Gestión de Inventarios
Aplicación al control del stock de productos en una óptica

Inventory Management
Application to control of stock products in an optician's shop

David Sacramento Lechado

Trabajo de Fin de Grado

Lenguajes y Sistemas Informáticos

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 10 de junio de 2015

Dr. D. **Joaquín Sicilia Rodríguez**, con N.I.F. 42.033.231-H, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*Gestión de Inventarios. Aplicación al control del stock de productos en una óptica*"

ha sido realizada bajo su dirección por D. **David Sacramento Lechado**, con N.I.F. 43.378.763-G.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firma la presente en La Laguna a 10 de junio de 2015

Agradecimientos

A D. Joaquín Sicilia, por la ayuda durante el desarrollo de este trabajo.
A mi familia, por enseñarme a vivir y por su continuo ánimo.
A R., por su apoyo y compañía a lo largo de este camino.

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se ha estudiado una de las ramas más importantes de la Investigación Operativa, los Modelos de Gestión de Inventarios. Estos tipos de modelos se encargan de gestionar de manera eficiente los inventarios de un determinado tipo de producto, para minimizar los costos que generan.
El objetivo de este trabajo es aplicar los Modelos de Inventarios en el mantenimiento y gestión de la reposición de un artículo que se comercializa en una óptica. En concreto, trabajaremos con un líquido de lentillas, para comprobar si se está procediendo correctamente en el control y gestión de su inventario.
Para ello, en primer lugar, presentaremos los resultados teóricos que caracterizan al Sistema Clásico de Tamaño del Lote y a los Sistemas de Nivel de Inventario, considerando distintos modelos según varíen ciertas hipótesis sobre las roturas.
Finalmente, aplicaremos dichos modelos al producto aquí estudiado y analizaremos la evolución de su nivel de inventario, para hacer una comparativa entre los resultados obtenidos y la situación real que se ha estado llevando a cabo por los responsables de la óptica.

Palabras clave: Gestión de Inventarios, Sistema Clásico de Tamaño del Lote, Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario.

Abstract

In this Bachelor Thesis, one of the most interdisciplinary branches of Operationals Research, Inventory Management Models, has been addressed. These types of models are responsible for efficiently manage inventories of a particular type of product, in order to minimize the costs they generate.
The objective of this memory is to apply the Inventory Models in the maintenance and management of the replacement of an article that is sold in an optician's shop. In particular, we will work with contact lens solutions, to verify if it is proceeding properly in the inventory control and management .
To do this, first, we will present the theoretical results characterizing the Economic Order Quantity System and the Economic Order Level Systems, considering different models depending on certain assumptions regarding shortages.
Finally, we will apply these models to the product and analyze changes in the level of inventory in order to make a comparison between the results obtained and the actual situation that has been carried out by the responsibles of the optician's shop.

Keywords: *Inventory management, Economic Order Quantity System, Economic Order Quantity and Order Level System.*

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años ha habido un crecimiento notable del tamaño y la complejidad de las empresas y organizaciones humanas. Debido a esto, una mala decisión sobre un proceso o actividad empresarial puede repercutir gravemente en los intereses y objetivos de las organizaciones, ocasionando un deterioro difícil de rectificar. La toma de decisiones es una característica propia y definitoria de los humanos. El proceso de toma de decisiones es muy importante, ya que tienen un grado de trascendencia muy considerable, no sólo en el ámbito individual o familiar, sino que una decisión errónea, por ejemplo, tomada por una gran empresa, puede repercutir en los sectores económicos, en el medio ambiente, en la sociedad, etc. Por lo tanto, la evidente dificultad en la toma de decisiones ha provocado que se busque un conjunto de herramientas o métodos que permita tomar las mejores decisiones de acuerdo con los recursos disponibles y los objetivos deseados. Este conjunto de técnicas y modelos en cuestión es la que hoy conocemos como Investigación Operativa.
La Investigación Operativa es una disciplina matemática que estudia problemas operacionales derivados de la realización de tareas planteadas en sistemas complejos. Esta disciplina aplica métodos matemáticos para estudiar problemas reales mediante la construcción de modelos, técnicas y algoritmos, con el objetivo de buscar soluciones óptimas y facilitar la toma de decisiones. En concreto, esta ciencia se ocupa de la resolución de problemas relacionados con la conducción y coordinación de las operaciones o actividades dentro de una organización, aplicándose a problemas de transporte, de construcción, de planificación, de gestión económica, etc. La Investigación Operativa se apoya en técnicas matemáticas para proporcionar una ayuda cuantitativa en los procesos de toma de decisiones.
Aunque el origen de la Investigación Operativa es incierto, los historiadores consideran que las técnicas utilizadas en la aplicación de la Investigación Operativa tienen como punto inicial el pasado siglo XX, durante la Segunda Guerra Mundial en Gran Bretaña. Ante el avance militar y científico por parte de Alemania, un grupo de científicos ingleses tenían la necesidad de investigar las operaciones tácticas y estratégicas de la defensa aérea del país para poder defenderse de los ataques alemanes. Motivados por los buenos resultados obtenidos, la Investigación Operativa actuó también en numerosos problemas de decisión durante la Segunda Guerra Mundial. Ayudó a problemas relacionados con la asignación de recursos escasos para lograr una mayor efectividad en las operaciones militares, la

planificación de rutas de transporte militares, la utilización efectiva del equipo electrónico, y demás problemas logísticos complejos. Los grupos de científicos y las técnicas utilizadas mostraron una efectividad en las operaciones militares, no observadas anteriormente, en la forma de actuar y proceder.

Una vez concluída la guerra, la Investigación Operativa ya no se limitó sólo al ámbito operativo militar, sino que amplió su campo de estudio a otras ramas del saber, una vez que los científicos aprendieron a aplicar sus conocimientos al sector civil. Los administradores industriales aplicaron las herramientas de la Investigación Operativa a la resolución de sus problemas que empezaron a originarse debido al crecimiento del tamaño y de la complejidad de las industrias. También se utilizó esta rama de las matemáticas para optimizar los recursos de reconstrucción de las ciudades destruidas durante la guerra y la recuperación económica.

En particular, dentro de la Investigación Operativa, encontramos la Teoría de Inventarios, una de las ramas de las matemáticas encargada de gestionar adecuadamente los inventarios minimizando los costos que generan. La Gestión de Inventarios es un área básica en cualquier empresa industrial y/o comercial. El papel que juega la administración de un inventario en cualquier organización consiste en la adquisición, disposición, mantenimiento y control de los bienes y recursos que son necesarios para el logro de los objetivos organizacionales. La correcta gestión de los inventarios reduce la cantidad de productos necesarios para hacer frente al día a día, reduce las necesidades de espacio para el normal funcionamiento y adecua el flujo de materiales a las necesidades de las empresas.

Algunos inventarios son inevitables. Si vamos a realizar la producción de ciertos artículos es inevitable tener inventarios en el proceso. Sin embargo, se pueden minimizar estos inventarios mediante una mejor programación de las tiradas de producción y una organización más eficiente de la línea de producción. Por otro lado, en la mayoría de los negocios, los inventarios representan una inversión relativamente alta y producen efectos importantes sobre todas las funciones principales de la empresa. En consecuencia, podremos afimar que en cualquier organización económica que trabaje con bienes materiales, los inventarios añaden una flexibilidad de operación que de otra manera no existiría.

En este trabajo describiremos algunos sistemas de inventario que posteriormente nos servirán para estudiar y analizar la gestión del inventario de cierto producto que se vende en una óptica.

Para ello, comenzaremos estableciendo en el siguiente capítulo los fundamentos teóricos de los modelos de gestión de inventarios y la descripción del Sistema Clásico de Tamaño del Lote. En el capítulo tercero se desarrollarán algunos Sistemas de Nivel de Inventario con roturas, especificando las políticas de inventario óptimas para cada sistema. En el cuarto capítulo se estudiará la gestión del inventario de cierto líquido de lentillas que se vende en la óptica, aplicando los modelos de gestión de stock recogidos en los capítulos anteriores. Finalmente, se exponen las conclusiones del trabajo y se describen posibles líneas futuras de actuación hacia donde podríamos dirigir nuestros pasos como aplicación de este estudio.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos de los modelos de gestión de inventario

En el presente capítulo, describiremos los fundamentos y conceptos básicos en que se asientan los modelos de gestión de stock. Posteriormente, presentaremos el Sistema Clásico de Tamaño del Lote, exponiendo la política de inventario óptima y el costo mínimo correspondiente.

2.1. Conceptos básicos

El control y mantenimiento de inventario es un problema común que afecta a la mayoría de las empresas en casi cualquier sector de la economía. Principalmente, la gestión de inventarios viene determinada para poder encontrar un equilibrio entre la oferta y demanda de un determinado producto y conseguir reducir al mínimo los costos asociados.
Definimos un sistema de inventario como el conjunto de normas, métodos y procedimientos aplicados de manera sistemática para planificar y controlar los materiales y productos que se emplean en una organización. Entendemos como inventario a toda cantidad de material, ya sea bienes, artículos o productos de cualquier clase, que están almacenados, no utilizados y que poseen valor económico. Además, los inventarios están condicionados por dos factores fundamentales:

- **Demandas**: Representan las cantidades de bienes o materiales que se solicitan al inventario por parte de los clientes.
- **Reposiciones**: Representan las cantidades de bienes o materiales que se planifican, por parte del gerente o director de la empresa, para reponer el inventario y poder satisfacer la demanda futura.

La mayoría de las empresas tienen un inventario de cierto tipo. Puede pensarse que los inventarios llevan claramente asociados pagos de impuestos, operaciones en el almacén, deterioro de los materiales almacenados, costos de mantenimiento y muchos otros gastos que se suman, de tal forma que el costo total asociado a un inventario sea demasiado alto, poniendo en duda si es necesario mantener artículos en inventario. Sin embargo, los inventarios se realizan para controlar la oferta y la demanda. Un empresario puede saber más o menos cuándo puede ocurrir la demanda de un producto y preparar los materiales necesarios para cubrir dicha demanda, pero no sabe con exactitud cuando ocurrirá. Por ello, deberá mantener en el inventario ciertas cantidades de artículo para cubrir la incertidumbre y evitar la pérdida de beneficios derivada de la falta de existencias.

En la gestión de un inventario, consideraremos tres costos generales:

- **Costo de mantenimiento (C_1)**: Es el costo de mantener un inventario de cierto producto. En este costo se incluyen los costos relacionados con la inversión del inventario y del mantenimiento físico de los materiales almacenados, así como, el alquiler del local, los costos relacionados con el almacén (entre los que se contabilizan los costos de: Agua, luz, teléfono,...), el pago de los seguros, el deterioro de los materiales no vendidos y la pérdida por daños en los materiales.

- **Costo de rotura (C_2)**: Es el costo relacionado con la no existencia de un artículo para vender. Este coste puede subdividirse principalmente en dos costos: el costo relacionado con clientes que están dispuestos a esperar y el costo de ventas perdidas. El primer caso puede ser debido a un retraso de unos días en la llegada del pedido, provocando un coste derivado en la tardanza de recibir el dinero de venta. Por otro lado, puede ocurrir que la venta se pierda, provocando además que la empresa asuma un sobrecoste por horas extraordinarias y esfuerzo administrativo especial para poder intentar recuperar las ventas perdidas. Sin embargo, este coste es el más variable, porque puede cambiar dependiendo del artículo y del consumidor, ya que no se puede saber de antemano como reaccionará un cliente ante la no existencia de un artículo.

- **Costo de reposición (C_3)**: Es el costo relacionado con la reposición de los inventarios. Puede tratarse de los costos derivados de la orden de compra por parte de la empresa a un proveedor externo de artículos, o de los costos derivados de la producción interna de la empresa de los artículos. Normalmente, este costo está directamente relacionado con el número de pedidos que se realicen. El costo de reposición incluye el costo de realizar el pedido, preparar la maquinaria para producir el material, el costo de transportar los materiales hasta el almacén, la manipulación de la mercancía, etc. En ocasiones, este costo puede considerarse como un determinado porcentaje del precio de compra.

Puede considerarse un cuarto costo, el **Costo de compra (C_4)**, que representa el costo o dinero invertido en la compra de los productos que estarán almacenados. Normalmente el costo por unidad de artículo viene dado por los proveedores. En el caso de que la empresa produzca sus propios artículos, este costo puede ser difícil de establecer o calcular un precio promedio. En general, este costo de compra no se considerará en los modelos, ya que se incorporará dentro del costo de mantenimiento, salvo que se especifique lo contrario.
Nuestro objetivo será construir modelos matemáticos para el control y gestión del inventario de un determinado producto de forma que se minimicen la suma de los costos.

Antes de contruir dichos modelos, debemos establecer una tipología de los sistemas de inventario que permita caracterizar y reconocer el sistema que se desea analizar.

2.2. Sistemas de inventarios y políticas de inventario

Los sistemas de inventario pueden dividirse teniendo en cuenta los costes que intervienen en ellos. Así, se puede establecer la siguiente clasificación.

- **Sistemas tipo (1,2)**: Son aquellos sistemas donde interviene el costo de mantenimiento y el costo de rotura. No se tiene en cuenta el costo de reposición.

- **Sistemas tipo (1,3)**: Son aquellos sistemas donde intervienen el costo de mantimiento y de reposición. No se permiten las roturas.

- **Sistemas tipo (2,3)**: Son aquellos sistemas donde intervienen el costo de rotura y de reposición. No aparece el costo de mantenimiento.

- **Sistemas tipo (1,2,3)**: Se trata de cualquier sistema donde intervengan los tres costos generales.

