UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Homotopía cilíndrica generalizada

Autor: Remedios Gómez, Josué

Director: Sergio Rodríguez Machín

Departamento de Matemática Fundamental

Prefacio

Este trabajo da una nueva visión de la homotopía. Partiendo de un número mínimo de axiomas, se obtienen algebraicamente los resultados fundamentales de cualquier teoría de homotopía, permitiendo simplificar los procesos existentes en homotopía funtorial.

El desarrollo algebraico aquí presentado crea nuevas ideas y conceptos en las teorías de homotopía funtoriales, incluida la de los espacios topológicos, las proyectivas, las inyectivas y las de complejos de cadena.

Parte de las ideas aquí desarrolladas han sido expuestas por el autor en congresos en Coimbra (1999), Bremen (2000) y Barcelona (2001).

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor Sergio Rodríguez Machín, director de esta memoria, por su dedicación y apoyo, así como por sus consejos e intuición matemática.

También a los profesores Francisco Javier Díaz Díaz y José Manuel García Calcines, por las valiosas horas de trabajo pasadas junto a ellos, y al profesor Ángel Montesdeoca Delgado por su ayuda en la elaboración de este documento.

Este trabajo ha sido financiado en parte por la *Dirección General de Universidades del Gobierno de Canarias* y por la *Dirección General de Enseñanza Superior de España*.

Contenidos

Introducción

A lo largo de la segunda mitad del siglo XX, según iba aumentando el número de teorías matemáticas que podrían encuadrarse dentro del concepto de "homotopía", se intentaba dar teorías algebraicas que las englobaran. No obstante, a pesar de que estas teorías algebraicas eran cada vez más precisas y abarcaban mayor número de homotopías, siempre había algunas que quedaban fuera. Actualmente, todavía no existe una teoría de homotopía abstracta que logre reunirlas a todas.

Uno de los primeros en definir una homotopía abstracta fue M. Kan en 1955, [40] y [41], para ello usó un funtor cilindro y transformaciones naturales análogas a las del cilindro de los espacios topológicos, definiendo así a partir de los complejos cúbicos, grupos de homotopía y homología.

Siguiendo los pasos de B. Eckmann y P.J. Hilton, H. Kleisli en 1962 [42] generaliza sus teorías de homotopía a categorías abelianas. Posteriormente, él [43] y J. H. Huber [34] y [35] consiguen definir de un modo común los grupos de homotopía, ya sea en espacios punteados o en módulos sobre un anillo, utilizando para ello conjuntos simpliciales.

Definiendo, así, construcciones standard adecuadas se obtienen los grupos de homotopía de los espacios punteados y los grupos de homotopía inyectivos y proyectivos de los módulos sobre un anillo.

Una axiomatización bastante importante es la obtenida en 1967 por D. Quillen [51] y [52] usando técnicas parecidas a las utilizadas por S. Eilenberg y N. Steenrod en 1952 para la teoría de homología [23]. Quillen utiliza el concepto de categoría de modelo cerrada: fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles verificando un conjunto de axiomas.

En 1968, A. Heller [28] introduce el concepto de "$h-c$ categoría", a partir de una congruencia de homotopía y cofibraciones, para estudiar homotopía estable.

En 1989 H.J. Baues [2] restringe los axiomas de D. Quillen, evitando que la teoría sea autodual, y define homotopías abstractas usando cofibraciones y equivalencias débiles (categoría de cofibraciones) o cofibraciones y un funtor cilindro (categoría con un cilindro natural), teniendo también teorías de homotopía abstracta duales a las anteriores (categorías de fibraciones y categorías con caminos naturales, respectivamente).

En 1999 G. Minian ([46], [47]) presenta las Λ-categorías de cofibraciones como una generalización de las categorías con un cilindro natural definidas por H.J. Baues, donde Λ es un conjunto dirigido de índices para cilindros.

En 2001 F.J. Díaz y S. Rodríguez Machín [18] definen una teoría de homotopía abstracta que por primera vez usa un funtor cono, en vez de uno cilindro, y cofibraciones. Hasta esa fecha, los intentos en este sentido siempre tenían como referencia las homotopías proyectiva e inyectiva definidas por B. Eckman y P.J. Hilton [32] por lo cual usaban categorías aditivas u objetos proyectivos o inyectivos. También se tiene la teoría dual con coconos y fibraciones.

Una de las ideas que persiguen las distintas homotopías abstractas, y en particular las aquí mencionadas, es dar una axiomática en categorías generales de forma que se obtengan categorías homotópicas en el sentido de J.H.C. Whitehead [62] con la axiomática clásica para espacios topológicos, donde partiendo de dicha categoría se establece una relación de equivalencia (relación de homotopía) entre los morfismos (aplicaciones continuas) compatible con su composición, de forma que se pueda crear la categoría cociente (categoría homotópica) en el sentido descrito por S. MacLane [44]. De esta forma se obtiene una clasificación de los objetos de la categoría (espacios topológicos) mediante los isomorfismos de esta nueva categoría (equivalencias de homotopía). Para ello es necesario el uso de objetos cofibrantes, y en algunas teorías, como la de cofibraciones de H.J. Baues y la de modelos de D. Quillen, usar localización sobre las equivalencias débiles.

Por otro lado, para la obtención de los grupos de homotopía en todas ellas, es necesario hacer uso de objetos punteados, por lo que de nuevo se necesita un objeto inicial que haga de objeto punto en la categoría considerada. En este sentido, actualmente existen ejemplos relacionados con la homotopía propia de los espacios topológicos, donde se usan espacios topológicos diversos para puntear, resultando distintos grupos de homotopía según el espacio topológico usado como punto. Así, si el espacio topológico considerado es una semirrecta del tipo $\mathbb{R}^+_* = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, surgen los grupos de homotopía propia de N. Steenrod, definidos por Z. Čerin [9]. En cambio, si es una sucesión de puntos del tipo $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+_*$, se tienen los grupos de homotopía propia de E.M. Brown [7]. Más aún, H.J. Baues y A. Quintero [3] usan árboles como puntos en la homotopía propia de los espacios topológicos.

La idea de homotopía generalizada surge como un intento de obtener homotopía sin puntear que englobe las distintas teorías de homotopía que se obtienen según el objeto punto usado. En este sentido, la axiomática requerida no necesitará de objetos cofibrantes y a partir de ella se obtendrá una visión más general de la homotopía de la categoría.

Los primeros avances en esta dirección están publicados por el autor en colaboración con F.J. Díaz y S. Rodríguez Machín en el año 2001 [15]. La homotopía generalizada definida usa la axiomática dada por los autores [18] eliminando todo lo concerniente a objetos cofibrantes. Por otro lado, la homotopía generalizada aquí expuesta surge de la axiomática presentada en colaboración con S. Rodríguez Machín [53] para obtener homotopía generalizada mediante un funtor cilindro o su dual, un funtor caminos.

En una categoría arbitraria con la estructura ya mencionada se definen grupos de homotopía generalizada sin hacer uso de objetos cofibrantes. Estos grupos poseen las propiedades comunes a los grupos de cualquier teoría de homotopía, entre las que se destacan su carácter funtorial y la abelianidad de los de orden superior. También se generaliza el concepto de conexidad por caminos.

La estructura de la categoría original puede ser inducida en la categoría de pares de ésta, permitiendo así, la creación de los grupos de homotopía generalizados de un morfismo. De esta forma, con dichos grupos y los antes mencionados de los objetos, se obtiene la sucesión exacta de homotopía generalizada asociada al morfismo citado. Como sucede en muchas teorías de homotopía, aquí también la sucesión obtenida es invariante ante la acción del grupo de homotopía de primer orden.

Usando como punto cualquier objeto de la categoría surge una estructura de homotopía punteada en una categoría cuyos objetos son cofibrantes. La homotopía de esta categoría puede ser expresada en función de la homotopía generalizada de la categoría original. Así, la teoría de homotopía generalizada obtenida posee implícitamente toda la información relativa a las diferentes teorías de homotopía punteada procedentes de la categoría original.

Al tener esta teoría un desarrollo totalmente algebraico y dar las relaciones que existen entre la homotopía generalizada y la punteada, permite simplificar los desarrollos en teorías de homotopía concretas que verifiquen esta axiomática. Dicha axiomática, en particular, es cumplida por todos los ejemplos conocidos de homotopía obtenida a través de un cilindro natural en el sentido descrito por H.J. Baues [2]. Así, la homotopía ordinaria dada en la categoría de los espacios topológicos verifica esta axiomática, resultando que los grupos de homotopía de los espacios topológicos punteados y sus sucesiones son casos particulares de la homotopía generalizada existente en dicha categoría. También homotopías como la existente en la categoría de los espacios exteriores, creada para el estudio de la homotopía propia de los espacios topológicos, cumplen la axiomática. Homotopías como la de los complejos de cadena de una categoría abeliana, proyectivas, inyectivas, y ciertas homotopías tensoriales, pueden ser obtenidas a partir de la axiomática, y ser consideradas casos particulares de la homotopía generalizada.

Por todo lo anterior, la homotopía generalizada da una visión completa de la homotopía de la categoría, sin necesidad de recurrir al uso de objetos punto. Así, la homotopía generalizada en la categoría de los espacios topológicos contiene, entre otras, todas las informaciones relativas a los grupos de homotopía referidos a cualquier espacio topológico, sea éste una esfera, o no.

La teoría algebraica aquí presentada parte de una axiomática obtenida a partir de los axiomas dados por Baues para la noción de categoría con un cilindro natural, eliminando todo lo referente al objeto inicial y sustituyendo la transformación de intercambio por transformaciones producto en el sentido descrito por K. H. Kamps y T. Porter [39]. A partir de esta axiomática se obtienen grupos de homotopía generalizados de un objeto y basados en un morfismo, como grupos de homotopía relativa a cofibraciones. Estos grupos, como ya se ha dicho antes, tienen carácter funtorial al ser compatibles la homotopía relativa a cofibraciones con la composición de morfismos. Definiendo una acción de los grupos de homotopía sobre los respectivos de orden no inferior, se concluye la abelianidad de los grupos de homotopía generalizada de orden superior a uno.

La estructura así definida es inducida sobre la categoría de cofibraciones de la original de forma que ésta verifica también la axiomática. De este hecho surgen los grupos de homotopía relativos a cofibraciones de pares, y mediante conos de cofibraciones se obtiene el grupo de homotopía generalizado de un morfismo. Una sucesión exacta de homotopía relaciona los grupos de homotopía generalizados de un morfismo con los de su dominio y codominio. Esta sucesión resulta ser equivariante ante la acción del primer grupo de homotopía generalizada del dominio.

También la estructura original es inducida sobre la categoría de cofibraciones bajo un objeto cualquiera de la original, verificándose la axiomática de partida. Además, esta categoría resulta ser una categoría con todos sus objetos cofibrantes y basados, por lo cual se pueden definir grupos de homotopía punteados y sucesiones exactas de estos. Los mencionados grupos son isomorfos a grupos de homotopía generalizados.

A semejanza de lo que ocurre en los espacios topológicos y los espacios topológicos punteados, cuando la categoría original tiene algún objeto cofibrante, se puede generalizar, considerando este objeto como un punto, el concepto de esfera topológica. Los grupos esféricos generalizados resultantes y las sucesiones exactas de ellos son también isomorfos a grupos de homotopía generalizada y sucesiones de ellos respectivamente.

La dualización de la teoría con sus demostraciones es fácilmente ejecutable, surgiendo una axiomática que coincide con la dual de categoría con un cilindro natural, esto es, caminos naturales, eliminando de los axiomas todo lo referente al objeto final. Funtores cilindro y caminos adjuntos dan origen a estructuras compatibles de homotopía generalizada y siempre que se tenga una compatibilidad entre cofibraciones y fibraciones, los grupos de homotopía generalizada usando cofibraciones serán isomorfos a los respectivos usando fibraciones.

En categorías aditivas, la homotopía generalizada tiene propiedades especiales, entre ellas cabe destacar que los grupos de homotopía generalizados basados en el cero tienen su operación inducida por la aditividad de la categoría, de forma que son todos abelianos. Además, toda homotopía cónica en el sentido de F.J. Díaz y S. Rodríguez Machín [17] induce una estructura de homotopía generalizada a través de un cilindro, verificando la axiomática de partida. Usando este hecho y su dual con coconos, las homotopías tensoriales tienen una estructura de homotopía generalizada compatible de cilindro-caminos; también la homotopía proyectiva e inyectiva de los módulos sobre un anillo unitario tienen estructura de homotopía generalizada de caminos y cilindro respectivamente.

En los cilindros topológicos, los de complejos de cadena sobre categorías abelianas y los de espacios exteriores es posible definir transformaciones producto que hacen de la homotopía ordinaria de dichas categorías un caso particular de la homotopía generalizada que se obtiene.

Esta monografía está dividida en cuatro capítulos, con un capítulo cero de notación y preliminares de teoría de categorías.

En el capítulo cero se introduce la notación y los resultados en teoría de categorías que se usarán a lo largo de todo el trabajo. Se hace mención especial de los diagramas push out y propiedades relativas a estos, pues serán una herramienta fundamental en la obtención de resultados. Este capítulo se divide en tres secciones:

En la primera sección se introduce toda la notación relativa a categorías funtores y transformaciones. Se destaca una notación para la composición sucesiva de una misma transformación, así como la usada para la composición de funtores con transformaciones. Finalmente se define la noción de extensión de un morfismo relativo a otro morfismo.

La segunda sección está totalmente dedicada a la notación relativa a los push outs así como a ciertas propiedades de estos. La notación suministrada difiere de la clásica, pues es necesario no sólo conocer los objetos del push out, sino también los morfismos. Es una notación que ofrece mucha más información, sin incrementar por ello la simbología. Se dan propiedades relativas a composición de push outs, a push outs en la categoría de pares de una dada y, como propiedad fundamental por su frecuencia de utilización, a los push outs de morfismos entre push outs.

La tercera sección es una dualización de la segunda con pull backs y las propiedades relativas a ellos.

En el capítulo uno se da la axiomática a partir de la cual se desarrollará toda la teoría algebraica aquí presentada, se obtienen los primeros resultados, se introduce el concepto de homotopía relativa a una cofibración y mediante los grupoides de homotopía relativa, se definen los grupos de homotopía generalizados como grupos de homotopía relativa a una cofibración basados en un morfismo. También se establece la noción de conexidad por caminos, concluyéndose mediante la acción de los grupos de homotopía generalizados sobre los de orden no inferior con la abelianidad de estos para orden mayor que uno. El capítulo está dividido en cinco secciones:

En la sección primera se comprueba que el axioma de cilindro relativo dado por Baues al definir las I-categorías [2], puede ser sustituido por otro equivalente sin necesidad de hacer uso de coproductos de objetos. Además, a partir de la transformación de intercambio se crean dos transformaciones producto como las que dan K.H. Kamps y T. Porter [39]. Por ello, la estructura generada a partir de lo anterior se denomina I-categoría generalizada. La propiedad de extensión de homotopía exigida en la axiomática es equivalente a la dada por K.H. Kamps [38]. Finalmente se dan condiciones que garantizan la existencia de una cofibración entre objetos push out, y que será muy útil como herramienta de trabajo.

En la sección segunda se procede a definir la homotopía generalizada como una homotopía relativa a cofibraciones. Se comprueba que la relación establecida por dicha homotopía es de equivalencia y usando la propiedad de extensión de homotopía y cofibraciones iteradas, esto es, generadas por el axioma de cilindro relativo, se dan otras definiciones equivalentes de la homotopía relativa. Asimismo se comprueba que la iteración deducida del axioma de cilindro relativo conserva cuadrados conmutativos y push outs, permitiendo este hecho ver que la relación de homotopía relativa es compatible con la composición de morfismos y que los push outs inducen equivalencias en homotopía relativa.

En la sección tercera se crea un grupoide donde los puntos son morfismos entre dos objetos fijos, y los caminos son homotopías relativas a una cofibración con codominio el dominio de los puntos. Los lazos de este grupoide identificados por homotopía relativa a la primera iteración de la cofibración dada, forman el grupo denominado primer grupo de homotopía relativa a la cofibración y basado en el morfismo punto inicial y final del lazo, del objeto codominio de dicho morfismo. Para las operaciones que asignan a un camino su camino inverso y a dos caminos componibles el producto de caminos, se establecen definiciones alternativas equivalentes usando la propiedad de extensión de homotopía. La compatibilidad de la homotopía relativa con la composición de morfismos induce funtores entre los respectivos grupoides.

En la sección cuarta se definen los grupos de homotopía generalizada de orden superior usando para ello las iteradas de una cofibración dada y los grupoides originados por ellas. Así, los grupos de homotopía generalizada de orden superior son primeros grupos de homotopía relativa a una cofibración iterada. De la compatibilidad de la homotopía relativa con la composición de morfismos se deduce el carácter funtorial de los grupos de homotopía. Finalmente, se establece la noción de objeto conexo por caminos relativo a una cofibración. Para ello se definen primero las componentes cofibradas de un objeto respecto a otro y las componentes conexas por caminos relativas a una cofibración en un morfismo de alguna de las componentes cofibradas. Cuando los morfismos base de los grupos de homotopía generalizada están dentro de la misma componente conexa por caminos relativa a una cofibración en morfismos de una misma componente cofibrada, dichos grupos son isomorfos. Por tanto, un objeto conexo por caminos relativo a una cofibración es aquel que tiene una única componente cofibrada y es conexo por caminos relativo a la cofibración en cualquier morfismo. En este caso se tiene que los grupos de homotopía relativa a la cofibración no dependen del morfismo base elegido.

En la sección quinta, se define una acción de los grupos de homotopía generalizada sobre los de orden no inferior. Esta acción, cuando el grupo tiene orden superior a uno, es la identidad. Cuando la acción involucra grupos del mismo orden, se define por conjugación. De las dos propiedades anteriores se concluye que los grupos de homotopía de orden superior a uno son abelianos.

En el capítulo segundo se estudia la categoría de pares de una I-categoría generalizada y mediante la creación de los conos de una cofibración se definen los grupos de homotopía relativa de un morfismo. Una sucesión exacta de homotopía asociada a un morfismo relaciona los grupos de homotopía generalizada del morfismo con los de su dominio y los de su codominio. La acción definida en la sección quinta del capítulo primero puede ser extendida a los grupos contenidos en la mencionada sucesión, dejando a ésta invariante. Este capítulo se divide en cuatro secciones:

En la primera sección se prueba que la categoría de cofibraciones de una I-categoría generalizada vuelve a ser una I-categoría generalizada, por lo que se puede hablar en ella de todo lo desarrollado en el primer capítulo. De esta forma se tienen grupos de homotopía relativa a cofibraciones de pares basados en un morfismo de pares de un par, concepto que puede ser generalizado a cualquier morfismo relacionando objetos aunque éste no sea una cofibración. Los funtores proyección de la categoría de pares en la categoría original, inducen homomorfismos desde los grupos de homotopía relativa a una cofibración de pares basados en un morfismo de pares, de un morfismo, en los grupos de homotopía relativa a las respectivas componentes de la cofibración, basados en las respectivas componentes del morfismo, del dominio y codominio, respectivamente, del morfismo al conservar estos la homotopía, la inversión y la composición de caminos. Asimismo, estos homomorfismos son invariantes ante la acción del primer grupo de homotopía de las respectivas componentes.

En la segunda sección se define el cono de las cofibraciones iteradas de una dada y se ve que el par formado por el cono de una cofibración iterada y ésta es una cofibración de pares. Mediante esta cofibración de pares se definen los grupos de homotopía relativa a una cofibración basada en un morfismo, de un morfismo. Todo grupo de homotopía relativa a una cofibración de un objeto en la categoría original puede ser interpretado como un grupo de homotopía relativa a una cofibración de pares de un morfismo. Este hecho permite definir un homomorfismo desde el primer grupo en el grupo de homotopía relativa a la cofibración del morfismo. El carácter funtorial de los grupos involucrados hace natural la acción de este homomorfismo.

En la tercera sección, usando el homomorfismo natural creado en la sección anterior, la proyección definida en la sección primera de este capítulo y el inducido por un morfismo, se obtiene una sucesión exacta relacionando los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un morfismo, de su dominio y de su codominio, que se denomina sucesión exacta de homotopía relativa a la cofibración del morfismo. Por el carácter funtorial de los grupos relacionados así como por la naturalidad de los homomorfismos, esta sucesión presenta también un carácter funtorial.

En la cuarta sección de este capítulo se define una acción del primer grupo de homotopía relativo a una cofibración del dominio de un morfismo en los grupos de homotopía no inferiores de este dominio, en los del codominio y en los del morfismo. Dicha acción deja equivariante la sucesión exacta de homotopía relativa del morfismo.

En el capítulo tercero se ve que la categoría de cofibraciones con dominio un objeto fijo de una I-categoría generalizada es una I-categoría generalizada punteada. Una técnica fundamental es usada a lo largo de este capítulo: a los objetos de esta categoría se les pueden asociar push outs, mediante los cuales se pueden definir los distintos conceptos de la teoría de homotopía punteada. Haciendo uso de estos push outs se concluye que los grupos de homotopía punteada y las sucesiones exactas de ellos son grupos de homotopía generalizada y sucesiones exactas de estos en la categoría original. Si se basan los objetos de estas categorías, a semejanza de lo que ocurre en los espacios topológicos, se obtienen grupos de homotopía de un objeto y de un morfismo como los respectivos grupos de homotopía punteados basados en el morfismo "cero". De esta forma se pueden definir grupos de homotopía de los objetos y los morfismos de la categoría bajo un objeto fijo de la original, a semejanza de lo que sucede con los espacios topológicos punteados. El capítulo se divide en tres secciones:

En la primera sección se comienza definiendo la categoría de cofibraciones bajo un objeto y el concepto de push out asociado a los objetos de dicha categoría. Mediante estos push outs se crea un cilindro punteado generalizado, que dota a la mencionada categoría de una estructura de I-categoría generalizada punteada. Asimismo se relacionan mediante push outs asociados los cilindros y cilindros relativos punteados con los respectivos no punteados de la categoría original.

En la sección segunda, usando las relaciones obtenidas en la sección anterior entre los objetos punteados y los no punteados de la categoría original, mediante la técnica de los push outs asociados, se crean isomorfismos entre los grupos de homotopía punteados y las sucesiones exactas de ellos con grupos de homotopía generalizados y sucesiones exactas de estos, de la categoría original. También se ve que los isomorfismos conservan la acción del primer grupo de homotopía sobre la sucesión.

En la sección tercera de este capítulo, basando los objetos y morfismos de la categoría de cofibraciones bajo un objeto de la original se definen conos y suspensiones de los mismos. Haciendo uso de estas suspensiones se definen los grupos de homotopía de un objeto referidos a un objeto punteado y basado. Dicha definición puede ser extendida para objetos no punteados, esto es, para objetos cualesquiera de la categoría bajo el objeto fijado. Usando los resultados obtenidos en la sección anterior y la técnica de los push outs asociados, se obtienen isomorfismos entre los grupos de homotopía de los objetos de la categoría bajo el objeto fijado y los respectivos generalizados del objeto en la categoría original. Lo mismo sucede con los grupos respectivos de los morfismos, de forma que la sucesión exacta de homotopía asociada a un morfismo hasta el orden dos es isomorfa a la respectiva de homotopía generalizada asociada a dicho morfismo en la categoría original. Así, aparecen condiciones bajo las cuales una sucesión exacta de homotopía generalizada puede ser extendida hasta los grupos de orden uno.

En el capítulo cuarto se introduce el concepto de P-categoría generalizada dual del de I-categoría generalizada, y se estudia la compatibilidad de ambos conceptos sobre una misma categoría. Asimismo se dan métodos algebraicos para la obtención de este tipo de estructuras a partir de otras. Por su singularidad, también se hace un estudio de las categorías aditivas bajo las mencionadas estructuras. Para hacer ver la importancia de la teoría definida en este trabajo se definen los grupos de homotopía denominados esféricos generalizando lo que sucede en la categoría de los espacios topológicos, confirmando posteriormente que, efectivamente, la categoría de los espacios topológicos tiene una estructura de I-categoría generalizada y que los grupos de homotopía de los espacios topológicos punteados son grupos de homotopía esféricos desde el punto de vista planteado en la axiomática general. Se termina este capítulo analizando distintos ejemplos de homotopías conocidas, sobre complejos de cadena, proyectiva e inyectiva, y otros no tan conocidos, en espacios exteriores y homotopías tensoriales, que verifican la axiomática. El capítulo se divide en cuatro secciones:

En la primera sección se introducen el concepto de P-categoría generalizada como concepto dual de I-categoría generalizada, que similarmente a este último procede del concepto dual respectivo de categoría con caminos naturales dado por Baues [2]. Del estudio de la compatibilidad de ambas estructuras sobre una misma categoría surge el concepto de IP-categoría generalizada. Cuando también existe la compatibilidad entre las cofibraciones y fibraciones de ambas estructuras, se tiene que los grupos de homotopía relativa a una cofibración basada en un morfismo del dominio de una fibración, son isomorfos a los grupos de homotopía relativos a la fibración basados en el mismo morfismo del codominio de la cofibración. Se ve también que un funtor adjunto por la derecha (resp. izquierda) de un cilindro (resp. caminos) induce una estructura de P(resp. I)-categoría generalizada compatible con la estructura de partida. Para ello se hace uso de que toda estructura de cilindro (caminos) generalizada lleva asociada unas cofibraciones (fibraciones) generadas por la estructura que hacen de la categoría una $I(P)$-categoría generalizada.

En la sección segunda se analizan las estructuras sobre una categoría aditiva. En este tipo de categorías, la propiedad de extensión (elevación) de homotopía de un morfismo iterado es consecuencia de la respectiva propiedad de dicho morfismo y de la aditividad de la categoría. Por lo que las cofibraciones (fibraciones) generadas van a coincidir con los morfismos que verifiquen la propiedad de extensión (elevación) de homotopía. Se comprueba que la operación de los grupos de homotopía generalizada basados en el cero coincide con la inducida por la aditividad de la categoría y por tanto son todos conmutativos. Este hecho permite definir grupos de homotopía generalizada basada en el cero en categorías aditivas aunque el funtor cilindro o caminos suministrado no conserve push outs cofibrados o pull backs fibrados respectivamente. Finalmente, a partir de estructuras cónicas (cocónicas) en el sentido descrito por F.J. Díaz y S. Rodríguez Machín [17] [18], en este tipo de categorías, se generan estructuras de $I(P)$-categorías generalizadas, cuya homotopía es coincidente con la primera. En el caso de estructuras compatibles, también las estructuras generadas son compatibles.

En la sección tercera se define para objetos cofibrantes en una I-categoría generalizada la 0-esfera como el coproducto de dicho objeto consigo mismo. Esta 0-esfera es un objeto punteado y basado en la categoría de cofibraciones bajo ese objeto. La suspensión n-ésima de este objeto se denomina n-esfera. Usando la técnica de los push outs asociados introducida en el capítulo anterior, se tiene que los grupos de homotopía esféricos de un objeto, esto es, las clases de homotopía de los morfismos desde la n-esfera en dicho objeto, son isomorfos a los grupos de homotopía relativa a la cofibración inicial del objeto, y por tanto, también son grupos de homotopía generalizados. Se finaliza esta sección haciendo un estudio de la categoría de los espacios topológicos y de sus distintas estructuras de I-categoría generalizada y P-categoría generalizada. En las estructuras de I-categoría generalizada, los grupos de homotopía de los espacios topológicos punteados son exactamente los grupos esféricos en la categoría de los espacios topológicos bajo un punto.

En la sección cuarta se analizan diferentes ejemplos de homotopías generadas mediante este tipo de estructura. El primer ejemplo considerado es la categoría de espacios exteriores definida por J.M. García Calcines, M. García Pinillos y L.J. Hernández Paricio [25] para el estudio de la homotopía propia de los espacios topológicos. Esta categoría tiene una estructura de I-categoría generalizada. En el segundo ejemplo se ve que la homotopía usual de los complejos de cadena de una categoría abeliana tiene una estructura de IP-categoría generalizada, en la cual las cofibraciones (fibraciones) generadas coinciden con los monomorfismos (epimorfismos) normales de cadenas, que son exactamente las cofibraciones (fibraciones) usadas cuando se creó dicha homotopía [38]. En el tercer ejemplo se crea una estructura de P-categoría generalizada en la categoría de los módulos sobre un anillo, usando los resultados de la sección segunda de este capítulo. La homotopía generalizada obtenida engloba a la proyectiva creada por B. Eckman y P.J. Hilton sobre esta categoría [32], y en la cual dos morfismos son homótopos si y solo si su diferencia se factoriza a través de un módulo proyectivo. En el cuarto ejemplo, similarmente al anterior, se dota a la categoría de módulos sobre un anillo de una estructura de I-categoría generalizada. La homotopía resultante engloba a la homotopía inyectiva definida por los mismos autores del ejemplo anterior. En este caso, dos morfismos son homótopos si y solo si su diferencia se factoriza a través de un módulo inyectivo. Las estructuras dadas en estos dos últimos ejemplos no poseen estructuras adjuntas compatibles. Se termina esta sección dando estructuras de IP-categorías generalizadas sobre la categoría de los grupos abelianos, de los casi módulos sobre un anillo y de los módulos sobre un anillo unitario, cuyas homotopías generalizadas engloban las respectivas homotopías tensoriales definidas en dichas categorías.

El autor es consciente de la existencia de diversas cuestiones abiertas que no se han tratado en esta monografía. Algunas de ellas ya han sido estudiadas y resueltas, pero la limitación de espacio en este trabajo ha impedido incluirlas. Otras, en cambio, están todavía siendo estudiadas, y algunas no se han intentado. En este sentido se destacan las siguientes como posible continuación de este trabajo.
Desde el punto de vista algebraico:

- Obtención de una sucesión exacta de cofibras homotópicas generalizada.

- Asociación de teorías simpliciales a la homotopía generalizada, tal y como se hace en otras teorías de homotopía.

- Creación de torres de Postnikov en homotopía generalizada.

Desde el punto de vista de las aplicaciones:

- Creación de una estructura de I-categoría generalizada en la categoría de los espacios topológicos no compactos con aplicaciones continuas y propias.

- Extensión de la noción de homotopía generalizada a las categorías de cofibraciones de Baues [2].

- Extensión de la noción de homotopía generalizada a las categorías de Λ-cofibraciones en el sentido de G. Minian [46], [47].

