

Curso 1994/95
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

MARÍA CANDELARIA GIL FARIÑA

**Propuesta metodológica en el contexto de modelos
de función de transferencia con expectativas**

Directora
CONCEPCIÓN GONZÁLEZ CONCEPCIÓN



SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

A mis padres y hermano

AGRADECIMIENTOS

Deseo mostrar mi más sincera gratitud a la Directora de esta Memoria, la Dra. Concepción González Concepción, por su apoyo incondicional y completa dedicación en su realización. Sus orientaciones como tutora de mis cursos de Doctorado así como las constantes muestras de ánimo dadas y la total disposición y entrega desde mi incorporación como docente a la Facultad de C.C.E.E. y en especial a lo largo de esta investigación, merecen todo mi reconocimiento y gratitud.

Así mismo, quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Víctor Cano Fernández, profesor del Departamento de Economía Aplicada, por sus comentarios, correcciones y sugerencias en la realización de este trabajo.

Merece especial atención la labor desarrollada por mi compañera de Departamento Celina Pestano Gabino, quien realizó una lectura atenta de este trabajo y cooperó de forma incondicional en la corrección final del mismo.

También manifiesto mi agradecimiento al Dr. Luis Javier López Martín, Director del Departamento de Economía Aplicada, por las sugerencias y colaboración prestadas en la fase final de redacción y presentación.

Muestro también mi gratitud a todos mis compañeros de la subárea de Matemáticas del Departamento de Economía Aplicada, así como a otros miembros de la Universidad de La Laguna, en especial al Dr. Pablo González Vera y a Sergio Alonso Rodríguez por sus constantes muestras de apoyo y por la cooperación y asesoramiento prestados en el desarrollo de esta labor.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia, en especial a mis padres y hermano, a quienes precisamente dedico esta Memoria, las muestras continuas de ánimo y comprensión así como la confianza y el apoyo depositados, sin los cuales este trabajo no hubiese visto la luz.

INDICE

PROLOGO	1
CAPITULO 1.-LA ESPECIFICACION DE RELACIONES DINAMICAS EN EL ANALISIS DE SERIES TEMPORALES	15
<u>INTRODUCCION</u>	17
1.- <u>MODELOS LINEALES DE SERIES TEMPORALES</u>	23
1.1.- MODELOS ARMA Y ARIMA UNIVARIANTES	23
1.2.- MODELOS ARMA VECTORIALES. EL MODELO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA	27
2.- <u>LA IDENTIFICACION DE MODELOS ARMA: UNA REVISION METODOLOGICA</u>	34
2.1.- LA APROXIMACION DE PADE EN LA IDENTIFI- CACION DE MODELOS ARMA	40
2.1.1.- <u>Propuestas de caracterización dinámica</u>	43
CAPITULO 2.- LA APROXIMACION DE PADE EN LA DETERMINA- CION DE UN MODELO DE FUNCION DE TRANSFE- RENCIA CLASICO	57
<u>INTRODUCCION</u>	59
1.- <u>LA APROXIMACION DE PADE (AP) A SERIES FORMA- LES DE POTENCIAS</u>	62
1.1.- DEFINICION Y PROPIEDADES	62
1.2.- METODOS PARA LA REPRESENTACION RACIO- NAL DE UNA SERIE FORMAL DE POTENCIAS	71
1.2.1.- <u>La Tabla C: Estructura y formación de bloques</u>	71
1.2.2.- <u>La Tabla de Padé: Estructura y formación de bloques</u>	74
1.2.3.- <u>El ϵ-algoritmo</u>	80
1.2.3.1.- Definición y propiedades	80
1.2.3.2.- La Tabla-ϵ: Estructura y formación de	

bloques	81
2.- <u>DETERMINACION DE MODELOS RACIONALES EN</u>	
<u>SERIES TEMPORALES: EL MODELO FT CLASICO</u>	84
2.1.- INTRODUCCION	84
2.2.- EL MODELO FT CLASICO: FORMULACION	86
2.3.- EL MODELO FT Y SU RELACION CON OTRAS ESPECIFICACIONES DINAMICAS	91
2.4.- METODOS DE IDENTIFICACION DE LOS ORDENES POLINOMIALES EN UN MODELO FT	94
2.4.1.- <u>Métodos de estimación indirecta de la Función de Respuesta al Impulso</u>	94
2.4.2.- <u>Métodos de estimación directa de la Función de Respuesta al Impulso: La Tabla C y la Tabla de Padé</u>	97
2.4.2.1.- Una estimación preliminar para los pará- metros del modelo	103
2.4.2.2.- Un método alternativo en la identifi- cación de un modelo FT: El ϵ -algoritmo	108
2.5.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES	112
CAPITULO 3.- LA APROXIMACION DE PADE-LAURENT EN LA DETERMINACION DE UN MODELO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS	119
<u>INTRODUCCION</u>	121
1.- <u>LA APROXIMACION DE PADE-LAURENT (APL)</u>	122
1.1.- DEFINICION DE APL PARA UNA SERIE FORMAL DE LAURENT	122
1.2.- REPRESENTACION RACIONAL DE UNA SERIE FORMAL DE LAURENT: LA TABLA C	126

2.- <u>DETERMINACION DE MODELOS RACIONALES EN SERIES TEMPORALES DOBLEMENTE INFINITAS: EL MODELO FT CON EXPECTATIVAS</u>	131
2.1.- FORMULACION DEL MODELO FT CON EXPECTATIVAS	131
2.2.- METODOS DE IDENTIFICACION DE LOS ORDENES POLINOMIALES EN UN MODELO FT CON EXPECTATIVAS	134
2.2.1.- <u>El método de la Tabla C</u>	134
2.2.2.- <u>Una estimación preliminar de los parámetros del modelo</u>	136
3.- <u>RESULTADOS Y CONCLUSIONES</u>	138

CAPITULO 4.- LA APROXIMACION DE PADE EN MODELOS DE FUNCION DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS	141
<u>INTRODUCCION</u>	143
1.- <u>LA APROXIMACION DE PADE (AP) A UNA SERIE FORMAL DE LAURENT</u>	144
1.1.- DEFINICION Y PROPIEDADES	144
1.2.- LA TABLA T: ESTRUCTURA Y FORMACION DE BLOQUES	148
1.3.- REPRESENTACION DE UNA SERIE FORMAL DE LAURENT A TRAVES DE UN MODELO RACIONAL: EL METODO DE LA TABLA T	155
1.4.- DEFINICION DE UN AP FINITO PARA UNA SERIE FORMAL DE LAURENT	157
1.4.1.- <u>Estructura de la Tabla T para un AP finito</u>	161
1.5.- REPRESENTACION DE UNA SERIE FORMAL DE LAURENT MEDIANTE UNA FUNCION	

RACIONAL DE ORDENES FINITOS	163
1.5.1.- <u>Estructura de la Tabla T para una función racional de órdenes finitos</u>	164
1.6.- LA GENERALIZACION DEL ϵ-ALGORITMO: ESTRUCTURA DE LA TABLA-ϵ	166
2.- <u>DETERMINACION DE MODELOS RACIONALES EN SERIES TEMPORALES DOBLEMENTE INFINITAS: EL MODELO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS</u>	168
2.1.- FORMALIZACION GENERALIZADA DEL MODELO FT CON EXPECTATIVAS	169
2.2.- METODOS DE IDENTIFICACION DE LOS ORDENES POLINOMIALES EN UN MODELO FT CON EXPECTATIVAS	171
2.2.1.- <u>El método de la Tabla T</u>	171
2.2.2.- <u>La Tabla de Padé</u>	175
2.2.3.- <u>Una estimación preliminar de los parámetros del modelo</u>	176
2.2.4.- <u>Un método alternativo de identificación: El ϵ-algoritmo generalizado</u>	178
3.- <u>RESULTADOS Y CONCLUSIONES</u>	179
CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS	189
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	199

PRÓLOGO

El objetivo central de esta Memoria consiste en proponer una metodología basada en la utilización de la teoría de la representación racional de series y, en concreto, la aproximación racional de Padé (Padé, 1892), para abordar algunas cuestiones relativas a la modelización dinámica de series temporales doblemente infinitas, esto es, series que incorporan una secuencia discreta de variables y ponderaciones evaluadas en todo el dominio temporal.

Este objetivo que se persigue está en la línea de la preocupación y de los esfuerzos que se han venido realizando en el ámbito del análisis de series temporales durante las dos últimas décadas, destinados a profundizar en el estudio y desarrollo de nuevos métodos con los que abordar la identificación de relaciones entre variables temporales.

En concreto, son numerosos los procedimientos hasta ahora propuestos para abordar el problema de la identificación del comportamiento dinámico en el marco de los modelos ARMA y, por extensión, de los modelos ARIMA univariantes y multivariantes; prueba de ello son precisamente las numerosas referencias bibliográficas existentes al respecto.

Este interés que suscita el estudio de la identificación de la estructura de relación dinámica entre variables en el marco del análisis de series temporales y que constituye el eje central de la presente investigación, se sabe es también compartido por otras áreas de investigación, especialmente en teoría de control, estadística e investigación operativa, entre otras, que están estrechamente vinculadas con el análisis de series temporales.

Ahora bien, hasta la actualidad, los desarrollos en la modelización de series temporales así como los procedimientos propuestos para la identificación de la estructura dinámica subyacente, se han llevado a cabo básicamente en el ámbito de la

formulación de modelos causales, en los que en consecuencia se asume que la evolución futura de una variable reproduce los esquemas de comportamiento pasados.

Desde esta óptica, y tomando como referencia las hipótesis tradicionales en la literatura econométrica, algunos autores (Lii, 1985; Claverie et. al., 1990; Berlinet y Francq, 1994, ...) han intentado en los últimos años profundizar en la consideración de la teoría de la representación racional de series en la modelización econométrica, proponiendo la utilización de diversas técnicas al respecto; no obstante, la mayor parte de las aportaciones realizadas en este sentido se refieren al caso univariante.

En este ámbito, la utilización de una técnica relevante, ya mencionada, dentro de la aproximación racional, esto es, la aproximación de Padé en relación con el estudio algebraico de series formales de potencias como una generalización de la aproximación polinómica de Taylor, ha contribuido a enriquecer y a estimular gratamente el estudio de la identificación dinámica en la literatura econométrica. Desde esta perspectiva, sus propiedades se han mostrado especialmente útiles no sólo en el estudio del comportamiento asintótico de ciertas series numéricas sino que, en particular, constituyen una herramienta valiosa para llevar a cabo la identificación de la estructura de relación dinámica entre variables.

En efecto, la utilización de esta técnica dentro del ámbito de la formulación de modelos causales y, en concreto, en la formulación de modelos racionales, permite la caracterización de métodos computacionalmente sencillos con los que abordar la especificación dinámica de la parte determinista en ciertos modelos de series temporales. En particular, el método de la tabla C (Baker, 1975), a partir de cuyas propiedades se obtiene el denominado método corner (Beguin, Gourieroux y Monfort, 1980; Liu y Hanssens, 1982) en la literatura econométrica, el ϵ -algoritmo (Wynn, 1956; Berlinet, 1984), el R-S algoritmo (Gray, Kelley, Mc Intire, 1978), etc, constituyen algunas de las propuestas de caracterización dinámica, vinculadas con la aproximación

de Padé, que han venido a enriquecer notablemente el ámbito de la identificación de la parte determinista de modelos de series temporales.

Así mismo, las propiedades de esta técnica resultan relevantes en tanto que proporcionan valores iniciales para los parámetros del modelo, que resultan fiables para llevar a cabo la obtención de un modelo definitivo a través de otros métodos iterativos más eficientes, una vez que se incorpora la identificación de la parte aleatoria.

En particular, dentro de la formulación de modelos racionales en términos causales y que denominaremos en adelante contexto clásico, la aproximación de Padé y sus propiedades resultan especialmente interesantes para el estudio de la identificación dinámica en un modelo VARMA, en general, esto es, en la identificación de los órdenes de los polinomios de retardo que intervienen en su formulación.

Un caso particular de este tipo de formulaciones, el modelo de Función de Transferencia (FT) (Box y Jenkins, 1976), va a constituir el marco de análisis elegido para llevar a cabo nuestra investigación, ya que constituye una de las representaciones dinámicas de uso frecuente en el desarrollo de aplicaciones en los distintos ámbitos no sólo de la Economía, sino también de otras Ciencias Sociales como la Geografía e incluso en aquellas ciencias de carácter experimental como la Ingeniería y la Física.

Por otro lado, esta elección permite utilizar un conjunto de resultados que se encuentran en la base de la teoría de la aproximación racional, dentro de la Matemática Aplicada. Además, nos centramos en el caso univariante ya que el interés principal es destacar el papel de las expectativas en este tipo de modelos.

Partiendo de estas consideraciones, realizaremos en el primer capítulo una **revisión** somera de los métodos más usuales propuestos en la literatura econométrica para la identificación de modelos de series temporales, haciendo especial hincapié en aquellos procedimientos de caracterización dinámica, que tienen su soporte metodológico en la

aproximación de Padé que han sido propuestos en el estudio de modelos racionales y, en concreto, en la formulación del modelo FT.

Dado que el estudio de estos métodos vinculados con la aproximación de Padé permite constatar la validez de esta herramienta en la identificación racional de modelos de series temporales, dedicamos el capítulo 2 al estudio, en una primera parte, de la aproximación clásica de Padé, esto es, en relación con el tratamiento de series formales de potencias, destacando los fundamentos teóricos y resaltando las propiedades y aspectos básicos más relevantes de la misma que son de aplicación posterior en esta Memoria. Esta aproximación teórica nos permitirá abordar, en una segunda parte, el estudio de la identificación de los órdenes polinomiales en una formulación clásica del modelo FT, es decir, en un contexto dinámico causal, poniendo de manifiesto con ello la vinculación existente entre los diversos procedimientos de caracterización sugeridos hasta ahora en este contexto.

Por otro lado, la realización de este estudio permite hacer una reflexión sobre las ventajas e inconvenientes que posee, en general, el modelo FT clásico. En efecto, la consideración de un universo económico en el que la formulación de relaciones dinámicas se rige por un proceso que podríamos calificar de endógeno, esto es, se establece en términos de la formulación de un modelo estable en el que el comportamiento futuro es consecuencia del pasado, nos lleva a situarnos dentro de un contexto que no siempre puede ofrecer respuestas válidas en términos de la formulación de medidas de política económica.

Es por ello que si bien este tipo de formulaciones causales resulta plenamente válido desde la perspectiva de ajuste a los datos disponibles, esto es, recogen fielmente los esquemas de comportamiento históricos de las variables implicadas en una relación dinámica considerada, sin embargo, su utilidad en términos predictivos incluso a C/P y/o M/P y en consecuencia su operatividad para servir a los propósitos y objetivos de política económica es, en ocasiones, limitada. Precisamente, esta consideración resulta especialmente cierta en aquellas situaciones en las que la realidad económica de un

período lleva aparejada la existencia de comportamientos estructuralmente diferentes en el tiempo, que tienen su origen en circunstancias de diversa índole, ya sea económico, político, etc.

En tales situaciones, fundamentar la toma de decisiones relevantes de política económica en la adopción de una concepción “causal” del universo económico y de las relaciones en él presentes, como un mecanismo ordenado que funciona según un conjunto de leyes establecidas, choca con la aceptación de una visión en la que el futuro no es sólo consecuencia del pasado y, por tanto, la incertidumbre sobre el conocimiento futuro ocupa un lugar central.

En efecto, este conocimiento que, en la mayoría de los casos, resulta incierto y que es precisamente reflejo de la aleatoriedad inherente al propio universo y a la ausencia de leyes estrictas que rijan los fenómenos sociales y, en concreto, los económicos, tiene enorme importancia en el desarrollo de la actividad económica en tanto no sólo afecta la adopción de decisiones estratégicas sino, en definitiva, a la determinación de qué líneas de acción resultan aconsejables.

Es por ello que en el intento de superar las limitaciones que en términos predictivos poseen las formulaciones tradicionales causales y de ofrecer con ello respuestas válidas a los objetivos esenciales de política económica, nuestra contribución en esta Memoria se centra en proponer, tal y como se recoge en los capítulos 3 y 4, un marco teórico más amplio para el estudio de las relaciones dinámicas entre variables, sin abandonar el análisis de series temporales, a través del establecimiento de modelos no causales, esto es, en los que se incorporan las anticipaciones o expectativas que elaboran los agentes económicos sobre el comportamiento de determinadas variables.

Por otra parte, el análisis de las expectativas así como las hipótesis establecidas sobre su formación, en la medida en que en definitiva constituyen información relevante a tener en cuenta, ha constituido en la literatura econométrica un aspecto interesante en el marco de análisis de las características dinámicas que surgen en la

relación entre variables. En este sentido, el interés por el estudio de relaciones dinámicas que envuelven comportamientos futuros o deseados de alguna variable y por la incorporación de hipótesis sobre su formación, ha sido desde un principio planteado por ciertos autores (Fisher, Nerlove, etc.), que ven la necesidad de utilizar formulaciones de mayor contenido teórico en lugar de los mecanismos tradicionales de distribución de retardos.

Desde el ámbito de la teoría económica, es ya a partir de los años 50 y 60 cuando irrumpe con fuerza el papel de las expectativas. En este sentido, comienzan a tener importancia conceptos como el de rendimientos futuros esperados que, si bien eran ya considerados por la teoría keynesiana, cobran un nuevo significado. Las expectativas de renta futura entran en la función de consumo de la mano de las teorías de la renta permanente y del ciclo vital y, por su parte, la inflación esperada hace también su aparición en la función de demanda de dinero. Así mismo, los mercados financieros comienzan a incorporar las expectativas para explicar el equilibrio de cartera y las estructuras en los tipos de interés, en tanto que los mercados de cambios exigen incorporar la información que se deriva de la consideración de expectativas sobre tasas de interés futuras, etc.

Hasta ese momento, aún cuando en el pasado no faltaban aportaciones interesantes sobre el papel de las expectativas¹, el olvido más o menos general de su presencia e importancia era reflejo de un hecho en la ciencia económica del momento, quizás debido al difícil engarce de las expectativas en el cuerpo de doctrina recibido.

Precisamente, este papel que juegan las expectativas tanto en el análisis económico como en el econométrico nos va a permitir articular e imbricar ambos campos dentro de

¹En este sentido cabe mencionar la teoría del empresario innovador shumpeteriano, la del beneficio de Knight, la teoría de Fisher, los autores de la escuela sueca, etc.

un marco teórico básico común, con el que abordar el estudio de la identificación racional de modelos de series temporales desde un contexto más general.

Ahora bien, aunque la consecución de este objetivo pasa por la consideración de que la teoría económica es capaz de suministrar estimaciones fiables sobre el futuro de las variables explicativas involucradas en una relación dinámica dada, no nos detendremos en profundizar en el estudio de los distintos mecanismos existentes con los que cuentan los agentes económicos para elaborar anticipaciones futuras de una variable.

Existe una amplia literatura² para abordar el tratamiento de los distintos mecanismos en la formación de expectativas, mecanismos que a su vez se plantean a través de la utilización de la información disponible, que en algunos casos no sólo incluye la que proporcionan los datos históricos disponibles sino también la que se deriva de los deseos propios y, en consecuencia, de las estrategias y proyecciones futuras que elaboran los agentes económicos para la toma de decisiones.

Por otra parte, cabe decir que en general los modelos no resultan en modo alguno insensibles a cambios en el esquema de formación de las expectativas; por el contrario, estos cambios conducen a comportamientos dinámicos diferentes en tanto que es en efecto la naturaleza precisa de las expectativas la que determina la dinámica explícita de las variables anticipadas.

Ahora bien, sin entrar a detallar en profundidad los aspectos teóricos de su formación y utilización, estos mecanismos incluyen, en primer lugar, las llamadas “expectativas extrapolativas”³, que se generan cuando los agentes económicos utilizan toda la información pasada de la variable sobre la cual forman sus expectativas. En segundo lugar, y como una reformulación de la anterior, la hipótesis de “expectativas

²Véase, entre otros, Argandoña (1979) y Raymond (1986).

adaptativas”⁴ proporciona un mecanismo por el cual los agentes repasan sus expectativas de la variable en cada período, en proporción a la diferencia entre el valor actual y el considerado como “normal”. Un caso particular dentro de esta hipótesis sería el de la “expectativas ingenuas” donde las expectativas se formulan de acuerdo con el valor vigente en el período presente. No obstante, si bien el planteamiento que sugiere este esquema resulta insatisfactorio por la rigidez que incorpora el proceso de formación de expectativas, sirve para ilustrar claramente la importancia y la utilización de éstas en el marco de formulaciones alternativas más complejas.

En relación con la hipótesis de expectativas adaptativas y con los inconvenientes que a menudo se le atribuyen, en Koreisha (1984) se propone una manera más eficiente de trabajar con modelos que incorporan este tipo de hipótesis. La crítica de este autor a la formulación tradicional de este tipo de modelos se basa en que su construcción, a través de los modelos de retardos distribuidos, fuerza no sólo estructuras autorregresivas de retardos para las variables expectativas sino que también impone distribuciones específicas de retardos que pueden no ser válidas⁵.

Precisamente, su propuesta para trabajar de forma más eficiente con este tipo de modelos consiste en presentar una aproximación de series temporales que, en términos muy similares a la formulada en el capítulo 4 de esta presente investigación, no sólo hace uso de toda la información contenida en los datos sino que además permite incorporar teoría en la propia construcción del modelo. Este procedimiento, que requiere el empleo del modelo FT con expectativas, en la medida en que crea el marco necesario para incorporar información futura sobre las variables explicativas, permite mejorar sensiblemente, desde un punto de vista empírico, las predicciones del modelo

³Véase Metzler (1941)

⁴Véase Arrow y Nerlove (1958)

⁵Otros trabajos que justifican este argumento son, entre otros, los de Lahiri (1976) y Just (1977).

con respecto a las que se obtienen por los modelos de retardos distribuidos convencionales.

La hipótesis de “expectativas racionales” debida a Muth (1961) surge como un esquema alternativo para la formación de expectativas a través de la utilización eficiente de toda la información disponible, entendiendo por ésto la estructura de la economía, las acciones pasadas y presentes acometidas por los gobiernos así como las estrategias que se supone éstos pueden adaptar en el futuro.

Finalmente, una propuesta más reciente es la realizada por Nerlove et al (1979), que basan la generación de anticipaciones sobre las variables en el análisis de series temporales. En este nuevo esquema, que se denomina de “expectativas cuasi-racionales” son utilizadas las predicciones con error cuadrático medio mínimo como expectativas de las variables endógenas y exógenas del modelo.

Ahora bien, el interés presente en este nuevo planteamiento de las relaciones dinámicas trata de conjugar los instrumentos básicos del análisis de series temporales, que recogen toda la información disponible en la muestra, con el conocimiento apriorístico que, en forma de expectativas “ex ante” o “ex post” aporta la teoría económica -resaltando aquellos mecanismos de formación que no sólo consideran la evolución pasada y que, por tanto, están más bien en la línea de las expectativas racionales-, o en su caso, la propia evidencia empírica, sobre las variables explicativas del modelo.

Con el objetivo de proporcionar el fundamento teórico suficiente en el que sustentar esta nueva concepción de las relaciones dinámicas, que consideran una secuencia discreta de variables y ponderaciones evaluadas en todo Z (dominio de los enteros), proponemos abordar, desde el punto de vista metodológico, una generalización del concepto de aproximación de Padé al estudio de series formales de Laurent (Bultheel, 1987), también denominadas series doblemente infinitas, y que no

representan más que una generalización del estudio de series formales de potencias en el caso clásico.

Presentamos esta fundamentación teórica, particularizada a la identificación de la parte determinista de un modelo FT con expectativas, desde dos vías alternativas:

Por un lado, tal y como se propone en el capítulo 3, es posible abordar la modelización racional de series formales de Laurent desde la perspectiva de la **aproximación de Padé-Laurent** (Bultheel, 1987), esto es, a través de la representación de dos funciones racionales que aproximan respectivamente las dos direcciones de una serie formal de Laurent.

Esta nueva vía que se presenta proporciona una base metodológica para la caracterización de métodos sencillos con los que abordar algunas cuestiones sobre la identificación en este marco dinámico más amplio y, en principio, más acorde con la realidad evolutiva existente que se quiere plasmar.

En particular, esta propuesta en el ámbito de la formulación de modelos no causales o, dicho de otra forma, en el contexto de los modelos de series temporales que incorporan la presencia de valores futuros en su formulación, resulta de especial interés en la identificación de la estructura dinámica de un modelo FT en el que se considera la existencia de expectativas sobre el comportamiento de las variables inputs involucradas en el mismo.

Por otro lado, en el capítulo 4 proponemos la utilización de la modelización racional de series formales de Laurent en términos de la formulación de un modelo único que, de forma simultánea, aproxime las dos direcciones de la serie utilizando la aproximación de Padé a series de Laurent.

Precisamente, esta nueva vía en la modelización racional va a permitir ampliar el estudio de la identificación dinámica en la metodología de series temporales con una consideración evolutiva, no necesariamente causal, de las variables consideradas.

En este sentido, se caracterizan nuevos procedimientos con los que abordar el estudio de la identificación dinámica. En concreto, el método de la **tabla T**, cuyas propiedades sirven para caracterizar la generalización del método corner clásico, y la generalización del **ϵ -algoritmo**, constituyen dos propuestas de identificación en este contexto, cuya operatividad intentamos validar en esta Memoria con diversos ejercicios de simulación.

Además, como puede constatarse, el caso clásico no es más que un caso particular de nuestros resultados cuando no se incorporan las expectativas.

Por otra parte, cabe destacar que desde esta nueva perspectiva, la consideración de un marco dinámico en el que se facilita la incorporación adicional de la información futura -deducible a partir de la evolución de las variables explicativas y/o del conocimiento a priori de su comportamiento estructural-, favorece un proceso de realimentación continua del modelo, que le permite ir incorporando de forma progresiva información actualizada, conforme la propia evidencia empírica modifica o confirma las predicciones realizadas.

Así mismo, podemos ofrecer diferentes modelos para una misma serie de datos sin más que modificar las expectativas, adelantándonos así al conocimiento de la influencia que sobre el output presente tienen nuestras expectativas para el input.

Una justificación adicional a la validez del planteamiento propuesto viene dada por la posibilidad de incorporar expectativas que, formuladas de un modo “ex ante”, permitiesen contrastar la validez y efectividad de distintas especificaciones dinámicas para un mismo conjunto de datos y, en consecuencia, determinar un modelo óptimo.

Finalmente, se presentan las conclusiones más relevantes de este estudio. En concreto, dado que la metodología propuesta en los capítulos 3 y 4 es susceptible de aplicación en aquellos contextos en los que la existencia de cambios estructurales determina comportamientos futuros de las variables diferentes a sus comportamientos

históricos, presentamos a modo de ilustración -como una primera experiencia parcial para su validación- una aplicación al estudio de datos reales en el mercado de productos agrícolas para el período de transición de la economía polaca.

Así mismo, se hacen algunas reflexiones y se plantean diversas cuestiones abiertas relativas a posibles extensiones de índole teórico y práctico para investigaciones futuras.

CAPÍTULO 1

LA ESPECIFICACIÓN DE RELACIONES DINÁMICAS EN EL ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo consiste en presentar, dentro del análisis de series temporales, las formulaciones hasta ahora propuestas para el análisis de relaciones entre variables temporales, **revisando** las aproximaciones más usuales sugeridas para la determinación de la estructura dinámica subyacente. Desde esta perspectiva, se pone especial énfasis en el estudio de todos aquellos procedimientos de caracterización dinámica, basados en la aproximación de Padé, que han sido propuestos en el estudio de la modelización racional de series temporales y, en concreto, en la identificación de un modelo de Función de Transferencia.

En efecto, la preocupación que en el análisis económico origina el estudio de las relaciones dinámicas entre variables económicas y su configuración temporal ha sido objeto, y lo continúa siendo, de un amplio tratamiento en el contexto de lo que se ha venido a llamar Econometría teórica y empírica.

El interés que en este sentido suscita la consideración y el seguimiento de la evolución o trayectoria temporal de las variables relevantes implicadas en el estudio de los fenómenos económicos y el análisis de las relaciones en el corto y largo plazo, justifican el desarrollo de una metodología propia en el estudio de la modelización dinámica.

Las distintas propuestas teóricas que han surgido en el contexto de la metodología econométrica aparecen vinculadas, aunque en base a enfoques diferentes, a la especificación dinámica de un modelo econométrico, esto es, a la especificación de la estructura dinámica inherente tanto a las variables observables, involucradas en la parte sistemática del modelo, como al término de perturbación aleatoria.

Ahora bien, aunque pueden ser diferentes las implicaciones y resultados que en ocasiones se derivan de asumir diferentes perspectivas en el tratamiento de las relaciones dinámicas pueden ser diferentes, la existencia, por otra parte, de posibles relaciones y similitudes viene a confirmar precisamente la coexistencia de aproximaciones equivalentes en el intento de captar la estructura dinámica subyacente.

Desde las primeras aportaciones que evidencian una preocupación por el estudio de la consideración dinámica de la realidad (Yule, 1927; Nerlove, 1958,...)¹, hasta el desarrollo más reciente del enfoque basado en el análisis de series temporales, que corresponde a las variables involucradas en las relaciones de comportamiento que se postulan, la metodología econométrica ha evolucionado siguiendo dos direcciones.

Por un lado, y más próximo a los planteamientos iniciales de la econometría, la práctica común econométrica, guiada en gran parte por principios y nociones de teoría económica, comienza a imponer representaciones a priori específicas sobre las relaciones de comportamiento entre las variables que se consideran, permitiendo con ello que sean los datos quienes confirmen la contrastación empírica de los avances de la teoría económica, esto es, los modelos que se construyen bajo los auspicios de los principios teórico-económicos. Esta perspectiva proporcionó un programa de investigación que, dominado por el modelo de regresión lineal y su análisis, así como por el modelo de ecuaciones simultáneas y el estudio de su identificación y estimación, proporcionaría las principales pautas de investigación para las décadas siguientes.

¹Véase Mills (1990).

Esta estrategia, que surge en base al conocimiento apriorístico que aporta la teoría económica, parte de una formulación de un modelo, en general, inicialmente sobreparametrizado que, a medida que los datos lo confirmen, deriva de forma secuencial hacia un modelo más restringido. De esta forma, la contrastación estadística de la existencia de relaciones de causalidad entre los parámetros permitirá la simplificación secuencial del modelo sin que, en cualquier caso, ello constituya la finalidad última en la especificación del mismo.

Estas relaciones de comportamiento que de forma apriorística se postulan, más allá de la obtención de los efectos parciales, acumulados y totales que cambios aislados o sostenidos en el tiempo en las variables exógenas ejercen sobre las variables endógenas, tratan de conformar la estructura temporal de estas respuestas, esto es, el estudio de la forma diferida en el tiempo en que se configura dicha variación.

En esta línea podemos señalar los modelos de retardos distribuidos, propuestos en su momento por Koyck, Jorgenson, Almon, etc. que, en base a la información que a priori se considera sobre las estructuras de retardos entre las variables, permiten introducir vías de solución a la estimación paramétrica presente en la formulación de modelos dinámicos.

La evolución de los desarrollos teóricos en la profundización de la especificación de modelos dinámicos entre variables económicas ha dado lugar a una nueva perspectiva, dada por el análisis de los **modelos de series temporales**.

Aún así, los desarrollos en la metodología econométrica, tanto en su vertiente clásica como en la derivada del enfoque del análisis de series temporales, continúan siendo en la actualidad el centro de interés por sus implicaciones, entre otras, en el estudio del comportamiento entre variables económicas, el análisis estructural y la simulación de políticas.

En concreto, la modelización de relaciones econométricas en el dominio temporal se configura como un instrumento válido para la comprensión y el tratamiento, en el seno del análisis económico, de todos aquellos aspectos que se plantean en los modelos de equilibrio dinámico.

Ahora bien, aunque esta perspectiva ha sido objeto de un amplio tratamiento y de una larga tradición, el creciente desarrollo del análisis de series temporales en las últimas décadas, en especial desde principios de los años setenta, es fruto de las numerosas contribuciones que éste ha proporcionado en distintas áreas como son, por ejemplo, la Economía, la Estadística, la Ingeniería de Sistemas y la Investigación Operativa.

Así mismo, las actividades de investigación en el ámbito del análisis de series temporales se han visto gratamente estimuladas por el amplio número de soluciones satisfactorias aportadas a una gran mayoría de problemas planteados en el campo de la predicción, el control, la medición de los efectos de determinadas medidas políticas y otras intervenciones, así como la identificación de indicadores de adelanto, su uso eficiente y la modelización de sistemas con relaciones de causalidad bidireccional (“feedback”) en la economía e ingeniería.

Además, esta vía de aproximación se ha caracterizado no sólo por la relativa sencillez con la que consigue identificar, estimar y utilizar predictivamente los modelos así formulados, sino también porque se lleva a cabo en un contexto iterativo y coherente, en el que se utiliza toda la información muestral disponible contenida en la evolución histórica de las variables consideradas.

No obstante, desde una perspectiva estocástica, el análisis de series temporales ha situado su alcance más allá al permitir su consideración en el contexto de los modelos estructurales y, en concreto, en el entorno del análisis econométrico tradicional con la presencia de modelos causales uniecuacionales y multiecuacionales.

En efecto, son numerosas las investigaciones que en los últimos años se han dirigido a la búsqueda de vínculos entre la aproximación econométrica y la aproximación de series temporales.

De hecho, el desacuerdo existente es mayor sobre la aproximación de modelización a adoptar que sobre el modelo a elegir, puesto que la mayoría de los modelos econométricos más comunes pueden ser escritos como modelos ARMA vectoriales.

En concreto, la importancia de una síntesis entre la econometría tradicional y las técnicas de series temporales tiene lugar con Granger y Newbold (1977). Los fundamentos de este trabajo se encuentran en Zellner y Palm (1974) y un desarrollo posterior en Wallis (1977) y Nerlove et al. (1979)². En ellos se pone de manifiesto la estrecha relación existente entre las formulaciones de los modelos econométricos dinámicos y las sugeridas por las técnicas de series temporales ya que, concretamente, en la consideración de modelos uniecuacionales, la mayor parte de las especificaciones dinámicas tradicionales son casos particulares de las formulaciones que se derivan de los modelos de regresión dinámica.

En relación a las investigaciones que en la última década se han dirigido al estudio de una metodología para la modelización econométrica de series temporales económicas, una amplia recopilación se encuentra en Hendry y Richard (1983) y un tratamiento completo de esta metodología en Spanos (1986).

²Para más detalle respecto a estas referencias puede consultarse, entre otros, Raftery (1985), Treadway (1984) y Mills (1990).

Otros puntos de vista alternativos se dan entre otros en Sims (1987) y una revisión de éstos en Pagan (1987)³.

En consecuencia y en palabras de Zellner (Raftery, 1985) " ... las formulaciones de modelos econométricos han de estar basadas en la teoría económica pero también han de tomar en cuenta conceptos presentes en el análisis de series temporales, tales como la presencia de errores ARMA, retardos distribuidos y variables dependientes retardadas". De la misma forma, Hendry (1987) entiende que "los modelos han de satisfacer criterios adicionales a aquéllos de 'coherencia de los datos', esto es, condicionamiento válido, consistencia de los parámetros, admisibilidad de los datos, consistencia de la teoría y ser capaces de explicar los resultados obtenidos por modelos rivales a partir de los resultados propios".

En otras palabras, se trata según Treadway (1984) de "... hacer teoría económica en interacción con el proceso de construcción del modelo, en tanto que la teoría debe ayudar a la formulación del problema, tomar parte en la interpretación de los modelos, así como en el establecimiento de un modelo conceptual inicial y de restricciones suficientemente convincentes y, finalmente, en la interpretación de resultados". De hecho, la teoría económica no sólo va a facilitar la interpretación de un modelo empírico sino que proporciona un lenguaje para la comunicación de la naturaleza y significación de los frutos de la modelización econométrica.

Ahora bien, la efectividad en el aprendizaje de los datos que la aproximación de series temporales ofrece requiere necesariamente reevaluar la teoría económica

³ Véase Mills (1990) para éstas y otras referencias al respecto.

y discriminar de forma precisa entre aquellas partes de la teoría que razonablemente pueden sostenerse y aquéllas que deben desecharse.

En consecuencia, este requerimiento se traduce en la necesidad de conseguir un equilibrio entre la adecuación estadística y la sensibilidad económica, es decir, lograr que los modelos sean económicamente sensibles y estadísticamente adecuados, en tanto que han de proporcionar una base válida para la inferencia y, por tanto, facilitar la comprobación y comparación a priori de teorías alternativas dentro de una estructura estadística bien fundamentada.

1.- MODELOS LINEALES DE SERIES TEMPORALES

1.1.- MODELOS ARMA Y ARIMA UNIVARIANTES

Desde la perspectiva del análisis de series temporales, la evolución de los desarrollos teóricos ha permitido abordar el objetivo inicial de los modelos de series temporales, consistente en la determinación de las pautas de comportamiento en la distribución de las variables, esto es, la búsqueda de la estructura poblacional que presumiblemente ha generado la serie temporal observada, desde una doble perspectiva:

*Por un lado, desde una versión más clásica, el análisis de series temporales se presenta como una herramienta de utilidad en la descripción histórica de una variable, con independencia de sus relaciones con otras magnitudes, al realizar un estudio detallado de todas las componentes que de forma agregada configuran la evolución de la variable en el tiempo; se trata, en concreto, de aislar y en su caso corregir los posibles efectos tendenciales, cíclicos, estacionales y erráticos presentes en la evolución de las diferentes magnitudes.

*Por otro lado, en base al enfoque estocástico enunciado por Quenouille (1957)⁴, que permite expresar el comportamiento probabilístico de una determinada variable en función de su historia pasada y de un término de error, el análisis de series temporales permite contemplar el conjunto de variables observadas como una realización muestral de un proceso aleatorio desconocido que genera la información disponible al tiempo que, sin entrar en la bondad de las mismas, se presenta como un instrumento capaz de realizar proyecciones de valores futuros -especialmente a C/P-, sin más que recurrir a la información estadística contenida en la propia variable.

Precisamente, la consideración de esta última perspectiva ha permitido dar un empuje notable en el tratamiento formal y operativo de los modelos lineales de series temporales.

En concreto, la integración de los procesos autorregresivos (AR) y medias móviles (MA) en los procesos mixtos autorregresivos y de medias móviles (ARMA)⁵ permite establecer un marco general para la representación en principio de cualquier tipo de proceso estocástico estacionario.

En general, la representación de un proceso ARMA (p,q) univariante estacionario e invertible viene dada por

$$\phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)a_t \quad (1.1)$$

donde L es el operador retardo tal que $L^m Y_t = Y_{t-m} \quad \forall m \in Z$, $\phi_p(L)$ y $\theta_q(L)$ son polinomios de grados p y q respectivamente, de la forma:

⁴ Ver , entre otros, Murillo (1986).

$$\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j \quad \text{y} \quad \theta(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$$

y $\{a_t : t = 0, \pm 1, \dots\}$ es una secuencia de variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas que se denomina proceso de ruido blanco o proceso de innovación. Además, se asume que el modelo es estacionario e invertible, es decir, las ecuaciones $\phi_p(L) = 0$ y $\theta_q(L) = 0$ tienen todas las raíces fuera del círculo unidad y se supone que no existen factores comunes.

Ahora bien, la consideración de los modelos integrados (modelos ARIMA)⁶ como generalización de los modelos ARMA, permite abordar el estudio de la representación de procesos estocásticos desde una perspectiva más general. La posibilidad de introducir un contexto teórico en el que las series puedan ser evolutivas, de forma que no sean sus niveles sino sus incrementos o los incrementos de éstos quienes tengan un comportamiento estacionario, convierte a los modelos ARIMA en un instrumento útil en la representación parsimoniosa de procesos estocásticos lineales.

Esta clase de modelos para la representación de procesos estacionarios y no estacionarios que simultáneamente considera la posibilidad de un comportamiento estacional, puede representarse por:

$$\phi_p(L) \Phi_p(L^s) \nabla^d \nabla_s^D Y_t = \theta_q(L) \Theta_q(L^s) a_t \quad (1.2)$$

donde $\phi_p(L)$, $\Phi_p(L)$, $\theta_q(L)$ y $\Theta_q(L)$ son polinomios de los órdenes que se indican, L^s es el operador de retardo estacional tal que $L^s Y_t = Y_{t-s}$; ∇ es el

⁵Ver Box y Jenkins (1976).

⁶Ver Box y Jenkins (1976).

operador de primeras diferencias definido como $\nabla = 1 - L$, ∇_s es el operador de diferencia estacional tal que $\nabla_s = 1 - L^s$ y d, D representan los órdenes de diferenciación para la parte regular y estacional, respectivamente. Esta formulación se ha denominado también modelo SARIMA $(p, d, q)x(P, D, Q)$.

