas entre sí[3]. Dicho en otros términos, los sistemas dinámicos caracterizados por un crecimiento sigmoidal son equivalentes, en el sentido siguiente:

Definición 3.2.4 (Medio, 1993)

Sean los sistemas dinámicos

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3.2}$$

y

$$\frac{dx}{dt} = g(x) \tag{3.3}$$

siendo f y g funciones de clase $C^{r)}$. Se dice que dichos sistemas son equivalentes de clase $C^{k)}$ ($C^{k)}$ - equivalentes) (k £ r) si existe un difeomorfismo de clase $C^{k)}$[4], h, que transforma las órbitas generadas por f en órbitas generadas por g, conservando la orientación del flujo. La equivalencia de clase $C^{0)}$ se denomina equivalencia topológica.

Entonces, dados los sistemas

$$\frac{dX}{dt} = X(1-X) \tag{3.4}$$

---

[3] Intuitivamente, podríamos imaginarnos cómo tendríamos que moldear un alambre en forma de "S", estirándolo y contrayéndolo sin cambios bruscos, para convertirlo en otra "S" distinta.

[4] Un difeomorfismo de clase $C^{k)}$ es una aplicación invertible de clase $C^{k)}$ con inversa de clase $C^{k)}$

y

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{3.5}$$

correspondientes (respectivamente) a un comportamiento logístico clásico y a un crecimiento sigmoidal cualquiera, la equivalencia $C^{1)}$ de ambos sistemas se sigue inmediatamente del teorema anterior, pues proporciona un difeomorfismo que resulta adecuado, tal y como veremos en los razonamientos que siguen.

Proposición 3.2.5

Si X es una solución (órbita) de (3.4), existe un difeomorfismo h, que verifica que h(X) es una solución (órbita) de (3.5).

Demostración.

Sea $h(X) = H^{-1}(G(X))$, *donde* $G(X) = g(X) - g(X_0) + H(Y_0)$, *con* $g(X) = \ln\left(\dfrac{X}{1-X}\right)$, *y H(X) representando una primitiva de* $\dfrac{1}{F(X)}$, *tal y como se vio en el teorema 3.2.3.*

Puesto que G es derivable y con derivada no nula en el intervalo (0,L), se trata de un difeomorfismo (de clase $C^{1)}$*), propiedad que también verifican H y h. Entonces, el resultado deseado se obtiene si se tiene en cuenta, además, que se da la transformación de órbitas en virtud de que*

$$\frac{dh(X)}{dt} = \frac{dh}{dX}\frac{dX}{dt} = \left(\frac{dH}{dX}(h(X))\right)^{-1}\frac{dG}{dX}\frac{dX}{dt} = F(h(X))\frac{1}{X(1-X)}\frac{dX}{dt} = F(h(X)),$$ *por ser X solución de (3.4).*

Por otra parte, según se observa, $h'(X) > 0 \quad \forall X \in (0,1)$, y por tanto, según Medio (1993), se preserva la orientación del flujo, con lo que quedaría demostrado efectivamente la equivalencia de los sistemas (3.4) y (3.5), tal y como enunciamos a continuación.

Teorema 3.2.6

Los sistemas dinámicos de crecimiento sigmoidal (3.4) y (3.5) son equivalentes de clase $C^{1)}$.

Una consecuencia directa de la propiedad de equivalencia de sistemas dinámicos es la transformación de los equilibrios, puesto que si (3.2) y (3.3) son sistemas equivalentes, y x_0 es un punto fijo de (3.2), entonces $h(x_0)$ es punto fijo de (3.3), ya que $g(h(x_0)) = \left.\frac{dh(x)}{dt}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=x_0} F(x_0) = 0$.

Si aplicamos lo anterior al caso de estudio, se obtiene que los puntos fijos X=0 y X=1 del sistema logístico (3.4) se transformarán en correspondientes equilibrios en el sistema (3.5), siendo

$$h(1) = H^{-1}(G(1)) = H^{-1}(+\infty) = \left\{ X : \int_{X_0}^{X} \frac{du}{F(u)} = +\infty \right\} = L, \quad \text{por hipótesis, al}$$

igual que

$$h(0) = H^{-1}(G(0)) = H^{-1}(-\infty) = \left\{ X : \int_{X_0}^{X} \frac{du}{F(u)} = -\infty \right\} = 0.$$

Además, se demuestra que si los sistemas dinámicos (3.2) y (3.3) son equivalentes de clase $C^{k)}$, con $k \geq 1$, entonces los autovalores de la matriz Jacobiana $Df(x_0)$ coinciden (salvo en un factor multiplicativo positivo) con los autovalores de la correspondiente matriz $Dg(h(x_0))$ (Guckenheimer y Holmes, 1990), lo cual se relaciona con las características dinámicas de los sistemas en las inmediaciones de los correspondientes puntos de equilibrio. Así, la equivalencia de los sistemas dinámicos resulta especialmente útil para comprender el comportamiento cualitativo de sistemas aparentemente intratables a través del estudio de sistemas equivalentes, cuyas características y propiedades sean más fácilmente analizables, como veremos en el siguiente capítulo.

Sin embargo, en ocasiones también resulta imprescindible estudiar los sistemas dinámicos en lo que concierne a la parte cuantitativa, y esto es cierto principalmente cuando nos encontramos en un entorno de modelización. En efecto, en este tipo de proyectos se afirma que cierto sistema se rige por una ecuación diferencial determinada, en la que la especificación funcional se ha realizado, por lo general, atendiendo a cuestiones prácticas. En ese caso cabe preguntarse, en el supuesto más que probable de que dicha especificación estuviera incurriendo en un error, cuánto distaría la solución real de la obtenida en el modelo. Pasaremos a estudiar este tema en la siguiente sección.

3.3. Sistemas Aproximados.

En este punto nos encontramos en una situación en la que disponemos de una serie de datos, con perfil sigmoidal y pretendemos especificar un modelo dinámico. Por el teorema 3.2.2, ya sabemos que existe una función F diferenciable, con una serie de características prefijadas dadas por las propiedades *i)-iv)* que lo caracteriza. Pero el único conocimiento de esas propiedades no proporciona información suficiente para la determinación de la función. Una posible vía de escape para este contratiempo lo proporciona la teoría de aproximación de funciones, que permite aproximar cierta función $f(x)$ por combinación de funciones varias. En el Análisis Numérico se suele aproximar funciones con polinomios, dadas las conocidas ventajas que éstos ofrecen en aspectos analíticos: continuidad, derivabilidad o integrabilidad, entre otros.

En el presente apartado se recogerán sin demostración algunos de los resultados del Análisis Numérico en relación a la aproximación polinómica de funciones, y se estudiarán las consecuencias de aproximar F y resolver el correspondiente sistema dinámico aproximado.

3.3.1. Aproximación uniforme.

A la hora de estudiar la aproximación de funciones, es necesario definir el concepto de proximidad, o "cercanía", vinculado al análisis de cierta norma. La aproximación uniforme pretende encontrar el polinomio que se acerca a una función *f(x)* hasta cierto grado prefijado, midiendo dicho acercamiento en la norma llamada uniforme o del máximo: $\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$.

El conocido teorema de Weierstrass, que enunciaremos a continuación, constituye la piedra angular de la aproximación polinómica, y justifica el uso de los polinomios en la teoría de la aproximación funcional, puesto que garantiza que un polinomio puede ser determinado con una desviación máxima arbitrariamente pequeña de *f(x)* en $[a,b]$.

Teorema 3.3.1 (de Weierstrass)

"Si f(x) es continua sobre el intervalo [a,b], entoces, dado cualquier $e > 0$*, existe un* $n = n(e)$ *y un polinomio p(x) de grado n tales que* $|f(x) - p(x)| < e$ *"*

Existen diversas demostraciones de este teorema. La debida a Bernstein[5] concluye el resultado deseado tras la construcción de una sucesión de polinomios que convergen uniformemente a *f(x)*. Considerando, sin pérdida de generalidad, a=0 y b=1 (en otro caso se efectuaría previamente el cambio de variable $y = \dfrac{x-a}{b-a}$), dichos polinomios son los llamados polinomios de Bernstein, definidos por

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

3.3.2. Mejor aproximación uniforme.

El teorema de Weierstrass nos proporciona un polinomio que se encuentra arbitrariamente próximo a una función dada. Evidentemente, cuanta más precisión exijamos en la aproximación, se deberá incrementar el grado del polinomio. La cuestión que se plantea ahora tiene que ver con la elección del polinomio que mejor aproxima a f, dentro del conjunto de polinomios de un grado prefijado.

[5] Consultar por ejemplo Ralston (1986) o Davis(1975).

Cuando estamos tratando con la norma del máximo este proceso se denomina aproximación de Chebyshev o aproximación minimax.

Teorema 3.3.2 (Davis, 1975)

"Si f(x) es continua en [a,b] y $\wp_n$ *denota el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n, entonces se tiene que el problema de*

$$\min_{p \in \wp_n} \max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|$$

tiene solución y es única.

3.3.3. Aproximación uniforme con interpolación.

Hemos visto que toda función continua puede ser aproximada por un polinomio. Sabemos también que dado un conjunto de puntos es posible encontrar un polinomio que interpola los valores de la función en esos puntos. Veremos a continuación que ambas propiedades, aproximación e interpolación, pueden combinarse.

Teorema 3.3.3 (de Walsh) (Davis, 1975)

"Si f es una función continua definida en [a,b] y $x_1, x_2, ...x_n$ *son n puntos del intervalo, entonces f es uniformemente aproximable por polinomios p(x) que verifican* $p(x_i) = f(x_i) \quad i = 1,...n$ *"*

El inconveniente principal que plantea la interpolación tiene dos vertientes.

- Por un lado, la elección de los nodos o puntos a interpolar quedaría como cuestión arbitraria.
- Además, la condición de interpolación fuerza a los polinomios correspondientes a pasar por unos puntos concretos y como consecuencia estos polinomios presentan, por lo general, gran cantidad de máximos y mínimos.

3.3.4. Aproximación en norma L_2

En esta ocasión el grado de proximidad entre función y polinomio será evaluado con la norma $\|f\|_2 = (\int_a^b f(x)^2\,dx)^{1/2}$, que es una generalización al espacio de funciones de la norma euclídea (usual) en $\mathbb{R}^n$.

Un resultado análogo al que ofrece el Teorema de Weierstrass se puede enunciar también en este contexto, tal y como hacemos a continuación, asegurando la aproximación en norma L_2 de cualquier función por polinomios de grado suficientemente elevado.

Teorema 3.3.4 (Davis, 1975**)**

"Sea f(x) una función continua en [a,b], y sea $e > 0$. *Entonces, existe un* $n = n(e)$ *y un polinomio p(x) de grado n tales que* $\int_a^b (f(x) - p(x))^2\,dx < e$ *"*

3.3.5. Mejor aproximación en norma L_2.

Este concepto, conocido también como aproximación por mínimos cuadrados, surge al intentar encontrar, de entre todos los polinomios de grado prefijado, aquél que mejor aproxima a *f(x),* como alternativa a aumentar indiscriminadamente el grado del polinomio. Este proceso siempre tiene solución, tal y como indica el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5 (Ayant y Borg, 1974)

" Si f(x) es una función continua en [a,b] se tiene que el problema de minimizar en el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n la expresión

$$\int_a^b (f(x) - p(x))^2\,dx$$

tiene solución, y viene dada por

$$\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} < f, p_i^* > p_i^*$$

donde < , > indica el producto escalar asociado a la norma, esto es,

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

y $\{p_i^*\}$ *representa una familia ortonormal de polinomios en [a,b]*[6] *"*

Además, si $\overline{p}$ denota el polinomio de grado *n* que aproxima a *f* por mínimos cuadrados, entonces se tiene que $\frac{\|f - \overline{p}\|_2}{\sqrt{b-a}}$ representa una medida del error medio cometido en la aproximación (Atkinson, 1989), con lo que se puede entender la aproximación por mínimos cuadrados como el procedimiento que minimiza el error medio.

3.3.6. Comparación de soluciones de sistemas próximos.

Retomemos el ejercicio propuesto de modelización sigmoidal, cuyo objetivo consistía en encontrar la función *F(x)*, que representaba la tasa de variación de la variable, tal y como se enunciaba en el teorema 3.2.2 (de caracterización), o en última instancia una aproximación a ella.

En secciones anteriores hemos recopilado del Análisis Numérico la información que nos permite establecer ciertas bases que nos ayuden a encontrar un polinomio que aproxime a una función arbitraria.

Supongamos que conocemos ese tal polinomio, *P(x)* para la función *F* (bien sea en norma uniforme o cuadrática). El modelo dado por $\frac{dX}{dt} = P(X)$ supondría una aproximación de la especificación real, esto es, un sistema aproximado. La pregunta natural, que aparece recogida en los dos teoremas siguientes, investigaría las diferencias entre las soluciones de los sistemas aproximado y real.

---

[6] El procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt permite obtener los polinomios ortonormales respecto de cualquier producto escalar. Ver, por ejemplo, Krall (1973) o Atkinson (1989).

Teorema 3.3.6 (de comparación de soluciones de sistemas próximos I).

"Sean f,g: $\Omega \subset \mathbb{R}$ ® $\mathbb{R}$ *continuas, definidas en un abierto* Ω *y verificando que* $\exists K > 0$ *tal que* $\forall x, y \in \Omega$ *se tiene* $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ *(f es globalmente Lipschitziana) y también que* $\sup_{[t_0,t_1]} |f(x) - g(x)| \leq e$ *(f y g están próximas). Sean además x(t) e y(t), definidas en [*t_0,t_1*] las soluciones de los sistemas respectivos, (3.2) y (3.3), que comienzan en* x_0*. Entonces se tiene que* $|x(t) - y(t)| \leq \frac{e}{K}\left(e^{K(t-t_0)} - 1\right)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$*."*

Demostración:

Puesto que x(t) e y(t) son soluciones de sus respectivas ecuaciones diferenciales, adoptarán la forma:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \quad e \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(y(s))ds,$$

de modo que

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} (f(x(s)) - g(y(s)))ds = \int_{t_0}^{t} (f(x(s)) - f(y(s)))ds + \int_{t_0}^{t} (f(y(s)) - g(y(s)))ds$$

con lo que $|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} K|x(s) - y(s)|ds + e\,(t - t_0)$, *tras imponer la condición de Lipschitz y la hipótesis de proximidad entre f y g. Aplicando a continuación la desigualdad de Gronwall*[7]*, identificando* $f(t) = e(t - t_0)$ *y* $g(t) = K$, *se obtiene la desigualdad:*

$$|x(t) - y(t)| \leq e\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} e\,(s - t_0)Ke^{K(t-s)}ds$$

---

[7] Desigualdad de Gronwall: Sean y(t), f(t), g(t) funciones continuas y positivas en [a,b], tal que se verifica $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds$, $\forall t \in [a, b]$ Entonces se tiene (Guzmán, 1980) $y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds$.

que, tras resolver la integral por partes, proporciona la acotación deseada:

$$|x(t)-y(t)| \leq \frac{\boldsymbol{e}}{K}\left(e^{K(t-t_0)}-1\right).$$

Teorema 3.3.7 (de comparación de soluciones de sistemas próximos II).

"Sean f,g:[0,L] Ì IR ® IR continuas, verificando que $\exists K>0$ *tal que* $\forall x,y \in$ *[0,L] se tiene* $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ *(f es globalmente Lipschitziana) y también que* $\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx \leq \boldsymbol{e}$ *(f y g están próximas). Sean además x(t) e y(t), definidas en [t_0,t_1] las soluciones de los sistemas respectivos, (3.2) y (3.3), que comienzan en x_0, y supongamos adicionalmente que el sistema (3.3) corresponde a un crecimiento sigmoidal. Entonces se tiene que* $\exists M>0: |x(t)-y(t)| \leq \sqrt{\boldsymbol{e}\,M}\,e^{K(t-t_0)}$, $\forall t \in [t_0,t_1]$*."*

Demostración:

De nuevo, x(t) e y(t) tendrán la forma:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x(s))ds \quad e \quad y(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} g(y(s))ds$$

por lo que

$$|x(t)-y(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}(f(x(s))-g(y(s))ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} K|x(s)-y(s)|ds + \int_{t_0}^{t}|f(y(s))-g(y(s))|ds$$

Procedemos seguidamente a la acotación del segundo sumando, efectuando el cambio de variable $\{u=y(s);\, du=g(y(s))ds\}$*, con lo que se obtiene:*

$$\int_{t_0}^{t}|f(y(s))-g(y(s))|ds = \int_{x_0}^{y(t)}\frac{|f(u)-g(u)|}{g(u)}du \leq \left(\int_{x_0}^{y(t)}(f(u)-g(u))^2du\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{x_0}^{y(t)}\frac{du}{(g(u))^2}\right)^{1/2}$$

tras aplicar la desigualdad de Hölder[8] *(p=q=2). Ahora bien, puesto que*

$\int_{x_0}^{y(t)} (f(u)-g(u))^2 du \leq \int_0^L (f(u)-g(u))^2 du \leq e$ *, y también*

$\int_{x_0}^{y(t)} \frac{du}{(g(u))^2} \leq M$ *, para valores finitos de t, pues en ese caso Y<L, entonces podemos concluir que*

$$|x(t)-y(t)| \leq \int_{t_0}^{t} K|x(s)-y(s)|ds + (eM)^{1/2}$$

y de aquí, aplicando una vez más la desigualdad de Gronwall, se obtiene que

$$|x(t)-y(t)| \leq \sqrt{eM} + \int_{t_o}^{t} \sqrt{eM} K e^{K(t-s)} ds = \sqrt{eM}\, e^{K(t-t_0)}.$$

En conclusión, los anteriores teoremas ofrecen sendas acotaciones para la diferencia entre las soluciones real y aproximada y así, resolviendo el sistema aproximado (en cualquiera de las normas estudiadas), ambas podrían distanciarse a medida que se alejan del instante inicial, en magnitud exponencial (dependiendo de las particularidades de F).