Capítulo 0

Notación y preliminares de teoría de categorías

Una de las herramientas fundamentales que se usa en homotopía algebraica o abstracta es la teoría de categorías. Conceptos como categorías, objetos, morfismos, funtores, transformaciones naturales,... son imprescindibles a la hora de trabajar con axiomáticas de homotopía. También en este trabajo se hace uso de las distintas categorías generadas por una dada, como son la categoría bajo un objeto, sobre un objeto, la de pares, la opuesta, etc... Asimismo se utilizan los conceptos de categoría aditiva y abeliana.

Los conceptos mencionados anteriormente pueden ser fácilmente encontrados en cualquier tratado de teoría de categorías, por lo que no se darán explícitamente. No obstante, al usarse una notación que difiere en matices de la clásica, se introduce ésta para una mejor comprensión del trabajo.

Los diagramas push out serán muy importantes en el desarrollo de la teoría que se expone. Por ello se hace un estudio más completo de los mismos. Se usará una notación que permite tener más información sobre los objetos y morfismos intervinientes que la notación clásica y, no obstante, se simplifica ésta.

Se dan también algunos resultados sobre teoría de push outs más específicos que los habituales. Los diagramas pull back con su notación y versiones duales de los mencionados resultados son también introducidos.

0.1 Categorías, funtores y transformaciones naturales

La notación de los distintos conceptos relativos a categorías, funtores transformaciones naturales, que se usará a lo largo de éste trabajo es dada en esta sección. No se dan sin embargo las definiciones, pues pueden ser encontradas en cualquiera de las referencias bibliográficas sobre el tema.

Se designarán las categorías por letras mayúsculas del tipo $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$..., los objetos por letras mayúsculas A, B, C... Dados dos objetos X e Y de una categoría $\mathcal{C}$, la notación $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ representará el conjunto de morfismos con dominio el objeto X y codominio el objeto Y en esta categoría $\mathcal{C}$. Si no hay posibilidad de confundir la categoría, se podrá también denotar simplemente por $Hom(X, Y)$. Un elemento de este conjunto será simbolizado por $f : X \to Y$.

Dados los morfismos $i : B \to A$ y $u : B \to X$, $Hom(A, X)^{u\{i\}}$ simbolizará el conjunto de morfismos $\{f : A \to X \ / \ fi = u\}$. La notación dual para morfismos $p : A \to B$ y $u : X \to B$ es $Hom(X, A)^{u<p>}$, designa el conjunto de morfismos $\{f : X \to A \ / \ pf = u\}$. Dichos conjuntos se denominan respectivamente conjuntos de extensiones del morfismo u relativas al morfismo i y conjunto de elevaciones del morfismo u relativas al morfismo p.

Los funtores serán designados también, como los objetos, por letras mayúsculas F, G, H... La notación $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ simboliza un funtor que varía sobre la categoría $\mathcal{A}$ y toma valores en la categoría $\mathcal{B}$. Si A es un objeto de $\mathcal{A}$ entonces FA es el objeto que, mediante el funtor F, le corresponde en $\mathcal{B}$. Si $f : A \to A'$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{A}$ entonces $Ff : FA \to FA'$ denotará el morfismo correspondiente por medio del funtor F en la categoría $\mathcal{B}$.

Dados dos funtores $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, la notación $t : F \to G$ simbolizará una transformación entre los funtores F y G. Si A es un objeto de $\mathcal{A}$ entonces $t_A : FA \to GA$ denota el morfismo asociado a la transformación t por el objeto A, en $\mathcal{B}$. En general, cuando este morfismo esté compuesto con otros morfismos cuyos dominios y codominios son conocidos, no se pondrá el subíndice A, ya que es evidente sobre qué objeto actúa.

Dados dos funtores $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y una transformación $t : F \to G$, si $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ es un funtor, $t_H : FH \to GH$ denota la transformación que a todo objeto C de $\mathcal{C}$ le asocia el morfismo $t_{HC} : FHC \to GHC$ en $\mathcal{B}$. Obsérvese que dado el objeto HC, la transformación t actúa sobre este objeto como la transformación t_H sobre el objeto C, por lo que también se usará la notación t en lugar de t_H si no hay posibilidad de error. Si ahora $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un funtor entonces $Ht : HF \to HG$ simboliza la transformación que a un objeto A de $\mathcal{A}$ le asocia el morfismo $Ht_A : HFA \to HGA$ en $\mathcal{C}$.

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un funtor entonces $F^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ simboliza la composición n veces del funtor consigo mismo. Si $n = 0$, F^0 simboliza el funtor identidad $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Dada una transformación $t : F^n \to F^m$ para $m, n \geq 0$, la transformación t^k simboliza la composición de transformaciones $tt_{F^{n-m}}t_{F^{2(n-m)}} \cdots t_{F^{(k-1)(n-m)}} : F^{(k-1)(n-m)+n} \to F^{(k-2)(n-m)+n} \to \cdots F^n \to F^m$ para $k \geq 1$ y $n \geq m$, y la composición
$t_{F^{(k-1)(m-n)}}t_{F^{(k-2)(m-n)}} \cdots t_{F^{(m-n)}}t : F^n \to F^m \to F^{(m-n)+m} \to \cdots F^{(k-1)(m-n)+m}$ para $m \geq n$.

0.2 Push outs

A lo largo de este trabajo, una de las herramientas fundamentales de la teoría de categorías que será usada son los diagramas denominados "push out". Para ello, aquí, aparte de introducir la notación, también se dan dos de los principales resultados que serán utilizados con frecuencia.

Definición 0.2.1. Dados dos morfismos $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$ en una categoría $\mathcal{C}$, el objeto push out de los morfismos f y g se denotará por $P\{f,g\}$ y éste será un objeto que junto con los morfismos $\overline{f}: Z \to P\{f,g\}$ y $\overline{g}: Y \to P\{f,g\}$ da un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Y \arrow[r, "\overline{g}"'] & P\{f,g\}
\end{tikzcd}$$

con la siguiente propiedad universal de push out: si $u : Y \to A$ y $v : Z \to A$ son morfismos que verifican $uf = vg$, entonces existe un único morfismo $\{u,v\} : P\{f,g\} \to A$ tal que $\{u,v\}\overline{g} = u$ y $\{u,v\}\overline{f} = v$.

Si la notación $\overline{f}$ o $\overline{g}$ ya ha ido usada en algún push out y aparecen inducidas de f o g en otros push outs, se usará respectivamente la notación $\widetilde{f}$ o $\widetilde{g}$. Si esta última también ha sido usada, se usará $\widehat{f}$ o $\widehat{g}$ respectivamente. En particular, un push out del tipo $P\{f,f\}$ se simbolizará con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Y \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & P\{f,f\}
\end{tikzcd}$$

Nótese que por la unicidad de la propiedad de push out, la identidad $1 : P\{f,g\} \to P\{f,g\}$ es el morfismo $\{\overline{g},\overline{f}\}$. En particular, la identidad en $P\{f,f\}$ es el morfismo $\{\widetilde{f},\overline{f}\}$.

Dado un diagrama totalmente conmutativo del tipo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\gamma"'] & & Z \arrow[dr, "\overline{f}"] \arrow[dd, "\beta"] & \\
& Y \arrow[rr, "\overline{g}"] \arrow[dd, "\alpha"] & & P\{f,g\} \\
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "f'"'] & & Z' \arrow[dr, "\overline{f'}"] & \\
& Y' \arrow[rr, "\overline{g'}"'] & & P\{f',g'\}
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\overline{g'}\alpha f = \overline{g'}f'\gamma = \overline{f'}g'\gamma = \overline{f'}\beta g$, por lo que existe el morfismo $\{\overline{g'}\alpha, \overline{f'}\beta\} : P\{f,g\} \to P\{f',g'\}$. Este morfismo se denotará por $\alpha \cup_\gamma \beta : P\{f,g\} \to P\{f',g'\}$ o simplemente $\alpha \cup \beta$ si no existe posibilidad de error. El morfismo puede existir sin que exista el morfismo γ haciendo conmutativo el diagrama anterior. Basta con que $\overline{g'}\alpha f = \overline{f'}\beta g$. En este caso no tiene sentido la notación $\alpha \cup_\gamma \beta$ y no se usará tampoco la notación $\alpha \cup \beta$.

Proposición 0.2.1. *Dados los morfismos* $\alpha_0 \cup_{\gamma_0} \beta_0 : P\{f,g\} \to P\{f',g'\}$ *y* $\alpha_1 \cup_{\gamma_1} \beta_1 : P\{f',g'\} \to P\{f'',g''\}$ *entonces* $(\alpha_1 \cup_{\gamma_1} \beta_1)(\alpha_0 \cup_{\gamma_0} \beta_0) = \alpha_1\alpha_0 \cup_{\gamma_1\gamma_0} \beta_1\beta_0$.

Demostración. Basta observar que $\alpha_1\alpha_0 f = \alpha_1 f'\gamma_0 = f''\gamma_1\gamma_0$ y que $\beta_1\beta_0 g = \beta_1 g'\gamma_0 = g''\gamma_1\gamma_0$. $\square$

Si $f : X \to Y$ es un morfismo, y el objeto Y es un push out del tipo $P\{f',g'\}$ entonces $u : Y \to A$ adopta la forma $\{u_0, u_1\}$, donde $u_0 = u\overline{g'}$ y $u_1 = u\overline{f'}$. En este caso $\{u, v\}$ se puede también denotar por $\{\{u_0, u_1\}, v\}$. En caso de que no exista posibilidad de error sobre los push outs usados, dicho morfismo se escribirá también como $\{u_0, u_1, v\}$. De esta forma, aparecerán a lo largo de este trabajo morfismos del tipo $\{h_0, h_1, \cdots h_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Este mismo acuerdo permitirá también simbolizar morfismos por $\alpha_0 \cup \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ suponiendo conocidos los push outs y por ello sin hacer uso de los paréntesis correspondientes.

Proposición 0.2.2. *Dado el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\overline{f}"] & U \arrow[d, "h"] \\
Y \arrow[r, "\overline{g}"'] & P\{f,g\} \arrow[r, "v"'] & V
\end{tikzcd}$$

entonces $V = P\{\overline{f}, u\}$ *con* $h = \overline{\overline{f}}$ *y* $v = \overline{u}$ *si y solo si* $V = P\{f, ug\}$ *con* $h = \widetilde{f}$ *y* $v\overline{g} = \overline{ug}$.

Demostración. Si $V = P\{\overline{f}, u\}$ con $h = \overline{\overline{f}}$ y $v = \overline{u}$, dados los morfismos $h_0 : Y \to A$ y $h_1 : U \to A$ verificando $h_0 f = h_1 ug$, entonces, por la propiedad de push out, existe un único morfismo $\{h_0, h_1u\} : P\{f, g\} \to A$, que verifica en particular $\{h_0, h_1u\}\overline{f} = h_1u$ y de nuevo por la propiedad de push out existe un único morfismo $\{\{h_0, h_1u\}, h_1\} : V \to A$ verificando $\{\{h_0, h_1u\}, h_1\}\overline{\overline{f}} = h_1$ y $\{\{h_0, h_1u\}, h_1\}\overline{ug} = \{h_0, h_1u\}\overline{g} = h_0$. Se concluye que $\overline{\overline{f}} = \widetilde{f}$, $\bar{u}\overline{g} = \overline{ug}$ y que $P\{\overline{f}, u\} = P\{f, ug\}$.

Recíprocamente, si $V = P\{f, ug\}$, $h = \widetilde{f}$ y $v\overline{g} = \overline{ug}$ entonces dado $k_0 : P\{f, g\} \to B$ y $k_1 : U \to B$ verificando $k_0\overline{f} = k_1u$, se tiene que $k_0\overline{g}f = k_0\overline{f}g = k_1ug$ y por la propiedad de push out existe un único morfismo $\{k_0\overline{g}, k_1\} : P\{f, ug\} \to B$. Como $\{k_0\overline{g}, k_1\}v\overline{g} = k_0\overline{g}$ y $\{k_0\overline{g}, k_1\}v\overline{f} = \{k_0\overline{g}, k_1\}hu = k_1u = k_0\overline{f}$, por la unicidad se tiene que $\{k_0\overline{g}, k_1\}v = k_0$. Además $\{k_0\overline{g}, k_1\}h = k_1$ se concluye que $V = P\{\overline{f}, u\}$, $v = \overline{u}$ y $h = \overline{\overline{f}}$. $\square$

La anterior proposición viene a decir que la composición de un push out con un cuadrado conmutativo es un push out si y solo si dicho cuadrado conmutativo lo es.

Proposición 0.2.3. *Dado un morfismo* $\alpha \cup_\beta \gamma : P\{f, g\} \to P\{f', g'\}$*, si* $\alpha = \alpha_0 \cup_{\beta_0} \beta : P\{r, s\} \to P\{r', s'\}$ *con* $\overline{r} = f$ *y* $\overline{r'} = f'$ *entonces* $\alpha \cup_\beta \gamma = \alpha_0 \cup_{\beta_0} \gamma : P\{f, g\} = P\{r, gs\} \to P\{f', g'\} = P\{r', g's'\}$.

Demostración. Por existir el morfismo $\alpha_0 \cup_{\beta_0} \beta$ se verifica $\alpha_0 r = r'\beta_0$ y por la existencia del morfismo $\alpha \cup_\beta \gamma$ se tiene que $g's'\beta_0 = g'\beta s = \gamma gs$, de donde se concluye la existencia del morfismo $\alpha_0 \cup_{\beta_0} \gamma : P\{r, gs\} \to P\{r', g's'\}$.

Nótese que el dominio de β coincide con el dominio de g y con el codominio de s, y por tanto, existe la composición gs. Similarmente, el codominio de β coincide con el dominio de g' y con el codominio de s', por lo que existe la composición $g's'$.

Por la proposición 0.2.2 anterior observando que $\overline{f} = \overline{\overline{r}}$ y $\overline{f'} = \overline{\overline{r'}}$, se tiene que $(\alpha \cup_\beta \gamma)\overline{gs} = \overline{g'}\alpha\overline{s} = \overline{g'}(\alpha_0 \cup_{\beta_0} \beta)\overline{s} = \overline{g's'}\alpha_0 = (\alpha_0 \cup_{\beta_0} \gamma)\overline{gs}$ y $(\alpha \cup_\beta \gamma)\overline{f} = \overline{f'}\gamma = (\alpha_0 \cup_{\beta_0} \gamma)\overline{f}$. De lo anterior se concluye $\alpha \cup_\beta \gamma = \alpha_0 \cup_{\beta_0} \gamma$. $\square$

Teorema 0.2.1. *Dado el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
Y_1 & Y_0 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] & Y_2 \\
X_1 \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & X_0 \arrow[l, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] \arrow[u, "\alpha_0"'] \arrow[d, "\beta_0"] & X_2 \arrow[u, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\beta_2"] \\
Z_1 & Z_0 \arrow[l, "h_1"] \arrow[r, "h_2"'] & Z_2
\end{tikzcd}$$

y suponiendo la existencia de los push outs $P\{\alpha_0,\beta_0\},\ P\{\alpha_1,\beta_1\},\ P\{\alpha_2,\beta_2\}$, $P\{g_1,g_2\},\ P\{f_1,f_2\}$ *y* $P\{h_1,h_2\}$, *se tiene que:*
el push out $P\{\alpha_1\cup_{\alpha_0}\alpha_2,\beta_1\cup_{\beta_0}\beta_2\}$ *existe si y solo si el push out* $P\{g_1\cup_{f_1}h_1,g_2\cup_{f_2}h_2\}$ *existe.*

Además, si existen,

1. $P\{\alpha_1\cup_{\alpha_0}\alpha_2,\beta_1\cup_{\beta_0}\beta_2\}=P\{g_1\cup_{f_1}h_1,g_2\cup_{f_2}h_2\}$
2. $\overline{\alpha_1\cup_{\alpha_0}\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cup_{\overline{\alpha_0}}\overline{\alpha_2}$ *y* $\overline{\beta_1\cup_{\beta_0}\beta_2}=\overline{\beta_1}\cup_{\overline{\beta_0}}\overline{\beta_2}$.
3. $\overline{g_1\cup_{f_1}h_1}=\overline{g_1}\cup_{\overline{f_1}}\overline{h_1}$ *y* $\overline{g_2\cup_{f_2}h_2}=\overline{g_2}\cup_{\overline{f_2}}\overline{h_2}$.
4. *El morfismo* $\{\{\gamma_1,\gamma_2\},\{\delta_1,\delta_2\}\}$ *con dominio* $P\{\alpha_1\cup_{\alpha_0}\alpha_2,\beta_1\cup_{\beta_0}\beta_2\}$ *existe si y solo si el morfismo* $\{\{\gamma_1,\delta_1\},\{\gamma_2,\delta_2\}\}$ *con dominio* $P\{g_1\cup_{f_1}h_1,g_2\cup_{f_2}h_2\}$ *existe. Además, si existen, son iguales.*

Demostración. Basta probar una de las implicaciones, pues la inversa tiene la misma demostración sin mas que rotar el diagrama 90 grados con centro en el objeto X_0.

Supóngase la existencia de $P\{\alpha_1\cup_{\alpha_0}\alpha_2,\beta_1\cup_{\beta_0}\beta_2\}$. Entonces el siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd}
P\{\alpha_0,\beta_0\} \arrow[r, "g_2\cup_{f_2}h_2"] \arrow[d, "g_1\cup_{f_1}h_1"'] & P\{\alpha_2,\beta_2\} \arrow[d, "\overline{g_1}\cup_{\overline{f_1}}\overline{h_1}"] \\
P\{\alpha_1,\beta_1\} \arrow[r, "\overline{g_2}\cup_{\overline{f_2}}\overline{h_2}"'] & P\{\alpha_1\cup_{\alpha_0}\alpha_2,\beta_1\cup_{\beta_0}\beta_2\}
\end{tikzcd}$$

- Existencia de los morfismos: Los morfismos $\alpha_1 \cup_{\alpha_0} \alpha_2$, $\beta_1 \cup_{\beta_0} \beta_2$, $g_1 \cup_{f_1} h_1$ y $g_2 \cup_{f_2} h_2$ existen por la conmutatividad del diagrama dado y la existencia de los push outs.

Ahora, $\overline{g_1}\alpha_2 = (\alpha_1 \cup_{\alpha_0} \alpha_2)\overline{f_1}$ y $(\beta_1 \cup_{\beta_0} \beta_2)\overline{f_1} = \overline{h_1}\beta_2$ y por tanto existe el morfismo $\overline{g_1} \cup_{\overline{f_1}} \overline{h_1} : P\{\alpha_2, \beta_2\} \to P\{\alpha_1 \cup_{\alpha_0} \alpha_2, \beta_1 \cup_{\beta_0} \beta_2\}$. Análogamente sucede con el morfismo $\overline{g_2} \cup_{\overline{f_2}} \overline{h_2} : P\{\alpha_1, \beta_1\} \to P\{\alpha_1 \cup_{\alpha_0} \alpha_2, \beta_1 \cup_{\beta_0} \beta_2\}$.

- Conmutatividad: Se deduce de la proposición 0.2.1, $(\overline{g_1} \cup_{\overline{f_1}} \overline{h_1})(g_2 \cup_{f_2} h_2) = \overline{g_1}g_2 \cup_{\overline{f_1}f_2} \overline{h_1}h_2 = \overline{g_2}g_1 \cup_{\overline{f_2}f_1} \overline{h_2}h_1 = (\overline{g_2} \cup_{\overline{f_2}} \overline{h_2})(g_1 \cup_{f_1} h_1)$.

- Propiedad de push out:

Sean $\{\gamma_1, \delta_1\} : P\{\alpha_1, \beta_1\} \to Y$ y $\{\gamma_2, \delta_2\} : P\{\alpha_2, \beta_2\} \to Y$ verificando $\{\gamma_1, \delta_1\}(g_1 \cup_{f_1} h_1) = \{\gamma_2, \delta_2\}(g_2 \cup_{f_2} h_2)$. Entonces $\{\gamma_1 g_1, \delta_1 h_1\} = \{\gamma_2 g_2, \delta_2 h_2\}$ y por consiguiente $\gamma_1 g_1 = \gamma_2 g_2$ y $\delta_1 h_1 = \delta_2 h_2$. Por tanto existe $\{\gamma_1, \gamma_2\} : P\{g_1, g_2\} \to Y$ y $\{\delta_1, \delta_2\} : P\{h_1, h_2\} \to Y$. Además se verifica que $\{\gamma_1, \gamma_2\}(\alpha_1 \cup_{\alpha_0} \alpha_2) = \{\gamma_1\alpha_1, \gamma_2\alpha_2\} = \{\delta_1\beta_1, \delta_2\beta_2\} = \{\delta_1, \delta_2\}(\beta_1 \cup_{\beta_0} \beta_2)$ pues los dominios de $\{\gamma_1, \delta_1\}$ y $\{\gamma_2, \delta_2\}$ son $P\{\alpha_1, \beta_1\}$ y $P\{\alpha_2, \beta_2\}$ respectivamente.

Se concluye que $\{\{\gamma_1, \delta_1\}, \{\gamma_2, \delta_2\}\} =$
$\{\{\gamma_1, \gamma_2\}, \{\delta_1, \delta_2\}\} : P\{g_1 \cup_{f_1} h_1, g_2 \cup_{f_2} h_2\} = P\{\alpha_1 \cup_{\alpha_0} \alpha_2, \beta_1 \cup_{\beta_0} \beta_2\} \to Y$. $\square$

Observación 0.2.1. Cualquier objeto A de una categoría puede ser considerado un push out, pues $P\{1_A, 1_A\} = A$ siempre existe, con inducidas respectivas $\overline{1_A} = 1_A$ y $\widetilde{1_A} = 1_A$. Reiterando el proceso se puede considerar el morfismo $1_A = \overline{1_A}1_A : A \to P\{1_A, 1_A\}$; para diferenciar este morfismo de $1_A : A \to A$, se denominará $1'_A : A \to P\{1_A, 1_A\}$ y de esta forma se tiene el objeto $A = P\{1'_A, 1_A\}$ y así sucesivamente. Cualquier morfismo $\alpha : A \to X$ se puede así expresar como el morfismo $\{\alpha, \alpha, ...\} : A \to X$ considerando A como un objeto push out de los anteriormente mencionados.

La relación entre los push outs de una categoría y su categoría de pares viene expresada en el siguiente resultado.

Proposición 0.2 .4. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ y dos morfismos en* **Pair** $\mathcal{C}$, $(u_0, u_1) : (A_0, A_1) \to (B_0, B_1)$ *y* $(v_0, v_1) : (A_0, A_1) \to (C_0, C_1)$, *se verifica que si existen los push outs* $P\{u_0, v_0\}$ *y* $P\{u_1, v_1\}$ *en* $\mathcal{C}$ *entonces también existe el push out* $P\{(u_0, u_1), (v_0, v_1)\}$ *en* **Pair** $\mathcal{C}$. *Además, si existen, se verifica que* $P\{(u_0, u_1), (v_0, v_1)\} = (P\{u_0, v_0\}, P\{u_1, v_1\})$.

Demostración. Sean $a : A_1 \to A_0$, $b : B_1 \to B_0$ y $c : C_1 \to C_0$ los morfismos que representan respectivamente dichos pares. Entonces el morfismo $b \cup c$ es representado por $(P\{u_0, v_0\}, P\{u_1, v_1\})$.

Al verificarse las igualdades $(b \cup c)\overline{u_1} = \overline{u_0}c$ y $(b \cup c)\overline{v_1} = \overline{v_0}b$, existen los morfismos de pares $(\overline{u_0}, \overline{u_1}) : (C_0, C_1) \to (P\{u_0, v_0\}, P\{u_1, v_1\})$ y $(\overline{v_0}, \overline{v_1}) : (B_0, B_1) \to (P\{u_0, v_0\}, P\{u_1, v_1\})$. Además $(\overline{u_0}, \overline{u_1})(v_0, v_1) = (\overline{u_0}v_0, \overline{u_1}v_1) = (\overline{v_0}u_0, \overline{v_1}u_1) = (\overline{v_0}, \overline{v_1})(u_0, u_1)$.

Si $(f_0, f_1) : (B_0, B_1) \to (X_0, X_1)$ y $(g_0, g_1) : (C_0, C_1) \to (X_0, X_1)$ son morfismos de pares verificando que $(f_0, f_1)(u_0, u_1) = (g_0, g_1)(v_0, v_1)$ entonces $f_0u_0 = g_0v_0$ y $f_1u_1 = g_1v_1$ de donde existen los morfismos $\{f_0, g_0\} : P\{u_0, v_0\} \to X_0$ y $\{f_1, g_1\} : P\{u_1, v_1\} \to X_1$. Como $x\{f_1, g_1\} = \{xf_1, xg_1\} = \{f_0b, g_0c\} = \{f_0, g_0\}(b \cup c)$, se concluye por la unicidad de la propiedad de push out que $P\{(u_0, u_1), (v_0, v_1)\} = (P\{u_0, v_0\}, P\{u_1, v_1\})$, $\overline{(u_0, u_1)} = (\overline{u_0}, \overline{u_1})$, $\overline{(v_0, v_1)} = (\overline{v_0}, \overline{v_1})$ y $\{(f_0, f_1), (g_0, g_1)\} = (\{f_0, g_0\}, \{f_1, g_1\})$. $\square$

0.3 Pull backs

Esta sección es la versión dual de la anterior y solo se incluye para indicar la notación que se usará.

Definición 0.3.1. Dados dos morfismos $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ en una categoría $\mathcal{C}$, el objeto pull back de los morfismos f y g se denotará por $P < f, g >$

y éste será un objeto que junto con los morfismos $\overline{f} : P < f, g > \to Z$ y $\overline{g} : P < f, g > \to Y$ da un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P < f,g > \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

con la siguiente propiedad de pull back: si $u : A \to Y$ y $v : A \to Z$ son morfismos verificando que $fu = gv$ entonces existe un único morfismo $< u, v >: A \to P < f, g >$ tal que $\overline{g} < u, v >= u$ y $\overline{f} < u, v >= v$.

De forma similar a lo dicho para push outs, se usará la notación $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$, $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ también en el caso de pull backs. En particular, se tienen las identidades siguientes: $1 =< \overline{g}, \overline{f} >: P < f, g > \to P < f, g >$ y $1 =< \widetilde{f}, \overline{f} >: P < f, f > \to P < f, f >$.

Si existen los pull back $P < f, g >$ y $P < f', g' >$, y morfismos α, β, γ verificando $f'\alpha = \gamma f$ y $g'\beta = \gamma g$, entonces se tiene el morfismo $\alpha \cap_\gamma \beta : P < f, g > \to P < f', g' >$.

Análogamente a lo dicho en la sección anterior para morfismos que involucran a un número finito de push outs, también en este caso se tienen morfismos del tipo $< h_0, h_1, \cdots h_n >$ y $\alpha_0 \cap \alpha_1 \cap \cdots \cap \alpha_n$. De forma dual se verifica que $(\alpha_0 \cap_{\gamma_0} \beta_0)(\alpha_1 \cap_{\gamma_1} \beta_1) = \alpha_0\alpha_1 \cap_{\gamma_0\gamma_1} \beta_0\beta_1$.

Asimismo, la composición de un cuadrado conmutativo con un pull back es pull back si y solo si dicho cuadrado lo es.

Teorema 0.3.1. *(Dual del teorema 0.21)*

Dado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Y_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & Y_2 \arrow[l, "g_2"'] \arrow[d, "\alpha_2"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"'] & X_0 & X_2 \arrow[l, "f_2"] \\
Z_1 \arrow[r, "h_1"'] \arrow[u, "\beta_1"] & Z_0 \arrow[u, "\beta_0"'] & Z_2 \arrow[l, "h_2"] \arrow[u, "\beta_2"']
\end{tikzcd}$$

y suponiendo la existencia de los pull backs $P < \alpha_0, \beta_0 >$, $P < \alpha_1, \beta_1 >$, $P < \alpha_2, \beta_2 >$, $P < g_1, g_2 >$, $P < f_1, f_2 >$ *y* $P < h_1, h_2 >$*, se tiene que:*
el pull back $P < \alpha_1 \cap_{\alpha_0} \alpha_2, \beta_1 \cap_{\beta_0} \beta_2 >$ *existe si y solo si el pull back* $P < g_1 \cap_{f_1} h_1, g_2 \cap_{f_2} h_2 >$ *existe.*

Además, si existen,

1. $P < \alpha_1 \cap_{\alpha_0} \alpha_2, \beta_1 \cap_{\beta_0} \beta_2 >= P < g_1 \cap_{f_1} h_1, g_2 \cap_{f_2} h_2 >$

2. $\overline{\alpha_1 \cap_{\alpha_0} \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cap_{\overline{\alpha_0}} \overline{\alpha_2}$ *y* $\overline{\beta_1 \cap_{\beta_0} \beta_2} = \overline{\beta_1} \cap_{\overline{\beta_0}} \overline{\beta_2}$.

3. $\overline{g_1 \cap_{f_1} h_1} = \overline{g_1} \cap_{\overline{f_1}} \overline{h_1}$ *y* $\overline{g_2 \cap_{f_2} h_2} = \overline{g_2} \cap_{\overline{f_2}} \overline{h_2}$.

4. *El morfismo* $<< \gamma_1, \gamma_2 >, < \delta_1, \delta_2 >>$*, con* $P < \alpha_1 \cap_{\alpha_0} \alpha_2, \beta_1 \cap_{\beta_0} \beta_2 >$ *como dominio, existe si y solo si el morfismo* $<< \gamma_1, \delta_1 >, < \gamma_2, \delta_2 >>$ *con dominio* $P < g_1 \cap_{f_1} h_1, g_2 \cap_{f_2} h_2 >$ *existe. Además, si existen, son iguales.*

También para pull backs se verifica la proposición dual de la 0.2.4 en categoría de pares. Esto es, si existen los pull backs $P < u_0, v_0 >$ y $P < u_1, v_1 >$ en $\mathcal{C}$ entonces también existe en **Pair** $\mathcal{C}$ el pull back $P < (u_0, u_1), (v_0, v_1) >= (P < u_0, v_0 >, P < u_1, v_1 >)$.

Capítulo 1

Homotopía Generalizada

Cualquier estructura de homotopía genera teorías de homotopía punteadas considerando como puntos a los objetos de la categoría. La homotopía generalizada surge como un intento de definir una homotopía, en categorías sin objetos cofibrantes, y que además englobe las diferentes teorías de homotopía punteadas.