La especificación de un modelo apropiado de la forma (1.2) requiere encontrar estimaciones de los órdenes (p, d, q, P, D, Q) . Ahora bien, si los órdenes del modelo son predeterminados, entonces los parámetros $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ pueden ser estimados a partir de distintos métodos. Sin embargo, dado que a priori no se conocen los órdenes verdaderos, éstos pueden ser determinados en principio a partir de las observaciones disponibles. Este procedimiento constituye lo que se denomina en Box y Jenkins (1976) etapa de **identificación** del modelo.

En este sentido, la estrategia que proponen estos autores es en esencia un método iterativo de prueba y error, que puede compararse con el proceso de descubrimiento científico si se concibe como una interacción entre generación de hipótesis y comprobación experimental. En concreto, junto al esquema teórico de modelo estocástico, proponen una metodología de forma que sean los datos quienes en cada caso determinen el modelo ARIMA más adecuado para explicar su generación.

Esta propuesta metodológica que introducen se presenta dividida en cuatro etapas que denominan de **identificación**, **estimación**, **comprobación** y **diagnóstico** y finalmente, **predicción**. Esto es, la especificación de la estructura poblacional que probablemente ha generado la serie temporal observada, o dicho de otra forma, la selección tentativa de los órdenes polinomiales antes especificados a partir de la información contenida en las funciones de autocorrelación simple y parcial muestrales, y la elaboración en consecuencia de un modelo tentativo, constituyen el punto de partida en dicho procedimiento. En

fases posteriores, y una vez realizada la estimación de los parámetros del modelo, se procede a su validación para a continuación llevar a cabo, en su caso, la reformulación del mismo y, finalmente, comprobar la validez real del modelo surgido de las etapas anteriores, en términos de su capacidad descriptiva, predictiva y de control.

En los siguientes apartados revisamos algunas propuestas que son igualmente válidas para modelos VARMA en general.

1.2.- MODELOS ARMA VECTORIALES. EL MODELO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA

La extensión del tratamiento de series temporales para la modelización conjunta de un proceso estocástico vectorial permite introducir los modelos ARMA vectoriales (VARMA), también denominados modelos estocásticos multivariantes.

Estos modelos constituyen la generalización de los modelos ARMA univariantes. Además, representan la contrapartida a lo que se ha denominado en la literatura econométrica modelos de sistemas de ecuaciones interdependientes o modelos de ecuaciones simultáneas, que contemplan la especificación simultánea de varias variables y que pueden adoptar diversas formas⁷.

El tratamiento de los modelos VARMA y, en concreto, el estudio de su identificación dinámica se ha abordado desde diferentes aproximaciones, entre las que cabe citar Jenkins y Alavi (1981), Tiao y Tsay (1989), Francq (1989).

⁷ Veáse, entre otros, Murillo (1979), Zellner y Palm (1974) y Hendry, Pagan y Sargan (1984).

Esta alternativa en la especificación de sistemas dinámicos, que establece un contexto más amplio en el que relacionar una o más series temporales (outputs) en función de otra u otras series temporales (inputs) asume, en concreto, la existencia de un conjunto finito de variables correspondientes a h procesos estocásticos estacionarios $\{Y_{1t}\}, \{Y_{2t}\}, \dots, \{Y_{ht}\}$ que, de forma compacta, podemos expresar como $Y_t = (Y_{1t} \ Y_{2t} \ \dots \ Y_{ht})'$ ⁸, siendo por tanto Y_t un vector de múltiples variables y h la dimensión del vector.

Por otra parte, se asume que el vector Y_t admite una representación múltiple de modelos lineales mixtos al considerar, de forma análoga al caso univariante, que cada elemento de Y_t puede ser representado por un modelo lineal mixto ARMA.

Por tanto, como extensión de los modelos univariantes, la representación formal de un proceso ARMA (p, q) vectorial viene dada por:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + a_t + \Theta_1 a_{t-1} + \dots + \Theta_q a_{t-q}$$

que en forma compacta puede ser representada por

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)a_t \tag{1.3}$$

donde $\Phi(L) = I - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L^p$ y $\Theta(L) = I - \Theta_1 L - \dots - \Theta_q L^q$ son polinomios matriciales en L de dimensión $h \times h$ y los elementos que componen Y_t están medidos en desviaciones respecto a sus medias.

Además, el vector $a_t = (a_{1t} \ a_{2t} \ \dots \ a_{ht})'$ está compuesto de variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y matriz de varianzas-

⁸La notación (') indica vector traspuesto.

covarianzas Σ . Se supone también que las raíces de los determinantes $|\Phi(L)|$ y $|\Theta(L)|$ están fuera del círculo de radio unidad, con lo cual se garantiza la estacionariedad e invertibilidad del modelo.

Esta especificación permite relacionar todos los elementos de Y_t con los Y_{t-j} ($j=1,2,\dots$) así como la existencia de feedback entre todas las series.

Tal y como destacan entre otros Zellner y Palm (1974), la imposición de determinadas restricciones en la especificación de los modelos VARMA conduce a representaciones "familiares" a los modelos econométricos tradicionales.

Así mismo, existe una relación entre el modelo VARMA dado en (1.3) y el modelo de ecuaciones simultáneas presente en la mayoría de los modelos econométricos, que se establece en los siguientes términos:

Consideremos el proceso $z_t' = (Y_t', X_t')$ donde Y_t' es de dimensión g y X_t' de dimensión k ($h=g+k$). Supongamos que la restricción $\Phi_o = I$ es relajada a que Φ_o sea invertible. Una partición adecuada de (1.3) viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(L) & \Phi_{12}(L) \\ \Phi_{21}(L) & \Phi_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(L) & \Theta_{12}(L) \\ \Theta_{21}(L) & \Theta_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

donde a_{1t} y a_{2t} son procesos ruido blanco independientes.

Por otro lado, los modelos VARMA, que constituyen una de las especificaciones dinámicas más generales de series temporales, contemplan como casos particulares modelos conocidos.

Imponiendo las restricciones $\Phi_{21}(L) \equiv 0, \Theta_{12}(L) \equiv 0, \Theta_{21}(L) \equiv 0$ esto es, considerando Y_t como variable endógena y X_t como exógena, podemos escribir la expresión anterior en términos del conjunto de ecuaciones estructurales dado por:

$$\Phi_{11}(L)Y_t + \Phi_{12}(L)X_t = \Theta_{11}(L)a_{1t} \quad (1.4)$$

junto con el proceso VARMA que genera las variables exógenas dado por:

$$\Phi_{22}(L)X_t = \Theta_{22}(L)a_{2t} \quad (1.5)$$

Si expresamos las ecuaciones estructurales como:

$$\Phi_{11,0}Y_t + \dots + \Phi_{11,r}Y_{t-r} + \Phi_{12,0}X_t + \dots + \Phi_{12,s}X_{t-s} = e_t \text{ donde } e_t = \Theta_{11}(L)a_{1t}$$

podemos obtener la forma reducida del modelo, esto es, expresar cada variable endógena en función de las variables exógenas y endógenas retardadas

$$Y_t = -\Phi_{11,0}^{-1} \{ \Phi_{11,1}Y_{t-1} + \dots + \Phi_{11,r}Y_{t-r} \} - \Phi_{11,0}^{-1} \Phi_{12}(L)X_t + \Phi_{11,0}^{-1} e_t$$

puesto que $\Phi_{11,0}$ es invertible.

Así mismo, la resolución de (1.4) permitirá obtener la forma final del modelo denominado **modelo de Función de Transferencia (FT) vectorial**, que vendrá dado por:⁹

$$Y_t = -\Phi_{11}^{-1}(L)\Phi_{12}(L)X_t + \Phi_{11}^{-1}(L)e_t \quad (1.6)$$

en la cual cada variable endógena se expresa como una función de infinitos retardos distribuidos de las variables exógenas.

En concreto, si consideramos como caso particular que $z_t' = (Y_t', X_t')$ con Y_t' de dimensión 1 y X_t' de dimensión k , una representación adecuada del modelo FT

⁹ Para una discusión sobre las relaciones entre el modelo de FT vectorial y el modelo econométrico de ecuaciones simultáneas véase Zellner y Palm (1974) y Wallis (1977).

dado en (1.6) que contemple la presencia de varias variables explicativas X_{it} ($i = 1, 2, \dots, k$) vendrá dado por:

$$Y_t = \sum_{i=1}^k \frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{it_i}(L)} L^{b_i} X_{it} + \frac{e_t}{\Phi(L)}$$

donde el factor L^{b_i} representaría la posible demora en la respuesta de la variable output respecto al i -ésimo input, esto es, se introduce una relación causal no instantánea entre Y_t y X_{it} .

Esta vía de aproximación se presenta, por tanto, como una extensión natural y lógica de los modelos ARIMA univariantes al introducir variables explicativas adicionales como inputs en el modelo. Además, este tipo de modelos constituye lo análogo a los modelos de regresión múltiple uniecuacionales, en tanto que una variable aparece funcionalmente relacionada con una o más variables.

Del mismo modo, si consideramos que $z_t' = (Y_t', X_t')$ con Y_t' y X_t' de dimensión $g = k = 1$ ($h=2$), esto es, procesos ARMA univariantes, una representación adecuada del proceso VARMA en la cual Y_t es la variable endógena y X_t la variable exógena vendrá dada por las ecuaciones:

$$\phi(L)X_t = \alpha(L)b_t$$

$$\Phi(L)Y_t + \Omega(L)X_t = \Theta(L)a_t$$

de forma que si $\Phi_0 \neq 0$, podemos expresar Y_t como:

$$Y_t = -\Phi^{-1}(L)\Omega(L)X_t + \Phi^{-1}(L)e_t \quad (1.7)$$

esto es, en función de los efectos contemporáneos y desplazados de la variable exógena X_t y de un término de perturbación aleatoria.

Esta especificación dinámica que se recoge en (1.7) y que representa un caso particular del modelo VARMA es lo que se conoce en la literatura econométrica como **modelo de Función de Transferencia** (FT) (Box y Jenkins, 1976)¹⁰ y que constituye una de las representaciones más frecuentes en la especificación de relaciones en el dominio temporal.

En realidad, este tipo de formulación se concibe como una especificación dinámica mixta, es decir, como una combinación aditiva entre el modelo de regresión dinámica y la modelización de series temporales univariantes para el término de error.

Aún así, mientras que las aproximaciones de regresión tradicionales enfatizan el papel de la teoría y la causalidad hipotetizada para la elección de las variables explicativas, así como la especificación de la forma funcional, incluyendo la estructura de retardos entre la variable respuesta y las variables explicativas, sin embargo, bajo el análisis de series temporales, las técnicas enfatizan la especificación del modelo basada en las relaciones temporales entre series, a través de la identificación suministrada por los estadísticos muestrales correspondientes a las variables implicadas en la relación.

La filosofía que subyace en este tipo de especificación se basa en establecer una formulación entre variables estacionarias, a través de un modelo inicialmente

¹⁰Nótese que para $k = 1$ e $Y_t = Y_{1t}$, se obtendría una representación ARMA univariante para Y_t como la dada en (1.1).

restringido que, de forma secuencial y de acuerdo con los datos, derivará hacia un modelo más general, evitando con ello los problemas de ineficiencia que comporta la estimación de modelos en principio excesivamente generales.

Precisamente, uno de los problemas centrales en este tipo de modelos reside en la especificación del comportamiento dinámico entre las variables que intervienen en el mismo, de forma que abordar la especificación de relaciones dinámicas desde la perspectiva basada en los modelos FT, supone la determinación del grado de los polinomios de retardo que intervienen, a partir de la información muestral disponible.

Con el propósito de abordar la determinación de los órdenes polinomiales en este tipo de modelos, se han propuesto diversos procedimientos en la literatura econométrica; entre éstos cabe citar los métodos de Priestley (1971), Box y Jenkins (1976), Haugh y Box (1977), Tiao y Box (1981), Liu y Hanssens (1982), Claverie et al (1990), etc.

Por otra parte, algunos de los procedimientos propuestos para la identificación de modelos ARMA y, en particular, en la identificación de modelos FT encuentran su base metodológica, tal y como veremos más adelante, en la aproximación clásica de Padé, esto es, en la aproximación a series formales de potencias.

En general, esta clase de modelos, que va a constituir precisamente el marco de referencia en nuestro análisis, ha sido ampliamente utilizada para la representación en el contexto input-output de sistemas estocásticos dinámicos por medio de expresiones racionales polinómicas.

Este tipo de modelos resulta en general adecuado para la modelización de comportamientos transitorios de sistemas tanto en estado de equilibrio como de desequilibrio. Además, goza de amplia aplicación práctica no sólo en la

economía, a través de la modelización de relaciones transitorias input-output en un sistema económico, sino también en diversos campos como son la Ingeniería, las Ciencias Empresariales y en especial aquellas áreas donde existe una estructura correlativa o causal entre variables que están temporal o espacialmente relacionadas. En particular, dentro de la Ingeniería, este tipo de modelización es de utilización frecuente en la construcción de sistemas de control estocásticos y en el estudio de problemas de control de calidad, donde el valor de una cualidad característica en un momento t se relaciona con ajustes a procesos controlables en períodos de tiempo previos.

Incluso en otro ámbito de aplicaciones como es, por ejemplo, la Geografía, este tipo de modelos juega un papel esencial en la planificación y toma de decisiones a nivel espacial y temporal (Bennett y Haining, 1976)¹¹.

2.- LA IDENTIFICACION DE MODELOS ARMA: UNA REVISION METODOLOGICA

Tal y como se ha expuesto con anterioridad, el interés por abordar la determinación de los órdenes de procesos ARMA y, por extensión, de modelos ARIMA univariantes y multivariantes, constituye un tópico de interés considerable en la literatura de series temporales.

En este sentido, durante las dos últimas décadas diversos intentos han ido dirigidos a desarrollar procedimientos para la identificación de los órdenes en modelos ARMA. Nuestro propósito a continuación se centra en presentar, de

¹¹Ver Pong-Wai Lai (1979).

forma sucinta, una revisión de los diferentes métodos que se han sugerido en la identificación de tales modelos.¹²

El procedimiento tradicional en la identificación de este tipo de formulaciones es el que proponen Box y Jenkins (1976), cuya propuesta descansa en la utilización de la información contenida en la representación numérica y gráfica de las funciones de autocorrelación muestral y autocorrelación parcial de la serie, en su caso, apropiadamente diferenciada. En tal caso, y a través del criterio de parsimonia, se realiza la identificación tentativa de algún modelo, esto es, la identificación de los órdenes de los esquemas autorregresivos y/o medias móviles, tanto en la parte regular como estacional, para proceder finalmente a la identificación de la existencia o no de término independiente.¹³

El interés por profundizar en el estudio de la especificación dinámica en este tipo de modelos ha permitido el desarrollo de diversos métodos alternativos de identificación, entre los que podemos destacar métodos de determinación basados en:

* *errores de predicción un período adelante*, esto es, métodos basados en la capacidad predictiva de los modelos que se formulan, entre los cuales cabe a su vez citar:

- El *criterio del error de predicción final (EPF)*, propuesto por Akaike (1970) para la determinación del orden en procesos AR y que él mismo generalizó posteriormente a la selección de procesos AR multivariantes. Una recopilación de

¹²Véase, entre otros, Huyberegts (1982), Gooijer et al (1985), Mélard (1990), Choi (1992), Berinet y Francq (1994) para una amplia revisión de estos métodos.

¹³Un tratamiento detallado de esta aproximación se encuentra, entre otros, en Pankratz (1983) y Vandaele (1983).

sus aplicaciones mediante el uso de técnicas de regresión, procesos vectoriales, tests de causalidad, etc se encuentra en Choi (1992).

- Los *criterios de validación cruzada*, propuestos inicialmente en el contexto de los modelos de regresión lineal, hacen uso del error que aparece cuando el valor actual se predice a partir de observaciones pasadas y futuras. Estos métodos han sido objeto de diversos trabajos en el campo del análisis de series temporales (Stoica, Eykhoff, Jansen y Söderström, 1986)¹⁴.

- El *criterio para funciones de transferencia autorregresivas (CAT)* propuesto por Parzen (1974), constituye una herramienta estrechamente relacionada con el EPF para la identificación del orden de procesos AR univariantes y multivariantes a través del uso de la teoría espectral.

**medidas de información*, donde el método más conocido es el *criterio de información de Akaike (AIC)* (Akaike, 1971). Este método, que descansa sobre los conceptos de teoría de la información, se ha utilizado para la selección de modelos óptimos en varios campos de la estadística, incluyendo el análisis de series temporales. En este sentido, su aplicación a procesos ARMA gaussianos como alternativa a la metodología Box-Jenkins parece justificable. Otras aplicaciones se encuentran en el análisis factorial y en el ajuste polinomial.

**métodos bayesianos*, que hacen uso del conocimiento previo de los parámetros de un modelo en la forma de una función de densidad de probabilidad. Diversos criterios bayesianos se han propuesto en la literatura econométrica para la identificación de modelos ARMA. Entre éstos podemos citar el *criterio S* (Schwarz, 1978), el *criterio de información bayesiana (BIC)* (Akaike, 1979), el *criterio RC* (Rissanen, 1978), el *criterio de estimación bayesiana (BEC)* (Geweke

¹⁴ Véase Choi (1992).

y Meese, 1981) y el *criterio HQ* (Hannan y Quinn, 1979), posteriormente generalizado para modelos AR vectoriales.

La utilidad de estos métodos bayesianos se justifica por un lado, en que incorporan alguna forma de ajuste a la información previa sobre la estructura del modelo y tamaño muestral y, por otro lado, en que introducen una mayor penalización a la sobreparametrización del modelo con respecto a otro tipo de criterios.

*Algunos *procedimientos de estimación lineal* entre los que cabe la *técnica de regresión instrumental*, cuyo empleo para la modelización ARMA ha sido propuesto por Hannan y Rissanen (1982). Este método, que proporciona estimaciones consistentes de los órdenes, consiste en ajustar las observaciones actuales a observaciones pasadas y a valores estimados de las innovaciones pasadas.

En relación a este tipo de métodos, Koreisha y Pukkila (1990) han propuesto diversos procedimientos de estimación lineal para la modelización ARMA, que proporcionan estimaciones precisas y rápidas en comparación con el número de iteraciones necesario para calcular las estimaciones máximo verosímiles, especialmente cuando los valores de los parámetros están próximos a las regiones de no invertibilidad o no estacionariedad.

Así mismo, estos autores, basándose en el procedimiento de estimación lineal anterior, proponen posteriormente un método en la identificación de modelos ARMA que, de forma iterativa, consigue seleccionar apropiadamente los órdenes del proceso una vez se consigue que los residuos de la estructura ajustada sean ruido blanco.

* *teoría de contrastes de hipótesis estadísticas*, entre los que cabe citar el test basado en el *ratio de verosimilitud* (Whittle, 1954), el *test de Wald* (Anderson,

1971) y el test del *multiplicador de Lagrange* (Hosking, 1980) que permiten la selección de los órdenes apropiados a partir de un procedimiento de contrastación secuencial de hipótesis.

* *teoría de realización estocástica o determinística*, que poseen una base común que permite dar un tratamiento unificado al proceso de identificación; entre ellos destacan:

En primer lugar, la *función de autocorrelación invertida*, propuesta por Cleveland (1972) para la identificación de modelos ARMA. Si bien esta herramienta juega el mismo papel que la función de autocorrelación parcial en el procedimiento de identificación Box-Jenkins, por la dualidad existente entre ambas funciones, sin embargo, diversos autores, entre ellos Abraham y Ledolter (1984), han desarrollado ejercicios de simulación que, en particular, demuestran que la función de autocorrelación inversa es menos poderosa que la de autocorrelación parcial para la identificación de procesos AR.

En segundo lugar, una función alternativa es la *función de autocorrelación parcial inversa*, propuesta por Hipel et al (1977) (Ver Choi, 1992), que si bien posee un comportamiento similar a la función de autocorrelación y resulta de interés su aplicación en la identificación de procesos MA puros, su utilidad es en ocasiones limitada a causa de las dificultades de estimación que comporta.

*Métodos basados en las *ecuaciones de Yule-Walker*, cuya utilización en la determinación de los órdenes de un proceso ARMA es debida a Bartlett y Diananda (1950)¹⁵.

¹⁵ Ver Choi (1992).

En este sentido, una de las vías sugeridas viene dada por los denominados métodos de la *función de autocorrelación parcial generalizada (ACPG)*, entre los que destacan, por un lado, los métodos de Woodside (1971), Glasbey (1982) y Takemura (1984) que presentan, no obstante, en algunos casos ciertos inconvenientes relacionados con la infravaloración de los órdenes para tamaños muestrales pequeños.

Así mismo, el *método de Woodward y Gray* (1981), si bien resulta de especial aplicación como medio de confirmación para procesos AR, ciertos autores como Davies y Petruccelli (1984) desaconsejan su uso, basándose en el comportamiento inestable que muestra cuando se aplica a series temporales de longitud moderada y en la utilidad limitada para identificar los órdenes de procesos MA. En este sentido, en Gooijer y Saikkonen (1988) se propone una estrategia de especificación, basada en el uso de tests de Wald, que intenta corregir algunas dificultades que en este sentido aparecen.

Esta serie de métodos se completa, por un lado, con el método de la *función de autocorrelación muestral extendida* propuesto por Tsay y Tiao (1984), que si bien tiene la ventaja de que elimina la necesidad de determinar el orden de diferenciación necesario para lograr la estacionariedad de un modelo ARMA, requiere, sin embargo, más cálculos que otros métodos de identificación y, por otro lado, con el *método de correlación canónica* propuesto por Tsay y Tiao (1985), que aunque permite la determinación de los órdenes de procesos ARMA univariantes estacionarios y no estacionarios a través del análisis de los valores propios de la matriz de correlación de un proceso ARMA, no resulta computacionalmente sencillo en la práctica.

En particular, en Choi (1992), a partir de las ecuaciones de Yule-Walker se proponen diversos métodos o ‘patrones de reconocimiento’ como es el caso, entre otros, de las tres funciones $\{\theta(k,i)\}$, $\{\lambda(k,i)\}$, $\{\eta(k,i)\}$ $k = 1,2,\dots; i = 0,1,2,\dots$

llamadas funciones θ , λ , η , para la representación de un proceso estocástico a través de un modelo ARMA (p,q) .

Dado que nuestro interés se centra fundamentalmente en el estudio de aquellos métodos de identificación relacionados con la aproximación de Padé, dedicamos a ellos el siguiente apartado.

2.1.- LA APROXIMACION DE PADE EN LA IDENTIFICACION DE MODELOS ARMA

La preocupación existente en la literatura econométrica por abordar el problema de la identificación del comportamiento dinámico en el marco de los modelos de series temporales y, en concreto, el interés por profundizar en la consideración de la teoría de la representación racional de series, ha contribuido significativamente al desarrollo de diversas propuestas y técnicas de identificación que presentan una estrecha vinculación con un género concreto de aproximaciones racionales al valor de una función.

En efecto, el estudio de aproximaciones racionales a funciones de variable compleja se ha convertido en un tema de indudable actualidad en las investigaciones matemáticas que, a nivel teórico, se desarrollan en el ámbito del Análisis Numérico.

En concreto, la técnica de los *aproximantes de Padé*, introducida en Padé (1892) como un tipo especial de aproximación racional para la estimación del valor de una función en un punto, constituye un núcleo esencial de las numerosas investigaciones que se vienen realizando en el campo de la aproximación racional.

El desarrollo a partir de los años 50 de nuevas técnicas computacionales y de métodos de computación recursiva ha estimulado gratamente las aplicaciones de este género de aproximaciones racionales en la solución de numerosos problemas,

en concreto, de la Ingeniería y de la Física Teórica. En general, dichas aplicaciones van desde la solución de todo tipo de ecuaciones con operadores, técnicas de aceleración de la convergencia, teoría de sistemas lineales, teoría de redes, procesos estocásticos, etc.

El amplio tratamiento de que es objeto esta técnica y la profusión de libros y referencias bibliográficas¹⁶ al respecto, revelan y refuerzan el interés y la importancia que este tipo de análisis suscita dentro de las investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Análisis Numérico.

Existen también numerosos vínculos que ponen de manifiesto el papel que las técnicas de Padé han tenido en el tratamiento lineal y computacional de sistemas temporales¹⁷. Así mismo, numerosas investigaciones en el ámbito de la aproximación de Padé se han centrado en el estudio de sistemas lineales y en el desarrollo de técnicas para procesamiento y extracción de señales digitales, con el fin de revelar las estructuras entre series y sus relaciones.

Las investigaciones que se han venido realizando con relación a la aproximación racional de Padé en el campo escalar se han centrado, por un lado, en la aproximación de series formales de potencias, esto es, la aproximación local de funciones analíticas en un punto, denominado caso clásico y, por otro lado, en la aproximación de Padé-Laurent (Bultheel, 1987), que constituye la generalización de los aproximantes de Padé al estudio de series formales de Laurent o series doblemente infinitas, en las cuales se considera una secuencia discreta de variables y ponderaciones evaluadas en todo Z .

¹⁶Brezinski (1980) ha recogido cientos de referencias en la aproximación de Padé y tópicos relacionados.

¹⁷Ver Bultheel y Van Barel (1986) donde se recogen más de 500 referencias.

Paralelamente, numerosas investigaciones se han llevado a cabo en el ámbito de la aproximación de Padé a nivel vectorial y matricial para el denominado caso clásico.

En especial, esta técnica se ha mostrado no sólo como una herramienta valiosa para la obtención de información numérica sobre el comportamiento de ciertas series asintóticas sino que, por otra parte, sus propiedades permiten su aplicación a un campo importante del análisis de series temporales como es la identificación de relaciones dinámicas entre variables temporales en el contexto de los modelos ARMA univariantes y multivariantes¹⁸.

En este contexto, las propiedades de la aproximación de Padé permiten la obtención de estimaciones previas sobre la parte determinista del modelo con independencia de la especificación recogida para el término de perturbación aleatoria, esto es, sin previo conocimiento de la estructura del ruido. Además, desde el punto de vista estadístico se justifica la utilización de dichas estimaciones como valores consistentes y fiables para la obtención de las estimaciones finales de los parámetros por medio de métodos más eficientes, generalmente de tipo iterativo no lineales (Lii, 1985).

Por otra parte, la existencia de relaciones de recurrencia entre los aproximantes de Padé y de técnicas computacionalmente adecuadas junto con la utilización de la teoría de polinomios ortogonales, permiten la caracterización de métodos sencillos a nivel computacional dentro del proceso de identificación dinámica.

¹⁸Véase, entre otros, Beguin, Gourieroux y Monfort (1980), Lii (1985), Claverie et al (1990), Berlinet y Francq (1994)

2.1.1.- Propuestas de caracterización dinámica

Estas propuestas de caracterización dinámica que encuentran su soporte metodológico en la aproximación de Padé se concretan en:

Por un lado, el método de la tabla R y S propuesto por Gray, Kelley y McIntire (1978), surge como alternativa al método de Box-Jenkins en el uso de las autocorrelaciones para la identificación de modelos ARMA. Este método - estrechamente relacionado con la aproximación de Padé a través del cálculo de matrices de Hankel¹⁹ para funciones reales- permite llevar a cabo la caracterización de los órdenes de un proceso ARMA a través de los patrones de comportamiento observados en dos tablas numéricas llamadas tablas R y S cuyos elementos (i, j) vienen dados por:

$$R_j(\rho_i) = \frac{H_j(\rho_i)}{H_j(1; \rho_i)}; \quad S_j(\rho_i) = \frac{H_{j+1}(1; \rho_i)}{H_j(\rho_i)} \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde $H_j(\rho_i)$ y $H_{j+1}(1; \rho_i)$ son determinantes de Hankel de órdenes j y $j+1$ respectivamente, definidos por:

$$H_j(\rho_i) = \begin{vmatrix} \rho_i & \rho_{i+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{i+j-1} \\ \rho_{i+1} & \rho_{i+2} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{i+j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{i+j-1} & \rho_{i+j} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{i+2j-2} \end{vmatrix}, \quad H_{j+1}(1; \rho_i) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \rho_i & \rho_{i+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{i+j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{i+j-1} & \rho_{i+j} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{i+2j-1} \end{vmatrix}$$

siendo $\rho_i \equiv \rho_{-i}$ la autocorrelación en el retardo i definida por $\text{cov}(y_t, y_{t-i}) / \text{var}(y_t)$ y $H_0(\rho_i) = 1$. Alternativamente, puede sustituirse ρ_i por la

¹⁹Véase Gantmacher (1974).

transformación $(-1)^i \rho_i$ en las formulaciones anteriores para evitar la propagación de errores de redondeo, en su caso.

Los patrones teóricos de comportamiento que han de mostrar las tablas R y S asociadas a un proceso ARMA (p, q) vienen dados por:

TABLA R

j	1	2	...	p	$p+1$...	$p+k$
i							
-1	ρ_{-1}	$R_2(\cdot)$...	$R_p(\cdot)$	0	...	0
...
$-q-p-1$	ρ_{-q-p-1}	$R_2(\cdot)$...	$R_p(\cdot)$	0	...	0
$-q-p$	ρ_{-q-p}	$R_2(\cdot)$...	$R_p(\cdot)$	$R_{p+1}(\cdot)$...	$R_{p+k}(\cdot)$
...
$q-p$	ρ_{q-p}	$R_2(\cdot)$...	$R_p(\cdot)$	$R_{p+1}(\cdot)$...	$R_{p+k}(\cdot)$
$q-p+1$	ρ_{q-p+1}	$R_2(\cdot)$...	$R_p(\cdot)$	0	...	0
...
g	ρ_g	$R_2(\cdot)$...	$R_p(\cdot)$	0	...	0

TABLA S

j	1	...	p	$p+1$...	$p+k$
i						
-1	$S_1(\cdot)$...	C_2	nd	...	nd
...
$-q-p-1$	$S_1(\cdot)$...	C_2	nd	...	nd
$-q-p$	$S_1(\cdot)$...	C_2	$\pm\infty$...	$\pm\infty$
$-q-p+1$	$S_1(\cdot)$...	nc	nc	...	nc
...
$q-p-1$	$S_1(\cdot)$...	nc	nc	...	nc
$q-p$	$S_1(\cdot)$...	C_1	$-C_1$...	$(-1)^k C_1$
$q-p+1$	$S_1(\cdot)$...	C_1	nd	...	nd
...
g	$S_1(\cdot)$...	C_1	nd	...	nd

nd = no definido; nc = no constante.

$$C_1 = (-1)^p (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i), \quad C_2 = -C_1 / \phi_p$$

En particular, el comportamiento de la columna $p + 1$ en la tabla R y de las columnas p y $p + 1$ en la tabla S proporcionan las pautas para la identificación de los órdenes polinomiales. En general, la determinación del orden p resulta más clara en la tabla S y la de q en la tabla R.²⁰

Así mismo, según Gray et al (1978), aunque no es siempre el caso, la utilización de las autocorrelaciones estimadas $\hat{\rho}_i$ corregidas por su media, esto es,

$$\hat{\rho}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T-i} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+i} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

en lugar de las autocorrelaciones ρ_i facilita la identificación para datos con alta frecuencia (en sentido espectral), mientras que la utilización de $(-1)^i \rho_i$ resulta mejor para datos de baja frecuencia. T representa el tamaño de la muestra.

Además, tal y como se señala en Tucker (1982), la relación existente entre este método y la aproximación de Padé, se establece a través del cálculo de los determinantes de Hankel $H_j(\rho_{i-j+1})$, esto es,

$$C_{i+1,j+1}(\rho_i) = R_{j+1}(i-j+1)S_j(i-j+1)C_{i,j}(\rho_i)$$

siendo $C_{i,j}(\rho_i) = H_j(\rho_{i-j+1})$, permitiendo, a su vez, caracterizar otro procedimiento que se denomina tabla C para la identificación de los órdenes de un modelo racional.

²⁰Un uso combinado de la tabla R-S para la identificación de modelos ARMA se da en Tucker (1982).

Este método presenta aplicaciones que van más allá de la identificación de modelos ARMA, tales como la distinción entre procesos ARIMA y los procesos de señales combinados con modelos ARMA para el ruido (Tucker, 1982). También ha sido utilizado para la detección de factores no estacionarios en el círculo unidad así como para el examen de datos estacionales (Gray y Woodward, 1981).

No obstante, algunas críticas a este método se centran en que no proporciona un patrón claro de identificación para series reales como el que se recoge en Gray et al (1978) para datos simulados. Además, si bien algunos se muestran entusiastas sobre las posibilidades del método, otros como Gooijer y Heuts (1981) son menos optimistas en tanto que su complejidad y dificultad teórica restringen su uso.

El procedimiento que se obtiene a través de la mencionada tabla C tiene especial relevancia en la literatura econométrica y se le conoce como el **método corner** o **método de la esquina**.

Este método, aunque utilizado con anterioridad en las ciencias biomatemáticas, fue propuesto por Beguin, Gourieroux y Monfort (1980) para la identificación de modelos ARMA univariantes. Así, partiendo del resultado conocido de que si el proceso Y_t tiene una representación ARMA (p, q) entonces:

$$\begin{aligned} \rho_i - \varphi_1 \rho_{i-1} - \dots - \varphi_p \rho_{i-p} &= 0, & i \geq q+1 \\ &\neq 0 & i = q \end{aligned}$$

o de igual forma

$$\begin{aligned} \varphi(L)\rho_i &= 0, & i \geq q+1 \\ &\neq 0, & i = q \end{aligned}$$

para cierto $\varphi(L)$, los autores demuestran los dos siguientes teoremas:

T.1.- El proceso Y_t sigue una representación minimal ARMA si y sólo si la secuencia de autocorrelaciones $[\rho_i, i \in Z]$ satisface una ecuación en diferencias lineal de orden minimal p y rango minimal $q+1$.

T.2.- El proceso Y_t admite una representación ARMA (p, q) minimal si y sólo si:

$$\begin{aligned} C_{i,j}(\rho_i) &= 0 & \forall i \geq q+1, j \geq p+1 \\ C_{i,p}(\rho_i) &\neq 0 & \forall i \geq q \\ C_{q,j}(\rho_i) &\neq 0 & \forall j \geq p \end{aligned}$$

Esta representación denominada "*caracterización corner*" permite obtener una representación tabular denominada *tabla corner*, que es la que resulta de disponer los valores de los determinantes $C_{i,j}(\rho_i)$ para los distintos (i, j) considerados, de tal manera que la presencia en la misma de una esquina inferior derecha de valores nulos permite identificar un proceso ARMA asociado a la secuencia $(\rho_i)^{21}$.

Ahora bien, dado que en la práctica sólo se dispone de las observaciones muestrales o realizaciones del proceso, la secuencia de autocorrelaciones se obtiene a partir del estimador consistente definido anteriormente para los ρ_i :

$$\hat{\rho}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T-i} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+i} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Por tanto, los determinantes $C_{i,j}$ son estimados por los $\hat{C}_{i,j}$ obtenidos al reemplazar las autocorrelaciones por sus estimaciones. Estos determinantes

²¹ Ver Lindberger (1973) y Solo (1986) para más detalles sobre la tabla corner. Así mismo, mayor información sobre la relación entre la tabla corner y la aproximación de Padé puede encontrarse, entre otros, en Baker (1975), Tucker (1982) y Petrushev y Popov (1987). Remitimos igualmente al Capítulo 2 de esta Memoria.

pueden computarse de forma iterativa a través de la conocida relación entre los determinantes de Hankel (Baker, 1975):

$$\hat{C}_{i,j}^2 = \hat{C}_{i+1,j}\hat{C}_{i-1,j} + \hat{C}_{i,j+1}\hat{C}_{i,j-1} \quad (1.8)$$

de donde pueden ser obtenidas otras relaciones útiles.

Según Beguin et al (1980) la inspección visual de la tabla corner asociada a los $\hat{C}_{i,j}$ es generalmente suficiente para seleccionar el orden apropiado del modelo; no obstante, proponen realizar la implementación del método a través de tres tablas sucesivamente construidas:

-la *tabla* $\hat{C}_{i,j}$ esto es, la tabla corner asociada a los $\hat{\rho}_i$, representación que no toma en cuenta la precisión de las estimaciones.

-la *tabla Student* que permite contrastar la nulidad de los elementos asociados a la tabla \hat{C} . Sin embargo, no toma en cuenta la nulidad simultánea de los determinantes.

-la *tabla de estadísticos* χ_3^2 que permite contrastar la nulidad de los elementos en la esquina inferior derecha de la tabla corner²².

En consecuencia, si bien en un primer término la inspección visual de estas tablas permite seleccionar un número pequeño de posibilidades para (p,q) , esta aproximación descriptiva puede completarse con un procedimiento más estadístico, basado en la comparación de los estadísticos de Student o χ^2 con valores críticos apropiados. Este proceso constituye, en definitiva, una guía

²² Para más detalle véase Mareschal y Mélard (1988).

interesante y además de amplia utilización en la identificación de procesos AR y MA puros.

Además, tal y como señalan Beguin et al (1981), debido a las propiedades de la tabla de Student y a la no singularidad de la matriz de covarianzas asociada a la forma cuadrática correspondiente al proceso en estudio, es posible elegir cualquier valor para el tamaño de la muestra.

Numerosos autores, entre ellos Rezayat y Anandalingam (1988) resaltan la aplicabilidad del método. Así, en palabras de Huyberegts (1982), "el método corner es la generalización a la vez que lo más simple e interesante que se ha hecho en los métodos de identificación basados en las autocorrelaciones de un proceso". En concreto, el procedimiento Box-Jenkins es un caso particular del método corner; en efecto, si $Y_t \sim \text{MA}(q)$ entonces $C_{i,1} = 0 \quad \forall i \geq q + 1$ siendo $C_{q,1} = \rho_q$; además, si $Y_t \sim \text{AR}(p)$ entonces $C_{i,1} = 0 \quad \forall i \geq p + 1$ donde $(-1)^{i-1} C_{1,i} / C_{0,i}$ representa los coeficientes de autocorrelación parcial. Por tanto, las técnicas standard utilizadas para la identificación de procesos AR o MA puros son casos especiales del método corner.

En Mareschal y Mélard (1988) se presenta un algoritmo para la computación del método corner. Este algoritmo que introducen resulta eficiente en términos del número de operaciones para el cálculo directo de los elementos de la tabla \hat{C} y de pequeños requerimientos de almacenaje a través del uso de relaciones de recurrencia. Además, frente a la representación tabular inicial en forma rectangular para los $\hat{C}_{i,j}$ proponen la utilización de una representación en forma triangular, definida por los (i, j) tales que $i + j \leq k$, que permite la consideración de modelos ARMA, AR y MA puros de órdenes elevados.

A su vez, la tabla corner puede ser representada por las tres funciones $\{\theta(k,i)\}, \{\lambda(k,i)\}, \{\eta(k,i)\}$ $k = 1, 2, \dots; i = 0, 1, 2, \dots$, propuestas por Choi (1992) en base a las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}C_{k+1,i+1} &= (-1)^k \theta(k,i) C_{k,i} \\C_{k+1,i} &= \lambda(k,i) C_{k,i} \\C_{k+1,i-1} &= (-1)^k \eta(k,i) C_{k,i}\end{aligned}$$

Tal y como señalan algunos autores, entre ellos, Piccolo y Tunnicliffe-Wilson (1984), el método corner está estrechamente relacionado con el método de Gray et al (1978) y con el de Glasbey (1982).

En conclusión, según Mareschal y Mélard (1988) "el método corner no es sólo más simple de utilizar sino que además proporciona resultados asintóticos generales; así mismo, resulta también más difícil para los otros métodos citados realizar una selección automática de modelos que para el método corner". Además, " ...este método es más rápido y posiblemente más exacto que el método de la función de autocorrelación muestral extendida de Tsay y Tiao (1984), que aunque posee la ventaja frente al método corner de trabajar con series no estacionarias requiere, no obstante, mayores cálculos y proporciona límites estadísticos muy estrictos".

Por otra parte, "... los desarrollos en los procedimientos de decisión multicriterio han permitido a su vez explotar las ventajas de los métodos más recientes en la identificación de modelos y, en especial, del método corner" (Mareschal, 1986).

Siguiendo esta clasificación resulta también posible abordar el problema de la identificación dinámica en modelos ARMA univariantes en términos de algoritmos relacionados con aproximaciones de tipo racional.

