

**UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA**

**Análisis y síntesis de estrategias de control  
para sistemas de larga escala:  
aplicación al espejo primario de GTC**

**Autor: Sigut Saavedra, Marta**

**Director: Leopoldo Acosta Sánchez**

**Departamento de Física Fundamental y Experimental, Electrónica y Sistemas**



De forma muy especial quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director, D. Leopoldo Acosta Sánchez, sin cuyo esfuerzo, tesón y tantas y tantas horas de dedicación no hubiera sido posible este trabajo.

También quiero dar las gracias a D. Lorenzo Moreno Ruiz por la confianza depositada en mí desde el primer momento y el apoyo y el ánimo constantes que me ha brindado y que tanto valoro.

Igualmente quiero expresar mi agradecimiento a D. Francisco Martín Cabrera y a D. Carmelo Militello Militello, por la inestimable ayuda que me han brindado y por su generosidad al dedicar a este trabajo parte de su tiempo.

A los miembros del grupo de Computadoras y Control: Dra. Dña. Rosa María Aguilar China, Dña. Silvia Alayón Miranda, Dra. Dña. Carina Soledad González, Dr. D. Alberto Hamilton Castro, Dr. D. Graciliano Nicolás Marichal Plasencia, Dr. D. José Ignacio Estévez Damas, Dr. D. Juan Albino Méndez, D. Juan Julián Merino Rubio, D. Roberto Marichal Plasencia, D. Evelio José González González, D. Santiago Torres Álvarez, Dr. D. Jose Luis Sánchez de la Rosa, Dr. D. Demetrio Piñeiro Vera, D. Sergio Hernández Alonso, Dña. Vanesa Muñoz Cruz, D. Jesús Miguel Torres Jorge, D. Héctor Rebozo Morales, D. Carlos Martín Galán, D. Roberto Betancor Bonilla, D. Agustín José Padrón, D. Manuel Fernández Vera.

A todos ellos y de forma muy especial a mi hermano y compañero, D. Jose Francisco Sigut Saavedra, gracias por el día a día.



*A mis padres y a mi hermano,  
por su cariño y apoyo constante.*

*A José Ramón, con amor.*



# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>xi</b>
<b>CAPÍTULO I. EL MODELO DINÁMICO DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GRAN TELESCOPIO CANARIAS</b>	<b>1</b>
I.1. EL PROBLEMA DE LAS DOS MASAS	2
I.2. ACOPLAMIENTO ENTRE LOS SEGMENTOS DEL ESPEJO	6
I.3. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	12
<b>CAPÍTULO II. DESCRIPCIÓN, MODELIZACIÓN Y ANÁLISIS DEL SISTEMA</b>	<b>19</b>
II.1. ANTECEDENTES	19
II.2. DISEÑO	20
II.3. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA	23
II.4. MODELIZACIÓN DE LA DINÁMICA DEL ESPEJO PRIMARIO	25
II.5. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GTC	34
II.5.1. Dominio temporal y frecuencial	35
II.5.2. Acoplamiento del sistema	36
II.6. ANÁLISIS DEL RUIDO E INCERTIDUMBRES EN EL MODELO	38
II.6.1. Ruido debido al viento	38
II.6.2. Incertidumbres en el modelo	41
II.6.3. Especificaciones de los sensores y actuadores	42
<b>CAPÍTULO III. CONTROLADOR MULTIVARIABLE BASADO EN UNA ESTRATEGIA LOCAL-GLOBAL</b>	<b>43</b>
III.1. ESTRATEGIA LOCAL-GLOBAL	44
III.2. CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS	48
III.2.1. Análisis de las simetrías del espejo. Influencia sobre la acción de control local	49
III.2.2. Componente global del controlador por asignación de polos	58
III.2.2.1. El operador de lifting y de lifting inverso	58
III.2.2.2. Aplicación al espejo primario del GTC	63
III.2.3. Resultados obtenidos con el controlador por asignación de polos	66
<b>CAPÍTULO IV. ESTUDIO DE LAS SIMETRÍAS DE MATRICES DE ESTADO TIPO GTC</b>	<b>77</b>
IV.1. JUSTIFICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE DESACOPLO	78
IV.2. BASES DEL DESACOPLO PARA EL CASO DE UN ESPEJO CON N MODOS Y P ACTUADORES, SIENDO $P > N$	81
IV.2.1. Matriz con autovalores reales	81
IV.2.2. Matriz con autovalores complejos	87
IV.2.3. Desacoplo entre las entradas y salidas de los dos subespacios	92
IV.3. APLICACIÓN DE ESTOS RESULTADOS A LA MATRIZ DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GRAN TELESCOPIO CANARIAS	103
<b>CAPÍTULO V. DESACOPLO DE LA DINÁMICA DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GRAN TELESCOPIO CANARIAS</b>	<b>111</b>
V.1. DESACOPLO DEL SISTEMA	112
V.1.1. Metodología del desacoplo	115
V.2. CONDICIONES PARA EL DESACOPLO DE LAS ENTRADAS Y SALIDAS DEL ESPEJO	122
V.2.1. Equivalencia en el desacoplo de las entradas y salidas del sistema	122
V.2.2. Condiciones que deben cumplir $B_n$ y $C_n$ para desacoplar el sistema	127
V.2.3. Obtención de la base de vectores propios que desacoplan el espejo	135
V.2.4. Evaluación de los resultados del desacoplo y propuesta de mejoras	144

<b>CAPÍTULO VI. INCLUSIÓN DEL RUIDO E INCERTIDUMBRES EN LA DINÁMICA EN EL SISTEMA DESACOPLADO</b>	<b>155</b>
VI.1. INCLUSIÓN DEL RUIDO EN EL PROCEDIMIENTO DE DESACOPLO DEL SISTEMA	155
VI.2. EFECTO DE LAS INCERTIDUMBRES EN LA DINÁMICA DEL ESPEJO SOBRE EL DESACOPLO DEL MISMO	157
<b>CAPÍTULO VII. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA EL SISTEMA DESACOPLADO. ESTUDIO DE ROBUSTEZ Y RECHAZO AL RUIDO</b>	<b>173</b>
VII.1. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PROPORCIONAL, INTEGRAL Y PROPORCIONAL-INTEGRAL	174
VII.2. ESTUDIO DE LA ROBUSTEZ DE LOS CONTROLADORES P, I Y PI FRENTE A INCERTIDUMBRES EN LA DINÁMICA	183
VII.3. ESTUDIO DEL RECHAZO AL RUIDO OBTENIDO CON LOS CONTROLADORES P, I Y PI	191
<i>VII.3.1. Estudio del ancho de banda del sistema con los controladores proporcional, integral y proporcional-integral</i>	<i>199</i>
VII.4. APLICACIÓN DE UN CONTROLADOR ROBUSTO AL SISTEMA DESACOPLADO	201
<b>CAPÍTULO VIII. DESCRIPCIÓN, MODELIZACIÓN Y DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA UNA MAQUETA DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GTC</b>	<b>213</b>
VIII.1. DESCRIPCIÓN DE LA MAQUETA	214
VIII.2. MODELIZACIÓN DE LA MAQUETA EMPLEANDO UN MODELO ARMAX	215
<i>VIII.2.1. Características dinámicas de la maqueta</i>	<i>215</i>
<i>VIII.2.2. Modelización de la maqueta</i>	<i>217</i>
VIII.3. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA RECHAZO AL RUIDO DE BAJA FRECUENCIA EN LA MAQUETA	226
<i>VIII.3.1 Control integral</i>	<i>228</i>
<i>VIII.3.2. Control por compensación</i>	<i>230</i>
<i>VIII.3.3. Diseño de un controlador robusto para la maqueta del GTC</i>	<i>232</i>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>243</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>249</b>

# INTRODUCCIÓN

En la presente memoria recogemos el trabajo de investigación realizado en relación al problema del diseño de un controlador para el espejo primario del Gran Telescopio Canarias. Éste, que se encuentra actualmente en fase de construcción, se convertirá, una vez que ésta finalice, en el telescopio que, junto con el Keck en Hawaii, posee el espejo primario de mayor diámetro del mundo ( $10m$ ). Precisamente debido a su gran tamaño, es preciso segmentarlo, por lo que se hace imprescindible la implementación de algún tipo de política de control que permita garantizar, en todo momento, el perfecto alineamiento de las piezas del espejo (segmentos).

Nos encontramos ante un sistema de gran escala, provisto de un alto número de actuadores y sensores, y complejo debido, sobre todo, al fuerte acoplamiento que presenta. En estas condiciones, diseñar un controlador multivariable, sujeto además a restricciones en cuanto a la frecuencia a la que se puede aplicar el comando, dado el volumen de información que se procesa, y teniendo en cuenta la tecnología actual de buses, no resulta una tarea sencilla.

Pero las dificultades con las que nos hemos encontrado no sólo tienen que ver con el diseño de un controlador para el sistema, también hemos tenido que hacer frente a incontables problemas de tipo numérico. El hecho de que la dinámica del espejo venga representada por matrices de grandes dimensiones que, además, están mal condicionadas desde el punto de vista numérico, ha hecho muy complicada la manipulación matemática de estas matrices (cálculo de la inversa, producto de matrices, cálculo de autovalores, etc.) con la herramienta de programación que hemos empleado: el *MATLAB*.

La búsqueda de la mejor estrategia de control para el espejo primario del GTC nos ha llevado a profundizar en aspectos diversos del control de procesos. Hemos estructurado la presente memoria en un conjunto de ocho capítulos, en los cuales se expone el trabajo de investigación que hemos llevado a cabo.

En el primer capítulo presentamos un estudio que pretende mostrar el procedimiento mediante el cual se obtiene el modelo dinámico de un sistema complejo, como es el espejo primario del Gran Telescopio Canarias (GTC), a través del análisis de un problema sencillo de dos masas. Asimismo, planteamos el problema del acoplamiento en el espejo primario del GTC considerando diferentes supuestos.

El segundo capítulo lo hemos dedicado a la descripción del sistema. En primer lugar planteamos el modelo dinámico del espejo, que consideramos compuesto por tres elementos fundamentales: los segmentos, los actuadores que nos permiten moverlos y la estructura sobre la que están apoyados. Trabajando con este modelo, y a través del análisis de su respuesta temporal y frecuencial, extraemos sus características más relevantes desde el punto de vista dinámico. Entre ellas destacan los modos de vibración de los distintos componentes del espejo y el fuerte acoplamiento existente en el sistema. Por último, presentamos un breve análisis del ruido y de las incertidumbres en la dinámica que se prevén en el espejo primario del GTC.

En el capítulo III abordamos por primera vez el diseño de un sistema de control para el espejo primario del telescopio, prescindiendo, en esta primera aproximación al problema, tanto del ruido como de las incertidumbres en la dinámica. Diseñamos para ello un conjunto de controladores clásicos (controlador integral, acción integral + filtro y controlador LQR) entre los cuales destaca un controlador por asignación de polos. Se propone una estrategia de control local-global. Dicha estrategia consiste en aplicar a los actuadores dos niveles de comando: un comando global, que se calcula en base a la información suministrada por todos los sensores del sistema, y un comando local, que se sintetiza a partir de la información de tres de los sensores de cada segmento y, por tanto, puede aplicarse a una frecuencia mucho mayor que el global.

En un intento de mejorar las prestaciones obtenidas con los controladores implementados en el capítulo III, y ante la dificultad de incluir las especificaciones en el sistema en lazo cerrado en cuanto a rechazo al ruido y estabilidad frente a incertidumbres en la dinámica en el diseño de un controlador multivariable de tan alta dimensionalidad, nos planteamos el desacoplo del sistema. Para ello diseñamos un procedimiento, que presentamos en los capítulos IV y V, consistente en un cambio en la base de vectores propios del sistema y que se basa en la multiplicidad del autovalor correspondiente a la dinámica de los segmentos. Así, vistos los resultados alcanzados con los controladores multivariables implementados en el capítulo III, nuestro objetivo

es descomponer la planta original en un conjunto de subsistemas con un número de entradas y salidas tan pequeño como sea posible e independientes entre sí. De hecho, con la elección adecuada de vectores propios, el sistema acoplado de partida se transforma en un subsistema MIMO con  $N$  entradas y salidas acopladas (siendo  $N$  el número de modos de vibración con que caracterizamos la dinámica de la estructura de soporte del espejo) y  $P-N$  subsistemas SISO independientes entre sí (donde  $P/3$  representa el número de segmentos que consideramos). En la parte final del capítulo V discutimos los resultados correspondientes al nivel de desacoplo conseguido para la planta nominal con distintos valores de  $N$  y  $P$ , y diversas variantes en el procedimiento de obtención de los nuevos vectores propios.

En el capítulo VI presentamos un estudio de cómo afecta al desacoplo de las entradas y salidas del espejo el hecho de considerar el ruido de proceso, debido al viento que incide sobre los segmentos del primario, y las incertidumbres en la dinámica de la planta.

Ya en el capítulo VII abordamos el diseño de un controlador para el sistema desacoplado de forma que, por un lado, sea robusto frente a variaciones en la dinámica de la planta con respecto a la nominal y, por el otro, presente la máxima atenuación del ruido tanto en bajas frecuencias como en el modo correspondiente a los segmentos, todo ello con el mayor ancho de banda posible. Con todo esto, planteamos los controladores diseñados en base a una estrategia proporcional-integral y discutimos los resultados obtenidos con cada uno de ellos. La ventaja que tenemos al haber desacoplado el sistema es que ahora, tomando  $N=1$  y  $P=108$ , diseñar un controlador para el sistema completo se reduce a diseñar  $P$  controladores SISO de forma totalmente independiente. Asimismo diseñamos un controlador  $H_\infty$  para los subsistemas SISO resultantes del desacoplo, cuyas prestaciones comparamos con las logradas con los controladores anteriores.

Por último, en el capítulo VIII de esta memoria presentamos una descripción de una maqueta del espejo primario del Gran Telescopio Canarias. A partir de la información en lazo abierto obtenida con dicha maqueta llevamos a cabo el proceso de modelado de la misma empleando para la identificación un modelo ARMAX clásico. Una vez obtenido el modelo, nos planteamos el diseño de un controlador para rechazar el ruido en la región de bajas frecuencias y en el modo correspondiente a los segmentos de la maqueta ( $26\text{Hz}$ ). Finalmente, comparamos los resultados obtenidos con los tres

controladores diseñados para la misma: un controlador integral, un compensador y un controlador robusto.

Para la obtención de los resultados que recogemos en estos ocho capítulos hemos empleado, como ya comentamos, el paquete *MATLAB*, concretamente las toolboxes de Control, Identificación, Control Robusto y Procesamiento de Señales. Hemos hecho uso tanto del *MATLAB* para Windows como para Linux, en las versiones 5.2 y 6.0.

## CAPÍTULO I

# EL MODELO DINÁMICO DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GRAN TELESCOPIO CANARIAS

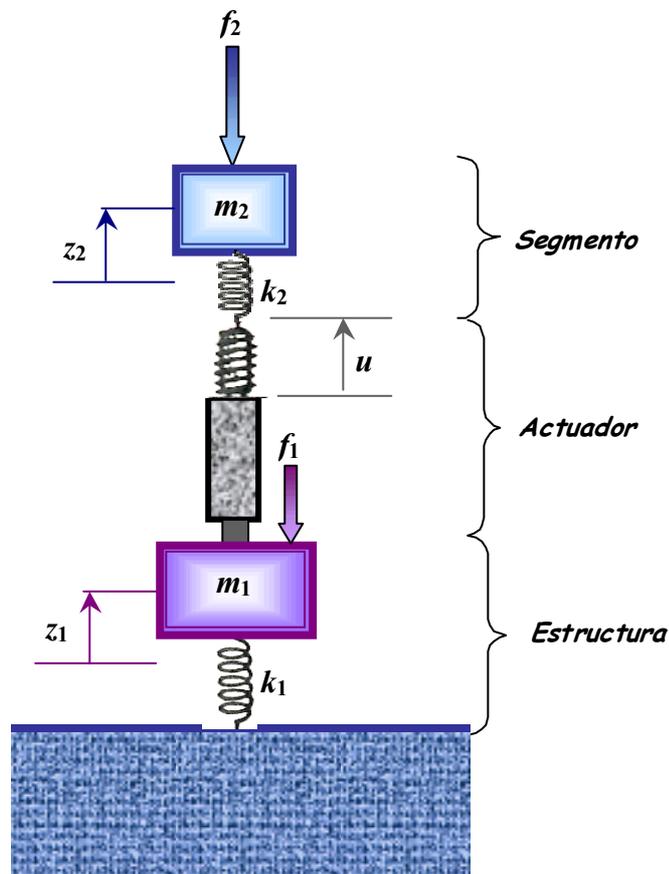
Un aspecto fundamental en el diseño de un sistema de control para una planta es el desarrollo de un buen modelo matemático para ésta.

El estudio de un sistema complejo, como es el espejo primario de diez metros de diámetro del Gran Telescopio de Canarias (GTC), requiere el uso de técnicas de modelado con el objeto de construir una representación matemática adecuada de la estructura, el sistema de actuación y los segmentos que componen el espejo. La técnica de análisis por elementos finitos es, sin lugar a dudas, una herramienta básica de cara a generar modelos dinámicos de estructuras complejas [Zienkiewicz, 1994].

En este capítulo nuestro objetivo es presentar, de la forma más clara posible, las herramientas empleadas en este estudio, así como el procedimiento mediante el cual se obtiene un modelo dinámico del primario del GTC.

### I.1. EL PROBLEMA DE LAS DOS MASAS

Una de las principales dificultades que nos encontramos en el desarrollo de un modelo intuitivo de la dinámica y de las interacciones en el espejo del GTC es el alto número de componentes que se ven mutuamente afectados cuando se aplica al sistema una perturbación o una entrada de control [Medwadowski, 1981]. Una forma sencilla de ver cómo se obtienen los elementos de las matrices de estado del modelo analítico del espejo consiste en considerar un sistema sencillo, compuesto por dos masas interconectadas por un resorte, tal y como mostramos a continuación:



**Figura 1.1:** Representación del sistema que consideramos en el problema de las dos masas.

Así, en la figura 1.1, las variables  $m_1$  y  $k_1$  representan la masa y la constante de rigidez correspondientes a la estructura de soporte del espejo [Medwadowski, 1982]. Por otro lado,  $m_2$  y  $k_2$  representan las mismas magnitudes para el segmento del espejo. Por último,  $z_1$  y  $z_2$  son, respectivamente, el desplazamiento de las masas  $m_1$  y  $m_2$  con

respecto a su posición de equilibrio inercial. Para completar el modelo, suponemos que dos fuerzas que llamamos  $f_1$  y  $f_2$  están actuando sobre el sistema. El actuador experimenta un desplazamiento  $u$  en respuesta a una entrada de control y el sensor [Mast, 1983] mide la diferencia entre la posición real y la deseada para el segmento, es decir,  $z_2 - z_c$ .

Utilizaremos las ecuaciones de estado clásicas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u + V \cdot w \\ y &= C \cdot x\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $A$  representa la dinámica del sistema,  $B$  es la matriz de entrada de control,  $C$  es la matriz de salida y  $V$  es la matriz de entradas perturbativas.

Además, definimos los vectores  $x$ ,  $u$ ,  $w$ , e  $y$  como es habitual:

- $x$  es el vector de estados,
- $u$  es el vector de entradas de control,
- $w$  es el vector de entradas de ruido,
- $y$  es el vector de salidas.

En lo que sigue, desarrollaremos las ecuaciones diferenciales acopladas que describen la dinámica del sistema de la figura 1.1, para expresarlas, finalmente, en la representación de espacio de estados conforme a la expresión (1.1).

Así, aplicando que el sumatorio de las fuerzas ejercidas sobre cada una de las dos masas del sistema de la figura 1.1, incluyendo las fuerzas externas, es igual a la masa por la aceleración, podemos escribir que:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{z}_1 = -k_1 \cdot z_1 - k_2 \cdot (z_1 - z_2 + u) + f_1 \\ m_2 \cdot \ddot{z}_2 = -k_2 \cdot (z_2 - z_1 - u) + f_2 \end{cases}\tag{1.2}$$

Si las expresamos en forma matricial, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} u\tag{1.3}$$

Por otra parte, sabemos que la ecuación de un oscilador forzado sin amortiguamiento responde a la siguiente expresión:

$$M \cdot \ddot{z} + K \cdot z = f \quad (1.4)$$

Comparando (1.3) y (1.4), podemos identificar la matriz de masa  $M$  y de rigidez  $K$  del sistema global a partir de las de los elementos simples en los que lo hemos dividido como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

y los vectores  $z$  y  $f$  como:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} u \quad (1.6)$$

Para tener una equivalencia completa entre las ecuaciones (1.3) y (1.4), debemos añadir a la fuerza externa, representada por el vector  $f$ , la fuerza del actuador definida como:

$$f^A = \begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} u \quad (1.7)$$

con lo que el cambio en la elongación  $u$  del actuador aparece ahora como un término forzante en las ecuaciones.

La fuerza del actuador se aplica, como es de esperar en virtud del principio de acción y reacción, con la misma intensidad tanto en el segmento del espejo como en el soporte de la estructura.

Para obtener los modos del sistema de la figura 1.1, que llamaremos  $w_1$  y  $w_2$  hacemos:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \text{sen } wt$$

y lo sustituimos en (1.4), obteniendo lo siguiente:

$$-M \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} w^2 \text{sen } wt + K \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \text{sen } wt = 0 \quad (1.8)$$

donde, dado que los modos de vibración dependen de la naturaleza del sistema y no de la fuerza aplicada al mismo, hemos considerado que ésta es nula.

Así, multiplicando ambos miembros de (1.8) por  $\begin{bmatrix} |z_1| & |z_2| \end{bmatrix}$ , y sacando factor común, llegamos a que:

$$(K - Mw^2)\text{sen } wt = 0 \quad (1.9)$$

o también:

$$M \cdot (M^{-1} \cdot K - w^2 I)\text{sen } wt = 0 \Rightarrow (M^{-1} \cdot K - w^2 I) = 0$$

Como vemos, estamos ante un problema de valores propios, donde las frecuencias modales del sistema al cuadrado son los autovalores de  $M^{-1} \cdot K$ . Sustituyendo  $M$  y  $K$  en función de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k_1$  y  $k_2$ , tenemos que:

$$(w_1^2, w_2^2) = \text{autovalores} \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -k_2 \\ -k_2 & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, expresamos la ecuación diferencial de segundo grado en (1.4) en representación de espacio de estados. Para ello tomamos dicha ecuación diferencial:

$$M \cdot \ddot{z} + K \cdot z = f$$

y definimos una nueva variable  $v$  como:

$$v = \dot{z}$$

con lo que podemos describir la ecuación de segundo grado como:

$$\begin{cases} M \cdot \dot{v} + K \cdot z = f \\ \dot{z} - v = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{v} = M^{-1} \cdot K \cdot z + M^{-1} \cdot f \\ \dot{z} = v \end{cases}$$

Tomando  $z$  y  $v$  como las variables de estado del sistema:

$$x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

podemos escribir la ecuación de estados del sistema en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & k_2 \\ 0 & 0 & k_2 & \frac{-k_2}{m_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

y la ecuación de salida:

$$z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

En el caso de considerar un término de amortiguamiento  $C$ , la ecuación diferencial de segundo grado queda como:

$$\begin{cases} M \cdot \dot{v} + C \cdot \dot{z} + K \cdot z = f \\ \dot{z} - v = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

y la ecuación de estados:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

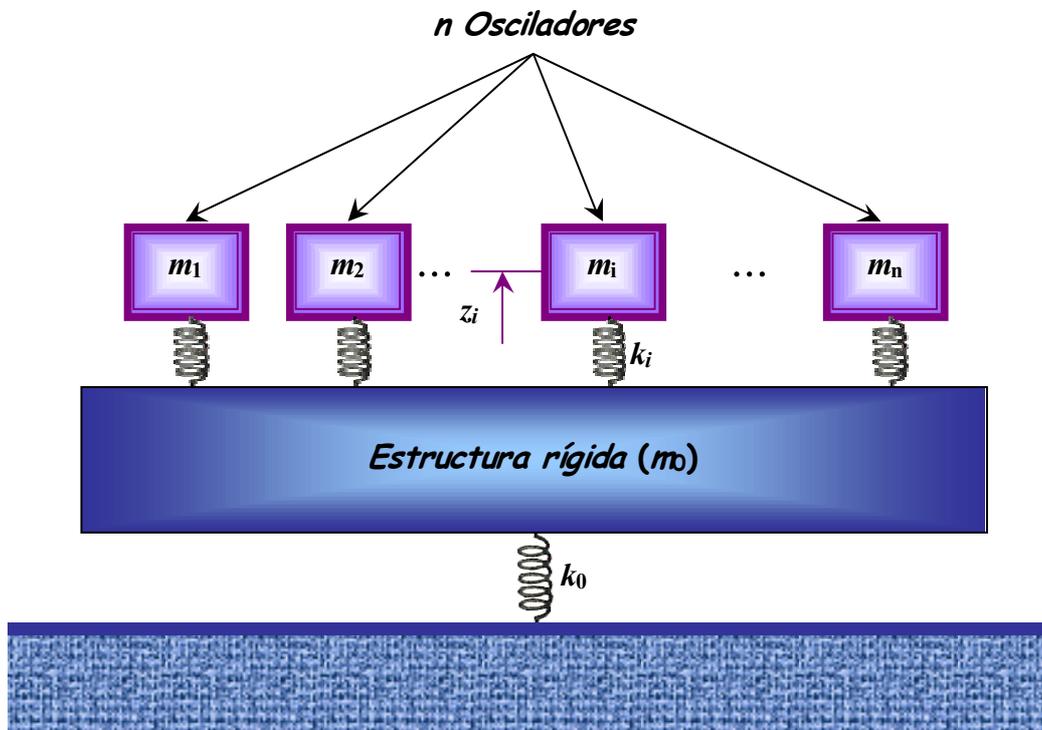
## 1.2. ACOPLAMIENTO ENTRE LOS SEGMENTOS DEL ESPEJO

Acabamos de ver cómo podemos obtener el modelo dinámico de un sistema muy sencillo, donde hemos considerado tanto a la estructura del espejo del telescopio como a uno de sus segmentos como dos masas conectadas por medio de sendos resortes al soporte y al actuador, respectivamente.

Sin embargo, y tal como quedará de manifiesto en los siguientes capítulos, el efecto de acoplamiento que se produce entre los distintos segmentos del espejo a través de la estructura sobre la que se apoyan juega un papel muy importante en la dinámica del sistema. Para dar cuenta de este efecto y, concretamente, de la influencia que tiene sobre los modos de la planta, planteamos el siguiente problema.

Consideremos el sistema de la figura 1.2 donde hemos representado los  $n$  segmentos del espejo primario del telescopio como osciladores de masa  $m_i$  conectados a una estructura rígida a través de resortes de rigidez  $k_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Dicha estructura, que

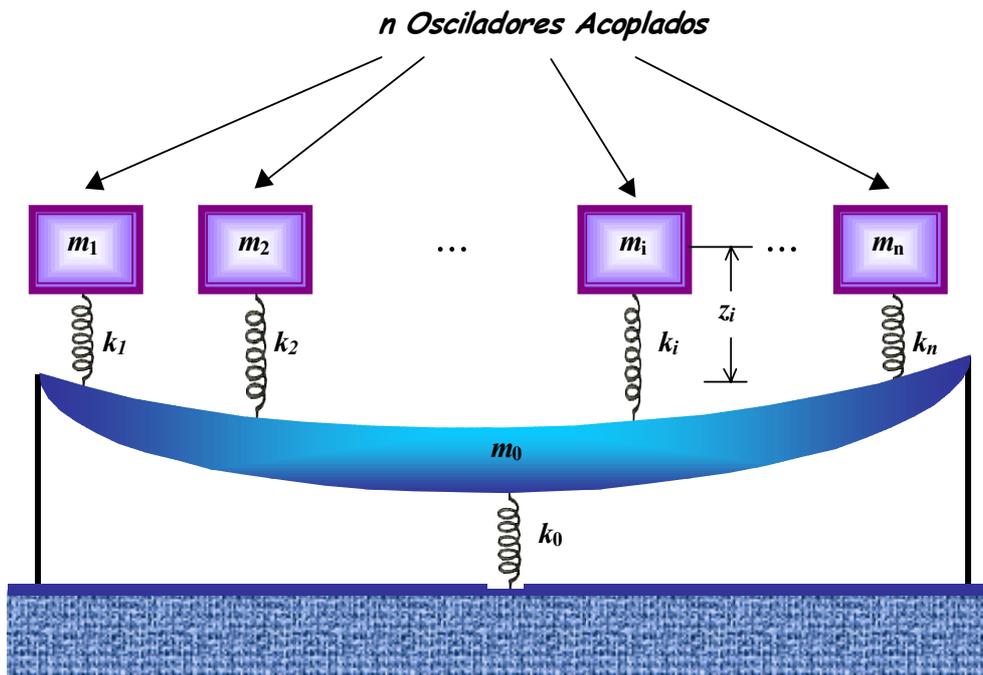
consideramos rígida, y con una masa  $m_0$ , está a su vez conectada al soporte mediante otro resorte de rigidez  $k_0$ .



**Figura 1.2:** Osciladores acoplados a una estructura rígida.

En estas condiciones, planteando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada una de las masas del sistema y resolviendo el problema de autovalores (para obtener los modos) y el de autovectores (para obtener las formas modales) encontramos que el modo de vibración de uno de los segmentos y el correspondiente a la estructura cambian respecto al que presentan si consideramos cada una de las masas por separado. Concretamente, empleando los valores numéricos de la masa y la rigidez de la estructura (considerándola entonces descrita por el primero de sus modos) y los segmentos del espejo primario del GTC, encontramos que el valor del modo asociado a la estructura aumenta mientras que el correspondiente al segmento que cambia disminuye.

El mismo efecto que acabamos de ver con una estructura rígida lo observamos si consideramos a la estructura del espejo como una parábola fija en los extremos, tal y como mostramos en la figura 1.3:



**Figura 1.3:** Modelo que representa el acoplamiento entre segmentos del espejo primario del Telescopio.

En este caso, a diferencia del anterior, aparecen las posibles deformaciones elásticas de la estructura (cambios, e incluso la inversión, en la curvatura de la parábola).

Con esto tenemos que cada uno de los puntos de la parábola experimentará, en general, una elongación distinta. En particular, consideramos una función radial de la forma:

$$z_i = f(r_i)z_0$$

siendo  $f(r) = \frac{R^2 - r^2}{R^2}$  y donde:

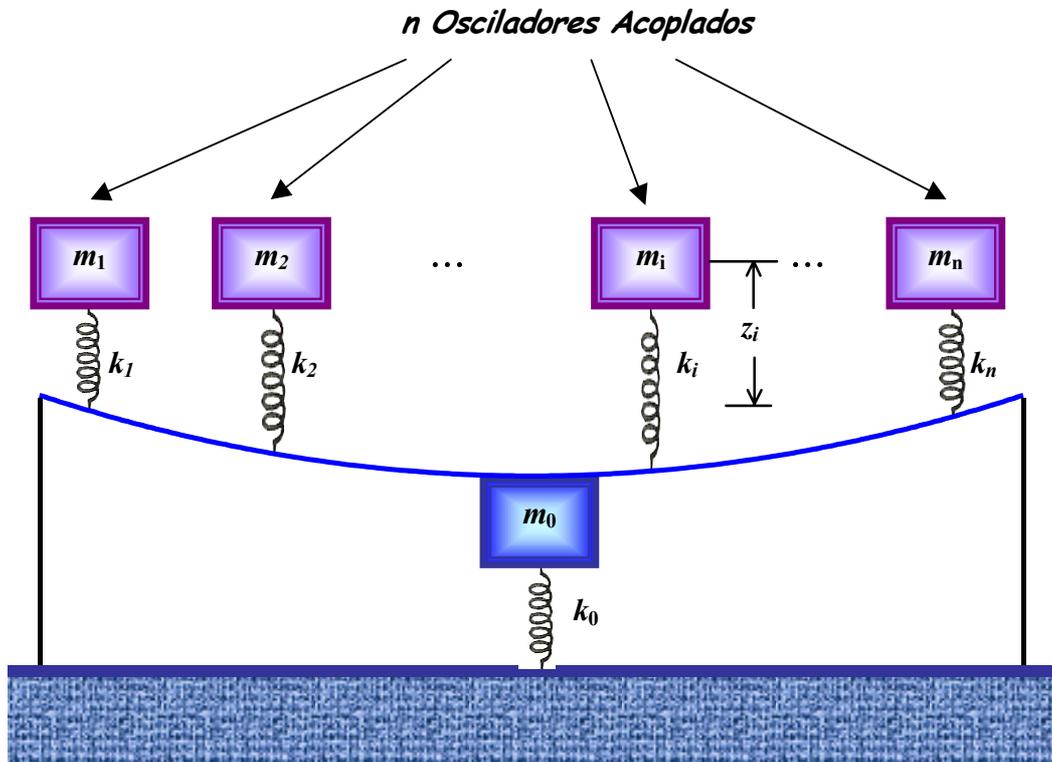
$r_i$  representa la distancia del oscilador  $i$ -ésimo al centro de la parábola,

$R$  es el radio de la parábola,

$z_i$  representa la elongación del oscilador  $i$ -ésimo, y

$z_0$  es la elongación experimentada por el centro de la parábola, punto en el que podemos suponer concentrada toda su masa  $m_0$ .

Así, podemos considerar el problema como el ilustrado en la figura 1.4:



**Figura 1.4:** Modelo que representa el acoplamiento entre segmentos del espejo primario del Telescopio.

Con esto, si de nuevo planteamos que el sumatorio de las fuerzas aplicadas sobre cada una de las  $n+1$  masas del sistema de la figura 1.4 es igual a la masa por la aceleración, llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \ddot{z}_0 + k_0 z_0 - \sum_{j=1}^n k_j (z_j - \alpha_j z_0) = 0 \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_1 (z_1 - \alpha_1 z_0) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (z_2 - \alpha_2 z_0) = 0 \\ \vdots \\ m_i \ddot{z}_i + k_i (z_i - \alpha_i z_0) = 0 \\ \vdots \\ m_n \ddot{z}_n + k_n (z_n - \alpha_n z_0) = 0 \end{array} \right.$$

donde hemos utilizado la notación siguiente:

$$\alpha_i = f(r_i) = \frac{R^2 - r_i^2}{R^2}$$

Si planteamos ahora las ecuaciones matriciales de estado y de salida tomando como variables de estado, como ya hicimos en el ejemplo de las dos masas, las  $n+1$   $z_j$ , con  $j=0,1,\dots,n$  y sus correspondientes derivadas, obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-(k_0 + \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j)}{m_0} & k_1 & \dots & k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_1 \alpha_1 & -\frac{k_1}{m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_n \alpha_n & 0 & \dots & -\frac{k_n}{m_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

donde hemos tomado como entradas al sistema los comandos aplicados a los segmentos  $(u_1, \dots, u_n)$ , y

$$\begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Para obtener los modos del sistema en este caso procedemos de forma análoga a como lo hicimos en el ejemplo de las dos masas, siendo éstos las raíces cuadradas de los autovalores de  $M^{-1} \cdot K$ , es decir:

$$(w_0^2, w_1^2, \dots, w_n^2) = \text{autovalores} \begin{bmatrix} k_0 + \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j & & & & \\ \hline m_0 & -k_1 & -k_2 & \dots & -k_n \\ & \frac{k_1}{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ & -k_2 \alpha_{21} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -k_n \alpha_n & 0 & 0 & \dots & \frac{k_n}{m_n} \end{bmatrix}$$

Si realizamos el cálculo encontramos para los dos primeros modos, que son los que cambian debido al acoplamiento de los segmentos a través de la estructura, prácticamente el mismo valor que en el caso de considerar una estructura rígida. Sin embargo, las formas modales que obtenemos en ambos casos no son las mismas.

Por otro lado, considerar que la estructura sufre deformaciones elásticas también recoge el efecto de acercamiento o separación entre los segmentos, algo que en ocasiones se ilustra colocando resortes imaginarios conectando los segmentos vecinos entre sí. Dado que dichos resortes no existen en la práctica, nos ha parecido más correcto contemplar esta posibilidad permitiendo que cada punto de la estructura experimente una elongación distinta. Recordemos que la estructura está apoyada en los extremos, con lo que en función de cómo cambia la curvatura de la parábola debido a las deformaciones elásticas que experimenta, los segmentos, además de oscilar, se acercan o se separan los unos con respecto a los otros.

Queremos notar que incluir en este problema términos de amortiguamiento  $C$  en los osciladores se reflejaría en las ecuaciones del sistema de la misma forma que en el ejemplo de las dos masas (ver ecuaciones (1.10) y (1.11)).

En el caso del espejo primario del GTC, tenemos treinta y seis segmentos de forma hexagonal que se apoyan, cada uno de ellos mediante tres actuadores, a una estructura flexible. Entonces, estableciendo una analogía con el sistema de dos masas de la figura 1.1, donde incluimos al actuador, tenemos tres osciladores como los representados en las figuras 1.2, 1.3 y 1.4, por cada uno de los segmentos. Esto hace un número total de ciento ocho osciladores. Cada uno de ellos presenta idéntica masa, idéntica constante de rigidez e idéntico coeficiente de amortiguamiento.

Por otra parte, en el modelo del espejo con el que trabajaremos a partir del capítulo II, la estructura no viene caracterizada, como en el caso simplificado que acabamos de ver, por un único modo de vibración, sino a través de sus treinta modos más representativos.

### ***1.3. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS***

En los sistemas mecánicos la forma habitual de proceder consiste en dividirlo o separarlo en sus componentes individuales o ‘elementos’ cuyo comportamiento puede conocerse sin dificultad para, a continuación, reconstruir el sistema original y estudiarlo a partir de dichos componentes.

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas se los denomina discretos. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema sólo puede definirse haciendo uso del concepto matemático de infinitésimo. Ello nos conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. A tales sistemas se los denomina continuos.

Para vencer la dificultad que presenta la solución de problemas continuos reales, ingenieros y matemáticos han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de discretización. La aplicación de estos métodos hace necesario efectuar alguna aproximación, de tal manera que quepa esperar que ésta se acerque, tanto como se quiera, a la solución continua a medida que crezca el número de variables discretas.

La discretización de problemas continuos ha sido abordada de forma diferente por matemáticos e ingenieros. Los primeros han desarrollado técnicas generales aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, tales como aproximaciones por diferencias finitas, diferentes métodos de residuos ponderados, o técnicas aproximadas, para determinar puntos estacionarios de funcionales definidos en la forma apropiada. Los ingenieros, por su parte, suelen enfrentarse al problema más intuitivamente, creando una analogía entre elementos discretos reales y porciones finitas de un dominio continuo. Por ejemplo, en el campo de la mecánica de los sólidos, McHenry [McHenry, 1943], Hrenikoff [Hrenikoff, 1941] y Newmark [Newmark, 1949] demostraron al comienzo de la década de los 40 que pueden obtenerse soluciones razonablemente buenas de un problema continuo sustituyendo pequeñas porciones del

mismo por una distribución de barras elásticas simples. Más tarde, y en el mismo contexto, Argyris [Argyris, 1960], Turner y otros [Turner, 1956] demostraron que se pueden sustituir las propiedades del continuo de un modo más directo, y no menos intuitivo, suponiendo que las pequeñas porciones del mismo, o elementos, se comportan de una cierta forma simplificada.

Fue de la posición de ‘analogía directa’ adoptada por los ingenieros de donde nació el término de ‘elemento finito’. Parece que fue Clough [Clough, 1960] el primero en usar este nombre, que supone el uso preciso de la metodología general aplicable a los sistemas discretos. Esto tiene una gran importancia tanto desde el punto de vista conceptual, ya que permite una mejor comprensión del problema, como del numérico, por cuanto supone el uso de un criterio unificado para abordar gran variedad de problemas y desarrollar procedimientos generales de cálculo.

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un conjunto de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número finito de grados de libertad cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

En cualquier sistema a analizar podemos distinguir entre:

- ↳ Dominio → espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- ↳ Condiciones de contorno → variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, focos de calor,...
- ↳ Incógnitas → variables del sistema que deseamos conocer después de que las condiciones de contorno han actuado sobre el mismo: desplazamientos, tensiones, temperaturas,...

El método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios que, como ya comentamos, denominamos elementos. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o superficies (en el tridimensional) imaginarias, de forma que el

dominio total en estudio se aproxima mediante el conjunto de porciones en que se subdivide: los elementos. Éstos se definen por un número discreto de puntos, los nodos, que conectan entre sí los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de elementos estructurales, estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de éstos podemos calcular el resto de incógnitas que nos interesen: tensiones, deformaciones, etc. A estas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que determinan el estado y/o posición del nodo.

Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento del continuo para el elemento, se llega a fórmulas que relacionan el comportamiento interior del mismo con el valor que toman los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas de interpolación, ya que éstas ‘interpolan’ el valor de la variable nodal dentro del elemento.

El problema se formula en forma matricial debido a la facilidad de manipulación de las matrices mediante el ordenador. Conocidas las matrices que definen el comportamiento del elemento (en el caso estructural, que es el que nos ocupa, serán las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa), se ensamblan y se forma un conjunto de ecuaciones algebraicas, lineales o no, mediante cuya resolución obtenemos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema.

A primera vista no resulta sencillo darnos cuenta de cómo pueden discretizarse problemas de este tipo siguiendo el procedimiento existente para casos de estructuras más simples. Podemos superar esta dificultad siguiendo los pasos que relacionamos a continuación:

1. Dividimos el continuo, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de elementos finitos.
2. Suponemos que los distintos elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de nodos, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos son las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.
3. Tomamos un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.

4. Estas funciones de desplazamientos definen entonces, de manera única, el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definen el estado de tensiones en todo el elemento y, por tanto, también en sus contornos.
5. Determinamos un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos.

El procedimiento que acabamos de esbozar se conoce como ‘método de los desplazamientos’.

Una vez discretizado el continuo, la idea es tomar un conjunto de funciones, llamadas funciones de interpolación, que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nodos del mismo. Es decir:

$$\{u(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{U\}$$

siendo  $\{U\}$  el vector con los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos se determinan las deformaciones:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\}$$

donde  $[D]$  es un operador diferencial que depende del problema concreto que estamos estudiando.

Sustituyendo el valor del desplazamiento, tenemos que:

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\}$$

donde se obtiene el valor de las deformaciones en función de los desplazamientos nodales.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales se llega finalmente a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\}$$

donde  $M$ ,  $K$  y  $P$  son, respectivamente, la matriz de masa, la matriz de rigidez y la de cargas nodales.

Esta forma de proceder es general y permite determinar las matrices elementales para cualquier tipo de discretización.

De cara a la síntesis de las características globales del sistema, las matrices  $M$ ,  $K$  y  $P$  se calculan para cada uno de los elementos. Realizando entonces una transformación de coordenadas a las llamadas coordenadas unitarias del elemento, las matrices quedan expresadas en función de parámetros físicos y geométricos, con lo que se facilita la integración numérica. Antes de proceder al ensamblaje de todas las ecuaciones hay que realizar la transformación a coordenadas globales con el objeto de tener todas las matrices formuladas respecto al mismo sistema de coordenadas.

Una vez que se dispone de las matrices y vectores elementales en función de las coordenadas globales, su acoplamiento en el sistema puede realizarse según el llamado método directo, que consiste en sumar la contribución realizada por los distintos elementos en cada posición nodal.

Por último, antes de obtener la solución al sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer las condiciones de desplazamientos nodales que sean conocidas. El sistema resultante se puede dividir en dos términos: uno que contenga los desplazamientos impuestos y otro la incógnita. Resolviendo dicho sistema tendremos la solución. Como ya comentamos, una vez conocidos los desplazamientos nodales es posible calcular otro tipo de magnitudes tales como deformaciones, tensiones, etc.

Con todo ello, podemos ver el método de los elementos finitos como un procedimiento general de discretización de los sistemas continuos planteados a través de expresiones definidas matemáticamente.

Tras el análisis del sistema empleando la técnica de elementos finitos, cuyas líneas básicas acabamos de esbozar, obtenemos un conjunto de frecuencias modales  $w_n$  y un conjunto de formas modales  $\Phi_n$ , que son los autovectores de la matriz  $M^{-1} \cdot K$ . Estas formas modales vienen dadas en forma discreta, es decir, como un conjunto de desplazamientos modales en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y un conjunto de rotaciones modales  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  en cada uno de los nodos relevantes de la estructura. Además de esto, se obtienen coordenadas y un mapa de la estructura que permite reconstruir los desplazamientos físicos en términos de su expansión modal.

De hecho, los programas de elementos finitos generalmente proporcionan el valor de la variable incógnita en los nodos de los elementos (desplazamientos modales). La información de la que parten incluye, generalmente:

- ⇒ las coordenadas de los nodos que describen los elementos en que se particiona el sistema continuo,
- ⇒ una definición de cada uno de los elementos (numeración, qué nodo describe cada elemento,...)
- ⇒ una agrupación de los elementos según sus propiedades físicas (material, sección, grosor,...)
- ⇒ el tipo de problema del que se trata (dinámico, estático,...).

En nuestro caso, el sistema cuyo modelo se obtiene empleando esta técnica incluye tanto la estructura del espejo primario, como los segmentos que lo componen y el sistema de actuación.

Así, el análisis por elementos finitos parte de las ecuaciones dinámicas del sistema que puede escribirse en la forma (1.4). Existe una normalización de la matriz de autovectores  $\phi$  tal que:

$$\phi^T \cdot M \cdot \phi = I$$

A partir de esta expresión, y recordando que a partir de (1.9) encontramos que:

$$M^{-1} \cdot K - \omega^2 I = 0$$

obtenemos lo siguiente:

$$\phi^T \cdot K \cdot \phi = [\omega_n^2]$$

El proceso por el cual se obtiene la matriz  $\phi$  con la ayuda de un ordenador es complejo y requiere un gran tiempo de computación que se incrementa de forma no lineal a medida que el número de grados de libertad del sistema aumenta. Además, sólo los primeros modos se obtienen con un cierto grado de precisión.

Para un sistema como el espejo primario del GTC, que contiene unos siete mil grados de libertad, el coste de un análisis por elementos finitos tal y como lo hemos planteado resulta prohibitivo.

Así, una herramienta potente para el análisis de estructuras complejas con el método de los elementos finitos consiste en llevar a cabo un procedimiento de reducción del número de ecuaciones algebraicas en (1.4). Este proceso recibe el nombre de ‘condensación’ o ‘reducción nodal’. En cualquier caso, el objetivo que se persigue al llevar a cabo dicha reducción es que disminuya el número total de grados de libertad que se requiere para definir la estructura mecánica y, como consecuencia de ello, la dimensión de las matrices y vectores asociados. Con ello, se obtiene un modelo físico de orden inferior que recoge las características dinámicas globales más representativas del sistema, al tiempo que promedia los detalles finos. Las formas modales asociadas a frecuencias altas corresponden a los detalles finos de la dinámica de la planta, que generalmente son poco fiables, lo cual justifica el reducir el orden del sistema físico. Una vez que el proceso de reducción se lleva a cabo, el problema de autovectores es más tratable.

Entonces, en el análisis de las subestructuras en las que se particiona el sistema original, sólo se retienen los grados de libertad asociados a los nodos que estarán conectados con elementos adyacentes, los que soportarán cargas estáticas y los que representen de manera adecuada los efectos inerciales de cada uno de los elementos. Cuando se ensamblan todos los elementos los nodos de los contornos se pueden eliminar en una reducción posterior.

A modo de resumen, diremos que el sistema ‘celda+segmentos+actuadores’ del espejo primario del GTC tiene un número infinito de modos correspondientes a cada partícula del material. Sin embargo, el uso del método de análisis por elementos finitos nos permite reducirlos a un conjunto con un número finito de elementos: un modo por cada grado de libertad resultante del proceso de discretización. Inicialmente, el modelo de análisis por elementos finitos del espejo primario del Gran Telescopio Canarias presenta un número muy alto de grados de libertad, por lo que se hace necesario llevar a cabo un proceso de reducción que nos permite quedarnos con los más significativos, entendiendo como tales los que mejor representan la respuesta del espejo.

## CAPÍTULO II

# DESCRIPCIÓN, MODELIZACIÓN Y ANÁLISIS DEL SISTEMA

El espejo primario del Gran Telescopio Canarias es un sistema de gran escala cuyo control activo [Mast, 1981] motivó, en su origen, la realización de este trabajo. Por distintas razones, entre ellas y la más importante, que su construcción se prevé que finalice en el año 2004, hemos trabajado con un modelo de la planta. Describir este modelo, así como las características dinámicas del mismo, tanto desde el punto de vista de la respuesta temporal como del análisis frecuencial, son el objetivo de este capítulo. Además, nos ha parecido interesante comenzar haciendo un breve recorrido por las razones que originaron el proyecto GRANTECAN y las principales líneas del diseño de su espejo primario, que lo convierten en el mayor telescopio terrestre del mundo, junto con el Keck en Mauna Kea (Hawai).

### **II.1. ANTECEDENTES**

El proyecto GRANTECAN (GRAN TELESCOPIO CANARIAS) [Álvarez, 1997] tiene una extensa historia. El IAC (Instituto de Astrofísica de Canarias) lleva planeando la construcción de un gran telescopio para el Observatorio del Roque de los

Muchachos desde mediados de los años 80. Los primeros pasos importantes se dieron en colaboración con el Royal Greenwich Observatory que llevaron a la propuesta de un telescopio de ocho metros que sería construido conjuntamente por España y el Reino Unido; aunque, finalmente, las autoridades británicas optaron por una colaboración con los Estados Unidos en el proyecto GEMINI.

La Astrofísica es una ciencia cuya historia en España es breve, pero cuyo crecimiento ha sido espectacular. Hace sólo veinte o veinticinco años, muy poca gente trabajaba en este campo, pero actualmente más de diez grupos están trabajando en todo el país. Hay aproximadamente doscientos miembros españoles de la International Astronomical Union (IAU), y la razón de producción de astrónomos españoles es comparable a la de los países más avanzados.

El proyecto Gran Telescopio de Canarias fue ideado para satisfacer las necesidades de más tiempo de observación y mayores telescopios por parte de los astrónomos españoles. Dicho proyecto tiene, además, un gran atractivo tecnológico para la industria nacional. El desarrollo de instrumentación científica no sólo significa estar a la vanguardia de nuevas áreas de investigación, sino que también proporciona oportunidades a la industria de innovar y agudizar su competitividad.

## **II.2. DISEÑO**

El espejo primario del Gran Telescopio Canarias que mostramos de forma esquemática en la parte superior de la figura 2.1 está formado por treinta y seis segmentos hexagonales [Álvarez, 1997]. Tiene un diámetro de diez metros ya que, a pesar de la intención inicial de construir un espejo de ocho metros, diversos estudios realizados concluyeron que para proporcionar un avance significativo en la sensibilidad (de al menos un orden de magnitud) respecto a los telescopios de cuatro metros existentes, se requiere un diámetro de, al menos, diez metros.

El diseño inicial del telescopio incluía un espejo primario monolítico, muy en la línea de muchos proyectos similares que comenzaron a realizarse en la década de los 80. Sin embargo, una revisión del proyecto por parte de expertos en este campo concluyó que era más adecuado un espejo primario segmentado ya que ofrece numerosas ventajas, entre las cuales destacamos las siguientes:

- ↳ menor peso total,
- ↳ menor coste,
- ↳ disponibilidad de huecos,
- ↳ facilidad de fabricación y ensamblaje en el lugar de instalación,
- ↳ facilidad de mantenimiento,
- ↳ potencial mejora en las prestaciones ópticas, ...

Además, estudios anteriores llevados a cabo por la Universidad de California determinaron que fabricar un espejo de diez metros de diámetro a partir de una única pieza de cristal no resulta práctico, fundamentalmente por las razones ya aducidas.

A la hora de segmentar un espejo, hay fundamentalmente dos métodos naturales para hacerlo: anular, con los segmentos dispuestos en anillos circulares; y hexagonal, pues el hexágono es el polígono regular que puede cubrir una superficie plana con un perímetro lo más circular posible. Ambas alternativas fueron estudiadas y se optó por una segmentación hexagonal por las siguientes razones:

- ⇒ Los segmentos con forma hexagonal proporcionan una forma más circular y, potencialmente, la mejor explotación del material empleado para su fabricación. El uso de piezas circulares para producir segmentos hexagonales provoca un 20% de exceso de masa respecto de la que es realmente usada, mientras que para los segmentos anulares el exceso de masa mínimo sería del 57%.
- ⇒ Los vértices de los segmentos hexagonales tienen un ángulo interior de  $120^\circ$ . Los segmentos anulares tienen vértices de  $90^\circ$ , que son más difíciles de pulir.
- ⇒ Cuando el espejo primario es visto desde el infinito, los segmentos aparecen como hexágonos idénticos. Sin embargo, debido a la curvatura del espejo, los segmentos reales no serán hexágonos regulares. Así pues, las dimensiones máximas de los segmentos interiores serán ligeramente más pequeñas que las de los externos. No obstante, los segmentos son lo suficiente similares entre sí como para que sólo sea necesario diseñar un único soporte. Únicamente serán necesarios pequeños ajustes de compensación para los segmentos individuales lo que se conseguirá, por ejemplo, introduciendo pequeñas masas adicionales. Esto simplifica significativamente el

diseño y la producción de los soportes para los segmentos. En el caso de la segmentación anular, por el contrario, los segmentos en cada anillo son lo suficientemente diferentes como para que se haga necesario un diseño distinto de los soportes para cada uno de ellos.

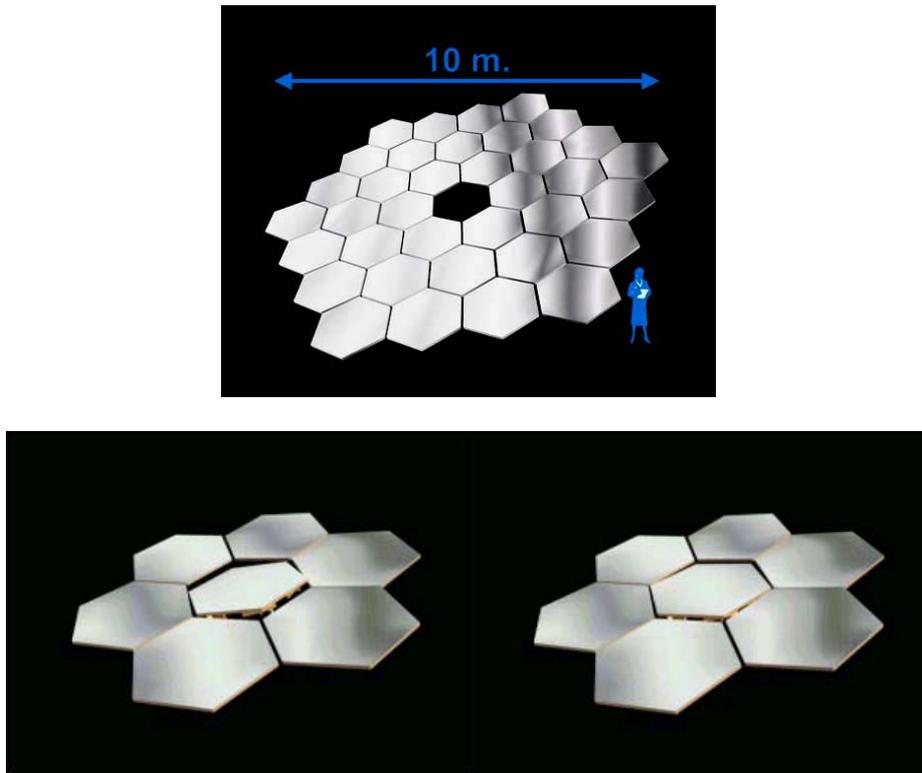
Otra cuestión importante es determinar el número de segmentos a emplear. Para ello se estudió el impacto de este factor para dieciocho, treinta y seis, y sesenta segmentos hexagonales concluyendo, finalmente, que treinta y seis era el número más adecuado. En general, es preferible usar el menor número posible de segmentos atendiendo, principalmente, a la exigencia de una óptima calidad de la imagen, puesto que un menor número de segmentos implica:

- el uso de un menor número total de puntos de soporte para la misma desviación gravitacional, ya que, para la misma densidad de puntos de soporte por superficie del espejo y para el mismo grosor, la distorsión gravitacional del soporte es más pequeña cuanto mayor es el segmento,
- una corrección de la óptica activa de las figuras de los segmentos más efectiva,
- un menor número de unidades para controlar el espejo primario, lo que implica un menor coste y una mayor fiabilidad,
- una menor longitud total de los huecos entre segmentos, lo que disminuye el área perdida del espejo primario y, con ello, la emisividad térmica del mismo,
- una menor degradación de la calidad de la imagen debido a errores de fase entre segmentos,
- un menor coste de pulido, ya que éste es generalmente más barato por unidad de superficie para segmentos de gran tamaño.

Todos los factores que acabamos de mencionar apuntan hacia segmentos grandes. Sin embargo, el último punto, relativo a la manufactura de los segmentos, es cierto sólo mientras no implique la construcción de nuevas instalaciones, en cuyo caso esta inversión tiende a convertirse en una parte significativa del coste. Por tanto, el criterio seguido ha sido usar los segmentos más grandes posibles dentro de la capacidad de potenciales pulidores a precios razonables. Este límite ha sido establecido en dos

metros, lo que significa que el menor número posible de segmentos que se pueden emplear es treinta y seis.

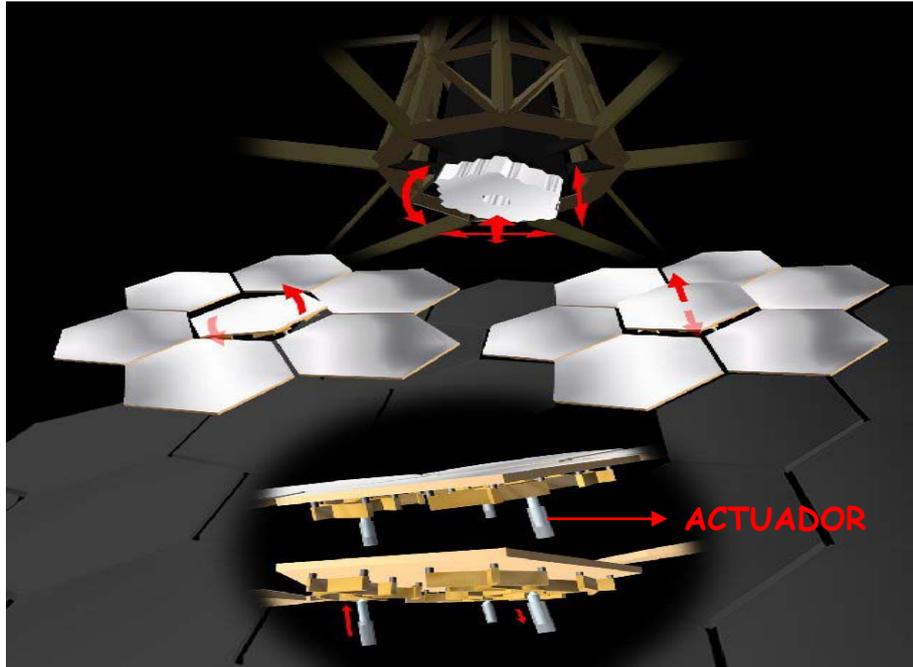
En la parte superior de la figura 2.1 se aprecian las dimensiones del espejo primario en relación al tamaño de una persona, mientras que en la inferior mostramos detalles del movimiento del segmento central de un espejo compuesto por sólo siete segmentos hexagonales.



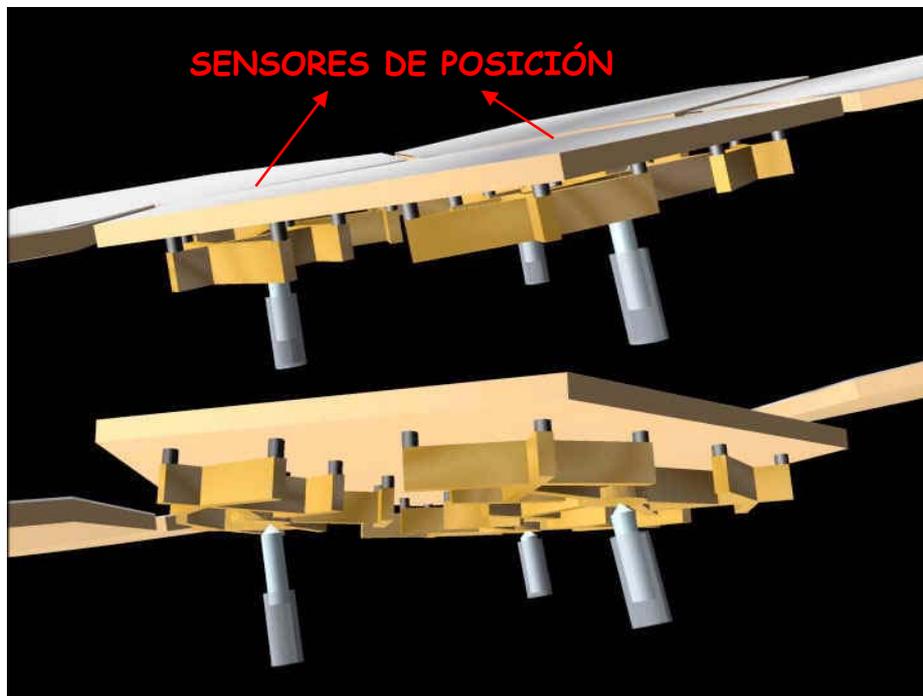
**Figura 2.1:** Dimensiones del espejo primario del GTC y detalle del movimiento de un segmento.  
(Copyright de GRANTECAN, S.A.)

### **II.3. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA**

Cada uno de los treinta y seis segmentos que conforman el espejo primario del Telescopio dispone de tres actuadores que permiten el movimiento de los segmentos en las tres direcciones del espacio, tal y como mostramos en la figura 2.2, y de un sensor por cada arista que sea común a dos segmentos, como queda reflejado en la figura 2.3.



**Figura 2.2:** Representación de los actuadores de los segmentos y movimientos que inducen en éstos.  
(Copyright de GRANTECAN, S.A.)



**Figura 2.3:** Representación de los sensores de posición del espejo primario del GTC.  
(Copyright de GRANTECAN, S.A.)

Los sensores de posición miden, con gran precisión, la separación relativa entre dos segmentos adyacentes.

Dependiendo de la posición que ocupa cada segmento dentro del espejo, los hay que tienen seis, cinco, cuatro ó tres segmentos adyacentes. Por tanto, mientras que el número de actuadores por segmento es constante e igual a tres, el número de sensores oscila entre tres y seis con lo que, globalmente, el sistema está dotado con ciento ocho actuadores y ciento sesenta y ocho sensores de posición. En la figura 2.4 los representamos de forma esquemática:

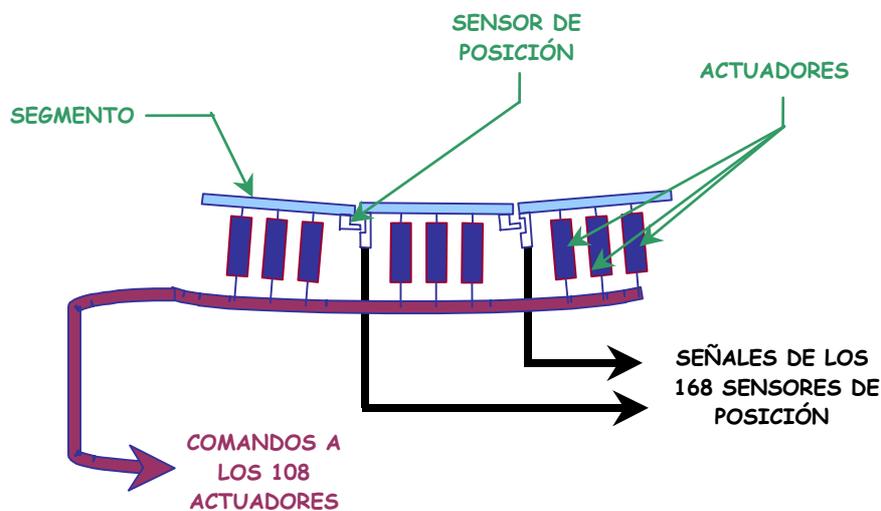
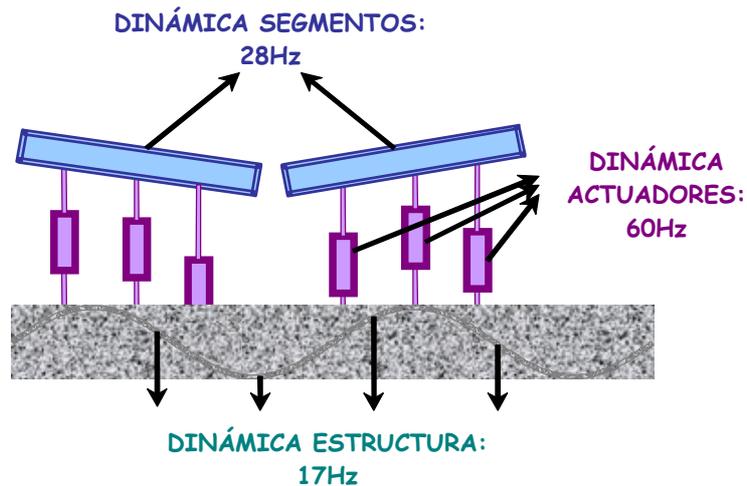


Figura 2.4: Sistema de actuación y sensado del espejo primario del GTC.

#### II.4. MODELIZACIÓN DE LA DINÁMICA DEL ESPEJO PRIMARIO

El espejo primario del Gran Telescopio Canarias es un sistema de gran escala [Jamshidi, 1983], [Lunze, 1992]. Su dinámica ha sido modelada en representación de espacio de estados con 708 estados, 108 entradas y 168 salidas. Las entradas son, como queda de manifiesto en la figura 2.4, los comandos que se envían a los actuadores para mover los segmentos, y las salidas las señales medidas por los sensores de posición. Desde el punto de vista dinámico, el espejo está compuesto por tres elementos bien diferenciados [Acosta, 1999], tal y como mostramos en la figura 2.5:



**Figura 2.5:** Elementos que componen el espejo primario del GTC.

y que son:

- la estructura o celda que soporta el espejo,
- los segmentos,
- los actuadores que mueven los segmentos.

La dinámica de la celda viene descrita por los treinta modos más representativos, de entre los cuales destaca el que se encuentra en  $17\text{hz}$ , tal y como lo reflejamos en la figura 2.5, por ser el que mayor potencia espectral presenta (ver figura 2.8). En realidad, no se trata de un modo propio de la estructura, es decir, no aparece si consideramos su dinámica aisladamente de la de los segmentos, sino que surge como consecuencia del acoplamiento existente entre ambos elementos.

Los segmentos, por su parte, están caracterizados todos ellos por una frecuencia de  $28\text{hz}$  en el caso de considerar la dinámica nominal, que es la que presentamos en este capítulo. Más adelante introduciremos las incertidumbres que pueden afectar al sistema.

Los actuadores son los que contribuyen con un mayor número de estados al modelo de la planta, al venir caracterizados por un comportamiento típico de segundo orden y un retardo en la actuación. Así, la respuesta  $q_i$  de un actuador  $i$  cuando se le aplica un comando  $\bar{q}_i$  es la siguiente:

$$q_i = \frac{e^{-s\tau_q}}{1 + \xi_q \frac{s}{w_q} + \frac{s^2}{w_q^2}} \bar{q}_i \quad (2.1)$$

siendo:

$$w_q = 2\pi \times 60 \text{sg}^{-1} \quad (\text{frecuencia propia de los actuadores})$$

$$\xi_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{coeficiente de amortiguamiento})$$

$$\tau_q = 5 \text{ms} - 10 \text{ms} \quad (\text{retardo de los actuadores})$$

El término exponencial que aparece en el numerador de (2.1) corresponde al retardo del actuador. Puesto que es un término no lineal y vamos buscando un modelo que sí lo sea, lo sustituimos por la llamada *aproximación de Padé* [Friedland, 1996], que, en general, ofrece resultados satisfactorios. Este método sugiere que la exponencial sea aproximada de la siguiente manera:

$$e^{-sT} = \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{8}s^2 - \dots}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{8}s^2 + \dots} \quad (2.2)$$

Para modelar el retardo de los actuadores truncamos las series tanto del numerador como del denominador en los términos de segundo orden de modo que establecemos la siguiente igualdad:

$$e^{-s\tau_q} = \frac{1 - \frac{\tau_q}{2}s + \frac{\tau_q^2}{8}s^2}{1 + \frac{\tau_q}{2}s + \frac{\tau_q^2}{8}s^2} \quad (2.3)$$

Volviendo a la función de transferencia (2.1), vemos que el denominador es un término de segundo orden, lo que implica que habrá dos estados de la representación interna del sistema asociados al comportamiento oscilatorio de cada uno de los actuadores. Por otra parte, al tomar la aproximación de Padé y quedarnos con los términos de segundo orden, habrá otros dos estados asociados al retardo de cada actuador.

Con todo esto, los 708 estados de la representación interna del espejo primario del GTC son los que siguen:

$$x = \begin{bmatrix} a \rightarrow 30 \times 1 \\ \dot{a} \rightarrow 30 \times 1 \\ x_e \rightarrow 108 \times 1 \\ m_s \dot{x}_e \rightarrow 108 \times 1 \\ r1 \rightarrow 108 \times 1 \\ r2 \rightarrow 108 \times 1 \\ q \rightarrow 108 \times 1 \\ \dot{q} \rightarrow 108 \times 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

siendo:

$a$  : modos dominantes de la estructura que soporta al espejo primario.

$\dot{a}$  : derivadas temporales de los modos dominantes de dicha estructura.

$x_e$  : estados asociados a los segmentos.

$m_s \dot{x}_e$  : momentos de los segmentos.

$r1$ : 1<sup>er</sup> estado asociado al retardo de cada cada actuador.

$r2$ : 2<sup>o</sup> estado asociado al retardo de cada actuador.

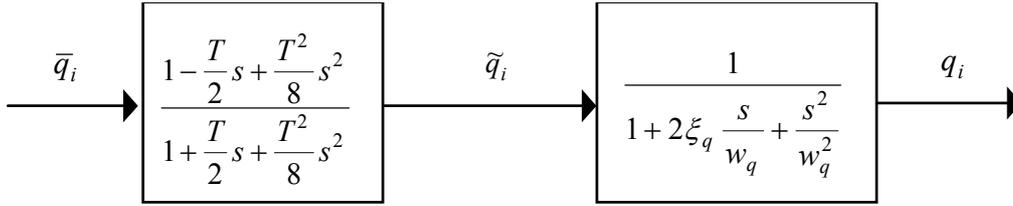
$q$ : 1<sup>er</sup> estado asociado al término de 2<sup>o</sup> orden de cada actuador.

$\dot{q}$ : 2<sup>o</sup> estado asociado al término de 2<sup>o</sup> orden de cada actuador.

Para entender cómo hemos obtenido estos cuatro últimos consideremos el siguiente diagrama de bloques:



o, empleando las funciones de transferencia correspondientes:



Por una parte, para obtener la representación interna asociada al retardo de los actuadores, tomamos como variables de estado las siguientes:

$$r_1 = \tilde{q}_i - \bar{q}_i$$

$$r_2 = \dot{r}_1 + \frac{8}{T} \bar{q}_i$$

lo que nos permite obtener con facilidad la expresión de las derivadas primeras en el tiempo de  $r_1$  y  $r_2$  en función de éstas y de la entrada  $\bar{q}_i$ :

$$\frac{d}{dt}(r_1) = r_2 - \frac{8}{T} \bar{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}(r_2) = -\frac{8}{T^2} r_1 - \frac{4}{T} r_2 + \frac{32}{T^2} \bar{q}_i$$

o, expresándolo en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{8}{T^2} & -\frac{4}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{T} \\ \frac{32}{T^2} \end{bmatrix} \bar{q}_i \quad (2.5)$$

Por otro lado, la dinámica de segundo orden se modela tomando como variables de estado  $q_i$  y  $\dot{q}_i$ , con lo que sus derivadas primeras en el tiempo vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{dt}(q_i) = \dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_i) = -w_q^2 q_i - 2\xi_q w_q \dot{q}_i + w_q^2 \tilde{q}_i$$

que, en forma matricial, resultan en:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_q^2 & -2\xi_q w_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_q^2 \end{bmatrix} \tilde{q}_i \quad (2.6)$$

Si expresamos conjuntamente las representaciones en (2.5) y (2.6), obtenemos que:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{T^2} & -\frac{4}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ w_q^2 & 0 & -w_q^2 & -2\xi_q w_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{T} \\ \frac{32}{T^2} \\ 0 \\ w_q^2 \end{bmatrix} \bar{q}_i \quad (2.7)$$

para cada uno de los actuadores del espejo.

