

Curso 1996/97
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ RAMOS

**Detección de frente de onda.
Aplicación a técnicas de alta resolución espacial
y alineamiento de superficies ópticas segmentadas**

Director
JESÚS JIMÉNEZ FUENSALIDA



SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

a mi esposa, Beatriz,
a mis padres,
a toda la familia.

Agradecimientos

Quiero hacer constar mi más sincero agradecimiento a la ayuda recibida de tantas personas, sin las cuales este trabajo hubiera sido imposible.

Comienzo por mi Director de Tesis, Jesús Jiménez Fuensalida, al que estimo por la estrecha colaboración prestada y, sobre todo, por su amistad. No olvido tampoco, dentro lo que ha sido el Grupo de Alta Resolución en estos años, dar las gracias a mis primeros compañeros de fatiga, Fernando Rosa y Antonio Fernández, quienes han tenido una excelente continuación en Nicholas Devaney.

La mayor injusticia, por mi parte, sería no citar al personal del IAC al completo (Investigación, Ingeniería, Mecánica, Administración, Borondónica,...), del que me faltan palabras para agradecer su ayuda desinteresada en la multitud de solicitudes por mi planteadas. Me es imposible citar aquí a todos estos amigos, tanto a los que aún siguen en el Instituto como a los que ya han partido, arrastrados por la "movilidad geográfica" inherente a la investigación en Astronomía. Definitivamente, he vivido estos años un estupendo ambiente de trabajo y compañerismo.

De todos mis sentimientos, quiero destacar el apoyo y cariño incondicionales prestados por toda mi familia: mis padres (Luis y Eusebia), mis hermanos (Juani, Javi y Luis Fernando), mis suegros (Manolo y Cala), mis cuñadas/o (Carmen Gloria, Gladys, Sole y Manolo) y mis tres preciosas sobrinitas (Amanda, Laura y Carolina).

El apartado más especial va dedicado a mi mujer, **Beatriz**, a quien prometo resarcir de los 3 largos años que llevo sin tiempo libre, consecuencia directa de mis actividades docente e investigadora (agravadas durante 9 meses por mi Servicio Militar). A estos años de sacrificio ella ha respondido siempre con compañía y comprensión, incluso premiándome con nuestro futuro bebé. Dios mediante, estos otros 9 meses serán ahora muchísimo más felices.

A todos: GRACIAS.

Resumen

La turbulencia atmosférica actúa introduciendo aberraciones ópticas en el frente de onda que llega al telescopio. En consecuencia, una imagen de larga exposición pierde la información de las altas frecuencias espaciales, limitando así la resolución espacial. Aunque a través de imágenes de corta exposición es posible restaurar la autocorrelación de la imagen (Interferometría *Speckle* Clásica), el objeto asociado no es unívoco, y la verdadera estructura espacial no puede ser lograda sino a través del conocimiento de la fase en el dominio de frecuencias de la imagen. La medida de la fase del frente de onda es pues fundamental y necesaria para cualquier otra técnica moderna de Alta Resolución Espacial.

La información de la fase puede ser obtenida directamente usando sensores como los de *Hartmann-Shack* y de *Curvatura*, cuyo comportamiento es analizado con profundidad en esta Tesis. Para ello se ha desarrollado un conjunto computacional que permite la simulación numérica y bidimensional de la óptica del proceso de observación astronómico con grandes telescopios. Asimismo, se han diseñado y puesto en práctica modificaciones en los algoritmos de restauración de la fase del frente de onda, los cuales han sido aplicados con éxito no sólo a simulaciones sino también a datos observacionales reales.

A partir del análisis detallado de los sensores de frente de onda se ha constatado el alto rendimiento del sensor de Curvatura como detector de pistón local. Como consecuencia se propone un sistema híbrido para el alineamiento de telescopios de espejo segmentado en el que actúen combinadamente los sensores *Hartmann-Shack* y de *Curvatura* .

Summary

Atmospheric turbulence introduces optical aberrations into wavefronts arriving at ground-based telescopes. Long exposure images therefore lose high spatial frequency information and do not achieve the diffraction limit of the telescope. Using short-exposure images allows us to restore the autocorrelation of the object observed (Classical Speckle Interferometry), but this recovered object is not unique, and the actual spatial structure can not be determined without the phase in the frequency domain. Measurement of the wavefront phase is therefore fundamental and necessary for any modern High Spatial Resolution technique.

The phase information can be obtained directly using the Hartmann-Shack and the Curvature sensors, which we analyze in depth in this Thesis. To do this we have performed bidimensional numerical simulations of the optical processes relevant to astronomical observations with large telescopes. Also, we have designed and applied modifications to the algorithms which restore the wavefront phase from sensor measurements, and we have successfully used these not only in simulations but also with actual data.

From our analysis, the high sensitivity of the Curvature sensor to local

piston is demonstrated. As a direct application we have proposed a strategy to align segmented-mirror telescopes combining the Shack-Hartmann and Curvature sensors.

Índice

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Summary	ix
1 Introducción a la Alta Resolución Espacial en Astronomía.	2
1.1 Efectos de la turbulencia atmosférica sobre imágenes astronómicas.	3
1.1.1 Estadística de la turbulencia atmosférica. Fluctuaciones en la temperatura.	4
1.1.2 Estadística de la amplitud compleja de frentes de onda perturbados.	6
1.2 Formación de imagen.	10
1.2.1 Límite de difracción.	10
1.2.2 Imagen de larga exposición. Parámetro de Fried.	11
1.2.3 Imagen de corta exposición.	14
1.3 Algunas Técnicas de Alta Resolución Espacial.	17
1.3.1 Interferometría <i>Speckle</i>	17

1.3.2	Técnica de deconvolución con detección del frente de onda.	20
1.3.3	Interferometría de <i>Shearing</i>	21
1.3.4	Óptica Adaptativa.	22
1.3.5	Objetivos de este Trabajo.	23
2	Recuperación del frente de onda.	26
2.1	Definición de la función de aberración de onda.	27
2.2	Ecuación de Transporte de la Irradiancia. Detección del frente de onda.	29
2.3	Simulación del frente de onda.	30
2.3.1	Polinomios de Zernike.	30
2.3.2	Algoritmo para la simulación. Tratamiento informático.	33
2.3.3	Tests sobre el simulador.	36
2.4	Sensores. Principios teóricos de funcionamiento	41
2.4.1	Sensor Hartmann-Shack.	41
2.4.2	Sensor de Curvatura.	44
3	Sensor Hartmann-Shack.	48
3.1	Diseño de un sensor Hartmann-Shack.	49
3.2	Algoritmos de recuperación.	52
3.2.1	Algoritmo de Hudgin y Fried.	52
3.2.2	Recuperación modal con polinomios de Zernike.	54
3.2.3	Recuperación a través de exponenciales complejas. Uso de la transformada discreta de Fourier.	56

3.3	Simulación numérica.	62
4	Sensor de Curvatura.	68
4.1	Interpretación según la Óptica Geométrica.	70
4.2	Simulación.	73
4.2.1	Zona cáustica y muestreo.	76
4.3	Algoritmo de recuperación.	77
4.3.1	De las condiciones de ligadura.	79
5	Deconvolución con detección del frente de onda.	80
5.1	Descripción de la técnica.	80
5.2	Tratamiento numérico.	83
5.3	Aplicación a objetos simulados.	84
5.4	Resultados en objetos reales.	91
6	Aplicación al estudio óptico de telescopios segmentados.	96
6.1	Estudio de las aberraciones ópticas con el sensor Hartmann-Shack.	97
6.2	Aplicación del sensor de Curvatura a un telescopio tipo Keck.	102
6.2.1	Recuperación del pistón en presencia de turbulencia atmosférica.	102
6.2.2	Análisis de la recuperación del pistón en diversas situaciones.	107
6.3	Propuesta del uso conjunto de ambos detectores.	109
7	Conclusiones y objetivos futuros.	112

Capítulo 1

Introducción a la Alta Resolución Espacial en Astronomía.

Explorar más en detalle el cielo pasa por coleccionar más cantidad de luz, ello se traduce en la necesidad de construir telescopios de mayores dimensiones. No es sencillo, supone combinar campos tan diversos como la mecánica, la óptica y la electrónica. En cualquiera de ellos encontramos limitaciones que continuamente han de ser superadas. Es obvio que el resultado de lograr telescopios con área colectora mayor mejora la capacidad para medir objetos más débiles. Por otra parte, también la capacidad de discernir mayor detalle en las fuentes cósmicas debería mejorar. Sin embargo, y debido a la degradación del frente de onda producido por la turbulencia atmosférica, la capacidad para apreciar detalles de los objetos queda reducida a la producida por un telescopio pequeño. Si el efecto de la atmósfera terrestre no se evita, un telescopio de

gran abertura (10 m.) ofrece el mismo detalle en la estructura de la imagen de una fuente que otro de apenas 20cm. de pupila (trabajando en el visible).

Las técnicas que permiten incrementar la capacidad para medir el detalle en la estructura del objeto son denominadas técnicas de Alta Resolución Espacial. En este primer capítulo hacemos una introducción global a la representación estadística del proceso de observación con técnicas de Alta Resolución Espacial, y en el último apartado reseñamos el contenido de los restantes capítulos de esta memoria.

1.1 Efectos de la turbulencia atmosférica sobre imágenes astronómicas.

Llegar al límite de difracción significa obtener la máxima información en frecuencias que el telescopio puede suministrarnos. Sin embargo, es el efecto de la turbulencia atmosférica el que impide alcanzar ese límite en imágenes de larga exposición. La turbulencia actúa introduciendo aberraciones en el frente de onda que llega al telescopio. El uso de imágenes de corta exposición (menor que el tiempo de estabilidad atmosférica) evita la pérdida de contraste en la superposición de imágenes (*Interferometría Speckle*).

1.1.1 Estadística de la turbulencia atmosférica. Fluctuaciones en la temperatura.

De acuerdo con la Mecánica de Fluidos, el “número de Reynolds” calculado para flujos de gran escala L como los que hay en la atmósfera terrestre sugiere que éstos son turbulentos. Dentro también de la teoría de Kolmogorov (1941), dichos flujos turbulentos producen grandes remolinos que se disgregan transfiriendo la energía en remolinos más pequeños. Esta cascada de energía finaliza cuando es disipada en calor por fricción molecular. Las escalas intermedias conforman lo que se denomina “rango inercial”. En este rango las fluctuaciones del campo de velocidades son homogéneas e isotrópicas, dependiendo su estadística sólo de ϵ_0 (ritmo de producción de energía: $[K^2 \times s^{-1}]$).

Flujos turbulentos también producen inhomogeneidades en la temperatura por mezcla adiabática de capas atmosféricas a diferentes temperaturas. Las inhomogeneidades a gran escala rompen en escalas más pequeñas hasta que la disipación molecular térmica domina. Se define ahora η_0 como el ritmo de producción-disipación de la energía turbulenta (unidades de $\eta_0 : [m^2 \times s^{-3}]$). En el rango inercial, la estadística de las inhomogeneidades en la temperatura está enteramente determinada por ϵ_0 y η_0 .

El campo de temperaturas queda bien descrito por su función de estructura:

$$D_T(\vec{\rho}) = \langle |T(\vec{r} + \vec{\rho}) - T(\vec{r})|^2 \rangle$$

que expresa la varianza de la diferencia de temperatura entre dos puntos de la atmósfera separados una distancia $\vec{\rho}$ entre sí y donde $\langle \rangle$ significará, de ahora en adelante, promedio temporal. Siguiendo siempre la teoría de Kolmogorov, en el rango inercial la función de estructura depende únicamente del módulo

1. INTRODUCCIÓN A LA ALTA RESOLUCIÓN ESPACIAL EN ASTRONOMÍA.5

ρ , por tratarse de un campo homogéneo e isotrópico, y de ϵ_0 y η_0 . De simples consideraciones dimensionales puede escribirse:

$$D_T(\vec{\rho}) \propto \eta_0 \epsilon_0^{-1/3} \rho^{2/3}$$
$$D_T(\vec{\rho}) = C_T^2 \rho^{2/3}$$

donde C_T es una constante de proporcionalidad.

El campo de temperaturas puede también ser descrito por el espectro de potencias espacial ("espectro de Kolmogorov"):

$$\Phi_T(k) = 0.003 C_T^2 k^{-11/3}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, siendo λ la longitud de onda espacial asociada a las fluctuaciones de temperatura.

Integrando sobre todo el rango de frecuencias, esta expresión lleva al resultado no físico de una potencia total infinita. Como consecuencia, la covarianza $B_T(\vec{\rho})$ del campo de temperaturas, que está dada por la transformada de Fourier espacial del espectro de potencias, no puede ser calculada de esta expresión. El uso de $D_T(\vec{\rho})$ en lugar de $B_T(\vec{\rho})$ evita tal problema.

Una descripción análoga para las fluctuaciones del índice de refracción N permite escribir:

$$D_N(\vec{\rho}) = C_N^2 \rho^{2/3}$$
$$\Phi_N(k) = 0.003 C_N^2 k^{-11/3}$$

Suponiendo la atmósfera compuesta de gas perfecto, la relación entre las constantes C_T y C_N queda:

$$C_N = 75 \cdot 10^{-6} P C_T T^{-2}$$

con P en milibares y T en Kelvin.

1.1.2 Estadística de la amplitud compleja de frentes de onda perturbados.

Para el problema de formación de imagen en el plano focal de un telescopio es suficiente realizar la aproximación de "campo escalar" para la luz. Sería exigible una representación vectorial si hubiese que tener en cuenta efectos de polarización. Una onda óptica monocromática puede ser representada por su amplitud instantánea:

$$\begin{aligned} U(P, t) &= A(P) e^{-i(2\pi\nu_0 t - \phi)} \\ &= A(P) e^{i\phi} e^{-i2\pi\nu_0 t} \\ &= \psi(P) e^{-i2\pi\nu_0 t} \end{aligned}$$

Cada punto P de la atmósfera es designado por un vector coordenado horizontal \vec{x} y una altitud h sobre la superficie terrestre. A la función $\psi(P)$ se la denomina "amplitud compleja del campo", y es constante en el tiempo en el caso monocromático. En el caso quasi-monocromático (la anchura del espectro $\Delta\nu_0 \ll \nu_0$, frecuencia media de la onda) la amplitud compleja contendrá una dependencia temporal:

$$\psi(P, t) = |\psi(P, t)| e^{i\phi(t)}$$

La vibración escalar localizada en el punto $P(\vec{x}, h)$ es descrita por la amplitud compleja:

$$\psi_h(\vec{x}) = |\psi_h(\vec{x})| e^{i\phi_h(\vec{x})}$$

En cada altura h la fase $\phi_h(\vec{x})$ está referida a su valor promedio $\langle \phi_h(\vec{x}) \rangle = 0$. Fuera de la atmósfera la amplitud compleja sin perturbar podemos asumir que es la unidad, por comodidad.

Salida de una capa turbulenta fina. Difracción de Fresnel.

Consideremos ondas planas horizontales y monocromáticas propagándose desde una estrella en el cénit hacia el observador terrestre. Supongamos que la turbulencia está concentrada en una capa horizontal delgada entre h y $h + \delta h$. La capa será lo suficientemente estrecha para que los efectos de difracción sobre la distancia δh sean despreciables y lo suficientemente gruesa para encontrarnos en el "rango inercial".

Si suponemos que no hay centelleo, la amplitud no varía: $|\psi_h(\vec{x})| = 1$, y la amplitud compleja sólo sufre el desfase. A la capa de entrada llega $\psi_{h+\delta h}(\vec{x}) = \psi_\infty(\vec{x}) = 1$, mientras que a la salida habrá sufrido un desfase $\phi(\vec{x})$:

$$\psi_h(\vec{x}) = |\psi_h(\vec{x})| e^{i\phi(\vec{x})}$$

El desplazamiento de fase es introducido por las fluctuaciones del índice de refracción $n(\vec{x}, z)$ dentro de la capa turbulenta:

$$\phi(\vec{x}) = k \int_h^{h+\delta h} n(\vec{x}, z) dz \quad (1.1)$$

El momento de segundo orden (covarianza) del campo aleatorio complejo $\psi(\vec{x})$ en la capa de salida es la llamada "función de coherencia espacial":

$$B_h(\vec{\xi}) = \langle \psi_h(\vec{x}) \psi_h^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle = \langle e^{i[\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} + \vec{\xi})]} \rangle \quad (1.2)$$

Como la suma de un gran número de variables independientes (ecuación 1.1) tiene estadística gaussiana, la expresión (1.2) es también gaussiana con

1. INTRODUCCIÓN A LA ALTA RESOLUCIÓN ESPACIAL EN ASTRONOMÍA.8

media cero, lo que nos permitirá escribir:

$$B_h(\vec{\xi}) = e^{-\frac{1}{2} \langle |\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} + \vec{\xi})|^2 \rangle} = e^{-\frac{1}{2} D_\phi(\vec{\xi})}$$

Relacionándolo con la estadística de las fluctuaciones del índice de refracción:

$$B_h(\vec{\xi}) = e^{-\frac{1}{2} [2.91 k^2 C_N^2 \delta h \xi^{5/3}]}$$

Pero aún no conocemos la amplitud compleja en la superficie. El campo complejo a nivel de superficie terrestre $\psi_z(\vec{x})$ es el campo difractado desde la capa de salida en h . Podemos servirnos de la difracción de Fresnel ya que las longitudes de onda del visible son mucho más pequeñas que las perturbaciones del frente de onda observadas:

$$\psi_0(\vec{x}) = \psi_h(\vec{x}) * \frac{1}{i\lambda h} e^{i\pi \frac{x^2}{\lambda h}}$$

donde $*$ significa convolución.

El espectro de potencias de $\psi_0(\vec{x})$ será igual al de $\psi_h(\vec{x})$ multiplicado por $e^{-i\pi\lambda h f^2}$, lo que significa que la difracción de Fresnel no afecta a la amplitud de las componentes de Fourier del campo, sólo a la fase.

Haciendo uso del teorema de convolución de la óptica de Fourier, la función de coherencia en el nivel de superficie es:

$$\begin{aligned} B_0(\vec{\xi}) &= \langle \psi_0(\vec{x}) \psi_0^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle \\ &= \langle \psi_h(\vec{x}) \psi_h^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle * \frac{1}{i\lambda h} e^{i\pi \frac{x^2}{\lambda h}} * \frac{-1}{i\lambda h} e^{-i\pi \frac{x^2}{\lambda h}} \\ &= \langle \psi_h(\vec{x}) \psi_h^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle * \delta(\vec{x}) \end{aligned}$$

1. INTRODUCCIÓN A LA ALTA RESOLUCIÓN ESPACIAL EN ASTRONOMÍA.9

En definitiva: $B_0(\vec{\xi}) = B_h(\vec{\xi})$.

Tanto el espectro de potencias de la amplitud compleja como su función de coherencia son invariantes bajo la difracción de Fresnel.

Múltiples capas y atmósfera turbulenta gruesa.

Supongamos ahora que la turbulencia está localizada en un número de finas capas situadas entre h_j y $h_j + \delta h_j$. La amplitud compleja a la salida de la capa j está relacionada con la amplitud compleja $\psi_{h_j+\delta h_j}$ en la entrada por:

$$\psi_{h_j}(\vec{x}) = \psi_{h_j+\delta h_j}(\vec{x}) e^{i\phi_j(\vec{x})}$$

donde $\phi_j(\vec{x})$ es la fluctuación de fase introducida por la capa j (suponemos que no hay centelleo), y es independiente estadísticamente de $\psi_{h_j+\delta h_j}$, lo que permite escribir la coherencia del campo a la salida relacionada a la coherencia del campo en la entrada como sigue:

$$\langle \psi_{h_j}(\vec{x}) \psi_{h_j}^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle = \langle \psi_{h_j+\delta h_j}(\vec{x}) \psi_{h_j+\delta h_j}^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle \langle e^{i[\phi_j(\vec{x}) - \phi_j(\vec{x} + \vec{\xi})]} \rangle$$

Teniendo en cuenta que entre capas no afecta la difracción de Fresnel, buscando una relación con los parámetros característicos del índice de refracción, y generalizando para una estrella en cualquier ángulo cenital γ , podremos escribir:

$$B_0(\vec{\xi}) = e^{\frac{i\pi}{2}[2.91 k^2 (\cos\gamma)^{-1} \xi^{5/3} \int C_N^2(h) \delta h]}$$

1.2 Formación de imagen.

1.2.1 Límite de difracción.

Por límite de difracción se entiende la separación angular mínima entre dos fuentes puntuales tal que sean distinguibles según el criterio de Rayleigh en el plano focal del telescopio. Este parámetro depende únicamente de la longitud de onda de la luz que llega y del tamaño de la pupila del telescopio.

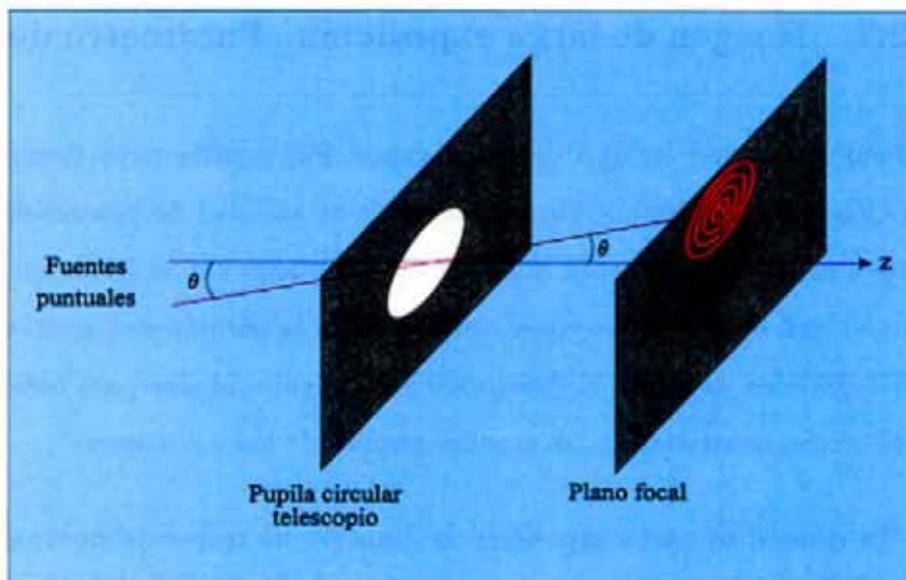


Figura 1.1: La imagen de una fuente puntual en el plano focal de un telescopio de pupila circular es una figura de Airy (anillos concéntricos, color azul, con menor intensidad a medida que crece el radio del anillo). Un frente de onda plano que llegue inclinado respecto al plano pupila genera la misma figura de Airy pero desplazada una cierta distancia respecto al eje óptico (color rojo).

Un frente de onda plano (frente esférico procedente de una fuente puntual en el infinito) que llegue a la pupila circular del telescopio (Fig. 1.1) produce una figura de Airy (anillos concéntricos en el plano focal: $[J_1(z)/z]^2$, siendo $J(z)$ una función de Bessel). Otra fuente puntual separada un ángulo θ respecto

al eje óptico, o el efecto de la turbulencia atmosférica sobre la luz procedente de la fuente original, producirá un frente de onda plano que llegará a la pupila inclinado respecto al eje, con lo cual la nueva figura de Airy estará desplazada en el plano focal respecto a la primera. Haciendo uso del criterio de Rayleigh, la separación mínima en que los lóbulos centrales de ambas figuras de Airy se hacen distinguibles (es decir, se cruzan al 80% de su altura) es:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

1.2.2 Imagen de larga exposición. Parámetro de Fried.

Entendemos como imagen de larga exposición aquella cuyo tiempo de exposición supera el tiempo característico de estabilidad de la atmósfera. Esta imagen es la habitualmente utilizada en Astrofísica con el fin de incrementar la magnitud límite. Tiene como contrapartida la pérdida de las altas frecuencias espaciales, es decir, el desaprovechar las capacidades para obtener altas resoluciones espaciales de las grandes pupilas de los telescopios.

En imagen de corta exposición la “función de respuesta puntual” (*Point Spread Function, PSF*) la definimos:

$$S(\vec{\alpha}) = |h(\vec{\alpha})|^2 = |TF[\psi_h(\vec{u})P(\vec{u})]|^2$$

siendo $\vec{\alpha}$ y \vec{u} la coordenada espacial y su frecuencia asociada, respectivamente, $h(\vec{\alpha})$ la respuesta impulso del sistema, $\psi(\vec{u})$ la amplitud compleja de la onda, y $P(\vec{u})$ la función de transmisión de la pupila.

El proceso realizado al tomar intensidades en el plano focal del telescopio

corresponde a la expresión:

$$I(\vec{\alpha}, t) = O(\vec{\alpha}) * S(\vec{\alpha}, t)$$

donde $O(\vec{\alpha})$ es la distribución de intensidad en el objeto e $I(\vec{\alpha}, t)$ corresponde al mapa de intensidades en el plano imagen del telescopio. La imagen de larga exposición del objeto en el plano focal se escribirá:

$$\langle I(\vec{\alpha}) \rangle = O(\vec{\alpha}) * \langle S(\vec{\alpha}) \rangle$$

La PSF de la imagen de larga exposición podemos pues describirla con el promedio temporal $\langle S(\vec{\alpha}) \rangle$. Su transformada de Fourier es la "Función de Transferencia Óptica" (*Optical Transfer Function, OTF*) de la imagen de larga exposición: $\langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle$. En el dominio transformado de Fourier:

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(\vec{f}) \rangle &= \hat{O}(\vec{f}) \langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle \\ \langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle &= A^{-1} \int \langle \psi_h(\vec{u}) \psi_h^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle P(\vec{u}) P^*(\vec{u} + \vec{f}) d\vec{u} \quad (1.3) \end{aligned}$$

donde A es el área de la pupila en unidades de longitud de onda al cuadrado. La coordenada \vec{f} denota el desplazamiento en \vec{u} que incluye la autocorrelación de $\psi_h(\vec{u})P(\vec{u})$ (ecuación 1.3). En este contexto se llama función de coherencia a:

$$B(\vec{f}) = \langle \psi_h(\vec{u}) \psi_h^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle$$

Por tanto:

$$\langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle = B(\vec{f}) T(\vec{f})$$

La OTF de la imagen de larga exposición es el producto de las funciones de transferencia de la atmósfera (la cual es descrita por la función de coherencia) y del telescopio $T(\vec{f})$.

1. INTRODUCCIÓN A LA ALTA RESOLUCIÓN ESPACIAL EN ASTRONOMÍA.13

Introduzcamos ahora el llamado "parámetro de Fried" (D.L. Fried 1966a,b). Para ello definimos la resolución Strehl de un sistema óptico como la integral de su función de transferencia sobre todas las frecuencias:

$$R = \int B(\vec{f}) T(\vec{f}) d\vec{f}$$

Hay dos casos extremos:

- $B(\vec{f}) \gg T(\vec{f})$. Si la coherencia es grande, la turbulencia en la atmósfera es despreciable y en la resolución domina la función de transferencia del telescopio (llegamos al límite de difracción).

- $B(\vec{f}) \ll T(\vec{f})$. En este caso la coherencia es pequeña, la turbulencia atmosférica es importante y es ésta la que limita la resolución. No llegamos pues al límite de difracción del telescopio.

Una medida conveniente de la turbulencia atmosférica (*seeing*) es el diámetro crítico de Fried del telescopio (r_0), de forma que las contribuciones a la resolución Strehl de atmósfera y telescopio coincidan:

$$\int B(\vec{f}) d\vec{f} = \int T(\vec{f}) d\vec{f}$$

Se comprueba que en tal caso la función de coherencia va como:

$$B(\vec{f}) = e^{-3.44(\frac{\lambda}{r_0})^{5/3}}$$

En definitiva: el poder de resolución está limitado por el telescopio cuando su diámetro es más pequeño que r_0 , y por la atmósfera cuando el diámetro es superior a r_0 .