Partiendo de las categorías con un cilindro natural, o I-categorías, definidas por H.J. Baues [2], eliminando el objeto inicial junto con los axiomas relativos a él y modificando aquellos que necesiten de su existencia, se obtiene la noción de I-Categoría Generalizada. En estas categorías se verifican las propiedades clásicas, no relacionadas con el objeto inicial, relativas a las cofibraciones. En este sentido se destaca la propiedad de extensión de homotopía descrita por Kamps [38] por su versatilidad para obtener homotopías.

La homotopía en una I-categoría generalizada se crea a mediante la homotopía relativa a cofibraciones, adoptando formas diversas equivalentes cuando estas cofibraciones proceden de la iteración de otra a través de los cilindros relativos. La homotopía generalizada así definida verifica propiedades usuales de la teoría de homotopía, como son la compatibilidad con la composición de morfismos bajo cofibraciones y la conservación, mediante iteración del cilindro relativo, de los cuadrados conmutativos o push outs relacionando cofibraciones. La no existencia en general de homotopía relativa a la cofibración inicial, pues no tienen por qué existir objetos cofibrantes, no impide que el funtor cilindro defina una relación para morfismos entre dos objetos; relación que se traduce en isomorfismos de corchetes de homotopía relativos a cofibraciones con dominio coincidente con el de los morfismos. Estos isomorfismos son la herramienta fundamental que se utilizará para el estudio de la conexidad por caminos de los objetos y en la descripción de la acción de los grupos de homotopía sobre los de orden no menor.

Dada una cofibración, considerando como puntos de un objeto los morfismos entre el codominio de la cofibración y dicho objeto, y como caminos las homotopías sobre dicho objeto relativas a la cofibración dada, se crea un grupoide de homotopía generalizada. La compatibilidad de la homotopía con la composición de morfismos induce funtores entre los distintos grupoides que darán origen a conocidas propiedades de los grupos de homotopía clásicos.

A partir del grupoide de homotopía generalizada y usando el cilindro relativo para la iteración de las cofibraciones se definen los grupos de homotopía generalizada como grupos de homotopía relativos a cofibraciones y basados en morfismos que hacen las veces de puntos. Propiedades clásicas de los grupos de homotopía son también verificadas por los aquí obtenidos: tienen carácter funtorial respecto a los morfismos base y a las cofibraciones, pueden ser expresados los de orden superior en función de los de orden inferior, y morfismos base relacionados por homotopía, "puntos" relacionados por "caminos", dan grupos de homotopía isomorfos. El dominio de las cofibraciones también determina estos grupos de homotopía y junto con la propiedad anteriormente mencionada se obtiene el concepto de objeto conexo por caminos relativos a una cofibración, como aquel cuyos grupos de homotopía generalizada no dependen del morfismo base elegido.

Por último, es posible definir una acción desde los grupos de homotopía generalizada a los de orden superior, que coincide en el caso de la homotopía ordinaria de los espacios topológicos con la acción del grupo fundamental. Acción que, en esta teoría, es la identidad cuando el grupo que actúa no es de orden uno, y que es la conjugación cuando los órdenes de dicho grupo y sobre el que actúa coinciden. De esta forma, se obtiene la abelianidad de los grupos de homotopía generalizada para órdenes superiores a uno.

1.1 I-Categoría Generalizada

Antes de dar el concepto de I-categoría generalizada se recordará la noción de I-categoría, o categoría con cilindro natural introducida por H.J. Baues en su libro "Algebraic Homotopy" [2], para posteriormente realizar las modificaciones oportunas que permitan definir una estructura de homotopía, a través de un cilindro, que no requiera la existencia de objeto inicial.

Definición 1.1.1. Una I-categoría, o categoría con cilindro natural es una estructura del tipo $(\mathcal{C}, I, \iota_\epsilon, \rho, cof)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto inicial $\emptyset$; $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor denominado cilindro; $\iota_\epsilon : 1_\mathcal{C} \to I$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, son transformaciones naturales denominadas inclusiones; $\rho : I \to 1_\mathcal{C}$ es una transformación natural denominada proyección y "cof" es una familia distinguida de morfismos denominados cofibraciones y representados por "$\rightarrowtail$"; verificando los axiomas **I1**, **I2**, **I3**, **I4** e **I5**:

I1 (Axioma de Cilindro) $\rho\iota_\epsilon = id$, $\epsilon \in \{0, 1\}$

I2 (Axioma de Push Out) Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y todo morfismo $f : B \to X$ existe el objeto push out $P\{i, f\}$ con $\bar{i}$ cofibración:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & P\{i, f\} \end{tikzcd}$$

Este tipo de push outs con cofibraciones se denominará push out cofibrado. El funtor cilindro I transforma push outs cofibrados en push outs, esto es, $IP\{i, f\} = P\{Ii, If\}$. Además $I\emptyset = \emptyset$

I3 (Axioma de Cofibración) Para todo objeto X de $\mathcal{C}$, $\emptyset_X : \emptyset \to X$ es cofibración. La composición de cofibraciones es cofibración. Toda cofibración verifica la propiedad de extensión de homotopía (P.E.H.):

Un morfismo $i : B \to A$ se dice que verifica la P.E.H. cuando todo cuadrado de homotopía, esto es, cuadrado conmutativo del tipo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota_\epsilon"] \arrow[d, "i"'] & IB \arrow[d, "H"] \\ A \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd} \qquad , \epsilon \in \{0, 1\}$$

tiene una extensión $F_\epsilon : IA \to X$ tal que $F\epsilon\iota_\epsilon = h$ y $F\epsilon Ii = H$.

I4 (Axioma de Cilindro Relativo) Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el morfismo $i^1 = \{Ii, \iota_0, \iota_1\} : P\{\{\iota_0, \iota_1\}, i \cup i\} \to IA$ es una cofibración,

$$\begin{tikzcd} B \cup B \arrow[r, "i \cup i"] \arrow[d, "\{\iota_0, \iota_1\}"'] & A \cup A \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\{\iota_0, \iota_1\}"] & \\ IB \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "Ii"'] & P\{\{\iota_0, \iota_1\}, i \cup i\} \arrow[r, "i^1"] & IA \end{tikzcd}$$

donde para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$, el objeto $X \cup Y = P\{\emptyset_X, \emptyset_Y\}$ existe por los axiomas dados.

I5 (Axioma de Intercambio) Existe una transformación de intercambio $t : II \to II$ tal que $tI\iota_\epsilon = \iota_{\epsilon I}$ y $t\iota_{\epsilon I} = I\iota_\epsilon$, para $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Para el objeto push out dado en el axioma **I4** se usará la notación $I_i^1 B = P\{\{\iota_0, \iota_1\}, i \cup i\}$. Obsérvese que, por este mismo axioma, el morfismo $\emptyset_A^1 = \{\iota_0, \iota_1\} : A \cup A \rightarrowtail IA$ es cofibración para todo objeto A de $\mathcal{C}$. Por otro lado, las inclusiones inducidas $j_0 = \widetilde{\emptyset_A}$, $j_1 = \overline{\emptyset_A} : A \rightarrowtail A \cup A$ son también cofibraciones por el axioma **I2** y, por tanto, también lo son $\iota_0 = \{\iota_0, \iota_1\} j_0$, $\iota_1 = \{\iota_0, \iota_1\} j_1$ por el axioma **I3**. De éste mismo axioma también se deduce que todo isomorfismo $f : X \to Y$ es cofibración pues $f = \overline{\emptyset_\emptyset} : X \to P\{\emptyset_\emptyset, \emptyset_X\} = Y$.

Una de las razones para introducir el concepto de I-categoría generalizada es eliminar del axioma de cofibración **I3** el que todo objeto X de la categoría $\mathcal{C}$ sea cofibrante. La supresión de esta condición impide que se pueda hablar en general de objetos del tipo $X \cup X$, por lo que el axioma **I4** de cilindro relativo debe ser entonces formulado con otros push outs.

Proposición 1.1.1. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el objeto $I_i^1 B$ coincide con $P\{\bar{i}\iota_1, i\}$, donde $\bar{i} : IB \rightarrowtail P\{\iota_0, i\}$ es la cofibración inducida por i en este push out.*

Demostración. El siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[d, "\bar{i}\iota_1"] & A \arrow[d, "\overline{\{\iota_0,\iota_1\}}j_1"] \\ P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "1\cup j_0"'] & I_i^1 B \end{tikzcd}$$

- Conmutatividad: $(1 \cup j_0)\bar{i}\iota_1 = \overline{i \cup i}\iota_1 = \overline{i \cup i}\{\iota_0, \iota_1\}j_1 = \overline{\{\iota_0, \iota_1\}}(i \cup i)j_1 = \overline{\{\iota_0, \iota_1\}}j_1 i$

- Propiedad de push out: Si $g : A \to X$ y $\{H, f\} : P\{\iota_0, i\} \to X$ tales que $\{H, f\}\bar{i}\iota_1 = H\iota_1 = gi$, entonces el morfismo $\{f, g\} : A \cup A \to X$ verifica $\{f, g\}(i \cup i) = \{fi, gi\} = \{H\iota_0, H\iota_1\} = H\{\iota_0, \iota_1\}$. Por lo tanto existe $\{H, f, g\} : I_i^1 B \to X$. □

De esta forma, en particular, se puede también definir para i la cofibración i^1 sin necesidad de usar objeto inicial. En este caso no se puede asegurar que ι_0 o ι_1 sean cofibraciones, pues no existe $\{\iota_0, \iota_1\} : X \cup X \to X$.

Transformaciones producto $\chi_0, \chi_1 : II \to I$ similares a las descritas por Kamps y Porter en [39] se obtienen a través de la transformación de intercambio $t : II \to II$.

Por la P.E.H., el cuadrado de homotopía $\iota_0\rho\{\iota_0, \iota_1\} = \{\iota_0\rho, 1\}\iota_0$ tiene una extensión $F : II \to I$. Entonces Ft verifica $Ft\{\iota_0, \iota_1\} = F\{I\iota_0, I\iota_1\} = FI\{\iota_0, \iota_1\} = \{\iota_0\rho, 1\}$.

Por la misma propiedad, también el cuadrado de homotopía $\iota_0\rho^2\{\iota_0, \iota_1\}^1 = \{\iota_0\rho^2, Ft, \iota_0\rho^2, Ft\}\iota_0$ tiene una extensión $G : I^3 \to I$; $G\iota_1\{\iota_0, \iota_1\}^1 = \{\iota_0\rho, 1, \iota_0\rho, 1\}$ y por tanto $G\iota_1$ actúa como una transformación producto (χ_1). Si en el desarrollo anterior se intercambian entre sí los índices 0 y 1, aparece una nueva transformación producto χ_0 verificando $\chi_0\{\iota_0, \iota_1\}^1 = \{1, \iota_1\rho, 1, \iota_1\rho\}$.

Definición 1.1.2. Una I-categoría generalizada es una estructura del tipo $(\mathcal{C}, I, \iota_\epsilon, \rho, \chi_\epsilon, cof)$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría; $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor denominado cilindro; $\iota_\epsilon : 1_\mathcal{C} \to I$, $\epsilon \in \{0,1\}$, son transformaciones naturales denominadas inclusiones; $\rho : I \to 1_\mathcal{C}$ es una transformación natural denominada proyección; $\chi_\epsilon : II \to I$, $\epsilon \in \{0,1\}$, son transformaciones naturales denominadas productos y "cof" es una familia distinguida de morfismos denominados cofibraciones y representados por "$\rightarrowtail$"; verificando los axiomas **GI1**, **GI2**, **GI3**, **GI4** y **GI5**:

GI1 (Axioma de Cilindro) $\rho\iota_\epsilon = id$, $\epsilon \in \{0,1\}$

GI2 (Axioma de Push Out) Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y todo morfismo $f : B \to X$ existe el objeto push out $P\{i,f\}$ con $\bar{i}$ cofibración:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "\bar{i}"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & P\{i,f\} \end{tikzcd}$$

El funtor cilindro I transforma push outs cofibrados en push outs, esto es, $IP\{i,f\} = P\{Ii, If\}$.

GI3 (Axioma de Cofibración) Para todo objeto X de $\mathcal{C}$ y $\epsilon \in \{0,1\}$, $\iota_{\epsilon X} : X \rightarrowtail IX$ y $1_X : X \rightarrowtail X$ son cofibraciones. La composición de cofibraciones es cofibración. Toda cofibración verifica la propiedad de extensión de homotopía (P.E.H.):

Un morfismo $i : B \to A$ se dice que verifica la P.E.H. cuando todo cuadrado de homotopía

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota_\epsilon"] \arrow[d, "i"'] & IB \arrow[d, "H"] \\ A \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd} \qquad , \epsilon \in \{0,1\}$$

tiene una extensión $F\epsilon : IA \to X$ tal que $F\epsilon\iota_\epsilon = h$ y $F_\epsilon Ii = H$.

GI4 (Axioma de Cilindro Relativo.) Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el morfismo $i^1 = \{Ii, \iota_0, \iota_1\} : I_i^1 B = P\{\bar{i}\iota_1, i\} \to IA$ es una cofibración

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, tail, "i"] \arrow[d, "\bar{i}\iota_1"'] & & A \arrow[d, tail, "\overline{\bar{i}\iota_1}"] \arrow[ddr, bend left, "\iota_1"] & \\ P\{\iota_0, i\} \arrow[rr, "\widetilde{i}"] \arrow[drrr, bend right, "\{Ii,\iota_0\}"'] & & P\{\bar{i}\iota_1, i\} \arrow[dr, tail, "i^1"] & \\ & & & IA \end{tikzcd}$$

GI5 (Axioma de Producto)

$$\chi_\epsilon(I\iota_\nu) = \chi_\epsilon\iota_{\nu I} = \begin{cases} id \ , & \nu = \epsilon \\ \iota_\nu\rho \ , & \nu \neq \epsilon \end{cases}$$ y $\rho\chi_\epsilon = \rho^2$; con $\nu, \epsilon \in \{0,1\}$.

Observación 1.1.1. A partir de esta definición y a lo largo de todo el trabajo, $\mathcal{C}$ representará siempre una I-categoría generalizada cuando no se especifique otra cosa.

Observación 1.1.2. El dominio de un morfismo $\{H, f, g\}$ es el objeto $I_i^1 B$ si y solo si $H\iota_1 = gi$ y $H\iota_0 = fi$.

Observación 1.1.3. Iterando el axioma **GI4**, dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, se obtienen cofibraciones $i^n = (i^{n-1})^1 : I_i^n B = I_{i^{n-1}}^1 I_i^{n-1} B \to I^n A$, donde $i^0 = i$, $I_i^0 B = B$. Estas cofibraciones serán fundamentales a la hora de definir los grupos de homotopía generalizada.

Observación 1.1 .4. También en esta estructura, cualquier isomorfismo $f : X \to Y$ es cofibración, pues $f = \overline{1_X} : X \to P\{1_X, 1_X\} = Y$. El cilindro de una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ es también una cofibración, porque $Ii = \{Ii, \iota_0\}\bar{i}$ y por tanto composición de cofibraciones ya que $\{Ii, \iota_0\} = i^1\widetilde{i}$ es cofibración por lo mismo. Por tanto, el funtor cilindro transforma push outs cofibrados en push outs cofibrados.

Proposición 1.1 .2. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$*, el morfismo* $\{Ii, \iota_1\} : P\{\iota_1, i\} \to IA$ *es cofibración.*

Demostración. El siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[d, "\widehat{i}\iota_0"] & A \arrow[d, tail, "\widetilde{i}\overline{\iota_0}"] \\ P\{\iota_1, i\} \arrow[r, "\bar{i}\cup 1"'] & I_i^1 B \end{tikzcd}$$

donde $\widehat{i}$ es la cofibración inducida por i en el push out $P\{\iota_1, i\}$.

- Conmutatividad: $(\bar{i} \cup 1)\widehat{i}\iota_0 = \widetilde{i}\bar{i}\iota_0 = \widetilde{i}\overline{\iota_0} i$.

-Propiedad de push out: Dados $f : A \to X$, $\{g_0, g_1\} : P\{\iota_1, i\} \to X$ verificando $g_0\iota_0 = fi$ entonces $\{g_0, f\} : P\{\iota_0, i\} \to X$ verifica $\{g_0, f\}\bar{i}\iota_1 = g_0\iota_1 = g_1 i$. Por tanto existe $\{g_0, f, g_1\} = \{g_0, g_1, f\} : I_i^1 B = P\{\widehat{i}\iota_0, i\} \to X$. En particular $\{Ii, \iota_0, \iota_1\} = \{Ii, \iota_1, \iota_0\} : I_i^1 B = P\{\widehat{i}\iota_0, i\} \to IA$ y, en consecuencia, $\{Ii, \iota_1\} = i^1(\bar{i} \cup 1)$. Nótese que $\bar{i} \cup 1$ es cofibración por ser la inducida de i en el anterior push out. $\square$

La propiedad de extensión de homotopía tiene una caracterización semejante a la descrita por Kamps en [38]:

Teorema 1.1.1. *Dado un morfismo* $i : B \to A$*, si existen los push out* $P\{\iota_\epsilon, i\}$*,* $\epsilon \in \{0, 1\}$ *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. i *verifica la P.E.H.*

2. $\{Ii, \iota_\epsilon\} : P\{\iota_\epsilon, i\} \to IA$ *son secciones, para* $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Demostración. Si i verifica la P.E.H., los cuadrados de homotopía generados por $P\{\iota_\epsilon, i\}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, tienen extensiones $r_\epsilon : IA \to P\{i, \iota_\epsilon\}$ verificando $r_\epsilon\{Ii, \iota_\epsilon\} = \{r_\epsilon Ii, r_\epsilon\iota_\epsilon\} = \{\bar{i}, \overline{\iota_\epsilon}\} = 1_{P\{\iota_\epsilon, i\}}$.

Inversamente, todo cuadrado de homotopía $hi = H\iota_\epsilon$ tiene una extensión $\{H, h\}r_\epsilon : IA \to X$ donde r_ϵ es una retracción de $\{Ii, \iota_\epsilon\}$. □

Una herramienta que será muy útil a la hora de obtener cofibraciones es la siguiente propiedad.

Proposición 1.1.3. *Dado el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & X_0 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_0"] & X_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
Y_1 & Y_0 \arrow[l, "g_1"] \arrow[r, "g_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Si α_0, α_1 y α_2 son cofibraciones y $\{g_\epsilon, \alpha_\epsilon\} : P\{\alpha_0, f_\epsilon\} \to Y_\epsilon$ es cofibración para $\epsilon = 1$ o $\epsilon = 2$ entonces, si existe el morfismo $\alpha_1 \cup \alpha_2 : P\{f_1, f_2\} \to P\{g_1, g_2\}$, es también cofibración.

Demostración. En la siguiente construcción se tiene:

- $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ son las inducidas en $P\{f_1, f_2\}$.
- $\overline{g_1}, \overline{g_2}$ en $P\{g_1, g_2\}$.
- $\overline{\alpha_0}, \widetilde{f_1}$ en $P\{\alpha_0, f_1\}$.
- $\widetilde{\alpha_0}, \widetilde{f_2}$ en $P\{\alpha_0, f_2\}$.
- $\overline{\overline{\alpha_0}}, \overline{\overline{f_2}}$ en $P\{\overline{\alpha_0}, \overline{f_2}\}$.
- $\overline{\widetilde{\alpha_0}}, \overline{\overline{f_1}}$ en $P\{\widetilde{\alpha_0}, \overline{f_1}\}$.
- $\overline{\alpha_1}, \overline{\widetilde{f_2}}$ en $P\{\alpha_1, \overline{f_2}\}$.
- $\overline{\alpha_2}, \overline{\widetilde{f_1}}$ en $P\{\alpha_2, \overline{f_1}\}$.
- $\overline{\{g_1, \alpha_1\}}, \overline{\overline{\overline{f_2}}}$ en $P\{\{g_1, \alpha_1\}, \overline{\overline{f_2}}\}$.
- $\overline{\{g_2, \alpha_2\}}, \overline{\overline{\overline{f_1}}}$ en $P\{\{g_2, \alpha_2\}, \overline{\overline{f_1}}\}$.
- $\overline{\overline{\{g_1, \alpha_1\}}}, \overline{\overline{\{g_2, \alpha_2\}}}$ en $P\{\overline{\{g_1, \alpha_1\}}, \overline{\{g_2, \alpha_2\}}\}$.

Obsérvese que por la proposición 0.2.2

- $P\{\overline{\alpha_0}, \overline{f_2}\} = P\{\widetilde{\alpha_0}, \overline{f_1}\} = P\{\widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}\}$, $\overline{\overline{\alpha_0}} = \overline{\widetilde{\alpha_0}} = \overline{\alpha_0} \cup \widetilde{\alpha_0}$, $\overline{\overline{f_1}} = \overline{\widetilde{f_1}}$ y $\overline{\overline{f_2}} = \overline{\widetilde{f_2}}$.

- $\overline{\{g_1,\alpha_1\}} = \{\widetilde{\overline{f_2}}\{g_1,\alpha_1\},\overline{\alpha_1}\}$ y $\overline{\{g_2,\alpha_2\}} = \{\widetilde{\overline{f_1}}\{g_2,\alpha_2\},\overline{\alpha_2}\}$; pues $P\{\alpha_1,\overline{f_2}\} = P\{\{g_1,\alpha_1\},\overline{\overline{f_2}}\}$ y $P\{\alpha_2,\overline{f_1}\} = P\{\{g_2,\alpha_2\},\overline{\overline{f_1}}\}$

- $\overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}} = \{\overline{g_1},\alpha_1{\cup}\alpha_2\}$ y $\overline{\overline{\{g_2,\alpha_2\}}} = \{\overline{g_2},\alpha_1{\cup}\alpha_2\}$. Nótese que $\overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}}\overline{\alpha_2}\overline{f_1} = \overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}}\widetilde{\overline{f_1}}\alpha_2 = \overline{g_1}\alpha_2$ y $\overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}}\overline{\alpha_2}\overline{f_2} = \overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}\{g_2,\alpha_2\}}(\overline{\alpha_0} \cup \widetilde{\alpha_0})\overline{f_2} = \overline{\overline{\{g_2,\alpha_2\}}\{g_2,\alpha_2\}}(\overline{\alpha_0} \cup \widetilde{\alpha_0})\overline{f_2} = \overline{\overline{\{g_2,\alpha_2\}}}\overline{\alpha_1}\overline{f_2} = \overline{\overline{\{g_2,\alpha_2\}}}\widetilde{\overline{f_2}}\alpha_1 = \overline{g_2}\alpha_1$. De donde, por la unicidad de la propiedad de push out $\overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}}\overline{\alpha_2} = \alpha_1{\cup}\alpha_2$; simétricamente sucede $\overline{\overline{\{g_2,\alpha_2\}}}\overline{\alpha_1} = \alpha_1 \cup \alpha_2$.

Además $P\{\overline{\{g_1,\alpha_1\}},\overline{\{g_2,\alpha_2\}}\} = P\{g_1,g_2\}$.

Se concluye que $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \overline{\overline{\{g_1,\alpha_1\}}}\overline{\alpha_2} = \overline{\overline{\{g_2,\alpha_2\}}}\overline{\alpha_1}$ y por tanto cofibración por ser al menos una de ellas composición de cofibraciones. $\square$

1.2 Homotopía Generalizada

Los objetos de una I-categoría generalizada no son necesariamente cofibrantes, por tanto no se puede asegurar la existencia de la cofibración $\{\iota_0,\iota_1\}$. En consecuencia, la relación establecida para $f_0,f_1 : A \to X$ como "f_0 es homótopo a f_1" si y solo si existe $H : IA \to X$ tal que $H\iota_0 = f_0$ y $H\iota_1 = f_1$, no verifica necesariamente las propiedades simétrica y transitiva. Es necesario, entonces, establecer una relación de homotopía relativa a cofibraciones que coincidirá con la anterior para objetos cofibrantes, usando la cofibración inicial.

Definición 1.2 .1. Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, y morfismos $f_0,f_1 : A \to X$, f_0 se dirá homótopo a f_1 relativo a la cofibración i si existe una extensión F del morfismo $\{f_0 i\rho, f_0, f_1\}$ relativa a la cofibración i^1. F se dirá una homotopía relativa a i desde f_0 hasta f_1. Se usará la siguiente notación:

$$F : f_0 \simeq f_1 \ rel \ i$$

Obsérvese que por existir $\{f_0 i\rho, f_0, f_1\} : I_i^1 B \to X$ se tiene que $f_0 i = f_1 i$.

Proposición 1.2.1. *"Ser homótopo relativo a una cofibración" es una relación de equivalencia.*

Demostración. Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$

- Reflexiva: $f\rho : f \simeq f\ rel\ i$ para todo morfismo $f : A \to X$.

- Simétrica: Si $F : f_0 \simeq f_1\ rel\ i$ entonces $G\iota_1 : f_1 \simeq f_0\ rel\ i$ donde G es una extensión del cuadrado de homotopía $f_0\rho i^1 = \{f_0 i\rho^2, F, f_0\rho\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^1.

- Transitiva: Si $F : f_0 \simeq f_1\ rel\ i$ y $G : f_1 \simeq f_2\ rel\ i$ entonces $H\iota_1 : f_0 \simeq f_2\ rel\ i$ donde H es una extensión del cuadrado de homotopía $f_1\rho i^1 = \{f_0 i\rho^2, \widetilde{F}, G\}\iota_0$ asociado a i^1, con $\widetilde{F} : f_1 \simeq f_0\ rel\ i$ existente por la propiedad simétrica. □

De esta forma se establece una relación de equivalencia sobre el conjunto de morfismos $Hom(A, X)^{u\{i\}}$, donde $u : B \to X$ es el morfismo determinado por la composición con i de todos los morfismos homótopos entre si y relativos a i. El conjunto cociente generado por dicha relación será simbolizado por $[A, X]^{u\{i\}} = Hom(A, X)^{u\{i\}} / (\simeq\ rel\ i)$.

Cuando la cofibración es como las originadas en la observación 1.1.3, $i^n : I_i^n B \rightarrowtail I^n A$, y los morfismos $f_0, f_1 : I^n A \to X$ verifican $f_0 i^n = f_1 i^n = h\rho^n$ para algún morfismo $h : A \to X$, la relación de homotopía puede ser expresada de otras formas. A continuación se verán algunas de estas expresiones, que serán útiles en el desarrollo de esta teoría. Para ello, se dará primero un resultado general relacionando homotopías, morfismos con dominios cilindros relativos del tipo $I_i^{n+1}B$ y extensiones de dichos morfismos relativas a cofibraciones del tipo i^{n+1}.

Teorema 1.2.1. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y morfismos $h : I^{n+1}B \to X$ y $f_k, g_k : I^n A \to X$ verificando $f_k \simeq g_k\ rel\ i^n$ para todo k con $1 \leq k \leq 2(n+1)$ entonces el morfismo $\{h, f_{2n+2}, f_{2n+1}, \cdots f_2, f_1\} : I_i^{n+1}B \to X$ existe si y solo si el morfismo $\{h, g_{2n+2}, g_{2n+1}, \cdots g_2, g_1\} : I_i^{n+1}B \to X$ existe. En dicho caso, existe una extensión $F : I^{n+1}A \to X$ del primer morfismo relativa a la cofibración*

i^{n+1} *si y solo si existe una extensión* $G : I^{n+1}A \to X$ *del segundo morfismo relativa a la cofibración* i^{n+1}.

Demostración. Nótese que para todo k con $1 \leq k \leq 2n$ se verifica que $g_k i^n = f_k i^n$ por ser $f_k \simeq g_k \ rel \ i^n$. Además las condiciones exigidas para la existencia de los morfismos $\{h, f_{2n+2}, f_{2n+1}, \cdots f_2, f_1\}$, $\{h, g_{2n+2}, g_{2n+1}, \cdots g_2, g_1\}$, de $I_i^{n+1}B$ en X, dependen solo de la composición de morfismos $f_k i^n$ o $g_k i^n$ y de $hI^s\iota_\epsilon$, $0 \leq s \leq n$ y $\epsilon \in \{0,1\}$; de donde se concluye la afirmación sobre la existencia de dichos morfismos.

Sean $H_k : f_k \simeq g_k \ rel \ i^n$ y supuesta la existencia del morfismo F, sea G' una extensión del cuadrado de homotopía $Fi^{n+1} = \{h\rho, H_{2n+2}, H_{2n+1}, \cdots H_2, H_1\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}.
El morfismo $\{h\rho, H_{2n+2}, H_{2n+1}, \cdots H_2, H_1\} : II_i^{n+1}B \to X$ existe pues $H_k I^{s+1}\iota_\epsilon = f_k \rho I^{s+1}\iota_\epsilon = f_k I^s \iota_\epsilon \rho = f_{2(s+2)-\epsilon} I^{[\frac{k-1}{2}]}\iota_{k-2[\frac{k}{2}]}\rho = f_{2(s+2)-\epsilon}\rho I^{[\frac{k-1}{2}]+1}\iota_{k-2[\frac{k}{2}]}$ para $n-1 \geq s \geq [\frac{k-1}{2}]$, donde $[-]$ indica la función "parte entera", y $H_k I^{n+1} i = f_k \rho I^{n+1} i = f_k I^n i \rho = hI^{[\frac{k-1}{2}]}\iota_{k-2[\frac{k}{2}]}\rho = h\rho I^{[\frac{k-1}{2}]+1}\iota_{k-2[\frac{k}{2}]}$. El morfismo $G = G'\iota_1$ es una extensión del morfismo $\{h, g_{2n+2}, g_{2n+1}, \cdots g_2, g_1\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}.

Para el recíproco basta sustituir el morfismo H por G e intercambiar los subíndices de ι_ϵ entre si. □

Proposición 1.2.2. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *y un morfismo* $f : I^n A \to X$ *verificando* $fi^n = h\rho^n i^n$ *para algún morfismo* $h : A \to X$, *para todo* k *con* $1 \leq k \leq n$ *existen morfismos* $f^{1k} : I^{n+1}A \to X$ *verificando* $f^{1k}I^{n+1}i = hi\rho^{n+1}$ *y* $f^{1k}I^m\iota_\epsilon = h\rho^n$ *salvo para* $f^{1k}\iota_0 = f$ *si* k *es par o* $f^{1k}\iota_1 = f$ *si* k *es impar, y* $f^{1k}I^k\iota_1 = f$.

Demostración. La demostración sigue un proceso inductivo partiendo desde $k = 1$ y terminando en $k = n$.