En cualquier caso, el desarrollo anterior ofrece exclusivamente resultados teóricos. Por un lado, los polinomios de Bernstein, posibilitando una demostración constructiva del teorema de Weierstrass, no dan generalmente por sí mismos aproximaciones polinomiales útiles, pues presentan una convergencia, en general, lenta (Atkinson, 1989). Sobreestiman el grado necesario para conseguir una aproximación deseada (Ralston, 1986) y tienen el inconveniente de no poder ser

---

[8] Desigualdad de Hölder: $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f^p(x)|dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g^q(x)|dx\right)^{1/q}$, para p y q verificando $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (Amillo y Arriaga, 1987).

calculados en la práctica, cuando la información que se tiene de *f(x)* es limitada impidiendo el cómputo de los polinomios. El mismo inconveniente se reconoce en el cálculo del polinomio que más se aproxima a F en el sentido de los mínimos cuadrados, puesto que la propia función F interviene en la evaluación de los coeficientes de dicho polinomio.

3.4. Especificación polinomial.

La cuestión que debemos resolver a continuación tiene que ver con la elección de la especificación adecuada para un modelo sigmoidal que ajuste una serie histórica dada. Basando dicha elección en el teorema 3.2.2 de caracterización de comportamiento sigmoidal, el problema se reduce a encontrar la función *F(X)* del teorema.

En el apartado anterior hemos establecido la existencia de polinomios que aproximan a la función exacta, *F*, aunque por el momento no estamos en disposición de obtener dichos polinomios, puesto que su construcción requiere el conocimiento de la propia función.

Ahora bien, según el teorema de caracterización, la función F se identifica con la tasa de crecimiento de la variable original, esto es, con su derivada, la cual puede ser estimada por diferencias finitas a partir de los datos muestrales disponibles. Esto nos permite disponer de una serie de puntos (x_i, y_i) que deberán corresponderse con valores de la función teórica, $(x_i, F(x_i))$. Por consiguiente, podemos considerar que nuestra función F es conocida a través de una tabla de valores. Existen herramientas de aproximación funcional análogas a las ya mencionadas que resuelven el problema de encontrar un polinomio (de grado prefijado) que se acerque a los puntos disponibles en alguna norma. La existencia de dicho polinomio se puede asegurar en virtud de los teoremas que a continuación citamos sin demostración (Davis, 1975):

Teorema 3.4.1 (Aproximación minimax)

" Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n puntos distintos, con $n > m$. El problema $\min_{a_0,\ldots,a_m} \max_{1\le i\le n} \left| f(x_i) - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m) \right|$ tiene solución."

Teorema 3.4.2 (Aproximación por mínimos cuadrados)

" Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n puntos distintos, con $n > m$. El problema $\min_{a_0,\ldots,a_m} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m) \right)^2$ tiene solución."

Aunque la aproximación minimax tiene la ventaja de proporcionar una cota segura del error cometido, no es útil en las aplicaciones con datos empíricos donde la determinación de los coeficientes es una tarea extremadamente difícil de llevar a cabo pues el valor absoluto no es diferenciable. Además, se ha verificado que otra clase de funciones (racionales) conducen a errores máximos más pequeños que los polinomios (Ralston, 1986), y son, por tanto, más comúnmente utilizadas en un contexto mínimo-máximo.

Por otra parte, la técnica de los mínimos cuadrados tiene la propiedad de generar una aproximación "suave" de la función, aun cuando los valores funcionales disponibles contengan algún tipo de perturbación, cuestión bastante común en aplicaciones prácticas. Además, si se puede asumir una distribución normal en los errores, entonces el método de los mínimos cuadrados es más apropiado por razones estadísticas (Schwarz, 1989).

Si utilizamos la aproximación por mínimos cuadrados, los coeficientes del polinomio aproximante, a_i, se pueden obtener derivando la función a minimizar e igualando a 0. Este procedimiento conduce a un sistema de ecuaciones lineales en las m+1 variables a_i llamado sistema de ecuaciones normales, cuya resolución puede ser más o menos compleja. El problema principal radica en el mal condicionamiento de la matriz de coeficientes de dicho sistema para valores relativamente grandes del grado del polinomio, *m* (Ralston, 1986). Para obviar esta dificultad, se puede efectuar una variante en el método, de forma que el polinomio aproximante se escriba como combinación lineal de un conjunto de polinomios ortonormales, esto es, verificando $\sum_{i=1}^{n} p_j(x_i) p_k(x_i) = \boldsymbol{d}_{jk}$

Habiendo resuelto las cuestiones numéricas, es posible encontrar un polinomio de grado prefijado que proporciona la mejor aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados a los datos disponibles, de entre todos los polinomios del mismo grado. Algunos programas comerciales, como por ejemplo el Mathematica, disponen de rutinas especialmente diseñadas para realizar dicha tarea. Pero aún queda por determinar la correcta elección del grado del polinomio.

Referente a esa cuestión, Ralston (1986) propone el siguiente procedimiento iterativo: Comenzando por m=1[9], aumentar sucesivamente el grado hasta que no se produzca en s_m^2 un decrecimiento significativo, siendo m el grado del polinomio aproximante y $s_m^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - p(x_i)\right)^2}{n - m - 1}$ una estimación de la varianza del error muestral.

Entonces, según todo lo descrito hasta ahora, se deduce que una posible especificación funcional para nuestro modelo viene dada por

$$\frac{dX}{dt} = P(X)$$

siendo *P(X)* el polinomio de grado m que aproxima por mínimos cuadrados a los puntos, de tal manera que la varianza estimada s_m^2 es mínima.

[9] Se puede comenzar en m>1 si se tiene alguna información a priori

El problema que subyace a este modo de especificación está relacionado con la interpretación del modelo. Partimos de la base de que es posible elegir un polinomio *P(X)* adecuado para que la simulación se ajuste con precisión a los datos reales. Entonces, la utilidad matemática está fuera de toda duda si el objetivo principal es la reproducción fidedigna de los datos, teniendo en cuenta las palabras de L. von Bertalanffy[10]. Entonces, de acuerdo a los objetivos del modelo, ¿cómo cabe interpretar materialmente la identificación de la tasa de variación de la variable a ese polinomio concreto? Y ¿es posible reflejar en el modelo otros componentes más relacionados con el entorno, tales como capacidad de carga, velocidad máxima de crecimiento...?

La respuesta a esta última pregunta es afirmativa, por cuanto la capacidad de carga debe coincidir con la mayor de las raíces del polinomio $P(X)$, de entre las que se encuentran en el rango de variación de la variable. Este hecho enriquece un aspecto importante en la modelización de fenómenos sigmoidales, que es precisamente la estimación del límite superior de crecimiento, cuestión que en muchas ocasiones queda relegada a la información visual o apreciaciones heurísticas del entorno.

La velocidad máxima de crecimiento también puede ser estimada, pues coincide con el máximo valor de $P(X)$. Además de esto, es posible obtener la tasa media de crecimiento, dada por $\frac{1}{L}\int_0^L P(x)dx$ (Seber y Wild, 1989), gracias a la especificación polinomial.

3.5. Especificación hiperlogística.

El anterior aspecto es un punto clave para muchos autores, algunos de los cuales (Meyer, 1994; Meyer, Yung y Ausubel, 1999) insisten en la adecuación del modelo logístico principalmente por la sencilla interpretabilidad de sus parámetros.

[10] Ya se comentó en la introducción la capacidad de ajuste de una expresión suficientemente genérica.

Este hecho nos llevó a indagar en otro tipo de especificaciones que compartieran con el modelo logístico algunas de sus peculiaridades, pero a la vez permitiera distintas localizaciones para el punto de inflexión, así como mayor flexibilidad de modos de crecimiento antes y después de dicho punto.

En este sentido nos encontramos con el modelo que Peschel y Mende (1986) habían denominado *hiperlogístico,* cuya expresión es la siguiente:

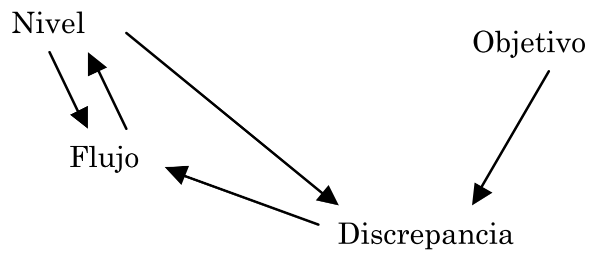
$$\frac{dX}{dt} = aX^r\left(1-\left(\frac{X}{L}\right)^s\right)^n \tag{3.6}$$

que recoge como casos particulares un buen número de modelos conocidos, como los modelos de Gompertz, Bertalanffy y logístico, entre otros.

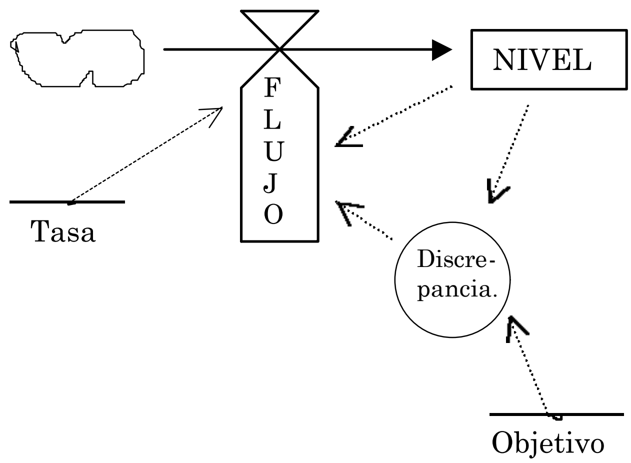
La justificación del modelo (3.6) se puede realizar atendiendo a razones de diversa índole:

- (Atendiendo al teorema de caracterización) Conocemos algunas características de la función que permitirá definir el modelo. Además, sabemos que una función se puede aproximar por un polinomio de grado suficientemente grande. Como quiera que el lado derecho de la ecuación hiperlogística es un polinomio de estas características y que se anula en X=0 y X=L, podemos afirmar (también de acuerdo con Bertalanffy) que se puede encontrar valores de los parámetros de forma que sea una buena aproximación a la F real.

- (Atendiendo a la DS) De forma parecida al modelo logístico, el modelo hiperlogístico se puede identificar con cualquier hipotética situación en la que un nivel que se encuentra condicionado por la existencia de un límite superior se va llenando con un flujo, el cual a su vez dependerá de cierta discrepancia que mide lo que queda aún disponible.



El anterior diagrama causal se correspondería, ya en la terminología de DS, con el diagrama de Forrester[11]:



y las ecuaciones:

$$\frac{dN}{dt} = F$$
$$F = \text{Tasa} \times N \times D$$
$$D = f(\text{Objetivo}, N)$$

Si realizamos las identificaciones oportunas, tendríamos que el nivel N se correspondería con la variable X cuyo crecimiento se está analizando; el objetivo sería el valor de L, límite tendencial, y

[11] Un diagrama de este tipo es característico del crecimiento sigmoidal, como se explica en Goodman (1988).

definiendo la discrepancia como $D = X^{r-1}\left(1-\left(\frac{X}{L}\right)^{s}\right)^{n}$ se obtendría el modelo hiperlogístico.

- (Atendiendo a los modelos conocidos) Se puede entender el modelo hiperlogístico como una generalización del modelo logístico, contando los parámetros con cierta interpretación real. Según Peschel y Mende (1986), el parámetro r gobierna la "fase extensiva", en la que el sistema evoluciona con fuerza, propio de un crecimiento exponencial, en tanto que el parámetro n caracteriza la fase intensiva, en la que el sistema entra en el proceso de saturación.

Pensamos que los anteriores argumentos justifican la utilización del modelo hiperlogístico desde tres perspectivas importantes en el ámbito en que se realiza este trabajo. Será, por tanto, una especificación funcional alternativa a considerar a la hora de representar un crecimiento sigmoidal en la que se reconocen un buen número de fundamentos que enmascaran la frialdad de la formulación del modelo en su especificación polinomial, como ya comentamos.

Definido el modelo como una ecuación diferencial hiperlogística, tan solo restaría encontrar los valores de los parámetros que mejor ajustan la simulación obtenida a los datos reales.

3.5.1. Estimación de parámetros en un modelo hiperlogístico.

El modelo hiperlogístico se presenta como una alternativa atractiva al modelo de crecimiento logístico, pues ofrece una gran variedad en la disposición del punto de inflexión de la curva y los modos de crecimiento anterior y posterior, eliminando, por tanto, el factor simétrico.

Sin embargo, mientras que en el modelo logístico era posible obtener una expresión funcional para la curva que permitía llevar a cabo procedimientos de estimación no lineales, tal posibilidad ya no está presente en el caso hiperlogístico al no ser la ecuación diferencial integrable analíticamente en el caso general. Ello plantea serios inconvenientes en la fase de estimación de parámetros, que necesariamente deberá realizarse partiendo de la ecuación diferencial. Tal vez ése sea el argumento que explique el limitado uso que del modelo se ha hecho en aplicaciones prácticas.

Tan solo hemos encontrado en la bibliografía revisada dos referencias del modelo hiperlogístico. Aunque ambas definen el modelo como aparece en los párrafos anteriores, en ningún caso aparece estimado tal modelo con todos sus parámetros ($r \neq 1$, $s \neq 1$, $n \neq 1$), valiéndose tan sólo de alguna particularización del mismo ($s=1$, $n=1$ o ambos). Entonces, la estimación se llevaba a cabo acudiendo a métodos complejos, en los que se combinaba la integración numérica (paramétrica) y la minimización de las desviaciones a los datos reales (Peschel y Mende, 1986) o bien empleando métodos no sistematizados, descritos para cada caso concreto (Banks, 1994).

De cara a realizar alguna propuesta que contribuya a suplir las deficiencias descritas corresponde una breve observación de la ecuación y sus parámetros, lo cual permite extraer algunas conclusiones. En primer lugar, para efectuar una estimación de los parámetros será necesario disponer de información relativa a todas las variables que en ella aparecen y, por tanto, habrá que estimar valores para la tasa de crecimiento, $\frac{dX}{dt}$.

Por otra parte, los parámetros a, r, n son fácilmente linealizables (mediante transformaciones logarítmicas), en oposición a los parámetros s, L.

Además, L posee una clara interpretación física como límite superior o capacidad de carga de la variable, lo cual constituye una ventaja, pues una estimación externa es aceptable cuando se conoce información suficiente del entorno. Sin embargo, no podemos encontrar un equivalente similar para s, que por tanto precisa un tratamiento más elaborado.

En particular, el modelo en el que se elimina el parámetro s asignándole el valor 1 se muestra bastante más tratable y por consiguiente distinguiremos los casos que se presentan al combinar las posibilidades L conocido-L desconocido y $s = 1$ - $s \neq 1$.

En todo caso, la estimación se basará en la linealización de la ecuación. También es posible emplear algoritmos no lineales, que cuentan al menos con dos desventajas: además de requerir estimaciones iniciales pueden no converger.

Un parámetro adicional que también debe ser estimado es la condición inicial X_0 en la resolución (numérica) de la ecuación diferencial. Hay pocas posibilidades para este parámetro, y todas las conocidas requieren de una expresión analítica de la solución. Una buena opción podría ser elegir como condición inicial el punto crítico en el crecimiento sigmoidal, es decir, el punto de inflexión, que será obtenido a partir de una representación gráfica de los datos.

Supongamos en primer lugar que L es conocido gracias a los condicionantes físicos o lógicos del crecimiento.

- Modelo hiperlogístico, $s = 1$

La estimación de los parámetros del modelo dado por

$$\frac{dX}{dt} = bX^r(L - X)^n$$ [12]

---

[12] Realizamos una pequeña transformación en la ecuación original, y entonces $b = \frac{a}{L^n}$

se puede llevar a cabo por mínimos cuadrados ordinarios tras realizar una transformación logarítmica en la ecuación:

$$\log \frac{dX}{dt} = \log b + r \log X + n \log(L - X)$$

- Modelo hiperlogístico, $s \neq 1$.

Al plantearnos la estimación del modelo (3.6) acudiremos a un método aproximado que constituye una variante del utilizado por Banks(1994).

Se trata de un procedimiento iterativo, donde se van considerando modelos parciales, comenzando con pocos parámetros que van siendo estimados en varias etapas e introduciendo poco a poco más parámetros en el modelo. Podremos conseguir distintas versiones de esta técnica, en función del orden en que incluyamos los parámetros al modelo, o de los métodos que sigamos para obtener sus estimaciones. Una de tales posibilidades es la siguiente:

Comenzaríamos con el modelo $\frac{dX}{dt} = aX^r$, que se ajustaría (por mínimos cuadrados, tras aplicar logaritmos) utilizando los primeros datos de la serie, teniendo en cuenta que cualquier tipo de crecimiento se puede considerar exponencial en sus instantes iniciales. Así obtendríamos estimaciones parciales para *a* y *r*. Continuaríamos con el modelo $\frac{dX}{dt} = aX^r \left(1 - \left(\frac{X}{L}\right)^s\right)$, en el que utilizamos la información relativa a algunos de sus puntos críticos. En concreto, sabemos que

$\frac{X^{i'}}{(X^i)^r} = a\frac{s}{r+s}$ [13], siendo X^i el valor de la variable en el punto de inflexión y $X^{i'}$ la pendiente de la curva en dicho punto, por lo que es posible obtener una estimación de *s* a partir de los valores de *a* y *r* obtenidos en el paso anterior. En esta ocasión estamos utilizando la técnica del ajuste de puntos o Point-Matching. De esta manera obtenemos un valor para *s* que proporciona una buena aproximación en torno al punto de inflexión. En la última etapa asignamos ese valor al parámetro en el modelo completo (3.6), cuya ecuación transformaremos mediante logaritmos para obtener las estimaciones definitivas de los restantes parámetros *a*, *r* y *n*.