En concreto, el ε -algoritmo también relacionado con la aproximación de Padé es un algoritmo iterativo debido a Wynn (1956), que ha sido propuesto por Berlnet (1981, 1984) para la identificación de modelos ARMA univariantes y multivariantes. Este método de caracterización se define como sigue:

Sea $\rho = (\rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de números reales, entonces

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \varepsilon_{-1}^n(\rho) = 0 \text{ y } \varepsilon_0^n(\rho) = \rho_n$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z} \quad \varepsilon_{k+1}^n(\rho) = \varepsilon_{k-1}^{n+1}(\rho) + [\varepsilon_k^{n+1}(\rho) - \varepsilon_k^n(\rho)]^{-1}$$

Este procedimiento iterativo permite efectuar el cálculo de los elementos ε_k^n , cuya disposición en forma tabular permite obtener la denominada **tabla- ε** .

Existe una relación además con el método corner que se traduce en que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon_{2k}^n(\rho) = (-1)^k \frac{C_{n+k,k+1}}{C_{n+k-1,k}^2}$$

De esta forma, y basándonos en la caracterización corner se puede obtener la siguiente caracterización (Berlnet, 1984):

El proceso Y_t admite una representación minimal ARMA (p, q) si y sólo si p y q son los enteros más pequeños tales que:

$$\varepsilon_{2p}^n(\rho) = 0 \quad \forall n > q - p$$

$$\varepsilon_{2p}^{q-p}(\rho) \neq 0$$

Además, para un proceso minimal ARMA (p, q) se tiene que:

$$\varepsilon_{2(p-1)}^n(\rho) \neq 0 \quad \forall n \geq q - p + 1$$

$$\varepsilon_{2k}^{q-k}(\rho) \neq 0 \quad \forall k \geq p - 1$$

$$\varepsilon_{2k}^n(\rho) = 0 \quad \forall k \geq p \text{ y } \forall n > q - k$$

Estas condiciones se traducen en la aparición en la tabla- ε , de una estructura característica análoga a la que presenta la tabla corner.

Por último, el **ω - algoritmo** constituye otro procedimiento de caracterización dinámica de un proceso ARMA. Este algoritmo, introducido por Wynn (1956), está estrechamente vinculado con el método de Glasbey (1982). De esta forma, los elementos ω_{ij} se relacionan con los determinantes de Hankel a través de la expresión (Berlinet y Francq, 1994):

$$\omega_{ij} = (-1)^i \frac{\hat{C}_{j+1,i+1}}{\hat{C}_{j+2,i}}$$

Esta relación proporciona una forma de computar los elementos ω_{ij} ($i = 0, \dots, k - 2; j = 0, \dots, k - 1$) que, dispuestos en forma tabular, permiten obtener una caracterización de los grados del modelo ARMA.

En conclusión, el estudio de estos últimos métodos pone de manifiesto la validez de la aproximación de Padé para abordar el tratamiento de la identificación dinámica en el contexto de los modelos de series temporales. En concreto, estos procedimientos de caracterización resultan de especial interés, tal y como se ha mencionado al principio, en el estudio de la identificación de los órdenes polinomiales en un modelo FT.

En este sentido, el *método corner*, inicialmente propuesto en la identificación de modelos ARMA univariantes, ha sido extendido por Liu y Hanssens (1982) a la identificación de un modelo FT con múltiples inputs²³.

Una extensión del método corner para procesos multivariantes, esto es, para un proceso Y_t k -dimensional ARMA (p,q) estacionario se encuentra en Huybrechts (1982). De igual forma, ideas que subyacen en esta metodología se encuentran en Tiao y Tsay (1989) y Francq (1989).

Así mismo, el ε -*algoritmo* permite abordar también el problema de la identificación dinámica en otro tipo de modelos. En particular, este procedimiento ha sido estudiado por González y Cano (1990a,b) para la determinación de un modelo FT con un solo input y extendido al caso de múltiples inputs por González et al (1993, 1995).

Ahora bien, tal y como recoge la bibliografía existente al respecto, los desarrollos que han tenido lugar en la modelización dinámica de series temporales y, especialmente, en modelos FT se han centrado a nivel univariante y multivariante en el estudio de series causales, esto es, series en las que el comportamiento futuro de una variable se supone viene determinado no sólo por su evolución presente y pasada sino también por el de las correspondientes variables explicativas.

Estos planteamientos que se hacen desde el punto de vista de la modelización económica entre series temporales, conducen con frecuencia a formulaciones que son plenamente válidas desde la perspectiva de ajuste a los datos disponibles; sin embargo, este tipo de modelización en términos de la formulación de modelos

²³En este contexto cabe también citar, entre otros, los trabajos de Tsay (1985), Lii (1985) y Claverie et al (1990).

causales no siempre ofrece buenas propiedades en términos de su capacidad predictiva. Este hecho es particularmente cierto cuando se dispone de series temporales sujetas a comportamientos estructuralmente diferentes en el tiempo para un período considerado.

En consecuencia, resulta entonces plausible la consideración de un marco dinámico más amplio donde incorporar las predicciones que para las variables explicativas relevantes en el modelo ofrece la teoría económica.

Esta nueva consideración dinámica de la realidad económica permite introducir la posibilidad de estudiar el comportamiento de una variable en función de la información contenida no sólo en la evolución presente y pasada de otras variables explicativas, sino también en función de la información futura deducible a partir de la evolución de las mismas y/o del conocimiento a priori de su comportamiento estructural.

Precisamente, esta posibilidad que se establece con los modelos no causales de articular la evolución futura a priori conocida de una variable, con la metodología hasta ahora propuesta en la identificación de relaciones dinámicas, va a proporcionar un conocimiento más amplio de la realidad evolutiva que se pretende recoger o aproximar.

Bajo este punto de vista y tomando como marco de referencia el modelo FT, nos proponemos abordar la generalización de los supuestos contenidos en la especificación clásica del mismo.

La base metodológica que subyace en esta propuesta es la generalización del tratamiento de la aproximación de Padé para series formales de potencias, esto es, la aproximación local de funciones analíticas al estudio de series doblemente infinitas. De esta forma, se constata la validez de la aproximación de Padé en la

modelización racional de relaciones dinámicas desde una consideración evolutiva más general.

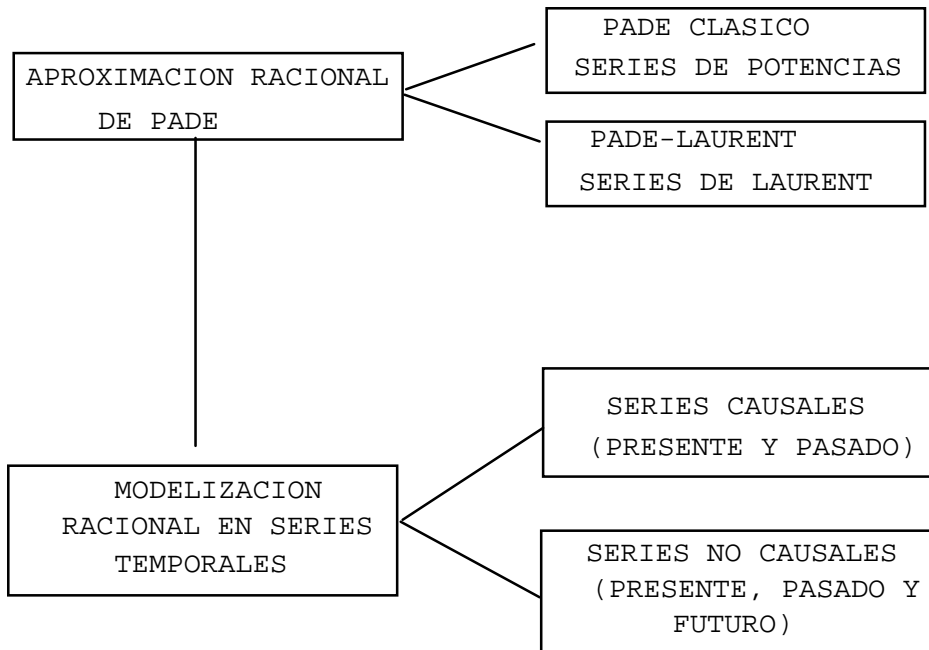
Paralelamente, dentro del estudio de la representación de una serie temporal discreta evaluada en todo Z mediante modelos de orden finito, **la aproximación de Padé-Laurent** (Bultheel, 1987), como variante de la aproximación clásica, se configura así mismo como una alternativa útil en la modelización racional a través de la aproximación de dos funciones analíticas que representan las dos direcciones en el tiempo de una serie formal de Laurent.

Con esta nueva perspectiva que se introduce en la metodología de series temporales no sólo se recoge la consideración de una formulación dinámica más amplia en la especificación del modelo FT sino que además, el tratamiento de la aproximación de Padé en relación con el estudio de series formales de Laurent, va a permitir extender los procedimientos habituales de identificación hasta ahora propuestos en este tipo de modelos.

Por tanto, teniendo en cuenta la importancia que la consideración de la aproximación de Padé y de sus propiedades juega en el tratamiento de las relaciones dinámicas, abordamos a continuación su papel en el contexto de la identificación de los órdenes polinomiales en una formulación causal del modelo FT. Esta consideración permitirá no sólo clarificar el origen común y la vinculación existente entre los diversos procedimientos hasta ahora propuestos para su identificación, sino que va a sentar precisamente las bases de una nueva propuesta metodológica con la que abordar la generalización de los supuestos tradicionales contenidos en este tipo de formulaciones y con ello extender los métodos de identificación hasta ahora propuestos.

A título ilustrativo, a continuación presentamos un esquema que refleja la vinculación y relación existente entre los dos campos de estudio que en este

trabajo se abordan, esto es, la aproximación racional de Padé y la modelización de series temporales:



CAPÍTULO 2

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ EN LA DETERMINACIÓN DE UN MODELO DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS

INTRODUCCION

El carácter a menudo discreto de los datos que manejamos junto con la existencia de errores inherentes a los datos o errores de redondeo hace que, frente a la utopía de una evaluación científica, se imponga con frecuencia el pragmatismo de un cálculo aproximado, incluso para funciones matemáticas precisas (elementales o no).

Dentro de la Matemática Aplicada, la parte fundamental del Análisis Numérico se centra en la solución de problemas matemáticos por procedimientos aritméticos, esto es, en aproximar cantidades no aritméticas por cantidades que sí lo son y en establecer los errores asociados con tales aproximaciones.

Precisamente, gran parte de la aproximación que se hace consiste en aproximar una función $f(z)$ por alguna combinación lineal de funciones partiendo de una clase particular de ellas. Por tanto, en una situación determinada existirán generalmente diversos métodos posibles para obtener la aproximación deseada, por lo que la elección del método va a depender del criterio o criterios que se utilicen para juzgar o calificar de eficaz a una aproximación dada.

Además, teniendo en cuenta que una consideración importante para la elección de un método es el poder estimar o acotar el error cometido al realizar una aproximación, sólo cuando se disponga de métodos en los que sea posible estimar o acotar dicho error, podremos tratar de compararlos basándonos en la magnitud de los errores a que conducen.

En este sentido, y dentro de las investigaciones matemáticas, las aproximaciones polinómicas y, sobre todo, el estudio de aproximaciones racionales ocupan un puesto de excepción y de indudable actualidad.

En concreto, dado que los polinomios son las funciones más fáciles de evaluar, de derivar e integrar, podría ser “conveniente”, de forma general, realizar una aproximación de una función real $f(z)$ considerando una clase de funciones $\{g_n(z)\}$ donde $g_n(z)$ es un polinomio de grado n de tal forma que

$$f(z) \cong a_0 g_0(z) + a_1 g_1(z) + \dots + a_n g_n(z)$$

con a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) constantes apropiadas.

Aunque es posible también encontrar, en casos particulares, otro tipo o clase de funciones que conducen a aproximaciones útiles, como es el caso de las funciones exponenciales, la aproximación polinómica se ha convertido en herramienta básica para la interpolación, ajuste y aproximación de funciones, rivalizando sólo en importancia con las aproximaciones trigonométricas o de Fourier, de uso también frecuente por su aplicabilidad general.

No obstante, el empleo de los polinomios de Taylor como casos particulares de polinomios aproximantes de grado n determinados por $n+1$ puntos infinitamente próximos, adolece de que su bondad no se mantiene a lo largo del campo de convergencia, siendo mucho mejor en las proximidades del punto central en torno al que se desarrolla que cerca de los extremos.

Por otro lado, el estudio de aproximaciones racionales a funciones de variable compleja constituye un núcleo esencial en las investigaciones matemáticas. En efecto, el uso de funciones racionales como base para la aproximación de funciones matemáticas precisas ha venido a enriquecer claramente las posibilidades que ésta tiene, al tiempo que ha permitido mejorar la

precisión y la amplitud del campo de aplicación que la aproximación en términos generales tiene.

Siguiendo esta línea, es posible entonces hacer un uso extensivo de aproximaciones de tipo racional a una función $f(z)$ en la forma

$$f(z) \cong \frac{a_0 g_0(z) + a_1 g_1(z) + \dots + a_n g_n(z)}{b_0 g_0(z) + b_1 g_1(z) + \dots + b_n g_n(z)}$$

Muchos de los problemas de la Física Cuántica y de la Física Matemática se han beneficiado de este género de aproximaciones racionales. Precisamente, en este ámbito de aplicaciones la técnica de los **aproximantes de Padé** (Padé, 1892), como tipo especial de aproximación racional al valor de una función, se ha revelado, tal y como se ha puesto de manifiesto anteriormente, como una herramienta de manifiesta utilidad en el tratamiento de series numéricas y de su comportamiento asintótico. Además, las investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de series temporales se han visto gratamente estimuladas por el papel que esta técnica y sus propiedades tienen en la identificación de la estructura de relación dinámica entre variables.

Así, dentro del proceso de modelización dinámica, esta técnica permite caracterizar métodos computacionalmente sencillos con los que abordar la identificación de modelos ARMA univariantes y multivariantes. En concreto, esta técnica se configura como una herramienta valiosa para el estudio de la identificación dinámica en el marco de los **modelos de Función de Transferencia (FT)**, en tanto que constituye el soporte metodológico de numerosas propuestas de caracterización dinámica existentes en la literatura econométrica para el estudio de estos modelos.

Por esta razón presentamos a continuación, en una primera parte, la aproximación de funciones analíticas en un punto, esto es, la aproximación de Padé en relación con el estudio de series formales de potencias, y que

denominamos **caso clásico**, resaltando sus propiedades y aquellos aspectos más relevantes de la misma. La realización de esta aproximación teórica al estudio de los aproximantes de Padé permitirá presentar de una forma sencilla, en una segunda parte, el estudio de la identificación dinámica en un modelo FT clásico, esto es, en un contexto dinámico causal, al tiempo que permitirá poner de manifiesto el nexo y origen común existente entre los diversos procedimientos de identificación hasta ahora propuestos para este tipo de modelos (Lii, 1985; Paesmans, 1988; Claverie et al, 1990; Berlinet y Francq, 1994; ...).

1.- LA APROXIMACION DE PADE (AP) A SERIES FORMALES DE POTENCIAS

1.1.- DEFINICION Y PROPIEDADES

La mayor parte de las referencias bibliográficas que podemos encontrar en relación con la aproximación de Padé y tópicos relacionados, trata el problema de aproximación para funciones analíticas en un punto o, como diríamos en términos algebraicos, la aproximación de series formales de potencias.

Definición¹.- Dado un desarrollo formal en serie de potencias $\sum_0^{\infty} c_i z^i$ que representa formalmente una función de variable compleja $F(z)$, se denomina *aproximante de Padé (AP)* $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ ($J, M \geq 0$) para $F(z)$ a la función racional $P_J(z)/Q_M(z)$ finita en $z = 0$ y dada por:

$$\left[\frac{J}{M} \right]_F \equiv \frac{P_J(z)}{Q_M(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_J z^J}{q_0 + q_1 z + \dots + q_M z^M} \quad (2.1)$$

¹ (Baker y Graves Morris, vol I, 1981)

donde $P_J(z)$ y $Q_M(z)$ son polinomios de grados exactamente J y M respectivamente, de forma que el desarrollo de Taylor centrado en $z=0$ de esta función racional es tal que sus $J+M+1$ primeros coeficientes son c_0, c_1, \dots, c_{J+M} , esto es,

$$F(z) - \frac{P_J(z)}{Q_M(z)} = O_+(z^{J+M+1}) \quad (2.2)$$

donde denotamos O_+ el orden de aproximación alcanzado en potencias crecientes de z .

Esto es, el desarrollo formal del aproximante $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ en términos crecientes de z es $\sum_0^{\infty} \phi_i z^i$ donde $\phi_i = c_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N$ para cierto $N \geq J+M$.

Nótese que en el caso de que en el aproximante $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ el valor de M sea cero, la aproximación es justamente el polinomio de Taylor para $F(z)$.

A partir de ahora estará implícita la hipótesis de que la serie de Taylor para $F(z)$ existe en un entorno de $z=0$. Son dos las razones para esta elección arbitraria de $z=0$:

- a) Las manipulaciones son sustancialmente más simples que para otro valor de z .
- b) El intervalo sobre el que se desea aproximar la función contendrá al cero; si no es así, un simple cambio de variable hará que lo contenga.

El comportamiento finito de $\left[\frac{J}{M}\right]_F$ en $z=0$ permite elegir el denominador de $Q_M(z)$ tal que $Q_M(0) = 1$. Esta consideración se hace en base a que:

a) El coeficiente independiente o término constante en el denominador no puede ser cero si el aproximante existe en $z = 0$.

b) El valor de $\left[\frac{J}{M}\right]_F$ es invariable si numerador y denominador están divididos por la misma constante.

Si exigimos que $P_J(z)$ y $Q_M(z)$ no tengan factores comunes, tendremos $J+1$ coeficientes independientes en el numerador y M coeficientes independientes en el denominador. Por tanto, estos $J+M+1$ coeficientes desconocidos sugieren que el AP $\left[\frac{J}{M}\right]_F$ debe aproximar la serie $\sum_0^{\infty} c_i z^i$ a través de los órdenes $1, z, z^2, \dots, z^{J+M}$.

Así, cuando la serie de potencias $F(z)$ converge en algún entorno de $z=0$ a una función, la condición dada en (2.2) equivale formalmente a:

$$\sum_0^{\infty} c_i z^i = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_J z^J}{q_0 + q_1 z + \dots + q_M z^M} + O_+(z^{J+M+1})$$

Multiplicando la expresión (2.2) por $Q_M(z)$ se tiene que:

$$(q_0 + q_1 z + \dots + q_M z^M)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) - (p_0 + p_1 z + \dots + p_J z^J) = O_+(z^{J+M+1}) \quad (2.3)$$

A partir de esta formulación pueden obtenerse en forma linealizada las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= p_0 \\
 c_1 + c_0 q_1 &= p_1 \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 c_J + c_{J-1} q_1 + \dots + c_{J-M} q_M &= p_J \\
 c_{J+1} + c_J q_1 + \dots + c_{J-M+1} q_M &= 0 \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 c_{J+M} + c_{J+M-1} q_1 + \dots + c_J q_M &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde definimos $c_j \equiv 0$ si $j < 0$ y $q_j \equiv 0$ si $j > M$.

A través de este conjunto de ecuaciones denominadas **ecuaciones de Padé** se determinan los coeficientes del numerador y denominador del AP y se construye

el aproximante $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ a $F(z)$ hasta el orden z^{J+M} .

Por tanto, las relaciones de definición del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k &= r_j, \quad j = 0, 1, \dots, J + M \\
 r_j &= p_j, \quad j \leq J; \quad r_j = 0, \quad j > J
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Estas ecuaciones para $j = 0, 1, \dots, J + M$ determinan los coeficientes del denominador q_k ($k = 1, \dots, M$) y del numerador p_k ($k = 0, 1, \dots, J$).

En efecto, para $j = J + 1, \dots, J + M$ se obtiene un conjunto de M ecuaciones lineales para los M coeficientes desconocidos del denominador:

$$\begin{pmatrix} c_{J-M+1} & c_{J-M+2} & \cdots & c_J \\ c_{J-M+2} & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_J & \cdot & \cdots & c_{J+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_M \\ \vdots \\ q_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{J+1} \\ \vdots \\ c_{J+M} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

donde, por consistencia, definimos $c_j \equiv 0$ si $j < 0$ y elegimos como criterio de normalización $q_0 = 1$, a fin de garantizar la existencia y unicidad del aproximante.

Una vez calculados los coeficientes $q_k (k = 0, 1, \dots, M)$ para $j = J+1, \dots, J+M$, se determinan directamente los coeficientes del numerador:

$$\begin{aligned} c_0 &= p_0 \\ c_1 + c_0 q_1 &= p_1 \\ &\dots \\ &\dots \\ c_J + \sum_{i=1}^{\min(J,M)} q_i c_{J-i} &= p_J \end{aligned} \quad (2.7)$$

Asumiendo que los AP pueden calcularse directamente a partir de (2.6) y (2.7) podemos, a través de la regla de Cramer, calcular el denominador de (2.1) y, sacando factor común, definir:

$$Q_M^{[J/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{J-M+1} & c_{J-M+2} & \cdots & c_J & c_{J+1} \\ c_{J-M+2} & c_{J-M+3} & \cdots & c_{J+1} & c_{J+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_J & c_{J+1} & \cdots & c_{J+M-1} & c_{J+M} \\ z^M & z^{M-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta que:

$$Q_M^{[J/M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \begin{vmatrix} c_{J-M+1} & c_{J-M+2} & \cdots & c_J & c_{J+1} \\ c_{J-M+2} & c_{J-M+3} & \cdots & c_{J+1} & c_{J+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_J & c_{J+1} & \cdots & c_{J+M-1} & c_{J+M} \\ z^M & z^{M-1} & \cdots & z & 1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+1} & \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \end{vmatrix}$$

y que cada elemento de la última fila puede descomponerse como:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+j} = \sum_{i=0}^{J-j} c_i z^{i+j} + \sum_{i=J-j+1}^{J+M-j} c_i z^{i+j} + \sum_{i=J+M-j+1}^{\infty} c_i z^{i+j} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, M$$

se tiene que, operando de la siguiente forma, esto es, restando z^{J+1} veces la primera fila de la última, z^{J+2} la segunda fila de la última y así sucesivamente, hasta z^{J+M} veces la penúltima fila de la última, podemos definir:

$$P_J^{[J/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{J-M+1} & c_{J-M+2} & \cdots & c_{J+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_J & c_{J+1} & \cdots & c_{J+M} \\ \sum_{i=0}^{J-M} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{J-M+1} c_i z^{M+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^J c_i z^i \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

donde $c_j \equiv 0$ si $j < 0$ y $c_j \equiv 0$ si $j > M$. Además, si el índice inferior en una suma excede al superior, la suma es sustituida por cero.

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 Q_M^{[J/M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P_J^{[J/M]} &= \begin{vmatrix} c_{J-M+1} & \cdots & c_J & c_{J+1} \\ c_{J-M+2} & \cdots & c_{J+1} & c_{J+2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_J & \cdots & c_{J+M-1} & c_{J+M} \\ \sum_{i=J+1}^{\infty} c_i z^{i+M} & \cdots & \sum_{i=J+M}^{\infty} c_i z^{i+1} & \sum_{i=J+M+1}^{\infty} c_i z^i \end{vmatrix} = \\
 = \sum_{i=1}^{\infty} z^{J+M+i} &\begin{vmatrix} c_{J-M+1} & c_{J-M+2} & \cdots & c_J & c_{J+1} \\ c_{J-M+2} & c_{J-M+3} & \cdots & c_{J+1} & c_{J+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_J & c_{J+1} & \cdots & c_{J+M-1} & c_{J+M} \\ c_{J+i} & c_{J+i+1} & \cdots & c_{J+M+i-1} & c_{J+M+i} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Con las definiciones (2.8) y (2.9) concluimos que:

$$Q_M^{[J/M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P_J^{[J/M]}(z) = O_+(z^{J+M+1})$$

A tal efecto, consideremos:

$$Q_M^{[J/M]}(0) \equiv C_{J,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_{J-M+1} & c_{J-M+2} & \cdots & c_J \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J-1} & c_J & \cdots & c_{J+M-2} \\ c_J & c_{J+1} & \cdots & c_{J+M-1} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

siendo éste el denominado determinante de Hankel por la manera sistemática en la cual se forman sus filas a partir de los coeficientes de la serie.

Nótese que si $Q_M^{[J/M]}(0)=0$, esto es, $C_{J,M} = 0$, entonces el AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ en sentido estricto no existe, bien porque no se puede calcular debido a que el sistema (2.6) es incompatible o bien porque tiene infinitas soluciones y el AP es reducible a un AP de orden menor.

Para esta situación en la cual:

$$F(z) \neq \frac{P_J(z)}{Q_M(z)} + O_+(z^{J+M+1})$$

Padé define un "índice de deficiencia" w_{JM} que es el menor entero para el cual

$$F(z) = \frac{P_J(z)}{Q_M(z)} + O_+(z^{J+M-w_{JM}+1})$$

y donde w_{JM} es una medida del error de aproximación. Ahora bien, en tales circunstancias y en términos más sencillos, diremos que la función racional $P_J(z)/Q_M(z)$ no aproxima a la función $F(z)$ a través del orden $J+M$ y que, por tanto, el AP no existe.

Obsérvese que esta idea está en línea con lo que sostiene la teoría general de la interpolación racional acerca de la inconsistencia en la especificación de valores de la función $F(z)$ en ciertos puntos z_i en los cuales, en consecuencia, las interpolaciones no existen.

Ahora bien, si $Q_M^{[J/M]}(0) \neq 0$, esto es, $C_{J,M} \neq 0$, las ecuaciones lineales dadas en (2.5) para $j = J+1, \dots, J+M$ son no singulares y la solución dada por (2.8) es única, pudiendo escribir:

$$\sum_0^\infty c_i z^i - \frac{P_J^{[J/M]}(z)}{Q_M^{[J/M]}(z)} = O_+(z^{J+M+1})$$

Estos aspectos en torno a la preocupación por determinar la existencia de aproximación racional a una función han sido abordados por diferentes autores, incluso antecesores de Padé. En concreto, un resultado dado por Jacobi se puede reescribir en términos de AP (Baker y Graves-Morris, 1981) como:

Teorema .- A partir de las definiciones dadas en (2.8) y (2.9) se tiene que:

$$\text{El AP } \left[\frac{J}{M} \right]_F \text{ de } \sum_0^\infty c_i z^i \text{ está dado por } \left[\frac{J}{M} \right]_F = \frac{P_J^{[J/M]}(z)}{Q_M^{[J/M]}(z)} \text{ con } Q_M^{[J/M]}(0) \neq 0.$$

Esto es, el AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ estará bien definido, si y sólo si, $C_{J,M} \neq 0$.

Ahora bien, por el Teorema de la unicidad² debido a Frobenius y a Padé se garantiza que si existe el AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ a una serie formal de potencias $F(z)$, éste estará únicamente determinado.

Partiendo de la definición de AP debida a Padé-Frobenius, en Baker (1975) se da una redefinición del mismo en los siguientes términos³:

Dados dos polinomios $A^{[J/M]}(z)$ y $B^{[J/M]}(z)$ de grados J y M respectivamente, si verifican que:

$$A^{[J/M]}(z) - B^{[J/M]}(z) \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = O_+(z^{J+M+1})$$

con $B^{[J/M]}(0) = 1$ definimos:

$$\left[\frac{J}{M} \right]_F = \frac{A^{[J/M]}(z)}{B^{[J/M]}(z)}$$

Sin embargo, esta definición no aporta nada esencialmente nuevo ya que los polinomios de Jacobi se pueden transformar en los que define Baker, esto es,

$$\left[\frac{J}{M} \right]_F = \frac{P^{[J/M]}(z)}{Q^{[J/M]}(z)} = \frac{P^{[J/M]}(z)}{Q^{[J/M]}(0)} = \frac{A^{[J/M]}(z)}{B^{[J/M]}(z)}$$

²Ver Baker (1975).

³Según la definición clásica debida a Frobenius y Padé resulta siempre posible encontrar una función racional -históricamente conocida como AP- que verifique la formulación linealizada dada en (2.3); ahora bien, esta condición no garantiza que exista el AP en los términos dados según la definición (2.2).

y además $B^{[J/M]}(0) = \frac{Q^{[J/M]}(0)}{Q^{[J/M]}(0)} = 1$.

1.2.- METODOS PARA LA REPRESENTACION RACIONAL DE UNA SERIE FORMAL DE POTENCIAS

1.2.1.- La Tabla C: Estructura y formación de bloques

La disposición en forma tabular de los determinantes de Hankel $C_{j,m}$ ($j, m = 0, 1, 2, \dots$) asociados a la serie de potencias $F(z) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$ ($c_0 \neq 0$) permite obtener una tabla infinita de doble entrada $C \equiv (C_{j,m})_{j,m=0}^{\infty}$ denominada **tabla C**, cuya estructura viene dada por:

m	0	1	2	3	...
j					
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	$C_{0,3}$...
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$
3	$C_{3,0}$
...

En concreto, esta tabla presenta el siguiente algoritmo de construcción:

$C_{j,0} = 1$, esto es, la primera columna de la tabla es por definición 1.

$C_{j,1} = c_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), esto es, la segunda columna viene dada por los coeficientes de la serie.

$$C_{o,m} = (-1)^{m(m-1)/2} c_0^m.$$

Por tanto, los bordes izquierdo y superior de la tabla C serán distintos de cero.

Tomando como referencia el Teorema de Sylvester⁴, podemos obtener un corolario que establece una relación de recursión entre los elementos de la tabla C; de esta forma, la mayor parte de los elementos pueden calcularse a partir de la identidad:

$$C_{j,m+1}C_{j,m-1} = C_{j+1,m}C_{j-1,m} - (C_{j,m})^2$$

Esta identidad, que se denomina "identidad de la estrella" porque relaciona

los determinantes siguiendo el patrón $\begin{pmatrix} * & & \\ * & * & * \\ & * & \end{pmatrix}$, establece que la diferencia de

los productos de los extremos opuestos es igual al cuadrado del valor central. En este sentido, la siguiente figura ilustra la posición de los elementos en la tabla C:

		$C_{j,m-1}$		
	$C_{j-1,m}$	$C_{j,m}$	$C_{j+1,m}$	
		$C_{j,m+1}$		

Se dice que la serie formal de potencias $F(z)$ es **normal** si todos los elementos de la tabla $C_{j,m}$ ($j, m = 0, 1, 2, \dots$) son distintos de cero. Ahora bien, en el caso de no normalidad de la serie, esto es, que las ecuaciones (2.6) que determinan los coeficientes en el denominador del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ no sean compatibles determinadas,

⁴Ver Baker (1975).

la tabla C presentará una estructura de bloques cuadrados, formados por valores nulos, rodeados por elementos no nulos:

j	m	0	1	2	3	4	...
0		1	c_0	x	x	x	...
1		1	c_1	x	x	x	...
2		1	c_2	0	0	x	...
3		1	c_3	0	0	x	...
4		1	c_4	x	x	x	...
...	

Esta estructura de bloques en la tabla C⁵ es formalizada en el siguiente teorema:

Teorema (Baker, 1975).- Los elementos nulos en la tabla C asociada a una serie formal de potencias $F(z) = c_0 + \sum_1^{\infty} c_i z^i$ ($c_0 \neq 0$) se sitúan en bloques cuadrados bordeados por elementos no nulos.

Este resultado quedaría reflejado como se muestra a continuación para un bloque hipotético de la tabla C:

⁵Para mayor detalle sobre la construcción de bloques cuadrados ver Baker y Graves-Morris (1981).

\neq	\neq	\neq	\neq	\neq
\neq	0	0	0	\neq
\neq	0	0	0	\neq
\neq	0	0	0	\neq
\neq	\neq	\neq	\neq	\neq

1.2.2.- La Tabla de Padé: Estructura y formación de bloques

Fue Padé (1892) el primero en enfatizar la importancia de disponer los aproximantes de Padé en forma tabular en lo que se ha denominado **tabla de Padé**, con el objetivo de estudiar la estructura de la misma, esto es,

m	0	1	2	3	...
j					
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	[3/0]	...
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	[3/1]	...
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	[3/2]	...
3	[0/3]	[1/3]	[2/3]	[3/3]	...
...

Obsérvese que las sumas parciales del desarrollo de Taylor de la función $F(z)$ ocupan la primera fila de la tabla de Padé.

Aunque es ésta la presentación original de la tabla, en Baker y Graves-Morris (1981) y otros autores se presenta en forma traspuesta. En cualquier caso, la estructura de la misma y sus propiedades permanecen inalteradas.

La principal característica de esta tabla viene dada, en el caso de no normalidad de la serie $F(z)$, por la aparición de una estructura de bloques singulares que reproduce el comportamiento de la correspondiente tabla C asociada, tal y como se refleja en el siguiente resultado:

Teorema (Padé, 1892)⁶.- La tabla de Padé puede ser seccionada en bloques de tamaño $h \times h$ con lados horizontales y verticales siendo $h \geq 1$. Sea $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ el elemento minimal único ($J + M = \text{mínimo}$) de un bloque $h \times h$, entonces:

(1) El aproximante $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ existe y el numerador y el denominador son de grados mínimos.

$$(2) \left[\frac{J+j}{M+m} \right]_F = \left[\frac{J}{M} \right]_F, \quad j+m \leq h-1, j \geq 0, m \geq 0.$$

$$(3) \left[\frac{J+j}{M+m} \right]_F \text{ no existen para } j+m \geq h; h-1 \geq j \geq 1; h-1 \geq m \geq 1.$$

⁶ La demostración de este teorema puede, también, encontrarse en Baker (1975).

$$(4) \quad C_{J+j, M+m} = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq h-1, 1 \leq m \leq h-1$$

$$C_{J, M+m} \neq 0, C_{J+h, M+m} \neq 0 \quad \text{para } 0 \leq m \leq h$$

$$C_{J+j, M} \neq 0, C_{J+j, M+h} \neq 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq h$$

Por tanto, considerando un bloque de ceros de tamaño $(h-1) \times (h-1)$ en la tabla C, tendremos un bloque $h \times h$ en la tabla de Padé para el cual se verifica que:

- Todos los AP por encima de la antidiagonal serán reducibles a la misma forma irreducible del elemento superior izquierdo del bloque.

- Por debajo de la antidiagonal no existen los AP de acuerdo con la definición (2.2) ya que sólo serán *formas de Padé*, esto es, que resuelven la formulación linealizada del problema de AP dada en (2.3) sin la restricción de que el término independiente en el denominador sea distinto de cero.

En consecuencia, el AP $\left[\frac{J+j}{M+m} \right]_F \equiv \left[\frac{J}{M} \right]_F$ se determinará a través de las

ecuaciones de Padé dadas en (2.5) para $j+m \leq h-1$.

Como se muestra a continuación, esta relación existente entre ambas tablas puede reflejarse gráficamente para un bloque hipotético de tamaño 3×3 en la tabla C y su correspondiente bloque de tamaño 4×4 en la tabla de Padé:

$C_{J,M}$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
$\neq 0$	0	0	0
$\neq 0$	0	0	0
$\neq 0$	0	0	0

↔

$\left[\frac{J}{M} \right]$	Red	Red	Red
Red	Con	Con	Inc
Red	Con	Inc	Inc
Red	Inc	Inc	Inc

Red→ Denota un AP con determinante de Hankel no singular, que es reducible a un AP de orden $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$.

Con→ Denota un AP con determinante de Hankel singular, pero determinado por un sistema de ecuaciones compatibles, que también es reducible al AP $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$.

Inc→ El AP $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$ no existe debido a la incompatibilidad de las ecuaciones de Padé.

Es precisamente la correspondencia existente entre ambas tablas sobre la estructura de bloques que surge como consecuencia de la no normalidad de la serie $F(z)$, la clave para su representación mediante un modelo racional.

Teorema (Baker y Graves Morris, vol I, 1981).- Dada una serie formal de potencias $F(z)$ las tres condiciones siguientes son equivalentes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad F(z) &= \frac{\sum_{i=0}^J p_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^M q_i z^i} \\
 2) \quad \left[\begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right]_F &= F(z) \quad \forall j \geq J, \forall m \geq M \\
 3) \quad C_{J,M} &\neq 0; \quad C_{j,m} = 0, \quad \forall j > J, \forall m > M
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

En tal caso, la tabla C presentará una estructura especial con un cuadrado infinito formado por elementos nulos en la esquina inferior derecha de la tabla, siendo $C_{J+1, M+1}$ el denominado *breaking-point* (Lii, 1985) en la literatura econométrica.

Esta estructura racional obtenida para la serie $F(z)$, dada en la condición (1) de la expresión (2.11), es la base para las construcción de modelos racionales, en particular, el llamado **modelo de Función de Transferencia (FT)** (Box y Jenkins, 1976).

Además, estas propiedades permiten la caracterización, dentro de la literatura econométrica, de un método computacionalmente sencillo para la identificación de series temporales, que es precisamente el denominado **método corner**. Este método, propuesto inicialmente por Beguin et al (1980) para la identificación de modelos ARMA, fue propuesto posteriormente por Liu y Hanssens (1982) en la identificación de un modelo FT y puede también encontrarse, entre otros, en Hanssens y Liu, 1983; Tsay, 1985; Lii, 1985 y Claverie et al, 1990.

Ahora bien, aún cuando en la tabla C o, equivalentemente, en el método corner, no sea posible determinar el "breaking-point" de forma clara, es decir, que el elemento $C_{J+1, M+1}$ no pueda ser determinado de forma única⁷, la tabla C puede ser utilizada para encontrar una aproximación racional parsimoniosa o para discriminar entre posibles alternativas de especificación racional, que posteriormente serán sometidas a comprobación.

⁷Piénsese el caso en que los coeficientes c_i son valores aproximados de los coeficientes del desarrollo de una función $F(z)$ desconocida, obtenidos por ejemplo a través de ajuste polinomial de datos.

Es importante tener en cuenta que el cómputo de los AP no garantiza que todas las raíces del polinomio $Q_M(z)$ estén fuera del círculo unidad si M no es el orden correcto para el polinomio del denominador; ahora bien, cuando el orden M elegido sea el adecuado, podemos valernos de otros métodos que aseguren que la condición de estacionariedad se cumple.

En cualquier caso, la computación que se hace de la tabla de Padé puede utilizarse en la estimación de los parámetros del modelo racional identificado que resulta finalmente. Además, las estimaciones que proporciona el cálculo de la tabla de Padé para los parámetros pueden ser utilizadas como valores iniciales consistentes y fiables por métodos más eficientes, generalmente de tipo iterativo no lineales (Lii, 1985).

Si bien el cómputo de la tabla C o de la tabla de Padé permite representar una función a través de un modelo racional, el uso conjunto de ambas tablas proporciona un procedimiento de identificación más completo que su uso aislado. Este método de caracterización, que permite realizar la especificación de la parte determinista del modelo con independencia de cual sea el proceso que sigue el término de perturbación aleatoria, resulta especialmente útil en el estudio de la identificación dinámica del modelo FT.

Ahora bien, en el intento de mejorar en la medida de lo posible los resultados que se obtienen directamente de las propiedades iniciales de AP para la identificación de representaciones racionales de funciones, se dispone en la literatura de algunas alternativas que precisan un estudio más detallado de la teoría de aproximación racional.

En este contexto, se han propuesto diversas alternativas al uso de la tabla C a través de algoritmos teóricamente más “ricos” y que generalmente resultan más sencillos en la práctica, como es el caso del ε -algoritmo (Brezinski, 1980) o que

en ocasiones conllevan mayor cálculo computacional como es el caso del R-S algoritmo (Gray et al, 1978), etc.

De hecho, vamos a referirnos al ϵ -algoritmo (Wynn, 1956), que creemos de utilidad ya que, a pesar de que posee una capacidad análoga a la de la tabla C en la identificación de una función racional, resulta computacionalmente más sencillo que ésta.

1.2.3.- El ϵ -algoritmo

1.2.3.1.- Definición y propiedades

En concreto, el **ϵ -algoritmo** puede ser obtenido a partir de la regla de la cruz entre cinco AP adyacentes⁸ a la función $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ ($c_i, z \in \mathbb{C}$), esto es,

$$\begin{array}{ccc} & \left[\frac{n+k-1}{k} \right]_F(z) & \\ & & \\ \left[\frac{n+k}{k-1} \right]_F(z) & \left[\frac{n+k}{k} \right]_F(z) & \left[\frac{n+k}{k+1} \right]_F(z) \\ & & \\ & \left[\frac{n+k+1}{k} \right]_F(z) & \end{array}$$

Denotando $\epsilon_{2k}^n = \left[\frac{n+k}{k} \right]_F(z)$ para un valor fijo de z , la regla de la cruz queda como:

⁸Ver Brezinski (1980, caps. 2 y 3) para una demostración directa de la regla de la cruz a través de la teoría de polinomios ortogonales.

$$\frac{1}{\epsilon_{2k}^{n+1} - \epsilon_{2k}^n} + \frac{1}{\epsilon_{2k}^{n-1} - \epsilon_{2k}^n} = \frac{1}{\epsilon_{2k+2}^{n-1} - \epsilon_{2k}^n} + \frac{1}{\epsilon_{2k-2}^{n+1} - \epsilon_{2k}^n}$$

de forma que estableciendo ciertas condiciones y definiendo los elementos ϵ_{2k+1}^n de manera adecuada, podemos relacionar los números ϵ_k^n mediante la expresión:

$$\forall k, n \in \mathbf{Z} \quad \epsilon_{k+1}^n = \epsilon_{k-1}^{n+1} + \frac{1}{\epsilon_k^{n+1} - \epsilon_k^n} \quad ; \quad \epsilon_{-1}^n = 0 \quad (2.12)$$

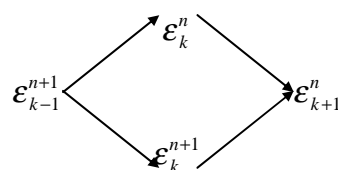
Precisamente, este procedimiento iterativo constituye el ϵ -algoritmo.