Independientemente del sistema de inventario con el que se esté trabajando, se necesitará una política de inventario que auxilie a los responsables de una empresa a realizar la gestión del inventario. Se tratará de determinar los valores óptimos que deben tomar las variables de decisión que influyen en los costos del inventario con el objetivo de minimizar los costos o maximizar los beneficios. Cuando hablamos de políticas de inventarios nos referimos al conjunto de posibles estrategias que se pueden seguir a la hora de resolver un problema de gestión de inventario, y van encaminadas a responder a las preguntas: *¿Cuándo se debe reponer el inventario?* y *¿Qué cantidad debemos añadir al inventario en cada reposición?*.

Las políticas de inventario vienen determinadas por las respuestas a estas preguntas, pudiendo dividir los distintos tipos de sistemas según la política que se vaya a utilizar. Puede ocurrir que un mismo sistema pueda utilizar distintas políticas de inventario, pero se utilizará aquella que nos lleve a un menor coste de gestión de inventario. Mantener un inventario es un proceso caro y laborioso, y, por lo tanto, se deben establecer controles para rebajar y controlar en la medida de lo posible los altos gastos. Esto significa que:

- Debe haber un nivel razonable de artículos almacenados en el inventario.

- No se deben añadir al inventario artículos innecesarios que produzcan un aumento superfluo del costo.

- Todos los artículos que estén en desuso u obsoletos deberán ser eliminados del inventario.

Procedamos a distinguir las distintas políticas de inventario respondiendo a las preguntas anteriores:

(1) ¿Cuándo se debe reponer el inventario?

Podemos responder a esta pregunta de dos maneras:

- El inventario se repone cuando la cantidad en el inventario sea menor o igual a una cantidad s, a la que denominaremos punto de reposición.
- El inventario se repone cada t unidades de tiempo, donde denominamos t como el periodo de gestión o de planificación, o ciclo del inventario.

La pregunta de cuándo reponer el inventario depende de numerosos factores como puede ser el tipo de artículo, el tipo de la demanda (que puede ser alta o baja, concentrarse en un determinado periodo, etc.), el costo de realizar un pedido, el periodo de tiempo entre pedidos consecutivos, los proveedores, etc.

(2) ¿Qué cantidad debemos añadir al inventario en cada reposición?

Cuando se realiza un pedido, existen costos asociados a éste, como pueden ser, los costos de administración, los costos de transporte, seguros y demás. Si los pedidos para reponer el inventario son infrecuentes, el costo de reposición será bajo pero sin embargo el costo de mantenimiento será elevado. En cambio, si los pedidos para reponer el inventario fueran frecuentes, entonces el costo de mantenimiento será bajo y el costo de reposición será alto. Por lo tanto, se necesitará un análisis de esta situación para poder controlar el sobrecosto total. Podemos responder a la pregunta anterior de dos maneras:

- La cantidad a reponer es q unidades, donde denominamos q como el tamaño del lote o cantidad de reposición.
- La cantidad a reponer debe ser una cantidad tal que al añadirla al inventario éste suba a un nivel de S unidades, que denotamos como nivel de inventario.

Las reposiciones pueden depender del precio del artículo que vaya a reponerse, de subidas inminentes del precio del artículo, de costos relacionados con realizar un pedido, etc.
Además, deberá verificarse que $s + q = S$, es decir, la suma de la cantidad de material en el inventario antes de la reposición y el tamaño del lote que se añade al inventario debe ser igual al nivel de stock del producto.
Aunque se hayan discutido las principales preguntas que se realizan para la gestión de un inventario, existen otras preguntas que podemos plantearnos y que pueden resultarnos de ayuda para la gestión de un inventario. Algunos ejemplos pueden ser:

¿Cuáles deberían ser los niveles medios de artículos en inventario?
¿Cuánto dinero se ha invertido en el inventario?
¿Qué nivel de servicio se está prestando al cliente y cómo afecte al inventario?

Sea como fuere, en este trabajo nos centraremos en el estudio de modelos de gestión de stock que intentan dar una respuesta eficiente a las dos preguntas principales que hemos comentado previamente.

2.3. Propiedades de las demandas

Las demandas pueden definirse como las cantidades de los productos que se solicitan al inventario por parte de los clientes. Se debe conocer como varían éstas salidas de productos de los inventarios durante los periodos de gestión, es decir, cómo se distribuyen las demandas durante dichos periodos. Existen dos tipos de demanda:

- **Demanda determinística:** Se conoce con certeza cuál va a ser la demanda de un artículo. Además, en iguales periodos de gestión, la demanda puede ser constante (si se distribuye de la misma manera durante todo el periodo) o variable.
- **Demanda probabilística:** Es aquella demanda que está sujeta a una cantidad significativa de variabilidad, la cual puede ser expresada por una distribución de probabilidad.

En este trabajo nos centraremos principalmente en el estudio de modelos de gestión de stock con demanda determinística.
Aunque se conozca la demanda del producto en el periodo de gestión, debemos preguntarnos también si la misma es uniformemente distribuida a lo largo de dicho periodo o por el contrario hay mayor concentración de la demanda al comienzo o al final del periodo.
Los patrones de demanda representan las diferentes maneras en que los artículos se extraen del inventario para satisfacer la demanda de los clientes durante un periodo de gestión t. Estos modelos responden a la pregunta *¿Cómo se distribuye la demanda a lo largo de un periodo de gestión?* Para ello, sea

$$\begin{aligned} S &= \text{Nivel de inventario al comienzo del periodo } t. \\ x &= \text{Tamaño de la demanda en el periodo } t. \\ n &= \text{Índice del patrón de demanda.} \\ I(T) &= \text{Nivel de inventario en el instante } T \text{, con } 0 \leq T \leq t. \end{aligned}$$

La ecuación que describe a los modelos potenciales de demanda es

$$I(T) = S - x \cdot \sqrt[n]{\frac{T}{t}} \qquad 0 \leq T \leq t$$

Dependiendo del valor n, obtendremos diferentes modelos de demanda. Así:

- Si $n = 1$, estamos en el modelo de demanda uniforme, esto quiere decir que la demanda durante un periodo de gestión es siempre constante. En ese caso, el nivel de inventario viene dado por

  $$I(T) = S - x \cdot (\frac{T}{t})^1 = S - x \cdot \frac{T}{t} = S - r \cdot T \qquad \forall T \in (0, t)$$

  Se observa que $I(T)$ es una función lineal decreciente con pendiente r.
  Al valor $r = \frac{x}{t}$ se le denomina razón de demanda y es el cociente entre el tamaño de la demanda y el periodo de gestión.

- Si $n = \infty$, la demanda está totalmente concentrada al principio del periodo, y el nivel de inventario es

$$I(T) = S - x \cdot (\frac{T}{t})^{\frac{1}{\infty}} = S - x \cdot (\frac{T}{t})^{0} = S - x \qquad \forall T \in (0, t)$$

- Si $n = 0$, la demanda está totalmente concentrada al final del periodo. En este caso, el nivel de inventario permanece constante hasta el final del periodo.

$$I(T) = S - x \cdot (\frac{T}{t})^{\frac{1}{0}} = S - x \cdot (\frac{T}{t})^{\infty} = S \qquad \forall T \in (0, t)$$

- Si $n > 1$, la demanda está más concentrada al principio del periodo.
- Si $n < 1$, la demanda está más concentrada al final del periodo.

También se podría considerar otro patrón de demanda como, por ejemplo, la demanda escalonada, en la cuál, la demanda se concentra solo en determinados puntos del periodo de gestión.

2.4. Sistema Clásico de Tamaño del Lote

En esta sección estudiaremos el sistema básico de inventario conocido como Sistema de Tamaño del Lote. En primer lugar, presentaremos las características de este Sistema Clásico de Tamaño del Lote, y luego, cambiaremos al caso de unidades discretas y procederemos a su estudio.
Para este tipo de sistema, consideraremos que se sigue una política (s, q), donde s es un valor fijado y vale $s = 0$, es decir, el inventario se repondrá cuando el nivel de inventario llegue a 0. Luego, estaremos ante un sistema tipo $(1, 3)$, pues no interviene el costo de rotura. Por lo tanto, nuestra única variable de decisión será q, el tamaño del lote. Se debe determinar la cantidad de unidades que debería solicitarse al proveedor en cada pedido, de manera que se logre minimizar el costo total asociado con la reposición y el mantenimiento de las unidades en inventario.
A continuación, definiremos las principales características del Sistema Clásico de Tamaño del Lote:

1. Se considera demanda determinística, es decir, la demanda es conocida durante el periodo de gestión, y supondremos que sigue una razón de demanda de r unidades por unidad de tiempo.
2. Supondremos que el punto de reposición está fijado y es constante. Tendremos que ese punto es $s = 0$. Por lo tanto, este sistema no permite roturas.
3. Tendremos que el tamaño del lote q es una cantidad fija a determinar. Ella será nuestra variable de decisión.
4. La reposición del inventario es instantánea. Luego la razón de reposición es $p = \infty$, y el periodo de reposición es nulo, $t' = \frac{q}{p} = 0$.

5. El tiempo de retardo es nulo, $L = 0$.

6. Este sistema sigue un patrón uniforme de demanda. Así, la función del nivel de inventario es
$$I(T) = S - r \cdot T \qquad\qquad 0 \leq T \leq t$$

7. Costos unitarios constantes y conocidos. Dichos costes son
$$\begin{aligned} c_1 &= \text{costo unitario de mantenimiento} \\ c_3 &= \text{costo unitario de reposición} \end{aligned}$$
cuyas dimensiones, respectivamente, son
$$[c_1] = \frac{[\$]}{[Q] \cdot [T]} \qquad\qquad [c_3] = [\$]$$

Teniendo en cuenta estas características, la gráfica siguiente refleja cómo es el movimiento de inventario a lo largo del periodo de gestión

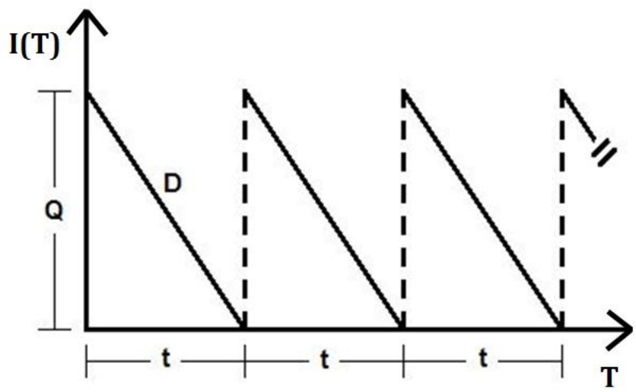

Figura 2.1: Sistema Clásico de Tamaño del Lote

La cantidad pedida para reponer el inventario debe cubrir la demanda total durante el periodo de gestión, por lo tanto tendríamos que
$$q = r \cdot t \Rightarrow t = \frac{q}{r}$$
A partir de las características descritas previamente, procedamos a continuación a determinar la función de coste del Sistema Clásico de Tamaño del Lote, la cual tendremos que minimizar para hallar el tamaño de lote óptimo. En este sistema habíamos asumido que no intervenía el costo de rotura, por lo tanto, solo tendremos que determinar el costo de mantenimiento (C_1) y el costo de reposición (C_3).

- **Costo de mantenimiento**

El costo de mantenimiento de inventario viene dado por el costo unitario de mantener una unidad de producto en el inventario, multiplicado por el inventario promedio de la empresa, esto es

$$C_1(q) = c_1 \cdot I_1(q)$$

donde $I_1(q) =$ número medio de piezas en stock. Esa cantidad viene determinada por

$$I_1(q) = \frac{\text{Cantidad total en stock en el periodo de gestión } t}{\text{Periodo de gestión } t} = \frac{\acute{A}rea}{t} = \frac{q \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{q}{2}$$

Por lo tanto, se obtendrá que el costo de mantenimiento es

$$C_1(q) = c_1 \cdot \frac{q}{2}$$

- **Costo de reposición**

El costo de reposición puede expresarse como el producto del costo unitario de reposición y el número de pedidos, esto es

$$C_3(q) = c_3 \cdot I_3(q)$$

donde $I_3(q) =$número medio de reposiciones. Esta cantidad viene determinada por

$$I_3(q) = \frac{\text{Número total de reposiciones en el periodo } t}{\text{Periodo de gestión } t} = \frac{1}{t} = \frac{r}{q}$$

Nótese que el número de pedidos es igual a la demanda total en el periodo de gestión dividido por la cantidad a reponer en dicho periodo.
Por lo tanto, se obtendrá que el costo de reposición es

$$C_3(q) = c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

En consecuencia, la función de coste del Sistema Clásico de Tamaño del Lote es

$$C(q) = C_1(q) + C_3(q) = c_1 \cdot \frac{q}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Y, a partir de esta función, se puede determinar el tamaño óptimo q^* del Sistema Clásico de Tamaño del Lote. Para ello, derivamos e igualamos a cero

$$C'(q) = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{2} - c_3 \cdot \frac{r}{q^2} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{2} = c_3 \cdot \frac{r}{q^2} \Rightarrow q^2 = \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}$$

De ahí se obtiene que el tamaño del lote óptimo debe ser:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}$$

Para determinar que se trata de un mínimo, calculamos la segunda derivada

$$C''(q) = \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{q^3} > 0 \qquad\qquad \forall q > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada, podemos garantizar que la función de coste es una función convexa en la región $q > 0$ y que q_0 es un tamaño de lote mínimo. El costo mínimo del sistema de inventario será

$$\begin{aligned}
C_0 &= C(q_0) = c_1 \cdot \frac{q_0}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q_0} = \frac{c_1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}} + \frac{c_3 \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}} \\
&= \frac{\frac{c_1}{2} \cdot \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1} + c_3 \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}} = \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}} \\
&= \sqrt{\frac{(2 \cdot c_3 \cdot r)^2 \cdot c_1}{2 \cdot c_3 \cdot r}} = \sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r}
\end{aligned}$$

Una de las características de este sistema, es que la solución óptima se obtiene cuando los costos de mantenimiento y de reposición coinciden. Por lo tanto, conocemos este sistema de inventario como un sistema de nivelación de costos, ya que en la solución óptima se obtiene cuando

$$C_1(q_0) = C_3(q_0)$$

Gráficamente se puede observar que la función del coste de mantenimiento es una función lineal creciente en q, y que la función del costo de reposición es una función decreciente en q. Ambas funciones tienen su punto de intersección en $q = q_0$, coincidiendo con el punto mínimo de la función de coste $C(q)$.