Las ecuaciones de estado y de salida [Rosenbrock, 1970] que describen el comportamiento dinámico del sistema completo (708 estados) son las siguientes:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a \\ \dot{a} \\ xe \\ m_s \dot{x}e \\ r_1 \\ r_2 \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} a \\ \dot{a} \\ xe \\ m_s \dot{x}e \\ r_1 \\ r_2 \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \mathbf{B} * U + \begin{bmatrix} 0_{30 \times 1} \\ 0_{30 \times 1} \\ 0_{108 \times 1} \\ P \\ 0_{108 \times 1} \\ 0_{108 \times 1} \\ 0_{108 \times 1} \\ 0_{108 \times 1} \end{bmatrix} ; \quad S = \mathbf{C} * \begin{bmatrix} a \\ \dot{a} \\ xe \\ m_s \dot{x}e \\ r_1 \\ r_2 \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \mathbf{D} * U \quad (2.8)$$

siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_{30 \times 30} & I_{30 \times 30} & 0_{30 \times 108} \\ -W^2 - k_s V^T V & -C - c_s V^T V & k_s V^T & \frac{c_s}{m_s} V^T & 0_{30 \times 108} & 0_{30 \times 108} & -k_s V^T & -c_s V^T \\ 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 108} & \frac{1}{m_s} I_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} \\ k_s V & c_s V & -k_s I_{108 \times 108} & -\frac{c_s}{m_s} I_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & k_s I_{108 \times 108} & c_s I_{108 \times 108} \\ 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & I_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} \\ 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & -\frac{8}{T^2} I_{108 \times 108} & -\frac{4}{T} I_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} \\ 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 108} & I_{108 \times 108} \\ 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & w_q^2 I_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} & -w_q^2 I_{108 \times 108} & -2\xi_q w_q I_{108 \times 108} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0_{30 \times 108} \\ 0_{30 \times 108} \\ 0_{108 \times 108} \\ 0_{108 \times 108} \\ -\frac{8}{T} I_{108 \times 108} \\ \frac{32}{T^2} I_{108 \times 108} \\ 0_{108 \times 108} \\ w_q^2 I_{108 \times 108} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

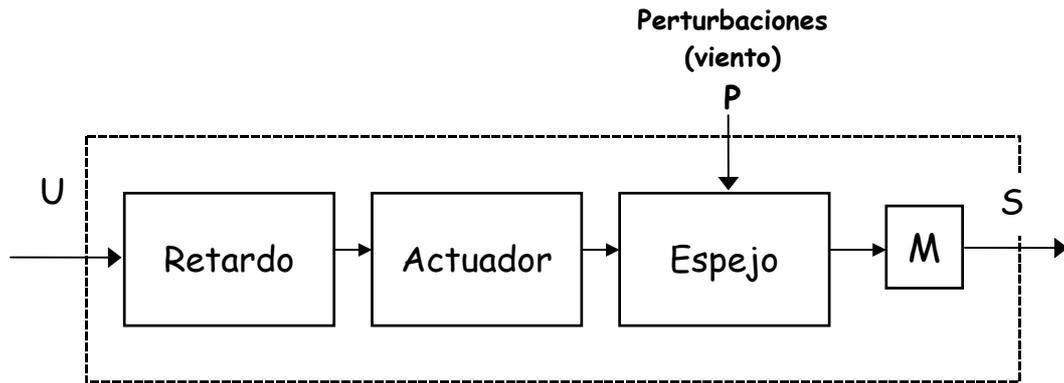
$$\mathbf{C} = [0_{168 \times 30} \quad 0_{168 \times 30} \quad M \quad 0_{168 \times 108} \quad 0_{168 \times 108} \quad 0_{168 \times 108} \quad 0_{168 \times 108} \quad 0_{168 \times 108}]$$

$$\mathbf{D} = 0_{168 \times 108}$$

siendo el significado de las variables que aparecen en (2.9) el siguiente:

- ⇒  $V(108 \times 30)$ : matriz de desplazamientos modales de la celda.
- ⇒  $W(30 \times 30)$ : matriz diagonal de frecuencias modales angulares.
- ⇒  $C(30 \times 30)$ : matriz diagonal de amortiguamientos ( $c_i = 2\xi_i w_i$ ,  $\xi_i$  = amortiguamiento relativo del modo  $i$  de la estructura).
- ⇒  $k_s = 6N/\mu m$ : rigidez de los soportes de los segmentos.
- ⇒  $c_s = 2000\text{kg}/\text{sg}$ : amortiguamiento de los soportes de los segmentos.
- ⇒  $m_s = 180\text{kg}$ : masa del segmento asociado a un soporte (1/3 de la masa de un segmento).
- ⇒  $w_q = 2\pi \times 60\text{sg}^{-1}$ : frecuencia natural de los actuadores.
- ⇒  $\xi_q = 1/\sqrt{2}$ : amortiguamiento de los actuadores.
- ⇒  $T = 5\text{ms}$ : retardo de los actuadores.
- ⇒  $P(108 \times 1)$ : perturbaciones debidas al viento.
- ⇒  $M(168 \times 108)$ : matriz de relación geométrica entre las medidas realizadas por los sensores del sistema y la posición de los segmentos.

El diagrama de bloques del sistema en lazo abierto es el que mostramos a continuación:



**Figura 2.6:** Diagrama de bloques del sistema en lazo abierto.

En este punto consideramos importante poner de manifiesto que la única información disponible en el sistema real son las medidas suministradas por los 168 sensores. Sin embargo, a partir de esta información es posible conocer la posición de los segmentos respecto a un plano promedio. Este plano se calcula mediante un ajuste por mínimos cuadrados de la posición de los segmentos y, en cualquier caso, su situación en el espacio queda indeterminada puesto que los tres grados de libertad correspondientes al sólido rígido no se pueden conocer haciendo uso únicamente de los datos suministrados por los sensores intersegmento. Las distancias  $\Delta x_e$  de los segmentos respecto a este plano nos informan del grado de alineamiento de los mismos, con lo que, en la práctica, trabajar con estas ciento ocho señales en lugar de con las ciento sesenta y ocho provenientes de los sensores intersegmento no supone una pérdida de información efectiva.

Estas nuevas magnitudes,  $\Delta x_e$ , las obtenemos a partir de la información de los sensores intersegmento y de la relación geométrica entre éstos y las posiciones absolutas de los segmentos, como:

$$\Delta x_e = M_{S \rightarrow \Delta x_e} * S$$

siendo:

$S(168 \times 1)$ : distancias medidas por los 168 sensores intersegmento,

$\Delta x_e (108 \times 1)$ : distancia de los 36 segmentos con respecto a un plano promedio. Se trata de 108 magnitudes ya que están medidas, para cada uno de los segmentos, en los tres puntos de apoyo de éstos con la estructura que los soporta,

$M_{S \rightarrow \Delta x_e} (108 \times 168)$ : matriz de transformación geométrica entre  $\Delta x_e$  y  $S$ .

$M_{S \rightarrow \Delta x_e}$  es en realidad la pseudoinversa de  $M_{x_e \rightarrow S}$ , siendo ésta la matriz que relaciona la separación relativa entre segmentos adyacentes,  $S$ , con la posición de los segmentos,  $x_e (108 \times 1)$ , ahora medida respecto a una referencia fija. Esto es:

$$S = M_{x_e \rightarrow S} * x_e$$

donde  $M_{x_e \rightarrow S}$  es la misma matriz que en (2.9) llamamos  $M$ .

Esta relación nos permite obtener en simulación los valores medidos por los sensores ya que recordemos que las variables  $x_e$  forman parte del vector de estados del sistema (ver representación interna de la planta en (2.8)).

$M_{x_e \rightarrow S}$  es una matriz singular ya que, teniendo 168 filas y 108 columnas, su rango es 105, debiéndose esto a los tres grados de libertad del sólido-rígido. Tal vez lo entendamos mejor si pensamos que, en realidad, hay un número infinito de vectores de posiciones absolutas  $x_e$ , como infinitos son los planos paralelos a uno dado, que nos dan idéntica lectura por parte de los sensores.

Es lógico entonces que, debido a que la relación entre  $x_e$  y los correspondientes  $S$  no es unívoca, sea imposible determinar, a partir únicamente de la información que proporcionan los sensores (información relativa), la posición absoluta de los segmentos del espejo respecto a una referencia fija, para lo cual sería necesario, además, conocer el valor de tres de los elementos de  $x_e$ . En caso contrario, no es posible establecer una relación del tipo:

$$x_e = M_{S \rightarrow x_e} * S$$

sino que debemos introducir las magnitudes que hemos llamado  $\Delta x_e$ . Éstas nos proporcionan la misma información que los sensores, es decir, el grado de alineamiento de los segmentos entre sí, sólo que ahora representan, como ya hemos comentado, la distancia, medida en los mismos puntos que los  $x_e$ , de los 36 segmentos a un plano

promedio que calculamos mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Dicho ajuste consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$z_{plano\_ajuste} = a_0 + a_1 * x_{plano\_ajuste} + a_2 * y_{plano\_ajuste}$$

donde  $x_{plano\_ajuste}$ ,  $y_{plano\_ajuste}$  son, respectivamente, las coordenadas  $x$  e  $y$  de los puntos donde medimos los  $\Delta x_e$ , por lo que son cantidades fijas y conocidas; mientras que los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  los obtenemos de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_i z_i & \sum_i x_i & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i z_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i z_i & \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 \end{vmatrix}}{\det}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_i z_i & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i z_i & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i & \sum_i y_i z_i & \sum_i y_i^2 \end{vmatrix}}{\det}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_i x_i & \sum_i z_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i z_i \\ \sum_i y_i & \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i z_i \end{vmatrix}}{\det}$$

siendo:

$$\det = \begin{vmatrix} N & \sum_i x_i & \sum_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i & \sum_i x_i y_i & \sum_i y_i^2 \end{vmatrix}$$

y  $N$  el número de puntos con los que realizamos el ajuste del plano, que en nuestro caso son 108.

## II.5. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GTC

A continuación, llevaremos a cabo un estudio del comportamiento dinámico del espejo primario del GTC, tanto en el dominio temporal como en el de las frecuencias.

### II.5.1. Dominio temporal y frecuencial

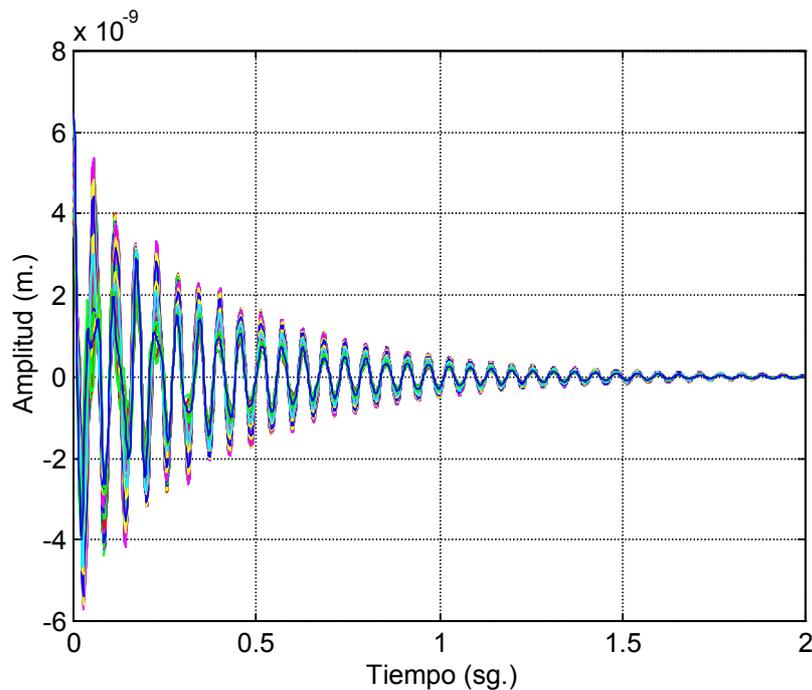
En la figura 2.7 podemos observar la evolución del sistema nominal en lazo abierto en el dominio temporal. En este caso, los segmentos del espejo se sitúan inicialmente en un plano definido por:

*actuador n° 26* → 4 nm.

*actuador n° 41* → 5 nm.

*actuador n° 95* → 6 nm.

y se dejan evolucionar libremente hacia su posición de equilibrio: el plano (0,0,0).



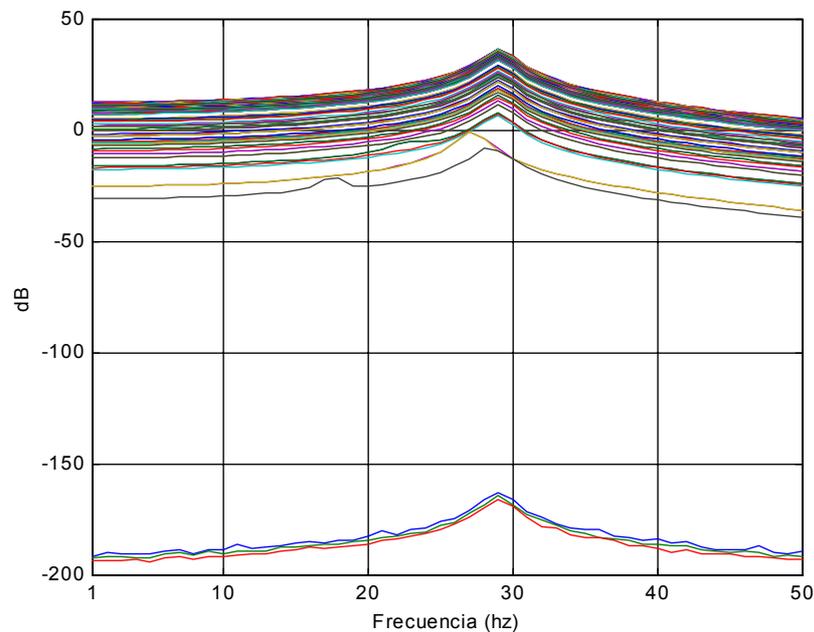
**Figura 2.7:** Evolución de los segmentos del espejo primario en lazo abierto partiendo del plano (4nm,5nm,6nm).

A la vista de esta figura parecería que la única frecuencia presente en la respuesta del sistema son los 17hz que es el modo debido a la celda. Sin embargo, hay otra componente en 28hz (el modo correspondiente a los segmentos) que se ve

enmascarada por la primera, como veremos al analizar la respuesta en frecuencias del mismo.

Además, a la vista de la figura 2.7, observamos que el tiempo de establecimiento del sistema en lazo abierto, esto es, el tiempo que los segmentos tardan en alcanzar la posición final, en este caso la posición de equilibrio, es superior a 1 segundo.

Acudimos ahora a la respuesta en frecuencias [Freudenberg, 1988], [Oppenheim, 1983] del espejo que mostramos en la figura 2.8, en la que representamos los valores singulares en decibelios frente a la frecuencia en hertzios tomando como salida del sistema las mediciones hechas por los sensores intersegmento:

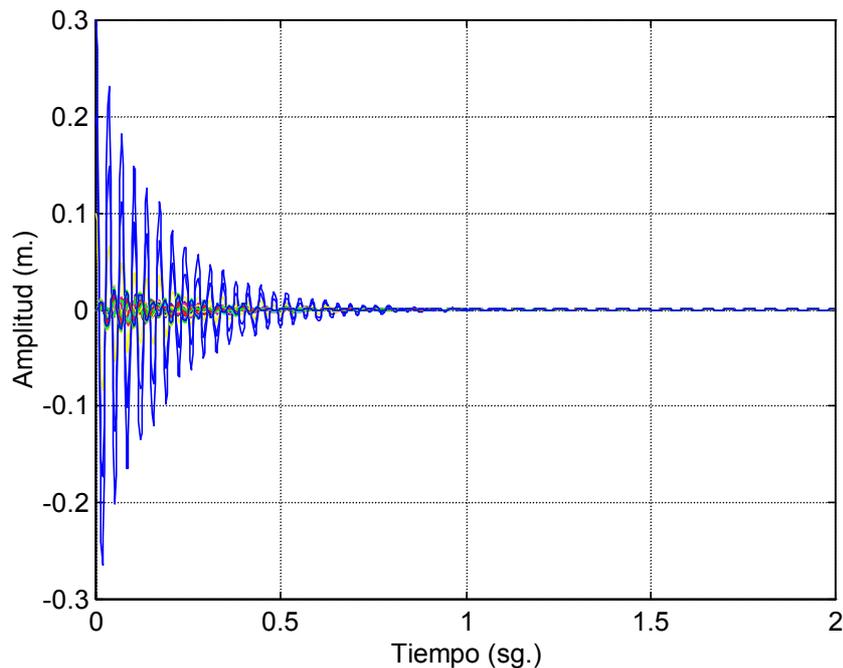


**Figura 2.8:** Valores singulares del espejo primario del GTC.

En esta figura observamos claramente el modo de  $28\text{Hz}$ , correspondiente a los segmentos del espejo, así como una contribución en  $17\text{Hz}$  debida, como ya comentamos, al acoplamiento de éstos a través de la estructura.

### II.5.2. Acoplamiento del sistema

El efecto de acoplamiento que existe entre los distintos segmentos a través de la estructura que los soporta influye de forma decisiva en su comportamiento dinámico.



**Figura 2.9:** Evolución de los segmentos en lazo abierto cuando sólo 3 de ellos parten de fuera del equilibrio.

En la figura 2.9 representamos la evolución temporal de los segmentos del espejo cuando 105 actuadores parten del equilibrio y sólo 3 (los nº 49, 54 y 102) se encuentran inicialmente fuera de ella. Queremos hacer notar que, tanto aquí como en lo que sigue, cuando hablamos de actuadores no nos referimos, a no ser que así lo explicitemos, a los dispositivos mecánicos que hacen posible el movimiento del espejo, sino a la posición de los segmentos medidas en los puntos donde se encuentran situados los actuadores. En esta ocasión hemos tomado concretamente:

$$\text{actuador } n^{\circ} 49 \rightarrow 0.1 \text{ m.}$$

$$\text{actuador } n^{\circ} 54 \rightarrow 0.2 \text{ m.}$$

$$\text{actuador } n^{\circ} 102 \rightarrow 0.3 \text{ m.}$$

En esta figura observamos cómo, a pesar de que estos 3 actuadores son los que presentan mayor amplitud en sus oscilaciones, todos los segmentos oscilan en mayor o menor medida. La conclusión que podemos extraer de este comportamiento es que, debido al fuerte acoplamiento existente en el sistema, 3 actuadores son capaces de

"arrastrar" a los 105 restantes que, de otro modo, no hubieran abandonado la posición de equilibrio en la que ya inicialmente se encontraban. Veremos en capítulos posteriores cómo este efecto, el acoplamiento entre los segmentos del espejo primario, juega un papel fundamental en el proceso de diseño del controlador.

## II.6. ANÁLISIS DEL RUIDO E INCERTIDUMBRES EN EL MODELO

A lo largo de este capítulo hemos presentado el modelo determinista del espejo primario del Gran Telescopio Canarias. Éste es el momento de introducir el ruido y las incertidumbres en el modelo dinámico que se prevén en el sistema.

### II.6.1. Ruido debido al viento

Es importante caracterizar correctamente el ruido que se prevé que afecte al espejo primario del GTC, un ruido que estará debido a la acción del viento sobre la superficie de dicho espejo [Forbes, 1982]. Así, el espectro de la densidad de potencia espectral del ruido [Marple, 1987] es:

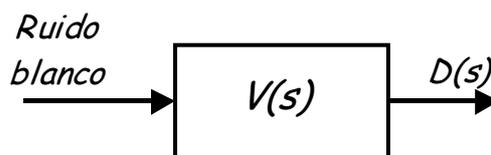
$$S(f) = \frac{4/f_0}{1 + 70.8 \left( \frac{f}{f_0} \right)^2} F^2$$

siendo:

$$f_0 = 10 \text{ Hz} ,$$

$$F = 6 \text{ Newton} .$$

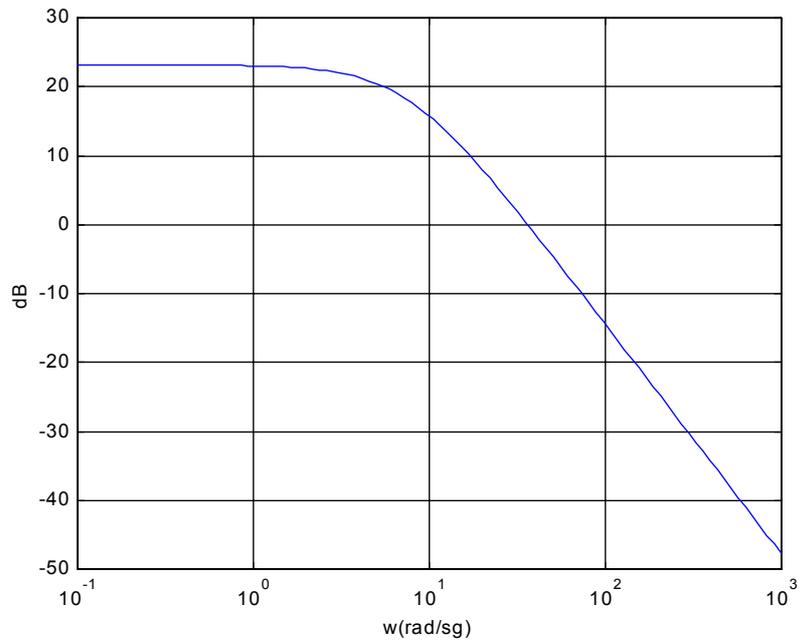
Aunque volveremos sobre este aspecto en el capítulo VII, diremos que, llamando  $V(s)$  a la función de transferencia del sistema que colorea el ruido blanco a la entrada conforme a la distribución espectral  $S(f)$ :



tenemos que la salida de este sistema coincide con la densidad de potencia espectral, es decir:

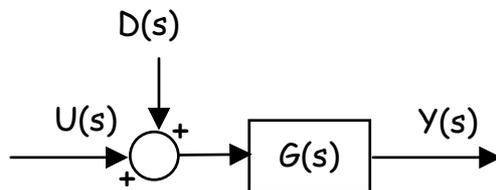
$$D(f) = S(f)$$

Si representamos la respuesta en frecuencias del ruido coloreado en la figura 2.10, vemos que la contribución más importante se encuentra en la zona de bajas frecuencias.



**Figura 2.10:** Espectro correspondiente al ruido coloreado que afecta al espejo primario del GTC.

Sin embargo, al tratarse de ruido de proceso, tal y como se refleja en el siguiente diagrama de bloques:



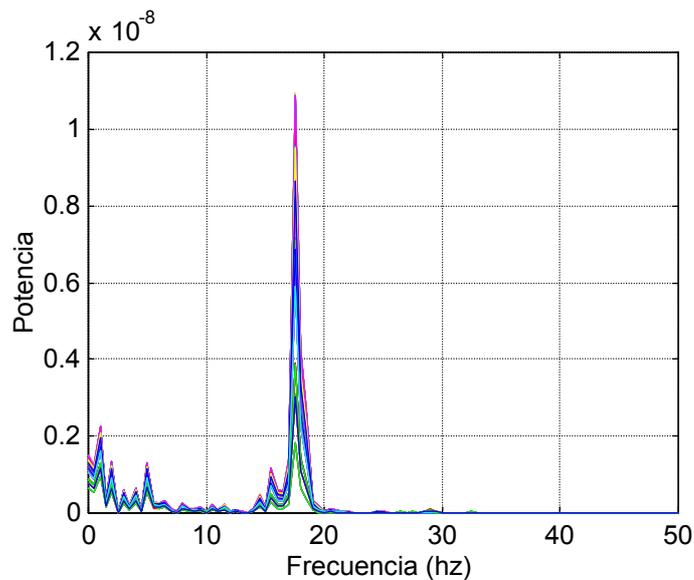
la dinámica del sistema también afecta a la entrada de ruido, lo que significa que también tendremos que tener en cuenta lo que ocurre en la frecuencia de resonancia de la estructura y de los segmentos.

A la hora de analizar el comportamiento de la planta sometida al ruido  $D(s)$ , podemos considerar dos situaciones distintas:

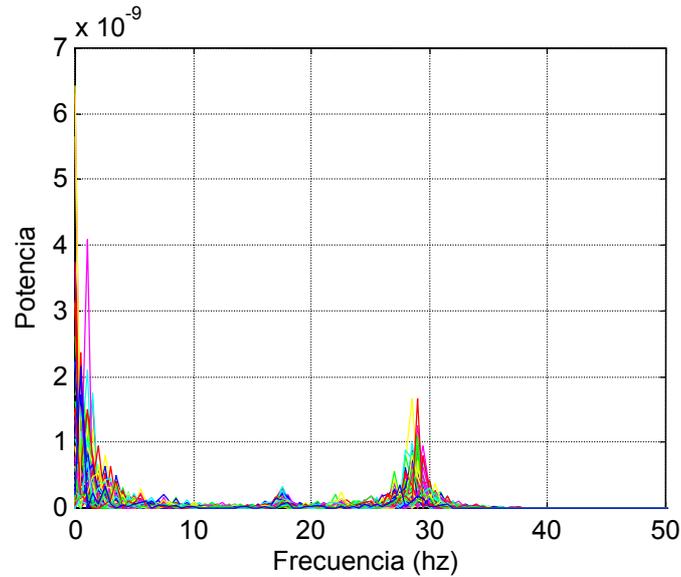
- ruido totalmente correlado, donde se supone que el viento incide sobre cada segmento del espejo con la misma intensidad, y
- ruido totalmente incorrelado, donde se considera una intensidad distinta para cada uno de los segmentos.

El motivo de analizar estos dos casos extremos es que, en la práctica, se espera encontrar una situación intermedia entre ambos.

En las figuras 2.11 y 2.12 representamos el espectro de la respuesta del sistema en lazo abierto sometido a ruido totalmente correlado e incorrelado, respectivamente.



**Figura 2.11:** Espectro de la respuesta del sistema sometido a viento totalmente correlado.



**Figura 2.12:** Espectro de la respuesta del sistema sometido a viento totalmente incorrelado.

En la figura 2.11 observamos cómo, cuando todos los segmentos se someten a la misma fuerza del viento, la contribución más importante es la que corresponde al modo dominante en la estructura ( $17\text{hz}$ ). En este caso, los segmentos se mueven como si formaran parte de un espejo monolítico, razón por la cual no se excita la frecuencia propia de éstos, que se encuentra en  $28\text{hz}$ . En la figura 2.12, en cambio, vemos que si se aplica a cada segmento una fuerza de distinta intensidad sí que se excita su modo de vibración convirtiéndose, junto con las bajas frecuencias, en las dos principales contribuciones al espectro del sistema. Una contribución en  $17\text{hz}$  también aparece en esta ocasión.

### II.6.2. Incertidumbres en el modelo

En la sección II.4 de este capítulo presentamos el valor nominal de los parámetros físicos que caracterizan el comportamiento dinámico del espejo primario del Gran Telescopio Canarias. Sin embargo, se espera que dos de estos parámetros, en concreto, la constante de rigidez de los soportes de los segmentos ( $k_s$ ) y el tiempo de establecimiento de los actuadores ( $t_s = 2\pi/w_q$ ), presenten, en el sistema real, una cierta variación respecto a su valor nominal. Así:

- El valor de  $k_s$  puede variar un  $\pm 5\%$  en torno al valor nominal:  $6 \times 10^6 N / \mu m$ . Esta variación sólo es espacial (de unos soportes a otros), no temporal.
- El tiempo de establecimiento  $t_s$  de cada actuador es aleatorio tras la aplicación de cada comando. Éste viene dado por una distribución uniforme entre 10 y 50ms, siendo el valor nominal  $(60hz)^{-1} \approx 16.7ms$ . En este caso la variación es tanto temporal como espacial.

### II.6.3. Especificaciones de los sensores y actuadores

Por último, presentamos las dos especificaciones dan cuenta de la precisión de las señales captadas por los sensores que miden el grado de alineamiento entre segmentos adyacentes, y de la precisión en la actuación sobre los mismos. Éstas son:

- Resolución de lectura de los sensores:  $1.5nm$ ,
- Resolución de escritura de los actuadores:  $2.5nm$ .

## CAPÍTULO III

# CONTROLADOR MULTIVARIABLE BASADO EN UNA ESTRATEGIA LOCAL-GLOBAL

En este capítulo presentamos una serie de controladores clásicos multivariantes diseñados en base a una estrategia de control ‘local-global’ con el fin de atenuar lo máximo posible las oscilaciones naturales del sistema y lograr que los segmentos recuperen el estado de equilibrio lo más rápidamente posible tras una perturbación espúrea. Nuestro principal objetivo es el estudio de la viabilidad de esta estrategia de control, por lo que no nos planteamos obtener ni rechazo al ruido ni robustez frente a incertidumbres en la dinámica del espejo. Ambas especificaciones de control las abordaremos en el capítulo VII.

La idea de combinar dos acciones de control a distinto nivel surge con el objeto de facilitar la arquitectura de control en el espejo primario del Gran Telescopio Canarias [Álvarez, 1997]. Debido a la gran cantidad de sensores y actuadores de que está provisto este sistema, hay que considerar el problema del tiempo necesario para procesar tal cantidad de información o, en otras palabras, de la frecuencia máxima a la

que se puede aplicar a la planta la acción de control. En cualquier caso, deberemos intentar que la tecnología de buses actuales [Berge, 2001] no imponga limitaciones en las prestaciones que podemos conseguir con el controlador diseñado, y esto es, precisamente, lo que pretendemos al introducir la estrategia de control local-global.

### **III.1. ESTRATEGIA LOCAL-GLOBAL**

Esta estrategia de control consiste en aplicar al sistema conjuntamente dos acciones de control a distinto nivel: local y global. Cuando distinguimos entre una y otra estamos, en realidad, refiriéndonos a lo siguiente:

- ⇒ El comando que se aplica localmente a cada actuador del espejo se calcula en base a las lecturas realizadas por los sensores del segmento al que dicho actuador pertenece. Realmente, sólo será necesario hacer uso de las señales provenientes de tres de los sensores del segmento en cuestión ya que, aun en el caso de que éste disponga de un número superior, un cuarto, quinto o sexto sensor, aporta información redundante al controlador local.

Esta acción de control por sí sola resulta del todo ineficaz para la consecución de nuestro objetivo. Para las distintas estrategias probadas (control proporcional, compensación, diseño basado en el Lugar de las Raíces, filtrado) los resultados son de lo más desalentadores ya que, o bien no logramos que el sistema en lazo cerrado sea estable, o bien no se observa la más mínima atenuación en las oscilaciones del sistema. Es por esto por lo que resulta imprescindible aplicar una acción de control global.

- ⇒ El comando global se calcula a partir de la posición de los segmentos, la cual es imposible conocer a nivel local. Si bien se dispone de sensores de posición en los propios actuadores, las lecturas que éstos realizan son mucho menos precisas que las que proporcionan los sensores intersegmento. Por tanto, para poder conocer con el grado de exactitud necesario las posiciones de los segmentos, será necesario acceder a las lecturas de los ciento sesenta y ocho sensores que miden la separación relativa entre segmentos adyacentes.

En la figura 3.1 mostramos cómo actuarían conjuntamente las dos acciones de control:

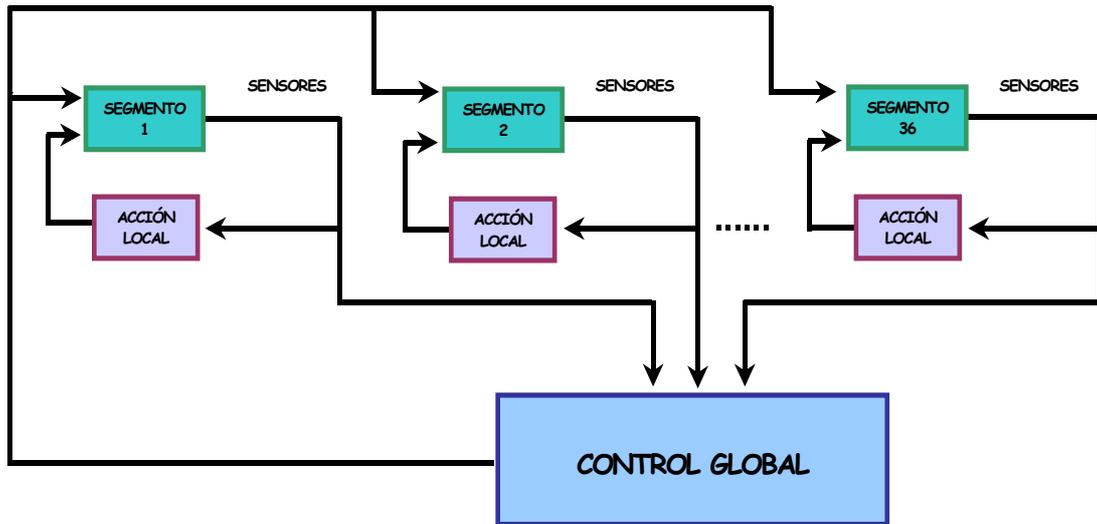


Figura 3.1: Esquema de los dos niveles de control: local y global.

Hemos probado distintos controladores globales a baja frecuencia y éstos son los resultados obtenidos:

Con un controlador integral a 100hz, siendo la constante de integración  $K_i = 20$ , la respuesta de los segmentos del espejo es la mostrada en la figura 3.2:

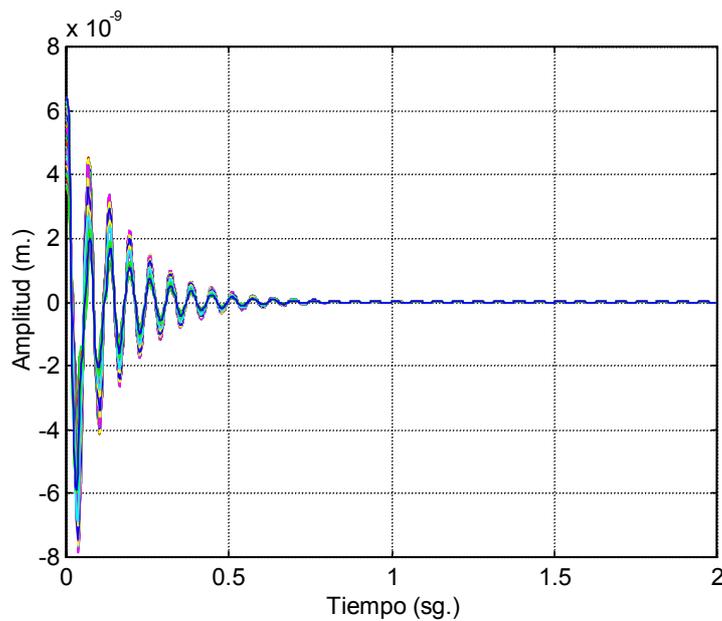
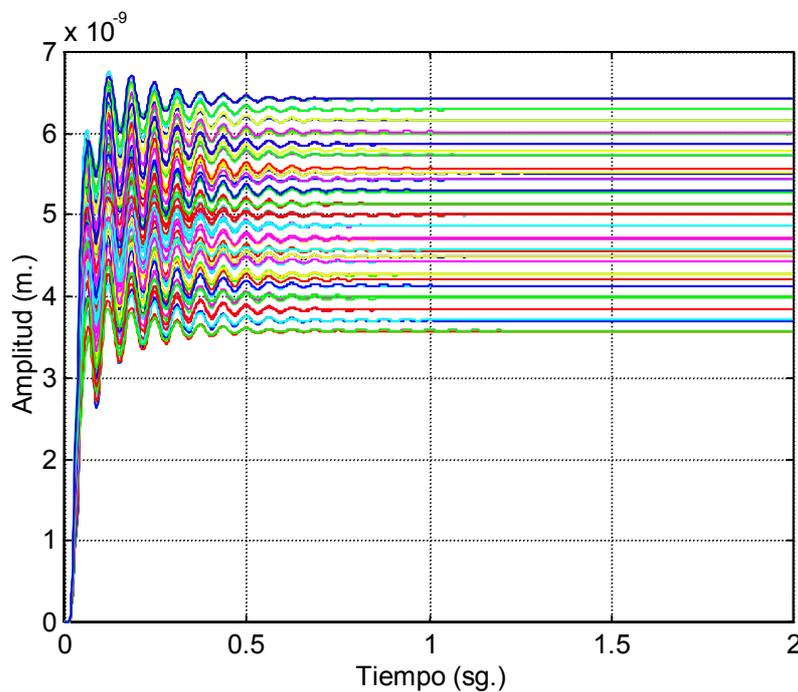


Figura 3.2: Segmentos del espejo con un controlador global integral ( $k_i=20$ ) a 100hz.  
Plano Inicial (4nm,5nm,6nm) ---- Plano Final (0,0,0)

En esta figura observamos cómo los segmentos recuperan el estado de equilibrio oscilando a la frecuencia de 17hz pero con una amplitud que, si la comparamos con la de la figura 2.8 (ver capítulo II), ha sufrido una clara atenuación respecto a la que presenta el sistema en lazo abierto, con lo que el tiempo de establecimiento del espejo disminuye.

Si pretendemos que el espejo alcance un estado consigna, en particular un plano definido por una posición dada para tres de los actuadores, la gráfica resultante es la que mostramos a continuación:



**Figura 3.3:** Segmentos del espejo con un controlador global integral ( $k_i=20$ ) a 100hz.  
Plano Inicial (0,0,0) ---- Plano Final (4nm,5nm,6nm)

Con el objeto de eliminar las oscilaciones del sistema algo que, como queda de manifiesto en las figuras 3.2 y 3.3, no conseguimos con un controlador integral, diseñamos un filtro caracterizado por la función de transferencia siguiente:

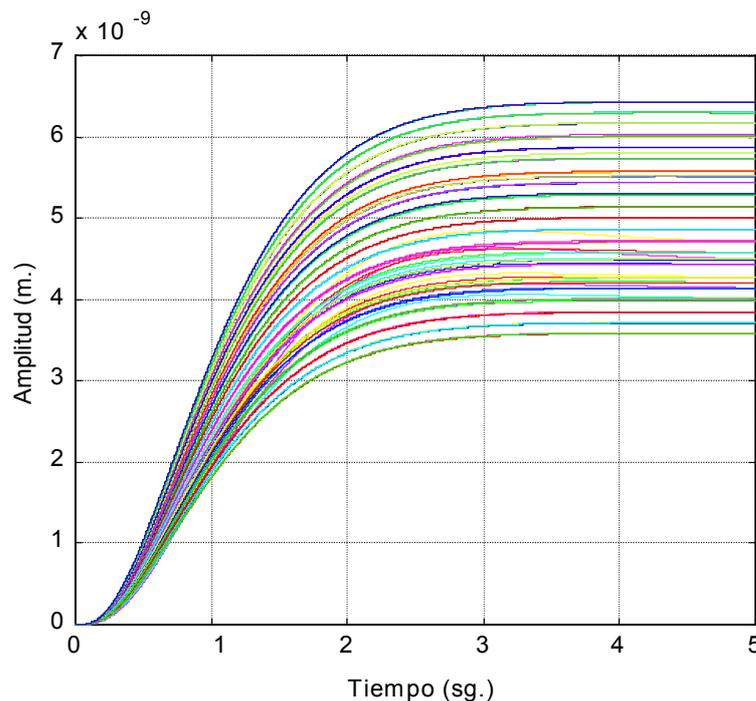
$$G_i(s) = \xi_i^2 \cdot \frac{s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2}{(s + \xi_i w_i)^2}$$

para cada uno de los actuadores del espejo, donde  $w_i$  y  $\xi_i$  son la frecuencia natural de oscilación y el coeficiente de amortiguamiento del actuador  $i$ , respectivamente.

La misión de este controlador es cancelar la dinámica propia de los segmentos y asignarle una nueva tal que la frecuencia de oscilación  $\xi_i * w_i$  sea, dado que  $\xi_i$  tiene un valor en torno a 0.03, considerablemente más baja que la frecuencia original. El factor  $\xi_i^2$  en el numerador de la función de transferencia del controlador asegura la conservación de la ganancia del sistema en lazo abierto en el estacionario. Combinando este filtro con un término integral, esto es, implementando una función de transferencia de la forma:

$$G_i(s) = \xi_i^2 \cdot \frac{s^2 + 2\xi_i w_i s + w_i^2}{s(s + \xi_i w_i)^2}$$

conseguimos que el sistema alcance la misma consigna que en la figura 3.3 sin oscilar, tal y como se pone de manifiesto en la figura 3.4:



**Figura 3.4:** Segmentos del espejo con un filtro + una acción integral ( $K_i = 0.9$ ) a 100hz.  
Plano Inicial (0,0,0) ---- Plano Final (4nm,5nm,6nm)

El hecho de simultanear la acción integral con el filtro hace que debamos bajar el valor de la constante integral  $K_i$  hasta 0.9 para que el sistema en lazo cerrado no se inestabilice, debido a lo cual perdemos gran parte de los beneficios de la acción de

control integral. Así, el tiempo de establecimiento de los segmentos es considerablemente mayor que al aplicar únicamente la acción integral.

Podemos concluir que con un controlador global a 100hz es posible atenuar, e incluso eliminar por completo, las oscilaciones naturales del sistema.

Nuestro objetivo ahora es tratar de combinar la aplicación de una acción de control global con otra local, para aprovechar los beneficios de ambas y tratar así de que esta última complemente a la primera teniendo en cuenta, sobre todo, que el comando local lo podemos aplicar a una frecuencia muy superior al global, puesto que se calcula a partir de un número de señales muy inferior.

### **III.2. CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS**

El controlador multivariable por asignación de polos que presentamos a continuación [Acosta, 1999] ha sido diseñado suponiendo al sistema en condiciones ideales, es decir, no hemos tenido en cuenta el ruido e incertidumbres en la dinámica del espejo (que presentamos en el siguiente capítulo), a excepción de perturbaciones espúreas que sacan a los segmentos de su estado de equilibrio. Responde a una estrategia de control local-global, obteniéndose el comando según la expresión siguiente:

$$U = -K_l * S - F_l * \dot{S} - K_g * x - F_g * \dot{x} \quad (3.1)$$

siendo:

$S(168 \times 1)$ : señales provenientes de los 168 sensores,

$\dot{S}(168 \times 1)$ : derivada 1ª en el tiempo de las señales provenientes de los 168 sensores,

$x(708 \times 1)$ : vector de estados del sistema,

$\dot{x}(708 \times 1)$ : derivada 1ª en el tiempo del vector de estados del sistema,

$K_l(108 \times 168), F_l(108 \times 168)$ : parámetros del controlador local,

$K_g(108 \times 708), F_g(108 \times 708)$ : parámetros del controlador global,

$U(108 \times 1)$ : comandos que se aplican a los 108 actuadores.

Gracias a las simetrías existentes en la planta, obtendremos los parámetros del controlador ( $K_l$ ,  $F_l$ ,  $K_g$  y  $F_g$ ) a partir de dos únicos escalares que denominaremos  $v_K$  y  $v_F$ . En función de los valores que asignemos a éstos, tendremos una respuesta u otra para el sistema en lazo cerrado.

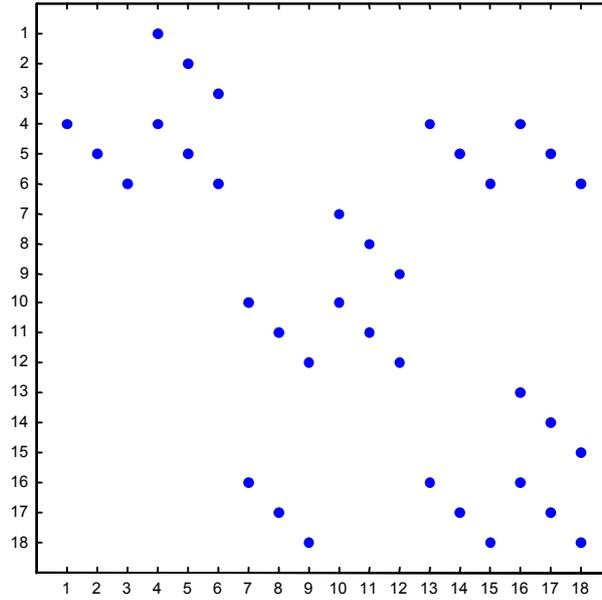
### III.2.1. Análisis de las simetrías del espejo. Influencia sobre la acción de control local

Es importante llevar a cabo un estudio detallado de las simetrías del espejo primario del GTC ya que éstas juegan, como veremos a continuación, un papel fundamental en el diseño del controlador por asignación de polos.

Para realizar este estudio tomamos uno cualquiera de los treinta y seis segmentos del espejo primario, junto con sus tres actuadores y tres de sus sensores de posición. La dinámica del segmento viene descrita, en representación de espacio de estados, por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_{seg} (18 \times 1) = A_{seg} (18 \times 18) * x_{seg} (18 \times 1) + B_{seg} (18 \times 3) * U_{seg} (3 \times 1) \\ S_{seg} (3 \times 1) = C_{seg} (3 \times 18) * x_{seg} (18 \times 1) \end{cases}$$

donde, tanto las componentes del vector de estados  $x_{seg}$  como las matrices del sistema ( $A_{seg}$ ,  $B_{seg}$  y  $C_{seg}$ ) las extraemos directamente de las correspondientes al sistema completo. Las tres entradas representan los comandos que se aplican a los actuadores del segmento, mientras que las salidas corresponden a las mediciones realizadas por los tres sensores considerados. En la figura 3.5 mostramos los elementos no nulos de la matriz  $A_{seg}$  que, como sabemos, determina la dinámica del segmento, en la que apreciamos una cierta simetría:



**Figura 3.5:** Elementos no nulos de la matriz  $A_{seg}$ .

Como consecuencia de las simetrías de las que hablamos, veremos que podemos alterar la dinámica de cada uno de los segmentos del espejo empleando para ello dos únicos parámetros escalares:  $v_K$  y  $v_F$ .

El comando local que aplicamos al segmento se calcula, como vimos, a partir de la información suministrada por sus tres sensores, de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_{l,1} \\ u_{l,2} \\ u_{l,3} \end{bmatrix} = -K_{l,seg} * \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} - F_{l,seg} * \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde tanto  $K_{l,seg}$  como  $F_{l,seg}$  son matrices  $3 \times 3$ . A la vista de esta expresión tenemos que en el cálculo del comando  $u_{l,1}$  que aplicamos al actuador que llamaremos ‘1’ (denotarlos por 1, 2 o 3 es totalmente arbitrario a la par que intrascendente para el estudio que estamos realizando) sólo influyen los elementos de la primera fila de  $K_{l,seg}$  y  $F_{l,seg}$ , y lo mismo podemos decir sobre  $u_{l,2}$  y  $u_{l,3}$  y la segunda y tercera fila de estas matrices, respectivamente.

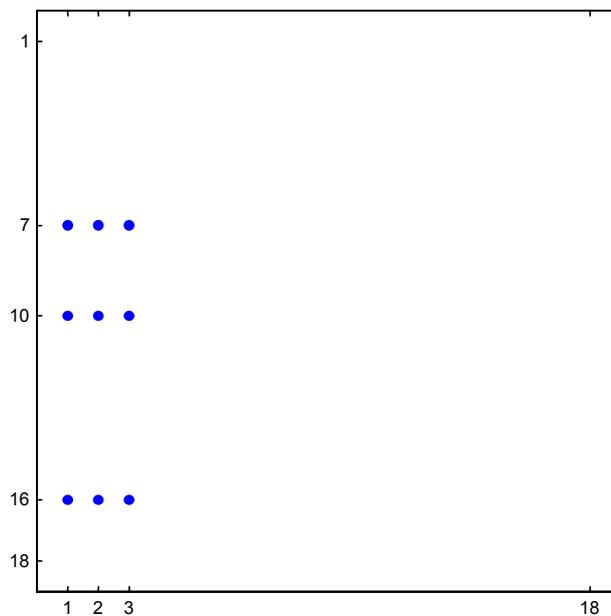
La función de transferencia del segmento cerrando el lazo con el controlador local en (3.2) responde a la siguiente expresión:

$$H_{seg} = (I_{18 \times 18} + B_{seg} * F_{l,seg} * C_{seg})^{-1} * (A_{seg} - B_{seg} * K_{l,seg} * C_{seg}) \quad (3.3)$$

Si hacemos  $F_{l,seg} = 0_{3 \times 3}$ , es decir, no empleamos la información de las derivadas de las lecturas de los sensores para el cálculo del comando local, la función en (3.3) queda como sigue:

$$H_{seg} = A_{seg} - B_{seg} * K_{l,seg} * C_{seg} \quad (3.4)$$

Haciendo distinto de cero cualquiera de los elementos de la primera fila de  $K_{l,seg}$ , los elementos de la matriz  $H_{seg}$  en (3.4) que se ven afectados por tal comando son los que mostramos en la siguiente figura:



**Figura 3.6a:** Elementos afectados de  $H_{seg}$  haciendo distinta de cero la 1ª fila de  $K_{l,seg}$ .

donde encontramos que los elementos de las tres filas afectadas en  $H_{seg}$  son linealmente dependientes entre sí. Así, los de la fila 10 son los mismos que los de la fila 7 pero multiplicados por un factor de  $-800$ ; mientras que los de la fila 16 son también los de la fila 7 pero multiplicados ahora por un factor de  $-88.8264$ . Esto nos permite

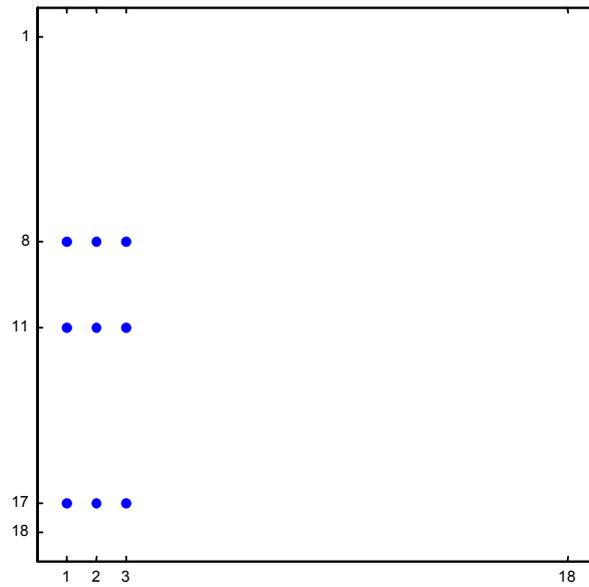
quedarnos con una sola de las tres filas de  $H_{seg}$  en la figura 3.6a, por ejemplo la número 7.

Dado que las componentes del vector de estados  $x_{seg}$  son:

$$x_{seg} = \begin{bmatrix} x_{e,1} \\ x_{e,2} \\ x_{e,3} \\ m_s \dot{x}_{e,1} \\ m_s \dot{x}_{e,2} \\ m_s \dot{x}_{e,3} \\ r_{1,1} \\ r_{1,2} \\ r_{1,3} \\ r_{2,1} \\ r_{2,2} \\ r_{2,3} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

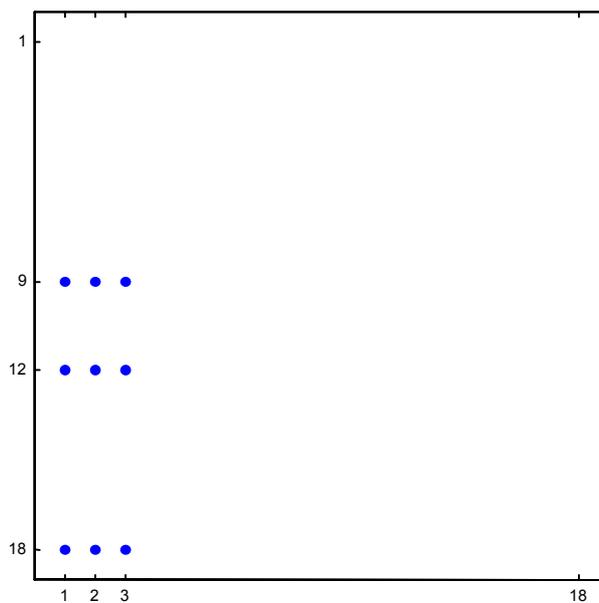
donde la notación empleada es la misma que para el sistema completo, y ya que estamos enviando comando sólo al actuador 1, los elementos de las columnas 2 y 3 de  $H_{seg}$  en la figura 2.6a representan el acoplamiento que se produce entre los tres actuadores del segmento y, por tanto, deben ser eliminados por el control local. Por otra parte, igualaremos el elemento de la fila 7 y la columna 1 de esta matriz al escalar  $v_K$  para conseguir la dinámica deseada para el segmento.

Si es la segunda de las filas de  $K_{l,seg}$  la que hacemos distinta de cero, estaremos actuando sobre el posicionador 2 del segmento. Los elementos de la matriz en lazo cerrado que se ven afectados en este caso por tal comando son los que mostramos en la figura 3.6b:



**Figura 3.6b:** Elementos afectados de  $H_{seg}$  haciendo distinta de cero la 2ª fila de  $K_{l,seg}$ .

Si ahora actuamos sobre el posicionador 3, haciendo distintos de cero los elementos de la tercera fila de  $K_{l,seg}$ , los elementos que afectamos en la matriz  $H_{seg}$  son los siguientes:



**Figura 3.6c:** Elementos afectados de  $H_{seg}$  haciendo distinta de cero la 3ª fila de  $K_{l,seg}$ .

Los elementos de las figuras 3.6b y 3.6c cumplen entre sí las mismas relaciones que los de la figura 3.6a donde, además, se mantiene el factor de proporcionalidad entre ellos. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en la figura 3.6a, los elementos de acoplamiento en la 3.6b son los de las columnas 1 y 3 (recordemos que en este caso actuamos sobre el posicionador 2), y es el elemento de la fila 8 y la columna 2 el que igualaremos a  $v_K$ . En la figura 3.6c, la componente local del controlador por asignación de polos deberá anular los elementos de las columnas 1 y 2, por corresponder a términos de acoplo entre actuadores, y hacer igual a  $v_K$  el correspondiente a la fila 9 y la columna 3.

Si formulamos estas condiciones, tenemos que:

$$[H_{seg}(7,1) \ H_{seg}(7,2) \ H_{seg}(7,3)] = [v_K \ 0 \ 0]$$

que es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(K_{l,seg}(1,1), K_{l,seg}(1,2), K_{l,seg}(1,3))$$

cuya resolución nos permite obtener, como vemos, el valor de los elementos de la primera fila de la matriz  $K_{l,seg}$ .

De la misma manera, podemos escribir que:

$$[H_{seg}(8,1) \ H_{seg}(8,2) \ H_{seg}(8,3)] = [0 \ v_K \ 0]$$

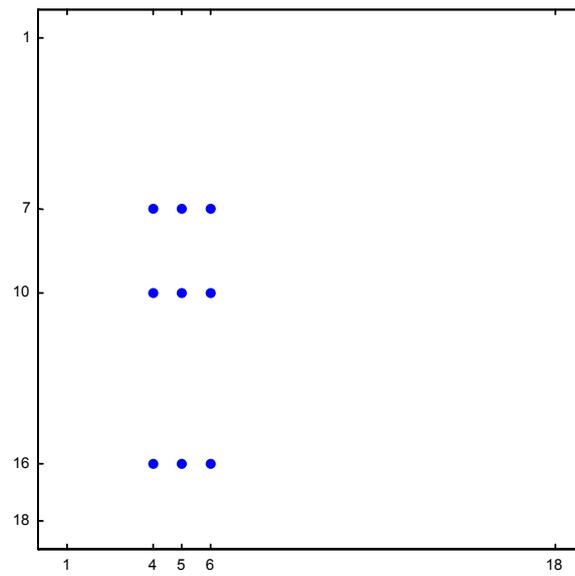
$$[H_{seg}(9,1) \ H_{seg}(9,2) \ H_{seg}(9,3)] = [0 \ 0 \ v_K]$$

que son otros dos sistemas de ecuaciones con los que obtendremos el valor de la segunda y tercera fila de  $K_{l,seg}$ , respectivamente.

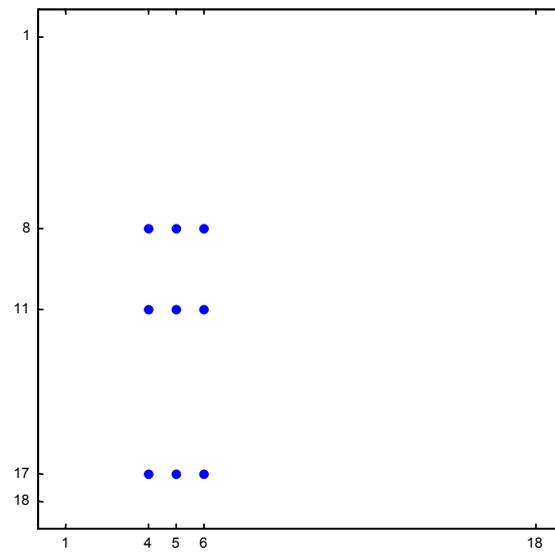
Para obtener el parámetro  $F_{l,seg}$  en (3.2) procedemos de forma análoga a como hemos hecho para hallar  $K_{l,seg}$ . En primer lugar, hacemos  $K_{l,seg} = 0_{3 \times 3}$  en la expresión (3.3) de la matriz en lazo cerrado con el controlador local, con lo que ésta queda como:

$$H_{seg} = (I_{18 \times 18} + B_{seg} * F_{l,seg} * C_{seg})^{-1} * A_{seg} \quad (3.5)$$

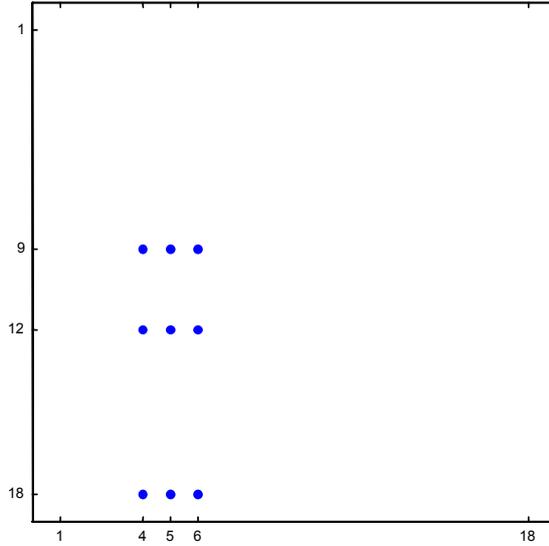
Si hacemos ahora distintos de cero los elementos de la primera, segunda y tercera filas de  $F_{l,seg}$ , encontramos que los elementos que se ven afectados esta vez en la matriz  $H_{seg}$  son los que mostramos en las figuras 3.7a, 3.7b y 3.7c, respectivamente:



**Figura 3.7a:** Elementos afectados de  $H_{seg}$  haciendo distinta de cero la 1ª fila de  $F_{l,seg}$ .



**Figura 3.7b:** Elementos afectados de  $H_{seg}$  haciendo distinta de cero la 2ª fila de  $F_{l,seg}$ .



**Figura 3.7c:** Elementos afectados de  $H_{seg}$  haciendo distinta de cero la 3ª fila de  $F_{l,seg}$ .

Como vemos, las filas coinciden con las de las figuras 3.6a, 3.6b y 3.6c, pero las columnas son ahora las 4, 5 y 6 que corresponden a los momentos de los segmentos en lugar de a su posición (columnas 1, 2 y 3). De resto, todo lo dicho para  $K_{l,seg}$  sigue siendo válido en este caso, sustituyendo el parámetro  $v_K$  por  $v_F$ , con lo que las ecuaciones que nos permiten obtener la matriz  $F_{l,seg}$  son las siguientes:

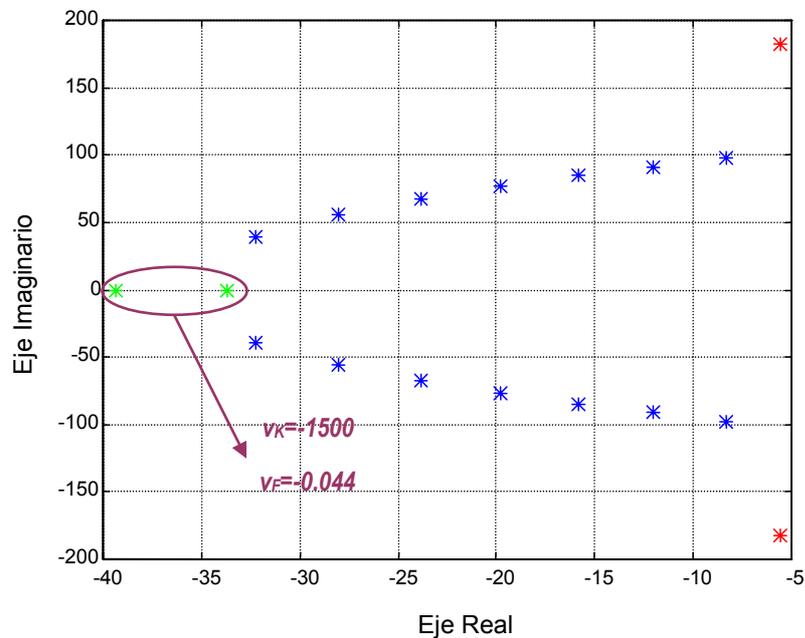
$$\begin{bmatrix} H_{seg}(7,4) & H_{seg}(7,5) & H_{seg}(7,6) \end{bmatrix} = [v_F \ 0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} H_{seg}(8,4) & H_{seg}(8,5) & H_{seg}(8,6) \end{bmatrix} = [0 \ v_F \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} H_{seg}(9,4) & H_{seg}(9,5) & H_{seg}(9,6) \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ v_F]$$

Este procedimiento lo debemos repetir, tanto para  $K_{l,seg}$  como para  $F_{l,seg}$ , para cada uno de los treinta y seis segmentos del espejo primario. Como acabamos de ver, las dos matrices que definen la componente local del controlador por asignación de polos y, en consecuencia, la matriz en lazo cerrado en (3.3) dependen de  $v_K$  y  $v_F$ , dos escalares con los que controlaremos la dinámica del sistema en lazo cerrado. Atendiendo al objetivo que pretendemos alcanzar con este controlador y que resumimos como que los

segmentos del espejo alcancen un estado consigna, que generalmente será el de equilibrio, en el menor tiempo posible y sin oscilar, los polos del sistema en lazo cerrado deberán encontrarse sobre el eje real y lo más a la izquierda posible del origen. En la figura 3.8 representamos en color rojo la posición de los polos del segmento en lazo abierto o, lo que es lo mismo, los autovalores de la matriz  $A_{seg}$ . Asignando distintos valores a  $v_K$  y  $v_F$  desplazamos estos polos hasta las posiciones en color azul. Finalmente, haciendo  $v_K = -1500$  y  $v_F = -0.044$ , conseguimos que los polos del segmento se sitúen en la posición deseada, representada en color verde.



**Figura 3.8:** Evolución de los polos del segmento al variar el valor de los parámetros  $v_K$  y  $v_F$ .

Así, acabamos de ver cómo con una acción de control local logramos, por un lado, modificar la dinámica de los segmentos de la forma deseada y, por el otro, eliminar el acoplamiento existente entre los tres actuadores de un mismo segmento.

Sin embargo, al aplicar la acción de control local a todos los segmentos del espejo nos encontramos con que la planta se inestabiliza. Esto ocurre porque, si bien hemos eliminado lo que podríamos denominar ‘acoplamiento local’ entre los actuadores de un segmento, no hemos tenido en cuenta el ‘acoplamiento global’ existente entre los

distintos segmentos del espejo, que ya se puso de manifiesto en la figura 2.10 (ver capítulo II).

Es por esto por lo que se hace necesario aplicar, simultáneamente a la local, otra acción de control a distinto nivel que cancele el acoplamiento global y, consecuentemente, sus efectos negativos sobre el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

### III.2.2. Componente global del controlador por asignación de polos

La componente global del controlador por asignación de polos viene dada, como ya vimos, por la expresión:

$$u_g = -K_g * x - F_g * \dot{x} \quad (3.6)$$

El proceso de síntesis de los parámetros de esta acción de control,  $K_g$  y  $F_g$ , tiene lugar en dos fases bien diferenciadas:

- ⇒ En la primera de ellas localizamos los elementos que, al aplicar la acción de control local, son los responsables de la desestabilización del sistema debido al acoplamiento entre segmentos,
- ⇒ En la segunda, obtenemos  $K_g$  y  $F_g$  de forma que cancelen los elementos anteriores.

Así, logramos que, aplicando conjuntamente las acciones de control local y global que acabamos de ver, el sistema se comporte según determinan  $v_K$  y  $v_F$  garantizando, al mismo tiempo, la estabilidad de la planta en lazo cerrado.

#### III.2.2.1. El operador de lifting y de lifting inverso

Consideremos un sistema lineal multivariable discreto con  $m$  entradas y  $p$  salidas, siendo éstas:

‘ $u$ ’ el vector de entradas  $\rightarrow m \times 1$

‘ $y$ ’ el vector de salidas  $\rightarrow p \times 1$

Entonces,  $G$  es la matriz de transferencia del sistema, tal que:

$$y = Gu, \text{ siendo } y(k) \in \mathfrak{R}^p \text{ y } u(k) \in \mathfrak{R}^m$$

$G$  está compuesta por  $p \times m$  elementos correspondiendo, cada uno de ellos, a la función de transferencia de la salida  $i$  ( $i=1,2,\dots,p$ ) con respecto a la entrada  $j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ). Como sabemos, la primera columna de  $G$  representa la salida del sistema cuando un impulso de amplitud unitaria se aplica a la primera de las entradas, la segunda columna corresponde a la salida obtenida al aplicar el impulso unitario a la segunda entrada, y así sucesivamente.

Si expresamos este mismo sistema en su representación interna en el dominio discreto:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

siendo las dimensiones de las matrices de estado las que siguen:

$$\begin{aligned}A &\rightarrow q \times q \\ B &\rightarrow q \times m \\ C &\rightarrow p \times q \\ D &\rightarrow p \times m\end{aligned}$$

Podemos entonces introducir una matriz  $[G]$ , que no debemos confundir con la función de transferencia  $G$ , tal que:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = [G] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

teniendo en cuenta que, en este caso, cada uno de los elementos de los vectores de entradas y salidas en el instante  $k$  son, a su vez, vectores de  $m$  y  $p$  elementos, respectivamente.

Entonces, empleando las ecuaciones de estado y de salida del sistema, y tomando  $x(0)=0$ , encontramos que la matriz  $[G]$  tiene la forma que mostramos:

$$[G] = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots \\ CB & D & 0 & 0 & \dots \\ CAB & CB & D & 0 & \dots \\ CA^2B & CAB & CB & D & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Chen y Francis [Chen, 1995] definen los operadores  $L$  y  $L^{-1}$  que denominan ‘operador de lifting’ y ‘operador de lifting inverso’, respectivamente, tales que, dado un conjunto de muestras de una señal  $v$  a una frecuencia  $f$ :

$$v = \{v(0), v(1), v(2), \dots\}$$

al aplicarle el operador de lifting, resulta otra señal  $w$  cuyas muestras están espaciadas según una frecuencia  $f/n$ :

$$w = L * v = \left\{ \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ v(n-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v(n) \\ v(n+1) \\ \vdots \\ v(2n-1) \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

Como se observa, cada muestra es ahora, en realidad, un vector de  $n$  componentes, que son las muestras de la señal original,  $v$ , agrupadas de  $n$  en  $n$ .

De forma análoga, dada otra señal  $r$  a una frecuencia  $f/n$ :

$$r = \left\{ \begin{bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ \vdots \\ r_n(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r_1(1) \\ r_2(1) \\ \vdots \\ r_n(1) \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

se define el operador de lifting inverso, tal que:

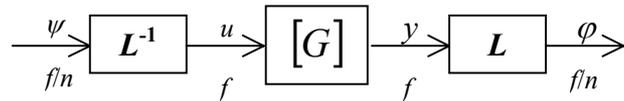
$$s = L^{-1} * r = \{r_1(0), \dots, r_n(0), r_1(1), \dots, r_n(1), \dots\}$$

es decir, como aquél que nos permite obtener, a partir de ella, una señal  $s$  de frecuencia  $f$ .

A la vista de estas últimas expresiones tenemos que las matrices correspondientes a los operadores de lifting y lifting inverso, particularizando para  $n=2$ , son, respectivamente:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Chen y Francis [Chen, 1995] demuestran que al aplicar al sistema los operadores  $L$  y  $L^{-1}$  en la forma que mostramos a continuación:



la matriz  $[G]$  del sistema resultante:

$$\varphi = L[G]L^{-1}\psi = [G_L]\psi$$

es, particularizando para  $n=2$ :

$$[G_{L(n=2)}] = L \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots \\ CB & D & 0 & 0 & \dots \\ \hline CAB & CB & D & 0 & \dots \\ CA^2B & CAB & CB & D & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} L^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots \\ CB & D & 0 & 0 & \dots \\ \hline CAB & CB & D & 0 & \dots \\ CA^2B & CAB & CB & D & \dots \\ \hline CA^3B & CA^2B & CAB & CB & D & 0 & \dots \\ CA^4B & CA^3B & CA^2B & CAB & CB & D & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que, tal y como acabamos de ver, las matrices asociadas a los operadores de lifting y lifting inverso,  $L$  y  $L^{-1}$ , son, en realidad, la matriz identidad, la matriz  $[G_L]$  tiene la misma forma que la matriz  $[G]$  excepto por el hecho que los bloques delimitados por las líneas horizontales y verticales se corresponden ahora con cada elemento de la matriz  $[G]$ . Esto se debe a que  $G_L$  tiene  $2m$  (en general  $n \cdot m$ ) entradas y  $2p$  (en general  $n \cdot p$ ) salidas.

Entonces, podemos escribir que:

$$D_L = \begin{bmatrix} D & 0 \\ CB & D \end{bmatrix}$$

$$C_L B_L = \begin{bmatrix} CAB & CB \\ CA^2 B & CAB \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_L = [CA & C] \\ B_L = \begin{bmatrix} B \\ AB \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$C_L A_L B_L = \begin{bmatrix} CA^3 B & CA^2 B \\ CA^4 B & CA^3 B \end{bmatrix} \Rightarrow A_L = A^2$$

donde  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $C_L$  y  $D_L$  son las matrices de estado correspondientes al sistema  $G_L$ .

Así, empleando la notación compacta

$$g = \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right)$$

tenemos que, para  $n=2$ :

$$g_{L(n=2)} = \left( \begin{array}{c|c} A_L & C_L \\ \hline B_L & D_L \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} A^2 & AB & B \\ \hline C & D & 0 \\ CA & CB & D \end{array} \right)$$

Para un  $n$  genérico, la matriz  $g_L$  queda de la siguiente manera:

$$g_L = \left( \begin{array}{c|cccc} A^n & A^{n-1}B & A^{n-2}B & \cdots & B \\ \hline C & D & 0 & \cdots & 0 \\ CA & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1} & CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \cdots & D \end{array} \right)$$

De la relación  $A_L = A^n$  tenemos que los operadores de lifting y lifting inverso no alteran el número de estados del sistema.

### III.2.2.2 Aplicación al espejo primario del GTC

Vamos a aplicar el formalismo de  $(L, L^{-1})$  al espejo primario del GTC en lazo cerrado con el controlador por asignación de polos, tomando  $v_K = -1500$  y  $v_F = -0.044$ , con el objeto de poder llevar a cabo un análisis de la estabilidad del sistema considerando que, en general, la planta está muestreada a una frecuencia  $f$ , mientras que los comandos local y global se aplican a  $f/n_1$  y  $f/n_2$ , respectivamente. A efectos de simplificar el desarrollo que sigue, haremos las siguientes suposiciones:

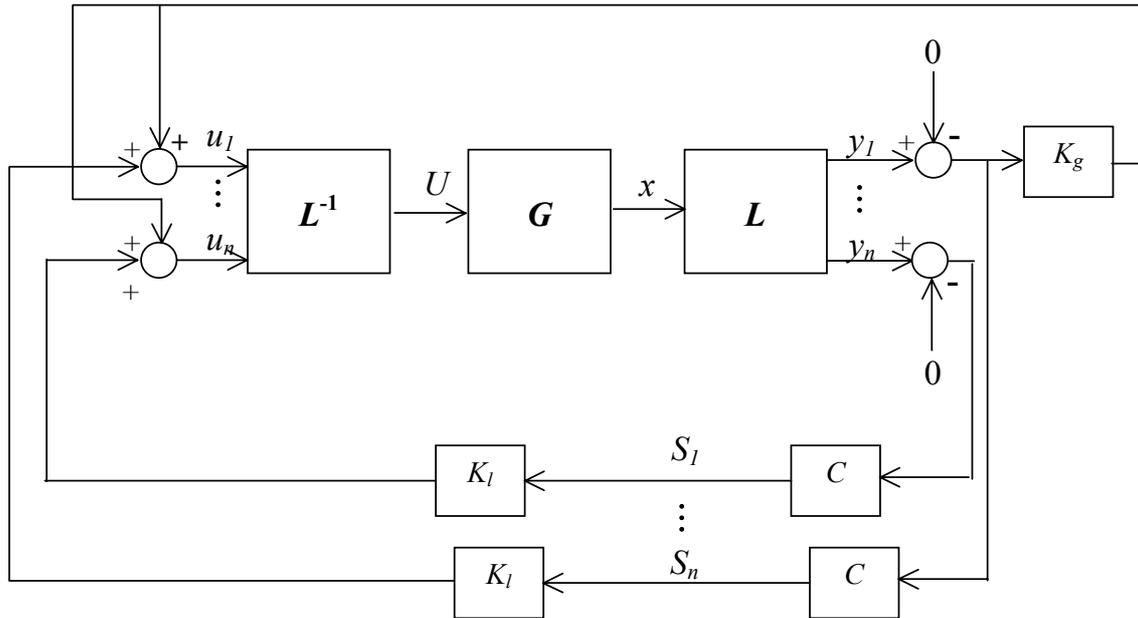
1. la planta se muestrea a 2000hz, la misma frecuencia a la que se aplica la componente local del controlador por asignación de polos, mientras que la componente global se aplica a una frecuencia  $f/n$ ,
2. consideramos que el comando tiene la forma siguiente:

$$U = -K_l * S - K_g * x$$

es decir, a la hora de llevar a cabo la realimentación de la salida del sistema prescindimos de la información de la derivada tanto del estado como de la lectura de los sensores.

Estamos pues ante un sistema multimuestreo que involucra a dos frecuencias distintas:  $f$  y  $f/n$ .

Empleando los operadores de lifting y lifting inverso podemos expresar todo el sistema en función de una única frecuencia ( $f/n$ ). El diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado queda, entonces, como:



Nótese que el hecho de que el comando global se aplica a una frecuencia  $f/n$ , esto es, su valor se actualiza cada  $n$  etapas de muestreo de la planta (que está muestreada a una frecuencia  $f$ ), lo reflejamos en el diagrama de bloques anterior tomando el valor de la salida de la misma en el instante  $k$  para el cálculo de la componente global del comando en las etapas  $k+1, k+2, \dots, k+n$ . En cambio, para calcular el comando local (que se aplica a  $f$ ) en la etapa  $k+1$  se emplea la información suministrada por los sensores del espejo en la etapa  $k$ .