1.2.3.2.- La tabla- ϵ : Estructura y formación de bloques

La disposición en forma tabular de los valores ϵ_k^n permite obtener una tabla denominada **tabla- ϵ** , en la cual el índice inferior de cada elemento representa la columna que ése ocupa y el superior denota la diagonal, esto es,

$$\begin{array}{cccc} & & \epsilon_0^{-1} & & \\ & \epsilon_{-1}^0 & & \epsilon_1^{-1} & & \\ & & \epsilon_0^0 & & \epsilon_2^{-1} & \\ \epsilon_{-1}^1 & & & \epsilon_1^0 & & \\ & \epsilon_{-1}^2 & & \epsilon_0^1 & & \epsilon_2^0 \\ & & \epsilon_{-1}^3 & & \epsilon_0^2 & & \vdots \\ & & & \epsilon_{-1}^4 & & \epsilon_0^3 & & \vdots \\ & & & & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Obsérvese que (2.12) relaciona los cuatro elementos situados en los vértices de un rombo, esto es,



de tal forma que la tabla- ε puede ser determinada de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

Tomando en cuenta la relación, a través de la transformación de Shanks⁹, entre los números ε_k^n y los determinantes de Hankel asociados a la sucesión $(c) \equiv (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ¹⁰ bajo las condiciones iniciales:

$$\varepsilon_{-1}^n = 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon_0^n = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se concluye que $\varepsilon_k^n = 0$ si y sólo si el determinante de Hankel $C_{n,k+1}$ asociado a (c_i) es nulo, pudiendo establecer el siguiente resultado:

Teorema.- Dada la serie formal de potencias $F(z)$ las condiciones siguientes son equivalentes:

$$1) F(z) = \frac{\sum_{i=0}^J p_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^M q_i z^i}$$

$$2) \varepsilon_{2M}^{J-M} \neq 0, \quad \varepsilon_{2M}^j = 0, \quad \forall j > J - M$$

Estas propiedades se traducen en la aparición en la tabla- ε asociada a la serie $F(z)$ de una estructura análoga a la que presenta en su caso la tabla C, de tal forma que ε_{2M}^{J-M+1} constituiría el primer elemento nulo del bloque infinito que aparece en la tabla, esto es, lo análogo al denominado breaking-point en la tabla C.

⁹Ver Wynn (1956).

¹⁰Ver Brezinski y Redivo Zaglia (1991).

Ahora bien, es preciso dejar claro que en el caso de que por ejemplo a partir de este tipo de algoritmos no sea posible determinar una función racional exacta, de las propiedades de convergencia para AP podemos obtener representaciones aproximadas mediante sistemas de orden finito, que aproximen lo "mejor" posible al modelo original.

En relación al estudio de propiedades de convergencia, se han desarrollado otros tipos de aproximaciones racionales alternativas a la AP, que resultan también útiles, por su sencillez computacional, en la evaluación aproximada de algunas funciones racionales. En concreto, la utilización de modelos aproximados mediante *aproximantes tipo-Padé* (variante de los AP introducida por Brezinski, 1980) y de *AP multipuntuales* o de *aproximaciones racionales en sentido de mínimos cuadrados o de Tchebyshev* en el plano complejo, así como el estudio de *convergencia en probabilidad*, se plantea como alternativa, en algunos casos, para solucionar los posibles problemas de interpolación y de estabilidad - propiedad fundamental en el campo de aproximación y, en particular, en teoría de sistemas lineales- que presenta la utilización de AP. Este tipo de aproximaciones que, bajo ciertas hipótesis, tratan además de mejorar la bondad del ajuste de manera uniforme en todo el dominio de aplicación, no proporcionan, a diferencia de la utilización de AP, una aproximación única.

2.-DETERMINACION DE MODELOS RACIONALES EN SERIES TEMPORALES: EL MODELO FT CLASICO

2.1.- INTRODUCCION

Tal y como ya se ha constatado, el estudio de la especificación del comportamiento dinámico en el contexto de los modelos de series temporales y, en concreto, en el marco del modelo FT, constituye un tópico de indudable interés que ha tenido un amplio tratamiento en la literatura especializada. En efecto, son numerosas los procedimientos propuestos para el estudio de lo que se considera uno de los problemas básicos en este tipo de modelos, esto es, la identificación de la estructura de relación dinámica entre las variables que intervienen a partir de la información muestral disponible.

En este sentido, las diversas propuestas de identificación existentes para este tipo de modelos se han llevado a cabo en el ámbito de la formulación de modelos causales, esto es, modelos basados en el análisis de datos y que, por tanto, únicamente consideran el comportamiento presente y pasado de las variables relevantes implicadas en un fenómeno concreto.

La utilización de la aproximación clásica de Padé, cuyos aspectos más relevantes en relación con el estudio de series formales de potencias ya han sido analizados, cobra especial relevancia en este ámbito, en tanto que se manifiesta como una herramienta útil para abordar el estudio de la identificación dinámica en una formulación clásica del modelo FT, esto es, en un contexto dinámico en el que se da una estructura correlativa de causalidad unidireccional entre las variables temporales involucradas.

Las propiedades que este tipo de aproximación posee no sólo van a permitir realizar la especificación de la parte determinista del modelo, con total independencia del proceso para el término de perturbación aleatoria, sino que

además van a permitir la caracterización de métodos de identificación, computacionalmente sencillos, dentro del proceso de modelización dinámica. En concreto, el ya mencionado *método corner*, junto con el *ϵ -algoritmo*, que ha sido propuesto por Berlinec (1981, 1984) para la identificación de modelos ARMA univariantes y multivariantes, constituyen dos métodos de caracterización dinámica, estrechamente vinculados con la aproximación de Padé, que en la medida en que se muestran especialmente valiosos para la identificación de los órdenes de un modelo FT, han venido a contribuir y a enriquecer de forma significativa la literatura econométrica existente al respecto.

Por otra parte, el papel que la técnica de los AP desempeña en el proceso de modelización dinámica no sólo contribuye a ampliar el ámbito de la identificación dinámica en modelos ARMA y, en especial, en el modelo FT sino que, al mismo tiempo, va a permitir poner también de manifiesto las limitaciones que en ciertos casos conlleva la formulación de modelos estrictamente causales, desde el punto de vista de la realización de predicciones sobre el comportamiento futuro a corto y/o medio plazo de las variables involucradas

Con tal propósito presentamos a continuación la formalización del modelo FT en su vertiente clásica así como su relación con otro tipo de especificaciones de carácter dinámico utilizadas habitualmente en la literatura econométrica. Seguidamente, partiendo de esta formulación realizamos una **revisión** de las distintas propuestas de caracterización dinámica que se han hecho para este tipo de modelos. Este estudio se completa, por un lado, haciendo especial hincapié en aquellos procedimientos de identificación antes mencionados y que encuentran precisamente su soporte metodológico en la aproximación de Padé y, por otro lado, haciendo una reflexión sobre las limitaciones que en términos predictivos posee en algunos casos la consideración de modelos causales en el contexto de la modelización de series temporales. Finalmente, esta reflexión va a permitir sentar las bases de una **nueva propuesta metodológica** que, en un intento de aproximar la realidad evolutiva de forma más precisa, permita dar respuesta de forma

satisfactoria a los planteamientos y preocupaciones que en términos predictivos suscita la implementación y articulación de medidas de política económica.

2.2.- EL MODELO FT CLASICO: FORMULACION

Este tipo de modelos, frecuente en el análisis de relaciones entre variables en el dominio del tiempo, surge tal y como vimos en el capítulo anterior como caso particular de una especificación dinámica más general de series temporales, esto es, los modelos VARMA o, si se quiere, como generalización de los modelos ARMA univariantes al introducir variables explicativas adicionales como inputs en el modelo.

La formalización en términos generales de un modelo de este tipo para el caso que consideramos aquí de un proceso $Z_t' = (Y_t', X_t')$ con Y_t' unidimensional y X_t' de dimensión $k \geq 1$, se recoge de forma general a través de la siguiente expresión¹¹:

$$Y_t = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij} X_{it-j} + N_t; \quad N_t = \frac{\theta_q(L)\Theta_Q(L^s)}{\phi_p(L)\Phi_P(L^s)(1-L^s)^D(1-L)^d} a_t \quad (2.13)$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

donde $a_t \sim N(0, \sigma^2)$ y $L^j(X_{it}) = X_{it-j}$. En tal caso, el comportamiento de una variable output (dependiente o endógena) Y_t se supone que queda explicado por dos componentes:

*Un componente sistemático, descrito a través de una o más variables inputs (independientes o exógenas) X_{it} ($i = 1, 2, \dots, k$), donde los coeficientes v_{ij} ($j = 0, 1, 2, \dots$) denominados *pesos o ponderaciones de respuesta al impulso*,

¹¹Ver Aznar y Trivez (1993).

recogen la respuesta de la variable endógena Y_t ante variaciones unitarias en las variables exógenas X_{it} .

*Un componente no sistemático, descrito a través de un término de perturbación aleatoria N_t , generado por un proceso estocástico que admite cualquier proceso estacional multiplicativo ARIMA (p,d,q) x ARIMA $(P,D,Q)_s$, representado por los polinomios $\theta_q(L)$, $\phi_p(L)$, $\Theta_Q(L^s)$ y $\Phi_P(L^s)$.

En tal situación, L representa el operador de retardo mientras que $(1-L)^d$ y $(1-L^s)^D$ representan los operadores en diferencias consecutivas y estacional, respectivamente y d, D los correspondientes órdenes de diferenciación.

Una hipótesis básica en la formulación del modelo FT es la consideración de la existencia de una relación dinámica de causalidad unidireccional $X_{it} \rightarrow Y_t$, que viene dada por la combinación de los efectos contemporáneos y desplazados de las variables inputs X_{it} más el componente aleatorio N_t sobre Y_t . Dicho de otra forma, y de acuerdo con la formulación clásica de modelos estrictamente causales, ámbito en el que se encuadra este tipo de especificación dinámica, se asume la no existencia de "feedback" entre output e inputs.

Teniendo en cuenta que $L^j(X_{it}) = X_{it-j}$, una representación más compacta de (2.13) vendría dada por la expresión:

$$Y_t = \sum_{i=1}^k v_i(L) X_{it} + N_t; \quad v_i(L) = v_{i0} + v_{i1}L + v_{i2}L^2 + \dots \quad (2.14)$$

donde $v_i(L)$ constituye la denomina **FT del filtro** o también **Función de Respuesta al Impulso (FRI) del sistema**¹² para cada X_{it} .

¹²Ver Box y Jenkins (1976)

Dada esta especificación, que no es más que un modelo de retardos distribuidos, el problema reside en representar aproximadamente $v_i(L)$ mediante una expresión finita, a partir de la información disponible para las variables output e inputs.

De esta manera, podemos contemplar la expresión (2.14) representada aproximadamente como una expresión racional de la forma:

$$y_t = \sum_{i=1}^k \frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{ir_i}(L)} L^{b_i} x_{it} + \frac{\theta_q(L)\Theta_Q(L^s)}{\varphi_p(L)\Phi_P(L^s)} a_t \quad (2.15)$$

donde y_t y x_{it} son procesos estacionarios, esto es, series transformadas mediante las diferenciaciones regular y/o estacionales pertinentes¹³ siendo

$$\begin{aligned} w_{is_i}(L) &= w_{i0} + w_{i1}L + \dots + w_{is_i}L^{s_i} \\ \delta_{ir_i}(L) &= 1 - \delta_{i1}L - \dots - \delta_{ir_i}L^{r_i} \\ y_t &= (1 - L^s)^{D'} (1 - L)^{d'} Y_t \\ x_{it} &= (1 - L^s)^{D_i} (1 - L)^{d_i} X_{it} \end{aligned}$$

En esta expresión, que es una reformulación más "parsimoniosa" de (2.13) en el sentido de que reduce el número de parámetros que intervienen en la relación dinámica, se supone que todas las raíces del polinomio característico $\delta_{ir_i}(L)$ están fuera del círculo de radio unidad, y que $w_{is_i}(L)$ y $\delta_{ir_i}(L)$ no tienen factores comunes, con lo cual se garantiza la estabilidad del modelo. El factor L^{b_i} representa la posible demora o retraso en la respuesta de la variable output respecto al i -ésimo input.

¹³Si bien el orden de diferenciación $(1 - L^s)^D (1 - L)^d$ para el término de error recae tanto sobre la variable Y_t como sobre las k variables explicativas, en la práctica no deberá cumplirse que todas las variables involucradas requieran el mismo orden de diferenciación.

Sobre esta formulación denominada modelo FT en Box y Jenkins (1976) o modelo racional de retardos distribuidos (Dhrymes, 1971 y Wall, 1976), plantearemos el problema de identificación de los órdenes de los polinomios intervinientes sin entrar en la especificación de la estructura de la perturbación N_t . Esto es, bajo el supuesto de que N_t es ruido blanco, se trata de determinar los valores (s_i, r_i, b_i) que, a partir de los datos muestrales, describan mejor el comportamiento de $v_i(L)$.

Esta expresión podría generalizarse aún más si se considera que el modelo FT contiene parámetros estacionales, esto es,

$$y_t = \sum_{i=1}^k \frac{w_{is_i}(L)\Omega_i(L^{s_i})L^{b_i}}{\delta_{ir_i}(L)\nabla_i(L^{s_i})} x_{it} + \frac{\theta_q(L)\Theta_Q(L^s)}{\phi_p(L)\Phi_P(L^s)} a_t \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_i(L^{s_i}) &= \Omega_{i0} - \Omega_{i1}L^{s_i} - \dots - \Omega_{ih}L^{hs_i} \\ \nabla_i(L^{s_i}) &= 1 - \nabla_{i1}L^{s_i} - \dots - \nabla_{ik}L^{ks_i} \end{aligned}$$

Aún así, sin necesidad de considerar un modelo tan complejo como el dado en (2.16) podemos considerar, sin pérdida de generalidad, una especificación más sencilla del modelo FT. En efecto, si se considera el caso más simple de dos series temporales univariantes y_t (output) y x_t (input) estacionarias, entre las que se supone un conocimiento apriorístico de la dirección de causalidad existente, así como la existencia de un componente aleatorio N_t descrito a través de un proceso ARIMA (p, d, q) , el modelo en términos de la FRI vendrá dado, de forma compacta, como:

$$y_t = v(L)x_t + N_t; \quad v(L) = v_0 + v_1L + v_2L^2 + \dots; \quad N_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t \quad (2.17)$$

La estabilidad del modelo dado en (2.17) se garantiza cuando una variación finita en la variable input produce una variación también finita en el output, esto es,

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j \cong \frac{w_0 + w_1 + \dots + w_s}{1 - \delta_1 - \dots - \delta_r} = g$$

Este valor finito de g , que representa el cambio total en y_t ante un cambio unitario de x_t , mantenido indefinidamente en el tiempo, es lo que se denomina *ganancia total del sistema estable*.

Desde (2.15), y teniendo en cuenta que:

$$v_i(L) \cong \frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{ir_i}(L)} L^{b_i}$$

se obtienen, siguiendo a Box y Jenkins (1976) los valores de los pesos o ponderaciones v_{ij} de la FRI para cada input en relación a los coeficientes w_{ij} y δ_{ij} .

Así, para una variable genérica x_{it} , puede obtenerse, de forma aproximada la relación:

$$(1 - \delta_1 L - \delta_2 L^2 - \dots - \delta_r L^r)(v_0 + v_1 L + v_2 L^2 + \dots) = (w_0 + w_1 L + w_2 L^2 + \dots + w_s L^s) L^b$$

de tal forma que igualando los coeficientes en potencias de L en ambos lados, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} v_j &= 0 & j < b \quad (\text{incluye } j \text{ negativo}) \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} + w_0 & j = b \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} + w_{j-b} & j = b+1, \dots, b+s \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} & j > b+s \end{aligned} \tag{2.18}$$

y las r ponderaciones $v_{b+s}, v_{b+s-1}, \dots, v_{b+s-r+1}$ ofrecen r valores iniciales para la ecuación en diferencias finitas:

$$\delta(L)v_j = 0 \quad j > b + s$$

De forma general, los coeficientes de la FRI asociada a cada variable input presentarán las siguientes características: Existirán

- 1) Coeficientes nulos para las b primeras respuestas $(v_0, v_1, \dots, v_{b-1})$.
- 2) Un conjunto de $s - r + 1$ valores $(v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r})$ que no siguen un patrón de comportamiento fijo.
- 3) Un conjunto de valores v_j para $j > b + s - r + 1$ que siguen el patrón dictado por el orden r de la ecuación en diferencias.

2.3.- EL MODELO FT Y SU RELACION CON OTRAS ESPECIFICACIONES DINAMICAS

Resulta fácil advertir que el modelo FT dado en (2.15) es un modelo general que, bajo ciertas hipótesis, incluye como casos particulares a diversos modelos econométricos ampliamente conocidos y que han sido analizados en detalle en muchos textos econométricos, tal y como puede verse en Hendry et al (1984), Judge et al (1985), Spanos (1986), etc.

Considerando, sin pérdida de generalidad, el modelo FT dado en (2.15) donde N_t viene ahora generado por un proceso ARMA (p, q) , esto es,

$$y_t = \sum_{i=1}^k \frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{is_i}(L)} L^{b_i} x_{it} + \frac{\theta_q(L)}{\varphi_p(L)} a_t \quad (2.19)$$

podemos encontrar, entre otros, los siguientes casos:

a) *Modelo univariante de series temporales*: No existen variables inputs en el modelo FT, de forma que vendrá dado como:

$$y_t = N_t = \frac{\theta_q(L)}{\varphi_p(L)} a_t$$

b) *Modelo de análisis de intervención*: Ante la presencia de variables inputs ficticias o dicotómicas el modelo FT vendrá dado por:

$$y_t = \sum_{i=1}^k \frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{ir_i}(L)} x_{it} + \frac{w_{s_n}(L)}{\delta_{r_n}(L)} x_{nt} + N_t; \quad x_{nt} = \begin{cases} 1 & t \leq T^* \\ 0 & t > T^* \end{cases}$$

siendo T^* un valor conocido.

c) *Modelo lineal general o modelo de regresión múltiple estático*: Si todos los polinomios de retardo son de grado cero, el modelo FT vendrá dado por:

$$y_t = \sum_{i=1}^k w_{i0} x_{it} + a_t; \quad w_{is_i}(L) = w_{i0}; \quad \delta_{ir_i}(L) = 1$$

$$b_i = 0; \quad \theta_q(L) = \varphi_p(L) = 1$$

d) *Modelo lineal general con variable dependiente retardada o modelo de regresión con estructura de retardos de Koyck*:

$$y_t = \delta_1 y_{t-1} + \sum_{i=1}^k w_{i0} x_{it} + a_t; \quad w_{is_i}(L) = w_{i0}; \quad \delta_{ir_i}(L) = 1 - \delta_{i1} L$$

$$b_i = 0; \quad \theta_q(L) = 1; \quad \varphi_p(L) = 1 - \varphi_1 L; \quad \varphi_1 = \delta_1$$

e) *Modelo de regresión generalizado*: Los polinomios de retardo son de grado cero y el término de perturbación sigue un proceso AR(p) o un MA(q):

$$y_t = \sum_{i=1}^k w_{i0} x_{it} + N_t; \quad N_t = \varphi_1 N_{t-1} + \dots + \varphi_p N_{t-p} + a_t$$

$$y_t = \sum_{i=1}^k w_{i0} x_{it} + N_t; \quad N_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$w_{is_i}(L) = w_{i0}; \quad \delta_{ir_i}(L) = 1; \quad b_i = 0$$

f) *Modelo de retardos distribuidos:*

$$y_t = \sum_{i=0}^s w_i x_{t-i} + a_t; \quad w_s(L) = w_0 + w_1 L + \dots + w_s L^s; \quad \delta_r(L) = 1$$

$$k = 1; b = 0; \theta_q(L) = 1; \varphi_p(L) = 1$$

g) *Modelo racional de retardos distribuidos:*

$$y_t = \frac{w_s(L)}{\delta_r(L)} x_t + a_t; \quad w_s(L) = w_0 + w_1 L + \dots + w_s L^s$$

$$\delta_r(L) = 1 - \delta_1 L - \dots - \delta_r L^r$$

$$\varphi_p(L) = \theta_q(L); \quad k = 1; \quad b = 0$$

h) *Modelo ARMAX:*

$$\delta_r(L) y_t = w_s(L) x_t + \theta_q(L) a_t; \quad \delta_r(L) = \varphi_p(L)$$

$$k = 1; \quad b = 0$$

i) *Modelo autorregresivo dinámico (AD):* Es un caso especial del modelo anterior, esto es,

$$\delta_r(L) y_t = w_s(L) x_t + a_t; \quad \theta_q(L) = 1; \quad k = 1; \quad b = 0$$

2.4.- METODOS DE IDENTIFICACION DE LOS ORDENES POLINOMIALES EN UN MODELO FT

Diversos métodos en la literatura econométrica se han propuesto con el objetivo de abordar lo que se considera un problema esencial en este tipo de modelos, esto es, la determinación de los órdenes de los polinomios de retardo que intervienen en su formulación. Estos métodos de identificación se pueden agrupar en dos categorías en función del proceso de estimación indirecta o directa que conlleva la obtención de las FRI en una formulación como la dada en (2.15) para cada x_{it} .

2.4.1.- Métodos de estimación indirecta de la Función de Respuesta al Impulso

En cuanto a los los *métodos de estimación indirecta*, una primera forma de realizar la estimación de los pesos de respuesta al impulso exógeno es el procedimiento del *preblanqueado* de las series inputs (Box y Jenkins, 1976) para la obtención de procesos ruido blanco. Este procedimiento, inicialmente propuesto para el caso de un modelo FT bivalente en el que y_t y x_t son procesos estacionarios, esto es,

$$y_t = \frac{w_s(L)}{\delta_r(L)} L^b x_t + \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t$$

y donde x_t se supone generado por un proceso del tipo $\phi_x(L)x_t = \theta_x(L)\alpha_t$ y α_t es un proceso ruido blanco incorrelado con a_t , está basado en la utilización de la función de autocorrelación cruzada muestral $\rho_{\alpha\beta}$ entre la serie input preblanqueada, esto es, $\alpha_t = \theta_x^{-1}(L)\phi_x(L)x_t$ y la correspondiente serie output filtrada por el modelo ARMA de la serie input $\theta_x^{-1}(L)\phi_x(L)y_t = \beta_t$.

Las ponderaciones por este método obtenidas, si bien no son estimaciones eficientes de la FRI $v(L)$, permiten determinar, en base a las relaciones dadas en (2.18), los órdenes de los polinomios de retardo (s, r, b) así como dar una estimación preliminar de los parámetros del modelo.

Sin embargo, la generalización de este método al caso de múltiples inputs resulta difícil en tanto que aparecen diversos inconvenientes que dificultan en gran medida la operación de preblanqueado de las series. En este sentido, si bien el problema frecuente de la no ortogonalidad de las variables explicativas puede ser solucionado mediante la realización de un proceso iterativo, que utilice en cada paso la información acumulada conforme se introducen nuevas variables en el modelo, no obstante, un inconveniente más serio es la elección del filtro a aplicar al conjunto de variables presentes en el mismo.

En tal caso, la utilización de un filtro común para el preblanqueo de las series (Priestley, 1971; Granger y Newbold, 1977), además de ser una decisión subjetiva y por tanto complicada, tiene una desventaja adicional en el hecho de que, dado que el preblanqueo de las series inputs no garantiza la obtención de procesos ruido blanco, el cálculo de las funciones de correlación cruzada entre los $\hat{\alpha}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) y $\hat{\beta}_t$ proporcionará una pobre aproximación de las FRI contenidas en (2.14).

Este hecho es incluso cierto en el caso de un solo input, donde la utilización de un filtro para el preblanqueo de la serie input podría no preblanquear la serie output y dar lugar a correlaciones espúreas (Liu y Hanssens, 1982).

Por otro lado, aunque en base al mismo planteamiento que el anterior, la técnica del *doble preblanqueado* (Haugh y Box, 1977), consiste en preblanquear las series inputs y output de forma independiente, es decir, mediante dos filtros diferentes y, siguiendo un procedimiento idéntico al caso anterior, esto es, atendiendo al comportamiento de la función de correlación cruzada de los

residuos obtenidos, obtener los pesos de la FRI mediante estimación por mínimos cuadrados y determinar los órdenes de los polinomios de retardo en el modelo FT.

Si bien esta técnica ha sido ampliamente utilizada y goza de mayor fiabilidad que la anterior, en tanto que la estimación de los pesos de la FRI está sometida a un error menor por la utilización de procesos ruido blanco en el cálculo de la función de correlación cruzada, resulta no obstante más difícil de aplicar, incluso en aquellas situaciones con un solo input "... por la necesidad de aplicar diferentes modelos a las series y porque a menudo conduce a modelos complicados" (Liu y Hanssens, 1982).

Aunque no existe en este método el problema de las correlaciones espúreas, no obstante, se le atribuyen los mismos inconvenientes que al método Box-Jenkins; la estimación no conjunta de los filtros de preblanqueo con las correlaciones cruzadas puede dar lugar a estimaciones sesgadas. Por otra parte, la existencia de factores de preblanqueo conduce, en general, a modelos sobreestructurados y los modelos de retardo resultan difíciles de obtener.

En Fask y Robinson (1977) se generaliza esta técnica a modelos dinámicos multivariantes y en Granger y Newbold (1977) se aplica a la identificación de un sistema causal en dos direcciones. Ahora bien, según Stokes y Neuburger (1979) la existencia de una relación de causalidad entre las variables puede resultar engañosa dependiendo del método de análisis.

Otro procedimiento de identificación a añadir en este contexto es el propuesto por Tiao et al (1979), consistente en utilizar las matrices de correlación muestral de un conjunto de múltiples series para la modelización simultánea de todas las series mediante un proceso VARMA. Sin embargo, "... su aplicación a la identificación en un modelo FT, como caso particular, resulta desafortunada dado que, por un lado, la caracterización del modelo basada en las matrices de correlación resulta difícil y además se impone una estructura extra entre los

factores en los residuos y la FT que origina con frecuencia una sobreestructuración en el modelo" (Newbold, 1983).

Como una alternativa al análisis en el dominio temporal, se han propuesto en el dominio de las frecuencias diversos métodos para la identificación de un modelo FT a través de los llamados métodos espectrales (Priestley, 1971; Box y Jenkins, 1976; Pukkila, 1982; ...). Sin embargo, la aplicación de estos métodos espectrales resulta difícil en la práctica.

2.4.2.- Métodos de estimación directa de la Función de Respuesta al Impulso: La Tabla C y la Tabla de Padé

Frente a estos procedimientos descritos que basan la identificación del modelo FT en una estimación indirecta de las ponderaciones de la FRI asociada a cada input, la aproximación clásica de Padé constituye una alternativa especialmente útil en tanto que permite no sólo superar las dificultades existentes en los métodos citados sino que proporciona además, a partir de un proceso de estimación directa, un procedimiento sencillo e informativo para la identificación de los órdenes polinomiales en un modelo FT.

En concreto, los pasos que sugiere el estudio de la *aproximación clásica de Padé* en la identificación dinámica del modelo FT son:

1) Tomando como referencia la formulación del modelo FT dada en (2.19), y bajo el supuesto de estabilidad para las raíces del polinomio $\delta_{i_i}(L)$, podemos expresar la relación entre la variable output y las variables inputs, en términos de los pesos de la FT original para cada input, a través de un número finito de términos, esto es,

$$y_t \cong \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^m v_{ij} x_{it-j} + N_t^* \quad (2.20)$$

donde m indica el número finito de términos para el cual se aproximan las estructuras de retardos para $v_i(L)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) siendo

$$v_i(L) \cong \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^k v_{ij} L^j \quad (2.21)$$

Son numerosos los métodos que involucran truncamiento de la serie hasta un término m de la misma; entre éstos cabe citar, el método de análisis espectral de Hannan (1967) y Lii (1985), el método bayesiano de Newbold (1973), el método de máxima verosimilitud de Box y Jenkins (1976), etc.

Reformulando la expresión (2.21) como:

$$\tilde{Y} = \tilde{X} \tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon} \quad (2.22)$$

donde \tilde{Y} representa el vector de valores de la variable output, $\tilde{\beta}$ el de parámetros de las ponderaciones de la FRI asociada a cada input y \tilde{X} la matriz de valores de las variables inputs y sus retardos, esto es,

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= (Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots, Y_{m+n})' \\ n &= T - m \\ m &= \max(m_1, m_2, \dots, m_k) \\ \tilde{\beta} &= (v_{10} \ v_{11} \ \dots \ v_{1m_1} \ v_{20} \ v_{21} \ \dots \ v_{2m_2} \ \dots \ v_{k0} \ v_{k1} \ \dots \ v_{km_k})' \\ \tilde{X} &= (1 \ \tilde{X}_1^0 \ \tilde{X}_1^1 \ \dots \ \tilde{X}_1^{m_1} \ \tilde{X}_2^0 \ \tilde{X}_2^1 \ \dots \ \tilde{X}_2^{m_2} \ \dots \ \tilde{X}_k^0 \ \tilde{X}_k^1 \ \dots \ \tilde{X}_k^{m_k})' \\ \tilde{X}_i^0 &= (X_{i(m+1)} \ X_{i(m+2)} \ \dots \ X_{i(m+n)})' \\ \tilde{X}_i^j &= L^j \tilde{X}_i^0 \end{aligned}$$

siendo T el tamaño de la muestra. Bajo el supuesto de que $\tilde{\varepsilon}$ es ruido blanco, las estimaciones de $\tilde{\beta}$ mediante la aplicación de MCO en (2.22) vendrán dadas por:

$$\tilde{\beta} = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \tilde{Y} \quad (2.23)$$

Ahora bien, la aplicación del método de estimación por MCO requiere hacer las siguientes consideraciones:

*Por un lado, un primer problema que podría surgir en la aplicación de este método de estimación, aunque no exento de solución, es el de la multicolinealidad. Así, en el caso de que las series inputs presenten raíces AR cercanas a la unidad, esto es, que las series estén próximas a la no estacionariedad, la matriz $\tilde{X}'\tilde{X}$ estará mal condicionada para la inversión.

En tal caso, y tal como plantean Liu y Hanssens (1982), la elección de un filtro común para la series output e inputs, donde el filtro es apropiadamente elegido para eliminar dichos factores AR, no altera la FT del sistema estacionario. En cualquier caso, la posible singularidad de la matriz $\tilde{X}'\tilde{X}$ es un problema de cálculo numérico, que puede resolverse mediante el recurso a la doble precisión numérica en el cálculo computacional, contemplada por la casi totalidad de los paquetes informáticos y que en la mayoría de los casos ofrece resultados satisfactorios.

*Por otra parte, las estimaciones que se obtienen de los parámetros $\tilde{\beta}$ en (2.23) sólo serán eficientes si la serie de perturbaciones $\tilde{\epsilon}$ es ruido blanco. En otro caso, esto es, en presencia de perturbaciones no esféricas, varias soluciones se han propuesto, entre ellas:

a) En primer lugar, la utilización de mínimos cuadrados generalizados permitirá obtener estimaciones consistentes y eficientes; así mismo, la posibilidad de filtrar las series output e inputs originales por el esquema ARMA (p,q) que siga el término de perturbación y la realización de un proceso iterativo de filtrado y estimación por mínimos cuadrados ordinarios, que finaliza una vez las estimaciones finales son convergentes, permite también obtener resultados satisfactorios (Ljung y Box, 1979).¹⁴

¹⁴Una propuesta similar de estimación puede encontrarse en Cochrane y Orcutt (1949).

b) Otra alternativa consiste en la estimación directa de (2.22) y, a partir de la identificación del proceso para el ruido, estimar conjuntamente por máxima verosimilitud los parámetros de la FRI y los del proceso ARMA para el ruido.

No obstante, mayor aproximación numérica puede obtenerse de la estimación conjunta de pesos de la FRI y de los parámetros del ruido a través de mínimos cuadrados no lineales (MCNL) (Liu, 1979).

En Lii (1985), la obtención mediante MCNL de las estimaciones \hat{v}_j de los pesos v_j para cada input x_{it} , eliminando el subíndice i , pasa por la consideración de que para cada FRI se verifica que:

$$\hat{v}_j - v_j \rightarrow N(0, \sigma_j^2)$$

siendo σ_j^2 ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm S$) la varianza para un valor de S fijo.

De forma más general,

$$\{\hat{v}_j - v_j\} \rightarrow NM(0, V_{j,k})$$

siendo $V_{j,k}$ la covarianza entre \hat{v}_j y \hat{v}_k .

2) Una vez obtenidas las ponderaciones de la FRI para cada input, definimos:

$$\hat{v}_{i,max} = \max_{0 \leq j \leq k} |\hat{v}_{ij}| \quad y \quad \hat{\eta}_{ij} = \frac{\hat{v}_{ij}}{\hat{v}_{i,max}} \quad (2.24)$$

donde $(\hat{v}_{ij})_{j \in N}$ es la sucesión de pesos estimados para x_{it} y $(\hat{\eta}_i) \equiv (\hat{\eta}_{ij})_{j \in N}$ constituye la sucesión de pesos relativos de los valores de los retardos sobre el máximo valor respecto a x_{it} .

Obtenida la sucesión de pesos relativos $(\hat{\eta}_{ij})_{j \in N}$, se construye la tabla \hat{C} asociada a cada variable input x_{it} ($i = 1, 2, \dots, k$), de tal forma que para cada una

de ellas, eliminando el subíndice i , la FRI $v(L)$ tendrá una representación racional de la forma:

$$v(L) = \frac{\sum_{j=1}^{b+s} w_j L^j}{1 + \sum_{j=1}^r \delta_j L^j} \quad (2.25)$$

si y sólo si en la tabla C , formada por los valores de $C_{j,m}$ ($j, m = 0, 1, 2, \dots$) se verifica que $C_{S,R} = 0 \quad \forall S > b + s, R > r$ siendo $C_{b+s,r} \neq 0$ y $C_{b+s+1,r+1}$ el denominado breaking-point en la literatura econométrica (Lii, 1985).

Así mismo, y con el propósito de salvar las dificultades inherentes a la aplicación de los métodos basados en una estimación indirecta de las FRI asociadas a cada variable en (2.14), Liu y Hanssens (1982) proponen una modificación del **método corner** para la identificación de los órdenes de un modelo FT con múltiples inputs.

En concreto, la propuesta que Liu y Hanssens (1982) elaboran consiste en, una vez realizada la estimación directa de las ponderaciones v_{ij} de las FRI a través del proceso antes descrito y considerando la sucesión de pesos relativos $(\hat{\eta}_i) \equiv (\hat{\eta}_{ij})_{j \in N}$ definida en (2.24), construir los determinantes de Hankel $C_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i)$ ($\hat{\eta}_{ij} = 0$ si $j < 0$).

En tal caso, $v_i(L)$ admite una representación racional de órdenes (s_i, r_i, b_i) si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} C_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i) &= 0 & \text{si } f_i &\geq b_i + s_i + 1 & \quad g_i &\geq r_i + 1 \\ C_{f_i, r_i}(\hat{\eta}_i) &\neq 0 & \text{si } f_i &\geq b_i + s_i \\ C_{b_i + s_i, g_i}(\hat{\eta}_i) &\neq 0 & \text{si } g_i &\geq r_i \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si además, $C_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i) = 0$ si $f_i < b_i$ entonces b_i representa el retraso en la respuesta de y_t ante variaciones en x_{it} .

Estas condiciones, que no son más que la generalización de la "caracterización corner" dada en Beguin et al (1980) para procesos ARMA univariantes, permitirán obtener ahora la tabla corner correspondiente a la sucesión $(\hat{\eta}_i)$.

Así, tal y como se muestra a continuación, para unos valores M_i y M_i^* enteros y mayores que $b_i + s_i$ y r_i respectivamente, la **tabla corner** o **tabla C** que se obtiene para el input x_{it} adopta la siguiente estructura:

g_i	1	2	...	r_i	$r_i + 1$...	M_i^*
f_i							
0	0	0	...	0	0	...	0
1	0	0	...	0	0	...	0
...
$b_i - 1$	0	0	...	0	0	...	0
b_i	$C_{b_i,1}$	$C_{b_i,2}$...	C_{b_i,r_i}	C_{b_i,r_i+1}	...	C_{b_i,M_i^*}
$b_i + 1$	$C_{b_i+1,1}$	$C_{b_i+1,2}$...	C_{b_i+1,r_i}	C_{b_i+1,r_i+1}	...	C_{b_i+1,M_i^*}
...
$s_i + b_i + 1$	$C_{s_i+b_i+1,1}$	$C_{s_i+b_i+1,2}$...	$C_{s_i+b_i+1,r_i}$	0	...	0
...
M_i	$C_{M_i,1}$	$C_{M_i,2}$...	C_{M_i,r_i}	0	...	0

La obtención en esta tabla de la terna (s_i, r_i, b_i) , también denominada tabla corner, implica que las b_i primeras filas y la esquina inferior derecha formada por las $s_i + b_i + 1$ hasta M_i filas y las $r_i + 1$ hasta M_i^* columnas tengan todos sus elementos significativamente iguales a cero.

En tal caso, la FRI tendrá una representación $\frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{ir_i}(L)}L^{b_i}$ cuyos órdenes (s_i, r_i, b_i) para cada input x_{it} coinciden precisamente con los del AP de máximo grado, esto es, con los del AP $\left[\frac{b_i + s_i}{r_i} \right]_{v_i}$ a la serie $v_i(L) = \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}L^j$ ($i = 1, 2, \dots, k$) dada en (2.14).

Por otra parte, las estimaciones $\hat{C}_{S,R}$ se distribuyen asintóticamente de acuerdo con el siguiente teorema:

Teorema (Lii, 1985).- Dados dos enteros fijos S, R y un tamaño muestral $T \rightarrow \infty$, se verifica que:

$$\hat{C}_{S,R} - C_{S,R} \rightarrow N(0, GVG')$$

donde $G = (g_j)_{j=S-R+1}^{S+R-1}$ siendo g_j la suma de los cofactores de v_j en $C_{S,R}$ y $V = (V_{j,k})$ la matriz de covarianzas de $(\hat{v}_{S-R+1}, \hat{v}_{S-R+2}, \dots, \hat{v}_{S+R-1})$, por lo que a valores nulos de $C_{S,R}$ le corresponden, en general, valores “significativamente” nulos de $\hat{C}_{S,R}$.

2.4.2.1.- Una estimación preliminar para los parámetros del modelo

Dado que la **tabla de Padé** constituye una herramienta complementaria en la representación de una serie mediante una función racional, un planteamiento equivalente al obtenido en la tabla C para la representación de $v(L)$ a través de un modelo de la forma indicada en (2.25) vendría dado en los siguientes términos:

Teniendo en cuenta que al igual que en un modelo $ARMA(p_i, q_i)$, la sucesión de ponderaciones o pesos relativos $(\hat{\eta}_i) \equiv (\hat{\eta}_{ij})_{j \in N}$ definida en (2.24) satisface una ecuación lineal en diferencias de orden r_i y rango $b_i + s_i$, y que la

relación existente entre las ponderaciones de las FRI asociadas a cada variable input y su representación racional viene dada por:

$$v_i(L) = \frac{w_{is_i}(L)}{\delta_{ir_i}(L)} L^{b_i}$$

tendremos que:

$$\begin{aligned} \eta_{ij} - \delta_{i1}\eta_{ij-1} - \dots - \delta_{ir_i}\eta_{ij-r_i} &= 0 \quad \text{si } j > b_i + s_i \\ &\neq 0 \quad \text{si } j = b_i + s_i \quad \text{para cada } i \end{aligned} \quad (2.27)$$

Eliminando el subíndice i , las ecuaciones (2.27) reescritas en la forma:

$$\sum_{j=1}^r \eta_{h-j} \delta_j = \eta_h \quad \text{para } h = b+s, \dots, b+s+r$$

determinan, eligiendo $\delta_0 = 1$, el denominador del AP para $v(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j L^j$.