Si $k = 1$, se define $f^{11} = f\chi_1$.
Evidentemente $f\chi_1 i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, h\rho^n, f, h\rho^n, f\}$.

Si $k = 2$, sea F una extensión del cuadrado de homotopía $fI\chi_1 i^{n+1} = \{h\rho^{n+2}I^4 i^{n-2}, h\rho^{n+1}, f\rho, h\rho^{n+1}, f\chi_0, f^{11}, h\rho^{n+1}\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}. Nótese que existe el morfismo $\{f\rho^{n+2}I^4 i^{n-2}, h\rho^{n+1}, f\rho, h\rho^{n+1}, f\chi_0, f^{11}, h\rho^{n+1}\} : II_i^{n+1}B \to X$, porque $f^{11}I\iota_1 = f = f\chi_0 I\iota_0$, y las demás condiciones se cumplen pues siempre dan $h\rho^n$ o $hi\rho^{n+1}$.

Se define $f^{12} = F\iota_1$.
Evidentemente $f^{12}i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^3 i^{n-2}, h\rho^n, f, h\rho^n, h\rho^n, f, h\rho^n\}$.

Suponiendo cierto hasta $k = m < n$, si $k = m+1$ sea F una extensión del cuadrado de homotopía $fI^m\chi_1 i^{n+1} =$
$\{h\rho^{n+2}I^{m+3}i^{n-1-m}, h\rho^{n+1}, f\rho, h\rho^{n+1}, f\chi_1, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f^{1m}\}\iota_1$ si m es par o bien $fI^m\chi_1 i^{n+1} =$
$\{h\rho^{n+2}I^{m+3}i^{n-1-m}, h\rho^{n+1}, f\rho, h\rho^{n+1}, f\chi_0, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f^{1m}, h\rho^{n+1}\}\ \iota_0$ si m es impar, asociado a la cofibración i^{n+1}. Nótese que existe el morfismo $\{h\rho^{n+2}I^{m+3}i^{n-1-m}, h\rho^{n+1}, f\rho, h\rho^{n+1}, f\chi_1, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f^{1m}\}$ o el morfismo $\{h\rho^{n+2}I^{m+3}i^{n-1-m}, h\rho^{n+1}, f\rho, h\rho^{n+1}, f\chi_0, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f^{1m}, h\rho^{n+1}\}$ definido desde $II_i^{n+1}B$ en X, pues $f^{1m}I^m\iota_1 = f = f\chi_1 I\iota_1$ o $f^{1m}I^m\iota_1 = f = f\chi_0 I\iota_0$, si m par o m impar respectivamente.

Se define $f^{1(m+1)} = F\iota_0$ o $f^{1(m+1)} = F\iota_1$ según sea m par o impar, respectivamente.
Evidentemente $f^{1(m+1)}i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^{m+2}i^{n-m-1}, h\rho^n, f, h\rho^n, \cdots h\rho^n, f\}$ o bien $f^{1(m+1)}i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^{m+2}i^{n-m-1}, h\rho^n, f, h\rho^n, \cdots h\rho^n, f, h\rho^n\}$, si m par o impar, respectivamente. $\square$

Proposición 1.2 .3. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $f : I^nA \to X$ verificando $fi^n = h\rho^n i^n$ para algún morfismo $h : A \to X$, para todo k con $1 \leq k \leq n$ existen morfismos $f^{0k} : I^{n+1}A \to X$ verificando $f^{0k}I^{n+1}i = hi\rho^{n+1}$ y $f^{0k}I^m\iota_\epsilon = h\rho^n$ salvo para $f^{0k}\iota_0 = f$ si k es impar o $f^{0k}\iota_1 = f$ si k es par, y $f^{0k}I^k\iota_0 = f$.*

Demostración. La demostración es análoga a la anterior partiendo para $k = 1$ de $f^{01} = f\chi_0$. □

Proposición 1.2.4. *Dada una cofibración $i^n : I^n_i B \rightarrowtail I^n A$ y morfismos $f_0, f_1 : I^n A \to X$ verificando $f_0 i^n = f_1 i^n = h\rho^n i^n$ para algún morfismo $h : A \to X$, f_0 es homótopo a f_1 relativo a la cofibración i^n si y solo si existe para algún k con $1 \le k \le n$ un morfismo H^{1k}_{01} verificando $H^{1k}_{01} I^{n+1} i = hi\rho^{n+1}$ y $H^{1k}_{01} I^m \iota_\epsilon = h\rho^n$ salvo para $H^{1k}_{01}\iota_0 = f_1$ si k es par o $H^{1k}_{01}\iota_1 = f_1$ si k es impar, y $H^{1k}_{01} I^k \iota_1 = f_0$.*

Demostración. Si f_0 es homótopo a f_1 relativo a la cofibración i^n entonces las extensiones f^{1k}_0 dadas por la proposición 1.2.2 inducen por el teorema 1.2.1 las extensiones H^{1k}_{01} verificando las condiciones. Nótese que dichas extensiones existen para todo k con $1 \le k \le n$.

Recíprocamente, supuesta la existencia, para algún k con $2 \le k \le n$, de una extensión H^{1k}_{01} verificando las condiciones del enunciado, sea G una extensión del cuadrado de homotopía $f_0 I^{k-1}\chi_1 i^{n+1} =$
$\{h\rho^{n+2} I^{k+1} i^{n-k}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\chi_0, h\rho^{n+1}, f_0\rho, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, H^{1k}_{01}, h\rho^{n+1}\}\iota_0$ si k es impar o $f_0 I^{k-1}\chi_1 i^{n+1} =$
$\{h\rho^{n+2} I^{k+1} i^{n-k}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\chi_1, h\rho^{n+1}, f_0\rho, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, H^{1k}_{01}\}\iota_1$ si k es par asociado a la cofibración i^{n+1}.

El morfismo
$\{h\rho^{n+2} I^{k+1} i^{n-k}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\chi_0, h\rho^{n+1}, f_0\rho, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, H^{1k}_{01}, h\rho^{n+1}\}$ o bien $\{h\rho^{n+2} I^{k+1} i^{n-k}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\chi_1, h\rho^{n+1}, f_0\rho, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, H^{1k}_{01}\}$ definido desde $II^{n+1}_i B$ en X, existe porque $H^{1k}_{01} I^k \iota_1 = f_0 = f_0\chi_0 I\iota_0$ o $H^{1k}_{01} I^k\iota_1 = f_0 = f_0\chi_1 I\iota_1$ respectivamente si k es impar o par.

El morfismo $G\iota_1$ es una extensión del tipo $H^{1(k-1)}_{01}$.

Iterando el proceso se llega a una extensión del tipo H^{11}_{01}. Sea F una extensión del cuadrado de homotopía $f_0\chi_0 i^{n+1} = \{h\rho^{n+2} I^2 i^{n-1}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\chi_0, H^{11}_{01}, f_0\rho\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}. Nótese que el morfismo

$\{h\rho^{n+2}I^2i^{n-1}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\chi_0, H_{01}^{11}, f_0\rho\} : II_i^{n+1}B \to X$ existe pues $H_{01}^{11}I\iota_1 = f_0 = f_0\chi_0 I\iota_0$. El morfismo $F\iota_1 : f_1 \simeq f_0\ rel\ i^n$, de donde por la propiedad simétrica se concluye que $f_0 \simeq f_1\ rel\ i^n$. □

Proposición 1.2.5. *Dada una cofibración $i^n : I_i^nB \rightarrowtail I^nA$ y morfismos $f_0, f_1 : I^nA \to X$ verificando $f_0i^n = f_1i^n = h\rho^ni^n$ para algún morfismo $h : A \to X$, f_0 es homótopo a f_1 relativo a la cofibración i^n si y solo si existe para algún k con $1 \leq k \leq n$ un morfismo H_{01}^{0k} verificando $H_{01}^{0k}I^{n+1}i = hi\rho^{n+1}$ y $H_{01}^{0k}I^m\iota_\epsilon = h\rho^n$ salvo para $H_{01}^{0k}\iota_0 = f_1$ si k es impar o $H_{01}^{0k}\iota_1 = f_1$ si k es par, y $H_{01}^{0k}I^k\iota_0 = f_0$.*

Demostración. Similar a la de la proposición 1.2.4 anterior usando el teorema 1.2.1 y los morfismos f_0^{0k} generados por la proposición 1.2.3. □

Proposición 1.2.6. *Dada una cofibración $i^n : I_i^nB \rightarrowtail I^nA$ y morfismos $f_0, f_1 : I^nA \to X$ verificando $f_0i^n = f_1i^n = h\rho^ni^n$ para algún morfismo $h : A \to X$, f_0 es homótopo a f_1 relativo a la cofibración i^n si y solo si existe una extensión H del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^{s+1}i^{n-s}, f_0, f_1, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1} para algún s con $0 \leq s \leq n$.*

Demostración. El morfismo $f_0I^s\rho$ es una extensión del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^{s+1}i^{n-s}, f_0, f_0, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}. Como $f_0 \simeq f_1\ rel\ i^n$, por el teorema 1.2.1 se concluye que existe una extensión H del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^{s+1}i^{n-s}, f_0, f_1, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1} para todo s con $0 \leq s \leq n$.

Recíprocamente, supuesta la existencia de una extensión H_s verificando la hipótesis para algún s con $1 \leq s \leq n$, se obtendrá una extensión H_{s-1} verificando la hipótesis para $s-1$. Reiterando el proceso se obtendrá una extensión H_0 verificando la hipótesis que no es otra cosa sino una homotopía desde f_0 hasta f_1 relativa a la cofibración i^n.

Sea H'_{s-1} una extensión del cuadrado de homotopía $h\rho^{n+1}i^{n+1} = \{h\rho^{n+2}I^{s+2}i^{n-s-2}, h\rho^{n+1}, H_s, f_0^s, f_1^s, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\}\iota_1$ o $h\rho^{n+1}i^{n+1} =$

$\{h\rho^{n+2}I^{s+2}i^{n-s-2}, h\rho^{n+1}, H_s, f_0^s, f_1^s, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\}\iota_0$ si s es par o impar respectivamente, asociado a la cofibración i^{n+1}; donde $f_0^s, f_1^s : I^{n+1}A \to X$ son definidas como en la proposición 1.2.2 anterior. Nótese que el morfismo $\{h\rho^{n+2}I^{s+2}i^{n-s-2}, h\rho^{n+1}, H_s, f_0^s, f_1^s, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\} : II_i^{n+1}B \to X$ existe pues $f_0^s I^s \iota_1 = f_0 = H_s I^s \iota_0$ y $f_1^s I^s \iota_1 = f_1 = H_s I^s \iota_1$ y las demás condiciones dan $h\rho^n$ o $hi\rho^{n+1}$. Sea $H_{s-1} = H'_{s-1}\iota_0$ o $H_{s-1} = H'_{s-1}\iota_1$ según s sea par o impar, respectivamente. Claramente H_{s-1} es una extensión del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^s i^{n-s-1}, f_0, f_1, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}. □

Para estudiar la compatibilidad de la homotopía relativa a cofibraciones con la composición de morfismos es necesario describir cuál es la actuación del cilindro relativo sobre cuadrados relacionando cofibraciones. En este sentido no solo se darán las propiedades que permitan demostrar dicha compatibilidad, sino también otras que serán de utilidad posteriormente.

Teorema 1.2.2. *Dado el siguiente cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j"'] & B \arrow[d, tail, "i"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

relacionando las cofibraciones i y j,

a) *El cuadrado*

$$\begin{tikzcd} I_j^1 D \arrow[r, "Ig\cup f\cup f"] \arrow[d, tail, "j^1"'] & I_i^1 B \arrow[d, tail, "i^1"] \\ IC \arrow[r, "If"'] & IA \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

b) *Si el primer cuadrado es un push out, entonces también lo es el segundo.*

Demostración.

a) Conmutatividad: $i^1(Ig\cup f\cup f) = \{Ii, \iota_0, \iota_1\}(Ig\cup f\cup f) = \{IiIg, \iota_0 f, \iota_1 f\} = \{IfIj, If\iota_0, If\iota_1\} = Ifj^1$.

b) Dados los morfismos $r : IC \to X$ y $\{s_0, s_1, s_2\} : I^1_i B \to X$ verificando que $rj^1 = \{s_0, s_1, s_2\}(Ig \cup f \cup f)$ se tiene que $rIj = s_0 Ig$ y como I transforma push outs cofibrados en push outs cofibrados, entonces existe $\{r, s_0\} : IA \to X$ verificando las igualdades $\{r, s_0\}i^1 = \{r, s_0\}\{Ii, \iota_0, \iota_1\} = \{s_0, \{r\iota_0, s_0\iota_0\}, \{r\iota_1, s_0\iota_1\}\} = \{s_0, \{s_1 f, s_1 i\}, \{s_2 f, s_2 i\}\} = \{s_0, s_1, s_2\}$ y $\{r, s_0\}If = r$.
Por tanto $\{r, s_0\} = \{r, s_0, s_1, s_2\} : P\{Ij, Ig\} = P\{j^1, Ig \cup f \cup f\} \to X$. □

Corolario 1.2.1. *Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dado el cuadrado conmutativo $ig = fj$ del teorema anterior,*

a) *Los cuadrados*

$$\begin{tikzcd}
I^n_j D \arrow[r, "I^n g \cup I^{n-1} f \cup \overset{(2n}{\cdots} \cup I^{n-1} f"] \arrow[d, tail, "j^n"'] & I^n_i B \arrow[d, tail, "i^n"] \\
IC \arrow[r, "I^n f"'] & IA
\end{tikzcd}$$

son conmutativos.

b) *Si el cuadrado $ig = fj$ es un push out, también lo son los anteriores.*

Demostración. Basta aplicar inductivamente el teorema 1.2.2 observando que el cilindro transforma push outs cofibrados en push outs cofibrados. □

Se usará la notación $I^n_{(i,j)} g$ para el morfismo $I^n g \cup I^{n-1} f \cup \overset{(2n}{\cdots} \cup I^{n-1} f$.

Proposición 1.2.7. *Dado un cuadrado conmutativo $gi = fj$ relacionando cofibraciones i y j, si los morfismos f y g son cofibraciones entonces también lo es $I^1_{(i,j)} g$.*

Demostración. Por la proposición 1.1.3, el morfismo $Ig \cup f : P\{\iota_0, j\} \to P\{\iota_0, i\}$ es cofibración pues lo son $\{Ig, \iota_0\} : P\{g, \iota_0\} \to IB$ y Ig por la observación 1.1.4, además de g y f que lo son por hipótesis.

El siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, tail, "\overline{j}\iota_1"] \arrow[d, tail, "g"'] & P\{\iota_0, j\} \arrow[d, tail, "\overline{g}\cup 1"] \\
B \arrow[r, tail, "\widetilde{j}\overline{\iota_1}"'] & P\{\overline{g}\iota_0, j\}
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{\iota_1}$ y $\overline{g}$ son los morfismos inducidos respectivamente por ι_1 y g en el push out $P\{\iota_1, g\}$ y $\widetilde{j}$ es la inducida por j en el push out $P\{\overline{g}\iota_0, j\}$.

Efectivamente $(\overline{g}\cup 1)\overline{j}\iota_1 = \widetilde{j}\overline{g}\iota_1 = \widetilde{j}\overline{\iota_1}g$ y por tanto, el cuadrado es conmutativo.

Sean $\{H, h\} : P\{\iota_0, j\} \to X$ y $k : B \to X$ morfismos tales que $H\iota_1 = kg$. Entonces existe el morfismo $\{H, k\} : P\{\iota_1, g\} \to X$ verificando que $\{H, k\}\overline{g}\iota_0 = H\iota_0 = hj$. Se concluye que $\{k, H, h\} = \{H, k, h\} : P\{g, \overline{j}\iota_1\} = P\{\overline{g}\iota_0, j\} \to X$.

En particular se tiene que $\{\overline{i}\iota_1, Ig \cup f\} = \{Ig, \iota_1\} \cup f : P\{g, \overline{j}\iota_1\} = P\{\overline{g}\iota_0, j\} \to P\{\iota_0, i\}$, que es cofibración por la proposición 1.1.3 ya que g y f son cofibraciones por hipótesis y también $\{Ig, \iota_1\}$ y $\{Ig, \iota_1, \iota_0\}$ lo son por la proposición 1.1.2. Se concluye de nuevo por la proposición 1.1.3 que $I^1_{(i,j)}g$ es cofibración pues lo son $Ig \cup f$, g, f y $\{\overline{i}\iota_1, Ig \cup f\}$. □

Corolario 1.2.2. *Dado un cuadrado conmutativo $gi = fj$ relacionando cofibraciones i y j, si los morfismos f y g son cofibraciones entonces también lo es $I^n_{(i,j)}g$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. Basta observar que $I^n_{(i,j)}g = I^1_{(i^{n-1}, j^{n-1})} I^{n-1}_{(i,j)} g$. □

Para hacer uso de la P.E.H. es de gran ayuda saber el comportamiento de las cofibraciones del tipo $\{Ii, \iota_\epsilon\}$ respecto a cuadrados conmutativos o push out.

Proposición 1.2.8. *Dado el cuadrado conmutativo $ig = fj$ relacionando las cofibraciones i y j, entonces*

a) *El cuadrado*

$$\begin{tikzcd} P\{\iota_\epsilon, j\} \arrow[r, "Ig\cup f"] \arrow[d, tail, "\{Ij,\iota_\epsilon\}"'] & P\{\iota_\epsilon, i\} \arrow[d, tail, "\{Ii,\iota_\epsilon\}"] \\ IC \arrow[r, "If"'] & IA \end{tikzcd}$$

es conmutativo, con $\epsilon \in \{0, 1\}$.

b) *Si el primer cuadrado es un push out, entonces también lo es el segundo.*

Demostración. Similar a la del teorema 1.2.2 usando la proposición 1.1.2 para el caso $\epsilon = 1$. □

Teniendo en cuenta que la homotopía definida es relativa a cofibraciones, los siguientes resultado dan la compatibilidad de la homotopía con la composición de morfismos.

Proposición 1.2 .9. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *y morfismos* $f_0, f_1 : A \to X$,

1) *Si* $f_0 \simeq f_1\ rel\ i$ *entonces* $gf_0 \simeq gf_1\ rel\ i$ *para todo* $g : X \to Y$.

2) *Para todo cuadrado conmutativo* $ig = fj$ *relacionando las cofibraciones* i *y* j, *si* $f_0 \simeq f_1\ rel\ i$ *entonces* $f_0 f \simeq f_1 f\ rel\ j$.

3) *Si el cuadrado* $ig = fj$ *es un push out,* $f_0 \simeq f_1\ rel\ i \Leftrightarrow f_0 f \simeq f_1 f\ rel\ j$.

Demostración.

1) Si $F : f_0 \simeq f_1\ rel\ i$ entonces $gF : gf_0 \simeq gf_1\ rel\ i$.

2) Si $F : f_0 \simeq f_1\ rel\ i$ entonces por el primer apartado del teorema 1.2.2 $FIf : f_0 f \simeq f_1 f\ rel\ j$.

3) Si $F : f_0 f \simeq f_1 f\ rel\ j$ entonces $Fj^1 = \{f_0 i\rho, f_0, f_1\}(Ig \cup f \cup f)$ y por el segundo apartado del teorema 1.2.2 $\{F, f_0 i\rho, f_0, f_1\} : f_0 \simeq f_1\ rel\ i$. □

De la proposición anterior se deduce que todo morfismo $g : X \to Y$ induce una aplicación $g_* : [A, X]^{u\{i\}} \to [A, Y]^{gu\{i\}}$ y que todo cuadrado conmutativo $ig = fj$ induce también una aplicación $f^* : [A, X]^{u\{i\}} \to [C, X]^{ug\{j\}}$. Si el cuadrado mencionado es un push out, entonces f^* es una biyección.

Corolario 1.2.3.

1. *Si* $g : X \to Y$ *es un isomorfismo entonces* $g_* : [A, X]^{u\{i\}} \to [A, Y]^{gu\{i\}}$ *también lo es.*

2. *Si* $g : D \to B$ *y* $f : C \to A$ *son isomorfismos entonces también* $f^* : [A, X]^{u\{i\}} \to [C, X]^{ug\{j\}}$ *es isomorfismo.*

Se ha visto que si los objetos X e Y están relacionados por un morfismo g o que si las cofibraciones i y j están relacionadas por morfismos g y f, entonces se induce una relación entre los correspondientes corchetes de homotopía. También, si dos morfismos $u, v : B \to X$ están relacionados en el sentido de existir $H : IB \to X$ con $H\iota_0 = u$ y $H\iota_1 = v$, se obtiene una relación entre los respectivos corchetes.

Teorema 1.2.3. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$*, todo morfismo* $H : IB \to X$ *induce una biyección* $H_1 : [A, X]^{H\iota_0\{i\}} \to [A, X]^{H\iota_1\{i\}}$*.*

Demostración. Se define $H_1 : [A, X]^{H\iota_0\{i\}} \to [A, X]^{H\iota_1\{i\}}$ por $H_1([f]) = [G\iota_1]$ donde G es cualquier extensión del cuadrado de homotopía $fi = H\iota_0$ asociado a la cofibración i.

- H_1 bien definida:

Si $F : f_0 \simeq f_1 \ rel \ i$ y $f_0 i = f_1 i = H\iota_0$ entonces $E\iota_1 : G_0\iota_1 \simeq G_1\iota_1 \ rel \ i$ donde G_0 y G_1 son extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía $f_0 i = H\iota_0$ y $f_1 i = H\iota_0$ asociados a la cofibración i, y E es una extensión del cuadrado de homotopía $Fi^1 = \{HI\rho, G_0, G_1\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^1. Nótese que $G_1 Ii = H = HI\rho I\iota_1$ y que $G_0 Ii = H = HI\rho I\iota_0$, y por tanto existe el morfismo $\{HI\rho, G_0, G_1\} : II_i^1 B \to X$.

- H_1 tiene inversa:

Se define $H_0 : [A, X]^{H\iota_1\{i\}} \to [A, X]^{H\iota_0\{i\}}$ por $H_0([f]) = [G\iota_0]$ donde G es cualquier extensión del cuadrado de homotopía $fi = H\iota_1$ asociado a la cofibración i. Un desarrollo similar al anterior demuestra que H_0 está bien definida.

$H_0H_1([f]) = H_0([G\iota_1]) = [f]$ pues G es también una extensión del cuadrado de homotopía $G\iota_1 i = H\iota_1$ asociado a la cofibración i, y $G\iota_0 = f$. Nótese que por estar H_0 y H_1 bien definidas, su definición no depende de de la extensión elegida.

Análogamente se prueba que $H_1H_0 = 1_{[A,X]^{H\iota_1\{i\}}}$. $\square$

Este resultado, como ya se ha indicado, es fundamental a la ahora de estudiar la conexidad por caminos de un objeto. Será también muy útil describiendo la acción de los grupos de homotopía generalizada.

1.3 Grupoides de Homotopía Generalizada

Para obtener los grupos de homotopía generalizada se crearán en primer lugar los grupoides y se estudiarán sus principales propiedades.

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un objeto X de una I-categoría generalizada, se van a considerar como objetos punto a los elementos de $Hom(A,X)$ y como morfismos camino desde un objeto punto f_0 a un objeto punto f_1 a las homotopías relativas a i entre f_0 y f_1, es decir, a los elementos del conjunto $Hom(IA,X)^{\{f_0 i\rho, f_0, f_1\}\{i^1\}}$. La notación $H_i(X)$ representará la colección de puntos anteriormente definida junto con las clases de homotopía relativas a i^1 de los caminos, esto es, los morfismos desde el punto f_0 a f_1 es el conjunto $[IA,X]^{\{f_0 i\rho, f_0, f_1\}\{i^1\}}$, que será denotado por $H_i(f_0,f_1)$.

Para definir la composición de caminos se hará uso del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
I_i^1 B \arrow[r, "\{i\rho,1\}\cup 1"] \arrow[d, "i^1"'] & P\{i,i\} \arrow[d, "\{j_0,j_1\}"] \arrow[dr, "j_1\cup j_1"] & \\
IA \arrow[r, "\omega"'] & I^i \arrow[r, "\nu"'] & P\{j_0,j_0\}
\end{tikzcd} \tag{1.3.1}$$

donde $I^i = P\{i^1, \{i\rho,1\} \cup 1\}$, $\{j_0,j_1\} = \overline{i^1} = \{\widetilde{\overline{i^1}i}, \overline{i^1}\overline{i}\}$, $\omega = \overline{\{i\rho,1\} \cup 1}$ y $\nu = \nu'\iota_1$ con ν' una extensión del cuadrado de homotopía $\overline{j_0}\{j_0,j_1\} = (\omega \cup j_1\rho)\iota_0$

asociado a la cofibración $\{j_0, j_1\}$. Obsérvese que $\{j_0, j_1\}$ es cofibración por ser la inducida de la cofibración i^1. También lo son $j_0 = \overline{i^1}\widetilde{i}$ y $j_1 = \overline{i^1}\overline{i}$ por ser composición de cofibraciones. Dada $F : IA \to X$ tal que $F : f_0 \simeq f_1 \; rel \; i$, el morfismo $\{F, f_0, f_1\} : I^i \to X$ será denotado por F'. Obsérvese que si $F = fH$ para morfismos f y H entonces $F' = fH'$ y que $\omega' = 1$.

Para probar que $H_i(X)$ es un grupoide, se verá en primer lugar que el morfismo $\nu^* : [P\{j_0, j_0\}, X]^{\{f_0,f_1\}\{j_1 \cup j_1\}} \to [I^i, X]^{\{f_0,f_1\}\{\{j_0,j_1\}\}}$ es una biyección para todo par de puntos f_0, f_1. Posteriormente, haciendo uso de esta biyección se verificará el cumplimiento de los axiomas de grupoide.

Lema 1.3.1. *Si* $F : F_0 \simeq F_1 \; rel \; j_1$ *y* $G : G_0 \simeq G_1 \; rel \; j_1$ *tales que* $FIj_0 = GIj_0$ *entonces* $\{F, G\} : \{F_0, G_0\} \simeq \{F_1, G_1\} \; rel \; j_1 \cup j_1$.

Demostración. Por la proposición 1.1.3 $j_1 \cup j_1$ es cofibración pues i, j_1 y $\{j_0, j_1\} : P\{i, i\} \to I^i$ lo son.

Obsérvese que $F_\epsilon j_0 = F\iota_\epsilon j_0 = FIj_0\iota_\epsilon = GIj_0\iota_\epsilon = G\iota_\epsilon j_0 = G_\epsilon \iota_0$ y que por tanto existen $\{F_\epsilon, G_\epsilon\}$ con dominio $P\{j_0, j_0\}$. □

Corolario 1.3.1. *Si* $F : F_0 \simeq F_1 \; rel \; \{j_0, j_1\}$, $G : G_0 \simeq G_1 \; rel \; \{j_0, j_1\}$ *y* $F_0 j_0 \rho = G_0 j_0 \rho$ *entonces* $\{F, G\} : \{F_0, G_0\} \simeq \{F_1, G_1\} \; rel \; j_1 \cup j_1$.

Demostración. Consecuencia del lema 1.3.1 teniendo en cuenta que $FIj_0 = F_0 j_0 \rho$, $GIj_0 = G_0 j_0 \rho$ y que en particular $F : F_0 \simeq F_1 \; rel \; j_1$ y $G : G_0 \simeq G_1 \; rel \; j_1$. □

Corolario 1.3.2. *Todo par de morfismos* $\{F, G\}\nu'$, $\{F, H\}\nu' : II^i \to X$ *verifica* $\{\{F, G\}\nu', \{F, H\}\nu'\} : \{G, H\} \simeq \{\{F, G\}\nu, \{F, H\}\nu\} \; rel \; j_1 \cup j_1$

Demostración. Consecuencia del lema 1.3.1, pues $\{F, G\}\nu' Ij_0 = F\omega = \{F, H\}\nu' Ij_0$, y además se tiene que $\{F, G\}\nu' : G \simeq \{F, G\}\nu \; rel \; j_1$ y $\{F, H\}\nu' : H \simeq \{F, H\}\nu \; rel \; j_1$. □

Lema 1.3.2. *Se verifica* $\{H, H\} \simeq \{Hj_1\rho', Hj_1\rho'\} \; rel \; j_1 \cup j_1$, *para todo morfismo* $H : I^i \to X$

Demostración. Sea β' una extensión del cuadrado de homotopía $j_0\rho^2 i^2 = \{j_0 i\rho^3, j_0\rho^2, \omega\chi_1, j_0\rho^2, \omega\chi_1\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^2.

Obsérvese que $j_0 i\rho^3 I^2\iota_0 = j_0 i\rho^2 = j_0\rho^2 I^2 i$ y que $j_0 i\rho^3 I^2\iota_1 = j_0 i\rho^2 = j_0 i\rho\chi_1 = \omega I i\chi_1 = \omega\chi_1 I^2 i$. Por tanto existe $\{j_0 i\rho^3, j_0\rho^2, \omega\chi_1\} : I^2 I^1_i B \to I^i$.

Por otro lado $\{j_0 i\rho^3, j_0\rho^2, \omega\chi_1\}I\iota_0 = \{j_0 i\rho^2, j_0\rho, j_0\rho\} = j_0\rho^2 I i^1$ y $\{j_0 i\rho^3, j_0\rho^2, \omega\chi_1\}I\iota_1 = \{j_0 i\rho^2, j_0\rho, \omega\} = \{j_0 i\rho\chi_1, \omega\iota_0\rho, \omega\chi_1 I\iota_1\} = \{\omega I i\chi_1, \omega\chi_1 I\iota_0, \omega\chi_1 I\iota_1\} = \omega\chi_1 I i^1$.
Por tanto existe $\{j_0 i\rho^3, j_0\rho^2, \omega\chi_1, j_0\rho^2, \omega\chi_1\} : II^2_i B \to I^i$.
Se define $\beta = \beta'\iota_1$. Sea ahora γ' una extensión del cuadrado de homotopía $\omega I\rho' j^1_1 = \{\omega\chi_0, \{\beta, j_0\rho, \omega\}, (j_1\rho)'\rho\}\iota_0$ asociado a la cofibración j^1_1.