Por definición, el tamaño del disco de *seeing* puede escribirse como λ/r_0 , es decir, la larga exposición proporciona información hasta la frecuencia $f = r_0/\lambda$. Las áreas de coherencia del frente de onda son del orden de $\pi \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$.

1.2.3 Imagen de corta exposición.

La turbulencia atmosférica tiene un tiempo de variación característico $\tau = r_0/v$, donde v caracteriza la velocidad del viento. Tiempos de exposición por debajo de éste producirían imágenes con la atmósfera “congelada” (típicamente 10ms. en $\lambda=0.5\mu$). Es necesario utilizar detectores “muy sensibles” y rápidos sistemas de adquisición de datos para poder grabar numerosas imágenes con tiempos de exposición de ese orden.

Las imágenes de corta exposición son la llave para recuperar el objeto hasta el límite de difracción del telescopio. No se pierden las altas frecuencias como ocurría en la imagen de larga exposición, en la cual se superponían imágenes desfasadas entre sí por el efecto atmosférico.

En una imagen de corta exposición:

$$I(\vec{\alpha}) = O(\vec{\alpha}) * S(\vec{\alpha})$$

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \tilde{O}(\vec{f}) \tilde{S}(\vec{f})$$

Un promedio temporal servirá para ganar señal, y un cálculo previo de módulos permitirá evitar la contribución de los desfases en las imágenes superpuestas:

$$\langle |\tilde{I}(\vec{f})|^2 \rangle = |\tilde{O}(\vec{f})|^2 \langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$$

$|\tilde{O}(\vec{f})|^2$ es el espectro de energías del objeto y $\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$, que describe la transferencia de energía del objeto a la imagen, es a menudo llamada "función de transferencia Speckle".

$$\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle = A^{-2} \iint \langle \psi_h(\vec{u}) \psi_h^*(\vec{u} + \vec{f}) \psi_h(\vec{u}') \psi_h^*(\vec{u}' + \vec{f}) \rangle \\ P_h(\vec{u}) P_h^*(\vec{u} + \vec{f}) P_h(\vec{u}') P_h^*(\vec{u}' + \vec{f}) d\vec{u} d\vec{u}'$$

De modo que $\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$ depende del momento de cuarto orden de la amplitud compleja:

$$M(\vec{f}, \vec{f}') = \langle \psi_h(\vec{u}) \psi_h^*(\vec{u} + \vec{f}) \psi_h(\vec{u} + \vec{f}') \psi_h^*(\vec{u} + \vec{f} + \vec{f}') \rangle$$

donde hemos hecho el cambio $\vec{f}' = \vec{u}' - \vec{u}$. En definitiva, agrupando en $\tilde{A}(\vec{f}, \vec{f}')$ los términos no incluidos en $M(\vec{f}, \vec{f}')$, podemos escribir:

$$\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle = A^{-2} \int M(\vec{f}, \vec{f}') \tilde{A}(\vec{f}, \vec{f}') d\vec{f}'$$

La función de transferencia de la energía ya no es sólo el producto de una función que caracteriza al telescopio y otra a la atmósfera. Si la turbulencia atmosférica es grande $D \gg r_0$, el espectro para altas frecuencias $f \gg r_0/\lambda$:

$$\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle \approx \frac{\sigma}{A} T_0(\vec{f})$$

donde:

$$\sigma = \int B^2(\vec{f}') d\vec{f}' \\ T_0(\vec{f}) = A^{-1} \int |P(\vec{u})|^2 |P(\vec{u} + \vec{f})|^2 du$$

Una expresión analítica de $\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$ puede ser obtenida suponiendo que la amplitud compleja sigue una estadística gaussiana. Esta condición es muy

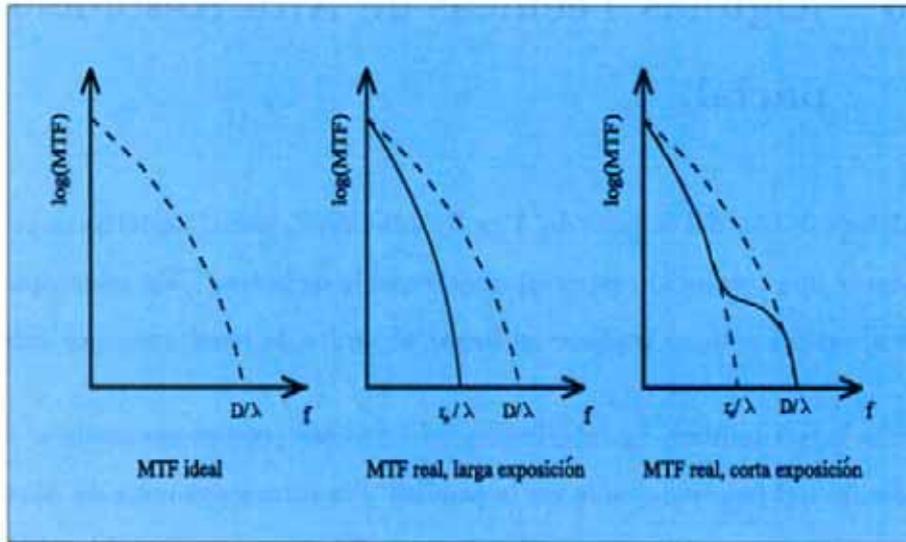


Figura 1.2: Comparación de las MTF de larga y corta exposición. Se llega al límite de difracción con la imagen de corta exposición.

restrictiva, pues implica grandes fluctuaciones de amplitud en los frentes de onda atmosféricamente degradados sólo observadas ocasionalmente:

$$M(\vec{f}, \vec{f}') = B^2(\vec{f}) + B^2(\vec{f}')$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle |\hat{S}(\vec{f})|^2 \rangle &= B^2(\vec{f})|T(\vec{f})|^2 + \frac{\sigma}{A}T_0(\vec{f}) \\ \langle |\hat{S}(\vec{f})|^2 \rangle &= [\langle \hat{S}(\vec{f}) \rangle]^2 + \frac{\sigma}{A}T_0(\vec{f}) \end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene la información en frecuencias hasta el límite de difracción del telescopio ($f = D/\lambda$), además de la contenida en las bajas frecuencias que la larga exposición proporciona (hasta $f = r_0/\lambda$).

1.3 Algunas Técnicas de Alta Resolución Espacial.

Se designan como Técnicas de Alta Resolución Espacial aquéllas cuyo objetivo es lograr una resolución espacial mayor que la de *seeing*. En telescopios de una sola abertura esto se traduce en llegar al límite de resolución por difracción.

En la actualidad, la interferometría *Speckle* (complementada a veces con medición del frente de onda en la pupila) y la interferometría de *Shearing* son las técnicas en auge que describiremos en detalle a continuación. Métodos de restauración en tiempo real del frente de onda, como es la Óptica Adaptativa, serán reseñados de manera más cualitativa al final de esta sección.

1.3.1 Interferometría *Speckle*.

a.-Descripción.

La imagen de corta exposición en el plano focal del telescopio se denomina "patrón *Speckle*". Puede ser entendida como el resultado de la interferencia de las diversas áreas de coherencia $\pi(\frac{r_0}{2})^2$ contenidas en la superficie $\pi(\frac{D}{2})^2$ de la pupila del telescopio.

Cuando consideramos dos áreas de coherencia, su interferencia en el plano imagen coincide con lo que se tendría en el interferómetro de Michelson, es decir, la distribución de intensidades puede ser expresada en función de cosenos de frecuencia $f = \frac{d}{\lambda}$ modulados por la transferencia de cada abertura. La

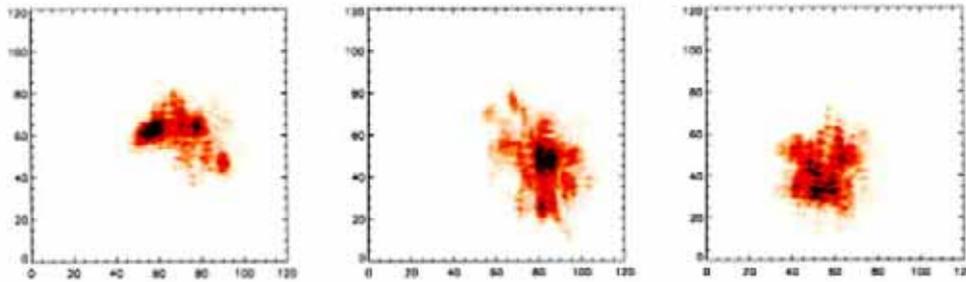


Figura 1.3: Tres imágenes *speckle* de la estrella α Aurigae (Capella). No se indican unidades en los ejes porque se refieren simplemente a píxeles del detector.

interferencia con otras áreas generará cosenos de diferentes frecuencias y desplazamientos. El resultado final en la imagen de corta exposición es una distribución de manchas brillantes que se denominan *speckles* (Figura 1.3).

El tamaño de cada *speckle* es el límite de difracción del telescopio, mientras que el de la envolvente de la distribución es el tamaño del área de coherencia (λ/r_0). En una imagen de larga exposición lo que se tiene es una superposición de patrones *speckle* que no coinciden ni en forma ni en posición debido a la turbulencia atmosférica; la consecuencia es un suavizado de la imagen y la pérdida entonces de las altas frecuencias.

El número de *speckles* que aparece en la imagen de corta exposición es proporcional al cociente de las áreas: $(\frac{D}{r_0})^2$. Cuanto peor es el *seeing* más pequeño es r_0 y el número de *speckles* aumenta en cada imagen de corta exposición.

b.-Deconvolución *Speckle* directa.

La Teoría de la Interferometría *Speckle* Clásica se resume en los siguientes pasos:

1.- Imagen de corta exposición:

$$I(\vec{\alpha}) = O(\vec{\alpha}) * S(\vec{\alpha})$$

2.- En el dominio transformado:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \tilde{O}(\vec{f})\tilde{S}(\vec{f})$$

3.- Superposición o promedio:

$$\langle |\tilde{I}(\vec{f})|^2 \rangle = |\tilde{O}(\vec{f})|^2 \langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$$

4.- Deconvolución directa:

$$|\tilde{O}(\vec{f})|^2 = \frac{\langle |\tilde{I}(\vec{f})|^2 \rangle}{\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle}$$

Este último paso tiene los dos importantes problemas habituales en toda deconvolución: la posible división por cero y la amplificación del ruido (altas frecuencias). Sólo es posible realizar una deconvolución directa si construimos convenientemente la función inversa: $\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle^{-1}$. El uso de filtros permite disminuir la influencia de la división directa en las altas frecuencias. El "filtro óptimo de Wiener" es el más utilizado .

$$\tilde{S}_0(\vec{f}) = \frac{\tilde{S}(\vec{f})}{|\tilde{S}(\vec{f})|^2 + \frac{|\tilde{S}_n(\vec{f})|^2}{|\tilde{O}(\vec{f})|^2}}$$

$|\tilde{S}_n(\vec{f})|^2$ es el espectro de potencias del ruido, y es descrito por el modelo de ruido que se le suponga al problema. Como $|\tilde{O}(\vec{f})|^2$ utilizamos el resultado de la deconvolución directa.

1.3.2 Técnica de deconvolución con detección del frente de onda.

Las imágenes en el plano focal sufren una degradación fija causada por las aberraciones del telescopio, y una degradación rápidamente variable debida a la turbulencia atmosférica. Ambos efectos son incluidos en la función de transferencia óptica (OTF) del sistema. Una buena deconvolución exige conocer la OTF lo mejor posible. Con las técnicas *Speckle* se obtiene el módulo (MTF), sin embargo, no se tiene información, al menos de forma directa, de la fase PTF (Phase Transfer Function).

$$OTF = MTF \cdot e^{iPTF}$$

Por otro lado y en primera aproximación, usualmente llamada “aproximación de campo cercano”, consideremos que las fluctuaciones en amplitud del frente de onda son despreciables (no hay “centelleo”), y la OTF puede ser determinada como sigue:

$$\check{S}(\vec{f}) = Autocor[e^{i\phi(\vec{f})}]$$

donde $\phi(\vec{f})$ es la fase del frente de onda puramente atmosférico (asociado a un objeto puntual en el cielo) en la pupila del telescopio, y *Autocor* significa autocorrelación.

Conociendo $\phi(\vec{f})$ dispondremos ya de la OTF ($\check{S}(\vec{f})$) al completo. Por tanto, el objetivo se traslada a la medida, lo más fielmente posible, de esta función $\phi(\vec{f})$. Diversas son las técnicas y sensores destinados a obtenerla, pero siempre teniendo en cuenta que su medida será indirecta ya que los sensores

son únicamente sensibles a intensidades y no a campos, no a amplitudes complejas. Sí es posible estimar la primera derivada de $\phi(\vec{f})$, como lo hace el sensor Hartmann-Shack, o su segunda derivada, como lo hace el sensor de Curvatura. Ambos sensores serán objeto de estudio detallado en los siguientes capítulos de esta Tesis.

1.3.3 Interferometría de *Shearing* .

En Interferometría *Speckle* la imagen es reconstruida a partir de interferogramas grabados en el plano focal del telescopio. Por su parte, la técnica de *Shearing* es un ejemplo de interferometría del plano pupila, con interferogramas recogidos en un plano conjugado al plano pupila del telescopio.

Es en realidad una generalización de las técnicas de uso de máscaras con varios orificios, donde el área de los agujeros está limitada a un máximo dado por el área de coherencia $\pi(\frac{r_0}{2})^2$. Como resultado proporciona las fases del objeto directamente sin necesidad de una referencia puntual.

En el caso particular de *Rotation Shearing Interferometry* , la técnica consiste en hacer interferir la pupila consigo misma rotada. Se realizan dos interferogramas con rotaciones β y 2β . Con ellos es posible generar las tres funciones siguientes:

$$H(\vec{r}) = \exp i[\phi(\vec{r}) - \phi(R\vec{r})] \tilde{O}[(R\vec{r} - \vec{r})/\lambda]$$

$$H(R\vec{r}) = \exp i[\phi(R\vec{r}) - \phi(R'R\vec{r})] \tilde{O}[(R'\vec{r} - R\vec{r})/\lambda]$$

$$H'(\vec{r}) = \exp i[\phi(\vec{r}) - \phi(R'\vec{r})] \tilde{O}[(R'\vec{r} - \vec{r})/\lambda]$$

Donde R es el operador de rotación del ángulo β , y $R' = RR$ es dos veces dicha rotación.

Si construimos el triple producto siguiente:

$$H(\vec{r}) H(R\vec{r}) H'^*(\vec{r}) = \hat{O}[(R\vec{r} - \vec{r})/\lambda] \cdot \hat{O}[(R'\vec{r} - R\vec{r})/\lambda] \cdot \hat{O}^*[(R'\vec{r} - \vec{r})/\lambda]$$

observamos que los términos de aberración de fase se cancelan. Las fases de este triple producto son las "fases de clausura", de las cuales pueden ser reconstruidas las fases del objeto mediante procedimientos iterativos.

Llegar al límite de difracción con esta técnica requiere que uno de los interferogramas corresponda a un ángulo de rotación de 180 grados, de modo que consigamos superponer puntos de la pupila con una separación igual al diámetro del telescopio.

Un aspecto positivo de esta técnica es que, al trabajar en el dominio transformado, la información está repartida por igual sobre el detector; se evitan, pues, problemas con el rango dinámico y es posible medir objetos compuestos por varias fuentes de muy diferenciada magnitud.

1.3.4 Óptica Adaptativa.

La restauración del frente de onda en tiempo real (Óptica Adaptativa) exige la detección del frente de onda de modo similar a lo expuesto hasta ahora. El requisito diferenciador es la necesidad de realizar el proceso en tiempo real. La información de la función de aberración, una vez calculada, debe pasar a los elementos activos (espejo deformable) que se encargarían de eliminar las alteraciones del frente de onda.

Todo el análisis que se realice en torno a la medida y restauración del frente de onda tiene influencia directa para el diseño de una óptica adaptativa, ya en el campo puramente óptico de los detectores (disposición y control), como de los procesos de reducción involucrados.

A la hora de realizar observaciones en cualquier región del cielo, la carencia en general de fuentes puntuales en la dirección del objeto estudiado (o en su misma área isoplanática) para poder realizar una buena deconvolución, ha obligado al diseño de soluciones originales. La generación artificial de fuentes puntuales mediante láseres aparece como el inmediato futuro en este campo. Un potente láser en la misma dirección que nuestra fuente en estudio, que produzca *Rayleigh backscatter* (dispersión Rayleigh hacia atrás) hasta 20km. de altura o que excite la capa de Sodio situada a unos 90km. de altura, generará una referencia puntual que permita caracterizar la atmósfera en ese instante. Principalmente tres son los problemas que tal técnica plantea: no puede ser usada para medir la componente de *tilt* (inclinación) en el frente de onda atmosférico, introduce error en la medida debido a la altitud finita de la estrella láser (anisoplanatismo de foco), y la anchura de las capas excitadas provoca fuentes artificiales elongadas -no puntuales- a mayor ángulo cenital. En la actualidad los esfuerzos van destinados a resolver estos problemas con diversas técnicas, siendo las simulaciones numéricas de todo el proceso una ayuda complementaria importante que puede ser proporcionada por las herramientas que esta Tesis presenta.

1.3.5 Objetivos de este Trabajo.

A continuación adelantamos el contenido de cada capítulo de esta memoria:

El eje central del capítulo segundo es la definición, detección y simulación de la fase del frente de onda. La Ecuación de Transporte de la Irradiancia se presenta como descriptor matemático que engloba los dos tratamientos más comunes del problema de recuperación de la fase: a partir de gradientes y desde laplacianas del frente de onda. Se introducen también los principios básicos del funcionamiento de los sensores Hartmann-Shack y de Curvatura.

El capítulo tercero se dedica enteramente al análisis del sensor Hartmann-Shack: factores a tener en cuenta en su diseño, base teórica para la simulación (incluyendo los parámetros libres incorporados) y los diversos algoritmos de restauración de la fase a partir de las medidas de gradientes que proporciona el sensor.

El estudio del sensor de Curvatura se aborda en el capítulo cuarto. Las principales aportaciones son la interpretación del fundamento teórico y la aplicación de la misma a la creación del simulador informático del sensor. Además, se describe la necesidad de evitar la llamada zona cáustica y de controlar la región de ligadura para obtener una buena restauración de la fase.

El capítulo quinto se destina a combinar la Interferometría de *Speckle* Clásica con la detección del frente de onda en una técnica de deconvolución que aporte una completa información en alta resolución espacial de la imagen. Se presentan el análisis y resultados de esta técnica aplicados tanto a objetos simulados como a reales.

Finalmente, el capítulo sexto recoge el uso de ambos sensores de frente de onda para la determinación de las aberraciones ópticas en un telescopio de espejo segmentado. Se estiman los márgenes de correcto funcionamiento y se demuestra la sensibilidad del sensor de Curvatura a la presencia de pistón local

entre segmentos. La última sección corresponde a nuestra propuesta para el alineamiento de los segmentos.

Capítulo 2

Recuperación del frente de onda.

Lograr una imagen de alta resolución espacial a través de la turbulencia atmosférica puede, en definitiva, ser acometido mediante cuatro métodos esencialmente:

- La interferometría en el plano imagen: *speckle* y algoritmos relacionados (Knox and Thompson 1974, triple correlación,...).

- La interferometría en el plano pupila: *Michelson*, *Shearing* ,...

- Deconvolución con detección del frente de onda: este método complementa la información de la imagen con la medida del frente de onda en la pupila. La imagen y el frente de onda son detectados simultáneamente, para obtener módulo y fase del objeto. La fase del frente de onda es detectada mediante los sensores de Hartmann-Shack y de Curvatura.

- Finalmente, el frente de onda puede ser corregido en tiempo real usando un sistema de Óptica Adaptativa. Esta técnica, la más sofisticada, consiste en disponer de un espejo adaptable a las aberraciones de la onda, de modo que éstas sean compensadas por la deformación controlada del espejo. Al ser directamente corregido el haz óptico permite ser detectado posteriormente con instrumentación diversa tanto para la obtención de espectros como de imagen. Teóricamente no requiere post-procesado, pero la calidad de la imagen detectada puede ser mejorada haciendo uso de las técnicas para medir frentes de onda (tercer método). Esta combinación de técnicas permite aproximar más la OTF real a la ideal del telescopio. Medir el frente de onda parece pues la llave en Imagen de Alta Resolución Espacial.

El tercero de los métodos citados será el objeto de nuestro estudio en los siguientes capítulos.

2.1 Definición de la función de aberración de onda.

Consideremos un sistema óptico centrado con una fuente puntual de luz monocromática P_0 . La imagen gaussiana (sin aberraciones) de P_0 corresponde al centro P_1^* de la esfera de referencia gaussiana situada en la pupila de salida (ver figura 2.1). Un frente de onda con aberraciones se separa del perfil esférico, por tanto, cualquier alteración del frente de onda ideal se puede tratar en términos de aberraciones. La función de aberración de onda ϕ no es más que una medida geométrica de esta diferencia. Definimos la distancia $\phi = \overline{QQ}$ como función aberración de onda o desfase. En adelante ϕ designará indistintamente a esta

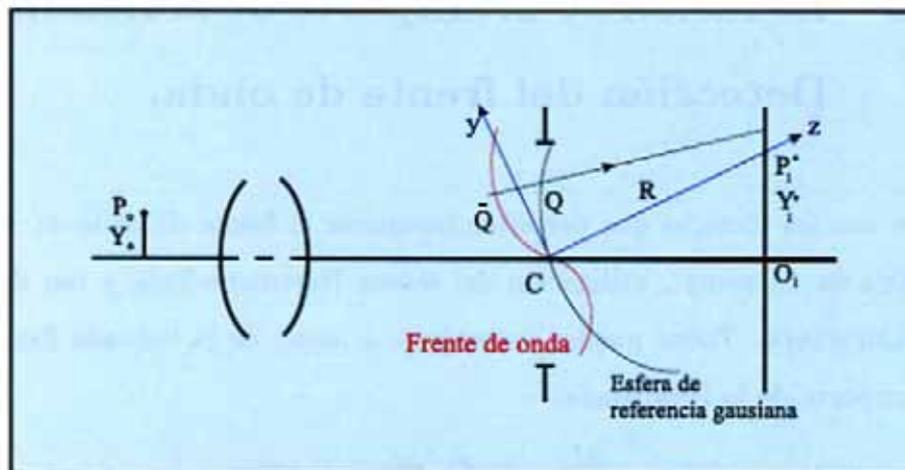


Figura 2.1: Representación gráfica de la definición de función de aberración de onda ϕ . (figura de Born and Wolf 1970).

función ϕ , a la fase del frente de onda y, por extensión, al propio frente de onda.

En nuestro caso las aberraciones de interés son producidas por la atmósfera terrestre; nos interesa la forma del frente de onda a la llegada al telescopio, es decir, su función de aberración respecto a lo que sería el frente de onda plano de una fuente puntual en el caso de no sufrir aberraciones.

Generalmente el frente de onda se mide reimaginando la pupila de entrada a través del telescopio; ésto significa que la ϕ medida va a contener aberraciones de atmósfera y de telescopio.

La función ϕ se describe mediante las coordenadas (u, v) del plano pupila del telescopio (frecuencias espaciales). Como la pupila es circular, resulta más cómoda una representación polar (ρ, θ) .

2.2 Ecuación de Transporte de la Irradiancia. Detección del frente de onda.

Tres son las técnicas que permiten recuperar el frente de onda ϕ : interferometría de *Shearing*, utilización del sensor Hartmann-Shack y uso del sensor de Curvatura. Todas pueden entenderse a partir de la llamada Ecuación de Transporte de la Irradiancia:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(\vec{\nabla}I \cdot \vec{\nabla}\phi + I \cdot \nabla^2\phi)$$

En una aproximación experimental, si comparamos la iluminación I entre dos planos perpendiculares al eje óptico separados una distancia Δz corta, la variación ΔI de la intensidad es dada por la ecuación:

$$\Delta I = -(\vec{\nabla}I \cdot \vec{\nabla}\phi + I \cdot \nabla^2\phi) \cdot \Delta z$$

donde $\phi(u, v)$ es la superficie del frente de onda que llega al plano pupila del telescopio. La ecuación contiene dos sumandos: $\vec{\nabla}I \cdot \vec{\nabla}\phi$ representa la variación de iluminación sufrida proporcionalmente a la pendiente local del frente de onda $\vec{\nabla}\phi$ (este valor $\vec{\nabla}\phi$ es el que se mide en técnicas de Hartmann-Shack); por su parte, $I \cdot \nabla^2\phi$ representa la variación de iluminación causada por la convergencia o divergencia del rayo, y es proporcional a la curvatura total del frente de onda $\nabla^2\phi$ (en los sensores de Curvatura $\nabla^2\phi$ es lo medido). Recuperar la fase ϕ significa integrar la ecuación de transporte de la irradiancia. Algoritmos como el de Hudgin y Fried (1977) aplicados al Hartmann-Shack necesitan del cálculo intermedio de la laplaciana para recuperar la fase. Hasta ahora los métodos de Hartmann-Shack y del sensor de Curvatura habían sido aplicados por separado. Apuntamos en este trabajo que el uso conjunto de

sensores de Curvatura y de Hartmann-Sack proporcionará una información más completa.

2.3 Simulación del frente de onda.

2.3.1 Polinomios de Zernike.

Trabajar con pupila circular hace apropiado desarrollar ϕ en términos de un conjunto completo de polinomios que sean ortogonales en el interior de un círculo unidad. El término “completo” implica que cualquier función suave (de clase C^∞ por ejemplo) puede ser desarrollada en serie en función de estos polinomios. Muchos conjuntos de polinomios con esta propiedad pueden ser construidos, pero son los polinomios circulares de Zernike los más utilizados por la simplicidad y contenido físico de sus miembros.

Se definen, siguiendo la nomenclatura de Noll (1976), como:

$$\left. \begin{aligned} Z_{j \text{ par}} &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \\ Z_{j \text{ impar}} &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \sen(m\theta) \end{aligned} \right\} m \neq 0$$

$$Z_j = \sqrt{(n+1)} R_n^0(\rho) \quad m = 0$$

donde:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} \rho^{n-2s}$$

Los valores de n y m son siempre enteros y satisfacen $m \leq n$, con $n - |m|$ par. El índice j es un número de orden de los polinomios y es función de n y m .

Verifican la relación de ortogonalidad:

$$\int d^2\rho W(\rho)Z_jZ_{j'} = \delta_{jj'}$$

con:

$$W(\rho) = \begin{cases} 1/\pi & \rho \leq 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases}$$

El interés de un desarrollo en función de los polinomios de Zernike estriba en la correspondencia de los primeros modos de éstos con las aberraciones clásicas o de Seidel: distorsión, curvatura de campo, coma, astigmatismo y aberración esférica (Fig. 2.2). Los polinomios de Zernike de grado mayor corresponden a las aberraciones de Seidel de alto orden.

Si la fase $\phi(r, \theta)$ es una función cualquiera, su desarrollo polinomial sobre un círculo de radio R es dado por:

$$\phi(r, \theta) = \phi(R\rho, \theta) = \sum_j a_j Z_j(\rho, \theta)$$

de modo que:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq R\rho \leq R$$

$$0 \leq r \leq R$$

Cualquier frente de onda puede pues ser descrito en términos de sus coeficientes a_j en un desarrollo de Zernike, y son ellos los que dan idea de las aberraciones dominantes en el medio de propagación.