Por tanto, de forma genérica, el AP¹⁵ para $v(L)$ vendrá dado por $\left[\frac{b+s}{r} \right]_v(L)$, con lo cual eligiendo ahora $\delta_0 = C_{b+s,r} = \det(\eta_{b+s+l-j})_{1 \leq l, j \leq r}$ ($\eta_j = 0$ si $j < 0$) el AP estará bien definido si y sólo si $C_{b+s,r} \neq 0$.

Por tanto, la FRI $v(L)$ tendrá una representación racional como la dada en (2.25) si y sólo si $C_{b+s,r} \neq 0$. Si además, $\eta_j = 0$ para $j < b$ se obtiene que:

$$v(L) \cong L^b \frac{\hat{P}_s(L)}{\hat{Q}_r(L)}$$

¹⁵Si bien inicialmente la definición de AP está dada para funciones de variable compleja, la definición que ahora se considera es para una función del operador L .

y b representa el retardo en la respuesta.

Una vez determinados los órdenes polinomiales (s, r, b) para cada FRI, se lleva a cabo la estimación de los parámetros p_j, q_j en el AP $\left[\frac{b+s}{r} \right]_v(L)$, esto es,

en $L^b \frac{\hat{P}_s(L)}{\hat{Q}_r(L)}$ a través de las ecuaciones (2.4).

Además, si denotamos:

$$\frac{\hat{P}_{s+b}(L)}{\hat{Q}_r(L)} = \frac{\hat{p}_0^* + \hat{p}_1^* L + \dots + \hat{p}_{s+b}^* L^{s+b}}{\hat{q}_0^* + \hat{q}_1^* L + \dots + \hat{q}_r^* L^r} = \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1 L + \dots + \hat{p}_{s+b} L^{s+b}}{1 + \hat{q}_1 L + \dots + \hat{q}_r L^r}$$

$$\hat{p}_0 = 0, (j=0, \dots, b-1); \hat{p}_j = \frac{\hat{p}_j^*}{\hat{q}_0^*} (j=b, \dots, s+b); \hat{q}_j = \frac{\hat{q}_j^*}{\hat{q}_0^*} (j=0, \dots, r)$$

las estimaciones \hat{p}_j, \hat{q}_j de los parámetros en el AP $\left[\frac{b+s}{r} \right]_v$ se distribuyen asintóticamente de acuerdo con el siguiente teorema:

Teorema (Lii, 1985).- Dados $b+s$ y r fijos, la distribución asintótica de los parámetros \hat{p}_j, \hat{q}_j viene dada respectivamente por:

$$(\hat{p}_j - p_j) \rightarrow N(0, \sigma_{p_j}^2); \quad (\hat{q}_j - q_j) \rightarrow N(0, \sigma_{q_j}^2)$$

donde

$$\sigma_{p_j}^2 = \left(\frac{1}{q_0^*}, \frac{p_j^*}{q_0^{*2}} \right) \Sigma_{i0}^{pq} \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0^*} \\ -p_i^* \\ q_0^{*2} \end{pmatrix}; \quad \sigma_{q_j}^2 = \left(\frac{1}{q_0^*}, \frac{q_j^*}{q_0^{*2}} \right) \Sigma_{i0}^{pq} \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0^*} \\ q_j^* \\ q_0^{*2} \end{pmatrix} \quad q_0^* \neq 0$$

Nótese que si $q_0' = 0$ en el AP $\left[\frac{b+s}{r} \right]_v$ el elemento $C_{b+s,r}$ en la tabla C es nulo y el AP es reducible, o lo que es lo mismo, degenera en uno de grado menor.

Estas estimaciones obtenidas para los parámetros \hat{p}_j, \hat{q}_j a partir del AP son comparables con las obtenidas por otros métodos que requieren el conocimiento de la estructura del ruido. Además, constituyen un buen punto de partida para su utilización por procedimientos de estimación iterativos más eficientes, generalmente no lineales que permitan la obtención definitiva de los parámetros para $v(L) = L^b \frac{w_s(L)}{\delta_r(L)}$.

Tal y como hemos visto, las propiedades señaladas caracterizan uno de los métodos hasta ahora más utilizados en la identificación del modelo FT, esto es, el método corner.

En efecto, esta propuesta de determinación, que la evidencia empírica ha sugerido como potente para la determinación de la estructura dinámica subyacente en un modelo y que proporciona estimadores con propiedades deseables, se muestra especialmente útil para la identificación de modelo FT en el caso de múltiples inputs¹⁶ al tiempo que, por la propia construcción del método, permite obviar los problemas relacionados con la ortogonalidad de las variables inputs y con la elección subjetiva del filtro para el preblanqueado de las series.

Por otra parte, este procedimiento, además de ser directo y simple, es fácilmente extendible a modelos con componentes de intervención, que resultan difíciles de modelizar con otros métodos.

¹⁶Ver, entre otros, Liu y Hanssens (1982), Hanssens y Liu (1983), Edlund (1984), Lii (1985), Tsay (1985).

Ahora bien, dado que en la práctica los valores que se obtienen para los v_{ij} son estimaciones y, por tanto, están sujetos a errores aleatorios, las pautas a seguir en el proceso de identificación de los órdenes polinomiales han de consistir en buscar una estructura global de conjunto en la tabla corner para cada x_{it} de acuerdo con las reglas de comportamiento establecidas. Así mismo, la elección de una combinación razonable entre un conjunto de posibles alternativas debe guiarse por el principio de parsimonia o parquedad.

Una propuesta especialmente interesante para la identificación del modelo FT a través del método corner viene dada en Tsay (1985). En concreto, el procedimiento que propone resulta no sólo aplicable a series estacionarias y no estacionarias sino que al mismo tiempo, permite validar en el proceso de construcción del modelo la creencia previa sobre la existencia de una relación unidireccional entre las variables. Así, la utilización de una aproximación AR para el modelo FT y de ciertos criterios de selección del orden (Akaike, 1974; Schwarz, 1978; Quinn, 1980) permite confirmar la naturaleza exógena y endógena de las variables.

Si bien tanto la propuesta de Liu y Hanssens como la de Tsay abogan por la utilización del método corner como procedimiento de identificación, su utilización está basada no obstante en supuestos diferentes. Así, mientras que los primeros enfatizan en prefiltrar las series inputs y output con un filtro común, la propuesta de Tsay no requiere la estacionariedad de las series y hace posible la validación del modelo sin necesidad de hacer una distinción previa atendiendo a la naturaleza de las variables. De igual forma, el procedimiento propuesto por este último resulta válido en situaciones en las que existe correlación entre las variables inputs, donde la construcción de la tabla corner sería aún un

procedimiento más sencillo que la generalización de cualquiera de los procedimientos de preblanqueado descritos con anterioridad.¹⁷

Con el objetivo de completar el procedimiento de identificación descrito, en Tsay (1985) se propone un método para determinar la significación estadística de los elementos nulos asociados al método, a través del cálculo de las desviaciones típicas muestrales de las estimaciones de los determinantes de Hankel $C_{f_i, g_i}(\hat{\eta}_i)$.

Una propuesta análoga se da en Lii (1985) donde, como hemos visto anteriormente, junto a un método para la selección inicial de los parámetros del modelo a partir de la aproximación de Padé, se presenta un procedimiento para el estudio de la significación estadística de los elementos asociados al método.

2.4.2.2.- Un método alternativo en la identificación del modelo FT: El ϵ -algoritmo

Las propiedades que posee la aproximación de Padé en este contexto han permitido el desarrollo de otros métodos alternativos al corner para la identificación dinámica de un modelo FT.

En concreto, el **ϵ -algoritmo**, inicialmente propuesto por Berliet (1981, 1984) para caracterizar los órdenes de un modelo ARMA minimal a través de la serie de autocorrelaciones de un proceso temporal, ha sido propuesto por González y Cano (1990a) y González et al (1993) para la identificación de un modelo FT con uno y múltiples inputs, respectivamente. Así mismo, su aplicación

¹⁷Ver una discusión al respecto en Granger y Newbold (1977) y Tiao y Box (1981).

a modelos FT con variable dependiente limitada -de indudable interés en la práctica econométrica- se muestra en González y Cano (1990b).

En este contexto, tanto el método corner como el ε -algoritmo han demostrado poseer capacidad semejante para determinar los órdenes en modelos de series temporales. No obstante, difieren en el procedimiento seguido para la obtención de los órdenes (s_i, r_i, b_i) ; además, aunque ambos métodos resultan de gran utilidad en la caracterización de modelos, el ε -algoritmo resulta computacionalmente más sencillo de aplicar que el corner.

En nuestro caso¹⁸, si aplicamos el esquema (2.12) a cada secuencia (η_i) de pesos relativos, esto es,

$$\forall k, n \in Z \quad \varepsilon_{k+1}^n(\eta_i) = \varepsilon_{k-1}^{n+1}(\eta_i) + [\varepsilon_k^{n+1}(\eta_i) - \varepsilon_k^n(\eta_i)]^{-1} \quad (2.28)$$

siendo las condiciones iniciales:

$$\varepsilon_{-1}^n(\eta_i) = 0; \quad \varepsilon_0^n(\eta_i) = \eta_m \quad \forall n \in Z$$

la FRI tendrá una representación racional para el input x_{it} si y sólo si:

$$\varepsilon_{2r_i}^{b_i+s_i-r_i}(\eta_i) \neq 0; \quad \varepsilon_{2r_i}^j(\eta_i) = 0 \quad \forall j > b_i + s_i - r_i$$

lo que proporciona una caracterización que permite estructurar los resultados de (2.28) correspondientes a las columnas pares en una tabla como la que se recoge a continuación:

¹⁸Ver Berlinec (1981, 1984), Berlinec y Francq (1994) para modelos ARMA y González et al (1995) para modelos FT.

TABLA DEL ϵ -algoritmo

Col	0	2	$2(r_i - 1)$	$2r_i$
Fil							
0	0						
1	0	0					
...				
...			
$b_i - 1$	0	0	0	...	0		
b_i	$\epsilon_0^{b_i}$	$\epsilon_2^{b_i-1}$
...
$b_i + s_i - r_i$	$\epsilon_0^{b_i+s_i-r_i}$	$\epsilon_2^{b_i+s_i-r_i-1}$
...	$\epsilon_{2r_i}^{b_i+s_i-r_i-1}$
$b_i + s_i$	$\epsilon_0^{b_i+s_i}$	$\epsilon_2^{b_i+s_i-1}$	$\epsilon_{2(r_i-1)}^{b_i+s_i-r_i+1}$	$\epsilon_{2r_i}^{b_i+s_i-r_i}$
$b_i + s_i + 1$	$\epsilon_0^{b_i+s_i+1}$	$\epsilon_2^{b_i+s_i}$	$\epsilon_{2(r_i-1)}^{b_i+s_i-r_i+2}$	0
...

Ciertos problemas numéricos debidos a las limitaciones de la aritmética usual de computación pueden presentarse cuando al computar la expresión (2.28), dos elementos sucesivos en la tabla- ϵ toman valores próximos entre sí. En tal caso, la aplicación de técnicas de aceleración de la convergencia o la realización de las transformaciones propuestas por Berlinet (1981) en la sucesión (η_i) del tipo $(\alpha\eta_i)$ o $(\alpha^j \eta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ con $\alpha \in R - \{0\}$, permiten mejorar los resultados numéricos.

Aunque ambos métodos siguen un procedimiento de identificación que, en algunas etapas, presenta elementos comunes, la diferencia fundamental entre ambas propuestas se centra en que a pesar de su sencillez computacional, la evaluación en el ϵ -algoritmo de las expresiones (2.28) para los diferentes valores de k y n resulta aún más sencilla con respecto a la evaluación de los determinantes C_{f_i, s_i} del método corner para cada input x_{ii} .

Partiendo del trabajo de Berline y Francq (1994) y de la aproximación realizada por Tsay (1985) para el cómputo de las varianzas de los elementos asociados a la tabla corner, en González et al (1995) se lleva a cabo el estudio de la significación estadística de los elementos nulos en la tabla- ϵ con el objetivo de confirmar la adecuación del modelo identificado.

Otra propuesta alternativa, aunque igualmente vinculada con el estudio de AP viene dada por la utilización del denominado *método de la transformada de Padé en z* (Claverie et al, 1990). Este método para la identificación y estimación de un modelo FT descansa en la investigación de la estabilidad de los AP, esto es, la búsqueda de un bloque de AP estables en la tabla de Padé y que sería lo análogo a encontrar una esquina de ceros en el método corner.

Este procedimiento supone una forma funcional concreta para los pesos v_j de la FRI asociada a cada variable input x_{it} , esto es, una combinación lineal de N retardos geométricos que corresponden a un proceso $AR(N)$:

$$v_j = \sum_{i=1}^N c_n \lambda_n^j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.29)$$

donde $\{\lambda_n\}$ representa el conjunto de ratios para la estructura de retardos.

Dada esta forma funcional, la transformada en z de la forma geométrica dada en (2.29) es una función racional en z dada por:

$$v(z) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{1 - z\lambda_n}$$

que será identificada y estimada a través del uso de AP. Ahora bien, si los retardos no siguen una distribución geométrica como la dada, la identificación por este método no resulta posible.

Si bien otros métodos también relacionados con la AP, tales como el método de la tabla R y S (Gray et al, 1978) son de aplicación en la identificación de este

tipo de modelos, su utilización es, no obstante, menos frecuente dado el carácter informativo y la relativa sencillez computacional de los otros métodos en relación a éste.

2.5.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el objetivo de ilustrar la validez de los procedimientos descritos, en concreto, de la tabla C, esto es, del método corner¹⁹ y del ε -algoritmo recurrimos a los resultados de la simulación realizada por Liu y Hanssens (1982) bajo las siguientes características²⁰:

MODELO SIMULADO:

$$Y_t = (2L^3 + 4L^4)X_{1t} + \frac{1,5L^2 + 3L^3}{(1 - L + 0,24L^2)} X_{2t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 100$$

donde

$$\begin{aligned} (1 - 1,3L + 0,4L^2)\varepsilon_t &= e_t & e_t &\sim N(0,2) \\ (1 - 1,4L + 0,48L^2)X_{1t} &= b_t & b_t &\sim N(0,1) \\ (1 - 0,7L)X_{2t} &= c_t & c_t &\sim N(0,2) \end{aligned}$$

siendo e_t independiente de b_t y c_t , y b_t y c_t correlacionadas con un coeficiente de 0,7.

A partir de las estimaciones de los pesos de las FRI, dados en la referencia indicada y obtenidos por MCO para las series originales²¹, considerando un

¹⁹Para otro tipo de comparación utilizando también el método corner, véase Arcarons y Murillo (1987)

²⁰Véase González et al (1993) para más detalles sobre la comparación realizada

²¹Véase también en González et al (1993, 1995) los resultados obtenidos a partir de otros métodos de estimación.

proceso AR(1) para el ruido, hemos comparado las tablas del método corner y el ϵ -algoritmo.

Tabla 1.- ϵ -algoritmo para η_{li}

	0	2	4	6	8
0	0,04				
1	0,06	0,04			
2	-0,09	0,03	0,04		
3	0,48	5,87	0,24	14,07	
4	1,00	0,66	0,43	0,34	0,27
5	0,01	0,04	-0,33	0,07	
6	0,04	0,01	-0,07		
7	-0,21	-0,07			
8	0,13				

Tabla 2.- Tabla corner para η_{li}

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	-0,09	-0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,48	0,32	0,36	0,15	0,10	0,06	0,04	0,02
4	1,00	1,00	1,01	1,07	1,15	1,24	1,32	1,41
5	0,01	-0,04	-0,21	-0,11	0,06	0,08	0,05	-0,02
6	0,04	0,00	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
7	-0,21	0,04	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,13	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 3.- ϵ -algoritmo para η_{2i} y $(-1)^i \eta_{2i}$

	I					II				
	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
0	0,04					0,04				
1	0,04	0,03				-0,04	0,02			
2	0,36	-0,25	0,12			0,36	0,05	0,03		
3	1,00	0,96	0,75	0,61		-1,00	-0,20	-0,10	-0,09	
4	0,96	1,01	-1,35	0,60	0,61	0,96	0,00	-0,08	-0,09	-0,10
5	0,68	2,53	0,82	0,49		-0,90	-0,16	-0,13	-0,10	
6	0,35	0,39	0,33			0,35	-0,12	-0,18		
7	0,39	0,36				-0,39	-0,03			
8	0,31					0,31				

Tabla 4.- Tabla corner para η_{2i}

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,04	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,36	0,08	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
3	1,00	0,66	0,42	0,26	0,17	0,11	0,08	0,05
4	0,96	0,24	-0,03	-0,12	-0,07	0,03	0,05	0,02
5	0,68	0,12	0,07	0,05	0,05	0,04	0,02	0,01
6	0,35	-0,14	0,04	0,01	-0,01	0,01	0,00	0,00
7	0,39	0,04	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
8	0,31	0,10	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00

Como puede observarse en las tablas 1 y 2, tanto el ϵ -algoritmo como el método corner recogen de forma correcta el comportamiento de (s_i, b_i, r_i) respecto al primer input, esto es, $b_1 = 3, s_1 = 1, r_1 = 0$.

El comportamiento de la tabla 4 para la sucesión (η_{2i}) reproduce correctamente la estructura simulada. Ahora bien, tal y como se muestra en la tabla 3(I), el ϵ -algoritmo para la sucesión (η_{2i}) recoge el comportamiento de $b_2 = 2$ pero sobrevalora s_2, r_2 . Obsérvese que no hay cambios de signo en la sucesión (η_{2i}) considerada. Sin embargo, esto no ocurre en la tabla 3(II) debido a la transformación utilizada, para la cual el ϵ -algoritmo aplicado a $\{(-1)^i \eta_{2i}\}$ recupera el valor correcto de s_2 , esto es, $s_2 = 1$, pero infravalora el r_2 indicando $r_2 = 1$, lo cual puede tener su explicación en que la significación del coeficiente $\delta_{2,2}$ es mucho menor que la de $\delta_{2,1}$. No obstante, como una primera aproximación resulta siempre posible dar distintas alternativas de especificación que, sometidas a posterior comprobación, permitirán obtener la estructura más adecuada.

En definitiva, podemos concluir que ambos procedimientos son válidos para llevar a cabo la identificación de la estructura dinámica en un modelo FT clásico. Aún así, conviene destacar que el ϵ -algoritmo es una regla muy simple que

permite conocer los órdenes polinomiales en una formulación de este tipo sin necesidad de computar determinantes, como ocurre en el método corner.

Así mismo, tal como muestran las tablas, la inestabilidad que puede producirse en la utilización del ε -algoritmo según las características de los pesos de la FRI, repercutiendo en una sobrevaloración de los parámetros r_i , s_i , puede solucionarse con las transformaciones propuestas, lo que unido a su sencillez computacional lo convierte en una alternativa perfectamente válida al método corner.

Estos procedimientos hasta ahora descritos para la identificación de modelos FT, que tienen su soporte metodológico en la AP y que han sido propuestos en el ámbito de la formulación tradicional de modelos causales, resultan en la mayoría de los casos operativos y de gran interés cuando el objetivo para su utilización se centra en llevar a cabo la especificación dinámica de un modelo que, en términos de las observaciones disponibles, sea capaz de reproducir fielmente los esquemas de comportamiento pasados de una variable en el tiempo.

Ahora bien, cuando los objetivos perseguidos van más allá de la mera formulación de un modelo que sea válido desde la perspectiva de ajuste a los datos, para centrar los logros en la realización de predicciones a corto y/o medio plazo sobre determinadas variables económicas en las que basar la implementación de medidas económicas, las formulaciones causales tradicionales encuentran, en ciertas ocasiones, serias dificultades para dar respuesta a tales necesidades.

Tal y como la evidencia empírica ha sugerido en ciertos casos, la asunción errónea de un universo económico en el que las relaciones económicas se rigen a través de un esquema temporal en el que el “futuro” es sólo consecuencia del “pasado”, plantea en estos modelos inconvenientes que resultan a menudo difícilmente salvables para la realización de predicciones económicas. En

especial, estas limitaciones se ponen de manifiesto en aquellos contextos en los que la existencia de períodos de transición económica lleva implícita la existencia de comportamientos estructuralmente diferentes en el tiempo.

La existencia de tales limitaciones en la formulación de modelos causales y el interés por buscar un fundamento teórico coherente en el que basar la implementación de medidas político-económicas con las que atender a los objetivos sociales y económicos prioritarios, nos llevan a dar en los dos capítulos siguientes las bases de una nueva propuesta metodológica con la que abordar el estudio y la identificación de relaciones dinámicas desde una perspectiva más general.

En efecto, esta nueva propuesta en la modelización de relaciones dinámicas se fundamenta precisamente en una generalización del tratamiento de la aproximación clásica de Padé desde dos vías alternativas, que van a permitir abordar la identificación dinámica del componente determinista presente en la modelización de series temporales:

Por un lado, la **aproximación de Padé-Laurent** en relación con el estudio de series formales de Laurent va a permitir modelizar, de forma separada, el comportamiento pasado y futuro de las variables involucradas en una relación dinámica

Por otro lado, la **generalización de la AP al estudio de series formales de Laurent** va a permitir unificar y recoger de forma simultánea ambos comportamientos en el tiempo.

En definitiva, ambas vías representan un intento más de proporcionar un marco común en el que tratar de conciliar la práctica econométrica con los principios teórico-económicos, esto es, tratar de conjugar la metodología hasta ahora utilizada en el análisis de series temporales con la formulación de modelos no causales -en los que se articula la evolución futura a priori conocida de una

variable-, y ofrecer con ello respuestas válidas en términos de la consecución de los objetivos económicos que se consideran relevantes.

CAPÍTULO 3

LA APROXIMACIÓN DE PADÉ-LAURENT EN LA DETERMINACIÓN DE UN MODELO DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS

INTRODUCCION

En el ámbito de la aproximación de Padé, gran parte de las investigaciones realizadas a nivel escalar se han centrado en lo que hemos denominado caso clásico, esto es, la aproximación local de funciones analíticas o, en términos algebraicos, la aproximación de series formales de potencias.

Ahora bien, de forma paralela y también a nivel escalar, la literatura matemática existente al respecto se ha visto enriquecida con la realización de numerosos estudios que centran su interés en la generalización del tratamiento de la aproximación de Padé al estudio de *series doblemente infinitas* o *series formales de Laurent* (Bultheel, 1987), y que son el resultado de considerar una secuencia discreta de variables y ponderaciones evaluadas en todo Z .

En esta segunda vertiente, la *aproximación de Padé-Laurent* constituye una propuesta metodológica válida para la representación de una serie formal de Laurent a través de una representación de orden finito, que es el resultado de la modelización racional de dos funciones analíticas en cero e infinito respectivamente y que aproximan las dos direcciones de la serie de Laurent.

Precisamente, esta vía que se introduce en la modelización de funciones racionales juega un papel que resulta fundamental para la consideración de una nueva perspectiva en el tratamiento de las relaciones dinámicas entre variables a través de los modelos no causales. Dicho de otra forma y en respuesta a los planteamientos tradicionales que basan la modelización de relaciones dinámicas en términos de causalidad en el dominio temporal, la aproximación de Padé-Laurent proporciona, por una parte, una base metodológica para la caracterización de métodos con los que abordar la especificación dinámica en el marco de modelos más amplios en los que se incorporan las expectativas que de modo “ex ante” o “ex post” se elaboran sobre las variables exógenas o explicativas del modelo y, por otra parte, permite responder con ello de forma más

coherente a los planteamientos que en términos de la realización de predicciones se formulan sobre el comportamiento de determinados fenómenos económicos.

Desde esta nueva perspectiva, el objetivo de este capítulo se centra, por un lado, en abordar desde un punto de vista teórico el tratamiento de la aproximación de Padé-Laurent, destacando sus propiedades básicas y aquellas características que resultan más relevantes para nuestra investigación. Bajo este nuevo enfoque en la modelización racional presentamos, en una segunda parte, la aplicación que esta variante de la aproximación clásica de Padé tiene en el estudio de la identificación dinámica en series temporales doblemente infinitas, dentro del ámbito de la formulación de modelos no causales. En concreto, presentamos su aplicación a la identificación de los órdenes en una formulación generalizada del modelo FT clásico, que articule o conjugue la presencia de comportamientos causales en el tiempo con la incorporación de expectativas para las variables explicativas que intervienen en el mismo.

1.- LA APROXIMACION DE PADE-LAURENT (APL)

1.1.- DEFINICION DE APL PARA UNA SERIE FORMAL DE LAURENT

Una expresión de la forma $\sum_{i=j}^m c_i z^i$ ($j, m \in \mathbb{Z}$ finiti), se denomina *polinomio de Laurent* de grado $\max\{|i| : c_i \neq 0\}$.

Generalizamos la definición de AP al estudio de series formales de Laurent de acuerdo a la siguiente definición:

Sea $\{c_i\}_{-\infty}^{\infty}$ ($c_i \in C$) una sucesión doblemente infinita a la que asociamos una serie formal de Laurent $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ con $F(z) = Z^+(z) + Z^-(z)$ y donde

$$Z^+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^+ z^i \quad ; \quad Z^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^- z^{-i} \tag{3.1}$$

con $c_0 = c_0^+ + c_0^-$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se denomina *aproximante de Padé-Laurent* (APL) de tipo (J, M) (J, M enteros no negativos) para $F(z)$ al par de ratios $(R^+(z), R^-(z))$ donde $R^+(z)$ es cociente de polinomios de grados J, M en potencias de z y $R^-(z)$ es cociente de polinomios de grados K, M en potencias de z^{-1} , esto es:

$$R^+(z) = \frac{B_I^+(z)}{Q_M^+(z)} \quad ; \quad R^-(z) = \frac{B_K^-(z)}{Q_M^-(z)} \quad (3.2)$$

tal que se verifican las siguientes condiciones:

1) Cuando la serie de potencias $Z^+(z)$ converge en algún entorno de $z = 0$ entonces

$$Z^+(z) - R^+(z) = O_+(z^{J+M+1})$$

2) Cuando la serie de potencias $Z^-(z)$ converge en algún entorno de $z = \infty$ entonces

$$Z^-(z) - R^-(z) = O_-(z^{-(J+M+1)})$$

entendiendo por esto que los desarrollos de los aproximantes $R^+(z)$ y $R^-(z)$ en potencias de z y de z^{-1} respectivamente, esto es,

$$R^+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^+ z^i \quad ; \quad R^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^- z^{-i}$$

determinen los coeficientes de $Z^+(z)$, $Z^-(z)$ y de z^i en $F(z)$ en el sentido de Padé con $c_i = \phi_i$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$) para cierto $n \geq J + M$.

3) $R^+(z) + R^-(z)$ es una función racional $\frac{A_J(z)}{D_M(z)}$ con $D_M(z) = Q_M^+(z) Q_M^-(z)$ donde

$A_J(z)$ y $D_M(z)$ son polinomios de Laurent de la forma:

$$A_J(z) = \sum_{-J}^J a_i z^i \quad ; \quad D_M(z) = \sum_{-M}^M d_i z^i \quad (3.3)$$

Un esbozo para la construcción de tales aproximantes de Padé-Laurent¹ se lleva a cabo de la siguiente forma:

1) Construimos los polinomios clásicos de grado M

$$Q_M^+(z) = \alpha_{0,M}^+ + \alpha_{1,M}^+ z + \dots + \alpha_{M,M}^+ z^M \quad (\alpha_{0,M}^+ = 1)$$

$$Q_M^*(z) = \alpha_{0,M}^* + \alpha_{1,M}^* z + \dots + \alpha_{M,M}^* z^M \quad (\alpha_{M,M}^* = 1)$$

y las series de potencias $P_J^+(z)$ y $P_J^*(z)$ tales que:

$$F(z)Q_M^+(z) - P_J^+(z) = R_{J,M}^+(z) = O_+(z^{J+M+1})$$

$$F(z)Q_M^*(z) - P_J^*(z) = R_{J,M}^*(z) = O_+(z^{J+M})$$

Precisamente, estas expresiones son las que aparecerán en la construcción de un AP a una serie formal de Laurent, y que estudiaremos en el capítulo siguiente.

2) Construimos los polinomios $B_J^+(z), B_J^*(z)$ dados por:

$$Z^+(z)Q_M^+(z) - R_{J,M}^+(z) = -Z^-(z)Q_M^+(z) + P_J^+(z) = B_J^+(z)$$

donde $B_J^+(z)$ representa un polinomio clásico con términos en z desde 0 hasta $\max(J, M)$ y

$$Z^+(z)Q_M^*(z) - R_{J,M}^*(z) = -Z^-(z)Q_M^*(z) + P_J^*(z) = B_J^*(z)$$

donde $B_J^*(z)$ es un polinomio clásico con términos en z desde 0 hasta $\max(J-1, M)$.

3) Desde la definición de $B_J^+(z)$ se obtiene que:

¹Ver Bultheel (1987) para más detalles sobre el proceso de construcción

$$Z^+(z)Q_M^+(z) - B_J^+(z) = R_{J,M}^+(z) = O_+(z^{J+M+1})$$

4) Análogamente, desde la definición de $B_J^*(z)$ se tiene que:

$$Z^-(z)z^{-M}Q_M^*(z) + z^{-M}B_J^*(z) = z^{-M}P_J^*(z) = O_-(z^{-(J+M+1)})$$

5) $z^{-M}Q_M^*(z)Q_M^+(z)$ es un polinomio de Laurent de grado N y constituye el denominador de APL.

6) $z^{-M}B_J^+(z)Q_M^*(z) - z^{-M}B_J^*(z)Q_M^+(z)$, que será el numerador de APL, es un polinomio de Laurent de grado J tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} B_J^+(z)Q_M^*(z) - B_J^*(z)Q_M^+(z) &= [Z^+(z)Q_M^+(z) - R_{J,M}^+(z)]Q_M^*(z) - \\ & [-Z^-(z)Q_M^*(z) + P_J^*(z)]Q_M^+(z) = \\ &= (Z^+(z) + Z^-(z))Q_M^+(z)Q_M^*(z) - R_{J,M}^+(z)Q_M^*(z) - P_J^*(z)Q_M^+(z) = \stackrel{(F(z)Q_M^+(z)=P_J^+(z)+R_{J,M}^+(z))}{=} \\ &= [P_J^+(z) + R_{J,M}^+(z)]Q_M^*(z) - R_{J,M}^+(z)Q_M^*(z) - P_J^*(z)Q_M^+(z) = \\ &= P_J^+(z)Q_M^*(z) - P_J^*(z)Q_M^+(z) = O_-(z^{J+M}) = \\ &= [P_J^*(z) + R_{J,M}^*(z)]Q_M^+(z) - R_{J,M}^+(z)Q_M^*(z) - P_J^*(z)Q_M^+(z) = \\ &= R_{J,M}^*(z)Q_M^+(z) - R_{J,M}^+(z)Q_M^*(z) = O_+(z^{M-J}) \end{aligned}$$

7) En consecuencia,

$$(R^+(z), R^-(z)) = \left(\frac{B_J^+(z)}{Q_M^+(z)}, -\frac{z^{-M}B_J^*(z)}{z^{-M}Q_M^*(z)} \right) \quad (J \geq 0) \quad (3.4)$$

constituye el APL de tipo (J, M) para $F(z)$ siendo por tanto,

$$\begin{aligned} B_J^-(z) &= -z^{-M}B_J^*(z) \\ Q_M^-(z) &= z^{-M}Q_M^*(z) \end{aligned}$$

Cuando se estudian los APL a una serie doblemente infinita no es necesario considerar como punto de encuentro de ambas series el término independiente².

No obstante, y sin pérdida de generalidad, consideraremos el APL para la serie $F(z)$ definido en (3.4). Nótese además que esta definición resulta más conveniente en términos de su definición como par de ratios, esto es, $(R^+(z), R^-(z))$ que como su suma $(R^+(z) + R^-(z))$, pues en tal caso resulta siempre posible encontrar una expresión del tipo $\frac{A_J(z)}{D_M(z)}$ a partir del par $(R^+(z), R^-(z))$, mientras que la implicación en sentido contrario no estaría únicamente definida. Sólo lo estaría cuando $F(z)$ fuese la serie formal de Laurent de una función analítica en $r < |z| < R$, $R^+(z)$ fuese analítica en $|z| < R$, $R^-(z)$ lo fuese en $|z| > r$ ($r < R$) siendo R el radio de convergencia de la serie. En tal caso, la serie de Laurent determinará los coeficientes c_i en la función $F(z)$ para $|i| \leq J + M$.

Nótese, por otra parte que si la serie de Laurent carece de potencias negativas de z , esto es, $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i = \sum_0^{\infty} c_i z^i$, el AP clásico aparece como caso particular.

1.2.- REPRESENTACION RACIONAL DE UNA SERIE FORMAL DE LAURENT: LA TABLA C

Abordar el tratamiento de series formales de Laurent desde la perspectiva de los aproximantes de Padé-Laurent, esto es, a través del estudio de series que convergen en $z = 0$ y paralelamente en $z = \infty$, en términos de su caracterización mediante dos funciones racionales que aproximen las dos direcciones de una serie doblemente

²Por tanto, la definición de APL dada en (3.4) para $F(z)$ puede generalizarse al caso en que $F(z) = Z^{+(p)}(z) + Z^{-(p)}(z)$ siendo p un entero arbitrario. En tal caso, definiendo

$$Z^{+(p)}(z) = \sum_{i=p}^{\infty} c_i^+ z^i \quad ; \quad Z^{-(p)}(z) = \sum_{i=p}^{\infty} c_i^- z^{-i}$$

siendo $c_p = c_p^+ + c_p^-$ podemos construir el APL de tipo (J, M) para $Z^{-p} F(z)$

infinita, supone generalizar los resultados y propiedades de la aproximación clásica de funciones analíticas en $z=0$, que fueron analizadas en el capítulo anterior.

Así, una vez construido el APL $(R^+(z), R^-(z))$ la disposición de los valores de los determinantes de Hankel C_{JM}^+ y C_{JM}^- ($J, M = 0, 1, 2, \dots$) asociados a los coeficientes de las series $Z^+(z)$ y $Z^-(z)$ definidas en (3.1) permite obtener, como extensión del caso clásico, sendas tablas infinitas de doble entrada que denominamos **tablas C** y cuyos elementos se calculan a través de las reglas y relaciones de recurrencia dadas en el capítulo anterior para funciones analíticas en $z=0$.

De nuevo, y en el caso de no normalidad de las series, esto es, que las ecuaciones que determinan los denominadores $Q_M^+(z)$ y $Q_M^-(z)$ en el APL no sean compatibles determinadas, la principal característica de estas tablas será la aparición de una estructura de bloques singulares, es decir, bloques formados por elementos nulos que permitirán, en su caso, caracterizar sendas funciones racionales para las series $Z^+(z)$ y $Z^-(z)$.

Esta estructura de bloques que surge en ambas tablas introduce, de forma análoga al caso clásico ya analizado, una estructura de bloques en las tablas de Padé asociadas a ambas series, de tal forma que para cada bloque todos los AP por encima de la antidiagonal pueden ser reducidos a la misma forma irreducible del elemento superior izquierdo del bloque, mientras que por debajo de la antidiagonal no existen los AP de acuerdo con la definición dada en (2.2) para series formales de potencias.

De acuerdo con las condiciones dadas en (2.11) para la representación racional de una serie formal de potencias en $z=0$, diremos que la función $Z^+(z)$ tiene una representación racional de la forma:

$$Z^+(z) = \frac{\sum_{i=0}^J p_i^+ z^i}{1 + \sum_{i=1}^M q_i^+ z^i} \quad (3.5)$$

si y sólo si los AP $R^+(z) \equiv \left[\frac{j}{m} \right]_{Z^+} = Z^+(z) \forall j \geq J$ y $m \geq M$. Una condición equivalente dada en términos de la tabla C sería que $C_{JM}^+ \neq 0$ y que $C_{j,m}^+ = 0 \forall j > J$ y $m > M$.

Análogamente la función $Z^-(z)$ vendría dada por:

$$Z^-(z) = \frac{\sum_{i=0}^{J^*} p_i^- z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M^*} q_i^- z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^{J^*} p_i^- z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M^*-1} q_i^- z^{-i} + z^{-M^*}}$$

si y sólo si los $R^-(z) \equiv \left[\frac{j}{m} \right]_{Z^-} = Z^-(z) \forall j \geq J^*$ y $m \geq M^*$ o, equivalentemente, $C_{j,m}^- = 0 \forall j > J^*$ y $m > M^*$ siendo $C_{J^*M^*}^- \neq 0$. En tal caso, el elemento C_{J^*+1, M^*+1}^- constituirá el primer elemento nulo del bloque infinito de ceros que aparece en la esquina inferior derecha de la tabla C asociada a la serie $Z^-(z)$.

Por tanto, en el caso en que tanto $Z^+(z)$ como $Z^-(z)$ admitan una representación racional como la dada en (3.5) y (3.6) se tendrá que:

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^J p_i^+ z^i}{1 + \sum_{i=1}^M q_i^+ z^i} + \frac{\sum_{i=0}^{J^*} p_i^- z^{-i}}{\sum_{i=1}^{M^*-1} q_i^- z^{-i} + z^{-M^*}} \quad (3.7)$$

de tal forma que los coeficientes de los numeradores y los denominadores pueden ser calculados.

Nótese que las relaciones de definición de los AP $R^+(z)$ y $R^-(z)$ a las series $Z^+(z)$ y $Z^-(z)$ respectivamente, dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^M c_{i-k}^+ q_k^+ = r_i^+ \quad \text{si } i = 0, 1, \dots, J+M; \quad c_i^+ = 0 \quad \text{si } i \leq 0; \quad r_i^+ = b_i^+ \quad \text{si } i \leq J$$

$$r_i^+ = 0 \quad \text{si } i > J$$

$$\sum_{k=0}^M c_{i-k}^- q_k^- = r_i^- \quad \text{si } i = 0, 1, \dots, J^* + M^*; \quad c_i^- = 0 \quad \text{si } i \geq 0; \quad r_i^- = b_i^- \quad \text{si } i \leq J^*$$

$$r_i^- = 0 \quad \text{si } i > J^*$$

determinarán los numeradores b_i^+ ($i = 0, 1, \dots, J$), b_i^- ($i = 0, 1, \dots, J^*$) y los denominadores q_i^+ ($i = 0, 1, \dots, M$), q_i^- ($i = 0, 1, \dots, M^*$) de los AP antes definidos, siendo

$$r_i^+ = b_i^+ \quad (i = 0, \dots, J), \quad r_i^+ = 0 \quad (i = J+1, \dots, J+M)$$

$$r_i^- = b_i^- \quad (i = 0, \dots, J^*), \quad r_i^- = 0 \quad (i = J^*+1, \dots, J^*+M^*)$$

En concreto, eligiendo como condiciones de normalización $q_0^+ = 1$ y $q_0^- = 1$ los denominadores $Q_M^+(z)$ y $Q_{M^*}^-(z)$ de los AP aproximantes $R^+(z)$ y $R^-(z)$ serán solución de las ecuaciones dadas por:

$$\sum_{k=0}^M c_{i-k}^+ q_k^+ = -c_i^+, \quad i = J+1, \dots, J+M$$

$$\sum_{k=0}^{M^*-1} c_{i-k}^- q_k^- = -c_{i-M^*}^-, \quad i = J^*+1, \dots, J^*+M^*$$

Así mismo, los coeficientes de los numeradores vendrán determinados respectivamente por las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} c_0^+ = b_0^+ & c_0^- q_0^- = b_0^- \\ c_1^+ + c_0^+ q_1^+ = b_1^+ & c_1^- q_0^- + c_0^- q_1^- = b_1^- \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ c_J^+ + \sum_{i=1}^{\min(J,M)} q_i^+ c_{J-i}^+ = b_J^+ & c_{J^*}^- q_0^- + \sum_{i=1}^{\min(J^*,M^*)} q_i^- c_{J^*-i}^- = b_{J^*}^- \end{array}$$

Ahora bien, eligiendo

$$Q_M^+(0) \equiv C_{J,M}^+ = \det \left[(c_{J-M-1+i+j}^+)_{i,j=1}^M \right] \quad (3.8)$$

$$(z^M Q_M^*)(0) \equiv C_{J+1,M}^- = \det[(c_{J-M+i+j}^-)_{i,j=1}^M] \quad (3.9)$$

los AP $R^+(z)$ y $R^-(z)$ estarán bien definidos si y sólo si $C_{J,M}^+ \neq 0$ y $C_{J+1,M}^- \neq 0$.