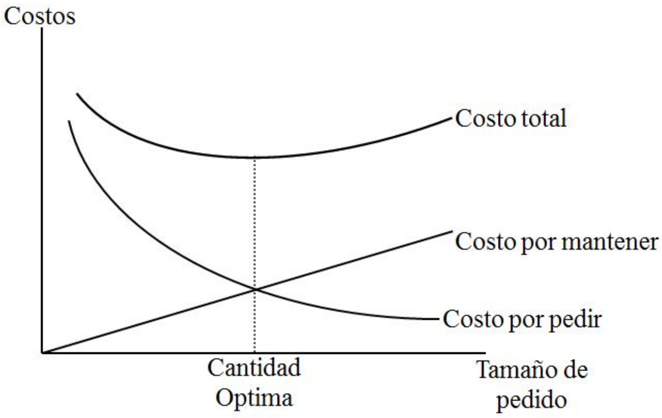

Figura 2.2: Nivelación de costes

2.4.1. Caso de unidades discretas

Supondremos ahora que nuestro sistema de inventario de tamaño del lote solo puede reponer el inventario con valores discretos de q, es decir, tendremos que q debe ser un múltiplo de cierto valor conocido u, con $u > 0$, esto es, $q = u, 2u, 3u, 4u, ...$
Para hallar la solución óptima en este caso, partiremos de la misma función de coste que en el caso continuo

$$C(q) = c_1 \cdot \frac{q}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Definimos q_0 como el tamaño de lote óptimo. Para el caso de unidades discretas se tendrá que

$$\begin{cases} C(q_0) \leq C(q_0 + u) \\ C(q_0) \leq C(q_0 - u) \end{cases}$$

Nótese que en este caso, puede ocurrir que exista una sóla solución óptima o bien, dos soluciones, dependiendo de los parámetros del sistema. Por lo tanto, el tamaño del lote q que sea solución óptima debe verificar

$$\begin{cases} c_1 \cdot \frac{q}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q} \leq c_1 \cdot \frac{q+u}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \\ c_1 \cdot \frac{q}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q} \leq c_1 \cdot \frac{q-u}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q-u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_3 \cdot \frac{r}{q} \leq c_1 \cdot \frac{u}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \\ c_3 \cdot \frac{r}{q} \leq -c_1 \cdot \frac{u}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q-u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_3 \cdot \frac{r}{q} - c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \leq c_1 \cdot \frac{u}{2} \\ c_3 \cdot \frac{r}{q} - c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \leq -c_1 \cdot \frac{u}{2} \end{cases}$$

Multiplicamos por -1 la segunda ecuacion y se obtiene que

$$\begin{cases} c_3 \cdot \frac{r}{q} - c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \leq c_1 \cdot \frac{u}{2} \\ -c_3 \cdot \frac{r}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \geq c_1 \cdot \frac{u}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_3 \cdot \frac{r}{q} - c_3 \cdot \frac{r}{q+u} \leq c_1 \cdot \frac{u}{2} \leq -c_3 \cdot \frac{r}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q+u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_3 \cdot r \cdot (q+u) - c_3 \cdot q \cdot r}{q \cdot (q+u)} \leq \frac{c_1 \cdot u}{2} \leq \frac{-c_3 \cdot r \cdot (q-u) + c_3 \cdot q \cdot r}{q \cdot (q-u)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_3 \cdot r \cdot u}{q \cdot (q+u)} \leq \frac{c_1 \cdot u}{2} \leq \frac{c_3 \cdot r \cdot u}{q \cdot (q-u)}$$

Y de esta expresión se obtiene que la condición necesaria y suficiente para que el tamaño de lote q_0 sea una solución óptima del Sistema Clásico de Tamaño del Lote en el caso de unidades discretas, es que debe verificar la condición

$$q_0 \cdot (q_0 - u) \leq \frac{2 \cdot r \cdot c_3}{c_1} \leq q_0 \cdot (q_0 + u)$$

Hasta aquí se ha expuesto la política óptima del Sistema Clásico de Tamaño del Lote, donde no se permiten las roturas. En el próximo capítulo, relajamos esta condición y estudiaremos algunos Sistemas de Nivel de Inventario, asumiendo que en los sistemas pueden existir roturas.

Capítulo 3

Sistemas de Nivel de Inventario con roturas

Ahora consideraremos que la política de la empresa permite roturas, lo que provoca que el modelo cambie completamente. En principio, seguiremos trabajando con sistemas determinísticos, pero ahora, la política de trabajo utilizada será diferente. Al intervenir todos los costos, se tratará de un sistema tipo $(1, 2, 3)$. En este sistema se permiten las roturas, por lo tanto, el punto de reposición no está fijado previamente. Habrá que determinar el nivel de inventario óptimo y el tamaño de lote óptimo, luego nuestras variables de decisión serán q y S. Utilizaremos una política (S, q), pues se repondrá el inventario cuando éste llegue al nivel $s = S - q$ con una cantidad q tal que suba el inventario hasta un nivel S. En este caso, la función de coste a optimizar dependerá de dos variables (S, q).
Hay que distinguir el tipo de roturas que se asume, pues los modelos matemáticos serán diferentes. Primero supondremos que las roturas se pueden recuperar, esto es, son clientes que están dispuestos a esperar, y luego, consideraremos que las roturas son pérdida de ventas.

3.1. Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario

Se expondrán a continuación las principales características de este sistema para luego plantear el modelo matemático:

1. La demanda es determinística y conocida durante el periodo de gestión. Además, supondremos que sigue una razón de demanda de r unidades por unidad de tiempo.

2. El nivel de inventario S al comienzo del periodo de gestión es una cantidad fija a determinar, ya que será una de las variables de decisión.

3. El tamaño del lote q es una cantidad fija también por determinar, ya que será otra variable de decisión.

4. El periodo de gestión t no está fijado y se calculará como $t = \frac{q}{r}$, debido a que la cantidad pedida para reponer el inventario debe cubrir la demanda en el periodo de gestión.

5. Se permiten roturas y se considera que los clientes están dispuestos a esperar. Luego las roturas serán atendidas con la llegada del siguiente pedido.

6. La reposición del inventario es instantánea. Luego, la razón de reposición es $p = \infty$, y el periodo de reposición es nulo, esto es, $t' = \frac{q}{p} = 0$.

7. El tiempo de retardo es despreciable y por ello se considera también nulo, $L = 0$.

8. La demanda sigue un patrón uniforme. Así la función que representa al nivel de inventario es
$$I(T) = S - r \cdot T \qquad\qquad 0 \leq T \leq t$$

9. Costos unitarios constantes y conocidos. Dichos costos son
$$\begin{aligned} c_1 &= \text{costo unitario de mantenimiento} \\ c_2 &= \text{costo unitario de rotura} \\ c_3 &= \text{costo unitario de reposición} \end{aligned}$$
cuyas dimensiones, respectivamente, son
$$[c_1] = \frac{[\$]}{[Q] \cdot [T]} \qquad\qquad [c_2] = \frac{[\$]}{[Q] \cdot [T]} \qquad\qquad [c_3] = [\$]$$

Teniendo en cuenta estas características, los movimientos en el inventario dependerán de las posiciones relativas de los valores S y q. Luego, las gráficas para cada caso son:

1. Si $S \geq q$

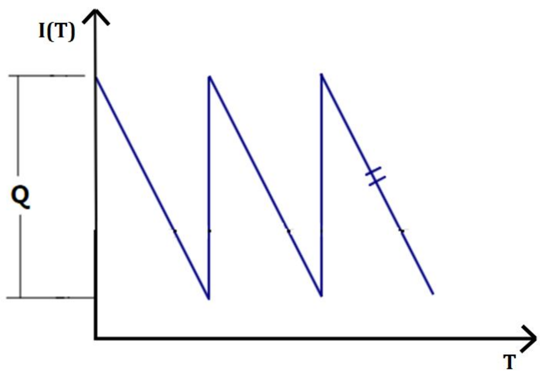

Figura 3.1: Caso $S \geq q$

2. Si $0 \leq S \leq q$

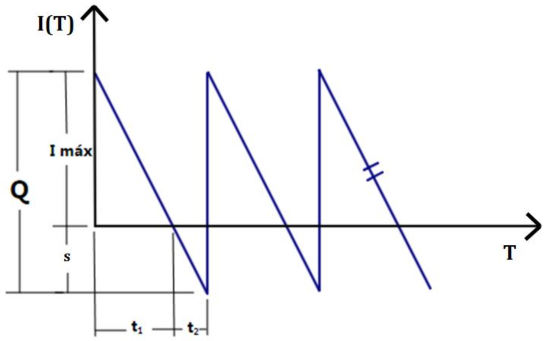

Figura 3.2: Caso $0 \leq S \leq q$

3. Si $S \leq 0$

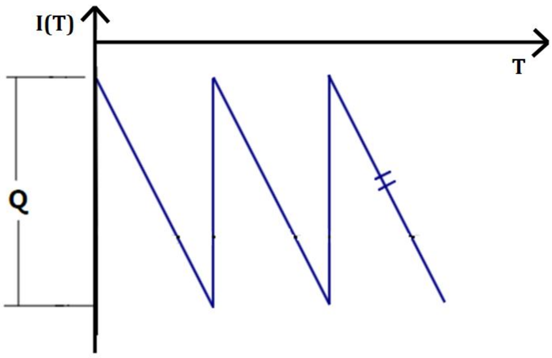

Figura 3.3: Caso $S \leq 0$

A partir de toda esta información, procedamos a continuación a determinar la función de coste del Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, la cual tendremos que minimizar para hallar el tamaño de lote y nivel de inventario óptimos. En este sistema tendremos que determinar el costo de mantenimiento (C_1), el costo de rotura (C_2) y el costo de reposición (C_3).
Para calcular el costo de mantenimiento y el costo de rotura, dividiremos el periodo de gestión t en dos subperiodos t_1 y t_2, de tal forma que $t = t_1 + t_2$, donde

$$t_1 = \text{periodo de tiempo en el que hay stock en el inventario}$$

$$t_2 = \text{periodo de tiempo en el que hay rotura}$$

Según el caso en el que estemos, tendremos distintos costos. Por lo tanto, se debe analizar las tres posibilidades:

- **Caso 1**: $S \geq q$

En este caso, el nivel de inventario es mayor que el tamaño del lote, luego no se considerarían roturas. Se tiene:

$$\begin{aligned} I_1(S,q) &= \text{número medio de piezas en stock} \\ &= \frac{\text{Cantidad total en stock en el periodo de gestión } t}{\text{Periodo de gestión } t} = \frac{\acute{A}rea}{t} \\ &= \frac{q \cdot \frac{t}{2} + s \cdot t}{t} = \frac{q}{2} + s \end{aligned}$$

donde $s + q = S$, y

$$\begin{aligned} I_2(S,q) &= \text{número medio de roturas} \\ &= \frac{\text{Cantidad total de roturas en el periodo de gestión } t}{\text{Periodo de gestión } t} = 0 \end{aligned}$$

- **Caso 2**: $S \leq 0$

En este caso, no hay stock físico, el inventario se encuentra en una situación permanente de rotura. Se tiene:

$I_1(S,q) = 0$

$I_2(S,q) = \frac{\acute{A}rea}{t} = \frac{(-s)\cdot t + q \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{q}{2} - S$

- **Caso 3**: $0 \leq S \leq q$

Para este caso, utilizaremos semejanza de triángulos para calcular los distintos costes. Se puede apreciar visualmente de la gráfica de la figura 3.2 que se tienen las siguientes igualdades

$$\frac{S}{q} = \frac{t_1}{t}$$

$$\frac{-s}{q} = \frac{q-S}{q} = \frac{t_2}{t}$$

Por lo tanto, se tendrá

$$I_1(S,q) = \frac{S\cdot\frac{t_1}{2}}{t} = \frac{S}{2}\cdot\frac{t_1}{t} = \frac{S^2}{2\cdot q}$$

$$I_2(S,q) = \frac{(-s)\cdot\frac{t_2}{2}}{t} = \frac{(-s)}{2}\cdot\frac{t_2}{t} = \frac{(q-S)}{2}\cdot\frac{t_2}{t} = \frac{(q-S)^2}{2\cdot q}$$

Además, en cualquiera de los 3 casos tenemos que

$$I_3(q) = \text{número de reposiciones} = \frac{\text{Número total de reposiciones en el periodo } t}{\text{Periodo de gestión } t} = \frac{1}{t} = \frac{r}{q}$$

Por consiguiente, la función de coste del Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario es

$$C(S,q) = C_1(S,q) + C_2(S,q) + C_3(q) = c_1\cdot I_1(S,q) + c_2\cdot I_2(S,q) + c_3\cdot I_3(q)$$

$$C(S,q) = \begin{cases} c_2\cdot(\frac{q}{2} - S) + c_3\cdot\frac{r}{q} & \text{, si} \quad S\leq 0 \\ c_1\cdot\frac{S^2}{2\cdot q} + c_2\cdot\frac{(q-S)^2}{2\cdot q} + c_3\cdot\frac{r}{q} & \text{, si} \quad 0\leq S\leq q \\ c_1\cdot(S-\frac{q}{2}) + c_3\cdot\frac{r}{q} & \text{, si} \quad S\geq q \end{cases}$$

Se comprueba que el punto que minimiza la función $C(S,q)$ está contenido en la región $0\leq S\leq q$. En efecto, tenemos que la función $C(S,q)$ es monótona en las regiones $S\leq 0$ y $S\geq q$.