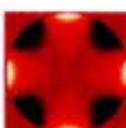
grado radial n	frecuencias azimutales m				
	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
0	$Z_1 = \text{cte.}$				
1		$Z_2 = 2\rho \cos\theta$ $Z_3 = 2\rho \sin\theta$ distorsión o inclinación 			
2	$Z_4 = \sqrt{5}(2\rho^2 - 1)$ curvatura de campo 		$Z_5 = \sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$ $Z_6 = \sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$ Astigmatismo (2º orden) 		
3		$Z_7 = \sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos\theta$ $Z_8 = \sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin\theta$ Coma para (3º orden) 		$Z_9 = \sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$ $Z_{10} = \sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$ Coma (3º orden) 	
4	$Z_{11} = \sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ esférica (4º orden) 		$Z_{12} = \sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$ $Z_{13} = \sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$ Astigmatismo (4º orden) 		$Z_{14} = \sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$ $Z_{15} = \sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$ 

Figura 2.2: Representación de los polinomios de Zernike y correspondencia con las aberraciones de Seidel. Los polinomios de igual n y m son idénticos pero rotados un ángulo de $\frac{90^\circ}{m}$ entre sí. En la figura hemos representado siempre el de j par.

2.3.2 Algoritmo para la simulación. Tratamiento informático.

El primer paso en la tesis ha sido el desarrollo de un generador de frentes de onda que simula, por ordenador, el resultado a la salida de una atmósfera turbulenta. La reproducción de frentes de onda distorsionados es importante tanto para el estudio de la propagación de la luz a través de la atmósfera, como para la corrección en tiempo real de dichos frentes de onda.

Hemos aplicado el algoritmo de Nicolas Roddier (1990), el cual mejora el hasta entonces habitualmente utilizado de McGlamery (1976). Consiste este último en fases aleatorias producidas sobre la pupila y cuya correlación atmosférica es introducida mediante filtrado con el espectro de Kolmogorov (1941). La desventaja del método de McGlamery es la lentitud que supone la necesidad de una transformada de Fourier bidimensional para ir desde el dominio de frecuencias inicial al dominio espacial final en cada frente de onda generado.

La alternativa de Roddier, en lugar de empezar con *arrays* (mapas) de fase aleatorios, computa coeficientes de Karhunen-Loève aleatorios y estadísticamente independientes, que son entonces combinados para producir el frente de onda aleatorio.

Los coeficientes de Zernike de un frente de onda atmosférico puede decirse que son variables aleatorias gaussianas de media cero y varianza dada. Sin embargo, no es posible simular directamente un frente de onda por obtención de estos coeficientes ya que existe una covarianza entre ellos por el hecho de que los polinomios de Zernike no son estadísticamente independientes: si

$$\begin{pmatrix} 455.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 455.7 & 0 & 0 & 0 & -14.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 0 & 0 \\ 0 & -14.4 & 0 & 0 & 0 & 6.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Figura 2.3: Matriz de covarianza de los coeficientes del desarrollo de la fase en polinomios de Zernike desde $j=2$ a $j=15$ en unidades de 10^{-3} rad².

consideramos un frente de onda desarrollado en función de tales polinomios $\phi = \sum_j a_j Z_j$, la covarianza de los coeficientes a_j será:

$$\langle a_j^* a_j \rangle = \int \int df df' Q_j^*(f) \Phi(f, f') Q_j(f')$$

donde:

$$\Phi(f, f') = 0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3} \delta(f - f')$$

es el espectro de Wiener de las fluctuaciones de fase características del modelo de atmósfera de Kolmogorov. Por su parte $Q_j(f)$ es la transformada de Fourier del polinomio de Zernike $Z_j(r)$.

Así, con el fin de obtener variables aleatorias independientes, se requiere una diagonalización de la matriz de covarianza (figura 2.3). Entonces, una base ortonormal de vectores completamente no correlacionados (al contrario

de los polinomios de Zernike) es formada con las funciones de Karhunen-Loève, precisamente autofunciones de la matriz de covarianza. La desventaja de estas funciones es que no tienen expresión analítica; sin embargo, sí que pueden ser desarrolladas en términos de los polinomios de Zernike.

En definitiva, el algoritmo de Roddier de simulación del frente de onda se resume en los siguientes pasos:

1.- Diagonalización de la matriz de covarianza correspondiente a los “ p ” polinomios de Zernike del desarrollo, mediante las funciones de Karhunen-Loève. El valor de “ p ” utilizado por nosotros tiene un umbral mínimo de 75 polinomios de Zernike (determinado en las pruebas que presentamos en el siguiente apartado) y máximo de 841 (determinado por un equilibrio entre el tiempo de cálculo y la precisión exigida al computador).

2.- La raíz cuadrada de los valores de la diagonal (autovalores) será la varianza que sirva para generar gaussianamente coeficientes de Zernike de media cero: b_j .

3.- El frente de onda se escribe entonces: $\phi(r, \theta) = \sum_j b_j Z_j(r, \theta)$.

Una particularidad en la diagonalización, que Roddier pone de manifiesto, es la posibilidad de reordenar la matriz $\langle a_j^* a_{j'} \rangle$ de modo que resulte diagonal por cajas, simplificando de esta manera el proceso de diagonalización. Para ello sólo hay que tener en cuenta que los términos están correlacionados únicamente si tienen la misma frecuencia azimutal m y la misma paridad en el índice j (excepto para $m = 0$). En la figura 2.4 mostramos la matriz reordenada de los primeros catorce polinomios de Zernike.

$$\begin{pmatrix} 455.7 & -14.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14.4 & 6.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 455.7 & -14.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.4 & 6.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23.6 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23.6 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23.6 & -3.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.9 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Figura 2.4: Matriz de covarianza diagonalizada (por cajas) de los polinomios de Zernike.

2.3.3 Tests sobre el simulador.

Hemos impuesto que nuestro simulador aleatorio de frentes de onda siga el modelo de turbulencia de Kolmogorov. Hay, esencialmente, dos formas de verificar ésto:

a) Función de Estructura.

En este caso pretendemos describir el frente de onda aleatorio $\phi(\vec{r})$ por medio de su función de estructura $D_\phi(\vec{\rho})$:

$$D_\phi(\vec{\rho}) = \langle |\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) - \phi(\vec{r})|^2 \rangle \quad (2.1)$$

La cual deberá coincidir con la ley de Kolmogorov:

$$D_\phi(\vec{\rho}) = 6.88(\rho/r_o)^{5/3}$$

Donde $\rho = |\vec{\rho}|$ y r_o es el parámetro de Fried.

La forma de cálculo de la función de estructura es un aspecto interesante de discusión, pues su elección decide los niveles de exactitud y de rapidez en el algoritmo de prueba que estamos desarrollando. Una de las maneras es seguir la propia definición (2.1). La otra consiste en hacer uso de la siguiente propiedad:

$$D_\phi(\vec{\rho}) = 2 \cdot [B_\phi(0) - B_\phi(\vec{\rho})] \quad (2.2)$$

donde $B_\phi(\vec{\rho}) = \langle \phi(\vec{r} + \vec{\rho})\phi(\vec{r}) \rangle$ es la covarianza de $\phi(\vec{r})$, o lo que es lo mismo, su autocorrelación, que puede ser hallada rápidamente utilizando transformadas de Fourier. Aún mejor, la expresión 2.2 supone realizar una sola autocorrelación para obtener el valor de $B_\phi(\vec{\rho})$ en cada $\vec{\rho}$, frente a promediar diferencias para cada desplazamiento $\vec{\rho}$ como es obligado en 2.1. Pero el resultado 2.2 es únicamente válido si $\phi(\vec{r})$ es una función estacionaria, es decir:

$$\langle \phi(\vec{r} + \vec{\rho})\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle = \langle \phi(\vec{r})\phi(\vec{r}) \rangle \quad (2.3)$$

Esto, sin embargo, no ocurre si la región en que queremos obtener la función $B_\phi(\vec{\rho})$ está limitada a su mismo tamaño. Necesitaríamos que $\phi(\vec{r})$ estuviese definida en una región de tamaño doble a la de trabajo. Y es que si procedemos en tal circunstancia haciendo la autocorrelación, la cantidad de puntos con información distinta de cero que aparece para $\vec{\rho} = 0$ es siempre mayor que para cualquier otro desplazamiento, los promedios en 2.3 ya no podemos asegurar que sean iguales (sobre el mismo número de puntos), y deja de cumplirse la condición de estacionariedad.

En definitiva, utilizaremos la definición de función de estructura: promediar sobre el número de píxeles de la intersección $\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) \cap \phi(\vec{r})$ y para cada

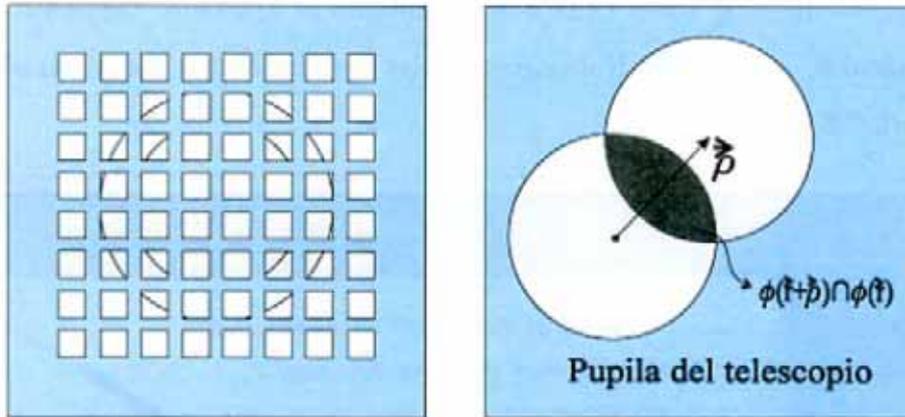


Figura 2.5: Izquierda: Al promediar en anillos concéntricos incluiríamos con el mismo desplazamiento $\vec{\rho}$ píxeles de diferente distancia al centro. Derecha: Intersección $\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) \cap \phi(\vec{r})$ para el cálculo de la función de estructura de la fase.

píxel del mapa $\phi(\vec{r})$ (es decir, cada desplazamiento $\vec{\rho}$). Como el problema no tiene geometría circular, evitamos promediar en anillos concéntricos de igual radio $\vec{\rho}$, ya que píxeles con diferentes distancias al centro quedarían englobados erróneamente en un mismo anillo (ver Fig. 2.5).

Lo que por fin hacemos es obtener la función de estructura para los desplazamientos $\vec{\rho}$ reales y existentes en el *array* de fases, y promediar los valores de $D_\phi(\vec{\rho})$ en desplazamientos $\vec{\rho}$ idénticos.

Si designamos por $N(\vec{\rho})$ al número de píxeles que interviene en la diferencia $\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) - \phi(\vec{r})$ asociada al desplazamiento $\vec{\rho}$, nuestro cálculo se escribe también:

$$D_\phi(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{i=1}^{N(\vec{\rho})} (\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) - \phi(\vec{r}))^2}{N(\vec{\rho})}$$

En este caso, un análisis de Montecarlo consiste en obtener un conjunto de funciones de estructura para estimar cuál es la función de estructura real. Es decir, el anterior cálculo se realiza sobre un gran número de frentes de onda.

El promedio final sobre cada desplazamiento es ajustado, mediante mínimos cuadrados, a la ley de Kolmogorov y los resultados son los mostrados en la figura 2.6.

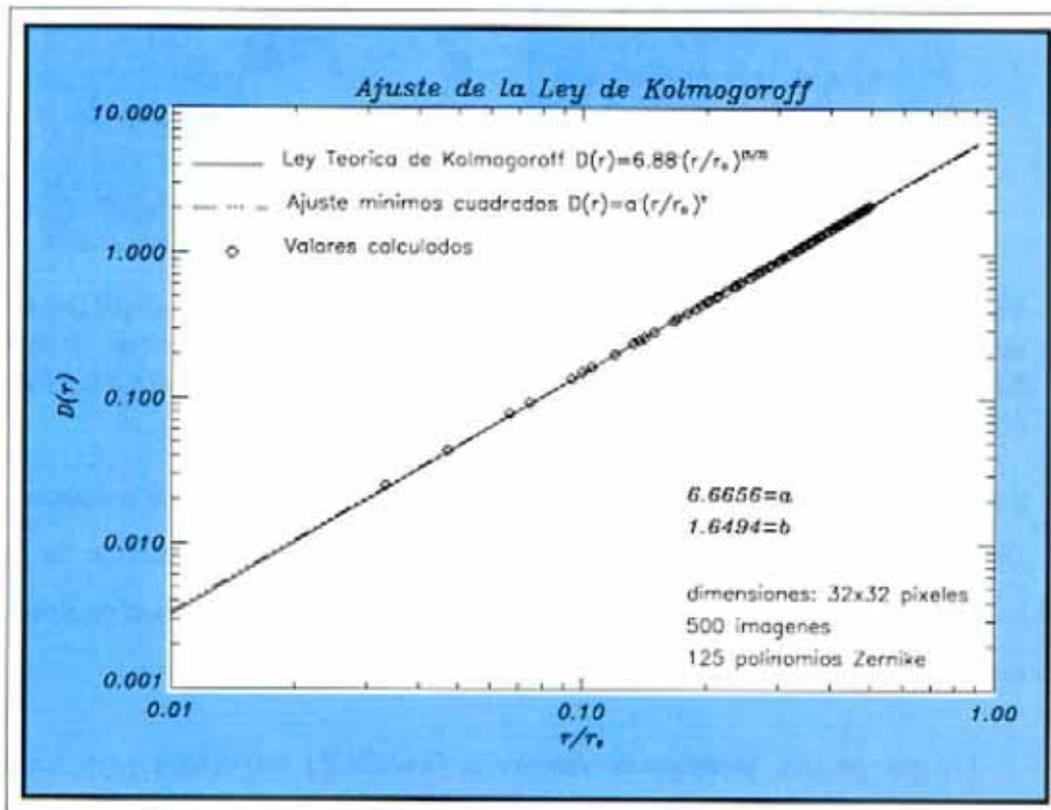


Figura 2.6: Ajuste de la Ley de Kolmogorov a los frentes de onda generados por el simulador de N. Roddier. En este caso los mapas de fase contienen los 125 primeros polinomios de Zernike, habiendo intervenido 500 imágenes en el cálculo de la función de estructura de la fase .

En el gráfico puede apreciarse que el ajuste es menos bueno en los bordes: $r/r_0 = 0$ y $r/r_0 = 1$, precisamente porque en ellos intervenía menos cantidad de información. En r pequeños intervienen pocos valores de $D_\phi(\vec{\rho})$ en los promedios, mientras que en r grandes es pequeña la cantidad de píxeles $N(\vec{\rho})$ de la intersección $\phi(\vec{r} + \vec{\rho}) \cap \phi(\vec{r})$.

b) Coeficientes de Noll.

La otra manera de comprobar la bondad del simulador de frentes de onda consiste en calcular los coeficientes de Noll (Δ_J), es decir las varianzas (ver expresión 2.4) de los coeficientes de cada uno de los polinomios de Zernike intervinientes en la simulación. Se realiza también un análisis estadístico (Montecarlo) de la situación incluyendo gran número de *frames* de frentes de onda para realizar el promedio. En adelante el término *frame* designará cualquier mapa de intensidad, fase, gradientes de fase, ... de corta exposición.

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 - \Delta_1 &= \langle |a_1|^2 \rangle_N \\
 \Delta_3 - \Delta_2 &= \langle |a_2|^2 \rangle_N \\
 \Delta_4 - \Delta_3 &= \langle |a_3|^2 \rangle_N \\
 &\dots \\
 \Delta_n - \Delta_{n-1} &= \langle |a_n|^2 \rangle_N
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

N indica el número de frentes de onda que intervienen en el promedio estadístico.

Otra variante al cálculo de los coeficientes de Noll es la determinación de errores residuales Δ_J que se cometen al ajustar los primeros $J < p$ polinomios de Zernike respecto al valor de fase generado con los " p " polinomios:

$$\Delta_J = \langle \phi^2 \rangle - \sum_{j=1}^J \langle |a_j|^2 \rangle$$

Utilizando 2.4 el cálculo es más rápido puesto que no es necesario generar las *frames* de fase, sino llegar hasta las covarianzas que el algoritmo de simulación ya aporta como paso intermedio. En la tabla 2.1 se comparan los coeficientes teóricos de Noll con los calculados para nuestro simulador. En el

<i>Corrección</i>	<i>Resultados Noll</i>	<i>Resultados Simulación</i>
Δ_1	1.0299	1.0299
Δ_2	0.5820	0.5930
Δ_3	0.1340	0.1354
Δ_4	0.1110	0.1217
Δ_5	0.0880	0.0895
Δ_6	0.0648	0.0652
Δ_7	0.0587	0.0588
Δ_8	0.0525	0.0527
Δ_9	0.0463	0.0468

Tabla 2.1: Comparación de los coeficientes teóricos de Noll Δ_J con los estimados por nuestro simulador de fases de atmósfera turbulenta.

promedio han intervenido 999 *frames* de fase de frente de onda atmosféricos simulados con los cien primeros polinomios de Zernike.

2.4 Sensores. Principios teóricos de funcionamiento

2.4.1 Sensor Hartmann-Shack.

Consta de dos componentes esenciales: un mosaico de microlentillas y un detector CCD. Las microlentes actúan muestreando el frente de onda que llega, creando cada una de ellas una imagen en su foco. El detector CCD, situado en el plano focal del *array* (matriz) de microlentillas, permite obtener el centroide de esta imagen en cada subpupila, lo que es una medida indirecta de la inclinación media con la que llega el frente de onda a esa microlentilla, es

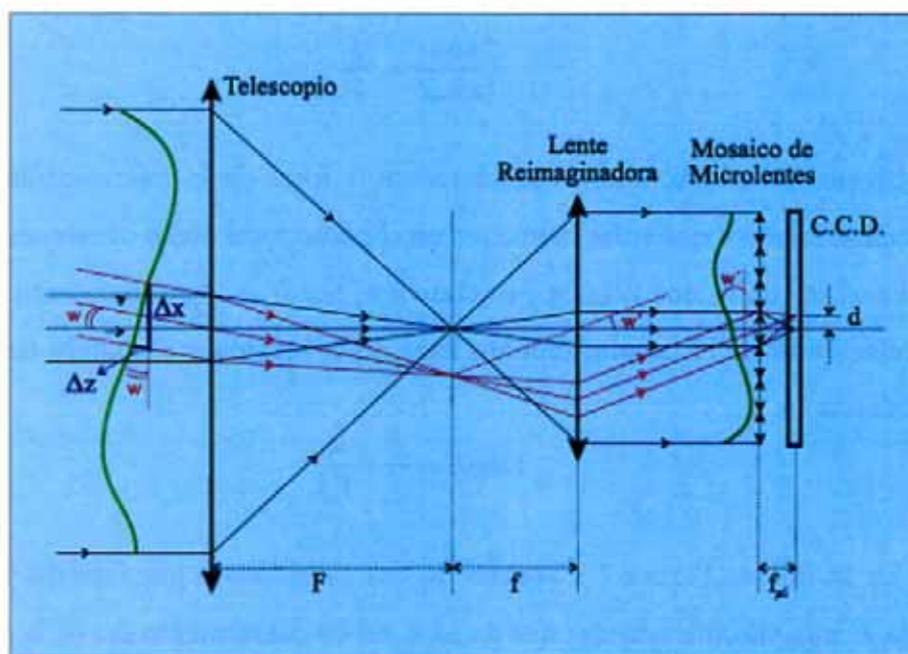


Figura 2.7: Esquema del recorrido de la luz con el uso de un Hartmann-Shack para medir la fase del frente de onda en la pupila del telescopio.

decir: de los gradientes promedios de la fase del frente de onda. Integrando los mismos es como se recompone el mapa de fases que había a la entrada del telescopio.

Obviamente el mosaico de microlentes trabaja en un plano conjugado al de la pupila del telescopio, en donde las dimensiones son más reducidas y más manejables. Esta "reimaginación" hacia la entrada del sensor Hartmann-Shack introduce un cambio de escala dependiente del cociente de las focales del telescopio (F) y de la lente reimaginadora (f).

En la Figura 2.7 mostramos el camino óptico que seguiría un frente de onda plano que llegase inclinado a la pupila del telescopio con un ángulo ω . El ángulo de inclinación a la entrada de la microlentilla ω' coincide con el de salida de la lente reimaginadora. El cambio de escala habido responde a la

expresión:

$$\frac{\tan \omega}{\tan \omega'} = \frac{f}{F}$$

Si, por otro lado, ahora consideramos la focal de la microlentilla $f_{\mu l}$ y el desplazamiento d que sufre la imagen en el plano focal como consecuencia de la inclinación con la que llegaba, es claro que $\tan \omega' = \frac{d}{f_{\mu l}}$, y por tanto tenemos la relación entre el desplazamiento final de la imagen y el ángulo de entrada al telescopio:

$$\tan \omega = \frac{f}{F} \cdot \frac{d}{f_{\mu l}}$$

En la misma Figura 2.7 aparece lo que se entiende por fase del frente de onda ϕ , una variable angular que da idea del desplazamiento Δz en la dirección z del eje óptico del frente de onda. Haciendo uso del factor $\frac{\lambda}{2\pi}$ somos capaces de relacionar la variable angular ϕ con la lineal z :

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta \phi$$

Para ángulos ω pequeños podemos escribir:

$$\tan \omega = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\Delta \phi}{\Delta x}$$

Encontramos ya una relación entre el desplazamiento d que sufre la imagen de la microlentilla en el CCD y la pendiente o gradiente promedio de la fase ϕ en esa microlentilla:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta x} = \frac{2\pi f}{\lambda F f_{\mu l}} d$$

Si definimos p_{pix} como el tamaño de un píxel del detector en metros y d' como el número de píxeles de desplazamiento en la imagen, podemos escribir $d = p_{pix} \cdot d'$. Agrupando entonces los factores que no cambian durante

la detección obtenemos una constante de proporcionalidad k de dimensiones $\left[\frac{\text{rad}}{\text{m-pixels}}\right]$:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = k \cdot d'$$

Esta fórmula expresa, precisamente, que el desplazamiento que sufre el centroide de la imagen de cada microlentilla es una medida proporcional al gradiente de la fase del frente de onda de llegada a la microlentilla. En observaciones reales, basta con calibrar correctamente esta constante k para traducir cualquier medida de desplazamiento en píxeles a gradientes promedio en la sub-pupila. Se suele realizar esta calibración con la observación de una binaria de separación conocida que sea resuelta por las microlentes del Hartmann-Shack.

2.4.2 Sensor de Curvatura.

La técnica de este sensor consiste en grabar las iluminaciones I_1 e I_2 de las secciones transversales del haz de luz en dos puntos fuera de foco a cada lado del plano focal, en posiciones simétricas l y l' respecto al mismo (Figura 2.8, arriba). En el espacio objeto las intensidades I_1 e I_2 son conjugadas de las dos secciones transversales del haz entrante, una antes de la pupila de entrada y la otra después de la pupila (Figura 2.8, abajo). En consecuencia I_1 e I_2 pueden ser consideradas imágenes desenfocadas de la pupila del telescopio. En lo que sigue las supondremos simétricamente desenfocadas; es decir, las distancias desde las dos secciones transversales al haz hasta el plano pupila son la mismas e iguales a Δz .

La teoría es mejor descrita en términos de la ecuación de transporte de la irradiancia, que relaciona las dos intensidades a lo largo del camino de

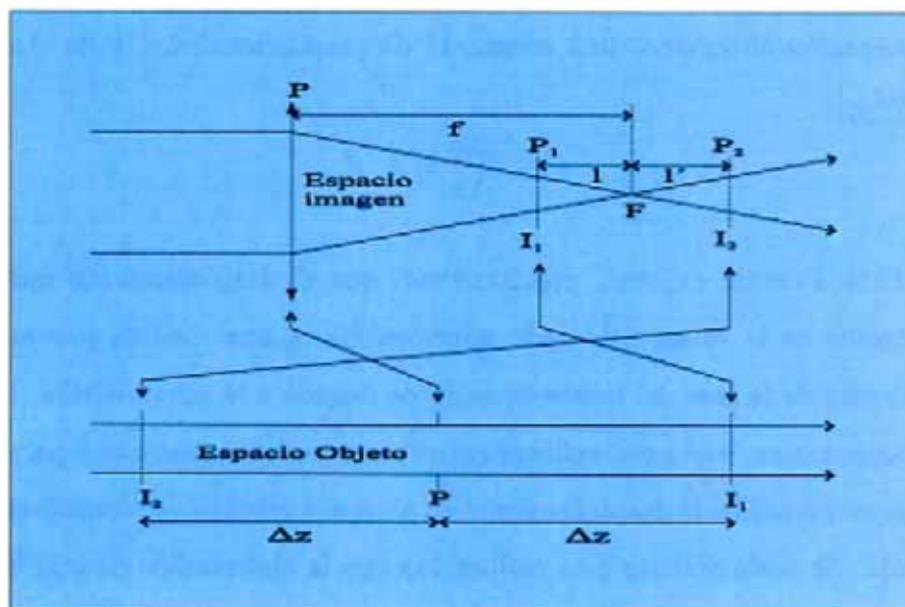


Figura 2.8: En el espacio imagen (arriba), las intensidades I_1 e I_2 aparecen como imágenes desenfocadas de estrellas. En el espacio objeto conjugado (abajo) aparecen como imágenes desenfocadas de la pupila. (Esta figura aparece en el artículo de C. Roddier y F. Roddier, 1993)

propagación. Suponiendo un haz paraxial propagándose a lo largo del eje z , la ecuación de transporte de la irradiancia establece:

$$\partial I / \partial z = -(\vec{\nabla} I \cdot \vec{\nabla} \phi + I \nabla^2 \phi) \quad (2.5)$$

Donde $I(x,y,z)$ es la distribución de la iluminación a lo largo del haz, $\phi(x,y)$ es la superficie del frente de onda, y ∇ es el operador $\partial/\partial x, \partial/\partial y$.

Apliquemos esta ecuación al plano pupila ($z = 0$), donde la iluminación la suponemos casi uniforme e igual a I_0 dentro de la pupila y 0 fuera. En este plano ocurre que $\vec{\nabla} I = 0$ en cualquier punto, excepto en el borde de la pupila, donde:

$$\vec{\nabla} I = -I_0 \hat{n} \delta_c \quad (2.6)$$

Aquí δ_c es una distribución de Dirac lineal alrededor del borde la pupila, y \hat{n} es un vector unidad perpendicular a ese borde y apuntando hacia fuera. Sustituyendo 2.6 en 2.5 se obtiene:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = I_o \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta_c - I_o P \nabla^2 \phi \quad (2.7)$$

donde $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla \phi$ es la derivada hacia fuera del frente de onda en la dirección perpendicular al borde de la pupila. $P(x, y)$ es una función igual a 1 dentro de la pupila y 0 fuera. En la aproximación de campo cercano (óptica geométrica) las intensidades son:

$$I_1 = I_o - \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z$$

$$I_2 = I_o + \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z$$

Puede ahora ser computada la cantidad S , llamada señal del sensor:

$$S = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{-1}{I_o} \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z \quad (2.8)$$

Sustituyendo 2.7 en 2.8:

$$S = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial n} \delta_c + P \nabla^2 \phi \right) \Delta z \quad (2.9)$$

El objetivo del telescopio reimagina la sección transversal del haz que está detrás del plano pupila hasta una distancia l anterior al plano focal. De acuerdo con la ley de Newton:

$$(\Delta z + f)l = f^2$$

En consecuencia:

$$\Delta z = \frac{f(f-l)}{l} \quad (2.10)$$

Introduciendo 2.10 en 2.9 llegamos a la expresión:

$$S = \frac{f(f-l)}{f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \delta_c - P \nabla^2 \phi \right) \quad (2.11)$$

Esta ecuación muestra que la señal del sensor consta de dos términos. El primero es proporcional a la pendiente radial del frente de onda y está localizado en el borde del haz. El segundo término representa la distribución de laplaciana del frente de onda transversalmente al haz. En consecuencia estos dos términos no se solapan, uno puede medirlos separadamente y reconstruir la superficie del frente de onda resolviendo una ecuación de Poisson, usando la derivada del frente de onda normal al borde como condición de ligadura del tipo Neumann. Sin embargo, la ecuación 2.11 es sólo una aproximación de primer orden válida para pequeños Δz (en el plano objeto), es decir, grandes desenfoques en el plano imagen. Un desenfoque insuficiente para restaurar el frente de onda con el sensor de curvatura significa estar dentro de la "zona cáustica", la zona más próxima al foco.