Por tanto, se obtiene una representación de $F(z)$ como suma de dos expresiones racionales una en z y la otra en z^{-1} . Unificando estas expresiones se obtendría un APL a la serie $F(z)$ de grados apropiados, que estaría bien definido si $F(z)$ fuese la serie formal de Laurent de una función analítica en el anillo circular $r < |z| < R$ siendo R el radio de convergencia de la serie.

Precisamente, el método derivado de estas propiedades constituye en ambos casos el denominado *método corner* en la literatura econométrica y las representaciones racionales obtenidas los *modelos FT* que aproximarían, dentro de una consideración dinámica de la realidad, las dos direcciones de una serie temporal doblemente infinita.

En principio, resulta posible también llevar a cabo el estudio de la representación racional de las series $Z^+(z)$, $Z^-(z)$ a través de otro tipo de algoritmos alternativos a la tabla C. En concreto, la aplicación en este caso del ε -algoritmo estudiado en el capítulo anterior, no supone más que la extensión de las propiedades y resultados obtenidos para funciones analíticas en $z = 0$ al estudio de funciones analíticas en $z = \infty$.

2.- DETERMINACION DE MODELOS RACIONALES EN SERIES TEMPORALES DOBLEMENTE INFINITAS: EL MODELO FT CON EXPECTATIVAS

Siguiendo las pautas que propone la metodología de aproximación de Padé-Laurent en relación con el estudio de series doblemente infinitas, proponemos a continuación abordar su aplicación a la identificación de una formulación generalizada del modelo FT en el que a la información muestral presente y pasada contenida en la propia variable endógena y en las variables exógenas se añade la presencia de expectativas que de modo “ex ante” o “ex post” se realizan sobre las variables exógenas que intervienen en el mismo.

La consideración en este contexto de este tipo de formulación dinámica basada por tanto en el estudio de relaciones no causales en el tiempo va a permitir no sólo extender los procedimientos para la identificación de este tipo de modelos sino que además, en la medida en que se propone un marco dinámico más amplio con el que recoger de forma más precisa la realidad evolutiva, contribuye a superar las limitaciones que en términos predictivos conlleva en ciertos casos la formulación de los modelos causales tradicionales.

2.1.- FORMULACION DEL MODELO FT CON EXPECTATIVAS

En este caso, la formalización de un modelo FT generalizado donde $z_t' = (y_t', x_t')$ representa un proceso en el que y_t' es unidimensional y x_t' de dimensión k , vendría dada por:

$$y_t = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}^+ x_{it-j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} v_{ij}^- x_{it+j}^* + N_t; N_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t; a_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.10)$$

donde y_t y x_{it} son procesos estacionarios.

En este tipo de modelos se supone que el comportamiento de la variable output (dependiente) y_t queda explicado por dos componentes: uno sistemático, descrito a través de una o más variables inputs x_{it} y x_{it}^* (que recoge los valores estimados, que pueden seguir o no la misma distribución que x_t), y otro no sistemático que puede admitir cualquier tipo de estructura ARMA univariante.

Así mismo, se supone la existencia de una relación dinámica de causalidad unidireccional $x_{it}, x_{it}^* \rightarrow y_t$, dada por la combinación de los efectos contemporáneos y desplazados de las variables inputs (incluyendo ahora la presencia de valores esperados recogidos por x_{it}^*) más un componente aleatorio sobre y_t .

Puesto que $L^j(x_{it}) = x_{it-j} \quad \forall j \in Z$, una representación más compacta de (3.10) y para el caso de una sola variable input vendría dada por:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^+ L^j(x_t) + \sum_{j=0}^{\infty} v_j^- L^{-j}(x_t^*) + N_t \quad (3.11)$$

donde

$$v^+(L) = v_0^+ + v_1^+ L + v_2^+ L^2 + \dots; \quad v^-(L) = v_0^- + v_1^- L^{-1} + \dots \quad (3.13)$$

constituyen, por extensión de la terminología dada en Box y Jenkins (1976), las llamadas *funciones de transferencia del filtro* o *funciones de respuesta al impulso (FRI) del sistema*.

Dada esta especificación, el problema consistirá en representar las FRI $v^+(L)$ y $v^-(L)$ mediante una expresión finita a partir de la información muestral disponible. A tal fin, una reformulación más parsimoniosa de (3.11) en el sentido de reducir el número de parámetros de la relación, viene dada por la estructura racional siguiente:

$$y_t = \frac{w_s^+(L)}{\delta_r^+(L)} L^b x_t + \frac{w_s^*(L)}{\delta_r^*(L)} L^{-b^*} x_t^* + N_t$$

donde L^b y L^{-b^*} representan, respectivamente, la posibilidad de un retardo y un adelanto en la respuesta de la variable output ante variaciones en x_t y x_t^* , $w_s^+(L)$ y $\delta_r^+(L)$ son polinomios de grado s y r en L , $w_s^*(L)$ y $\delta_r^*(L)$ son polinomios de grados s^* y r^* en L^{-1} , respectivamente. Esto es,

$$w_s^+(L) = w_0^+ + w_1^+ L + \dots + w_s^+ L^s ; w_s^*(L) = w_0^- + w_1^- L^{-1} + \dots + w_s^- L^{-s}$$

$$\delta_r^+(L) = 1 - \delta_1^+ L - \dots - \delta_r^+ L^r ; \delta_r^*(L) = \delta_0^- - \delta_1^- L^{-1} - \dots - L^{-r^*}$$

Suponemos que $w_s^+(L)$, $\delta_r^+(L)$ por un lado y $w_s^*(L)$, $\delta_r^*(L)$ por otro, no tienen factores comunes y que las raíces de los polinomios característicos de $\delta_r^+(L)$ y $\delta_r^*(L)$ son en módulo mayores que la unidad, con lo cual se garantiza la estabilidad del modelo.

A partir de la formulación dada y sin entrar en la especificación de la estructura de la perturbación N_t , el problema consistirá en determinar, a través de una estimación directa de los pesos de las FRI, los órdenes (s, r, b, s^*, r^*, b^*) de los cocientes polinomiales para x_{it} y x_{it}^* que, a partir de los datos muestrales, describan mejor el comportamiento de $v^+(L)$ y $v^-(L)$, respectivamente.

Bajo el supuesto de que las raíces de los polinomios $\delta_r^+(L)$ y $\delta_r^*(L)$ se encuentran fuera del círculo de radio unidad, podemos escribir:

$$y_t \cong \sum_{j=0}^m v_j^+ x_{t-j} + \sum_{j=0}^n v_j^- x_{t+j}^* + N_t$$

donde m y n indican el número finito de términos para el cual se aproximan las estructuras de retardos, de donde pueden obtenerse directamente los coeficientes v_j^+ y v_j^- .

2.2.- METODOS DE IDENTIFICACION DE LOS ORDENES POLINOMIALES EN UN MODELO FT CON EXPECTATIVAS

2.2.1- El método de la Tabla C

En este sentido, los pasos a seguir que sugiere la metodología de aproximantes de Padé-Laurent en la identificación de esta formulación generalizada del modelo FT serían:

- (1) Obtener las estimaciones de los pesos de las FRI de $v^+(L)$ y $v^-(L)$.
- (2) Una vez obtenidas las ponderaciones de las FRI definimos:

$$v_{j,max}^+ = \max |v_j^+| \quad y \quad \eta_j^+ = v_j^+ / v_{j,max}^+ \quad \eta^+ \equiv (\eta_j^+)_{j \in N} \quad (3.12)$$

$$v_{j,max}^- = \max |v_j^-| \quad y \quad \eta_j^- = v_j^- / v_{j,max}^- \quad \eta^- \equiv (\eta_j^-)_{j \in N} \quad (3.13)$$

donde v_j^+ y v_j^- son las ponderaciones de las FRI y (η_j^+) y (η_j^-) las sucesiones de pesos relativos de los valores de los retardos o adelantos sobre el máximo valor, según el caso, para cada FRI.

A partir de estas sucesiones de pesos relativos podemos construir sendas tablas C asociadas a las variables x_t y x_t^* , de tal forma que la FRI $v^+(L)$ tendrá una representación racional de la forma:

$$v^+(L) = \frac{\sum_{i=0}^{b+s} p_i^+ L^i}{1 + \sum_{i=1}^r q_i^+ L^i} \quad (3.14)$$

si y sólo si, en la tabla C asociada, $C_{B+S,R} = 0 \quad \forall B+S > b+s \wedge \forall R > r$ y $C_{b+s,r} \neq 0$ siendo $C_{b+s+1,r+1}$ el denominado breaking-point en la literatura econométrica, por lo que la estructura de la tabla será la misma que la dada para la representación racional de $v(L)$ en (2.25).

De forma análoga, la función $v^-(L)$ será racional de la forma:

$$v^-(L) = \frac{\sum_{i=0}^{b^*+s^*} p_i^- L^{-i}}{\sum_{i=0}^{r^*-1} q_i^- L^{-i} + L^{-r^*}} \quad (3.15)$$

si y sólo si, en la tabla C asociada, $C_{B^*+S^*,R^*} = 0 \quad \forall B^*+S^* > b^*+s^* \wedge \forall R^* > r^*$ y $C_{b^*+s^*,r^*} \neq 0$ siendo $C_{b^*+s^*+1,r^*+1}$ el *breaking-point*.

Este procedimiento nos va a permitir llevar a cabo precisamente la generalización del *método corner*, cuya utilización se ha centrado hasta ahora en la identificación de formulaciones dinámicas causales y, en concreto, en la identificación del modelo FT en su concepción clásica.

Por tanto, una extensión de las propuestas presentadas en el capítulo anterior en relación al caso clásico para abordar la identificación de un modelo FT, en el que se considera la presencia adicional de expectativas para las variables explicativas relevantes al modelo, vendría dada en los siguientes términos:

Estimadas las ponderaciones v_j^+ y v_j^- , dados los patrones para las sucesiones (η_j^+) y (η_j^-) de pesos relativos y construidos los determinantes de Hankel $C_{f,g}^+$ y $C_{f,g}^-$, podemos obtener para la serie $v^+(L) = \sum \eta_j^+ L^j$ una representación racional del tipo “*caracterización corner*” si y sólo si:

$$\begin{aligned} C_{f,g}^+(\hat{\eta}_j) &= 0 & \text{si} & \quad f \geq b+s+1 & \quad g \geq r+1 \\ C_{f,r}^+(\hat{\eta}_j) &\neq 0 & \text{si} & \quad f \geq b+s \\ C_{b+s,g}^+(\hat{\eta}_j) &\neq 0 & \text{si} & \quad g \geq r \end{aligned}$$

y análogamente para $v^-(L) = \sum \eta_j^- L^{-j}$, f^* , g^* , C^* , s^* , r^* , b^* .

Así, para M , M' y M^* , M'^* enteros mayores que $b+s+1$, $r+1$ y b^*+s^*+1 , r^*+1 respectivamente, podemos construir tablas corner del tipo indicado en el capítulo

anterior para las sucesiones (η_j^+) y (η_j^-) , donde los elementos C representan C^+ o C^- según sea el caso.

En tal caso, $v^+(L)$ tendrá una representación racional $\frac{w_s^+(L)}{\delta_r^+(L)}L^b$ de órdenes (s, r, b) , expresión que coincide con el aproximante de Padé $R^+(L)$ de máximo grado a la serie $v^+(L) = \sum v_j^+ L^j$ de acuerdo a la definición dada para series formales de potencias en el capítulo anterior.

Análogamente se obtiene una representación racional de órdenes (s^*, r^*, b^*) para $v^-(L)$, que coincide con el aproximante $R^-(L)$ a la serie $v^-(L) = \sum v_j^- L^j$.

2.2.2.- Una estimación preliminar de los parámetros del modelo

Un planteamiento análogo en términos de las tablas de Padé asociadas a las series $v^+(L)$ y $v^-(L)$ y que complementa el proceso de identificación que sugiere el uso de las tablas C viene dado en los siguientes términos:

Las sucesiones de pesos relativos (η_j^+) y (η_j^-) definidas en (3.12) y (3.13) satisfacen sendas ecuaciones lineales en diferencias de orden r y r^* y rango $s+b+1$ y s^*+b^*+1 , de tal forma que haciendo uso de la relación entre las ponderaciones de las FRI y su representación racional tendremos que:

$$\begin{aligned} \eta_k^+ - \delta_1^+ \eta_{k-1}^+ - \delta_2^+ \eta_{k-2}^+ - \dots - \delta_r^+ \eta_{k-r}^+ &= 0, & k \geq b + s + 1 \\ &\neq 0, & k = b + s \\ \delta_0^- \eta_k^- - \delta_1^- \eta_{k-1}^- - \delta_2^- \eta_{k-2}^- - \dots - \eta_{k-r^*}^- &= 0, & k \geq b^* + s^* + 1 \\ &\neq 0, & k = b^* + s^* \end{aligned}$$

Estas ecuaciones reescritas en la forma:

$$\sum_{k=1}^r \eta_{j-k}^+ \delta_k^+ = \eta_j^+ \quad j = b + s + 1, \dots, b + s + r$$

$$\sum_{k=1}^{r^*-1} \eta_{j-k}^- \delta_k^- = \eta_{j-r}^- \quad j = b^* + s^* + 1, \dots, b^* + s^* + r^*$$

determinan los denominadores de los AP $R^+(L)$ y $R^-(L)$ para $v^+(L)$ y $v^-(L)$ respectivamente.

$$R^+(L) = \left[\frac{b+s}{r} \right]_{v^+} (L) = L^b \left[\frac{s}{r} \right]$$

$$R^-(L) = \left[\frac{b^*+s^*}{r^*} \right]_{v^-} (L) = L^{b^*} \left[\frac{s^*}{r^*} \right]$$

como el (APL) $(R^+(L), R^-(L))$ para la serie doblemente infinita $\sum_0^\infty v_j^+ L^j + \sum_0^\infty v_j^- L^{-j}$.

En efecto, a partir de $R^+(L) + R^-(L)$ se obtiene, en general, la función racional:

$$\frac{A(L)}{D(L)} = \frac{\sum_{i=0}^{\max(r,b+s)} a_i z^i}{\sum_{i=-r^*}^r d_i z^i}$$

que aproxima simultáneamente las dos direcciones de la serie doblemente infinita

$$\sum_{-\infty}^\infty v_j L^j.$$

En definitiva, las FRI $v^+(L)$ y $v^-(L)$ tendrán una representación racional como las dadas en las expresiones (3.14) y (3.15) si y sólo si para el primer caso, los AP vienen dados por:

$$R^+(L) \equiv \left[\frac{B+S}{R} \right]_{v^+} (L) = v^+(L) \quad \forall B+S \geq b+s \wedge R \geq r \quad \text{con } C_{b+s}^+ \neq 0$$

y para el segundo caso vienen dados por:

$$R^-(L) \equiv \left[\frac{B^* + S^*}{R^*} \right]_{v^-} (L) = v^-(L) \quad \forall B^* + S^* \geq b^* + s^* \quad \wedge \quad R^* \geq r^* \quad \text{con } C_{b^*+s^*, r^*}^- \neq 0$$

Una vez determinados los órdenes polinomiales (s, r, b) y (s^*, r^*, b^*) correspondientes a ambas FRI, se lleva a cabo la estimación de los parámetros en los

$$\text{AP} \left[\frac{b+s}{r} \right]_{v^+} (L) \text{ y } \left[\frac{b^*+s^*}{r^*} \right]_{v^-} (L) \text{ de la forma presentada en Lii (1985).}$$

Estas estimaciones obtenidas para los parámetros de los AP verifican las condiciones de convergencia dadas en el caso clásico y constituyen estimaciones que, si bien son preliminares, van a constituir una buena aproximación inicial para la utilización de otros métodos de estimación más eficientes.

3.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación presentamos los resultados de un ejercicio de simulación para una FT con $b^* = 2, s^* = 1, r^* = 0, b = 2, s = 1, r = 1$. Para un tamaño muestral de 114 observaciones se realizaron 100 replicaciones del siguiente modelo:

$$y_t = (aL^{-2} + bL^{-3})x_t^* + \frac{w_0 + w_1 L}{1 - \delta_1 L} L^2 x_t + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim N(0,4)$. Además,

$(1 - u_0 L)x_t = a_t$ ($a_t \sim N(0,1)$) $a = 0,5; b = 0,8; w_0 = 1,25; w_1 = 0,75; d_1 = 0,5; u_0 = 0,5$ y x_t^* sigue la misma distribución que x_t .

Las estimaciones de los pesos de las FRI se obtienen ajustando y_t en función de x_{t+j} para $j = +12, +11, \dots, +1, 0, -1, \dots, -12$.

Las conclusiones más relevantes son las siguientes:

a) El valor de b , que representa la demora en la reacción de la variable output, se recoge en un porcentaje aproximado al 100%. Los valores s y r de la estructura dinámica se sitúan en el rango $s \in \{1,2\}$ y $r \in \{0,1\}$, dándose en ambos casos un alto porcentaje de aciertos del modelo simulado. Sobre las medias de las ponderaciones de la FRI se obtiene la siguiente tabla, que reproduce el modelo correcto:

	1	2	3	4	5	6
0	.00	.00	.00	.00	.00	.00
1	.00	-.00	.00	.00	.00	.00
2	.90	.81	.73	.65	.59	.53
3	1.00	.55	.30	.17	.09	.05
4	.50	.00	-.00	.01	-.00	-.00
5	.25	.00	.00	.00	.00	.00
6	.12	.00	.00	.00	.00	.00
7	.04	.00	.00	.00	.00	.00

b) El valor de b^* que se recoge se sitúa en el rango $\{2,3\}$ con un alto porcentaje de aciertos del modelo simulado. Los valores de s^* y r^* que se obtienen se sitúan en el rango $s^* \in \{1,2\}$ y $r^* \in \{0,1\}$, recogiénose de forma correcta en un gran número de tablas. En cuanto a la tabla de medias, su comportamiento reproduce correctamente el modelo simulado:

	1	2	3	4	5	6
0	.00	.00	.00	.00	.00	.00
1	-.05	.00	.00	.00	.00	.00
2	.63	.44	.30	.21	.15	.10
3	1.00	1.01	1.04	1.09	1.14	1.19
4	-.01	-.05	-.06	-.01	.05	.03
5	.05	.00	.00	.00	.00	.00
6	-.06	.00	.00	.00	.00	.00
7	.02	.00	.00	.00	.00	.00

En conclusión, los resultados obtenidos permiten validar el método de identificación propuesto, el cual constituye una alternativa válida para abordar la identificación del comportamiento dinámico en el marco de formulaciones no causales y, en concreto, en la identificación de los órdenes polinomiales de un modelo FT con expectativas como el que aquí se presenta.

Por otra parte y dado que las propiedades de la aproximación de Padé-Laurent no son más que una generalización de las correspondientes para el caso clásico, la utilización del ε -algoritmo en la identificación de este tipo de formulaciones está nuevamente justificada.

CAPITULO 4

LA APROXIMACION DE PADE EN MODELOS DE FUNCION DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS

INTRODUCCION

Tal y como se constata en el capítulo anterior, la generalización del tratamiento de series formales de potencias mediante la aproximación de Padé-Laurent, permite introducir una nueva perspectiva en el tratamiento de las relaciones dinámicas entre variables temporales, a través de su consideración en el ámbito de la formulación de modelos no causales.

No obstante, si bien desde esta perspectiva se facilita la adopción de un marco dinámico más amplio y acorde con la realidad evolutiva existente, es posible abordar este aspecto desde una consideración dinámica más general en términos de la formulación de un modelo único que, de forma simultánea, aproxime los comportamientos temporales de las variables involucradas en una relación dinámica dada.

Precisamente, la consideración de esta nueva perspectiva se fundamenta en proponer una generalización de los aproximantes de Padé al estudio de series formales de Laurent. Por ello, nuestro objetivo en este capítulo se centra en sentar las bases de una nueva propuesta metodológica para la modelización racional de series formales de Laurent que, por otro lado, permita abordar y unificar, desde un punto de vista econométrico, el tratamiento de las relaciones dinámicas desde una consideración evolutiva más general.

En definitiva, esta propuesta que se introduce en el análisis de series temporales, en la medida en que articula la metodología hasta ahora propuesta en el análisis de series temporales con la incorporación de expectativas al ámbito tradicional de los modelos causales, no sólo contribuye a superar las posibles limitaciones que en términos predictivos conlleva la formulación de modelos causales sino que además proporciona

un marco adecuado en el que conciliar los principios teórico-económicos con la práctica econométrica.

Bajo este nuevo enfoque presentamos, en primer lugar, los aspectos más relevantes de esta nueva aproximación metodológica para proceder, en una segunda parte, al estudio de su aplicación a la identificación dinámica de un modelo FT con expectativas.

1.--LA APROXIMACION DE PADE (AP) A UNA SERIE FORMAL DE LAURENT

1.1.- DEFINICION Y PROPIEDADES

La generalización de la definición de AP en el caso clásico de series formales de potencias al estudio de series doblemente infinitas o series formales de Laurent viene dada de acuerdo con la siguiente definición (Bultheel, 1987):

Sea $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ la serie formal de Laurent asociada a la sucesión doblemente infinita $\{c_i\}_{-\infty}^{\infty}$, se denomina AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ ($J \in Z, M \in N$) para $F(z)$ a la función racional $\frac{P_J(z)}{Q_M(z)}$ donde $P_J(z)$ es una serie formal de Laurent y $Q_M(z)$ un polinomio clásico dados por:

$$P_J(z) = \sum_{-\infty}^J p_i z^i \quad (J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$Q_M(z) = \sum_0^M q_i z^i \quad (M = 0, 1, 2, \dots)$$

tales que verifican la condición:

$$F(z)Q_M(z) - P_J(z) = O_+(z^{J+M+1}) \quad (4.1)$$

Nótese que, sin embargo, a diferencia del caso clásico donde $P_J(z)$ y $Q_M(z)$ son polinomios de grados J y M , ahora bajo estas condiciones no se seguiría verificando la condición:

$$F(z) - L_+ \left(\frac{P_J(z)}{Q_M(z)} \right) = O_+(z^{J+M+1}), \quad Q_M(0) \neq 0$$

ya que en tal caso el desarrollo del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ en términos crecientes de z , esto es, $L_+ \left(\frac{P_J(z)}{Q_M(z)} \right)$ no estaría definido.

La formulación linealizada del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ a la serie $F(z)$ dada en la expresión (4.1) permite obtener las siguientes ecuaciones de Padé:

$$\begin{aligned} p_{i-M} &= c_{i-M}q_0 + c_{i-M-1}q_1 + \dots + c_{i-2M}q_M \\ &\dots \\ p_i &= c_iq_0 + c_{i-1}q_1 + \dots + c_{i-M}q_M \\ &\dots \\ p_J &= c_Jq_0 + c_{J-1}q_1 + \dots + c_{J-M}q_M \\ 0 &= c_{J+1}q_0 + c_Jq_1 + \dots + c_{J-M+1}q_M \\ &\dots \\ 0 &= c_{J+M}q_0 + c_{J+M-1}q_1 + \dots + c_Jq_M \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $c_j \neq 0$ para algún $j < 0$ y $q_j \equiv 0$ si $J > M$.

Estas relaciones de definición del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$, que pueden ser reescritas como:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = r_j \quad (j = \dots, i-M, \dots, i, \dots, J, J+1, \dots, J+M)$$

$$r_j = \begin{cases} p_j & -\infty < j \leq J \\ 0 & J < j \leq J+M \end{cases}$$

determinarán los coeficientes del denominador $q_k (k = 0, \dots, M)$ y del numerador $p_k (k = \dots, J-1, J)$ del AP, mientras que los coeficientes r_j para $j = J+M+1, J+M+2, \dots$ vendrán dados por la expresión:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = r_j \quad j = J+M+1, J+M+2, \dots$$

En concreto, el conjunto de ecuaciones dado por:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = p_j \quad j = \dots, J-2, J-1, J \quad (4.3)$$

permitirá determinar los coeficientes de la serie $P_J(z)$ una vez calculados los coeficientes de $Q_M(z)$, que a su vez serán solución del sistema dado por:

$$\sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k = 0 \quad j = J+1, \dots, J+M \quad (4.4)$$

Tomando $q_0 = 1$ como condición para normalizar el ratio $\frac{P_J(z)}{Q_M(z)}$, podemos reescribir la expresión (4.4) como un sistema cuadrado de orden M , esto es,

$$\sum_{j=1}^M c_{k-j} q_j = -c_k \quad k = J+1, \dots, J+M$$

Además, teniendo en cuenta que:

$$P_J = [\dots p_{J-2} \quad p_{J-1} \quad p_J]^T$$

$$Q_M = [q_0 \quad q_1 \quad \dots \quad q_M]^T$$

el polinomio $Q_M(z)$ queda definido al expresar el sistema (4.2) para $i = J, \dots, J+M$ en forma matricial por:

$$T_{J,M} Q_M = [p_J \quad 0 \quad 0 \dots 0]^T$$

Por tanto, $Q_M(z) = [1 \quad z \dots z^M] Q_M$ constituye el denominador del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ para $F(z)$ y p_J el término con mayor exponente en el numerador.

Nótese que si q_0 fuese cero, el sistema (4.4) que define $Q_M(z)$ sería homogéneo y, por tanto, si tiene solución distinta de la trivial ésta no es única. En tales circunstancias, esto es, cuando las ecuaciones que determinan $Q_M(z)$ posean infinitas soluciones -en cuyo caso el AP es reducible a aproximantes de orden menor- o sean incompatibles, diremos que el AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ no existe.

Ahora bien, en el caso de que las ecuaciones que determinan los coeficientes del polinomio $Q_M(z)$ formen un sistema compatible determinado, la solución será única y el AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ estará únicamente definido. Dicho de otra forma, definiendo los **determinantes de Toeplitz** $T_{f,g}(c_i)$ ¹ por:

$$T_{f,g}(c_i) = \det \left[(c_{f+k-j})_{k,j=1}^g \right] \quad (4.5)$$

¹Véase Gantmacher (1974), Baker (1975) y Bultheel (1987)

existirá solución única si y sólo si $T_{J,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_J & \cdots & c_{J-M+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{J+M-1} & \cdots & c_J \end{vmatrix}$ es distinto de cero².

Por tanto, cuando la definición de AP se aplica a una serie formal de Laurent en lugar de a una serie formal de potencias, se obtiene un ratio donde el numerador es una serie de Laurent, que es generada por los términos con potencias negativas en la serie de Laurent, y el denominador es un polinomio clásico, esto es,

$$F(z) = \frac{P_J(z)}{Q_M(z)} + O_+(z^{J+M+1}) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} P_J(z) &= \sum_{-\infty}^J p_i z^i \\ Q_M(z) &= \sum_0^M q_i z^i \end{aligned}$$

1.2.- LA TABLA T: ESTRUCTURA Y FORMACION DE BLOQUES

Una vez formulado el problema del AP $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$ a la serie formal de Laurent $F(z)$ así como las condiciones que determinan la existencia y unicidad del AP, procedemos a continuación a estudiar las propiedades esenciales de los determinantes de Toeplitz $T_{f,g}(c_i)$ ($f = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$) asociados a los coeficientes de la serie $F(z)$. Estas propiedades van a constituir una herramienta fundamental para la obtención, en su caso, de un modelo racional de órdenes finitos que represente de forma simultánea y a través de una expresión única la serie $F(z)$.

La extensión del tratamiento de series formales de potencias a series formales de Laurent nos lleva, de forma análoga al estudio del caso clásico y disponiendo en

²La relación entre los determinantes de Hankel y de Toeplitz viene dada a partir de las definiciones (2.10) y (4.5) por la siguiente expresión:

$$C_{J,M}(c_i) = (-1)^{M(M-1)/2} T_{J,M}(c_i)$$

nuestro caso de forma conveniente los determinantes $T_{f,g}(c_i)$ en forma tabular, a la obtención de una matriz infinita de doble entrada $T \equiv (T_{f,g})_{f=-\infty, L, \infty}^{g=0, L, \infty}$, que denominamos **tabla T**, en la que $T_{f,g}(c_i)$ constituye el (f,g) -ésimo elemento de la tabla.

En efecto, la tabla T que se obtiene para la serie formal de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ no es sino la generalización de la tabla C obtenida para el caso clásico, pero con la diferencia de que, si bien en aquel contexto la tabla se estructura en filas y columnas de dimensión infinita, esto es, $f, g = 0, 1, 2, \dots$, con $c_i = 0$ si $i < 0$, ahora sin embargo se extienden al caso $-\infty, \infty$, esto es, $f = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$, con lo cual se considera también la posibilidad de que $c_i \neq 0$ si $i < 0$:

g	0	1	2	3	...
f					
...
-2	1	c_{-2}	x	x	x
-1	1	c_{-1}	0	0	x
0	1	c_0	0	0	x
1	1	c_1	x	x	x
...

“x” representa valores no nulos
 “0” representa valores ‘significativamente’ nulos

donde los elementos de la primera columna son por definición la unidad y la segunda columna viene dada por $T_{f,1} = c_f$, esto es, por los coeficientes de la serie. Los elementos nulos aparecerán agrupados en una estructura característica de bloques cuadrados, tal y como mostraremos a continuación.

Se dice que la serie de Laurent $F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ es **normal** si todos los determinantes $T_{f,g}(c_i)$ son no nulos. En tal caso, todos los elementos en la tabla T serán no nulos y todos los AP de tipo $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$ en la correspondiente tabla de Padé existirán, siendo $P_J(z)$ y $Q_M(z)$ de grados máximos J y M respectivamente. Así mismo, el orden del residuo dado por $R(z) = F(z)Q_M(z) - P_J(z)$ será exactamente $J + M + 1$ y el par $(P_J(z), Q_M(z))$ estará únicamente definido.

Nótese que en el caso de que la serie de Laurent $F(z)$ no sea normal, esto es, los determinantes $T_{f,g}(c_i)$ sean nulos para algún valor de f, g ($f = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$) sólo habrá solución para la condición:

$$F(z)Q_M(z) - P_J(z) = O_+(z^{J+M+1})$$

si $Q_M(z)$ es un polinomio clásico de grado M y $P_J(z)$ una serie de Laurent de grado máximo J .

Es ésta precisamente la razón por la que resulta más conveniente definir el AP $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$ a la serie de Laurent $F(z)$ como par de elementos $(P_J(z), Q_M(z))$ que como un cociente $\left(\frac{P_J(z)}{Q_M(z)} \right)$, ya que así es posible aún, en aquellas situaciones donde debido a la no normalidad de la serie el ratio de dos elementos no está definido, obtener formas de Padé que permitan resolver el problema linealizado de aproximación sin la restricción de que el término independiente del denominador, esto es, q_0 , sea distinto de cero.

Ahora bien, en el caso de no normalidad de la serie $F(z)$, esto es, cuando las ecuaciones que determinan los coeficientes del denominador en la construcción del AP $\left[\begin{matrix} J \\ M \end{matrix} \right]_F$ no formen un sistema compatible determinado, los determinantes $T_{f,g}(c_i)$ serán

nulos para algún valor de f, g en cuyo caso, la principal característica de la tabla T será, de forma análoga a la tabla C en el caso clásico, la aparición de una estructura de bloques cuadrados formados por elementos nulos y rodeados por elementos no nulos. La formalización de esta estructura de bloques en la tabla T se recoge en el siguiente teorema:

Teorema (Bultheel, 1987).- Sea $F(z)$ una serie formal de Laurent no nula tal que

$F(z) = \sum_{i=K^+}^{K^-} c_i z^i$ (K^+, K^- pueden ser infinito). Sea $S(z) = (B(z), Q(z), P(z), R(z))$ la solución reducida y única -por la condición de normalización elegida para $Q(z)$ - del conjunto de ecuaciones dado por:

$$\begin{aligned}
 P_J(z) &= \sum_{i=-\infty}^J \text{término grado } i \text{ de } (F(z)Q_M(z)) \\
 \sum_{i=J+1}^{J+M} \text{término grado } i \text{ de } (F(z)Q_M(z)) &= 0 \\
 R_{J,M}(z) &= \sum_{i=J+1}^{\infty} \text{término grado } i \text{ de } (F(z)Q_M(z)) \\
 B_{J,M}(z) &= \sum_{i=\min(0, J+M+1)}^{\max(J, M)} \text{término grado } i \text{ de } (Z(z)Q_M(z))
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

con $Z(z) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$ para algún valor de $M \geq 0$ y $K^+ \leq J \leq K^-$.

Sea $Q(z) = \sum_0^U q_i z^i$, $P(z) = \sum_{-\infty}^K p_i z^i$, $R(z) = \sum_{\hat{K}+U+1}^{\infty} r_i z^i$. Definiendo $h = \hat{K} - K$ se tiene que:

- a) $h \geq 0$.
- b) $S(z) = (B(z), Q(z), P(z), R(z))$ es solución reducida del conjunto de ecuaciones (4.6) si y sólo si

$$K \leq J \leq \hat{K} \text{ y } U \leq M \leq U + h \tag{4.7}$$

- c) $\forall (J, M)$ que satisfaga la expresión (4.7), $S_{J,M}(z) = (B_{J,M}(z), Q_M(z), P_J(z), R_{J,M}(z))$ es una solución de (4.6) si y sólo si $S_{J,M}(z) = z^{\lambda_M} D(z)S(z)$ con

$$\begin{aligned}\lambda_M^J &= \max\{0, (J - K) + (M - U) - h\} \text{ si } K > -\infty \\ &= \max\{0, (J - \hat{K}) + (M - U)\} \text{ si } \hat{K} < \infty\end{aligned}$$

y $D(z)$ es un polinomio no nulo de grado máximo dado por $\delta_M^{(J)} = M - \text{rango}[f_{J+i-j}]_{j=0, \dots, M}^{i=0, \dots, M}$.

d) A partir de la definición de los determinantes de Toeplitz $T_{J,M}(c_i) = \det[c_{J+k-j}]_{k,j=1}^M$, las propiedades que verifica la tabla T asociada a la solución reducida del sistema serán³:

$$\begin{aligned}T_{J,U}(c_i) &\neq 0, \quad K \leq J \leq \hat{K} \\ T_{K,M}(c_i) &\neq 0, \quad U \leq M \leq U + h \text{ si } K > -\infty \\ T_{\hat{K}+1,M}(c_i) &\neq 0 \quad U \leq M \leq U + h \text{ si } \hat{K} < \infty \\ T_{J,U+h+1}(c_i) &\neq 0 \quad K \leq J \leq \hat{K} \text{ si } h < \infty \\ T_{J,M}(c_i) &= 0 \quad K < J \leq \hat{K} \text{ y } U < M \leq U + h\end{aligned}$$

Estas propiedades se traducen en la aparición en la tabla T de una estructura de bloques de tamaño h , formados por elementos nulos, tal y como se muestra a continuación:

³Para una demostración de estas propiedades véase Bultheel (1987).

J	M	1	U	$U+1$...	$U+h$	$U+h+1$...
...		0	0	0	0	...	0	0	...
K^+		1	x	x	x	...	x	x	...
...	
K		1	...	x	x	x	x	x	...
...		x	0	0	0	x	...
...		x	0	0	0	x	...
\hat{K}		1	...	x	0	0	0	x	...
$\hat{K}+1$		1	...	x	x	x	x	x	...
...	
K^-		1	...	x	x	...	x	x	...
...		0	...	0	0	...	0	0	...

donde si $F(z) = \sum_{K^+}^{K^-} c_i z^i$ entonces $T_{JM}(c_i) = 0 \quad \forall J > K^- \wedge J < K^+$.

Este teorema no es sino la generalización del teorema dado en Baker (1975) para la caracterización de la estructura de bloques en una serie formal de potencias, esto es,

$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$. Así, teniendo en cuenta que este resultado puede ser generalizado a los

casos en que $F(z) = \sum_{K^+}^{\infty} c_i z^i \quad (K^+ > -\infty)$ o $F(z) = \sum_{-\infty}^{K^-} c_i z^i \quad (K^- < \infty)$ (con la

transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$), la estructura de bloques que se describe en la tabla T es en

realidad la descrita en Baker excepto para las filas anteriores a K^+ y posteriores a K^- , respectivamente.

En el caso clásico de series formales de potencias, el grado del polinomio $P_J(z)$ y el orden de aproximación alcanzado $J+M+1$ dado por el residuo $R(z)$, permitían

caracterizar la estructura de bloques en la tabla C al delimitar la fila superior e inferior respectivamente de un bloque. Ahora bien, dado que en el caso de series formales de Laurent, $P_J(z)$ puede ser no sólo de grado no negativo sino incluso $-\infty$, esto es, $J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, un bloque no estará definido en general por su fila superior y su tamaño h , ya que la fila inferior no estará definida por el grado de $P_J(z) + h$ si el grado de $P_J(z)$ y, por tanto, h son infinito.

Los valores K, \hat{K}, U están relacionados con la solución única y reducida del sistema (4.6) con lo cual, para una serie $F(z)$ dada dependen sólo de los valores J y M . Además, teniendo en cuenta que cualquier determinante $T_{J,M}(c_i)$ no nulo sólo puede existir en la región $K^+ \leq J \leq K^-$ y $M \geq 0$, entonces podemos definir:

$$\begin{aligned}
 U_M^{(J)} &= 0 && \text{si } J < K^+ \text{ o } J > K^- \\
 &= U && \text{en otro caso} \\
 h_M^{(J)} &= \infty && \text{si } J < K^+ \text{ o } J > K^- \\
 &= h && \text{en otro caso} \\
 K_M^{(J)} &= -\infty && \text{si } J < K^+ \\
 &= K^- && \text{si } J > K^- \\
 &= K && \text{en otro caso} \\
 K_M^{(J)} &= K^+ - 1 && \text{si } J < K^+ \\
 &= \infty && \text{si } J > K^- \\
 &= \hat{K} && \text{en otro caso}
 \end{aligned}$$

La aparición en la tabla T de una estructura de bloques de tamaño infinito, esto es, $h_M^{(J)} = \infty$ vendrá dada si y sólo si $K_M^{(J)} = -\infty$ o $\hat{K}_M^{(J)} = \infty$. Además, podemos definir $\hat{K}_M^{(J)} = K_M^{(J)} + h_M^{(J)}$ si $J \geq K^+$ y $K_M^{(J)} = \hat{K}_M^{(J)} - h_M^{(J)}$ si $J \leq K^-$.

A su vez, esta estructura de bloques singulares en la tabla T, asociada a la no normalidad de la serie $F(z)$, introduce una estructura de bloques cuadrados en la tabla

de Padé, que presenta las mismas características que las dadas en el caso clásico. Esto es, para un bloque hipotético en la tabla de Padé los AP situados por encima de la anti-diagonal serán reducibles al elemento superior izquierdo del mismo, es decir, el elemento $\left[\frac{K}{U} \right]$, mientras que los AP para el resto del bloque no existirán, bien por la incompatibilidad de las ecuaciones asociadas o bien por existir infinitas soluciones.

1.3.- REPRESENTACION DE UNA SERIE FORMAL DE LAURENT A TRAVES DE UN MODELO RACIONAL: EL METODO DE LA TABLA T

Tal y como hemos visto, el estudio de las propiedades que verifican los determinantes de Toeplitz asociados a una serie formal de Laurent $F(z)$ permite, bajo el supuesto de no normalidad de la serie, configurar una estructura de bloques en la tabla T que reproduce su comportamiento en la tabla de Padé asociada a la misma.

Ahora bien, si se generalizan las propiedades dadas en el teorema anterior para los determinantes $T_{J,M}(c_i)$ asociados a la solución reducida del sistema (4.6) para todo valor de h , se obtendrá una tabla T caracterizada en tal caso por la presencia de una estructura de bloques de tamaño infinito. Esta nueva configuración permitirá establecer una condición análoga a la dada en el caso clásico para representar la serie de Laurent $F(z)$ mediante un modelo racional.

Teorema.-Dada la serie formal de Laurent $F(z)$, las tres condiciones siguientes son equivalentes:

$$1) F(z) = \frac{\sum_{i=0}^K p_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^U q_i z^i} \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad U = 0, 1, 2, \dots$$

$$2) \left[\frac{J}{M} \right]_F = F(z) \quad \forall J \geq K, \forall M \geq U \quad (4.8)$$

$$3) T_{K,U}(c_i) \neq 0; \quad T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J > K, \forall M > U$$

Estas condiciones se reflejan en la aparición en la tabla T asociada a $F(z)$ de un bloque de tamaño infinito -formado por elementos nulos-, en la esquina inferior derecha de la tabla, esto es,

M	0	1	...	U	$U+1$...	$U+h$...
J								
...	0	0	...	0	0	...	0	...
K^+	1	x	...	x	x	...	x	...
...
$K-1$	1	x						
K	1	x		x	x	x	x	...
...	x	0	0	0	...
\hat{K}	1	x		x	0	0	0	...
...	x	0	0	0	...
K^-	1	x	...	x	0	0	0	...
...	0	0

siendo $(K+1, U+1)$ el primer elemento nulo del bloque singular, esto es, el ya denominado breaking-point (Lii, 1985).