Con todo ello, podemos obtener una expresión analítica para la matriz de estados del sistema en lazo cerrado,  $A_{lc}$ , como:

$$A_{lc} = A_L + B_L M C_L$$

donde  $M$  es la matriz que relaciona los comandos  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  con las salidas del sistema  $G_L$   $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Es decir, si tenemos en cuenta lo dicho anteriormente, podemos escribir que:

$$u_1 = K_l C(0 - y_1) + K_g(0 - y_1) = -(K_l C + K_g)y_1$$

$$u_2 = K_l C(0 - y_2) + K_g(0 - y_1) = -K_g y_1 - K_l C y_2$$

⋮

$$u_n = K_l C(0 - y_n) + K_g(0 - y_1) = -K_g y_1 - K_l C y_n$$

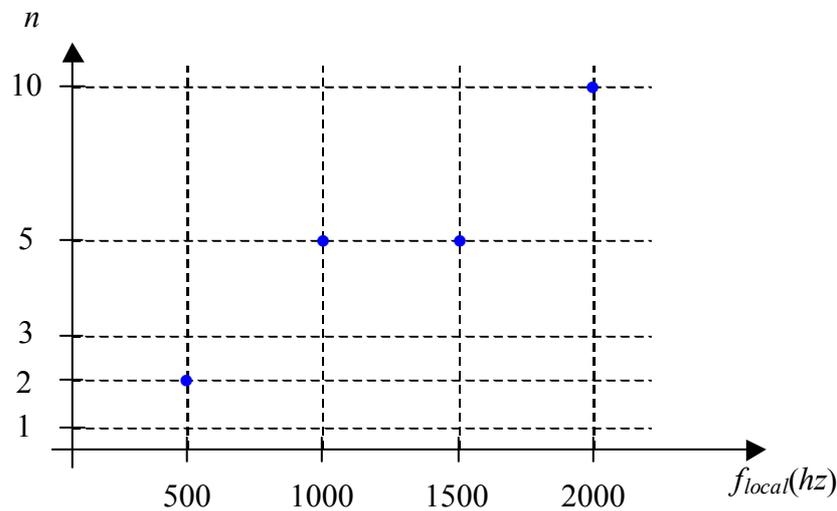
con lo que  $M$  tiene la forma siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} -(K_l C + K_g) & 0 & \cdots & 0 \\ -K_g & -K_l C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -K_g & 0 & \cdots & K_l C \end{bmatrix}$$

Así, obteniendo los polos del sistema en lazo cerrado, esto es, los autovalores de  $A_{lc}$ , para distintos valores de  $n$  encontramos que:

1. para  $n=1,2,\dots,10$ , es decir,  $f_{global}$  igual a 2000, 1000, ... 200hz, el sistema es estable, mientras que
2. para  $n>10$  ( $f_{global} < 200hz$ ) el sistema en lazo cerrado es inestable.

Si repetimos el procedimiento descrito tomando ahora otros valores para la frecuencia de muestreo de la planta, que coincide con la frecuencia del control local, concretamente 1500, 1000 y 500hz, podemos llevar a cabo la siguiente representación en la que también incluimos los datos correspondientes a los 2000hz:

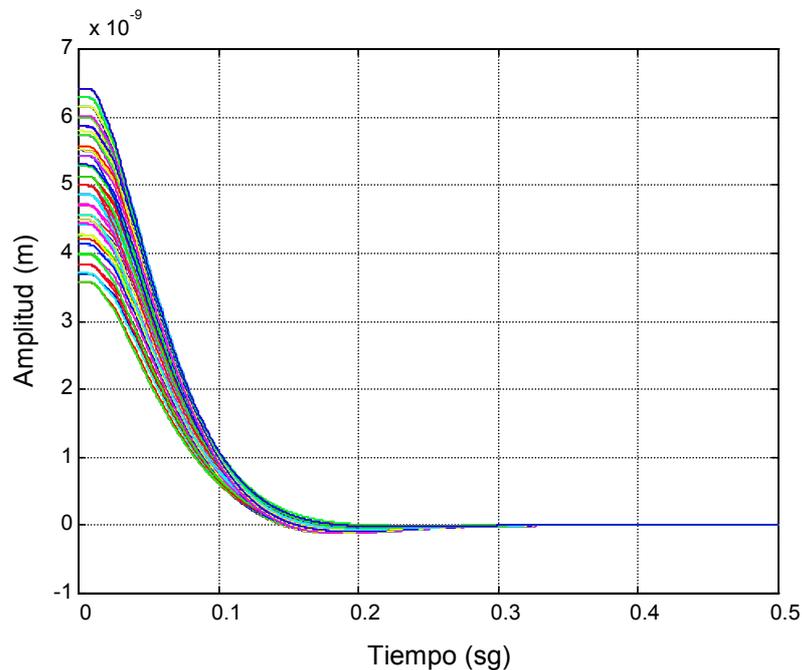


En el eje de abscisas representamos la frecuencia a la que aplicamos el comando local, mientras que en el eje de ordenadas representamos el factor  $n$ , siendo  $f_{global} = f_{local}/n$ . Los puntos representan el valor más alto de  $n$ , esto es, el valor más bajo de la frecuencia global, para el que el sistema en lazo cerrado es estable.

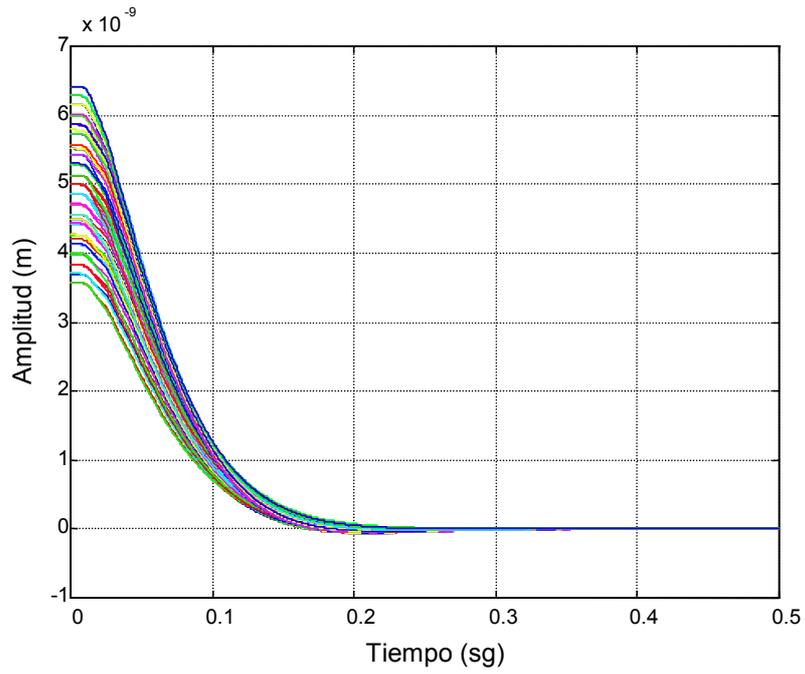
Teniendo en cuenta que  $n$  debe ser un número entero habida cuenta de cómo obtenemos las matrices  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $C_L$  y  $D_L$  en función de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , el diagrama anterior muestra que, independientemente del valor de la frecuencia local, la global tiene en  $200\text{hz}$  el valor mínimo para el que el sistema en lazo cerrado es estable.

### III.2.3 Resultados obtenidos con el controlador por asignación de polos

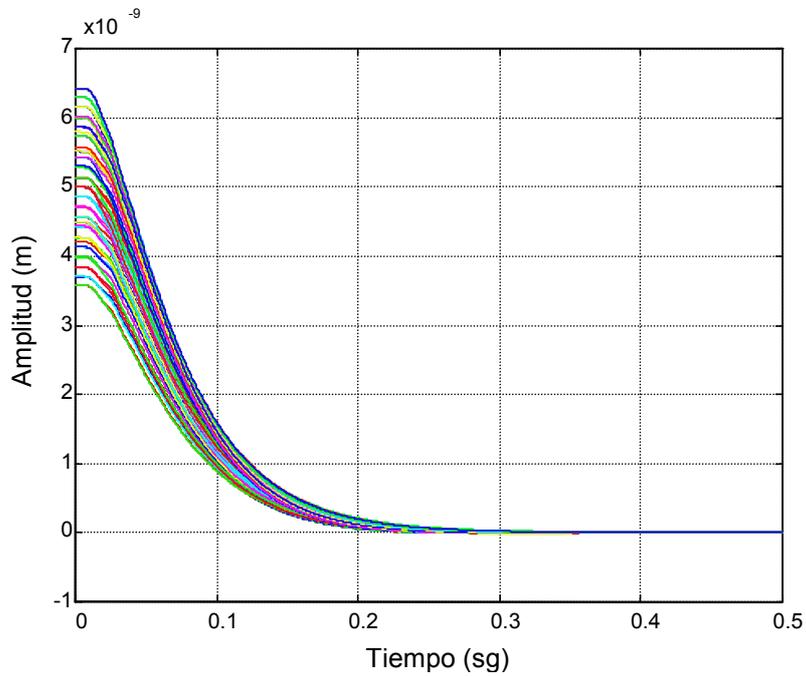
A continuación presentamos los resultados obtenidos en simulación con el controlador por asignación de polos para el sistema ideal tomando  $v_K = -1500$  y  $v_F = -0.044$ . En las gráficas que siguen representamos la evolución a lo largo del tiempo de la posición de los segmentos del espejo primario cuando éstos parten de las mismas condiciones iniciales que en la figura 2.8 (ver capítulo II) y, como en aquella, la consigna es la posición de equilibrio. En todos los casos que mostramos la frecuencia de la componente local del controlador es  $2000\text{hz}$ , mientras que la de la componente global toma distintos valores:  $2000$ ,  $1000$ ,  $500$  y  $200\text{hz}$ .



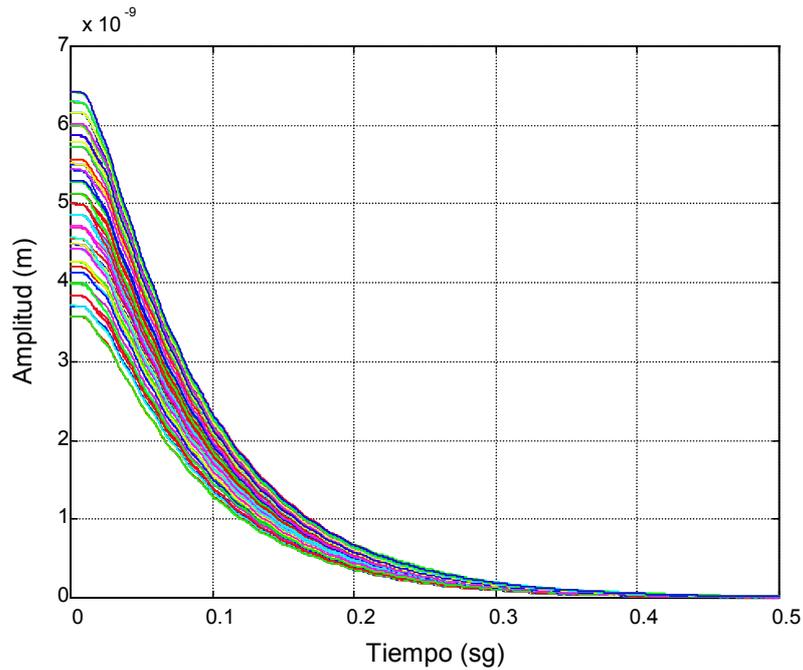
**Figura 3.9:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local y global de  $2000\text{hz}$ .



**Figura 3.10:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local de 2000hz y una global de 1000hz.



**Figura 3.11:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local de 2000hz y una global de 500hz.



**Figura 3.12:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local de  $2000\text{hz}$  y una global de  $200\text{hz}$ .

Comparando estas cuatro figuras encontramos que, efectivamente, el control local elimina por completo las oscilaciones en la respuesta de los segmentos y sólo al bajar la frecuencia de la acción global a  $200\text{hz}$  se observa un rizado mínimo. Asimismo, vemos que el tiempo de establecimiento del espejo se reduce sensiblemente respecto al lazo abierto, aunque éste aumenta a medida que disminuye la frecuencia de la acción global, tal y como se refleja en la siguiente tabla:

Frecuencia del control global (hz)	Tiempo de establecimiento (sg)
2000	$\approx 0.32$
1000	$\approx 0.35$
500	$\approx 0.35$
200	$\approx 0.50$

**Tabla 3.1:** Tiempo de establecimiento de los segmentos para distintas frecuencias de la componente global del controlador por asignación de polos (frecuencia del control local:  $2\text{Khz}$ ).

La frecuencia global no puede ser inferior a  $200\text{hz}$  ya que, entonces, la cancelación del acoplamiento entre segmentos no es lo suficientemente efectiva como para evitar la desestabilización del sistema al aplicar la acción de control local.

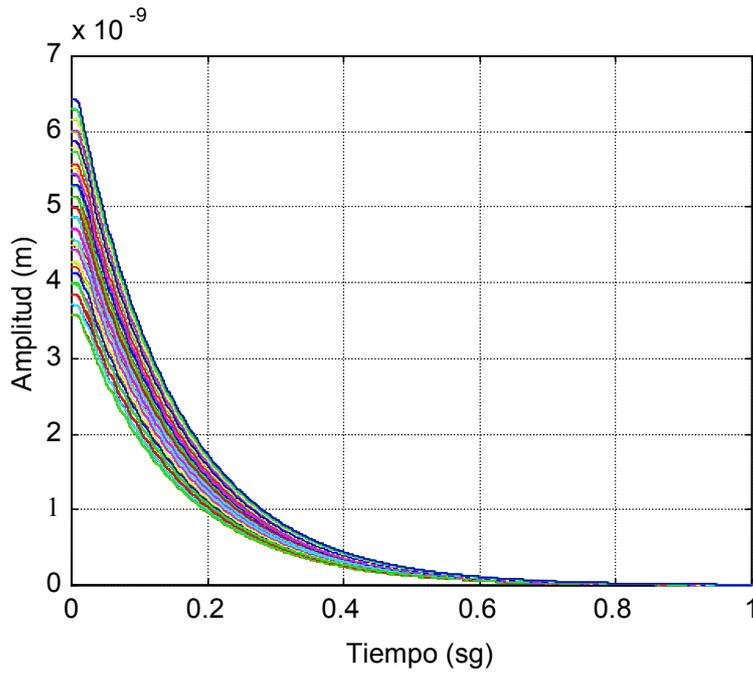
Aunque no lo hayamos comentado hasta ahora, sabemos que, en general, no es recomendable incluir en el comando la información de la derivada, bien del estado, bien de la salida del sistema, debido a la amplificación del ruido que este tipo de términos introduce en la zona de altas frecuencias. Si bien, según vimos en el capítulo II, la contribución más importante a la densidad de potencia espectral del ruido que se espera que afecte a los segmentos del espejo primario del GTC se encuentra en la región de bajas frecuencias (ver figura 2.10), el hecho de que se trate de ruido de proceso hace que también debamos prestar atención a lo que ocurre en la frecuencia propia de los segmentos ( $28\text{hz}$ ). En el capítulo VII volveremos sobre este aspecto.

Por este motivo, es conveniente eliminar tanto de la componente global del comando correspondiente al controlador por asignación de polos, como de la local, los términos que involucran una acción derivativa. Así, haciendo  $v_F = 0$ , el comando en (3.1) se simplifica, quedando como sigue:

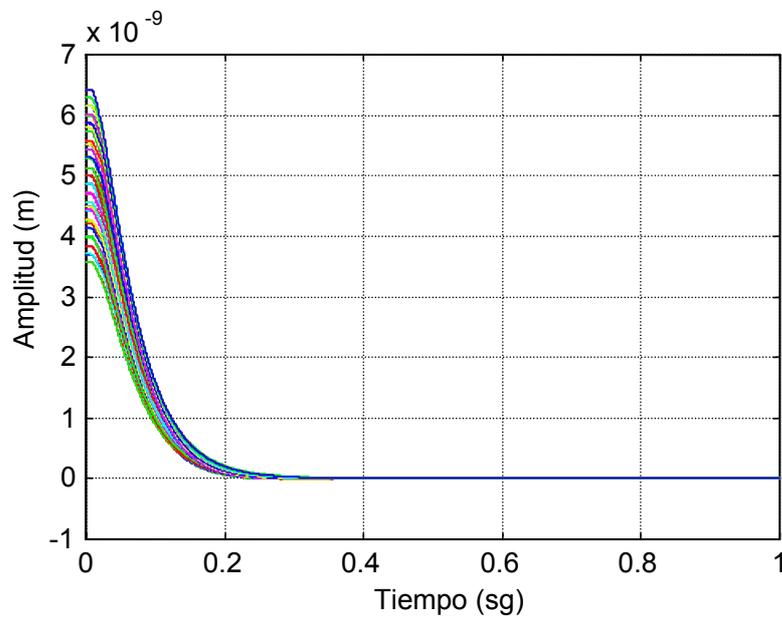
$$U = -K_l * S - K_g * x \quad (3.7)$$

Si llevamos a cabo la simulación del sistema eliminando la realimentación de los términos en  $\dot{S}$  y  $\dot{x}$ , obtenemos la respuesta que mostramos en la figura 3.13, siendo la frecuencia local  $1\text{Khz}$  y la global  $500\text{hz}$ .

Para saber en qué medida se degrada el comportamiento del sistema en lazo cerrado al eliminar la derivada de la salida y del estado, en la figura 3.14 representamos la respuesta del sistema obtenida para las mismas frecuencias de control local y global ( $1000$  y  $500\text{hz}$ , respectivamente), cuando el comando aplicado a la planta es el que aparece en (3.1).



**Figura 3.13:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local de  $1000\text{hz}$  y una global de  $500\text{hz}$  sin realimentar con la derivada del estado y la salida ( $v_F = 0$ ).



**Figura 3.14:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local de  $1000\text{hz}$  y una global de  $500\text{hz}$  realimentando con la derivada del estado y la salida ( $v_F = -0.044$ ).

Comparando las figuras 3.13 y 3.14 observamos que, como era de esperar, la respuesta del sistema al realimentar sin la derivada de la salida y del estado no es tan buena como la que presenta cuando incluimos estos términos. Este empeoramiento en las prestaciones de la planta se traduce en un mayor tiempo de establecimiento y en el pequeño rizado que presentan los segmentos en la figura 3.13. No obstante, podemos concluir que, incluso haciendo el parámetro  $v_F$  igual a cero, el controlador por asignación de polos que hemos diseñado presenta unos resultados razonablemente satisfactorios, como así lo reflejan los datos que presentamos en la tabla 3.2:

$v_F$	Frecuencia del control global (hz)	Tiempo de establecimiento (sg.)
-0.044	500	≈0.35
0	500	≈0.90
-0.044	200	≈0.50
0	200	≈1.00

**Tabla 3.2:** Tiempo de establecimiento de los segmentos para distintas frecuencias de la componente global del controlador por asignación de polos (frecuencia del control local: 1Khz).

Hemos querido aprovechar los resultados obtenidos en estas últimas simulaciones para que, conjuntamente con los presentados con anterioridad, nos ayuden a discutir la efectividad o no de aplicar la estrategia de control local-global en la que se basan los controladores presentados en este capítulo.

Nuestro objetivo al combinar una acción de control local con el comando global es poder aplicar este último a una frecuencia más baja de la necesaria si prescindieramos del comando local. La frecuencia a la que aplicamos éste puede ser, por las razones ya comentadas al comienzo de este capítulo, considerablemente más alta que la global. Así, lo ideal sería que, al disminuir la frecuencia global, las prestaciones del sistema en lazo cerrado empeorasen menos que si es la frecuencia local la que baja. Es decir, la estrategia de control local-global produciría algún beneficio en su implementación si la planta se mostrase más sensible a la frecuencia de control local

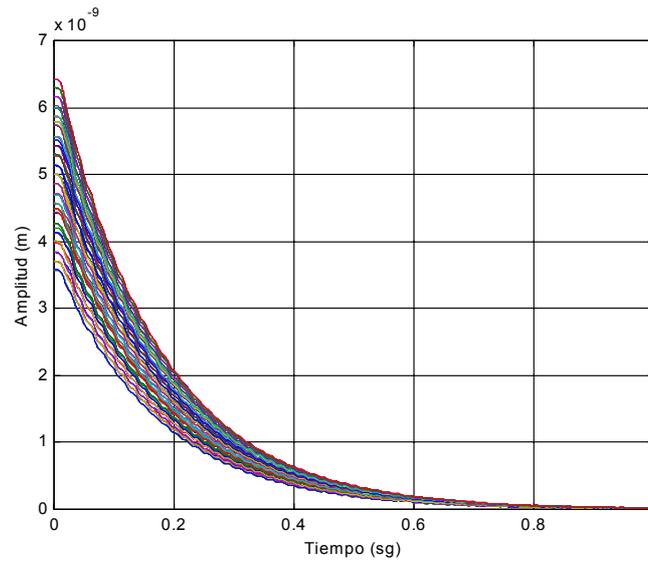
que a la global. De esta manera, podríamos disminuir esta última a costa de aplicar el comando local a una frecuencia superior (algo que, en principio, no resultaría problemático) sin perder prestaciones.

Si analizamos los resultados que mostramos en la tabla 3.1 vemos que, manteniendo fija la frecuencia local en  $2000\text{hz}$ , cuando la frecuencia global baja de  $2000$  a  $200\text{hz}$ , el tiempo de establecimiento del sistema aumenta en  $0.18$  segundos. En cambio, comparando los datos de las tablas 3.1 y 3.2, encontramos que cuando la frecuencia local baja de  $2000$  a  $1000\text{hz}$ , la respuesta del sistema no experimenta cambios apreciables, tanto para una frecuencia de control global de  $500\text{hz}$  como de  $200\text{hz}$ , y siendo  $v_F = -0.044$ .

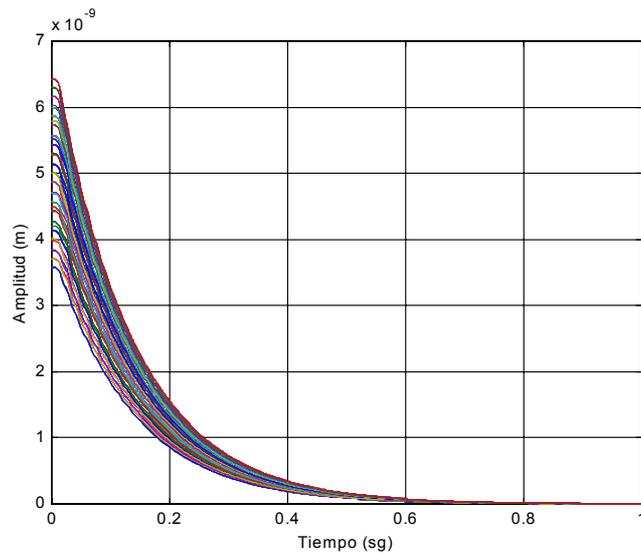
Por tanto, concluimos que el sistema se muestra algo más sensible a variaciones en la frecuencia de control global que en la local. No obstante, ambas tienen en  $200$  y  $500\text{hz}$ , respectivamente, su cota inferior, ya que a partir de las simulaciones realizadas encontramos que actuando por debajo de estas frecuencias el sistema se vuelve inestable.

Estos resultados coinciden con los obtenidos a través del análisis de estabilidad del sistema llevado a cabo en la sección III.2.2 empleando las matrices de lifting y lifting inverso.

Hemos creído interesante presentar la respuesta del sistema que obtenemos para los valores ‘mínimos’ de las frecuencias de control que nos proporcionan estabilidad, siendo  $v_F = 0$ , y que es la que mostramos en la figura 3.15. Si la comparamos con la respuesta de la planta cuando tanto el comando local como el global lo aplicamos a  $2000\text{hz}$  sin realimentar con la derivada del estado y de la salida (ver figura 3.16) vemos que, básicamente, la disminución de la frecuencia local y, según acabamos de ver, sobre todo de la global, se traduce en un aumento en el tiempo de establecimiento del sistema de, aproximadamente,  $0.3$  segundos.



**Figura 3.15:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local de 500hz y una global de 200hz sin realimentar con la derivada del estado y la salida ( $v_F = 0$ ).



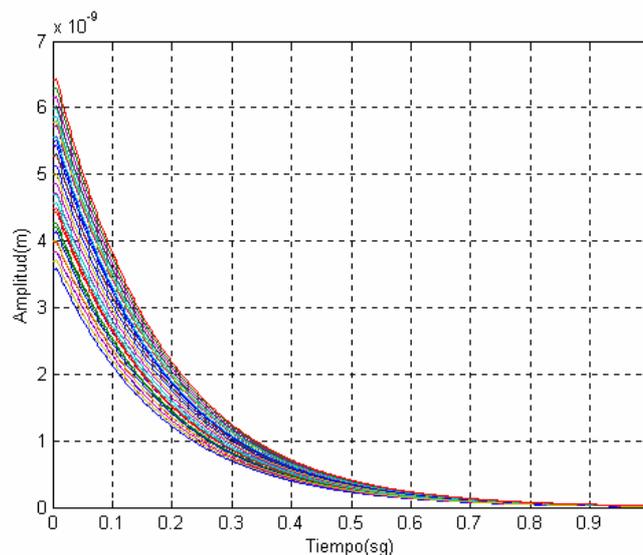
**Figura 3.16:** Evolución de los segmentos para una frecuencia local y global de 2000hz sin realimentar con la derivada del estado y la salida ( $v_F = 0$ ).

Nuestro propósito ahora es comparar las prestaciones obtenidas con el controlador por asignación de polos que acabamos de presentar con las logradas con una estrategia de control óptimo LQR. Para ello aplicamos un controlador global LQR a una frecuencia de 500hz, donde:

- ➔ hemos limitado la influencia de los comandos en el índice de coste de forma que éstos sean del mismo orden de magnitud que los correspondientes al controlador por asignación de polos, donde aplicamos tanto la acción local como la global a la misma frecuencia (500hz) que el comando LQR (ver figura 3.19),
- ➔ dado que el sistema evoluciona desde condiciones iniciales no nulas hasta el estado de equilibrio, los estados que pesamos son los correspondientes a las posiciones de los segmentos ( $x_e$ ) y, aunque en mucha menor medida, los correspondientes a los momentos. En este sentido y como es bien sabido, debemos comentar que cuanto menor es el factor que pesa la influencia de la velocidad de los segmentos en la función de coste más rápido es el sistema. Sin embargo, es preciso que este factor sea distinto de cero para evitar las oscilaciones en la respuesta del sistema.

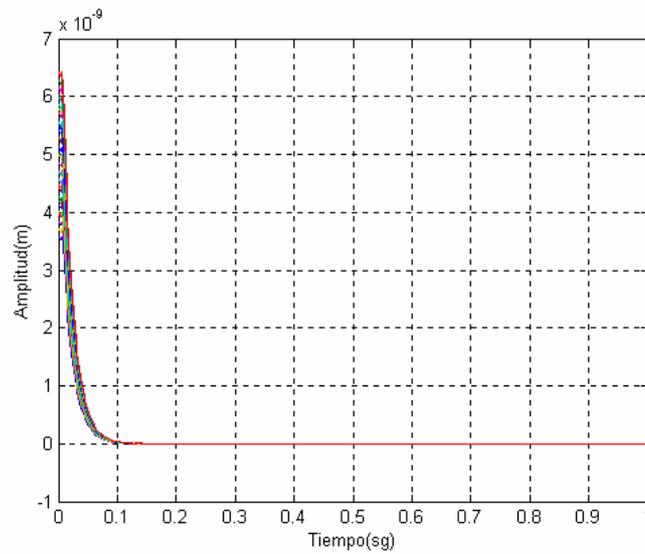
Para ilustrar este efecto hemos representado en las figuras 3.17 y 3.18, que mostramos a continuación, el resultado de la simulación del sistema con el controlador LQR a 500hz considerando distintos valores para el parámetro  $F$ , siendo:

$$F = \frac{\text{peso de los estados correspondientes a los momentos de los segmentos}}{\text{peso de los estados correspondientes a las posiciones de los segmentos}}$$



**Figura 3.17:** Segmentos del espejo con controlador LQR a 500hz, siendo  $F=10^{-6}$

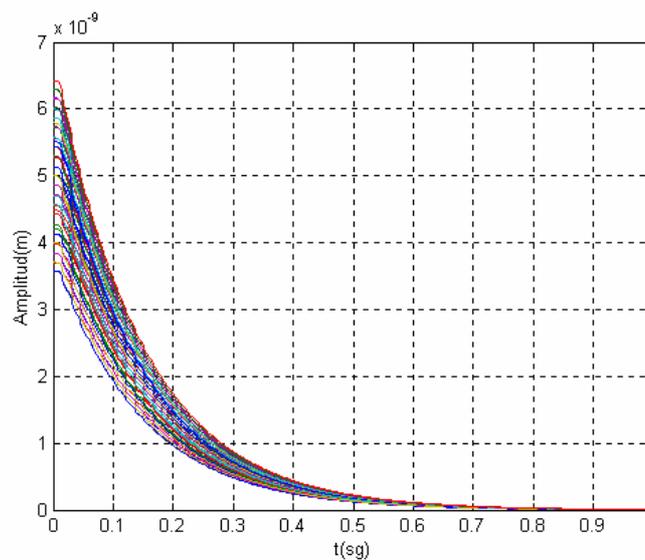
Plano Inicial (4nm,5nm,6nm) ---- Plano Final (0,0,0)



**Figura 3.18:** Segmentos del espejo con controlador LQR a  $500\text{hz}$ , siendo  $F=10^{-8}$   
Plano Inicial (4nm,5nm,6nm) ---- Plano Final (0,0,0)

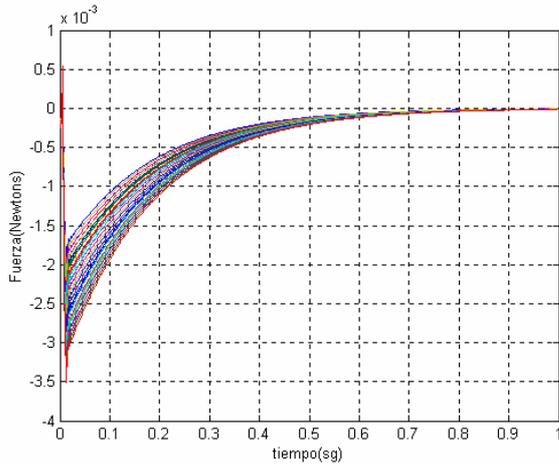
Vemos cómo, al disminuir este factor en dos órdenes de magnitud, la respuesta del sistema se hace unas diez veces más rápida, siendo los comandos aplicados en ambos casos del mismo orden de magnitud.

Veamos ahora la respuesta del sistema con el controlador por asignación de polos a  $500\text{hz}$  y con las mismas condiciones inicial y final que en las figuras anteriores:

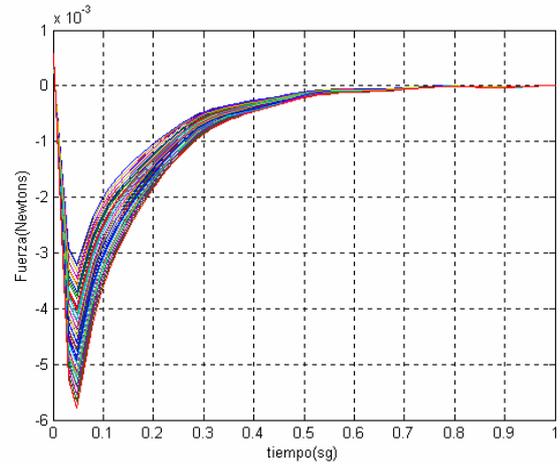


**Figura 3.19:** Segmentos del espejo con el controlador por asignación de polos para una frecuencia local y global de  $500\text{hz}$  y  $v_F = 0$ .

Para hacernos una idea del orden de magnitud de las fuerzas desarrolladas por los actuadores sobre los segmentos del espejo primario durante las simulaciones que mostramos en las figuras 3.17-3.19, hemos representado dichas fuerzas:



**Figura 3.20:** Fuerzas aplicadas sobre los segmentos con el controlador LQR a 500hz.



**Figura 3.21:** Fuerzas aplicadas sobre los segmentos con el controlador por asignación de polos a 500hz.

Como puede verse, las fuerzas en ambos casos son del mismo orden de magnitud, como así lo habíamos impuesto en el diseño del controlador LQR. Queremos además poner de manifiesto que en las simulaciones que mostramos en las figuras 3.17-3.19 los segmentos parten de unas condiciones iniciales en las que se encuentran separados los unos de los otros distancias que están en el orden de los nanómetros, lo que justifica unas fuerzas de tan pequeña magnitud.

## CAPÍTULO IV

# ESTUDIO DE LAS SIMETRÍAS DE MATRICES DE ESTADO

## TIPO GTC

En los capítulos precedentes se ha puesto de manifiesto la complejidad del sistema que estamos tratando. Su alta dimensionalidad, el número de entradas y salidas de que dispone y, sobre todo, el fuerte acoplamiento existente entre los 36 segmentos que componen el espejo primario del Gran Telescopio Canarias, y que justificaremos a continuación, son factores que dificultan el diseño de un controlador multivariable [Patel, 1981], [Skogestad, 1998], [Tamura, 1990], [MacFarlane, 1977], [Kosmatopoulos, 1999], [Li, 1999]. Es por esto por lo que llevamos a cabo un estudio para el desacoplo de la dinámica de esta planta, entendiendo como tal el proceso mediante el cual el sistema con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO: Multiple Inputs/Multiple Outputs) interconectadas se transforma en un conjunto de pequeños sistemas, con un número de entradas y salidas tan pequeño como sea posible, que no interactúan entre sí. En concreto, en este capítulo presentamos una serie de resultados que, en el dominio real, sientan las bases matemáticas que más tarde nos permitirán abordar el desacoplo de la planta. A continuación, estos resultados se extienden al dominio complejo, que es el que nos ocupa.

#### IV.1. JUSTIFICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE DESACOPLO

Para entender hasta qué punto es importante el acoplamiento en el espejo primario del Gran Telescopio Canarias y justificar así el diseño de un procedimiento para el desacoplo del mismo, vamos a hacer uso de una serie de resultados con los que pretendemos garantizar la estabilidad del sistema en presencia, tanto de los términos de acoplo, como de incertidumbres en la dinámica [Han, 1996]. Así, si consideramos la matriz que contiene únicamente la dinámica propia de la celda y los segmentos, y que podemos obtener a partir de la matriz  $A$  del sistema (ver capítulo II), encontramos que tiene la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & I_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times P} & \mathbf{0}_{N \times P} \\ -W^2 & -C & \mathbf{0}_{N \times P} & \mathbf{0}_{N \times P} \\ \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times P} & \frac{1}{m_s} I_{P \times P} \\ \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times N} & -k_s & -\frac{c_s}{m_s} I_{P \times P} \end{bmatrix}$$

Si añadimos ahora los elementos de acoplamiento entre las cajas de la diagonal principal correspondientes a la celda y los segmentos, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & I_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times P} & \mathbf{0}_{N \times P} \\ -W^2 & -C & k_s V^T - \frac{c_s^2}{m_s} V^T & \frac{c_s}{m_s} V^T \\ \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times P} & \frac{1}{m_s} I_{P \times P} \\ k_s V & \frac{c_s}{m_s} V & -k_s & -\frac{c_s}{m_s} I_{P \times P} \end{bmatrix}$$

e incluyendo, por último, los términos que, afectando a la caja correspondiente a la celda, dan cuenta del efecto de los actuadores que la conectan con los segmentos, llegamos por fin a la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & I_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times P} & \mathbf{0}_{N \times P} \\ -W^2 - V^T k_s V + \frac{c_s^2}{m_s} V^T V & -C - c_s V^T V & k_s V^T - \frac{c_s^2}{m_s} V^T & \frac{c_s}{m_s} V^T \\ \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times N} & \mathbf{0}_{P \times P} & \frac{1}{m_s} I_{P \times P} \\ k_s V & \frac{c_s}{m_s} V & -k_s & -\frac{c_s}{m_s} I_{P \times P} \end{bmatrix}$$

A la vista de esta última matriz tenemos que, tanto en los términos de acoplamiento entre cajas, como en los que dan cuenta de la conexión entre la celda y los actuadores, interviene la constante de rigidez de los soportes de los segmentos ( $k_s$ ), que es uno de los parámetros físicos del espejo cuyo valor puede diferir del nominal (ver capítulo II). Entonces, sería interesante encontrar alguna manera de determinar qué condición deben cumplir dichos términos para poder garantizar la estabilidad del sistema.

Intentemos aplicar el “Teorema de Gershgorin”, que es el más famoso de los muchos teoremas que indican, de forma aproximada, dónde se sitúan los valores propios de una matriz en el plano complejo, y que enunciamos a continuación:

El espectro de una matriz  $A$  de  $n \times n$  elementos (es decir, el conjunto de sus valores propios) está contenido en la unión de los siguientes  $n$  discos,  $D_i$ , en el plano complejo:

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\} \quad (1 \leq i \leq n) \blacksquare$$

La demostración del teorema se puede encontrar en cualquier texto de Análisis Numérico [Kincaid, 1994].

En definitiva, este teorema nos dice que los  $n$  valores propios de una matriz  $A$  están contenidos en la unión de  $n$  discos, siendo el radio del disco  $i$ -ésimo la suma, en valor absoluto, de los elementos de la  $i$ -ésima fila de la matriz, exceptuando el elemento de la diagonal principal.

Para garantizar la estabilidad del sistema, deberíamos encontrar que el radio de los anillos de Gershgorin es estrictamente menor que el valor absoluto de la parte real de

cada uno de los autovalores de la matriz  $A$ , esto es, los polos del sistema. Sin embargo, encontramos que el valor de los términos de acoplamiento entre cajas y de los que en la asociada a la celda dan cuenta del efecto de los actuadores es tan alto (véase que, por ejemplo, la constante de rigidez tiene un valor nominal  $k_s = 6 \times 10^6 \text{ N/m}$ ) que no nos sirve para ningún tipo de acotación.

Del Teorema de Gershgorin se deriva otro resultado conocido como el Teorema de Bauer-Fike [Golub, 1996], que se enuncia de la siguiente manera:

Si  $\mu$  es un autovalor de  $A + E \in C^{n \times n}$  y  $X^{-1} * A * X = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , entonces:

$$\min_{\lambda \in \lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq k_p(X) \|E\|_p$$

donde  $\lambda(A)$  denota el espectro de  $A$ ,  $\|\bullet\|$  cualquiera de las  $p$ -normas y  $k_p(X)$  el número de condición de la matriz que diagonaliza a  $A$  y que se define como:

$$k_p(X) = \|X\|_p \|X^{-1}\|_p \blacksquare$$

La demostración del teorema se puede encontrar en el texto referenciado.

En este caso tomaríamos  $A$  como la matriz que contiene únicamente la dinámica propia de la celda y los segmentos y como  $E$  la que contiene los términos de acoplo entre ambos elementos. Tomando la norma infinito encontramos que:

$$k_\infty(X) \sim 10^5 \quad \text{y} \quad \|E\|_\infty \sim 6 \times 10^6$$

Como vemos, la acotación es aún peor que la obtenida aplicando el Teorema de Gershgorin y además, a diferencia de éste, el Teorema de Bauer-Fike nos da una sola cota, que además es la más alta, para los  $n$  autovalores del sistema.

Nótese que en el caso de emplear algún otro resultado similar, véanse los óvalos de Cassini, por ejemplo, llegamos a la misma conclusión.

## IV.2. BASES DEL DESACOPLO PARA EL CASO DE UN ESPEJO CON $N$ MODOS Y $P$ ACTUADORES, SIENDO $P > N$

En este punto distinguiremos entre una matriz de estados con autovalores reales y autovalores complejos. Con ello pretendemos presentar los resultados de la manera más clara posible.

### IV.2.1. Matriz con autovalores reales

Sea una matriz cuadrada de dimensión  $N+P$  de números reales:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \bar{a}_2 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N & \bar{a}_N & & & \\ & & & & & \lambda^1_A & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{N+1}^t & \bar{a}_{N+2}^t & \cdots & \bar{a}_{2N}^t & 0 & \lambda^2_A & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda^P_A \end{pmatrix}$$

donde  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{2N}$  son combinaciones lineales de los vectores fila:

$$\bar{t}_1 = (t_{1,N+1}, t_{1,N+2}, \dots, t_{1,N+P})$$

$$\bar{t}_2 = (t_{2,N+1}, t_{2,N+2}, \dots, t_{2,N+P})$$

$$\vdots$$

$$\bar{t}_N = (t_{N,N+1}, t_{N,N+2}, \dots, t_{N,N+P})$$

además,  $\bar{a}_j^t$  denota la traspuesta del vector fila  $\bar{a}_j$  y  $\lambda_A^l, l=1, \dots, P$  los  $P$  valores  $\lambda_A$ .

Consideremos seguidamente el subespacio vectorial  $E_\lambda^C$  perteneciente a  $\mathfrak{R}^{N+P}$ , donde  $\lambda \in \mathfrak{R}$ , (siendo  $\mathfrak{R}^D$  el conjunto de los números reales de dimensión  $D$ ), formado por los vectores  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{N+P})$  tales que:

$$(A - \lambda \cdot I_{N+P}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N+P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Es decir,  $E_\lambda^C$  es el subespacio generado por los vectores propios columna de la matriz  $A$ .

Consideramos igualmente el subespacio vectorial  $E_\lambda^F$  de  $\mathfrak{R}^{N+P}$  formado por los vectores  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{N+P})$  tales que:

$$(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N+P})(A - \lambda \cdot I_{N+P}) = (0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (4.2)$$

$E_\lambda^F$  es, por tanto, el subespacio generado por los vectores propios fila de  $A$ .

En general,  $E_\lambda^F$  no tiene por qué coincidir con  $E_\lambda^C$ . De hecho, ambos subespacios sólo son iguales en el caso de que  $A^t = A$ , es decir, en el caso de que  $A$  sea simétrica, condición ésta que no estamos imponiendo a la matriz.

Trasponiendo (4.1) se obtiene que:

$$(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N+P})(A - \lambda \cdot I_{N+P})^t = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

es decir, que:

$$(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N+P})(A^t - \lambda \cdot I_{N+P}) = (0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (4.3)$$

Si  $A$  es simétrica,  $A^t = A$  y, por tanto, (4.3) se transforma en (4.2), con lo que podemos concluir que:

$$A \text{ simétrica} \Rightarrow E_\lambda^F = E_\lambda^C$$

Aunque no se cumpla que  $A^t = A$ , podemos enunciar el siguiente lema:

**LEMA 1.-** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $\lambda$  es autovalor de  $A$ .
- ii)  $E_\lambda^C \neq \{(0,0,\dots,0)\}$ .
- iii)  $E_\lambda^F \neq \{(0,0,\dots,0)\}$ .
- iv)  $\text{rango}(A - \lambda \cdot I_{N+P}) < N + P$ .

La equivalencia es clara a partir de (4.1) y (4.2). En ambas expresiones se ve que si el rango de la matriz  $(A - \lambda \cdot I_{N+P})$  fuera  $N+P$ , tendríamos la solución trivial:

$$E_{\lambda}^C = E_{\lambda}^F = \{(0,0,\dots,0)\}.$$

Sea ahora  $W_{\lambda_A}$  el subespacio vectorial de  $\mathfrak{R}^{N+P}$  formado por los vectores  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{N+P})$  que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ &\vdots \\ v_N &= 0 \\ \vec{t}_1 \begin{pmatrix} v_{N+1} \\ v_{N+2} \\ \vdots \\ v_{N+P} \end{pmatrix} &= 0 \\ &\vdots \\ \vec{t}_N \begin{pmatrix} v_{N+1} \\ v_{N+2} \\ \vdots \\ v_{N+P} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se trata de un sistema de  $2N$  ecuaciones con  $N+P$  incógnitas, en el que el rango  $r$  de la matriz asociada al mismo es tal que:

$$N \leq r \leq 2N$$

De esto se infiere que la dimensión del subespacio que generan los  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{N+P})$  que verifican (4.4) está acotada según:

$$(N+P) - 2N \leq \dim(W_{\lambda_A}) \leq (N+P) - N$$

o, lo que es lo mismo:

$$P - N \leq \dim(W_{\lambda_A}) \leq P$$

Llegados a este punto, podemos enunciar las siguientes proposiciones:

**PROPOSICIÓN 1.-**  $\lambda_A$  es autovalor de  $A$  y  $\dim(E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F) \geq P - N$ .

**DEMOSTRACIÓN.-** Para demostrar que  $\dim(E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F) \geq P - N$  veremos primero que  $W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^C$  y que  $W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^F$ :

**1)**  $W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^C$  si todo vector  $\vec{w} = (0, 0, \dots, 0, w_{N+1}, w_{N+2}, \dots, w_{N+P})$  de  $W_{\lambda_A}$

satisface las ecuaciones de  $E_{\lambda_A}^C$ , esto es:

$$(A - \lambda_A \cdot I_{N+P}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N+1} \\ \vdots \\ w_{N+P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

que no es más que la expresión (4.1), particularizando para  $\lambda = \lambda_A$ . Veamos si esta condición se cumple:

$$(A - \lambda_A \cdot I_{N+P}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N+1} \\ \vdots \\ w_{N+P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N+1} \\ \vdots \\ w_{N+P} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_A & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_A & \cdots & 0 & \bar{a}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N - \lambda_A & \bar{a}_N \\ \bar{a}_{N+1}^t & \bar{a}_{N+2}^t & \cdots & \bar{a}_{2N}^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N+1} \\ \vdots \\ w_{N+P} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \cdot (w_{N+1}, \dots, w_{N+P})^t \\ \vdots \\ \bar{a}_N \cdot (w_{N+1}, \dots, w_{N+P})^t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \bar{t}_1 \cdot (w_{N+1}, \dots, w_{N+P})^t + \cdots + \gamma_1 \bar{t}_N \cdot (w_{N+1}, \dots, w_{N+P})^t \\ \vdots \\ \alpha_N \bar{t}_1 \cdot (w_{N+1}, \dots, w_{N+P})^t + \cdots + \gamma_N \bar{t}_N \cdot (w_{N+1}, \dots, w_{N+P})^t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{w} = (0, 0, \dots, 0, w_{N+1}, w_{N+2}, \dots, w_{N+P}) \in E_{\lambda_A}^C$$

$$\Downarrow$$

$$W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^C$$



donde, de forma análoga a como procedimos en el punto 1), hemos hecho uso de que los vectores  $\vec{a}_j, j = N + 1, \dots, 2N$  son combinación lineal de los  $\vec{t}_j, j = 1, \dots, N$ , es decir, que:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{N+1} &= \xi_1 \vec{t}_1 + \eta_1 \vec{t}_2 + \dots + \mu_1 \vec{t}_N \\ &\vdots \\ \vec{a}_{2N} &= \xi_N \vec{t}_1 + \eta_N \vec{t}_2 + \dots + \mu_N \vec{t}_N\end{aligned}$$

Acabamos de ver que  $W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^C$  y  $W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^F$ , que, conjuntamente con el resultado que ya conocíamos ( $P - N \leq \dim(W_{\lambda_A})$ ), nos permite asegurar que:

$$\dim(E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F) \geq P - N$$

que es justamente lo que queríamos demostrar.

Por otra parte, el hecho de que se verifiquen cualquiera de las ecuaciones (4.5) o (4.6) implica necesariamente que  $\lambda_A$  es autovalor de  $A$ , es decir, que el determinante de  $(A - \lambda \cdot I_{N+P})$  se anula para  $\lambda = \lambda_A$ . Esto se demuestra fácilmente por reducción al absurdo ya que si suponemos que  $\det(A - \lambda_A \cdot I_{N+P}) \neq 0$ , llegamos a que la única solución de (4.5) y (4.6) es la trivial, esto es,  $\vec{w} = (0, 0, \dots, 0) \in W_{\lambda_A}$ .

**PROPOSICIÓN 2.-** Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  tal que  $\lambda \neq \lambda_A$ , entonces los vectores  $E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F$  son ortogonales a los vectores de  $E_{\lambda}^C$  y a los vectores de  $E_{\lambda}^F$ .

**DEMOSTRACIÓN.-**

$$\mathbf{1)} \quad \text{Sea } \vec{v} = (v_1 \quad \dots \quad v_{N+P}) \in E_{\lambda}^C \quad \text{y} \quad \vec{w} = (w_1 \quad \dots \quad w_{N+P}) \in E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F.$$

Entonces, el producto escalar de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  se expresa como sigue:

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \vec{w} \cdot \vec{v}^t$$

y, por tanto, podemos escribir:

$$\lambda \cdot \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \lambda \cdot \vec{w} \cdot \vec{v}^t = \vec{w} \cdot (\lambda \cdot \vec{v}^t) = \vec{w} \cdot A \cdot \vec{v}^t = \lambda_A \cdot \vec{w} \cdot \vec{v}^t = \lambda_A \cdot \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

con lo que llegamos a que:

$$(\lambda - \lambda_A) \cdot \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0 \implies \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0, \text{ al ser } \lambda \neq \lambda_A.$$

2) Si  $\vec{v} \in E_{\lambda}^F$  y  $\vec{w} = (w_1 \ \dots \ w_{N+P}) \in E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F$ , entonces:

$$\lambda \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}^t = \vec{v} \cdot A \cdot \vec{w}^t = \vec{v} \cdot \lambda_A \cdot \vec{w}^t = \lambda_A \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}^t = \lambda_A \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

con lo que:

$$(\lambda - \lambda_A) \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \text{ al ser } \lambda \neq \lambda_A.$$

Realmente, a efectos de la demostración que acabamos de hacer, sólo estamos exigiendo en el caso 1) que  $\vec{w} = (w_1 \ \dots \ w_{N+P}) \in E_{\lambda_A}^F$ . Sin embargo, tomamos  $\vec{w} = (w_1 \ \dots \ w_{N+P}) \in E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F$  para que  $\vec{w}$  sea vector propio columna. En el caso 2), imponemos esta misma condición para que ahora  $\vec{w}$  sea vector propio fila, aunque en realidad sólo hacemos uso de que  $\vec{w} = (w_1 \ \dots \ w_{N+P}) \in E_{\lambda_A}^C$ .

#### IV.2.2. Matriz con autovalores complejos

Como una extensión de lo que acabamos de ver en el dominio real, presentamos a continuación los resultados en el dominio complejo; algo necesario por otra parte ya que los autovalores de la matriz que determina la dinámica del espejo primario del Gran Telescopio Canarias son complejos.

Dada la matriz cuadrada de dimensión  $2N+2P$ , siendo, como en el caso real,  $N$  el número de modos de la estructura y  $P$  el número de actuadores, con  $P > N$ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vec{m}_1 & \dots & \vec{m}_{2N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_N & 0 & \dots & 0 & \vec{m}_N & \dots & \vec{m}_{3N} \\ 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_1 & \dots & 0 & \vec{m}_{N+1} & \dots & \vec{m}_{3N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_N & \vec{m}_{2N} & \dots & \vec{m}_{4N} \\ \vec{m}_{4N+1}^t & \dots & \vec{m}_{5N}^t & \vec{m}_{5N+1}^t & \dots & \vec{m}_{6N}^t & \lambda_A^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_A^P & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_A^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_1^{-1} & \dots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{m}_{6N+1}^t & \dots & \vec{m}_{7N}^t & \vec{m}_{7N+1}^t & \dots & \vec{m}_{8N}^t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_A^P \end{pmatrix}$$

donde  $\vec{m}_i, i=1,2,\dots,8N$ , es un vector fila de  $P$  elementos reales que es combinación lineal de los vectores fila reales siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{t}_1 &= (t_{1,2N+1}, t_{1,2N+2}, \dots, t_{1,2N+P}) \\ \vec{t}_2 &= (t_{2,2N+1}, t_{2,2N+2}, \dots, t_{2,2N+P}) \\ &\vdots \\ \vec{t}_N &= (t_{N,2N+1}, t_{N,2N+2}, \dots, t_{N,2N+P})\end{aligned}$$

y  $\vec{m}_j^t$  denota la traspuesta del vector fila  $\vec{m}_j$ . Además,  $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_A$  son números complejos,  $\bar{\lambda}_k$  denota el conjugado de  $\lambda_k$  y  $\lambda_A^l, l=1, \dots, P$  los  $P$  valores  $\lambda_A$ .

Consideremos seguidamente el subespacio vectorial  $E_\lambda^C$ ,  $\lambda \in C$ , formado por los vectores  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2N+2P})$  de  $C^{2N+2P}$  (siendo  $C^D$  el conjunto de los números complejos de dimensión  $D$ ) tales que:

$$(A - \lambda \cdot I_{2N+2P}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2N+2P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por su parte, definimos el subespacio  $E_\lambda^F$  como el generado por los vectores  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2N+2P})$  tales que:

$$(v_1 \ \dots \ v_{2N+2P})(A - \lambda \cdot I_{2N+2P}) = (0 \ \dots \ 0)$$

Cuando se tiene un subespacio  $W$  de un subespacio vectorial complejo, se puede considerar  $\bar{W}$  formado por los vectores conjugados a  $W$ . En general,  $\bar{W}$  no coincide con  $W$ .

Sea ahora el subespacio  $W_{\lambda_A} \subset C^{2N+2P}$ , formado por los vectores  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2N+2P})$  tales que:

$$\begin{aligned}
 & v_1 = 0 \\
 & \vdots \\
 & v_{2N} = 0 \\
 & v_{2N+P+1} = 0 \\
 & \vdots \\
 & v_{2N+2P} = 0 \\
 \\
 & \vec{t}_1 \cdot \begin{pmatrix} v_{2N+1} \\ v_{2N+2} \\ \vdots \\ v_{2N+P} \end{pmatrix} = 0 \\
 & \vdots \\
 & \vec{t}_N \cdot \begin{pmatrix} v_{2N+1} \\ v_{2N+2} \\ \vdots \\ v_{2N+P} \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nótese que, al ser los vectores  $\vec{t}_k, k = 1, \dots, N \in \mathfrak{R}^P$ , se verifica que  $\overline{W}_{\lambda_A} = W_{\lambda_A}$ . Razonando de forma análoga a como lo hicimos en la demostración de la proposición 1, se encuentra que cualquier vector perteneciente al subespacio  $W_{\lambda_A}$  pertenecerá igualmente a los subespacios  $E_{\lambda_A}^C$ ,  $E_{\lambda_A}^F$ ,  $\overline{E}_{\lambda_A}^C$  y  $\overline{E}_{\lambda_A}^F$ . Dicho de otro modo:

$$W_{\lambda_A} \subseteq E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F \cap \overline{E}_{\lambda_A}^C \cap \overline{E}_{\lambda_A}^F \tag{4.8}$$

Este resultado garantiza, además, que  $\lambda_A$  es autovalor de  $A$ , tal y como quedó probado en el caso real.

Por otra parte, (4.7) es un sistema de  $3N+P$  ecuaciones con  $2N+2P$  incógnitas, con lo que el rango  $r$  de la matriz del sistema es tal que:

$$2N + P \leq r \leq 3N + P$$

por lo que la dimensión del subespacio  $W_{\lambda_A} \subset C^{2N+2P}$  estará acotada según:

$$\begin{aligned}
 2N + 2P - (3N + P) &\leq \dim_C(W_{\lambda_A}) \leq 2N + 2P - (2N + P) \\
 &\downarrow \\
 P - N &\leq \dim_C(W_{\lambda_A}) \leq P
 \end{aligned}$$

De esta desigualdad y de la relación (4.8) se obtiene de forma inmediata el siguiente resultado:

$$\dim_C(E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F \cap \bar{E}_{\lambda_A}^C \cap \bar{E}_{\lambda_A}^F) \geq P - N$$

que presentamos formalmente como lema 2.

**LEMA 2.-**  $\lambda_A$  es autovalor de  $A$  y  $\dim_C(E_{\lambda_A}^C \cap E_{\lambda_A}^F \cap \bar{E}_{\lambda_A}^C \cap \bar{E}_{\lambda_A}^F) \geq P - N$ .

**PROPOSICIÓN 3.-** Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  tal que  $\lambda \neq \lambda_A$ , entonces:

- i) Los vectores de  $E_{\lambda}^C$  son ortogonales hermíticos a los vectores de  $E_{\lambda_A}^C \cap \bar{E}_{\lambda_A}^F$ .
- ii) Los vectores de  $E_{\lambda}^F$  son ortogonales hermíticos a los vectores de  $E_{\lambda_A}^F \cap \bar{E}_{\lambda_A}^C$ .

**DEMOSTRACIÓN.-**

- i) Sea  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2N+2P}) \in E_{\lambda}^C$  y  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_{2N+2P}) \in E_{\lambda_A}^C \cap \bar{E}_{\lambda_A}^F$ .

Entonces, el producto escalar hermítico de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  se expresa:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \bar{\vec{w}}^t$$

y:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \lambda \cdot (v_1, \dots, v_{2N+2P}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_{2N+2P} \end{pmatrix} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{2N+2P}) \cdot \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2N+2P} \end{pmatrix} = \\ &= (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{2N+2P}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2N+2P} \end{pmatrix} = \lambda_A \cdot (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{2N+2P}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2N+2P} \end{pmatrix} = \lambda_A \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

Por tanto:

$$(\lambda - \lambda_A) \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \text{ al ser } \lambda \neq \lambda_A.$$

- ii) Si  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2N+2P}) \in E_{\lambda}^F$  y  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_{2N+2P}) \in E_{\lambda_A}^F \cap \bar{E}_{\lambda_A}^C$ :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \lambda \cdot (v_1, \dots, v_{2N+2P}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_{2N+2P} \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_{2N+2P}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_{2N+2P} \end{pmatrix} = \\ &= (v_1, \dots, v_{2N+2P}) \cdot \lambda_A \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_{2N+2P} \end{pmatrix} = \lambda_A \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \text{ al ser } \lambda \neq \lambda_A. \end{aligned}$$

Nótese que, en realidad, para la demostración de la proposición 3 sólo es necesario exigir que  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_{2N+2P}) \in \bar{E}_{\lambda_A}^F$  en el caso *i*) y que  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_{2N+2P}) \in \bar{E}_{\lambda_A}^C$  en el caso *ii*). La razón de imponer que además  $\vec{w}$  pertenezca al subespacio  $E_{\lambda_A}^C$  en el primer caso y a  $E_{\lambda_A}^F$  en el segundo es garantizar que  $\vec{w}$  sea vector propio columna en *i*) y vector propio fila en *ii*) de  $A$ , asociados ambos al autovalor  $\lambda_A$ .

Para  $\bar{\lambda}_A$  consideramos ahora el subespacio  $W_{\bar{\lambda}_A} \subset C^{2N+2P}$  compuesto por los vectores tales que:

$$\begin{aligned} &v_1 = 0 \\ &\vdots \\ &v_{2N} = 0 \\ &v_{2N+1} = 0 \\ &\vdots \\ &v_{2N+P} = 0 \\ &\vec{t}_1 \cdot \begin{pmatrix} v_{2N+P+1} \\ v_{2N+P+2} \\ \vdots \\ v_{2N+2P} \end{pmatrix} = 0 \\ &\vdots \\ &\vec{t}_N \cdot \begin{pmatrix} v_{2N+P+1} \\ v_{2N+P+2} \\ \vdots \\ v_{2N+2P} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde tenemos que:

$$P - N \leq \dim_C(W_{\bar{\lambda}_A}) \leq P$$

Por otra parte, procediendo de la misma manera en la que ya lo hicimos para el autovalor  $\lambda_A$ , se llega a que:

$$W_{\bar{\lambda}_A} \subseteq E_{\bar{\lambda}_A}^C \cap E_{\bar{\lambda}_A}^F \cap \bar{E}_{\bar{\lambda}_A}^C \cap \bar{E}_{\bar{\lambda}_A}^F$$

y ambos resultados nos permiten enunciar el siguiente lema:

**LEMA 3.-**  $\bar{\lambda}_A$  es un autovalor de  $A$  y  $\dim_C(E_{\bar{\lambda}_A}^C \cap E_{\bar{\lambda}_A}^F \cap \bar{E}_{\bar{\lambda}_A}^C \cap \bar{E}_{\bar{\lambda}_A}^F) \geq P - N$ .

**PROPOSICIÓN 4.-** Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  tal que  $\lambda \neq \lambda_A$ , entonces:

- iii) Los vectores de  $E_{\lambda}^C$  son ortogonales hermíticos a los vectores de  $E_{\bar{\lambda}_A}^C \cap \bar{E}_{\bar{\lambda}_A}^F$ .
- iv) Los vectores de  $E_{\lambda}^F$  son ortogonales hermíticos a los vectores de  $E_{\bar{\lambda}_A}^F \cap \bar{E}_{\bar{\lambda}_A}^C$ .

**DEMOSTRACIÓN.-** Se demuestra igual que la proposición 3.

### IV.2.3. Desacoplo entre las entradas y salidas de los dos subespacios

Para mostrar el desacoplo existente, aun antes de llevar a cabo ningún tipo de recombinación de autovectores, entre los subespacios  $W_{\lambda_A}$  y  $W_{\lambda \neq \lambda_A}$  compuestos, respectivamente, por los vectores propios fila y columna asociados tanto a  $\lambda_A$  y  $\bar{\lambda}_A$  como a  $\lambda \neq \lambda_A$  y  $\bar{\lambda}$  y, de paso, la multiplicidad del autovalor  $\lambda_A$ , procedemos de la manera que explicamos a continuación.

Sea la ecuación matricial:

$$\dot{x} = A * x + B * U \quad (4.10)$$

que representa la evolución de los estados del sistema, donde  $A$  es la matriz que aparece en la sección IV.2.2, y donde exigimos que  $B$  tenga la forma siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} & & & & \vec{m}_{8N+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vec{m}_{9N} \\ & & & & \vec{m}_{9N+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vec{m}_{10N} \\ \delta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \delta_P \\ \beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \beta_P \end{bmatrix}$$

siendo  $\vec{m}_i, i = 8N + 1, \dots, 10N$  vectores fila de  $P$  elementos reales que se obtienen como combinación lineal de los vectores fila reales  $(\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_N)$ . Nótese que el rango  $r$  de las  $4N$  primeras filas de  $B$  es tal que:

$$2N \leq r \leq \min(3N, P)$$

Podemos suponer que dichos vectores reales:

$$\vec{t}_1 = (t_{1,2N+1}, t_{1,2N+2}, \dots, t_{1,2N+P})$$

$$\vec{t}_2 = (t_{2,2N+1}, t_{2,2N+2}, \dots, t_{2,2N+P})$$

$$\vdots$$

$$\vec{t}_N = (t_{N,2N+1}, t_{N,2N+2}, \dots, t_{N,2N+P})$$

constituyen un sistema ortonormal (si los vectores no son ya ortogonales entre sí siempre es posible conseguirlo sin más que aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, esto es, quitar la proyección de cada uno de ellos sobre el resto), con lo que su producto escalar cumple que:

$$\langle \vec{t}_i, \vec{t}_j \rangle = \delta_{ij},$$

Tomando unos vectores  $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_P)$  tales que:

$$\bar{t}_1 \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_P \end{pmatrix} = 0, \quad \bar{t}_2 \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_P \end{pmatrix} = 0, \quad \dots \quad \bar{t}_N \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_P \end{pmatrix} = 0$$

se tiene que éstos constituyen un subespacio de  $C^P$  de dimensión  $P-N$ .

Sea ahora  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{P-N}\}$  una base ortonormal de dicho subespacio, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0_1 & \dots & 0_{2N} & v_{i_1} & v_{i_2} & \dots & v_{i_P} & 0_{2N+P+1} & \dots & 0_{2N+2P} \end{pmatrix}$$

son autovectores propios asociados a  $\lambda_A$ , y:

$$\begin{pmatrix} 0_1 & \dots & 0_{2N} & 0_{2N+1} & \dots & 0_{2N+P} & v_{i_1} & v_{i_2} & \dots & v_{i_P} \end{pmatrix}$$

son autovectores propios asociados a  $\bar{\lambda}_A$ , donde los subíndices de los elementos nulos indican el lugar que ocupan en el vector,  $(v_{i_1} \ v_{i_2} \ \dots \ v_{i_P})$  representan las componentes del vector  $\bar{v}_i$  y  $(\lambda_A, \bar{\lambda}_A)$  son autovalores de la matriz  $A$  de la sección IV.2.2.

Si hacemos un cambio de base ortonormal, la ecuación (4.10) queda como:

$$W^{-1} * \dot{x} = W^{-1} * A * W * W^{-1} * x + W^{-1} * B * U$$

siendo  $W^{-1} = W^t$ . Tomando la notación siguiente:

$$W^{-1} * \dot{x} = \dot{z} \quad \text{y} \quad W^{-1} * x = z$$

podemos escribir que:

$$\dot{z} = W^{-1} * A * W * z + W^{-1} * B * U = W^t * A * W * z + W^t * B * U$$

En particular, consideramos la matriz  $W$  de vectores propios columna ortonormales que mostramos a continuación:

$$W = \begin{bmatrix} 1_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1_{N+1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1_{2N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vec{t}_1^t & \dots & \vec{t}_N^t & \vdots & \ddots & \vdots & \vec{v}_1^t & \dots & \vec{v}_{P-N}^t & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vec{t}_1^t & \dots & \vec{t}_N^t & \vdots & \ddots & \vdots & \vec{v}_1^t & \dots & \vec{v}_{P-N}^t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

donde la notación corresponde a la utilizada a lo largo de este capítulo.

De este modo, y según acabamos de ver, las  $P-N$  últimas columnas son autovectores asociados al autovalor  $\bar{\lambda}_A$ , mientras que las  $P-N$  inmediatamente anteriores son autovectores asociados al autovalor  $\lambda_A$ .

Para este cambio de base tenemos que la matriz de estados del sistema en la nueva representación,  $W^{-1} * A * W = W^t * A * W$ , es:

$$\left[ \begin{array}{cccccc}
 \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & \lambda_N & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_N \\
 \\
 & & & & & \lambda_A^{-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & \lambda_A^N & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_A^{-1} & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_A^N \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & \lambda_A^P & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_A^{N+1} & \dots & 0 \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_A^P
 \end{array} \right]$$

A la vista de esta matriz podemos concluir que la multiplicidad de  $\lambda_A$  es  $P-N$  si y sólo si el determinante  $|T - \lambda_A \cdot I|$  es distinto de cero, siendo  $T$  las  $4N$  primeras filas y columnas de  $W^t * A * W$ , es decir:

$$\begin{array}{cccccc|cc|c}
 \lambda_1 - \lambda_A & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \langle m_i, t_j \rangle & \langle m_{2N+i}, t_j \rangle & \\
 0 & \dots & \lambda_N - \lambda_A & 0 & \dots & 0 & & & \\
 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_1 - \lambda_A & \dots & 0 & & & \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \langle m_{N+i}, t_j \rangle & \langle m_{3N+i}, t_j \rangle & \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_N - \lambda_A & & & \\
 & & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \langle m_{4N+i}, t_j \rangle^t & & & \langle m_{5N+i}, t_j \rangle^t & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \langle m_{6N+i}, t_j \rangle^t & & & \langle m_{7N+i}, t_j \rangle^t & & & 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_A - \lambda_A^1 & \dots & 0 \\
 & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_A - \lambda_A^N
 \end{array} \neq 0$$



$$multiplicidad(\lambda_A) = P - N$$

Ya que para nuestra planta se verifica que el determinante es distinto de cero, la multiplicidad del autovalor  $\lambda_A$  queda unívocamente determinada, ya que recordemos que en la sección IV.2.2. demostramos que  $P - N \leq multiplicidad(\lambda_A) \leq N$ .

Podríamos intentar buscar un resultado más sencillo que éste (que involucra el cálculo de un determinante de dimensión  $4N$ ) que nos permitiera asegurar la multiplicidad del autovalor  $\lambda_A$ . En este sentido, encontramos que si el determinante de la matriz  $T$  es distinto de cero, entonces se cumple que:

$$rango \begin{pmatrix} \langle \bar{m}_i, \bar{t}_j \rangle \\ \langle \bar{m}_{N+i}, \bar{t}_j \rangle \end{pmatrix} = N$$

y

$$rango(\langle \bar{m}_{4N+i}, \bar{t}_j \rangle \langle \bar{m}_{5N+i}, \bar{t}_j \rangle) = N$$

Sin embargo, la implicación no es cierta en el sentido opuesto y, para verlo, valga el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 1:** supongamos  $N=2$  y la matriz  $T$  de dimensión  $4N$  siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda_A & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_A & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_A \end{pmatrix}$$

donde, a efectos de simplificar el cálculo del determinante  $|T - \lambda_A \cdot I|$ , y puesto que no afecta para nada al resultado del mismo, hemos tomado el valor de los elementos en la diagonal principal como  $1 + \lambda_A$  o  $\lambda_A$ . Así:

$$|T - \lambda_A \cdot I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{multiplicidad}(\lambda_A) > P - N$$

siendo:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \langle \vec{m}_i, \vec{t}_j \rangle \\ \langle \vec{m}_{N+i}, \vec{t}_j \rangle \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = N$$

y

$$\text{rango}(\langle \vec{m}_{4N+i}, \vec{t}_j \rangle \langle \vec{m}_{5N+i}, \vec{t}_j \rangle) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 = N$$

Luego, la conclusión es que éstas son condiciones necesarias pero no suficientes para poder concluir que la multiplicidad de  $\lambda_A$  es  $P-N$ .

A modo de resumen, podemos escribir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rango} \left( \begin{array}{l} \langle \vec{m}_i, \vec{t}_j \rangle \\ \langle \vec{m}_{N+i}, \vec{t}_j \rangle \end{array} \right) = N \\ \text{y} \\ \text{rango} \left( \langle \vec{m}_{4N+i}, \vec{t}_j \rangle \langle \vec{m}_{5N+i}, \vec{t}_j \rangle \right) = N \end{array} \right\} \Leftrightarrow |T - \lambda_A \cdot I| \neq 0 \Leftrightarrow \text{multiplicidad}(\lambda_A) = P - N$$

y, al mismo tiempo:

$$|T - \lambda_A \cdot I| = 0 \Leftrightarrow \text{multiplicidad}(\lambda_A) > P - N$$

Por otro lado, la matriz B tras el cambio de base,  $W^{-1} * B = W^t * B$ , queda como:

$$\left[ \begin{array}{c} \vec{m}_{8N+1} \\ \vdots \\ \vec{m}_{9N} \\ \vec{m}_{9N+1} \\ \vdots \\ \vec{m}_{10N} \\ \delta \cdot \vec{t}_1 \\ \vdots \\ \delta \cdot \vec{t}_N \\ \beta \cdot \vec{t}_1 \\ \vdots \\ \beta \cdot \vec{t}_N \\ \delta \cdot \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \delta \cdot \vec{v}_{P-N} \\ \beta \cdot \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \beta \cdot \vec{v}_{P-N} \end{array} \right] \quad (4.11)$$

de donde se concluye que el rango de las  $4N$  primeras filas de  $W^t * B$  es  $N$ .

De forma análoga podemos demostrar que el rango de las  $4N$  primeras columnas de la matriz de salida del sistema tras el cambio de base ortonormal,  $C * W$ , es  $N$ .

Si exigimos que la matriz  $C$  tenga la forma siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1_{2N+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1_{2N+2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1_{2N+P-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1_{2N+P} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

donde los subíndices indican la posición de los elementos no nulos de esta matriz, la matriz del sistema tras el cambio de base,  $C * W$ , queda como:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vec{t}_1^t & \dots & \vec{t}_N^t & \vdots & \ddots & \vdots & \vec{v}_1^t & \dots & \vec{v}_{P-N}^t & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

con lo que el rango de las  $4N$  primeras columnas de esta matriz es  $N$ .

Estos resultados que acabamos de presentar tienen una gran importancia de cara al proceso de desacoplo del espejo. Así, nos indican que el subsistema compuesto por los  $N$  modos de la celda y los segmentos cuya dinámica se modifica debido a los términos de acoplamiento entre ambos (y cuyos vectores propios pertenecen al subespacio  $W_{\lambda \neq \lambda_A}$ ) tiene, únicamente,  $N$  entradas y  $N$  salidas.

Por otra parte, de las matrices en (4.11) y (4.12) se tiene que el rango de las  $2P - 2N = (2N + 2P) - 4N$  últimas filas y columnas, respectivamente, es  $P - N$ . Esto nos permite, por tanto, concentrarnos en el desacoplo de las  $P - N$  entradas y salidas del subsistema compuesto por el resto de los segmentos del espejo, cuya dinámica no se ve alterada por el acoplo con la celda. Los vectores propios de dicho subsistema pertenecen al subespacio  $W_{\lambda_A}$  y están todos ellos asociados al autovalor  $\lambda_A$  y, por tratarse de un subespacio complejo, a su correspondiente complejo conjugado  $\bar{\lambda}_A$ .

Para verlo con mayor claridad, presentamos un ejemplo con un número reducido de modos y actuadores.