Capítulo 3

Sensor Hartmann-Shack.

Este sensor muestrea un frente de onda con un mosaico de lentillas. Dicho mosaico está en un plano conjugado al de la pupila del telescopio; cada lentilla define una subabertura con un área del orden de la de coherencia $\pi(\frac{r_0}{2})^2$ o menor. Localmente podemos asumir que a cada lentilla llega un frente de onda inclinado produciendo un desplazamiento de la imagen en el plano focal. Una superficie de onda plana es necesaria para calibrar la posición de los puntos focales de las lentillas debido a posibles variaciones producidas por el sistema. En el plano focal un CCD graba la imagen producida por el mosaico de lentillas.

El desplazamiento de cada imagen en el CCD puede ser definido como el desplazamiento de su centro de gravedad:

$$x_{cen} = \frac{\sum_i x_i s_i}{\sum_i s_i}$$

donde x_i y s_i son la coordenada x y la señal devuelta del píxel i respectivamente. Cuando despreciamos efectos de centelleo en una subabertura y reemplazamos la suma discreta por una integral continua obtenemos, de las propiedades de la derivada de la Transformada de Fourier y del teorema de Parseval, lo siguiente:

$$x_{cen} = \frac{\lambda f}{2\pi} \frac{1}{d^2} \sum \sum \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy$$

donde se expresa que x_{cen} es proporcional al valor medio de la derivada de la fase del frente de onda ϕ en la subabertura. Se muestra por tanto que el sensor Hartmann-Shack mide la pendiente media del frente de onda en cada subabertura: $\nabla \phi$.

3.1 Diseño de un sensor Hartmann-Shack.

Para construir un sensor de frente de onda del tipo Hartmann-Shack los diversos elementos necesarios deben ser combinados, por supuesto, en forma conveniente. La construcción de nuestro Hartmann-Shack debe estar supeditada a la longitud de onda λ en que realizaremos las observaciones, al CCD que utilicemos, y a la focal de las microlentillas ($f_{\mu l}$). Una focal $f_{\mu l}$ más grande produce una mayor resolución pero, por el contrario, puede provocar imágenes tan ensanchadas que afecten a las subpupilas vecinas y corrompan el cálculo del centroide.

Para ilustrar la problemática haremos uso de valores numéricos reales correspondientes a las observaciones descritas en el apartado 5.4, realizadas en el telescopio William Herschell (Observatorio del Roque de los Muchachos, La

Palma): $D = 4.2 \text{ m.}$ y $F = 105 \text{ m.}$

Si el CCD de que disponemos fuese de un tamaño típico de $10 \times 10 \text{ mm}^2$, el resultado de la reimaginación debe ser una pupila de salida de $d_l = 10 \text{ mm.}$ de diámetro como máximo.

Si ese es el tamaño requerido, atendiendo al telescopio en que trabajamos, necesitamos una lente reimaginadora de focal $f = \frac{F}{D} \cdot d_l$. En el caso del William Herschell $f = 250 \text{ mm.}$ Disponemos así del requerimiento principal de la lente reimaginadora, unido al de un diámetro superior a $d_l = 10 \text{ mm.}$ para evitar problemas de truncamiento del haz.

Nuestra siguiente preocupación es la construcción del *array* de microlentillas, con focal $f_{\mu l}$. Para ello es necesario estimar los valores típicos de inclinación w_x de la superficie de onda que queremos medir. Un parámetro conveniente para tal descripción es la varianza de este ángulo w_x (G. Rousset, 1993), debida a la turbulencia atmosférica, al atravesar una abertura circular:

$$\langle w_x^2 \rangle = 0.98 \cdot \frac{6.88}{4\pi^2} \cdot \lambda^2 \cdot d_{\mu l}^{-1/3} \cdot r_o^{-5/3}$$

donde $d_{\mu l}$ es el diámetro de cada microlentilla. En realidad $\langle w_x^2 \rangle$ no depende de λ porque r_o es proporcional a $\lambda^{6/5}$.

Por otro lado, atendiendo a la geometría del problema en un Hartmann-Shack, puede escribirse:

$$w_x = \frac{d_x \cdot f}{f_{\mu l} \cdot F} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot A_{\mu l}} \cdot \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy$$

donde d_x es el desplazamiento del centroide de la imagen de cada microlentilla en la dirección x (horizontal), y $A_{\mu l}$ es el área de cada subabertura.

Con ambas expresiones combinadas obtenemos la $f_{\mu l}$ de las microlentillas para un muestreo dado (número de píxeles de CCD correspondientes a cada subabertura):

$$f_{\mu l} = d_x \cdot d_{\mu l}^{-1/3} \cdot 2.42 \cdot \frac{f}{F} \cdot \frac{r_o^{5/6}}{\lambda}$$

Para el caso concreto de las observaciones citadas, $\lambda = 632.8$ nm. y un valor típico $r_o = 20$ cm. El tamaño de las subpupilas, "proyectadas" a la pupila del telescopio, debe ser del orden del diámetro de coherencia r_o . Por tanto, el número de subpupilas necesarias es de:

$$\frac{D}{r_o} = \frac{4.2}{0.20} = 21 \text{ subpupilas}$$

y el tamaño de cada subpupila:

$$\frac{d_l = 10\text{mm.}}{21 \text{ subpupilas}} = 470 \mu\text{m.}$$

En un CCD de 256×256 píxeles cuadrados y de dimensiones 10×10 mm²., el tamaño de píxel p_{pix} es de $39 \mu\text{m}$. Cada desplazamiento d_x podríamos expresarlo en número de píxeles d' :

$$d_x = d' \cdot p_{pix}$$

De otra parte, el número de píxeles destinados en el CCD a cada subpupila no puede exceder de $\frac{256 \text{ pixeles}}{21 \text{ subpupilas}} = 12$ píxeles. Por tanto d' debe ser menor que esos 12 píxeles.

Si por ejemplo deseamos desplazamientos máximos de $d'=8$ píxeles, la focal de microlentes $f_{\mu l}$ necesaria es del orden de 207 mm.

3.2 Algoritmos de recuperación.

La reconstrucción del frente de onda se obtiene a partir de la medida de las $2N^2$ pendientes medias en una matriz de N^2 subaberturas. Como el sensor Hartmann-Shack mide pendientes (gradientes), la fase es determinada salvo una constante aditiva.

Los métodos se clasifican en dos grandes grupos:

- **Zonales**, en los que la fase en un punto particular es calculada en función de los valores de fase vecinos y de las medidas de gradientes del frente de onda. Es el caso del algoritmo de Hudgin y Fried (1977).

- **Modales**, en los que la fase es desarrollada en polinomios de Zernike para pupilas circulares, o en un conjunto de funciones ortogonales como exponenciales complejas (método de Freischlad y Koliopoulos 1986) para pupilas cuadradas. La expresión básica es:

$$\phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^p a_j Z_j(x_i, y_i) \quad (3.1)$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas de posición de la subabertura i , a_j los coeficientes a encontrar y Z_j las p funciones ortogonales.

3.2.1 Algoritmo de Hudgin y Fried.

Consiste en evaluar la fase en un punto iterativamente a partir de sus valores en los cuatro puntos adyacentes y de las diferencias de fase con ellos (ver figura

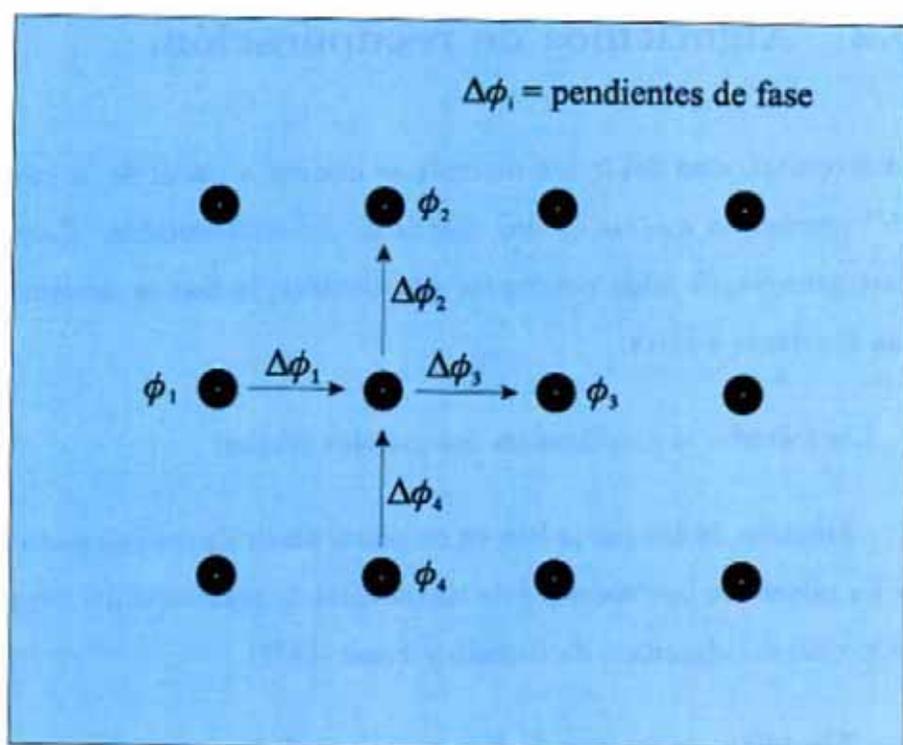


Figura 3.1: Esquema de funcionamiento del algoritmo de Hudgin y Fried. Cada uno de los círculos negros corresponde a la zona central de cada microlentilla.

3.1). En la iteración de orden M la fase valdrá:

$$\phi^{(M)} = \frac{1}{4}(\phi_1^{(M-1)} + \phi_2^{(M-1)} + \phi_3^{(M-1)} + \phi_4^{(M-1)} + \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 - \Delta\phi_3 + \Delta\phi_4)$$

Donde el término $\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 - \Delta\phi_3 + \Delta\phi_4$ no es más que una combinación lineal de diferencias de fase tomadas en dos direcciones ortogonales, que permite una estimación de la laplaciana:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

Este tipo de método zonal no ha sido aplicado en nuestro trabajo.

3.2.2 Recuperación modal con polinomios de Zernike.

A partir del desarrollo en polinomios de Zernike (ec. 3.1), las medidas de las pendientes en el sensor Hartmann-Shack, en las direcciones x e y , quedarían expresadas:

$$S^x(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=2}^p a_j \frac{\partial Z_j(x, y)}{\partial x}$$

$$S^y(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=2}^p a_j \frac{\partial Z_j(x, y)}{\partial y}$$

N^2 es el número de lentillas y p es el número de polinomios de Zernike considerados en el desarrollo. Más simplícadamente:

$$S = A \cdot a \quad (3.2)$$

La incógnita es la matriz de coeficientes a . La ecuación 3.2 representa un sistema sobredeterminado de ecuaciones, donde hay más ecuaciones (N^2) que incógnitas ($p-1$). Entonces, los coeficientes del desarrollo pueden ser hallados como el mejor ajuste sobre la abertura en el sentido de mínimos cuadrados. Se comprueba que la manera más simple de encontrar la solución por mínimos cuadrados es:

$$a = (A^T A)^{-1} A^T S = A^+ S$$

Si la matriz $A^T A$ es singular (su determinante es nulo), no podemos invertirla por las técnicas habituales. Suele en ese caso construirse la matriz ampliada (Herrmann 1980):

$$A_e = \begin{pmatrix} A \\ \text{fila de 1} \end{pmatrix}$$

con lo que el producto $A_e^T A_e$ es ya una matriz no singular. La representación en polares de los polinomios de Zernike es la más cómoda a la hora del cálculo de la derivada analítica. Para pasar después a derivadas cartesianas:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial \rho} \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{-1}{\rho \sin \theta}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial \rho} \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{1}{\rho \cos \theta}$$

Los problemas principales de este método son dos:

- El submuestreo de la pupila puede inducir efectos de *aliasing* (superposición); las derivadas de modos de alto orden pueden ser combinación lineal de las de bajo orden, en consecuencia alguna columna de A es combinación lineal de las restantes.

- En los polinomios de Zernike, las derivadas no son un conjunto ortogonal de funciones, en cuyo caso aparece aberración por emparejamiento cruzado. Por ejemplo, realizamos un ajuste de mínimos cuadrados con p polinomios de Zernike. Si suponemos que el gradiente verdadero puede escribirse con f polinomios de Zernike, siendo $f > p$, entonces:

$$S = A_f a_f$$

$$a_p = A_p^+ A_f a_f = C_{p,f} a_f$$

donde los subíndices p y f indican el número de polinomios de Zernike utilizados y $C_{p,f}$ es la llamada matriz de aberración por emparejamiento cruzado. Sólo si ésta es diagonal, $f=p$, desaparece tal aberración. Pero el muestreo discreto inherente a las medidas prácticas limita ese incremento en el número de modos p que pueden ser usados porque se vuelven indistinguibles (*aliasing*). Evitar estos efectos parece pues bastante complicado y se necesita de un compromiso para decidir el número p de polinomios en el ajuste.

Herrmann (1981) propone incluir condiciones experimentales tales como la construcción de gradientes promedio en áreas circulares (capaces de simular el tamaño de los detectores), en lugar de considerar gradientes evaluados en puntos simples. Modelando la “medida” de esta manera es posible conseguir gradientes que se asemejen más a los verdaderos, y disminuir entonces los efectos de *aliasing* y emparejamiento cruzado.

3.2.3 Recuperación a través de exponenciales complejas. Uso de la transformada discreta de Fourier.

Como ya hemos señalado, para pupilas cuadradas es apropiado desarrollar en términos de exponenciales complejas. Puede seguirse un proceso totalmente análogo al reseñado para polinomios de Zernike, pero el algoritmo de Freischlad y Koliopoulos (1986) tiene mayor interés para la recuperación de la fase.

Los elementos del desarrollo son de la forma:

$$Z_{pq}(x, y) = \frac{1}{N} e^{\frac{2\pi i}{N}(px+qy)}$$

con $0 \leq p, q \leq N - 1$. El desarrollo que hacemos es:

$$\phi(x, y) = \sum_{p,q=0}^{N-1} a_{pq} Z_{pq}(x, y) = DF^{-1}(a_{pq})$$

Donde por DF indicamos la transformada discreta de Fourier. El gradiente se escribe:

$$\vec{S}(x, y) = \nabla \phi(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} = \sum_{p,q} a_{pq} \vec{\nabla} Z_{pq}$$

La función F a minimizar es:

$$F = \sum_{x,y=1}^N [\vec{S}(x, y) - \sum_{p,q} a_{pq} (\frac{\partial Z_{pq}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Z_{pq}}{\partial y} \vec{j})] \quad (3.3)$$

donde por \vec{S} nos referimos a los datos experimentales. Derivando F respecto a un coeficiente particular $a_{p_0q_0}$ se obtiene:

$$a_{p_0q_0} = \frac{\sum_{x,y=1}^N (S^x \frac{\partial Z_{p_0q_0}^*}{\partial x} + S^y \frac{\partial Z_{p_0q_0}^*}{\partial y})}{\sum_{x,y=1}^N (\frac{\partial Z_{p_0q_0}}{\partial x} \frac{\partial Z_{p_0q_0}^*}{\partial x} + \frac{\partial Z_{p_0q_0}}{\partial y} \frac{\partial Z_{p_0q_0}^*}{\partial y})}$$

donde S^x y S^y son los gradientes de fase que, considerando la configuración geométrica de nuestro detector Hartmann-Shack (figura 3.2), podemos escribir:

$$S^x = \nabla_x \phi(x, y) = \phi(x + \frac{1}{2}, y) - \phi(x - \frac{1}{2}, y)$$

$$S^y = \nabla_y \phi(x, y) = \phi(x, y + \frac{1}{2}) - \phi(x, y - \frac{1}{2})$$

De otro lado, los gradientes de las exponenciales del desarrollo son analíticamente:

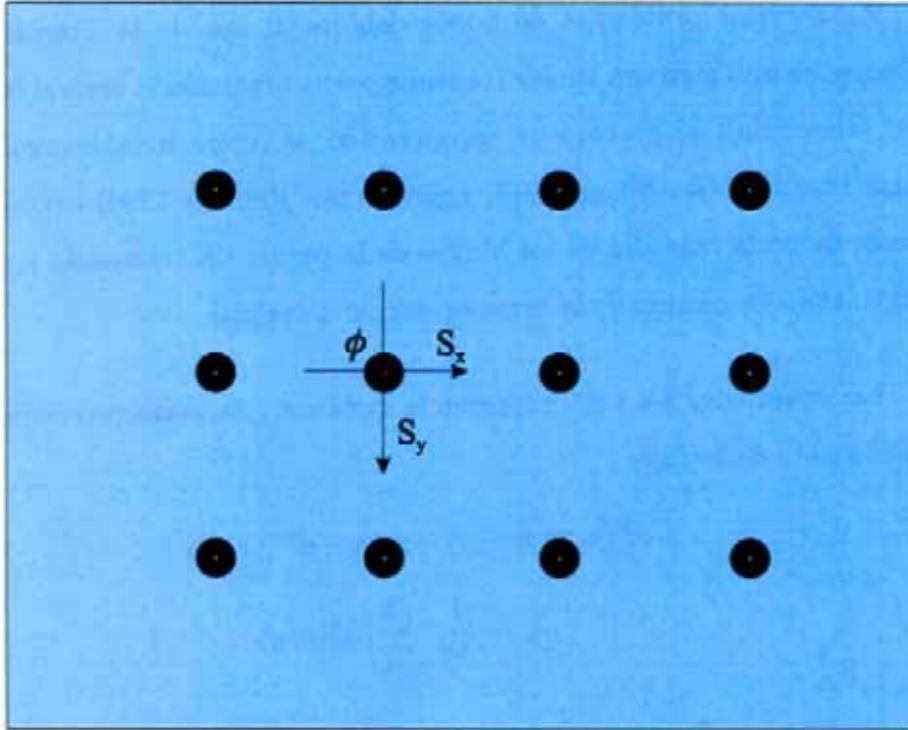


Figura 3.2: Configuración geométrica del detector Hartmann-Shack. Las pendientes de fase S^x y S^y pertenecen al centro de cada subabertura, no a los extremos.

$$\nabla_x Z_{pq}(x, y) = Z_{pq}[2i \operatorname{sen}(\pi p/N)]$$

$$\nabla_y Z_{pq}(x, y) = Z_{pq}[2i \operatorname{sen}(\pi q/N)]$$

Y en definitiva, los coeficientes del desarrollo pueden ser obtenidos de la expresión:

$$a_{p_0 q_0} = \frac{-2 [i \operatorname{sen}(\pi p_0/N) DF\{S^x\} + i \operatorname{sen}(\pi q_0/N) DF\{S^y\}]}{4 [\operatorname{sen}^2(\pi p_0/N) + \operatorname{sen}^2(\pi q_0/N)]}$$

Los coeficientes $a_{p_0 q_0}$ proceden así de una operación de filtrado en el dominio transformado. La antitransformada discreta de Fourier de esta matriz de coeficientes proporciona directamente el frente de onda $\phi(x, y)$.

Para evitar problemas de borde debidos al uso de la Transformada de Fourier en una máscara anular (causada por la obstrucción central de la pupila del telescopio), el proceso de recuperación se repite iterativamente con un algoritmo tipo Gershberg (1974, aplicado por Roddier 1990) extrapolando el frente de onda más allá de los límites de la pupila del telescopio y, por tanto, suavizando en cada paso la transformación a realizar.

Las ecuaciones 3.4 y 3.5 expresan la varianza y varianza promedio del error en el ajuste de la fase:

$$\sigma_{\Delta}^2(x, y) = \langle |\hat{\phi}^{x,y}(x, y) - \phi^{x,y}(x, y)|^2 \rangle \quad (3.4)$$

$$\overline{\sigma_{\Delta}^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{x,y=1}^N \sigma_{\phi}^2(x, y) \quad (3.5)$$

donde $\hat{\phi}$ es la fase restaurada. Si el error cuadrático medio (*rms*) entre el array de gradientes original y el que se deduce de la fase restaurada disminuye en cada paso, entonces la iteración converge y la restauración de la fase es satisfactoria (ver figura 3.3). Por supuesto, el error *rms* debe tener en cuenta un error acumulado proveniente de todas las anteriores iteraciones realizadas, y no simplemente el *rms* de la diferencia entre el *array* de gradientes original y el recuperado.

Estamos especialmente interesados en la distribución espacial de la varianza del error de reconstrucción (3.6), y en la varianza promedio del error de reconstrucción sobre el array de datos y su dependencia con el tamaño N del mismo (3.7), que en términos de gradientes de fase se expresa:

$$\sigma_{S^{x,y}}^2(x, y) = \langle |\hat{S}^{x,y}(x, y) - S^{x,y}(x, y)|^2 \rangle \quad (3.6)$$

$$\overline{\sigma_{S^{x,y}}^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{x,y=1}^N \sigma_{S^{x,y}}^2(x, y) \quad (3.7)$$

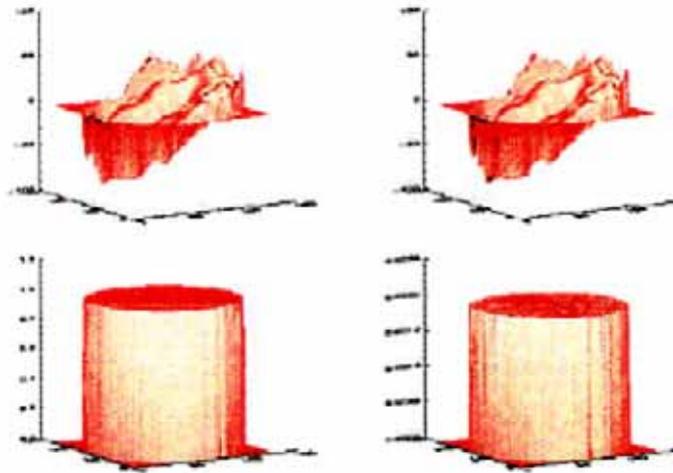


Figura 3.3: Arriba, izquierda: fase original del frente de onda. Arriba, derecha: fase restaurada. Ambas fases se representan en radianes frente a las dimensiones de la matriz de fases en unidades arbitrarias. Abajo, izquierda: Cociente de fases. Abajo, derecha: diferencia entre ambas (la fase se recupera salvo una constante del orden de 0.002 radianes en este caso). Corresponde a un telescopio de $D=10$ m. y Diámetro de Fried de $r_o=20$ cm. Partiendo de las diferencias S^x y S^y calculadas matemáticamente, sin hacer pasar el frente de onda por el Hartmann-Shack, la recuperación es exacta desde la primera iteración, siendo la varianza de la diferencia entre las fases original y restaurada del orden de $\sigma_{\Delta}^2 = 2.8 \cdot 10^{-11} \text{ rad}^2$.

donde $\langle \rangle$ se establece sobre el número de iteraciones realizadas, $\tilde{S}^{x,y}(x,y)$ indica los gradientes de fase posteriores a la restauración y $S^{x,y}$ los gradientes originales medidos por el Hartmann-Shack.

Este método de desarrollo en exponenciales complejas pierde potencia en los bordes de una pupila circular debido a la ausencia de información alrededor de estos puntos. Además, al aplicarlo a una pupila anular (obscuridad central del secundario) es del todo necesaria una extrapolación de los datos al cuadrado que contiene la pupila circular con el fin de evitar las altas frecuencias que la máscara anular introduce. Nos hemos decantado definitivamente por

este método ya que, con la ayuda del algoritmo de Gershberg ya mencionado anteriormente, solucionamos de forma satisfactoria estos problemas.

Freischlad y Koliopoulos (1986) desarrollan el ajuste de mínimos cuadrados correspondiente a la ecuación 3.3 para una geometría en la que las diferencias originales se corresponden al interpíxel y la fase al píxel, asociando entonces a una disposición Hartmann-Shack no los gradientes originales sino una interpolación de los mismos, por ejemplo:

$$S^x(x, y) = 1/2[S^x(x - 1/2, y) + S^x(x + 1/2, y)]$$

$$S^y(x, y) = 1/2[S^y(x, y - 1/2) + S^y(x, y + 1/2)]$$

lo cual termina traduciéndose en un error mucho más dependiente de la validez del algoritmo de interpolación utilizado y, en cualquier caso, supone comenzar la iteración con datos ya modificados respecto a los originales. Hemos implementado esta interpolación y hemos comprobado que el método no converge.

El ajuste de mínimos cuadrados se ha realizado para la geometría típica del sensor Hartmann-Shack: en cada píxel se dispone de los gradientes promedio $S^x(x, y)$, $S^y(x, y)$ y se obtiene la fase de frente de onda $\phi(x, y)$ asociada a dicho píxel. Para proseguir la iteración deben ser calculados los nuevos gradientes $S_i^x(x, y)$, $S_i^y(x, y)$ y comparados con los originales, pero si los obtenemos simplemente como diferencias de fase en las direcciones X e Y obtendremos valores de gradiente en el interpíxel $S_i^x(x + 1/2, y + 1/2)$, $S_i^y(x + 1/2, y + 1/2)$ que no pueden ser comparados con los originales. La forma de proceder es desplazar estas diferencias medio píxel lo que, según el Teorema del desplazamiento de

la teoría de Fourier, supone tan sólo la introducción de un factor de fase en la transformada de $S_i^x(x + 1/2, y + 1/2)$, $S_i^y(x + 1/2, y + 1/2)$.

Si combinamos la fase restaurada del Hartmann-Shack con imágenes *speckle* (ver capítulo 5), el pequeño número de lentillas del que dispone el sensor obliga a un submuestreo del frente de onda que se traduce en enormes frecuencias que hacen irrecuperable ϕ . Es, pues, necesaria también una interpolación en la matriz de datos conocida si se desea obtener, por ejemplo, el mismo tamaño de la imagen *speckle*, para de este modo poder realizar la deconvolución convenientemente. En nuestro caso hemos utilizado una simple interpolación bilineal para redimensionar la matriz de fases.

3.3 Simulación numérica.

El primer paso de la simulación consiste en generar la fase del frente de onda en la pupila del telescopio. Contiene información tanto de la turbulencia atmosférica, por supuesto, como del objeto observado, ya sea puntual o extenso, y siempre que este último no sea resuelto por las microlentillas.

El siguiente paso consiste en reimaginar la pupila del telescopio hasta la entrada al sensor Hartmann-Shack. Este proceso es equivalente a una doble especulación en los ejes X e Y perpendiculares al eje óptico del sistema y, por tanto, no conlleva ninguna modificación en el frente de onda inicial; pero si en algún punto del camino que recorre el haz de luz se dispone algún nuevo espejo plano, por ejemplo para aprovechar mejor la mesa óptica del telescopio, debe simularse tal presencia o, de lo contrario, el mapa de fases final puede haber sufrido especulaciones o rotaciones en una sola de las dimensiones (horizontal

o vertical) que hagan irrecuperable un *frame* PSF acorde con su imagen *speckle* asociada.