Ahora bien, dado que este método de caracterización basado en el uso de la tabla T no es más que la generalización del procedimiento descrito con anterioridad para series formales de potencias mediante la tabla C, pueden hacerse ahora consideraciones análogas en torno a la utilización de la tabla T para, en el caso de disponer de valores aproximados para los coeficientes del desarrollo de una función $F(z)$ desconocida,

poder determinar una aproximación racional parsimoniosa entre distintas alternativas de especificación. Así mismo, la tabla de Padé sigue confirmándose como herramienta de caracterización complementaria al uso de la tabla T, al tiempo que permite obtener estimaciones iniciales de los parámetros en el AP para su posterior utilización por métodos de estimación iterativos más eficientes.

De forma paralela al caso clásico en el que, dentro de la teoría de aproximación racional, se han propuesto diversos métodos de caracterización alternativos al uso de la tabla C y cuya utilización resulta más sencilla, esto es, el ε -algoritmo, el método de la tabla R-S, etc, resulta también posible, como una alternativa a la utilización del método de la tabla T, extender o generalizar estos procedimientos al estudio de la identificación de modelos racionales en series formales de Laurent.

1.4.- DEFINICION DE UN AP FINITO PARA UNA SERIE FORMAL DE LAURENT

Una vez estudiadas las condiciones para la representación de una serie formal de Laurent $F(z)$ a través de un modelo racional de la forma dada en (4.8), nuestro objetivo se centra ahora en determinar bajo qué supuestos la serie de Laurent $P_K(z)$ ⁴, que aparece en el numerador del AP $\left[\frac{J}{M} \right]_F$ a la serie $F(z)$, se puede aproximar a través de un número finito de términos, esto es, se puede reducir a una expresión finita de la forma:

$$P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} + O_-(z^{-(N-H+1)}) \quad (4.9)$$

donde

⁴La "K" indica la potencia de partida de la serie.

$$A_{H,K}(z) = \sum_{i=-K}^{-H} a_{-i} z^{-i} \quad (H, K \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad Q_{-N}(z) = \sum_{i=0}^N q_{-i} z^{-i}$$

$$-\infty < H \leq K$$

$$a_i = 0 \quad i < H$$

y $\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)}$ constituye el AP $\left[\frac{-H}{N} \right]_{P_K}(z^{-1})$ clásico a la serie $P_K(z)$ en potencias de z^{-1} .

La formulación linealizada del AP $\left[\frac{-H}{N} \right]_{P_K}(z^{-1})$ a la serie $P_K(z)$ ⁵ dada por:

$$P_K(z)Q_{-N}(z) - A_{H,K}(z) = O_-(z^{-(N-H+1)})$$

permite, a partir del conjunto de ecuaciones de Padé asociadas, determinar los coeficientes del denominador y del numerador del AP y construir el AP $\left[\frac{-H}{N} \right]_{P_K}(z^{-1})$ a $P_K(z)$ hasta el orden $z^{-(H-N)}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la serie formal de Laurent $P_K(z) = \sum_{i=-\infty}^K p_i z^i$ puede ser considerada una serie formal de potencias en z^{-1} , el estudio de las condiciones que han de verificar los determinantes $T_{JM}(p_i)$ en la tabla T asociada a $P_K(z)$ o equivalentemente, los AP $\left[\frac{(H,K)}{(-N)} \right]_P$ en la tabla de Padé para la representación de $P_K(z)$ a través de un modelo de orden finito de la forma dada en (4.9), son del mismo tipo que las expuestas en el capítulo 2.

⁵En el caso clásico la teoría se desarrolla sin pérdida de generalidad para $K=0$.

Además, téngase en cuenta que la serie $P_K(z)$ converge en el exterior de un círculo centrado en el origen. En efecto, partiendo de la teoría del caso clásico podemos dar el siguiente resultado:

Teorema.- La serie formal de Laurent $P_K(z) = \sum_{-K}^{\infty} p_{-i} z^{-i}$ ($K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

considerada como una serie de potencias en z^{-1} , tendrá una representación racional de la forma:

$$P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} = \frac{\sum_{-K}^{-H} a_{-i} z^{-i}}{\sum_0^N q_i z^{-i}} \quad (4.10)$$

si y sólo si los AP $\left[\frac{(-J)}{M} \right]_{P_K} = P_K(z) \quad \forall J \leq H \quad (-J \geq -H), M \geq N$ con $T_{H,N}(p_i) \neq 0$ o, equivalentemente, $T_{J,M}(p_i) = 0 \quad \forall J < H \quad (-J > -H), M > N$.

Ahora bien, es nuestro interés estudiar condiciones que no requieran la construcción de los determinantes $T_{J,M}(p_i)$ para la serie $P_K(z)$ previo cálculo de sus coeficientes. En este sentido y como veremos a continuación, a partir de las propiedades que verifican los determinantes $T_{J,M}(c_i)$ en la tabla T asociada a $F(z)$, resulta posible determinar las condiciones dadas en el teorema anterior para los determinantes $T_{J,M}(p_i)$, a fin de obtener una representación de orden finito para la serie de Laurent $P_K(z)$.

Con este propósito establecemos el siguiente resultado:

Teorema.- La serie $P_K(z)$ admite una representación racional de la forma

$$P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} \text{ si y sólo si } T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H, (-J > -H), M > N.$$

Demostración: “ \Leftarrow ”

Desde (4.2) se tiene que:

$$p_j = \sum_{k=0}^M c_{j-k} q_k \quad (j = -\infty, \dots, K)$$

$$p_j = 0, \quad j > K$$

Por tanto,

$$T_{J,M}(p_i) = \begin{vmatrix} p_J & \cdots & p_{J-M+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{J+M-1} & \cdots & p_J \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_J + c_{J-1}q_1 + \cdots + c_{J-M}q_M & \cdots & c_{J-M+1} + \cdots + c_{J-2M+1}q_M \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-1} + \cdots + c_{J-1}q_M & \cdots & c_J + \cdots + c_{J-M}q_M \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_J & c_{J-1} + \cdots + c_{J-M-1}q_M & \cdots & c_{J-M+1} + \cdots + c_{J-2M+1}q_M \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-1} & c_{J+M-2} + \cdots + c_{J-2}q_M & \cdots & c_J + \cdots + c_{J-M}q_M \end{vmatrix} +$$

$$+ q_1 \begin{vmatrix} c_{J-1} & c_{J-1} + \cdots + c_{J-M-1}q_M & \cdots & c_{J-M+1} + \cdots + c_{J-2M+1}q_M \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-2} & c_{J+M-2} + \cdots + c_{J-2}q_M & \cdots & c_J + \cdots + c_{J-M}q_M \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + q_M \begin{vmatrix} c_{J-M} & c_{J-1} + \cdots + c_{J-M-1}q_M & \cdots & c_{J-M+1} + \cdots + c_{J-2M+1}q_M \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J-1} & c_{J+M-2} + \cdots + c_{J-2}q_M & \cdots & c_J + \cdots + c_{J-M}q_M \end{vmatrix}$$

El desarrollo recursivo de estos $M + 1$ determinantes de tamaño M permite obtener, a través de un proceso iterativo, una suma de $(M + 1)^M$ determinantes cuyas M columnas forman parte de la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} c_J & c_{J-1} & \cdots & c_{J-M+1} & c_{J-M} & \cdots & c_{J-2M+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-1} & c_{J+M-2} & \cdots & c_J & c_{J-1} & \cdots & c_{J-M} \end{pmatrix}$$

Así pues, en el caso en que:

$$T_{J,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_J & \cdots & c_{J-M+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-1} & \cdots & c_J \end{vmatrix}, T_{J-1,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_{J-1} & \cdots & c_{J-M} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J+M-2} & \cdots & c_{J-1} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T_{J-M,M}(c_i) = \begin{vmatrix} c_{J-M} & \cdots & c_{J-2M+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{J-1} & \cdots & c_{J-M} \end{vmatrix}$$

son nulos, cualquier determinante cuyas M columnas formen parte de la matriz A será nulo debido a que el rango de A es menor que M . Observar que cada columna de la matriz A es combinación lineal de las $M - 1$ columnas anteriores a ella. Por tanto, podemos concluir que:

Si $T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H, \forall M > N$ entonces $T_{J,M}(p_i) = 0 \quad \forall J < H, \forall M > N$ y por el teorema anterior $P_K(z)$ tiene la estructura indicada.

“ \Rightarrow ”

Si $P_K(z) = \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)}$, aplicando (4.8) para $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{-i} z^{-i}$ se deduce que

$$T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H, \forall M > N.$$

1.4.1.- Estructura de la Tabla T para un AP finito

Como consecuencia del teorema anterior podemos establecer que:

$$\begin{array}{ccc}
 T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H & & T_{J,M}(p_i) = 0 \quad \forall J < H \\
 & \Leftrightarrow & \\
 \forall M > N & & \forall M > N
 \end{array}$$

en cuyo caso $P_K(z)$ tendrá una representación como la dada en (4.10).

Esta caracterización de un modelo racional de órdenes finitos para $P_K(z)$ se traduce en términos de la tabla T asociada a $F(z)$ en la aparición de un bloque infinito, formado por elementos nulos, en la esquina superior derecha de la tabla siendo $T_{H,N}(c_i) \neq 0$, esto es,

M	0	1	...	$N+1$	$N+2$
J							
...
$H-2$	1	x	x	0	0	0	...
$H-1$	1	x	x	0	0	0	...
H	x	x	x	x	...
$H+1$	1	x					
...
$K-1$	1	x
K	1	x

1.5.- REPRESENTACION DE UNA SERIE FORMAL DE LAURENT MEDIANTE UNA FUNCION RACIONAL DE ORDENES FINITOS

A partir de las definiciones de AP para una serie formal de potencias (Baker y Graves Morris vol I, 1981) y de su extensión al estudio de series formales de Laurent (Bultheel, 1987) podemos dar la siguiente definición generalizada:

Definición.- Dados $H, K \in \mathbb{Z}$ y $N, U \in \mathbb{N}$ el AP a la serie formal de Laurent

$$F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i \quad (c_i, z \in \mathbb{C}), \text{ se domina AP } \left[\begin{matrix} (H, K) \\ (-N, U) \end{matrix} \right]_F \text{ a la función racional } \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N,U}(z)}$$

donde

$$A_{H,K}(z) = \sum_{i=H}^K a_i z^i \quad ; \quad Q_{-N,U}(z) = Q_{-N}(z)Q_U(z) = \left(\sum_{i=-N}^0 q_i z^i \right) \left(\sum_{i=0}^U q_i z^i \right) \quad (4.11)$$

tal que existe una serie formal $P_K(z) = \sum_{i=-\infty}^K p_i z^i$ ($K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) para la cual se verifica que:

$$F(z)Q_U(z) - P_K(z) = O_+(z^{K+U+1}) \text{ y } P_K(z)Q_{-N}(z) - A_{H,K}(z) = O_-(z^{-(N-H+1)}) \quad (4.12)$$

es decir, $\frac{P_K(z)}{Q_U(z)}$ es el AP $\left[\begin{matrix} K \\ U \end{matrix} \right]_F(z)$ y $\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)}$ es el AP $\left[\begin{matrix} -H \\ N \end{matrix} \right]_{P_K}(z^{-1})$

Observar que esta definición se da en forma linealizada ya que el desarrollo en serie de potencias crecientes de $\frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N,U}(z)}$ no está bien definido.

A partir de la definición de los determinantes de Toeplitz $T_{f,g}(c_i)$ dada en (4.5), esto es, $T_{f,g}(c_i) = \det[(c_{f+k-j})_{k,j=1}^g]$, podemos concluir que el AP $\left[\begin{array}{c} (H, K) \\ (-N, U) \end{array} \right]_F$ estará bien definido si y sólo si $T_{H,N}(c_i) \neq 0$ y $T_{K,U}(c_i) \neq 0$.

La construcción del AP $\left[\begin{array}{c} (H, K) \\ (-N, U) \end{array} \right]_F$ tiene lugar a través de los siguientes pasos:

a) En primer lugar, se construye el AP $\left[\begin{array}{c} K \\ U \end{array} \right]_F \equiv \frac{P_K(z)}{Q_U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^K p_i z^i}{\sum_{i=0}^U q_i z^i}$ (Bultheel, 1987) a la

serie $F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ tal que $F(z)Q_U(z) - P_K(z) = O_+(z^{K+U+1})$.

En tal caso, el AP $\left[\begin{array}{c} K \\ U \end{array} \right]_F$ estará bien definido si y sólo si $T_{K,U}(c_i) \neq 0$.

b) En segundo lugar, se construye el AP $\left[\begin{array}{c} -H \\ N \end{array} \right]_P(z^{-1}) \equiv \frac{A_{H,K}(z)}{Q_{-N}(z)} = \frac{\sum_{i=-K}^{-H} a_{-i} z^{-i}}{\sum_{i=0}^N q_{-i} z^{-i}}$ a la

serie $P_K(z) = \sum_{i=-K}^{\infty} p_{-i} z^{-i}$ tal que $P_K(z)Q_{-N}(z) - A_{H,K}(z) = O_-(z^{-(N-H+1)})$.

En tal caso, el AP $\left[\begin{array}{c} -H \\ N \end{array} \right]_{P_K}(z^{-1})$ estará bien definido si y sólo si $T_{H,N}(p_i) \neq 0$.

1.5.1.-Estructura de la Tabla T para una función racional de órdenes finitos

En consecuencia, una vez obtenidas las condiciones que, por un lado, permiten representar la serie $F(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i$ a través de un modelo racional de la forma dada en (4.8) y que, por otro lado, garantizan la representación de la serie $P_K(z)$ en el

numerador del AP $\left[\frac{K}{U} \right]_F$ mediante una expresión finita como la dada en (4.9), podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema.- Dada la serie formal de Laurent $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ las tres condiciones siguientes son equivalentes:

$$a) F(z) = \frac{\sum_{i=H}^K a_i z^i}{(1 + \sum_{i=1}^N \alpha_{-i} z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^U \alpha_i z^i)}$$

$$b) \left[\begin{matrix} (h, k) \\ (-n, u) \end{matrix} \right]_F = F(z), \quad \forall h \leq H, \forall n \geq N, \forall k \geq K, \forall u \geq U$$

$$c) T_{H,N}(c_i) \neq 0, T_{K,U}(c_i) \neq 0; T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J < H \wedge M > N;$$

$$T_{J,M}(c_i) = 0 \quad \forall J > K \wedge M > U$$

En tal caso, la tabla T asociada a la serie $F(z)$ se caracterizará por presentar una estructura de bloques de tamaño finito e infinito, formados por elementos nulos, en las esquinas superior e inferior derecha de la tabla T, esto es,

M	0	1	...	$N+1$...	U	$U+1$
J									
...
$H-2$	1	x	x	0	0	0	0	0	...
$H-1$	1	x	x	0	0	0	0	0	...
H	x	x	x	x	x	x	
...
K	1	x	...	x	...	x	x	x	...
$K+1$	x	0	0	...
$K+2$	1	x	...	x	...	x	0	0	...
...

Este método para la determinación de modelos racionales en series doblemente infinitas constituye precisamente la generalización del método corner clásico propuesto en la literatura econométrica para la identificación de modelos ARMA. Así mismo, la representación racional de órdenes finitos obtenida para la serie $F(z)$ constituiría, dentro del contexto del análisis de series temporales, el modelo FT que en este caso aproximaría de forma simultánea y a través de una expresión única el comportamiento de una serie temporal doblemente infinita, esto es, una relación dinámica en la que intervienen comportamientos presentes, pasados y futuros de las variables involucradas.

1.6.- LA GENERALIZACION DEL ϵ -ALGORITMO: ESTRUCTURA DE LA TABLA- ϵ

Si bien el método de la tabla T constituye un procedimiento válido para la representación de una serie formal de Laurent mediante un modelo racional, la utilización de otros métodos alternativos a éste, también basados en la aproximación de Padé, resulta de especial interés en este contexto.

En concreto, la generalización del ϵ -algoritmo, a partir de los resultados obtenidos para el caso clásico y de la relación existente entre los determinantes de Toeplitz y los

valores ε_k^n , permite obtener la siguiente caracterización racional para la serie de Laurent $F(z)$.

Teorema.- Dada la serie formal de Laurent $F(z)$ las siguientes condiciones son equivalentes:

$$1) F(z) = \frac{\sum_{i=H}^K a_i z^i}{(1 + \sum_{i=1}^N q_{-i} z^{-i})(1 + \sum_{i=1}^U q_i z^i)}$$

$$2) \varepsilon_{2U}^{K-U}(c_i) \neq 0, \quad \varepsilon_{2U}^j(c_i) = 0 \quad \forall j > K - U$$

$$\varepsilon_{2N}^{H-N}(c_i) \neq 0, \quad \varepsilon_{2N}^j(c_i) = 0 \quad \forall j < H - N$$

Estas propiedades, que no son más que la generalización del ε -algoritmo para el caso clásico, permiten la obtención de una tabla- ε cuya principal característica será, de forma análoga a la tabla T, la presencia de una estructura de bloques singulares de tamaño finito e infinito, esto es, en la parte superior e inferior de la tabla:

Co	0	...	2(N-1)	2N	...	2(U-1)	2U
Fil							
...
$H - 1$	1	x	x	0
$H - 1$	1	x	x	0
H	x	x	x
...
K	1	x	x	x	x
$K + 1$	x	0
$K + 2$	1	x	x	x	0
...

2.- DETERMINACIÓN DE MODELOS RACIONALES EN SERIES TEMPORALES DOBLEMENTE INFINITAS: EL MODELO DE FUNCION DE TRANSFERENCIA CON EXPECTATIVAS

Dado que la metodología propuesta resulta especialmente útil en la determinación de modelos racionales en series doblemente infinitas, proponemos a continuación abordar su aplicación al estudio de la identificación dinámica en una formulación generalizada del modelo FT como la dada en (3.11) que, junto a la existencia de observaciones pasadas sobre las variables implicadas en la relación dinámica considerada, toma en consideración las expectativas que se formulan sobre las variables exógenas del modelo.

Con esta nueva perspectiva que se introduce en el tratamiento de las relaciones dinámicas entre variables temporales a través de la consideración de modelos no causales no sólo se ofrece un marco dinámico más amplio y acorde con la realidad evolutiva inherente a la realidad económica que facilite la planificación y toma de decisiones, sino que además dentro de este contexto, representa una alternativa a la modelización a través del empleo de la aproximación de Padé-Laurent. Dicho de otra forma, la consideración de esta nueva propuesta metodológica a la vez que contribuye a superar las limitaciones que en términos predictivos conlleva la formulación de modelos causales, permite unificar el tratamiento de la modelización separada de series temporales doblemente infinitas, a través de la formulación de un modelo que de forma simultánea y única aproxime las dos direcciones en el dominio del tiempo.

2.1.- FORMULACIÓN GENERALIZADA DEL MODELO FT CON EXPECTATIVAS

Consideremos como marco de referencia la formulación del modelo FT dada en (3.10).

Teniendo en cuenta la formulación dada en el caso más simple de una sola variable input y considerando que $L^j(x_{it}) = x_{it-j} \quad \forall j \in Z$, podemos obtener una representación más compacta de (3.10) que vendría dada por:

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j L^j x_t + N_t \quad (4.13)$$

donde $x_{t-j} = x_{t-j}^*$ si $j \geq 0$, $x_{t-j} = x_{t-j}^{**}$ si $j < 0$ y $v(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j L^j$ representa la FRI, esto es, la serie completa de pesos o ponderaciones evaluados en todo Z .

Dada esta especificación, nuestro objetivo ahora consistirá, partiendo de la información muestral disponible y atendiendo al principio de parsimonia, también llamado de condensación, en obtener una representación de orden finito para la serie doblemente infinita de pesos de la FRI, que aproxime de forma simultánea y a través de una expresión única las dos direcciones en el tiempo y posibilite, en consecuencia, la estimación a través de un número finito de observaciones.

A tal fin, una reformulación más parsimoniosa de (4.13) viene dada por la expresión:

$$y_t = \frac{W_{p+a,s+b}(L)}{\delta_{-d,r}(L)} x_t + N_t \quad (4.14)$$

en la cual $W_{p+a,s+b}(L)$ y $\delta_{-d,r}(L)$ son polinomios de Laurent de grados $(p+a,s+b)$ y $(-d,r)$ en L .

La posibilidad, en este caso, de un adelanto o retraso en la respuesta de y_t ante variaciones en x_t viene recogida en la especificación de $W_{p+a,s+b}(L)$, esto es,

$$W_{p+a,s+b}(L) = w_{p+a}L^{p+a} + w_{p+a+1}L^{p+a+1} + \dots + w_aL^a + w_bL^b + \dots + w_{s+b}L^{s+b} \quad (p,s \in \mathbb{Z}) \quad (4.15)$$

con $a < 0$ y $b \geq 0$. Además,

$$\delta_{-d,r}(L) = \delta_{-d}L^{-d} + \delta_{-d+1}L^{-d+1} + \dots + \delta_{r-1}L^{r-1} + \delta_rL^r \quad (d,r \in \mathbb{N}) \quad (4.16)$$

Dicho de otra forma,

$$W_{p+a,s+b}(L) = \sum_{p+a}^{s+b} w_j L^j \quad (p,s \in \mathbb{Z}), \quad (4.17)$$

$$\delta_{-d,r}(L) = (1 + \sum_{i=1}^d \alpha_{-i} L^{-i})(1 + \sum_{i=1}^r \beta_i L^i) = \sum_{-d}^r \delta_j L^j \quad (d,r \in \mathbb{N}) \quad (4.18)$$

Suponemos que $W_{p+a,s+b}(L)$ y $\delta_{-d,r}(L)$ no poseen factores comunes y que las raíces de $\delta_{-d,r}(L)$ son en módulo mayores que la unidad, con lo cual se garantiza la estabilidad del modelo.

Observar que el modelo dado en (4.14) equivale a uno de la forma:

$$y_t = \frac{W_{q+p+a,q+s+b}(L)}{\delta_{q-d,q+r}(L)} x_t + N_t \quad (4.19)$$

donde para $q = d$ se obtiene un modelo en el que no comparecen valores futuros del output.

En particular, el modelo FT dado en (4.14) puede reescribirse como:

$$y_t = \frac{W_{p+a, s+b}(L)}{\delta_{-d, r}(L)} x_t + N_t \equiv \frac{W_{p+a+d, s+b+d}(L)}{\delta_{0, r+d}(L)} x_t + N_t \quad (4.20)$$

Por tanto, partiendo de la formulación dada en (4.20) y sin entrar en el estudio del término de perturbación N_t , el problema consistirá, estimando de forma directa la FRI $v(L) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_j L^j$, en estimar los órdenes (p, s, d, r, a, b) que, a partir de la información muestral disponible, proporcionan una mejor descripción del comportamiento de $v(L)$.

Bajo el supuesto de estabilidad para las raíces del polinomio del denominador, podemos escribir:

$$y_t \equiv \sum_{j=m}^n v_j x_{t-j} + N_t^* \quad (4.21)$$

donde $m < 0$ y $n > 0$ indican, en este caso, el número finito de términos para el cual se aproximan las estructuras de retardos y adelantos, y a partir de los cuales se obtienen directamente los coeficientes v_j que aproximan las dos direcciones de la serie temporal.

2.2.- METODOS DE IDENTIFICACION DE LOS ORDENES POLINOMIALES EN UN MODELO FT CON EXPECTATIVAS

2.2.1.- El método de la tabla T

Con el objetivo de llevar a cabo la especificación dinámica para una formulación del modelo FT como la dada en (4.20) los pasos que en tal caso sugiere el estudio de AP son:

(1) *Obtención de las estimaciones \hat{v}_j de los pesos v_j de la FRI $v(L)$.*

En concreto, estas estimaciones pueden ser obtenidas generalizando la propuesta de estimación de Lii (1985) dada para el caso clásico, en el que la FRI representa la serie de pesos o ponderaciones evaluadas en N ; así mismo, son aplicables las propiedades dadas sobre la distribución asintótica de la sucesión $\{\hat{v}_j - v_j\}$.

2) *Construcción de la tabla T estimada asociada con la sucesión de pesos relativos estimados.*

A tal fin, definiendo:

$$v_{j,\max} = \max|v_j| \quad \text{y} \quad \eta_j = \frac{v_j}{v_{j,\max}} \quad \eta \equiv (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}} \quad (4.22)$$

donde v_j son las ponderaciones de la FRI que aproxima las dos direcciones en el tiempo y (η_j) puede interpretarse como la sucesión de pesos relativos de los valores de los retardos y adelantos sobre el máximo valor, construimos la tabla T estimada asociada a la variable X_t , de tal forma que la FRI $v(L) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_j L^j$ será racional de la forma:

$$v(L) = \frac{\sum_{p+a}^{s+b} w_i L^i}{(1 + \sum_1^d \alpha_{-i} L^{-i})(1 + \sum_1^r \beta_i L^i)} = \frac{\sum_{p+a}^{s+b} w_i L^i}{\sum_{-d}^r \delta_j L^j} \quad (4.23)$$

si y sólo si en la tabla T asociada se verifica que $T_{f,g}(\eta_j) = 0 \quad \forall f < p+a, g > d \wedge \forall f > s+b, g > r$, siendo $T_{s+b,r}(\eta_j) \neq 0$ y $T_{p+a,d}(\eta_j) \neq 0$

En tal caso, la estructura de la tabla T estará caracterizada por la presencia de una franja central de elementos nulos en torno a $f = 0$ que determina los valores de a y b , así como por la presencia de dos bloques de tamaño infinito formados por elementos nulos en las esquinas superior e inferior derechas de la tabla. Estos dos bloques determinarán los valores de p, d y s, r respectivamente, siendo $(s+b+1, r+1)$ el denominado breaking-point para el caso clásico y $(p+a-1, d+1)$ el análogo en el otro bloque infinito que caracteriza la serie doblemente infinita.

En consecuencia, la propuesta a fin de abordar la identificación dinámica para una formulación generalizada del modelo FT como la dada en (4.20) y que podría a su vez ser considerada como una generalización de la propuesta de Liu y Hanssens (1982) para la identificación de un modelo FT clásico vendría dada en los siguientes términos:

Una vez estimadas las ponderaciones v_j de la FRI, dados los patrones de comportamiento para la sucesión de pesos relativos estimados $(\hat{\eta}_j)$ y una vez construidos los determinantes de Toeplitz $T_{f,g}(\hat{\eta}_j)$, podemos obtener una representación racional generalizada para $v(L)$ de órdenes (p, s, d, r, a, b) si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 T_{f,g}(\hat{\eta}_j) &= 0, & f \geq b+s+1 & \quad g \geq r+1 \\
 &, & f \leq p+a-1 & \quad g \geq d+1 \\
 T_{f,r}(\hat{\eta}_j) &\neq 0, & f \geq b+s & \\
 T_{f,d}(\hat{\eta}_j) &\neq 0, & f \leq p+a & \\
 T_{b+s,g}(\hat{\eta}_j) &\neq 0, & g \geq r & \\
 T_{p+a,g}(\hat{\eta}_j) &\neq 0, & g \geq d &
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

En tal caso, para valores de M y M' enteros mayores que $\max\{r+1, d+1\}$ y $b+s+1$, respectivamente y M'' menor que $p+a-1$, podemos construir la **tabla T** para la sucesión $(\hat{\eta}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, que recoge esquemáticamente los órdenes del modelo en estudio. Ilustramos el caso $d < r$, con el convencimiento de que para $d = r$ y $d > r$ se obtienen análogas representaciones.

$f \backslash g$	1	...	d	$d+1$...	r	$r+1$...	M
M''	0	0	0	0	0	...
...	x	0	0	0	0	0	...
$p+a-1$	x	x	x	0	0	0	0	0	...
$p+a$	x	x	x	x	x	x	x	x	...
...
a	x	x	x	x	x	x	x	x	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	...
b	x	x	x	x	x	x	x	x	...
...
$s+b$	x	x	x	...
$s+b+1$	x	0	0	0
...	x	0	0	0
M'

en cuyo caso la FRI $v(L)$ que aproxima las dos direcciones en el tiempo tendrá una representación racional $\frac{W_{p+a, s+b}(L)}{\delta_{-d,r}(L)}$ de órdenes (p, s, r, d, a, b) , expresión que coincide

con el AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$ de máximo grado a la serie $v(L) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ de acuerdo con la

definiciones dadas en (4.11) y (4.12).

El método que se obtiene de estas propiedades es precisamente la generalización del *método corner* clásico al estudio de la identificación dinámica en un modelo FT no causal, esto es, en un modelo FT en el que se considera la influencia presente de las expectativas que se formulan sobre la variable explicativa (input), esto es, la presencia de una secuencia discreta de ponderaciones y variables evaluadas en todo Z .

En definitiva, este método constituye no sólo una extensión de la propuesta clásica inicial para la identificación en el ámbito de los modelos causales sino que incluso, dentro del ámbito de los modelos no causales, se presenta como una alternativa a la utilización de la aproximación de Padé-Laurent.

Por otra parte, las propiedades sobre la distribución asintótica de las estimaciones $T_{f,g}(\hat{\eta}_j)$ en la tabla T son las dadas en Lii (1985) para los elementos de la tabla C.

Ahora bien, teniendo en cuenta que, desde el punto de vista práctico, lo que se obtiene son estimaciones para los pesos \hat{v}_j , la búsqueda de una combinación razonable en la tabla T debe hacerse en términos de la elección de una estructura global de conjunto, guiada como siempre por el principio de parsimonia.

2.2.2.- La Tabla de Padé

Desde otro punto de vista, la utilización de la **tabla de Padé** asociada a la serie $v(L)$ en el proceso de identificación dinámica plantea un procedimiento análogo que vendría dado en los siguientes términos:

Dado que las ponderaciones de los retardos y adelantos definidas en (4.22) satisfacen una ecuación lineal en diferencias de orden r y rango $s+b+1$, a través de la relación entre los pesos de la FRI y su representación racional podemos obtener que:

$$\begin{aligned} \eta_k - \eta_{k-1}\beta_1 - \dots - \eta_{k-r}\beta_r &= 0 & \text{si } k \geq s+b+1 \\ &\neq 0 & \text{si } k = s+b \\ \eta_k - \eta_{k-1}\alpha_{-1} - \dots - \eta_{k-d}\alpha_{-d} &= 0 & \text{si } k \leq p+a-1 \\ &\neq 0 & \text{si } k = p+a \end{aligned}$$

Estas ecuaciones reescritas en la forma:

$$\sum_{j=1}^r \eta_{k-j} \beta_j = \eta_k, \quad k = s+b+1, \dots, s+b+r$$

$$\sum_{j=1}^d \eta_{k-j} \alpha_{-j} = \eta_k, \quad k = p+a-1, \dots, p+a-d$$

determinan, eligiendo $\alpha_0 = 1$ y $\beta_0 = 1$ los coeficientes en el denominador del AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$ para $v(L)$.

En tal caso y puesto que $T_{s+b, r}(\eta_j) \neq 0$ y $T_{p+a, d}(\eta_j) \neq 0$ la serie doblemente infinita $\sum_{-\infty}^{\infty} v_i L^i$ vendrá representada de forma exacta a través del AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$, expresión que aproxima simultáneamente las dos direcciones de la serie $v(L)$.

Por tanto, podemos concluir que la FRI $v(L)$ tendrá una representación racional como la dada en (4.23) si y sólo si los AP

$$\left[\frac{(P+A, S+B)}{(-D, R)} \right]_v = v(L) \quad \forall P+A \leq p+a, D \geq d$$

siendo $T_{p+a, d}(\eta_j) \neq 0 \wedge \forall S+B \geq s+b, \forall R \geq r$ con $T_{s+b, r}(\eta_j) \neq 0$.

Si además $T_{f, g}(\eta_j) = 0 \quad \forall a < f < b, \forall g$ se tiene que $v(L) \cong \frac{\hat{W}_{p+a, s+b}(L)}{\hat{\delta}_{-d, r}(L)}$ con

siendo a el adelanto y b el retardo en la repuesta de y_t ante variaciones en x_t .

2.2.3.- Una estimación preliminar de los parámetros del modelo

Una vez que han sido identificados los órdenes polinomiales correspondientes se realiza la estimación de los parámetros en el AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$. Así, en primer lugar,

una vez representada la serie $v(L)$ mediante un modelo racional de la forma $\frac{P_{s+b}(L)}{Q_r(L)}$ se

estiman sus parámetros como sigue:

$$\frac{\hat{P}_{s+b}(L)}{\hat{Q}_r(L)} = \frac{\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}'_i L^i}{\sum_0^r \hat{q}'_i L^i} = \frac{\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i}{1 + \sum_1^r \hat{q}_i L^i} \quad \hat{p}_i = \frac{\hat{p}'_i}{\hat{p}'_0}; \quad \hat{q}_i = \frac{\hat{q}'_i}{\hat{q}'_0}$$

Las distribuciones asintóticas para las estimaciones \hat{p}_i, \hat{q}_i de los parámetros en el AP $\left[\frac{s+b}{r} \right]$ verifican las mismas propiedades que se señalan en Lii (1985) para el AP clásico.

El siguiente paso consiste en representar de forma racional la serie $\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i$. Para ello y teniendo en cuenta que la serie puede ser expresada como una serie formal de potencias:

$$\sum_{-\infty}^{s+b} \hat{p}_i L^i = L^{s+b} \sum_0^{\infty} \hat{p}_{-i+s+b} L^{-i} = L^{s+b} \sum_0^{\infty} \hat{h}_i L^{-i}$$

el proceso a seguir sería el mismo que el dado para el caso clásico, obteniéndose finalmente el modelo $\frac{\hat{W}_{p+a, s+b}(L)}{\hat{\delta}_{-d, r}(L)}$. En este caso, las estimaciones obtenidas para los

parámetros en el AP $\left[\frac{(p+a, s+b)}{(-d, r)} \right]_v$ van a constituir valores iniciales fiables para la

obtención de un modelo definitivo, mediante la utilización de métodos iterativos más eficientes, una vez se incorpora al modelo la identificación de la parte aleatoria.

2.2.4.- Un método alternativo de identificación: El ϵ -algoritmo generalizado

Por otra parte, las propiedades de la AP en relación con el estudio de series formales de Laurent, permiten la utilización del ϵ -algoritmo como método alternativo al uso de la tabla T para la identificación de los órdenes polinomiales de un modelo FT con expectativas.

Así, en nuestro caso, podemos concluir que la FRI $v(L) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_i z^i$ tendrá una representación racional de la forma $\frac{W_{p+a, s+b}(L)}{\delta_{-d, r}(L)}$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_{2r}^{s+b-r}(\eta_i) \neq 0, \quad \epsilon_{2r}^j(\eta_i) = 0, \quad \forall j > s+b-r \\ \epsilon_{2d}^{p+a-d}(\eta_i) \neq 0, \quad \epsilon_{2d}^j(\eta_i) = 0, \quad \forall j < p+a-d \end{aligned}$$

En tal caso, los valores del retardo b y del adelanto a de la respuesta del output ante variaciones del input vendrán indicados por el hecho de que:

$$\eta_i = 0, \quad i = a+1, \dots, b-1$$

La caracterización de estos resultados permite obtener una **tabla- ϵ** ⁶ de la forma:

⁶El estudio de la significación de los elementos en la tabla- ϵ , se lleva a cabo de la forma presentada en Berlnet y Francq (1994) para modelos ARMA y en González et. al (1993, 1995) para modelos FT en el caso clásico.

Col	0	...	$2(d-1)$	$2d$...	$2(r-1)$	$2r$
Fil							
...
$p+a-1$	ϵ_0^{p+a-1}	...	$\epsilon_{2(d-1)}^{p+a-d}$	0
$p+a$	ϵ_0^{p+a}	...	$\epsilon_{2(d-1)}^{p+a-d+1}$	ϵ_{2d}^{p+a-d}
...
a	ϵ_0^a
$a+1$	0	...	0	0	...	0	0
...
$b-1$	0	...	0	0	...	0	0
b	ϵ_0^b
...
$s+b$	ϵ_0^{s+b}	$\epsilon_{2(r-1)}^{s+b-r+1}$	ϵ_{2r}^{s+b-r}
$s+b+1$	ϵ_0^{s+b+1}	0
...

“0” representa significativamente nulo

3.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el objetivo de validar empíricamente los métodos de identificación propuestos, esto es, la tabla T y el ϵ -algoritmo presentamos a continuación los resultados de dos ejercicios de simulación

a) En primer lugar, para una formulación del modelo FT con $a = -1$, $b = 2$, $p = -2$, $s = 1$, $r = 1$, $d = 0$ y para un tamaño muestral de 114 observaciones se realizaron, considerando que \bar{x}_{it}^* y \bar{x}_{it}^{**} sigan o no la misma distribución, 200 replicaciones del siguiente modelo:

$$y_t = \frac{(w_3 L^{-3} + w_2 L^{-2} - w_1 L^{-1} + w_2 L^2 + w_3 L^3)}{1 - \delta_1 L} x_t + \epsilon_t$$

donde, en ambos casos, $\varepsilon_t \sim N(0,4)$ y las estimaciones de los pesos de la FRI se obtienen ajustando y_t en función de x_{t-j} para $j = +12, +11, \dots, -11, -12$.

a.1) En el primer caso, x_t^* y x_t^{**} siguen la misma distribución con $(1 - u_0 L)X_t = a_t, u_0 = 0,5, a_t \sim N(0,1)$.

Tomando $w_{-3} = 0,8; w_{-2} = 0,2; w_{-1} = -0,25; w_2 = 1,25; w_3 = 0,75; \delta_1 = 0,5$, los resultados que se obtienen, en primer lugar, para la **tabla T** permiten concluir que:

Los valores de a y b se recogen de forma correcta en la mayoría de las tablas, manifestando una cierta sobrevaloración el parámetro a , cuyos valores se sitúan en el rango $\{-1,-2\}$. Los valores s y p de la estructura dinámica se sitúan en el rango $s \in \{1,2\}$ y $p \in \{-1,-2\}$, recogiendo con alto porcentaje de aciertos la estructura simulada. Además, los resultados confirman los valores para r y d , que se recogen en porcentajes próximos al 100%. La tabla de medias de la FRI reproduce correctamente el modelo simulado:

TABLA T

	0	1	2	3	4	5	6	7
-6	1.00	-.03	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-5	1.00	.03	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-4	1.00	-.01	-.02	-.01	-.00	.00	.00	.00
-3	1.00	.59	.35	.21	.13	.08	.05	.03
-2	1.00	.37	.15	.06	.03	.13	.01	.01
-1	1.00	-.03	.00	.00	-.06	.020	-.04	.01
0	1.00	.00	.00	.00	.12	.30	-.00	.00
1	1.00	.00	-.00	-.02	-.27	.44	.01	.00
2	1.00	.90	.81	.73	.66	.67	.62	.57
3	1.00	1.00	.55	.30	.17	.09	.05	.06
4	1.00	.50	.00	-.00	.01	-.00	-.00	.00
5	1.00	.25	.00	.00	.00	.00	.00	.00
6	1.00	.12	.00	.00	.00	.00	.00	.00

Análogamente, los resultados obtenidos se confirman para la **tabla-e** de medias de la FRI:

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
-13	.000								
-12	-.027	-.018							
-11	-.014	.005	-.013						
-10	-.006	-.010	-.007	-.020					
-9	-.016	-.008	-.012	.090	-.002				
-8	.019	.013	.000	.004	-.006	-.002			
-7	.012	.020	.002	.001	.003	.042	-.020		
-6	-.034	-.008	-.001	.002	.001	-.010	-.012	-.014	
-5	.028	.005	-.008	.031	.011	-.012	-.010	-.011	-.019
-4	-.008	.026	-.036	.006	.021	-.018	-.011	-.010	-.032
-3	.586	.426	.271	.219	.173	.239	.344	1.256	-.880
-2	.367	.862	.166	.653	.196	-.434	.168	-.035	.056
-1	-.027	.002	.000	.137	.219	.133	.086	.031	-.028
0	.004	.000	.002	.478	.269	.010	-.027	.093	
1	.000	.004	-.028	.225	.317	-.022	.011		
2	.898	1.013	.618	.560	.458	.417			
3	1.000	.915	.541	.658	.319				
4	.502	.003	-.033	-.088					
5	.252	-.034	.088						
6	.119	-.098							
7	.037								

a.2) En el segundo caso, x_t^* y x_t^{**} siguen distribuciones diferentes, esto es,

$$(1 - u_0 L)x_t^* = a_t^* \rightarrow N(0,1), \text{ y } (1 - v_0 L)x_t^{**} = a_t^{**} \rightarrow N(0,2)$$

con $u_0 = 0,5$, $v_0 = 0,75$.