Obsérvese que el morfismo $\{\beta, j_0\rho, \omega\} : II^i \to I^i$ existe pues $\beta I i^1 = \{j_0 i\rho^2, j_0\rho, \omega\} = \{j_0\rho, \omega\}I(\{i\rho, 1\} \cup 1)$ y $\{j_0\rho, \omega\} : IP\{i, i\} = P\{Ii, Ii\} \to I^i$ existe pues $j_0\rho I i = j_0 i\rho = \omega I i$.

También el morfismo $\{\omega\chi_0, \{\beta, j_0\rho, \omega\}, (j_1\rho)'\rho\} : II^1_{j_1} A \to I^i$ existe pues $\omega\chi_0 I\iota_0 = \omega = \{\beta, j_0\rho, \omega\}Ij_1$ y $\omega\chi_0 I\iota_1 = \omega\iota_1\rho = j_1\rho = (j_1\rho)' j_1\rho = (j_1\rho)'\rho I j_1$.

Se define $\gamma = \gamma'\iota_1$, entonces por el lema 1.3.1 se tiene que $\{H\gamma, H\gamma\} : \{H, H\} \simeq \{Hj_1\rho', Hj_1\rho'\}\ rel\ j_1 \cup j_1$ pues $H\gamma\iota_1 = Hj_1\rho'\rho\iota_1 = Hj_1\rho'$, $H\gamma\iota_0 = H\{\beta, j_0\rho, \omega\}\iota_1 = H\{\omega\chi_1\iota_1, j_0, \omega\iota_1\} = H\{\omega, j_0, j_1\} = H$ y $H\gamma I j_1 = H\omega\chi_0\iota_1 = H\omega\iota_1\rho = Hj_1\rho$. □

Corolario 1.3 .3. *Para todo morfismo $H : I^i \to X$ se verifica que $\{H, H\}\nu \simeq \{Hj_1\rho', Hj_1\rho'\}\nu\ rel\ \{j_0, j_1\}$ y $\{H, H\}\nu\omega \simeq \{Hj_1\rho', Hj_1\rho'\}\nu\omega\ rel\ i^1$.*

Demostración. Consecuencia inmediata del lema 1.3.2 y de la proposición 1.2.9. □

Teorema 1.3.1. *Para todo morfismo $\{f_0, f_1\} : P\{i, i\} \to X$, el morfismo $\nu^* : [P\{j_0, j_0\}, X]^{\{f_0,f_1\}\{j_1\cup j_1\}} \to [I^i, X]^{\{f_0,f_1\}\{\{j_0,j_1\}\}}$ es una biyección*

Demostración. El morfismo ν^* se define como en la proposición 1.2.9. Sea $\alpha : [I^i, X]^{\{f_0,f_1\}\{\{j_0,j_1\}\}} \to [P\{j_0, j_0\}, X]^{\{f_0,f_1\}\{j_1\cup j_1\}}$ con $\alpha([H]) = [\{(f_0\rho)', H\}]$

- α está bien definida: si $G : H_0 \simeq H_1\ rel\ \{j_0, j_1\}$ entonces $\{(f_0\rho)'\rho, G\} : \{(f_0\rho)', H_0\} \simeq \{(f_0\rho)', H_1\}\ rel\ j_1 \cup j_1$. Obsérvese que el morfismo $\{(f_0\rho)'\rho, G\} : IP\{j_0, j_0\} \to X$ existe pues $GIj_0 = H_0\rho Ij_0 = H_0 j_0\rho = f_0\rho = f_0\rho' j_0\rho = f_0\rho'\rho Ij_0$.

- $\nu^*\alpha = 1$: Se tiene $\{(f_0\rho)', H\}\nu' : H \simeq \{(f_0\rho)', H\}\nu\ rel\ \{j_0, j_1\}$ donde ν' es la extensión usada para definir $\nu = \nu'\iota_1$. Nótese que $\{(f_0\rho)', H\}\nu' I\{j_0, j_1\} = \{(f_0\rho)', H\}(\omega \cup j_1\rho) = \{(f_0\rho)'\omega, Hj_1\rho\} = \{f_0\rho, f_1\rho\} = H\{j_0, j_1\}\rho$.

- $\alpha\nu^* = 1$: Para todo par de morfismo $H, G : I^i \to X$ verificando $Hj_0 = Gj_0$, $Hj_1 = f_0$ y $Gj_1 = f_1$; por el corolario 1.3.3 y por ser $\nu^*\alpha = 1$ se tiene que $\{H, H\}\nu \simeq \{f_0\rho', f_0\rho'\}\nu \simeq f_0\rho'\ rel\ \{j_0, j_1\}$.

Sea $F : \{H, H\}\nu \simeq f_0\rho'\ rel\ \{j_0, j_1\}$. Entonces por el lema 1.3.1, $\{F, \{H, G\}\nu\rho\} : \{\{H, H\}\nu, \{H, G\}\nu\} \simeq \{f_0\rho', \{H, G\}\nu\}\ rel\ j_1 \cup j_1$ pues $FIj_0 = \{H, H\}\nu j_0\rho = Hj_1\rho = \{H, G\}\nu j_0\rho = \{H, G\}\nu\rho Ij_0$,
$F : \{H, H\}\nu \simeq f_0\rho'\ rel\ j_1$ y $\{H, G\}\nu\rho : \{H, G\}\nu \simeq \{H, G\}\nu\ rel\ j_1$. Por el corolario 1.3.2, $\{\{H, H\}\nu', \{H, G\}\nu'\} : IP\{j_0, j_0\} = P\{Ij_0, Ij_0\} \to X$ hace $\{H, G\} \simeq \{\{H, H\}\nu, \{H, G\}\nu\}\ rel\ j_1 \cup j_1$.

Se concluye, por ser la relación de homotopía relativa a una cofibración de equivalencia, que $\{f_0\rho', \{H, G\}\nu\} \simeq \{H, G\}\ rel\ j_1 \cup j_1$ y por tanto, $\alpha\nu^*([\{H, G\}]) = [\{H, G\}]$. □

Corolario 1.3.4. $(\nu\omega)^* = \omega^*\nu^* : [P\{j_0, j_0\}, X]^{\{f_0, f_1\}\{j_1 \cup j_1\}} \to [IA, X]^{\{f_0 i\rho, f_0, f_1\}\{i^1\}}$ *es una biyección para todo morfismo* $\{f_0, f_1\} : P\{i, i\} \to X$.

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema 1.3.1 y de la proposición 1.2.9. □

Dado un camino $F : IA \to X$ desde f_0 hasta f_1, se define el camino inverso $\bar{F} : IA \to X$ por $\bar{F} = \{F', f_0\rho'\}\nu\omega$. Obsérvese que $\overline{F}i^1 = \{F', f_0\rho'\}\nu\omega i^1 = \{F', f_0\rho'\}(j_1 \cup j_1)(\{i\rho, 1\} \cup 1) = \{f_1, f_0\}(\{i\rho, 1\} \cup 1) = \{f_1 i\rho, f_1, f_0\}$. Dado un camino $G : IA \to X$ desde f_1 hasta f_2, se define la composición de caminos $F * G : IA \to X$ por $F * G = \{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu\omega$. Obsérvese que

$\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu\omega i^1 = \{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}(j_1 \cup j_1)(\{i\rho, 1\} \cup 1) =$
$\{f_0\rho' j_1, f_2\}(\{i\rho, 1\} \cup 1) = \{f_0, f_2\}(\{i\rho, 1\} \cup 1) = \{f_0 i\rho, f_0, f_2\}.$

Proposición 1.3.1. *(Inverso homotópico bien definido.) La correspondencia* $(-)^{-1} : H_i(f_0, f_1) \to H_i(f_1, f_0)$ *definida por* $(-)^{-1}([F]) = [F]^{-1} = [\bar{F}]$ *es una aplicación.*

Demostración. Por la proposición 1.2.9, si $[F_0] = [F_1]$ en $H_i(f_0, f_1)$ entonces existe $F : II^i \to X$ tal que $F : F_0' \simeq F_1'\ rel\ \{j_0, j_1\}$.

Se tiene que $\{F, f_0\rho'\rho\}I(\nu\omega) : \overline{F_0} \simeq \overline{F_1}\ rel\ i^1$ pues

- $\{F, f_0\rho'\rho\}I(\nu\omega)\iota_1 = \{F, f_0\rho'\rho\}\iota_1\nu\omega = \{F\iota_1, f_0\rho'\rho\iota_1\}\nu\omega = \{F_1', f_0\rho'\}\nu\omega = \overline{F_1}$.
- $\{F, f_0\rho'\rho\}I(\nu\omega)\iota_0 = \{F, f_0\rho'\rho\}\iota_0\nu\omega = \{F\iota_0, f_0\rho'\rho\iota_0\}\nu\omega = \{F_0', f_0\rho'\}\nu\omega = \overline{F_0}$.
- $\{F, f_0\rho'\rho\}I(\nu\omega)Ii^1 = \{F, f_0\rho'\rho\}I(\nu\omega i^1) = \{F, f_0\rho'\rho\}I(j_1\{i\rho, 1\} \cup j_1) = \{FI(j_1\{i\rho, 1\}), f_0\rho'\rho I j_1\} = \{FIj_1 I\{i\rho, 1\}, f_0\rho' j_1\rho\} = \{F_0' j_1 \rho I\{i\rho, 1\}, f_0\rho\} = \{f_1\{i\rho, 1\}\rho, f_0\rho\} = \{f_1 i\rho^2, f_1\rho, f_0\rho\} = \{f_1 i\rho, f_1, f_0\}\rho = \overline{F_0} i^1\rho$.

Nótese que $\{F, f_0\rho'\rho\} : IP\{j_0, j_0\} = P\{Ij_0, Ij_0\} \to X$ existe pues $f_0\rho'\rho I j_0 = f_0\rho' j_0\rho = f_0\rho$ y $FIj_0 = FI(\{j_0, j_1\}\widetilde{i}) = FI\{j_0, j_1\}I\widetilde{i} = F_0'\{j_0, j_1\}\rho I\widetilde{i} = F_0'\{j_0, j_1\}\widetilde{i}\rho = F_0' j_0\rho = f_0\rho$. □

Proposición 1.3.2. *(Composición homotópica bien definida.) La correspondencia* $\cdot : H_i(f_0, f_1) \times H_i(f_1, f_2) \to H_i(f_0, f_2)$ *definida por* $\cdot([F], [G]) = [F] \cdot [G] = [F * G]$ *es una aplicación.*

Demostración. Por la proposición 1.29, si $[F_0] = [F_1]$ en $H_i(f_0, f_1)$ y $[G_0] = [G_1]$ en $H_i(f_1, f_2)$ entonces existen $F, G : II^i \to X$ tales que $F : F_0' \simeq F_1'\ rel\ \{j_0, j_1\}$ y $G : G_0' \simeq G_1'\ rel\ \{j_0, j_1\}$.

Se tiene que $\{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}I(\nu\omega) : F_0 * G_0 \simeq F_1 * G_1\ rel\ i^1$ pues

- $\{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}I(\nu\omega)\iota_1 = \{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}\iota_1\nu\omega = \{\{F_1', f_0\rho'\}\nu, G_1'\}\nu\omega = F_1 * G_1$.
- $\{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}I(\nu\omega)\iota_0 = \{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}\iota_0\nu\omega = \{\{F_0', f_0\rho'\}\nu, G_0'\}\nu\omega = F_0 * G_0$.

- $\{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}I(\nu\omega)Ii^1 = \{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}I(\nu\omega i^1) =$
$\{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\}I(j_1\{i\rho, 1\} \cup j_1) = \{\{F, f_0\rho'\rho\}I(\nu j_1\{i\rho, 1\}), GIj_1\} =$
$\{f_0\rho'\rho I(j_1\{i\rho, 1\}), G_0'j_1\rho\} = \{f_0\rho' j_1\{i\rho, 1\}\rho, f_2\rho\} = \{f_0\{i\rho, 1\}\rho, f_2\rho\} =$
$\{f_0 i\rho^2, f_0\rho, f_2\rho\} = (F_0 * G_0)i^1\rho.$

Nótese que $\{\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu, G\} : IP\{j_0, j_0\} = P\{Ij_0, Ij_0\} \to X$ existe pues $GIj_0 = G_0'j_0\rho = f_1\rho$ y $\{F, f_0\rho'\rho\}I\nu Ij_0 = FIj_1 = F_0'j_1\rho = f_1\rho$. □

Lema 1.3.3. *Para todo morfismo $f : A \to X$ se tiene que $[f\rho]^{-1} = [f\rho]$ en $H_i(f, f)$.*

Demostración. Por el teorema 1.3.1 se tiene que $[f\rho]^{-1} = [\overline{f\rho}] = [\{f\rho', f\rho'\}\nu\omega] = \omega^*\nu^*(\nu^*)^{-1}([f\rho']) = \omega^*[f\rho'] = [f\rho]$. □

Corolario 1.3 .5. *Si $[F] \in [I^i, X]^{\{f_0,f_1\}\{\{j_0,j_1\}\}}$ entonces $[\{F, F\}\nu] = [\{f_1\rho', f_1\rho'\}\nu] = [(\overline{f_1\rho})'] = [f_1\rho']$. Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ entonces $[\{F', F'\}\nu\omega] = [f_1\rho]$.*

Demostración. Consecuencia inmediata del corolario 1.3.3, del lema 1.3.3 y de la proposición 1.2.9. □

Corolario 1.3.6. *(Identidad homotópica a izquierda.) Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ entonces $[f_0\rho] \cdot [F] = [F]$.*

Demostración. Por el teorema 1.3.1 y el corolario 1.3.1 se tiene que $[F] = \omega^*\nu^*(\nu^*)^{-1}([F']) = \omega^*\nu^*[\{f_0\rho', F'\}] = \omega^*\nu^*[\{\{f_0\rho', f_0\rho'\}\nu, F'\}] = [\{\{f_0\rho', f_0\rho'\}\nu, F'\}\nu\omega] = [f_0\rho * F] = [f_0\rho] \cdot [F]$.

Obsérvese que por el corolario 1.35 $f_0\rho' \simeq \{f_0\rho', f_0\rho'\}\nu\ rel\ \{j_0, j_1\}$. Además $F' \simeq F'\ rel\ \{j_0, j_1\}$ y $f_0\rho' j_0\rho = f_0\rho = F' j_0\rho$. □

Corolario 1.3.7. *(Inverso homotópico a derecha.) Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ entonces $[F] \cdot [F]^{-1} = [f_0\rho]$.*

Demostración. Consecuencia inmediata del corolario 1.3 .5: $[F] \cdot [F]^{-1} = [F] \cdot [\overline{F}] = [F * \overline{F}] = [\{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu\omega] = [f_0\rho]$. □

Proposición 1.3.3. *(Identidad homotópica a derecha.) Si* $[F] \in H_1(f_0, f_1)$ *entonces* $[F] \cdot [f_1\rho] = [F]$

Demostración. Se tiene por el corolario 1.3.2 que
$\{\{F', f_0\rho'\}\nu', \{F', F'\}\nu'\} : \{f_0\rho', F'\} \simeq \{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', F'\}\nu\}\ rel\ j_1 \cup j_1$.
Entonces por el corolario 1.3.4, $[\{f_0\rho', F'\}\nu\omega] = [\{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', F'\}\nu\}\nu\omega]$.
Por el teorema 1.3.1, de lo anterior se tiene que $[\{f_0\rho', F'\}\nu\omega] = \omega^*\nu^*(\nu^*)^{-1}([F']) = \omega^*([F']) = [F] = [F * \{F', F'\}\nu\omega] = [F] \cdot [\{F', F'\}\nu\omega] = [F] \cdot [f_1\rho]$, por el corolario 1.3.5 y la proposición 1.3.2. □

Corolario 1.3.8. *Si* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ *entonces* $([F]^{-1})^{-1} = [F]$*. Además, en* $[I^i, X]^{\{f_0, f_1\}\{\{j_0, j_1\}\}}$ *se tiene que* $[F'] = [\{\{F', f_0\rho'\}\nu, f_0\rho'\}\nu]$.

Demostración. Por la proposición 1.3.3 se concluye que $([F]^{-1})^{-1} = [\overline{\overline{F}}] = [\{\{F', f_0\rho'\}\nu, f_1\rho'\}\nu\omega] = [F * f_1\rho] = [F] \cdot [f_1\rho] = [F]$.

La segunda igualdad del enunciado es consecuencia inmediata de la proposición 1.2.9. □

Corolario 1.3.9. *(Inverso homotópico a izquierda.) Si* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ *entonces* $[F]^{-1} \cdot [F] = [f_1\rho]$.

Demostración. Por los corolarios 1.3.8 y 1.3.7 anteriores y por la proposición 1.3.2 se tiene que $[F]^{-1} \cdot [F] = [F]^{-1} \cdot ([F]^{-1})^{-1} = [\overline{F}] \cdot [\overline{F}]^{-1} = [f_1\rho]$. □

Proposición 1.3 .4. *(Asociatividad homotópica.) Si* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$*,* $[G] \in H_i(f_1, f_2)$ *y* $[H] \in H_i(f_2, f_3)$ *entonces* $[F] \cdot ([G] \cdot [H]) = ([F] \cdot [G]) \cdot [H]$.

Demostración. Por el corolario 1.3.2,
$\{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu', \{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu'\}$:
$\{G', \{F', f_0\rho'\}\nu\} \simeq \{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu, \{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu\}\ rel\ j_1 \cup j_1$
de donde $[\{G', \{F', f_0\rho'\}\nu\}] =$
$[\{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu, \{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu\}]$. Por el corolario 1.3.8 se tiene, en particular, que

$G' \simeq \{\{G', f_1\rho'\}\nu, f_1\rho'\}\nu \ rel \ \{j_0, j_1\}$ y por el corolario 1.3.1, $[\{G', \{F', f_0\rho'\}\nu\}] = [\{\{\{G', f_1\rho'\}\nu, f_1\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}]$. Por el corolario 1.3.5 se tiene en particular que $\{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu \simeq f_0\rho' \ rel \ \{j_0, j_1\}$ y por el corolario 1.3.1 $[\{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu, \{\{F', f_0\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu\}] = [\{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu, f_0\rho'\}]$.

En consecuencia $[\{\{\{G', f_1\rho'\}\nu, f_1\rho'\}\nu, \{F', f_0\rho'\}\nu\}] =$ $[\{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu, f_0\rho'\}]$ y por el corolario 1.3.4, $[\{G', f_1\rho'\}\nu\omega * \{F', f_0\rho'\}\nu\omega] = [\overline{\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu\omega}]$. De donde $[\overline{G} * \overline{F}] =$ $[\overline{F * G}]$. Por consiguiente $([F] \cdot [G])^{-1} = [G]^{-1} \cdot [F]^{-1}$.

Por otro lado, si $[K] \in H_i(f_1, f_4)$, usando el corolario 1.3.2 se tiene que $\{\{G', \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu', \{G', K'\}\nu'\}$: $\{\{F', f_0\rho'\}\nu, K'\} \simeq \{\{G', \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu, \{G', K'\}\nu\} \ rel \ j_1 \cup j_1$. De donde por los corolarios 1.3.4 y 1.3.8, $[F] \cdot [K] = [\{G', \{F', f_0\rho'\}\nu\}\nu\omega]^{-1} \cdot [\{G', K'\}\nu\omega] =$ $[\overline{G} * \overline{F}]^{-1} \cdot [\overline{G} * K] = ([G]^{-1} \cdot [F]^{-1})^{-1} \cdot ([G]^{-1} \cdot [K]) =$ $([F]^{-1})^{-1} \cdot ([G]^{-1})^{-1} \cdot ([G]^{-1} \cdot [K]) = ([F] \cdot [G]) \cdot ([G]^{-1} \cdot [K])$. Se concluye que $[F] \cdot ([G] \cdot [H]) = ([F] \cdot [G]) \cdot ([G]^{-1} \cdot ([G] \cdot [H])) =$ $([F] \cdot [G]) \cdot (([f_2\rho] \cdot [G]^{-1}) \cdot ([G] \cdot [H])) = ([F] \cdot [G]) \cdot ([f_2\rho] \cdot [H]) =$ $([F] \cdot [G]) \cdot [H]$. □

Teorema 1.3.2. *Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y para todo objeto X de una I-categoría generalizada, $H_i(X)$ es un grupoide.*

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4 y de los corolarios 1.3.6, 1.3.7, 1.3.9. □

Nótese que para definir el grupoide $H_i(X)$ se ha usado una extensión ν' de un cuadrado de homotopía asociado a la cofibración $\{j_0, j_1\}$. Este grupoide es independiente de la extensión elegida.

Proposición 1.3.5. *Si ν_0' y ν_1' son dos extensiones del cuadrado de homotopía*

$\overline{j_0}\{j_0, j_1\} = (\omega \cup j_1\rho)\iota_0$ *asociado a la cofibración* $\{j_0, j_1\}$ *entonces los grupoides de homotopía generados respectivamente por dichas extensiones coinciden.*

Demostración. Basta observar que por el teorema 1.2.3 $\nu_0'\iota_1 \simeq \nu_1'\iota_1 \ rel \ \{j_0, j_1\}$, entonces por la proposición 1.2.9, $\nu_0\omega \simeq \nu_1\omega \ rel \ i^1$, y por tanto la composición y el inverso de los morfismos queda definido unívocamente en el grupoide. □

La composición en el grupoide puede ser definida de una forma equivalente sin necesidad de pasar por el objeto I^i, como se verá a continuación. El haberlo realizado de esta forma es con la intención de hacer notar que la homotopía relativa es comparable a la homotopía obtenida a través del funtor cilindro para objetos cofibrantes. En este caso el objeto cilindro es I^i con inclusiones $\{j_0, j_1\} : P\{i, i\} \to I^i$ y proyección $\rho' = \{\rho, 1, 1\} : I^i \to A$.

Proposición 1.3.6. *Dada* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$*, un camino* $G \in [F]^{-1}$ *si y solo si existe una extensión del morfismo* $\{f_0 i\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, G\}$ *relativa a la cofibración* i^2*.*

Demostración. Si $G \in [F]^{-1}$ entonces $[G] = [\overline{F}]$ en $H_i(f_1, f_0)$. Como $\{F', f_0\rho'\}\nu' I\omega i^2 = \{f_0 i\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, \overline{F}\}$, por el teorema 1.2.1 existe una extensión del morfismo $\{f_0 i\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, G\}$ relativa a la cofibración i^2

Recíprocamente, sea H es una extensión de $\{f_0 i\rho^2, F, f_0\rho, f_0\rho, G\}$ relativa a la cofibración i^2. Entonces $HIi^1 = \{f_0 i\rho^2, F, f_0\rho\} = \{FI\{i\rho, 1\}, f_0\rho\} = \{F, f_0\rho\}I(\{i\rho, 1\} \cup 1)$ y por tanto existe el morfismo $\{H, F, f_0\rho\} : II^i \to X$. Además $\{H, F, f_0\rho\}\iota_0 = \{f_0\rho, f_0, f_0\} = f_0\rho' = \{F', f_0\rho'\}\overline{j_0} = \{F', f_0\rho'\}\nu'\iota_0$ y $\{H, F, f_0\rho\}I\{j_0, j_1\} = \{F, f_0\rho\} = \{F', f_0\rho'\}(\omega \cup j_1\rho) = \{F', f_0\rho'\}\nu' I\{j_0, j_1\}$. Por el teorema 1.2.3 se tiene que $\{H, F, f_0\rho\}\iota_1 \simeq \{F', f_0\rho'\}\nu \ rel \ \{j_0, j_1\}$ y por la proposición 1.2.9 se concluye que $\{H, F, f_0\rho\}\iota_1\omega = \{H, F, f_0\rho\}I\omega\iota_1 = H\iota_1 = G \simeq \{F', f_0\rho'\}\nu\omega = \overline{F} \ rel \ i^1$. □

Proposición 1.3.7. *Dadas* $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ *y* $[H] \in H_i(f_1, f_2)$*, se tiene que un camino* $U \in [F] \cdot [H]$ *si y solo si existe una extensión del morfismo* $\{f_0 i\rho^2, G, f_2\rho, H, U\}$ *relativa a* i^2*, donde* $G \in [F]^{-1}$*.*

Demostración. Como $G \in [F]^{-1}$ y $U \in [F] \cdot [H]$ entonces $[G] = [\overline{F}]$ en $H_i(f_1, f_0)$ y $[U] = [F * H]$ en $H_i(f_0, f_2)$. Además $\{\{F', f_0\rho'\}\nu, H'\}\nu' I\omega i^2 =$ $\{\{F', f_0\rho'\}\nu, H'\}\nu' I\omega\{Ii^1, \iota_0, \iota_1\} =$ $\{\{F', f_0\rho'\}\nu, H'\}\nu'\{I\{j_0 i\rho, j_0, j_1\}, \iota_0\omega, \iota_1\omega\} =$ $\{\{F', f_0\rho'\}\nu\omega I\{i\rho, 1\}, H' j_1\rho, H'\omega, F * H\} =$ $\{f_0 i\rho^2, \overline{F}, f_2\rho, H, F * H\}$. Por el teorema 1.2.1 existe una extensión del morfismo $\{f_0 i\rho^2, G, f_2\rho, H, U\}$ relativa a i^2.

Recíprocamente, si V es una extensión del morfismo $\{f_0 i\rho^2, G, f_2\rho, H, U\}$ relativa a i^2 entonces $VIi^1 = \{f_0 i\rho^2, G, f_2\rho\} = \{f_1 i\rho^2, G, f_2\rho\} =$ $\{G, f_2\rho\}I(\{i\rho, 1\} \cup 1)$. Por tanto existe el morfismo $\{V, G, f_2\rho\} : II^i \to X$. Como $\{V, G, f_2\rho\}\iota_0 = \{H, f_1, f_2\} = H' = \{G', H'\}\overline{j_0} = \{G', H'\}\nu'\iota_0$ y $\{V, G, f_2\rho\}I\{j_0, j_1\} = \{G, f_2\rho\} = \{G', H'\}(\omega \cup j_1\rho)$. Entonces por el teorema 1.2.3 y la proposición 1.2.9 se tiene que $[U] = [\{G', H'\}\nu\omega]$. Como $[G] = [\overline{F}]$ entonces por el tercer apartado de la proposición 1.2.9, $[G'] = [\overline{F}']$ y $\overline{F}' = \{F', f_0\rho'\}\nu$ por la unicidad en la propiedad de push out. Por el corolario 1.3.1, $\{G', H'\} \simeq \{\{F', f_0\rho'\}\nu, H'\}\ rel\ j_1 \cup j_1$ y por el corolario 1.3.4 se concluye que $[U] = [\{G', H'\}\nu\omega] = [\{\{F', f_0\rho'\}\nu, H'\}\nu\omega] = [F * H] = [F] \cdot [H]$. $\square$

Cuando la cofibración usada para la construcción de los grupoides es del tipo $i^n : I_i^n B \to X$, entonces los morfismos pertenecientes a la clase inversa de una dada o al producto de dos clases dadas, si se consideran caminos con origen y final en $h\rho^{n-1} : I^{n-1}A \to X$ para algún morfismo $h : A \to X$, pueden ser definidos equivalentemente de diversas formas.

Proposición 1.3 .8. *Dada una cofibración $i : B \to A$ y morfismos $f_0, f_1 : I^n A \to X$, entonces $[f_0] = [f_1]^{-1}$ en $H_{i^{n-1}}(h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1})$ si y solo si existe una extensión del morfismo $\{h\rho^{n+1} I^s i^{n+1-s}, h\rho^n, f_0, f_1, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1} para algún s con $2 \leq s \leq n+1$.*

Demostración. Si $[f_0] = [f_1]^{-1}$, por la proposición 1.3.6 existe una extensión H del morfismo $\{h\rho^{n+1} I^2 i^{n-1}, f_0, h\rho^n, h\rho^n, f_1\}$ relativo a la cofibración i^{n+1}.

Para $s = 2$, sea G' una extensión del cuadrado de homotopía $f_0 I\rho i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}\rho, f_0\chi_0, f_0\rho, H, h\rho^{n+1}\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}. La existencia del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}\rho, f_0\chi_0, f_0\rho, H, h\rho^{n+1}\} : II_i^{n+1}B \to X$ se deduce de la igualdad $HI\iota_0 = f_0 = f_0\chi_0 I\iota_0$. El morfismo $G = G'\iota_1$ verifica $Gi^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, h\rho^n, f_0, f_1, h\rho^n\}$.

Si $s > 2$, sea F' una extensión del cuadrado de homotopía $f_0^{1(s-1)} i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\rho, G, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f_0^{0(s-2)}\}\iota_1$ si s es par o $f_0^{1(s-1)} i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\rho, H, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f_0^{0(s-2)}, h\rho^{n+1}\}\iota_0$ si s es impar, asociado a la cofibración i^{n+1}. La existencia del morfismo
$\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\rho, G, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f_0^{0(s-2)}\}$ o
$\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, f_0\rho, H, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, f_0^{0(s-2)}, h\rho^{n+1}\}$ se deduce de la igualdad $f_0^{0(s-2)} I^{s-2}\iota_0 = f_0 = GI\iota_1$ o $f_0^{0(s-2)} I^{s-2}\iota_0 = f_0 = HI\iota_0$ respectivamente, si s es par o impar. Si s es par o impar, el morfismo $F = F'\iota_0$ o $F = F'\iota_1$, respectivamente, verifica las condiciones exigidas.

Recíprocamente, si H es una extensión del morfismo
$\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}, h\rho^n, f_0, f_1, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1} para algún s con $3 \leq s \leq n+1$, entonces sea G' una extensión del cuadrado de homotopía $h\rho^{n+1}i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, H, h\rho^{n+1}, f_0^{1(s-1)}, f_1^{1(s-1)}, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\}\iota_\epsilon$ con $\epsilon = 0$ si s es par y $\epsilon = 1$ si s es impar, asociado a la cofibración i^{n+1}. La existencia del morfismo
$\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, H, h\rho^{n+1}, f_0^{1(s-1)}, f_1^{1(s-1)}, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\}$ de $II_i^{n+1}B$ en X, se deduce de las igualdades $f_0^{1(s-1)} I^{s-1}\iota_1 = f_0 = HI^{s-1}\iota_1$ y $f_1^{1(s-1)} I^{s-1}\iota_1 = f_1 = HI^{s-2}\iota_0$. El morfismo $G = G'\iota_1$ si s es par o $G = G'\iota_0$ si s es impar, verifica la condición de la hipótesis para $s-1$.

Iterando este proceso existirá una extensión F del morfismo
$\{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, h\rho^n, f_0, f_1, h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}.