- Si $S\leq 0$ tendremos que $-S\geq 0$, luego

  $$C(S,q) = c_2\cdot(\frac{q}{2} - S) + c_3\cdot\frac{r}{q} \geq c_2\cdot\frac{q}{2} + c_3\cdot\frac{r}{q} = C(0,q)$$

  lo que implica que la función es linealmente decreciente respecto de S en la región $S\leq 0$.

- Si $S\geq q$, tendremos que

  $$C(S,q) = c_1\cdot(S-\frac{q}{2}) + c_3\cdot\frac{r}{q} \geq c_1\cdot(q-\frac{q}{2}) + c_3\cdot\frac{r}{q} \geq c_1\cdot\frac{q}{2} + c_3\cdot\frac{r}{q} = C(q,q)$$

  lo que implica que la función es linealmente creciente respecto de S en la región $S\geq q$.

Por lo tanto, de existir el mínimo, éste debe encontrarse en la región determinada por $0\leq S\leq q$, y para hallarlo tendremos que resolver el problema

$$\min_{s.a.\ 0\leq S\leq q} C(S,q) = c_1\cdot\frac{S^2}{2\cdot q} + c_2\cdot\frac{(q-S)^2}{2\cdot q} + c_3\cdot\frac{r}{q}$$

Para ello, derivamos parcialmente la función objetivo e igualamos a cero, obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S} = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1 \cdot \frac{2 \cdot S}{2 \cdot q} - c_2 \cdot \frac{2 \cdot (q - S)}{2 \cdot q} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \frac{S}{q} = c_2 \cdot \frac{(q - S)}{q} \\ &\Rightarrow \quad (c_1 + c_2) \cdot S = c_2 \cdot q \Rightarrow S = \frac{c_2 \cdot q}{c_1 + c_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad & -c_1 \cdot \frac{S^2}{2 \cdot q^2} + \frac{c_2}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot (q - S) \cdot q - (q - S)^2}{q^2}\right] - \frac{c_3 \cdot r}{q^2} = 0 \\ & \frac{-c_1 \cdot S^2}{2 \cdot q^2} + \frac{c_2}{2} \cdot \left[\frac{q^2 - S^2}{q^2}\right] - \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{2 \cdot q^2} = 0 \\ & -c_1 \cdot S^2 + c_2 \cdot q^2 - c_2 \cdot S^2 - 2 \cdot c_3 \cdot r = 0 \\ & -(c_1 + c_2) \cdot S^2 + c_2 \cdot q^2 - 2 \cdot c_3 \cdot r = 0\end{aligned}$$

En esta ecuación sustituimos la expresión de S que obtuvimos anteriormente, resultando

$$-(c_1 + c_2) \cdot \frac{c_2^2 \cdot q^2}{(c_1 + c_2)^2} + c_2 \cdot q^2 = 2 \cdot c_3 \cdot r \Rightarrow \left[\frac{-c_2^2}{(c_1 + c_2)} + c_2\right] \cdot q^2 = 2 \cdot c_3 \cdot r$$

$$\Rightarrow \frac{(c_1 + c_2) \cdot c_2 - c_2^2}{(c_1 + c_2)} = \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{q^2} \Rightarrow c_1 \cdot c_2 \cdot q^2 = 2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)$$

$$\Rightarrow q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}}$$

que es el tamaño de lote óptimo para el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario. Y una vez obtenido q_0, sustituimos en la expresión de S para hallar el nivel de inventario óptimo

$$S_0 = \frac{c_2 \cdot q_0}{c_1 + c_2} = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}} \Rightarrow S_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}}$$

Nótese que se verifica que $0 \leq S_0 \leq q_0$, pues se tiene

$$0 \leq S_0 = \frac{c_2 \cdot q_0}{c_1 + c_2} \leq q_0$$

debido a que $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, por lo tanto $\frac{c_2}{c_1 + c_2} < 1$. Veamos ahora que dicho punto es un mínimo, para ello, calculamos las segundas derivadas, obteniendo

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q} = \frac{c_1 + c_2}{q} > 0$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = \frac{c_1 \cdot S^2}{q^3} + \frac{c_2 \cdot S^2}{q^3} + \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{q^3} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot S^2 + 2 \cdot c_3 \cdot r}{q^3} > 0$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q \partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial q} = -\frac{c_1 \cdot S}{q^2} - c_2 \cdot \frac{q-(q-S)}{q^2} = -\frac{(c_1+c_2)\cdot S}{q^2}$$

Y calculamos el determinante de la matriz hessiana para comprobar si el punto (S_0, q_0) es un mínimo

$$\begin{vmatrix} \frac{c_1+c_2}{q} & -\frac{(c_1+c_2)\cdot S}{q^2} \\ -\frac{(c_1+c_2)\cdot S}{q^2} & \frac{(c_1+c_2)\cdot S^2+2\cdot c_3\cdot r}{q^3} \end{vmatrix} = \left(\frac{c_1+c_2}{q}\right)\cdot\left(\frac{(c_1+c_2)\cdot S^2+2\cdot c_3\cdot r}{q^3}\right) - \frac{(c_1+c_2)^2\cdot S^2}{q^4}$$

$$= \left(\frac{(c_1+c_2)^2\cdot S^2 + 2\cdot(c_1+c_2)\cdot c_3\cdot r}{q^4}\right) - \frac{(c_1+c_2)^2\cdot S^2}{q^4} = \frac{2\cdot(c_1+c_2)\cdot c_3\cdot r}{q^4} > 0$$

Al ser positivo, se obtiene que el punto (S_0, q_0) es un mínimo, y por lo tanto, el nivel de inventario óptimo y el tamaño de lote óptimo, respectivamente, del problema. Determinemos ahora el costo mínimo de éste sistema de inventario

$$C_0 = C(S_0, q_0) = c_1 \cdot \frac{S_0^2}{2\cdot q_0} + c_2 \cdot \frac{(q_0-S_0)^2}{2\cdot q_0} + c_3\cdot\frac{r}{q_0}$$

$$= c_1 \cdot \frac{\frac{c_2^2\cdot q_0^2}{(c_1+c_2)^2}}{2\cdot q_0} + c_2 \cdot \frac{(q_0 - \frac{c_2\cdot q_0}{(c_1+c_2)})^2}{2\cdot q_0} + c_3 \cdot \frac{r}{q_0} = \frac{\frac{2\cdot c_2\cdot c_3\cdot r}{(c_1+c_2)} + c_2\cdot(\frac{c_1\cdot q_0}{(c_1+c_2)})^2 + 2\cdot c_3\cdot r}{2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot c_3\cdot r\cdot(c_1+c_2)}{c_1\cdot c_2}}}$$

$$= \frac{\frac{2\cdot c_2\cdot c_3\cdot r}{(c_1+c_2)} + \frac{2\cdot c_1\cdot c_3\cdot r}{(c_1+c_2)} + 2\cdot c_3\cdot r}{2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot c_3\cdot r\cdot(c_1+c_2)}{c_1\cdot c_2}}} = \frac{(\frac{c_2+c_1}{(c_1+c_2)}+1)\cdot 2\cdot c_3\cdot r}{2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot c_3\cdot r\cdot(c_1+c_2)}{c_1\cdot c_2}}} = \frac{2\cdot c_3\cdot r}{\sqrt{\frac{2\cdot c_3\cdot r\cdot(c_1+c_2)}{c_1\cdot c_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^2\cdot c_3^2\cdot r^2\cdot c_1\cdot c_2}{2\cdot c_3\cdot r\cdot(c_1+c_2)}} \Rightarrow C_0 = \sqrt{\frac{2\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot r}{c_1+c_2}}$$

Calculamos ahora la distribución del coste óptimo para cada uno de los costos, obteniendo que

1. Costo óptimo total de mantenimiento

$$\begin{aligned} C_1^0 &= c_1\cdot\frac{S_0^2}{2\cdot q_0} = \frac{c_1\cdot c_2^2\cdot q_0}{2\cdot(c_1+c_2)^2} = \frac{c_1\cdot c_2^2}{2\cdot(c_1+c_2)^2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot c_3\cdot r\cdot(c_1+c_2)}{c_1\cdot c_2}} \\ &= \frac{c_2}{2\cdot(c_1+c_2)}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot r}{c_1+c_2}} = \frac{c_2}{2\cdot(c_1+c_2)}\cdot C_0 \end{aligned}$$

2. Costo óptimo total de rotura

$$\begin{aligned} C_2^0 &= c_2 \cdot \frac{(q_0 - S_0)^2}{2 \cdot q_0} = c_2 \cdot \frac{(\frac{c_1 \cdot q_0}{c_1 + c_2})^2}{2 \cdot q_0} = \frac{c_1^2 \cdot c_2 \cdot q_0}{2 \cdot (c_1 + c_2)^2} \\ &= \frac{c_1^2 \cdot c_2}{2 \cdot (c_1 + c_2)^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}} \\ &= \frac{c_1}{2 \cdot (c_1 + c_2)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1 + c_2}} = \frac{c_1}{2 \cdot (c_1 + c_2)} \cdot C_0 \end{aligned}$$

3. Costo óptimo total de reposición

$$C_3^0 = c_3 \cdot \frac{r}{q_0} = \frac{c_3 \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}}} = \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3^2 \cdot r^2}{2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot r}{2 \cdot (c_1 + c_2)}} = \frac{C_0}{2}$$

En este sistema, la suma del costo de mantenimiento con el costo de rotura coincide con el costo de reposición, además, representan la mitad del costo total relacionado con la gestión del inventario.

$$C_1^0 + C_2^0 = \frac{c_2}{2 \cdot (c_1 + c_2)} \cdot C_0 + \frac{c_1}{2 \cdot (c_1 + c_2)} \cdot C_0 = \frac{C_0}{2} = C_3^0$$

Por lo tanto, la política óptima de inventario se dará cuando la mitad del coste esté destinado al coste de reposición, y la otra mitad, estará repartida entre el coste de mantenimiento y el coste de rotura. No necesariamente deben estar repartidos equitativamente el costo de mantenimiento y el costo de rotura, solamente que sumados igualen el costo de reposición. Observamos que si asumimos que este modelo no admite roturas, tendríamos que el coste de rotura $C_2 = 0$, por lo tanto, se daría la igualdad entre el costo de mantenimiento y el costo de reposición $C_1 = C_3$, que coincide con la solución del Sistema Clásico de Tamaño del Lote. Este sistema generaliza al Sistema Clásico de Tamaño del Lote, sin más que considerar $c_2 = \infty$.

3.1.1. Caso de unidades discretas

La política de inventario descrita anteriormente requiere que el artículo pueda medirse en unidades continuas, por ejemplo, litros de gasolina, kilos de fruta, metros de perfiles de hierro, etc. Pero no siempre nos vamos a encontrar que la cantidad a reponer el nivel de inventario sea una variable continua. Generalmente, en la práctica, se trabaja con unidades discretas. Supondremos que nuestras dos variables S y q son múltiplos de ciertas cantidades conocidas u y v respectivamente. Así, tendremos que S y q pueden tomar los siguientes valores:

$$S = ..., -3u, -2u, -u, 0, u, 2u, 3u, ...$$

$$q = ..., -3v, -2v, -v, 0, v, 2v, 3v, ...$$

Buscaremos un punto (S, q) que sea mínimo. Para hallar la solución óptima en este caso, partiremos de la misma función de coste que en el caso continuo, pero ahora el punto (S, q) óptimo debe verificar

$$C(S, q) \leq C(S \pm u, q)$$

$$C(S, q) \leq C(S, q \pm v)$$

$$C(S, q) \leq C(S \pm u, q \pm v)$$

Estas condiciones que imponemos son solamente condiciones necesarias y no son suficientes para hallar el punto mínimo. Para resolver este problema en el caso discreto utilizaremos una heurística, debido a que $C(S, q)$ es una función no lineal y con variables enteras. Propondremos a continuación la solución heurística del problema:

1. **Paso 1**: Relajamos el problema, calcularemos q_0 y S_0 como en el caso continuo, sin la condición de que sean variables enteras.

2. **Paso 2**: Consideraremos las siguientes valores:

   q_0^1= máximo valor múltiplo de v de forma que verifique $q_0^1 \leq q_0$
   q_0^2= mínimo valor múltiplo de v de forma que verifique $q_0 \leq q_0^2$
   S_0^1= máximo valor múltiplo de u de forma que verifique $S_0^1 \leq S_0$
   S_0^2= mínimo valor múltiplo de u de forma que verifique $S_0 \leq S_0^2$

3. **Paso 3**: Calculamos los costes en los puntos (S_0^1, q_0^1), (S_0^1, q_0^2), (S_0^2, q_0^1), (S_0^2, q_0^2), esto es

   $$C(S_0^1, q_0^1) \qquad C(S_0^1, q_0^2) \qquad C(S_0^2, q_0^1) \qquad C(S_0^2, q_0^2)$$

4. **Paso 4**: Tomaremos como solución heurística el punto de los anteriormente calculados que tenga menor coste.

3.2. Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario con pérdida de ventas

Plantearemos ahora el modelo matemático del Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, considerando que las roturas son ventas perdidas. Normalmente, cuando un cliente va a demandar un producto del que no hay existencia en el inventario del negocio, éste decide buscar una alternativa en algún otro negocio similar cercano con lo que se pierde la venta de ese producto. Esto es lo que se considera pérdida de venta.
Las características de este sistema son las mismas que las del Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, salvo en lo referente a las roturas. Antes suponíamos que las roturas se recuperaban con la llegada de la siguiente reposición, y representaban el dinero que se dejaba de ganar por unidad de tiempo y por producto. Así, el coste de rotura tenía como dimensión

$$[c_2] = \frac{[\$]}{[Q] \cdot [T]}$$

Ahora las roturas se suponen que son ventas perdidas y, por tanto, no se pueden recuperar. Esto afectará a la dimensión del costo de rotura, pasando a ser

$$[c_2] = \frac{[\$]}{[Q]}$$

Esto lleva a tener que volver a calcular el coste total de rotura. Se tiene que $C_2(S,q) = c_2 \cdot I_2(S,q)$, donde

$$I_2(S,q) \equiv \text{ Número medio de roturas} \equiv \frac{\text{Longitud de roturas}}{\text{Periodo de tiempo}}$$

Las roturas de este sistema de inventario no dependerán del tiempo, simplemente de la cantidad total no vendida.