**EJEMPLO 2:** supongamos un espejo con un único modo ( $N=1$ ) y un único segmento ( $P=3$ ). Tras el cambio de base  $W$ , las nuevas matrices de entrada y salida son, respectivamente:

$$B_n = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} \\ b_{7,1} & b_{7,2} & b_{7,3} \\ b_{8,1} & b_{8,2} & b_{8,3} \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} & c_{1,7} & c_{1,8} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} & c_{2,7} & c_{2,8} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} & c_{3,7} & c_{3,8} \end{bmatrix}$$

donde además recordemos que la ecuación de estados del sistema es:

$$\dot{z} = W^t * A * W * z + B_n * U \quad (4.13)$$

y la de salida:

$$Y = C * W * z = C_n * z \quad (4.14)$$

Sabiendo que el rango de las 4 (=4N) primeras filas de  $B_n$  y las 4 primeras columnas de  $C_n$  es 1 (=N), y que el de las 4 (=2P-2N) últimas filas de  $B_n$  y columnas de  $C_n$  es 2 (=P-N), podemos escribir las matrices como:

$$B_n = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ \chi \cdot b_{1,1} & \chi \cdot b_{1,2} & \chi \cdot b_{1,3} \\ \varphi \cdot b_{1,1} & \varphi \cdot b_{1,2} & \varphi \cdot b_{1,3} \\ \eta \cdot b_{1,1} & \eta \cdot b_{1,2} & \eta \cdot b_{1,3} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} \\ \mu \cdot b_{5,1} & \mu \cdot b_{5,2} & \mu \cdot b_{5,3} \\ \theta \cdot b_{6,1} & \theta \cdot b_{6,2} & \theta \cdot b_{6,3} \end{bmatrix}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \mathcal{G} \cdot c_{1,1} & \rho \cdot c_{1,1} & \sigma \cdot c_{1,1} & c_{1,5} & c_{1,6} & \nu \cdot c_{1,5} & \psi \cdot c_{1,6} \\ c_{2,1} & \mathcal{G} \cdot c_{2,1} & \rho \cdot c_{2,1} & \sigma \cdot c_{2,1} & c_{2,5} & c_{2,6} & \nu \cdot c_{2,5} & \psi \cdot c_{2,6} \\ c_{3,1} & \mathcal{G} \cdot c_{3,1} & \rho \cdot c_{3,1} & \sigma \cdot c_{3,1} & c_{3,5} & c_{3,6} & \nu \cdot c_{3,5} & \psi \cdot c_{3,6} \end{bmatrix}$$

Entonces, es posible hacer la asignación de variables de entrada y salida que mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} e_1 &= b_{1,1} \cdot u_1 + b_{1,2} \cdot u_2 + b_{1,3} \cdot u_3 \\ Entradas \rightarrow e_2 &= b_{5,1} \cdot u_1 + b_{5,2} \cdot u_2 + b_{5,3} \cdot u_3 \\ e_3 &= b_{6,1} \cdot u_1 + b_{6,2} \cdot u_2 + b_{6,3} \cdot u_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= z_1 + \mathcal{G} \cdot z_2 + \rho \cdot z_3 + \sigma \cdot z_4 \\
\text{Salidas} \rightarrow s_2 &= z_5 + \nu \cdot z_7 \\
s_3 &= z_6 + \psi \cdot z_8
\end{aligned} \tag{4.16}$$

siendo  $(z_1, z_2, \dots, z_8)$  las componentes del vector de estados  $z$  del sistema tras el cambio de base y  $(u_1, u_2, u_3)$  las del vector de entradas  $U$  de la planta en (4.13).

En función de las nuevas entradas y salidas podemos escribir las ecuaciones (4.13) y (4.14) como:

$$\dot{z} = W^t * A * W * z + B_d * E \tag{4.17}$$

$$S = C * W * z = C_d * z \tag{4.18}$$

siendo:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

de lo que se obtiene que:

$$B_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix} \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{G} & \rho & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \psi \end{bmatrix}$$

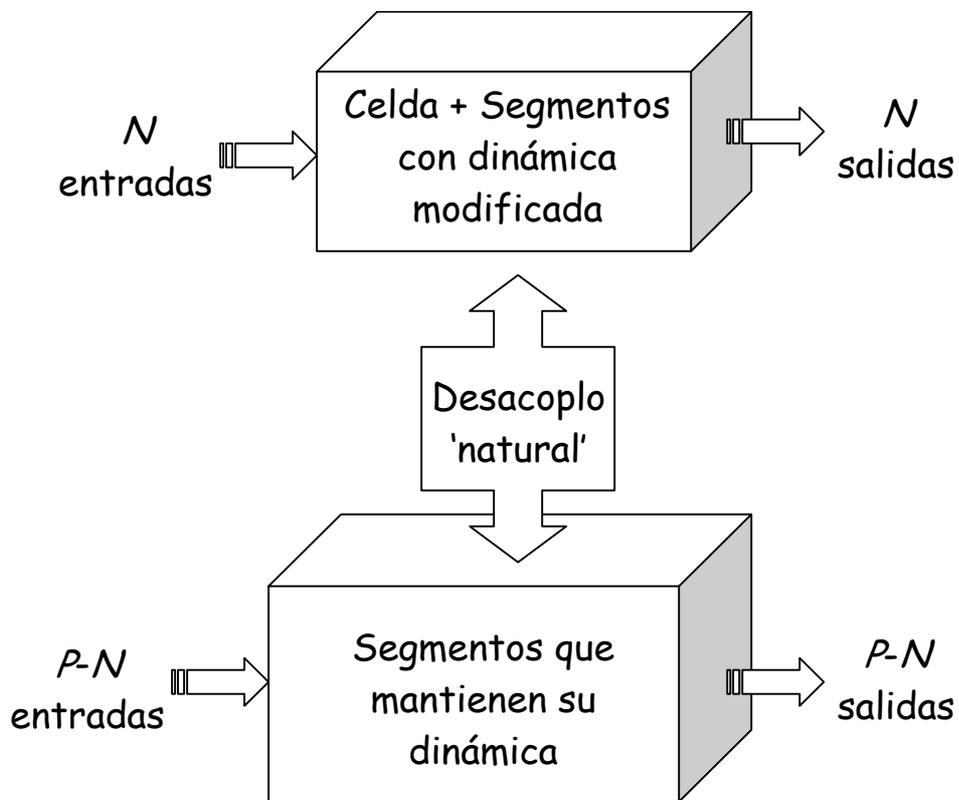
Aunque en un caso general la caja que comprende las filas de la 5 a la 8 (en general, de la  $4N+1$  a la  $2N+2P$ ) y las columnas 2 y 3 (en general, de la  $N+1$  a la  $P$ ) de la matriz  $B_d$  podría tener todos sus elementos distintos de cero (y lo mismo respecto a la matriz  $C_d$  pero intercambiando filas y columnas), lo que sí es cierto es que la entrada  $e_1$  resulta estar desacoplada con  $e_2$  y  $e_3$ . Del mismo modo, la salida  $s_1$  no se acopla con  $s_2$  y  $s_3$ . La relación entre  $(e_1, e_2, e_3)$  y  $(u_1, u_2, u_3)$  es la mostrada en (4.15), mientras que, a partir de (4.16), encontramos fácilmente que las salidas  $(s_1, s_2, s_3)$  se relacionan con  $(y_1, y_2, y_3)$  a través de las expresiones siguientes:

$$y_1 = c_{1,1} \cdot s_1 + c_{1,5} \cdot s_2 + c_{1,6} \cdot s_3$$

$$y_2 = c_{2,1} \cdot s_1 + c_{2,5} \cdot s_2 + c_{2,6} \cdot s_3$$

$$y_3 = c_{3,1} \cdot s_1 + c_{3,5} \cdot s_2 + c_{3,6} \cdot s_3$$

A modo de conclusión, digamos que el sistema presenta un desacoplo ‘natural’ entre las entradas y salidas de los dos subsistemas en los que hemos descompuesto el espejo primario del GTC, asociados a los subespacios vectoriales  $W_{\lambda_A}$  y  $W_{\lambda \neq \lambda_A}$ , lo que gráficamente expresamos de la siguiente manera:



### **IV.3. APLICACIÓN DE ESTOS RESULTADOS A LA MATRIZ DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GRAN TELESCOPIO CANARIAS**

Acabamos de presentar una serie de resultados que, aplicados al modelo propuesto para el espejo primario del Gran Telescopio Canarias, nos permiten diseñar un método para el desacoplo de su dinámica, con todas las implicaciones que esto conlleva desde el punto de vista del control del sistema.

Sin embargo, para poder aplicarlos tal y como se han enunciado es preciso realizar algunas transformaciones en el modelo del sistema que presentamos en el capítulo II. Recordemos que en él consideramos el sistema compuesto por tres elementos diferentes:

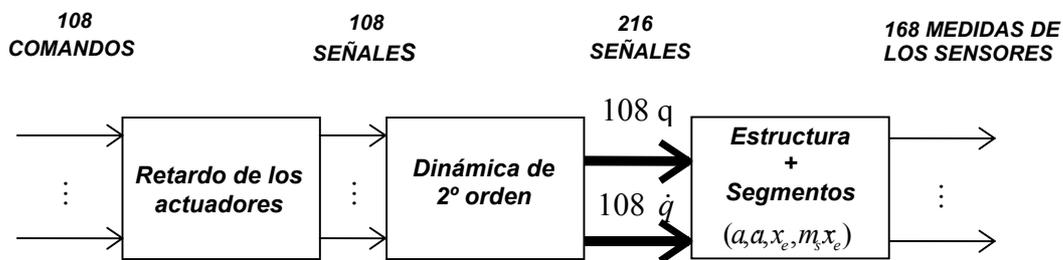
- La estructura o celda
- Los segmentos
- Los actuadores

Estos últimos, caracterizados desde el punto de vista dinámico por una frecuencia natural, un cierto coeficiente de amortiguamiento y un retardo, contribuyen, cada uno de ellos, con 4 estados a la representación interna del sistema. Sin embargo, el desacoplo que nos interesa corregir con el método que proponemos en este capítulo es el que se produce entre los distintos segmentos del espejo, y también entre los actuadores de un mismo segmento, a través de la estructura que los soporta. De este modo, podemos prescindir de la dinámica propia de los actuadores y trabajar, por tanto, con un sistema de  $2N+2P$  estados, siendo:

$N$ : número de modos de la celda (entre 1 y 30).

$P$ : número de actuadores (entre 3 y 108), al que impondremos que sea múltiplo de 3 para tener un número entero de segmentos.

Si consideramos el espejo con una estructura que caracterizamos dinámicamente con 30 modos y todos los segmentos (36), es decir,  $N=30$  y  $P=108$ , el diagrama de bloques del sistema en lazo abierto es el que se muestra en la figura 4.1.



**Figura 4.1:** Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema con las variables de estado originales.

El objetivo del desacoplo es descomponer la planta en una serie de subsistemas independientes los unos de los otros, con un número de entradas y salidas tan pequeño como sea posible. En el caso particular en el que describamos la dinámica de la estructura con un único modo, todos estos subsistemas serán SISO (una única entrada y una única salida). En un caso general, tendremos un subsistema con  $N$  entradas y  $N$  salidas y  $(P-N)$  subsistemas SISO. En ambos casos, es importante que la planta tenga, previo al desacoplo, igual número de entradas que de salidas. Tal y como se observa en la figura 4.1, el ‘espejo’ (considerando como tal al conjunto celda+segmentos) tiene 216 señales a la entrada y 168 salidas. Pasar de las 216 a 168 señales a la entrada o de las 168 salidas a 216 no es sencillo. Sin embargo, es posible conseguir mediante un cambio en las variables de estado y una transformación geométrica, que el sistema tenga 108 entradas y 108 salidas.

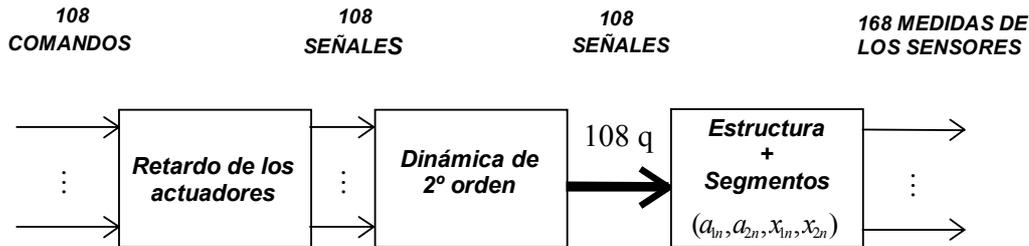
#### ***i) Paso de las 168 salidas a 108***

El paso de las 168 mediciones realizadas por los sensores a las 108 posiciones relativas medidas desde los puntos de apoyo de los actuadores con los segmentos hasta la estructura es inmediato. Para ello basta con hacer uso de la transformación geométrica consistente en las relaciones trigonométricas entre ambos conjuntos de variables. En este sentido, es importante resaltar el hecho de que tanto las medidas de los sensores como estas nuevas magnitudes en las que se transforman dan cuenta de la posición relativa de unos segmentos con respecto a los adyacentes. Esto significa que, en definitiva, miden el grado de alineamiento de la superficie del espejo con respecto a un plano imaginario al que se puede ajustar la posición de los segmentos empleando, por ejemplo, un ajuste por mínimos cuadrados. Es importante poner de manifiesto que, en ningún caso, esta información da cuenta de los 3 grados de libertad del sólido-rígido. Dicho de otra manera, a través de ella no podremos conocer jamás la posición absoluta de los segmentos respecto a una referencia fija. De cualquier forma, y dado que nuestro objetivo con el control del espejo consiste únicamente en garantizar el alineamiento de los segmentos y no llevarlos a ninguna posición determinada, la información de la que disponemos resulta suficiente.

#### ***ii) Paso de las 216 señales a la entrada a 108***

Acabamos de ver que reducir el número de salidas del ‘espejo’ de 168 a 108 es posible mediante el uso de simples relaciones geométricas. En el caso de las entradas,

pasar de las 216 que se muestran en la figura 4.1 a 108 implica llevar a cabo un cambio en los estados de la representación interna del sistema. Este cambio consiste en pasar de los estados originales del ‘espejo’, es decir,  $\{a, \dot{a}, x_e, m_s \dot{x}_e\}$ , a unos nuevos estados  $\{a_{1n}, a_{2n}, x_{1n}, x_{2n}\}$ , de forma que el diagrama de bloques del sistema en lazo abierto con estas nuevas variables queda como sigue:



**Figura 4.2:** Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema con las nuevas variables de estado.

Como se puede observar en la figura, con el cambio de variables realizado hemos conseguido nuestro objetivo de que el ‘espejo’ tenga únicamente 108 entradas, en lugar de las 216 de la representación original. Los nuevos estados se obtienen, a partir de los iniciales, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 a_{1n} &= a \\
 a_{2n} &= \int [(-W^2 - V^T K_s V + \frac{c_s^2}{m_s} V^T V)a + (V^T K_s - \frac{c_s^2}{m_s} V^T)x_e + \\
 &\quad + \frac{c_s}{m_s} V^T x_{2n} + (\frac{c_s^2}{m_s} V^T - V^T K_s)q]dt \\
 x_{1n} &= x_e \\
 x_{2n} &= \int (K_s V a - K_s x_e + K_s q)dt
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Veamos a continuación cómo llegamos a estas expresiones. Para ello, partamos de la ecuación de evolución del estado del sistema ‘celda+segmentos’, que obtenemos directamente a partir de la representación interna del sistema completo, que aparece en el capítulo II. Ésta es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a \\ \dot{a} \\ x_e \\ m_s \dot{x}_e \end{bmatrix} = A * \begin{bmatrix} a \\ \dot{a} \\ x_e \\ m_s \dot{x}_e \end{bmatrix} + B * \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{30 \times 1} \\ 0_{30 \times 1} \\ 0_{108 \times 1} \\ P \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{30 \times 30} & I_{30 \times 30} & 0_{30 \times 108} & 0_{30 \times 108} \\ -W^2 - V^T k_s V & -C - c_s V^T V & V^T k_s & \frac{c_s}{m_s} V^T \\ 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 30} & 0_{108 \times 108} & \frac{1}{m_s} I_{108 \times 108} \\ k_s V & c_s V & -k_s & -\frac{c_s}{m_s} I_{108 \times 108} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{30 \times 108} & 0_{30 \times 108} \\ -V^T k_s & -c_s V^T \\ 0_{108 \times 108} & 0_{108 \times 108} \\ k_s & c_s I_{108 \times 108} \end{bmatrix}$$

A partir de (4.20) podemos escribir las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \dot{a} = \ddot{a} = & (-W^2 - V^T k_s V) a - (C + c_s V^T V) \dot{a} + V^T k_s x_e + \\ & + c_s V^T \dot{x}_e - V^T k_s q - c_s V^T \dot{q} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dt} (m_s \dot{x}_e) = m_s \ddot{x}_e = k_s V a + c_s V \dot{a} - k_s x_e - c_s I_{108 \times 108} \dot{x}_e + k_s q + c_s I_{108 \times 108} \dot{q} \quad (4.22)$$

Si hallamos la transformada de Laplace de (4.21) y (4.22), encontramos las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} s^2 a(s) = & (-W^2 - V^T k_s V) a(s) - (C + c_s V^T V) s a(s) + V^T k_s x_e(s) + c_s V^T s x_e(s) - \\ & - V^T k_s q(s) - c_s V^T s q(s) \end{aligned}$$

$$m_s s^2 x_e(s) = k_s V a(s) + c_s V s a(s) - k_s x_e(s) - c_s I_{108 \times 108} s x_e(s) + k_s q(s) + c_s I_{108 \times 108} s q(s)$$

De estas ecuaciones despejamos  $sa(s)$  y  $m_s s x_e(s)$ , respectivamente, y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
sa(s) &= \frac{(-W^2 - V^T k_s V)}{s} a(s) - (C + c_s V^T V) a(s) + V^T \frac{k_s}{s} x_e(s) + c_s V^T x_e(s) - \\
&\quad - V^T \frac{k_s}{s} q(s) - c_s V^T q(s) \\
m_s s x_e(s) &= \frac{k_s}{s} V a(s) + c_s V a(s) - \frac{k_s}{s} x_e(s) - c_s I_{108 \times 108} x_e(s) + \frac{k_s}{s} q(s) + c_s I_{108 \times 108} q(s)
\end{aligned}$$

Podemos describir estas ecuaciones reorganizando los términos como sigue:

$$\begin{aligned}
sa(s) &= -(C + c_s V^T V) a(s) + \frac{1}{s} [(-W^2 - V^T k_s V) a(s) + V^T k_s x_e(s) + c_s V^T s x_e(s) - V^T k_s q(s)] - \\
&\quad - c_s V^T q(s) \\
m_s s x_e(s) &= c_s V a(s) - c_s I_{108 \times 108} x_e(s) + \frac{1}{s} [k_s V a(s) - k_s x_e(s) + k_s q(s)] + c_s I_{108 \times 108} q(s)
\end{aligned}$$

Por último, las transformamos de nuevo al dominio temporal, resultando lo siguiente:

$$\dot{a} = -(C + c_s V^T V) a + \int [(-W^2 - V^T k_s V) a + V^T k_s x_e + c_s V^T \dot{x}_e - V^T k_s q] dt - c_s V^T q \quad (4.23)$$

$$m_s \dot{x}_e = c_s V a - c_s I_{108 \times 108} x_e + \int [k_s V a - k_s x_e + k_s q] dt + c_s I_{108 \times 108} q \quad (4.24)$$

A partir de (4.23) y (4.24) podemos llevar a cabo la siguiente identificación de términos:

$$a_{2n} = \int [(-W^2 - V^T k_s V) a + V^T k_s x_e + c_s V^T \dot{x}_e - V^T k_s q] dt \quad (4.25)$$

$$x_{2n} = \int [k_s V a - k_s x_e + k_s q] dt \quad (4.26)$$

Derivando (4.25) y (4.26) respecto al tiempo y sustituyendo en la primera  $\dot{x}_e$  según (4.24), llegamos a las ecuaciones (4.19), que nos permiten obtener las nuevas variables de estado en función de las originales.

Considerando los 108 variables  $q$  como las únicas entradas a este nuevo sistema, obtenemos una representación alternativa de nuestro modelo, que es la que mostramos a continuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ x_{1n} \\ x_{2n} \end{bmatrix} = \hat{A} * \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ x_{1n} \\ x_{2n} \end{bmatrix} + \hat{B} * q + \begin{bmatrix} 0_{30 \times 1} \\ 0_{30 \times 1} \\ 0_{108 \times 1} \\ P \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

siendo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -C - c_s V^T V & I_{30 \times 30} & 0_{30 \times 108} & 0_{30 \times 108} \\ (-W^2 - V^T k_s V + \frac{c_s^2}{m_s} V^T V) & 0_{30 \times 30} & V^T k_s - \frac{c_s^2}{m_s} V^T & \frac{c_s}{m_s} V^T \\ \frac{c_s}{m_s} V & 0_{108 \times 30} & -\frac{c_s}{m_s} I_{108 \times 108} & \frac{1}{m_s} I_{108 \times 108} \\ k_s V & 0_{108 \times 30} & -k_s & 0_{108 \times 108} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -c_s V^T \\ \frac{c_s^2}{m_s} V^T - V^T k_s \\ \frac{c_s}{m_s} I_{108 \times 108} \\ k_s \end{bmatrix}$$

Nótese que esta transformación no es la única posible que nos permite lograr que el sistema tenga 108 entradas. De hecho, los resultados que mostramos a continuación para la representación concreta que acabamos de presentar serían igualmente válidos para cualquiera de las transformaciones elegidas. Si comparamos la matriz  $\hat{A}$  en (4.27) obtenida tras el cambio de variables de estado del sistema con la matriz  $A$  de la sección IV.2.2, vemos inmediatamente que  $\hat{A}$  no tiene la forma que hemos impuesto para demostrar los resultados presentados en dicha sección. Esta forma corresponde a una matriz compuesta por dos cajas de dimensiones  $2N$  y  $2P$  en la diagonal principal, y elementos de acoplamiento entre ellas. Para lograr que  $\hat{A}$  tenga la forma deseada es suficiente con diagonalizar las dos cajas de la diagonal principal. El procedimiento a seguir en el caso de considerar  $N$  modos en la estructura y  $P$  actuadores es el siguiente:

- i) a partir de la matriz  $\hat{A}$ , construimos otra matriz, que llamaremos  $\tilde{A}$ , que contiene únicamente las dos cajas en la diagonal principal, siendo cero todos los términos de acoplamiento entre cajas,

- ii) diagonalizamos la matriz que acabamos de construir,  $\tilde{A}$ , calculando la matriz de vectores propios columna  $\tilde{v}$ , tal que:

$$\text{inv}(\tilde{v}) * \tilde{A} * \tilde{v} = \Lambda(\tilde{A})$$

donde  $\text{inv}(\tilde{v})$  denota la inversa de la matriz de vectores propios columna y  $\Lambda(\tilde{A})$  una matriz diagonal, en cuya diagonal principal aparecen los valores propios de  $\tilde{A}$ ,

- iii) aplicamos a la matriz  $\hat{A}$  la transformación de semejanza siguiente:

$$\hat{A} = \text{inv}(\tilde{v}) * \hat{A} * \tilde{v}$$

resultando entonces la matriz  $\hat{A}$ , que tiene la forma adecuada para poder aplicar los resultados presentados en la sección IV.2.2.

Una vez llegados a este punto, estamos ya en condiciones de abordar el desacoplo del sistema.

## CAPÍTULO V

# DESACOPLO DE LA DINÁMICA DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GRAN TELESCOPIO CANARIAS

A lo largo del capítulo anterior ya comentamos cuál es el objetivo del desacoplo de la dinámica del espejo primario del Gran Telescopio Canarias [Acosta, 2000], [Sigut, 2002]. Sin embargo, no hemos hablado aún de la metodología a seguir para llevar a cabo este proceso. Ésta consiste, básicamente, en realizar una recombinación de los vectores propios del subespacio asociado a los segmentos cuya dinámica no se ve alterada por el acoplamiento con los modos de la estructura que soporta al espejo. Para poder llevar a cabo esta recombinación de autovectores es preciso que se cumplan dos condiciones:

- 1) que los vectores propios que se recombinan correspondan todos al mismo autovalor  $\lambda_A$ . Sólo así los autovectores resultantes estarán también asociados al mismo valor propio y, por tanto, aseguramos que la dinámica del sistema no se ve modificada. En el sistema que nos ocupa, todos los vectores propios correspondientes a los segmentos que no se acoplan a través de la estructura cumplen esta condición,
- 2) que los dos subespacios vectoriales, el correspondiente a la estructura y los segmentos cuya dinámica ésta modifica y el asociado a los segmentos que mantienen

su propia dinámica sean ortogonales entre sí. Denotando a sendos subespacios como  $W_{\lambda, \lambda \neq \lambda_A}$  y  $W_{\lambda_A}$ , respectivamente, la ortogonalidad de sus vectores propios se demuestra en las proposiciones 3 y 4 de la sección IV.2.2. Este resultado es de vital importancia para llevar a cabo el proceso de desacoplo que describiremos a continuación. De hecho, si la ortogonalidad de los subespacios  $W_{\lambda, \lambda \neq \lambda_A}$  y  $W_{\lambda_A}$  no estuviera garantizada por los resultados anteriormente mencionados, podría ocurrir que al recombinar los vectores propios del subespacio  $W_{\lambda_A}$  obtuviéramos un vector del subespacio  $W_{\lambda, \lambda \neq \lambda_A}$ , con lo que ya no tendríamos una base del sistema.

### V.1. DESACOPLO DEL SISTEMA

Acabamos de justificar que podemos recombinar los autovectores del subespacio  $W_{\lambda_A}$  garantizando, por una parte, que la dinámica del espejo no se ve alterada y, por la otra, que se sigue manteniendo la ortogonalidad de los subespacios  $W_{\lambda, \lambda \neq \lambda_A}$  y  $W_{\lambda_A}$ . Entonces, el desacoplo del sistema consistirá en encontrar los coeficientes, en general números complejos, de las combinaciones lineales de los autovectores originales para obtener los nuevos vectores, en función de los cuales la dinámica del espejo se desacopla.

Si calculamos los autovalores de la matriz  $\hat{A}$  en la expresión (4.27) del capítulo IV, comprobamos que, debido a los elementos de acoplamiento entre las dos cajas de dimensiones  $2N \times 2N$  y  $2P \times 2P$  de la diagonal principal, se tiene que:

$$\dim_C(W_{\lambda_A}) = P - N \quad \dim_C(W_{\bar{\lambda}_A}) = P - N$$

lo cual está de acuerdo con lo demostrado en la sección IV.2.2. Además, tenemos que:

$$\dim_C(W_{\lambda, \lambda \neq \lambda_A}) = 2N \quad \dim_C(W_{\bar{\lambda}, \bar{\lambda} \neq \bar{\lambda}_A}) = 2N$$

con lo que se completa la dimensión del espacio vectorial:  $2(P - N) + 2(2N) = 2N + 2P$ .

Si llamamos  $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{P-N}\}$  a la base de vectores propios columna del subespacio  $W_{\lambda_A}$  en la representación original y  $\{\bar{w}n_1, \bar{w}n_2, \dots, \bar{w}n_{P-N}\}$  a los vectores propios tras el desacoplo, siendo:

$$\bar{w}n_k = \alpha_k \cdot \bar{w}_1 + \xi_k \cdot \bar{w}_2 + \dots + \tau_k \cdot \bar{w}_{P-N}, \quad k = 1, 2, \dots, P - N$$

se trata entonces de encontrar los coeficientes  $(\alpha_k, \xi_k, \dots, \tau_k) \in C$  adecuados que desacoplen el sistema.

Si buscamos una base de vectores propios del subespacio  $W_{\lambda_A}$ , debemos imponer a estos coeficientes que cumplan la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \xi_1 & \cdots & \tau_1 \\ \alpha_2 & \xi_2 & \cdots & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{P-N} & \xi_{P-N} & \cdots & \tau_{P-N} \end{vmatrix} \neq 0$$

es decir, los coeficientes deben ser tales que generen combinaciones lineales de  $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_{P-N}\} \in E_{\lambda_A}^C$  linealmente independientes.

Es importante notar que una vez obtenidos los vectores  $\{\bar{w}n_1, \bar{w}n_2, \dots, \bar{w}n_{P-N}\} \in W_{\lambda_A}$ , los vectores propios del subespacio  $W_{\bar{\lambda}_A}$  se obtienen como  $\{\bar{\bar{w}}n_1, \bar{\bar{w}}n_2, \dots, \bar{\bar{w}}n_{P-N}\}$ .

Como se observa en la figura 5.1, diremos que hemos desacoplado el sistema cuando encontremos unos vectores propios en función de los cuales el sistema MIMO de  $2N+2P$  estados con  $P$  entradas y  $P$  salidas interconectadas se pueda descomponer en los subsistemas siguientes:

- Un subsistema con  $4N$  estados correspondientes a los  $N$  modos de la estructura y los  $N$  actuadores que se acoplan con ella. Se trata, como ya justificamos en el capítulo IV, de un sistema con  $N$  entradas y  $N$  salidas.
- $P-N$  subsistemas con 2 estados, 1 salida y 1 entrada, correspondientes cada uno de ellos a los actuadores de los segmentos cuya dinámica no se modifica por el efecto de acoplamiento con la estructura. Es importante señalar que, en el caso particular de caracterizar la dinámica de la estructura con un único modo y teniendo en cuenta la figura 2.8 (ver capítulo II), en la que se muestra una representación de los valores singulares de la planta en el dominio de las frecuencias y se observa la preponderancia del modo de 17Hz frente al resto, descompondríamos el sistema MIMO de  $2N+2P$  estados con  $P$  entradas y  $P$  salidas interconectadas en un conjunto de  $P$  sistemas con 2 estados, 1 salida y 1 entrada.

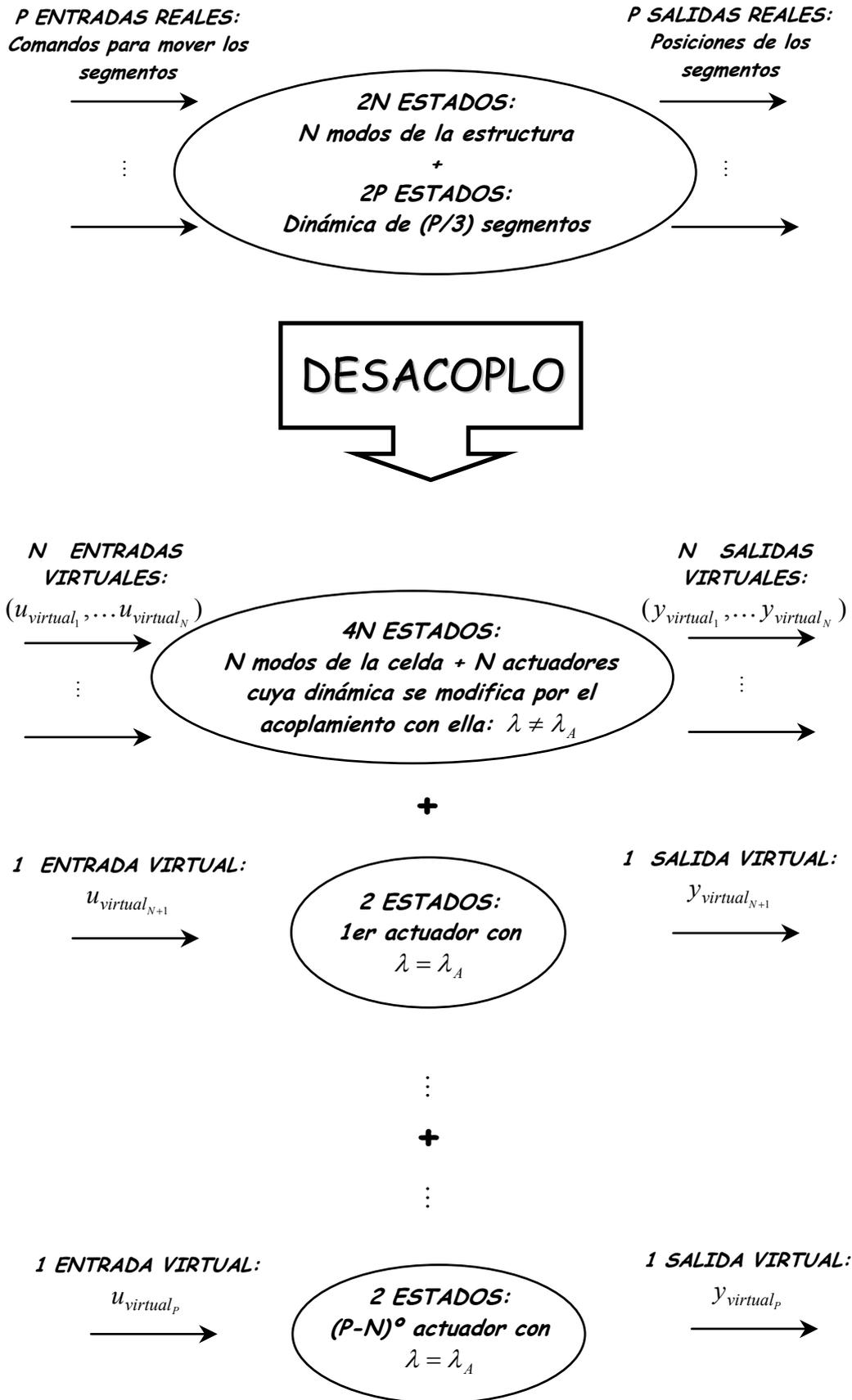


Figura 5.1: Descomposición del sistema tras el desacoplo.

Nótese que, si bien en la representación original tanto las entradas como las salidas del sistema se corresponden con las magnitudes físicas de entrada y salida de la planta, esto es:

- las entradas son los comandos que se aplican a los actuadores de los segmentos que, debido al hecho de que a efectos del desacoplo prescindimos de la dinámica propia de los actuadores (como ya comentamos, estamos suponiendo que éstos son dispositivos ideales con función de transferencia igual a la unidad), una vez calculados se aplican de forma instantánea a los segmentos, y
- las salidas se corresponden con la distancia desde los segmentos hasta la estructura, medida en los puntos de apoyo de éstos con los actuadores,

una vez que el sistema se ha desacoplado, las entradas y salidas de los subsistemas en los que éste se descompone pierden este significado. De hecho, puesto que, como veremos, se obtienen como combinaciones de las entradas y salidas reales, no las podemos hacer corresponder con las magnitudes anteriores. Es por esto por lo que, tanto en la figura 5.1 como en lo sucesivo nos referiremos a ellas como entradas y salidas **virtuales**, para diferenciarlas así de las entradas y salidas **reales**.

### V.1.1. Metodología del desacoplo

El proceso de desacoplo se lleva a cabo en las siguientes fases:

1) Partimos de la representación original del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A * X + B * U_{real} \\ Y_{real} &= C * X\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $A$  y  $B$  son las matrices en la expresión (4.27) del capítulo IV,  $U_{real} = \{u_{real_1}, \dots, u_{real_p}\}$  e  $Y_{real} = \{y_{real_1}, \dots, y_{real_p}\}$ . Teniendo en cuenta que tomamos como salidas del sistema las posiciones de los segmentos con respecto a la estructura medidas en los apoyos de los actuadores,  $C$  es la matriz de  $P$  filas y  $2N+2P$  columnas que mostramos a continuación:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1_{1,2N+1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1_{2,2N+2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1_{P,2N+P} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

donde hemos usado los subíndices con el fin de indicar las posiciones que ocupan los elementos no nulos de esta matriz.

Esto es posible ya que, aunque recordemos que hemos realizado un cambio de las variables de estado originales,  $\{a, \dot{a}, x_e, m_s \dot{x}_e\}$ , en otro conjunto de variables,  $\{a_{1n}, a_{2n}, x_{1n}, x_{2n}\}$ , tenemos que, como ya vimos,  $x_{1n} = x_e$ . Puesto que éstas coinciden con las salidas reales de la planta, aun trabajando con las nuevas variables de estado, la matriz  $C$  sigue manteniendo esta forma.

Obtenemos entonces la base de vectores propios columna del sistema (5.1), que componen el subespacio vectorial que denotamos por  $E_\lambda^C$ ,  $\lambda \in C$ , formado por vectores  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2N+2P})$  de  $C^{2N+2P}$ .

2) A partir de la base  $E_\lambda^C \subset C^{2N+2P}$ , nos quedamos con el subespacio que llamamos  $E_{\lambda_A}^C \subset C^{P-N}$ , compuesto por los  $P-N$  vectores propios columna correspondientes al valor propio  $\lambda_A$ . Con el objeto de mantener la notación empleada hasta el momento, denotamos a estos vectores como  $\vec{w}_k = (w_1, \dots, w_{2N+2P}) \in E_{\lambda_A}^C$ ,  $k = 1, 2, \dots, P-N$ .

3) Aplicando las condiciones para el desacoplo del sistema, recombinaos los vectores  $\vec{w}_k = (w_1, \dots, w_{2N+2P}) \in E_{\lambda_A}^C$  para obtener unos nuevos vectores propios  $\vec{w}n_k = (wn_1, \dots, wn_{2N+2P}) \in E_{\lambda_A}^C$ .

4) Una vez obtenidos estos nuevos vectores, construimos la base completa de  $2N+2P$  vectores propios del sistema de  $2N+2P$  estados como sigue:

$$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{4N}\} \in (E_\lambda^C \cup E_{\bar{\lambda}}^C)_{\lambda \neq \lambda_A} \cup \{\vec{w}n_1, \dots, \vec{w}n_{P-N}\} \in E_{\lambda_A}^C \cup \{\vec{\bar{w}}n_1, \dots, \vec{\bar{w}}n_{P-N}\} \in E_{\bar{\lambda}_A}^C$$

Por simplicidad, adoptaremos la siguiente notación para los vectores de esta nueva base:

$$\tilde{v}_k = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{2N+2P}) \in E_\lambda^C \subset C^{2N+2P}, \text{ con } k = 1, 2, \dots, 2N + 2P$$

5) Aunque estamos trabajando en el cuerpo de los números complejos, el sistema se modela (independientemente de la representación que empleemos) con matrices de estado reales. Así pues, obtenemos la forma real equivalente de  $\{\tilde{v}_k\}_{k=1, \dots, 2N+2P} \in E_\lambda^C$ , que llamamos  $V \equiv \{\tilde{v}_k\}_{k=1, \dots, 2N+2P}$ , con  $V \subset \mathfrak{R}^{2N+2P}$ .

En función de esta base de vectores reales, obtenemos una representación interna de la planta tal que:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_r * z + B_n * U_{real} \\ Y_{real} &= C_n * z \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde:

$A_r = V^{-1} * A * V$ , es una matriz real diagonal por cajas de  $2 \times 2$  elementos.

$$z = V^{-1} * X$$

$$B_n = V^{-1} * B$$

$$C_n = C * V$$

y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $X$  son, respectivamente, las matrices y el vector de estados del sistema en (5.1).

En el caso de trabajar con la forma compleja, estas relaciones siguen siendo igualmente válidas, como corresponde a toda transformación de semejanza. La diferencia es que ello daría lugar a un vector y unas matrices de estado complejas.

Tanto  $B_n$  como  $C_n$  son matrices reales de dimensión  $(2N+2P) \times P$  y  $P \times (2N+2P)$ , respectivamente, con todos sus elementos distintos de cero.

6) A partir de los elementos de  $B_n$  y  $C_n$  podemos construir, respectivamente, otras dos matrices, esta vez cuadradas de  $P \times P$  elementos reales, que llamamos  $T_u$  y  $T_y$  (donde los subíndices  $u$  e  $y$  corresponden a la notación habitualmente empleada para las entradas y salidas, respectivamente).

Estas matrices son tales que:

$$B_v = B_n * T_u^{-1} \quad (5.3)$$

y

$$C_v = T_y^{-1} * C_n \quad (5.4)$$

siendo  $B_n$  y  $C_n$  las matrices que aparecen en (5.2).

Haciendo uso de (5.3) y (5.4) podemos expresar el sistema en (5.2) como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_r * z + B_v * U_{virtual} \\ Y_{virtual} &= C_v * z \end{aligned} \quad (5.5)$$

La ventaja de esta representación del sistema, con respecto a la de (5.2) es la forma particular de las matrices  $B_v$  y  $C_v$  resultantes, que mostramos a continuación:

$$B_v = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{4N,1} & m_{4N,2} & \cdots & m_{4N,N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{4N+1,N+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{4N+2,N+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m_{4N+3,N+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m_{4N+4,N+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{2N+2P-1,P} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{2N+2P,P} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

y

$$C_v = \begin{bmatrix}
 r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,4N} & 0 & 0 & 0 \\
 r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,4N} & 0 & 0 & 0 \\
 \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 r_{N,1} & r_{N,2} & \cdots & r_{N,4N} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{N+1,4N+1} & r_{N+1,4N+2} & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r_{N+2,4N+3} \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & r_{P,2N+2P-1} & r_{P,2N+2P}
 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

siendo los  $m_{i,j}$  y los  $r_{p,q}$  elementos reales distintos de cero.

A la vista de (5.5) y de  $B_v$  y  $C_v$ , tenemos que cada una de las entradas virtuales afecta únicamente a uno de los subsistemas en los que la planta se descompone tras el desacoplo (ver figura 5.1). A su vez, cada salida virtual corresponde, igualmente, a uno solo de estos subsistemas. Podemos entonces concluir que, **respecto a las entradas y salidas virtuales, el sistema está desacoplado.**

Sustituyendo ahora (5.3) y (5.4) en (5.5), tenemos que:

$$\dot{z} = A_r * z + B_n * T_u^{-1} * U_{virtual} \quad (5.8)$$

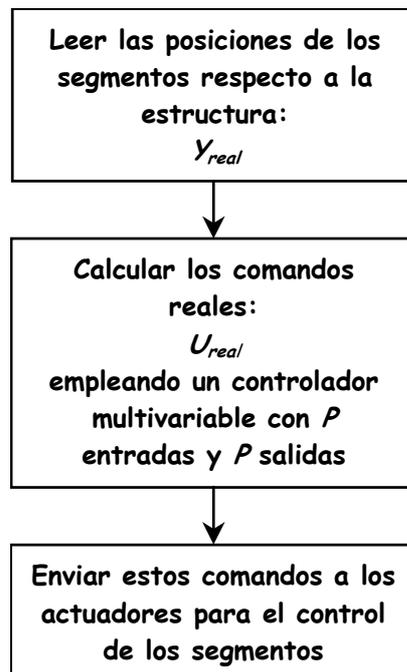
$$Y_{virtual} = T_y^{-1} * C_n * z$$

y comparando (5.8) con (5.2), llegamos a las siguientes expresiones:

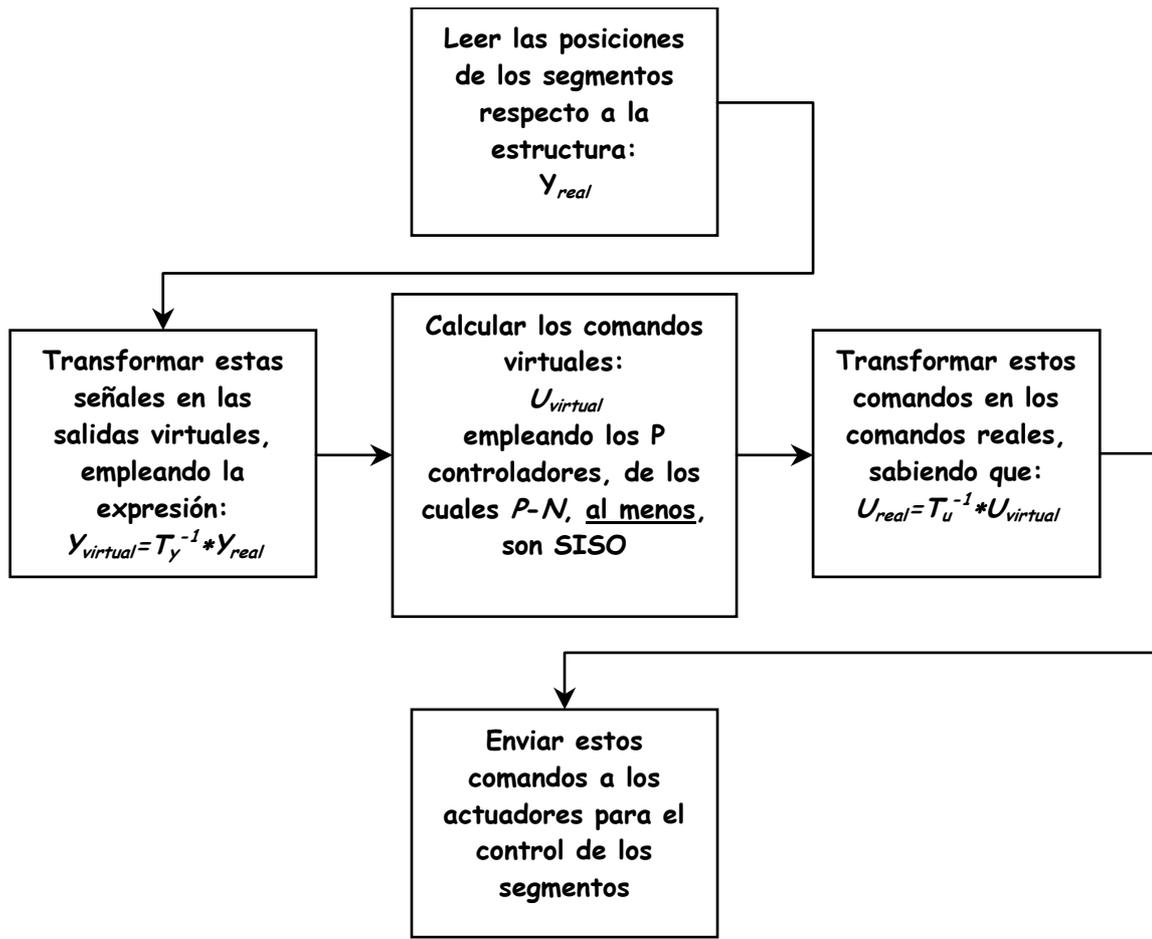
$$U_{real} = T_u^{-1} * U_{virtual}$$
$$Y_{virtual} = T_y^{-1} * Y_{real}$$
(5.9)

que relacionan las entradas y salidas reales y virtuales a través de las matrices cuadradas de  $P \times P$  elementos reales  $T_u$  y  $T_y$ .

Así, el control activo del espejo primario del Gran Telescopio Canarias, que previamente al desacoplo consistía en aplicar el algoritmo siguiente:



se convierte, tras el desacoplo, en:



**Figura 5.2:** Algoritmo de control del espejo primario del GTC tras el desacoplo.

Si bien ya hemos expuesto tanto el objetivo del desacoplo de la dinámica del espejo primario del GTC como la metodología que vamos a seguir para lograrlo, la forma de conseguirlo en la práctica no es evidente.

Sabemos que buscamos una nueva base de vectores propios  $\{\bar{v}n_1, \bar{v}n_2, \dots, \bar{v}n_{2N+2P}\}$  tales que propicien en el sistema la transformación mostrada en la figura 5.1, pero la cuestión que nos planteamos es...

¿Qué condiciones es necesario imponer al sistema para su desacoplo definiendo así el cambio de base apropiado?

En la siguiente sección pretendemos dar respuesta a esta pregunta.

## V.2. CONDICIONES PARA EL DESACOPLO DE LAS ENTRADAS Y SALIDAS DEL ESPEJO

Para encontrar las condiciones que debemos imponer al sistema de forma que obtengamos dos matrices  $T_u$  y  $T_y$ , que, a partir del conjunto inicial de entradas y salidas (reales) interconectadas nos permitan obtener otro conjunto de entradas y salidas (virtuales) desacopladas, procedemos de la siguiente manera:

### V.2.1. Equivalencia en el desacoplo de las entradas y salidas del sistema

En primer lugar expresamos los elementos de las matrices  $B_n$  o  $C_n$  en (5.2) en función de los elementos de  $B$  o  $C$  en (5.1) y de los vectores propios que componen la matriz  $V$  (que nos permiten obtener las matrices de estado en (5.2)) o su inversa, respectivamente.

Es importante llamar la atención sobre el hecho de que, según demostraremos a continuación, es suficiente imponer el desacoplo de las entradas del sistema para tener garantizado también el de las salidas, y viceversa.

Concretamente, veremos que a partir de las condiciones que imponemos para el desacoplo de las salidas del sistema, y dadas las particularidades del mismo, somos capaces de encontrar las condiciones que nos dan el desacoplo de las entradas.

Sabemos que teniendo la matriz de cambio de base  $V$  que desacopla el sistema, la matriz de salida en la nueva representación,  $C_n$ , se relaciona con la de la representación original,  $C$ , a través de la siguiente expresión:

$$C_n = C * V$$

Trasponiendo ésta tenemos que:

$$C_n^t = V^t * C^t \quad (5.10)$$

donde las columnas de  $V$  y, en consecuencia, las filas de  $V^t$ , son los vectores propios columna del sistema, es decir, pertenecen al subespacio  $E_{\lambda \neq \lambda_A}^C \cup E_{\lambda_A}^C \cup E_{\bar{\lambda} \neq \bar{\lambda}_A}^C \cup E_{\bar{\lambda}_A}^C$ .

Ya vimos en el capítulo anterior que las filas de la matriz  $V^{-1}$  son vectores propios fila del sistema y componen el subespacio  $E_{\lambda}^F$ , y que sólo en el caso de que la

matriz  $A$  sea simétrica, es decir,  $A^t = A$ , ambos subespacios coinciden. Es evidente que la matriz  $A$  definida en la sección IV.2.2 (ver capítulo IV), que determina la dinámica del espejo primario del Gran Telescopio Canarias, no es simétrica. Sin embargo, sí cumple la propiedad de que su traspuesta,  $A^t$ , es una matriz que mantiene la misma forma que  $A$ , con lo que podemos aplicarle los mismos resultados que a ésta. Esto significa que, en el caso particular que nos ocupa, los vectores propios columna de la matriz  $A$  también serán vectores propios columna de  $A^t$ .

Es más, puesto que siempre es posible ortogonalizar los vectores propios de la planta, podemos aplicar que para una matriz  $P$  cuyas filas o columnas son ortogonales entre sí se verifica la siguiente propiedad:

$$P^t = P^{-1}$$

con lo que podemos escribir (5.10) como:

$$C_n^t = V^{-1} * C^t \quad (5.11)$$

Por otra parte, tenemos que la matriz de entradas del sistema tras el cambio de base,  $B_n$ , viene dada, en función de la matriz en la representación original,  $B$ , como:

$$B_n = V^{-1} * B \quad (5.12)$$

siendo las filas de  $V^{-1}$  vectores propios fila del sistema, es decir, pertenecen al subespacio  $E_{\lambda \neq \lambda_A}^F \cup E_{\lambda_A}^F \cup E_{\bar{\lambda} \neq \bar{\lambda}_A}^F \cup E_{\bar{\lambda}_A}^F$ .

Acabamos de demostrar que los vectores propios fila del sistema son también vectores propios columna y viceversa. Por tanto, comparando (5.11) y (5.12) vemos que si la forma de la matriz  $C^t$  coincide con la de la matriz  $B$  de entradas del sistema para los elementos que corresponden a los segmentos, deberíamos ser capaces de encontrar las condiciones que garantizan el desacoplo de las entradas a partir de las condiciones que desacoplan las salidas, y viceversa.

Para verlo, trabajaremos con un modo para la estructura y un único segmento, es decir,  $N=1$  y  $P=3$ . La matriz de salida  $C$  en este caso es:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, consecuentemente:

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la matriz  $B$  de entradas del sistema es:

$$B = \begin{bmatrix} B(1,1) & B(1,2) & B(1,3) \\ B(2,1) & B(2,2) & B(2,3) \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Efectivamente vemos que, quedándonos con los elementos de  $B$  que corresponden al segmento (son las filas 3, 4, 5, 6, 7 y 8), y haciendo  $\beta = 0$ , la forma de esta matriz coincide con la de  $C^t$ . De hecho, puesto que al hacer el producto de matrices  $B_n = V^{-1} * B$ , el parámetro  $\delta$  afecta a los vectores propios fila asociados al autovalor  $\lambda_A$ , mientras que  $\beta$  afecta a los correspondientes a  $\bar{\lambda}_A$ , podemos concluir que el desacoplo de las entradas se consigue imponiendo las condiciones ya presentadas independientemente del valor de  $\beta$ . Así se justifica que a pesar de particularizar para  $\beta = 0$  no perdamos generalidad en el planteamiento del problema.

Si esto es cierto, planteemos las condiciones para el desacoplo de las salidas del sistema teniendo en cuenta que:

$$C_n = C * V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * [\bar{v}n_1 \quad \bar{v}n_2 \quad \cdots \quad \bar{v}n_8]$$

o, realizando el producto matricial:

$$C_n = \begin{bmatrix} vn_1(3) & vn_2(3) & vn_3(3) & \cdots & \cdots & \cdots & vn_7(3) & vn_8(3) \\ vn_1(4) & vn_2(4) & vn_3(4) & \cdots & \cdots & \cdots & vn_7(4) & vn_8(4) \\ vn_1(5) & vn_2(5) & vn_3(5) & \cdots & \cdots & \cdots & vn_7(5) & vn_8(5) \end{bmatrix}$$

A lo largo de este capítulo demostraremos que las condiciones que deben cumplir los elementos de esta matriz para que las salidas del subsistema correspondiente a los actuadores cuya dinámica no cambia por efecto del acoplamiento con la estructura (en este caso, siendo  $N=1$ , son los actuadores 2 y 3) estén desacopladas son:

$$\begin{aligned} 1) \frac{C_n(2,5)}{C_n(1,5)} &= \frac{C_n(2,6)}{C_n(1,6)} \\ 2) \frac{C_n(2,7)}{C_n(1,7)} &= \frac{C_n(2,8)}{C_n(1,8)} \\ 3) \frac{C_n(3,5)}{C_n(1,5)} &= \frac{C_n(3,6)}{C_n(1,6)} \\ 4) \frac{C_n(3,7)}{C_n(1,7)} &= \frac{C_n(3,8)}{C_n(1,8)} \end{aligned}$$

Estas relaciones, en el caso de considerar la matriz traspuesta,  $C_n^t$ , quedan como sigue:

$$\begin{aligned} 1) \frac{C_n^t(5,2)}{C_n^t(5,1)} &= \frac{C_n^t(6,2)}{C_n^t(6,1)} \\ 2) \frac{C_n^t(7,2)}{C_n^t(7,1)} &= \frac{C_n^t(8,2)}{C_n^t(8,1)} \\ 3) \frac{C_n^t(5,3)}{C_n^t(5,1)} &= \frac{C_n^t(6,3)}{C_n^t(6,1)} \\ 4) \frac{C_n^t(7,3)}{C_n^t(7,1)} &= \frac{C_n^t(8,3)}{C_n^t(8,1)} \end{aligned}$$

que podemos expresar de esta otra manera:

$$\begin{aligned} 1) \frac{C_n^t(6,1)}{C_n^t(5,1)} &= \frac{C_n^t(6,2)}{C_n^t(5,2)} \\ 2) \frac{C_n^t(8,1)}{C_n^t(7,1)} &= \frac{C_n^t(8,2)}{C_n^t(7,2)} \\ 3) \frac{C_n^t(6,1)}{C_n^t(5,1)} &= \frac{C_n^t(6,3)}{C_n^t(5,3)} \\ 4) \frac{C_n^t(8,1)}{C_n^t(7,1)} &= \frac{C_n^t(8,3)}{C_n^t(7,3)} \end{aligned}$$

y, al agruparlas convenientemente, nos permiten llegar a que:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{C_n^t(6,1)}{C_n^t(5,1)} = \frac{C_n^t(6,2)}{C_n^t(5,2)} \\ 3) \frac{C_n^t(6,1)}{C_n^t(5,1)} = \frac{C_n^t(6,3)}{C_n^t(5,3)} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{C_n^t(6,1)}{C_n^t(5,1)} = \frac{C_n^t(6,2)}{C_n^t(5,2)} = \frac{C_n^t(6,3)}{C_n^t(5,3)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \frac{C_n^t(8,1)}{C_n^t(7,1)} = \frac{C_n^t(8,2)}{C_n^t(7,2)} \\ 4) \frac{C_n^t(8,1)}{C_n^t(7,1)} = \frac{C_n^t(8,3)}{C_n^t(7,3)} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{C_n^t(8,1)}{C_n^t(7,1)} = \frac{C_n^t(8,2)}{C_n^t(7,2)} = \frac{C_n^t(8,3)}{C_n^t(7,3)}$$

que justamente son las condiciones que vimos que, según veremos, debemos imponer a las entradas del sistema (sustituyendo los elementos de  $C_n^t$  por los de  $B_n$ ) para tener el desacoplo de las mismas.

La equivalencia entre el desacoplo de las entradas y salidas de la planta queda por tanto probada. Así, tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} \text{Desacoplar} & & \text{Desacoplar} \\ \text{las salidas} & \Leftrightarrow & \text{las entradas} \end{array}$$

En realidad, sólo hemos demostrado la implicación de izquierda a derecha. Para probar la equivalencia deberíamos ver también que las condiciones que nos dan el desacoplo de las entradas nos permiten llegar a las que garantizan el de las salidas. Para ello únicamente tendríamos que llevar a cabo el mismo razonamiento que acabamos de presentar pero a la inversa.

A la vista de este resultado, y recordando las expresiones de las matrices  $B_n$  y  $C_n$  en (5.2) en función de la base de vectores propios que desacopla las entradas y salidas del sistema:  $B_n = V^{-1} * B$  y  $C_n = C * V$ , tenemos que la forma particularmente sencilla de la matriz  $C$  es la principal razón por la que resulta más sencillo imponer las condiciones para el desacoplo del espejo sobre las salidas del mismo que sobre las entradas.

### V.2.2. Condiciones que deben cumplir $B_n$ y $C_n$ para desacoplar el sistema

Supongamos que hemos obtenido ya la base de vectores propios (antes de pasar a la forma real equivalente)  $\tilde{v}_k = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{2N+2P}) \in E_\lambda^C \subset C^{2N+2P}$ , con  $k = 1, 2, \dots, 2N + 2P$ . Demostraremos a continuación que imponiendo a los elementos de la matriz  $C_n = C * V$  las condiciones adecuadas, podemos encontrar sendas matrices  $T_y$  y  $C_v$  en (5.4), ésta última con la forma mostrada en (5.7), tales que las salidas virtuales del sistema están desacopladas.

Si bien hasta este momento hemos optado por presentar los resultados de la forma más general posible, esto es, para un número  $N$  de modos de la estructura y un número  $P$  de actuadores, con la única restricción de que  $P > 2N$  y múltiplo de 3 (por tomar un número entero de segmentos), en este punto nos parece más oportuno particularizar para un único modo ( $N=1$ ), con el objeto de lograr la máxima claridad en la explicación de los resultados que siguen. En estas condiciones podemos enunciar la siguiente proposición:

**Proposición:** Supongamos que podemos expresar las  $P$  salidas reales del espejo en función de las  $P$  salidas virtuales de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{real_1} = y_{virtual_1} + y_{virtual_2} + \dots + y_{virtual_{p-1}} + y_{virtual_p} \\ y_{real_2} = \beta_1 y_{virtual_1} + \beta_2 y_{virtual_2} + \dots + \beta_{p-1} y_{virtual_{p-1}} + \beta_p y_{virtual_p} \\ \vdots \\ y_{real_{p-1}} = \gamma_1 y_{virtual_1} + \gamma_2 y_{virtual_2} + \dots + \gamma_{p-1} y_{virtual_{p-1}} + \gamma_p y_{virtual_p} \\ y_{real_p} = \delta_1 y_{virtual_1} + \delta_2 y_{virtual_2} + \dots + \delta_{p-1} y_{virtual_{p-1}} + \delta_p y_{virtual_p} \end{array} \right. \quad (5.13)$$

donde además se cumplen las relaciones siguientes:

$$Y_{real} = C_n * z$$

y, al mismo tiempo:

$$Y_{real} = T_y * Y_{virtual},$$

que es la relación obtenida en (5.13).

Supongamos que los elementos de  $C_n$  verifican las siguientes igualdades:

$$\beta_1 = \frac{C_n(2,1)}{C_n(1,1)} = \frac{C_n(2,2)}{C_n(1,2)} = \frac{C_n(2,3)}{C_n(1,3)} = \frac{C_n(2,4)}{C_n(1,4)}$$

⋮

$$\gamma_1 = \frac{C_n(P-1,1)}{C_n(1,1)} = \frac{C_n(P-1,2)}{C_n(1,2)} = \frac{C_n(P-1,3)}{C_n(1,3)} = \frac{C_n(P-1,4)}{C_n(1,4)}$$

$$\delta_1 = \frac{C_n(P,1)}{C_n(1,1)} = \frac{C_n(P,2)}{C_n(1,2)} = \frac{C_n(P,3)}{C_n(1,3)} = \frac{C_n(P,4)}{C_n(1,4)}$$

$$\beta_2 = \frac{C_n(2,5)}{C_n(1,5)} = \frac{C_n(2,6)}{C_n(1,6)}$$

⋮

$$\gamma_2 = \frac{C_n(P-1,5)}{C_n(1,5)} = \frac{C_n(P-1,6)}{C_n(1,6)}$$

$$\delta_2 = \frac{C_n(P,5)}{C_n(1,5)} = \frac{C_n(P,6)}{C_n(1,6)}$$

⋮

$$\beta_{P-1} = \frac{C_n(2,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} = \frac{C_n(2,2P)}{C_n(1,2P)}$$

⋮

$$\gamma_{P-1} = \frac{C_n(P-1,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} = \frac{C_n(P-1,2P)}{C_n(1,2P)}$$

$$\delta_{P-1} = \frac{C_n(P,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} = \frac{C_n(P,2P)}{C_n(1,2P)}$$

⋮

$$\beta_P = \frac{C_n(2,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} = \frac{C_n(2,2P+2)}{C_n(1,2P+2)}$$

⋮

$$\gamma_P = \frac{C_n(P-1,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} = \frac{C_n(P-1,2P+2)}{C_n(1,2P+2)}$$

$$\delta_P = \frac{C_n(P,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} = \frac{C_n(P,2P+2)}{C_n(1,2P+2)}$$

siendo  $\{\beta_r, \gamma_r, \dots, \delta_r\}_{r=1,2,\dots,P}$ , constantes, en principio complejas, donde ni  $\beta_r$  ni  $\delta_r$  tienen nada que ver con los parámetros  $\beta$  y  $\delta$  que aparecen en la expresión de la matriz  $B$  en la sección IV.2.3 (ver capítulo IV).

Entonces, es posible encontrar una matriz  $C_v$ , siendo  $C_n = T_y * C_v$ , de la forma siguiente:

$$C_v = \begin{bmatrix} C_n(1,1) & C_n(1,2) & C_n(1,3) & C_n(1,4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_n(1,5) & C_n(1,6) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ C_n(1,7) & C_n(1,8) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_n(1,2P+1) & C_n(1,2P+2) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

**Demostración:** A partir de (5.13) podemos escribir que:

$$T_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{P-1} & \beta_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{P-1} & \gamma_P \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{P-1} & \delta_P \end{bmatrix}$$

Por otro lado sabemos que  $C_n = T_y * C_v$ , con lo que calculando el producto matricial  $T_y * C_v$ , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix}
C_n(1,1) & C_n(1,2) & C_n(1,3) & C_n(1,4) & C_n(1,5) & C_n(1,6) \\
\beta_1 C_n(1,1) & \beta_1 C_n(1,2) & \beta_1 C_n(1,3) & \beta_1 C_n(1,4) & C_n(2,5) & \frac{C_n(2,5)}{C_n(1,5)} C_n(1,6) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\gamma_1 C_n(1,1) & \gamma_1 C_n(1,2) & \gamma_1 C_n(1,3) & \gamma_1 C_n(1,4) & C_n(P-1,5) & \frac{C_n(P-1,5)}{C_n(1,5)} C_n(1,6) \\
\delta_1 C_n(1,1) & \delta_1 C_n(1,2) & \delta_1 C_n(1,3) & \delta_1 C_n(1,4) & C_n(P,5) & \frac{C_n(P,5)}{C_n(1,5)} C_n(1,6) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & C_n(1,2P-1) & C_n(1,2P) & C_n(1,2P+1) & C_n(1,2P+2) \\
\cdots & C_n(2,2P-1) & \frac{C_n(2,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} C_n(1,2P) & C_n(2,2P+1) & \frac{C_n(2,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} C_n(1,2P+2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & C_n(P-1,2P-1) & \frac{C_n(P-1,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} C_n(1,2P) & C_n(P-1,2P+1) & \frac{C_n(P-1,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} C_n(1,2P+2) \\
\cdots & C_n(P,2P-1) & \frac{C_n(P,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} C_n(1,2P) & C_n(P,2P+1) & \frac{C_n(P,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} C_n(1,2P+2)
\end{bmatrix}$$

Se comprueba que esta matriz coincide con  $C_n$  si se verifican las relaciones dadas entre los elementos de dicha matriz.  $\square$

La proposición que acabamos de demostrar es la clave del desacoplo, por cuanto nos dice qué condiciones es necesario imponer a la matriz  $C_n = C * V$  del sistema de forma que podamos desacoplar las salidas del mismo. Dicho de otro modo, nos permite encontrar una matriz  $C_v$ , siendo  $Y_{virtual} = C_v * z$ , tal que las salidas virtuales resultan estar desacopladas entre sí. Para verlo, escribimos la ecuación de salida del sistema en (5.2),  $Y_{real} = C_n * z$ , como sigue:

$$\begin{aligned}
y_{real_1} &= C_n(1,1)z_1 + \cdots + C_n(1,4)z_4 + C_n(1,5)z_5 + C_n(1,6)z_6 + \cdots \\
&+ C_n(1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(1,2P)z_{2P} + C_n(1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(1,2P+2)z_{2P+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{real_2} &= C_n(2,1)z_1 + \cdots + C_n(2,4)z_4 + C_n(2,5)z_5 + C_n(2,6)z_6 + \cdots \\
&+ C_n(2,2P-1)z_{2P-1} + C_n(2,2P)z_{2P} + C_n(2,2P+1)z_{2P+1} + C_n(2,2P+2)z_{2P+2}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

⋮

$$y_{real_{p-1}} = C_n(P-1,1)z_1 + \dots + C_n(P-1,4)z_4 + C_n(P-1,5)z_5 + C_n(P-1,6)z_6 + \dots \\ + C_n(P-1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(P-1,2P)z_{2P} + C_n(P-1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(P-1,2P+2)z_{2P+2}$$

$$y_{real_p} = C_n(P,1)z_1 + \dots + C_n(P,4)z_4 + C_n(P,5)z_5 + C_n(P,6)z_6 + \dots \\ + C_n(P,2P-1)z_{2P-1} + C_n(P,2P)z_{2P} + C_n(P,2P+1)z_{2P+1} + C_n(P,2P+2)z_{2P+2}$$

Haciendo uso de las relaciones entre los  $C_n(i, j), i = 1, \dots, P, j = 1, \dots, 2P + 2$ , podemos expresar las  $P$  salidas reales del sistema como:

$$y_{real_1} = [C_n(1,1)z_1 + \dots + C_n(1,4)z_4] + [C_n(1,5)z_5 + C_n(1,6)z_6] + \dots \\ + [C_n(1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(1,2P)z_{2P}] + [C_n(1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(1,2P+2)z_{2P+2}]$$

$$y_{real_2} = \beta_1 [C_n(1,1)z_1 + \dots + C_n(1,4)z_4] + \beta_2 [C_n(1,5)z_5 + C_n(1,6)z_6] + \dots \\ + \beta_{P-1} [C_n(1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(1,2P)z_{2P}] + \beta_P [C_n(1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(1,2P+2)z_{2P+2}]$$

⋮

$$y_{real_{p-1}} = \gamma_1 [C_n(1,1)z_1 + \dots + C_n(1,4)z_4] + \gamma_2 [C_n(1,5)z_5 + C_n(1,6)z_6] + \dots \\ + \gamma_{P-1} [C_n(1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(1,2P)z_{2P}] + \gamma_P [C_n(1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(1,2P+2)z_{2P+2}]$$

$$y_{real_p} = \delta_1 [C_n(1,1)z_1 + \dots + C_n(1,4)z_4] + \delta_2 [C_n(1,5)z_5 + C_n(1,6)z_6] + \dots \\ + \delta_{P-1} [C_n(1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(1,2P)z_{2P}] + \delta_P [C_n(1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(1,2P+2)z_{2P+2}]$$

Además, establecemos la siguiente asignación de las nuevas variables de estado  $z$  tras el cambio de base:

$z_1, z_2 \rightarrow$  estados correspondientes al modo de la estructura,

$z_3, z_4 \rightarrow$  estados correspondientes al actuador cuya dinámica se modifica por el efecto de acoplo con la estructura,

$z_5, z_6, \dots, z_{2P+1}, z_{2P+2} \rightarrow$  estados correspondientes a los actuadores cuya dinámica no se ve afectada por el acoplo con la estructura.

con lo que podemos escribir que:

$$\begin{aligned}
y_{virtual_1} &= C_n(1,1)z_1 + C_n(1,2)z_2 + C_n(1,3)z_3 + C_n(1,4)z_4 \\
y_{virtual_2} &= C_n(1,5)z_5 + C_n(1,6)z_6 \\
&\vdots \\
y_{virtual_{P-1}} &= C_n(1,2P-1)z_{2P-1} + C_n(1,2P)z_{2P} \\
y_{virtual_P} &= C_n(1,2P+1)z_{2P+1} + C_n(1,2P+2)z_{2P+2}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

La matriz  $T_y$  que nos permite obtener las salidas virtuales desacopladas en función de las reales (ver figura 5.2) se obtiene, por tanto, a partir de la matriz  $C_n$  como:

$$T_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{C_n(2,1)}{C_n(1,1)} & \frac{C_n(2,5)}{C_n(1,5)} & \cdots & \frac{C_n(2,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} & \frac{C_n(2,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{C_n(P-1,1)}{C_n(1,1)} & \frac{C_n(P-1,5)}{C_n(1,5)} & \cdots & \frac{C_n(P-1,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} & \frac{C_n(P-1,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} \\ \frac{C_n(P,1)}{C_n(1,1)} & \frac{C_n(P,5)}{C_n(1,5)} & \cdots & \frac{C_n(P,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} & \frac{C_n(P,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} \\ \frac{C_n(P,1)}{C_n(1,1)} & \frac{C_n(P,5)}{C_n(1,5)} & \cdots & \frac{C_n(P,2P-1)}{C_n(1,2P-1)} & \frac{C_n(P,2P+1)}{C_n(1,2P+1)} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

En el caso de que hubiéramos optado por obtener las condiciones que es necesario imponer a los elementos de la matriz  $B_n$  de (5.2) para lograr el desacoplo de las entradas del sistema, procederíamos de forma similar. Así, aunque el proceso sería algo más complejo y menos directo que en el de las salidas, por las razones ya aducidas, llegamos a que la matriz  $T_u$  que relaciona las entradas reales interconectadas con las entradas virtuales desacopladas se obtiene como:

$$T_u = \begin{bmatrix} B_n(1,1) & B_n(1,2) & \cdots & B_n(1,P-1) & B_n(1,P) \\ B_n(5,1) & B_n(5,2) & \cdots & B_n(5,P-1) & B_n(5,P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n(2P-1,1) & B_n(2P-1,2) & \cdots & B_n(2P-1,P-1) & B_n(2P-1,P) \\ B_n(2P+1,1) & B_n(2P+1,2) & \cdots & B_n(2P+1,P-1) & B_n(2P+1,P) \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Supongamos que podemos expresar las  $P$  entradas virtuales del espejo, en función de las  $P$  entradas reales, como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{virtual_1} = \alpha_1 \mathbf{u}_{real_1} + \alpha_2 \mathbf{u}_{real_2} + \cdots + \alpha_{P-1} \mathbf{u}_{real_{P-1}} + \alpha_P \mathbf{u}_{real_P} \\ \mathbf{u}_{virtual_2} = \beta_1 \mathbf{u}_{real_1} + \beta_2 \mathbf{u}_{real_2} + \cdots + \beta_{P-1} \mathbf{u}_{real_{P-1}} + \beta_P \mathbf{u}_{real_P} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{virtual_{P-1}} = \gamma_1 \mathbf{u}_{real_1} + \gamma_2 \mathbf{u}_{real_2} + \cdots + \gamma_{P-1} \mathbf{u}_{real_{P-1}} + \gamma_P \mathbf{u}_{real_P} \\ \mathbf{u}_{virtual_P} = \delta_1 \mathbf{u}_{real_1} + \delta_2 \mathbf{u}_{real_2} + \cdots + \delta_{P-1} \mathbf{u}_{real_{P-1}} + \delta_P \mathbf{u}_{real_P} \end{cases}$$

donde  $\{\beta_r, \gamma_r, \dots, \delta_r\}_{r=1,2,\dots,P}$  no son los mismos coeficientes que en (5.13) y, además, se cumplen las relaciones siguientes:

$$B_n * U_{real} = B_v * U_{virtual}$$

y

$$B_n = B_v * T_u$$

Si los elementos de  $B_n$  verifican las siguientes relaciones:

$$\frac{B_n(2,1)}{B_n(1,1)} = \frac{B_n(2,2)}{B_n(1,2)} = \cdots = \frac{B_n(2,P-1)}{B_n(1,P-1)} = \frac{B_n(2,P)}{B_n(1,P)}$$

⋮

$$\frac{B_n(4,1)}{B_n(1,1)} = \frac{B_n(4,2)}{B_n(1,2)} = \cdots = \frac{B_n(4,P-1)}{B_n(1,P-1)} = \frac{B_n(4,P)}{B_n(1,P)}$$

$$\frac{B_n(6,1)}{B_n(5,1)} = \frac{B_n(6,2)}{B_n(5,2)} = \cdots = \frac{B_n(6,P-1)}{B_n(5,P-1)} = \frac{B_n(6,P)}{B_n(5,P)}$$

$$\frac{B_n(8,1)}{B_n(7,1)} = \frac{B_n(8,2)}{B_n(7,2)} = \cdots = \frac{B_n(8,P-1)}{B_n(7,P-1)} = \frac{B_n(8,P)}{B_n(7,P)}$$

⋮

$$\frac{B_n(2P,1)}{B_n(2P-1,1)} = \frac{B_n(2P,2)}{B_n(2P-1,2)} = \cdots = \frac{B_n(2P,P-1)}{B_n(2P-1,P-1)} = \frac{B_n(2P,P)}{B_n(2P-1,P)}$$

$$\frac{B_n(2P+2,1)}{B_n(2P+1,1)} = \frac{B_n(2P+2,2)}{B_n(2P+1,2)} = \cdots = \frac{B_n(2P+2,P-1)}{B_n(2P+1,P-1)} = \frac{B_n(2P+2,P)}{B_n(2P+1,P)}$$

es posible encontrar una matriz  $B_v$  que desacopla las entradas del sistema, de la forma:

$$B_v = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \frac{B_n(2,1)}{B_n(1,1)} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \frac{B_n(3,1)}{B_n(1,1)} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \frac{B_n(4,1)}{B_n(1,1)} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \frac{B_n(6,2)}{B_n(5,2)} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{B_n(8,3)}{B_n(7,3)} & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{B_n(2P, P-1)}{B_n(2P-1, P-1)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & \frac{B_n(2P+2, P)}{B_n(2P+1, P)}
 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Para generalizar las relaciones obtenidas en este punto para un número arbitrario  $N$  de modos, debemos tener en cuenta lo siguiente:

Ya demostramos en la sección IV.2.3 (ver capítulo IV) que al diagonalizar el sistema en (5.1), el rango de las  $4N$  primeras filas de la matriz  $B_n$  en (5.2) o, de forma equivalente, el rango de las  $4N$  primeras columnas de  $C_n$ , es igual a  $N$ . Esto implica que el subsistema que llamaremos  $S_1$ , compuesto por los  $N$  modos de la estructura y los  $N$  actuadores cuya dinámica propia se ve modificada por el efecto de acoplamiento con la celda, tiene  $N$  entradas y  $N$  salidas. Además, a la vista del aspecto que presentan las matrices resultantes del proceso de desacoplo  $B_v$  y  $C_v$ , y tal y como también demostramos en la sección IV.2.3, este conjunto de entradas y salidas resulta estar desacoplado de las del subsistema que llamaremos  $S_2$ , compuesto por los  $P-N$  actuadores cuya dinámica no se ve alterada por los modos de la estructura.