En el caso de que no se conociera el valor del límite tendencial *L*, no existe ninguna opción mucho más ingeniosa que las anteriores, pero se pueden aplicar los mismos procedimientos repetidas veces para distintos valores de *L* (al menos podremos encontrar una acotación lógica), y escoger el que mejor ajuste proporcione de acuerdo a algún criterio, encontrar el máximo coeficiente de correlación, por ejemplo.

3.5.2. Extensiones del modelo hiperlogístico.

Cuando se utiliza la ecuación hiperlogística para modelizar la evolución de cierta variable en un contexto global, una de las críticas que puede recibir se refiere a la no consideración de variables adicionales que influyan en el comportamiento de la que se está estudiando.

En efecto, en el modelo hiperlogístico la evolución de la variable se explica solamente en términos de la propia variable y del tiempo, lo cual es una opción válida cuando se desconocen relaciones que liguen a dicha variable con otras, pero tal vez no sea la más apropiada cuando existe información clara al respecto.

---

[13] A partir de la propia ecuación diferencial se puede demostrar sin dificultad que $X^i = L\left(\frac{r}{r+s}\right)^{1/s}$ y

$$X^{i'} = aL^r\left(\frac{r}{r+s}\right)^{r/s}\frac{s}{r+s}$$

En esa línea se encuadran las investigaciones llevadas a cabo por algunos autores para incluir la influencia de los precios en modelos que describen la difusión de un nuevo producto basándose en el modelo de Bass, el cual se puede entender como una modificación del modelo logístico (Phillips y Kim, 1996, Bhargava et al, 1991).

En esencia la misma idea fue empleada para modificar el modelo hiperlogístico cuando fue aplicado al caso particular de la oferta turística (Carrillo y González,1998[a]), mediante la incorporación de una de las variables que determina la evolución de la oferta: la demanda turística. El resultado obtenido en la simulación fue positivo; sin embargo, mucho queda por analizar en un modelo de estas características, tanto en lo que se refiere a su justificación teórica como al modo en el que las variables adicionales se introducen en la ecuación.

Capítulo 4
MDS desde una nueva perspectiva: el análisis cualitativo.

En el presente capítulo nos disponemos a retomar la modelización del crecimiento demográfico y económico del Sur de Tenerife. Desde una perspectiva diferente, que prescinde casi por completo de información exterior, se construye un nuevo modelo en términos de ecuaciones diferenciales utilizando también la metodología propuesta en el capítulo anterior. La evaluación de este modelo se completa realizando su análisis cualitativo.

4.1. Introducción.

La realización de este trabajo de investigación estuvo impulsada en primera instancia por la construcción de un modelo representativo del crecimiento demográfico, turístico y económico de la zona Sur de la isla de Tenerife.

En aquel momento se hizo necesaria una recopilación lo más exhaustiva posible de los antecedentes históricos que desencadenaron la situación actual, con la esperanza de encontrar en ellos las variables más relevantes del estudio, así como las claves de las relaciones de interés entre ellas.

Dicho proceso, recogido en el capítulo 1 de la presente Memoria, se llevó a cabo empleando en parte herramientas de la Dinámica de Sistemas, pues en el propósito anterior se identificaba en buena medida la filosofía de esa técnica.

El resultado obtenido fue satisfactorio, pues demostró reflejar las características determinantes del desarrollo de la zona, además de prestarse a la posibilidad de simulación de diferentes escenarios de evolución turística (Carrillo y González, 1999). Sin embargo, el análisis cualitativo del modelo se mostraba como una tarea difícil, dada la cantidad y variedad de variables y relaciones existentes en el modelo (flujos, niveles, tablas, etc.). Si bien es verdad que es posible realizar este tipo de análisis en modelos DS, como demuestran Aracil y Toro (1993), nosotros preferimos, tal vez por nuestra formación, recurrir a los métodos clásicos aplicables a un sistema dinámico escrito en términos de un conjunto de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas.

Puesto que reconocemos la inexistencia de un único modelo válido para representar un mismo sistema real y que, en definitiva, la elección entre todas las posibilidades debe hacerse valorando la utilidad o información que aporte, nos planteamos un nuevo ejercicio de modelización que nos permita aportar nuevas luces en lo referente a su comportamiento asintótico.

En consecuencia, seleccionaremos las variables más importantes en la explicación de la situación que pretendemos representar, y para las cuales disponemos de datos históricos que nos permitan atestiguar un comportamiento similar en el modelo y la realidad. Dichas variables son la Población (P), Migración (MIG), Tasa de Crecimiento Vegetativo (TCV), Oferta (OF), Demanda (DEM) y Renta (Y). El nuevo ejercicio de modelización se explicará en los párrafos que siguen.

4.2. MDS II: Una nueva perspectiva

En esta etapa nuestro objetivo se dirige hacia la definición de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución dibuje en el tiempo trayectorias equiparables a las seguidas por las series históricas disponibles. Por consiguiente, una primera diferencia respecto al modelo anterior la encontramos en lo referente a las variables *Y*, *DEM* por un lado, que hasta ahora no habían sido modelizadas explícitamente sino incluidas como funciones tabuladas, y la variable *MIG*, por otro lado, que pierde su condición de "flujo" para pasar a convertirse en "nivel". Este cambio, que puede resultar chocante por la propia naturaleza de los flujos migratorios, ya se ha llevado a cabo con éxito en otros modelos similares (González Rodríguez, 1994[c]).

La *DEM* y la *Y* muestran una evolución histórica con un comportamiento claramente sigmoidal, por lo que su modelización se ha realizado como una aplicación natural de lo expuesto en el capítulo 3 (especificación polinomial para las tasas de crecimiento). Los ajustes históricos han resultado atractivos, con errores medios de 4.5% y 2.2%, respectivamente.

Por su parte, la *OF* también presenta un comportamiento sigmoidal, y como tal ha sido modelizada por los autores en distintas ocasiones (Carrillo y González, 1998[a]; Carrillo y González, 2000[b]). Sin embargo, también es importante reconocer la estrecha relación que existe entre Oferta y Demanda y, por consiguiente, se debería incluir *DEM* en la ecuación que describe la evolución de la *OF*. Así, elegiremos una especificación hiperlogística con introducción de la demanda (Carrillo y González, 1998[b]) al estilo de la incorporación del precio en modelos de Bass para la difusión de un producto, que proporciona un error medio de 4.8%. Hay que decir que la utilización de la especificación polinomial para $\frac{dOF}{dt}$ reduciría el error medio al 1.7% (Carrillo y González, 2000[b]). Sin embargo, consideramos que la explicitación en el modelo de la relación oferta-demanda justifica suficientemente el empeoramiento en el error medio.

Por último, mientras el tratamiento dado a las variables *P* y *TCV* no varía respecto a la modelización anterior (ecuación de balances para la primera y aproximación por una logística para la segunda), en la ecuación de la MIG entrarán como variables influyentes tanto la P y DEM como las tasas de crecimiento de la población, oferta y demanda, quedando el sistema resultante en la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= 0.001\,TCV\,P + MIG \\
\frac{dTCV}{dt} &= 0.008\,TCV(5 - TCV) \\
\frac{dMIG}{dt} &= 9963.209 - 0.846\,P' - 5100\,OF' + 3164.1\,DEM' - 0.251\,P + 2539.66\,DEM \\
\frac{dDEM}{dt} &= -0.00656 + 0.332\,DEM - 0.0893\,DEM^2 \\
\frac{dOF}{dt} &= 0.01087\,OF^{5.44}(1.9 - OF)^{13.55}\,e^{1.4DEM} \\
\frac{dY}{dt} &= -40.7189 + 0.292895\,Y - 0.000174\,Y^2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

que proporciona simulaciones adecuadas a la evolución histórica observada para las variables más relevantes, como se muestra en las figuras 4.1-4.5:

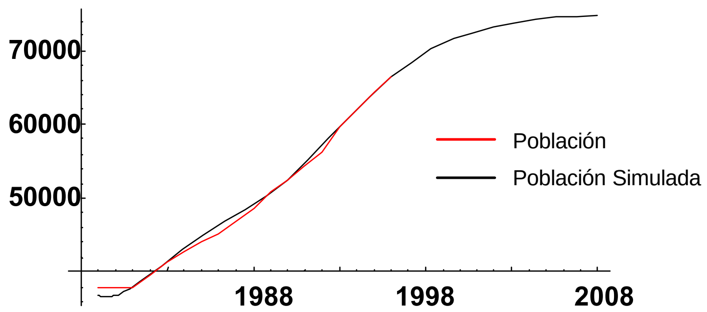


Figura 4.1

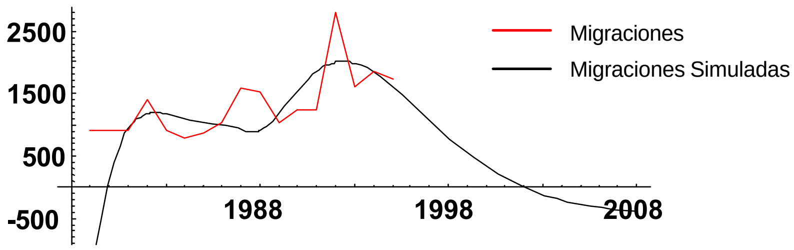


Figura 4.2

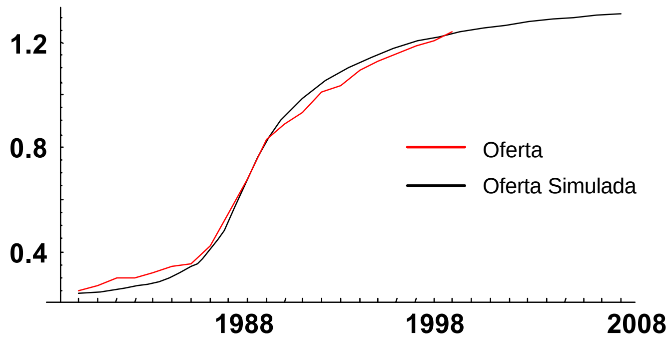


Figura 4.3

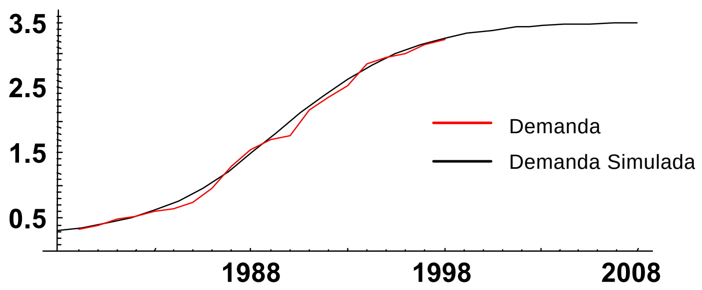


Figura 4.4

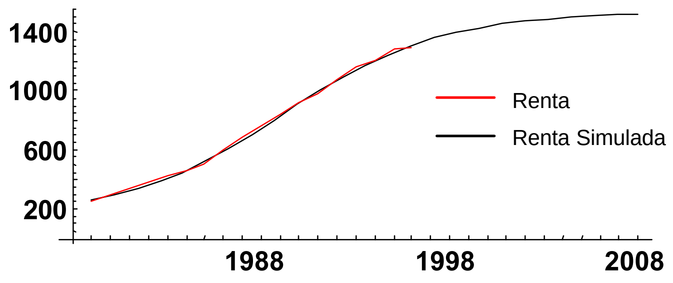


Figura 4.5

Además, las ecuaciones estimadas para el Empleo y Suelo Urbano en el modelo MDSI proporcionan, empleando los valores simulados por MDSII para las variables P y OF, escenarios de evolución acordes con las características de la comarca (ver figuras 4.6 y 4.7).

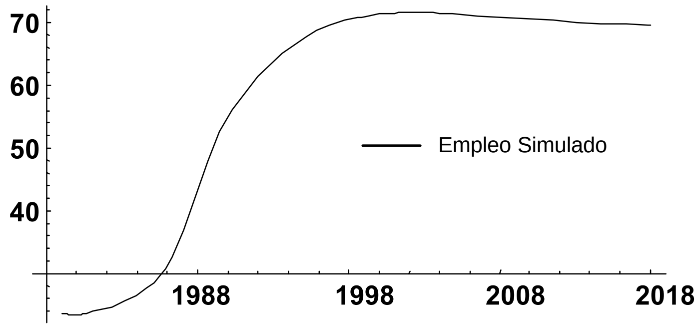


Figura 4.6

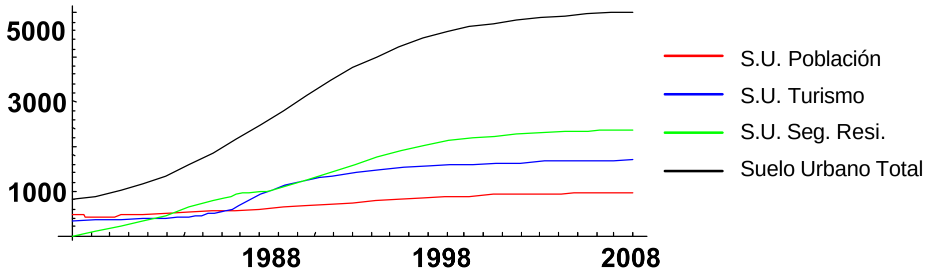


Figura 4.7

Con ello, podemos concluir que la nueva versión del modelo reproduce con acierto tanto los componentes cuantitativos como los cualitativos de la historia reciente del Sur tinerfeño.

4.3. Fundamentos del análisis cualitativo de Sistemas Dinámicos.

El concepto de Sistema Dinámico hace referencia a los modelos matemáticos utilizados en el estudio de fenómenos de naturaleza diversa caracterizados por su evolución temporal (Freire, 1982). En el caso más corriente, un sistema dinámico se puede representar a través de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas (Aracil y Toro, 1993), de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{4.2}$$

aunque en algunas aplicaciones prácticas puede resultar complicado reescribir las ecuaciones originales en esta forma canónica (Wilson, 1981).

Cada una de las ecuaciones del anterior sistema pretende explicar el modo de variación de una de las variables en función de su magnitud y de las restantes variables.

Al tratar con modelos matemáticos se tiende a un enfoque más tradicional, dirigido hacia un análisis cuantitativo que, en el caso de un sistema dinámico, se refiere a la búsqueda de la solución explícita para cada una de las variables del sistema de ecuaciones diferenciales. Desafortunadamente, tal empresa no puede llevarse a cabo en la gran mayoría de los casos, pues la resolución sólo es posible (en general) para sistemas lineales, siendo las ecuaciones que conforman los sistemas dinámicos de naturaleza no lineal en el caso más común.

En tales ocasiones, puede resultar más interesante a la vez que productivo relegar a un segundo plano la solución exacta del sistema para prestar más atención a sus propiedades. Este es, en síntesis, el objetivo principal del análisis cualitativo cuyo estudio, originado en los trabajos de Poincaré de finales del s. XIX, ha recibido en las últimas décadas un interés creciente por parte de los investigadores.

Se puede considerar que la estabilidad es la propiedad cualitativa por excelencia (Aracil y Toro, 1993), la cual viene a determinar si, dadas dos soluciones del sistema que en un cierto instante están muy próximas, permanecerán o no cercanas posteriormente.

Formalmente, dada una solución $j\ (t)$ del sistema, se dirá que es *estable* si dado $e > 0 \quad \exists d(e) > 0$ tal que, para cualquier solución $y\ (t)$ del sistema verificando $|j\ (t_0) - y\ (t_0)| < d$ se tiene $|j\ (t) - y\ (t)| < e, \quad \forall t \geq t_0$.

También de gran interés es el concepto de estabilidad asintótica. Una solución $j\ (t)$ del sistema es *asintóticamente estable* si es estable y además $\exists \bar{d} > 0$ tal que si $|j\ (t_0) - y\ (t_0)| < \bar{d}$ entonces $\lim\limits_{t \to \infty} |j\ (t) - y\ (t)| = 0$ (Medio, 1993).

Lo anterior indica que si una solución estable se perturba ligeramente, la trayectoria resultante no diferirá demasiado de la original, pero además, si la solución original era asintóticamente estable, entonces el efecto de la perturbación desaparecerá con el paso del tiempo.

De entre todas las soluciones del sistema, las llamadas soluciones estacionarias o de equilibrio tienen un papel importante en el estudio de la estabilidad y por consiguiente en el análisis cualitativo. Una solución estacionaria tiene la forma $x(t) = \bar{x}$, siendo $\bar{x}$ tal que $F(\bar{x}) = 0$, también llamado *punto fijo* o *estado de equilibrio*, pues se corresponde con el fenómeno que se observa en un sistema dinámico cuando todas las variables se encuentran en un estado que no cambia con el tiempo.

Las soluciones estacionarias que son estables constituyen los atractores puntuales del sistema.

Un *atractor* es una región del espacio de estados que atrae todas las trayectorias que se inician en una región más amplia, en la cuenca del atractor. El tipo más sencillo de atractor es el *atractor puntual* (constituido por un único punto, que es un punto fijo del sistema), pero existen otras clases de atractores (Medio, 1993): órbitas periódicas (ciclos límite), órbitas cuasiperiódicas y atractores extraños, a los que se ha dedicado mucha atención en la moderna teoría del caos.