Sea k' una extensión del cuadrado de homotopía $f_0 I\rho i^{n+1} =$
$\{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}\rho, f_0\rho, f_0\chi_1, h\rho^{n+1}, F\}\iota_1$ asociado a la cofibración i^{n+1}. La existen-

cia del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}\rho, f_0\rho, f_0\chi_1, h\rho^{n+1}, F\} : II_i^{n+1}B \to X$ se deduce de la igualdad $FI\iota_1 = f_0 = f_0\chi_1 I\iota_1$. El morfismo $k = k'\iota_0$ verifica $ki^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, f_0, h\rho^n, h\rho^n, f_1\}$ y por la proposición 1.3.6 se concluye que $[f_0] = [f_1]^{-1}$. $\square$

Proposición 1.3 .9. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *y morfismos* $f_0, f_1, f_2 : I^n A \to X$, $[f_2] = [f_0] \cdot [f_1]$ *en* $H_{i^{n-1}}(h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1})$ *si y solo si existe una extensión del morfismo* $\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}, f_1, f_2, \overline{f_0}, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ *relativa a la cofibración* i^{n+1} *para algún* s *con* $2 \leq s \leq n+1$.

Demostración. Si $[f_2] = [f_0] \cdot [f_1]$ entonces por la proposición 1.3.7 existe una extensión H del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, \overline{f_0}, h\rho^n, f_1, f_2\}$ relativo a la cofibración i^{n+1}.

Sea F' una extensión del cuadrado de homotopía $f_2 I^{s-1}\rho i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, H, f_2\rho, \overline{f_0}\chi_0, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, \overline{f_0}I^{s-2}\chi_0, h\rho^{n+1}\}\iota_1$ asociado a la cofibración i^{n+1}. La existencia del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, H, f_2\rho, \overline{f_0}\chi_0, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}, \overline{f_0}I^{s-2}\chi_0, h\rho^{n+1}\}$ desde $II_i^{n+1}B$ en X se deduce de las igualdades $\overline{f_0}I^{s-2}\chi_0 I^{s-1}\iota_0 = \overline{f_0} = HI\iota_0$ y $\overline{f_0}I^{s-2}\chi_0 I^{s-2}\iota_0 = \overline{f_0} = \overline{f_0}\chi_0 I\iota_0$. El morfismo $F = F'\iota_0$ verifica $Fi^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}, f_1, f_2, \overline{f_0}, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$.

Recíprocamente, si H es una extensión del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}, f_1, f_2, \overline{f_0}, h\rho^n, \cdots h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1} para algún s con $3 \leq s \leq n+1$, entonces sea G' una extensión del cuadrado de homotopía $h\rho^{n+1}i^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, H, f_1^{1(s-1)}, f_2, \overline{f_0}^{1(s-1)}, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\}\iota_\epsilon$ con $\epsilon = 0$ si s es par y $\epsilon = 1$ si s es impar, asociado a la cofibración i^{n+1}. La existencia del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^s i^{n+1-s}\rho, h\rho^{n+1}, H, f_1^{1(s-1)}, f_2, \overline{f_0}^{1(s-1)}, h\rho^{n+1}, \cdots h\rho^{n+1}\}$ desde $II_i^{n+1}B$ en X se deduce de las igualdades $f_1^{1(s-1)}I^{s-1}\iota_1 = f_1 = HI^{s-1}\iota_0$, $f_2^{1(s-1)}I^{s-1}\iota_1 = f_2 = HI^{s-1}\iota_1$ y $\overline{f_0}^{1(s-1)}I^{s-1}\iota_1 = \overline{f_0} = HI^{s-2}\iota_0$. El morfismo $G = G'\iota_1$ si s es par o $G = G'\iota_0$ si s es impar, verifica la condición de la hipótesis para $s-1$.

Iterando este proceso existirá una extensión F del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^2i^{n-1}, f_1, f_2, \overline{f_0}, h\rho^n\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}.

Sea k' una extensión del cuadrado de homotopía $h\rho^{n+1}i^{n+1} =$ $\{h\rho^{n+1}I^2i^{n-1}\rho, F, h\rho^{n+1}, f_1\chi_0, f_2\chi_0\}\iota_1$ asociado a la cofibración i^{n+1}. La existencia del morfismo $\{h\rho^{n+1}I^2i^{n-1}\rho, F, h\rho^{n+1}, f_1\chi_0, f_2\chi_0\} : II_i^{n+1}B \to X$ se deduce de las igualdades $f_2\chi_0 I\iota_0 = HI\iota_1$ y $f_1\chi_0 I\iota_0 = f_1 = HI\iota_0$. El morfismo $k = k'\iota_0$ verifica $ki^{n+1} = \{h\rho^{n+1}I^2i^{n-1}, \overline{f_0}, h\rho^n, f_1, f_2\}$ y por la proposición 1.3.7 se concluye que $[f_2] = [f_0]\cdot[f_1]$. □

La compatibilidad de la homotopía con la composición de morfismos induce funtores en los grupoides de homotopía relativa.

Proposición 1.3.10. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, todo morfismo $g : X \to Y$ induce un funtor $g_* : H_i(X) \to H_i(Y)$.*

Demostración. Si $f \in Hom(A,X)$, se define $g_*(f) = gf : A \to Y$. Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$, se define $g_*([F]) = [gF]$.

g_* bien definido:

- $[gf] \in H_i(gf_0, gf_1)$.
- Por el primer apartado de la proposición 1.2.9, si $[F_0] = [F_1]$ en $H_i(f_0, f_1)$ entonces $[gF_0] = [gF_1]$ en $H_i(gf_0, gf_1)$.

g_* es un funtor:

- $g_*([f\rho]) = [g(f\rho)] = [(gf)\rho]$.
- $g_*([F]\cdot[G]) = g_*([F*G]) = g_*([\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu\omega] = [g\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu\omega] =$ $[\{g\{F', f_0\rho'\}\nu, gG'\}\nu\omega] = [\{\{gF', gf_0\rho'\}\nu, gG'\}\nu\omega] = [gF*gG] = [gF]\cdot[gG] =$ $g_*([F])\cdot g_*([G])$. □

Lema 1.3.4. *Dado un cuadrado conmutativo $fj = ig$ relacionando las cofibraciones i y j, si $F \in Hom(IA,X)^{\{f_0 i\rho, f_0, f_1\}\{i^1\}}$ entonces $(FIf)' = F'(If \cup f \cup f)$.*

Demostración. El siguiente cubo es totalmente conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
I^1_j D \arrow[rr, "Ig\cup f\cup f"] \arrow[dr, "{\{j\rho,1\}\cup 1}"] \arrow[dd, tail, "j^1"'] & & I^1_i B \arrow[dr, "{\{i\rho,1\}\cup 1}"] \arrow[dd, tail, "i^1" near end] & \\
 & P\{j,j\} \arrow[rr, "f\cup f" near start] \arrow[dd, "{\{j_0,j_1\}}" near start] & & P\{i,i\} \arrow[dd, "{\{j_0,j_1\}}"] \\
IC \arrow[rr, "If" near start] \arrow[dr, "\omega"'] & & IA \arrow[dr, "\omega"] & \\
 & I^j \arrow[rr, tail, "If\cup f\cup f"'] & & I^i
\end{tikzcd}
$$

Nótese que por ser $fj = ig$ existe $f \cup f : P\{j,j\} \to P\{i,i\}$. Por otro lado $(f \cup f)(\{j\rho, 1\} \cup 1) = f\{j\rho, 1\} \cup f = \{fj\rho, f\} \cup f = \{ig\rho, f\} \cup f = \{i\rho Ig, f\} \cup f = (\{i\rho, 1\} \cup 1)(Ig \cup f \cup f)$ y como $Ifj^1 = i^1(Ig \cup f \cup f)$ existe $If \cup f \cup f : I^j \to I^i$. Como $FIf : f_0 f \simeq f_1 f \; rel \; j$ entonces $(FIf)' = \{FIf, f_0 f, f_1 f\} = \{F, f_0, f_1\}(If \cup f \cup f) = F'(If \cup f \cup f)$. $\square$

Lema 1.3.5. *Si ν_i y ν_j representan los morfismos asociados a las cofibraciones i y j respectivamente mediante el diagrama 1.3.1 de la página 33, entonces para todo cuadrado conmutativo $fj = ig$ se verifica*
$\nu_i(If \cup f \cup f) \simeq ((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\nu_j \; rel \; \{j_0, j_1\}$.

Demostración. Se tiene $\nu_i'(IIf \cup If \cup If)\{I\{j_0, j_1\}, \iota_0\} =$
$\nu_i'\{(IIf \cup If \cup If)I\{j_0, j_1\}, (IIf \cup If \cup If)\iota_0\} =$
$\nu_i'\{I\{j_0, j_1\}(If \cup If), \iota_0(If \cup f \cup f)\} =$
$\{\nu_i' I\{j_0, j_1\}(If \cup If), \nu_i'\iota_0(If \cup f \cup f)\} =$
$\{(\omega \cup j_1\rho)(If \cup If), \overline{j_0}(If \cup f \cup f)\} =$
$\{((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))(\omega \cup j_1\rho), ((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\overline{j_0}\} =$
$((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\{\omega \cup j_1\rho, \overline{j_0}\} =$
$((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\nu_j'\{I\{j_0, j_1\}, \iota_0\}$.
Por el teorema 1.2.3,

$\nu_i'(IIf \cup If \cup If)\iota_1 \simeq ((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\nu_j'\iota_1\ rel\ \{j_0, j_1\}$, de donde se concluye el resultado. □

Proposición 1.3.11. *Todo cuadrado conmutativo $fj = ig$ relacionando cofibraciones $i : B \rightarrowtail A$ y $j : D \rightarrowtail C$, induce un funtor $f^* : H_i(X) \to H_j(X)$.*

Demostración. Si $h : A \to X$, se define $f^*(h) = hf : C \to X$. Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ se define $f^*([F]) = [FIf]$.

f^* bien definida:

- Si $[F] \in H_i(f_0, f_1)$ entonces $[FIf] \in H_j(f_0f, f_1f)$.
- Por el primer apartado del teorema 1.2.2 y por el segundo apartado de la proposición 1.2.9, si $[F_0] = [F_1]$ en $H_i(f_0, f_1)$ entonces $[F_0If] = [F_1If]$ en $H_j(f_0f, f_1f)$.

f^* es un funtor:

- $f^*([h\rho]) = [h\rho If] = [hf\rho]$.
- Por los lemas 1.3.5, 1.3.1 y 1.3.4, y la proposición 1.2.9 se tienen la siguientes igualdades que concluyen el resultado: $f^*([F * G]) = [\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu\omega If] =$
$[\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}\nu(If \cup f \cup f)\omega] =$
$[\{\{F', f_0\rho'\}\nu, G'\}((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\nu\omega] =$
$[\{\{F', f_0\rho'\}((If \cup f \cup f) \cup (If \cup f \cup f))\nu, (GIf)'\}\nu\omega] =$
$[\{\{(FIf)', f_0f\rho'\}\nu, (GIf)'\}\nu\omega] = [FIf * GIf] =$
$[FIf] \cdot [GIf] = f^*([F]) \cdot f^*([G])$. □

Corolario 1.3.10. *Si el cuadrado $fj = ig$ es un push out, entonces f^* es un isomorfismo de grupoides.*

Demostración. Si el cuadrado $fj = ig$ es un push out, entonces por el teorema 1.2.2 también lo es $Ifj^1 = i^1(Ig \cup f \cup f)$. De donde, por el tercer apartado de la proposición 1.2.9, f^* y $(If)^*$ son isomorfismos, y por tanto, $f^* : H_i(X) \to H_j(X)$ es un isomorfismo para todo objeto X de la I-categoría generalizada. □

1.4 Grupos de Homotopía Generalizada

Una vez obtenidos los grupoides de homotopía generalizada se definirán los grupos de homotopía generalizada como grupos de homotopía relativos a una cofibración y basados en un morfismo, y se analizarán sus propiedades fundamentales.

Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y todo objeto X de una I-categoría generalizada, se tiene asociado el grupoide $H_i(X)$. Como sucede en todos los grupoides, el conjunto de morfismos de un objeto en sí mismo, es un grupo. De esta forma, para todo morfismo $h : A \to X$ resulta que $H_i(h, h)$ es grupo.

Por el axioma **GI4** de cilindro relativo, si $i : B \rightarrowtail A$ es una cofibración, también lo son $i^n : I_i^n B \to I^n A$ para todo natural n. De esta propiedad y de lo anteriorment expresado surgen los grupos de homotopía generalizados.

Definición 1.4.1. El n-grupo de homotopía relativo a la cofibración $i : B \rightarrowtail A$ del objeto X basado en el morfismo $h : A \to X$ se define por $\pi_n^i(X, h) = H_{i^{n-1}}(h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}) = [I^n A, X]^{h\rho^n i^n\{i^n\}}$.

Proposición 1.4.1. *Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y morfismo $h : A \to X$ se tiene que $\pi_n^i(X, h) = \pi_{n-s}^{i^s}(X, h\rho^s)$.*

Demostración. Basta observar que por la definición de i^n, $\pi_n^i(X, h) = [I^n A, X]^{h\rho^n i^n\{i^n\}} = [(I^s)^{n-s} A, X]^{h(\rho^s)^{n-s}(i^s)^{n-s}\{(i^s)^{n-s}\}} = \pi_{n-s}^{i^s}(X, h\rho^s)$. $\square$

Esta definición puede ser extendida para índices no naturales bajo ciertas condiciones: si la cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y el morfismo $h : A \to X$ son tales que $i = j^n$ para alguna cofibración $j : D \rightarrowtail C$, $B = I_j^n D$, $A = I^n C$ y $h = f\rho^n$ para algún morfismo $f : C \to X$, se pueden definir grupos de homotopía relativos a la cofibración i del objeto X basados en el morfismo $f : C \to X$ de orden no positivo por $\pi_m^i(X, f) = \pi_{n+m}^j(X, f), \quad 1 - n \leq m$.

El carácter funtorial de los grupos de homotopía generalizados se concreta en las siguientes propiedades.

Proposición 1.4.2. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h : A \to X$*

1. *Para todo morfismo $g : X \to Y$ se tiene que $g_* : \pi_n^i(X, h) \to \pi_n^i(Y, gh)$ es un homomorfismo de grupos.*

2. *Para todo cuadrado conmutativo del tipo $fj = ig$, el morfismo $(I^n f)^* : \pi_n^i(X, h) \to \pi_n^j(X, hf)$ es un homomorfismo de grupos.*

3. *Si el cuadrado $fj = ig$ es un push out entonces $(I^n f)^*$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Consecuencia inmediata de las proposiciones 1.3.10, 1.3.11 y del corolario 1.3.10. □

Los grupos de homotopía relativos a una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ de un objeto X dependen de los morfismos $u : B \to X$ y de los $h : A \to X$ con $hi = u$. La siguiente propiedad va a determinar cuándo dos morfismos $u, v : B \to X$ van a ser equivalentes para los grupos de homotopía relativos a cofibraciones del objeto X.

Definición 1.4.2. Dados $u, v : B \to X$ se dirá que u es equivalente a v para cofibraciones cuando existen $u_1, u_2, \dots u_n \in Hom(B, X)$ tales que $u_1 = u$, $u_n = v$ y para todo i con $1 \leq i \leq n - 1$ existe $H_i : IB \to X$ tal que $H_i \iota_0 = u_i$ y $H_i \iota_1 = u_{i+1}$, o $H_i \iota_0 = u_{i+1}$ y $H_i \iota_1 = u_i$.

Proposición 1.4.3. *Ser equivalente para cofibraciones es una relación de equivalencia en $Hom(B, X)$.*

Demostración.
- Reflexiva: Para todo $u \in Hom(B, X)$ sea $u_1 = u_2 = u$; $h = u\rho : IB \to X$ da la propiedad.
- Simétrica: Obvia por la definición.
- Transitiva: Si $u_1, u_2, \dots u_n$ hace u equivalente a v para cofibraciones y $v_1, v_2, \dots v_m$ hace a v equivalente a w para cofibraciones, entonces $u_1, u_2, \dots u_n, v_1, v_2, \dots v_m$ hace a u equivalente a w para cofibraciones. □

De esta forma se obtiene el conjunto cociente de $Hom(B, X)$ sobre esta relación de equivalencia, que se denotará por $[cof^B, X]$.

Definición 1.4.3. Dado $u : B \to X$ se define la componente cofibrada de u como $[u] \in [cof^B, X]$. Un objeto X se dirá $\alpha - B-$cofibrado cuando el cardinal de $[cof^B, X]$ es α. Al conjunto $[cof^B, X]$ se le denomina conjunto de componentes B-cofibradas de X.

Teorema 1.4.1. *Si $u, v : B \to X$ son equivalentes para cofibraciones entonces para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y morfismo $h : A \to X$ con $hi = u$ existe $h' : A \to X$ con $h'i = v$ verificando que $\pi_n^i(X, h) \cong \pi_n^i(X, h')$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si u y v son equivalentes para cofibraciones, existen $u_1, u_2, \dots u_n : B \to X$ con $u_1 = u$, $u_n = v$ y para todo j con $1 \leq j \leq n-1$ existe $H_j : IB \to X$ verificando $H_j\iota_0 = u_j$ y $H_j\iota_1 = u_{j+1}$, o $H_j\iota_0 = u_{j+1}$ y $H_j\iota_1 = u_j$. Bastaría entonces probar este teorema suponiendo que existe $E : IB \to X$ con $E\iota_0 = u$ y $E\iota_1 = v$ pues en caso contrario se haría con cada una de las H_j que hacen a u y v equivalentes para cofibraciones.

Sea $h : A \to X$ y sea $H : IA \to X$ una extensión del cuadrado de homotopía $hi = E\iota_0$ asociado a la cofibración i. Se define $h' = H\iota_1$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $F : I^nA \to X$ tal que $[F] \in \pi_n^i(X, h)$, se tiene el siguiente cuadrado de homotopía asociado a la cofibración i^n:

$$\begin{tikzcd}
I_i^nB \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, tail, "i^n"'] & II_i^nB \arrow[d, "HI(\rho^n i^n)"] \\
I^nA \arrow[r, "F"'] & X
\end{tikzcd}$$

Evidentemente el cuadrado es conmutativo pues $HI(\rho^n i^n)\iota_0 = H\iota_0\rho^n i^n = h\rho^n i^n = Fi^n$. Entonces por el teorema 1.2.3

$$(HI(\rho^n i^n))_1 : [I^nA, X]^{h\rho^n i^n\{i^n\}} \to [I^nA, X]^{h'\rho^n i^n\{i^n\}}$$

es una biyección. Nótese que para todo $[F] \in [I^nA, X]^{h\rho^n i^n\{i^n\}}$ se verifica que $H(F)\iota_1 i^n = H(F)Ii^n\iota_1 = HI(\rho^n i^n)\iota_1 = H\iota_1\rho^n i^n = h'\rho^n i^n$. Donde $H(F)$

es una extensión del cuadrado de homotopía $Fi^n = HI(\rho^n i^n)\iota_0$ asociado a la cofibración i^n.

Finalmente $(HI(\rho^n i^n))_1 : \pi_n^i(X,h) \to \pi_n^i(X,h')$ es un homomorfismo de grupos y por tanto un isomorfismo:

sean $[F],[G] \in \pi_n^i(X,h)$ entonces
$\{\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu,$
$\{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I(\nu\omega)$ es una extensión del cuadrado de homotopía $(F*G)i^n = HI(\rho^n i^n)\iota_0$ asociado a i^n, donde $H(G)$ es una extensión del cuadrado $Gi^n = HI(\rho^n i^n)\iota_0$ asociado a la cofibración i^n.

Nótese que efectivamente es una extensión:

- $\{\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu,$
$\{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I(\nu\omega)\iota_0 =$
$\{\{\{H(F)\iota_0, HI\rho^{n-1}\iota_0, HI\rho^{n-1}\iota_0\}, \{HI\rho^n\iota_0, HI\rho^{n-1}\iota_0, HI\rho^{n-1}\iota_0\}\}\nu,$
$\{H(G)\iota_0, HI\rho^{n-1}\iota_0, HI\rho^{n-1}\iota_0\}\}\nu\omega =$
$\{\{\{F, h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}\}, \{h\rho^n, h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}\}\}\nu, \{G, h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}\}\}\nu\omega =$
$\{\{F', (h\rho^n)'\}\nu, G'\}\nu\omega = F*G.$

- $\{\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu,$
$\{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I(\nu\omega)Ii^n =$
$\{\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu,$
$\{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I(\nu\omega i^n) =$
$\{\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu,$
$\{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I(j_1\{i^{n-1}\rho, 1\} \cup j_1) =$
$\{\{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}Ij_1I\{i^{n-1}\rho, 1\}, HI\rho^{n-1}\} =$
$\{HI\rho^{n-1}I\{i^{n-1}\rho, 1\}, HI\rho^n I\iota_1\} = \{HI\rho^n IIi^{n-1}, HI\rho^n I\iota_0, HI\rho^n I\iota_1\} =$
$HI\rho^n Ii^n = HI(\rho^n i^n).$

Por tanto $(HI(\rho^n i^n))_1([F*G]) =$
$[\{\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu,$
$\{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I(\nu\omega)\iota_1] = [H(F)\iota_1 * H(G)\iota_1] =$

$[H(F)\iota_1]\cdot[H(G)\iota_1] = (HI(\rho^n i^n))_1([F])\cdot(HI(\rho^n i^n))_1([G])$.

La extensión definida existe pues:

- $\{\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}, \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}\}I\nu Ij_0 =$
$\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}Ij_1 =$
$HI\rho^{n-1} = \{H(G), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}Ij_0$.
- $\{H(F), HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}Ij_0 = \{HI\rho^n, HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}Ij_0$.
- $\{HI\rho^{n-1}, HI\rho^{n-1}\}(I\{i^{n-1}\rho, 1\}\cup 1) = \{HI\rho^n IIi^{n-1}, HI\rho^n I\iota_0, HI\rho^n I\iota_1\} =$
$HI\rho^n Ii^n = H(F)Ii^n = H(G)Ii^n$. □

Como consecuencia de este teorema se tiene que los grupos de homotopía relativos a cualquier cofibración $i : B \rightarrowtail A$ van a depender de las componentes B-cofibradas de X y de los morfismos $h : A \to X$ asociados a dichas componentes.

Corolario 1.4.1. *Si un objeto X es $1-B-$cofibrado entonces los grupos de homotopía relativos a una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ solo dependen, salvo isomorfismo, de los morfismos $h : A \to X$ con $hi = u$ para algún $u : B \to X$ fijado.*

Demostración. Obsérvese que si X es $1-B-$cofibrado entonces todo par de morfismos $u, v : B \to X$ es equivalente para cofibraciones. □

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, el morfismo $h : A \to X$ que se utiliza para definir los grupos de homotopía $\pi_n^i(X, h)$ puede ser interpretado como un "punto base" del objeto X a la hora de definir los grupos de homotopía. En este sentido, como ya se ha dicho, el conjunto de "puntos" de un objeto X puede ser identificado con $Hom(A, X)$, y un camino desde un punto f_0 a un punto f_1 de X, con una homotopía $F : f_0 \simeq f_1\ rel\ i$.

Definición 1.4.4. Al conjunto $[A, X]^{u\{i\}}$ se le denominará conjunto de componentes conexas por caminos relativo a i en u. Cuando dicho conjunto es unitario, el objeto X se dirá conexo por caminos en u relativo a i. El objeto X se dirá conexo por caminos relativo a i cuando es $1-B-$cofibrado y conexo por caminos relativo a i en algún $u : B \to X$.

Observación 1.4.1.

1. Por el teorema 1.2.3, si $u, v : B \to X$ son equivalentes para cofibraciones, entonces para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ los conjuntos de componentes conexas por caminos relativos a i del objeto X en u y en v son biyectivos.

2. Si X es $1 - B-$cofibrado entonces para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ los conjuntos de componentes conexas por caminos relativos a i del objeto X son todos biyectivos.

3. En particular si X es $1-B-$cofibrado y conexo por caminos en $u : B \to X$, también es conexo por caminos en cualquier $v : B \to X$.

Teorema 1.4.2. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, si $h, h' : A \to X$ son tales que $h \simeq h'\ rel\ i$ entonces $\pi_n^i(X, h) \cong \pi_n^i(X, h')$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si $H : h \simeq h'\ rel\ i$ entonces $HI(\rho i^1) : II_i^1 B \to X$ verifica $HI(\rho i^1)\iota_0 = h\rho i^1$ y $HI(\rho i^1)\iota_1 = h'\rho i^1$ y de forma análoga a la usada en la demostración del teorema 1.4.1 se tiene que $(HI(\rho i^1))_1 : \pi_1^i(X, h) \to \pi_1^i(X, h')$ es un isomorfismo de grupos.

Por otro lado $HI(\rho i^1) : II_i^1 B \to X$ hace que $h\rho i^1$ y $h'\rho i^1$ estén en la misma componente para cofibraciones que X, y como $HI\rho i^2 = \{HI(\rho i^1), h\rho, h'\rho\}$ se tiene por el teorema 1.4.1 que $\pi_n^{i^1}(X, h\rho) \cong \pi_n^{i^1}(X, h'\rho), \quad n \in \mathbb{N}$. Por ser $\pi_n^{i^1}(X, h\rho) = \pi_{n+1}^i(X, h)$ y $\pi_n^{i^1}(X, h'\rho) = \pi_{n+1}^i(X, h')$ se concluye el resultado. □

Por los teoremas 1.4.1 y 1.4.2 se tiene que los grupos de homotopía relativos a cofibraciones $i : B \rightarrowtail A$ de un objeto X dependen exclusivamente de las componentes B-cofibradas de X y de las componentes conexas por caminos relativas a i de dichas componentes cofibradas.

Corolario 1.4.2. *Si el objeto X es conexo por caminos en u entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, los grupos $\pi_n^i(X, h)$ son isomorfos para todos los $h : A \to X$ con $hi = u$.*

Demostración. Obsérvese que si X es conexo por caminos relativos a i en u entonces el conjunto de componentes conexas por caminos realtivos a i de X en u es unitario. □

Corolario 1.4.3. *Si el objeto X es conexo por caminos relativos a i entonces los grupos de homotopía relativos a i del objeto X no dependen del morfismo base $h : A \to X$ ni del morfismo $u = hi : B \to X$.*

Demostración. Evidente por los corolarios 1.4.1 y 1.4.2. □

Como consecuencia de este último corolario 1.4.3, cuando el objeto X es conexo por caminos relativo a i, los grupos de homotopía relativos a i del objeto X se denotarán simplemente por $\pi_n^i(X)$. Nótese que si el objeto B fuera inicial, entonces todo objeto X sería $1-B$-cofibrado y que la conexidad por caminos solo dependería de la existencia de caminos entre los puntos del objeto X, esto es, de las componentes conexas por camino relativas a la cofibración, como sucede en el caso de los grupos de homotopía clásicos de los espacios topológicos.

1.5 Acciones de Grupos de Homotopía Generalizada

Todo grupo de homotopía generalizada define una acción sobre los grupos de orden no inferior. Esta acción es la identidad cuando el orden del grupo que actúa no es el primero. Por otro lado, la acción de un grupo sobre sí mismo es por conjugación. Por tanto, los grupos de homotopía generalizada son abelianos para orden superior a uno.

Teorema 1.5.1. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h : A \to X$ se tiene que $\theta : \pi_n^i(X,h) \times \pi_m^i(X,h) \to \pi_n^i(X,h)$ definida para $n \geq m$, usando la notación de la demostración del teorema 1.2.3 asociada con la cofibración i^n, por $\theta([F],[H]) = [F]^{[H]} = (HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F])$, es una acción.*

Demostración. Isomorfismos:

Por el teorema 1.2.3 se tiene que toda $[H] \in \pi_m^i(X,h)$ induce una biyección $(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 : \pi_n^i(X,h) = [I^nA, X]^{h\rho^n i^n\{i^n\}} \to \pi_n^i(X,h) = [I^nA, X]^{h\rho^n i^n\{i^n\}}$.

La extensión usada en la demostración del teorema 1.4.1 da también en este caso que $(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1$ es un isomorfismo de grupos.

Bien definida:

Si $[H_0] = [H_1]$ en el grupo $\pi_m^i(X,h)$, entonces $(H_0I\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 = (H_1I\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 : \pi_n^i(X,h) \to \pi_n^i(X,h)$ pues por la proposición 1.2.6 si $H_0 \simeq H_1 \ rel \ i^m$ entonces existe $H : I^{m+1}A \to X$
con $Hi^{m+1} = \{h\rho^{m-1}i^{m-1}\rho^2, H_0, H_1, h\rho^m, h\rho^m\}$.

Si $H_0(F), H_1(F)$ son extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía $Fi^n = H_0I\rho^{n+1-m}Ii^n\iota_0$, $Fi^n = H_1I\rho^{n+1-m}Ii^n\iota_0$ asociados a la cofibración i^n, donde $[F] \in \pi_n^i(X,h)$, entonces:

$H_1(F)Ii^n = H_1I\rho^{n+1-m}Ii^n = HI\iota_1I\rho^{n+1-m}Ii^n = HI^2\rho^{n+1-m}I^2i^nI\iota_1$ y $H_0(F)Ii^n = H_0I\rho^{n+1-m}Ii^n = HI\iota_0I\rho^{n+1-m}Ii^n = HI^2\rho^{n+1-m}I^2i^nI\iota_0$.

Por tanto existe $\{HI^2\rho^{n+1-m}I^2i^n, H_0(F), H_1(F)\} : II_i^{n+1}B \to X$ haciendo conmutativo el cuadrado de homotopía $F\rho i^{n+1} =$
$\{HI^2\rho^{n+1-m}I^2i^n, H_0(F), H_1(F)\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}.
Si G' es una extensión de dicho cuadrado de homotopía entonces $G = G'\iota_1 : H_0(F)\iota_1 \simeq H_1(F)\iota_1 \ rel \ i^n$, y por tanto se tiene $(H_0I\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F]) = (H_1I\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F])$.

Conservación de la identidad:

Si $[H] = [h\rho^m] \in \pi_m^i(X,h)$ entonces $(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 = 1_{\pi_n^i(X,h)}$, pues para toda $[F] \in \pi_n^i(X,h)$ se tiene que $F\rho : I^{n+1}A \to X$ verifica que $F\rho i^{n+1} = \{Fi^n\rho, F, F\} = \{h\rho^n i^n\rho, F, F\} = \{h\rho^m I\rho^{n+1-m}Ii^n, F, F\}$. Por tanto $(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F]) = [F]$.