Puesto que, en general, los  $4N$  autovalores del subsistema  $S_1$  son todos distintos, el método que describimos en este capítulo para el desacoplo de las entradas y salidas de  $S_2$  no es aplicable a  $S_1$ . De hecho, éste no ha sido en ningún momento nuestro propósito, sino más bien centrarnos en el subsistema  $S_2$ , con autovalores  $\lambda_A$  y  $\bar{\lambda}_A$  de multiplicidad  $P-N$ , cada uno de ellos. El motivo es que podemos considerar que al caracterizar la

dinámica de la estructura o celda con un único modo,  $N=1$ , se reproduce razonablemente bien la dinámica del espejo. Recordemos que el método de desacoplo que hemos diseñado para el subsistema  $S_2$  se basa, precisamente, en la multiplicidad del valor propio  $\lambda_A$  (y, por tanto, de  $\bar{\lambda}_A$ ), que es lo que nos permite recombinar los vectores propios asociados sin alterar la dinámica del sistema. Es por esto por lo que, cuando tomamos  $N=1$ , el desacoplo del espejo es total y se logra gracias a las matrices  $T_y$  y  $T_u$  en (5.17) y (5.18), respectivamente.

En cualquier caso, tomando un número  $N$  arbitrario de modos, tendríamos, tras el desacoplo del subsistema  $S_2$ , otro subsistema, el  $S_1$ , de una dimensión considerablemente menor que la del sistema de partida ( $S_1 U S_2$ ).  $S_1$  se modela con  $4N$  estados,  $N$  entradas y  $N$  salidas acopladas entre sí. Como vemos, aun en el caso más desfavorable ( $N=30$ ), la complejidad del problema original se reduce de forma importante.

### V.2.3. Obtención de la base de vectores propios que desacoplan el espejo

Volviendo al problema de obtener el cambio de base apropiado que nos permita modelar la dinámica del espejo en una representación en la que los segmentos están desacoplados entre sí, y sabiendo ya las condiciones que debemos imponer, bien a los elementos de la matriz de salida  $C_n$  en (5.2), bien a los de la matriz de entrada  $B_n$ , para que esto se produzca, estamos ya en condiciones de plantear el sistema de ecuaciones que permitirá llevar a cabo el desacoplo. Según vimos anteriormente, los nuevos vectores propios del subespacio  $E_{\lambda_A}^C$ :

$$\bar{w}n_k = [wn_k(1) \quad wn_k(2) \quad \cdots \quad wn_k(2N + 2P)] \in E_{\lambda_A}^C$$

donde empleamos la misma notación que en la sección V.1, se obtienen, como resultado del desacoplo, como combinación lineal de los vectores de la representación original:

$$\bar{w}_j = [w_j(1) \quad w_j(2) \quad \cdots \quad w_j(2N + 2P)] \in E_{\lambda_A}^C$$

resultando que:

$$\bar{w}n_k = \alpha_k \bar{w}_1 + \xi_k \bar{w}_2 + \cdots + \tau_k \bar{w}_{P-N}, \text{ con } k = 1, 2, \dots, P - N$$

Debemos, por tanto, obtener los valores apropiados para los coeficientes  $\{\alpha_k, \xi_k, \dots, \tau_k\} \in C$ .

Si tenemos en cuenta la forma en que se ordenan los vectores propios del sistema completo de  $2N+2P$  estados o, lo que es lo mismo, los vectores columna de la matriz  $V$  de cambio de base, y que es:

$1,2,\dots,4N$  : autovectores del subespacio  $E_{\lambda}^C \cup E_{\bar{\lambda}}^C, \lambda \neq \lambda_A$

$4N+1,4N+3,\dots,2P-1,2P+1$  : autovectores del subespacio  $E_{\lambda_A}^C$

$4N+2,4N+4,\dots,2P,2P+2$  : autovectores del subespacio  $E_{\bar{\lambda}_A}^C$

la notación que estamos empleando para los vectores propios tanto antes como después del desacoplo particularizando para  $N=1$ , es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \bar{w}_1 = \bar{v}_5 & & \bar{w}n_1 = \bar{v}n_5 \\ \bar{w}_2 = \bar{v}_7 & & \bar{w}n_2 = \bar{v}n_7 \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_k = \bar{v}_{2k+3} & ; & \bar{w}n_k = \bar{v}n_{2k+3} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_{P-2} = \bar{v}_{2P-1} & & \bar{w}n_{P-2} = \bar{v}n_{2P-1} \\ \bar{w}_{P-1} = \bar{v}_{2P+1} & & \bar{w}n_{P-1} = \bar{v}n_{2P+1} \end{array}$$

y, por tanto:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\bar{w}}_1 = \bar{v}_6 & & \bar{\bar{w}}n_1 = \bar{v}n_6 \\ \bar{\bar{w}}_2 = \bar{v}_8 & & \bar{\bar{w}}n_2 = \bar{v}n_8 \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\bar{w}}_k = \bar{v}_{2k+4} & ; & \bar{\bar{w}}n_k = \bar{v}n_{2k+4} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\bar{w}}_{P-2} = \bar{v}_{2P} & & \bar{\bar{w}}n_{P-2} = \bar{v}n_{2P} \\ \bar{\bar{w}}_{P-1} = \bar{v}_{2P+2} & & \bar{\bar{w}}n_{P-1} = \bar{v}n_{2P+2} \end{array}$$

Asimismo, la matriz  $V$  de cambio de base la podemos expresar como:

$$V = [\bar{v}n_1 \ \bar{v}n_2 \ \bar{v}n_3 \ \bar{v}n_4 \ \bar{v}n_5 \ \bar{v}n_6 \ \dots \ \bar{v}n_{2N+2P-1} \ \bar{v}n_{2N+2P}]$$

o bien, empleando la nueva notación:

$$V = [\bar{v}n_1 \ \bar{v}n_2 \ \bar{v}n_3 \ \bar{v}n_4 \ \bar{w}n_1 \ \bar{\bar{w}}n_1 \ \bar{w}n_2 \ \bar{\bar{w}}n_2 \ \dots \ \bar{w}n_{P-2} \ \bar{\bar{w}}n_{P-2} \ \bar{w}n_{P-1} \ \bar{\bar{w}}n_{P-1}]$$

y puesto que la matriz de salida  $C$  del sistema en la representación original considerando un único modo para la estructura es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la nueva matriz de salida se obtiene como:

$$C_n = C * [\bar{v}n_1 \quad \bar{v}n_2 \quad \bar{v}n_3 \quad \bar{v}n_4 \quad \bar{w}n_1 \quad \bar{w}n_1 \quad \bar{w}n_2 \quad \bar{w}n_2 \quad \cdots \quad \bar{w}n_{P-2} \quad \bar{w}n_{P-2} \quad \bar{w}n_{P-1} \quad \bar{w}n_{P-1}]$$

Realizando el producto matricial llegamos a que la matriz  $C_n$  es igual a:

$$\begin{bmatrix} vn_1(3) & \cdots & vn_4(3) & wn_1(3) & \bar{w}n_1(3) & \cdots & wn_{P-1}(3) & \bar{w}n_{P-1}(3) \\ vn_1(4) & \cdots & vn_4(4) & wn_1(4) & \bar{w}n_1(4) & \cdots & wn_{P-1}(4) & \bar{w}n_{P-1}(4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ vn_1(P+2) & \cdots & vn_4(P+2) & wn_1(P+2) & \bar{w}n_1(P+2) & \cdots & wn_{P-1}(P+2) & \bar{w}n_{P-1}(P+2) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

y, en general, para N modos:

$$\begin{bmatrix} vn_1(2N+1) & \cdots & vn_4(2N+1) & wn_1(2N+1) & \bar{w}n_1(2N+1) \\ vn_1(2N+2) & \cdots & vn_4(2N+2) & wn_1(2N+2) & \bar{w}n_1(2N+2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ vn_1(2N+P) & \cdots & vn_4(2N+P) & wn_1(2N+P) & \bar{w}n_1(2N+P) \\ \cdots & wn_{P-N}(2N+1) & \bar{w}n_{P-N}(2N+1) \\ \cdots & wn_{P-N}(2N+2) & \bar{w}n_{P-N}(2N+2) \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & wn_{P-N}(2N+P) & \bar{w}n_{P-N}(2N+P) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

A la vista de (5.20), observamos que imponer las condiciones para el desacoplo de las  $P-1$  salidas (y entradas) del subsistema  $S_2$ , compuesto por los  $P-1$  actuadores cuya dinámica no se modifica por el efecto de acoplamiento con la estructura, condiciones que afectan a las columnas de la 5 a la  $2P+2$  (esto para  $N=1$ , para un  $N$  genérico serían las columnas de la  $4N+1$  a la  $2N+2P$ ) de la matriz  $C_n$ , equivale a hacer ciertas exigencias a los vectores propios columna  $\{\bar{w}n_1, \bar{w}n_1, \cdots, \bar{w}n_{P-1}, \bar{w}n_{P-1}\}$  que, como vemos, son los vectores propios columna del subespacio  $E_{\lambda_A}^C$ , y más concretamente, a las componentes  $(3 \cdots P+2)$  de estos vectores (o las componentes  $(2N+1 \cdots 2N+P)$  para un  $N$  arbitrario). En cualquier caso, el problema en la práctica se reduce a aplicar el conjunto

de  $(P - N)^2$  condiciones que involucran a las salidas virtuales  $\{y_{virtual_{N+1}}, y_{virtual_{N+2}}, \dots, y_{virtual_P}\}$ . Estas condiciones se pueden expresar en el caso más general posible como:

$$\begin{aligned} \frac{C_n(N+1, 4N+1)}{C_n(1, 4N+1)} &= \frac{C_n(N+1, 4N+2)}{C_n(1, 4N+2)} \\ &\vdots \\ \frac{C_n(P, 4N+1)}{C_n(1, 4N+1)} &= \frac{C_n(P, 4N+2)}{C_n(1, 4N+2)} \\ &\vdots \\ \frac{C_n(N+1, 2N+2P-1)}{C_n(1, 2N+2P-1)} &= \frac{C_n(N+1, 2N+2P)}{C_n(1, 2N+2P)} \\ &\vdots \\ \frac{C_n(P, 2N+2P-1)}{C_n(1, 2N+2P-1)} &= \frac{C_n(P, 2N+2P)}{C_n(1, 2N+2P)} \end{aligned}$$

En función de los vectores propios del subespacio  $E_{\lambda_i}^C$  tras el desacoplo, estas relaciones las podemos expresar como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{wn_1(2N+2)}{wn_1(2N+1)} &= \frac{\bar{w}n_1(2N+2)}{\bar{w}n_1(2N+1)} \\ &\vdots \\ \frac{wn_1(2N+P)}{wn_1(2N+1)} &= \frac{\bar{w}n_1(2N+P)}{\bar{w}n_1(2N+1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{wn_1(2N+1)}{\bar{w}n_1(2N+1)} = \frac{wn_1(2N+2)}{\bar{w}n_1(2N+2)} = \dots = \frac{wn_1(2N+P)}{\bar{w}n_1(2N+P)}$$

$$\vdots$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{wn_{P-N}(2N+2)}{wn_{P-N}(2N+1)} &= \frac{\bar{w}n_{P-N}(2N+2)}{\bar{w}n_{P-N}(2N+1)} \\ &\vdots \\ \frac{wn_{P-N}(2N+P)}{wn_{P-N}(2N+1)} &= \frac{\bar{w}n_{P-N}(2N+P)}{\bar{w}n_{P-N}(2N+1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{wn_{P-N}(2N+1)}{\bar{w}n_{P-N}(2N+1)} = \frac{wn_{P-N}(2N+2)}{\bar{w}n_{P-N}(2N+2)} = \dots = \frac{wn_{P-N}(2N+P)}{\bar{w}n_{P-N}(2N+P)}$$

Vemos que realmente el desacoplo consiste en generar  $P-N$  vectores propios linealmente independientes  $\{\bar{w}n_k\}_{k=1,2,\dots,P-N}$  verificando que:

$$\frac{wn_k(2N+1)}{\bar{w}n_k(2N+1)} = \frac{wn_k(2N+2)}{\bar{w}n_k(2N+2)} = \dots = \frac{wn_k(2N+P)}{\bar{w}n_k(2N+P)} \quad (5.22)$$

A la vista de (5.22) encontramos que si tomamos unos vectores propios tal que, al menos para las componentes de la  $2N+1$  a la  $2N+P$ , cumplan que:

$$\text{Real}\{\bar{w}n_k\} = \text{Imag}\{\bar{w}n_k\} \quad (5.23)$$

entonces tenemos que, efectivamente:

$$\frac{wn_k(2N+1)}{\bar{w}n_k(2N+1)} = \frac{wn_k(2N+2)}{\bar{w}n_k(2N+2)} = \dots = \frac{wn_k(2N+P)}{\bar{w}n_k(2N+P)} = \frac{1+j}{1-j} = j$$

Expresando los vectores propios  $\bar{w}n_k$  en función de los  $\bar{w}_k$  y recordando que los coeficientes  $\{\alpha_k, \xi_k, \dots, \tau_k\} \in C$ , tenemos un sistema de  $P$  ecuaciones, en principio linealmente independientes, y  $2(P-N)$  incógnitas, correspondientes a la parte real y la parte imaginaria de cada uno de los  $P-N$  coeficientes, esto es:

$$\begin{aligned} \text{Real}\{\alpha_k w_1(2N+1) + \xi_k w_2(2N+1) + \dots + \tau_k w_{P-N}(2N+1)\} = \\ = \text{Imag}\{\alpha_k w_1(2N+1) + \xi_k w_2(2N+1) + \dots + \tau_k w_{P-N}(2N+1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Real}\{\alpha_k w_1(2N+2) + \xi_k w_2(2N+2) + \dots + \tau_k w_{P-N}(2N+2)\} = \\ = \text{Imag}\{\alpha_k w_1(2N+2) + \xi_k w_2(2N+2) + \dots + \tau_k w_{P-N}(2N+2)\} \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{Real}\{\alpha_k w_1(2N+P) + \xi_k w_2(2N+P) + \dots + \tau_k w_{P-N}(2N+P)\} = \\ = \text{Imag}\{\alpha_k w_1(2N+P) + \xi_k w_2(2N+P) + \dots + \tau_k w_{P-N}(2N+P)\} \end{aligned}$$

Tal sistema nos permitiría obtener únicamente  $P-2N$  vectores linealmente independientes cumpliendo las condiciones impuestas, en lugar de los  $P-N$  necesarios para completar una base del subespacio vectorial. Es necesario, por tanto, buscar una forma de reducir la dimensionalidad del sistema de ecuaciones, esto es, el número de ellas, hasta un máximo de  $P-N$ . Para ello, debemos relajar las condiciones que imponemos a los nuevos vectores propios, condiciones que, por otra parte, resultan excesivamente severas. Así, en primera instancia, llamaremos **Método 1** al correspondiente a exigir que:

$$\begin{aligned}
\text{Real}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Real}\{\bar{w}_k(1)\} &= \text{Imag}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Real}\{\bar{w}_k(1)\} \\
\text{Real}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Imag}\{\bar{w}_k(1)\} &= \text{Imag}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Imag}\{\bar{w}_k(1)\} \\
\text{Real}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Real}\{\bar{w}_k(2)\} &= \text{Imag}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Real}\{\bar{w}_k(2)\} \\
\text{Real}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Imag}\{\bar{w}_k(2)\} &= \text{Imag}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Imag}\{\bar{w}_k(2)\} \\
&\vdots \\
\text{Real}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Real}\{\bar{w}_k(P-N)\} &= \text{Imag}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Real}\{\bar{w}_k(P-N)\} \\
\text{Real}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Imag}\{\bar{w}_k(P-N)\} &= \text{Imag}\{\bar{w}n_k(l)\}^t * \text{Imag}\{\bar{w}_k(P-N)\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

con  $k, l = 1, 2, \dots, P - N$ .

Como se ve, se trata de un sistema de  $2(P-N)$  ecuaciones y el mismo número de incógnitas. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre cuando tratamos de imponer las condiciones en (5.23), sólo la mitad de las ecuaciones en (5.24) son linealmente independientes. En consecuencia, nos va a permitir generar la base de vectores propios que desacopla el sistema.

Para resolver (5.24) obtenemos, en primer lugar, la matriz  $M$  del sistema, tal que:

$$M * \begin{bmatrix} \text{Real}\{\alpha_k\} \\ \text{Imag}\{\alpha_k\} \\ \text{Real}\{\xi_k\} \\ \text{Imag}\{\xi_k\} \\ \vdots \\ \text{Real}\{\tau_k\} \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

siendo las columnas de la matriz  $M$  las que siguen:

$$\begin{aligned}
1^{\text{a}} \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} (\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_1\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_1\} \\ \vdots \\ (\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_1\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_1\} \end{bmatrix} \\
2^{\text{a}} \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} (\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_1\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_1\} \\ \vdots \\ (\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_1\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_1\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3^{\text{a}} \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} (\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_2\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_2\} \\ \vdots \\ (\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_2\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_2\} \end{bmatrix} \\
4^{\text{a}} \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} (\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_2\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_2\} \\ \vdots \\ (\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_2\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_2\} \end{bmatrix} \\
& \vdots \\
(2(P-N)-1)^{\text{a}} \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} (\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} \\ \vdots \\ (\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} \end{bmatrix} \\
2(P-N)^{\text{a}} \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} (\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_1\} - \text{Imag}\{\bar{w}_1\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\} \\ \vdots \\ (\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\} \\ (-\text{Real}\{\bar{w}_{P-N}\} - \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\})^t * \text{Imag}\{\bar{w}_{P-N}\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si nos quedamos con  $P-N$  filas de  $M$  linealmente independientes, podemos escribir el sistema (5.25) como sigue:

$$M_1 * \begin{bmatrix} \text{Real}\{\alpha_k\} \\ \text{Imag}\{\alpha_k\} \\ \text{Real}\{\xi_k\} \\ \text{Imag}\{\xi_k\} \\ \vdots \\ \text{Real}\{\tau_k\} \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

siendo  $M_1$  una matriz con  $P-N$  filas y  $2(P-N)$  columnas.

Para resolver este sistema de ecuaciones, empleamos la descomposición en valores singulares [Klema, 1980] para  $M_1$ :

$$M_1 = U * S * V^t$$

donde  $S$  es una matriz diagonal de la misma dimensión que  $M_1$ , en cuya diagonal principal se sitúan los valores singulares de la matriz  $M_1$  en orden decreciente, mientras que  $U$  y  $V$  son matrices cuadradas unitarias de dimensión  $(P-N)$  y  $2(P-N)$ , respectivamente. Así pues, a partir de (5.26) podemos escribir que:

$$U * S * V^t * \begin{bmatrix} \text{Real}\{\alpha_k\} \\ \text{Imag}\{\alpha_k\} \\ \text{Real}\{\xi_k\} \\ \text{Imag}\{\xi_k\} \\ \vdots \\ \text{Real}\{\tau_k\} \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y multiplicando a la izquierda ambos miembros de la igualdad por la inversa de  $U$ , tenemos que:

$$S * V^t * \begin{bmatrix} \text{Real}\{\alpha_k\} \\ \text{Imag}\{\alpha_k\} \\ \text{Real}\{\xi_k\} \\ \text{Imag}\{\xi_k\} \\ \vdots \\ \text{Real}\{\tau_k\} \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Puesto que se trata de un sistema de ecuaciones igualado a cero y  $M_1$  es una matriz con  $P-N$  filas y  $2(P-N)$  columnas, siendo  $\text{rango}(M_1) = P-N$ , tenemos que los  $P-N$  primeros elementos de la diagonal principal de la matriz  $S$  en (5.27) son distintos de cero, pues están ordenados en orden decreciente, mientras que los  $P-N$  restantes son nulos. Entonces, podemos escribir el sistema de ecuaciones en (5.27) como:

$$M_2 * \begin{bmatrix} \text{Real}\{\alpha_k\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = -M_3 * \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

donde:

- $M_2$  contiene las  $P-N$  primeras columnas de  $S * V^t$  y, en consecuencia, es una matriz no singular, esto es, invertible,
- $M_3$  contiene las  $P-N$  últimas columnas de  $S * V^t$ ,

siendo ambas matrices cuadradas de dimensión  $P-N$ .

Así pues, podemos resolver el sistema de ecuaciones como sigue:

$$\begin{bmatrix} \text{Real}\{\alpha_k\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = -M_2^{-1} * M_3 * \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix}$$

Tomamos las variables de la  $P-N+1$  a la  $2(P-N)$ :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Imag}\{\tau_k\} \end{bmatrix}$$

como los parámetros del sistema a los que asignamos valores de forma que nos permitan generarnos los  $P-N$  vectores propios, soluciones del sistema de ecuaciones (5.25), que vamos buscando.

En particular, tomamos los valores siguientes:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

obteniendo así los  $P$ - $N$   $\bar{w}n_k$ , vectores propios del sistema asociados al autovalor  $\lambda_A$  (y en consecuencia los correspondientes  $P$ - $N$   $\bar{w}n_k$  asociados a  $\bar{\lambda}_A$ ) que desacoplan el sistema.

#### V.2.4. Evaluación de los resultados del desacoplo y propuesta de mejoras

Si llevamos a cabo este procedimiento en la práctica, una medida de lo desacoplado que está el sistema consiste en hallar las matrices de transformación de las entradas y salidas reales en entradas y salidas virtuales,  $T_u$  y  $T_y$ , empleando las expresiones (5.17) y (5.18); así como las matrices  $B_v$  y  $C_v$  según (5.19) y (5.14). Además, sabemos que las cuatro matrices se relacionan a través de las expresiones siguientes:

$$B_n = B_v * T_u$$

$$C_n = T_y * C_v$$

Si el desacoplo del sistema es total estas igualdades deben verificarse. Midiendo el mayor valor absoluto de la diferencia  $B_n - B_v * T_u$  en el caso de las entradas y  $C_n - T_y * C_v$  en el caso de las salidas, sabremos cuánto de cerca estamos de tener el sistema perfectamente desacoplado.

Hemos cuantificado la ‘bondad’ del método de desacoplo que hemos diseñado para distintos casos, es decir, para distinto número de modos de la celda y de actuadores, obteniendo los siguientes resultados:

	Factor de acoplo de las salidas	Factor de acoplo de las entradas
$N=1, P=3$	$7.6112 \times 10^{-13}$	$3.7674 \times 10^{-8}$
$N=1, P=30$	$2.6008 \times 10^{-12}$	$3.6480 \times 10^{-5}$
$N=1, P=60$	$4.4616 \times 10^{-11}$	$2.7234 \times 10^{-5}$
$N=1, P=108$	$4.3205 \times 10^{-12}$	0.0789
$N=3, P=30$	$8.8958 \times 10^{-13}$	$8.8369 \times 10^{-8}$
$N=3, P=60$	$2.4315 \times 10^{-12}$	$3.7344 \times 10^{-6}$
$N=3, P=108$	$4.4789 \times 10^{-12}$	$1.2123 \times 10^{-5}$
$N=10, P=30$	$6.6742 \times 10^{-14}$	$4.7704 \times 10^{-8}$
$N=10, P=60$	$3.8708 \times 10^{-13}$	$1.7042 \times 10^{-7}$
$N=10, P=108$	$3.5736 \times 10^{-12}$	0.0023
$N=30, P=60$	$1.1190 \times 10^{-12}$	$2.6402 \times 10^{-6}$
$N=30, P=108$	$7.6080 \times 10^{-13}$	$4.9270 \times 10^{-4}$

**Tabla 5.1:** Factor de error en el desacoplo de las salidas y entradas del sistema

con el **Método 1** calculando  $B_n$  como  $V^{-1} * B$ .

**NOTA:** Sea cual sea el valor de  $N$  siempre se incluye el modo de 17hz.

A la vista de estos resultados, la principal conclusión a la que llegamos es que, independientemente de los valores de  $N$  y  $P$ , las entradas resultan estar, en todos los casos, bastante peor desacopladas que las salidas, que tampoco presentan un índice de error tan bajo como sería deseable.

El hecho de que en todos los casos el factor de error del desacoplo de las entradas sea mayor que el de las salidas se debe a la forma en que se obtienen las matrices de

entrada y salida del sistema tras el cambio de base que lo desacopla, que recordemos que es:

$$C_n = C * V$$

$$B_n = V^{-1} * B$$

y, más concretamente, a los errores numéricos que se derivan del cálculo de la inversa de la matriz  $V$ . Para verlo, basta con recordar que las columnas de  $V$  son los vectores propios columna del sistema asociados tanto a la estructura  $(\lambda \neq \lambda_A, \bar{\lambda})$  como a los segmentos  $(\lambda_A, \bar{\lambda}_A)$ . Tal y como vimos, los autovectores de estos dos subespacios son ortogonales entre sí, es decir, su producto escalar es cero. Si hacemos esta comprobación con los autovectores una vez que los hemos calculado, tenemos que, en el peor de los casos:

$$\langle \vec{v}_{\lambda \neq \lambda_A}^C, \vec{v}_{\lambda_A}^C \rangle \sim 10^{-16}$$

lo cual, dada la precisión de la máquina con la que llevamos a cabo los cálculos, es igual a cero.

Análogamente, las filas de la matriz inversa,  $V^{-1}$ , son los vectores propios fila del mismo sistema y, por tanto, deben mantener la ortogonalidad de los subespacios. Sin embargo, al hacer el producto escalar encontramos que, en el mejor de los casos:

$$\langle \vec{v}_{\lambda \neq \lambda_A}^F, \vec{v}_{\lambda_A}^F \rangle \sim 10^{-6}$$

lo que es claramente distinto de cero.

Tanto  $T_u$  como  $B_v$  se obtienen a partir de  $B_n$ , con lo que los errores que se generan al calcular la inversa de  $V$  se propagan y dan lugar a que, finalmente, el factor de error del desacoplo de las entradas sea, sobre todo en algunos casos, considerablemente mayor que el de las salidas.

Para intentar mejorar el desacoplo de las entradas del sistema, sabiendo que el origen del problema está en el cálculo de la inversa de la matriz de vectores propios, podemos hacer uso de un resultado que ya hemos presentado. Éste es el que dice que, debido a las características particulares de la matriz con la que estamos trabajando y aun no siendo simétrica, sus vectores propios columna son, a la vez, vectores propios fila. En consecuencia, podemos obtener la matriz  $B$  de la planta en la nueva base de vectores propios,  $B_n = V^{-1} * B$ , como:

$$B_n = V^t * B$$

Ya que de esta manera logramos evitar la inversión de la matriz  $V$ , el desacoplo de las entradas del sistema debería mejorar respecto a los resultados ya presentados. Para comprobarlo, hallamos el nuevo índice de desacoplo introduciendo esta modificación en el cálculo de  $B_n$ . Para poder comparar los resultados obtenidos en ambos casos de forma cómoda, los presentamos conjuntamente en la siguiente tabla:

	Factor de acoplo de las entradas tomando $B_n = V^{-1} * B$	Factor de acoplo de las entradas tomando $B_n = V^t * B$
$N=1, P=3$	$3.7674 \times 10^{-8}$	$2.8724 \times 10^{-7}$
$N=1, P=30$	$3.6480 \times 10^{-5}$	$5.4634 \times 10^{-6}$
$N=1, P=60$	$2.7234 \times 10^{-5}$	$2.9873 \times 10^{-4}$
$N=1, P=108$	0.0789	$9.8984 \times 10^{-5}$
$N=3, P=30$	$8.8369 \times 10^{-8}$	$1.7030 \times 10^{-7}$
$N=3, P=60$	$3.7344 \times 10^{-6}$	$5.8539 \times 10^{-7}$
$N=3, P=108$	$1.2123 \times 10^{-5}$	$1.1919 \times 10^{-6}$
$N=10, P=30$	$4.7704 \times 10^{-8}$	$1.5335 \times 10^{-8}$
$N=10, P=60$	$1.7042 \times 10^{-7}$	$9.3607 \times 10^{-8}$
$N=10, P=108$	0.0023	$7.1684 \times 10^{-7}$
$N=30, P=60$	$2.6402 \times 10^{-6}$	$2.1422 \times 10^{-7}$
$N=30, P=108$	$4.9270 \times 10^{-4}$	$1.6136 \times 10^{-7}$

**Tabla 5.2:** Comparación del factor de error en el desacoplo de las entradas calculando la matriz  $B_n$  con  $V^{-1}$  y con  $V^t$  siguiendo el Método 1.

Comparando los resultados mostrados en la tablas 5.1 y 5.2, observamos, en general, una cierta mejora en el desacoplo de las entradas tomando  $B_n = V^t * B$ . Esta

mejoría se hace especialmente evidente para  $(N=1, P=108)$  y, sobre todo para  $(N=10, P=108)$ . Por último, veamos qué ocurre si ortonormalizamos la base de vectores propios. En este caso, encontramos los siguientes factores de acoplo:

	Factor de acoplo de las salidas	Factor de acoplo de las entradas
$N=1, P=3$	$4.6934 \times 10^{-14}$	$5.7230 \times 10^{-9}$
$N=1, P=30$	$3.4569 \times 10^{-12}$	$7.2922 \times 10^{-7}$
$N=1, P=60$	$8.2920 \times 10^{-13}$	$2.1758 \times 10^{-6}$
$N=1, P=108$	$1.2354 \times 10^{-12}$	$7.7185 \times 10^{-7}$
$N=3, P=30$	$3.7318 \times 10^{-14}$	$7.3604 \times 10^{-9}$
$N=3, P=60$	$2.7168 \times 10^{-14}$	$5.3557 \times 10^{-9}$
$N=3, P=108$	$3.5125 \times 10^{-14}$	$6.8966 \times 10^{-9}$
$N=10, P=30$	$2.3116 \times 10^{-14}$	$4.5585 \times 10^{-9}$
$N=10, P=60$	$2.2168 \times 10^{-14}$	$4.3744 \times 10^{-9}$
$N=10, P=108$	$3.8956 \times 10^{-14}$	$6.3810 \times 10^{-9}$
$N=30, P=60$	$2.8165 \times 10^{-14}$	$8.4680 \times 10^{-9}$
$N=30, P=108$	$2.6039 \times 10^{-14}$	$5.0957 \times 10^{-9}$

**Tabla 5.3:** Factor de error en el desacoplo de las salidas y entradas del sistema ortonormalizando la base de vectores propios calculando la matriz  $B_n$  con  $V^{-1}$  ó con  $V^t$ , siguiendo el **Método 1**.

Comparando esta tabla con los resultados mostrados en las tablas 5.1 y 5.2 encontramos que:

1. prácticamente en todos los casos, al ortonormalizar la base de vectores propios se logra mejorar en uno o dos órdenes de magnitud el desacoplo de las salidas respecto al mostrado en la tabla 5.1,

2. el índice de error en el desacoplo de las entradas también disminuye respecto al mostrado en la tabla 5.2, siendo esta disminución de entre uno y tres órdenes de magnitud.

Como conclusión podemos establecer que, tras la ortonormalización de los autovectores que desacoplan el sistema, los resultados obtenidos son aceptablemente buenos.

Sin embargo, con el objeto de optimizar el desacoplo, introducimos una variación en el procedimiento de obtención de la nueva base de vectores propios que llamaremos **Método 2**. Para ello volvemos a la expresión en (5.23). En este punto, podemos tener en cuenta que considerando la matriz  $C_n$  en (5.21), encontramos que las componentes de la  $2N+1$  a la  $3N$  de los  $\bar{w}n_k$  corresponden a actuadores cuyo valor propio se modifica por el efecto de acoplamiento con la estructura. Por esto, podemos considerar que las ecuaciones que nos van a permitir desacoplar el sistema son:

$$\begin{aligned} \text{Real}\{wn_k(3N+1)\} &= \text{Imag}\{wn_k(3N+1)\} \\ \text{Real}\{wn_k(3N+2)\} &= \text{Imag}\{wn_k(3N+2)\} \\ &\vdots \\ \text{Real}\{wn_k(2N+P-1)\} &= \text{Imag}\{wn_k(2N+P-1)\} \\ \text{Real}\{wn_k(2N+P)\} &= \text{Imag}\{wn_k(2N+P)\} \end{aligned}$$

Con esta reducción en el número de condiciones impuestas, tenemos un sistema de  $P-N$  ecuaciones linealmente independientes con  $2(P-N)$  incógnitas, con el que obtendremos los  $(P-N)$  vectores  $\bar{w}n_k$  que compondrán la nueva base del subespacio. La matriz del sistema, descompuesta en columnas, es, en este caso:

$$\begin{aligned} 1^a \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} \text{Real}\{w_1(2N+2)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+2)\} \\ \text{Real}\{w_1(2N+3)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+3)\} \\ \vdots \\ \text{Real}\{w_1(2N+P-1)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+P-1)\} \\ \text{Real}\{w_1(2N+P)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+P)\} \end{bmatrix} \\ 2^a \text{ Columna: } & \begin{bmatrix} -\text{Real}\{w_1(2N+2)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+2)\} \\ -\text{Real}\{w_1(2N+3)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+3)\} \\ \vdots \\ -\text{Real}\{w_1(2N+P-1)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+P-1)\} \\ -\text{Real}\{w_1(2N+P)\} - \text{Imag}\{w_1(2N+P)\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
3^{\text{a}} \text{ Columna:} \\
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c}
\text{Real}\{w_2(2N+2)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+2)\} \\
\text{Real}\{w_2(2N+3)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+3)\} \\
\vdots \\
\text{Real}\{w_2(2N+P-1)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+P-1)\} \\
\text{Real}\{w_2(2N+P)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+P)\}
\end{array} \right] \\
\\
4^{\text{a}} \text{ Columna:} \\
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c}
-\text{Real}\{w_2(2N+2)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+2)\} \\
-\text{Real}\{w_2(2N+3)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+3)\} \\
\vdots \\
-\text{Real}\{w_2(2N+P-1)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+P-1)\} \\
-\text{Real}\{w_2(2N+P)\} - \text{Imag}\{w_2(2N+P)\}
\end{array} \right] \\
\\
\vdots \\
\\
(2(P-N)-1)^{\text{a}} \text{ Columna:} \\
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c}
\text{Real}\{w_{P-N}(2N+2)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+2)\} \\
\text{Real}\{w_{P-N}(2N+3)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+3)\} \\
\vdots \\
\text{Real}\{w_{P-N}(2N+P-1)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+P-1)\} \\
\text{Real}\{w_{P-N}(2N+P)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+P)\}
\end{array} \right] \\
\\
2(P-N)^{\text{a}} \text{ Columna:} \\
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c}
-\text{Real}\{w_{P-N}(2N+2)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+2)\} \\
-\text{Real}\{w_{P-N}(2N+3)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+3)\} \\
\vdots \\
-\text{Real}\{w_{P-N}(2N+P-1)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+P-1)\} \\
-\text{Real}\{w_{P-N}(2N+P)\} - \text{Imag}\{w_{P-N}(2N+P)\}
\end{array} \right]
\end{array}
\end{array}$$

Este sistema de ecuaciones lo resolvemos de la misma manera que el sistema (5.26), obteniendo los resultados siguientes respecto al nivel de desacoplo de las entradas y salidas:

	Factor de acoplo de las salidas	Factor de acoplo de las entradas
$N=1, P=3$	$6.0173 \times 10^{-18}$	$3.3795 \times 10^{-11}$
$N=1, P=30$	$5.0090 \times 10^{-17}$	$7.8452 \times 10^{-9}$
$N=1, P=60$	$7.8063 \times 10^{-17}$	$3.6722 \times 10^{-6}$
$N=1, P=108$	$1.8833 \times 10^{-15}$	$1.4422 \times 10^{-5}$
$N=3, P=30$	$5.4974 \times 10^{-15}$	$1.7832 \times 10^{-9}$
$N=3, P=60$	$9.7275 \times 10^{-16}$	$9.1252 \times 10^{-7}$
$N=3, P=108$	$1.6055 \times 10^{-15}$	$6.3169 \times 10^{-6}$
$N=10, P=30$	$2.8903 \times 10^{-14}$	$3.9314 \times 10^{-9}$
$N=10, P=60$	$1.4141 \times 10^{-14}$	$7.0634 \times 10^{-8}$
$N=10, P=108$	$1.5539 \times 10^{-14}$	0.0024
$N=30, P=60$	$1.8880 \times 10^{-11}$	$4.4124 \times 10^{-5}$
$N=30, P=108$	$1.6472 \times 10^{-12}$	$6.5344 \times 10^{-4}$

**Tabla 5.4:** Factor de error en el desacoplo de las salidas y entradas del sistema con el Método 2 calculando  $B_n$  como  $V^{-1} * B$ .

**NOTA:** Sea cual sea el valor de  $N$  siempre se incluye el modo de 17hz.

Si comparamos los resultados mostrados en esta tabla con los de la tabla 5.1, su equivalente aplicando el Método 1, encontramos que la mejoría en el desacoplo de las salidas es, para algunos casos como ( $N=1, P=60$ ), de hasta seis órdenes de magnitud. Sin embargo, a medida que  $N$  aumenta esta reducción en el índice de error en el desacoplo se hace cada vez menos apreciable e incluso, para  $N=30$ , aumenta ligeramente.

En el caso de las entradas, ocurre más o menos lo mismo que con las salidas aunque la mejoría obtenida con este segundo método respecto al primero es menor, como

máximo es de cuatro órdenes de magnitud para ( $N=1, P=30$ ). De nuevo, el desacoplo empeora ligeramente cuando consideramos todos los modos de la estructura ( $N=30$ ).

Para hacer un estudio paralelo al que realizamos con el **Método 1**, sustituimos la inversa de la matriz de vectores propios por su traspuesta en el cálculo de la nueva matriz de entrada del sistema  $B_n$ , tratando de eliminar en la medida de lo posible los errores numéricos. Así, presentamos en la siguiente tabla una comparativa de los resultados obtenidos:

	Factor de acoplo de las entradas tomando $B_n = V^{-1} * B$	Factor de acoplo de las entradas tomando $B_n = V^t * B$
$N=1, P=3$	$3.3795 \times 10^{-11}$	$8.5265 \times 10^{-13}$
$N=1, P=30$	$7.8452 \times 10^{-9}$	$2.9601 \times 10^{-11}$
$N=1, P=60$	$3.6722 \times 10^{-6}$	$3.4939 \times 10^{-9}$
$N=1, P=108$	$1.4422 \times 10^{-5}$	$1.8742 \times 10^{-9}$
$N=3, P=30$	$1.7832 \times 10^{-9}$	$1.1165 \times 10^{-9}$
$N=3, P=60$	$9.1252 \times 10^{-7}$	$1.9752 \times 10^{-10}$
$N=3, P=108$	$6.3169 \times 10^{-6}$	$3.2597 \times 10^{-10}$
$N=10, P=30$	$3.9314 \times 10^{-9}$	$5.8699 \times 10^{-9}$
$N=10, P=60$	$7.0634 \times 10^{-8}$	$2.8719 \times 10^{-9}$
$N=10, P=108$	0.0024	$3.1557 \times 10^{-9}$
$N=30, P=60$	$4.4124 \times 10^{-5}$	$3.8344 \times 10^{-6}$
$N=30, P=108$	$6.5344 \times 10^{-4}$	$3.3453 \times 10^{-7}$

**Tabla 5.5:** Comparación del factor de error en el desacoplo de las entradas calculando la matriz  $B_n$  con  $V^{-1}$  y con  $V^t$  siguiendo el **Método 2**.

Como se observa, al igual que ocurre con el **Método 1**, los resultados obtenidos tomando  $B_n = V^t * B$  son mejores que invirtiendo la matriz  $V$  de vectores propios. Incluso, en algunos casos como para  $N=10$  y  $P=108$ , el índice de error en el desacoplo de las entradas se reduce en seis órdenes de magnitud, lo cual supone una mejora más que apreciable. Sólo para  $(N=3, P=30)$  y  $(N=10, P=30)$  no se consigue superar los resultados obtenidos inicialmente. Con todo ello, vemos que los peores resultados corresponden nuevamente al caso en el que tomamos los 30 modos de la estructura ( $N=30$ ).

Ortonormalizando ahora los vectores de la base que desacopla el sistema, resultan los índices de error que mostramos en la siguiente tabla:

	Factor de acoplo de las salidas	Factor de acoplo de las entradas
$N=1, P=3$	$8.1993 \times 10^{-19}$	$3.1752 \times 10^{-13}$
$N=1, P=30$	$1.6767 \times 10^{-16}$	$3.4854 \times 10^{-11}$
$N=1, P=60$	$1.9326 \times 10^{-13}$	$7.8294 \times 10^{-9}$
$N=1, P=108$	$8.3503 \times 10^{-13}$	$1.5178 \times 10^{-6}$
$N=3, P=30$	$8.7288 \times 10^{-17}$	$1.8750 \times 10^{-11}$
$N=3, P=60$	$1.0217 \times 10^{-16}$	$1.9793 \times 10^{-11}$
$N=3, P=108$	$3.5931 \times 10^{-15}$	$2.4285 \times 10^{-10}$
$N=10, P=30$	$2.8331 \times 10^{-15}$	$5.8373 \times 10^{-10}$
$N=10, P=60$	$6.3000 \times 10^{-16}$	$1.4374 \times 10^{-10}$
$N=10, P=108$	$2.2891 \times 10^{-14}$	$2.1662 \times 10^{-9}$
$N=30, P=60$	$3.4941 \times 10^{-13}$	$7.2084 \times 10^{-8}$
$N=30, P=108$	$1.1251 \times 10^{-13}$	$2.3826 \times 10^{-8}$

**Tabla 5.6:** Factor de error en el desacoplo de las salidas y entradas del sistema ortonormalizando la base de vectores propios calculando la matriz  $B_n$  con  $V^{-1}$  ó con  $V^t$ , siguiendo el **Método 2**.

Para analizar los resultados obtenidos en este último caso debemos compararlos con los presentados en las tablas anteriores. Por un lado, atendiendo a los resultados en la tabla 5.4 con respecto a los mostrados en la tabla 5.6, encontramos que, respecto al desacoplo de las salidas, éste mejora o permanece igual para todos los casos excepto para  $(N=1, P=30)$ ,  $(N=1, P=108)$ ,  $(N=3, P=30)$  y para  $(N=1, P=60)$ . En lo que se refiere a las entradas, tenemos que, si comparamos el factor de acoplo tomando  $B_n = V^t * B$ , mostrado en la tabla 5.5, con el que obtenemos ortonormalizando la base, éste disminuye o queda igual para prácticamente todos los casos.

Por otra parte, para discutir la conveniencia de emplear el **Método 1** o el **Método 2** para la obtención de la nueva base de autovectores que desacople el sistema, debemos comparar los resultados mostrados en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 con los de las tablas 5.4, 5.5 y 5.6, respectivamente. Así, encontramos que, en general, la exigencia del cumplimiento por parte de los nuevos vectores propios de las condiciones del **Método 2**, da mejores resultados, esto es, un menor índice de error, en el desacoplo de las entradas y salidas del sistema.

Por último, y como comentario general, observamos que, sobre todo con el **Método 2**, a medida que aumenta, bien el número de modos de la celda, bien el número de actuadores, el desacoplo empeora, especialmente en el caso de las salidas. El motivo es que conforme aumenta la dimensión de las matrices implicadas, éstas están cada vez peor condicionadas, esto es, más cerca de la singularidad, y, por tanto, los errores que se acumulan al operar con ellas son cada vez mayores.

## CAPÍTULO VI

# INCLUSIÓN DEL RUIDO E INCERTIDUMBRES EN LA DINÁMICA EN EL SISTEMA DESACOPLADO

A lo largo de los capítulos IV y V hemos considerado el sistema ideal, dejando de lado tanto el ruido como las incertidumbres en la dinámica del espejo primario del Gran Telescopio Canarias. De hecho, el desacoplo se diseña prescindiendo de estos dos efectos perturbativos. Éste es el momento de estudiar de qué forma el procedimiento diseñado se ve afectado por el hecho de incluir en la planta el ruido y las incertidumbres en la dinámica.

### **VI.1. INCLUSIÓN DEL RUIDO EN EL PROCEDIMIENTO DE DESACOPLO DEL SISTEMA**

En primer lugar veamos qué ocurre si incluimos en el modelo del sistema el ruido que, en este caso, es de proceso:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A * X + B * U_{real} + Br * R_{real} \\ Y_{real} &= C * X\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde el significado de las variables  $X$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $U_{real}$  e  $Y_{real}$  es el mismo que en (5.1) (ver capítulo V) y  $Br$  es la matriz de entrada para el ruido de proceso  $R_{real}$ .

Al hacer el cambio de base que diagonaliza la matriz  $A$  del sistema, encontramos que:

$$(V^{-1} * \dot{X}) = (V^{-1} * A * V) * (V^{-1} * X) + (V^{-1} * B) * U_{real} + (V^{-1} * Br) * R_{real}$$

$$Y_{real} = (C * V) * (V^{-1} * X)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\dot{z} = \Lambda_r * z + B_n * U_{real} + Br_n * R_{real} \quad (6.2)$$

$$Y_{real} = C_n * z$$

Tenemos que  $Br$  es una matriz con  $2N+2P$  filas y  $P$  columnas que presenta la forma siguiente:

$$Br = \begin{bmatrix} 0_{1,1} & 0_{1,2} & \cdots & 0_{1,P-1} & 0_{1,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{2N+P,1} & 0_{2N+P,2} & \cdots & 0_{2N+P,P-1} & 0_{2N+P,P} \\ 1_{2N+P+1,1} & 0_{2N+P+1,2} & \cdots & 0_{2N+P+1,P-1} & 0_{2N+P+1,P} \\ 0_{2N+P+2,1} & 1_{2N+P+2,2} & \cdots & 0_{2N+P+2,P} & 0_{2N+P+2,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{2N+2P,1} & 0_{2N+2P,2} & \cdots & 0_{2N+2P,P-1} & 1_{2N+2P,P} \end{bmatrix}$$

Como se observa, las entradas de ruido se encuentran desacopladas en la representación original. Sin embargo, tras el cambio de base, dichas entradas se acoplan entre sí y la matriz  $Br_n$  tiene, en general, todos sus elementos distintos de cero. Así pues, tenemos que plantearnos si con el método propuesto para las salidas y las entradas de control podemos o no desacoplar las entradas de ruido.

Ya demostramos en su momento que podemos encontrar dos matrices  $T_u$  y  $T_y$ , tales que:

$$B_v = B_n * T_u^{-1}$$

$$C_v = T_y^{-1} * C_n$$

siendo  $B_v$  y  $C_v$  las matrices en (5.3) y (5.4), respectivamente (ver capítulo V).

De la misma forma es posible hallar otra matriz que llamamos  $T_{u,r}$ , tal que:

$$Br_v = Br_n * T_{u,r}^{-1}$$

teniendo  $Br_v$  la misma forma que la matriz  $B_v$  en (5.6) (ver capítulo V). Nótese que tanto  $Br_v$  como  $T_{u,r}$  se calculan con el mismo procedimiento que  $B_v$  y  $T_u$  sin más que sustituir la matriz  $B$  por  $Br$ .

Así, podemos escribir el sistema en (6.2) como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \Lambda_r * z + B_v * U_{virtual} + Br_v * R_{virtual} \\ Y_{virtual} &= C_v * z \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde:

$$\begin{aligned} U_{virtual} &= T_u * U_{real} \\ Y_{virtual} &= T_y^{-1} * Y_{real} \\ R_{virtual} &= T_{u,r} * R_{real} \end{aligned}$$

El sistema en (6.3) tiene tanto las entradas de control ( $U_{virtual}$ ) como las de ruido ( $R_{virtual}$ ) y las salidas ( $Y_{virtual}$ ) desacopladas.

## **VI.2. EFECTO DE LAS INCERTIDUMBRES EN LA DINÁMICA DEL ESPEJO SOBRE EL DESACOPLO DEL MISMO**

Considerar en el modelo del espejo las incertidumbres en la dinámica del mismo que, como ya explicamos en el capítulo II, pueden provenir tanto de la rigidez de los soportes de los segmentos,  $k_s$ , como de la frecuencia propia de los actuadores,  $w_n$ , tiene mayor impacto sobre el método de desacoplo que el hecho de incluir el ruido de proceso. En realidad, puesto que el desacoplo lo hemos llevado a cabo sobre el subsistema compuesto por la celda y los segmentos, ya que la dinámica de los actuadores está ya desacoplada, sólo analizaremos cómo afectan al desacoplo las variaciones en el valor de la variable  $k_s$ .

Tal y como comentamos en el capítulo II, el parámetro  $k_s$  puede tomar valores distintos para cada uno de los soportes de los segmentos, aunque no presenta variaciones a lo largo del tiempo. Esto, que en principio podríamos pensar que simplifica el proceso de control puesto que se pueden determinar cada una de las  $k_s$  a priori, resulta nocivo para el método de desacoplo que hemos diseñado y presentado en este capítulo. Como hemos puesto de manifiesto a lo largo del mismo en numerosas

ocasiones, este método tiene su razón de ser en la multiplicidad del autovalor  $\lambda_A$  de la planta, asociado a la dinámica de los segmentos. Ello nos permite, entre otras cosas, recombinar los vectores del subespacio correspondiente sin alterar con ello la dinámica del sistema.

Tomando un valor de  $k_s$  distinto para cada soporte nos encontramos con que desaparece esta multiplicidad y, por tanto, el desacoplo, tal y como lo hemos diseñado, deja de ser válido. Sin embargo, y puesto que el valor de la rigidez de los soportes varía en torno al valor nominal,  $k_s = 6 \times 10^6 \text{ N/m}$ , pero de forma acotada (ver capítulo II), nos parece interesante llevar a cabo un breve estudio sobre hasta qué punto el desacoplo que se consigue para el sistema nominal sigue siendo aceptable cuando consideramos las incertidumbres en la dinámica del espejo, concretamente en el valor de  $k_s$ .

Comenzamos este estudio estimando la dispersión de los autovalores del subsistema  $S_2$  (compuesto por los segmentos cuya dinámica no se modifica por el acoplamiento con la celda) en torno al valor nominal,  $\lambda_A$ , para distintos grados de incertidumbre en el valor de  $k_s$ . Para ello, en la siguiente tabla presentamos la mayor distancia, expresada tanto en valor absoluto como en tanto por ciento, de los valores propios del subsistema  $S_2$  al autovalor  $\lambda_A$ , para distintas variaciones de la constante de rigidez de los soportes de los segmentos respecto al valor nominal.

$\Delta k_s$ (%)	<i>Máxima diferencia</i> (valor absoluto)	<i>Máxima diferencia</i> (%)
$\pm 0.05$	0.0273	0.0149
$\pm 0.1$	0.0519	0.0284
$\pm 0.25$	0.1193	0.0653
$\pm 0.5$	0.2134	0.1169
$\pm 0.75$	0.2933	0.1606
$\pm 1$	0.4376	0.2397
$\pm 1.5$	0.6999	0.3833

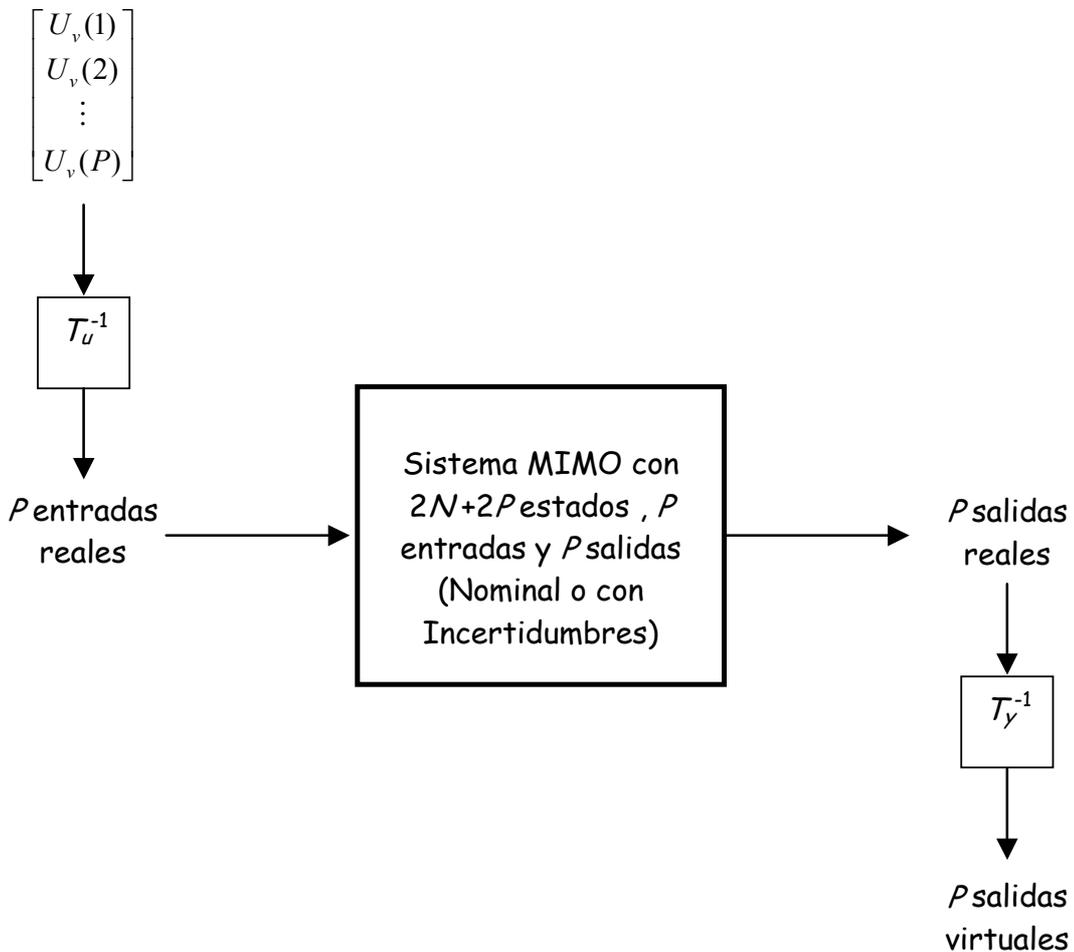
$\pm 2$	0.8261	0.4525
$\pm 2.5$	1.0300	0.5641
$\pm 3$	1.2334	0.6755
$\pm 3.5$	1.7405	0.9533
$\pm 4$	1.7496	0.9583
$\pm 4.5$	1.6390	0.8977
$\pm 5$	2.2260	1.2192

**Tabla 6.1:** Máxima desviación, en valor absoluto y en tanto por ciento, de los autovalores del sistema variando la  $k_s$  respecto a los de la planta nominal.

Observamos que a medida que aumenta la desviación del valor de los  $k_s$  en torno al valor nominal (nótese que puesto que la variación es en un entorno de  $\pm h$  % del valor nominal, de forma neta es del  $2h$ %) siguiendo una distribución normal, la máxima diferencia entre los autovalores resultantes y los correspondientes a la planta nominal ( $\Delta k_s = 0\%$ ) aumenta, aproximadamente, de forma lineal. Asimismo vemos que esta diferencia tiene un valor bastante pequeño incluso para la máxima incertidumbre ( $\Delta k_s = \pm 5\%$ ). Este resultado nos lleva a plantearnos que las matrices que obtenemos para el desacoplo del sistema nominal,  $T_u$  y  $T_y$ , podrían seguir siendo válidas en el caso de considerar pequeñas incertidumbres en el valor del parámetro  $k_s$ .

Para estudiar este efecto vamos a llevar a cabo la simulación de la planta en lazo abierto empleando las matrices de desacoplo  $T_u$  y  $T_y$ , tal y como mostramos en el siguiente dibujo:

$P$  entradas  
virtuales:



Con el objeto de comprobar el grado de desacoplo de la planta, excitamos una sola de las entradas virtuales y medimos la correspondiente respuesta de las salidas virtuales. Si el desacoplo es completo, debemos encontrar que:

- **Caso 1:** Si la entrada excitada es alguna de las  $N$  primeras que, como ya hemos visto, afectan al subsistema que hemos llamado  $S_1$  (compuesto por los  $N$  modos de la estructura y los otros tantos actuadores cuya dinámica se altera por el acoplo con ésta), las únicas salidas virtuales que responden a esta entrada son las del mismo subsistema, es decir, las  $N$  primeras. Debido al desacoplo que, como ya hemos demostrado, existe entre los subsistemas  $S_1$  y  $S_2$  (son los  $P-N$  actuadores cuya dinámica no cambia a pesar del acoplo con la celda), las  $P-N$  salidas virtuales restantes no deberían verse alteradas.

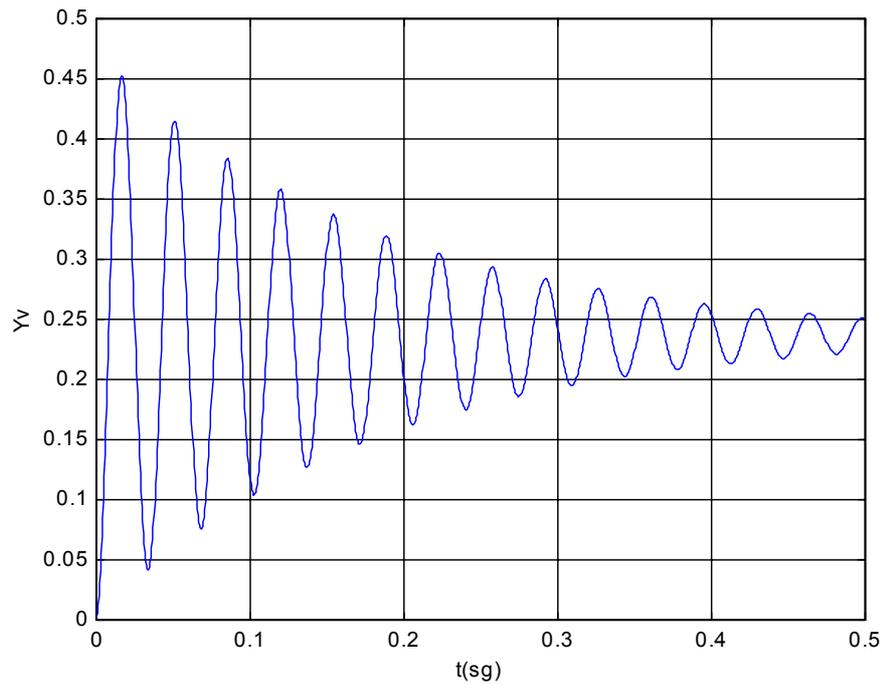
- **Caso 2**: Si la entrada excitada corresponde a alguna de las del subsistema  $S_2$ , esto es, es alguna de las  $P-N$  últimas, esperamos encontrar que, por un lado, las salidas virtuales del subsistema  $S_1$  no se ven afectadas debido al desacoplo entre subespacios y, por el otro, que la única salida virtual que responde a la entrada es la que corresponde a ésta. El resto deben permanecer inalteradas gracias al proceso de desacoplo llevado a cabo en  $S_2$ .

En realidad, esto ocurriría en el caso ideal, es decir, si el desacoplo del sistema fuese perfecto. Sin embargo, veremos a continuación que, incluso en el caso nominal, esto no ocurre. Por tanto, lo que debemos comprobar es que la influencia del comando virtual es mucho mayor en la salida o salidas virtuales correspondientes a la entrada excitada que en el resto. Queremos hacer notar que, en todos los casos, hemos optado por presentar los resultados obtenidos en el caso más general posible, esto es,  $N=30$  y  $P=108$ .

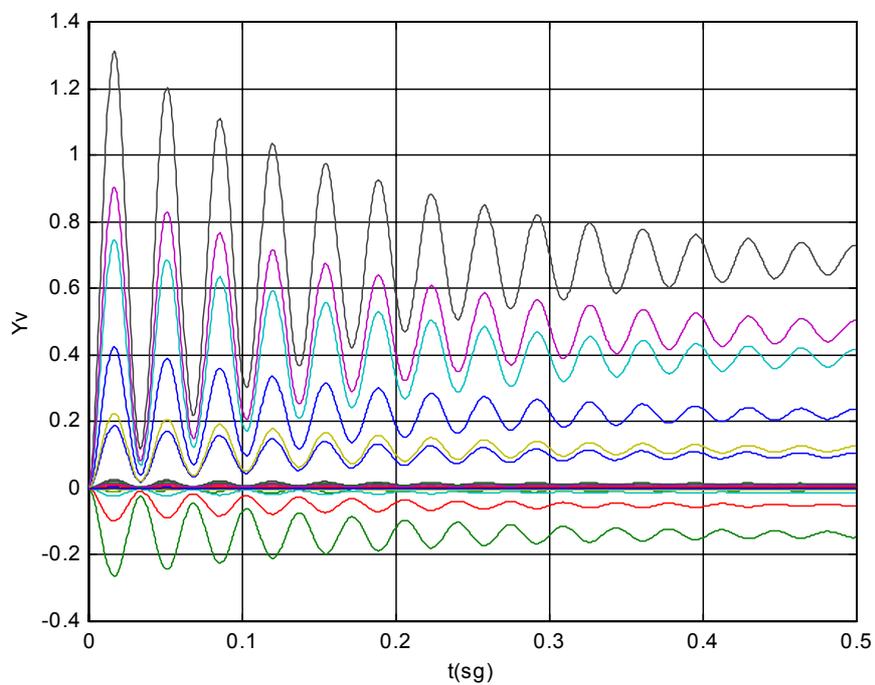
### **VI.2.1. Estimación del desacoplo en el sistema nominal**

Para saber cómo se degrada el desacoplo al incluir en el sistemas las incertidumbres en  $k_s$ , es necesario comparar los resultados obtenidos con los correspondientes al sistema nominal, para lo cual ejecutamos el algoritmo creado para tal fin, en este último caso, encontrando que:

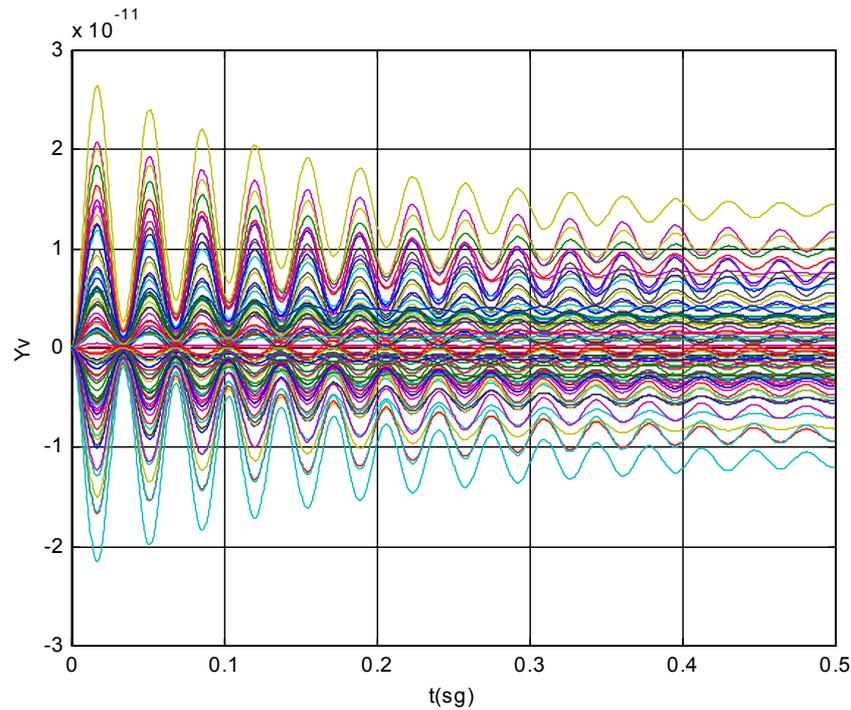
- **Caso 1**: En este primer caso excitamos una de las  $N$  primeras entradas virtuales, concretamente la nº 15, con un escalón unitario. Si llevamos a cabo la simulación del sistema nominal en lazo abierto en estas condiciones y representamos gráficamente la respuesta del mismo, obtenemos las siguientes figuras:



**Figura 6.1:** Respuesta de la salida virtual n° 15 en lazo abierto cuando excitamos la misma entrada virtual con un escalón unitario.



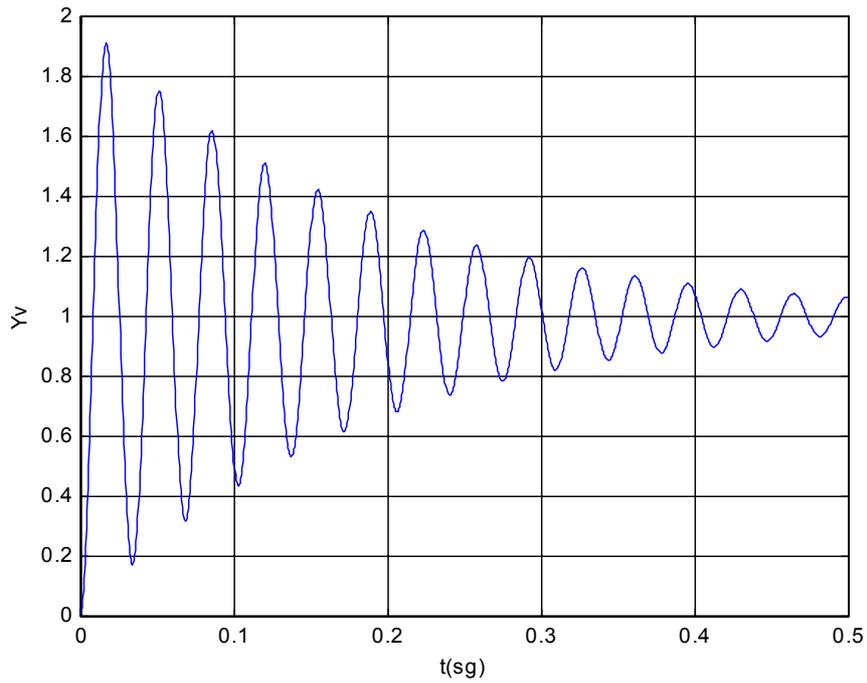
**Figura 6.2:** Respuesta del resto de salidas virtuales del subsistema  $S_1$  en lazo abierto cuando excitamos la entrada virtual n° 15 con un escalón unitario.



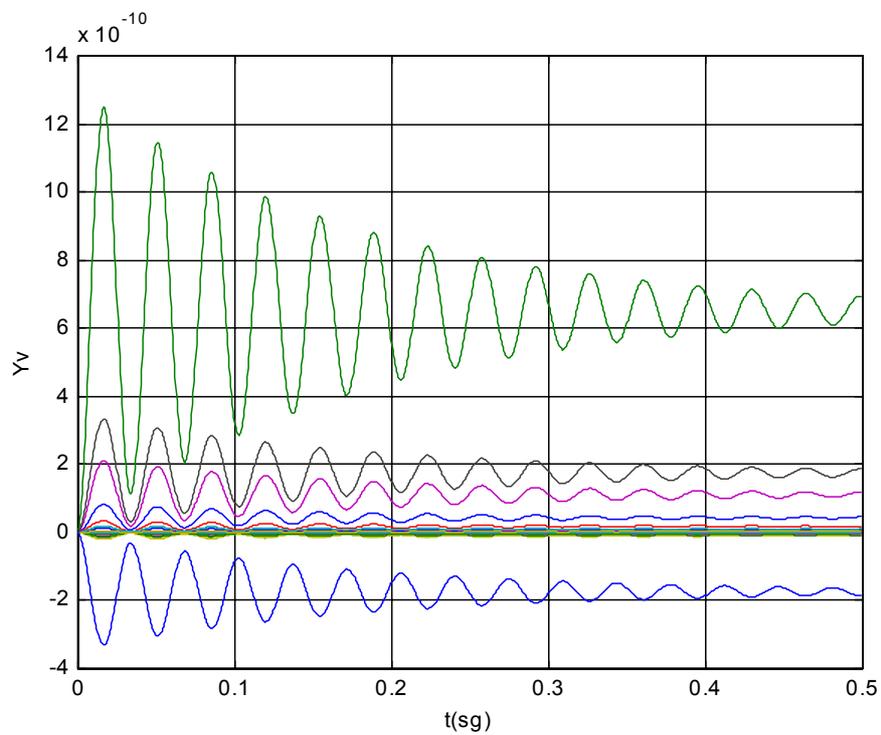
**Figura 6.3:** Respuesta de las  $P-N=108-30$  salidas virtuales del subsistema  $S_2$  en lazo abierto cuando excitamos la entrada virtual nº 15 con un escalón unitario.

En las figuras 6.1, 6.2 y 6.3, se observa que, efectivamente, existe un desacoplo claro entre los dos subsistemas ya que, cuando excitamos una de las  $N$  primeras entradas virtuales, las  $P-N$  últimas salidas virtuales se ven afectadas en un factor de  $10^{-10}$  respecto a la correspondiente a la entrada excitada.

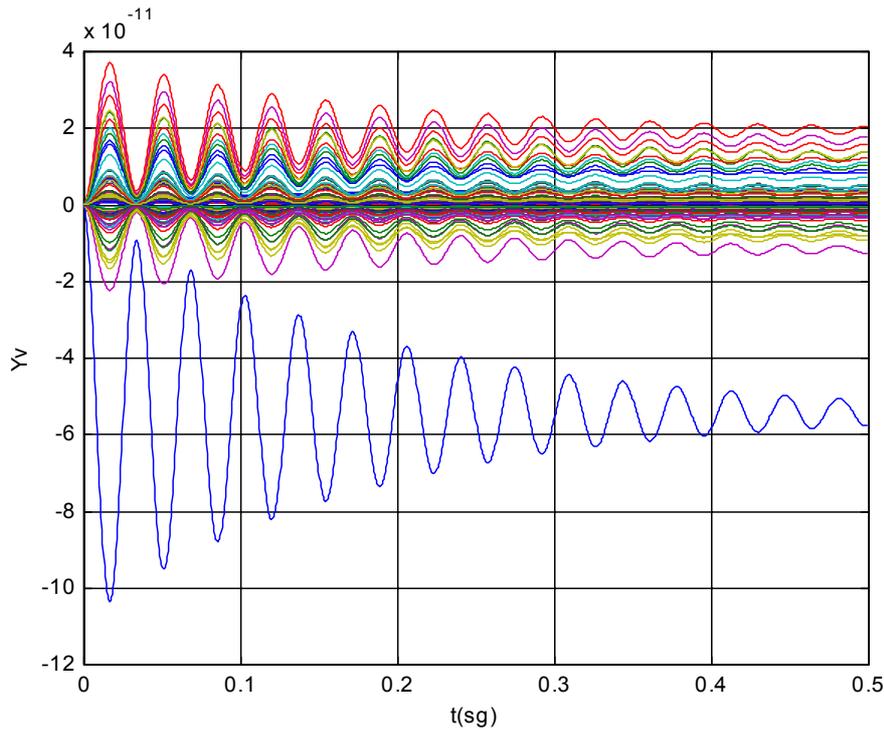
- **Caso 2:** En esta ocasión, excitamos una de las entradas virtuales del subsistema  $S_2$ , concretamente la nº 65. Los resultados de la simulación los mostramos en las siguientes gráficas:



**Figura 6.4:** Respuesta de la salida virtual n° 65 en lazo abierto cuando excitamos la misma entrada virtual con un escalón unitario.



**Figura 6.5:** Respuesta de las  $N=30$  salidas virtuales del subsistema  $S_1$  en lazo abierto cuando excitamos la entrada virtual n° 65 con un escalón unitario.



**Figura 6.6:** Respuesta del resto de salidas virtuales del subsistema  $S_2$  en lazo abierto cuando excitamos la entrada virtual nº 65 con un escalón unitario.

Excitando una de las entradas virtuales correspondientes al subsistema  $S_2$  encontramos nuevamente el desacoplo entre subsistemas, tal y como muestra la figura 6.5. Pero en este caso, además podemos comprobar que efectivamente se consigue el desacoplo dentro de  $S_2$ , subsistema para el que hemos diseñado el método de desacoplo que hemos presentado en los capítulos IV y V. En la figura 6.6 representamos la respuesta temporal de todas las salidas virtuales de  $S_2$ , excepto la correspondiente a la única entrada que excitamos y si la comparamos con la de la figura 6.4, comprobamos que entre ambas hay un factor de  $10^{-11}$  (aunque, en realidad, para un gran número de salidas este factor es mucho más pequeño, como se aprecia en la gráfica de la figura 6.6).

### VI.2.2. Estimación del desacoplo incluyendo incertidumbres en la dinámica del sistema

Para estudiar en qué medida afectan al desacoplo de la planta las incertidumbres en la dinámica, hemos llevado a cabo simulaciones en lazo abierto en los casos 1 y 2, considerando diferentes variaciones en el parámetro  $k_s$  respecto al valor nominal. Si

dicha variación se mantiene dentro de los márgenes que aparecen en la tabla 6.1, es de esperar que el comportamiento del sistema nominal y con incertidumbres sea bastante parecido, como así lo pronostican los resultados presentados en la misma tabla. Una gran divergencia en las respuestas obtenidas en ambos casos implicaría que el desacoplo, tal y como lo hemos diseñado, no es aplicable cuando la dinámica de la planta difiere de la nominal.