Los atractores están formados por estados a los que tiende el sistema, o dicho de otro modo, estados en los que se encuentra el sistema en condiciones de equilibrio (Aracil y Toro, 1993). Por ello, todo análisis cualitativo debe comenzar con la determinación de sus atractores, que se llevará a cabo mediante el estudio de la estabilidad de las soluciones estacionarias. En este trabajo tan sólo nos ceñiremos al análisis de los atractores puntuales.

El caso ideal viene representado en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (autónomo), pues para ellos es siempre posible encontrar la solución explícita a través de la cual el estudio de la estabilidad está resuelto.

En concreto, para el sistema

$$x'(t) = Ax(t) + b(t) \tag{4.3}$$

la aplicación de la conocida fórmula de variación de las constantes de Lagrange (Elizalde, 1992), teniendo en cuenta que $\Phi(t) = e^{At}$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo, nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1

"La única solución del sistema (4.3) que verifica la condición inicial $x(t_0) = x_0$ *tiene la forma*

$$x(t) = e^{A/t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A/t-s)}b(s)ds \text{ "}$$

Si suponemos que hemos efectuado el cambio de variables apropiado para que la matriz de coeficientes esté expresada en forma canónica (de Jordan), entonces en la solución del sistema aparecen combinaciones de términos de la forma e^{lt} y $t^k e^{lt}$, con l autovalor de A, de tal forma que el signo de los autovalores determinará la estabilidad de las soluciones[1], teniéndose el siguiente resultado (Guzmán, 1980):

Teorema 4.3.2

"Sea el sistema (4.3), y sean $s(A)$ *el espectro de A y* $m = max\{\mathrm{Re}\, l \,/\, l \in s(A)\}$. *Entonces se verifican los apartados siguientes:*

a) Si $m < 0$ *el sistema es asintóticamente estable.*

b) Si $m > 0$ *el sistema es inestable.*

---

[1] Para un sistema lineal se sabe que toda solución es estable si y sólo si lo es la solución $x = 0$ del sistema homogéneo asociado. Esto implica que todas sus soluciones tienen el mismo carácter de estabilidad o inestabilidad, y por tanto se puede hablar de estabilidad del sistema (Guzmán,1980)

c) Si $m = 0$ *y* $\forall l$ *con* $\mathrm{Re}\, l = 0$ *se tiene que el índice del autovalor es 1*[2]*, el sistema es estable pero no asintóticamente estable."*

Sin embargo, la mayoría de sistemas poseen características no lineales, y entonces el análisis se complica notablemente, haciéndose necesario acudir a un estudio local mediante linealización del sistema.

Por consiguiente, si pretendemos caracterizar el comportamiento de las soluciones del sistema (4.2) cerca del punto de equilibrio $\bar{x}$, comenzaremos por estudiar el sistema linealizado que se obtiene tras la aplicación del desarrollo de Taylor de *F(x)* en torno a $\bar{x}$ (Guckenheimer y Holmes, 1990):

$$\frac{dy}{dt} = DF(\bar{x})y \tag{4.4}$$

donde $y = x - \bar{x}$ y $DF = \left(\dfrac{\partial F^i}{\partial x_j} \right)$ representa la matriz Jacobiana de la función *F*.

La cuestión de cuándo este sistema aproximado se puede utilizar para determinar en efecto las propiedades cualitativas del sistema original queda resuelta con el siguiente teorema:

Teorema 4.3.3 (de Hartman-Grobman)

"Si $DF(\bar{x})$ *no tiene autovalores con parte real nula, entonces existe un homeomorfismo h definido en un entorno U de* $\bar{x}$ *que transforma las órbitas del flujo no lineal del sistema (4.2) en las del flujo lineal de (4.4)"*

En otras palabras, el teorema establece la equivalencia topológica del sistema original y su linealización. La única hipótesis para que se verifique dicho

---

[2] Esto equivale a exigir que las formas canónicas de Jordan correspondientes sean diagonales.

resultado se encuentra en la condición de que $DF(\bar{x})$ no tenga autovalores con parte real nula, conocida como condición de hiperbolicidad.

Definición 4.3.4

Un punto crítico $\bar{x}$ se dice hiperbólico si todos los autovalores de $DF(\bar{x})$ tienen su parte real no nula. (En otro caso se dirá no hiperbólico).

Entonces, el teorema de Hartman-Grobman en esencia indica que en un punto hiperbólico el comportamiento local del sistema no lineal es cualitativamente similar al comportamiento del sistema linealizado.

En virtud del resultado ya enunciado para la estabilidad en los sistemas lineales, podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 4.3.5

"Sea $\bar{x}$ un punto fijo hiperbólico del sistema (4.4) y $\Lambda = s\,(DF(\bar{x}))$. Entonces, si $\mathrm{Re}(l) < 0 \;\; \forall l \in \Lambda \Rightarrow \bar{x}$ es asintóticamente estable. Si $\exists\, l \in \Lambda$ tal que $\mathrm{Re}(l) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ es inestable.

En cambio, si $\bar{x}$ es un punto no hiperbólico, entonces el sistema linealizado no aporta información sobre el comportamiento del sistema no lineal, pues en ese caso la estabilidad depende de los términos de grado superior en el desarrollo de Taylor.

Un concepto más amplio que el de estabilidad, enmarcado en la teoría del análisis cualitativo, es el de *estabilidad estructural*. Mientras la estabilidad analiza la variación en el comportamiento ante perturbaciones en las soluciones, la estabilidad estructural se refiere a perturbaciones en las funciones del sistema. Un sistema dinámico se dice *estructuralmente estable* si la estructura cualitativa de sus soluciones permanece inalterada ante pequeñas variaciones en las ecuaciones del sistema. Este concepto resulta de gran importancia, pues en la práctica las ecuaciones del sistema son estimadas y por tanto algunos de sus coeficientes pueden contener un error que podría provocar un comportamiento radicalmente distinto si el sistema no fuera estructuralmente estable. Por consiguiente, esta propiedad permite asegurar que las conclusiones extraídas del modelo efectivamente son aplicables al sistema real.

En las aplicaciones prácticas es corriente tener de hecho sistemas parametrizados, esto es, las ecuaciones del modelo contienen uno o más parámetros que son estimados sobre la base de las observaciones disponibles.

Entonces, si describimos el modelo a través del sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\frac{dx}{dt} = F(x,m) \quad x, m \in \mathbb{R}^n \tag{4.5}$$

Puede suceder que al variar ligeramente el valor del parámetro en torno a su valor estimado, $\hat{m}$, la estructura cualitativa del sistema cambie, tanto en lo que se refiere a la estabilidad de sus equilibrios como al número. En ese caso diremos que nos encontramos ante un fenómeno de *bifurcación*, y el valor del parámetro $\hat{m}$ para el cual se produce dicho fenómeno se llama *valor de bifurcación.*

Los conceptos de estabilidad estructural y bifurcación están íntimamente relacionados. En efecto (Gamero, 1990), si para un valor particular m_0 del parámetro el sistema correspondiente es estructuralmente estable, entonces es topológicamente equivalente a todos los sistemas cuyo parámetro m esté en un entorno de m_0 (en otras palabras, todos los sistemas en un entorno de m_0 presentan la misma estructura cualitativa). Por tanto, una condición necesaria para que ocurra una bifurcación en m_0 es que para ese valor del parámetro el sistema no sea estructuralmente estable. En ese sentido se puede ver la teoría de las bifurcaciones como un estudio de sistemas dinámicos estructuralmente inestables (Medio, 1993)

Por otro lado, la pérdida de estabilidad estructural sobreviene con la aparición de un equilibrio no hiperbólico para cierto valor del parámetro (Gamero,1990; Guckenheimer y Holmes, 1990; Aracil y Toro, 1993). Además, también es cierto que la no hiperbolicidad es condición necesaria para la existencia de un fenómeno de bifurcación, puesto que los elementos críticos hiperbólicos gozan de una propiedad de "robustez" (Freire, 1982) que garantiza que, ante variaciones del parámetro, el sistema perturbado sigue teniendo el mismo número de puntos hiperbólicos con la misma estructura cualitativa, lo cual excluye la posibilidad de bifurcación.

Tanto en el estudio de problemas de bifurcación como en el estudio del comportamiento de un sistema dinámico en un entorno de un punto fijo no hiperbólico, se ha mostrado como herramienta útil la técnica de las variedades de centro, que permite reducir la dimensión del problema y aislar en un nuevo sistema toda la degeneración del sistema inicial.

El método se justifica con el conocido teorema de las variedades de centro (Guckenheimer y Holmes, 90 del que se deduce que, localmente, el sistema original es (topológicamente) equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(x), \quad x \in W^c \\ \dot{y} &= -y, \quad y \in W^s \\ \dot{z} &= z, \quad z \in W^u \end{aligned} \tag{4.6}$$

siendo W^s, W^u y W^c las variedades estable, inestable y de centro (respectivamente) y por consiguiente, el sistema reducido dado por

$$\dot{x} = \tilde{f}(x), \quad x \in W^c \tag{4.7}$$

contiene toda la información relevante para conocer el comportamiento del sistema en las inmediaciones del punto que se está estudiando.

La expresión exacta de $\tilde{f}$ no puede ser conocida en la práctica, pero sí aproximada hasta el grado de precisión deseado a través de la serie de Taylor de la ecuación de la variedad de centro (Guckenheimer y Holmes, 1990).

4.4. Análisis Cualitativo del modelo MDSII.

Todos los comentarios teóricos previos serán utilizados en esta sección en el análisis cualitativo del modelo dinámico del Sur escrito en términos de ecuaciones diferenciales que ya ha sido presentado en este mismo capítulo.

Dicho análisis se centrará en el estudio de los estados estacionarios del sistema, así que comenzaremos calculando sus puntos de equilibrio. Tan sólo uno de ellos, que denotaremos por X^*, es representativo en el entorno económico que estamos estudiando y por tanto será el que acapare nuestra atención. (En cualquier caso, los restantes puntos estacionarios son inestables, como se deducirá fácilmente a partir de un resultado que expondremos más adelante, y por lo tanto no se corresponderán con estados observables del sistema.)

Hay que notar que la variable Y (Renta) aparece descrita en el modelo de manera independiente de las demás, con lo que podemos estudiar la estabilidad de la ecuación correspondiente por separado y continuar el análisis cualitativo con el sistema de cinco ecuaciones y cinco incógnitas siguiente:

$$\begin{aligned}
P' &= 0.001\,TCV\,P + MIG \\
TCV' &= 0.008\,TCV(5 - TCV) \\
MIG' &= 9963.209 - 0.846\,P' - 5100\,OF' + 3164.1\,DEM' - 0.251\,P + 2539.66\,DEM \\
DEM' &= -0.0664 + 0.332\,DEM - 0.0893\,DEM^2 \\
OF' &= 0.01087\,OF^{5.44}(1.9 - OF)^{13.55} e^{1.4DEM}
\end{aligned}$$

El punto de equilibrio al que nos referimos con anterioridad se alcanza en los siguientes valores de las variables:

$$X^* = \begin{pmatrix} P^* \\ TCV^* \\ MIG^* \\ DEM^* \\ OF^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75160 \\ 5 \\ -375 \\ 3.5 \\ 1.9 \end{pmatrix},\quad Y^* = 1530.66$$

El valor correspondiente a Y^* no plantea ningún problema, como se puede comprobar fácilmente dado que, en la ecuación de la Renta, la derivada del lado derecho evaluado en Y^*, esto es

$$0.292895 - 2 \cdot 0.000174\, Y^*$$

proporciona un valor negativo, lo que garantiza la estabilidad asintótica del equilibrio[3].

En lo que respecta a las restantes variables, el análisis de la estabilidad comenzaría efectuando el cambio de variable oportuno para trasladar el punto de equilibrio al origen, para a continuación, mediante el desarrollo de Taylor de grado 1, obtener el sistema linealizado,

$$y' = Ay \tag{4.8}$$

siendo $y = x - X^*$, y $A = \begin{pmatrix} 0.005 & 75.16 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0 & 0 & 0 \\ -0.255 & -63.585 & -0.846 & 1610.73 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La parte no lineal (resto en la aproximación) quedaría recogida en $R(y) = F(y + X^*) - Ay$, que tomaría la expresión

$$R(y) = \begin{pmatrix} 0.8 + 0.001\, y_1 y_2 \\ -0.008\, y_2^2 \\ -13.82 - 8.4 \cdot 10^{-3}\, y_1 y_2 - 282.55 y_4^2 - 7444.62 e^{1.4 y_4} (-y_5)^{13.55} (1.9 + y_5)^2 \\ -0.0893\, y_4^2 \\ 1.45973 e^{1.4 y_4} (-y_5)^{13.55} (1.9 + y_5)^2 \end{pmatrix}$$

---

[3] Análogamente se deduce que el otro posible valor de equilibrio para la Renta es inestable.

La estabilidad de $Y^* = 0$ en el sistema lineal aproximado vendrá dada por los autovalores de la matriz *A*, que son {-0.42±0.272*i*, -0.293, -0.04, 0}. Como se observa, todos los autovalores tienen su parte real negativa, a excepción del último que se anula. Por tanto nos encontramos ante un punto de equilibrio no hiperbólico y por consiguiente el sistema linealizado (4.8) no aporta información suficiente para conocer el comportamiento cualitativo de las soluciones, por lo que se hace necesario recurrir a métodos alternativos que nos permitan abordar la cuestión.

En nuestro caso, intentaremos aprovechar al máximo las posibles ventajas que ofrece la forma concreta de las ecuaciones del modelo, en virtud de cierta propiedad que enunciamos a continuación.

Proposición 4.4.1

"Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^p \\ y' &= g(x,y) \qquad y \in \mathbb{R}^q \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

y sea $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (4.9). Consideremos el sistema reducido*

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^p \\ y' &= g(\bar{x},y) \qquad y \in \mathbb{R}^q \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Entonces $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ *(que también es un equilibrio de (4.10)) tiene el mismo tipo de estabilidad (asintóticamente estable o inestable) en ambos sistemas."*

Demostración:

La condición de hiperbolicidad garantiza que el comportamiento de ambos sistemas en torno al punto $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ *está determinado, según el teorema de Hartman-Grobman, por la parte lineal de ambos sistemas y, en concreto, por los autovalores* *de las respectivas matrices jacobianas J_1 y J_2, los cuales son coincidentes como se puede comprobar sin dificultad, por ser dichas matrices triangulares (por bloques):*

$$J_1 = \begin{pmatrix} Df(\bar{x}) & 0 \\ \dfrac{\partial g(\bar{x},\bar{y})}{\partial x} & \dfrac{\partial g(\bar{x},\bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} Df(\bar{x}) & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial g(\bar{x},\bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Un caso particular de la situación descrita en un sistema como (4.9) resulta de especial interés para nosotros. Se trata del caso p=1, esto es, hay una variable (x) cuya evolución tan sólo depende de ella misma, aunque influye en la evolución de las restantes variables. Decimos entonces que la variable x está *desacoplada* y cuando este fenómeno aparece en un sistema (en una o varias de sus variables) la aplicación reiterada de la proposición 4.4.1 permite ir reduciendo la dificultad del problema, pues sucesivamente va eliminando dependencias entre variables. Sin embargo, ello sólo es posible bajo condiciones de hiperbolicidad del equilibrio.

La cuestión lógica que surge a continuación se dirige hacia la extensión de la misma propiedad al caso de equilibrios no hiperbólicos. La respuesta no es, en absoluto, inmediata, pues en ese caso los términos no lineales pasan a cobrar importancia y el comportamiento de las soluciones se descubre en las variedades de centro que, en principio, no necesariamente deben coincidir en ambos sistemas.

No hemos logrado encontrar solución a este problema en las referencias consultadas, aunque hemos avanzado algunas conclusiones parciales, que detallamos a continuación.

Proposición 4.4.2

"Si $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ es un equilibrio estable o asintóticamente estable de (4.9), entonces es también un equilibrio de (4.10) con el mismo tipo de estabilidad. Además, si el equilibrio es inestable en (4.10) entonces también lo será en (4.9)."

Demostración.

Denotaremos por $\begin{pmatrix} x^1(t,X_0) \\ y^1(t,X_0) \end{pmatrix}$ *la solución del sistema (4.9) con condición inicial* $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$*; análogamente,* $\begin{pmatrix} x^2(t,X_0) \\ y^2(t,X_0) \end{pmatrix}$ *denotará la solución del sistema (4.10) con la misma condición inicial.*

Supongamos entonces que $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ *es estable en (4.9), esto es,* $\forall e > 0, \exists d > 0$ *tal que* $\forall X_0$ *que verifica* $\left.\begin{array}{l} |x_0 - \bar{x}| < d \\ |y_0 - \bar{y}| < d \end{array}\right\}$ *se tiene* $\left.\begin{array}{l} |x^1(t,X_0) - \bar{x}| < e \\ |y^1(t,X_0) - \bar{y}| < e \end{array}\right\}$ $\forall t > t_0$.

Ahora bien, se puede comprobar sin dificultad la relación existente entre las soluciones de (4.10) y (4.9), a saber, $x^2(t,X_0) = x^1(t,X_0)$ *(evidentemente), así como* $y^2(t,X_0) = y^1(t,X_0^*)$*, siendo* $X_0^* = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Entonces, $x^2(t,X_0)$ *satisface trivialmente la condición de estabilidad, como también sucede para* $y^2(t,X_0)$*, por coincidir con una solución de (4.9) que se encuentra en las hipótesis de cercanía al punto de equilibrio, esto es,*

$\left.\begin{array}{l} |\bar{x} - \bar{x}| < d \\ |y_0 - \bar{y}| < d \end{array}\right\}$ *y por lo tanto ha de suceder* $|y^1(t,X_0^*) - \bar{y}| < e \quad \forall t > t_0$*, o lo que es lo mismo,* $|y^2(t,X_0) - \bar{y}| < e$*, es decir,* $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ *también es estable en (4.10). (La estabilidad asintótica se demostraría análogamente, tomando límites).*

Por otra parte, la demostración de la conservación de la inestabilidad de (4.10) a (4.9) es inmediata, pues se trata del contrarrecíproco de la afirmación sobre la conservación de la estabilidad de (4.9) a (4.10). En cualquier caso, su demostración teórica tampoco plantea dificultad alguna.