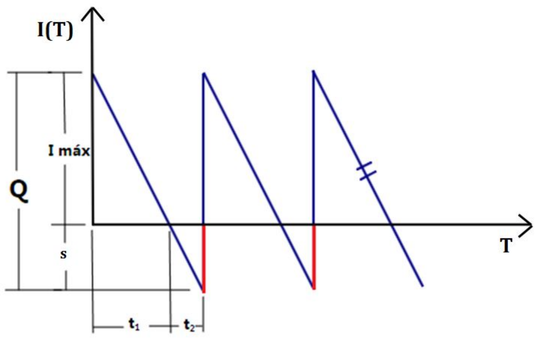

Figura 3.4: Caso pérdida de ventas

Luego, la función que representa el costo medio de rotura viene dada por

$$I_2(S,q) = \begin{cases} \frac{-s}{t} & \text{, si } S \leq 0 \\ \\ \frac{-s}{t} & \text{, si } 0 \leq S \leq q \\ \\ 0 & \text{, si } S \geq q \end{cases} = \begin{cases} \frac{(q-S)\cdot r}{q} & \text{, si } S \leq 0 \\ \\ \frac{(q-S)\cdot r}{q} & \text{, si } 0 \leq S \leq q \\ \\ 0 & \text{, si } S \geq q \end{cases}$$

Por lo tanto, obtendremos que el costo total de rotura para el caso de pérdida de ventas es

$$C_2(S,q) = \begin{cases} c_2 \cdot \frac{(q-S)\cdot r}{q} & , \text{si } S \leq 0 \\ \\ c_2 \cdot \frac{(q-S)\cdot r}{q} & , \text{si } 0 \leq S \leq q \\ \\ 0 & , \text{si } S \geq q \end{cases}$$

El costo de mantenimiento y el costo de reposición no se verán afectados por los cambios que hemos considerado. Por lo tanto, serán los mismos que en el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, esto es

$$C_1(S,q) = \begin{cases} 0 & , \text{si } S \leq 0 \\ c_1 \cdot \frac{S^2}{2\cdot q} & , \text{si } 0 \leq S \leq q \\ c_1 \cdot (S - \frac{q}{2}) & , \text{si } S \geq q \end{cases} \qquad\qquad C_3(q) = c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Por consiguiente, la función de coste total del inventario para este sistema será

$$C(S,q) = \begin{cases} c_2 \cdot \frac{(q-S)\cdot r}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q} & , \text{si } S \leq 0 \\ \\ c_1 \cdot \frac{S^2}{2\cdot q} + c_2 \cdot \frac{(q-S)\cdot r}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q} & , \text{si } 0 \leq S \leq q \\ \\ c_1 \cdot (S - \frac{q}{2}) + c_3 \cdot \frac{r}{q} & , \text{si } S \geq q \end{cases}$$

Se comprueba que el punto que minimiza la función $C(S,q)$ está contenido en la región $0 \leq S \leq q$, ya que, en otro caso, como la función es monótona en las regiones $S \leq 0$ y $S \geq q$, la solución se obtendría en los extremos de esas regiones, es decir:

- Si $S \leq 0$ tendremos que $-S \geq 0$, luego

  $$C(S,q) = c_2 \cdot (\frac{q-S}{q}) + c_3 \cdot \frac{r}{q} \geq c_2 \cdot \frac{q}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q} = C(0,q)$$

  lo que implica que la función es linealmente decreciente respecto de S en la región $S \leq 0$.

- Si $S \geq q$, tendremos que

  $$C(S,q) = c_1 \cdot (S - \frac{q}{2}) + c_3 \cdot \frac{r}{q} \geq c_1 \cdot (q - \frac{q}{2}) + c_3 \cdot \frac{r}{q} \geq c_1 \cdot \frac{q}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q} = C(q,q)$$

  lo que implica que la función es linealmente creciente respecto de S en la región $S \geq q$.

Por lo tanto, de existir el mínimo, éste debe encontrarse en la región determinada por $0 \leq S \leq q$. Para hallarlo tendremos que resolver el problema

$$\min_{s.a.\ 0 \leq S \leq q} C(S,q) = c_1 \cdot \frac{S^2}{2 \cdot q} + c_2 \cdot \frac{(q-S) \cdot r}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Para ello, derivamos parcialmente la función objetivo e igualamos a cero, obteniendo:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \frac{2 \cdot S}{2 \cdot q} - c_2 \cdot \frac{r}{q} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot S = c_2 \cdot r \Rightarrow S = \frac{c_2 \cdot r}{c_1} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q} = 0 \Rightarrow -c_1 \cdot \frac{S^2}{2 \cdot q^2} + c_2 \cdot \frac{r \cdot q - (q-S) \cdot r}{q^2} - \frac{c_3 \cdot r}{q^2} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot S^2 + 2 \cdot c_2 \cdot r \cdot S + 2 \cdot c_3 \cdot r = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado para S obtenemos que

$$S = \frac{-2 \cdot c_2 \cdot r \pm \sqrt{4 \cdot c_2^2 \cdot r^2 - 4 \cdot c_1 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot r}}{2 \cdot c_1} \tag{3.2}$$

Observamos que hemos obtenido una contradicción, pues las ecuaciones 3.1 y 3.2 deberían ser iguales y no lo son. Así, vemos que por esta vía no es posible encontrar la solución del problema. Para obtener la solución óptima, no podemos proceder por el método tradicional de las derivadas parciales. Aplicaremos un cambio de variable

$$K = \frac{S}{q}$$

Por lo tanto, ahora la función de coste que resulta a minimizar es

$$\min_{s.a.\ 0 \leq K \leq 1} C(K,q) = c_1 \cdot K^2 \cdot q + c_2 \cdot r \cdot (1-K) + c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Derivamos la función objetivo parcialmente con respecto a q e igualamos a cero, obteniendo

$$\frac{\partial C}{\partial q} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot K^2 - c_3 \cdot \frac{r}{q^2} = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1 \cdot K^2} \Rightarrow q_0 = \frac{1}{K} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}$$

Una vez hallada q_0, lo sustituimos en la función objetivo, obteniendo una función de una sola variable

$$\begin{aligned} C(K,q_o) &= C(K) = c_1 \cdot K \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}} + c_2 \cdot r \cdot (1-K) + c_3 \cdot \frac{K \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}} \\ &= \frac{\frac{c_1 \cdot K}{2} \cdot \frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1} + c_3 \cdot K \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}} + c_2 \cdot r \cdot (1-K) = \frac{2 \cdot c_3 \cdot K \cdot r}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}} + c_2 \cdot r \cdot (1-K) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{(2 \cdot c_3 \cdot K \cdot r)^2 \cdot c_1}{2 \cdot c_3 \cdot r}} + c_2 \cdot r \cdot (1 - K) = \left[\sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r}\right] \cdot K + c_2 \cdot r \cdot (1 - K)$$

Nótese que hemos obtenido una función lineal respecto de la variable K.

$$C(K) = \left[\sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r\right] \cdot K + c_2 \cdot r$$

Esta función lineal tiene por pendiente $m = \sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r$. Además, la función está acotada entre 0 y 1. Teniendo en cuenta la acotación y en función del signo de la pendiente, obtendremos distintos resultados.

- Si $\sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r > 0$, entonces la función $C(K)$ es linealmente creciente en $[0, 1]$, lo que implica que el mínimo se alcanza cuando $K = 0$. Tendríamos como solución óptima del problema

  $$S = 0$$

  $$q_0 = \frac{1}{K} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}} = \infty$$

  $$s = S - q = -\infty$$

  En este caso, la solución óptima establece que no haya inventario. El punto de reposición se encuentra en el menos infinito, esto es, el inventario cae en rotura permanente y dejamos que siga cayendo, ya que reponer el inventario supondría asumir un costo mayor.

- Si $\sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r < 0$, entonces la función $C(K)$ es linealmente decreciente en $[0, 1]$, lo que implica que el mínimo se alcanza cuando $K = 1$. Tendríamos como solución óptima del problema

  $$1 = K = \frac{S}{q} \Rightarrow S = q = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}$$

  $$s = S - q = 0$$

  En este caso, la solución óptima no permite roturas, y el tamaño del lote coincide con el nivel del inventario. Esto no es más que la solución del Sistema Clásico de Tamaño del Lote, como ya se había visto. Así, el Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario generaliza al Sistema Clásico de Tamaño del Lote.

3.3. Sistema de Nivel de Inventario y Periodo de Gestión con demanda probabilística

A continuación, plantearemos un modelo de gestión de inventario con demanda probabilística. El término probabilístico es la expresión que comprende la asignación de valores numéricos a sucesos que tienen la posibilidad de ocurrir y dependen de fenómeros de la naturaleza o de variables inherentes a un proceso que no son controlables.
Antes considerabamos que la demanda seguía un patrón uniforme, y que era constante durante el periodo de gestión. Al estar considerando demanda determinísta, se tenía que existía una relación entre el tamaño del lote q y el periodo de gestión t, esto era, $q = r \cdot t$. Ahora, al trabajar con demanda probabilística, esta relación lineal no estará presente. Supondremos que el sistema sigue una demanda aleatoria. Por tanto, la cantidad a pedir y la frecuencia con que se realizan éstos pedidos van a ser calculados de forma probabilística. Este tipo de sistema es utilizado cuando la demanda no se puede determinar con certeza. Al trabajar con demanda probabilística estaremos utilizando Modelos Estocásticos, debido a que el comportamiento del sistema es intrínsecamente no determinista. El sistema está determinado tanto por las acciones predecibles del proceso como por los elementos aleatorios. En estos sistemas, las variables están en función de que el evento se lleve a cabo, es decir, se toman los datos históricos como referencia para poder establecer el periodo de gestión y el tamaño de lote óptimos.
A continuación, consideraremos sistemas tipo $(1, 2, 3)$ con política (t, S) y demanda probabilística. Por lo tanto, dispondremos de una función de probabilidad $p(x, t)$ para cada periodo de tiempo t múltiplo de un periodo básico t_p conocido. Para este sistema, la ecuación del costo total para el caso de unidades discretas viene dada por:

$$C(t, S) = c_1 \cdot \sum_{x=0}^{S} (S - \frac{x}{2}) \cdot p(x, t) + c_1 \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \frac{S^2}{2x} \cdot p(x, t) + c_2 \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \frac{(x - S)^2}{2x} \cdot p(x, t) + \frac{c_3}{t}$$

donde x y S toman valores múltiplos de una cantidad fija u, esto es

$$x, S = 0, u, 2u, 3u, ...$$

Además, el periodo de tiempo t es un múltiplo de un periodo básico t_p, esto es

$$t = t_p, 2t_p, 3tp, ...$$

También, se asume que las roturas se pueden recuperar cuando se reciban nuevas reposiciones.
Se asume que, aunque no se haya producido ninguna reposición, existe un costo c_3 cada t unidades de tiempo. En caso de que no fuera así, se debe multiplicar el último sumando, $\frac{c_3}{t}$, por la probabilidad de que haya al menos una reposición, $(1 - p(0, t))$.
Buscaremos un punto (t, S) que sea mínimo. Para hallar la solución óptima en este caso, el punto (t, S) óptimo debe verificar estas dos condiciones necesarias:

$$C(t, S_0) \leq C(t, S_0 \pm u)$$

No se obtiene una solución explícita general para el periodo de gestión óptimo t_0, sino que debemos de ir variando los periodos de gestión e ir calculando el costo total asociado y buscar el mínimo. Tomamos cierto periodo de gestión t^*, el nivel óptimo correspondiente $S_0(t^*)$ se determina a partir de

$$M(t^*,\, S_0(t^*) - u) \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2} \leq M(t^*,\, S_0(t^*)$$

siendo

$$M(t,S) = \sum_{x=0}^{S} p(x,t) + (S + \frac{u}{2}) \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \frac{p(x,t)}{x}$$

El proceso iterativo para obtener la solución óptima que tiene asociado este modelo viene determinado por la condición anterior, la cual requiere el *"Cálculo de distribuciones discretas de probabilidad"*, que se recoge en el apéndice A, para determinar la función $M(t,S)$.

Una vez desarrollados los resultados teóricos de los sistemas de inventario que utilizaremos en la modelización de la gestión del stock del producto que se comercializa en la óptica, en el siguiente capítulo se aplicarán dichos resultados para determinar las políticas óptimas de inventario.

Capítulo 4

Aplicación

En este capítulo, describiremos los datos de ventas y la evolución en el inventario de un artículo que se vende en una óptica. Dicho producto es cierto tipo de líquido de lentillas facilitado por la óptica. Se estudiará cómo es el comportamiento de los datos para obtener la evolución del nivel de stock del producto y se describirán los costes unitarios necesarios para poder aplicar los modelos de gestión de inventario.
Se presentará un estudio detallado de cómo aplicar el Sistema de Tamaño del Lote para analizar el nivel de stock del líquido de lentillas y evaluar el control de inventario de dicho producto. También, se propondrá una alternativa de trabajo, permitiendo la posibilidad de roturas y aplicando el Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario. Finalmente, analizaremos el control de inventario asumiendo que la demanda es aleatoria, para lo cual habrá que determinar la distribución de probabilidad de la demanda a partir de las ventas del último año.