Conservación de la operación:

Si $[H], [G] \in \pi_m^i(X,h)$ entonces $((H * G)I\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 =$

$(GI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 : \pi_n^i(X,h) \to \pi_n^i(X,h)$, pues, observando por el teorema 1.3.2 que $[H]^{-1}\cdot[H*G] = [H]^{-1}\cdot[H]\cdot[G] = [G]$, que $[H]^{-1} = [\overline{H}]$ y que $[\overline{\overline{H}}] = [H]$, se tiene por la proposición 1.3.9 la existencia de un morfismo $K : I^{m+1}A \to X$ verificando $Ki^{m+1} = \{h\rho^{m-1}i^{m-1}\rho^2, H*G, G, H, h\rho^m\}$.

Para toda $[F] \in \pi_n^i(X,h)$ sean $(H*G)(F)$, $H(F)$ y $G(H(F)\iota_1)$ extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía $Fi^n = (H*G)I\rho^{n+1-m}Ii^n\iota_0$, $Fi^n = HI\rho^{n+1-m}Ii^n\iota_0$ y $H(F)\iota_1 i^n = GI\rho^{n+1-m}Ii^n\iota_0$ asociadas a la cofibración i^n. Entonces, como

$(H*G)(F)Ii^n = (H*G)I\rho^{n+1-m}Ii^n = KI\iota_0 I\rho^{n+1-m}Ii^n = KI^2(\rho^{n+1-m}i^n)I\iota_0$ y $G(H(F)\iota_1)Ii^n = GI\rho^{n+1-m}Ii^n = KI\iota_1 I\rho^{n+1-m}Ii^n = KI^2(\rho^{n+1-m}i^n)I\iota_1$, existe el morfismo $\{KI^2(\rho^{n+1-m}i^n), (H*G)(F), G(H(F)\iota_1)\} : II_i^{n+1}B \to X$ y se tiene el cuadrado de homotopía $H(F)i^{n+1} = \{HI\rho^{n+1-m}Ii^n, F, H(F)\iota_1\} = \{KI^2(\rho^{n+1-m}i^n), (H*G)(F), G(H(F)\iota_1)\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}.

Entonces el morfismo $L = L'\iota_1 : (H*G)(F)\iota_1 \simeq G(H(F)\iota_1)\iota_1\ rel\ i^n$, donde L' es una extensión del anterior cuadrado de homotopía.

$[(H*G)(F)\iota_1] = ((H*G)I\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F]) = [G(H(F)\iota_1)\iota_1] =$
$(GI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([H(F)\iota_1]) = (GI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F])$.

□

Proposición 1.5.1. *Si* $m > 1$, *para toda* $[H] \in \pi_m^i(X,h)$ *se tiene que* $(HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1 = 1_{\pi_n^i(X,h)} : \pi_n^i(X,h) \to \pi_n^i(X,h)$.

Demostración. Dada $[F] \in \pi_n^i(X,h)$ sea $H(F)$ una extensión del cuadrado de homotopía $Fi^n = HI\rho^{n+1-m}Ii^n\iota_0$ asociado a la cofibración i^n. Entonces:

$HI\chi_1 I^2\rho^{n+1-m}I^2 i^n I\iota_0 = HI\chi_1 I\iota_0 I\rho^{n+1-m}Ii^n = HI\iota_0 I\rho I\rho^{n+1-m}Ii^n = h\rho^{m-1}I\rho^{n+2-m}Ii^n = h\rho^{n+1}Ii^n = Fi^n\rho = F\rho Ii^n$ y $HI\chi_1 I^2\rho^{n+1-m}I^2 i^n I\iota_1 = HI\chi_1 I\iota_1 I\rho^{n+1-m}Ii^n = HI\rho^{n+1-m}Ii^n = H(F)Ii^n$. Por tanto existe el morfismo $\{HI\chi_1 I^2\rho^{n+1-m}I^2 i^n, F\rho, H(F)\} : II_i^{n+1}B \to X$ que da origen al cuadrado de homotopía $F\rho i^{n+1} = \{HI\chi_1 I^2\rho^{n+1-m}I^2 i^n, F\rho, H(F)\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}.

Entonces $G = G'\iota_1 : F \simeq H(F)\iota_1\ rel\ i^n$, donde G' es una extensión del cuadrado de homotopía anterior. Por tanto $[F] = [H(F)\iota_1] = (HI\rho^{n+1-m}Ii^n)_1([F])$. Nótese que si $H : IA \to X$, no se puede definir el morfismo $HI\chi_1$. $\square$

Proposición 1.5.2. *Si $m = n$, entonces para toda $[H] \in \pi_n^i(X,h)$ se tiene que $(HI\rho Ii^n)_1 : \pi_n^i(X,h) \to \pi_n^i(X,h)$ es de la forma $(HI\rho Ii^n)_1([F]) = [H]^{-1} \cdot [F] \cdot [H]$.*

Demostración. En la demostración del teorema 1.4.1 se probó la existencia de los morfismos del tipo $\{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}, \{H\chi_1, h\rho^n, H\} : II^{i^{n-1}} \to X$. Por otro lado $\{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}Ij_0 = h\rho^n = \{H\chi_1, h\rho^n, H\}Ij_0 = \{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}Ij_1$, por tanto existe el morfismo

$\{\{\{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu I\omega : I^{n+1}A \to X$ verificando

$\{\{\{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu I\omega i^{n+1} =$
$\{\{\{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu I\omega\{Ii^n, \iota_0, \iota_1\} =$
$\{\{\{F\rho, h\rho^n, h\rho^n\}, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}I\nu, \{H\chi_1, h\rho^n, H\}\}$
$\{Ij_1 I\{i^{n-1}\rho, 1\} \cup Ij_1, \iota_0\nu\omega, \iota_1\nu\omega\} =$
$\{\{H, H\}(I\{i^{n-1}\rho, 1\} \cup 1), \overline{\overline{F}},$
$\{\{\{F, h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}\}, \{H, h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}\}\}\nu, \{H, h\rho^{n-1}, h\rho^{n-1}\}\}\nu\omega\} =$
$\{\{HIi^{n-1}I\rho, H, H\}, \overline{\overline{F}}, \{\{F', H'\}\nu, H'\}\nu\omega\} =$
$\{\{HI\rho I^2 i^{n-1}, HI\rho I\iota_0, HI\rho I\iota_1\}, \overline{\overline{F}}, \{\{F', H'\}\nu, H'\}\nu\omega\} =$
$\{HI\rho Ii^n, \overline{\overline{F}}, \{\{F', H'\}\nu, H'\}\nu\omega\}$.

Entonces por el corolario 1.3.8, $[F] = [\overline{\overline{F}}]$ y por el teorema 1.2.3 se tiene que $(HI\rho Ii^n)_1([F]) = [\{\{F', H'\}\nu, H'\}\nu\omega]$. De donde, por los teoremas 1.3.1 y 1.3.2 se concluye que $[\{\{F', H'\}\nu, H'\}\nu\omega] = [\overline{\{F', H'\}\nu\omega}] \cdot [H] =$
$[\{F', H'\}\nu\omega]^{-1} \cdot [H] = [\overline{F} * H]^{-1} \cdot [H] = ([F]^{-1} \cdot [H])^{-1} \cdot [H] =$
$[H]^{-1} \cdot ([F]^{-1})^{-1} \cdot [H] = [H]^{-1} \cdot [F] \cdot [H]$. $\square$

Corolario 1.5.1. *Para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$, morfismo $h : A \to X$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, el grupo de homotopía $\pi_n^i(X,h)$ es abeliano.*

Demostración. Por las proposiciones 1.5.1 y 1.5.2 se tiene que para toda $[F], [H] \in \pi_n^i(X, h)$, por ser $n > 1$, $[F]^{[H]} = [F]$, y por ser $n = m$, $[F]^{[H]} = [H]^{-1} \cdot [F] \cdot [H]$. Se concluye que $[F] = [H]^{-1} \cdot [F] \cdot [H]$. $\square$

Capítulo 2

Sucesión Exacta de Homotopía Generalizada Asociada a un Morfismo

La homotopía generalizada, a semejanza de lo que sucede en la mayoría de las teorías de homotopía, asocia a todo morfismo una sucesión exacta relacionando los grupos de homotopía generalizada del morfismo, los de su dominio y los de su codominio.

Para ello es necesario partir de la subcategoría llena de pares de la original cuyos objetos son las cofibraciones. Con las transformaciones naturales y el cilindro inducidos por la I-categoría generalizada original, se obtiene una estructura de este mismo tipo en la mencionada subcategoría. Así se obtienen grupos de homotopía no sólo para las cofibraciones, sino también para morfismos cualesquiera de la categoría original, pues en la obtención de dichos grupos no influye si éste es cofibración o no. Las proyecciones naturales de la categoría de pares en la original inducen homomorfismos entre los respectivos grupos generalizados.

Los grupos de homotopía relativos a una cofibración de un morfismo son grupos de homotopía relativos a cofibraciones de pares procedentes de la iteración de la cofibración dada y de sus respectivos conos. Estos grupos de homotopía generalizada de un morfismo poseen propiedades similares a las definidas para objetos en el capítulo anterior. Se tiene además que todo grupo de homotopía generalizada de un objeto basado en un morfismo puede ser interpretado para toda factorización de este morfismo como un grupo de homotopía generalizada de un morfismo. De esta forma se obtiene un homomorfismo natural de los grupos de homotopía generalizada del codominio de un morfismo en los respectivos de éste.

Usando el homomorfismo natural ya mencionada junto con el homomorfismo proyección entre los grupos de homotopía generalizados y los homomorfismos inducidos por un morfismo se obtiene una sucesión exacta de homotopía generalizada asociada a este morfismo que incluye el grupo del codominio en el grupo del morfismo, proyecta éste en el grupo de su dominio y lo traslada por medio del morfismo al grupo de su codominio. El carácter funtorial de los grupos que intervienen en la sucesión es también adoptada por ésta.

Por último, la acción ya descrita del primer grupo de homotopía generalizada del dominio del morfismo sobre los demás grupos del dominio puede ser extendida a los grupos del codominio y del morfismo. Dicha acción deja invariantes a la sucesión exacta de homotopía generalizada asociada al morfismo.

2.1 I-Categoría Generalizada de Pares

Para crear la sucesión exacta de homotopía generalizada asociada a un morfismo en una I-categoría es necesario estudiar las propiedades de las categorías de pares de ésta.

Como sucede en muchas teorías de homotopía, si se consideran pares como cofibraciones, la categoría resultante va también a tener una estructura similar a la que posee la categoría original, en este caso una estructura de I-categoría generalizada.

Dada una I-categoría generalizada $\mathcal{C}$, se define la categoría **Cof** $\mathcal{C}$ como la subcategoría llena de **Pair** $\mathcal{C}$ cuyos objetos son cofibraciones.

Para los objetos de **Cof** $\mathcal{C}$ se usará la notación $(X,Y),(X',Y'),\dots$ que representará cofibraciones $f : Y \rightarrowtail X$, $f' : Y' \rightarrowtail X', \dots$ en $\mathcal{C}$. Un morfismo $(u,v) : (X,Y) \to (X',Y')$ es un cuadrado conmutativo de la forma $uf = f'v$ en $\mathcal{C}$.

Definición 2.1.1. Un morfismo $(u,v) : (X,Y) \to (X',Y')$ se dice cofibración cuando v y $\{f',u\} : P\{v,f\} \to X'$ son cofibraciones en $\mathcal{C}$.

Observación 2.1.1. Si $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ es una cofibración de pares, también lo es $(f',f) : (Y',Y) \rightarrowtail (X',X)$, donde las cofibraciones asociadas a dichos pares son, respectivamente, $v : Y \rightarrowtail Y'$ y $u : X \rightarrowtail X'$, ya que $\{f',u\} = \{u,f'\} : P\{v,f\} = P\{f,v\} \rightarrowtail X'$.

Para todo par (X,Y) se define $I(X,Y) = (IX,IY)$ con cofibración asociada If, que lo es por la observación 1.1.4 al serlo f, y para todo morfismo de pares (u,v), $I(u,v) = (Iu,Iv)$. Se definen
$\iota_0 = (\iota_0,\iota_0), \iota_1 = (\iota_1,\iota_1) : (X,Y) \to I(X,Y)$,
$\rho = (\rho,\rho) : I(X,Y) \to (X,Y)$ y
$\chi_0 = (\chi_0,\chi_0), \chi_1 = (\chi_1,\chi_1) : I^2(X,Y) \to I(X,Y)$.

Teorema 2.1.1. *La estructura* (**Cof** $\mathcal{C},\iota_\epsilon,\rho,\chi_\epsilon,cof$) *es una I-categoría generalizada, donde cof representa la familia de cofibraciones de pares.*

Demostración. Evidentemente I :**Cof** $\mathcal{C}$ →**Cof** $\mathcal{C}$ es un funtor, y $\iota_\epsilon = (\iota_\epsilon,\iota_\epsilon)$, $\rho = (\rho,\rho)$, $\chi_\epsilon = (\chi_\epsilon,\chi_\epsilon)$ son transformaciones naturales, $\epsilon \in \{0,1\}$.

Los axiomas **GI1** y **GI5** se verifican trivialmente por la definición de las transformaciones naturales.

GI2: Obsérvese que si $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ es una cofibración, también $u = \{f',u\}\overline{v}$ lo es por ser composición de ellas.

Dado un morfismo $(g,h) : (X,Y) \to (X'',Y'')$ y la cofibración $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ entonces por el axioma **GI2** de $\mathcal{C}$ se tienen los push

outs $P\{v,h\}$ y $P\{u,g\}$ y por la proposición 0.2.4, existe $P\{(u,v),(g,h)\} = (P\{u,g\},P\{v,h\})$.
El morfismo asociado a este par, $f' \cup_f f'' : P\{v,h\} \to P\{u,g\}$, es cofibración por la proposición 1.1.3 pues lo son f, f', f'' y, por la observación 2.1.1, $\{u,f'\} : P\{f,v\} \rightarrowtail X'$.

Dados $\{f' \cup f'', \overline{u}\} : P\{f'',\overline{v}\} \to P\{u,g\}$, $\{f',u\} : P\{v,f\} \to X'$ y $\overline{h} \cup_h g : P\{v,f\} \to P\{\overline{v},f''\}$ se tiene que $\{f' \cup f'', \overline{u}\}(\overline{h} \cup g) = \{\overline{g}f', \overline{g}u\} = \overline{g}\{f',u\}$ y por la proposición 0.2.2 $P\{u,g\} = P\{\{f',u\}\widetilde{v},g\} = P\{\{f',u\},\overline{h} \cup g\}$ donde $\widetilde{v}$ es la inducida por v en $P\{v,f\}$, pues $P\{\overline{v},f''\} = P\{v,f''h\} = P\{v,gf\} = P\{\widetilde{v},g\}$. De donde $\{f' \cup f'', \overline{u}\} = \overline{\{f',u\}}$ y, por tanto, cofibración. En consecuencia, $(\overline{u},\overline{v})$ es una cofibración en **Cof** $\mathcal{C}$.

Por otro lado, usando que el funtor I en $\mathcal{C}$ transforma push outs cofibrados en push outs se tiene que $IP\{(u,v),(g,h)\} = I(P\{u,g\},P\{v,h\}) = (IP\{u,g\},IP\{v,h\}) = (P\{Iu,Ig\},P\{Iv,Ih\}) = P\{(Iu,Iv),(Ig,Ih)\} = P\{I(u,v),I(g,h)\}$.

GI3: El morfismo $(\iota_\epsilon,\iota_\epsilon) : (X,Y) \to (IX,IY)$ es cofibración pues lo es ι_ϵ, $\epsilon \in \{0,1\}$ y por la observación 1.1.4 y la proposición 1.1.2, también lo son $\{If,\iota_\epsilon\} : P\{\iota_\epsilon,f\} \to IX$. El morfismo $1_{(X,Y)} = (1_X,1_Y)$ es cofibración por serlo 1_Y y $\{f,1_X\} = f$.

Si $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ y $(u',v') : (X',Y') \rightarrowtail (X'',Y'')$ son cofibraciones entonces $(u',v')(u,v) = (u'u,v'v)$ también lo es pues $v'v$ y $\{f'',u'u\} = \{f'',u'\}(1 \cup u)$ lo son por ser composición de cofibraciones. Nótese que $1 \cup u : P\{v'v,f\} \to P\{v',f'\}$ es cofibración por la proposición 1.1.3 pues lo son $v, 1_{Y''}, u$ y $\{f',u\} : P\{v,f\} \to X'$.

Sea $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ una cofibración y sea $(g,h)(u,v) = (G,H)(\iota_\epsilon,\iota_\epsilon)$ un cuadrado de homotopía asociado a la cofibración (u,v), entonces $hv = H\iota_\epsilon$ es un cuadrado de homotopía asociado a la cofibración v. Sea H' una extensión de este cuadrado. Por otro lado, se tiene el cuadrado de homotopía $g\{f',u\} = \{f''h, G\iota_\epsilon\} = \{f''H', G\}\iota_\epsilon$ asociado a la cofibración $\{f',u\}$, donde $f'' : Y'' \to X''$ es el codominio de los morfismo (g,h) y (G,H). Sea G' una extensión de este cuadrado de homotopía asociado a $\{f',u\}$. Entonces $G'If' = f''H'$ y por tanto existe $(G',H') : I(X',Y') \to (X'',Y'')$. Se tiene entonces $(G',H')(\iota_\epsilon,\iota_\epsilon) = (G'\iota_\epsilon, H'\iota_\epsilon) = (g,h)$ y $(G',H')I(u,v) = (G',H')(Iu,Iv) = (G'Iu, H'Iv) = (G,H)$ y por tanto (G',H') es una extensión del cuadrado de homotopía asociado a la cofibración (u,v).

GI4: Sea una cofibración $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$. Entonces por la proposición 0.2.4 $P\{(\iota_0,\iota_0),(u,v)\} = (P\{\iota_0,u\}, P\{\iota_0,v\})$ y $\{I(u,v),(\iota_0,\iota_0)\} = (\{Iu,\iota_0\},\{Iv,\iota_0\}) : P\{(u,v),(\iota_0,\iota_0)\} = (P\{u,\iota_0\}, P\{v,\iota_0\}) \to I(X',Y')$. Por la misma proposición, $P\{\overline{(u,v)}(\iota_1,\iota_1),(u,v)\} = P\{(\overline{u}\iota_1,\overline{v}\iota_1),(u,v)\} = (P\{\overline{u}\iota_1,u\}, P\{\overline{v}\iota_1,v\})$ y $(u,v)^1 = \{I(u,v),(\iota_0,\iota_0),(\iota_1,\iota_1)\} =$
$\{(\{Iu,\iota_0\},\{Iv,\iota_0\}),(\iota_1,\iota_1)\} = (\{Iu,\iota_0,\iota_1\},\{Iv,\iota_0,\iota_1\}) =$
$(u^1,v^1) : I^1_{(u,v)}(X,Y) = P\{\overline{(u,v)}(\iota_1,\iota_1),(u,v)\} = P\{(\overline{u}\iota_1,\overline{v}\iota_1),(u,v)\} =$
$(P\{\overline{u}\iota_1,u\}, P\{\overline{v}\iota_1,v\}) = (I^1_uX, I^1_vY) \to I(X',Y')$.

El siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd}
P\{v,f\} \arrow[rr, "\{f',u\}"] \arrow[d, tail, "\overline{\{f',u\}}\iota_1"'] & & X' \arrow[d, "\overline{v^1}\overline{\overline{u}\iota_1}"] \\
P\{\iota_0,\{f',u\}\} \arrow[rr, "\{\overline{I^1_{(u,v)}f},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}\}"] & & P\{v^1, I^1_{(u,v)}f\}
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que existe el morfismo $\{\overline{I^1_{(u,v)}f},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}\}$, pues $\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u}If = \overline{v^1}I^1_{(u,v)}f\widetilde{v}\overline{v} = \overline{I^1_{(u,v)}f}v^1\widetilde{v}\overline{v} = \overline{I^1_{(u,v)}f}Iv$, por tanto existe el morfismo $\{\overline{I^1_{(u,v)}f},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u}\} : IP\{v,f\} \to P\{v^1, I^1_{(u,v)}f\}$, y $\{\overline{I^1_{(u,v)}f},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u}\}\iota_0 =$
$\{\overline{I^1_{(u,v)}f}\iota_0,\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u}\iota_0\} = \{\overline{I^1_{(u,v)}f}v^1\widetilde{v}\overline{\iota_0},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}u\} = \{\overline{v^1}I^1_{(u,v)}f\widetilde{v}\overline{\iota_0},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}u\} =$
$\{\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}f',\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}u\} = \overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}\{f',u\}$.

Conmutatividad:

$\{\overline{I^1_{(u,v)}f},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{\iota_0}\}\overline{\{f',u\}}\iota_1 = \{\overline{I^1_{(u,v)}f},\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u}\}\iota_1 = \{\overline{I^1_{(u,v)}f}\iota_1,\overline{v^1}\widetilde{u}\overline{u}\iota_1\} =$
$\{\overline{I^1_{(u,v)}f}v^1\overline{\overline{v}\iota_1},\overline{v^1}\overline{\overline{u}\iota_1}u\} = \{\overline{v^1}I^1_{(u,v)}f\overline{\overline{v}\iota_1},\overline{v^1}\overline{\overline{u}\iota_1}u\} = \{\overline{v^1}\overline{\overline{u}\iota_1}f',\overline{v^1}\overline{\overline{u}\iota_1}u\} =$

$\overline{v^1}\overline{\overline{u}\iota_1}\{f', u\}$.

Propiedad push out:

Dados los morfismos $g : X' \to Z$ y $\{H, G, h\} : P\{\iota_0, \{f', u\}\} \to Z$ verificando $\{H, G, h\}\overline{\{f', u\}}\iota_1 = \{H, G\}\iota_1 = \{H\iota_1, G\iota_1\} = \{gf', gu\}$ entonces $H\iota_1 = gf'$ y $G\iota_1 = gu$. Además, por existir el morfismo $\{H, G, h\}$ se tienen que $H\iota_0 = hf'$, $G\iota_0 = hu$ y $HIv = GIf$. Como $G\iota_0 = hu$ y $\{G, h\}\overline{u}\iota_1 = G\iota_1 = gu$ entonces existe $\{G, h, g\} : I^1_u X \to Z$. Por otro lado $Hv^1 = H\{Iv, \iota_0, \iota_1\} = \{HIv, H\iota_0, H\iota_1\} = \{GIf, hf', gf'\} = \{G, h, g\}I^1_{(u,v)}f$. Por tanto $\{H, \{G, h, g\}\} = \{\{H, G, h\}, g\} : P\{v^1, I^1_{(u,v)}f\} = P\{\overline{\{f', u\}}\iota_1, \{f', u\}\} \to Z$.

Teniendo en cuenta que $P\{\overline{\{f', u\}}\iota_1, \{f', u\}\} = I^1_{\{f',u\}}P\{v, f\}$, se tiene que $\{If', u^1\} = \{f', u\}^1$. Además, por la proposición 1.2 .7, el morfismo $I^1_{(u,v)}f : I^1_v Y \to I^1_u X$ es cofibración.

Se concluye que $(u^1, v^1) = (u, v)^1 : (I^1_u X, I^1_v Y) \rightarrowtail (IX', IY')$ es una cofibración de pares. $\square$

En consecuencia, la categoría **Cof** $\mathcal{C}$ es una I-categoría generalizada, y se pueden obtener en ella los resultados ya probados en el capítulo precedente. Se tendrá homotopía relativa a cofibraciones de pares, grupos de homotopía relativos a éstas y acciones de dichos grupos sobre los de orden superior.

Observación 2.1.2. De la demostración del axioma **GI2** en el teorema 2.1.1 se concluye que si $(g_0, g_1) : (X, Y) \to (X', Y')$ y $(h_0, h_1) : (X, Y) \to (X'', Y'')$ son morfismos de pares tales que existen los push out $P\{g_0, h_0\}$ y $P\{g_1, h_1\}$ entonces existe el push out $P\{(g_0, g_1), (h_0, h_1)\} = (P\{g_0, h_0\}, P\{g_1, h_1\})$ con cofibración asociada $f' \cup_f f''$.

Observación 2.1.3. De la demostración del axioma **GI4** en el teorema 2.1.1 se concluye que para toda cofibración de pares $(u, v) : (X, Y) \to (X', Y')$ se verifica que $(u, v)^1 = (u^1, v^1) : I^1_{(u,v)}(X, Y) = (I^1_u X, I^1_v Y) \to I(X', Y') = (IX', IY')$, donde la cofibración asociada al dominio es $I^1_{(u,v)}f$, es una cofibración de pares. Iterando el proceso, se tiene que $(u, v)^n = ((u, v)^1)^{n-1} = (u^1, v^1)^{n-1} = \cdots (u^{n-1}, v^{n-1})^1 = (u^n, v^n) : I^n_{(u,v)}(X, Y) = (I^n_u X, I^n_v Y) \to I^n(X', Y') =$

(I^nX', I^nY') es una cofibración de pares, donde la cofibración asociada al dominio es $I^n_{(u,v)}f$, que es cofibración por el corolario 1.2.2.

Observación 2.14. Dada una cofibración de pares $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$, usando las observaciones 2.1 .1 y 2.1 .3 se concluye que $((f')^n, f^n)$, desde $(I^n_{f'}Y', I^n_fY)$ en (I^nX', I^nX), es una cofibración de pares. De donde $(I^nu, I^n_{(f',f)}v) : (I^nX, I^n_fY) \to (I^nX', I^n_{f'}Y')$ es también cofibración de pares por la observación 2.1.1.

Existen funtores proyección p_1, p_2 :**Cof** $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definidos sobre la primera y segunda componentes de forma obvia. Estos funtores conservan la homotopía, las operaciones de los grupos y las acciones de estos.

Proposición 2.1.1. *Dada una cofibración de pares* $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$, *si* $(g_0,h_0) \simeq (g_1,h_1)\ rel\ (u,v)$ *entonces* $g_0 \simeq g_1\ rel\ u$ *y* $h_0 \simeq h_1\ rel\ v$.

Demostración. Si $(G,H):(g_0,h_0)\simeq(g_1,h_1)\ rel\ (u,v)$ entonces $(G,H)(u,v)^1 = (G,H)(u^1,v^1) = (Gu^1,Hv^1) = \{(g_0,h_0)(u,v)(\rho,\rho),(g_0,h_0),(g_1,h_1)\} = \{(g_0u\rho,h_0v\rho),(g_0,h_0),(g_1,h_1)\} = (\{g_0u\rho,g_0,g_1\},\{h_0v\rho,h_0,h_1\})$. De donde $G : g_0 \simeq g_1\ rel\ u$ y $H : h_0 \simeq h_1\ rel\ v$. □

Corolario 2.1.1. *Para toda cofibración* $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ *y todo morfismo de pares* $(g,h) : (X,Y) \to (X'',Y'')$, *las inducidas por los funtores proyección,* $p_1 : [(X',Y'),(X'',Y'')]^{(g,h)\{(u,v)\}} \to [Y',Y'']^{h\{v\}}$ *y* $p_2 : [(X',Y'),(X'',Y'')]^{(g,h)\{(u,v)\}} \to [X',X'']^{g\{u\}}$, *son aplicaciones.*

Proposición 2.1.2. *Dada una cofibración de pares* $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$, *si* $[G_0,H_0] \in H_{(u,v)}((g_0,h_0),(g_1,h_1))$ *y* $[G_1,H_1] \in H_{(u,v)}((g_1,h_1),(g_2,h_2))$ *entonces* $[G_0,H_0]\cdot[G_1,H_1] = [G_0 * G_1, H_0 * H_1]$.

Demostración. Por la observación 2.1.2 se tiene que $P\{(u,v),(u,v)\} = (P\{u,u\},P\{v,v\})$ con cofibración asociada $f' \cup_f f'$. Por la observación 2.1.3 y por la proposición 0.2.4 se verifica que $\{(u,v)\rho,1\}\cup 1 =$
$(\{u\rho,1\}\cup 1,\{v\rho,1\}\cup 1) : I^1_{(u,v)}(X,Y) = (I^1_uX, I^1_vY) \to P\{(u,v),(u,v)\} =$

$(P\{u,u\},P\{v,v\})$. Usando de nuevo las observaciones 2.1.2 y 2.1.3 se concluye que $I^{(u,v)}=P\{(u,v)^1,\{(u,v)\rho,1\}\cup 1\}=P\{(u^1,v^1),(\{u\rho,1\}\cup 1,\{v\rho,1\}\cup 1)\}=(P\{u^1,\{u\rho,1\}\cup 1\},P\{v^1,\{v\rho,1\}\cup 1\})=(I^u,I^v)$ con cofibración asociada $If'\cup f'\cup f'$. Además por la proposición 0.2.4, $\omega_{(u,v)}=(\omega_u,\omega_v):I(X',Y')=(IX',IY')\to I^{(u,v)}=(I^u,I^v)$ y $\{j_{0_{(u,v)}},j_{1_{(u,v)}}\}=$
$(\{j_{0_u},j_{1_u}\},\{j_{0_v},j_{1_v}\}):P\{(u,v),(u,v)\}=(P\{u,u\},P\{v,v\})\to I^{(u,v)}=(I^u,I^v)$.

Obsérvese que $j_{0_{(u,v)}}=\{j_{0_{(u,v)}},j_{1_{(u,v)}}\}\overline{(u,v)}=(\{j_{0_u},j_{1_u}\},\{j_{0_v},j_{1_v}\})(\overline{u},\overline{v})=(j_{0_u},j_{0_v}):(X',Y')\to I^{(u,v)}=(I^u,I^v)$.
Análogamente $j_{1_{(u,v)}}=(j_{1_u},j_{1_v}):(X',Y')\to I^{(u,v)}=(I^u,I^v)$.