Por consiguiente, cualquier conclusión que se extraiga acerca de la estabilidad del equilibrio en (4.9) es extrapolable al sistema (4.10). No hemos conseguido demostrar la implicación contraria[4] en el caso general, pero sí bajo circunstancias específicas.

Proposición 4.4.3

"Consideremos los sistemas (4.9) y (4.10) y supongamos que $f(x) \geq 0$ *(x(t) es creciente) y que g(x,y) es creciente en x y satisface la condición de Lipschitz en y*[5]. *Entonces, si el equilibrio* $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ *es estable o asintóticamente estable en (4.10) también lo es en (4.9). Además, si el equilibrio es inestable en (4.9) también lo será en (4.10)."*

Demostración.

Como las primeras componentes de las soluciones de ambos sistemas coinciden, no plantean problemas, por lo que analizaremos las segundas componentes. La demostración se basa en establecer cierta relación de orden entre ellas: Sabemos que $y^2(t,X_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(\bar{x}, y^2(s))ds$*; de la misma forma tendremos*

$$y^1(t,X_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(x(s), y^1(s))ds =$$
$$= y_0 + \int_{t_0}^{t} (g(x(s), y^1(s)) - g(x(s), y^2(s)))ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), y^2(s))ds$$

Entonces, por ser g Lipschitz en y, y por la hipótesis de crecimiento en x(t) y g(x,y), podemos hacer

$$y^1(t,X_0) \leq y_0 + \int_{t_0}^{t} K\left|y^1(s) - y^2(s)\right|ds + \int_{t_0}^{t} g(\bar{x}, y^2(s))ds,$$

---

[4] Aunque tampoco hemos encontrado evidencia de su falsedad.
[5] Nótese que si una función es derivable, con derivada acotada, entonces se satisface la condición de Lipschitz.

de donde obtenemos

$$y^1(t,X_0) - y^2(t,X_0) \leq \int_{t_0}^{t} K\left|y^1(s) - y^2(s)\right| ds$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall tenemos finalmente

$$y^1(t,X_0) - y^2(t,X_0) \leq 0 \Rightarrow y^1(t,X_0) \leq y^2(t,X_0)\,,$$

de donde se deduce fácilmente las dos afirmaciones recogidas en el enunciado de la proposición.

Corolario 4.4.4

"En las hipótesis de la proposición anterior, el equilibrio $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ *comparte el mismo tipo de estabilidad (estable, asintóticamente estable o inestable) en los sistemas (4.9) y (4.10)."*

Las hipótesis de la proposición 4.4.3 son un tanto restrictivas y sin embargo útiles para nuestros fines, como comprobaremos en los párrafos que siguen.

A la vista de los anteriores resultados cabe preguntarse en qué condiciones se encuentra nuestro sistema y cómo podemos reducir el estudio del comportamiento cualitativo.

Observamos en primer lugar que las variables *TCV* y *DEM* están desacopladas, mientras que la variable *OF* se podría desacoplar de *DEM* en virtud de la proposición 4.4.3, dado que *DEM(t)* es una función creciente, así como $g(DEM, OF) = 0.01087\,OF^{5.44}(1.9 - OF)^{13.55}e^{1.4DEM}$, cuya derivada respecto de *OF* está acotada.

Por tanto, podremos analizar el punto de equilibrio de nuestro sistema original a partir del estudio del sistema

$$
\begin{aligned}
TCV' &= 0.008\,TCV(5 - TCV) \\
DEM' &= -0.0664 + 0.332\,DEM - 0.0893\,DEM^2 \\
OF' &= 1.4597\,OF^{5.44}(1.9 - OF)^{13.55} \\
P' &= 0.001\,TCV\,P + MIG \\
MIG' &= 9963.209 - 0.846\,P' - 5100\,OF' + 3164.1\,DEM' - 0.251\,P + 2539.66\,DEM
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

A la hora de continuar simplificando el sistema, debemos recordar que el punto de equilibrio analizado, X^*, es no hiperbólico y por tanto el sistema (4.11) no se encuentra en las condiciones de la proposición 4.4.1.

Sin embargo, dicha proposición admite cierta excepción, aplicable al caso que nos ocupa.

En efecto, un análisis más pormenorizado descubriría a la ecuación de *OF* como única causante de la no hiperbolicidad, o dicho en los términos de la proposición 4.4.1, el autovalor nulo se encuentra en la parte $Df(\bar{x})$ del jacobiano, mientras que $\dfrac{\partial g(\bar{x},\bar{y})}{\partial y}$ sólo contiene autovalores negativos.

En este caso, la estabilidad de las componentes desacopladas de X^* se puede analizar, según lo visto en el capítulo 3, teniendo en cuenta que las ecuaciones de TCV, DEM y OF en (4.11), todas ellas de tipo sigmoidal, son equivalentes a ecuaciones de la forma

$$z' = z(1 - z) \tag{4.12}$$

y los equilibrios $TCV^* = 5$, $DEM^* = 3.5$ y $OF^* = 1.9$ se corresponden al equilibrio

$z^* = 1$ de (4.12), cuya estabilidad asintótica es fácilmente deducible[6].

Así las cosas, si la componente desacoplada se sabe asintóticamente estable y la componente restante es hiperbólica, la proposición 4.4.1 es igualmente cierta (pues la variedad de centros coincide en (4.9) y (4.10), al depender sólo de *x*) y, por consiguiente, el comportamiento de las soluciones del sistema original en las inmediaciones de X^* se puede entender recogido en el sistema lineal

$$\begin{aligned} P' &= 0.005P + MIG \\ MIG' &= 18852.015 - 0.25523P - 0.846MIG \end{aligned} \tag{4.13}$$

cuyo punto de equilibrio es asintóticamente estable por tener la matriz de coeficientes dos autovalores negativos.

Asimismo la propiedad anterior nos es útil para obtener el resultado ya adelantado de inestabilidad de los restantes puntos de equilibrio, puesto que aquellos que se encuentran en un valor de inestabilidad para alguna de las variables desacopladas (esto es, $TCV = 0$, $OF = 0$ o $DEM = 0.21$, correspondientes al equilibrio $z^* = 1$ de (4.12)) heredarán, por un razonamiento análogo, la misma característica independientemente del correspondiente sistema reducido, y tan sólo aquél que se encuentra en los valores de estabilidad para esas variables (esto es, X^*) será un equilibrio asintóticamente estable para el sistema global.

Retomando la discusión previa sobre estabilidad estructural y estabilidad en los puntos de equilibrio, no quisiéramos dar por terminado este trabajo sin incluir un análisis paramétrico, que tendrá que ser por fuerza parcial, esto es, no podremos incluir a la vez todos los parámetros del modelo o la complejidad nos desbordaría.

---

[6] Alternativamente, en cada una de las componentes desacopladas también se puede utilizar un método gráfico para determinar la estabilidad de los equilibrios, por tratarse de casos unidimensionales, como se realiza en Hale y Koçak (1991). Para ello no hay más que tener en cuenta que la derivada representa la pendiente de las soluciones en cada punto y por tanto su signo determina el crecimiento o decrecimiento de las soluciones.

Puesto que, tal y como acabamos de ver, las ecuaciones de las variables *TCV*, *DEM* y *OF* están desacopladas, y sus puntos de equilibrio de interés presentan estabilidad asintótica, por ser todas las ecuaciones de tipo sigmoidal, tan sólo será necesario trabajar con las dos variables restantes, *P* y *MIG*, cuya evolución determina en gran medida la fuerza de trabajo de la zona y por tanto su futuro desarrollo económico. Los resultados obtenidos serán válidos para el sistema original siempre que los equilibrios del sistema (4.13) perturbado sean hiperbólicos.

En ese caso, los puntos de mayor interés en lo que se refiere al comportamiento del sistema se encuentran en los parámetros que acompañan a *P* y *P´* en la ecuación de la migración en el sistema (4.11), y que evalúan la influencia que tiene sobre el movimiento migratorio la dinámica poblacional de la zona.

Comenzaremos por analizar la variación cualitativa que afectaría al sistema en caso de considerar un coeficiente para *P* arbitrario. En esas circunstancias el sistema reducido quedaría:

$$\begin{aligned} P' &= \quad 0.005\,P + MIG \\ MIG' &= \quad 18852.015 - (m + 4.2310^{-3})P - 0.846 MIG \end{aligned}$$

para un $m > 0$, pues el caso contrario cae fuera de toda consideración lógica.

En estas condiciones tenemos un único equilibrio que depende del valor del parámetro, según las expresiones

$$P^* = \frac{18852.0155}{m} \quad \text{y} \quad MIG^* = \frac{-94.2}{m}$$

La matriz de coeficientes del sistema tiene por autovalores

$$l_{1,2} = 0.5(-0.841 \pm \sqrt{0.707 - 4m})$$

que, cuando son complejos ($m > 0.176$) tienen su parte real negativa, y en otro caso toman ambos valores negativos, cualquiera que sea $m > 0$. Como consecuencia, para todo valor del parámetro se tiene que el correspondiente sistema tiene un único equilibrio que es asintóticamente estable, y puesto que en ningún caso los autovalores llegan a anularse, la misma conclusión será válida para el sistema original.

Pasamos a continuación a considerar en (4.11) un valor arbitrario para el coeficiente de P´, con lo que se obtiene el sistema reducido:

$$\begin{aligned} P' &= 0.005\,P + MIG \\ MIG' &= 18852.015 - (0.005m + 0.251)P - m\,MIG \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para cualquier valor del parámetro el único equilibrio del sistema es el que ya conocemos:

$$P^* = 75107.63 \qquad MIG^* = -375.5$$

Si calculamos los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema obtenemos la expresión:

$$l_{1,2} = 0.5(0.005 - m \pm \sqrt{(m-1.007)(m+0.997)})$$

Para todos los valores del parámetro que conducen a autovalores complejos ($-0.997 < m < 1.007$) la estabilidad del punto de equilibrio dependerá del signo de la diferencia $0.005 - m$, que es la parte real del autovalor. Así, se tendría el siguiente resultado:

$m > 0.005 \Rightarrow$ equilibrio asintóticamente estable.

$m < 0.005 \Rightarrow$ equilibrio inestable.

$m = 0.005 \Rightarrow$ equilibrio estable (pero no asintóticamente estable).

Además también se verifican las condiciones

$$\left.\frac{d\,\mathrm{Re}(l_{1,2})}{dm}\right|_{m=0.005} \neq 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(l_{1,2})\big|_{m=0.005} \neq 0$$

con lo que nos encontramos en las condiciones del Teorema de Bifurcación de Hopf (Beltrami, 1987), en virtud del cual podemos afirmar que existe una órbita cerrada para valores de $|m-0.005|$ suficientemente pequeños.

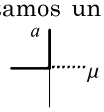
En particular, se puede demostrar que los únicos ciclos se dan para $m = 0.005$ puesto que, al ser el sistema lineal, todas las soluciones inestables ($m < 0.005$) crecen indefinidamente con el tiempo por lo que no puede existir un ciclo límite al que se acerquen las soluciones. Además, para ese valor del parámetro existen órbitas periódicas de amplitud a, $\forall a > 0$, es decir, el número de órbitas periódicas cambia de ninguno a muchas en $m = 0.005$.

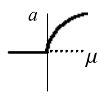
Por tanto, no se trata del fenómeno clásico de bifurcación de Hopf, sino de un caso que podríamos llamar "degenerado", también conocido por bifurcación vertical[7] (Hale y Koçak, 1991).

La estabilidad asintótica para las soluciones de los sistemas con $m > 0.005$ cae fuera de toda duda, mientras que la estabilidad (neutral) en el caso $m = 0.005$ queda garantizada tomando la función de Liapunov:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(0.005x + y)^2 + 0.251\frac{x^2}{2}$$

---

[7] Si entendemos un punto estacionario como una órbita de amplitud a=0 y representamos un diagrama de bifurcaciones de órbitas periódicas, para la bifurcación vertical se tendría 

mientras que a una bifurcación Hopf clásica le correspondería 

Nótese que las hipótesis del teorema de Hopf sólo se refieren a la parte lineal del sistema, pero la forma de la curva de bifurcación depende de los términos no lineales, inexistentes en nuestro caso (siendo $x = P - P^*$ y $y = MIG - MIG^*$), que verifica

$$V(0,0) = 0$$

$$V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{dV}{dt} = (0.005 - m)(0.005x + y)^2 \equiv 0 \text{ para } m = 0.005$$

En concreto, se puede obtener la solución explícita del sistema (por ejemplo, con Mathematica), que en el caso $m = 0.005$ vendría dada por

$$x(t) = \quad (-aC_1 - bC_2)\cos wt + (-bC_1 + aC_2)\operatorname{sen} wt$$

$$y(t) = \quad C_2 \cos wt + C_1 \operatorname{sen} wt$$

siendo $a = 1.995$, $b = 0.0199$, $w = 0.501$, cuyos valores recorren en el plano *x*-*y* la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2} y^2 + \frac{2b}{a^2} xy = C_1^2 + C_2^2$$

con lo que en el plano de fases se dibujarán las órbitas como se observa en la figura 4.8.

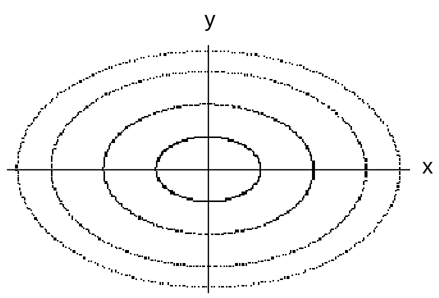


Figura 4.8

El caso en el que los autovalores son reales no presenta ninguna dificultad en lo que se refiere a la estabilidad del equilibrio, pues ambos son siempre negativos cuando $m \geq 1.007$ y siempre positivos si $m \leq -0.997$.

Estas mismas conclusiones resultan ser aplicables al modelo original, como ya se dijo, siempre que se verifiquen condiciones de hiperbolicidad. Sin embargo, en el caso $m = 0.005$, no podemos afirmar lo mismo a priori, pues se produce una pérdida de hiperbolicidad y por consiguiente, este caso requiere un análisis más amplio. Realizaremos un estudio directo sobre el sistema original perturbado convenientemente con un valor m próximo a 0.005:

$$
\begin{aligned}
P' &= 0.001\,TCV\,P + MIG \\
TCV' &= 0.008\,TCV(5 - TCV) \\
MIG' &= 9963.209 - m\,P' - 5100\,OF' + 3164.1\,DEM' - 0.251\,P + 2539.66\,DEM \qquad (4.15) \\
DEM' &= -0.0664 + 0.332\,DEM - 0.0893\,DEM^2 \\
OF' &= 0.01087\,OF^{5.44}(1.9 - OF)^{13.55} e^{1.4DEM}
\end{aligned}
$$

Para ello, aumentamos la dimensión del sistema, tomando μ como una variable, trasladamos el sistema al origen y separamos la parte lineal,

$$
\begin{aligned}
&y' = A(m)y + R(y,m) \\
&m' = 0
\end{aligned}
$$

para a continuación efectuar un nuevo cambio de variable, en este caso dado por la matriz de autovectores de $A(0.005)$, de tal manera que, para el valor crítico del parámetro, el sistema resultante tenga su parte lineal en forma diagonal (por bloques):

$$u = P^{-1}y$$

$$u' = P^{-1}y' = P^{-1}A(m)Pu + P^{-1}R(Pu)\,, \qquad \text{con}$$

$$P^{-1}A(0.005)P = D = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, podemos particionar convenientemente el vector de las variables de estado en función del espectro de D, obteniendo:

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \text{ con } v = (u_3, u_4)^t \text{ y } w = (u_1, u_2, u_5)^t ,$$

partición que nos permitirá definir una expresión aproximada para la variedad de centros.

Es claro que en el sistema ampliado, la dimensión de la variedad de centros ha aumentado en 1 con respecto al sistema original, y tomará la forma $\{v = h(w, m) / h(0,0) = Dh(0,0) = 0\}$.

Para aislar la parte del sistema que contiene la degeneración, es preciso encontrar la ecuación de la variedad de centros. Como la expresión exacta no se puede obtener en general, se propone encontrar el desarrollo de Taylor de h en torno a $(w, m) = (0,0)$, hasta un cierto orden. El caso más sencillo se presenta al escoger una aproximación lineal para h, lo cual coincide con tomar h=0 (puesto que h(0)=Dh(0)=0). Si tomamos esta opción en nuestro modelo ($v = 0$), el sistema reducido que se obtiene es

$$\begin{aligned} &u_1' = 0.894 + 0.5u_2 \\ &u_2' = -29.33 - 0.5u_1 + 0.005u_2 - 16620.3(-u_5)^{13.55}(1.9 + u_5)^{5.44} + m(-1.78 - u_2) \\ &u_5' = 1.45(-u_5)^{13.55}(1.9 + u_5)^{5.44} \end{aligned} \tag{4.16}$$

en el que hemos eliminado la ecuación $m' = 0$ para volver a considerar a μ como parámetro ($|m - 0.005| < d$).

El estudio del sistema (4.16) nos informará sobre el comportamiento del flujo restringido a la variedad de centros y, en consecuencia, sobre el comportamiento del sistema original.