Los resultados obtenidos los presentamos en forma de tablas donde mostramos en las columnas 2, 3 y 4 el máximo valor absoluto alcanzado durante el tiempo de simulación por la salida virtual  $Y_v$  que corresponde a la entrada excitada, por el resto de las  $Y_v$  del mismo subsistema y, por último, por las  $Y_v$  del otro, respectivamente.

**Caso 1:**

$\Delta k_s$ (%)	M° valor alcanzado por la $Y_v$ n° 15	M° valor alcanzado por las $Y_v$ restantes en $S_1$	M° valor alcanzado por las $Y_v$ de $S_2$
0	0.4528	1.3106	$2.6430 \times 10^{-11}$
$\pm 0.05$	0.4528	1.3106	$2.1292 \times 10^{-4}$
$\pm 0.1$	0.4528	1.3106	$4.2582 \times 10^{-4}$
$\pm 0.25$	0.4528	1.3106	$1.0643 \times 10^{-3}$
$\pm 0.5$	0.4528	1.3106	$2.1278 \times 10^{-3}$
$\pm 0.75$	0.4528	1.3106	$3.1900 \times 10^{-3}$
$\pm 1$	0.4528	1.3106	$4.2507 \times 10^{-3}$
$\pm 1.5$	0.4528	1.3106	$6.3658 \times 10^{-3}$
$\pm 2$	0.4528	1.3105	$8.4703 \times 10^{-3}$
$\pm 2.5$	0.4528	1.3105	$1.0567 \times 10^{-2}$
$\pm 3$	0.4528	1.3105	$1.2660 \times 10^{-2}$
$\pm 3.5$	0.4528	1.3105	$1.4739 \times 10^{-2}$
$\pm 4$	0.4528	1.3104	$1.6803 \times 10^{-2}$
$\pm 4.5$	0.4527	1.3104	$1.8849 \times 10^{-2}$
$\pm 5$	0.4527	1.3104	$2.0873 \times 10^{-2}$

**Tabla 6.2:** Excitamos la entrada virtual n° 15 con un escalón unitario.

Como vemos, el desacoplo entre las salidas virtuales de los dos subsistemas cae siete órdenes de magnitud (de  $10^{-11}$  a  $10^{-4}$ ) si permitimos que la rigidez de los soportes de los segmentos varíe un  $\pm 0.05\%$  en torno al valor nominal. Sin embargo, a medida que la incertidumbre en esta variable aumenta, el máximo valor absoluto alcanzado en algún momento de la simulación por las salidas virtuales de  $S_2$  crece, pero de forma mucho más suave.

Por tanto, la principal conclusión a la que llegamos a la vista de los resultados mostrados en la tabla 6.2 es que el desacoplo entre  $S_1$  y  $S_2$  se rompe al considerar incertidumbre en  $k_s$  y lo hace gradualmente a medida que ésta varía de  $\pm 0.05\%$  a  $\pm 5\%$ .

**Caso 2:**

$\Delta k_s$ (%)	M° valor alcanzado por la $Y_v$ n° 65	M° valor alcanzado por las $Y_v$ restantes en $S_2$	M° valor alcanzado por las $Y_v$ de $S_1$
0	1.9103	$1.0362 \times 10^{-10}$	$1.2489 \times 10^{-9}$
$\pm 0.05$	1.9103	$2.3313 \times 10^{-4}$	$2.4555 \times 10^{-4}$
$\pm 0.1$	1.9103	$4.6624 \times 10^{-4}$	$4.9107 \times 10^{-4}$
$\pm 0.25$	1.9103	$1.1654 \times 10^{-3}$	$1.2274 \times 10^{-3}$
$\pm 0.5$	1.9103	$2.3301 \times 10^{-3}$	$2.4537 \times 10^{-3}$
$\pm 0.75$	1.9103	$3.4934 \times 10^{-3}$	$3.6784 \times 10^{-3}$
$\pm 1$	1.9103	$4.6550 \times 10^{-3}$	$4.9011 \times 10^{-3}$
$\pm 1.5$	1.9102	$6.9711 \times 10^{-3}$	$7.3384 \times 10^{-3}$
$\pm 2$	1.9102	$9.2747 \times 10^{-3}$	$9.7618 \times 10^{-3}$
$\pm 2.5$	1.9102	$1.1562 \times 10^{-2}$	$1.2167 \times 10^{-2}$
$\pm 3$	1.9102	$1.3830 \times 10^{-2}$	$1.4552 \times 10^{-2}$
$\pm 3.5$	1.9101	$1.6089 \times 10^{-2}$	$1.6911 \times 10^{-2}$
$\pm 4$	1.9101	$1.8326 \times 10^{-2}$	$1.9242 \times 10^{-2}$
$\pm 4.5$	1.9100	$2.0537 \times 10^{-2}$	$2.1541 \times 10^{-2}$
$\pm 5$	1.9100	$2.2719 \times 10^{-2}$	$2.3828 \times 10^{-2}$

**Tabla 6.3:** Excitamos la entrada virtual n° 65 con un escalón unitario.

A la vista de los resultados mostrados en la tabla 6.3, que corresponden a la aplicación de un escalón unitario a la entrada virtual n° 65 (correspondiente a  $S_2$ ), y más concretamente en la última columna, se constata la ruptura del desacoplo entre subespacios.

Además, en este caso comprobamos cómo el desacoplo entre las salidas virtuales de  $S_2$  decae cuando incluimos en el modelo de la planta incertidumbres en la dinámica y cómo lo hace al mismo ritmo que se degrada el desacoplo entre subsistemas, tal y como se pone de manifiesto al comparar las dos últimas columnas de esta tabla.

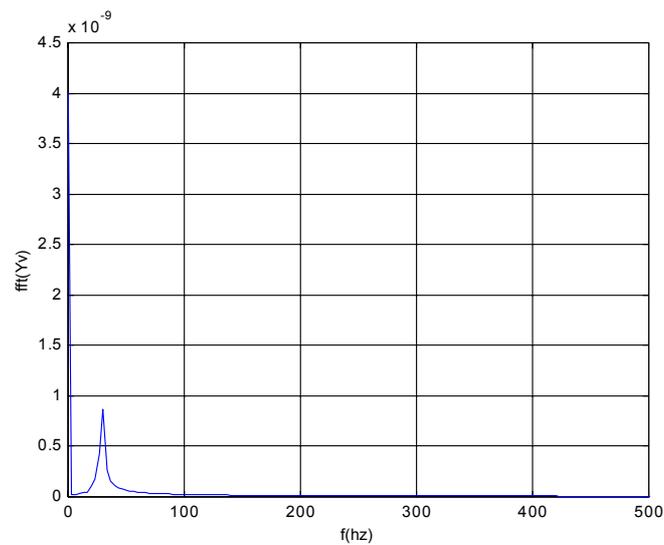
Sin embargo, es imposible saber si estos resultados son aceptables o no sin compararlos con lo que ocurre cuando aplicamos un escalón unitario a la entrada (ahora real) n° 65 del sistema sin desacoplar y llevar a cabo un estudio similar al que refleja la tabla 6.3. En esta ocasión consideramos únicamente los extremos del intervalo de variación de  $k_s$  y la razón para ello es clara a la vista de la siguiente tabla:

$\Delta k_s$ (%)	M° valor alcanzado por la $Y_r$ n° 65	M° valor alcanzado por las $Y_r$ restantes en $S_2$
0	1.8972	$4.5248 \times 10^{-2}$
$\pm 0.05$	1.8972	$4.5251 \times 10^{-2}$
$\pm 5$	1.8968	$4.5457 \times 10^{-2}$

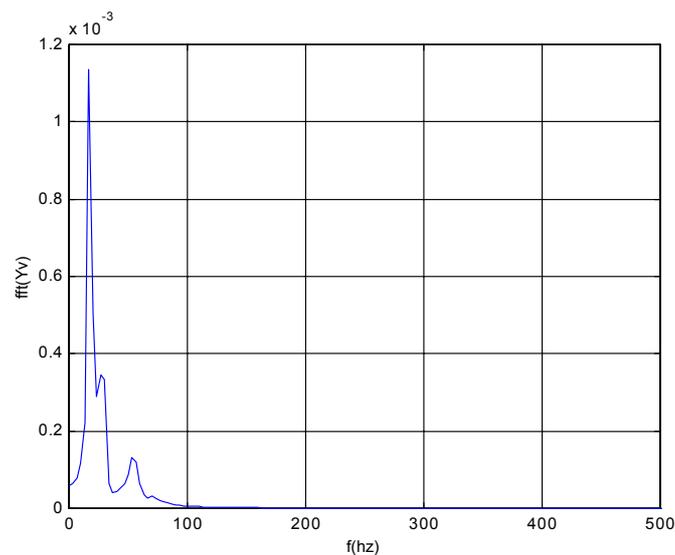
**Tabla 6.4:** Excitamos la entrada real n° 65 del sistema sin desacoplar con un escalón unitario.

De lo primero que nos percatamos es que con el sistema desacoplado no hay apenas diferencias entre los resultados obtenidos con un  $\pm 0.05\%$  o un  $\pm 5\%$  de incertidumbre. Esto es lógico si tenemos en cuenta la tabla 6.1 en la que se ve que la dinámica del sistema, esto es, sus polos, apenas sufren variaciones importantes para las incertidumbres consideradas. Pero, sin duda, la conclusión más importante que extraemos al comparar las tablas 6.3 y 6.4 es que, a partir de un  $\Delta k_s = \pm 1.5\%$ , el método diseñado para el desacoplo del subsistema  $S_2$  deja por completo de ser efectivo. Para incertidumbres más pequeñas, entre un  $\pm 0.05\%$  y un  $\pm 1\%$ , se consigue rebajar en uno o dos órdenes de magnitud el desacoplo de las entradas y salidas en  $S_2$ .

Por último, con el objeto de ilustrar gráficamente cómo se rompe el desacoplo entre los subsistemas  $S_1$  y  $S_2$  debido a la influencia de las incertidumbres en el modelo, presentamos una serie de figuras en el dominio de las frecuencias. En ellas representamos la transformada de Fourier [Brigham, 1988] [Little, 1992] de la respuesta del sistema (salidas virtuales) y corresponden al **Caso 2** (sólo actuamos sobre una de las salidas virtuales del subsistema  $S_2$ ).



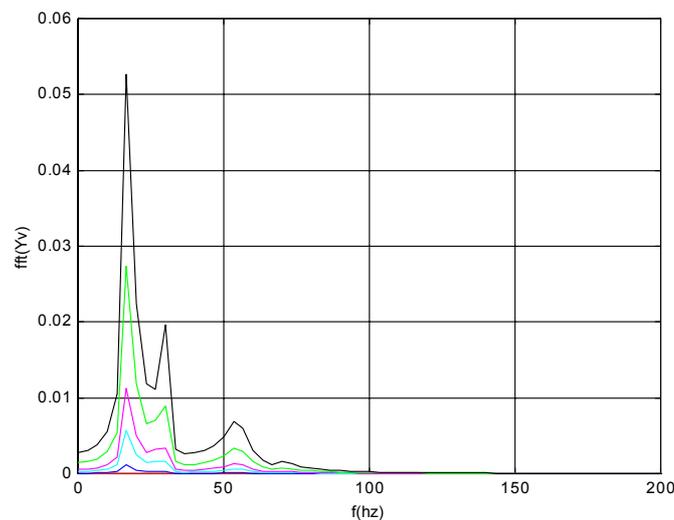
**Figura 6.7:** Espectro de las salidas virtuales en el caso nominal.



**Figura 6.8:** Espectro de las salidas virtuales para un  $\Delta k_s = \pm 0.1\%$ .

En la figura 6.7 vemos cómo, cuando trabajamos con el modelo nominal, el desacoplo entre los subsistemas es patente ya que, si excitamos una de las entradas correspondientes a  $S_2$ , sólo aparece en el espectro de la respuesta del sistema total el modo de  $28\text{hz}$ , propio de los  $P-N (=108-30)$  actuadores de  $S_2$ . En cambio, al considerar incertidumbres en el valor de  $k_s$ , aunque ésta sea tan sólo del  $\pm 0.1\%$ , ya observamos en la figura 6.8 que además del modo de  $28\text{hz}$ , se ven también excitados los correspondientes a  $17$  y  $55\text{hz}$ , que corresponden al subsistema  $S_1$ . Estos resultados coinciden con los presentados en la tabla 6.3, donde apreciamos que el factor de desacoplo entre subsistemas cae cinco órdenes de magnitud al incluir un  $\pm 0.1\%$  de incertidumbres en  $k_s$ .

En la figura 6.9 representamos conjuntamente los espectros obtenidos para distintos valores de  $\Delta k_s$  (ver código de colores):



**Figura 6.9:** Espectros de las salidas virtuales para distintos valores de  $\Delta k_s$ .

<b>Rojo</b>	<b>→ Nominal</b>
<b>Azul oscuro</b>	<b>→ <math>\Delta k_s = \pm 0.1\%</math></b>
<b>Azul claro</b>	<b>→ <math>\Delta k_s = \pm 0.5\%</math></b>
<b>Magenta</b>	<b>→ <math>\Delta k_s = \pm 1\%</math></b>
<b>Verde</b>	<b>→ <math>\Delta k_s = \pm 2.5\%</math></b>
<b>Negro</b>	<b>→ <math>\Delta k_s = \pm 5\%</math></b>

En el dominio de las frecuencias es imposible mostrar cómo desaparece el desacoplo dentro del subsistema  $S_2$  a medida que aumenta  $k_s$  (ver tabla 6.3). El motivo es que aunque vimos que a partir de un  $\Delta k_s = \pm 1.5\%$ , las salidas virtuales están tan acopladas como las reales en el sistema original (ver tablas 6.3 y 6.4), el modo que corresponde a todos los actuadores de  $S_2$  sigue estando en 28hz.



## CAPÍTULO VII

# DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA EL SISTEMA DESACOPLADO. ESTUDIO DE ROBUSTEZ Y RECHAZO AL RUIDO

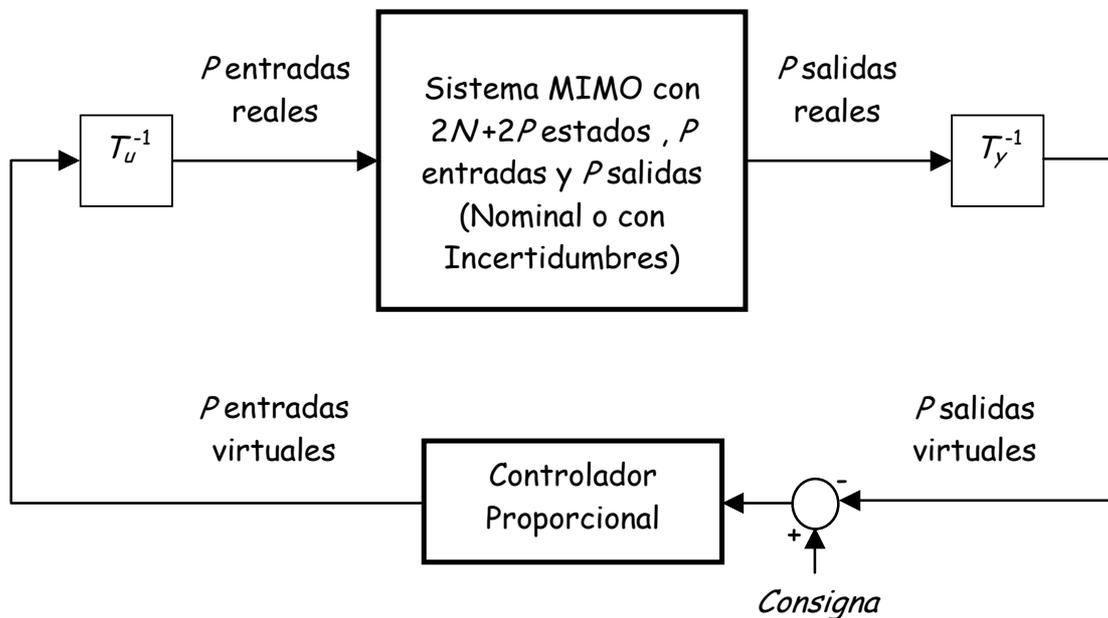
En este capítulo presentamos un estudio de las prestaciones obtenidas con una serie de controladores diseñados para el sistema desacoplado [Siljak, 1991], [Huang, 1998]. A través de este estudio se pone de manifiesto la importancia del procedimiento de desacoplo del espejo primario del GTC, que hemos presentado en los capítulos previos, por cuanto nos permite abordar el problema del control del sistema global [Boyd, 1991], [Campo, 1994], mediante la implementación de controladores SISO.

Los controladores que presentamos en la primera parte de este capítulo están basados en una estrategia proporcional, integral y la combinación de ambas [Aström, 1995]. Para cada una de ellas realizamos, además de simulaciones del sistema en lazo cerrado, un estudio en el dominio de las frecuencias de la robustez frente a incertidumbres en la dinámica del modelo del espejo primario del Gran Telescopio Canarias [Doyle, 1982]. También analizamos el rechazo al ruido que conseguimos con cada uno de los controladores propuestos.

A continuación aplicamos a nuestra planta un controlador  $H_\infty$  [Acosta, 2002], en un intento de mejorar el rendimiento obtenido con los controladores anteriores.

### VII.1. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PROPORCIONAL, INTEGRAL Y PROPORCIONAL-INTEGRAL

Para estudiar el comportamiento del sistema sometido a una acción de control proporcional, nos planteamos realizar la simulación del sistema en lazo cerrado [Grace, 1992], [Matlab, 1992], [Aström, 1984], [Ogata, 1994] empleando las matrices de desacoplo, tal y como mostramos en el siguiente dibujo:



Nuestro objetivo es llevar a cabo la implementación de un control en lazo cerrado como el que mostramos, donde la consigna distinta de cero la imponemos a una sola de las  $P$  salidas virtuales (tendrá un valor igual a la unidad), y donde hemos optado por la estrategia más sencilla: un control proporcional. En este punto, cabe comentar que existen varias alternativas en lo que al diseño del controlador se refiere:

- 1) La primera opción consiste en implementar un controlador del tipo:

$$k_p * \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

donde estaríamos cerrando los  $P$  lazos de realimentación con un control proporcional de igual ganancia. La desventaja que tiene actuar de esta manera es que, para evitar que algunas de las salidas virtuales distintas de la que pretendemos controlar se inestabilice, debemos tomar un valor pequeño para la constante proporcional  $k_p$ , lo que, como veremos a continuación, produce un offset importante en el sistema.

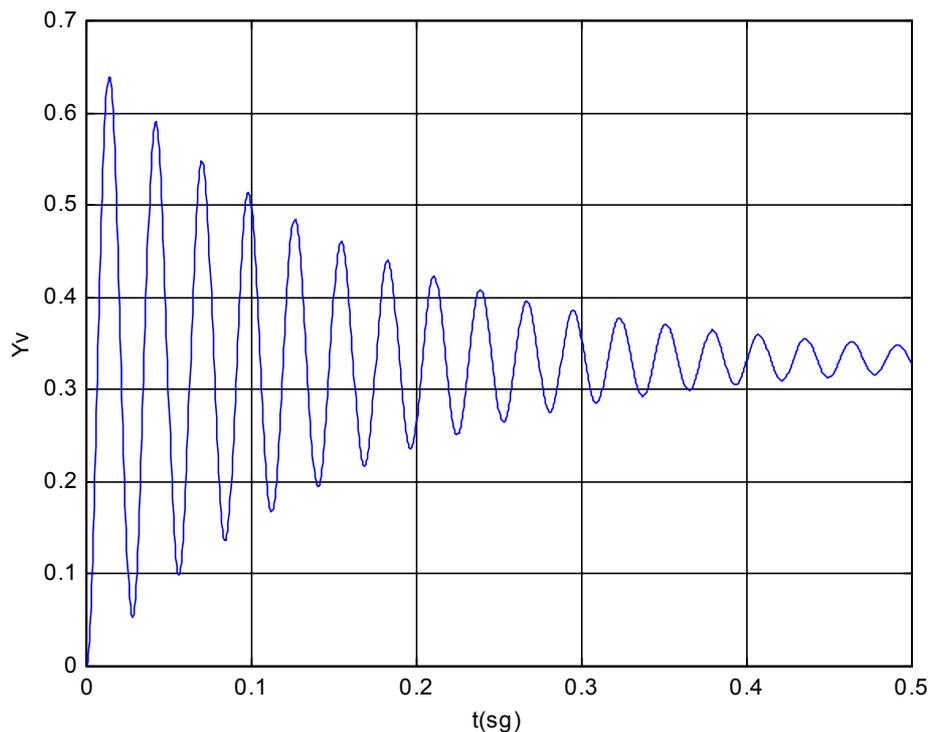
2) La segunda posibilidad consiste en realimentar únicamente la salida que queremos controlar, es decir, implementar un controlador de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

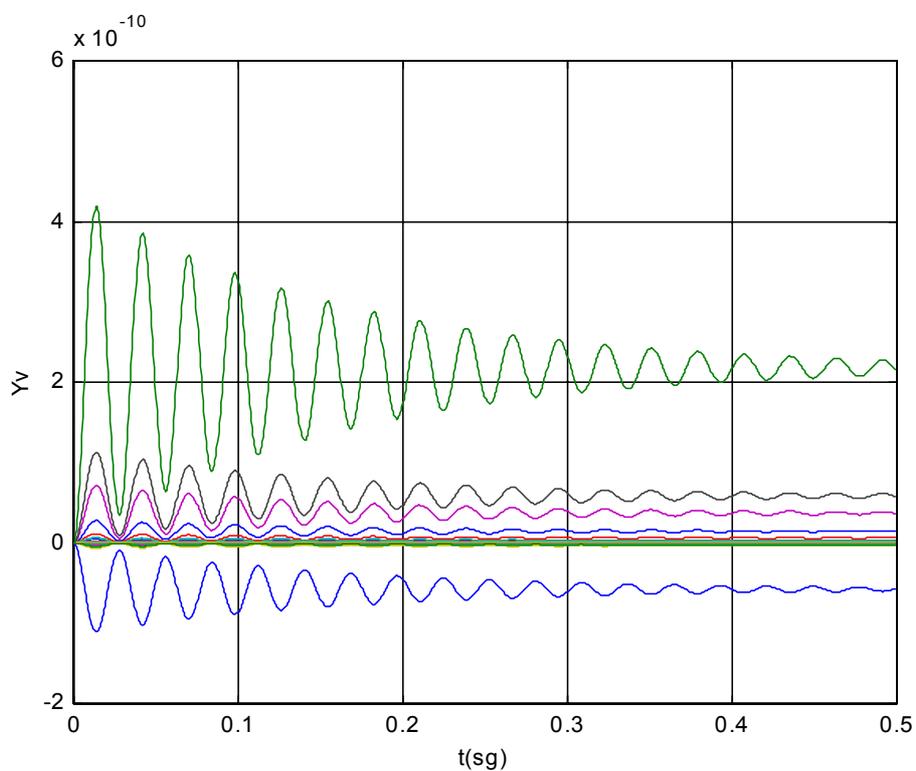
que resulta más interesante puesto que podemos aumentar el valor de  $k_p$ , para lograr un mejor control de la salida virtual elegida, sin que se produzcan efectos de inestabilización del resto de variables. Es por esto por lo que hemos elegido esta segunda estrategia. En caso de querer controlar más de una salida virtual, tendríamos que emplear distintos  $k_p$  para cada uno de los lazos de realimentación.

De nuevo, es obligado ver qué ocurre con el sistema nominal, ya que será la referencia con la que comparar los resultados obtenidos al incluir incertidumbres en la dinámica. Es importante notar que ya que implementamos un controlador SISO, sólo cerramos el lazo de realimentación de una de las salidas virtuales del subsistema  $S_2$ , concretamente elegimos de nuevo la n° 65. En este punto cabe recordar que las  $N$  entradas y salidas de  $S_1$  no están desacopladas entre sí (tampoco en el espacio virtual) y, por tanto, es necesaria la implementación de un controlador MIMO para conseguir que las salidas virtuales de este subsistema sigan la consigna indicada. Sólo cuando hacemos  $N=1$  podemos aplicar un controlador SISO a, en este caso, la única salida de  $S_1$ . De hecho, con un control proporcional, siendo  $k_p = 0.5$ , controlamos esta salida sin afectar al resto.

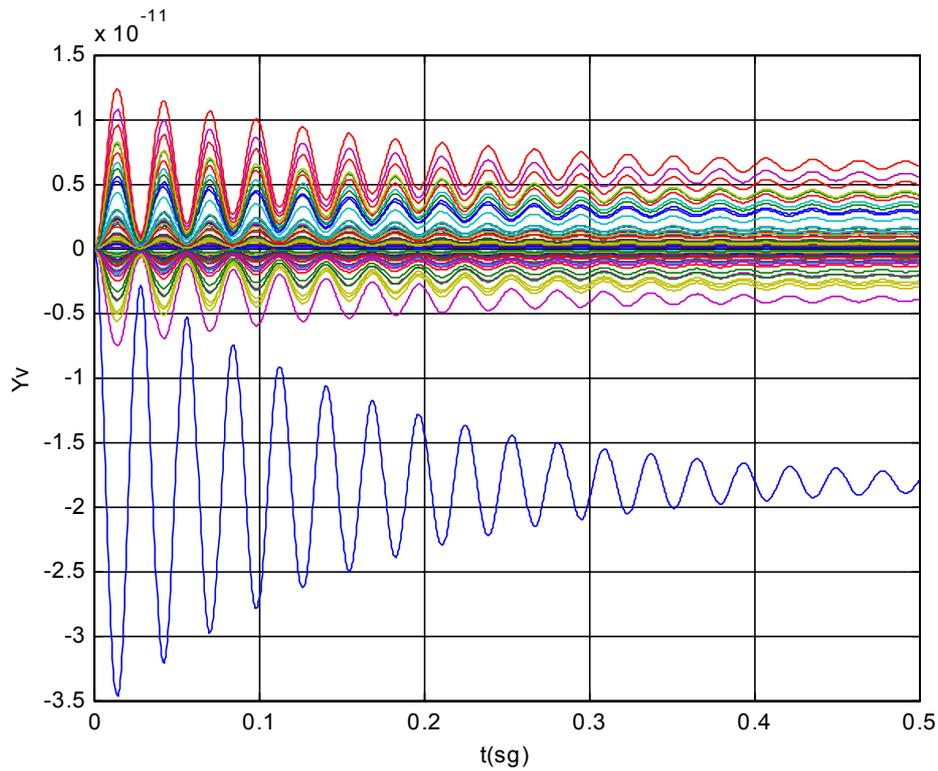
En las figuras que siguen presentamos los resultados de la simulación con  $N=30$  y  $P=108$ :



**Figura 7.1:** Respuesta de la salida virtual n° 65 en lazo cerrado cuando cerramos el lazo de control de ésta con una  $k_p = 0.5$ , siendo la consigna la unidad.



**Figura 7.2:** Respuesta de las  $N=30$  salidas virtuales del subsistema  $S_1$  en lazo cerrado cuando cerramos el lazo de control de la n° 65 con una  $k_p = 0.5$ , siendo la consigna la unidad.

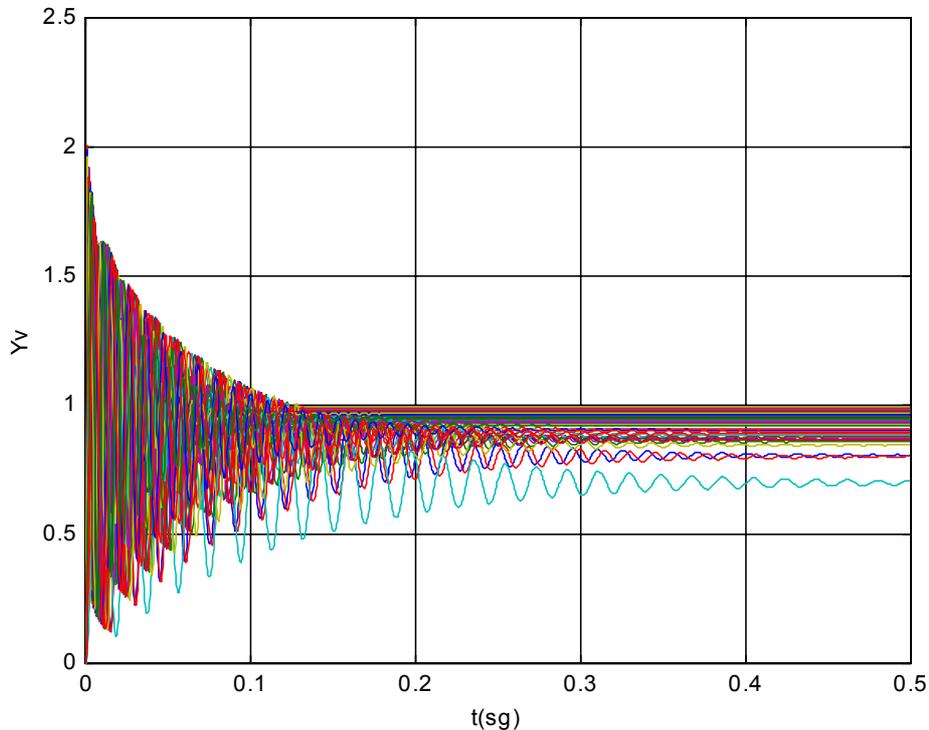


**Figura 7.3:** Respuesta del resto de salidas virtuales del subsistema  $S_2$  en lazo cerrado cuando cerramos el lazo de control de la n° 65 con una  $k_p = 0.5$ , siendo la consigna la unidad.

A la vista de estas gráficas la principal conclusión a la que llegamos es que, por una parte y tal y como cabía esperar, las simulaciones mostradas en las figuras 7.2 y 7.3 son muy parecidas a las de las figuras 6.5 y 6.6 (ver capítulo VI), ya que realmente todas las salidas virtuales, a excepción de la n° 65, evolucionan en lazo abierto. Esta última presenta, para el valor de  $k_p$  elegido (0.5), un offset importante si tenemos en cuenta que la consigna impuesta es +1, tal y como se aprecia en la figura 7.1. Este error en régimen permanente disminuye, como es bien sabido, a medida que aumenta el valor de la constante proporcional. Además, como únicamente cerramos el lazo de control sobre la salida que nos interesa, dicho valor puede aumentar considerablemente sin que ello altere apenas el comportamiento del resto de las salidas de la planta.

Ahora cerraremos los  $P$  lazos de control tomando  $N=1$  (para que los  $P$  controladores sean SISO) y  $P=108$ . Nuevamente, empleamos una estrategia de control proporcional donde, tal y como comentamos con anterioridad, sintonizamos el valor de las  $P$  constantes  $k_p$  que logran un buen comportamiento de la planta para una consigna

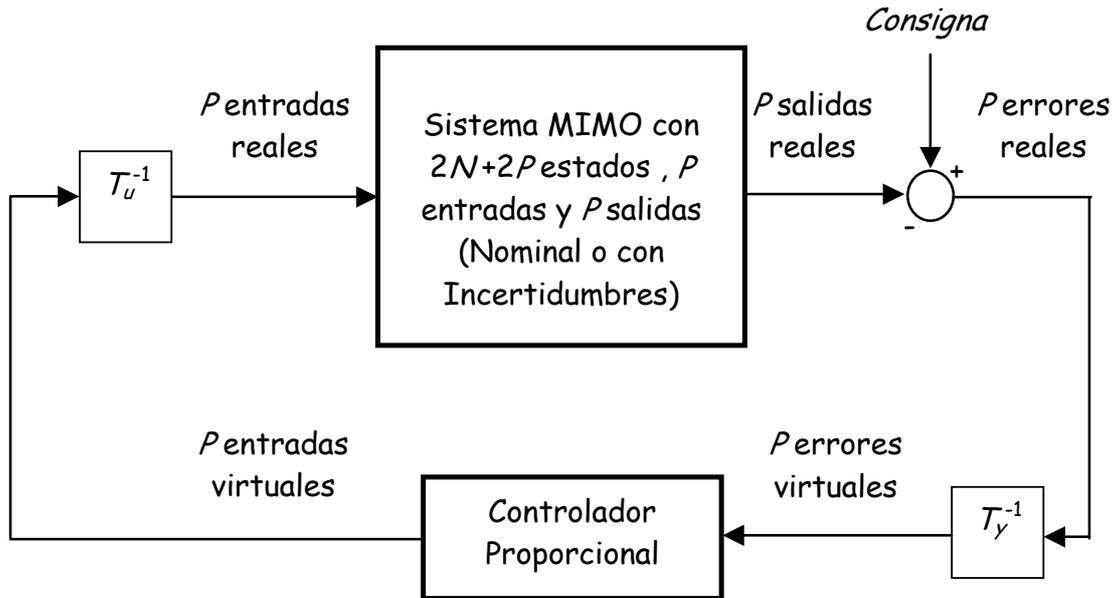
dada (seguimos tomando +1). El resultado de la simulación es el que mostramos en la siguiente figura:



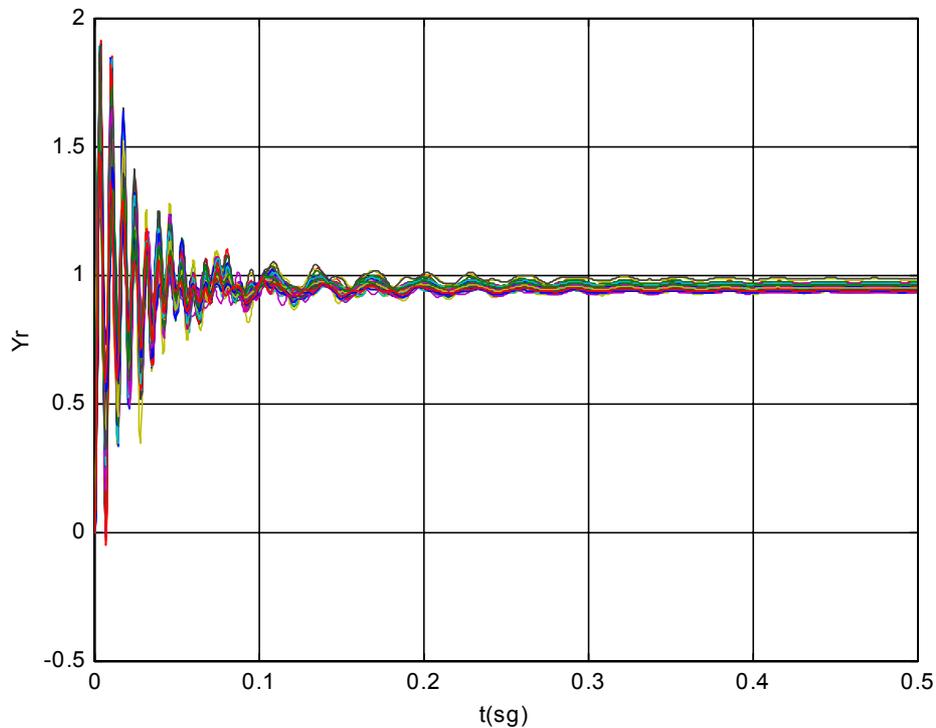
**Figura 7.4:** Respuesta de las  $P=108$  salidas virtuales de la planta nominal cerrando cada uno de los lazos con un control proporcional.

En esta figura se observa cómo, efectivamente, con  $P$  controladores SISO conseguimos que todas las salidas virtuales sigan el valor de consigna marcado aunque, eso sí, presentando diferentes tiempos de respuesta, coeficientes de amortiguamiento y offsets. Queremos hacer notar que la respuesta mostrada en la figura 7.4 podría mejorarse, para las salidas que peor comportamiento presentan, sintonizando mejor el valor de la constante proporcional  $k_p$  del lazo de realimentación correspondiente, aunque en ningún caso lograríamos eliminar el error en régimen permanente debido a la estrategia de control empleada.

En la práctica, si queremos controlar la posición de los segmentos del espejo y conseguir así que ésta sea una determinada, debemos imponer el seguimiento de una consigna a las salidas reales del sistema en lugar de a las virtuales. Con ello, el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado quedaría de la siguiente manera:

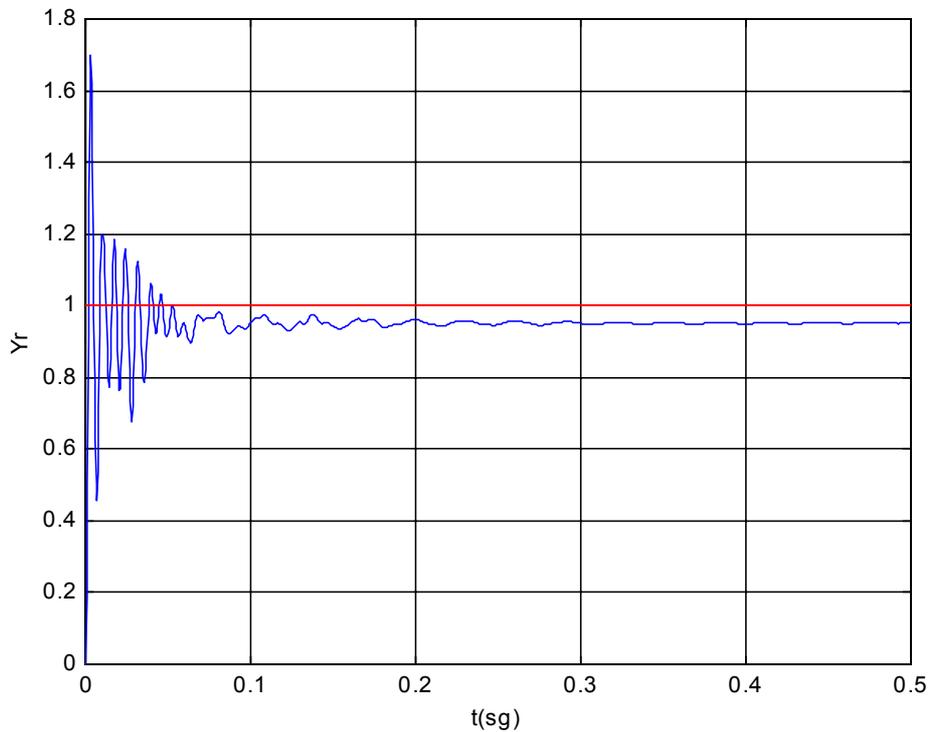


Llevando a cabo la simulación según este esquema, tomando nuevamente como consigna el valor +1, y cerrando el lazo con el mismo controlador proporcional con el que obtuvimos la figura 7.4, obtenemos la siguiente respuesta por parte de las salidas reales del sistema:



**Figura 7.5:** Respuesta de las  $P=108$  salidas reales de la planta nominal cerrando cada uno de los lazos ‘virtuales’ con un controlador proporcional.

Si nos fijamos en una cualquiera de las respuestas, tenemos lo siguiente:



**Figura 7.6:** Respuesta de la salida real n° 20 frente a la consigna con un controlador proporcional.

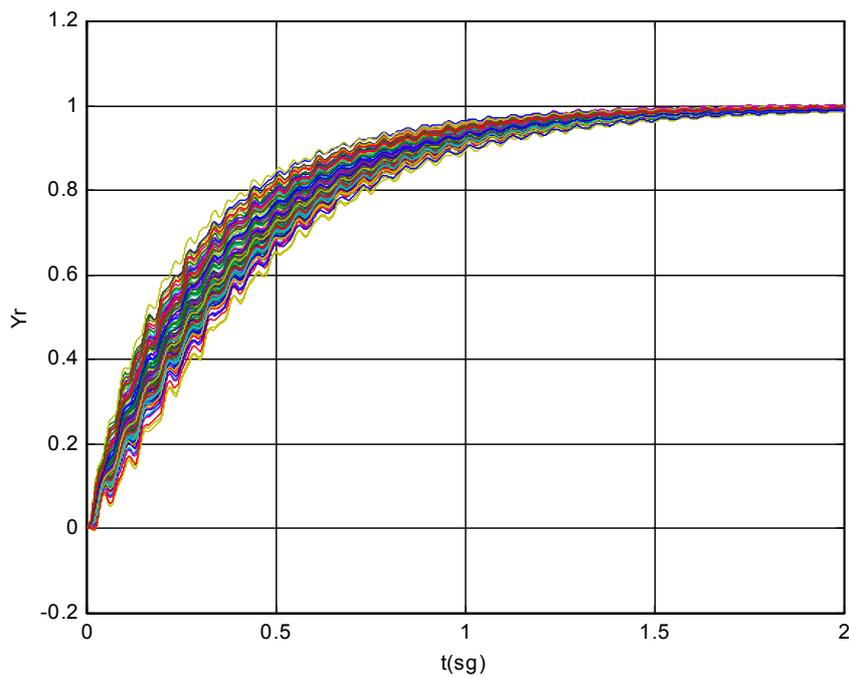
donde en rojo hemos trazado la consigna y en azul la respuesta elegida para dar cuenta del offset que presenta.

Si queremos conseguir eliminar el error en régimen permanente en la respuesta del sistema y lograr así que los segmentos se alineen perfectamente, deberemos emplear otra estrategia de control distinta de la proporcional. Así, nos proponemos ahora diseñar un controlador integral para cada uno de los 108 sistemas SISO en que se transforma la planta (cuando caracterizamos la estructura o celda con un único modo) al aplicarle el desacoplo.

Diseñamos, por tanto, un controlador de la forma:

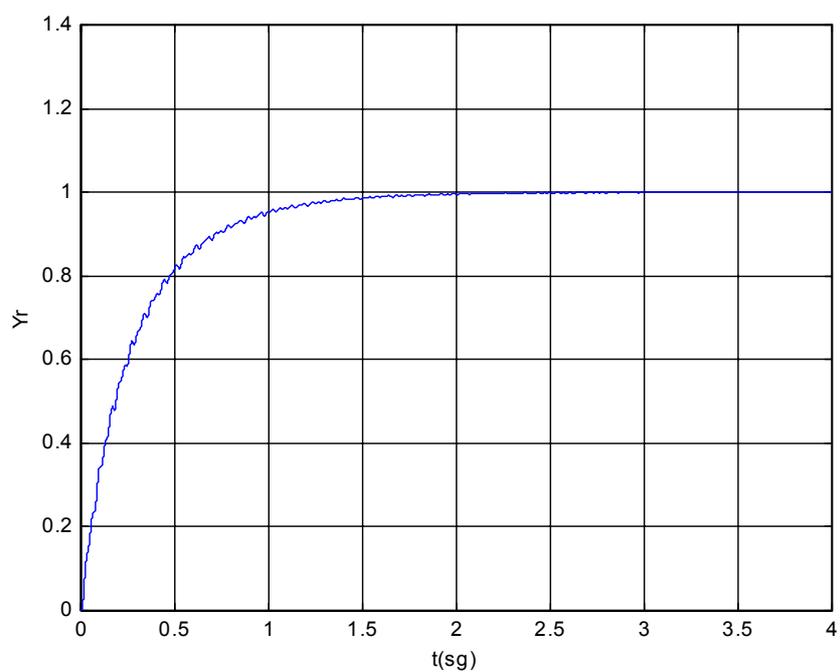
$$F(s) = \frac{k_i}{s}$$

y sintonizamos el valor de la constante integral  $k_i$  para cada uno de los sistemas SISO por separado, lo cual es posible gracias al desacoplo existente entre ellos. Con ello, obtenemos la siguiente respuesta de la planta nominal cuando tomamos el mismo valor de consigna para las 108 salidas reales que en la figura 7.5:



**Figura 7.7:** Respuesta de las  $P=108$  salidas reales de la planta nominal cerrando cada uno de los lazos 'virtuales' con un controlador integral.

Si, de nuevo, vemos la respuesta de una de las salidas reales, tenemos lo siguiente:



**Figura 7.8:** Respuesta de la salida real n° 20 con el controlador integral.

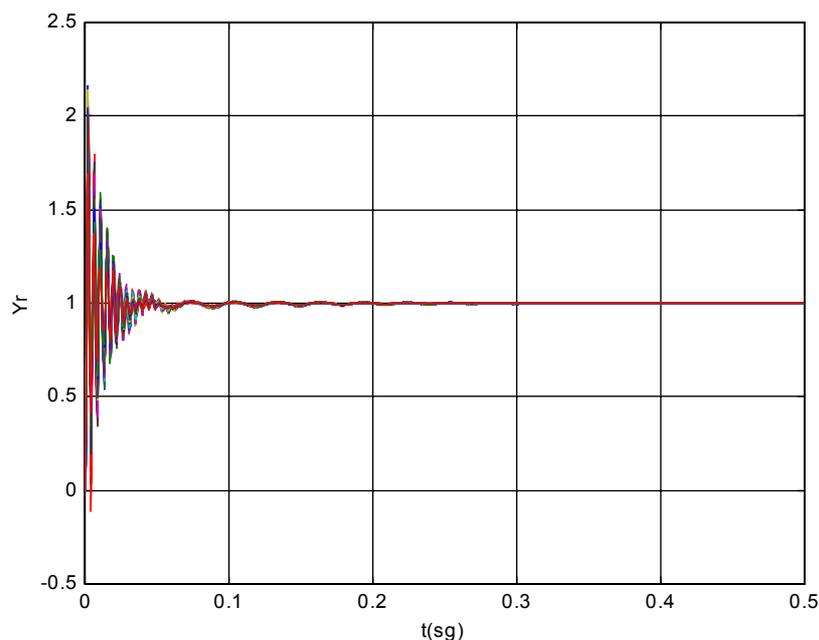
En esta última figura observamos cómo, efectivamente, eliminamos el offset en la respuesta del sistema aunque a costa de aumentar considerablemente el tiempo de establecimiento del mismo.

En un intento de mejorar la respuesta obtenida con los controladores proporcional e integral por separado, implementamos ahora un controlador PI (proporcional-integral). Combinando las dos acciones de control pretendemos eliminar, en lo que a la respuesta temporal se refiere, el error en régimen permanente que observamos en la figura 7.6 y, al mismo tiempo, lograr que el sistema responda más rápidamente de lo que lo hace con el controlador proporcional (ver figura 7.8).

De esta forma, implementamos un controlador dado por la siguiente función de transferencia:

$$F(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

donde ahora debemos sintonizar el valor de los dos parámetros del controlador: la constante proporcional  $k_p$  y la integral  $k_i$ . Nuevamente, al estar el sistema desacoplado, podemos hacer este proceso de ajuste de parámetros para cada uno de los 108 controladores SISO por separado. Con los valores adecuados para  $k_p$  y  $k_i$ , obtenemos la respuesta de la planta nominal que mostramos a continuación, tomando la misma consigna que para representar las figuras anteriores (+1):



**Figura 7.9:** Respuesta de las  $P=108$  salidas reales de la planta nominal cerrando cada uno de los lazos 'virtuales' con un controlador PI.

En esta última figura observamos cómo, efectivamente, con una estrategia proporcional-integral logramos que el sistema alcance perfectamente la consigna respondiendo mucho más rápido que con el controlador integral (ver figuras 7.7 y 7.8).

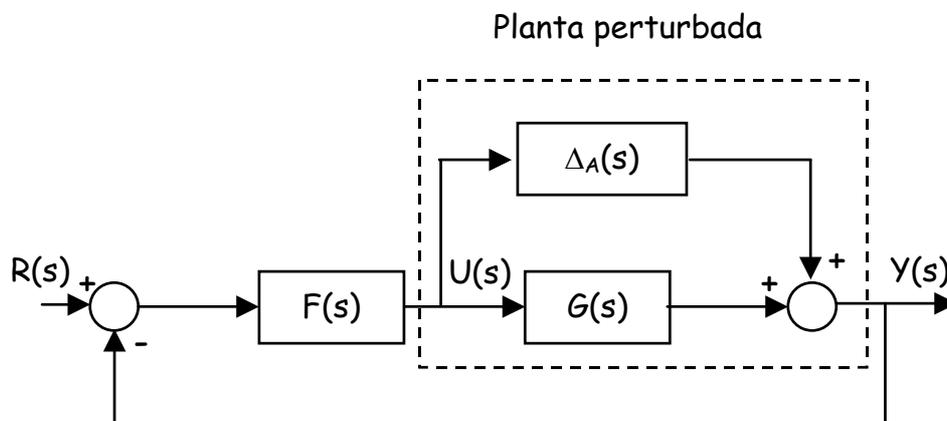
De cara a la implementación práctica de cualquiera de los tres controladores presentados resulta imprescindible estudiar su robustez frente a incertidumbres en el modelo dinámico del espejo primario del GTC, así como el rechazo al ruido que nos permiten conseguir [Skogestad, 1989].

## VII.2. ESTUDIO DE LA ROBUSTEZ DE LOS CONTROLADORES P, I Y PI FRENTE A INCERTIDUMBRES EN LA DINÁMICA

Nuestro objetivo ahora es analizar la robustez de los controladores proporcional, integral y proporcional integral diseñados para el sistema desacoplado, frente a incertidumbres en la dinámica del espejo primario del GTC [Doyle, 1982], [Doyle, 1992]. Estas incertidumbres son debidas a la variación del valor de la constante de rigidez de los segmentos,  $k_s$ , en torno a su valor nominal.

Para llevar a cabo este estudio emplearemos un resultado conocido, el Teorema de Safonov [Chiang, 1992], que, en base a un estudio en el dominio de las frecuencias, nos permite predecir la estabilidad de un sistema en lazo cerrado frente a incertidumbres en la dinámica de la planta [Safonov, 1980].

Para ello, consideremos un sistema MIMO y sea  $\Delta_A(s)$  una perturbación aditiva:



**Figura 7.10:** Diagrama de bloques de un sistema con perturbaciones aditivas en lazo cerrado con un controlador  $F(s)$ .

entonces, podemos enunciar el siguiente teorema:

***Teorema de Safonov***.- Supóngase que el sistema de la figura anterior es estable si  $\Delta_A(s)$  es cero. Entonces, el tamaño de la perturbación aditiva  $\Delta_A(s)$  más pequeña, siendo  $\Delta_A(s)$  estable, para la cual el sistema se hace inestable es:

$$\bar{\sigma}(\Delta_A(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega))}$$

donde:

$\bar{\sigma}(\bullet)$  representa el mayor valor singular de la función que le pasemos como argumento,  $\mathfrak{R}(s)$  es la función de transferencia del comando frente a la entrada de consigna en la planta de la figura 7.10, es decir:

$$\mathfrak{R}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = F(s)(I + L(s))^{-1}, \text{ siendo } L(s) = G(s)F(s) \quad \square$$

Así, cuanto menor sea  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega))$ , más grande será el tamaño de la perturbación aditiva permitida y, por tanto, el margen de estabilidad de la planta.

Como consecuencia de este teorema, se suele especificar el margen de estabilidad del sistema en lazo cerrado como:

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega)) \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(W_2(j\omega))}$$

donde  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))$  representa el tamaño de la mayor perturbación aditiva.

Para hallar  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega))$  necesitamos tener  $\mathfrak{R}(j\omega)$  que, como acabamos de ver, obtenemos como:

$$\mathfrak{R}(s) = F(s)(I + L(s))^{-1} = F(s)(I + G(s)F(s))^{-1}$$

En nuestro caso, debemos en realidad considerar que:

$$\mathfrak{R}(s) = F_d(s) * (I + G(s) * F_d(s))^{-1}$$

siendo:

$$F_d(s) = T_u^{-1} * F(s) * T_y^{-1}$$

donde, como vemos, estamos incluyendo en el sistema en lazo cerrado las matrices de desacoplo. Ante la dificultad de determinar analíticamente  $\mathfrak{R}(s)$ , la evaluamos en distintas frecuencias, para lo que empleamos las relaciones bien conocidas:

$$G(j\omega) = C * (j\omega I - A)^{-1} * B + D$$

$$F(j\omega) = C_c * (j\omega I - A_c)^{-1} * B_c + D_c$$

siendo  $(A, B, C, D)$  y  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  las matrices de estado de la planta nominal sin desacoplar y del controlador, respectivamente.

Una vez evaluada  $G(j\omega)$  y la función de transferencia del controlador  $F(j\omega)$ , podremos determinar  $\mathfrak{R}(j\omega)$  y, más concretamente, el máximo valor singular de esta función que es el que determinará, como ya hemos comentado, la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

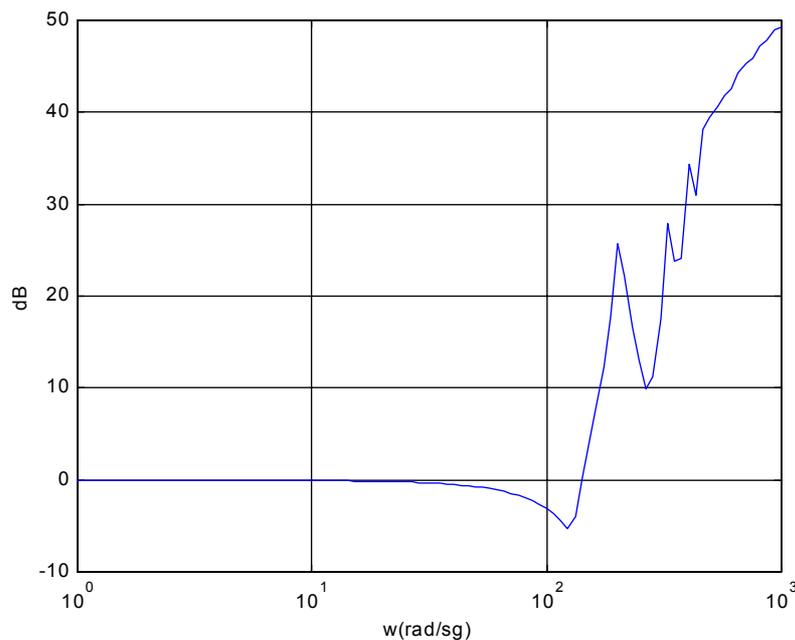
En primera instancia, empleamos el mismo controlador proporcional que para llevar a cabo la simulación del sistema en lazo cerrado de las figuras 7.4, 7.5 y 7.6:

$$F(s) = K = \begin{bmatrix} k_{p,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{p,P} \end{bmatrix}$$

con lo que tenemos que:

$$\mathfrak{R}(j\omega) = T_u^{-1} * K * T_y^{-1} (I + G(j\omega) * T_u^{-1} * K * T_y^{-1})^{-1}$$

En la figura 7.11 representamos el máximo valor singular de  $\mathfrak{R}(j\omega)$ , expresado en decibelios, frente a la frecuencia en  $rad/sg$ .



**Figura 7.11:**  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega))$  para la planta nominal con el controlador proporcional  $K$ .

Hemos obtenido así una cota para el tamaño de la máxima perturbación aditiva que no inestabiliza el sistema en lazo cerrado con el controlador proporcional. Resta calcular, entonces, la curva correspondiente a  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))^{-1}$  para cada porcentaje de variación en  $k_s$  ( $\Delta k_s$ ) y ver si, en todo el rango de frecuencias, está por encima de  $\bar{\sigma}(\mathcal{R}(j\omega))$ . Si es así, podremos garantizar que la planta en lazo cerrado con  $F(s) = K$  es estable para ese  $\Delta k_s$ . Si, por el contrario,  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))^{-1}$  está por debajo de  $\bar{\sigma}(\mathcal{R}(j\omega))$  para, al menos, algún valor de la frecuencia, el sistema en lazo cerrado con el mismo controlador será inestable. Para obtener las curvas correspondientes a  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))^{-1}$  para los diferentes  $\Delta k_s$  hemos seguido los siguientes pasos:

1) Al tratarse de perturbaciones aditivas, el diagrama de bloques de la figura 7.10 queda como:

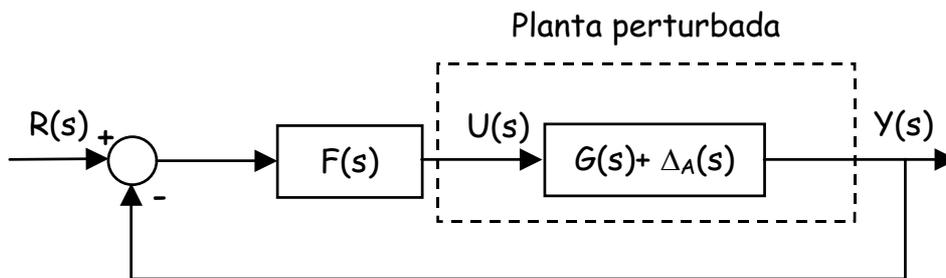


Figura 7.12: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado con perturbaciones aditivas.

con lo que podemos escribir que:

$$\Delta_A(s) = G_p(s) - G(s)$$

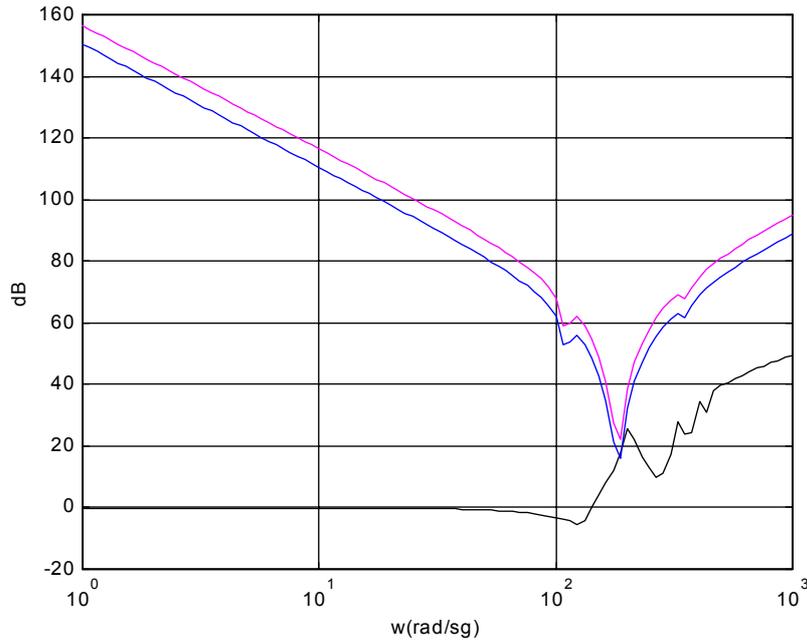
siendo  $G_p(s)$  la función de transferencia de la planta perturbada en lazo abierto, o bien:

$$\Delta_A(j\omega) = G_p(j\omega) - G(j\omega)$$

particularizando para  $s=j\omega$ .

2) Hallamos la inversa del máximo valor singular de esta función para cada una de las frecuencias.

En la figura 7.13 representamos conjuntamente la curva de la figura 7.11 y las correspondientes a  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))^{-1}$  para distintos valores de  $\Delta k_s$  (ver el código de colores que acompaña a la gráfica).



**Figura 7.13:**  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))^{-1}$  (ver código de colores) y  $\bar{\sigma}(\mathcal{R}(j\omega))$  para el controlador proporcional (en negro).

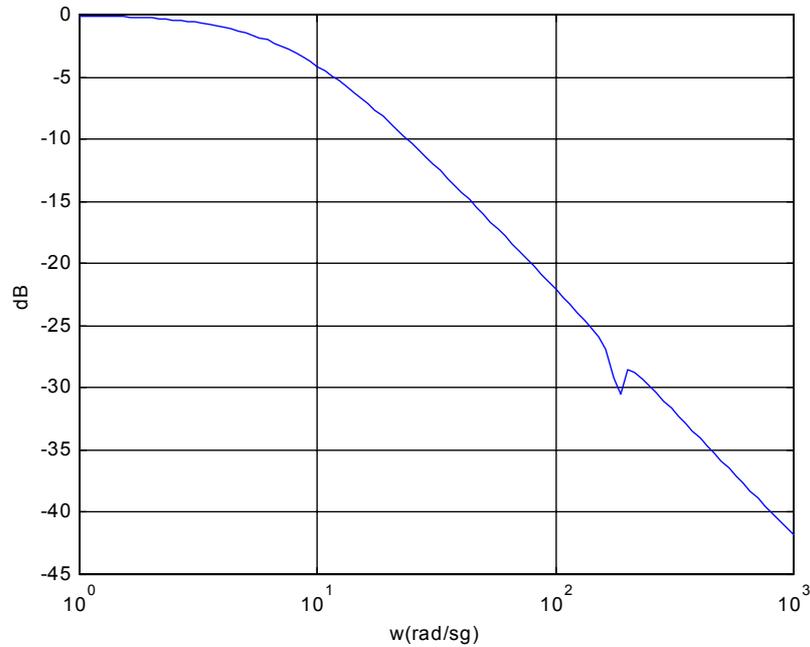
**Azul**  $\rightarrow \Delta k_s = 0.1\%$   
**Magenta**  $\rightarrow \Delta k_s = 0.05\%$

En esta gráfica vemos que, según nos dice el Teorema de Safonov, el sistema en lazo cerrado con el controlador proporcional es inestable para valores muy pequeños (0.1%) de  $\Delta k_s$ . Incluso para un 0.05% de incertidumbres, la planta está al borde de la inestabilidad, tal y como se aprecia es la figura 7.13.

Si queremos una mayor robustez frente a dichas incertidumbres podríamos conseguirla disminuyendo la ganancia del controlador proporcional (con lo que bajaría la curva correspondiente a  $\bar{\sigma}(\mathcal{R}(j\omega))$ ), a costa de hacer el sistema más lento y aumentar el offset de la respuesta de los segmentos.

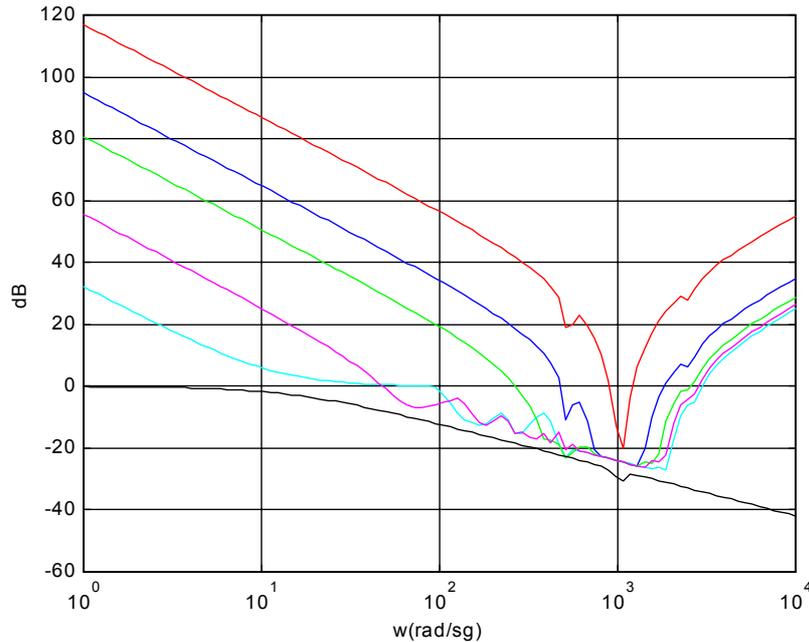
Veamos qué ocurre si, en lugar de implementar un control proporcional, empleamos una estrategia integral e incluimos en el modelo del sistema incertidumbres en la dinámica. Nuevamente trabajamos con la planta desacoplada, para lo que empleamos las matrices de desacoplo  $T_u$  y  $T_y$  que corresponden al sistema nominal.

Procediendo de la misma forma que hicimos anteriormente, encontramos que la curva del mayor valor singular de  $\mathfrak{R}(jw)$  que corresponde al controlador integral con el que obtuvimos las figuras 7.7 y 7.8, presenta el siguiente comportamiento en frecuencias:



**Figura 7.14:**  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(jw))$  para la planta nominal con el controlador integral  $K_i/s$ .

De nuevo, en la figura 7.15 representamos la última curva que hemos obtenido junto con las de  $\bar{\sigma}(W_2(jw))^{-1}$  para distintos valores de  $\Delta k_s$  (ver el código de colores al pie de la figura).



**Figura 7.15:**  $\bar{\sigma}(W_2(j\omega))^{-1}$  (ver código de colores) y  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega))$  para el controlador integral (en negro).

<b>Rojo</b>	$\rightarrow \Delta k_s = 5\%$
<b>Azul oscuro</b>	$\rightarrow \Delta k_s = 50\%$
<b>Verde</b>	$\rightarrow \Delta k_s = 100\%$
<b>Magenta</b>	$\rightarrow \Delta k_s = 130\%$
<b>Azul claro</b>	$\rightarrow \Delta k_s = 150\%$

A la vista de esta figura, tenemos que con el controlador integral el sistema en lazo cerrado es estable, según el Teorema de Safonov, hasta para un 100% de incertidumbres en la dinámica, aunque a partir de este valor la planta está ya al borde de la inestabilidad.

Nos falta comprobar la robustez del controlador proporcional-integral propuesto frente a  $\Delta k_s$ . Si representamos gráficamente la curva correspondiente a  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega))$  con este controlador, encontramos el comportamiento en el dominio de las frecuencias que mostramos a continuación:

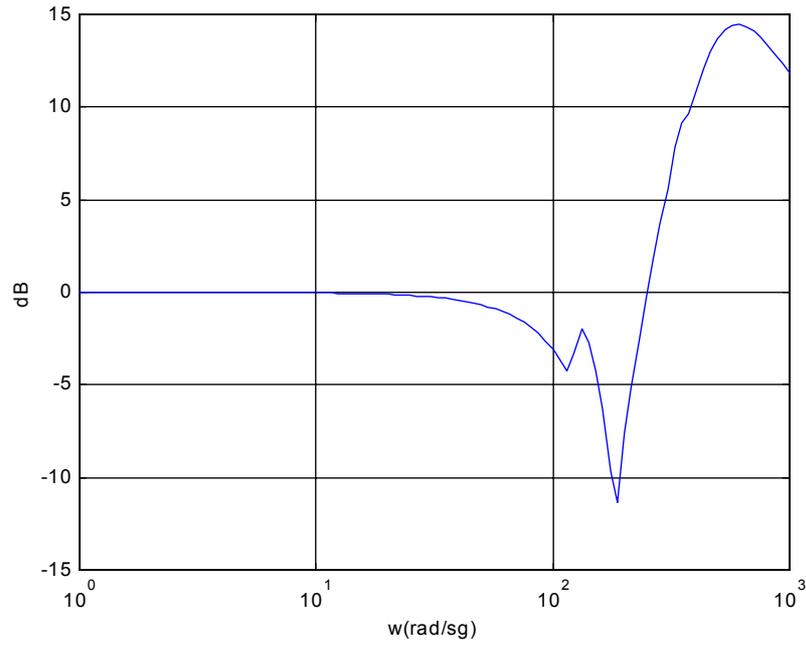


Figura 7.16:  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(jw))$  para la planta nominal con el controlador proporcional-integral.

Para ver qué valores de  $\Delta k_s$  inestabilizan el sistema en lazo cerrado con este controlador, acudimos a la figura 7.17.

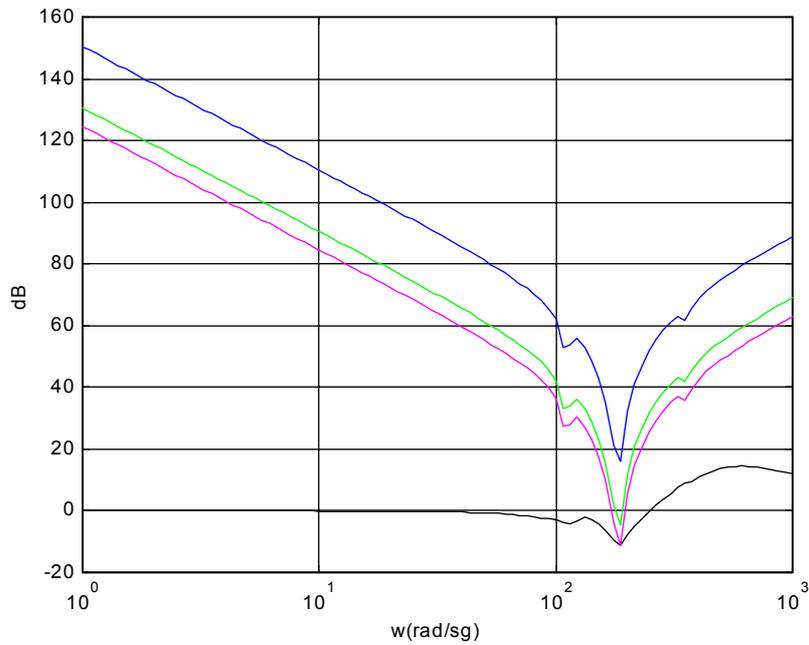


Figura 7.17:  $\bar{\sigma}(W_2(jw))^{-1}$  (ver código de colores) y  $\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(jw))$  para el controlador proporcional-integral (en negro).

<p><b>Azul</b> → <math>\Delta k_s = 0.1\%</math></p> <p><b>Verde</b> → <math>\Delta k_s = 1\%</math></p> <p><b>Magenta</b> → <math>\Delta k_s = 2\%</math></p>
--

Como conclusión podemos afirmar que, desde el punto de vista de la robustez del sistema en lazo cerrado frente a incertidumbres en la dinámica del modelo del espejo primario del GTC, el controlador integral diseñado para el sistema nominal completamente desacoplado resulta mucho más efectivo que el proporcional-integral y que el proporcional. Éste último es, según hemos comprobado, muy poco robusto frente a  $\Delta k_s$ .

### **VII.3. ESTUDIO DEL RECHAZO AL RUIDO OBTENIDO CON LOS CONTROLADORES P, I Y PI**

Puesto que vamos a estudiar el rechazo al ruido que presenta el sistema en lazo cerrado con los controladores proporcional, integral y proporcional-integral, es importante conocer qué tipo de ruido es el que se prevé que afecte al espejo primario del Gran Telescopio Canarias [Forbes, 1982].

En general, caracterizar adecuadamente las perturbaciones que afectan a un sistema es una parte esencial en el proceso de síntesis de un controlador para dicho sistema. En el caso del GTC éste es, de hecho, uno de los principales aspectos a tener en cuenta en el diseño del telescopio, ya que debemos considerar los efectos de la fuerza del viento sobre el telescopio y la potencial degradación del rendimiento del mismo que este efecto puede producir debido a la excitación de modos de la estructura.

Existen relativamente pocos datos experimentales sobre la velocidad del viento dentro de cúpulas comparables a la del GTC. A pesar de ello, se dispone de algunos datos sobre presión del viento que han sido recogidos en unos pocos centros de observación y analizados empleando la transformada de Fourier en un rango entre 0.02 y 25hz. El análisis de estos datos concluyó que las curvas de densidad de potencia espectral del viento obtenidas en los diferentes lugares son similares.

La velocidad *rms* (root mean square) del viento en Mauna Kea, donde se encuentra situado el telescopio Keck [Aubrun, 1985], con un espejo primario segmentado de diez metros de diámetro de similares características a las del GTC, es de,

aproximadamente,  $15m/s$ , correspondiente a una presión de alrededor de  $84N/m^2$  a 14000 pies de altitud. Cada segmento del espejo primario tiene un área aproximada de  $2.104m^2$ , lo que nos da una fuerza nominal *rms* por segmento de  $177N$ . En el estudio que presentamos, asumimos que la velocidad del viento dentro de la cúpula del telescopio, cerca del espejo primario, decrece en un factor de diez respecto a la velocidad medida fuera de la cúpula. La fuerza *rms* sobre cada segmento del espejo es, entonces, igual a  $17.7N$ . Otra forma de evaluar la densidad de potencia espectral del viento consiste en analizar los datos obtenidos con el tubo 'pitot', dispositivo que mide la velocidad local a lo largo de una línea aerodinámica, tomados en el lugar de ubicación del telescopio. Estos datos obtenidos son primero digitalizados, y analizados posteriormente empleando la transformada de Fourier en el rango entre  $0.05$  y  $100hz$ . Esta información, según veremos a continuación, se traduce fácilmente en la densidad de potencia espectral de la fuerza ejercida por el viento.

Para obtener un modelo analítico de dicha fuerza se ajustan los datos experimentales usando una función de la forma:

$$f^2(w) = \frac{20}{(9 + w^2)} \quad (7.1)$$

donde  $f^2$  viene dada en  $hz^2$ , y  $w$  en  $rad/sg$ . Esta aproximación reproduce razonablemente bien los datos experimentales obtenidos en el telescopio Keck a partir de una frecuencia de  $0.5hz$ .

La ventaja de expresar la densidad de potencia espectral de la fuerza ejercida por el viento sobre los segmentos del espejo como en (7.1) es que nos permite modelar analíticamente esta perturbación como ruido blanco coloreado por un filtro pasa-baja de primer orden.

Las expresiones que acabamos de ver son las que se obtuvieron en su momento para el telescopio Keck. En el caso del espejo primario del GTC, la expresión correspondiente a la densidad de potencia espectral del viento es la siguiente:

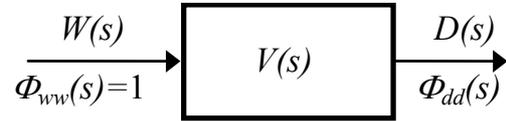
$$P(f) = \frac{4/f_0}{1 + 70.8 \left( \frac{f}{f_0} \right)^2} F^2 \quad (7.2)$$

siendo:

$$f_0 = 10Hz ,$$

$F = 6\text{Newton}$  .