Finalmente, el efecto del *array* de microlentillas es simulado hallando la PSF asociada a cada subpupila haciendo uso de la Transformada Rápida de Fourier. La diferencia entre los centroides medidos con el frente de onda atmosférico y los medidos con el de referencia es el desplazamiento en píxeles proporcional a la pendiente media de la fase del frente de onda en cada subapertura.

Al muestrear la amplitud compleja del campo como lo haría el *array* de microlentes, el programa de simulación deja como parámetro de libre decisión el tamaño en píxeles del detector asignado a cada subpupila, o lo que es lo mismo, el número de microlentes que componen el mosaico. Esto da mayor juego en la simulación del detector Hartmann-Shack, ya que permite comparar los resultados con diversos muestreos para el mismo mapa de fases e, incluso, decidir las dimensiones más convenientes cuando se utiliza un objeto extenso para obtener la fase del frente de onda (recordemos que era condición necesaria que tal objeto no fuese resuelto por las subpupilas si se quería obtener la fase puramente atmosférica).

La figura 3.4 muestra la evolución en la convergencia de las iteraciones de Gershberg cuando recuperamos la fase del frente de onda. Si comparamos fases restaurada y original, observamos que no se supera el 1% de error en la recuperación, siendo el telescopio de 4.2 metros de diámetro, y habiendo realizado el muestreo con un *array* de 32×32 microlentillas, equivalente a un tamaño de subpupila de 13 cms. de diámetro (12 píxeles asignados).

La figura 3.5 nos da idea de cómo elegir el *array* de microlentillas. Si

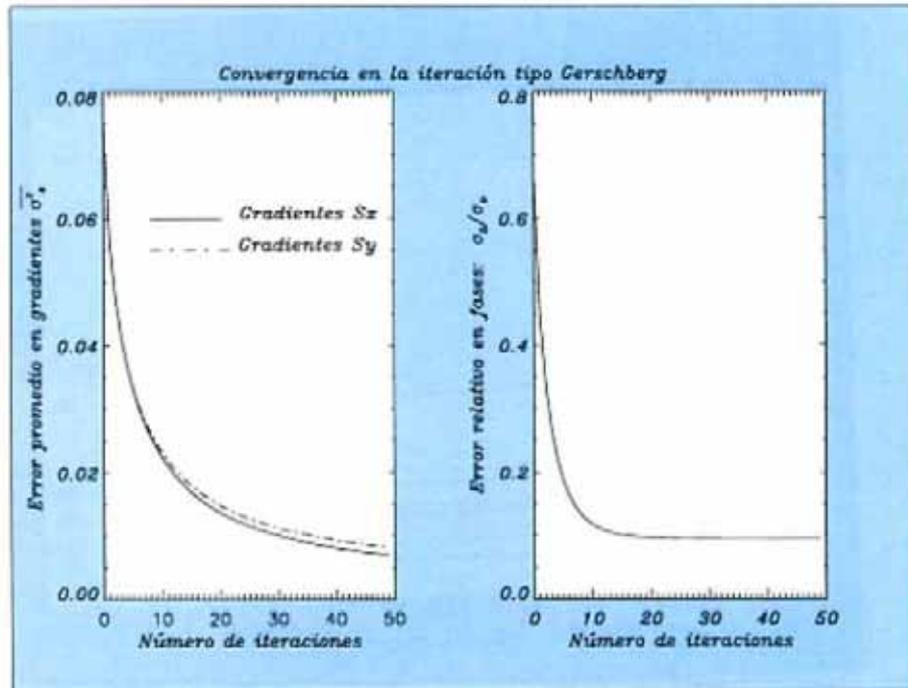


Figura 3.4: Izquierda: Convergencia en las iteraciones del error $\overline{\sigma_{S_{x,y}}^2}$. Derecha: Convergencia en el error relativo de fases del frente de onda σ_D/σ_o . Suelen estabilizarse a partir de unas 50 iteraciones aproximadamente. El ejemplo corresponde a un seeing típico del visible de $r_o=20$ cm., en un telescopio de 4.2 metros de diámetro.

muestreamos demasiado la fase del frente de onda original corremos el riesgo de no contar con los suficientes píxeles de CCD asignados a la imagen de cada microlentilla como para obtener un correcto valor del centroide. Por otro lado, si aumentamos en demasía este número de píxeles, el muestreo de la fase empeora. La decisión sobre las dimensiones del *array* de microlentes a utilizar es un compromiso entre un buen muestreo del frente de onda (diámetro de subpupilas pequeño) y un suficiente número de píxeles del CCD asignados a cada subpupila (para obtener el centroide con la suficiente fiabilidad).

Se ha introducido también la posibilidad de variar la geometría de las máscaras de las subpupilas, aspecto que afecta tanto a la cantidad de señal

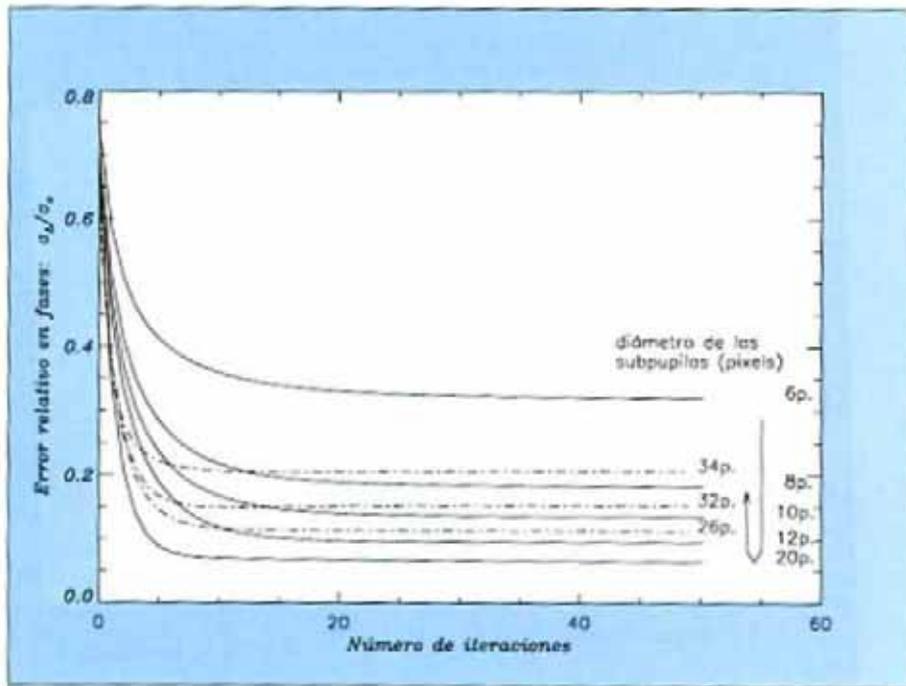


Figura 3.5: Convergencia en el error relativo de fases del frente de onda σ_{Δ}/σ_o . El ejemplo corresponde a un seeing típico del visible de $r_o=20$ cm., en un telescopio de 4.2 metros de diámetro. Observamos cómo varía la convergencia con el tamaño de subpupila. En este caso el compromiso corresponderá a trabajar alrededor de los 20 píxeles (equivalente a unos 20cm. de subabertura).

con la que se cuente finalmente en el detector, como al grado de exactitud en la estimación de los centroides en cada subpupila, ya que varía el número de píxeles que intervienen en el algoritmo de cálculo de aquéllos.

Otro concepto que también explota la simulación es el de subpupila "validada", el cual reside en la posibilidad de desechar subpupilas en las que, o bien la cantidad de luz que llega es inferior a un cierto umbral fijado a voluntad, o la iluminación es sólo parcial, debido al truncamiento producido por la máscara anular del telescopio y cuyos resultados darían medidas de centroides erróneas.

Considerar que la PSF asociada a una subpupila se ve afectada, en simple

superposición parcial, por las PSF's asociadas a las subpupilas vecinas coincide con la suposición de que la focal de las microlentillas es tan grande que la imagen de cada una se extiende y afecta a las vecinas. Ciñéndonos a la herramienta de nuestra simulación, la transformada de Fourier, conseguir un efecto de ampliación en la anchura de estas manchas supone partir de una fase del frente de onda rodeada de ceros hasta la dimensión final deseada de cada imagen. Las subpupilas vecinas consideradas han sido las contiguas: superior, inferior, izquierda y derecha de cada una. Por supuesto, para que sea posible el análisis comparativo de resultados entre el caso en que interviene este efecto y el caso en que no lo hace, el centroide debe ser calculado en un recinto del CCD con el mismo número de píxeles en ambos casos. Así pues, aparece un nuevo parámetro libre como es el tanto por ciento en que estimemos la superficie asociada a cada subpupila que esté siendo afectada por la de sus vecinas.

Para la simulación de un régimen fotónico de señal, en lugar de un régimen de flujo, hemos implementado técnicas de Montecarlo para la generación de fotones que sigan cualquier ley de distribución (B.R. Frieden 1991). En líneas generales se trata de construir primeramente la función acumulativa asociada a la ley de distribución que se desee y, seguidamente, utilizar el generador uniforme de números aleatorios que incorpora el ordenador para obtener valores de la función acumulativa y, sobre todo, de las raíces de estos valores, las cuales son precisamente las posiciones en la imagen de los fotones en cuestión. El histograma de posiciones de fotones se corresponde con la imagen buscada.

Nuestra aportación en este punto es la forma de implementar el algoritmo para la obtención de la función acumulativa y la raíz asociada a cada valor del generador aleatorio del ordenador, que resulta muy rápido pues, aprovechando

el carácter creciente de la función acumulativa (en una ley de distribución definida positivamente), los calcula a la vez en un único bucle.

En resumen, nuestra simulación informática del sensor Hartmann-Shack permite elegir el número y geometría de las microlentillas, validarlas según la cantidad y calidad de señal que reciben, considerar el tanto por ciento de superposición entre ellas y, por último, simular un régimen fotónico de observación.

En la sección 5.2 aportamos más detalles del régimen fotónico de señal concernientes al uso del Hartmann-Shack con un objeto extenso. Asimismo, en la sección 5.3 analizaremos el comportamiento del sensor Hartmann-Shack para objetos extensos con diversas formas.

Capítulo 4

Sensor de Curvatura.

Un sensor de Curvatura mide un campo escalar: la curvatura del frente de onda, una cantidad proporcional a la laplaciana $\nabla^2\phi$, que si se define adecuadamente verifica la siguiente ecuación (recordemos que un sensor Hartmann-Sack mide un campo vectorial $\vec{\nabla}(\phi)$):

$$\rho(x, y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \nabla^2\phi$$

Ésta es una ecuación de Poisson que necesita para su integración condiciones de ligadura. Las pendientes del frente de onda en el borde de la pupila circular y en dirección radial, también suministradas por el sensor de Curvatura, proporcionan tales condiciones.

El frente de onda es enfocado por una lente o espejo, con focal f , en su plano focal F . El sensor de Curvatura consta de dos medidas simultáneas, o separadas menos tiempo que el característico de cambio atmosférico, de la imagen fuera de foco. Se detecta la distribución de la irradiancia $I_1(\vec{r})$ en un

plano P_1 a la distancia l antes de F , e $I_2(\vec{r})$ en otro plano P_2 simétricamente situado a la distancia l de F . De consideraciones de Óptica Geométrica puede demostrarse que una curvatura local del frente de onda producirá un exceso de iluminación en un plano y una falta de iluminación en el otro. La diferencia entre las dos intensidades proporciona así una medida de la curvatura local del frente de onda.

La Óptica Geométrica demuestra también que en el borde circular la misma diferencia entre las dos iluminaciones es una medida de la pendiente radial del frente de onda, precisamente necesaria para resolver la ecuación de Poisson.

En una implementación real, el mismo detector puede medir las dos distribuciones de irradiancia alternativamente, evitando entonces efectos debidos a diferencias en los detectores.

Las ecuaciones de difracción, dentro aún de la Óptica Geométrica, muestran que la diferencia normalizada entre las iluminaciones I_1 e I_2 en los planos P_1 y P_2 , que hemos llamado señal del sensor y que es proporcional a la curvatura $\rho(x, y)$, verifica:

$$S = \frac{\lambda f(f-l)}{2\pi l} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial n} \delta_c + P \nabla^2 \phi \right) \quad (4.1)$$

donde \vec{n} es la dirección radial de la pupila y δ_c es una distribución lineal del impulso alrededor del borde de la pupila (este término es nulo fuera del borde). Con la constante $C_o = \frac{\lambda f(f-l)}{2\pi l}$ expresada en m^2 significamos que ϕ está siendo medida en radianes y no en metros como en la expresión 2.11. Esta ecuación no es más que una simplificación de la ecuación de transporte de la irradiancia para el caso en que únicamente midamos $\nabla^2 \phi$; además, nos permite medir la laplaciana a partir de medidas de intensidad en los dos planos de detección.

El proceso final es resolver la ecuación de Poisson.

Como ventajas del sensor de Curvatura frente al Hartmann-Sack podemos citar la independencia estadística de las medidas de curvatura (las medidas de $\bar{\nabla}\phi$ están muy correlacionadas), y la existencia de dispositivos analógicos como membranas y espejos bimorfos que resuelven la ecuación de Poisson directamente sin necesidad de ningún proceso por computadora.

La desventaja principal consiste en la rápida propagación del error con el aumento del tamaño del *array* del sensor. Sin embargo, este error es comparable en ambos métodos si el *array* es pequeño y únicamente compensamos aberraciones de bajo orden.

4.1 Interpretación según la Óptica Geométrica.

En el marco de la Óptica Geométrica puede entenderse, de forma sencilla y didáctica, tanto la constante C_o que interviene en la expresión base del sensor de Curvatura (ec. 4.1) como todo el proceso de propagación involucrado en tal sensor. Hasta donde sabemos, esta interpretación es novedosa y ha resultado de importancia crucial en la implementación práctica de la simulación.

Si consideramos una lente convergente, un objeto emitiendo desde una distancia finita s respecto a la misma produce un frente de onda esférico a su llegada, y la imagen que esta lente hace de tal objeto queda situada a una distancia s' distinta de la focal f de la lente (ver figura 4.1).

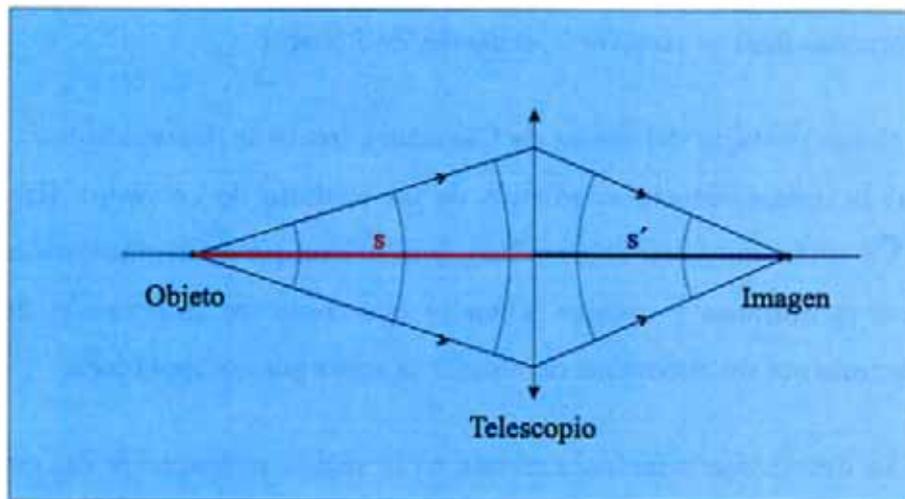


Figura 4.1: Imagen de un objeto puntual en una lente convergente dentro de la óptica geométrica.

Al tratarse de un sistema óptico de lente convergente se verifica:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

o lo que es igual:

$$s' = \frac{f \cdot s}{s - f}$$

En un sensor de Curvatura las intensidades I_1 e I_2 que se necesita medir son imágenes desenfocadas de un objeto en el infinito. Desenfocar significa, en realidad, introducir una aberración esférica al frente de onda que llega a la lente (telescopio). En lentes convergentes un frente de onda esférico está asociado a una fuente puntual a cierta distancia finita s . Por tanto, esta relación entre el desenfoque y la esfericidad va a permitir asociar la distancia s' con la longitud l de desenfoque que aparecía en la expresión 4.1.

De la Figura 4.2 podemos escribir: $s' = f - l$. Sustituyendo todas estas

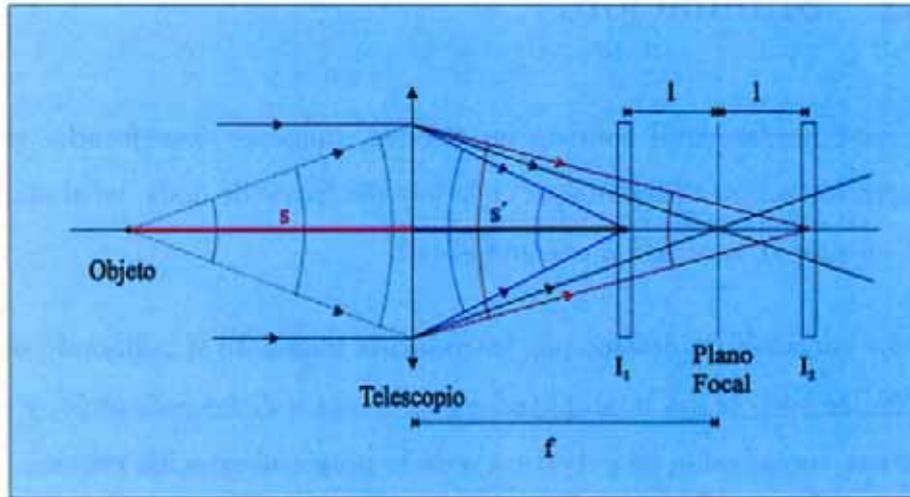


Figura 4.2: Esquema del sensor de Curvatura superpuesto a la interpretación óptico-geométrica de una lente convergente.

expresiones en la constante C_o de la ecuación de la irradiancia 4.1:

$$\frac{f(f-l)}{l} = \frac{f}{l} \cdot s' = \frac{f}{s'-f} \cdot \frac{f \cdot s}{s-f} = s$$

$$C_o = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot s \quad (4.2)$$

Es decir, la constante C_o , que transforma la señal $S = \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}$ a valores de curvatura de la fase del frente de onda $\nabla^2 \phi$ y a valores de gradientes radiales de la misma $\frac{\partial \phi}{\partial \Omega}$, se corresponde con la distancia al telescopio en el plano objeto que tendría una fuente puntual que emitiese con la misma esfericidad que el grado de aberración esférica de las imágenes desenfocadas I_1 e I_2 .

Para conseguir intensidades I_1 e I_2 a diversas distancias de desenfoco l basta variar la esfericidad introducida en la fase del frente de onda. Esta es la idea principal en la que se ha basado el simulador de sensor de Curvatura, como veremos en el siguiente apartado.

4.2 Simulación.

La base fundamental consiste en generar imágenes desenfocadas añadiendo aberración esférica (desenfoque) a la fase del frente de onda, en el plano pupila del telescopio, asociada a esa intensidad.

La cantidad de desenfoque, introducida mediante el polinomio de Zernike de índice $j=4$, la fija la amplitud c que demos a dicho polinomio, y está relacionada con el radio de curvatura s de la propia aberración esférica.

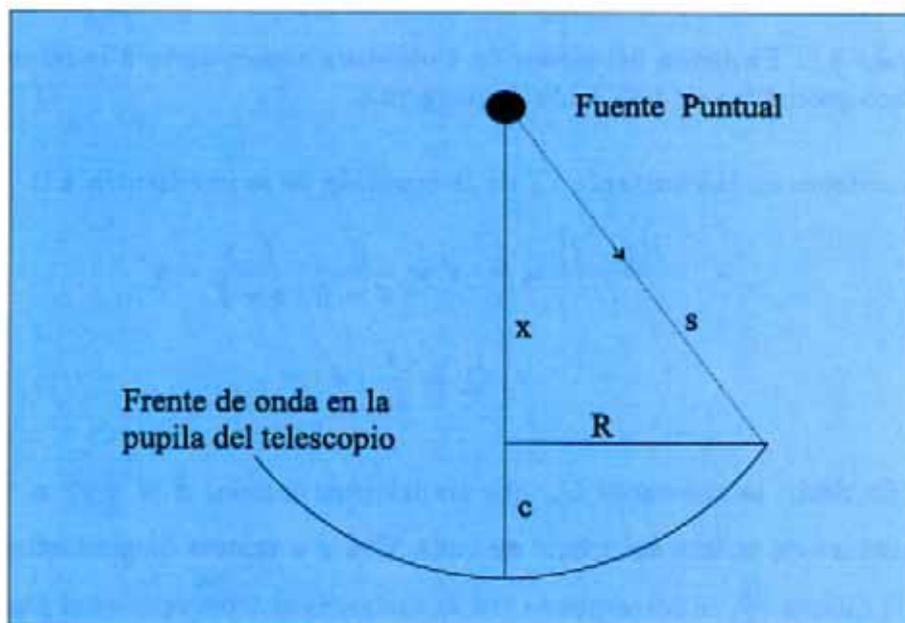


Figura 4.3: Esquema de la emisión en ondas esféricas de una fuente puntual. Las relaciones geométricas entre los diversos parámetros señalados son sencillas de calcular.

Las ondas esféricas provenientes de una fuente puntual, a su llegada al telescopio de radio R , verifican las siguientes relaciones geométricas (Fig. 4.3):

$$\left. \begin{array}{l} x + c = s \\ x^2 + R^2 = s^2 \end{array} \right\}$$

Haciendo ahora desaparecer el parámetro x , nos quedan las relaciones entre c y s siguientes:

$$s = \frac{c^2 + R^2}{2c} \quad (4.3)$$

$$c = s - \sqrt{s^2 - R^2} \quad (4.4)$$

Sustituyendo 4.3 en la expresión 4.2 la constante C_o queda expresada como sigue:

$$C_o = \frac{c_{rad}^2 \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2} + R_{metros}^2}{2c_{rad}}$$

en la que por c_{rad} se denota el máximo de amplitud de Z_4 en radianes ($c_{metros} = c_{rad} \cdot \frac{\lambda}{2\pi}$), y por R_{metros} el radio del telescopio en metros. Esta fórmula resulta interesante porque dentro de los rangos visible (por ejemplo: $\lambda = .5\mu m$) e infrarrojo (por ejemplo: $\lambda = 20\mu m$) se verifica que el primer sumando del numerador es mucho menor que el otro:

$$c_{rad}^2 \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \ll R_{metros}^2$$

Y nuestra “constante de transformación” C_o puede aproximarse por:

$$C_o = \frac{R_{metros}^2}{2c_{rad}} \quad [m^2]$$

Esta estimación es la que usamos para integrar la ecuación de transporte de la irradiancia aplicada al sensor de Curvatura (ec. 4.1). Para un telescopio dado, partimos del desenfoque c_{rad} introducido con el polinomio de Zernike de índice $j=4$ multiplicado por un factor variable según el muestreo deseado sobre el detector (directamente relacionado con el tamaño de la imagen según su distancia al foco). Si, por ejemplo, desenfoquemos con un factor 20, como el

polinomio de Zernike Z_4 oscila entre $-\sqrt{3}$ y $+\sqrt{3}$, tiene una amplitud de $2\sqrt{3}$ radianes, es decir:

$$c_{rad} = 20 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \simeq 69.28$$

Y para un telescopio como el William Herschell de La Palma ($R = 4.2m.$):

$$C_o = \frac{4.2^2}{69.28} \simeq 0.25 \text{ m}^2$$

El último paso consiste en relacionar la longitud de desenfoque l (posición de la imagen desenfocada) con la cantidad de aberración esférica c_{rad} introducida:

$$c = \frac{(s - \sqrt{s^2 - R^2}) \cdot (s + \sqrt{s^2 - R^2})}{s + \sqrt{s^2 - R^2}} = \frac{s^2 - s^2 + R^2}{s + \sqrt{s^2 - R^2}} \simeq \frac{R^2}{s + s} = \frac{R^2}{2s}$$

$$c = \frac{R^2}{2l(l-1)} = \frac{R^2}{2f(\frac{l}{f} - 1)} \simeq \frac{R^2}{2\frac{l^2}{f}}$$

dado que, en las dimensiones habituales de trabajo, l es del orden de varios centímetros frente a focales de decenas de metros.

En definitiva:

$$c_{rad} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^2 \frac{l}{2}$$

Queda, pues, controlado en cualquier caso el desenfoque que introducimos con el polinomio de Zernike Z_4 , ya que sabemos en qué lugar l van a estar las

imágenes desenfocadas, y con qué valor de la constante C_o deberemos integrar la ecuación de la irradiancia.

La imagen antes de foco I_1 se obtiene añadiendo una cantidad de desenfoque Z_4 a la fase, y la posterior al foco I_2 restando esa misma cantidad si las pretendemos simétricas. Una de ellas ha de rotarse 180° antes de calcular la diferencia de intensidades para compensar la inversión de imagen.

4.2.1 Zona cáustica y muestreo.

La zona útil de trabajo de un sensor de Curvatura debe estar fuera de la denominada "zona cáustica", que corresponde a la más cercana al plano focal, donde las imágenes quedan insuficientemente desenfocadas para obtener correctamente la fase del frente de onda. La zona cáustica queda excluida de la región de validez de la óptica geométrica a partir de las ecuaciones de difracción de la luz:

$$\frac{\lambda(f-l)}{r_o} \ll \frac{r_o l}{f}$$

donde r_o es la longitud de correlación de las fluctuaciones del frente de onda (parámetro de Fried). Físicamente, las fluctuaciones del frente de onda de escala r_o difractan luz sobre un ángulo λ/r_o tal que la iluminación en un plano anterior al focal puede ser considerada como la imagen de la pupila con una perturbación del orden de $\lambda(f-l)/r_o$. La zona cáustica puede también entenderse como aquella en la que intersectan los rayos provenientes de diferentes puntos de la pupila muestreada.

De otro lado, incrementar la longitud de desenfoque significa aumentar el

muestreo del mapa de fases y mejorar, por tanto, la estimación del mismo. Sin embargo, es preciso llegar al compromiso de no disminuir la señal en exceso (pérdida de sensibilidad) por desenfocar demasiado las imágenes, ni de originar enormes matrices de datos y consiguientes problemas de cálculo, quizá innecesarias para la precisión que se desea.

El aumento del muestreo se traduce en mayor información, pero el tamaño de píxel físico en la imagen no cambia:

$$\text{tamaño píxel} = \frac{\lambda F}{2D}$$

En el proceso de simulación, aumentar el muestreo significará pasar de una pupila encajada en un *array* 128×128 a otra de 256×256 , pero en ambos casos el tamaño de píxel es el mismo, aunque hay más información contenida en el segundo caso.

4.3 Algoritmo de recuperación.

El problema de obtener una estimación lineal del frente de onda por mínimos cuadrados a partir de un *array* de medidas de pendientes de fase o de laplacianas de fase ha sido discutido en la literatura (D.L. Fried 1977, R.H. Hudgin 1977). Se demuestra que la solución consiste en resolver una ecuación de Poisson con condiciones de ligadura del tipo Neumann. Diversos algoritmos de sobre-relajación son usados habitualmente para resolver el problema numéricamente. El algoritmo que nosotros utilizaremos para recuperar la fase a partir de medidas de su laplaciana será completamente análogo al que ya aplicamos en el Hartmann-Shack para recuperar el frente de onda a partir de

los gradientes de fase.