4.1. Descripción de los datos

En nuestro trabajo nos centraremos en analizar la gestión de un producto específico que se comercializa en un pequeño negocio, en este caso, una óptica. Disponemos de las ventas diarias de los productos, que por simplicidad, hemos agrupado por semanas. La óptica abre de lunes a sábado. Por lo tanto, nuestras semanas son consideradas de 6 días laborales.
Los datos presentados a continuación representan las ventas por semana desde enero de 2013 hasta enero de 2014 del artículo *Bausch & Lomb Biotrue 300 ml*, un líquido de lentillas que se vende en la óptica. Dichos datos se recogen en las tablas 4.1 y 4.2.

Semana	Stock inicial	Unidades vendidas	Reposición	Stock final
1	8	3	0	5
2	5	2	20	23
3	23	2	0	21
4	21	0	0	21
5	21	1	0	20
6	20	3	0	17
7	17	2	0	15
8	15	3	0	12
9	12	1	0	11
10	11	3	0	8
11	8	4	0	4
12	4	2	20	22
13	22	2	0	20
14	20	0	0	20
15	20	1	0	19
16	19	3	0	16
17	16	3	0	13
18	13	0	0	13
19	13	3	0	10
20	10	3	0	7
21	7	0	0	7
22	7	1	0	6
23	6	3	20	23
24	23	6	0	17
25	17	1	0	16
26	16	2	0	14
27	14	1	0	13
28	13	5	0	8
29	8	2	20	26
30	26	2	0	24
31	24	2	0	22
32	22	0	0	22
33	22	2	0	20
34	20	1	0	19
35	19	1	0	18
36	18	0	0	18
37	18	1	0	17

Cuadro 4.1: Ventas por semana. Tabla 1

Semana	Stock inicial	Unidades vendidas	Reposición	Stock final
38	17	2	0	15
39	15	2	0	13
40	13	1	0	12
41	12	0	0	12
42	12	5	20	27
43	27	2	0	25
44	25	1	0	24
45	24	2	0	22
46	22	1	0	21
47	21	2	0	19
48	19	1	0	18
49	18	2	0	16
50	16	3	0	13
51	13	2	20	31
52	31	4	0	27
53	27	1	0	26

Cuadro 4.2: Ventas por semana. Tabla 2

Para el producto considerado (*Bausch & Lomb Biotrue 300 ml*) el stock a final del año 2012 era de 8 unidades. Por tanto, en enero de 2013 se comienza con esa cantidad en stock. Las semanas consideradas en las tablas 4.1 y 4.2 corresponden a un periodo de gestión de 6 días, debido a que los domingos son días festivos y no representan una bajada en el nivel de inventario. La evolución del nivel de inventario a lo largo del año viene dada por la siguiente gráfica.

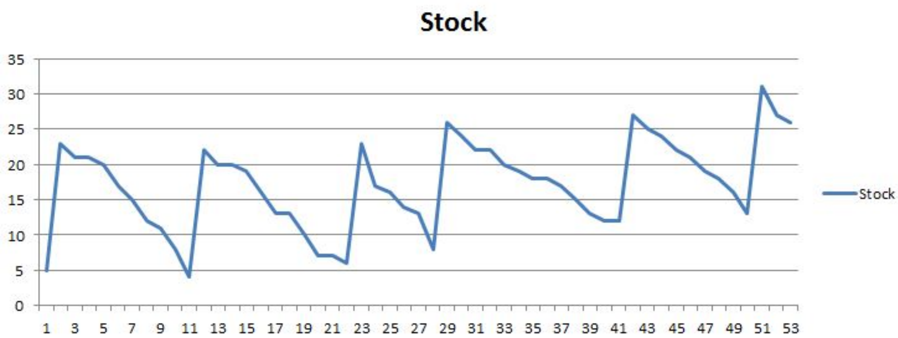

Figura 4.1: Nivel del Inventario del líquido de lentillas Bausch & Lomb Boitrue 300 ml

4.2. Aplicación del Sistema de Tamaño del Lote

Estudiaremos la gestión de inventario de ese líquido de lentillas mediante el Modelo Clásico de Tamaño del Lote, pues según los datos obtenidos, la política de la empresa no permite roturas.
En primer lugar, para poder aplicar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote, tenemos que conocer los valores unitarios del costo de mantenimiento (c_1) y del costo de reposición (c_3). Para ello disponemos de los siguientes gastos que nos proporcionan los responsables de la empresa:

Tipo de gasto	Costo	Costo por semana
Alquiler	550 €/mes	137,500 €
Seguro	535€/año	11,145 €
Luz	60 €/mes	15 €
Agua	10 €/mes	2,500 €
Teléfono	65 €/mes	16,250 €
Total		182,395 €

Cuadro 4.3: Gastos fijos del local ocupado por la óptica

Para calcular el costo de mantenimiento unitario del artículo, debemos calcular el costo que representa guardar una unidad de material en el local. Este producto es almacenado en una estantería de $2,5\ m^2$ de base y $1\ m$ de altura con una capacidad de almacenamiento de 50 unidades de producto. Por tanto, una unidad de producto ocupa aproximadamente $0,05\ m^3$. Además el local mide aproximadamente $60\ m^2$ de base y tiene $3\ m$ de altura. Sin embargo, no todo el espacio del local es utilizado para almacenar el material. Existe una habitación en el local que es utilizada para almacenar ciertos productos que se comercializan en la óptica y, además, asumimos que las estanterías deben estar pegadas a la pared y también son utilizadas para almacenar los productos. El espacio aprovechable para almacenamiento en el local es aproximadamente $25\ m^2$ del local y con una altura de 2 metros. Por tanto, consideramos que la capacidad de almacenamiento del local es $25m^2 \times 2m = 50\ m^3$. Luego, de aquí se obtendrá el costo unitario de mantenimiento:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\text{Gasto total local por semana}}{m^3 \text{ de almacenamiento}} \cdot \frac{m^3 \text{ estantería}}{\text{capacidad estantería}} = \\
&= \frac{182,395}{50} \cdot \frac{2,5}{50} = 0,18 \ \text{€/ Botella y semana}
\end{aligned}
$$

El coste de realizar un pedido es independiente del número de artículos diferentes solicitados y de la cantidad pedida por artículo. Es un valor constante y conocido que viene siendo unos 5 €. Por tanto, tendremos que $c_3 = 5$ € por reposición.

Supondremos, en principio, que trabajaremos con un sistema determinístico de inventario, donde la demanda es siempre constante y conocida. Para poder hallar la razón de demanda r utilizaremos los datos de ventas presentados en las tablas 4.1 y 4.2. Para ello tomaremos como periodo de gestión el intervalo de tiempo en el que el negocio reponía el inventario. Se puede apreciar fácilmente que ese periodo no es constante. Para ello, una vez seleccionados los datos, en cada periodo realizaremos un ajuste lineal mínimo cuadrático. Así, calcularemos las rectas de regresión en cada caso, junto con su coeficiente de correlación para saber si el ajuste es fiable.
Tomamos los datos de las ventas correspondientes al primer periodo de gestión, esto es, el número de ventas entre la semana 2 y la semana 11. Ordenamos los datos, y por un ajuste lineal, calculamos la recta de regresión.

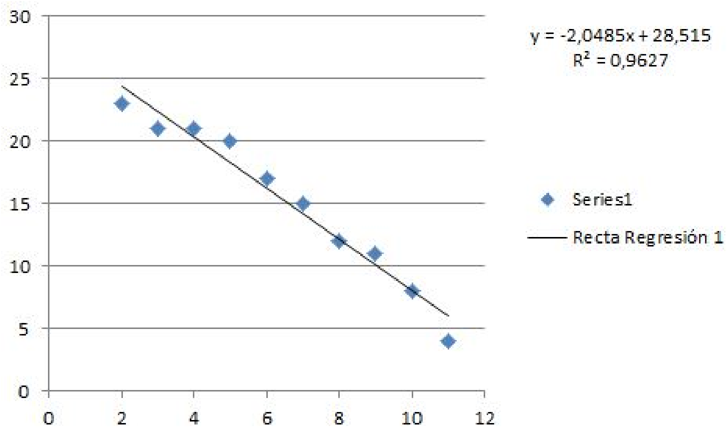

Figura 4.2: Recta de regresión

Obtenemos que la recta de regresión para este primer periodo de gestión es $y_1(x) = -2,0485x + 28,515$, teniendo como coeficiente de correlación $r_1 = -0,981$. Por lo tanto, podemos garantizar que es un buen ajuste.
Repetimos este proceso para los otros 4 periodos de gestión, obteniendo como resultado las siguientes rectas de regresión con sus respectivos coeficientes de correlación.

$$y_2(x) = -1,7455x + 43,582 \qquad r_2 = -0,986$$
$$y_3(x) = -2,5429x + 80,010 \qquad r_3 = -0,960$$
$$y_4(x) = -1,1429x + 58,308 \qquad r_4 = -0,990$$
$$y_5(x) = -1,6333x + 95,689 \qquad r_5 = -0,993$$

Tenemos que los ajustes de las rectas de regresión son buenos, ya que el peor ajuste es de $r_3 = -0,960$. Por lo tanto, tomaremos como razón de demanda r el promedio de las pendientes (en valor absoluto) de cada una de la rectas de regresión calculadas anterioremente, esto es

$$r = \frac{2,0485 + 1,7455 + 2,5429 + 1,1429 + 1,6333}{5} = 1,823$$

Consecuentemente, tendremos como resultado los siguientes parámetros de entrada para analizar el modelo de gestión de stock:

$$r = 1,823 \text{ botellas por semana}$$
$$c_1 = 0,18 \text{ €/ Botella y semana}$$
$$c_3 = 5 \text{ € por reposición}$$

Una vez calculados la razón de demanda y los costos unitarios de mantenimiento y reposición, podemos aplicar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote. Pero como tratamos con unidades discretas de producto, utilizaremos el Sistema Clásico de Tamaño del Lote con unidades discretas. Por lo tanto, se deberá encontrar el tamaño de lote óptimo q, con q entero, que verifique:

$$q \cdot (q-u) \leq \frac{2 \cdot r \cdot c_3}{c_1} \leq q \cdot (q+u)$$

donde $u = 1$. Operando se tiene

$$\frac{2 \cdot r \cdot c_3}{c_1} = \frac{2 \cdot (1,823) \cdot 5}{0,18} = 101,28$$

Tomando $q = 9$, observamos que no se cumple la condición, porque

$$72 = 9 \cdot 8 \leq 101,28 \not\leq 9 \cdot 10 = 100$$

Sin embargo, tomando $q = 10$, sí se verifica la condición de optimalidad

$$90 = 10 \cdot 9 \leq 101,28 \leq 10 \cdot 11 = 110$$

Con este tamaño del lote se tendrá que el periodo óptimo de gestión o ciclo del inventario es

$$t = \frac{q}{r} = \frac{10}{1,823} = 5,485 \text{ semanas}$$

Como cada semana la habíamos considerado como 6 días, se repondrá cada $5,485 \cdot 6 = 32,91$ días laborales. Por lo tanto, la solución óptima es reponer 10 unidades de producto cada 33 días laborales. Siguiendo esta política óptima el coste total por periodo de reposición t relacionado con la gestión del inventario es

$$C_0 = c_1 \cdot \frac{q_0}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q_0} = 0,18 \cdot \frac{10}{2} + 5 \cdot \frac{1,823}{10} = 0,9 + 0,9115 = 1,8115 \text{ € cada 33 días laborales}$$

Como en el año hay 52 semanas y debemos eliminar los domingos, podemos considerar que hay $365 - 52 = 313$ días laborales, lo que conlleva a que el coste anual sea

$$C_{TL} = \frac{1,8115}{33} \cdot 313 = 17,18 \text{ €}$$

4.3. Caso con rotura

Hasta ahora habíamos afirmado que la política de la empresa no permitía roturas, ya que se reponía el inventario cuando éste llegaba a un cierto nivel de inventario $s \geq 0$, que denotábamos como punto de reposición. Por ello, habíamos aplicado el Sistema Clásico de Tamaño del lote.
A continuación, permitiremos la existencia de roturas. Por consiguiente, el costo unitario de rotura estará presente en el modelo, haciendo que ya no valgan los resultados obtenidos en el caso anterior. Así, ahora se aplicará el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario. El costo unitario de mantenimiento, el costo unitario de reposición y la razón de demanda son los mismos parámetros que habíamos considerado anteriormente. Esto es:

$$r = 1,823 \text{ botellas por semana}$$

$$c_1 = 0,18 \text{ € / Botella y semana}$$

$$c_3 = 5 \text{ € por reposición}$$

Faltaría por determinar el costo unitario de rotura, pero para ello es necesario conocer cómo se comportan las roturas. Se distinguen dos casos: el caso en el que el cliente está dispuesto a esperar a la llegada de la siguiente reposición y el caso de pérdida de ventas.