Con objeto de generar este ruido  $d(t)$  , vamos a suponer que es la salida de un sistema cuya entrada es ruido blanco  $w(t)$  de potencia unitaria. Así, podemos plantear que:



Por otra parte, sabemos que la densidad de potencia espectral de un proceso aleatorio coincide con la transformada de Fourier (TF) de su autocorrelación  $\phi_{ww}(\tau)$  [Marple, 1987]. Para el modelo lineal que hemos planteado, donde hemos llamado  $V(s)$  a la función de transferencia que colorea el ruido blanco y lo convierte en la señal cuya densidad de potencia mostramos en (7.2), se cumple que la TL de la autocorrelación de la salida es la función de transferencia al cuadrado por la TL de la autocorrelación de la entrada, es decir:

$$D(s) = \Phi_{dd}(s) = |V(s)|^2 \Phi_{ww}(s) \quad (7.3)$$

relación que, dado que estamos suponiendo una entrada de ruido blanco:

$$\phi_{ww}(\tau) = \delta(\tau) \Rightarrow \Phi_{ww}(s) = 1 \quad (7.4)$$

nos permite llegar finalmente a la siguiente igualdad:

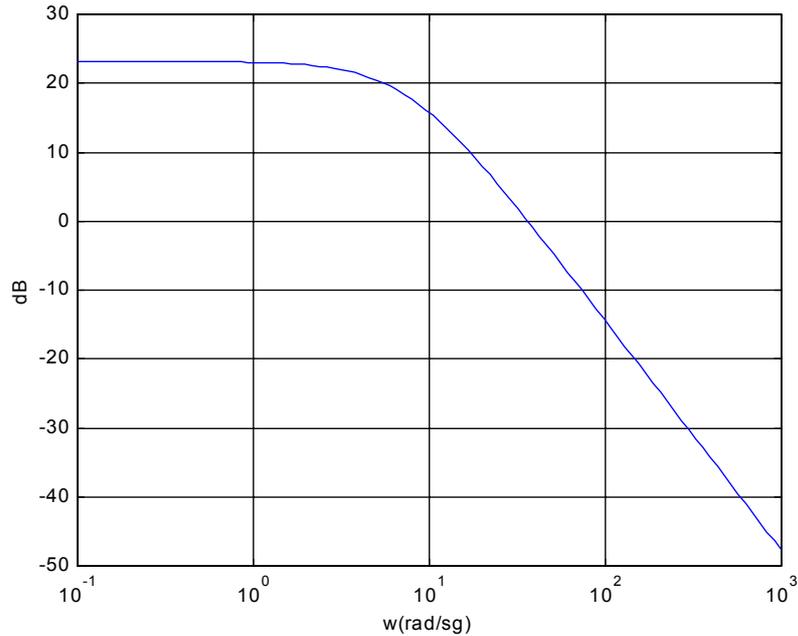
$$P(f) = \frac{4/f_0}{1 + 70.8 \left( \frac{f}{f_0} \right)^2} F^2 = \frac{4 \cdot 2\pi/w_0}{1 + 70.8 \left( \frac{w}{w_0} \right)^2} F^2 = |V(w)|^2 \quad (7.5)$$

o, de forma equivalente:

$$D(w) = \frac{4 \cdot 2\pi/w_0}{1 + 70.8 \left( \frac{w}{w_0} \right)^2} F^2 \quad (7.6)$$

donde, además de los resultados en (7.3) y (7.4), hemos usado la relación existente entre la frecuencia lineal,  $f$ , y la angular,  $w$ .

Esto nos permite representar en la figura 7.18 el comportamiento en frecuencias del ruido de proceso:



**Figura 7.18:** Espectro correspondiente al ruido coloreado que afecta al espejo primario del GTC.

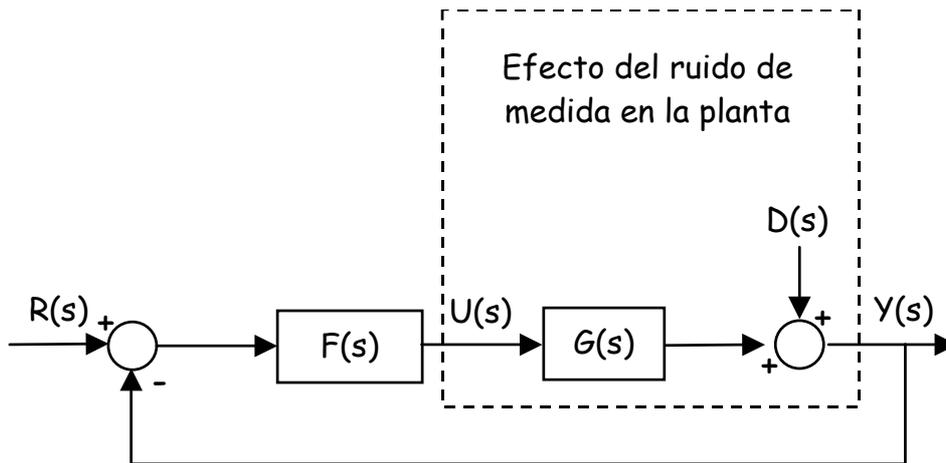
Por otra parte, ya vimos en el capítulo VI que incluir el ruido que afecta al espejo primario del Gran Telescopio Canarias no impone ninguna limitación a la aplicabilidad del método de desacoplo diseñado y presentado en los capítulos IV y V. Sin embargo, aún no hemos estudiado el rechazo al ruido que podemos conseguir con los tres controladores propuestos para el sistema desacoplado: el proporcional, el integral y el proporcional-integral.

Para llevar a cabo este estudio emplearemos, como es habitual, la función de sensibilidad  $S(s)$  [Chiang, 1992], [Skogestad, 1998]. Ésta se define, como sabemos, como la función de transferencia del sistema en lazo cerrado de la salida respecto a la entrada de ruido. En nuestra planta el ruido,  $d(t)$ , es ruido de proceso, que afecta a la misma tal y como se refleja en la ecuación de estados en (6.1) (ver capítulo VI):

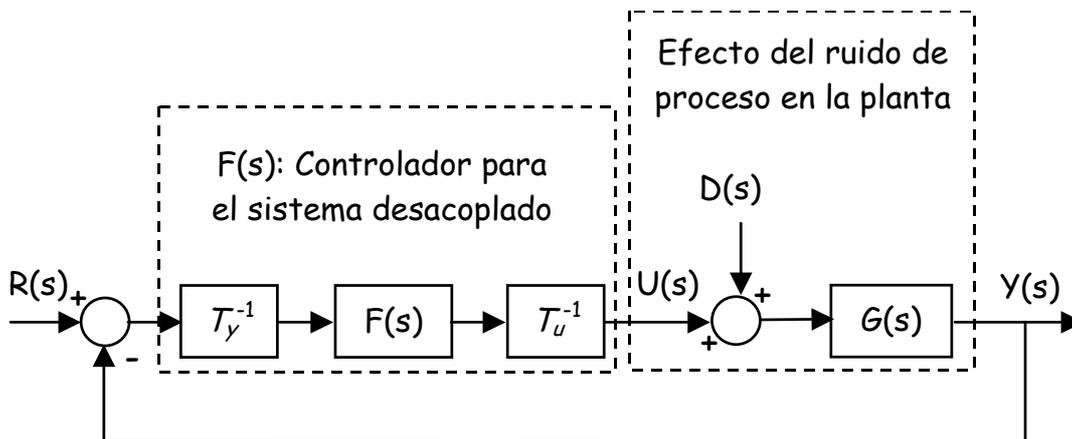
$$\dot{X} = A * X + B * U_{real} + Br * d(t)$$

donde, para evitar la confusión con la consigna  $R(s)$ , a lo largo de este capítulo estamos denotando al ruido como  $d(t)$ , en lugar de  $R_{real}$ , como en el capítulo VI.

Por tanto, en lugar del diagrama de bloques habitual para un sistema afectado por ruido de medida:



tenemos este otro caso en el que, además, incluimos ya el hecho de que consideramos un controlador diseñado para el sistema desacoplado:



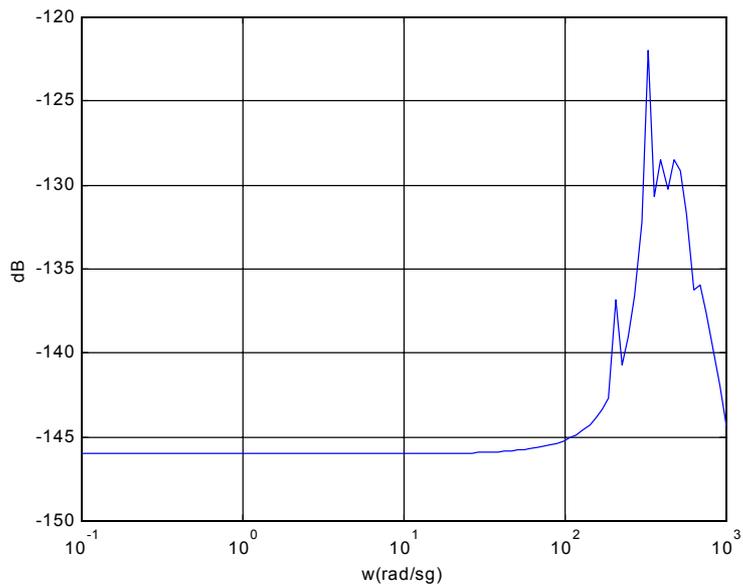
Si obtenemos en este caso la expresión de la función de sensibilidad, llegamos a que:

$$S(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = (I + G(s) * F_d(s))^{-1} * G(s)$$

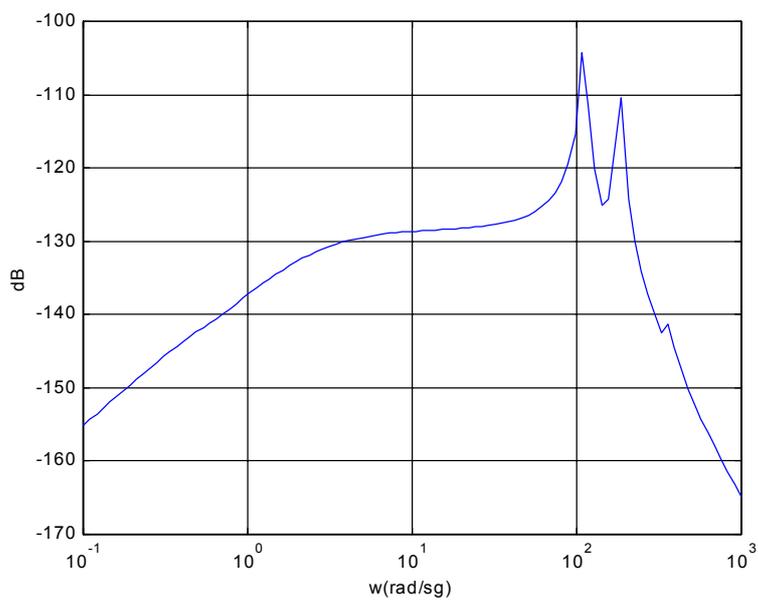
donde, manteniendo la notación que ya empleamos al analizar la robustez del sistema frente a incertidumbres en la dinámica, hemos llamado:

$$F_d(s) = T_u^{-1} * F(s) * T_y^{-1}$$

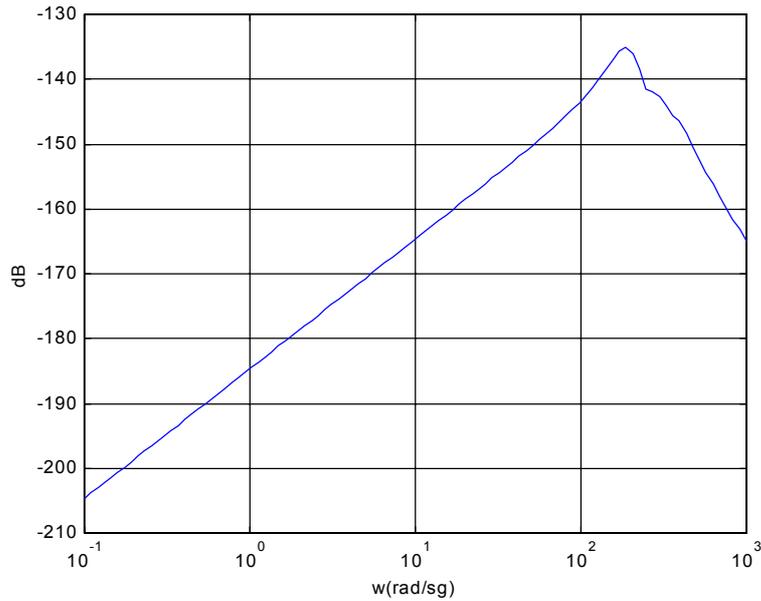
Si representamos el mayor valor singular de la función de sensibilidad,  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ , tanto en el caso del controlador proporcional como en el del integral y del proporcional-integral, obtenemos las figuras siguientes:



**Figura 7.19:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(S(jw))$  con el controlador proporcional.



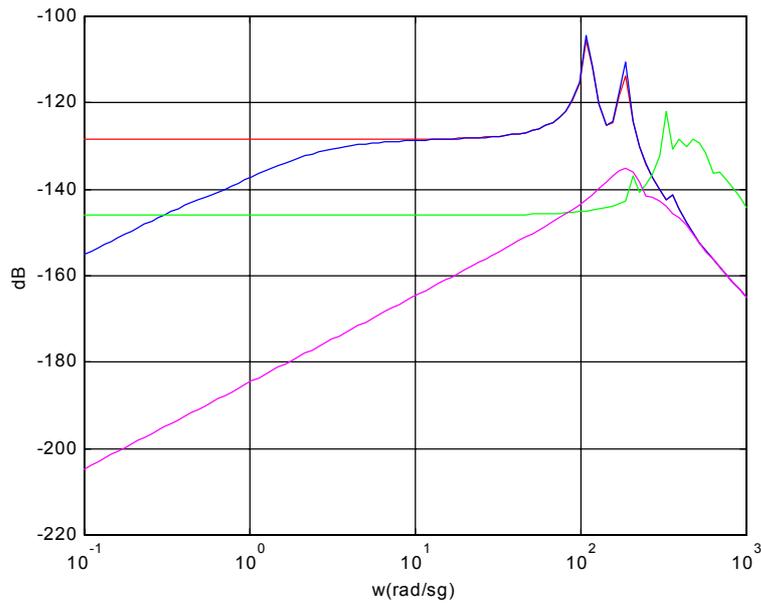
**Figura 7.20:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(S(jw))$  con el controlador integral.



**Figura 7.21:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  con el controlador proporcional-integral.

La función de sensibilidad nos permite conocer la atenuación del ruido que conseguimos con cada uno de estos controladores. Así, comparando las figuras 7.19, 7.20 y 7.21, tenemos que el controlador proporcional-integral es el que nos permite obtener un mayor rechazo al ruido de bajas frecuencias, seguido del controlador integral.

Sin embargo, no podemos conocer la magnitud de este rechazo sin comparar las curvas representadas en las figuras 7.19, 7.20 y 7.21 con la correspondiente a la función de sensibilidad del sistema en lazo abierto. Para ello, representamos conjuntamente las cuatro gráficas en la figura 7.22.



**Figura 7.22:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$  en lazo abierto (rojo), con el controlador P (verde), con el I (azul) y con el PI (magenta).

Un aspecto interesante es que, al tratarse de ruido de proceso, la dinámica de la planta en lazo abierto aparece en la función de sensibilidad. Así, los tres picos que aparecen en la figura 7.20 se encuentran en 17, 28 y 55hz, frecuencias que corresponden, respectivamente, al modo de la estructura considerado, a los 107 actuadores cuya dinámica libre (esto es, en ausencia de la estructura) no se ve alterada por el acoplamiento con dicho modo y, por último, al actuador cuya frecuencia propia sí sufre un desplazamiento por este motivo.

Debido a esto y al ancho de banda que, como veremos a continuación, conseguimos con el controlador integral, tenemos que en la frecuencia de resonancia de los segmentos del espejo (28hz) dicho controlador no produce atenuación alguna del ruido.

Sin embargo, en las figuras 7.19 y 7.21, correspondientes al controlador proporcional y al proporcional-integral, observamos cómo el pico en 17hz desaparece y en el correspondiente al segmento (28hz) tenemos una atenuación de unos 35 *decibelios*, aproximadamente.

### VII.3.1. Estudio del ancho de banda del sistema con los controladores proporcional, integral y proporcional-integral

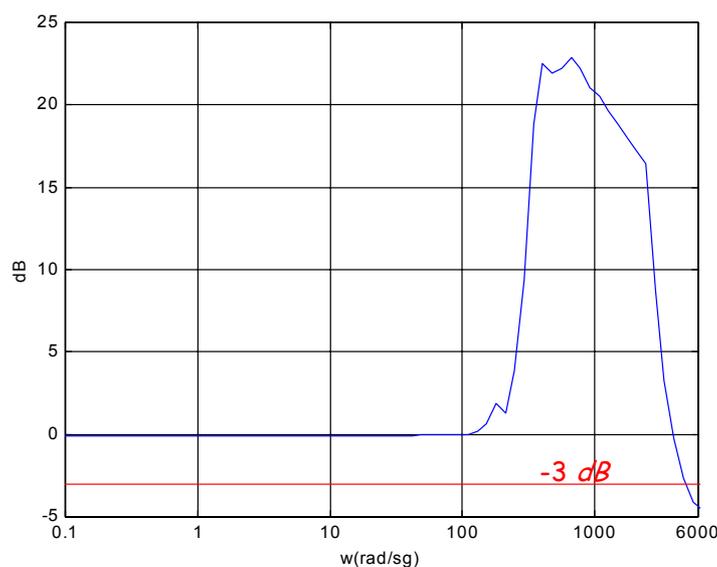
En general, un gran ancho de banda corresponde a un sistema rápido, ya que las señales de alta frecuencia aparecen más fácilmente en la salida del mismo. Además, indica un sistema sensible al ruido y a la variación en los valores de los parámetros que determinan la dinámica de la planta.

Por el contrario, si el ancho de banda del sistema es pequeño éste será más robusto frente a ruido e incertidumbres en la dinámica, pero su respuesta será más lenta.

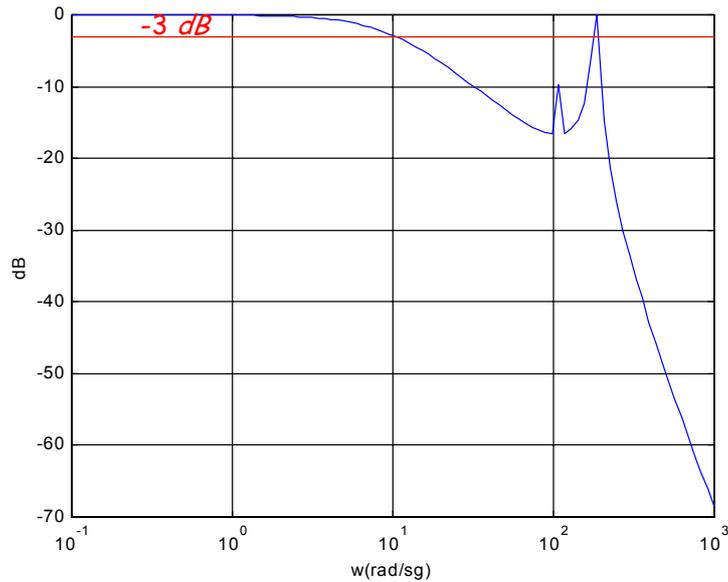
Aunque existen formas diversas de determinar el ancho de banda de un sistema, nosotros emplearemos la más común en los sistemas de control [Skogestad, 1998]:

‘El ancho de banda en términos de  $T(s)$ , donde  $T$  es denominada *función de sensibilidad complementaria* y se define como la función de transferencia de la salida de la planta con respecto a la entrada de consigna, es la frecuencia más alta a la cual  $|T(j\omega)|$  cae a  $-3$  decibelios.’

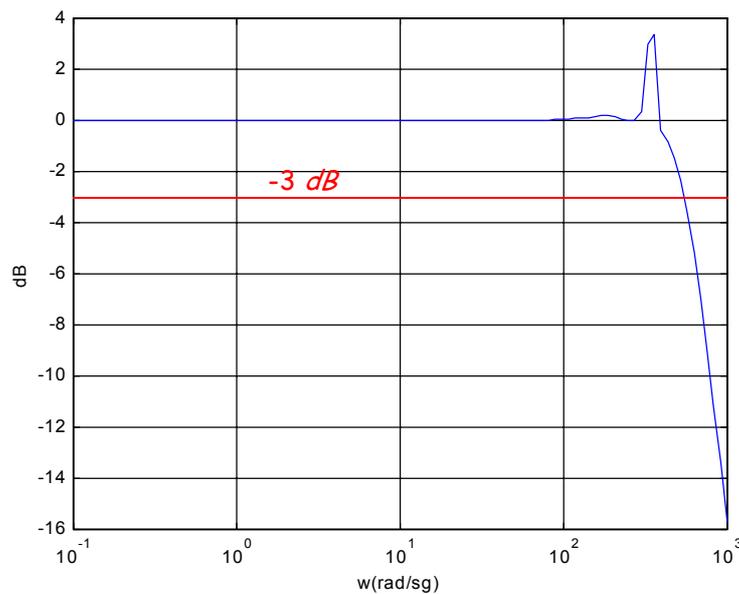
Si representamos gráficamente el mayor valor singular de la función de sensibilidad complementaria,  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  [Chiang, 1992], [Skogestad, 1998], obtenida con los controladores proporcional, integral y proporcional-integral, encontramos lo siguiente:



**Figura 7.23:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(T(j\omega))$  con el controlador proporcional (ancho de banda  $\approx 5 \times 10^3$  rad / sg).



**Figura 7.24:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(T(jw))$  con el controlador integral (ancho de banda  $\approx 176rad / sg$ ).



**Figura 7.25:** Representación en frecuencias de  $\bar{\sigma}(T(jw))$  con el controlador PI (ancho de banda  $\approx 550rad / sg$ ).

Como vemos en la figura 7.23, en el caso del controlador proporcional la curva en frecuencias de la función de sensibilidad complementaria cae por debajo de los  $-3$  decibelios a una frecuencia de  $5000rad/sg$ , aproximadamente. En cambio, a la vista de la figura 7.24, el ancho de banda impuesto por el controlador integral está prácticamente en  $176rad/sg$ , es decir, los  $28hz$  de los segmentos; mientras que con el controlador proporcional-integral conseguimos un ancho de banda de unos  $550rad/sg$ . Esto explica

la lentitud en la respuesta del sistema en lazo cerrado con el controlador integral con respecto a la obtenida con el controlador proporcional (ver figuras 7.5, 7.7 y 7.9), así como la incapacidad del primero de ellos para rechazar ruido en la frecuencia propia de los segmentos.

#### **VII.4. APLICACIÓN DE UN CONTROLADOR ROBUSTO AL SISTEMA DESACOPLADO**

El diseño de aplicaciones de control basadas en técnicas estándar de respuesta en frecuencia dan un resultado satisfactorio en gran parte de los casos aunque en ocasiones, cuando el objetivo de diseño es complejo o se exigen especificaciones sobre márgenes de ganancia o anchos de banda para el sistema en lazo cerrado, la labor de síntesis del controlador suele ser bastante ardua [Balchen, 1998], [Fortmann, 1977], [Ogata, 1980], [Ogata, 1987], [Luyben, 1996]. Sin embargo, en la mayoría de los casos no es necesario el empleo de otras técnicas más avanzadas [Friedland, 1996].

El problema aparece cuando la planta presenta, como en nuestro caso, una dinámica compleja e insatisfactoriamente modelada y cuando existen perturbaciones que afectan al sistema. En estos casos las técnicas tradicionales generalmente no satisfacen los objetivos de diseño y resultan en aplicaciones con un rendimiento bastante pobre.

Para afrontar este tipo de problemas surgen los métodos de control conocidos como ‘control robusto’ [Safonov, 1988], [Zhou, 1998], [Green, 1995], [Morari, 1997], [Dorato, 1990]. Estas técnicas tienen como objetivo:

*“Sintetizar una ley de control que mantenga la respuesta del sistema y las señales de error dentro de unas tolerancias pre-especificadas aun en presencia de perturbaciones en el sistema y bajo las ligaduras de diseño impuestas por la tecnología”.*

Cuando hablamos de perturbaciones nos referimos tanto a perturbaciones externas como a incertidumbres en el modelo de la planta y a ruido de medida. Las incertidumbres en el modelo suelen tener su origen, como sabemos, en linealizaciones de plantas no lineales, procesos de deterioro de la planta debido a la antigüedad, empleo de modelos simplificados, etc.

Vemos que las perturbaciones son el elemento fundamental que manejamos en el diseño de un controlador robusto. Por tanto, es importante disponer de un índice que mida o caracterice dichas perturbaciones lo mejor posible [Petersen, 2000]. La medida cuantitativa que ha mostrado una mayor versatilidad a la hora de afrontar este problema es la norma  $H_\infty$  [Lawrence, 2000]. Esta norma ha dado origen a lo que se conoce como ‘control óptimo  $H_\infty$ ’ [Hayakawa, 1999], [Huang, 1999], [Safonov, 1988].

La idea básica de esta metodología consiste en tratar el problema como si la planta fuera a operar en la situación más desfavorable, con lo que presenta las siguientes propiedades:

- es capaz de tratar problemas con errores de modelado de la planta y con perturbaciones desconocidas,
- es una extensión natural de la teoría de la realimentación existente, lo cual facilita trasladar conceptos intuitivos desde el punto de vista clásico al planteamiento robusto,
- permite abordar de manera natural problemas de control multivariable.

En realidad, aunque no lo hayamos comentado, nosotros ya hemos hecho uso de la norma  $H_\infty$  tanto al analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado como al estudiar el rechazo al ruido alcanzado con los controladores proporcional e integral. Recordemos que, en ambos casos, empleábamos como medida de las incertidumbres y del ruido el máximo valor singular (al tratarse de un sistema multivariable), que no es otra cosa que la máxima ganancia que puede presentar un sistema y que, por tanto, equivale a ponernos en el peor de los casos. La diferencia ahora es que en el control  $H_\infty$  las perturbaciones se tienen en cuenta en el proceso de síntesis del controlador [Chiang, 1992], de forma que éste se diseña para que el sistema en lazo cerrado cumpla lo mejor posible con las especificaciones de estabilidad en presencia de incertidumbres en la dinámica y rechazo al ruido.

Podemos formular estas dos especificaciones haciendo uso de las funciones de sensibilidad y de sensibilidad complementaria que, como sabemos, corresponden a la función de transferencia del sistema en lazo cerrado de la salida respecto a la entrada de ruido y a la entrada de consigna, respectivamente. Recordemos que la condición de rechazo al ruido consiste en que el producto de la función de sensibilidad  $S(s)$  por la

entrada de ruido, lo cual nos da la contribución de ésta en la salida del sistema, sea lo más pequeña posible. Expresado matemáticamente, queda como:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)|$$

donde  $|W_1^{-1}(j\omega)|$  representa la atenuación deseada para el ruido.

En cuanto a la condición de estabilidad, la podemos formular como:

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)|$$

o bien como:

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{R}(j\omega)) \leq |W_2^{-1}(j\omega)|$$

donde  $|W_2(j\omega)|$  y  $|W_3(j\omega)|$  representan el tamaño de la mayor perturbación aditiva y de la mayor perturbación multiplicativa, respectivamente [Weinmann, 1991].

Tenemos entonces que el diseño de un controlador robusto se lleva a cabo en dos fases: en la primera definimos las especificaciones de diseño y, en la segunda, llevamos a cabo un proceso de optimización con el objeto de encontrar un controlador que satisfaga dichas especificaciones.

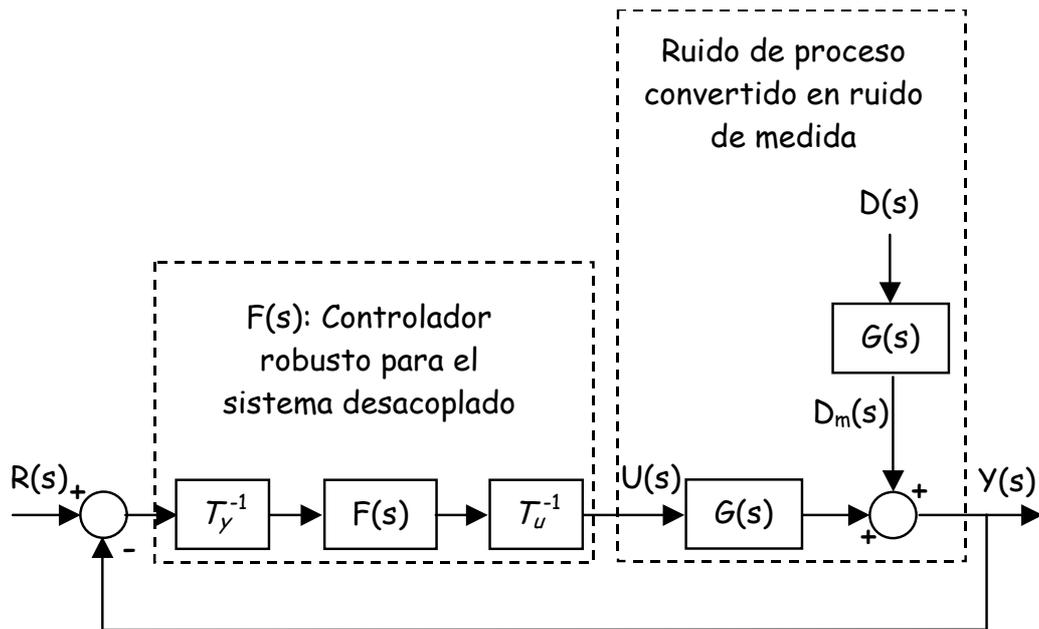
Sin embargo, esta segunda fase de optimización y síntesis del controlador exige que para la primera se cumplan una serie de requerimientos:

El ruido que consideramos en el sistema debe ser ruido de medida, no de proceso como ya hemos visto que ocurre en nuestro caso. Aunque independientemente del tipo de ruido considerado podemos definir una función de sensibilidad, si el ruido no es de medida no se cumple la relación entre ésta y la función de sensibilidad complementaria:

$$T(s) + S(s) = I$$

siendo  $I$  la matriz identidad.

Si expresamos el ruido de proceso en el espejo primario del Gran Telescopio Canarias como ruido de medida, el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado queda como mostramos a continuación:

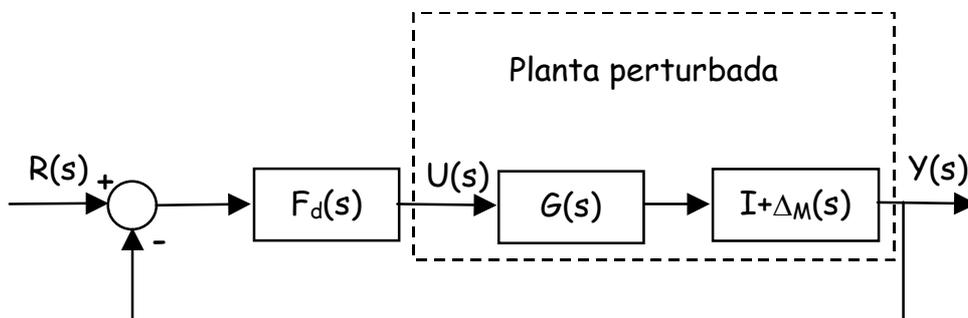


En este caso, la expresión para la función de sensibilidad queda como:

$$Y(s) = S(s) * D_m(s) \Rightarrow S(s) = (I + G(s) * F_d(s))^{-1}$$

con lo que es el propio ruido de medida el que contiene la dinámica de la planta en lazo abierto, y no la función de sensibilidad, como ocurre cuando consideramos el ruido como de proceso.

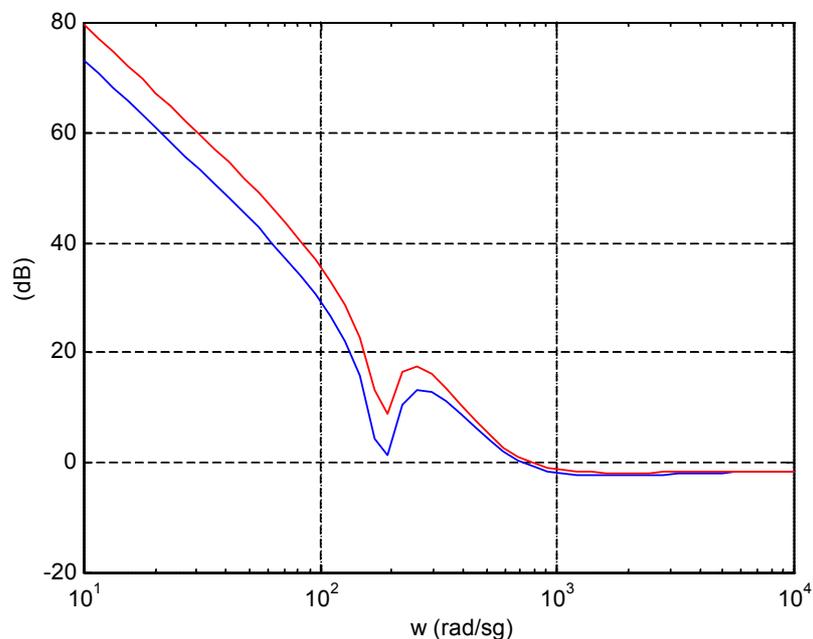
Por otro lado, tratamos las incertidumbres en la dinámica del espejo como perturbaciones multiplicativas, involucrando así a la función de sensibilidad complementaria  $T(s)$  en la especificación de estabilidad. Con ello, el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado queda como:



En este punto debemos comentar que la metodología que seguimos para la diseño de un controlador robusto es tratar los sistemas uno a uno, lo cual es posible gracias al desacoplo de la planta. En ningún caso hemos llevado a cabo la

implementación de los  $108(=P)$  controladores robustos aunque esto, como hemos podido comprobar en los casos anteriores (controlador proporcional, integral y proporcional-integral) no conlleva más dificultad que hacer los ajustes de ganancia para cada uno de los controladores SISO. En realidad, esto es cierto para los  $P-N=108-1$  sistemas que presentan, salvo ese factor de ganancia, la misma dinámica (recordemos que a todos ellos corresponde el autovalor  $\lambda_A$ ). Para el actuador cuya dinámica varía respecto a la que presenta cuando lo consideramos aislado de la estructura, debido al acoplo con ésta, tendríamos en realidad que plantear de nuevo el diseño del controlador. Otra opción que parece interesante, habida cuenta de los resultados obtenidos con la estrategia proporcional-integral en cuanto a rechazo al ruido y ancho de banda, es aplicar a este actuador un controlador de este tipo.

Centrándonos entonces en uno cualquiera de los 107 actuadores con autovalor  $\lambda_A$ , en la figura 7.26 representamos la curva correspondiente a  $|W_3^{-1}(j\omega)|$  considerando un  $\pm 5\%$  y un  $\pm 10\%$  de incertidumbres en el valor de la constante de rigidez de los soportes de los segmentos,  $k_s$ .



**Figura 7.26:**  $|W_3^{-1}(j\omega)|$  para un  $\pm 5\%$  (en rojo) y un  $\pm 10\%$  (en azul) de incertidumbres en  $k_s$ .

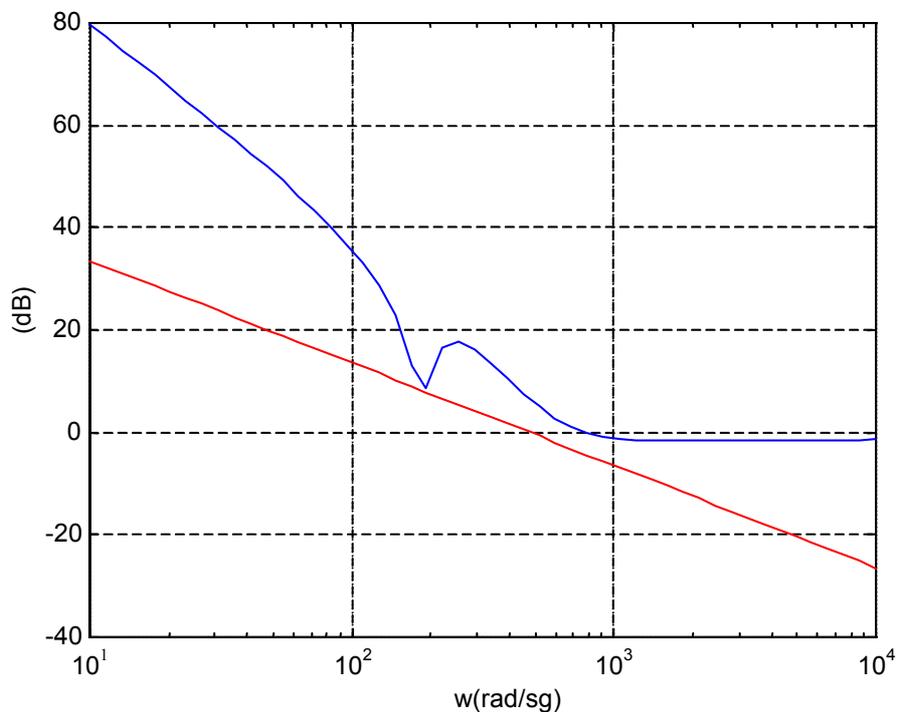
Para pasarle las especificaciones de diseño a la rutina que sintetiza el controlador es necesario disponer de un modelo que caracterice las curvas de la figura 7.26 y otro

que determine el factor deseado de atenuación del ruido. Para ello empleamos las siguientes funciones de transferencia:

$$W_1^{-1}(s) = \frac{1.8e - 7s^3 + 3.3441e - 6s^2 + 0.006s + 0.0448}{1.7002}$$

$$W_3^{-1}(s) = \frac{1}{0.002s}$$

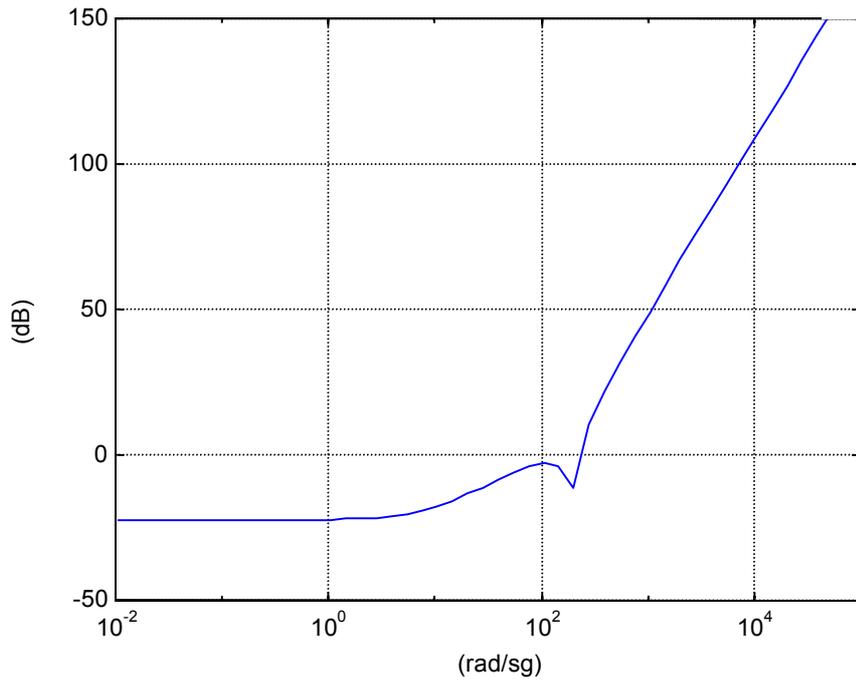
En la figura 7.27 representamos conjuntamente la curva experimental de  $|W_3^{-1}(jw)|$  con su correspondiente aproximación integral:



**Figura 7.27:**  $|W_3^{-1}(jw)|$  para un  $\pm 5\%$  de incertidumbres en  $k_s$  (en azul) con su correspondiente aproximación integral (en rojo).

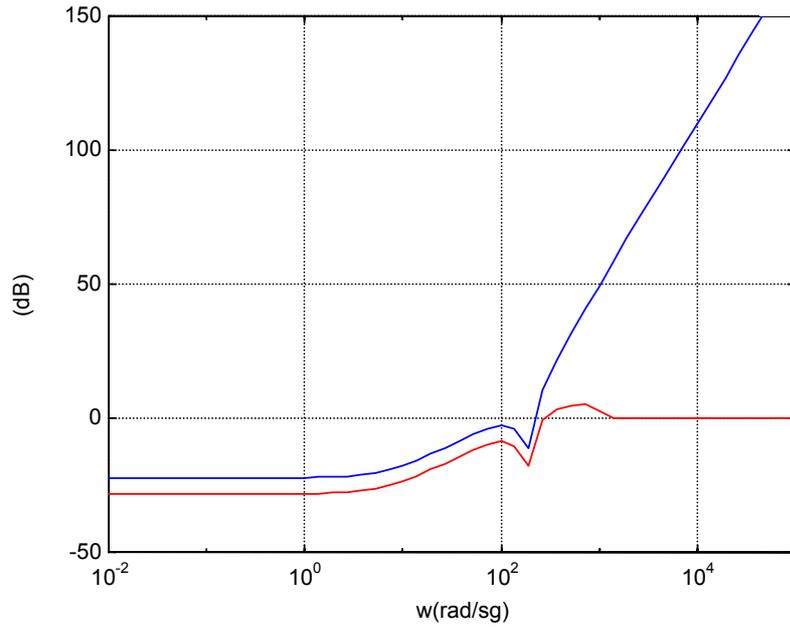
Al emplear la aproximación integral perdemos algo de ancho de banda, tal y como observamos en la figura anterior. Sin embargo, se sigue cumpliendo la restricción de que éste esté por encima del modo correspondiente a los segmentos (28hz), algo necesario para poder rechazar el ruido en esta frecuencia.

Así, puesto que nos interesa rechazar tanto el ruido de bajas frecuencias como en 28hz, la curva de  $|W_1^{-1}(jw)|$  tiene la forma que mostramos en la figura 7.28.

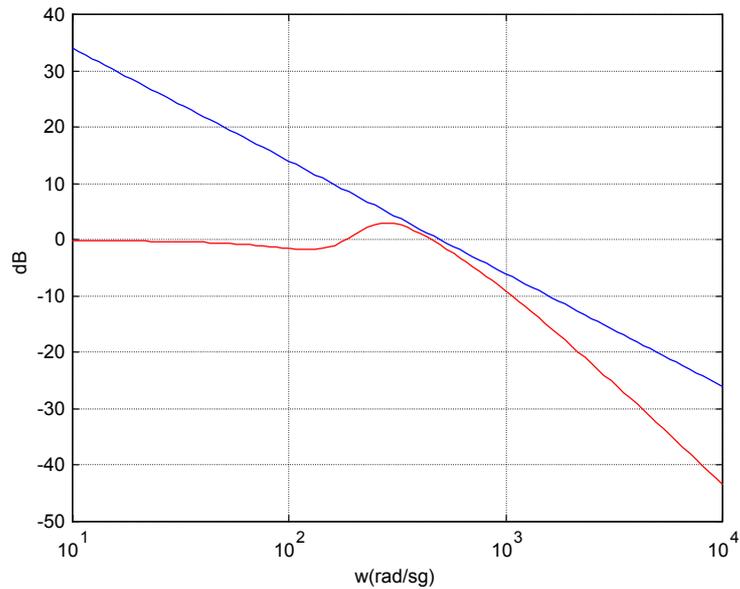


**Figura 7.28:**  $|W_1^{-1}(jw)|$  para rechazar el ruido de bajas frecuencias y en 28hz.

Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria que cumplen las condiciones impuestas respecto al rechazo al ruido y a la estabilidad del sistema en lazo cerrado, y que obtenemos como resultado de la síntesis del controlador robusto [Chiang, 1992], tienen la forma que mostramos en las figuras 7.29 y 7.30, donde las representamos conjuntamente con las aproximaciones para  $W_1^{-1}(s)$  y  $W_3^{-1}(s)$ .



**Figura 7.29:** Aproximación para  $|W_1^{-1}(jw)|$  (en azul) y función de sensibilidad (en rojo).



**Figura 7.30:** Aproximación para  $|W_3^{-1}(jw)|$  (en azul) y función de sensibilidad complementaria (en rojo).

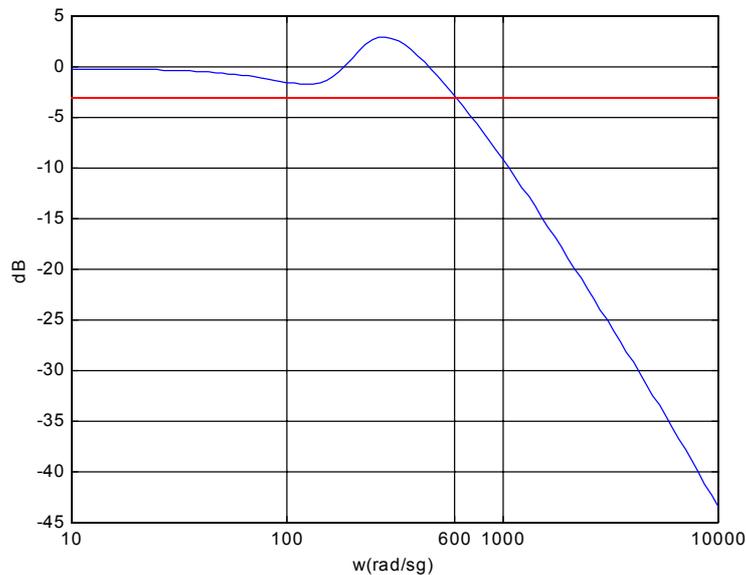
La curva de sensibilidad (en color rojo) que representamos en la figura 7.29 corresponde a valores relativos respecto a la sensibilidad que presenta el sistema en lazo

abierto, tal y como podemos comprobar en las simulaciones que mostramos en las figuras 7.33 y 7.34.

Si comparamos, entonces, el rechazo al ruido que obtenemos con el controlador robusto con el que los controladores proporcional, integral y proporcional-integral nos permiten conseguir (ver figura 7.22), encontramos lo siguiente:

- ➔ en la región de bajas frecuencias, sigue siendo el controlador PI el que proporciona una mayor atenuación del ruido, seguido del integral; mientras que el controlador robusto nos permite conseguir algo más de rechazo que el proporcional,
- ➔ a partir de, aproximadamente,  $0.2\text{rad/sg}$ , los controladores robusto y proporcional resultan más eficientes que el integral.

En la figura 7.31 representamos la curva correspondiente a la función de sensibilidad complementaria, no frente a la aproximación para  $|W_3^{-1}(jw)|$ , como en la figura 7.30, sino frente a los  $-3\text{dB}$ :

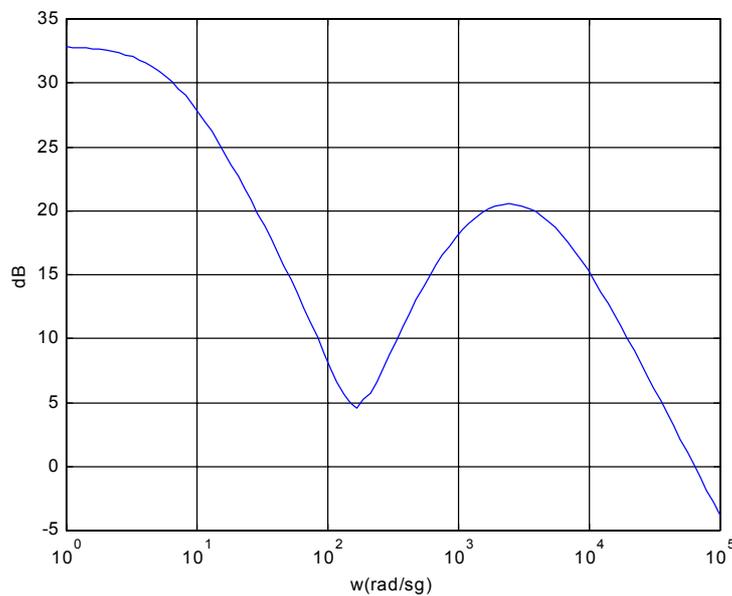


**Figura 7.31:** Función de sensibilidad complementaria (en azul) frente a  $-3\text{dB}$  (en rojo).

Como vemos, el ancho de banda del sistema con el controlador robusto es, aproximadamente, de  $600\text{rad/sg}$ . Si comparamos ahora este resultado con el que conseguimos con los controladores proporcional, integral y proporcional-integral (ver figuras 7.23, 7.24 y 7.25, respectivamente), encontramos que:

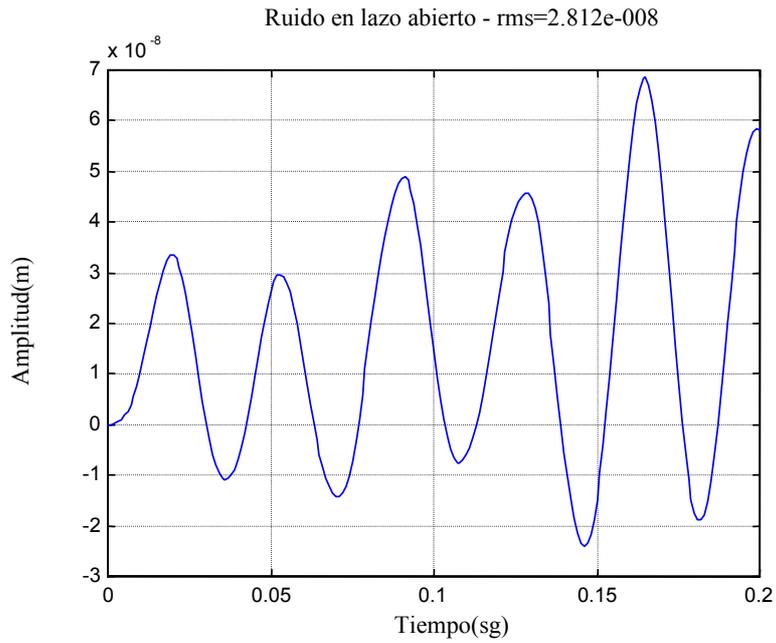
- ↳ los controladores robusto y PI nos proporcionan, aproximadamente, el mismo ancho de banda,
- ↳ este ancho de banda es mayor que el que conseguimos con la estrategia integral, pero sigue estando por debajo del correspondiente al controlador proporcional.

Con todo ello, el controlador robusto que resulta de imponer las especificaciones de diseño en cuanto a estabilidad frente a incertidumbres en la dinámica y rechazo al ruido de bajas frecuencias y en  $28\text{hz}$ , presenta la respuesta en frecuencias que representamos en la figura 7.32.

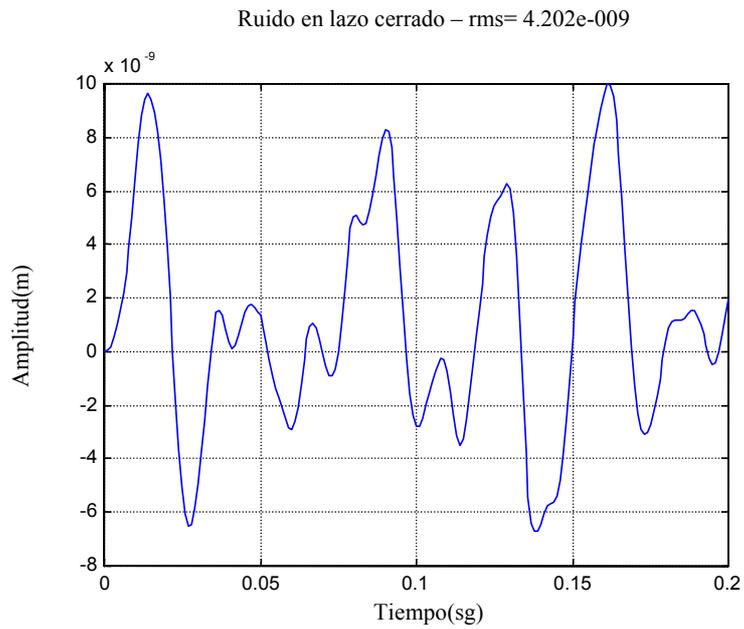


**Figura 7.32:** Respuesta en frecuencias del controlador robusto.

Por último, en las figuras 7.33 y 7.34 presentamos dos simulaciones correspondientes a la respuesta del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado (con el controlador robusto) sometido a la entrada de ruido blanco coloreado cuyo espectro mostramos en la figura 7.18.



**Figura 7.33:** Respuesta del sistema en lazo abierto frente a la entrada de ruido dada por la densidad de potencia espectral  $S(f)$ .



**Figura 7.34:** Respuesta del sistema en lazo cerrado frente a la entrada de ruido dada por la densidad de potencia espectral  $S(f)$ .

Comparando estas dos últimas figuras, observamos un factor de 10 en la atenuación del ruido, lo que coincide con los, aproximadamente,  $-20\text{dB}$  que nos da la

curva de sensibilidad del sistema con el controlador robusto en la región de bajas frecuencias (ver figura 7.29).

## CAPÍTULO VIII

# DESCRIPCIÓN, MODELIZACIÓN Y DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA UNA MAQUETA DEL ESPEJO PRIMARIO DEL GTC

Hasta el momento hemos trabajado con el modelo del espejo primario del GTC y diseñado para él una serie de controladores, tanto para el sistema acoplado como para el que resulta de aplicarle el procedimiento de desacoplo descrito en los capítulos IV y V de esta memoria. Los resultados alcanzados con dichos controladores en simulación podrán ser contrastados sobre una maqueta del espejo primario.

En este capítulo nos proponemos, en primer lugar, llevar a cabo una descripción de la maqueta del espejo primario del Gran Telescopio Canarias. La principal misión de este modelo a escala es la de estar disponible a la hora de llevar a cabo todas las pruebas preliminares que no se pueden realizar sobre el propio espejo primario del telescopio. Esto se debe a que, por un lado, la construcción del mismo no finalizará hasta el 2004 y,

por el otro, a que un sistema tan costoso no es adecuado para el testeado de los dispositivos, al menos en una fase preliminar. Sin embargo, para poder trabajar con la maqueta es necesario obtener un modelo dinámico de la misma, para lo que emplearemos un conjunto de datos obtenidos midiendo la respuesta de la planta ante una serie de entradas. Asimismo, llevaremos a cabo un análisis del diseño de un controlador de baja dimensionalidad para conseguir rechazo al ruido en la maqueta [Acosta, 2001b], [Sigut, 2001].

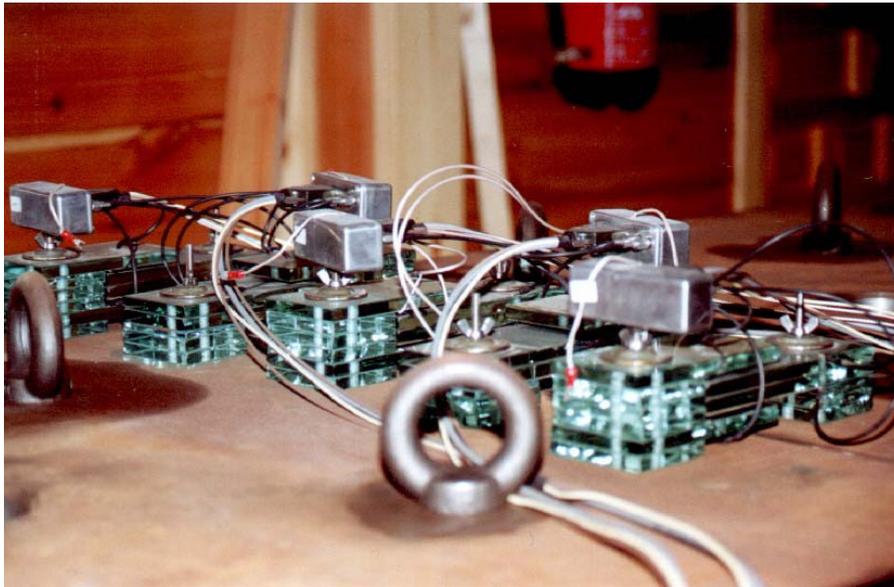
### **VIII.1. DESCRIPCIÓN DE LA MAQUETA**

La maqueta del espejo primario del Gran Telescopio Canarias está compuesta por dos segmentos cuadrados cuyas dimensiones son 0.9 metros de ancho×0.9 metros de largo×8 centímetros de grosor. A pesar de que su tamaño es considerablemente menor que el de un segmento del espejo del telescopio, su peso es aproximadamente el mismo (500kg), al estar hecho de acero. Estos dos segmentos se apoyan sobre una estructura a la cual se conectan mediante tres actuadores, aunque sólo dos de ellos están actualmente conectados físicamente al ordenador que gestiona el envío de los comandos, tal y como se observa en la figura 8.1.



**Figura 8.1:** Vista general de la maqueta del espejo primario del GTC, en la cual se observan los actuadores conectados a uno de los dos segmentos.

La medida de la desviación relativa o grado de desalineamiento entre los dos segmentos de la maqueta la realizan un conjunto de cinco sensores de posición situados en la arista común a los segmentos. En la figura 8.2 podemos observar un detalle de los sensores.



**Figura 8.2:** Detalle de los cinco sensores de posición de la maqueta del espejo primario del GTC.

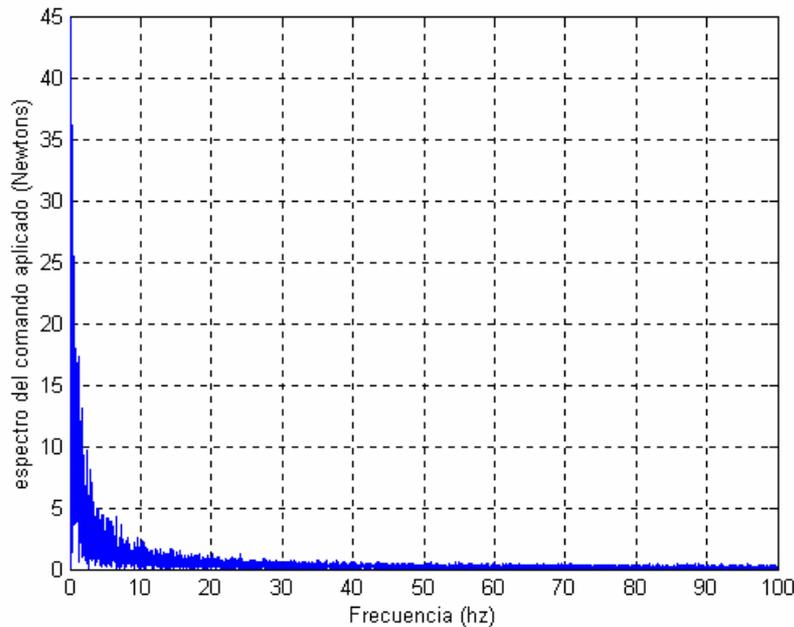
La maqueta del GTC está provista, además, de un sistema de elevación en el que no estamos interesados puesto que nuestro objetivo al trabajar con la misma es intentar lograr rechazo al ruido. Por último, comentar que todos los elementos anteriormente referidos se conectan a un ordenador mediante un bus CAN.

## **VIII.2. MODELIZACIÓN DE LA MAQUETA EMPLEANDO UN MODELO ARMAX**

### **VIII.2.1. Características dinámicas de la maqueta**

Como ya comentamos en la introducción de este capítulo, el primer objetivo que nos planteamos es la identificación de la dinámica de la maqueta [Ljung, 1999], [Söderström, 1989]. Para ello hacemos uso de los resultados obtenidos en una serie de pruebas en lazo abierto. Dichas pruebas consisten en la medida de varias series de 16400 muestras cada una de ellas en las que, tanto los comandos enviados a uno solo de

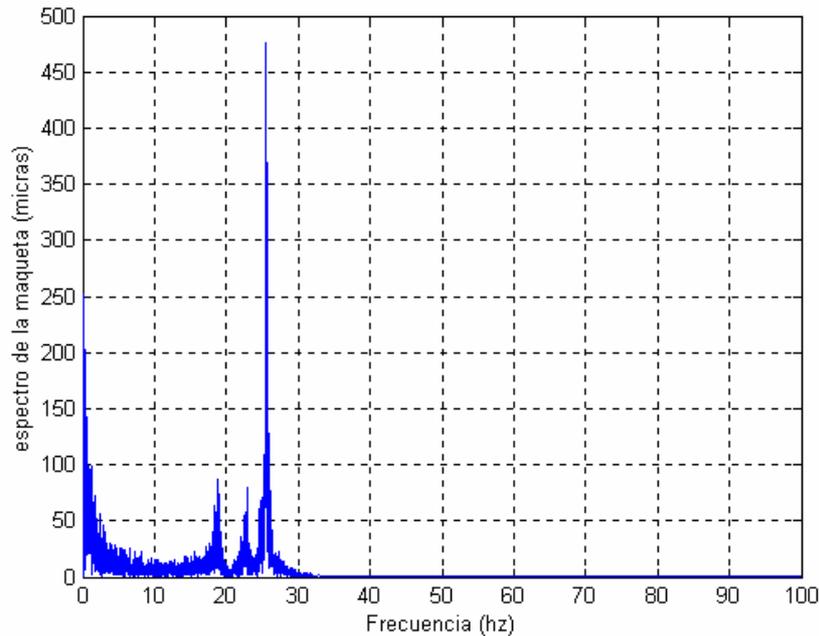
los actuadores activos (recordemos que son dos) con un período de muestreo de 0.005sg como las correspondientes medidas realizadas por los sensores de posición se registran para su posterior tratamiento y análisis. Los comandos vienen dados en *Newtons*, mientras que las distancias medidas por los sensores están en  $\mu m$ . En la figura 8.3 mostramos la magnitud de la transformada de Fourier de los comandos que hemos aplicado a los actuadores.



**Figura 8.3:** Transformada de Fourier de los comandos (*Newtons*) aplicados a los actuadores de uno de los segmentos de la maqueta.

Tal y como observamos en esta figura, la mayor parte de la potencia se concentra en la región de bajas frecuencias. De hecho, pretendemos que esta entrada reproduzca el ruido que afecta a los segmentos del espejo real y que, tal como vimos en el capítulo VII, es importante a bajas frecuencias.

Por otra parte, en la figura 8.4 representamos la transformada de Fourier de las lecturas de los sensores de posición frente a la entrada mostrada en la figura 8.3. Debido a que los patrones que presentan todos los sensores son prácticamente idénticos, hemos optado por presentar el correspondiente a uno solo de ellos, el etiquetado con el número cuatro:

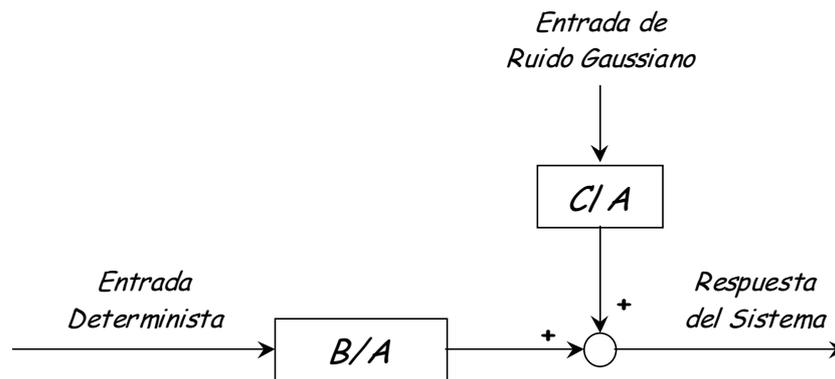


**Figura 8.4:** Transformada de Fourier de la respuesta del sensor 4 ( $\mu m$ ) frente al comando de la figura 8.3.

En esta figura observamos que toda la potencia en la respuesta del sensor se encuentra por debajo de los 30hz, concretamente en la zona de bajas frecuencias y en torno a los 18, 23 y 26hz. En este último valor se concentra la mayor parte de la potencia espectral. Es importante notar que las frecuencias en las que se encuentran los modos de la maqueta no tienen por qué coincidir exactamente con las que corresponden al espejo primario del telescopio, como de hecho así ocurre.

### VIII.2.2. Modelización de la maqueta

Sin perder de vista nuestro objetivo de obtener un modelo lineal que reproduzca lo más fielmente posible la dinámica de la maqueta, acometemos la identificación modal de la misma. Para ello usamos un modelo ARMAX (autoregresivo de media móvil con entrada exógena) clásico para la identificación de la dinámica determinista y estocástica de la planta y como herramienta de trabajo la “toolbox” de identificación del Matlab [Ljung, 1991]. Así, como resultado del proceso de identificación obtenemos  $A$ ,  $B$  y  $C$  que mostramos en el diagrama de bloques en lazo abierto siguiente:



donde:

- ⇒  $B/A$  es la función de transferencia de la planta tomando como entrada el comando aplicado a los actuadores de la maqueta, mientras que
- ⇒  $C/A$  es la función de transferencia tomando como entrada la señal de ruido gaussiano que afecta a la respuesta del sistema.

De cara a la identificación de la dinámica de la maqueta del espejo primario del Gran Telescopio Canarias, queremos poner de manifiesto que tan importante como obtener un modelo que reproduzca lo mejor posible la característica de magnitud del sistema real es que dicho modelo logre igualmente un buen ajuste de la fase. Asimismo, incluir etapas de retardo en el proceso de identificación juega un papel decisivo de cara a obtener un buen modelo de la planta.

Para verlo, presentamos un ejemplo sencillo con el que pretendemos ilustrar este último punto.

**Ejemplo:**

Consideremos una planta de segundo orden que viene dada por la función de transferencia discreta siguiente:

$$G_p(z) = \frac{0.0908z - 0.0743}{z^2 - 1.6457z + 0.6703}$$

a la que sometemos a la misma entrada que a la maqueta del primario del GTC (ver figura 8.3) y para la que consideramos una entrada de ruido blanco.

Los polos de  $G_p(z)$  están en  $z_1 = 0.9052$  y  $z_2 = 0.7405$ ; mientras que el cero se encuentra en  $z = 0.8183$ . Nos encontramos, por tanto, ante un sistema estable de fase mínima.

Nuestro objetivo es identificar la dinámica de esta planta empleando para ello un modelo ARMAX y partiendo de la información de los comandos aplicados y de la salida correspondiente. Así, encontramos que si para la identificación usamos dos polos, un cero para la parte determinista y otro para la estocástica, y no incluimos ninguna etapa de retardo, el modelo obtenido para la parte determinista resulta ser:

$$G_{m1}(z) = \frac{0.0866 - 0.0008z}{z^2 - 0.8131z - 0.0581}$$

que tiene dos polos en  $z_1 = 0.8792$  y  $z_2 = -0.0661$ , y un cero en  $z = 113.1050$ .

Como vemos, no sólo la identificación de los polos de la planta es altamente deficiente sino que aparece un cero fuera del círculo unidad, con lo que el modelo que obtenemos es de fase no mínima.

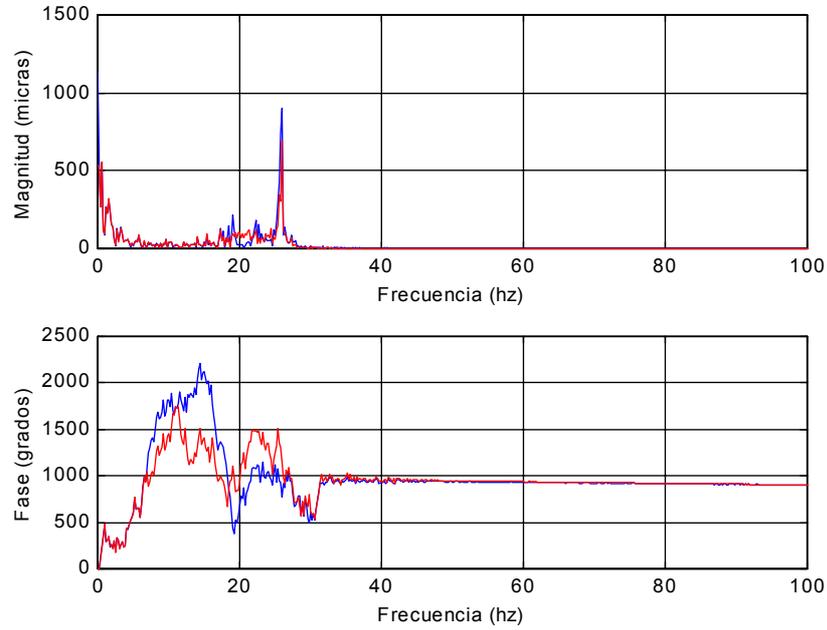
En cambio, si en el proceso de identificación mantenemos el mismo número de polos y ceros y añadimos una etapa de retardo tenemos que identificamos perfectamente el sistema de partida, es decir:

$$G_{m2}(z) = \frac{z - 0.8183}{(z - 0.9052)(z - 0.7405)}$$

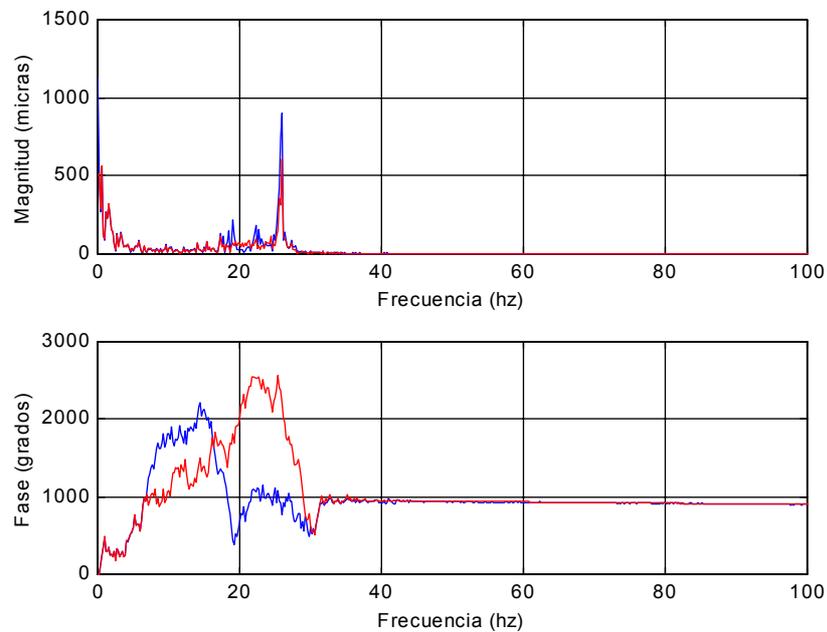
Una vez que hemos mostrado la importancia de incluir etapas de retardo en la identificación de la dinámica de un sistema, abordamos sin más el problema de la obtención de un modelo para la maqueta. La solución que vamos buscando debe cumplir el compromiso entre que el modelo obtenido sea lo más sencillo posible, esto es, tener el menor número de ceros y polos, y, al mismo tiempo, nos permita reproducir lo mejor posible los datos experimentales que empleamos en el proceso de identificación.

A continuación presentamos una serie de figuras que muestran conjuntamente la curva de magnitud y fase de la salida de la maqueta y del modelo obtenido con distinto

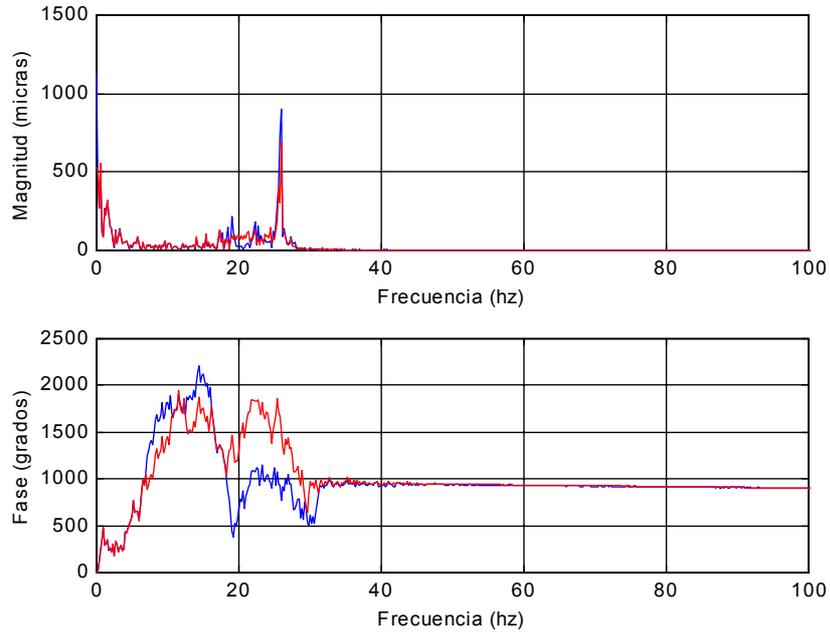
número de polos ( $P$ ), ceros, tanto de la parte determinista ( $D$ ) como de la estocástica ( $E$ ), y etapas de retardo ( $R$ ). La notación empleada en los pies de figura es ( $P,D,E,R$ ).



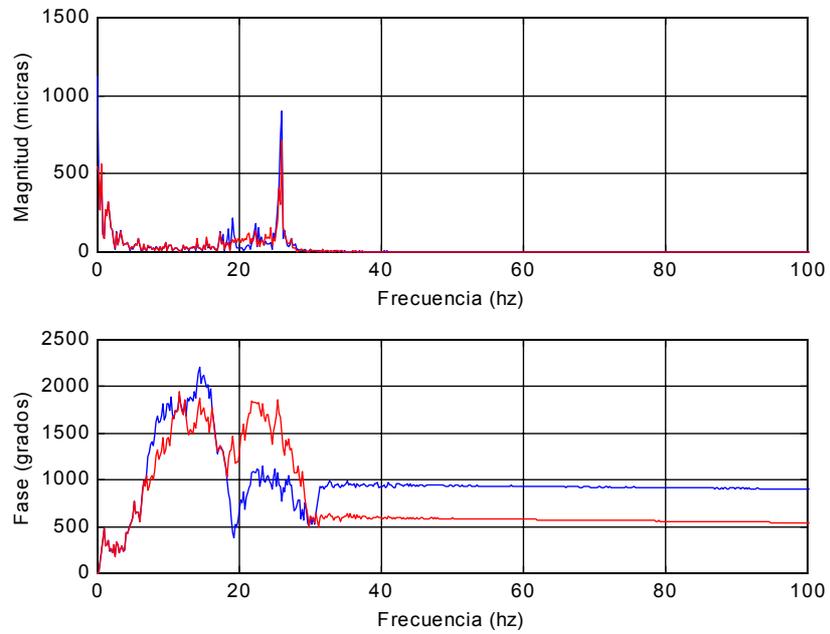
**Figura 8.5:** Magnitud y fase de la maqueta (azul) frente a la del modelo (rojo) correspondiente a (11,4,4,5).