Observamos que la variable u_5 está desacoplada, siendo su comportamiento, independiente de las restantes variables, de tipo sigmoidal. Sin embargo, y a pesar de que el teorema 3.2.6 asegura que esta ecuación no plantea inconvenientes en lo que se refiere a la estabilidad asintótica[8], no podemos reducir este sistema puesto que no nos encontramos en una situación de hiperbolicidad ni tampoco en la descrita en las hipótesis de la proposición 4.4.3.

En consecuencia, y a falta de herramientas que nos permitan esclarecer el comportamiento del sistema (4.16) (y por ende, del sistema (4.15)), tan sólo podemos recurrir a los métodos numéricos a nuestro alcance, que permiten comprobar que en el caso $m = 0.005$, las órbitas del sistema (4.15) presentan un comportamiento cíclico, como el que se muestra en la figura 4.9, en la que únicamente hemos representado las variables *OF*, *P*, y *MIG*, dado que las restantes variables (*TCV* y *DEM*) se pueden desacoplar en virtud de la proposición 4.4.1.

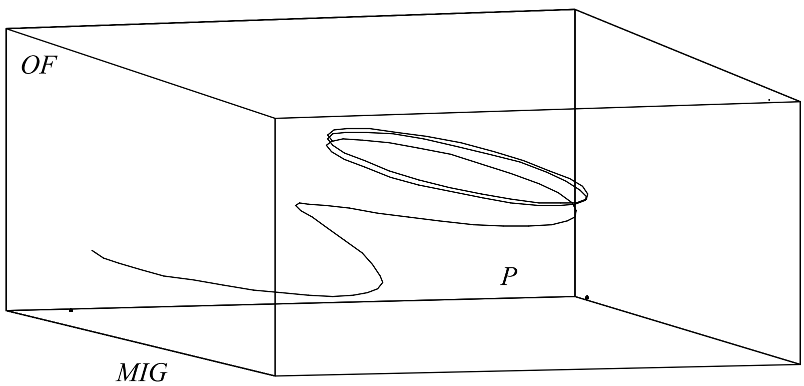


Figura 4.9

Todo lo anterior nos permite afirmar que los resultados previamente obtenidos tras el análisis del modelo reducido (4.14) son, en efecto, aplicables al modelo original (4.15), quedando en síntesis lo siguiente:

---

[8] La aplicación del teorema 3.2.6 debe hacerse con cuidado, pues la ecuación correspondiente a u_5 en (4.13) no está en las condiciones del teorema de caracterización (teor. 3.2.2), aunque se puede reescribir haciendo el cambio $1.9+u_5=z$.

Si $m < 0.005$, el punto de equilibrio es inestable pues, a pesar de que las variables *TCV*, *OF* y *DEM* presentan comportamientos asintóticos, las soluciones del sistema para *P* y *MIG* se alejan de sus respectivos valores estacionarios a medida que pasa el tiempo. En particular, si $m \leq -0.997$, las soluciones presentan un comportamiento exponencial explosivo, esto es, a partir de cierto instante la Población y la Migración tomarán valores indefinidamente grandes.

Si $m = 0.005$ el equilibrio es estable, con soluciones que forman una órbita cerrada en el plano de fases. En este caso, correspondiente a lo que podríamos calificar como situación límite, las soluciones del sistema reducido entrarían en un comportamiento oscilatorio, en torno a los valores estacionarios de las variables, población y migración, de manera que valores altos y bajos de efectivos poblacionales se alternarían con valores positivos y negativos de los saldos migratorios.

Si $m > 0.005$ el equilibrio es asintóticamente estable, lo que nos indica que las soluciones del sistema evolucionarán con el tiempo, acercándose al equilibrio, esto es, la Oferta de plazas se estabilizará en torno a unas 190000 camas que alojarán a lo largo del año a unos 3.5 millones de visitantes; la Población tenderá a estabilizarse en torno a 75107 personas con una Tasa de Crecimiento Vegetativo en torno al 5 por mil, mientras que los saldos migratorios se estabilizarán en unas 375 salidas. La aproximación al equilibrio en el caso de las variables *P* y *MIG* será de tipo asintótico, si los autovalores son reales ($m \geq 1.007$) y con oscilaciones amortiguadas en otro caso.

Conclusiones y Cuestiones Abiertas.

Durante la realización de esta Tesis Doctoral se ha llevado a cabo, sin propósito preconcebido, un trabajo de investigación multidisciplinar, en el que un primer objetivo de naturaleza económico-matemática generó numerosos interrogantes que fueron dirigiendo en algún sentido la investigación.

En efecto, la idea original a partir de la cual surgió esta Memoria consistía en construir un modelo para describir y analizar el desarrollo acaecido en las últimas décadas en la zona Sur de la isla de Tenerife a raíz de la implantación del turismo como actividad económica predominante. Se trataba por tanto de un ejercicio de modelización matemática de sistemas dinámicos, que pretendíamos llevar a cabo con el rigor que exigía nuestra formación matemática y que se desconocía en otros trabajos similares.

La construcción de dicho modelo, relatada en el capítulo 1, implicaba necesariamente tanto el conocimiento de los hechos históricos como su ubicación en el tiempo, determinantes y consecuencias. Ello convirtió en imprescindible la tarea de recopilar información exhaustiva en textos de Demografía y Geografía canaria, que nos permitieran descifrar el qué y el cómo, esto es, las variables influyentes para su inserción en el modelo y las posibles relaciones entre ellas.

Pero ese proceso de construcción no constituyó una senda recta y llana, sino que por el contrario aparecieron en el camino diferentes obstáculos. Algunos de ellos estaban relacionados con la disponibilidad y calidad de los datos, tal y como se expuso en el capítulo 2 de la presente Memoria, siendo el más grave la (a todas luces) poca fiabilidad de las series de población y la inexistencia de series de migración.

En los textos de Demografía no encontramos respuesta alguna a este tipo de problemas, reconocido por casi todos; por el contrario, la mayoría de ellos parecían obviarlo o aceptarlo tácitamente.

Nosotros, sin embargo, acometimos la tarea de hallar una solución que fue encontrada, aunque en forma aproximada. Bien es verdad que por la propia naturaleza de los datos es imposible verificar la calidad o justeza de la estimación realizada, pero también es cierto que los resultados obtenidos por el propio modelo no han refutado la aproximación obtenida.

En otras ocasiones no fueron obstáculos propiamente los que aparecieron, sino más bien puntos de reflexión. Puesto que en el modelo que se estaba estudiando se analizaba el desarrollo de una región, muchas de las variables que aparecían podían ser consideradas como procesos de crecimiento en el tiempo y eran por tanto susceptibles de ser modelizadas usando curvas sigmoidales.

Fue entonces cuando surgió el interés por profundizar en el estudio de ese tipo de curvas, de tanta aplicación en distintas ramas de la ciencia y la tecnología. El análisis de sus características y de las posibilidades de identificación y estimación ha quedado recogido en el capítulo 3 de la Memoria, resolviéndose un buen número de cuestiones que la bibliografía especializada había descuidado en demasía.

Un último paso, originado por la utilización efectiva del modelo como medio de análisis presente y futuro, nos guió por la teoría del Análisis Cualitativo de Sistemas Dinámicos, a través de sus conceptos y relaciones básicos hacia el establecimiento de propiedades no triviales que permitieran un análisis simplificado del modelo de desarrollo del Sur, tal y como se detalla en el capítulo 4.

Como vemos, hemos venido tratando temas socio-demográficos, geográficos, históricos por un lado y matemáticos por otro lado, introduciéndonos en la teoría de Sistemas Dinámicos y, en particular, en la modelización de fenómenos de crecimiento.

En definitiva, la totalidad del trabajo, las contribuciones realizadas así como las conclusiones que se puedan extraer se pueden dividir en dos bloques temáticos principales.

De un lado destacamos el proceso de construcción y análisis del modelo en su conjunto, el cual contribuye, según creemos, no sólo a la descripción de la realidad sino también a un óptimo desarrollo futuro del complejo socio-económico del que hablamos.

Y lo hace desde ópticas diversas: a través del análisis comprensivo de lo sucedido, que permite alertar sobre posibles comportamientos nocivos; a través de la posibilidad de simulación de políticas, que permite adelantarnos a posibles fenómenos perversos; a través, incluso, de un análisis crítico del modelo que revele la existencia de variables no contempladas pero de importancia para el buen funcionamiento del sistema.

Como novedad incluimos también una corrección de los datos poblacionales, cuya irregularidad está de sobra reconocida por los investigadores canarios, que a nuestro entender consigue recoger la imagen de lo acaecido en la comarca, aunque en última instancia corresponde a los especialistas demográficos discernir sobre su aplicabilidad en otros ámbitos.

Por otro lado, se puede resaltar el estudio realizado en torno a los procesos de crecimiento. Una extensa revisión bibliográfica destacó la inexistencia de una metodología general de modelización en este campo, sustituida en su defecto por una arbitrariedad tanto en la elección del modelo como en lo referente a la estimación de parámetros.

Nosotros, por el contrario, realizamos una caracterización teórica común a todo este tipo de procesos que culminó en dos propuestas concretas de modelización: las llamadas especificación polinomial y especificación hiperlogística. La primera de ellas constituía un modelo de poca significación teórica pero marcado ajuste histórico, en tanto que la segunda, a la que se podía atribuir una mayor interpretabilidad teórica, planteaba problemas en cuanto a la estimación de parámetros.

En este último aspecto también intentamos aportar técnicas novedosas, pues estudiamos diversos métodos (aproximados) de estimación que evitaban recurrir a procesos estadísticos complejos y elaborados, en favor de los más conocidos y asequibles a investigadores de todas las disciplinas.

No obstante, consideramos que la situación, lejos de estar resuelta, ha dejado algunos huecos o cuestiones abiertas para futuras investigaciones, en ambos bloques temáticos tratados.

En lo que se refiere a la construcción de un modelo dinámico en general y del modelo MDS en particular:

- Se precisa investigación en la búsqueda de nuevas modelizaciones apropiadas a las variables socioeconómicas (empleo, población activa, suelo urbano...), que puedan proporcionar mejores resultados
- Es conveniente considerar la introducción en el modelo de variables que han demostrado su relevancia en el comportamiento del sistema, los precios turísticos, entre ellas.

En cuanto a la modelización con curvas sigmoidales mucho queda por hacer y sin duda se avanzará, dada la profusa investigación que se observa en estos tiempos en el tema:

- Nuevas especificaciones funcionales

- Nuevos métodos de estimación (para la hiperlogística y para otras curvas)

- Introducción de variabilidad en los coeficientes, por ejemplo en la capacidad de carga

- Concatenación de curvas sigmoidales, aplicable a situaciones en las que se observan distintas fases...

Los anteriores tópicos representan tan sólo una parte de las posibilidades que se abren en este campo, algunas de las cuales ya se están comenzando a tratar.

En lo que se refiere a nuestras propuestas, algunas cuestiones susceptibles de ser perfiladas se dirigen por ejemplo hacia

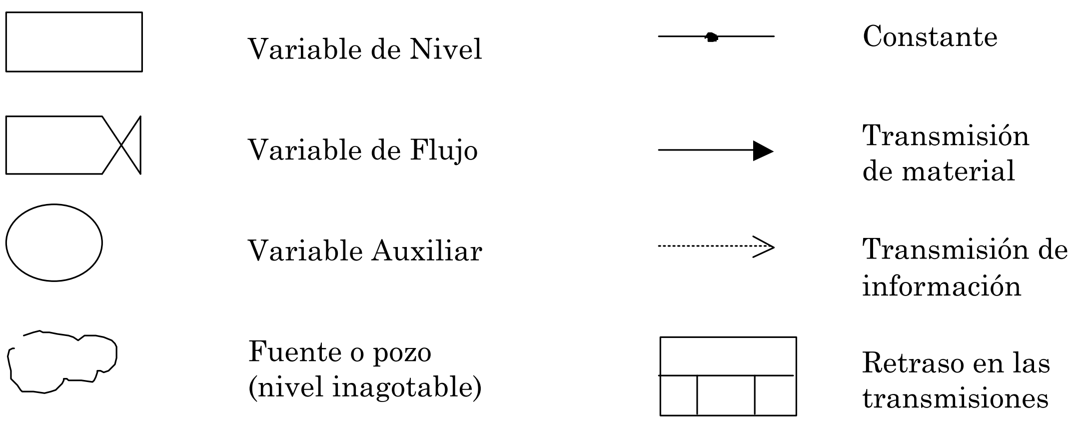
- la comprobación de la aplicabilidad universal de la técnica (cuestión que, por el momento, ha arrojado resultados favorables), así como

- la posibilidad de mejorar los aspectos estadísticos relacionados con la utilización del modelo para la predicción (errores, intervalos de confianza, etc).

Apéndice

Una de las aportaciones de Forrester al modelado de sistemas reside en la representación esquemática de un sistema de ecuaciones diferenciales estableciendo un símil hidrodinámico (Aracil, 1986) que ayuda a comprender el significado de las variables. Así, las variables de estado se asocian a depósitos acumulando niveles, mientras que las variaciones de los niveles (esto es, sus derivadas) se imaginan reguladas a través de ciertas válvulas que incrementan o disminuyen el nivel en los depósitos, y que se corresponden con las variables de flujo. El valor tomado por una variable de flujo puede estar determinado en parte por variables auxiliares, que representan etapas intermedias en la determinación de los flujos. De esta forma, las variables que aparecen en un modelo se clasifican, principalmente, en variables de nivel, de flujo y auxiliares.

Asociando distintos símbolos a cada tipo de variable, es posible representar por medio de un diagrama (el Diagrama de Forrester) la estructura del modelo. Dichos símbolos son los siguientes:



Bibliografía

ACOSTA, A. y DÍAZ, M.C. (1994): "Tías: un municipio en creciente auge demográfico". *IV Jornadas de Estudios de Lanzarote y Fuerteventura*, pp 153-184.

ACOSTA, E. (1993): "Tendencias Recientes de la Población de Lanzarote (Canarias)", en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España*. IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL.

AGUILÓ, E. (1992): "La posición competitiva de las regiones turísticas mediterráneas españolas: posibilidades de la política turística" *Papers de Turisme* nº 8/9, pp. 75-92.

ALBARRACÍN, J. (1982): "Las Tendencias básicas de la Población, el Empleo y el Paro en el período 1964ª 1980". Banco de España, Estudios Económicos, nº 26.

ALCAIDE, A. (1964): “Econometría del Turismo”. *Revista de Estudios Turísticos*, nº 4, pp 5-22.

ÁLVAREZ, A. (1983): *Agricultura y Turismo en el Valle de la Orotava: un Modelo de Articulación*. Tesis Doctoral, Facultad de Geografía e Historia, Universidad de La Laguna.

AMILLO y ARRIAGA, (1987): *Análisis matemático con aplicaciones a la computación*. McGraw Hill.

ANDRÉS, J. (1994): "Los salarios agregados y el paro en España: un examen de los estudios empíricos existentes", en *El paro en España: ¿Tiene solución? Consejo Superior de Cámaras de Comercio, Industria y Navegación en España.*

ANDRÉS, J. y GARCÍA, J. (1994): "Principales rasgos del mercado de trabajo en 1992", en *La Economía Española ante el Mercado Unico europeo,* Alianza Económica, Madrid.

ARACIL, J. (1986): Introducción a la Dinámica de Sistemas, Alianza Editorial, Madrid.

ARACIL, J. y GORDILLO, F. (1997): *Dinámica de Sistemas,* Alianza Universidad Textos, Madrid.

ARACIL, J. y TORO, M. (1993): *Métodos Cualitativos en Dinámica de Sistemas*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

ARROCHA, A. y PÉREZ, J. (1992): "Estimación de la Renta per cápita de los municipios de las isla de Tenerife en 1987". *Documento de Trabajo nº 35 de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de La Laguna.*

ATKINSON, K.E. (1989): *An introduction to numerical analysis*. John Wiley & Sons.

AYANT, y. Y BORG, M. (1974): *Funciones Especiales*. Editorial Alhambra.

BANESTO: *Anuario del Mercado Español, 1993.*

BANKS, R.B. (1994): *Growth Diffusion Phenomena: Mathematical frameworks and applications*, Springer-Verlag, Berlin.

BARBER, M.A. y ARTILES, J. (1978): "El sector Turístico. Análisis y algunas consideraciones a un nuevo modelo*". Información Comercial Española, 543 (78.11) 108*

BASS, F.M. (1969): "A new Product Growth Model for Consumer Durables", *Management Science* 15*,* pp. 215-227.

BBV: *Renta Nacional de España y su distribución provincial 1985-1987.*

BECERRA, M. y NAVARRO, M (1992): "Un Análisis de la Situación del Turismo en Canarias". *Papers de Turisme No 819, pp 139-164.*

BELTRAMI, E. (1987): *Mathematics for Dynamic Modeling,* Academic Press Inc., San Diego, CA.

BERNY, J. (1994) "New concepts and applications in Growth Phenomena", *Jour. Of Applied Statistics, Vol. 21,* p. 161-190.

BERTALANFFY, L. VON (1986): *Teoría general de Sistemas,* Fondo de Cultura Económica, México D.F.

BEWLEY, R. y FIEBIG, D.G. (1988) "A flexible logistic growth model with applications in telecommunications", *Intern J. of Forecasting, 4,* pp. 177-192.

BHARGAVA, S. et al (1991): “Requirement of Dimensional Consistency in Model Equations: Diffusion Models Incorporating Price and their Applications”. *Technological Forecasting and Social Change,* 41, pp. 177-188.

BLANCHARD, O. y OTROS (1994): *El paro en España: ¿Tiene solución?,* Informe del CEPR, Madrid.