Desarrollando de nuevo en exponenciales complejas podremos hacer uso de la Transformada Discreta de Fourier:

$$Z_{pq}(x, y) = \frac{1}{N} e^{\frac{2\pi i}{N}(px+qy)}$$

$$\phi(x, y) = \sum_{p,q=0}^{N-1} a_{pq} Z_{pq}(x, y) = DF^{-1}(a_{pq})$$

Recuperamos el frente de onda iterando según el algoritmo de Gershberg (1974) para evitar efectos de borde, pues al extrapolar el frente de onda más allá de los bordes de la pupila (donde se sitúan los datos de ligadura) desaparecen las altas frecuencias que los cortes bruscos producen al hacer la transformada de Fourier. Por supuesto, ahora el filtro que devuelve los coeficientes del desarrollo de la fase cambia respecto al necesario en el caso de datos de pendientes y, en definitiva, los coeficientes del desarrollo pueden ser obtenidos de la expresión:

$$a_{p_0q_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } p_0 = q_0 = 0 \\ \frac{DF(S)}{-4 [\text{sen}^2(\pi p_0/N) + \text{sen}^2(\pi q_0/N)]} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde S son los datos de laplaciana de fase medidos con el sensor de Curvatura. El proceso iterativo consiste en aplicar el filtro a los datos S iniciales, recuperar una estima de la fase, y derivar ésta para obtener un nuevo mapa de curvaturas. Una medida *rms* convergente de la diferencia de energías entre el mapa inicial S y las sucesivas estimaciones (en la región interna a la pupila) indica el avance correcto del ajuste.

4.3.1 De las condiciones de ligadura.

Una intensidad medida fuera de la zona cáustica es, en realidad, una imagen desenfocada de la pupila del telescopio. En ella no es posible distinguir con facilidad sus bordes, de hecho, los gradientes radiales usados como ligadura no están en una zona estrecha y bien definida en la imagen (aunque hasta ahora la expresásemos como una función Delta de Dirac) sino que, por el contrario, ocupan un área finita a lo largo del borde, lo que llamamos “región de ligadura”.

Además, si la aberración es grande, la señal de ligadura es fuerte y bien diferenciada de la “región laplaciana”. Si la aberración es pequeña no es posible distinguir bien la región de ligadura y corremos el riesgo de incluir señal de laplaciana en la región de ligadura, lo que es un factor importante de error en la recuperación de la fase del frente de onda.

El control de la región de ligadura es un problema bastante abierto aún. Hasta ahora la forma de proceder con ella obedece a consideraciones más bien intuitivas de cada autor. Sin embargo, en problemas específicos como el que plantearemos en el capítulo sexto, referente a la aplicación del sensor de Curvatura a la medida del pistón entre segmentos en un telescopio segmentado, se demuestra que no es tan fundamental el control de la región de ligadura, pues por la propia naturaleza del problema, el borde hexagonal tan marcado de la pupila evita la aparición de amplias regiones de ligadura en una imagen desenfocada de la misma.

Como posibilidad abierta queda siempre integrar la señal de ligadura y disponerla como función unidimensional en el borde de la región de laplaciana.

Capítulo 5

Deconvolución con detección del frente de onda.

5.1 Descripción de la técnica.

La técnica de deconvolución con detección del frente de onda combina las imágenes *speckle* con la determinación de la fase mediante los sensores Hartmann-Shack o de Curvatura. Como ya adelantamos en la sección 1.3.2, nuestro objetivo es hallar la OTF, módulo (MTF) y fase (PTF). La complejidad de todo el proceso hace indicado presentar en la figura 5.1 el valor de la amplitud compleja y de la intensidad del campo en cada uno de los planos más significativos de la observación. En el pie de figura se señalan las magnitudes medibles por los detectores.

La atmósfera produce un cambio tanto en la fase como en la amplitud de la onda. Haciendo uso de una fuente puntual y midiendo su fase $\phi(\vec{u})$ y su

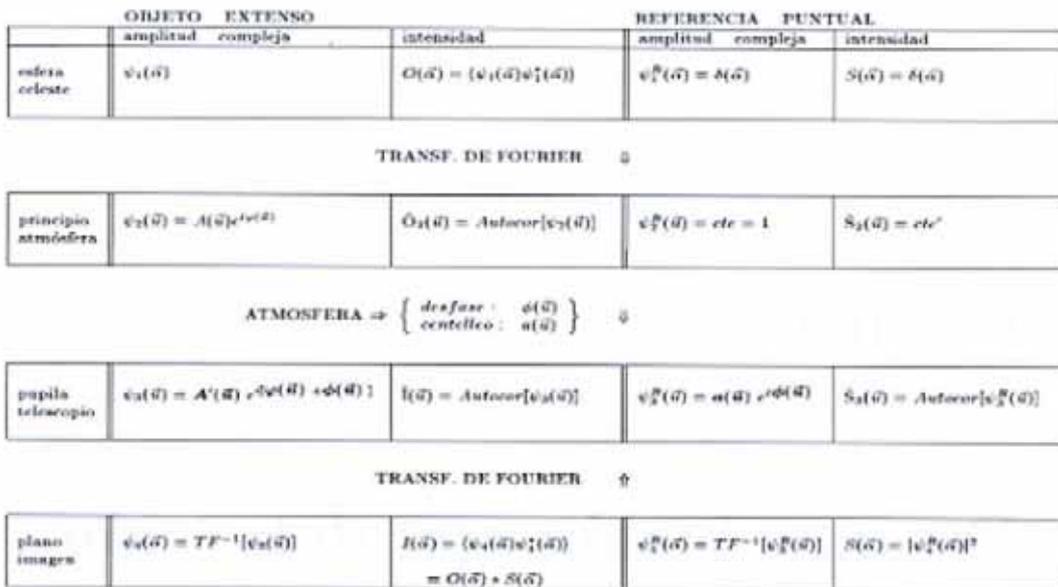


Figura 5.1: Representación matemática de la onda a su paso por la Atmósfera. Plano pupila: un sensor determina la fase total del frente de onda (componente del objeto extenso φ y componente atmosférica ϕ) y su amplitud (A' o a). Plano imagen: un detector convencional mide las intensidades I o S .

amplitud $a(\vec{u})$ en la pupila de salida del telescopio, construimos la OTF del sistema como:

$$S(\vec{\alpha}) = |TF^{-1}[a(\vec{u})e^{i\phi(\vec{u})}]|^2$$

$$\tilde{S}(\vec{f}) = \text{Autocor}[a(\vec{u})e^{i\phi(\vec{u})}]$$

$S(\vec{\alpha})$ puede ser medida si uno dispone de una fuente puntual de referencia dentro del dominio isoplanático del objeto extenso en estudio (Fig. 5.1). Habitualmente uno no dispone de tal referencia, y lo que se hace es obtener la PSF a partir del mismo objeto extenso. La fase $\phi(\vec{u})$ puede escribirse como la diferencia entre el frente de onda de la imagen de corta exposición en estudio y el frente de onda promedio. Dicho promedio es precisamente la fase del objeto extenso, por lo que la anterior diferencia representa lo que la atmósfera y

telescopio han distorsionado al frente de onda, es decir, corresponde al frente de onda de una fuente puntual.

De igual forma, la amplitud de una fuente puntual puede obtenerse como la diferencia entre el módulo de la amplitud compleja del campo en la pupila del telescopio para una imagen de corta exposición, y el mismo módulo en el promedio de las imágenes de corta exposición del objeto extenso. Es importante recalcar el hecho de que el módulo de la imagen de corta exposición es $\sqrt{I(\vec{\alpha})}$, mientras que ahora nos referimos al valor del módulo de la imagen de corta exposición en la pupila del telescopio: $A'(\vec{u})$.

En primera aproximación, usualmente llamada "aproximación de campo cercano", las fluctuaciones en amplitud del frente de onda son despreciables (no hay centelleo), y la OTF puede ser determinada únicamente con:

$$\tilde{S}(\vec{f}) = \text{Autocor}[e^{i\phi(\vec{f})}]$$

En cuanto al propio objeto extenso, la transformada de Fourier de su intensidad se expresa:

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \text{Autocor}[A'(\vec{u})e^{i(\phi(\vec{u})+\varphi(\vec{u}))}]$$

Donde $A'(\vec{u})$ es la amplitud del frente de onda en el plano pupila del telescopio (medida por el detector de frente de onda). El módulo de $I(\vec{\alpha})$ está ya medido por el detector de intensidad en el plano focal y suele poseer un muestreo mayor que el suministrado por el detector de frente de onda en el plano pupila.

Una vez dispongamos de $\tilde{S}(\vec{f})$ y de $\tilde{I}(\vec{f})$ realizamos la deconvolución para

obtener $\hat{O}(\vec{f})$ y en consecuencia la distribución de intensidades en el objeto: $O(\vec{\alpha})$.

5.2 Tratamiento numérico.

Cuando simulamos el frente de onda asociado a un objeto extenso y lo hacemos atravesar un telescopio en tierra, debemos tener en cuenta que tanto a la pupila del telescopio como a cada subabertura entra la transformada de Fourier de la amplitud compleja del frente de onda del objeto en el cielo. Cada subpupila ve el objeto por completo, aunque puede que trunque esa transformada del objeto por ser la subabertura de dimensión muy reducida, es decir, precisamente porque está ocurriendo una pérdida de resolución. Sin embargo, cada subpupila sí ve un trozo diferente del frente de onda atmosférico que llega a la superficie del telescopio.

Para simular un objeto extenso perturbado atmosféricamente basta considerar que el campo total en la pupila del telescopio es el producto del campo asociado al objeto extenso (tal y como se cita en el párrafo anterior) y el campo asociado a la perturbación atmosférica (Reynolds et al. 1989).

En relación con la simulación de un régimen fotónico de señal en las imágenes en el Hartmann-Shack de un objeto extenso, según B.R. Frieden (1991) es suficiente considerar la expresión $i(x) = o(x) * s(x)$, donde $i(x)$ es la imagen buscada, $o(x)$ es la ley de distribución de fotones asociada al objeto en cuestión, y $s(x)$ es la ley de distribución de fotones asociada a la imagen de una estrella puntual (PSF). Esto podría hacerse en cada subpupila del Hartmann-Shack: convolucionar el objeto con la PSF de cada subpupila.

Pero si consideramos el proceso realizado en la simulación de un Hartmann-Shack tal y como describimos en los párrafos anteriores, se comprueba que tales convoluciones no son ya necesarias, pues dentro de la PSF asociada a cada subpupila viene ya contenida información acerca del objeto en cuestión. Sólo será necesario entonces generar la imagen fotónica asociada a la ley de distribución $s(x)$.

La ventaja principal del Hartmann-Shack es la posibilidad de usarlo con fuentes extensas no resueltas. Sin embargo, para que el comportamiento sea efectivamente análogo al de las referencias puntuales, debemos corregir las fases recuperadas de la deformación constante introducida por el propio objeto extenso y por el telescopio. Conseguiremos mapas de fase atmosférica puros restando en cada instante un promedio de fases restauradas (con sólo 5 segundos de integración es posible estimar tal deformación constante).

5.3 Aplicación a objetos simulados.

Se han diseñado los objetos tratando de contener situaciones típicas y, a la vez, en el límite de la exigencia a las condiciones de observación (telescopio y magnitud de la estrella) y al propio programa de simulación. Se han simulado 500 mapas de fase atmosférica que, suponiendo un tiempo de estabilidad de la atmósfera terrestre del orden de 20ms., equivalen a 10 segundos totales de observación. El resto de parámetros que intervienen son: telescopio de 4.2 metros de diámetro, longitud de onda en el visible $\lambda = 0.5\mu\text{m}$. y un tamaño de *seeing* de 0.5 segundos de arco ($r_o = 20$ cm.). Se ha muestreado con un tamaño de subpupila de 16 píxeles de computación (en consecuencia: 348

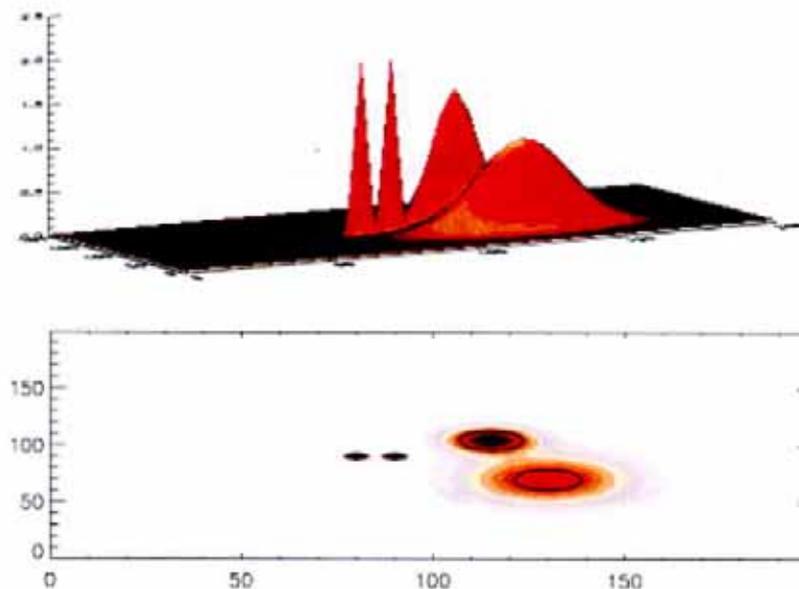


Figura 5.2: Primero de los objetos simulados. El eje vertical indica intensidad en unidades arbitrarias. Binaria compuesta de puntuales de anchura un píxel (0.0599 segundos de arco) y dos gaussianas de sigmas 1.5 y 3 píxeles (0.0449 y 0.0898 segundos de arco respectivamente), separadas entre sí 0.2281 segs. de arco. La separación entre la binaria y la gaussiana de mayor sigma es de 0.2949 segundos de arco. La imagen corresponde a una ampliación del objeto para que se pueda distinguir mejor los detalles, por lo que la numeración en los ejes horizontales corresponde a una interpolación del número de píxeles originales.

subpupilas validadas). Con estas condiciones de partida, el límite de difracción del telescopio es de 0.030 segundos de arco. Los objetos simulados comprenden todas sus componentes en la región limitada por *seeing*, luego la estructura no se advierte a no ser que efectivamente consigamos resolver hasta el límite de difracción del telescopio.

El primer objeto (figura 5.2) contiene una binaria de componentes puntuales (con señal de valor 2 unidades dispuesta en tan sólo la anchura de un

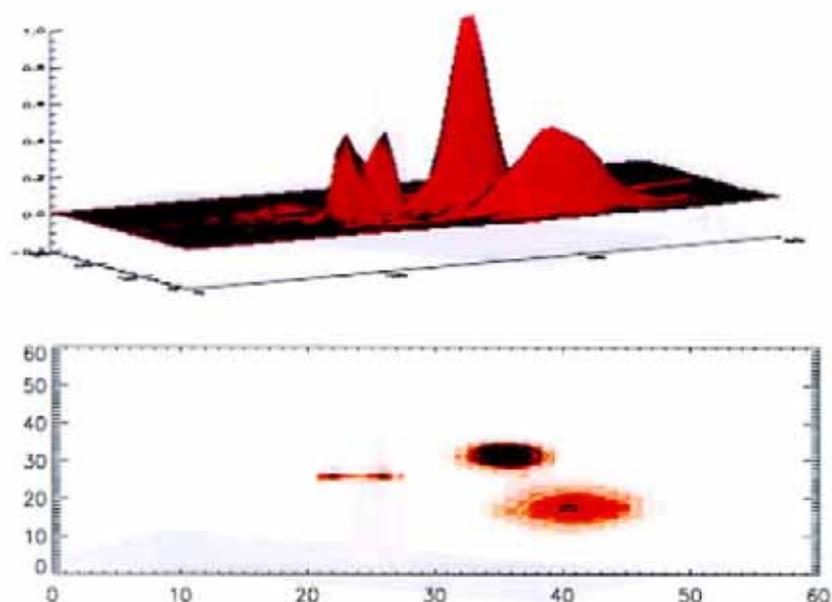


Figura 5.3: Recuperación del primero de los objetos simulados. La imagen corresponde a una ampliación del objeto para que se pueda distinguir mejor los detalles. El significado de los ejes es el mismo que en la figura anterior.

píxel), y otros dos objetos simulados como gaussianas de sigmas respectivas 1.5 y 3 píxeles (la primera de éstas con un máximo de intensidad de 1.5 unidades y la otra de 1 unidad). La calidad de la recuperación, desde un punto de vista fotométrico, se fijará a través de la conservación de la proporción entre los máximos de intensidad de las distintas componentes.

La binaria con componentes puntuales de igual intensidad y con un único píxel de separación corresponde a casi la máxima exigencia en resolución del telescopio: significará llegar a resolver distancias del orden de dos veces el límite de resolución del mismo, pues hemos ajustado su límite de difracción a 1 píxel en el cielo (2 píxeles en la imagen).

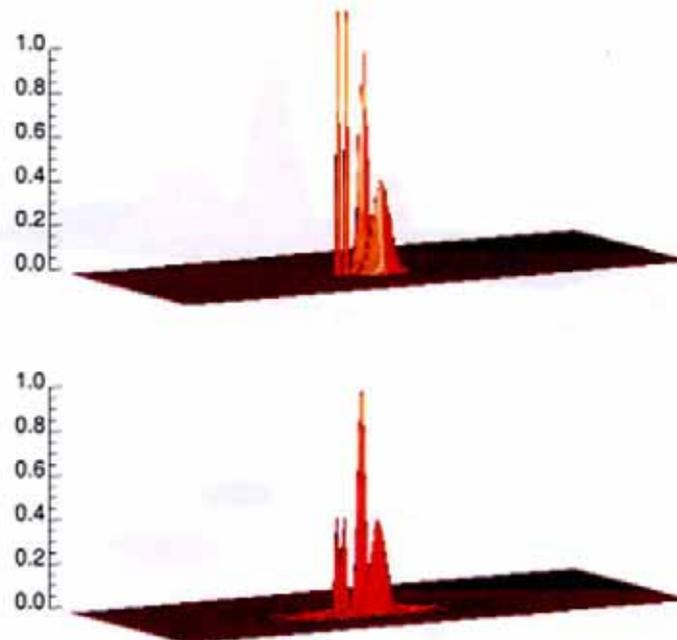


Figura 5.4: Comparación fotométrica entre el primer objeto original y su recuperación. Las imágenes han sido previamente normalizadas al total de su energía y, con posterioridad, nuevamente renormalizadas al máximo de la gaussiana más intensa para comparar escalas y proporciones. El único eje de interés es el vertical, que indica intensidad normalizada.

En la figura 5.3 se muestra la capacidad de restauración de toda la estructura de la fuente en régimen de flujo. Aparecen problemas en la fotometría final de la binaria de separación mínima, pues queda por debajo de la gaussiana de mayor intensidad, cuando originalmente estaba por encima. Aunque se ha repetido el proceso de recuperación para separaciones de las componentes puntuales de varios píxeles, la fotometría sigue sin recuperarse bien. Sin embargo, la restauración de las gaussianas (más anchas) es buena y mantiene la proporción de señal entre los máximos. Para demostrarlo hemos normalizado a la energía propia en cada una de las imágenes, y hallado el cociente entre los máximos de las dos gaussianas, resultando un valor 2.25 en el objeto original y de 2.41 en el recuperado.

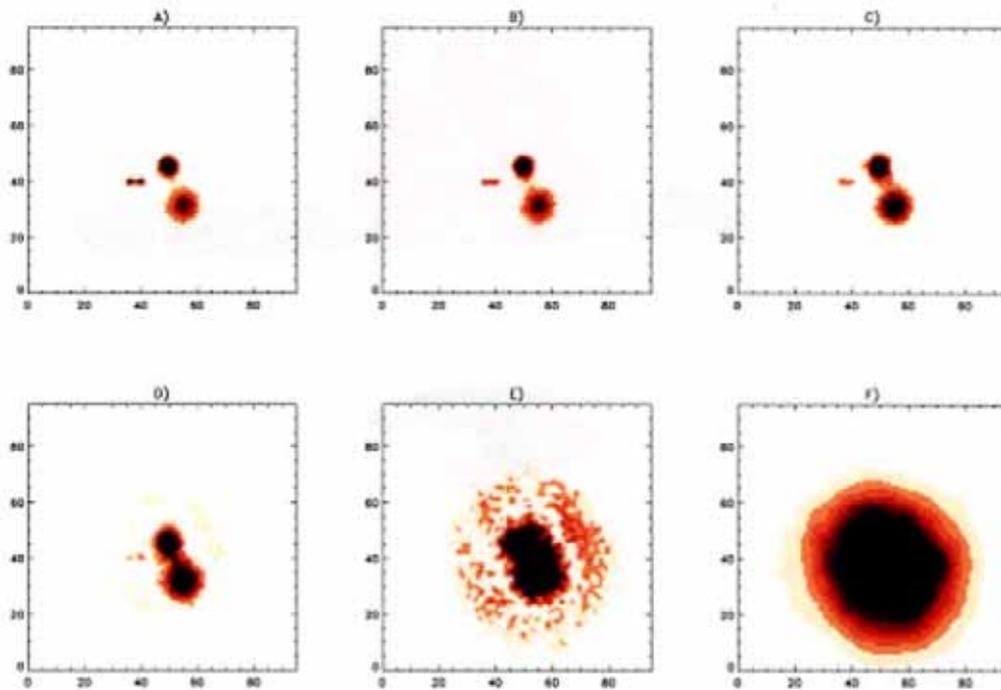


Figura 5.5: Comparación de las deconvoluciones en A) régimen de flujo, B) 50000, C) 10000, D) 5000 y E) 1000 fotones/imagen. Finalmente dibujamos F) la imagen integrada durante 10 segundos de observación cuando no se aplica ninguna técnica de Alta Resolución Espacial. Los ejes indican número de píxeles teóricos.

La figura (5.4) muestra cómo efectivamente las gaussianas se recuperan en la misma proporción, mientras que la señal original de la binaria de puntuales se pierde en gran medida. En la figura se divide también por el máximo de la gaussiana más intensa para que las escalas sean comparables en ambos gráficos y a simple vista se aprecie la proporción fotométrica entre gaussianas.

Trabajando ya en régimen de fotones, hemos escogido un tamaño de subpupila algo mayor, del orden de 20 píxeles de computación (casi exactamente del orden del diámetro de *seeing*), lo que equivale a 197 subpupilas de muestreo en el espejo del telescopio. En la figura 5.5 aparece la deconvolución realizada

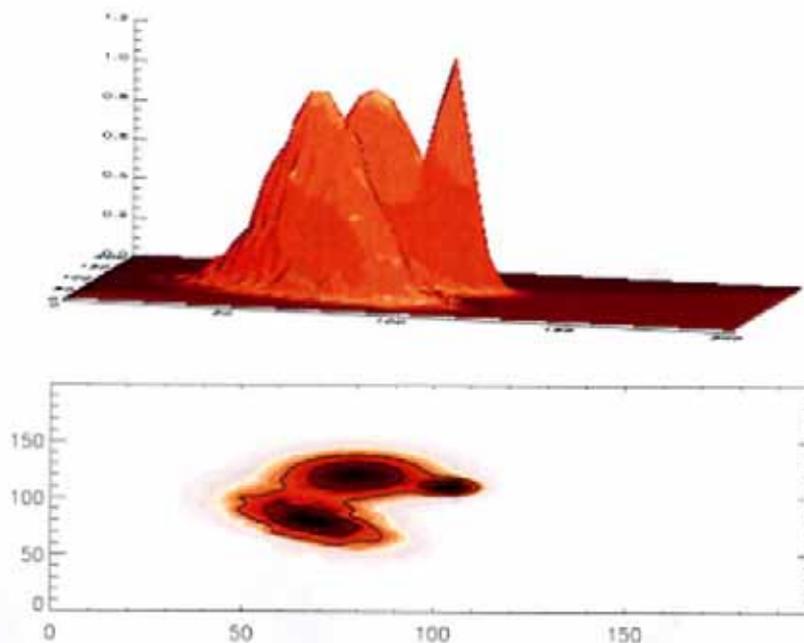


Figura 5.6: Amplitud en el cielo del segundo de los objetos simulados. Gaussianas simétricas de $\sigma = 1$ y 3 píxeles de computación. Gaussiana asimétrica de sigmas: $\sigma_x = 2$. y $\sigma_y = 4$. La imagen corresponde a una ampliación del objeto para que se pueda distinguir mejor los detalles, por lo que la numeración en los ejes horizontales corresponde a una interpolación del número de píxeles originales. El eje vertical indica intensidad en unidades arbitrarias.

para diversos niveles de flujo de fotones en el sensor Hartmann-Shack: 50.000, 10.000, 5.000 y 1.000, comparadas con la deconvolución en régimen de flujo. Puede apreciarse que, para 1000 fotones por imagen, la capacidad de recuperar estructura es muy limitada, esencialmente porque no hay suficientes fotones en las PSF de cada una de las 197 microlentillas (una razón aproximada de 5 fotones por subabertura). También se muestra la imagen integrada del objeto para 10 segundos de exposición.

El segundo objeto (Figura 5.6) corresponde a 2 gaussianas de diferente sigma: 3. y 1. píxeles de computación (0.089 y 0.029 segundos de arco),

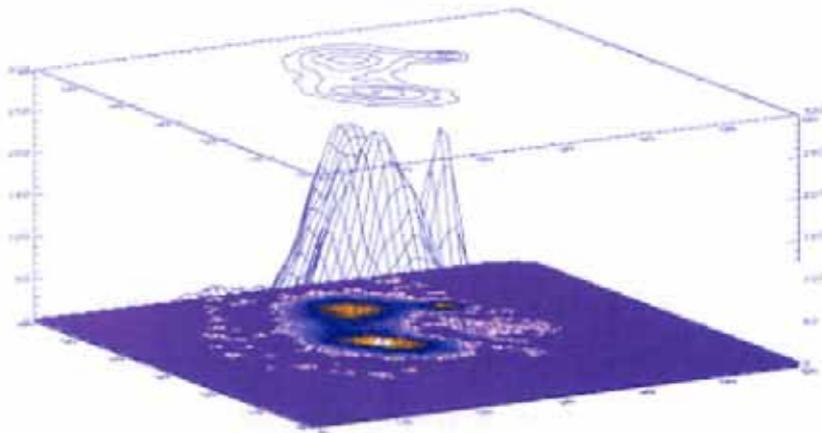


Figura 5.7: Restauración del segundo de los objetos artificiales diseñados, para el caso de régimen de señal de 10000 fotones por imagen de fase de frente de onda. La elipticidad se recupera sin ningún tipo de problema. Los ejes están en unidades arbitrarias.

con intensidades respectivas de 1 y 1.4 unidades, separadas 0.161 segundos de arco. A una distancia de 0.276 segundos de arco, les acompaña como tercera componente un objeto elíptico, de intensidad en el máximo 1 unidad, simulado por una gaussiana asimétrica con $\sigma_x = 2$. y $\sigma_y = 4$. píxeles, rotada -50° respecto al semieje positivo de las abscisas.

La deconvolución en régimen de 10000 fotones por imagen y condiciones completamente iguales a las del primer objeto (197 subpupilas validadas) es mostrada en la figura 5.7. La intensidad relativa de las tres componentes es ahora mejor recuperada, lo que concuerda con nuestra previsión de que si el objeto no es puntual la fotometría es restaurada más fiablemente. El principal interés estriba en comprobar si la elipticidad de la componente se mantiene en la deconvolución del objeto. Esto es así, como fácilmente puede comprobarse, correspondiendo la elipticidad a una razón $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 2$. entre las elongaciones mayor y menor de la elipse.