4.3.1. Clientes dispuestos a esperar

Supondremos que nuestras roturas se encuentran en el caso de que el cliente está dispuesto a esperar a la llegada de la siguiente reposición. Nótese que el costo unitario de rotura depende del beneficio que se obtiene por unidad vendida, esto es:

$$b = s - c$$

donde s =precio de venta al público y c =precio de compra.
En nuestro caso particular, disponemos de estos datos, facilitados por la óptica. Así, cada bote de líquido de lentillas de 300 ml es comprado por la óptica a un precio de $c = 9,7$ € y dicho producto es vendido al público por $s = 16$ €. Por lo tanto, el beneficio por unidad es de $b = 16 - 9,7 = 6,3$ €. Ahora bien, si se produce una rotura, como los clientes están dispuestos a esperar, no se pierde este beneficio. Pero no es menos cierto que hasta que no llegue la próxima reposición del producto no se produce la venta. En consecuencia, perdemos el interés que nos darían en el banco si ese dinero ya lo hubiéramos recibido. También, para que los clientes estén dispuestos a esperar, puede ser que tengamos que aplicar un descuento sobre el precio de venta, lo cual incentiva a que los clientes decidan esperar. Teniendo en cuenta todo lo anterior, consideramos que el costo unitario de rotura es un tanto por ciento i del beneficio unitario de la venta del producto. Podemos considerar por ejemplo que $i = 0,05$, es decir, un cinco por ciento. Así, el coste unitario de rotura en este caso es

$$c_2 = i \cdot (s - c) = 0,05 \cdot 6,3 = 0,315 \text{ € / Botella y semana}$$

Así, se completan todos los datos de entrada y estamos en condiciones de poder aplicar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario.
Como se trabaja con unidades discretas, ya que las reposiciones deben ser una cantidad discreta de líquidos de lentillas, propondremos una solución heurística para el problema. Tomaremos q y S como variables enteras, luego, consideraremos que q es múltiplo de $v = 1$ y que S es múltiplo de $u = 1$, esto es,

$$S = ..., -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...$$

$$q = ..., -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, ...$$

1. **Paso 1**: Relajamos el problema, calcularemos q_0 y S_0 como en el caso continuo, sin la condición de que sean variables enteras. Así, tendremos que

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r \cdot (c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot (1,823) \cdot (0,18 + 0,315)}{(0,18) \cdot (0,315)}} = \sqrt{\frac{9,02385}{0,0567}} = 12,6155$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (0,315) \cdot 5 \cdot (1,823)}{0,18 \cdot (0,18 + 0,315)}} = \sqrt{\frac{5,74245}{0,0891}} = 8,028$$

2. **Paso 2**: Consideraremos los siguientes valores:

q_0^1= máximo valor múltiplo de v de forma que verifique $q_0^1 \leq q_0 \Longrightarrow q_0^1 = 12$
q_0^2= mínimo valor múltiplo de v de forma que verifique $q_0 \leq q_0^2 \Longrightarrow q_0^2 = 13$
S_0^1= máximo valor múltiplo de u de forma que verifique $S_0^1 \leq S_0 \Longrightarrow S_0^1 = 8$
S_0^2= mínimo valor múltiplo de u de forma que verifique $S_0 \leq S_0^2 \Longrightarrow S_0^2 = 9$

3. **Paso 3**: Calculamos los costes en los puntos (S_0^1, q_0^1), (S_0^1, q_0^2), (S_0^2, q_0^1), (S_0^2, q_0^2), esto es

$$C(S_0^1, q_0^1) \qquad C(S_0^1, q_0^2) \qquad C(S_0^2, q_0^1) \qquad C(S_0^2, q_0^2)$$

donde la función de coste es $C(S, q) = c_1 \cdot \frac{S^2}{2 \cdot q} + c_2 \cdot \frac{(q-S)^2}{2 \cdot q} + c_3 \cdot \frac{r}{q}$. Por lo tanto,
$C(8, 12) = 0,18 \cdot \frac{8^2}{2 \cdot 12} + (0,315) \cdot \frac{(12-8)^2}{2 \cdot 12} + 5 \cdot \frac{1,823}{12} = 0,48 + 0,21 + 0,76 = 1,45$ €
$C(8, 13) = 0,18 \cdot \frac{8^2}{2 \cdot 13} + (0,315) \cdot \frac{(13-8)^2}{2 \cdot 13} + 5 \cdot \frac{1,823}{13} = 0,44 + 0,3 + 0,7 = 1,44$ €
$C(9, 12) = 0,18 \cdot \frac{9^2}{2 \cdot 12} + (0,315) \cdot \frac{(12-9)^2}{2 \cdot 12} + 5 \cdot \frac{1,823}{12} = 0,6075 + 0,118 + 0,76 = 1,4855$ €
$C(9, 13) = 0,18 \cdot \frac{9^2}{2 \cdot 13} + (0,315) \cdot \frac{(13-9)^2}{2 \cdot 13} + 5 \cdot \frac{1,823}{13} = 0,56 + 0,1938 + 0,7 = 1,4538$ €

4. **Paso 4**: Tomaremos como solución heurística el punto de los anteriormente calculados que tenga menor coste. Por lo tanto, la solución propuesta es

$$S_0 = 8 \qquad q_0 = 13 \qquad s_0 = S_0 - q_0 = -5$$

Es decir, tendremos que nuestro nivel de inventario es $S_0 = 8$ botellas de líquido de lentillas, y realizaremos pedidos parar reponer el inventario de $q_0 = 13$ botellas.

Se aprecia que al considerar las roturas en nuestro modelo, la solución heurística nos da como resultado que el punto de reposición es $s = -5$, es decir, permitiendo cinco roturas, se minimizará los costos de gestión de inventario. Como existe un relación lineal entre el tamaño del lote q y el periodo de gestión t, dado por $q = r \cdot t$, obtenemos que en este caso el periodo de gestión es $t_0 = 7,13$ semanas, que son aproximadamente 43 días laborables. El costo mínimo anual que incurre este modelo es de $C_R = 10,48$ €.

4.3.2. Caso de pérdida de ventas

Supondremos ahora que nuestras roturas se encuentran en el caso de pérdidas de ventas, es decir, si un cliente viene a demandarnos el producto y no tenemos, inmediatamente el cliente abandonará la tienda y habremos perdido nuestra venta. Para considerar el costo unitario de rotura, procederemos de forma similar al caso anterior. En este caso, el costo de rotura representa el dinero que dejamos de ganar por perder la venta, esto es, el beneficio unitario. Por lo tanto, el costo unitario de rotura será de la forma:

$$c_2 = s - c$$

donde s =precio de venta al público y c =precio de compra.
Conocemos los datos s y c, pues son los mismos que en el caso anterior. Por lo tanto, nuestro costo unitario de rotura será $c_2 = 16 - 9,7 = 6,3$. Así, se disponen de todos los datos para poder aplicar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario en el caso de ventas perdidas, esto es,

$$r = 1,823 \text{ botellas por semana}$$

$$c_1 = 0,18 \text{ €/ Botella y semana}$$

$$c_2 = 6,3 \text{ €/ Botella}$$

$$c_3 = 5 \text{ € por reposición}$$

La función de coste de este sistema es

$$C(S,q) = c_1 \cdot \frac{S^2}{2 \cdot q} + c_2 \cdot \frac{(q - S) \cdot r}{q} + c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Para resolver el problema de inventario, tenemos que realizar un cambio de variable

$$K = \frac{S}{q}$$

resultando la nueva función de coste

$$C(K) = \left[\sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r\right] \cdot K + c_2 \cdot r$$

y obteníamos nuestro resultado en función del signo de la pendiente $m = \sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r$. Calculamos

$$
\begin{aligned}
m &= \sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r} - c_2 \cdot r = \sqrt{2 \cdot (0,18) \cdot 5 \cdot (1,823)} - 6,3 \cdot (1,823) \\
&= \sqrt{3,2815} - 11,4849 = -9,6734 < 0
\end{aligned}
$$

Lo que implica que $C(K)$ es una función linealmente decreciente en $[0,1]$, luego, el mínimo se alcanzará cuando $K = 1$, obteniendo que nuestra solución óptima es no permitir roturas. Así, la política óptima es

$$S_0 = q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot c_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,823) \cdot 5}{0,18}} = 10,064 \qquad s_0 = 0$$

Como es lógico, hemos obtenido la solución del Sistema Clásico de Tamaño del Lote, ya que el costo de rotura es elevado y éste sistema es una particularización del Sistema de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario. Sin embargo, estamos trabajando con unidades discretas, y el resultado obtenido es para el caso continuo. Al coincidir con el Sistema Clásico de Tamaño del Lote, también la política óptima coincidirá con el resultado en el caso de unidades discretas, por lo tanto, tendremos que la solución óptima será

$$S_0 = q_0 = 10 \qquad s_0 = 0$$

Por tanto, el costo anual es $C_{PV} = 17,18$ €.

4.4. Demanda aleatoria

Consideraremos ahora que la demanda de nuestro artículo es aleatoria. Basándonos en las ventas ocurridas durante el año 2013, mostradas en los cuadros 4.1 y 4.2, podemos determinar cuál será la función de probabilidad de las ventas ocurridas por semana. Así, la distribución de probabilidad será

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,13 & 0,26 & 0,32 & 0,19 & 0,04 & 0,04 & 0,02 \end{array} \right.$$

Asumamos además, que estamos ante un sistema tipo $(1,2,3)$ que sigue una política (t, S), donde las roturas se consideran que se pueden recuperar con la llegada de la siguiente reposición. Luego, los parámetros de entrada serán

$$c_1 = 0,18 \text{ €/ Botella y semana}$$

$$c_2 = 0,315 \text{ €/ Botella y semana}$$

$$c_3 = 5 \text{ €}$$

Considerando un periodo básico $t_p = 1$ semana, y suponiendo que la demanda es discreta múltiplo de $u = 1$ unidad, tenemos que nuestra función de coste es

$$C(t,S) = c_1 \cdot \sum_{x=0}^{S}(S - \frac{x}{2}) \cdot p(x,t) + c_1 \cdot \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} \cdot p(x,t) + c_2 \cdot \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} \cdot p(x,t) + \frac{c_3}{t}$$

Debido a que resolver este problema puede ser un proceso largo y tedioso, además de consumir mucho tiempo de cálculo, utilizaremos un programa en C++ que nos permita conocer la solución óptima. Introduciendo los parámetros de entrada y la función de probabilidad en el programa, obtenemos que la solución óptima del problema de inventario es

$$t = 7 \text{ semanas}$$

$$S = 8 \text{ unidades}$$

$$C_0 = 1,59077 \text{ €/periodo t}$$

Es decir, la política óptima será reponer el inventario cada $t = 7$ semanas una cantidad de artículos de forma que el nivel de inventario suba hasta un nivel de $S = 8$ unidades, incurriendo así en un costo mínimo de $C_0 = 1,59077$ € por cada ciclo de inventario, y un costo mínimo anual de $C_{DA} = 11,855$ €.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado ciertos tipos de modelos de gestión de inventario que pueden ser aplicados para analizar la gestión del inventario de un determinado líquido de lentillas en una óptica, *Bausch & Lomb Biotrue 300 ml*. Concretamente se ha analizado los costos de mantenimiento y reposición esperados al aplicar cada uno de los modelos anteriores, y así, poder calcular el costo total de inventario. Este análisis se ha realizado teniendo en cuenta las ventas de dicho producto en un periodo conocido anterior, desde enero de 2013 hasta enero de 2014. Usando conceptos y fundamentos de los Modelos de Gestion de Inventario, la evolución del nivel de stock de dicho producto ha podido modelarse como un Sistema Clásico de Tamaño del Lote y como un Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario. Se ha considerado tanto el caso de demanda determinista como demanda aleatoria.

Como conclusiones de los resultados obtenidos, se deduce que se puede mejorar la gestión del producto. La política usada hasta el momento era irregular, se reponía con un tamaño del lote fijado, $q = 20$ unidades, pero los periodos de gestión no eran constantes, las reposiciones ocurrían cuando el nivel de inventario variaba entre $s = 4$ y $s = 13$. Estas variaciones provocan sobrecostos indeseados e innecesarios. La política llevada por la empresa hasta el momento generaba un coste total anual en el inventario de $C_A = 181,02$ €.

Aplicando el Sistema Clásico de Tamaño del Lote, estaremos asumiendo que la política de la empresa no permite roturas. En ese caso se obtuvo que la solución óptima era reponer el inventario con $q = 10$ unidades cada $t = 5,485$ semanas. Este modelo lleva asociado un coste mínimo total anual de $C_{TL} = 17,18$ €.

Al analizar la posibilidad de la existencia de roturas, planteamos los Sistemas de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, distinguiendo los distintos casos de las roturas, esto es, clientes dispuestos a esperar y pérdida de ventas.

Los resultados obtenidos al aplicar el Sistema Clásico de Tamaño del Lote y Nivel de Inventario, que es aquel sistema que asume que las roturas son clientes que están dispuestos a esperar, obtienen como solución óptima reponer el inventario con $q = 13$ unidades de producto cada $t = 7,13$ semanas. Este modelo tiene un costo mínimo total anual de $C_R = 10,48$ €.

Sin embargo, considerando que las roturas son ventas perdidas, obtenemos la misma política óptima que para el Sistema Clásico de Tamaño del Lote.
También se ha analizado el caso en el cual nuestro líquido de lentillas siguiera una demanda aleatoria. Asumiendo que las roturas se pueden recuperar con la llegada de la siguiente reposición, la política óptima será reponer cada $t = 7$ semanas una cantidad de líquidos de lentillas que haga subir el nivel de inventario a $S = 8$. El costo mínimo total anual del inventario en este caso es de $C_{DA} = 11,855$ €.
Por último, nos gustaría comentar que sería interesante estudiar la gestión de inventarios del resto de productos que se venden en la óptica. En ese caso, habría que estudiar qué modelos se ajustan mejor a los datos que tengamos. Si plantearamos el problema de inventario para el caso generalizado incluyendo una amplia variedad de productos, podríamos obtener resultados diferentes, ya que hay que tener en cuenta que los costos de reposición pueden venir asumidos de forma conjunta o que los mismos dependan del número de artículos a pedir.