BLANES, A. (1993): "Previsiones de población y demanda de bienes y Servicios: Unos ejemplos para Cataluña", en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España.* IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL.

BOTE, V. (1995): “Estructura y desarrollo del turismo en España: Hacia un cambio cualitativo y más responsable”.): *ECONOMÍA DEL TURISMO. V Congreso Nacional de Economía. Las Palmas.*

BUISÁN, A. (1995): "Principales determinantes de los ingresos por turismo". *Banco de España, Documento de Trabajo nº 9502.*

BULL, A. (1994): *La economía del sector turístico.* Alianza Economía.

BURRIEL, E. (1981)*: Canarias: Población y Agricultura en una sociedad dependiente.* Oikos-Tau.

BUTLER, R. (1980): “The concept of a Tourist Area Cycle of Evolution”, *Canadian Geographer* 24, pp. 5-12.

CABALLERO, R. Y OTROS (1998): "Un modelo de Programación Lineal para el Análisis del Sector Turístico". *XII Reunión ASEPELT-ESPAÑA, Córdoba*.

CABILDO DE TENERIFE (1995): *El Turismo en Canarias. Características estructurales y económicas. Impacto económico y espacial.* Servicio Técnico de Desarrollo Económico del Cabildo de Tenerife.

CABILDO DE TENERIFE: *Estadísticas de Turismo Receptivo.* Varios años.

CÁCERES, A. (1986): *Análisis del Desempleo en Canarias,* Consejería de Trabajo y Seguridad Social, Gobierno de Canarias, Santa Cruz de Tenerife.

CALLIZO, J. (1991), *Aproximación a la Geografía del Turismo*, Ed. Síntesis, Madrid.

CANAGUA*: Un modelo de gestión del agua en Canarias. 1978*

CAÑIZARES, M.C. (1993): "Evolución, crecimiento y perspectivas futuras de la población de Puertollano", en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España.* IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL.

CARDONA, A. (1998)[a]: "El proceso de modelización matemática en Economía y Administracion de Empresas" *XII Reunión ASEPELT-ESPAÑA, Córdoba*

CARDONA, A. (1998)[b]: "Algunas ventajas e inconvenientes del uso de modelos matemáticos en Economía y Empresa" *XII Reunión ASEPELT-ESPAÑA, Córdoba*

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M. (1997): "Modelización del desarrollo turístico y económico de un área de la isla de Tenerife". *Actas de la XI Reunión Anual Asepelt España, Bilbao, 1997.*

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M. (1998)[a]: "Modelización de la Oferta Turística en Tenerife con Curvas Sigmoidales". *Actas de la XII Reunión Anual Asepelt España, Córdoba, 1998.*

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M. (1998)[b]: "Modelo de Simulación del Crecimiento Turístico en el Sur de Tenerife", en *Economía Canaria. Primer Seminario de Investigación Universitaria sobre la Economía Canaria,* Tomo II, pp 711-724. La Laguna.

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M. (1999): "Estrategias para la Descripción del Crecimiento de la Oferta Turística en el Sur de Tenerife". *Actas de la XXV Reunión de Estudios Regionales, Sevilla, 1999.*

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M. (2000)[a]: "A Simulated Model for the Growth of Tourism in South Tenerife". aceptado para su publicación en *Systems Analysis- Modelling and Simulation.*

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M. (2000)[b]: "Sigmoidal Modelling" *Proceedings of the MS'2000 International Conference on Modelling and Simulation*, pp 949-954, Las Palmas de Gran Canaria, 2000.

CARRILLO, M. y GONZÁLEZ, J.M.: "A new approach to modelling sigmoidal curves", en proceso de revisión para su publicación en *Technological Forecasting and Social Change.*

CEDOC[a]: *Estadísticas básicas de Canarias, 1980-1985.*

CEDOC[b]: *Población y Trabajo, 1981-1989.*

CES-CONSEJO ECONÓMICO Y SOCIAL DE CANARIAS (1996): Informe Anual 1996. La economía, la sociedad y el empleo en Canarias en 1996. Secretaría General. Las Palmas de Gran Canaria.

COOPER, CH. (1990): "The Life Cycle Concept and Tourism",

COOPER, CH. y JACKSON, S. (1989): "Destination life cycle: the Isle of man case study", *Annals of Tourism Research*, 16, pp. 377-398.

CRÉPEL, P. (1999): "El nacimiento de las matemáticas sociales", *Investigación y Ciencia, noviembre de 1999, pp. 78-83.*

CRUZ, A. (1985): "El mercado turístico Canario. Situación actual. Promoción nuevos mercados" en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios económicos canarios. Gobierno de Canarias.

CUADRADO, S: (1983): *Economía y Turismo en Tenerife*. Aula de Cultura del Cabildo Insular de Tenerife.

CUEVA, L.U. (1998): *Dinámica de un destino turístico. Una explicación endógena del tursmo interior en España mediante Dinámica de*

Sistemas. Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.

DAVIS, P. J. (1975): *Interpolation & Approximation*. Dover Publications, Inc. New York.

DHRYMES, P. J. (1984): *Econometría*, Ed. AC, Madrid.

DÍAZ, M.C. (1982): *Granadilla. Reactivación demográfica y económica del Sur de Tenerife*. Aula de Cultura del Cabildo insular de Tenerife.

DÍAZ, R.F. (1990): "Efectos de las inmigraciones sobre el crecimiento de la aglomeración de Las Palmas de Gran Canaria". *Anuario de Estudios Atlánticos* nº 36, pp 377-411.

DÍAZ, F. y ÁLVAREZ, J.A. (1998): "Los efectos de la actividad turística sobre el medio natural y sociocultural. El caso de Tenerife". *El Turismo en Canarias. Colección Investigación Empresarial. Fundación FYDE-CajaCanarias*

DOMÍNGUEZ, C. (1992): *El sector primario en Fuerteventura. Canales de comercialización*. Edita Caja Insular de Ahorros de Canarias.

DUFFY, K.P. (1997): "Logistic Equation Prediction of Airport Growth", http://www.tpg1.com.au/users/kpduffy/forecast.html.

EASINGWOOD, C.J. y OTROS (1981): "A Nonsymmetric responding Logistic Model for Technological Substitutions", *Tech. Forecasting and Social Change, 20,* pp. 199-213.

EICH, K. (1998): "The Population Guestimation of the United States in 2050", http://www.cboss.com/keith/reports/populate.html.

ELIZALDE, E. (1992): *Métodos Matemáticos Analíticos*. PPU.

EQUIPO INVESTIGADOR DEL IET (1983): "La inversión extranjera en los sectores turísticos y análisis de estructuras de explotación". *Estudios Turísticos*, nº 77-78, pp 107-131.

ESPASA, A. y OTROS (1990): "Un análisis econométrico de los ingresos por turismo en la economía española". *Banco de España, Documento de Trabajo nº 9002.*

ESTEBAN, A. (1995): "Previsiones de la demanda turística española nacional e internacional". *Actas del V Congreso Nacional de Economía*, Las Palmas de Gran Canaria, Tomo 6, pp. 169-188.

ESTEBAN, A. y FIGUEROLA, M. (1984): "Técnicas de previsión y análisis del comportamiento de la demanda turística" *Estudios Turísticos, nº 84, pp 3-16.*

ESTEBAN, A. y REINARES, E. (1996): "La investigación en la demanda turística en España: Recopilación y Análisis". *Estudios Turísticos, nº 129, pp 81-104.*

ESTRADA, P. C. y OTROS (1995): "Using a chaotic signal for dynamic system parameter identification", *II Conference on Dynamic Systems and Applications*, Atlanta.

EVANS, M. (1996): "Aspects of maximum Likelihood estimation of asymmetric Growth Curves", *Jour. Of Appl. Statistics, Vol. 23*, p. 467.

FIGUEROLA, M. (1985)[a]: "Factores de influencia en la evolución turística: el crecimiento económico, la inflación y la relación de cambio", en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios económicos canarios. Gobierno de Canarias.

FIGUEROLA, M. (1985)[b]: *Teoría Económica del Turismo*. Alianza Universidad Textos.

FINA, L. (1997): "Creación de Empleo: ¿dónde encontrar nuevos yacimientos?" en *La Economía Española en el Camino de la Convergencia Europea*. Editorial Civitas.

FORRESTER, J.W. (1972): *Dinámica Industrial,* Editorial El Ateneo, Buenos Aires.

FRANSES, P.H. (1994)[a]: "Fitting a Gompertz Curve", *Jour. Of the Oper. Research Society, Vol. 45, Nº1,* pp. 109-113.

FRANSES, P.H. (1994)[b]: "A Method to select between Gompertz and logistic trend curves", *Tech. Forecasting and Social Change, 46,* pp. 45-49.

FRECHTLING, D.C. (1996): *Practical Tourism Forecasting,* Butterworth Heinemann, London.

FREIRE, E. (1982): *Análisis Cualitativo y de Bifurcaciones en Sistemas Dinámicos*. Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla.

FULFORD, G., FORRESTER, P. y JONES, A. (1997): *Modelling with Differential and Difference Equations*. Cambridge University Press.

FULLERTON, H.H. (1975): *An Economic Simulation Model for Regional Development Planning*. Ann Arbor Science Publishers, inc.

GAMERMAN, D. y MIGON, H.S. (1991): "Tractors in Spain-A Dynamic Reanalysis, *Jour. Of the Oper. Research Society* Vol. 42, nº 2, pp. 119-124.

GAMERO, E. (1990): *Computación Simbólica y Bifurcaciones de Sistemas Dinámicos*. Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla.

GARCÍA, M.J. (1990): "El crecimiento reciente de la industria turística en Tenerife (El ejemplo del sur de la isla). Hacia una aproximación a las características del fenómeno. *Anuario de Estudios Atlánticos*, nº 36m pp 463-490.

GARCÍA, O. (1983): "A stochastic differential equation model for the height growth of forest stands", *Biometric, 39,* pp. 1059-1072.

GARCÍA, Y. y PALOMINO, E. (1998): "Análisis del Sector Turístico Extremeño". *XII Reunión ASEPELT-ESPAÑA, Córdoba*.

GIL, M.T. (1985): “La incidencia del turismo en la urbanización del mercado canario”, en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios económicos canarios. Gobierno de Canarias..

GODENAU, D. y ARTEAGA, S. (1997): "Evolución reciente de la población canaria". SITUACION. Serie Estudios Regionales. Canarias. BBV.

GONZÁLEZ, A. y BETANCORT, A. (1994): "Fuerza de trabajo y turismo en Lanzarote y Fuerteventura". *IV Jornadas de Estudios de Lanzarote y Fuerteventura.*

GONZÁLEZ, A. y DELGADO, G. (1995): *La vivienda en Las Palmas de Gran Canaria.* Ediciones del Cabildo insular de Gran Canaria.

GONZÁLEZ MORALES, A. (1994): "La estructura reciente de la población de Fuerteventura 1970-1991: El fenómeno de transición demográfica en una isla de economía subdesarrollada." *IV Jornadas de Estudios sobre Fuerteventura y Lanzarote.* Servicio de Publicaciones del Cabildo de Fuerteventura.

GONZÁLEZ PÉREZ, J.M. (1991)[a]: *Análisis del comportamiento de los migrantes españoles: una aproximación empírica.* Documento de Trabajo nº28. Facultad de CCEE y Empresariales. Universidad de La Laguna.

GONZÁLEZ PÉREZ, J.M. (1991)[b]: *Modelo explicativo de los flujos migratorios en España: Incidencia en la dispersión del desempleo interregional.* Documento de Trabajo nº33. Facultad de CCEE y Empresariales. Universidad de La Laguna.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1992): "Turismo, Demografía y Ocupación del Suelo en el Valle de La Orotava. La Dinámica de Sistemas en la Simulación de un Modelo de Din mica Regional", *Documento de Trabajo No. 37*, Facultad de CC. Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna, 65 páginas.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1993): "Nivel de Vida y Propiedad del Suelo: Impacto del Turismo en el desarrollo socio-económico del Valle de La Orotava", *Documento de Trabajo Número 41*, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de La Laguna, La Laguna, Enero de 1993.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1994)[a]:"Dynamic of the emigration inside a Functional Economic Area (FEA)", en *"Trends and Developments in Ordinary Differential Equations"*, Editors Yousef Alavi and Po-Fang Hsieh, World Scientific, Singapore, pp. 87-96

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1994)[b]:"Dynamic of the Population inside a Functional Economic Area", en *"Dynamic Systems and Applications"*, Volume 1, Editors G. S. Ladde and M. Sambandham; Dynamic Publishers, U. S. A., Atlanta, 1994, pp. 111-120.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1994)[c]:"Economy, Demography and Occupation of the Territory inside a Functional economic Area", *Proceedings of the "IMACS Symposium on Mathematical Modelling"*, Technical University Vienna, Volume 5, pp. 820-827.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1997)[a]: *Teoría de Sistemas: Simulación dinámica de variables socio-económicas*. Colección Textos Universitarios, Gobierno de Canarias, Consejería de Educación, Santa Cruz de Tenerife.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1997)[b]: "Demographic Evolution of an Area of Touristic Localization", *Systems Analysis Modelling Simulation*, vol 27, pp. 123-137.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. (1998): "Modelización de la Demanda y la Oferta turísticas en la Isla de Tenerife", *Revista de Economía y Economistas de Canarias, Nº 12,* pp. 35-45.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, J.M. y GUTIÉRREZ, T.(1995): "Modelización del crecimiento de las plazas turísticas de Tenerife con curvas logísticas", *Actas del V Congreso Nacional de Economía*, Las Palmas de Gran Canaria, Tomo 6, pp. 285-296.

GOODMAN, M.R. (1988): *Study notes in System Dynamics*. The MIT Press.

GORDON, G. (1980): *Simulación de Sistemas*. Ed. Diana.

GORDON, I.R. (1996): "Crowding, competition and externalities in Tourism development: a Model of resort life cycles2, *Discussion Paper Nº 12,* University of Reading.

GOTTLIEB, H.P.W. (1995): "Properties of Some Generalised Logistic Maps with Fractional exponents", http://www.csu.edu.au/ci/vol2/gotlieb.html

GRAHAM, A. K. (1980): "Parameter estimation in System Dynamics Modeling", in *Elements of the System Dynamics Method, Ed. Jorgen Randers*.

GUCKENHEIMER, J. y HOLMES, PH. (1990): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields,* Springer Verlag, New York.

GUTIÉRREZ, T. y MELCHIOR, M. M. (1995): "Adecuación estratégica de la explotación hotelera al cambio del entorno, *Actas del V Congreso Nacional de Economía, Vol 6,* Las Palmas de Gran Canaria, pp. 259-272

GUTIÉRREZ, T. y OREJA, J. R. (1994) "Análisis del Ciclo de Vida del Sector Turístico en Tenerife (1975-1994)", *XX Reunión de Estudios Regionales,* Las Palmas de Gran Canaria.

GUZMÁN, M. (1980): *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*. Ed. Alhambra.

HALE, J. y KOÇAK, H. (1991): *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.

HARVEY, A.C. (1984): "Time Series Forecasting Based on the Logistic Curve", *J. of the Operational Research, 35,* pp. 641-646.

HAYWOOD, K.M. (1986): "Can the touri-area life cycle be made operational?", *Tourism Management,* pp. 154-167.

HERAS, A. y OTROS (1993): "Un modelo de estimación indirecta de la Renta Familiar Disponible a nivel municipal". *Estudios Regionales, nº 35, pp 153-166.*

HERCE, J.A. y SOSVILLA, S. (1998): "Sector turístico y crecimiento del empleo en la Comunidad Autónoma de Canarias: Un ejercicio de prospección al horizonte 2011" *Colección Textos Express, 98-02, FEDEA.*

HERNÁNDEZ, J.A. (1995): *Actividades económicas, tráfico y red viaria en Tenerife*. Ed. Cabildo Insular de Gran Canaria.

HIGHTOWER, J.E. (1998): "Growth Models",

http://couses.ncsu.edu/classes/zo/26001/GrowthCrv.html.

INSTITUTO DE ESTUDIOS TURÍSTICOS (coord.) y PROSEMSA (1987): "Estimación del capital y de la inversión en los sectores turísticos. Informe resumen.". *Estudios Turísticos*, nº 95, pp 23-47.

ISRAEL, G. (1996): *La mathématisation du réel,* Éditions du Seuil, París.

ISTAC[a]: *Anuario Estadístico de Canarias*. Varios años.

ISTAC[b]: *Censos de Población y Viviendas. La Población, Características Principales. Canarias 1991.*

ISTAC[c]: *Encuesta sobre el gasto turístico. Canarias 1998.*

ISTAC[d]: *Estadísticas básicas de Canarias, 1987-1992.*

ISTAC[e]: *Estadísticas Insulares y Municipales de Canarias.*

ISTAC[f]: *Estimación de la Renta Insular y Municipal de Canarias 1991.* Gobierno de Canarias.

ISTAC[g]: *Evolución de la Economía Canaria, 1993.*

ISTAC[h]: *Proyecciones de la Población de Canarias, 1991-2011*. Gobierno de Canarias.

ISTAC[i]: *Tablas Input-Output. Contabilidad Regional de Canarias. Canarias 1992.*

ITUR-INSTITUTO DEL TERRITORIO Y URBANISMO (1991*): Cambios de la población en el territorio*. Ministerio de Obras Públicas y Transporte.

JAIN, D.C. y RAO, R.C. (1990) "Effect of price on the demand for durables: modeling, estimation and findings", *Jour. Of Business and Economics Statistics, Vol. 8, Nº 2,* 163-170.