5.4 Resultados en objetos reales.

Fruto de la colaboración del Grupo de Alta Resolución Espacial del I.A.C. y de la *Office National D'Etudes Et De Recherches Aeroespaciales (ONERA)* francesa, fueron las observaciones realizadas en el Telescopio William Herschel de La Palma (4.2 metros de diámetro) en Noviembre de 1990. En ellas se perseguía demostrar la validez de la técnica de deconvolución con detección de la fase del frente de onda en propósitos astronómicos y con grandes telescopios.

Las observaciones se llevaron a cabo en la plataforma GHRIL (*Ground based High Resolution Imaging Laboratory*). Se dispusieron los dos canales de toma de datos necesarios en esta técnica: el sensor de imágenes *speckle* y el sensor Hartmann-Shack de fases de frente de onda atmosférico. Primeramente un compensador de refracción cancela la dispersión atmosférica. A continuación un divisor de haz bifurca el haz de luz. En el canal de imagen *speckle* se ajusta la magnificación para lograr muestrear dos veces la frecuencia de corte, con un filtro de banda estrecha (10 nm.) centrado en la línea $H\alpha$ (656.3 nm.). En el otro canal se dispone el sensor Hartmann-Shack, con una cámara en el plano focal del *array* de microlentillas. El diámetro del disco queda muestreado con 29 subpupilas, dando 560 puntos de muestreo en la pupila. Ambas cámaras trabajan a un tiempo de exposición de 5ms. por imagen de corta exposición y deben operar sincronizadamente para que se correspondan la PSF y la imagen *speckle*. Es imprescindible el concurso de una fuente de referencia puntual para el sistema de calibrado del sensor que se utiliza. Respecto a las posiciones que ésta produce en cada lentilla son estimadas las pendientes del frente de onda turbulento.

El problema principal encontrado en la reducción de estos datos es la falta

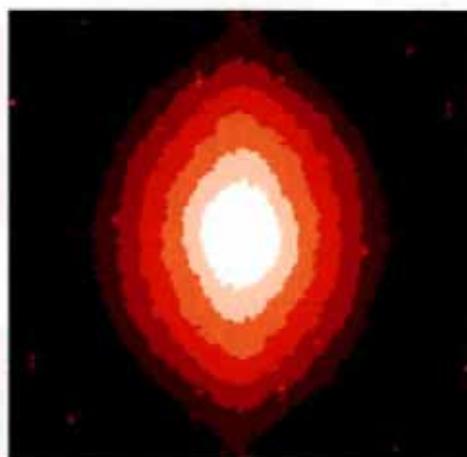


Figura 5.8: MTF asociada a la cámara CCD colocada en el canal *speckle*. La asimetría o achatamiento en la dirección de las abscisas significa pérdida de información en altas frecuencias horizontales.

de simetría que presenta la MTF de la cámara *speckle* utilizada (Fig. 5.8). El achatamiento que sufre la MTF de la cámara en la dirección horizontal es debido al filtrado electrónico unidimensional de la señal, habiéndose utilizado un paso de banda demasiado estricto en la transformación de la señal CCD a vídeo. El filtro electrónico, al ser la lectura línea a línea, avanza más rápidamente en sentido horizontal que en vertical. La consecuencia final es que se ha perdido información importante en frecuencias horizontales. Por ello, fuentes como ϵ Hyades (binaria de separación 0.238 segundos de arco) cuya disposición en el CCD era estrictamente horizontal, no han podido ser deconvolucionadas con éxito. Sin embargo, otros objetos con aún menor separación sí han sido restaurados gracias a su disposición vertical en el CCD.

Asimismo, el achatamiento horizontal de la MTF de la cámara en el canal *speckle* obliga a considerar una asimetría análoga en el canal Hartmann-Shack, es decir en la OTF, si queremos que ambos canales se correspondan lo máximo posible. Significa ello que es necesario achatar horizontalmente la OTF en cada

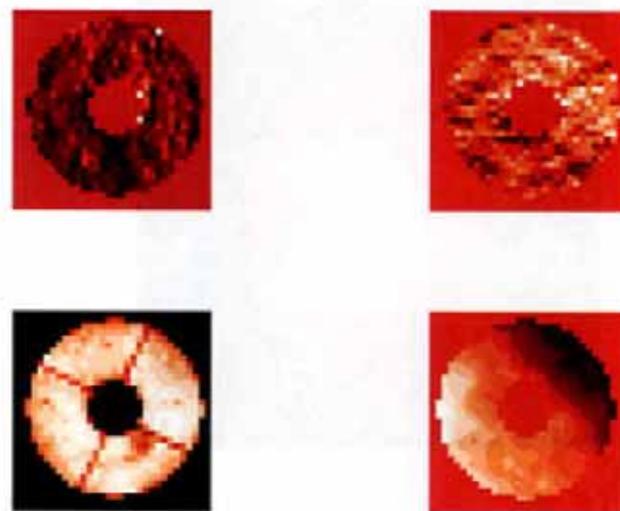


Figura 5.9: Arriba: datos observados de pendientes de la fase del frente de onda promedio en cada subpupila del sensor Hartmann-Shack en las direcciones X e Y. Abajo izquierda: promedio de la iluminación de la pupila de entrada del telescopio. Abajo derecha: fase restaurada del frente de onda atmosférico ya corregida de la deformación constante en el tiempo.

imagen con ayuda de la MTF de la cámara.

Otra cuestión que ahora conviene plantearnos es cómo afectaría al cálculo de los centroides un filtrado electrónico semejante en el canal Hartmann-Shack. Hemos estudiado tal comportamiento con ayuda del simulador Hartmann-Shack y se comprueba que el error cometido en los centroides es despreciable, siempre y cuando el achatamiento sea igual al que muestran las imágenes *speckle* .

- Una de las fuentes con resultado excelente fue Capella (α Aurigae), binaria de separación 0.055 segundos de arco, con componentes de aproximadamente igual magnitud visual $V=0.08$. Las condiciones de *seeing* en la longitud de onda de observación fueron aproximadamente $\frac{D}{r_0} = 20$, lo que significa un

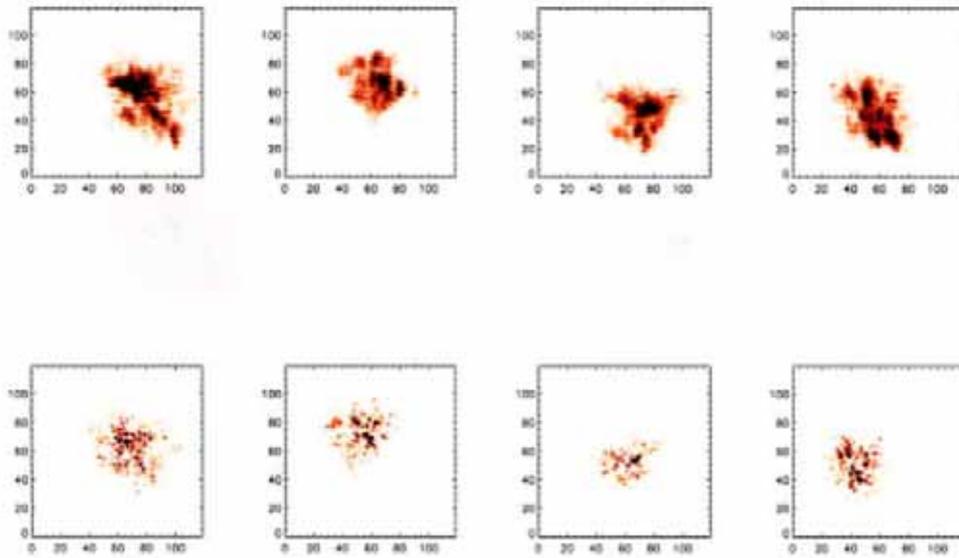


Figura 5.10: Fila superior: imágenes *speckle* . Fila inferior: PSF's asociadas en cada instante. A simple vista se comprueba la similitud de cada par vertical. Los ejes indican píxeles teóricos.

valor de $r_o = 21$ cm. en $\lambda = 656$ nm.

La restauración de las fases del frente de onda se hace a partir de los datos de pendientes en las direcciones horizontal y vertical (Figura 5.9). Esta información se reparte por la pupila de entrada del telescopio: máscara anular con araña de sujeción del espejo secundario. Puede apreciarse, en un promedio de la iluminación en la pupila del telescopio (cuadrante inferior derecho de la pupila, fig 5.9), que el espejo del W.H.T. presenta una zona oscura, es decir, una región del espejo que manifiesta menor reflexión lumínica. Ello se detecta en todas las medidas y objetos tomados esa noche de observación, por lo que parece estar asociado directamente a la fisonomía del propio espejo.

Puede verse que, en cada instante, a partir de las medidas del sensor de frente de onda somos capaces de determinar una PSF muy similar a la imagen

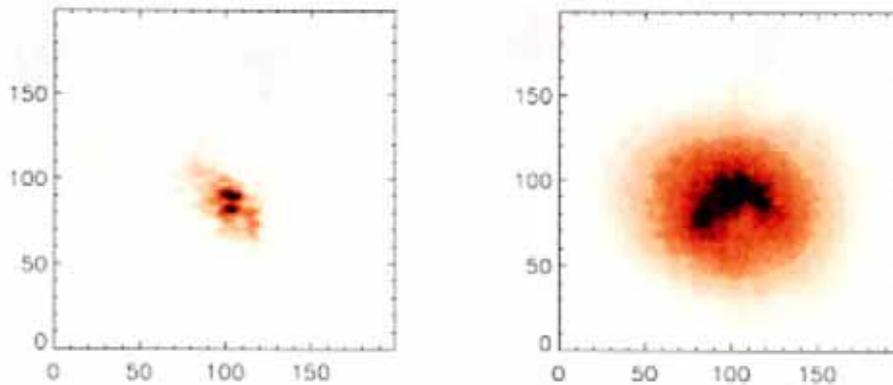


Figura 5.11: Restauración de la estrella binaria Capella. Imagen integrada de Capella durante 1s.

speckle asociada (Figura 5.10).

En la figura 5.11 mostramos la imagen integrada durante el intervalo de observación (a la derecha). A la izquierda presentamos la deconvolución obtenida con 200 imágenes (Figura 5.11). Las dos componentes son resueltas, y la medida de la distancia entre ellas a partir de la escala en la imagen *speckle* coincide con la separación ya conocida de 0.055 segundos de arco, siendo el límite de resolución del telescopio en esta longitud de onda de observación de 0.032 segundos de arco.

Capítulo 6

Aplicación al estudio óptico de telescopios segmentados.

En la actualidad, gran parte de los esfuerzos de la comunidad astrofísica se dirigen al diseño y construcción de telescopios de gran diámetro, claves para llegar a un conocimiento más profundo del Universo (a través de la observación de objetos más lejanos o más débiles, alcanzando cada vez una mayor resolución espacial). El contenido de este capítulo consiste en la aplicación de nuestras simulaciones al estudio óptico del alineamiento de los elementos del espejo principal de telescopios segmentados.

Cualquier superficie colectora segmentada, ya sea formada por espejos o por lentes, requiere una posición relativa entre los segmentos muy precisa para conseguir una buena calidad de imagen. El alineamiento de los segmentos es, de hecho, uno de los factores fundamentales que afectan a la forma de la PSF de los telescopios de este tipo: el ajuste de cada segmento debe ser realizado tanto

en inclinación (*tilt*) como en desplazamiento longitudinal (pistón) respecto al resto de segmentos. Esto se puede hacer mediante diversas técnicas, pero los sensores Hartmann-Shack y de Curvatura parecen los más eficientes.

6.1 Estudio de las aberraciones ópticas con el sensor Hartmann-Shack.

El sistema computacional desarrollado para la simulación del sensor Hartmann-Shack permite estudiar la influencia de la segmentación del espejo de un telescopio en la reconstrucción del frente de onda y en la corrección del mismo.

Con tal objetivo partiremos ahora de una representación de espejo segmentado hexagonalmente, permitiendo en cada segmento cualquier proporción y tipo de aberración óptica, lo que se consigue simplemente haciendo uso de los polinomios de Zernike en el interior de cada espejo. Se realizarán los cálculos con valores típicos para un telescopio tipo Keck (Nelson, J.E. 1988): $D=10$ metros y 36 segmentos.

Para el estudio en cuestión nos hemos limitado a variar el *tilt* y pistón. Hemos tenido en cuenta figuras de error basadas en estimaciones necesarias para la construcción de un sistema de control activo de los segmentos; las principales aberraciones que afectan a estas figuras de error son: astigmatismo de 3^{er} orden (15nm. *rms*), curvatura de campo (9nm. *rms*) y coma de 3^{er} orden (2.5nm. *rms*). (Ver figura 6.1).

Las máscaras Hartmann-Shack son aplicadas a la pupila simulada y la imagen correspondiente es obtenida mediante Transformada de Fourier. Por

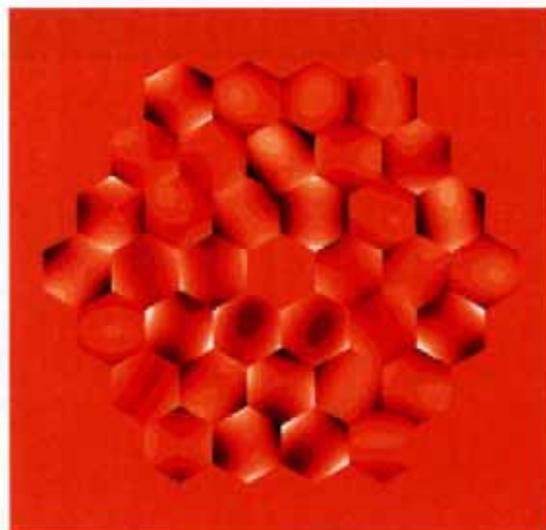


Figura 6.1: Simulación del espejo segmentado hexagonal. Hemos introducido aleatoriamente como principales errores el astigmatismo de 3^{er} orden (15nm. de *rms*), desenfoque (9nm. de *rms*) y coma puro (2.5nm. de *rms*). En esta representación no se incluye ninguna aportación de pistón ni de *tilt* .

último la reconstrucción del frente de onda es llevada a cabo, a partir de las imágenes Hartmann-Shack asociadas, y son calculados los errores residuales.

En la Figura 6.2 el error *rms* de la reconstrucción del frente de onda es examinado como función del número de subaberturas Hartmann-Shack empleadas. El error *rms* de *tilt* es de 20 nm., y el error *rms* de pistón es de 25nm (así designamos los valores de la dispersión de los movimientos en *tilt* y pistón generados aleatoriamente). Procedemos calculando el error residual σ_{Δ} entre un frente de onda restaurado y el original. La curva en trazo de color azul es para un espejo primario con 60 segmentos, mientras que las de color rojo corresponden a 36 segmentos. La curva de trazo continuo corresponde además a una restauración de la fase en la que se realiza una interpolación (mediante transformada de Fourier) desde las dimensiones del *array* de microlentillas a las de la matriz original de fase que el Hartmann-Shack muestrea. Sin embargo,

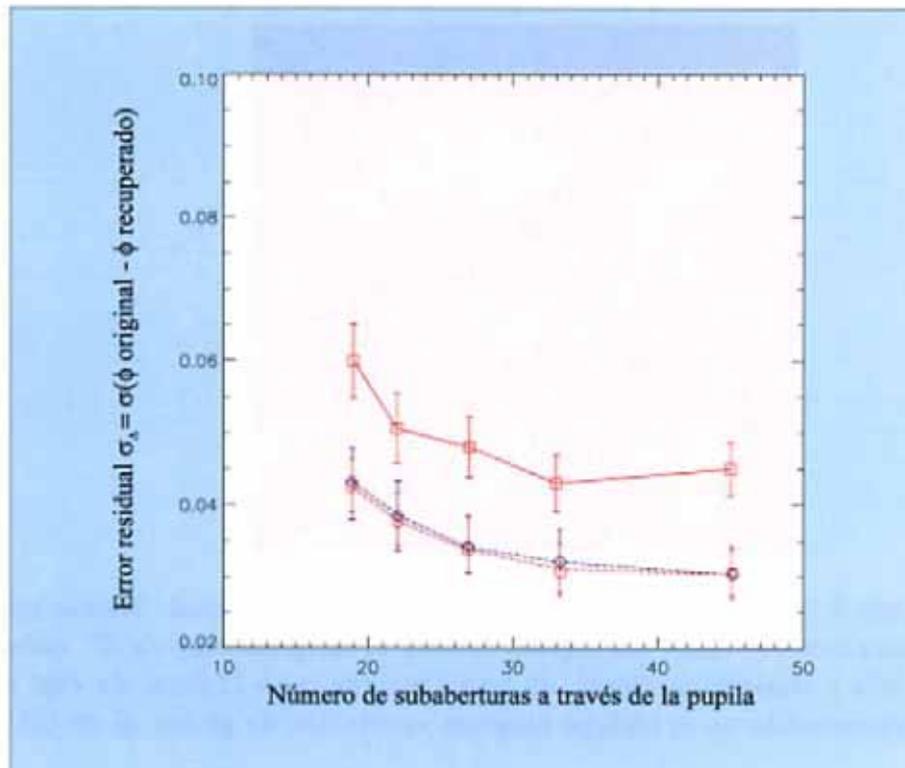


Figura 6.2: Error *rms* en la reconstrucción de la fase frente al número de micro-lentillas del Hartmann-Shack utilizadas. Disminuye al aumentar el muestreo. Los trazos continuo y discontinuo corresponden a recuperaciones con y sin interpolación respectivamente. El color rojo es para el caso de un espejo primario de 60 segmentos y el azul para 36.

con las curvas de trazo discontinuo, se aprecia que el error σ_{Δ} cometido es muy inferior: en este caso la comparación se realiza entre el frente de onda restaurado exclusivamente en las subpupilas del Hartmann-Shack y un muestreo en el centro de cada subabertura de la fase original (es decir, sin ninguna interpolación). Esta segunda prueba es más correcta porque el muestreo en píxeles centrales de cada subabertura compone una fase de σ muy parecida a la original, mientras que el anterior test no valora únicamente la capacidad de recuperación del frente de onda con un Sensor Hartmann-Shack sino que también recoge errores introducidos por la propia interpolación. Cuando hay

más de 30 subaberturas a través de la pupila, el error residual está alrededor de las 0.03-0.04 micras, valor que es menor que el error de ajuste en el filtro fotométrico J, excepto con *seeing* excepcional (<0.3 segundos de arco en el visible).

Errores de *pistón* entre segmentos.

Ahora el error *rms* de *tilt* es fijado a 20 nm., y variamos los errores en el pistón de los segmentos. La figura 6.3 muestra en rojo el error *rms* residual del frente de onda (σ_{Δ}) y la figura 6.4 su correspondiente índice de recuperación relativo (σ_{Δ}/σ_o). Se observa que el frente de onda original es mejorado por el Hartmann-Shack aproximadamente entre un 20 y un 30%, cualquiera que sea el valor de pistón inicial. Hablando en términos absolutos, recuperamos por debajo de 30 nm. residuales con pistones originales de hasta 40 nm.

Errores de *tilt* entre segmentos.

El error *rms* de pistón se fija ahora a 25 nm. y son variados los errores de *tilt* entre segmentos. La figura 6.3 muestra en azul el error *rms* residual del frente de onda (σ_{Δ}) y la figura 6.4 su correspondiente índice de recuperación relativo (σ_{Δ}/σ_o). En este caso el Hartmann-Shack resulta útil para la medida de las aberraciones presentes hasta un *tilt* de 100nm; por encima de este valor el índice σ_{Δ}/σ_o se vuelve superior a la unidad.

Aunque el Hartmann-Shack es muy sensible para detectar la pendiente local del frente de onda, no lo es al pistón local, excepto si las microlentillas son dispuestas justo en los extremos o bordes de los segmentos. Sin embargo, en un caso real, esta tarea es bastante complicada, especialmente cuando los frentes de onda están afectados por otras aberraciones del telescopio o por la

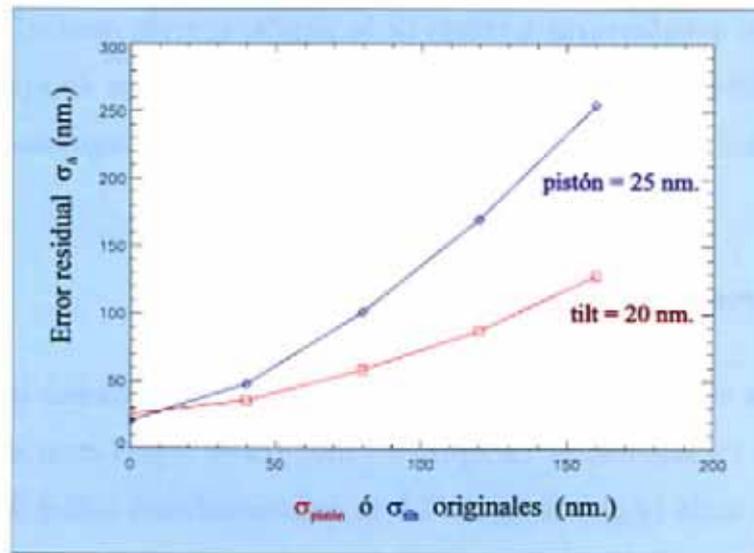


Figura 6.3: Errores *rms* residual del frente de onda σ_{Δ} frente al error *rms* original de pistón (en rojo) y de *tilt* (en azul). Los puntos representados corresponden a valores de pistón de 0, 40, 80, 120 y 160 nms. un espejo primario de 36 segmentos y a una $\lambda=1.25 \mu m$.

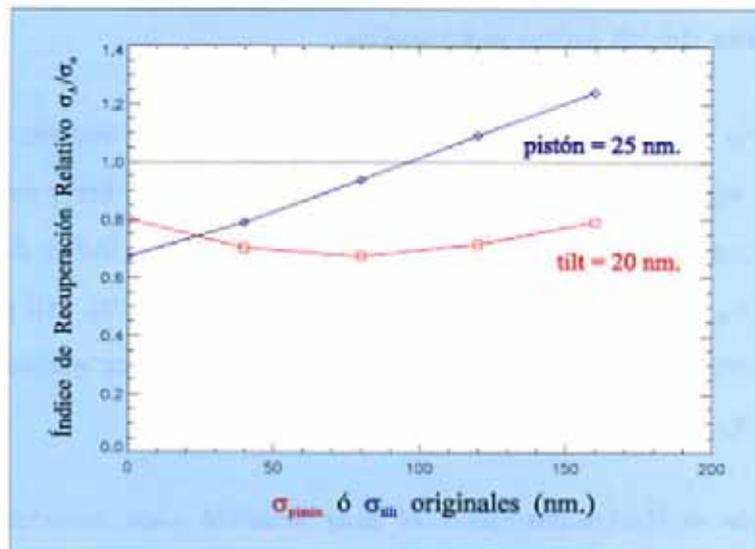


Figura 6.4: Índice de recuperación relativo σ_{Δ}/σ_o frente al error *rms* original del frente de onda cuando variamos pistón (rojo) y *tilt* (azul). Espejo primario de 36 segmentos y longitud de onda $\lambda=1.25 \mu m$. Los puntos representados corresponden a valores de pistón de 0, 40, 80, 120 y 160 nms.

turbulencia atmosférica. Por otro lado, sería conveniente tener la posibilidad de hacer pruebas de alineamiento en cualquier instante durante el período de observación de estrellas naturales. En este sentido, en la siguiente sección mostraremos que la utilización de un sensor de Curvatura es un método sencillo de aplicar, y novedoso, capaz de estimar el pistón local en cualquier momento de la observación.

6.2 Aplicación del sensor de Curvatura a un telescopio tipo Keck.

En este apartado se muestra, con simulaciones numéricas, que el sensor de Curvatura es lo bastante sensible para detectar errores de pistón entre los segmentos del espejo.

6.2.1 Recuperación del pistón en presencia de turbulencia atmosférica.

El procedimiento para las simulaciones ha sido realizado en tres etapas:

a) Simulación del espejo segmentado con errores de pistón entre los segmentos. Para ello generamos los pistones siguiendo una distribución gaussiana de media cero.

b) Simulación del sensor de Curvatura usando la Transformada de Fourier para transportar el campo electromagnético de un punto a otro del espacio.

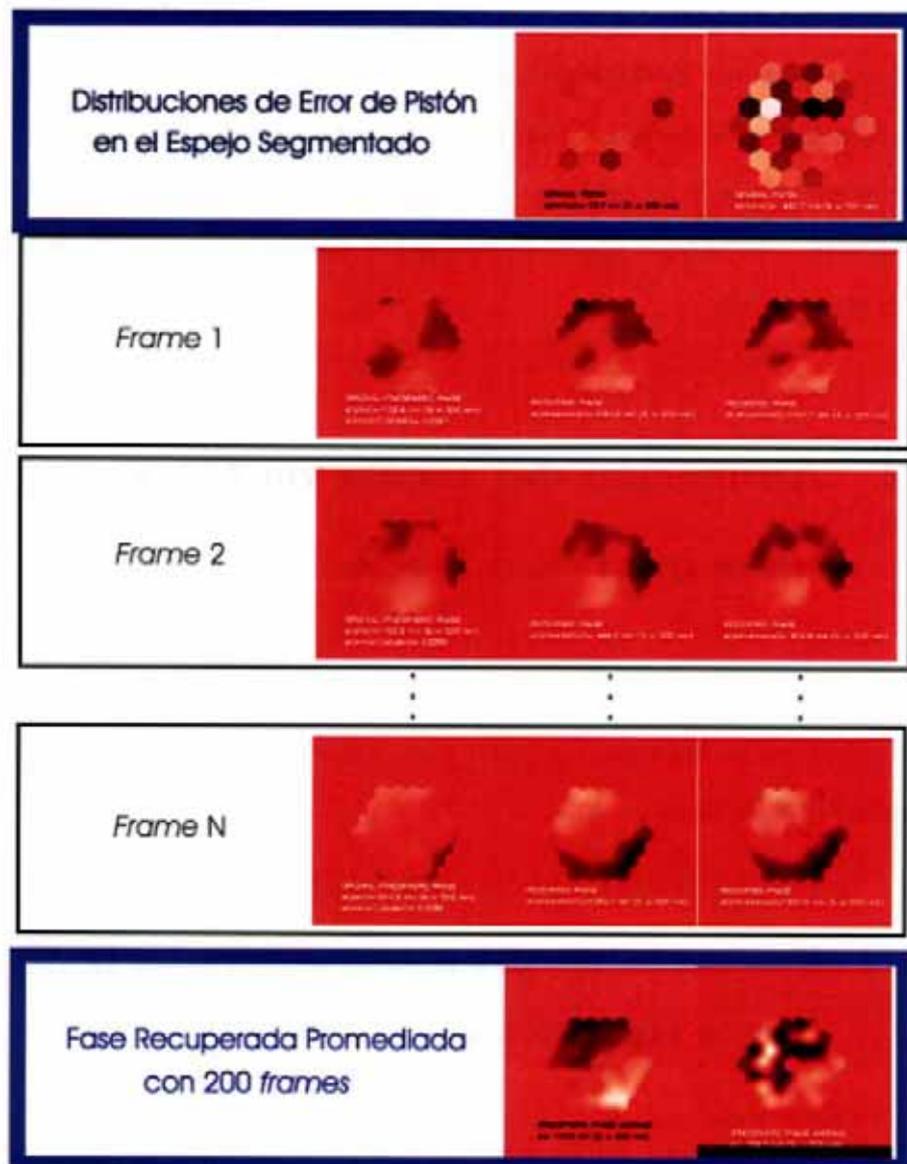


Figura 6.5: Proceso de las simulaciones. En la primera fila se muestran dos distribuciones diferentes de errores de pistón ($\sigma = 44\text{nm.}$ and 481nm.). Los desplazamientos positivos/negativos de pistón se representan en colores claros/oscuros. Las siguientes filas son ejemplos de *frames* independientes: la primera columna corresponde a la representación de la fase atmosférica, y la segunda y tercera a las fases restauradas luego de su paso por el sensor de Curvatura. La última fila es el promedio de las fases recuperadas para cada distribución de pistón (primera fila).