Apéndice A

Cálculo de distribuciones discretas de probabilidad

Sea $p(x)$ una distribución de probabilidad discreta, donde x es el tamaño de la demanda durante un periodo de tiempo. Deseamos encontrar la distribución discreta para el tamaño de la demanda durante un periodo de tiempo que sea múltiplo del periodo anterior. Supongamos además que la distribución de la demanda en cada periodo de tiempo es $p(x)$ y que la demanda que hay en un periodo es independiente de la que hay en otro periodo. Por lo tanto, definimos

$$
\begin{aligned}
p(x,1) &\equiv \text{distribución de probabilidad para el primer periodo} \equiv p(x) \\
p(x,2) &\equiv \text{distribución de probabilidad para el segundo periodo, que es el doble del} \\
&\quad\ \text{periodo original} \\
&\ \ldots \\
p(x,t) &\equiv \text{distribución de probabilidad para un periodo } t \text{ veces el periodo original}
\end{aligned}
$$

La distribución de probabilidad para el segundo periodo, que hemos supuesto que es el doble que el primer periodo, será

$$p(x,2) = p(x,1) * p(x,1)$$

Esta expresión quiere decir que la distribución de probabilidad $p(x,2)$ es la convolución de $p(x,1)$ y $p(x,1)$.
La forma de computar esta distribución es

$$p(x,2) = \sum_{y=y_{mín}}^{x} p(x-y,1) \cdot p(y,1) \qquad \forall x = 2y_{mín}, ..., 2y_{máx}$$

siendo $y_{mín}$ e $y_{máx}$ la demanda mínima y máxima, respectivamente, en el periodo original.
Similarmente, para una distribución de probabilidad que sea tres veces el primer periodo se tendrá que

$$p(x,3) = p(x,2) * p(x,1) = p(x,1) * p(x,1) * p(x,1)$$

$$p(x,3) = \sum_{y=y_{mín}}^{x} p(x-y,2)\cdot p(y,1) \qquad \forall x = 3y_{mín},...,3y_{máx}$$

Continuando este proceso, tendremos que la distribución de probabilidad para un periodo de gestión que sea t veces el primer periodo es

$$p(x,t) = p(x,t-1) * p(x,1)$$

$$p(x,t) = \sum_{y=y_{mín}}^{x} p(x-y,t-1)\cdot p(y,1) \qquad \forall x = ty_{mín},...,ty_{máx}$$

Ejemplo: Supongamos que tenemos una empresa que vende un determinado tipo de artículo. Las ventas diarias siguen la siguiente distribución de probabilidad

$$\begin{cases} p(0,1) = 0,4 \\ p(1,1) = 0,6 \end{cases}$$

Determinar las distribuciones discretas de probabilidad para un periodo de 3 días.

Sea x el tamaño de la demanda en un día, tenemos que x puede tomar los valores 0 ó 1, es decir, la empresa puede vender un artículo o no vender ningún artículo con cierta probabilidad. Calcularemos las probabilidad de vender artículos en un periodo de gestión de 2 días.

$$\begin{aligned} p(x,2) &= \sum_{y=y_{mín}}^{x} p(x-y,1)\cdot p(y,1) \qquad && \forall x = 2y_{mín},...,2y_{máx} \\ p(x,2) &= \sum_{y=0}^{x} p(x-y,1)\cdot p(y,1) && \forall x = 0,1,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(0,2) &= p(0,1)\cdot p(0,1) = 0,4\cdot 0,4 = 0,16 \\ p(1,2) &= p(1,1)\cdot p(0,1) + p(0,1)\cdot p(1,1) = 0,6\cdot 0,4 + 0,4\cdot 0,6 = 0,48 \\ p(2,2) &= p(2,1)\cdot p(0,1) + p(1,1)\cdot p(1,1) + p(0,1)\cdot p(2,1) \\ &= 0\cdot 0,4 + 0,6\cdot 0,6 + 0,4\cdot 0 = 0,36 \end{aligned}$$

Similarmente, para un periodo de gestión de 3 días.

$$p(x,3) = \sum_{y=0}^{x} p(x-y,1)\cdot p(y,1) \qquad \forall x = 0,1,2,3$$

$$\begin{aligned} p(0,3) &= p(0,2)\cdot p(0,1) = 0,16\cdot 0,4 = 0,064 \\ p(1,3) &= p(1,2)\cdot p(0,1) + p(0,2)\cdot p(1,1) = 0,48\cdot 0,4 + 0,16\cdot 0,6 = 0,288 \\ p(2,3) &= p(2,2)\cdot p(0,1) + p(1,2)\cdot p(1,1) + p(0,2)\cdot p(2,1) \\ &= 0,36\cdot 0,4 + 0,48\cdot 0,6 + 0,16\cdot 0 = 0,432 \\ p(3,3) &= p(3,2)\cdot p(0,1) + p(2,2)\cdot p(1,1) + p(1,2)\cdot p(2,1) + p(0,2)\cdot p(3,1) \\ &= 0\cdot 0,4 + 0,36\cdot 0,6 + 0,48\cdot 0 + 0,16\cdot 0 = 0,216 \end{aligned}$$

Apéndice B

Programa INPRO (Gestión de inventarios probabilísticos para unidades discretas)

B.1. Definición de variables

```
###################################################################################
# probabilidades.h
###################################################################################
#pragma once

#include <iostream>
#include <unistd.h>
#include <windows.h>

using namespace std;

class Probabilidades {
private:
float *constantes;
int n_ventas_semana;
int columnas;
int filas_actuales;
int filas_iniciales;

float minimo;
int ventas_res;
int t_res;

int *ventas_semana;
float *probabilidad_ventas_semana;

float **tabla_probabilidades;
float **matriz_aux;
public:
Probabilidades();
```

```
~Probabilidades();

float hallar_prob(int x, int t, float valor);
float sum_prob(int x);
float division(int x);
float sum_division(int s);
float mult_sum_division(int s);
float sum_2_5(int s);

bool comparacion(int pos);
float supuesto_minimo(int s, int t);
void actualizar_datos();
void reservar_auxiliar(int t);

void hacer_todo();
};
###################################################################################
```

B.2. Rutina principal

```
/###################################################################################
 # main.cpp
 ###################################################################################
#include "Probabilidades.h"

int main(){
Probabilidades nuevo;

nuevo.hacer_todo();

return 0;
}
 ##################################################################################
```

B.3. Cálculo de probabilidades y determinación de la política óptima

```
/###################################################################################
# probabilidades.cpp
###################################################################################
#include "Probabilidades.h"
#include "windows.h"

Probabilidades::Probabilidades(){
columnas = 7;
constantes = new float [3];
minimo = 100000000;

cout << "Introduzca el numero de ventas posibles en una semana: ";
cin >> n_ventas_semana;
```

```
filas_actuales = n_ventas_semana;
filas_iniciales = n_ventas_semana;

ventas_semana = new int [n_ventas_semana];
probabilidad_ventas_semana = new float [n_ventas_semana];

for(int i = 0; i < n_ventas_semana; i++){
cout << "Introduzca el numero de ventas secuencialmente para la posicion " << i << ": ";
cin >> ventas_semana[i];
cout << endl;

cout << "Introduzca la probabilidad para la venta " << ventas_semana[i] << ": ";
cin >> probabilidad_ventas_semana[i];
cout << endl;
}

for(int i = 0; i < 3; i++){
cout << "Introduzca la constante C" << i+1 << ": ";
cin >> constantes[i];
cout << endl;
}

tabla_probabilidades = new float *[n_ventas_semana];

for(int i = 0; i < n_ventas_semana; i++)
tabla_probabilidades[i] = new float [columnas];

for(int i = 0; i < n_ventas_semana; i++)
for(int j = 0; j < columnas; j++)
tabla_probabilidades[i][j] = 0;

for(int i = 0; i < n_ventas_semana; i++)
tabla_probabilidades[i][0] = ventas_semana[i];

for(int i = 0; i < n_ventas_semana; i++)
tabla_probabilidades[i][1] = probabilidad_ventas_semana[i];
}

Probabilidades::~Probabilidades(){
delete constantes;
delete ventas_semana;
delete probabilidad_ventas_semana;

for(int i = 0; i < n_ventas_semana; i++)
delete tabla_probabilidades[i];
delete tabla_probabilidades;
}

float Probabilidades::hallar_prob(int x, int t, float valor){
float sumatorio = valor;

if(t > 1){
sumatorio = 0.0;
for(int i = 0; i <= x; i++){
```

```
if(i < filas_iniciales){
sumatorio += matriz_aux[x - i][1] * probabilidad_ventas_semana[i];
}
}
}
return sumatorio;
}

float Probabilidades::sum_prob(int x){
float sumatorio = 0.0;

for(int i = 0; i <= x; i++)
sumatorio += tabla_probabilidades[i][1];
return sumatorio;
}

float Probabilidades::division(int x){
if(ventas_semana[x] != 0)
return (tabla_probabilidades[x][1] / tabla_probabilidades[x][0]);
else
return 0.0;
}

float Probabilidades::sum_division(int s){
float sumatorio = 0.0;

for(int i = s + 1; i < filas_actuales; i++){
sumatorio += tabla_probabilidades[i][3];
}
return sumatorio;
}

float Probabilidades::mult_sum_division(int s){
return ((s + 0.5) * (tabla_probabilidades[s][4]));
}

float Probabilidades::sum_2_5(int s){
return tabla_probabilidades[s][2] + tabla_probabilidades[s][5];
}

bool Probabilidades::comparacion(int pos){
if(tabla_probabilidades[pos-1][6] <= (constantes[1] / (constantes[0] + constantes[1])) &&
(constantes[1] / (constantes[0] + constantes[1])) <= tabla_probabilidades[pos][6])
return true;
else
return false;
}

float Probabilidades::supuesto_minimo(int s, int t){
float valor1 = constantes[0];
float valor2 = constantes[0];
float valor3 = constantes[1];
float valor4 = constantes[2];
```

```
float sumatorio = 0.0;
for(int i = 0; i <= s; i++){
sumatorio += (s - (tabla_probabilidades[i][0] / 2)) * tabla_probabilidades[i][1];
}
valor1 = valor1 * sumatorio;

sumatorio = 0.0;
for(int i = s+1; i < filas_actuales; i++){
sumatorio += ((s*s) /(2 * tabla_probabilidades[i][0])) * tabla_probabilidades[i][1];
}
valor2 = valor2 * sumatorio;

sumatorio = 0.0;
for(int i = s+1; i < filas_actuales; i++){
sumatorio += (((tabla_probabilidades[i][0]-s)*(tabla_probabilidades[i][0]-s)) / (2 * tabla_probabilidades[i]
}
valor3 = valor3 * sumatorio;
valor4 = valor4 / t;
return (valor1 + valor2 + valor3 + valor4);
}

void Probabilidades::actualizar_datos(){
tabla_probabilidades = new float *[filas_actuales];

for(int i = 0; i < filas_actuales; i++)
tabla_probabilidades[i] = new float [columnas];
for(int i = 0; i < filas_actuales; i++)
for(int j = 0; j < columnas; j++)
tabla_probabilidades[i][j] = 0.0;
for(int i = 0; i < filas_actuales; i++){
tabla_probabilidades[i][0] = matriz_aux[i][0];
}
}

void Probabilidades::reservar_auxiliar(int t){
matriz_aux = new float *[filas_actuales];
for(int i = 0; i < filas_actuales; i++)
matriz_aux[i] = new float [2];
for(int j = 0; j < 2; j++){
for(int i = 0; i < filas_actuales; i++){
if(j == 0){
if(i < n_ventas_semana)
matriz_aux[i][j] = ventas_semana[i];
else
matriz_aux[i][j] = matriz_aux[i - 1][0] + 1;
}
else{
if (i < (filas_actuales - tabla_probabilidades[filas_iniciales-1][0]))
matriz_aux[i][j] = tabla_probabilidades[i][j];
else
matriz_aux[i][j] = 0.0;
}
}
}
```

```
}

void Probabilidades::hacer_todo(){
float minimo_actual = 0.0;
int t = 1;

do{
for(int i = 1; i < columnas; i++){
for(int j = 0; j < filas_actuales; j++){
switch(i){
case 1:
tabla_probabilidades[j][i] = hallar_prob(j, t, tabla_probabilidades[j][i]);
break;
case 2:
tabla_probabilidades[j][i] = sum_prob(j);
break;
case 3:
tabla_probabilidades[j][i] = division(j);
break;
case 4:
tabla_probabilidades[j][i] = sum_division(j);
break;
case 5:
tabla_probabilidades[j][i] = mult_sum_division(j);
break;
case 6:
tabla_probabilidades[j][i] = sum_2_5(j);
break;
};
}
}

for(int v = 0; v < filas_actuales; v++){
cout << endl;
for(int d = 0; d < columnas; d++)
cout <<tabla_probabilidades[v][d] << "\t";
}
cout << endl << endl;;
Sleep(3);
int pos = 0;
for(int i = 1; i < filas_actuales; i++){
if(comparacion(i)){
pos = i;
break;
}
}
minimo_actual = supuesto_minimo(pos, t);
t++;
filas_actuales = (t * ventas_semana[0]) + (t * ventas_semana[n_ventas_semana - 1]) + 1;
cout << "minimo_actual: " <<  minimo_actual << endl;
cout << "minimo: " << minimo << endl;
if(minimo_actual < minimo){
minimo = minimo_actual;
ventas_res = pos;
```

```
t_res = t-1;
reservar_auxiliar(t);
actualizar_datos();
}
system("pause");
Sleep(2000);
}while(minimo >= minimo_actual);
cout << "El resultado es:" << endl;
cout << "\tT = " << t_res << endl;
cout << "\tNumero ventas = " << ventas_res << endl;
cout << "\tCoste = " << minimo << endl;
system("pause");
}
##################################################################################
```

Bibliografía

[1] Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman, *Introducción a la Investigación Operativa*, McGraw-Hill, cop. 1977.

[2] Winston, Wayne L., *Investigación de operaciones: Aplicaciones y algoritmos*, Grupo Editorial Iberoamérica, cop. 1994.

[3] Fabrycky, W.J., *Industrial Operations Research*, Prentice-Hall, 1972.

[4] Wild, Tony, *Best practice in Inventory Management*, Butterworth-Heinemann, cop. 2002.

[5] Silver, Edward A,. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, John Wiley, cop. 1998.

[6] Zipkin, P.H., *Foundations of inventory management*, McGraw-Hill, cop. 2000.