JIMENO, J.F.(1997): "Las causas del paro y algunos mitos sobre sus soluciones" en *La Economía Española en el camino de la convergencia europea. Editorial Civitas.*

JIMÉNEZ, V. y RAMOS, A. (1995): "Definición de los Atributos Determinantes del Producto Turístico de Tenerife". *ECONOMÍA DEL TURISMO. V Congreso Nacional de Economía. Las Palmas.*

JIMÉNEZ, V. y RAMOS, A. (1998): "Zonas de preferencia de los turistas que visitan la isla de Tenerife según su procedencia". *Economía Canaria. Primer Seminario de Investigación Universitaria sobre la Economía Canaria. Universidad de La Laguna.*

JOHNSTON, J. (1987): *Métodos de Econometría*. Vicens Universidad.

JUDGE, G. C. (1988): "Nonlinear Least Squares and Nonlinear Maximum Likelihood Estimation", *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, Wiley & Sons, New York, pp. 497-570.

KRALL, A.M. (1973): *Linear Methods of Applied Analysis*. Addison Wesley Publishing Co.

KRUECKEBERG, D.A. y SILVERS, A.L. (1978): *Análisis de Planificación Urbana*. Editorial Limusa.

LA CAIXA: *Anuario Comercial de España, 1997*. Servicio de Estudios.

LE BRASS, H. (1995): "La aritmética de poblacines", *Mundo Científico, Nº 162,* pp. 964-969.

LEGUINA, J. (1992): *Fundamentos de demografía,* Siglo XXI de España editores, s.a., Madrid.

LEÓN, J. y GONZÁLEZ, M. (1995): "Turismo y gestión medioambiental: el caso canario". *ECONOMÍA DEL TURISMO. V Congreso Nacional de Economía. Las Palmas*.

LEVENBACH, H. y REUTER, B.E. (1976): "Forecasting trending Time Series with relative growth rate models", *Technometrics, Vol. 18, Nº 3,* pp. 261-272.

LIBRO BLANCO DEL TURISMO CANARIO (1997). Consejería de Turismo y Transporte del Gobierno de Canarias.

LINDBECK, A. (1994): *Paro y Macroeconomía,* Alianza Económica, Madrid.

LÓPEZ, D. (1984): *La inmigración en la Costa del Sol, análisis de un desarraigo*. Excma Diputación de Málaga.

MACÍAS, A. (1992): *La migración canaria, 1500-1980*. Fundación Archivo de Indianos. Ed. Jucar.

MACHADO, A. (1990): *Ecología, Medio Ambiente y Desarrollo Turístico en Canarias*. Gobierno de Canarias. Consejería de la Presidencia.

MAHAJAN, V. y BASS, F.M. (1990): "New product Diffusion Models in Marketing", *Jour. Of Marketing, 54,* pp. 1-26.

MAHAJAN, V. y MULLER, E. (1996): "Timing diffusion and substitution of successive generations of technologial innovations: the IBM mainframe case", *Tech. Forecasting and social Change, 51,* pp. 109-132.

MAR-MOLINERO, C. (1980): "Tractors in Spain: a logistic analysis", *J. Opl. Res. Soc., 31,* pp. 141-152.

MARTÍN, V. (1991): *Agua y Agricultura en Canarias: El Sur de Tenerife*. Ed Benchomo.

MARTÍN GUZMÁN, P. y MARTÍN, F.J. (1993): *Curso básico de Estadística Económica,* Editorial AC, Madrid.

MARTÍN RUIZ, J.F. (1984): "Desarrollo demográfico y crecimiento espacial de las áreas turísticas de la isla de Tenerife". *Anuario de Estudios Atlánticos*, nº 30, pp 317-340.

MARTÍN RUIZ, J.F. (1985):*Dinámica y Estructura de la Población de las Canarias Orientales (s.XIX y XX).* Excma. Mancomunidad de Cabildos de Las Palmas.

MARTÍN RUIZ, J.F. (1989): *El Noroeste de Gran Canaria. Recursos hídricos, agricultura y población.* Ediciones del Cabildo Insular de Gran Canaria.

MARTÍNEZ, S. y OTROS (1986): *Dinámica de Sistemas, simulación por ordenador,* Alianza Editorial, Madrid.

MARTÍNEZ , S. y OTROS (1989): "Murcia: Una región con futuro". *Papeles de Economía Española. Economía de las Comunidades Autónomas,* núm.7, pp 464-473.

MARTÍNEZ, S. y REQUENA, A. (1983): *Manual de operaciones para modelos DS.* Departamento de Economía Agraria del CSIC.

MASS, M.J. y SENGE, P. (1978):"Alternative Tests for the selection of Model Variables", *IEEE Trans. On Systems, Vol. 8, Nº 6,* pp. 450-460.

MCCULLAGH, P. y NELDER, J.A. (1983): *Generalized Linear Models.* Chapman and Hall, London.

McKELVEY, S. (1996): "Setting Hunting Quotas-Modified Logistic Model", http://www.stolat.edu/people/mckelvey/envision.dir/modlog.dir/modlog.html.

MEADE, N. (1984): "The use of growth curves in forecasting market development a review appraisal", *Jour. Of Forecasting, 3,* pp. 429-451.

MEADE, N. (1985): "Forecasting Using Growth Curves- An Adaptive Approach" *Journal of the Operational Research Society*, Vol 36, No. 12, pp 1103-1115.

MEADOWS, D.H. (1980): "The unavoidable a priori" en *Elements of the System Dynamics Method*, Productivity Press, Cambridge.

MEADOWS, D.H; MEADOWS, D.L; RANDERS, J. y BEHRENS, W.W. (1972): *Los límites del Crecimiento.* Fondo de Cultura Económica, México.

MEADOWS D.H. MEADOWS, D.C. y RANDERS, J. (1992): *Más allá de los límites del crecimiento,* El País Aguilar, Madrid.

MEADOWS, D.L. y otros (1974): *Dynamics of Growth in a Finite World.* Wright-Allen Press.

MEDIO, A. (1993): *Chaotic Dynamics. Theory and applications to economics.* Cambridge University Press.

MELCHIOR, M. (1998): "La Actividad Turística en Canarias". *El Turismo en Canarias. Colección Investigación Empresarial. Fundación FYDE-CajaCanarias*

MEYER, P. (1994): "Bi-Logistic Growth", *Tech. Forecasting and Social Change, 47,* pp. 89-102.

MEYER, P. S. y AUSUBEL, J.H. (1999): "Carrying capacity: a Model with Logistically varying limits", *Tech. Forecasting and Social Change, 61,* pp. 209-214.

MEYER, P. S., YUNG, J.W. y AUSUBEL, J.H. (1999): “A primer on Logistic Growth and Substitution: the mathematics of the loglet lab software”, *Tech. Forecasting and Social Change, 61,* pp. 247-271.

MILLER, J.S. (1974): *Dynamics of Urban Land Rezoning*. Ph.D. Thesis. MIT.

MONTEVERDE, J. (1985): "El mercado turístico canario, referido a la provincia de Santa Cruz de Tenerife. Situación actual y promoción de mercados", en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios económicos canarios. Gobierno de Canarias.

MORENO BECERRA, J.L. (1981): *Educación y fuerza de trabajo en España*. Ed. Interinsular Canaria.

MORRISON, F. (1991): *The art of Modeling Dynamic Systems. Forecasting for Chaos, Randonmers and determination*, Wiley Interscience.

MYRO, R. (1983): "La evolución de la productividad global de la Economía Española en el período 1965-1981" *Revista de Economía*, Feb. 83, pp. 115-127.

NAVARRO, M.P. (1993): "Comparación entre dos sistemas proyectivos (Málaga)", en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España*. IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL.

NEHER, D.A. y OTROS (1995): “Analysis of Disease Progres Curves using linear models”, http://www.cals.ncsu.edu/course/pp615.html.

NELDER, J.A. (1961): “The fitting of a generalization of the logistic curve”, *Biometrics March 1961,* pp. 89-110.

NELDER, J.A. (1962): “An alternative form of a generalized logistic equation”, *Biometrics December,* 1962, pp. 614-620.

NICOLÁS, T. (1999): "Gallegos y andaluces duplican en tres años la población del municipio" *La Opinión de Tenerife*, 30 de Sept. de 1999, p.11.

NORDHAUS, W.D. (1973): "World Dynamics: Measurement without data" *The Economic Journal*, Dec. 1973, pp 1156-1183.

OLIVER, F.R. (1964): “Methods of estimating the logistic growth function”, *Applied Statistics, 13,* pp. 57-66.

OLIVER, F.R. (1981): "Tractors in Spain: A further logistic analysis" *J. Opl. Res. Soc*. 32, 499-502.

OLSON, J. A. (1982): “Generalised Least Squares snd Maximun Likelihood Estimation of the Logistic Function”, *Technological Forecasting and Social change 21,* pp.241-249.

OPASCHOWSKI, H.W. (1990): "¿Turismo de masas o turismo a medida? Límites económicos, ecológicos y psicológicos" *Papers de Turisme* nº4, pp 68-80.

OREJA, J.R. (1998): “Análisis Estratégico de la Empresa Hotelera en Canarias”. *El Turismo en Canarias. Colección Investigación Empresarial. Fundación FYDE-CajaCanarias*

ORTEGA, Y. y GUTIÉRREZ, A. (1997): "Origen, Destino y marco económico de la inmigración reciente a las Canarias Orientales". *VII Jornadas de Estudios sobre Fuerteventura y Lanzarote*. Secretariado de Publicaciones del Cabildo de Fuerteventura.

PAULOS, J.A. (1999): *Érase una vez un número*. Tusquets Editores.

PEDREÑO, A. (1993): "Mercado de Trabajo", en *Lecciones de Economía Española*. Editorial Civitas, pp. 253-275.

PEÑA, D. (1989): *Estadística, Modelos y Métodos, 2*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

PÉREZ, C.R. (1993): "Análisis de la Evolución Demográfica seguida por tres municipios del Sur de Tenerife (Arona, S. Miguel de Abona y Vilaflor) durante 1981-1992.", en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España*. IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL.

PÉREZ GARCÍA, J. (1997): "Especificación multiecuacional de Tablas Input-Output: Aplicaciones en Dinamización y predicción" *XI Reunión ASEPELT-España*. Bilbao.

PÉREZ RIOS, J.M. (1989): *Dinámica Regional de la Comunidad de Castilla-León,* Tesis Doctoral, Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, Madrid.

PESCHEL, M. y MENDE, W. (1986): *The Predator-Prey Model,* Springer Verlag, New York.

PETERSON, D. W. (1980): "Statistical tools for system Dynamics", in *Elements of The System Dynamics Method,* Ed. Jorgen Randers,.

PHILLIPS, F. y KIM, N. (1996): "Implications of Chaos Research for New Product Forecasting", *Technological Forecasting and Social Change*, 21, pp. 241-249.

PICORNELL, C. y SEGUÍ, J.M. (1989): *Geografía Humana de las islas Baleares*. Ed. Oikos-Tau.

PIDD, M. (1998): *Computer Simulation in Management Science*. 4th edition. John Wiley & Sons.

PINDYCK, R. y RUBINFELD, D. (1991): *Econometric Models & Economic Forecasts*. Mc Graw-Hill.

PIOF-PLAN INSULAR DE ORDENACIÓN DE FUERTEVENTURA (1997). Cabildo insular de Fuerteventura.

POOTF-PLAN INSULAR DE ORDENACIÓN DE LA OFERTA TURÍSTICA DE LA ISLA DE FUERTEVENTURA (1983). Secretaría General deTurismo. Dirección general de empresas y actividades turísticas.

RALSTON (1986): *Introducción al análisis numérico*. Limusa-Wiley, México.

RAMOS, A. (1999): *Análisis de las Preferencias del Turista mediante Análisis Conjunto: El Caso de Tenerife*. Tesis Doctoral. Fac. Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de La Laguna.

RATKOWSKY, D.A. (1988):, *Nonlinear Regression Modeling,* Marcel Dekker, New York.

RECAÑO, J. (1993): "Modelización de patrones migratorios por edad. Aplicación al caso de España (1976-1990)", en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España.* IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL.

RICHARDSON, H.W. (1986): *Economía regional y urbana,* Alianza Universidad textos, Madrid.

RIVERO, J.L. (1997): "Mercado de trabajo en Canarias: crecimiento y paro" *SITUACIÓN*, BBV.

RODRÍGUEZ, J.A. (1985): "El turismo en la economía canaria: delimitación e impacto económico", en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios económicos canarios. Gobierno de Canarias.

ROJO, F. Y OTROS (1988): *Aplicaciones de la Informática a la Geografía y Ciencias Sociales,* Editorial Síntesis, Madrid.

ROSS, G.J.S. (1988): *Nonlinear estimation,* Spinger verlag, New York.

RUDIN, W. (1966): *Principios de Análisis Matemático*. Ediciones del Castillo.

RUESGA, S. (1988): *Al otro lado de la economía. Cómo funciona la economía sumergida en España*. Ediciones Pirámide.

SABATÉ, F. (1993): *Burgados, tomates, turistas y espacios protegidos*. Servicio de Publicaciones de CajaCanarias.

SABATÉ, J. y NÚÑEZ, J.A. (1985): “Aproximación a una metodología para determinar posibles costes de insularidad en el turismo”, en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios Económicos Canarios, Gobierno de Canarias.

SANDEFUR, J.T. (1990): *Discrete Dynamical Systems,* Clarendon Press, Oxford.

SANTANA, M.C. (1992): *La producción del espacio turístico en Canarias.* Ediciones del Cabildo Insular de Gran Canaria.

SANZ, R. (1983): *La educación en Santa Cruz de Tenerife. Situación y planificación en Preescolar y Básica.* Aula de Cultura del Excmo. Cabildo insular de Tenerife.

SCHWARZ, H.R. (1989): *Numerical Analysis. A Comprehensive Introduction.* John Wiley & Sons.

SEBER, G.A.F. y WILD, C.J. (1989): *Nonlinear Regression,* John Wiley and Sons, New york.

SECO, E. (1985): "Turismo y ordenación del territorio", en *EL TURISMO EN CANARIAS*, IV Jornadas de Estudios económicos canarios. Gobierno de Canarias.

SENGE, P. M. (1977): “Statistical estimation of feedback models”, *Simulation*, June 1977, pp 177-184.

SERRANO, J.M: (1993): "Dinámica de crecimiento y difusión espacial de las viviendas secundarias en España en los inicios de los años noventa". SITUACION, 1993/2. BBV.

SHARIF, M.N. e ISLAM, M.N. (1980): “The Weibull distribution as a general model for forecasting technological change”, *Tech. Forecasting and Social Change, 18,* pp. 247-256.

SIMMONS, F. (1977): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.

SOMMER, M. (1981): "Predictive and non-predictive validation strategies for system dynacis models" *Applied System Analysis*, 2 (3), pp 108-115.

SOMMER, M. (1984)[a]: "The Econometric Challenge to System Dynamics and Vice Versa: Some Future Perspectives" *Technological Forecasting and Social Change* 25, pp 263-280.

SOMMER, M. (1984)[b]: “On the applicability of econometric methods to system dynamics models”, *DYNAMICA, Vol. 10,* pp. 91-102.

STERMAN, J.D. (1991): "A Skeptic's Guide to Computer Models", in *Managing a Nation: The Microcomputer Software Catalog*. Boulder, CO: Westview.

STONE, R. (1980): "Sigmoids" *Bulletin of Applied Statistics*, vol 7, No 1, pp. 59-119.

TOHARIA, L. y JIMENO, J.F. (1994): "Los hechos básicos del paro", en *El paro en España: ¿tiene solución?*, Consejo Superior de Cámaras de Comercio, Industria y Navegación de España.

VERA, J. F. y OTROS (1997): *Análisis Territorial del Turismo,* Ariel Geografía, Barcelona.

VINUESA, J y OTROS (1994): *Demografía: Análisis y Proyecciones,* Editorial Síntesis, Madrid.

VVAA (1985): EL TURISMO EN CANARIAS. IV Jornadas de Estudios Económicos Canarios. Gobierno de Canarias.

VVAA (1994): *Los planes insulares de ordenación en Canarias. Reflexiones Metodológicas*. Gobierno de Canarias y Universidad de La Laguna

VVAA (1995): *ECONOMÍA DEL TURISMO*. V Congreso Nacional de Economía. Las Palmas.

VVAA (1997): *La economía española en el camino de la convergencia europea.* XI Jornadas de Alicante sobre Economía Española. Ed. Civitas.

VVAA (1998): *El Turismo en Canarias*. Colección Investigación Empresarial. Fundación FYDE-CajaCanarias.

WILSON, A.G. (1992): *Catastrophe Theory and Bifurcation,* California Croom Helm, London.

WITT, S.F. y WITT, C.A. (1992): *Modeling and Forecasting Demand in Tourism*. Academic Press.

Yen, J. y Otros (1996): "A Model for Diffussion of Telework", http://hsb.baylor.edu/html/ramsower/ais.ac.96papers/YEN.html.

YOUNG, J.W. y OTROS (1972): "Parameter Identification and Dynamic Models of Socioeconomic Phenomena", *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, Vol. 2, Nº 4,* pp. 460-467.

YOUNG, P. (1993): "Technological Growth Curves: a competition of forecasting models", *Tech. Forecasting and Social Change, 44,* pp. 375-389.

YOUNG, P. y ORD, J.K. (1990): "Model Selection and estimation for Technological Growth Curves", *Intern. Jour. Of Forecasting, 5,* pp. 501-514.

ZAMORA, F. (1993): "Ciclo de vida de la familia, vivienda y migraciones" en *Inmigración Extranjera y Planificación Demográfica en España.* IV Jornadas de la Población Española. Secretariado de Publicaciones de la ULL