La cantidad de desenfoque fija la distancia entre el plano focal y los planos donde las intensidades son medidas (Ver sección 4.2).

c) Restauración de la fase del frente de onda desarrollándola en exponenciales complejas (permite utilizar transformada de Fourier) y un algoritmo tipo Gershberg para evitar efectos de borde (ver sección 4.3).

Las simulaciones han sido realizadas para un telescopio tipo Keck ($D=10$ m. y 36 segmentos), para una longitud de onda del visible ($\lambda=500$ nm.), y un diámetro de Fried típico ($r_0=10$ cm.).

La Figura 6.5 contiene un esquema del proceso completo. Empezamos con dos casos extremos de distribuciones de pistón: $\sigma = 44$ nm. and 481nm. A continuación generamos frentes de onda afectados por turbulencia atmosférica y los sumamos al espejo segmentado con errores de pistón. Aplicamos entonces el segundo y tercer paso de la simulación para conseguir las fases restauradas. El promedio de éstas (200 *frames*) demuestra que el sensor de Curvatura es capaz de reproducir la distribución de pistón inicial en el espejo.

En la Figura 6.6 mostramos los resultados comparativos para diversas condiciones iniciales de errores de pistón. En todos los casos se ha usado los mismos 200 frentes de onda turbulentos. Para cada par horizontal de imágenes hemos fijado la escala de colores y su cero, de modo que cada color corresponde al mismo nivel de intensidad.

En estas figuras podemos comprobar que, conforme es menor el *rms* de la distribución inicial de pistón, mayor es la diferencia entre el promedio de fases restauradas y el patrón de errores de pistón. Si consideramos que el tiempo de estabilidad de la atmósfera es del orden de 10ms., el promedio de 200 *frames*

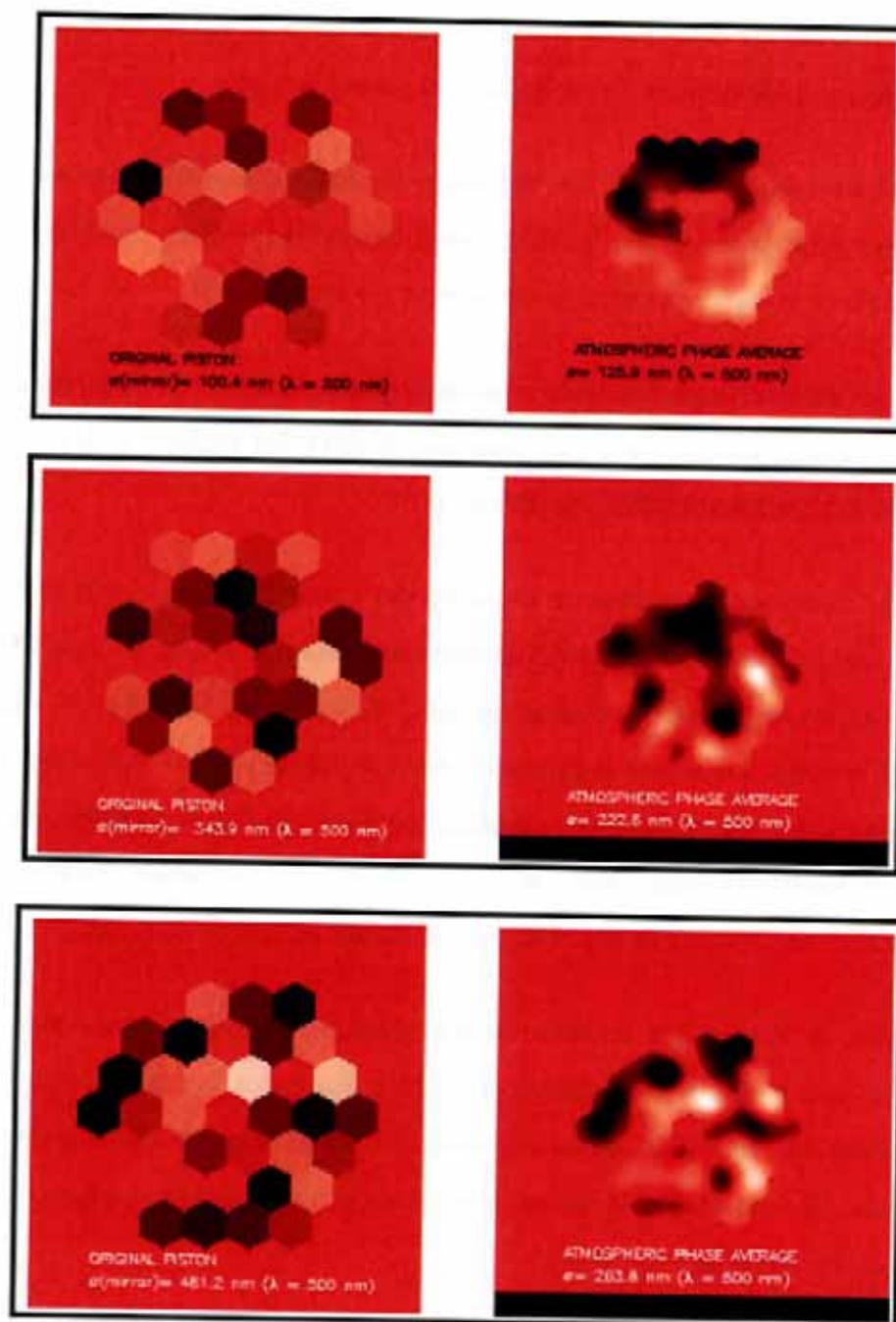


Figura 6.6: Comparación entre diferentes distribuciones originales de pistón en el espejo segmentado y el promedio de 200 *frames* de fase restaurada. La columna de la izquierda representa el pistón original $\sigma = 100, 344$ y 481 nm. La columna de la derecha es el promedio de fases recuperadas para cada caso.

turbulentos sería obtenido en sólo 2 segundos. Es evidente que una integración mayor sería necesaria para errores de pistón más pequeños.

También se han comprobado los resultados utilizando promedios en las imágenes desenfocadas I_1 e I_2 y recuperando de una única vez la fase, en lugar de restaurar las fases cada vez y finalmente promediarlas. Los resultados que se consiguen son los mismos en ambos casos. Podría, en consecuencia, aplicarse una u otra estrategia dependiendo de las condiciones de observación.



6.2.2 Análisis de la recuperación del pistón en diversas situaciones.

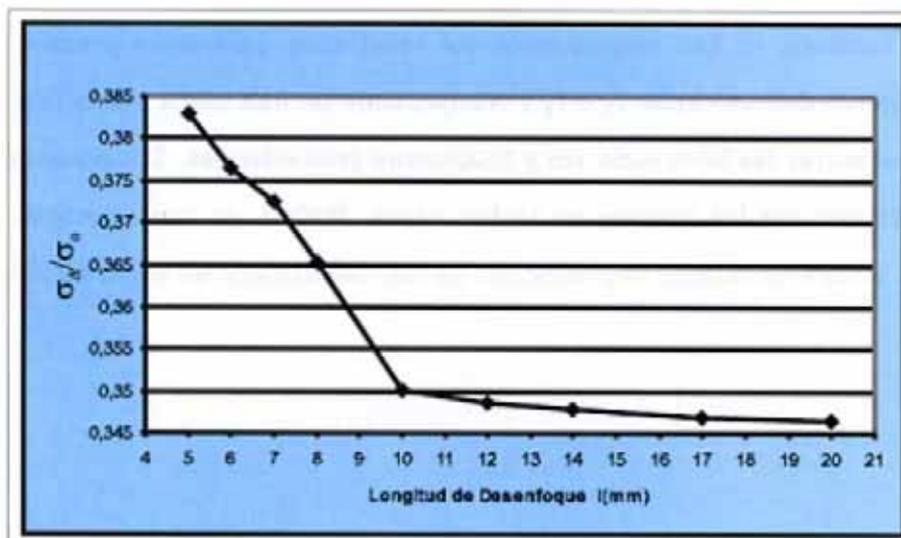


Figura 6.7: Variación del índice de recuperación relativo con la longitud de desenfoque para una distribución inicial de pistón $\sigma_0=1$ nm.

El frente de onda recuperado muestra máximos y mínimos locales sin una separación nítida en los bordes de cada segmento. Para conseguir un único valor de pistón recuperado para cada segmento se utiliza bien el máximo local, si la fase es convexa en ese segmento, bien el mínimo, si la fase es cóncava.

Hemos realizado los análisis del pistón recuperado para diferentes longitudes de desenfoque l , manteniendo invariada la distribución de pistón, y para diferentes distribuciones iniciales de pistón, con la longitud l de desenfoque fija. De nuevo, el índice de recuperación relativo (σ_{Δ}/σ_0) puede ser usado como parámetro de comparación entre la distribuciones inicial y recuperada de pistón.

En la Figura 6.7 representamos la variación del índice de recuperación

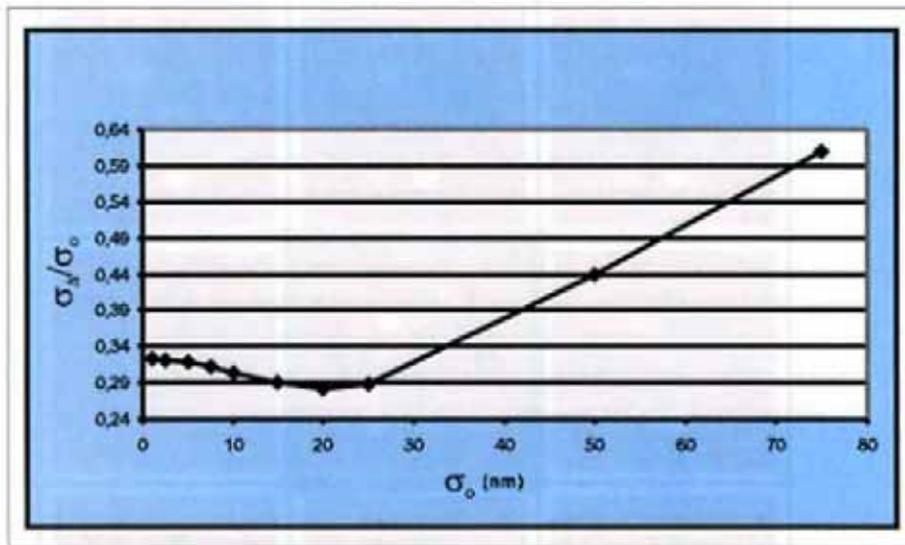


Figura 6.8: Variación del índice de recuperación relativo respecto a σ_σ para una longitud de desenfoque $l=12$ mm.

relativo respecto a la longitud de desenfoque, para una longitud de onda del visible ($\lambda=500$ nm.) y con una distribución inicial de pistón en el espejo segmentado de $\sigma_\sigma=1$ nm. El decrecimiento hasta la longitud de desenfoque $l=10$ mm. concierne a la zona cóustica asociada a $\sigma_\sigma=1$ nm. Además, hemos comprobado que conforme mayor es el σ_σ , mayor es el valor de la longitud l donde la curva cambia abruptamente su pendiente.

En la figura 6.8 dibujamos el índice $\sigma_\Delta/\sigma_\sigma$ frente a σ_σ . El mínimo en $\sigma_\sigma=20$ nm. se movería hacia mayores valores de σ_σ si aumentásemos la longitud de desenfoque l .

El mismo efecto se aprecia también en la figura 6.9, que muestra las imágenes de mapas de pistón recuperados para diversos valores de σ_σ cuando l permanece en 12 mm. Para cada caso, hemos cambiado la escala manteniendo la distribución relativa de σ_σ , de forma tal que nos es posible comparar cada imagen de pistón recuperado con la imagen central de la figura porque

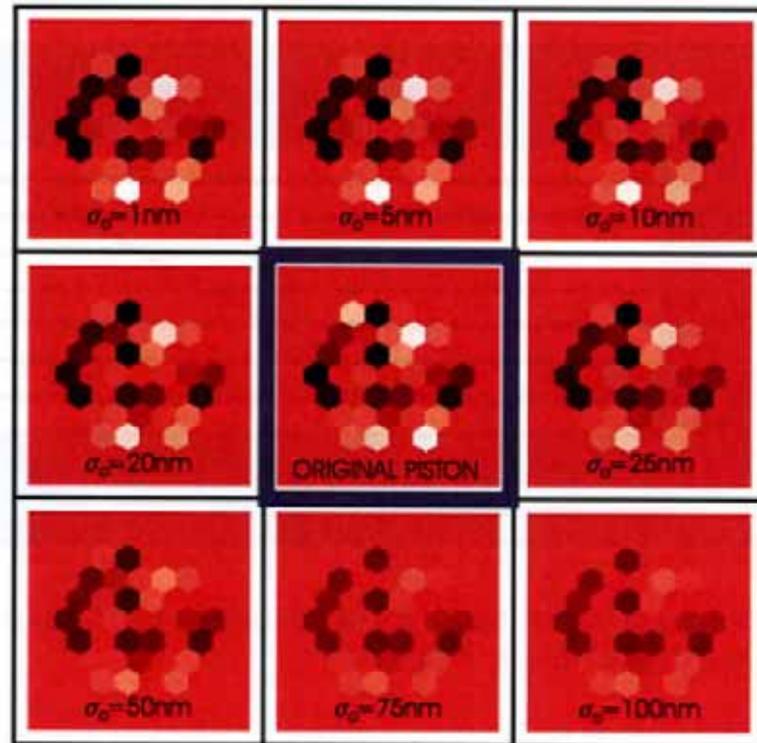


Figura 6.9: Mapas de pistón recuperados para diferentes distribuciones originales, todos a la longitud de desenfoque $l=12$ mm. La escala de colores ha sido normalizada de modo tal que todos son comparables.

la escala de colores ha sido normalizada. Coherentemente con el mínimo de la figura 6.8, se comprueba también que la mejor restauración corresponde a $\sigma_0=20$ nm.

6.3 Propuesta del uso conjunto de ambos detectores.

Hasta el momento el alineamiento de segmentos en un telescopio de espejo segmentado se realiza utilizando un sensor de Hartmann-Shack para medir

tanto el *tilt* como el pistón (Chanan et al, 1988). Es ampliamente conocido que el sensor Hartmann-Shack es muy eficiente para detectar inclinaciones locales del frente de onda, pero es muy inadecuado para detectar pistón local, pues exige la colocación del *array* de microlentillas perfectamente alineado con los bordes de los segmentos, lo que resulta una tarea complicada.

También hemos comprobado que, aunque el sensor de Curvatura no es sensible a la presencia de pistón global del frente de onda es, sin embargo, muy eficiente para detectar pistón local. Este comportamiento se mantiene incluso en presencia de turbulencia atmosférica. Esta característica permitiría realizar las medidas durante el proceso de observación normal en telescopios y, por tanto, ofrece la posibilidad de trabajar en combinación con otros sistemas como los de Óptica Adaptativa, optimizando la calidad óptica global del telescopio.

Proponemos, por tanto, un sistema híbrido de detección del frente de onda compuesto por un sensor Hartmann-Shack y un sensor de Curvatura. Este sistema puede ser muy ventajoso, en particular, para telescopios de gran apertura con espejo principal segmentado, aunque también podría ser de gran utilidad en otros campos, como robótica o medicina.

Como se aprecia en el esquema (Figura 6.10), el sensor híbrido consiste en la medida en paralelo y simultánea del frente de onda con un sensor Hartmann-Shack y con uno de Curvatura. Su funcionamiento concreto está actualmente en estudio, aunque podemos adelantar que un procedimiento iterativo proporcionaría los mejores resultados. Además de su eficacia en el alineamiento de los segmentos como requisito previo a la observación, el sistema combinado podría permitir la modificación de la disposición de los segmentos durante el proceso de medida, lo que supondría un paso dentro de la Óptica Adaptativa.

6. APLICACIÓN AL ESTUDIO ÓPTICO DE TELESCOPIOS SEGMENTADOS.111

La aplicación inmediata se centra pues, principalmente, en el novedoso campo de los telescopios de grandes aberturas de colección, de 10 m. de diámetro o superiores, con espejo principal segmentado, como es el caso del Keck o del futuro GRANTECAN (Gran Telescopio de Canarias).

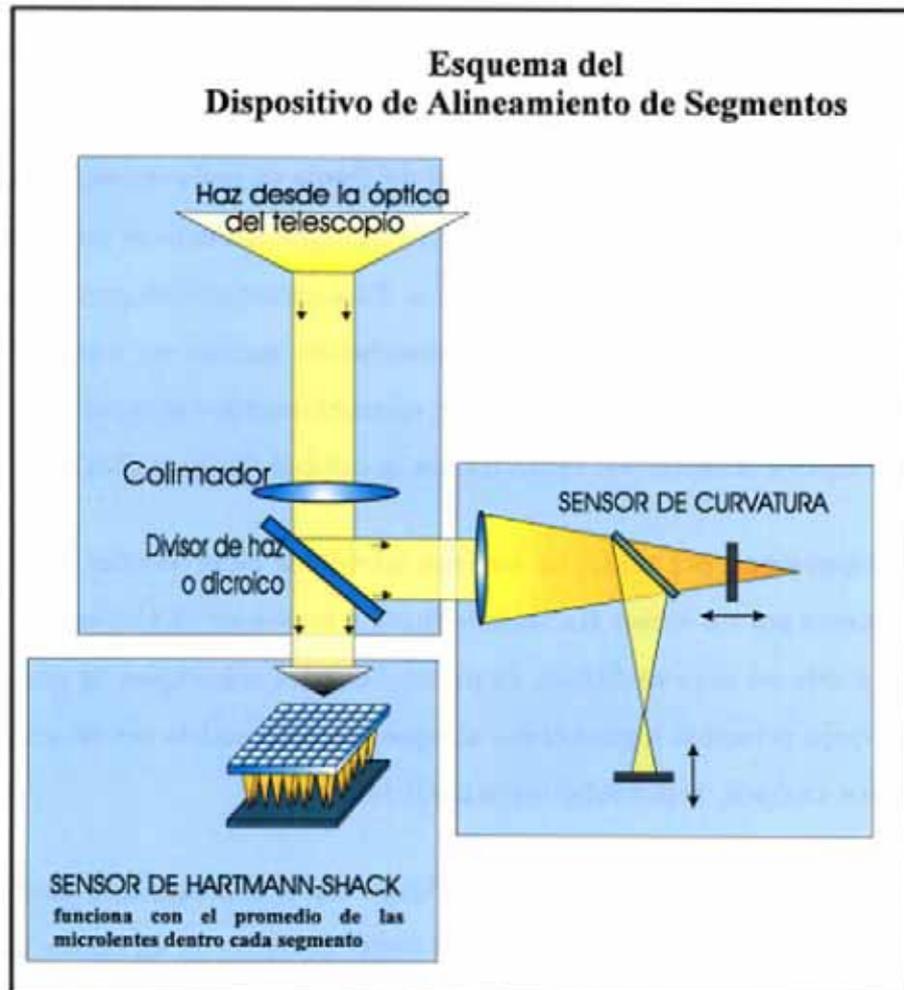


Figura 6.10: Esquema para el uso conjunto de los sensores Hartmann-Shack y de Curvatura en el alineamiento de los segmentos de un telescopio tipo Keck.

Capítulo 7

Conclusiones y objetivos futuros.

El análisis, a través de simulaciones numéricas, de los comportamientos ópticos en observaciones con grandes telescopios es una herramienta muy eficaz para comprobar y estimar la validez de ciertas técnicas modernas de Alta Resolución Espacial. Además, la puesta en práctica de simulaciones numéricas que correspondan con el fenómeno físico en estudio exige un tratamiento exhaustivo de los conceptos teóricos involucrados y ofrece frecuentemente una visión alternativa que revierte en soluciones nuevas y productivas. En nuestro caso, la consecuencia ha sido no sólo ahondar en el funcionamiento y respuesta de algunos sensores de frente de onda, sino también descubrir ciertas aplicaciones para las que éstos pueden ser utilizados en la práctica.

Presentamos a continuación las conclusiones científicas más relevantes obtenidas en este trabajo:

- Se ha desarrollado una variante del algoritmo de recuperación del frente de onda a partir de medidas de gradientes de fase (Roddiier 1990) en la que incorporamos directamente la geometría de un sensor Hartmann-Shack al filtro de restauración y a la iteración tipo Gershberg, con lo que mejoramos la solución propuesta por Freischlad y Koliopoulos (1986).

- Se ha aplicado con éxito algoritmos de recuperación de la fase del frente de onda a partir de datos de curvatura de la misma, en los que se ha llegado a predecir el efecto de la región de ligadura para algunos casos especiales.

- Se ha interpretado geoméricamente y de manera sencilla el comportamiento óptico global involucrado tanto en el sensor de Curvatura como en el de Hartmann-Shack.

- Se ha simulado por completo el proceso de observación astronómico mediante telescopios: comenzando con la disposición y forma del objeto en el cielo, continuando con el paso de la luz a través del medio no turbulento -primero- y de la atmósfera terrestre -después-, y finalizando con las interpretaciones ópticas del telescopio, del detector de imagen y de los sensores de frente de onda.

- Se ha complementado la deconvolución *speckle* clásica con la medida de la fase del frente de onda, obteniéndose resultados excelentes no sólo en simulaciones numéricas sino también en datos reales.

- Se ha aportado un análisis profundo del comportamiento del sensor Hartmann-Shack en la medida del desalineamiento de los segmentos de un telescopio segmentado. Hemos comprobado su insensibilidad al pistón local y su eficacia en la detección del *tilt* y aberraciones de orden superior.

- Se ha aportado un detallado estudio del comportamiento del sensor de Curvatura en la medida del desalineamiento de los segmentos. En él hemos identificado la zona cáustica en función de la longitud l de desenfoque y de la σ_0 inicial del pistón y, además, se ha proporcionado una primera estimación para los márgenes de correcto funcionamiento de esta técnica.

- Se ha demostrado numéricamente que el sensor de curvatura es capaz de medir el desalineamiento en pistón local entre los segmentos de un telescopio segmentado.

- Está en curso la aprobación de la patente científica de un sistema híbrido de detección del frente de onda, compuesto por un Hartmann-Shack y un sensor de Curvatura, cuyo beneficiario es el IAC.

Se ha desarrollado un cuerpo sólido y bien documentado de *software* de simulación de procesos de observación astronómica que, aparte de su eficiencia en el apartado puramente científico, ha sido diseñado y construido en su conjunto con la intención de disponer de una herramienta lo suficientemente general para que pueda ser utilizada por otros investigadores. La documentación de las rutinas, creadas en el lenguaje IDL, incluyen ayuda inicial con esquema y resumen del algoritmo que ejecuta y definición de cada una de las variables que intervienen. Reseñamos a continuación las partes principales:

- Programas de simulación de objetos con forma gaussiana (simétricos o asimétricos) con 1, 2 ó más componentes.

- Programa de simulación de frentes de onda atmosféricos.

- Programas de simulación de aberraciones ópticas a partir de los polinomios de Zernike, ya sea en el total de la pupila o en segmentos determinados de la misma.
- Programa de simulación de la observación con detección de imagen *speckle* en el foco del telescopio, tanto en régimen fotónico como de flujo. Como las restantes rutinas que se citan, tiene en cuenta el diámetro del telescopio, la longitud de onda de la observación y el *seeing* de trabajo.
- Programa de simulación de la observación con un sensor Hartmann-Shack. Incluye los efectos de inversión de imagen, de muestreo con subpupilas de diámetro y geometría variable, de obtención de la imagen de cada subpupila con influencia variable de sus vecinas, de régimen fotónico de señal y de interpolación bilineal del mapa de fase restaurado a las dimensiones que se desee.
- Programa de simulación de la observación con un sensor de Curvatura. Aporta las imágenes desenfocadas, la diferencia de las mismas y la constante C_0 para la integración de la ecuación de transporte de la irradiancia.
- Programa de restauración del frente de onda a partir de diferencias de fase, y modificación para la geometría de un Hartmann-Shack.
- Programa de restauración del frente de onda a partir de diferencias segundas de fase, y modificación para el sensor de Curvatura. Incluye el número de iteraciones Gershberg y la máscara con la región de ligadura deseadas.
- Programa de deconvoluciones *speckle* y con detección del frente de onda.

OBJETIVOS FUTUROS:

Se han abierto diversas vías de desarrollo futuro, entre las que podemos destacar las siguientes:

- Uso de nuestros algoritmos de restauración ya implementados para el análisis de datos obtenidos en laboratorio con un simulador de turbulencia atmosférica, y para datos reales de fuentes con interés en cuanto a su estructura en Alta Resolución Espacial.
- Continuación del análisis para el control definitivo de la región de ligadura en la restauración de las fases a partir de datos de un sensor de Curvatura.
- Desarrollo material de un sensor híbrido para el alineamiento de los segmentos en un telescopio segmentado.
- Estudio de los problemas de elongación y anisoplanatismo de foco en fuentes artificiales generadas con láseres aprovechando el conjunto de *software* desarrollado. Problemas cuya resolución es fundamental para el uso de Óptica Adaptativa en grandes telescopios.

Bibliografía

- Born, M. y Wolf, E. 1970, "*Principles of Optics*" (Pergamon Press) , p. 205
- Chanan, G. *et al.* 1988, "*Proceedings of the ESO Conf. on Very large Telescopes ...*" *Garching* , **1** , p. 421
- Freischlad, K. R. y Koliopoulos, C. L. 1986, *J. Opt. Soc. Am.* , **3** , 1852
- Fried, D. L. 1966a, *J. Opt. Soc. Am.* , **56** , 1372
- Fried, D. L. 1966b, *J. Opt. Soc. Am.* , **56** , 1380
- Fried, D. L. 1977, *J. Opt. Soc. Am.* , **67** , 370
- Frieden, B. R. 1991, "*Probability, Statistical Optics, and Data Testing*" (Springer-Verlag) , p. 169
- Gershberg, R.W. 1974, *Optica Acta* , **21** , 709
- Herrmann, J. 1980, *J. Opt. Soc. Am.* , **70** , 28
- Herrmann, J. 1981, *J. Opt. Soc. Am.* , **71** , 989
- Hudgin, R. H. 1977, *J. Opt. Soc. Am.* , **67** , 375
- Knox, K. T. y Thompson, B. J. 1974, *Astrophys. J. Letters* ,**193** L45

- Kolmogorov, 1941, *Dan. S.S.S.R.* , **30**
- McGlamery, B. L. 1976, *SPIE* , **74** , 225
- Nelson, J.E. *et al.* 1988, "*Proceedings of the ESO Conf. on Very large Telescopes ...*" *Garching* , **1** , p. 7
- Noll, R. J. 1977, *J. Opt. Soc. Am.* , **66** , 207
- Reynolds, G. O. *et al.* 1989, "*Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*" (*SPIE y American Institute of Physics*) , p. 27
- Roddier, C. y Roddier, F. 1990, *J. Opt. Soc. Am.* , **10** , 2277
- Roddier, N. 1990, *SPIE* , **1237** , 668
- Rousset, G. 1993, "*Adaptive Optics for Astronomy*" (*Córcega, Proceedings*) , **423** , 115