Tomando $w_{-3} = 0,5$; $w_{-2} = 0,55$; $w_{-1} = -0,4$; $w_2 = 1,25$; $w_3 = 0,75$; $\delta_1 = 0,5$ se tiene que:

En cuanto al método de la tabla T, los valores de a y b se recogen de forma correcta en gran número de tablas aunque con una clara sobrevaloración del parámetro a , cuyo rango se sitúa en $a \in \{-1,-2\}$, mientras que los valores de b se sitúan en $b \in \{1,2\}$. Los valores de p y s se recogen correctamente con $p \in \{-1,-2\}$ y con cierta tendencia a la sobrevaloración de s cuyo rango se sitúa en $s \in \{1,2\}$. El valor de d se recoge de forma correcta en la mayoría de las tablas, mientras que los valores del parámetro r se sitúan en el rango $r \in \{-2,-1\}$. La tabla de medias de las ponderaciones reproduce el modelo correcto:

Tabla T

	0	1	2	3	4	5	6	7
-6	1.00	-.02	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-5	1.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-4	1.00	-.01	-.00	-.00	.00	.00	.00	.00
-3	1.00	.36	.13	.05	.02	.01	.00	.00
-2	1.00	.54	.29	.16	.08	.06	.04	.02
-1	1.00	.01	-.00	.01	-.13	.12	-.03	.01
0	1.00	.00	.00	-.00	.20	.16	-.02	.01
1	1.00	.03	-.00	.01	-.30	.25	.07	.05
2	1.00	.85	.69	.56	.45	.52	.43	.30
3	1.00	1.00	.57	.34	.28	.32	.36	.33
4	1.00	.50	-.02	-.08	-.06	.00	.05	.06
5	1.00	.27	.07	.02	.01	.01	.01	.01
6	1.00	.00	-.05	.01	.00	.00	.00	.00

Así mismo, la tabla-ε de medias reproduce la estructura simulada:

Tabla-ε

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
-13	-.001									
-12	.005	-.003								
-11	.027	.017	.011							
-10	.007	-.019	.006	.014						
-9	.004	.001	-.004	-.084	-.013					
-8	.004	-.002	.007	-.023	-.074	.020				
-7	-.020	-.013	-.011	.010	-.001	.018	.020			
-6	-.010	-.010	-.013	.000	.005	-.016	-.258	.002		
-5	-.010	-.010	-.019	.032	-.004	.053	-.029	.005	.003	
-4	-.359	-.107	-.050	-.032	-.020	-.013	-.007	-.000	.002	.003
-3	.544	.200	.111	.070	.252	.075	.064	.040	.025	.051
-2	-.011	.003	-.030	.096	.118	.061	.080	.421	.032	.032
-1	.004	-.006	.002	.109	.104	-.361	.169	.073	.032	.032
0	-.026	.003	-.011	.101	.111	.237	-.779	.012	.025	.043
1	.845	.253	.129	.079	.137	.100	.059	.028	.019	.040
2	-1.00	-.172	-.068	-.053	-.071	-.097	-.095	-.063	-.037	-.025
3	.053	-.008	-.048	-.061	.003	-.095	-.097	-.574	.004	
4	-.271	-.068	-.208	-.092	-.078	-.069	-.060	-.040		
5	.005	-.103	-.103	-.059	-.040	-.047	-.085			
6	-.171	-.103	-.103	-.042	-.046	-.041				
7	-.060	-.048	-.394	-.047	-.042					
8	-.049	-.063	.034	.012						
9	.005	-.001	.015							
10	-.002	.003								
11	.016									

b) En segundo lugar, para una formulación del modelo FT con $a = -2$, $b = 1$, $p = -1$, $s = 1$, $r = 1$, $d = -1$ y para un tamaño muestral de 114 observaciones se realizaron, considerando que x_{it}^* y x_{it}^{**} sigan o no la misma distribución, 200 repeticiones del siguiente modelo:

$$y_t = \frac{(w_{-3}L^{-3} + w_{-2}L^{-2} + w_1L + w_2L^2)}{\delta_{-1}L^{-1} + \delta_0 + \delta_1L} x_t + \varepsilon_t$$

donde, en ambos casos, $\varepsilon_t \sim N(0,4)$ y las estimaciones de los pesos de la FRI se obtienen ajustando y_t en función de x_{t-j} para $j = +10, +9, \dots, -9, -10$.

b.1) En el primer caso, x_t^* y x_t^{**} siguen la misma distribución con $(1 - u_0L)X_t = a_t$, $u_0 = 0,5$, $a_t \sim N(0,1)$.

Tomando $w_{-3} = 1,25$; $w_{-2} = 0,5$; $w_1 = 0,25$; $w_2 = 1$; $\delta_{-1} = -1$; $\delta_0 = -0,1$; $\delta_1 = 0,3$, los resultados que se obtienen, en primer lugar, para la **tabla T** permiten concluir que:

Los valores de a y b se recogen de forma correcta en un elevado número de las tablas, manifestando una cierta infravaloración para el parámetro a , cuyos valores se sitúan en el rango $\{-1, -2\}$ y una cierta sobrevaloración para b , cuyo rango se sitúa en $b \in \{(1,2)\}$. Los valores s y p de la estructura dinámica se sitúan en el rango $s \in \{1,2\}$ y $p \in \{-1, -2\}$; los valores para r y d se recogen en porcentajes muy altos. Así mismo, las tablas T y ε -algoritmo de medias de la FRI reproducen correctamente el modelo simulado:

TABLA T

	0	1	2	3	4	5	6	7
-6	1.00	-.05	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-5	1.00	.08	.01	.00	.00	.00	.00	.00
-4	1.00	-.03	-.00	-.01	.00	.00	.00	-.01
-3	1.00	.02	-.03	.08	-.05	.02	-.03	.09
-2	1.00	-1.00	1.01	-1.07	1.01	-1.00	1.00	-1.01
-1	1.00	-.37	-.15	.07	-.23	-.56	.56	-.14
0	1.00	-.29	.05	.03	.09	-.44	.23	-.02
1	1.00	-.09	-.07	-.05	-.09	-.31	.09	.07
2	1.00	-.28	.01	-.14	-.08	-.23	.13	-.02
3	1.00	-.74	.53	-.39	.29	-.21	.15	-.10
4	1.00	-.03	-.18	-.00	.00	-.01	-.00	-.00
5	1.00	-.25	.06	-.00	.00	.00	.00	.00
6	1.00	.01	-.02	-.00	.00	.00	.00	.00

TABLA-ε

	0	2	4	6	8	10	12	14	16
-10	.020								
-9	.101	.049							
-8	-.044	.005	-.033						
-7	.030	-.010	-.004	.012					
-6	-.055	-.002	-.016	.006	.013				
-5	.083	.021	.013	-.011	-.004	-.035			
-4	-.032	.006	.021	-.004	.009	.005	.058		
-3	.024	-.029	.093	-.041	.020	-.027	.0106	.042	
-2	-1.000	-.609	-.472	-.371	.332	-.363	-.325	-.307	-.291
-1	-.368	-.274	.647	-.291	.348	-.345	-.289	1.632	-.317
0	-.286	-.425	-.148	-.551	-.344	-.349	-.193	-.299	-.343
1	-.090	-.186	-.284	-.264	-.325	-.402	-.376	-.372	-1.902
2	-.279	.045	-.265	-.280	-.306	-.372	-.371	-.376	.496
3	-.737	-.459	-.352	-.310	-.293	-.371	-.372	-.393	
4	-.028	-.196	-.004	.024	-.053	-.037	-.017		
5	-.248	-.129	.026	.002	-.041	-.132			
6	.011	-.052	-.041	-.035	-.030				
7	-.073	-.044	-.025	.119					
8	-.028	-.036	.035						
9	-.038	-.033							
10	-.036								

b.2) En el segundo caso, x_t^* y x_t^{**} siguen distribuciones diferentes, esto es,

$$(1-0,5L)x_t^* = a_t^* \sim N(0,1), \text{ y } (1-0,75L)x_t^{**} = a_t^{**} \sim N(0,2)$$

Los resultados que se obtienen permiten establecer comentarios análogos al caso anterior sobre los valores de la estructura dinámica. Las tablas de medias que se obtienen reproducen nuevamente el modelo correcto:

Tabla T

	0	1	2	3	4	5	6	7
-6	1.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-5	1.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-4	1.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
-3	1.00	-.01	.00	-.01	.01	-.03	.05	-.00
-2	1.00	-1.00	.99	-.98	.97	-.96	.93	-.88
-1	1.00	.60	.38	-.25	-.09	-.56	.67	-.83
0	1.00	.02	-.01	-.10	-.13	-.39	-.02	-.11
1	1.00	-.01	.01	-.04	.22	-.27	-.07	-.03
2	1.00	-.26	.06	.00	-.29	-.22	.12	-.13
3	1.00	-.78	.60	-.48	.38	-.31	.24	-.19
4	1.00	-.03	-.17	.01	.01	-.02	-.03	.00
5	1.00	-.21	.05	-.01	.00	-.00	.00	-.00
6	1.00	.03	-.01	-.00	.00	.00	.00	.00

Tabla-ε

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
-10	-.023									
-9	.003	-.063								
-8	.047	.019	.008							
-7	-.032	-.003	-.002	-.002						
-6	.013	-.001	-.002	-.002	-.002					
-5	-.008	-.002	-.001	-.002	-.002	.009				
-4	-.000	-.005	-.002	-.001	-.003	.020	-.030			
-3	-.015	.000	-.009	.015	-.031	.061	-.001	-.020		
-2	-1.00	-.714	-.460	-.370	-.319	-.334	-.280	-.313	-.257	
-1	-.597	-1.75	-.262	-.195	-.330	-.322	-.299	-.290	-.257	-.257
0	.023	-.009	-.211	-.255	-.304	-.141	-.252	-.314	-.336	.135
1	-.010	.028	.292	-.323	-.289	-.245	-.182	-.328	-.307	1.82
2	-.262	.228	-.000	-.261	-.272	-.305	-.301	-.388	-.383	
3	-.779	-.472	-.348	-.275	-.264	-.301	-.304	-.383		
4	-.025	-.176	.035	.052	-.065	-.090	.025			
5	-.214	-.108	.053	.037	-.103	-.071				
6	.026	-.021	-.036	.066	-.022					
7	-.033	-.049	.005	-.044						
8	-.045	-.026	-.066							
9	-.084	-.056								
10	.016									

En definitiva, los resultados obtenidos permiten en ambos casos justificar la validez de los métodos de identificación propuestos. El estudio estadístico de la significación relativa de los elementos asociados a las tablas en ambos métodos, como elemento indispensable para asegurar la adecuación de la especificación dinámica elegida, puede llevarse a cabo tal y como se ha indicado en Lii (1985).

Por otra parte, resulta de interés, dentro del ámbito de la formulación de modelos no causales, la extensión de este método al estudio de la identificación dinámica en una formulación generalizada del modelo FT con múltiples inputs.

Este y otros aspectos relacionados con la incorporación de predicciones en este tipo de formulaciones, así como sus posibles aplicaciones en diversos contextos de la economía serán tratados en las conclusiones finales, así como en las cuestiones abiertas y líneas de investigación futura que se plantean.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

CONCLUSIONES

La metodología que aquí se ha expuesto, tal y como se ha adelantado desde el comienzo de esta Memoria, se sitúa en el campo de la matemática aplicada al análisis de series temporales y constituye, por tanto, una propuesta que sitúa su alcance más allá del contexto de los modelos FT en econometría, marco de referencia en el que hemos centrado el desarrollo de esta investigación.

Como se desprende de los desarrollos realizados, el método corner o de un modo más general el método de la tabla T y el ε -algoritmo, entre otros, se presentan como alternativas válidas en el análisis de series temporales para la determinación de los órdenes de los polinomios que intervienen en un modelo racional y los conceptos básicos son también susceptibles de aplicación al caso de modelos multivariantes.

La ventaja de la presentación realizada dentro de la aproximación racional radica en que ésta establece los cimientos para la construcción de otros métodos alternativos como los esbozados en el primer capítulo. Además, permite contemplar el caso clásico como caso particular de la metodología aquí propuesta, cuando no se introducen las expectativas sobre el comportamiento de las variables que se consideran.

Por otra parte, los métodos de identificación propuestos han sido ilustrados y validados por los ejercicios de simulación realizados.

Así mismo, nuestro interés por extender dicho análisis al estudio de datos reales que permitan, en su caso, verificar en aplicaciones prácticas la bondad de los desarrollos teóricos expuestos, nos ha llevado a considerar una primera experiencia. En este sentido, y teniendo en cuenta el papel, ya destacado a lo largo de este trabajo, que la metodología propuesta desempeña en la identificación de relaciones dinámicas sujetas a comportamientos estructuralmente diferentes en el tiempo, resulta en principio

plausible su aplicación, por ejemplo, en el contexto de las economías del Este que atraviesan por períodos de transición económica, esto es, que han emprendido la marcha desde una organización basada en la colectivización de los medios de producción y en una planificación centralizada hacia la liberalización progresiva de sus regímenes mediante una flexibilización del sistema de planificación y hacia la conversión a la economía de mercado. Tal es el caso de la economía polaca, cuyo comportamiento se ha caracterizado por la existencia de un fuerte cambio estructural a mediados de la década de los 80 y que es consecuencia de las medidas político-económicas tendentes a la liberalización progresiva del régimen y a su acercamiento a la economía de mercado.

Ahora bien, teniendo en cuenta que el mayor talante liberalizador del gobierno polaco y las reformas más importantes han tenido lugar en el mercado de los productos agrícolas, sector que por otra parte ha sido el menos sometido al control estatal existente, esto es, el menos colectivizado y que ha tenido la originalidad de haber mantenido la propiedad privada agrícola, hemos realizado una primera investigación aplicada con el objetivo de modelizar desde el punto de vista econométrico el período de transición económica para este mercado, con especial referencia a los subsectores de la carne y los cereales.

En este sentido, tomando como año base 1981, partiendo de las observaciones disponibles para el precio (input) y la demanda (output) de carne y cereales para el período 1965-1985 y tomando expectativas “ex post” para los precios desde 1986 hasta 1991, procedimos a identificar las relaciones dinámicas que se establecen para cada uno de los mercados en el marco de lo que sería, por un lado, una formulación clásica meramente causal del modelo FT y, por otro lado, una formulación del mismo con expectativas.

Los resultados obtenidos (González et al, 1994) y que a continuación presentamos, confirman la validez del marco dinámico elegido que, si bien ofrece resultados

similares a los que se obtienen a través de formulaciones tradicionales causales en cuanto al ajuste de datos históricos se refiere, mejora sin embargo, por la posibilidad que existe de recoger el cambio estructural, las previsiones futuras que a C/P y/o M/P se realizan sobre la evolución, en cada caso, de la demanda de carne y cereales.

En el caso concreto del mercado de la carne, y para el período considerado, la aplicación de la metodología propuesta a través de la estimación de la tabla T, esto es,

	0	1	2	3	4	5	6
-6	1.000	-.136	.019	.000	.000	.000	.000
-5	1.000	.000	.014	.000	.000	.000	.000
-4	1.000	.101	.010	-.001	.000	.000	.000
-3	1.000	.000	.017	.000	-.001	.000	.000
-2	1.000	-.172	.030	-.007	.001	-.000	.000
-1	1.000	.000	-.014	.000	.002	.000	.000
0	1.000	-.083	.007	-.003	.002	.000	.000
1	1.000	.000	.016	.000	.003	.000	.000
2	1.000	.192	.037	.012	.004	.000	.000
3	1.000	.000	-.061	.000	.007	.000	.000
4	1.000	.320	.103	.034	.011	.006	.003
5	1.000	.000	.005	.000	-.012	.000	-.001
6	1.000	-.016	.000	.002	.013	-.002	.000

sugiere, para la parte determinista, un modelo de la forma $\frac{P_{-2,4}(B)}{Q_{-1,0}(B)} \equiv \frac{\tilde{P}_{-1,5}(B)}{\tilde{Q}_1(B)}$.

En particular, una vez estudiado el proceso de ruido, el modelo que se obtiene viene dado por:

$$\Delta y_t = \frac{-0.1770B^{-1} + 0.2594B - 0.1925B^3 + 0.1697B^5}{1 - 0.9720B} \Delta x_t + \frac{1 - 0.4822B^6}{1 - 0.2392B - 0.3728B^2} a_t$$

$$(1 - 0.9164B + 1.3123B^4) \Delta^2 x_t = (1 + 1.2348B + 0.8222B^4) b_t$$

y los resultados obtenidos pueden ser ilustrados como sigue:

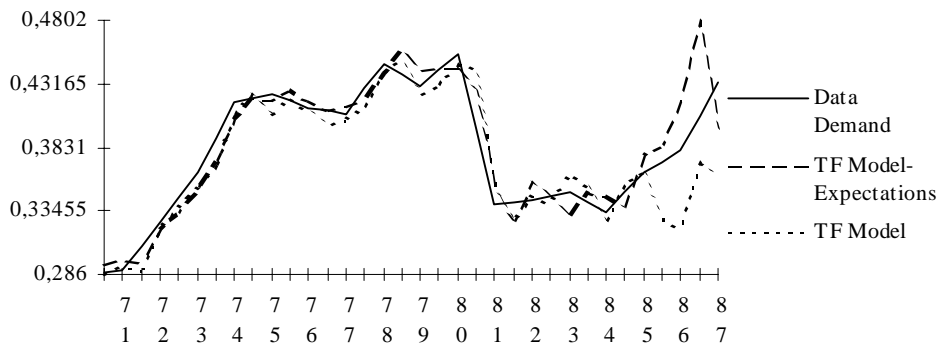


Figure 9. Demand TF Model with Expectations

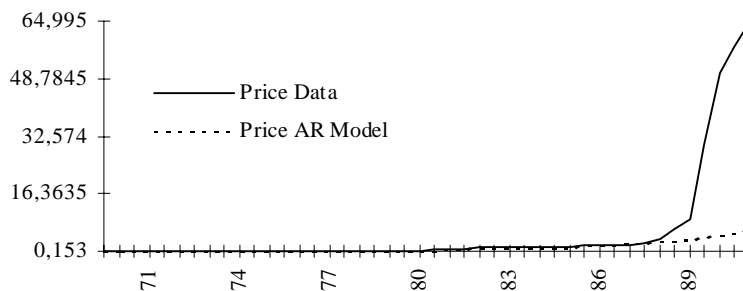


Figure 5. Price AR Model

Como puede deducirse, la inclusión en el modelo FT de las expectativas para el precio no sólo permite recoger el cambio estructural que se produce en la economía polaca, sino que además mejora sensiblemente con respecto a la formulación tradicional, las predicciones realizadas a corto y/o medio plazo sobre la demanda de cereales.

Por último, la consideración de este marco dinámico más amplio favorece la creación de un mecanismo de realimentación que permite al modelo actualizar la información disponible, esto es, sustituir las expectativas que período tras período se

formulan sobre las variables del modelo conforme la evidencia empírica modifica o confirma las predicciones realizadas. Además, la posibilidad de realizar comparaciones entre distintas formulaciones, en función de las diferentes expectativas que elaboran los agentes económicos sobre el comportamiento del input, permite la discriminación de unas alternativas frente a otras y, en consecuencia, la determinación de un modelo óptimo.

CUESTIONES ABIERTAS

En cuanto a las líneas de investigación futura que se derivan de la presente Memoria, tal y como se ha adelantado ya en el capítulo 5, una cuestión que desde el punto de vista teórico se presenta directamente vinculada con este estudio es la generalización del marco dinámico de referencia, esto es, la generalización de la formulación del modelo FT para la inclusión de múltiples inputs/outputs así como a modelos VARMA en general. Así mismo, y en relación a este aspecto, resulta interesante abordar la generalización de los procedimientos de identificación dinámica hasta ahora descritos para el caso escalar, en especial del método de la tabla T y del ε -algoritmo.

Además, la utilización de esta metodología en el dominio de las frecuencias en series temporales y, en general, en la teoría de sistemas lineales, puede ayudar a una mejor comprensión de los datos observados así como de las interrelaciones y/o causalidad existente entre ellos.

Por otra parte, a nivel empírico, un aspecto que vendrá a completar el estudio realizado consiste en la incorporación de expectativas que, formuladas de un modo “ex ante”, permitan contrastar la validez y efectividad de distintas especificaciones dinámicas elegidas. La realización en tal caso de un análisis de sensibilidad permitirá comprobar en qué medida las anticipaciones que se elaboran sobre una variable explicativa, de acuerdo con los esquemas de formación de expectativas que aporta la

teoría económica, afectan a las predicciones del modelo y, en consecuencia, a su adecuación a la realidad empírica.

Por otra parte, resultará interesante desarrollar otras aplicaciones de la metodología y de los planteamientos propuestos en esta investigación al estudio de datos reales, en concreto, en aquellos ámbitos en los que, de forma general, juega un papel relevante la formación por parte de los agentes económicos de expectativas o anticipaciones sobre el comportamiento futuro de determinadas variables.

En particular, las características que confluyen en el estudio de los mercados agrícolas y más concretamente el papel que en este contexto representan las expectativas sobre el comportamiento de los precios agrícolas, son una justificación en principio suficiente para la utilización de la metodología propuesta. En este sentido, las anticipaciones sobre variables como el precio de determinado producto en tanto condicionan los comportamientos y elecciones intertemporales de los agentes económicos, interfieren y condicionan así mismo las decisiones sobre el volumen de producción que los agricultores deciden poner a disposición del mercado para cada período. De esta forma, en la medida en que se tienen en cuenta las expectativas futuras sobre el comportamiento de los precios agrícolas, se permite en cierta manera disminuir el riesgo y la incertidumbre asociada a las decisiones de producción.

En conclusión, dado que son susceptibles de una posible aplicación empírica todas aquellas áreas en las que la toma de decisiones intertemporales comporta o justifica la necesidad de realizar anticipaciones sobre el comportamiento futuro de determinadas variables, los mercados de futuros y opciones ofrecen también un marco ideal para, desde la metodología propuesta y desde el punto de vista financiero, evaluar por ejemplo, la evolución de carteras de valores con vencimientos futuros fijos en las que los valores a priori establecidos para cada activo constituyen precisamente las expectativas que de modo “ex post” elaboran los agentes económicos involucrados.

En relación con este tipo de hipótesis y con los inconvenientes que a menudo se le atribuyen, en Koreisha (1984) se propone una manera más eficiente de trabajar con modelos que incorporan expectativas adaptativas. La crítica de este autor a la formulación tradicional de este tipo de modelos se basa en que su construcción, a través de los modelos de retardos distribuidos, fuerza no sólo estructuras autorregresivas de retardos para las variables expectativas sino que también impone distribuciones específicas de retardos que pueden no ser válidas¹.

Precisamente, su propuesta para trabajar de forma más eficiente con este tipo de modelos consiste en presentar una aproximación de series temporales que, en términos muy similares a la formulada en los capítulos 4 y 5 de esta presente investigación, no sólo hace uso de toda la información contenida en los datos sino que además permite incorporar teoría en la propia construcción del modelo. Este procedimiento, que requiere el empleo del modelo FT con expectativas, en la medida en que crea el marco necesario para incorporar información futura sobre las variables explicativas, permite mejorar sensiblemente, desde un punto de vista empírico, las predicciones del modelo con respecto a las que se obtienen por los modelos de retardos distribuidos convencionales.

¹Otros trabajos que justifican este argumento son, entre otros, los de Lahiri (1976) y Just (1977).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHAM, B. y LEDOLTER, J. (1984): “A Note on Inverse Autocorrelations”. Biometrika, 71, pp. 609-614.

AKAIKE, H. (1970): “Statistical Predictor Identification”. Ann. Inst. Statist. Math., 22, pp. 203-217.

_____ **(1971):** “Autoregressive Model Fitting for Control”. Ann. Inst. Statist. Math., 23, pp.163-180.

_____ **(1974):** “A New Look at the Statistical Model Identification”. IEEE Transactions on Automatic Control AC-19, pp. 716-723.

_____ **(1979):** “A Bayesian Extension of the Minimum AIC Procedure of Autoregressive Model Fitting”. Biometrika, 66, pp. 237-242.

ANDERSON, T.W. (1971): *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley. New York.

ARCARONS, J. Y MURILLO,C. (1986): *Especificación Dinámica (I). Análisis del Modelo de Función de Transferencia*. Ediser. Servicios Editoriales. Barcelona.

_____ **(1987):** “Especificación Dinámica: Comparación Entre Distintas Estrategias”. Questioó, 11, pp. 49-59.

ARGANDOÑA, A. (1979): “Expectativas Racionales: Una visión de conjunto”. Revista Española de Economía. Julio-Septiembre.

ARROW, K.J. y NERLOVE, M. (1958): “A Note on Expectations and Stability” Econometrica , 26, pp. 297-305.

AZNAR, A. y TRIVEZ, F.J. (1993): *Métodos de Predicción en Economía*. Vol 2. Análisis de Series Temporales. Edit. Ariel. Barcelona.

BAKER, G.A. Jr. (1975): *Essentials of Padé Approximants*. Academic Press. New York.

BAKER, G.A., jr. y GRAVES-MORRIS, P. (1981): Padé Approximants. Part I: Basic Theory. Part II: Extensions and Applications. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Vol. 13 y 14. Addison-Wesley, Reading.

BEGUIN, J.M., GOURIEROUX, C. y MONFORT, A. (1980): “Identification of a Mixed Autoregressive-Moving Average Process: The Corner Method” en *Time Series*. O.D. Anderson, Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 423-436.

_____ (1981): “The Applicability of the Corner Method: A Reply”. Journal of the Operational Research Society, vol 32, nº 11, pp.1042-1045.

BERLINET, A. (1981): “Une Méthode de Determination des Degrés d’un Modèle ARMA”. Publications IRMA, Lille, vol. 3, fasc.6.

_____ (1984): “Estimating the Degrees of an ARMA Model”. Compstat Lect., 3, pp.61-94.

BERLINET, A. y FRANCO, C. (1994): “Identification of a Univariate ARMA Model”. Computational Statistics, 9, pp.117-133.

BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Revised Edition. Holden Day. San Francisco.

BREZINSKI, C. (1980): *Padé-type Approximations and General Orthogonal Polynomials*. Birkhäuser, Basel.

BREZINSKI, C. y REDIVO ZAGLIA, M. (1991): *Extrapolation Methods. Theory and Practice*. North Holland, Amstersdam.

BULTHEEL, A. (1987): *Laurent Series and their Padé Approximations*. Birkhäuser, Basel/Boston.

BUTHEEL, A. y VAN BAREL, M. (1986): “Padé Techniques for Model Reduction in Linear System Theory: A Survey”. Journal of Computational and Applied Mathematics, 14, pp. 401-438.

CLAVERIE, P., SZPIRO, D. y TOPOL, R. (1990): “Identification des Modèles à Fonction de Transfert: La Méthode Padé-Transformée en z”. Annales D'Economie et de Statistique, 17, pp. 145-161.

CLEVELAND, W.S. (1972): “The Inverse Autocorrelations of a Time Series and their Applications”. Technometrics, 14, pp. 277-298.

COCHRANE, D. y ORCUTT, G.H. (1949): “Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms”. Journal of the American Statistical Association, 44, pp. 32-61.

CHOI, B.S. (1992): *ARMA Model Identification*. Springer Denis in Statistics. Probability and its Applications. Springer-Verlag.

DAVIES, N. y PETRUCCELLI, H.D. (1984): “On the Use of the General Partial Autocorrelation Function for Order Determination in ARMA(p,q) Processes”. Journal of the American Statistical Association, 79, pp. 374-377.

DHRYMES, P.J. (1971): *Distributed Lags: Problems of Estimation and Formulation*. San Francisco. Holden- Day.

EDLUND, P.O. (1984): “Identification of the Multi-Input Box-Jenkins Transfer Function Model”. Journal of Forecasting, 3, pp. 297-308.

FASK, P. y ROBINSON, P.B. (1977): “Identification of Multivariate Dynamic Econometric Models”. American Statistical Association. Proceedings of the Business and Economics Statistics Section, pp. 248-249.

FRANCO, C. (1989): *Identification et Minimalité dans les Séries Chronologiques*. Thèse. Université de Montpellier. Sciences et Techniques du Languedoc.

GANTMACHER, F.R. (1974): *Matrix theory*. Vol. II, Chesea Publising Company.

GEWEKE, J.F. y MEESE, R.A. (1981): “Estimating Regression Models of Finite but Unknown Order”. International Economic Review, 22, pp.55-70.

GLASBEY, C.A. (1982): “A Generalization of Partial Autocorrelations Useful in Identifying ARMA Models”. Technometrics, 24, pp. 223-228.

GONZALEZ, C. y CANO, V. (1990a): “Determinación de los Ordenes de los Polinomios de Retardo en una Función de Transferencia: Comparación de Algoritmos”. Revista de la Academia Canaria de Ciencias, 1, pp. 173-183.

_____ (1990b): “Especificación de una Función de Transferencia Bajo Limitación en el Comportamiento de la Variable Dependiente”. IV Reunión Anual de ASEPELT-España, Murcia.

GONZALEZ, C., CANO, V. y GIL, C. (1993): “Comparación de Algoritmos para la Identificación de una Función de Transferencia: Una Generalización al Caso de Varios Inputs”. Revista Española de Economía, 10, 1, pp. 163-175.

_____ (1995): “The ε -algorithm for the Identification of a Transfer Function Model: Some Applications”. Numerical Algorithms. (En prensa).

GONZALEZ, C., GIL, C. y STARZYNSKA, W. (1994): “A Rational Model for Economies in a State of Transition: The Case of Poland”. Universidad de Lodz, Polonia. (En prensa).

GOOLJER, J.C. DE, ABRAHAM, B., GOULD, A. y ROBINSON, L. (1985): “Methods for Determining the Order of an Autoregressive-Moving Average Process: A Survey”. International Statistical Review, 53, 3, pp. 301-329.

GOOLJER, J.G. DE y HEUTS, R.M.J. (1981): “The Corner Method: And Investigation of an Order Determination Procedure for General ARMA Processes”. Journal of the Operational Research Society, 32, pp. 1039-1046.

GOOLJER, J.G. DE y SAIKKONEN, P. (1988): “A Specification Strategy for Order Determination in ARMA Models”. Commun. Statist., B17, pp. 1037-1054.

GRANGER, C.W.J. y NEWBOLD, P. (1977): *Forecasting Economic Time Series*. New York: Academic Press.

GRAY, H.L., KELLEY, G.D. y McINTIRE, D.D. (1978): “A New Approach to ARMA Modeling”. Commun. Statist., B7, pp. 1-77.

GRAY, H.L. y WOODWARD, W.A. (1981): “Application of S-array to Seasonal Data”. *Applied Time Series Analysis II*, D.F.Findley, Ed. Academic Press, New York, pp. 379-413.

HANNAN, E.J. (1967): “The Estimation of a Lagged Regression Relation”. Biometrika, 54, pp. 409-418.

HANNAN, E.J. y QUINN. B.G. (1979): “The Determination of the Order of an Autoregression”. Journal of the Royal Statistical Society. Series. B, 41, pp.190-195.

HANNAN, E.J. y RISSANEN, J. (1982): “Recursive Estimation of Mixed Autoregressive-Moving Average Order”. Biometrika, 69, pp. 81-94.

HANSSENS , D.M. y LIU, L.M. (1983): “Lag Specifiation in Rational Distributed Lag Structural Models”. Journal of Business and Economics Statistics, 1, pp. 316-325.

HAUGH, L.D. y BOX, G.E.P. (1977): “Identification of Dynamic Regression (Distributed Lag) Models Connecting Two Time Series”. Journal of the American Statistical Association, 72, pp.121-130.

HENDRY, D.F. (1987): “Econometric Methodology: A Personal Perspective” , en T.F. Bewley (Editor). *Advances in Econometrics*. Fifth World Congress, vol. II, pp. 29-48. Cambridge: Cambridge University Press.

HENDRY, D.F., PAGAN, A.R. y SARGAN, J.D. (1984): “Dynamic specification” en Z. Griliches y M.D Intriligator (eds.): *Handbook of Econometrics*, vol II, pp.1023-1100. North Holland.

HOSKING, J.R.M. (1980): “Lagrange Multiplier Tests of Time Series Models”. Journal of the Royal Statistical Society. Series B., 42, pp.170-181.

HUYBERECHTS, S. (1982): “Identification des Processus ARMA Univariés et Multivariés et Tests d'Adequation”. Cahiers du C.E.R.O., 24, n^{os} 2,3 y 4, pp. 243-256.

JENKINS, G.M. y ALAVI, A.S. (1981): “Some Aspects of Modelling and Forecasting Multivariate Time Series”. Journal of Time Series Analysis, 2, pp. 1-47.

JUDGE, G.G., GRIFFTHS, W.E., CARTER HILL , R., LUTKEPOHL, H. y LEE, T.C. (1985): *The Theory and Practice of Econometrics*, 2nd Edition, New York: Wiley.

JUST, R.E. (1977): “Estimation of an Adaptive Expectations Model”. International Economic Review, 18, pp. 629-644.

KOREISHA, S.G. (1984): “A Time Series Approach for Constructing Expectations Models”. Decision Sciences, 15, 2, pp. 117-194.

KOREISHA, S.G. y PUKKILA, T.M. (1990): “Linear Methods for Estimating ARMA and Regression Models with Serial Correlation”. Commun. Statist., B19, pp. 71-102.

LAHIRI, K. (1976): “Inflationary Expectations: Their Formation and Interest Rate Effects”. American Economic Review, 66, pp. 124-131.

LII, K. (1985): “Transfer Function Model Order and Parameter Estimation”. Journal of Time Series Analysis, 6, 3, pp. 153-169.

LINDBERGER, N.A. (1973): Comments on “On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations”. IEEE Trans. Automatic Control, AC-18, pp. 689-691.

LIU, L.M. y HANSSENS, D. (1982): “Identification of Multiple Inputs Transfer Function Models”. Communications in Statistics A 11, pp. 297-314.

LIU, L.M. (1979): User’s Manual for BMDQ2T (TSPACK): Time Series analysis Box-Jenkins. Technical Report 57, Department of Biomathematics. University of California.

LJUNG, G.M. y BOX, G.E.P. (1979): “The Likelihood Function of Stationary Autoregressive-Moving Average Models”. Biometrika, 66, pp. 265-270.

MARESCHAL, B. (1986): “Identification et Aide a la Decision Multicritere”. Cahiers du C.E.R.O., vol. 28, n^{os} 1, 2 y 3, pp. 153-162.

MARESCHAL, B. y MELARD, G. (1988): “The Corner Method for Identifying Autoregressive Moving Average Models”. Applied Statistics, vol. 37, n^o 2, pp. 301-316.

MELARD, G. (1990): “Méthodes Numériques dans la Modelisation de Séries Chronologiques”. Cahiers du CERO, vol. 32, n^{os} 1,2,3, pp. 153-180.

METZLER, L.A. (1941): “The Nature and Stability of Inventory Cycles”. The Review Economics and Statistics, 23, 113-129.

MILLS, T.C. (1990): *Time Series Techniques For Economists*. Cambridge University Press.

MURILLO, C. (1979): *Modelos de Función de Transferencia: Un Enfoque Basado en el Análisis de Series Temporales*. Dpto. de Estadística y Econometría. Facultad de CCEE. Universidad de Barcelona.

MUTH, J.F (1961): “Rational Expectations and the Theory of Price Movements”. Econometrica, 29, pp.315-334.

NERLOVE, M., GREETHER, D.M. y J.L. CARVALHO (1979): *Analysis of Economic Time Series. A Synthesys*. Academic Press.

NEWBOLD, P. (1983): “Bayesian Estimation of Box-Jenkins Transfer Function-Noise Models”. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 35, 2, pp. 323-336

PADE, H. (1892): “Sur la Représentation Approchée d’une Fonction par des Fractions Rationnelles”. Ann. Ec. Norm. Sup., 9.

PAESMANS, M. (1988): “An identification Procedure for a Transfer Function Model”. C.C.E.R.O (Belgium), vol 30, n° 23, pp. 93-117.

PANKRATZ, A. (1983): *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models: Concepts and Cases*. Wiley. New York.

PARZEN, E. (1974): “Some Recent Advances In Time Series Modelling”. IEEE Trans. Automatic Control, AC-19, pp. 389-409.

PETRUSHEV, P.P. y POPOV, V.A. (1987): *Rational Approximation of Real Functions*. Cambridge University Press. Cambridge.

PICCOLO, D. y TUNNICIFFE-WILSON, G. (1984): “A Unified Approach to ARMA Model Identification and Preliminary Estimation”. Journal of Time Series Analysis, 5, pp. 183-204.

PONG-WAI LAI (1979): *Transfer Function Modelling: Relationship Between Time Series Variables*. Concepts and Techniques in Modern Geography, 22.

PRIESTLEY, M.B. (1971): “Fitting Relationships Between Time Series”. Bulletin of the International Statistical Institute, 34, pp. 295-324.

PUKKILA, T.M. (1982): “On the Identification of an ARMA(p,q) Models, en *Time Series Analysis: Theory and Practice I*, O.D: Anderson, De., North Holland, Amsterdam, pp. 81-103.

QUINN, B.G. (1980): “Order Determination for Multivariate Autoregression”. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 42, pp. 182-185.

RAFTERY, A.E. (1985): “Time Series Analysis”. European Journal of Operational Research, 20, 2, pp. 127-137.

RAYMOND, J.L. (1986): “Expectativas Racionales en Economía”. Papeles de Economía Española, nº 28.

REZAYAT, F. y ANANDALINGAM, G. (1988): “Using Instrumental Variables for Selecting the Order of ARMA Models”. Commun. Statist., A17, pp. 3029-3065.

RISSANEN, J. (1978): “Modeling By Shortest Data Description”. Automatica, 14, pp. 465-471.

SCHWARZ, G. (1978): “Estimating the Dimension of a Model”. Annals of Statistics, 6, pp. 461-464.

SOLO, V. (1986): “Topics in Advanced Time Series Analysis”. Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag. New York.

SPANOS, A. (1986): *Statistical Foundations of Econometric Modelling*. Cambridge: Cambridge University Press.

TAKEMURA, A.C. (1984): “A Generalization of Autocorrelation and Partial Autocorrelation Function Useful for Identification of ARMA (p,q) Process”. Technical Report, n°11, Department of Statistics, Stanford University, Stanford.

TIAO, G.C. y BOX, G.E.P. (1981): “Modelling Multiple Time Series with Applications”. Journal of the American Statistical Association, 76, pp. 802-816.

TIAO, G. C. y TSAY, R.S. (1989): “Model Specification in Multivariate Time Series”. Journal of the Royal Statistical Society. Series. B, 51, pp. 157-213.

TIAO, G.C., BOX, G.E.P., GRUPE, M.R., HUDAK, G.B., BELL, W.R. y CHANG, I. (1979): “The Wisconsin Multiple Time Series”. Bell Journal of Economics and Management Science, 2, 515-541.

TREADWAY, A.B. (1984): “On the Properties Typical of Economic Time Series”. Questioó, 8, 1, pp. 21-38.

TSAY, R.S. (1985): “Model Identification in Dynamic Regression (Distributed Lag) Models”. Journal of Business and Economics Statistics, vol. 3, n° 3, pp. 228-237.

TSAY, R.S. y TIAO, G.C. (1984): “Consistent Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models”. Journal of the American Statistical Association, 79, pp. 84-96.

_____ (1985): “Use of Canonical Analysis in Time Series Model Identification”. Biometrika, 72, pp.299-315.

TUCKER, W.T. (1982): “On the Padé Table and its Relationship to the R and S Arrays and ARMA modelling”. Commun. Statist., A11, pp. 1335-1379.

VANDAELE, W. (1983): *Applied Time Series and Box-Jenkins Models*. New York: Academic Press.

WALL, K.D. (1976): “FIML Estimation of Rational Distributed Lag Structural Form Models”. Annals of Economic and Social Measurement, 5, pp. 53-64.

WALLIS, K.F. (1977): “Multiple Time Series Analysis and the Final Form of Econometric Models”. Econometrica, 45, pp. 1481-1497.

WHITTLE, P. (1954): “Some Recent Contributions to the Theory of Stationary Time Series”. En *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, 2nd ed., by H. Wold, pp. 196-228. Stockholm:Almqvist and Wicksell.

WOODSIDE, C.M. (1971): “Estimation of the Order of Linear Systems”. Automatica, 7, pp. 727-733.

WOODWARD, W.A. y GRAY, H.L. (1981): “On the Relationship Between the S Array and the Box-Jenkins Method of ARMA Model Identification”. Journal of the American Statistical Association, 76, pp. 579-587.

WYNN, P. (1956): “On a Device for Computing the $e_m(s_n)$ Transformation”. MTAC 10, pp. 91-96.

ZELLNER, A. y PALM, F. (1974): “Time Series Analysis and Simultaneous Equations Models”. Journal of Econometrics, 2, 1, pp. 17-54.