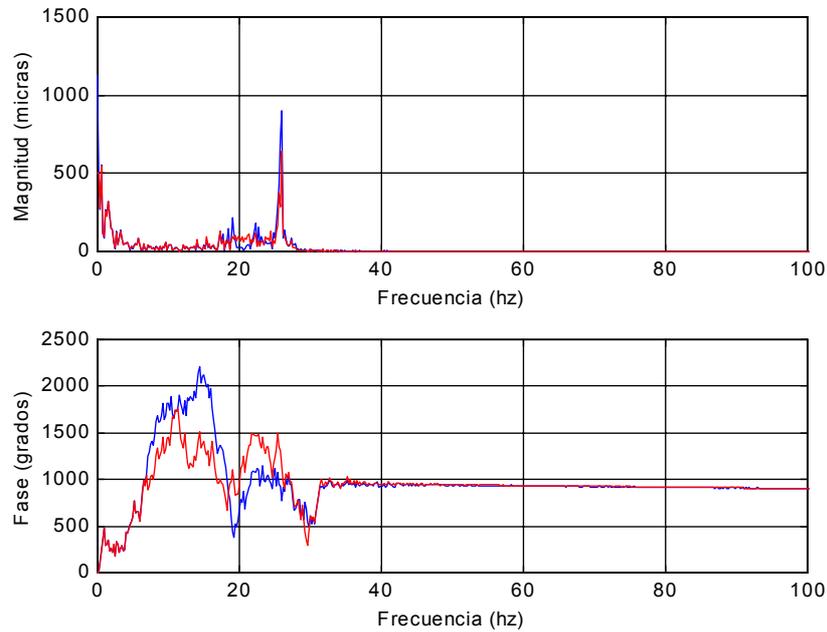
**Figura 8.6:** Magnitud y fase de la maqueta (azul) frente a la del modelo (rojo) correspondiente a (11,4,4,0).



**Figura 8.7:** Magnitud y fase de la maqueta (azul) frente a la del modelo (rojo) correspondiente a (9,4,4,5).



**Figura 8.8:** Magnitud y fase de la maqueta (azul) frente a la del modelo (rojo) correspondiente a (7,4,4,5).



**Figura 8.9:** Magnitud y fase de la maqueta (azul) frente a la del modelo (rojo) correspondiente a  $(13,4,4,5)$ .

A la vista de las figuras anteriores, vemos que el modelo que con menor número de polos mejor reproduce el comportamiento de la maqueta es el correspondiente a  $(11,4,4,5)$ , que mostramos en la figura 8.5. Si eliminamos las etapas de retardo en el proceso de identificación, es decir, tomamos  $(11,4,4,0)$ , vemos en la figura 8.6 cómo empeora el ajuste de la fase de la respuesta de la maqueta, apareciendo entonces ceros de fase no mínima en la dinámica determinista del sistema. Es importante darnos cuenta de que estos términos surgen, como ya vimos en el ejemplo anterior, por el hecho de prescindir del retardo y no corresponden a la dinámica del sistema real. Para ello basta con comparar el ajuste de la fase que logramos con y sin retardo (ver figuras 8.5 y 8.6). Trabajar con un sistema de fase no mínima conlleva importantes limitaciones desde el punto de vista del diseño de un controlador para rechazar el ruido de bajas frecuencias en la maqueta [Freudenberg, 1985], [Quiu, 1993]. En concreto, como es bien conocido, ni un controlador proporcional ni uno integral proporcionan rechazo al ruido en tales circunstancias, debido a las restricciones que los ceros fuera del círculo unidad imponen a la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En este caso, se hace necesario acudir a otro

tipo de controlador, por ejemplo un compensador, para tratar de mejorar el rendimiento de la planta. De cualquier forma, incluso en este último caso, el rechazo al ruido de bajas frecuencias que podemos conseguir está limitado debido, nuevamente, a los términos de fase no mínima. Está claro, entonces, que a la hora de elegir un modelo para el sistema, debemos atender al correcto ajuste de la magnitud y de la fase.

Si mantenemos entonces las cinco etapas de retardo y bajamos el orden del modelo observamos en las figuras 8.7 y 8.8 cómo empeora claramente el ajuste de la curva de fase, haciéndose más patente este empeoramiento con siete polos. Si, por el contrario, aumentamos el número de polos del modelo a 13 (ver figura 8.9) comprobamos que no hay diferencias apreciables en la identificación del sistema, tanto en lo que se refiere a la magnitud como a la fase. Todo ello hace que nos decantemos por el modelo correspondiente a 11 polos, 4 ceros deterministas (todos ellos de fase mínima), 4 ceros estocásticos y 5 etapas de retardo. Dichos ceros y polos los mostramos a continuación:

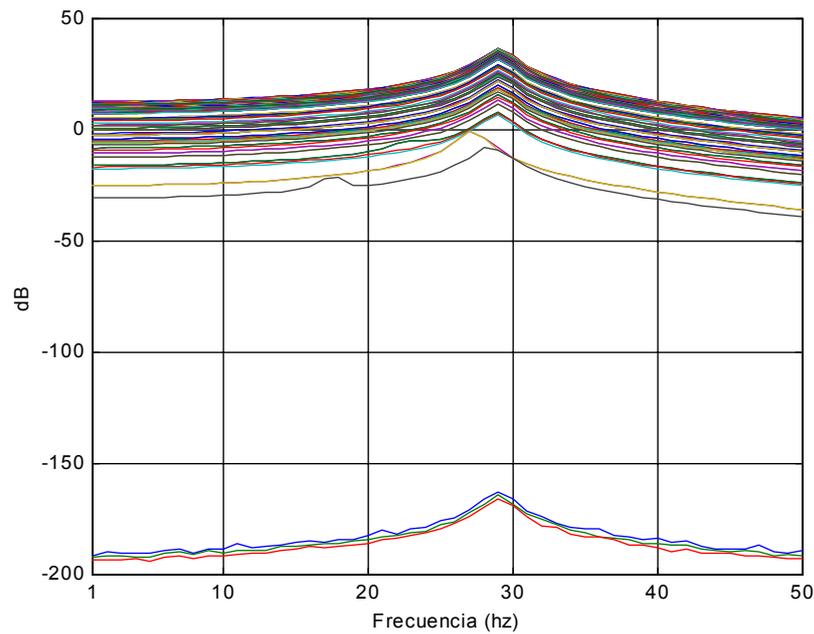
$$\mathbf{Ceros\ deterministas:} \left\{ \begin{array}{l} -0.8561 \\ -0.4674 \\ 0.2006 \pm 0.7935j \end{array} \right. \quad \mathbf{Ceros\ estocásticos:} \left\{ \begin{array}{l} -0.9164 \\ 0.3421 \\ 0.2699 \pm 0.9219j \end{array} \right.$$

$$\mathbf{Polos:} \left\{ \begin{array}{l} -0.9160 \\ 0.2600 \pm 0.9153j \\ -0.4979 \pm 0.3648j \\ 0.6905 \pm 0.7196j \\ 0.7771 \pm 0.5432j \\ 0.6035 \pm 0.1399j \end{array} \right.$$

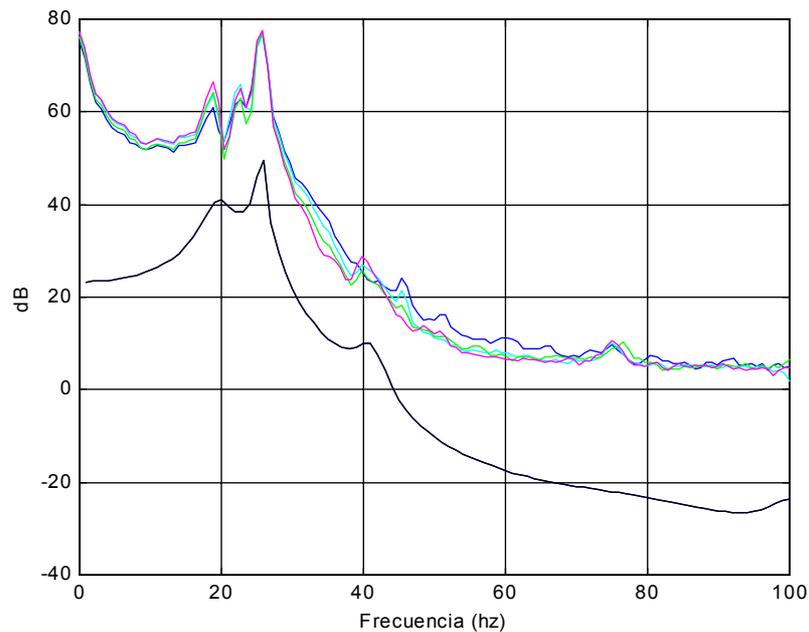
con lo que los modos del modelo ARMAX obtenido son:

$$\mathbf{Modos\ (hz):} \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 17 \\ 19 \\ 26 \\ 41 \\ 81 \end{array} \right.$$

Podemos comparar entonces la curva correspondiente a los valores singulares del modelo completo del espejo primario del Gran Telescopio Canarias (ver capítulo II), que mostramos en la figura 8.10, con la que tenemos para el modelo ARMAX obtenido para la maqueta del GTC, que representamos en la figura 8.11. En esta última gráfica mostramos, además, las curvas correspondientes a la densidad de potencia espectral de los sensores de la maqueta, obtenidas a partir de las medidas reales tomadas por éstos (que es la información que hemos empleado para la identificación del sistema):



**Figura 8.10:** Valores singulares del modelo del espejo primario del GTC.



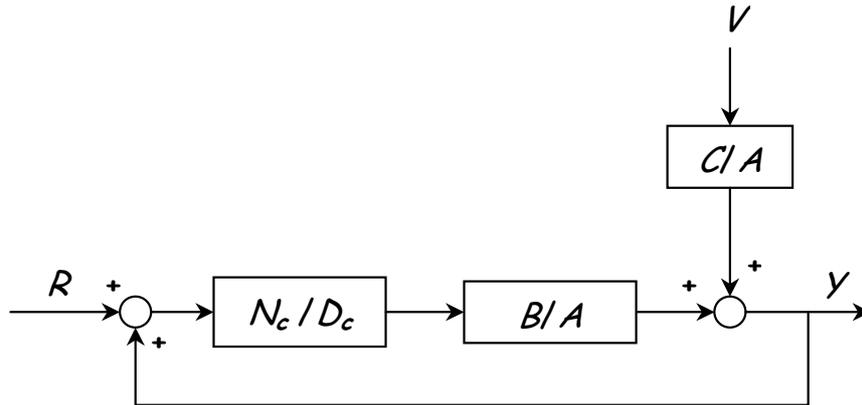
**Figura 8.11:** Negro → Valores singulares del modelo ARMAX de la maqueta del primario del GTC. Azul oscuro, azul claro, verde y magenta → densidad de potencia espectral de los sensores 1, 2, 3 y 4 de la maqueta, respectivamente.

A la vista de las figuras 8.10 y 8.11 y estableciendo una analogía entre ambos sistemas tenemos que podemos considerar a la maqueta caracterizada por un modo en  $19\text{hz}$ , que corresponde al de  $17\text{hz}$  en el modelo del espejo primario del telescopio. El acoplamiento entre la estructura y los segmentos provoca que uno de los modos asociados al segmento de la maqueta sobre el que actuamos se desplace de su valor nominal,  $26\text{hz}$  (que es el análogo a los  $28\text{hz}$  de los segmentos del espejo del telescopio) a una frecuencia de  $17\text{hz}$ . Por último, los modos de  $41$  y  $81\text{hz}$  corresponden a la estructura de la maqueta.

A pesar de que, como ya comentamos a lo largo de este capítulo, los modos de la maqueta no coinciden numéricamente con los del espejo del telescopio, es importante establecer la equivalencia entre ambos. Sólo así los resultados que obtengamos al aplicar las diferentes políticas de control que veremos a continuación a la maqueta podrán extrapolarse al espejo primario del GTC.

### VIII.3. DISEÑO DE UN CONTROLADOR PARA RECHAZO AL RUIDO DE BAJA FRECUENCIA EN LA MAQUETA

Nuestro objetivo es diseñar un controlador lo más sencillo posible que logre el máximo rechazo al ruido de bajas frecuencias en la maqueta. Para ello planteamos el diagrama de bloques en lazo cerrado que mostramos a continuación:



donde  $N_c/D_c$  es la función de transferencia del controlador.

Sabemos que podemos expresar la especificación de rechazo al ruido empleando la función de sensibilidad,  $S(s)$ , como:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)|$$

donde  $|W_1^{-1}(j\omega)|$  representa la atenuación deseada para el ruido en la frecuencia  $\omega$ .

Así, partiendo del diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado podemos escribir que:

$$Y = \left( \frac{B \cdot N_c}{A \cdot D_c + B \cdot N_c} \right) \cdot R + \left( \frac{A \cdot D_c}{A \cdot D_c + B \cdot N_c} \cdot \frac{C}{A} \right) \cdot V \quad (8.1)$$

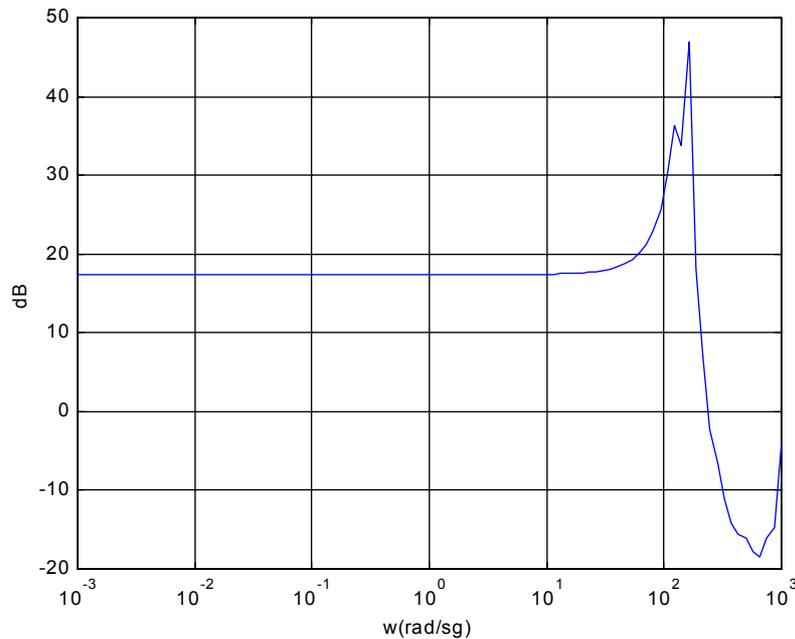
de donde tenemos que:

$$S(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{A \cdot D_c}{A \cdot D_c + B \cdot N_c} \cdot \frac{C}{A} \quad (8.2)$$

Si definimos ahora una función de sensibilidad en lazo abierto como:

$$S_{la}(s) = \frac{C}{A}$$

y representamos en la figura 8.12 el valor singular de dicha función en el dominio de las frecuencias, encontramos la curva que mostramos a continuación:



**Figura 8.12:** Comportamiento en frecuencias de la función de sensibilidad del sistema en lazo abierto.

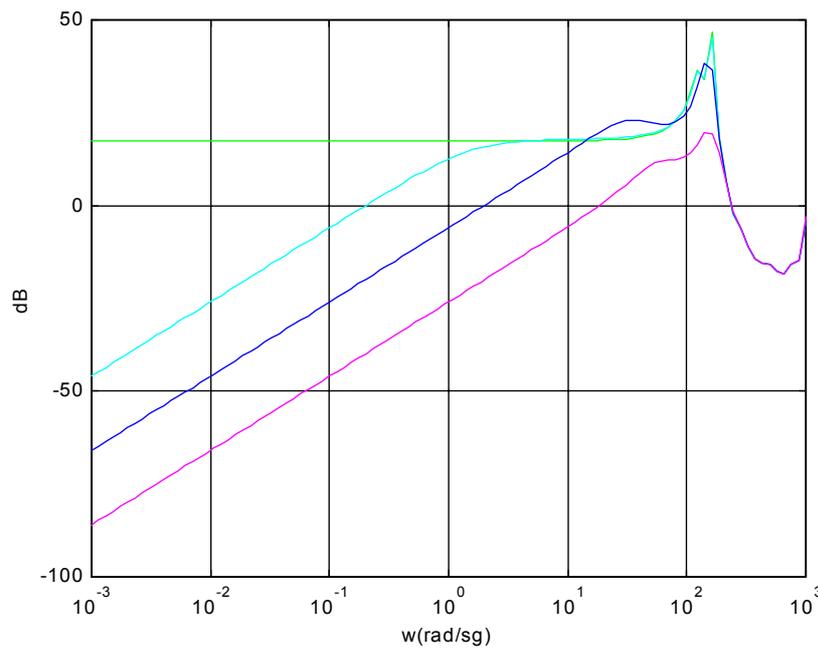
con la que compararemos las obtenidas al cerrar el lazo de control para analizar así los beneficios obtenidos con el controlador implementado.

De esta manera, el problema que nos planteamos es encontrar el controlador  $N_c/D_c$  que minimiza la ganancia de la curva de sensibilidad del sistema en lazo cerrado a bajas frecuencias, es decir, maximiza la atenuación del ruido en este rango en la maqueta del espejo primario del GTC. Es importante notar que, dado que estamos considerando ruido de proceso, debemos también tener en cuenta el rechazo al ruido en las frecuencias correspondientes a los modos de la planta, sobre todo en el que está en  $26\text{hz}$ , por ser el más importante, tal y como se refleja en la figura 8.4.

### VIII.3.1 Control integral

Dado que buscamos un controlador que nos permita obtener el máximo rechazo al ruido, tanto a bajas frecuencias como en  $26\text{hz}$ , estudiemos, en primer lugar, el rendimiento que proporciona la implementación de un controlador integral,  $F(s) = K_i/s$ , empleando una discretización de  $200\text{hz}$ , para distintos valores de la constante de integración  $K_i$ .

Para ello, hemos representado en la figura 8.13 las curvas de la sensibilidad del sistema en lazo cerrado con  $K_i$  igual a 0.1, 1 y 10. Dichas curvas las pintamos en color azul claro, azul oscuro y magenta, respectivamente, mientras que en color verde superponemos la correspondiente a la sensibilidad del sistema en lazo abierto  $S_{la}(j\omega)$ .



**Figura 8.13:** Sensibilidad en lazo cerrado con el controlador integral para  $K_i = 0.1$  (azul claro),  $K_i = 1$  (azul oscuro) y  $K_i = 10$  (magenta) frente a la de lazo abierto (verde).

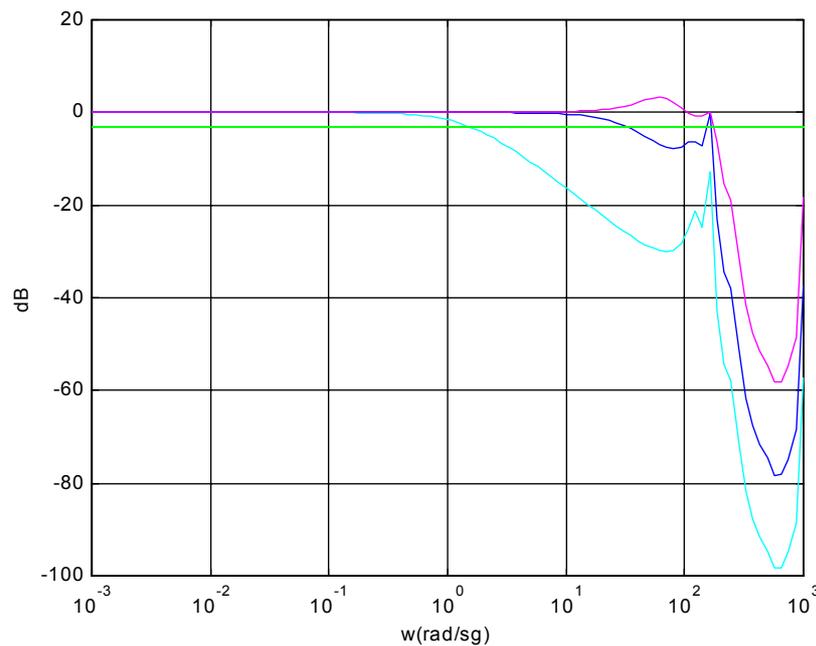
En estas figuras vemos que, tal y como esperábamos, un controlador integral nos permite tener tanta atenuación del ruido a bajas frecuencias como deseemos, sin más

que ajustar debidamente la ganancia del controlador. En nuestro caso vemos que, cuando mayor es  $K_i$ , mayor es el rechazo conseguido.

Sin embargo, sabemos que la estrategia de control integral también se caracteriza por la limitación que impone al ancho de banda del sistema. Siendo  $T(s)$  la función de transferencia de la salida del sistema con respecto a la entrada de consigna, tenemos que, de la expresión (8.1) podemos escribir directamente que:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B \cdot N_C}{A \cdot D_C + B \cdot N_C} \quad (8.3)$$

En la figura 8.14 hemos representado la curva correspondiente al valor singular de  $T(s)$  para los mismos valores de  $K_i$  para los que representamos anteriormente la función de sensibilidad, esto es: 1, 0.1 y 10, según el código de colores que indicamos al pie de figura.



**Figura 8.14:** Ancho de banda del sistema en lazo cerrado con el controlador integral para  $K_i = 0.1$  (azul claro),  $K_i = 1$  (azul oscuro) y  $K_i = 10$  (magenta); en verde: -3dB.

Tal como esperábamos, observamos que, a medida que la ganancia del controlador integral aumenta, lo hace también el ancho de banda del sistema.

Así, analizando conjuntamente las figuras 8.13 y 8.14, concluimos que cuanto mayor es  $K_i$ , mayor atenuación del ruido a bajas frecuencias y mayor ancho de banda conseguimos, aunque para  $K_i = 1$  y  $K_i = 10$  este último es prácticamente el mismo. Sin embargo, la planta en lazo cerrado es estable para  $K_i = 0.1$  y  $K_i = 1$  e inestable para  $K_i = 10$ . Entonces, buscando el controlador integral que proporciona estabilidad, maximizando al mismo tiempo, tanto la atenuación del ruido, especialmente a bajas frecuencias y en  $26\text{hz}$ , como el ancho de banda, debemos quedarnos con  $K_i = 1$ , ya que, para esta ganancia, el sistema se encuentra ya al borde de la inestabilidad.

Aunque el rechazo en las bajas frecuencias que tenemos al aplicar un controlador integral con  $K_i = 1$  es considerable y el ancho de banda está en torno a los  $26\text{hz}$ , no observamos prácticamente ninguna atenuación del ruido en esta frecuencia. Es por ello por lo que nos planteamos mejorar esta especificación empleando otra estrategia de control.

### VIII.3.2. Control por compensación

Vistas las prestaciones conseguidas con la estrategia integral, nos proponemos ahora mejorarlas mediante la implementación de un compensador sobre la maqueta del primario del GTC. El controlador, que diseñamos en continuo por ser en este dominio más intuitiva la contribución, tanto en magnitud como en fase, de los distintos términos, responde a la siguiente expresión:

$$G_c(s) = \frac{k_c \prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^m (s + p_j)}$$

donde la única restricción que imponemos tanto a los polos como a los ceros es que sean todos ellos de fase mínima y que el controlador sea causal, es decir  $n \geq m$ . Una vez diseñado el controlador, lo discretizamos a  $200\text{hz}$  y lo aplicamos al modelo de la maqueta.

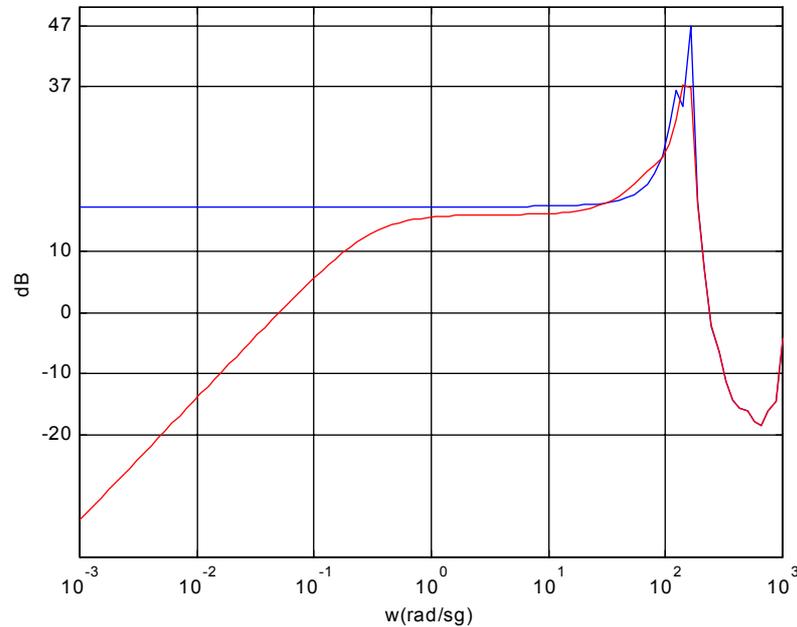
Sin perder de vista los objetivos de rechazar tanto como sea posible el ruido en bajas frecuencias y en  $26\text{hz}$  y tener un ancho de banda en torno a esta frecuencia,

ensayamos distintas combinaciones de ceros y polos para el compensador. En todos los casos nos encontramos con que la condición de estabilidad del sistema en lazo cerrado impone un límite importante al rendimiento obtenido con el compensador.

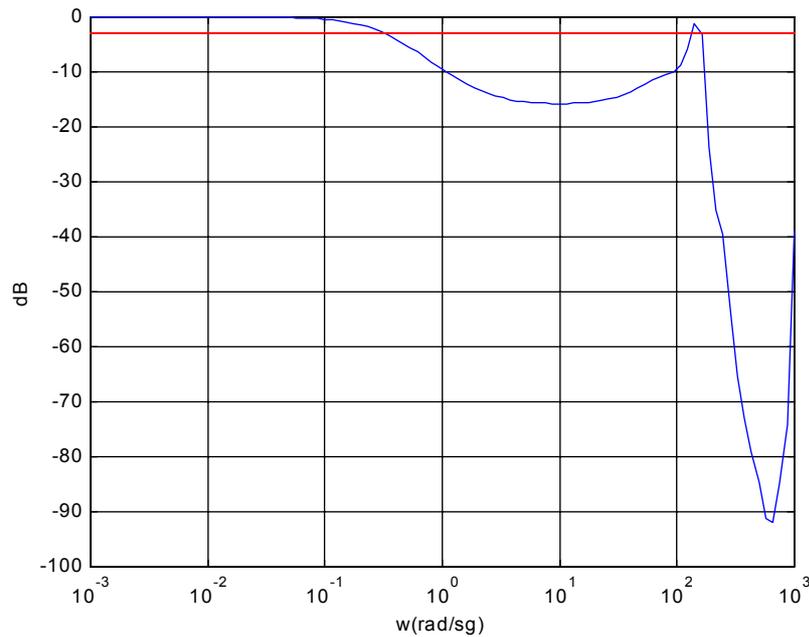
Así, los mejores resultados los hemos encontrado con un controlador de la forma:

$$G_c(s) = \frac{0.02 \left( \frac{s}{2} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{163} + 1 \right)^2}$$

aunque, en realidad, existen una variedad de compensadores que, al final, debido al ajuste de la ganancia  $k_c$  para tener un sistema que en lazo cerrado sea estable, nos conducen a las mismas prestaciones. Éstas son las que representamos en las figuras 8.15 y 8.16:



**Figura 8.15:** Sensibilidad en lazo cerrado con el compensador (rojo) frente a la de lazo abierto (azul).



**Figura 8.16:** Respuesta del sistema en lazo cerrado.

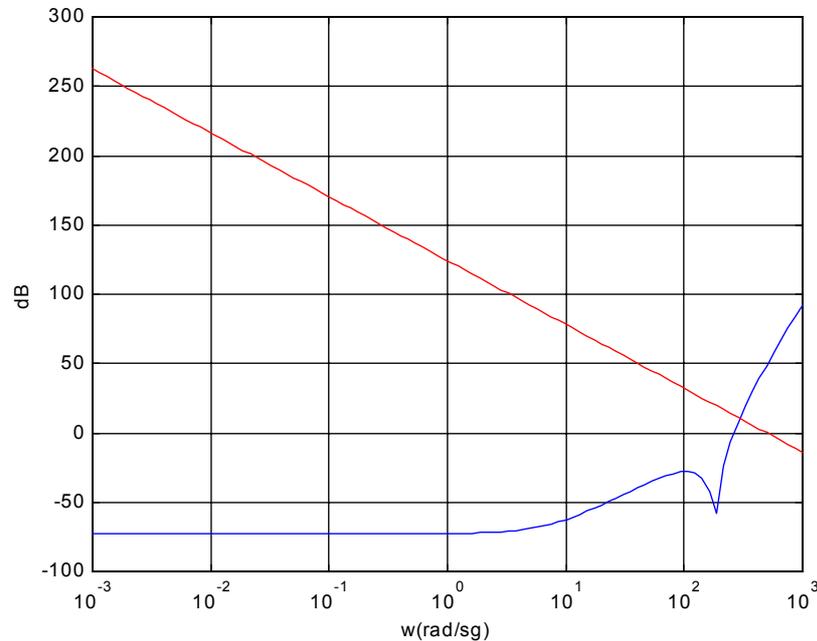
Si comparamos estas dos últimas figuras con las obtenidas con el controlador integral para  $K_i = 1$  (ver figuras 8.13 y 8.14), encontramos que con el compensador apenas logramos mejorar los resultados conseguidos con aquél. Si acaso mejoramos la curva de sensibilidad del sistema en lazo cerrado en el rango entre 20 y 100rad/sg y obtenemos un rechazo en 26hz de 10dB, tal y como observamos en la figura 8.15, que es ligeramente superior al logrado con la estrategia integral.

Es por la imposibilidad de obtener las prestaciones deseadas, en cuanto a una mayor atenuación del ruido en 26hz, con las dos estrategias implementadas hasta el momento: control integral y compensación, por lo que nos planteamos realizar el diseño de un controlador robusto para la maqueta del GTC.

### VIII.3.3. Diseño de un controlador robusto para la maqueta del GTC

Buscando tener rechazo al ruido de bajas frecuencias y, especialmente, en 26hz, por ser éste el modo dominante de la maqueta y estar ante ruido de proceso, y un ancho de banda en torno a esta frecuencia, planteamos las especificaciones de diseño para un

controlador robusto [Toffner-Clausen, 1996]. Éstas son las que mostramos en la figura 8.17:



**Figura 8.17:**  $|W_1^{-1}(jw)|$  para rechazar el ruido en bajas frecuencias y en 26hz (azul) y  $|W_3^{-1}(jw)|$  para tener un ancho de banda en torno a los 26hz (rojo).

donde, como ya vimos en el capítulo VII, el controlador robusto diseñado en base a estas especificaciones [Petersen, 2000] será tal que se verifiquen las relaciones siguientes:

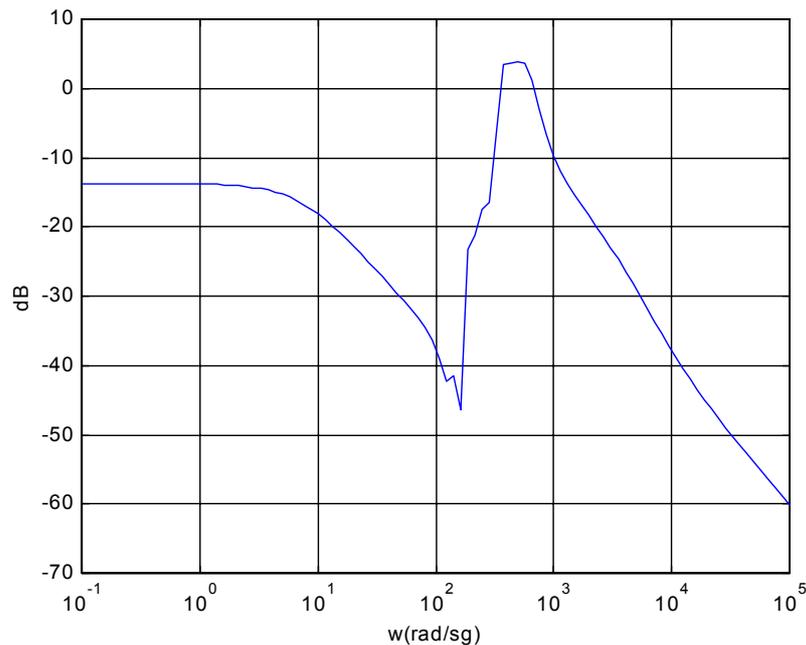
$$|S(jw)| \leq |W_1^{-1}(jw)|$$

y

$$|T(jw)| \leq |W_3^{-1}(jw)|$$

siendo  $S(jw)$  y  $T(jw)$  las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria del sistema en lazo cerrado, respectivamente.

El controlador que, cumpliendo ambos requerimientos, nos proporciona estabilidad presenta, entonces, la siguiente respuesta en frecuencia:



**Figura 8.18:** Respuesta en frecuencia del controlador robusto para la maqueta del GTC diseñado en base a las especificaciones de la figura 8.17.

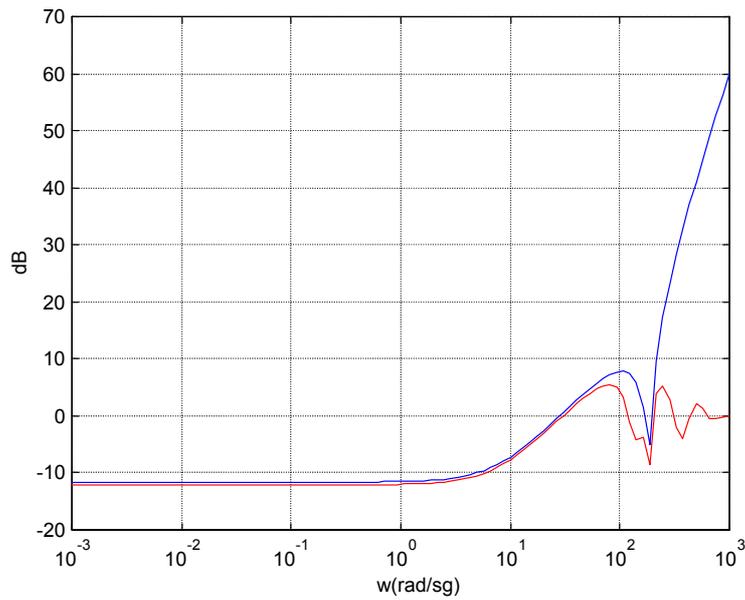
En las figuras 8.19 y 8.20 representamos, respectivamente, las curvas de sensibilidad y sensibilidad complementaria obtenidas con el controlador robusto [Chiang, 1992] cuya respuesta en frecuencia mostramos en la figura 8.18, junto con las especificaciones de diseño.

En el proceso de síntesis del controlador interviene un parámetro que denominamos *Gamma* ( $\gamma$ ) que, de algún modo, pesa la especificación  $W_1^{-1}(j\omega)$  impuesta inicialmente por nosotros (en este caso, sería la curva de color azul en la figura 8.17) en fase de diseño del controlador. Así, si adoptamos la notación siguiente:

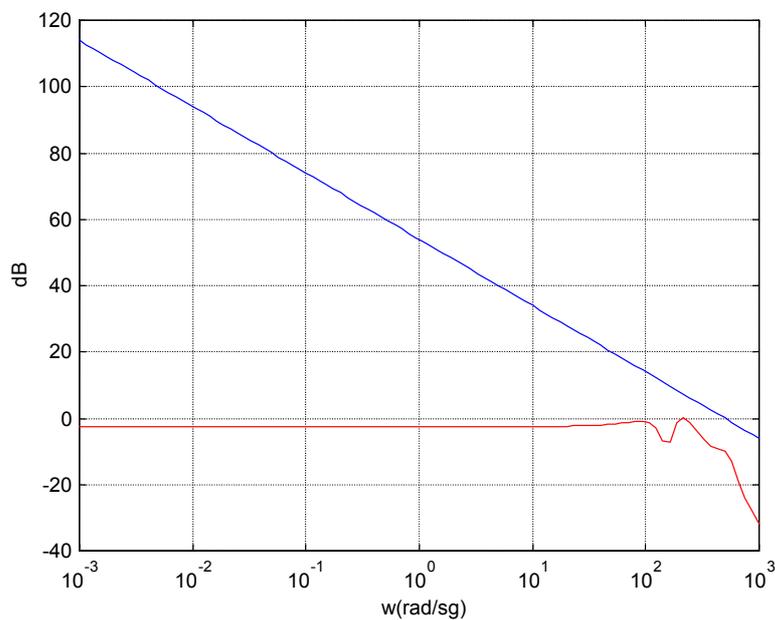
$$W_{1,\gamma}^{-1}(j\omega) = \frac{W_1^{-1}(j\omega)}{\gamma}$$

la idea es sintonizar el valor de  $\gamma$  de forma que tengamos el máximo rechazo al ruido, pero imponiendo que el sistema en lazo cerrado sea estable.

A veces, como en este caso, es necesario relajar las especificaciones de diseño originales para cumplir con la condición anterior, de forma que encontramos que el mayor valor de *Gamma* que nos proporciona estabilidad es 0.1.



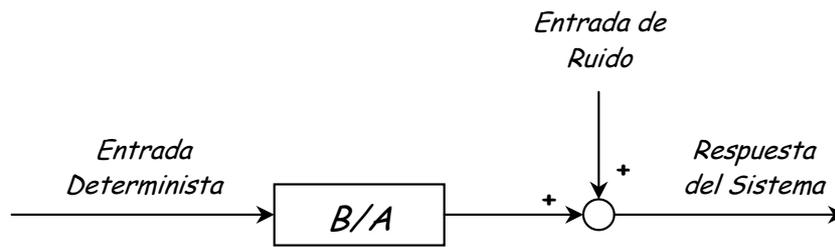
**Figura 8.19:**  $|W_{1,0,1}^{-1}(jw)|$  (en azul) frente a la curva de sensibilidad del sistema con el controlador robusto (en rojo).



**Figura 8.20:**  $|W_3^{-1}(jw)|$  (en azul) frente a la curva de sensibilidad complementaria del sistema con el controlador robusto (en rojo).

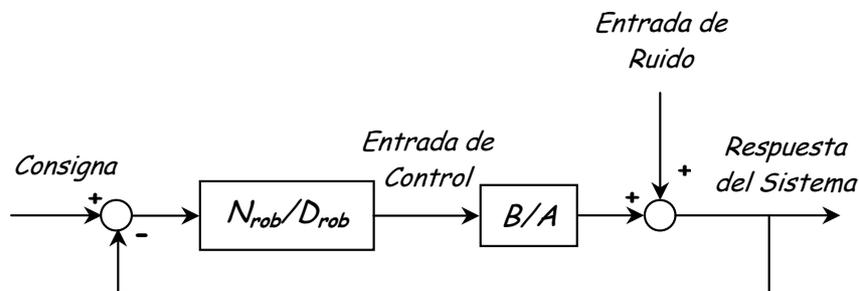
Es importante notar que para conocer el rechazo al ruido que conseguimos con el controlador robusto que acabamos de diseñar debemos comparar la curva de sensibilidad del sistema en lazo cerrado (curva de color rojo en la figura 8.19) con  $0\text{dB}$ ,

en lugar de hacerlo con la curva de sensibilidad del sistema en lazo abierto que representamos en la figura 8.12. La razón para ello es que, a la hora de realizar la síntesis del controlador robusto, se prescinde de la parte estocástica de la dinámica del sistema, esto es, el factor  $C/A$ . Por tanto, desde el punto de vista del controlador robusto, el diagrama de bloques del sistema en lazo abierto es el siguiente:



de donde tenemos que la función de transferencia de la salida frente a la entrada de ruido, es decir, la función de sensibilidad en lazo abierto, es la unidad.

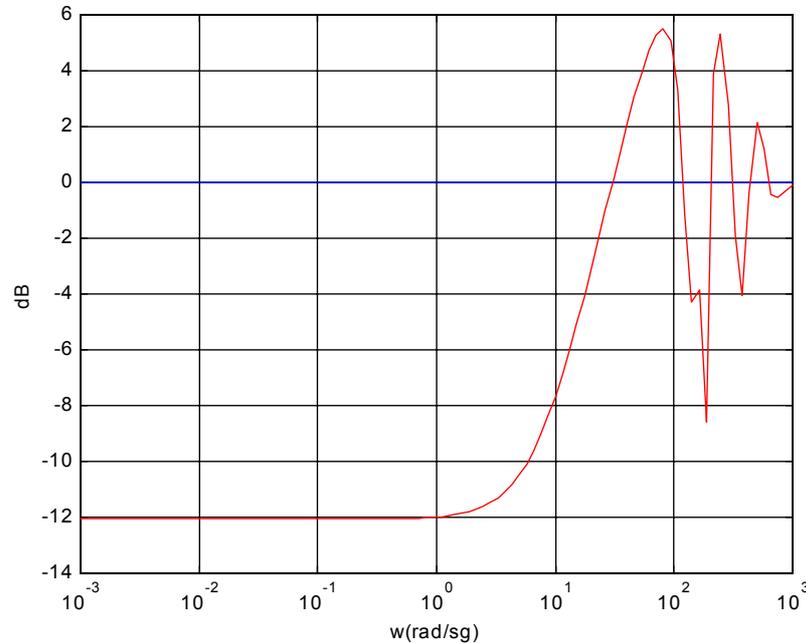
En lazo cerrado, tenemos que:



con lo que se justifica que para determinar el rechazo al ruido que conseguimos con el controlador robusto diseñado para la maqueta, comparemos, en la figura 8.21, la curva correspondiente a la función de sensibilidad en lazo cerrado que, a la vista de este último diagrama de bloques, responde a la expresión siguiente:

$$S_{lc}(j\omega) = \frac{A * D_{rob}}{A * D_{rob} + B * N_{rob}}$$

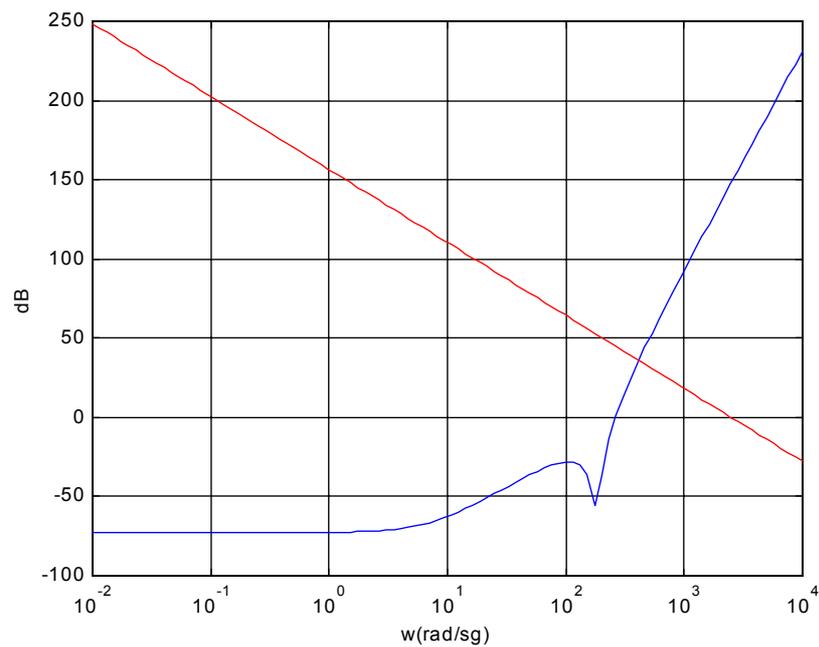
con los  $0dB$  correspondientes a la función de sensibilidad en lazo abierto,  $S_{la}(j\omega) = 1$ .



**Figura 8.21:** Sensibilidad en lazo cerrado con el controlador robusto frente a  $0dB$ .

A la vista de las figuras 8.20 y 8.21 tenemos que, con un ancho de banda de aproximadamente  $40Hz$ , el controlador robusto que obtenemos en base a las especificaciones de diseño de la figura 8.17 nos permite obtener un rechazo al ruido en los  $26Hz$  del segmento de la maqueta de unos  $8dB$ , lo cual equivale a un factor de atenuación de las perturbaciones de  $0.4$ . Como vemos, el rechazo conseguido se queda incluso algo por debajo del que obtenemos con el compensador (ver figura 8.15).

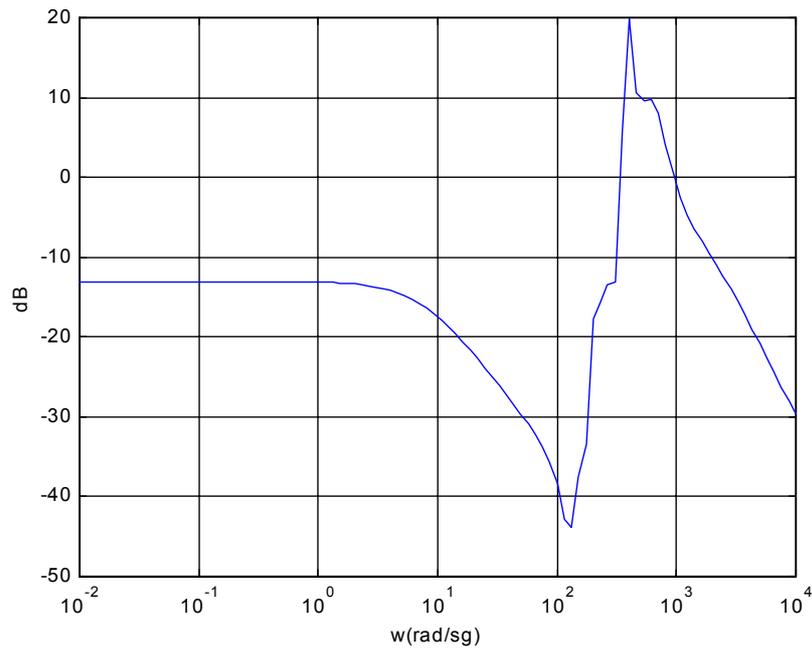
Para tratar de mejorar las prestaciones del sistema, sobre todo en lo que al rechazo al ruido en  $26Hz$  se refiere, planteamos de nuevo el diseño de un controlador robusto relajando la condición sobre la especificación correspondiente al ancho de banda que presenta el sistema en lazo cerrado. Así, representamos conjuntamente  $|W_1^{-1}(j\omega)|$  y la nueva  $|W_3^{-1}(j\omega)|$  en la figura 8.22:



**Figura 8.22:** Especificaciones de diseño para el controlador robusto relajando la correspondiente a

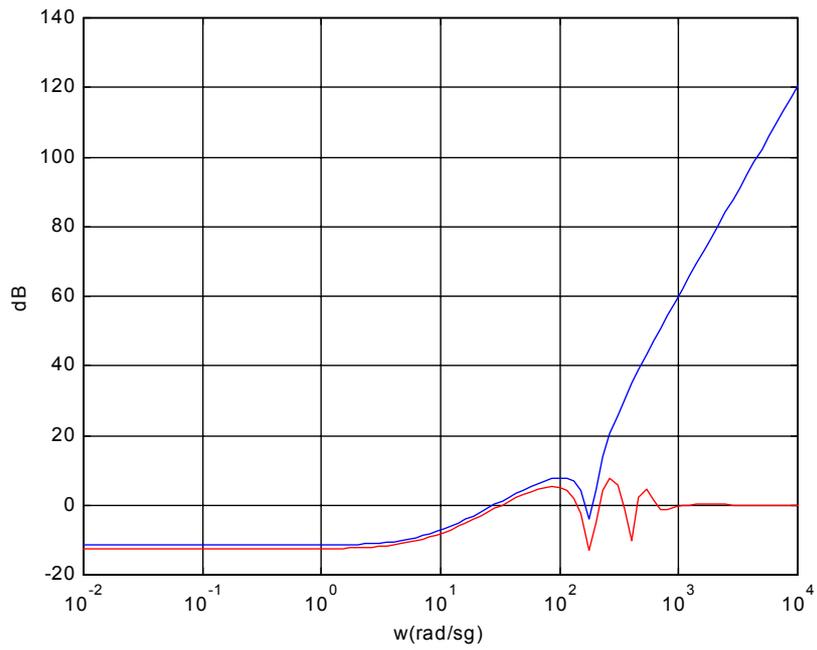
$$|W_3^{-1}(j\omega)| \text{ (curva de color rojo).}$$

El controlador robusto que cumple ambas especificaciones con un factor *Gamma* de igual a 0.1 (de nuevo, es el mayor que nos permite tener estabilidad en lazo cerrado) presenta, en este caso, la respuesta en frecuencia que mostramos en la figura 8.23:

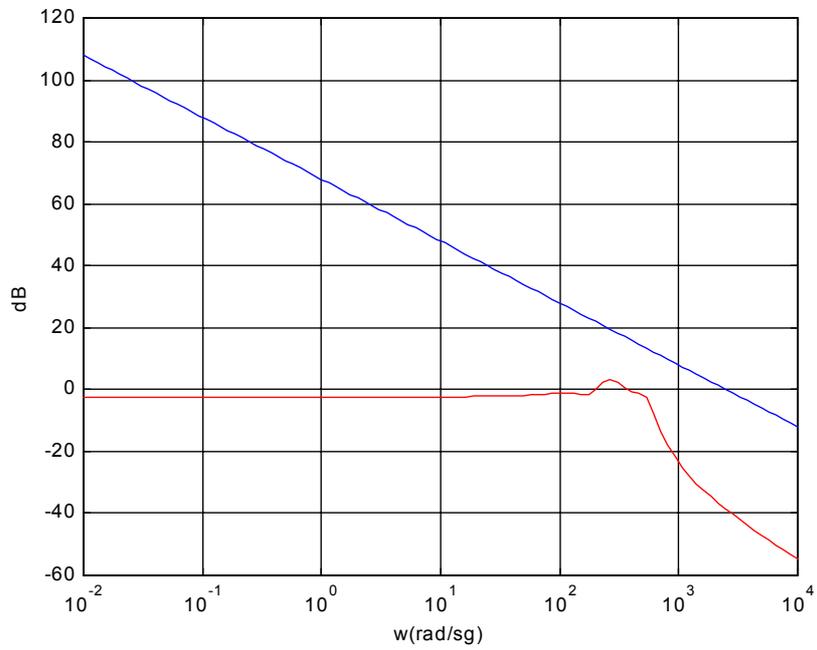


**Figura 8.23:** Respuesta en frecuencia del controlador robusto para la maqueta del GTC diseñado en base a las especificaciones de la figura 8.22.

mientras que en las figuras 8.24 y 8.25 representamos, respectivamente, las curvas de sensibilidad y sensibilidad complementaria del sistema en lazo cerrado junto con las correspondientes especificaciones de diseño.



**Figura 8.24:**  $|W_{1,0,1}^{-1}(jw)|$  (en azul) frente a la curva de sensibilidad del sistema con el controlador robusto (en rojo).



**Figura 8.25:**  $|W_3^{-1}(jw)|$  (en azul) frente a la curva de sensibilidad complementaria del sistema con el controlador robusto (en rojo).

Así encontramos que el sistema en lazo cerrado, con un ancho de banda en torno a  $85\text{hz}$ , presenta ahora un rechazo al ruido en  $26\text{hz}$  de, aproximadamente,  $15\text{dB}$ , que corresponde a un factor de atenuación del ruido en esta frecuencia igual a 0.18, lo que supone algo más del doble del rechazo que obtenemos con el primero de los controladores robustos implementados y una cierta mejora de los resultados obtenidos con el compensador.

Queremos notar que si bien hemos comentado en repetidas ocasiones que los datos con los que llevamos a cabo la identificación de la dinámica de la maqueta corresponden a una frecuencia de  $200\text{hz}$ , los dos controladores robustos que acabamos de presentar precisarían una frecuencia de muestreo en torno a  $1000\text{hz}$ , pues ambos presentan modos en torno a los  $400\text{hz}$ . Así pues, de cara a su implementación en la maqueta debemos tener en cuenta esta consideración.

Como conclusión podemos decir que, tras haber implementado diferentes controladores, el controlador robusto que obtenemos al relajar la especificación del ancho de banda del sistema en lazo cerrado es el que proporciona mejores resultados en cuanto al rechazo al ruido en  $26\text{hz}$ :  $15\text{dB}$ . En cualquier caso, la imposición de estabilidad en el sistema en lazo cerrado evita que podamos conseguir una atenuación mayor de las perturbaciones en la frecuencia correspondiente al modo de los segmentos de la maqueta.



## CONCLUSIONES

En esta memoria hemos recogido una parte importante del trabajo de investigación realizado en relación al diseño de un controlador para el espejo primario del Gran Telescopio Canarias.

Nuestro primer objetivo fue tratar de conocer con el mayor detalle posible la dinámica del sistema. Por una parte, identificamos las frecuencias propias correspondientes a los distintos elementos que componen el primario del GTC: los segmentos del espejo, la estructura sobre la que se apoyan y, por último, los actuadores que posibilitan el control de los mismos.

Una característica del sistema con el que trabajamos es el fuerte acoplamiento existente entre los distintos segmentos del espejo a través de la estructura que los soporta. Este efecto juega, según hemos podido comprobar a lo largo de los diferentes capítulos, un papel fundamental de cara al diseño y la implementación de un controlador para la planta.

Así, en el capítulo III presentamos una serie de controladores clásicos multivariables diseñados, básicamente, para eliminar las oscilaciones propias de los segmentos. Los controladores implementados en esta primera etapa responden a una estrategia que denominamos ‘local-global’, consistente en la aplicación simultánea de dos acciones de control a distinto nivel. La razón para ello es el alto número de sensores y actuadores de que dispone el espejo primario del GTC. La idea, entonces, es aplicar un comando local a cada segmento (cada controlador local gestiona únicamente tres entradas y tres salidas) a una frecuencia elevada y, al mismo tiempo, un comando global (para lo que empleamos la información proporcionada por todos los sensores del espejo) a una frecuencia más baja. En el diseño del controlador por asignación de polos, que presentamos en la sección III.2 (ver capítulo III) comprobamos cómo, a nivel local,

es imposible eliminar el acoplamiento entre distintos segmentos, razón por la que se hace imprescindible el comando global. Las componentes local y global del controlador por asignación de polos tienen en 500 y 200hz, respectivamente, las frecuencias más bajas para las que el sistema en lazo cerrado es estable. Ante los inconvenientes que supone el emplear los momentos en la ley de control, sobre todo en lo que a la amplificación del ruido se refiere, eliminamos estos factores derivativos de la expresión del comando. Comprobamos que esto no afecta a los valores límite de las frecuencias de los controladores local y global que proporcionan estabilidad, pero sí a las prestaciones que ofrece el sistema en lazo cerrado ya que se dobla el tiempo de establecimiento de los segmentos. Aún así, la mejora en la respuesta de los mismos frente a la que presentan en lazo abierto es apreciable.

Ya que la aplicación de la estrategia de control local-global implica la existencia de dos frecuencias de muestreo en el sistema en lazo cerrado, estudiamos la estabilidad del mismo en función del factor de proporcionalidad entre la frecuencia de aplicación del comando local y la de aplicación del comando global. Para ello empleamos el formalismo de las matrices de lifting y de lifting inverso, introducido por Chen y Francis [Chen, 1995].

Con el objetivo de mejorar los resultados obtenidos con el controlador por asignación de polos y, sobre todo, ante la dificultad de plantear otras estrategias de control que nos permitieran satisfacer requerimientos en cuanto al rechazo al ruido y a estabilidad frente a incertidumbres en la dinámica de la planta, con un número tan alto de entradas y salidas interconectadas, nos planteamos tratar de reducir la dimensionalidad del problema.

Todo ello justifica que una buena parte del trabajo realizado haya estado encaminado a encontrar un procedimiento mediante el cual eliminamos, al menos de forma importante, el acoplo entre los segmentos. En los capítulos IV y V hemos presentado dicho procedimiento. Imponiendo la condición de que tanto las entradas como las salidas del mismo en la nueva representación no interactuasen entre sí, obtuvimos unos nuevos vectores propios como combinación lineal de los vectores originales, correspondientes, todos ellos, al mismo autovalor. Así, como resultado del proceso de desacoplo, obtenemos unas matrices que llamamos  $T_u$  y  $T_y$ , que transforman el conjunto de entradas y salidas reales del sistema (esto es, los comandos y las posiciones de los segmentos), respectivamente, en un nuevo conjunto de entradas y

salidas que llamamos virtuales y que están desacopladas entre sí. Entonces, si consideramos a la estructura caracterizada por  $N$  modos, y un espejo con  $P/3$  segmentos, encontramos que, tras el desacoplo, la planta original con  $P$  entradas y salidas interconectadas, se convierte en un sistema, en general MIMO, con  $N$  entradas y salidas acopladas y  $P-N$  sistemas SISO independientes entre sí. A cada uno de estos sistemas SISO le corresponde una única entrada virtual y una única salida virtual. Nótese que, en el caso de tomar  $N=1$ , el desacoplo del espejo es total. En cualquier caso, la reducción en la complejidad del problema del diseño de un controlador para el espejo primario del GTC es clara.

Una vez que desacoplamos el sistema, algo que sólo es posible llevar a cabo sobre la planta nominal, nos planteamos estudiar cómo afectan al nivel de desacoplo de las entradas y salidas virtuales el ruido de proceso debido a la incidencia del viento sobre los segmentos del espejo y las incertidumbres en la dinámica del mismo. Comprobamos que, si bien el procedimiento diseñado no se ve afectado por el ruido, cuando incluimos incertidumbres en la dinámica del sistema las matrices de desacoplo que obtenemos para la planta nominal,  $T_u$  y  $T_y$ , dejan de ser efectivas a partir de un cierto valor de las incertidumbres. En concreto, para un  $\pm 1.5\%$  de incertidumbre en el valor de la constante de rigidez de los soportes de los segmentos ( $k_s$ ) en torno a su valor nominal ( $6N/\mu m$ ), el acoplamiento entre las entradas y salidas virtuales es del mismo orden que el existente entre las entradas y salidas reales.

Considerando a la estructura caracterizada a través de un único modo de vibración, diseñamos e implementamos un controlador SISO para cada uno de los sistemas independientes resultantes del desacoplo. En un primer momento empleamos las estrategias proporcional e integral analizando, para cada una de ellas, las prestaciones ofrecidas por el sistema en lazo cerrado atendiendo, fundamentalmente, a tres especificaciones que son: rechazo al ruido de bajas frecuencias y en el modo correspondiente a los segmentos ( $28\text{hz}$ ), estabilidad frente a incertidumbres en la dinámica y ancho de banda. El estudio lo realizamos, tanto en el caso de estos dos controladores como en todos los diseñados, en el dominio de la frecuencia empleando para ello las funciones de sensibilidad y de sensibilidad complementaria.

El siguiente paso consistió en el diseño de un controlador proporcional-integral para cada uno de los sistemas SISO. Así, combinando las ventajas que ofrecen cada uno de los controladores anteriores por separado, conseguimos un mayor ancho de banda

que con la estrategia integral y un mayor rechazo al ruido que el logrado con la proporcional.

Por último en lo que al diseño de un controlador para el sistema desacoplado se refiere, nos planteamos la implementación de un controlador  $H_\infty$  para uno cualquiera de los  $P-N$  sistemas SISO que presentan, salvo un factor de ganancia, la misma dinámica. Esta estrategia, a diferencia de lo que sucede en los casos anteriores, emplea en el proceso de síntesis del controlador las especificaciones en cuanto a atenuación del ruido y a estabilidad frente a incertidumbres. El resultado que obtuvimos fue un controlador que, al mismo tiempo que soporta el nivel de incertidumbres que le exigimos, presenta un rechazo al ruido similar al que tenemos con la estrategia proporcional, con un ancho de banda en torno a  $600\text{rad/sg}$ , que es del mismo orden del que conseguimos con el controlador proporcional-integral.

En la parte final de la memoria, hemos analizado la información proveniente de una serie de pruebas realizadas sobre una maqueta del espejo primario del Gran Telescopio Canarias, compuesta por dos únicos segmentos. Como resultado de este análisis obtuvimos un modelo ARMAX clásico. Así, llevamos a cabo un estudio comparativo entre la respuesta en frecuencia de la maqueta y la del modelo obtenido en función del número de polos y ceros (en este último caso, tanto para la parte determinista como para la estocástica) empleados en el proceso de identificación. En este estudio quedó patente la importancia de incluir etapas de retardo en dicho proceso, así como de realizar un buen ajuste de la fase de la respuesta de un sistema de cara a obtener un buen modelo del mismo. De esta forma, tomamos como bueno un modelo con once polos, cuatro ceros, tanto para la parte determinista como para la estocástica, y cinco etapas de retardo. De cara a que los resultados obtenidos con la maqueta se puedan extrapolar al espejo primario del Gran Telescopio Canarias, es fundamental establecer una analogía entre los modelos de las dos plantas. Para ello, comparamos la representación en frecuencia de los valores singulares tanto del modelo obtenido para la maqueta como del espejo, lo que nos permitió establecer una correspondencia entre los principales modos de ambos sistemas.

Una vez determinado este modelo, diseñamos una serie de controladores SISO con el objeto de rechazar el ruido que afecta a la maqueta y que es importante, tanto en la región de bajas frecuencias como en los  $26\text{hz}$  correspondientes a la dinámica de los segmentos, buscando en todo momento reproducir así las condiciones a las que se prevé

que estén sometidos los segmentos del espejo primario del GTC, según explicamos en los capítulos II y VII. Concretamente, implementamos una estrategia integral, un compensador y un controlador robusto. A pesar de que con éste último conseguimos mejorar ligeramente los resultados alcanzados con los dos primeros controladores, la estabilidad de la planta con incertidumbres en lazo cerrado supone una restricción importante de cara, sobre todo, a conseguir rechazo al ruido en la frecuencia propia de los segmentos:  $26\text{hz}$  en el caso de la maqueta, que corresponden a los  $28\text{hz}$  de los segmentos del espejo primario del Gran Telescopio Canarias.



## REFERENCIAS

- [Acosta, 1999] Acosta L., Sigut M., Hamilton A., Méndez J.A., Marichal G.N. and Moreno L. *Design of a Multivariable Pole-Placement Controller for the Primary Mirror of the 10m Grantecan Telescope*. Proceedings of the 7<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation. Haifa, Israel. Junio 1999
- [Acosta, 2000] Acosta L., Sigut M., Hamilton A., Méndez J.A., Marichal G.N. and Moreno L. *Decoupling of the 10m GRANTECAN telescope's primary mirror dynamics and design of a controller for noise rejection*. Proceedings of the 2000 American Control Conference, Chicago, USA. Junio 2000
- [Acosta, 2001a] Acosta L., Sigut M., Méndez J.A., Hamilton A., Marichal G.N. and Moreno L. *Identifying the modes of the scale model corresponding to the GRANTECAN telescope's primary mirror*. Proceedings of the 2001 American Control Conference, Arlington, USA. Junio 2001
- [Acosta, 2001b] Acosta L., Sigut M., Méndez J.A., Hamilton A., Marichal G.N., Torres S. and Moreno L. *Rejecting the low-frequency noise in the 10m diameter primary mirror in the GRANTECAN telescope*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications, Ciudad de Méjico, Méjico. Septiembre 2001
- [Acosta, 2002] Acosta L., Sigut M., Martín F., Méndez J.A. and Marichal G.N. *Noise Rejection Strategy for a Large Space Structure: The GRANTECAN Telescope*. Proceedings of the 15<sup>th</sup> IFAC World Congress on Automatic Control, Barcelona, España. Julio 2002
- [Álvarez, 1997] Álvarez P. et al. *Gran Telescopio Canarias, Conceptual Design*. 1997

- [Argyris, 1960] Argyris J.H. *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworth, 1960
- [Åström, 1984] Åström K.J. and Wittenmark B.W. *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. Prentice Hall Information and System Sciences Series, 1984
- [Åström, 1995] Åström K.J. and Hagglund T. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA - The Instrumentations, Systems, and Automation Society, 1995
- [Aubrun, 1985] Aubrun J.N., Lorell K.R., Havas T.W. and Henninger W.C. *An analysis of the segment alignment control system for the W.M. Keck Observatory Ten Meter Telescope - Final Report*. 1985
- [Balchen, 1998] Balchen J.G. and Mumme K. *Process Control. Structures and Applications*. Van Nostrand Reinhold, NY, 1998
- [Berge, 2001] Berge J. *Field Buses for Process Control: Engineering, Operation and Maintenance*. ISA - The Instrumentations, Systems, and Automation Society, 2001
- [Boyd, 1991] Boyd S. and Barratt C. *Linear Controller Design – Limits of Performance*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991
- [Brigham, 1988] Brigham E.O. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice-Hall, 1988
- [Campo, 1994] Campo P.J. and Morari M. *Achievable closed-loop properties of systems under decentralised control: Conditions involving the steady-state gain*. IEEE Transactions on Automatic Control. AC-39:932-942, 1994
- [Clough, 1960] Clough R.W. The finite elements in plane stress analysis. Proc. 2<sup>nd</sup>. A.S.C.E. Conf. on Electronic Computations, Pittsburg, Pa., Sept. 1960
- [Chen, 1995] Chen T. and Francis B. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995
- [Chiang, 1992] Chiang R.Y. and Safonov M.G. *Robust Control Toolbox User's Guide*. Mathworks, South Natick, 1992
- [Dorato, 1990] Dorato P. and Yedavalli R.K. (Editor). *Recent Advances in Robust Control*. IEEE, Julio 1990

- [Doyle, 1982] Doyle J.C. *Analysis of feedback systems with structured uncertainties*. IEE Proceedings, Part D 129(6): 242-250, 1982
- [Doyle, 1992] Doyle J.C., Francis B. And Tannenbaum A. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company, 1992
- [Forbes, 1982] Forbes F.F. and Gabor G. *Wind Loading of Large Astronomical Telescopes*. Ten Meter Telescope Science Office, Berkeley, CA, U.C. TMT Report N° 82, Mayo 1982
- [Fortmann, 1977] Fortmann T.E., Hitz K.L. *An Introduction to Linear Control Systems*. Marcel Dekker, 1977
- [Freudenberg, 1985] Freudenberg J.S. and Looze D.P. *Right half planes poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, pp 555-565, 1985
- [Freudenberg, 1988] Freudenberg J.S. and Looze D.P. *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*. Vol. 104 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [Friedland, 1996] Friedland B. *Advanced Control System Design*. Prentice-Hall, 1996
- [Golub, 1996] Golub, G.H. and Van Loan C.F. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press. Baltimore and London, 1996.
- [Grace, 1992] Grace A., Laub A.J., Little J.N., Thompson C.M.: *Control Systems Toolbox for Use with MATLAB*. MathWorks, 1992
- [Green, 1995] Green M. and Limeben D.J.N. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995
- [Han, 1996] Han M.C. and Chen Y.H. *Decentralized control design: uncertain systems with strong interconnections*. I.J. of Control, 61(6), 1363-1385, 1996
- [Hayakawa, 1999] Hayakawa K., Matsumoto K., Yamashita M., Suzuki Y., Fujimori K. and Kimura H. *Robust  $H^\infty$ -Output Feedback Control of Decoupled Automobile Active Suspension Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 44, NO. 2, pp. 392-396, 1999

- [Hovd, 1994] Hovd M. and Skogestad S. *Control of symmetrically interconnected plants*. Automatica, VOL. 30, NO. 6, pp. 957-973, 1994
- [Hrenikoff, 1941] Hrenikoff A. *Solution of problems in elasticity by the framework method*. J. Appl. Mech., A8, 169-75, 1941
- [Huang, 1998] Huang S. and Zhang S. *Comments on decentralized control for symmetrically interconnected systems*. Automatica, VOL. 34, NO. 7, pp. 929-933, 1998
- [Huang, 1999] Huang S., Lam J., Yang G.H. and Zhang S. *Fault Tolerant Decentralized  $H_\infty$  Control for Symmetric Composite Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 44, NO. 11, pp. 2108-2114, 1999
- [Jamshidi, 1983] Jamshidi M. *Large Scale Systems Modelling and Control*. Nort-Holland, 1983
- [Klema, 1980] Klema V C., Laub A.J. *The Singular Value Descomposition: Its Computation and Some Applications*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No 2, ppl. 164-176. 1980
- [Kincaid, 1994] Kincaid D. and W. Cheney. *Análisis Numérico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994
- [Kosmatopoulos, 1999] Kosmatopoulos E.B., Ioannou P. and Boussalis H. *Robust Multivariable Adaptive Control with Application to a Large Space Segmented Telescope*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999
- [Lawrence, 2000] Lawrence C. T., Tits A. L. and Dooren P. V. *A fast algorithm for the computation of an upper bound on the  $H_\infty$ -norm*. Automatica, VOL. 36, NO. 3, pp. 449-456, 2000
- [Li, 1999] Li K., Kosmatopoulos E.B., Ioannou P. and Boussalis H. *Centralized, Decentralized, and Overlapping Control Designs for a Segmented Telescope*. IEEE Control System Magazine, 1999
- [Little, 1992] Little J.N. and Shure L. *Signal Processing Toolbox*. The MathWorks, Inc., 1992
- [Ljung, 1991] Ljung L. *System Identification Toolbox*. The MathWorks, Inc., 1991

- [Ljung, 1999] Ljung L. *System Identification – Theory for the User*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1999
- [Lunze, 1992] Lunze J. *Feedback Control of Large-Scale Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992
- [Luyben, 1996] Luyben M.L. and Lyben W.L. *Essentials of Process Control*. McGraw-Hill Higher Education, 1996
- [MacFarlane, 1977] MacFarlane A.G.J. and Kouvaritakis B. *A design technique for linear multivariable feedback systems*. International Journal of Control 25: 837-874, 1977
- [McHenry, 1943] McHenry D. *A lattice analogy for the solution of plane stress problems*. J. Inst. Civ. Eng., 21, 59-82, 1943
- [Marple, 1987] Marple S.L. Jr. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice-Hall, 1987
- [Matlab, 1992] MATLAB. *Reference Guide*. The MathWorks Inc., 1992
- [Mast, 1981] Mast T.S. and Nelson J.E. *Figure Control for a Fully Segmented Telescope Mirror*. U.C. TMT Report N° 64, Ten Meter Telescope Science Office, Berkeley, CA, Diciembre 1981
- [Mast, 1983] Mast T.S., Gabor G. and Nelson J.E. *Edge Sensors for a Segmented Mirror*. Ten Meter Telescope Science Office, Berkeley, CA, U.C. TMT Report N° 107, Septiembre 1983
- [Medwadowski, 1981] Medwadowski S.J. *Conceptual Design of the Structure of the U.C. Ten Meter Telescope*. Ten Meter Telescope Science Office, Berkeley, CA, U.C. TMT Report N° 59, Mayo 1981
- [Medwadowski, 1982] Medwadowski S.J. *An Investigation of the U.C. TMT Mirror Cell Structure*. Ten Meter Telescope Science Office, Berkeley, CA, U.C. TMT Report N° 70, Abril 1982
- [Morari, 1997] Morari M. and Zafiriou E. *Robust Process Control*. Prentice-Hall PTR/Sun Microsystems Press, 1997

- [Newmark, 1949] Newmark N.M. *Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies*. Numerical Methods in Analysis in Engineering, (ed. L.E. Grinter), Macmillan, 1949
- [Ogata, 1980] Ogata K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice-Hall, 1980
- [Ogata, 1987] Ogata K. *Discrete-time Control Systems*. Prentice-Hall, 1987
- [Ogata, 1994] Ogata K. *Designing Linear Control Systems With MATLAB*. Prentice Hall International, 1994
- [Oppenheim, 1983] Oppenheim A.V., Willsky A.S. and Young I.T. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, 1983
- [Patel, 1981] Patel R. and Munro N. *Multivariable Control: Theory and Design*. Pergamon Press, 1981
- [Petersen, 2000] Petersen I.R. Ugrinovskii V.A. and Savkin A.V. *Robust Control Design Using  $H$  Methods (Communications and Control Engineering Series)*. Springer Verlag, 2000
- [Quiu, 1993] Quiu L. and Davison E.J. *Performance limitations of non-minimum phase systems in the servomechanism problem*. Automatica 29(2): 337-349, 1993
- [Rosenbrock, 1970] Rosenbrock H.H. *State-space and Multivariable Theory*. Nelson, Londres, 1970
- [Safonov, 1980] Safonov M.G. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts and London, 1980
- [Safonov, 1988] Safonov M.G., Chiang R. and Flashner H.  *$H^\infty$  Robust Control Synthesis for a Large Space Structure*. Proceedings of the American Control Conference. Atlanta, GA. June 15-17, 1988

- [Sigut, 2001] Sigut M., Acosta L., Méndez J.A., Hamilton A., Marichal G.N. and Moreno L. *Designing a Controller for Low-frequency Noise Rejection in the Scale Model of the GRANTECAN telescope's 10m Diameter Primary Mirror*. Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, USA. Julio 2001
- [Sigut, 2002] Sigut M., Acosta L., Martín F., Moreno L. and Hamilton A. An Algebraic Approach Based on Symmetry Relations of State Space Matrices for Decoupling the Dynamics of a Large Space Structure. Proceedings of the 2002 American Control Conference, Anchorage, USA. Mayo 2002
- [Siljak, 1991] Siljak D. D. *Decentralized control of complex systems*. Academic Press, 1991
- [Skogestad, 1989] Skogestad S. and Morari M. *Robust performance of decentralized control systems by independent designs*. Automatica 25(1):119-125, 1989
- [Skogestad, 1998] Skogestad S. and Postlethwaite I. *Multivariable feedback control*. John Wiley & Sons. Chichester, 1998
- [Söderström, 1989] Söderström T. and Stoica P. *System Identification*. Prentice-Hall International, London, 1989
- [Tamura, 1990] Tamura H. and Yoshikawa T. *Large-Scale Systems Control and Decision Making*. Editores: Yoshikawa T., Tamura H. Marcel Dekker, 1990
- [Toffner-Clausen, 1996] Toffner-Clausen S. *System Identification and Robust Control : A Case Study Approach (Advances in Industrial Control)*. Springer Verlag, 1996
- [Turner, 1956] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C. and Topp L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero. Sci., 23, 805-23, 1956
- [Weinmann, 1991] Weinmann A. *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [Zhou, 1998] Zhou K. and Doyle J. C. *Essentials of robust control*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1998

- [Zienkiewicz, 1994] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. *El Método de los Elementos Finitos - Formulación básica y problemas lineales*. McGraw-Hill Interamericana de España, 1994