Por lo anterior y la observación 2.1.2, se tiene que $P\{j_{0_{(u,v)}},j_{0_{(u,v)}}\}=P\{(j_{0_u},j_{0_v}),(j_{0_u},j_{0_v})\}=(P\{j_{0_u},j_{0_u}\},P\{j_{0_v},j_{0_v}\})$ con cofibración asociada $(If'\cup f'\cup f')\cup_{f'}(If'\cup f'\cup f')$. Por la proposición 0.2.4 se tiene $\overline{j_{0_{(u,v)}}}=\overline{(j_{0_u},j_{0_v})}=(\overline{j_{0_u}},\overline{j_{0_v}}):I^{(u,v)}=(I^u,I^v)\to P\{j_{0_{(u,v)}},j_{0_{(u,v)}}\}=$
$(P\{j_{0_u},j_{0_u}\},P\{j_{0_v},j_{0_v}\})$ y $\omega_{(u,v)}\cup j_{1_{(u,v)}}\rho=(\omega_u,\omega_v)\cup(j_{1_u},j_{1_v})\rho=$
$(\omega_u,\omega_v)\cup(j_{1_u}\rho,j_{1_v}\rho)=(\omega_u\cup j_{1_u}\rho,\omega_v\cup j_{1_v}\rho):IP\{(u,v),(u,v)\}=$
$(P\{Iu,Iu\},P\{Iv,Iv\})\to P\{j_{0_{(u,v)}},j_{0_{(u,v)}}\}=(P\{j_{0_u},j_{0_u}\},P\{j_{0_v},j_{0_v}\})$.

Si $\nu'_{(u,v)}$ es una extensión del cuadrado de homotopía $\overline{j_{0_{(u,v)}}}\{j_{0_{(u,v)}},j_{1_{(u,v)}}\}=(\omega_{(u,v)}\cup j_{1_{(u,v)}}\rho)\iota_0$ asociado a la cofibración $\{j_{0_{(u,v)}},j_{1_{(u,v)}}\}$, entonces adopta la forma de un morfismo de pares $\nu'_{(u,v)}=(\nu'_u,\nu'_v):I(I^u,I^v)=(II^u,II^v)\to P\{j_{0_{(u,v)}},j_{0_{(u,v)}}\}=(P\{j_{0_u},j_{0_u}\},P\{j_{0_v},j_{0_v}\})$, y se verifica $(\omega_u\cup j_{1_u}\rho,\omega_v\cup j_{1_v}\rho)=(\omega_{(u,v)}\cup j_{1_{(u,v)}}\rho)=\nu'_{(u,v)}I\{j_{0_{(u,v)}},j_{1_{(u,v)}}\}=(\nu'_u,\nu'_v)(I\{j_{0_u},j_{1_u}\},I\{j_{0_v},j_{1_v}\})=(\nu'_uI\{j_{0_u},j_{1_u}\},\nu'_vI\{j_{0_v},j_{1_v}\})$ y $(\nu'_u\iota_0,\nu'_v\iota_0)=\nu'_{(u,v)}\iota_0=\overline{j_{0_{(u,v)}}}=(\overline{j_{0_u}},\overline{j_{0_v}})$. De donde ν'_u y ν'_v son extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía $\overline{j_{0_u}}\{j_{0_u},j_{1_u}\}=(\omega_u\cup j_{1_u}\rho)\iota_0$ y $\overline{j_{0_v}}\{j_{0_v},j_{1_v}\}=(\omega_v\cup j_{1_v}\rho)\iota_0$ asociados respectivamente a las cofibraciones $\{j_{0_u},j_{1_u}\}$ y $\{j_{0_v},j_{1_v}\}$. Por tanto, $\nu_{(u,v)}=\nu'_{(u,v)}\iota_1=(\nu'_u\iota_1,\nu'_v\iota_1)=(\nu_u,\nu_v)$.

Por la proposición 0.2.4 se verifica que

$\{\{\{(G_0, H_0), (g_0, h_0), (g_1, h_1)\}, \{(g_0, h_0)\rho, (g_0, h_0), (g_0, h_0)\}\}\nu_{(u,v)},$
$\{(G_1, H_1), (g_1, h_1), (g_2, h_2)\}\}\nu_{(u,v)}\omega_{(u,v)} =$
$\{\{(\{G_0, g_0, g_1\}, \{H_0, h_0, h_1\}), (\{g_0\rho, g_0, g_0\}, \{h_0\rho, h_0, h_0\})\}\nu_{(u,v)},$
$(\{G_1, g_1, g_2\}, \{H_1, h_1, h_2\})\}\nu_{(u,v)}\omega_{(u,v)} =$
$\{(\{\{G_0, g_0, g_1\}, \{g_0\rho, g_0, g_0\}\}, \{\{H_0, h_0, h_1\}, \{h_0\rho, h_0, h_1\}\})(\nu_u, \nu_v),$
$(\{G_1, g_1, g_2\}, \{H_1, h_1, h_2\}))\}\nu_{(u,v)}\omega_{(u,v)} =$
$\{(\{\{G_0, g_0, g_1\}, \{g_0\rho, g_0, g_0\}\}\nu_u, \{\{H_0, h_0, h_1\},$
$\{h_0\rho, h_0, h_1\}\}\nu_v), (\{G_1, g_1, g_2\}, \{H_1, h_1, h_2\}))\}\nu_{(u,v)}\omega_{(u,v)} =$
$(\{\{\{G_0, g_0, g_1\}, \{g_0\rho, g_0, g_0\}\}\nu_u, \{G_1, g_1, g_2\}\}, \{\{\{H_0, h_0, h_1\},$
$\{h_0\rho, h_0, h_1\}\}\nu_v, \{H_1, h_1, h_2\}\})(\nu_u, \nu_v)(\omega_u, \omega_v) =$
$(\{\{\{G_0, g_0, g_1\}, \{g_0\rho, g_0, g_0\}\}\nu_u, \{G_1, g_1, g_2\}\}\nu_u\omega_u,$
$\{\{\{H_0, h_0, h_1\}, \{h_0\rho, h_0, h_1\}\}\nu_v, \{H_1, h_1, h_2\}\}\nu_v\omega_v) = (G_0 * G_1, H_0 * H_1).$

□

Corolario 2.1.2. *Dada una cofibración de pares* $(u, v) : (X, Y) \rightarrowtail (X', Y')$ *y un morfismo* $(g, h) : (X', Y') \to (X'', Y'')$ *entonces las inducidas por los respectivos funtores proyección,* $p_1 : \pi_1^{(u,v)}((X'', Y''), (g, h)) \to \pi_1^v(Y'', h)$ *y* $p_2 : \pi_1^{(u,v)}((X'', Y''), (g, h)) \to \pi_1^u(X'', g)$*, son homomorfismos de grupos.*

Demostración. Por el teorema 1.3.2 y la proposición 2.1.2 se tiene que $\pi_1^{(u,v)}((X'', Y''), (g, h)) = [I(X', Y'), (X'', Y'')]^{(g,h)(\rho,\rho)(u,v)^1\{(u,v)^1\}} =$ $[(IX', IY'), (X'', Y'')]^{(g\rho u^1, h\rho v^1)\{(u^1, v^1)\}}$, $\pi_1^v(Y'', h) = [IY', Y'']^{h\rho v^1\{v^1\}}$ y $\pi_1^u(X'', g) = [IX', X'']^{g\rho u^1\{u^1\}}$. De donde por el corolario 2.1.1 se tiene que, $p_1 : [(IX', IY'), (X'', Y'')]^{(g\rho u^1, h\rho v^1)\{(u^1, v^1)\}} \to [IY', Y'']^{h\rho v^1\{v^1\}}$ y $p_2 : [(IX', IY'), (X'', Y'')]^{(g\rho u^1, h\rho v^1)\{(u^1, v^1)\}} \to [IX', X'']^{g\rho u^1\{u^1\}}$ son aplicaciones. Como además para todo $[G_0, H_0], [G_1, H_1] \in H_{(u,v)}((g, h), (g, h))$ se tiene que $p_1([G_0, H_0] \cdot [G_1, H_1]) = p_1([G_0 * G_1, H_0 * H_1]) = [H_0 * H_1] = [H_0] \cdot [H_1] =$ $p_1([G_0, H_0]) \cdot p_1([G_1, H_1])$ y análogamente para p_2, se concluye que p_1 y p_2 son homomorfismos de grupos. □

Corolario 2.1.3. *Dada una cofibración* $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ *y un morfismo* $(g,h) : (X',Y') \to (X'',Y'')$ *entonces las inducidas por los respectivos funtores proyección,* $p_1 : \pi_n^{(u,v)}((X'',Y''),(g,h)) \to \pi_n^v(Y'',h)$ *y* $p_2 : \pi_n^{(u,v)}((X'',Y''),(g,h)) \to \pi_n^u(X'',g)$*, son homomorfismos de grupos para todo* $n \geq 1$*.*

Demostración. Basta observar por la proposición 1.4.1 que $\pi_n^u(X'',g) = \pi_1^{u^{n-1}}(X'',g\rho^{n-1})$, $\pi_n^v(Y'',h) = \pi_1^{v^{n-1}}(Y'',h\rho^{n-1})$, $\pi_n^{(u,v)}((X'',Y''),(g,h)) = \pi_1^{(u,v)^{n-1}}((X'',Y''),(g,h)(\rho,\rho)^{n-1})$, que por la observación 2.1.3 $(u,v)^{n-1} = (u^{n-1},v^{n-1}) : I^{n-1}_{(u,v)}(X,Y) = (I^n_u X, I^n_v Y) \to I^{n-1}(X',Y') = (I^{n-1}X', I^{n-1}Y')$ es una cofibración de pares y que $(g,h)(\rho,\rho)^{n-1} = (g\rho^{n-1}, h\rho^{n-1})$. □

Corolario 2.1.4. *Dada una cofibración* $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$*, y un morfismo* $(g,h) : (X',Y') \to (X'',Y'')$*, si* $[G,H],[U,V] \in \pi_n^{(u,v)}((X'',Y'')),(g,h))$ *entonces* $p_1([G,H]^{[U,V]}) = [H]^{[V]}$ *y* $p_2([G,H]^{[U,V]}) = [G]^{[U]}$*.*

Demostración. La acción definida en el teorema 1.5.1 hace que $[G,H]^{[U,V]} = [(U,V)((G,H))\iota_1]$, donde $(U,V)((G,H))$ es una extensión del cuadrado de homotopía $(G,H)(u,v)^n = (U,V)I\rho I(u,v)^n\iota_0$ asociado a la cofibración $(u,v)^n$. Por la observación 2.1.3, el cuadrado de homotopía anterior es equivalente a $(G,H)(u^n,v^n) = (UI\rho Iu^n, VI\rho Iv^n)(\iota_0,\iota_0)$ luego $(U,V)((G,H)) = (U(G),V(H))$ con $U(G)$ y $V(H)$ extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía $Gu^n = UI\rho Iu^n\iota_0$ y $Hv^n = VI\rho Iv^n\iota_0$ asociadas a las cofibraciones u^n y v^n respectivamente, verificando que $U(G)I^n f' = f''V(H)$.

Por tanto $p_1([G,H]^{[U,V]}) = p_1([(U,V)((G,H))\iota_1]) =$
$p_1([(U(G),V(H))(\iota_1,\iota_1)]) = p_1([U(G)\iota_1, V(H)\iota_1]) = [V(H)\iota_1] = [H]^{[V]}$. Análogamente para p_2. □

Obsérvese que en la definición de los grupos de homotopía relativos a una cofibración $(u,v) : (X,Y) \rightarrowtail (X',Y')$ basados en un morfismo de pares $(g,h) : (X',Y') \to (X'',Y'')$ no interviene para nada que $f'' : Y'' \to X''$ sea una cofibración, lo que permite extender la definición de los grupos de homotopía relativos a cofibraciones de pares a morfismos.

Definición 2.1.2. Dada una cofibración de pares $(u,v):(X,Y)\rightarrowtail(X',Y')$ y morfismos $f'':Y''\to X''$ y $(g,h):(X',Y')\to f''$ y se define el $n-$grupo de homotopía relativo a la cofibración (u,v) del morfismo f'' basado en (g,h) como $\pi_n^{(u,v)}(f'',(g,h))=\pi_n^{(u,v)}((X'',Y''),(g,h))$

2.2 Grupos de Homotopía Generalizados de Morfismos

Dada una cofibración $i:B\rightarrowtail A$ y morfismos $g:A\to Y$ y $f:Y\to X$, la definición 2.1.2 permite definir grupos de homotopía relativos a la cofibración i del morfismo f basado en el morfismo g. Para ello es necesario hacer uso del concepto de cono de una cofibración.

Obsérvese que en general, si se tiene una cofibración $j:A\rightarrowtail X$ y una retracción $r:X\to A$ de la cofibración j, como $jrj=j=j\rho\iota_0=j\rho\iota_1$ entonces siempre existe el morfismo $\{j\rho,jr,1\}:I_j^1A\to X$.

Definición 2.2.1. Dada una cofibración $i:B\rightarrowtail A$, se define el cono de I_i^nB como el push out $CI_i^nB=P\{(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1,\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho,\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^ni^n,1\}\}$, donde $\widetilde{i^{n-1}}:P\{\iota_0,i^{n-1}\}\to P\{\overline{i^{n-1}}\iota_1,i^{n-1}\}=I_i^nB$ es obtenido mediante el axioma de cilindro relativo **GI4**. Nótese que $\rho^ni^n\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}=\rho^n\iota_0^n=1$ y por tanto ρ^ni^n es una retracción para $\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}$.
Asimismo se define el cono del objeto I^nA como $CI^nA=P\{(\iota_0^n)^1,\{\iota_0^n\rho,\iota_0^n\rho^n,1\}\}$. Nótese que $\rho^n\iota_0^n=1$ y por tanto ρ^n es una retracción de ι_0^n.

Se define el cono de la cofibración i^n como $Ci^n=Ii^n\cup i^n:CI_i^nB=P\{(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1,\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho,\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^ni^n,1\}\}\to CI^nA=$
$P\{(\iota_0^n)^1,\{\iota_0^n\rho,\iota_0^n\rho^n,1\}\}$. El morfismo $I^1_{(\iota_0^n,\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})}1$ permite dicha unión como consecuencia de aplicar el teorema 1.2.2 al cuadrado conmutativo $i^n\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}=$

$\iota_0^n 1_A$ y observando que $\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}I^1_{(\iota_0^n, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})}1 = \{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n i^n, i^n\} = \{i^n\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, i^n\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n, i^n\} = i^n\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n, 1\}$.

Se usará la siguiente notación: $k_{I_i^n B} = \overline{(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1} : I_i^n B \to CI_i^n B$, $q_{I_i^n B} = \overline{\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n, 1\}} : II_i^n B \to CI_i^n B$, $k_{I^n A} = \overline{(\iota_0^n)^1} : I^n A \to CI^n A$, $q_{I^n A} = \overline{\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}} : II^n A \to CI^n A$.

Los subíndices en dichos morfismos se sobreentenderán cuando no exista posibilidad de confusión.

Teorema 2.2 .1. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *entonces también* $\{Ci^n, k\} : P\{k, i^n\} \to CI^n A$ *es cofibración.*

Demostración. Obsérvese que $Ci^n k = (Ii^n \cup i^n)k = ki^n$ y que por tanto existe el morfismo $\{Ci^n, k\}$. El siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd}
I_i^{n+1}B \arrow[r, "\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\}"] \arrow[d, "i^{n+1}"'] & P\{k, i^n\} \arrow[d, "\{Ci^n, k\}"] \\
I^{n+1}A \arrow[r, "q"'] & CI^n A
\end{tikzcd}$$

Como $\overline{i^n}q\iota_0 = \overline{i^n}k\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n = \overline{k}i^n\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n = \overline{k}\iota_0\iota_0^{n-1}\rho^n i^n = \overline{k}\iota_0^n\rho^n i^n$ y $\overline{i^n}q\iota_1 = \overline{i^n}k = \overline{k}i^n$ entonces existe el morfismo $\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\}$.

Conmutatividad:

$\{Ci^n, k\}\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} = \{Ci^n q, k\iota_0^n\rho^n, k\} = qi^{n+1}$.

Propiedad de push out:

Sean $\{F, G\} : P\{k, i^n\} \to X$ y $H : I^{n+1}A \to X$ verificando que $Hi^{n+1} = \{F, G\}\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\}$. Entonces $H(\iota_0^n)^1 = H\{I\iota_0^n, \iota_0, \iota_1\} =$
$\{HIi^n I\widetilde{i^{n-1}}I\overline{\iota_0}I\iota_0^{n-1}, H\iota_0, H\iota_1\} =$
$\{\{F, G\}\overline{i^n}qI\widetilde{i^{n-1}}I\overline{\iota_0}I\iota_0^{n-1}, \{F, G\}\overline{k}\iota_0^n\rho^n, \{F, G\}\overline{k}\} =$
$\{FqI\widetilde{i^{n-1}}I\overline{\iota_0}I\iota_0^{n-1}, G\iota_0^n\rho^n, G\} = \{Fk\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, G\iota_0^n\rho^n, G\} =$
$\{Gi^n\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, G\iota_0^n\rho^n, G\} = \{G\iota_0^n\rho, G\iota_0^n\rho^n, G\} = G\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$ de donde $\{H, G\} = \{H, F, G\} : P\{(\iota_0)^1, \{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}\} = P\{i^{n+1}, \{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\}\} \to X$.

□

Proposición 2.2.1. *Dada una cofibración $i : B \to A$, el siguiente cuadrado*

$$\begin{tikzcd} P\{\iota_0, i^n\} \arrow[rr, "\{q,k\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}"] \arrow[d, "\{Ii^n,\iota_0\}"'] & & CI_i^n B \arrow[d, "Ci^n"] \\ I^{n+1}A \arrow[rr, "q"'] & & CI^n A \end{tikzcd}$$

es un push out.

Demostración. Consecuencia inmediata de la demostración del teorema 2.2.1 anterior, observando que $\{Ci^n, k\}\overline{i^n} = Ci^n$ y $\overline{k}\iota_0^n\rho^n = \overline{k}\iota_0\iota_0^{n-1}\rho^n = \overline{i^n}k\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n$, de donde $\{Ci^n, k\}\overline{k}\iota_0^n\rho^n = \{Ci^n, k\}\overline{i^n}k\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n = Ci^n k\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n$. Además, dado $H : I^{n+1}A \to X$ y $F : CI_i^n B \to X$ verificando $H\{Ii^n, \iota_0\} = F\{q, k\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}$ se tiene $H\iota_1 i^n = HIi^n\iota_1 = Fq\iota_1 = Fk$. □

Corolario 2.2 .1. *Si $i : B \rightarrowtail A$ es cofibración, entonces el morfismo $(Ci^n, i^n) : (CI_i^n B, I_i^n B) \to (CI^n A, I^n A)$ es una cofibración de pares, donde las cofibraciones asociadas a dichos pares son las respectivas cofibraciones k.*

Demostración. El morfismo k es cofibración por ser la inducida en un push out de una cofibración. El morfismo i^n es cofibración por el axioma de cilindro relativo, y el morfismo $\{k, Ci^n\}$ también lo es pues por el teorema 2.2.1, $\{Ci^n, k\} = \overline{i^{n+1}}$ es la inducida de una cofibración. □

Definición 2.2 .2. El $n+2$-grupo de homotopía relativo a una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ de un morfismo $f : Y \to X$ basado en un morfismo $g : A \to Y$ se define como $\pi_{n+2}^i(f, g) = \pi_1^{(Ci^n, i^n)}(f, (\{fg\rho^{n+1}, fg\rho^n\}, g\rho^n))$.

La definición de cono asociado a una cofibración y el teorema 2.2.1 permiten expresar los grupos de homotopía generalizados de la categoría original como grupos de homotopía relativos a cofibraciones de pares.

Proposición 2.2.2. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h : A \to X$, cualquier factorización $h = fg : A \to Y \to X$ induce isomorfismos entre los grupos de homotopía $\pi^i_{n+2}(X, h)$ y $\pi_1^{(\{Ci^n,k\},1)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n))$, donde $(\{Ci^n, k\}, 1) : (P\{k, i^n\}, I^n A) \to (CI^n A, I^n A)$ con $\overline{k}$ la cofibración asociada al dominio.*

Demostración. Obsérvese que el morfismo $1 : I^n A \to I^n A$ es cofibración y que $\{k, \{Ci^n, k\}\} = \{Ci^n, k\} : P\{1, \overline{k}\} = P\{k, i^n\} \to CI^n A$ también lo es por el teorema 2.2.1 y, efectivamente, entonces el morfismo $(\{Ci^n, k\}, 1)$ es una cofibración de pares.

Por el apartado 3 de la proposición 1.4.2 y por el push out de la demostración del teorema 2.2.1 se tiene que $(Iq)^* : \pi_1^{\{Ci^n,k\}}(X, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}) \to \pi_1^{i^{n+1}}(X, h\rho^{n+1})$ es un isomorfismo. Por la proposición 1.4.1 se tiene que $\pi_1^{i^{n+1}}(X, h\rho^{n+1}) = \pi^i_{n+2}(X, h)$; y por el corolario 2.1.2, la proyección $p_2 : \pi_1^{(\{Ci^n,k\},1)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n)) \to \pi_1^{\{Ci^n,k\}}(X, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\})$ es un homomorfismo de grupos.

En este caso es suprayectivo e inyectivo y, por tanto, un isomorfismo:

-Suprayectividad:

Si $[F] \in \pi_1^{\{Ci^n,k\}}(X, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\})$ entonces $F\{Ci^n, k\}^1 = \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\{Ci^n, k\}^1$. Como $FIk = \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho Ik = \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}k\rho = h\rho^n\rho = h\rho^{n+1} = fg\rho^{n+1}$, existe $(F, g\rho^{n+1}) : I(CI^n A, I^n A) \to f$ tal que $[F, g\rho^{n+1}] \in \pi_1^{(\{Ci^n,k\},1)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n))$.

-Inyectividad:

Obsérvese que si $[F, G] \in \pi_1^{(\{Ci^n,k\},1)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n))$ entonces $(F, G)(\{Ci^n, k\}, 1)^1 = (F\{Ci^n, k\}^1, G1^1) = (F\{Ci^n, k\}^1, g\rho^{n+1}1^1) = (F\{Ci^n, k\}^1, g\rho^{n+1})$. Además $1^1 = 1$ y por tanto $G = g\rho^{n+1}$. Si $[F_0] = [F_1]$ en $\pi_1^{\{Ci^n,k\}}(X, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\})$ y $F : F_0 \simeq F_1 \; rel \; \{Ci^n, k\}^1$ entonces $(F, g\rho^{n+2}) : (F_0, g\rho^{n+1}) \simeq (F_1, g\rho^{n+1}) \; rel \; (\{Ci^n, k\}, 1)^1$. $\square$

De la definición 2.2.2 y la proposición 2.2.2 surge un homomorfismo natural del $n+2$-grupo de homotopía relativo a una cofibración de un objeto, basado en un morfismo factorizable $h = fg$ en el $n+2$-grupo de homotopía relativo a la cofibración del morfismo f basado en el morfismo g.

Sea $\theta : \pi^i_{n+2}(X, h) \cong \pi_1^{(\{Ci^n,k\},1)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n))$ el isomorfismo de la proposición 2.2.2:

si $[F] \in \pi^i_{n+2}(X, h)$ entonces $Fi^{n+2} = h\rho^{n+2}i^{n+2}$ y, por tanto, $FI(\iota_0^n)^1 = FI\{I\iota_0^n, \iota_0, \iota_1\} = \{FI^2\iota_0^n, FI\iota_0, FI\iota_1\} = \{FI^2\iota_0 I^2\iota_0^{n-1}, h\rho^{n+2}I\iota_0, h\rho^{n+2}I\iota_1\} = \{h\rho^{n+2}I^2\iota_0 I^2\iota_0^{n-1}, h\rho^{n+1}, h\rho^{n+1}\} = \{h\rho^{n+1}I^2\iota_0^{n-1}, h\rho^{n+1}I\iota_0^n I\rho^n, h\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^2, h\rho^{n+1}I\iota_0^n I\rho^n, h\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^{n+1}I\iota_0^n I\rho, h\rho^{n+1}I\iota_0^n I\rho^n, h\rho^{n+1}\} = h\rho^{n+1}I\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$. De donde existe $\{F, h\rho^{n+1}\} : ICI^nA \to X$. El isomorfismo θ viene definido por $\theta([F]) = [\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}]$.

Por el apartado 2 de la proposición 1.4.2 el siguiente cuadrado conmutativo relacionando cofibraciones en la categoría **Cof** $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
(CI^n_iB, I^n_iB) \arrow[r, "(\overline{i^n}, i^n)"] \arrow[d, "(Ci^n, i^n)"'] & (P\{k, i^n\}, I^nA) \arrow[d, "(\{Ci^n,k\},1)"] \\
(CI^nA, I^nA) \arrow[r, "(1,1)"'] & (CI^nA, I^nA)
\end{tikzcd}$$

induce un homomorfismo de grupos
$(I(1,1))^* : \pi_1^{(\{Ci^n,k\},1)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n)) \to \pi_1^{(Ci^n,i^n)}(f, (\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, g\rho^n))$.
Obsérvese que $(I(1,1))^*([H, g\rho^{n+1}]) = [H, g\rho^{n+1}]$. El homomorfismo natural es definido por $j = (I(1,1))^*\theta : \pi^i_{n+2}(X, h) \to \pi^i_{n+2}(f, g)$ como $j([F]) = [\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}]$.

Proposición 2.2 .3. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo morfismo $u : X \to Z$ se inducen homomorfismos de grupos $u_* : \pi^i_{n+2}(f, g) \to \pi^i_{n+2}(uf, g)$ haciendo el siguiente cuadrado conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
\pi^i_{n+2}(X,h) & \xrightarrow{\ \ j\ \ } & \pi^i_{n+2}(f,g) \\
{\scriptstyle u_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_*} \\
\pi^i_{n+2}(Z,uh) & \xrightarrow[\ \ j\ \ ]{} & \pi^i_{n+2}(uf,g)
\end{array}$$

Demostración. El homomorfismo $u_* : \pi^i_{n+2}(X,h) \to \pi^i_{n+2}(Z,uh)$ es el obtenido mediante el primer apartado de la proposición 1.4.2.

El homomorfismo de grupos $u_* : \pi^i_{n+2}(f,g) \to \pi^i_{n+2}(uf,g)$ también se obtiene mediante el mismo apartado de la mencionada proposición aplicada a la categoría de pares, definiéndolo por $u_* = (u,1)_*$, donde $(u,1) : f \to uf$.

De donde $u_*j([F]) = u_*([\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] = [u\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] = [\{uF, uh\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] = j([uF]) = ju_*([F])$. $\square$

Lema 2.21. *Dado un cuadrado conmutativo $uj = iv$ relacionando cofibraciones $i : B \rightarrowtail A$ y $j : F \rightarrowtail E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, el siguiente cuadrado es conmutativo en* **Cof** *$\mathcal{C}$:*

$$\begin{array}{ccc}
(CI^n_jF, I^n_jF) & \xrightarrow{(CI^n_{(i,j)}v, I^n_{(i,j)}v)} & (CI^n_iB, I^n_iB) \\
{\scriptstyle (Cj^n, j^n)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Ci^n, i^n)} \\
(CI^nE, I^nE) & \xrightarrow[(CI^nu, I^nu)]{} & (CI^nA, I^nA)
\end{array}$$

*donde $CI^nu = I^{n+1}u \cup_{I^1_{(\iota^n_0,\iota^n_0)}u} I^nu : CI^nE \to CI^nA$ y $CI^n_{(i,j)}v =$
$II^n_{(i,j)}v \cup_{I^1_{(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0, \widetilde{j^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0)}u} I^n_{(i,j)}v : CI^n_jF \to CI^n_iB$.*

Demostración. Nótese que $I^nu\iota^n_0 = \iota^n_0u$ y que $\{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}I^1_{(\iota^n_0,\iota^n_0)}u = \{\iota^n_0\rho Iu, \iota^n_0\rho^nI^nu, I^nu\} = I^nu\{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}$, de donde por el teorema 1.2.2, existe el morfismo $I^{n+1}u \cup I^nu : P\{(\iota^n_0)^1, \{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}\} \to P\{(\iota^n_0)^1, \{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}\}$. Asimismo, por el corolario 1.2.1, $I^n_{(i,j)}v\widetilde{j^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0 = \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}I^{n-1}u\iota^{n-1}_0 = \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0u$ y por otro lado, $\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0\rho, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0\rho^ni^n, 1\}I^1_{(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0)}u =$
$\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0\rho Iu, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0\rho^ni^nI^n_{(i,j)}v, I^n_{(i,j)}v\} =$
$\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}I^{n-1}u\iota^{n-1}_0\rho, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0\rho^nI^nuj^n, I^n_{(i,j)}v\} =$

$\{I^n_{(i,j)}v\widetilde{j^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, I^n_{(i,j)}v\widetilde{j^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n j^n, I^n_{(i,j)}v\} =$
$I^n_{(i,j)}v\{\widetilde{j^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{j^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n j^n, 1\}$.

Por el teorema 1.2.2 existe el morfismo $II^n_{(i,j)}v \cup I^n_{(i,j)}v = CI^n_{(i,j)}v$.

-Conmutatividad:

$(CI^n u, I^n u)(Cj^n, j^n) = (CI^n uCj^n, I^n uj^n) =$
$((I^{n+1}u \cup I^n u)(Ij^n \cup j^n), I^n uj^n) = (I^{n+1}uIj^n \cup I^n uj^n, I^n uj^n) =$
$(Ii^n II^n_{(i,j)}v \cup i^n I^n_{(i,j)}v, i^n I^n_{(i,j)}v) = (Ci^n CI^n_{(i,j)}v, i^n I^n_{(i,j)}v) =$
$(Ci^n, i^n)(CI^n_{(i,j)}v, I^n_{(i,j)}v)$. □

Proposición 2.2.4. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo cuadrado conmutativo $ui' = iv$ relacionando cofibraciones i e i', se inducen homomorfismos de grupos $(I^{n+2}u)^* : \pi^i_{n+2}(f,g) \to \pi^{i'}_{n+2}(f,gu)$ haciendo el siguiente cuadrado comutativo*

$$\begin{tikzcd}
\pi^i_{n+2}(X,h) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(I^{n+2}u)^*"'] & \pi^i_{n+2}(f,g) \arrow[d, "(I(CI^n u, I^n u))^*"] \\
\pi^{i'}_{n+2}(X,hu) \arrow[r, "j"'] & \pi^{i'}_{n+2}(f,gu)
\end{tikzcd}$$

donde $(I^{n+2}u)^*$ y $(I(CI^n u, I^n u))^*$ vienen dados por la parte segunda de la proposición 1.4.2 usando el cuadrado conmutativo suministrado y el obtenido en el lema 2.2.1 respectivamente.

Demostración. Nótese que por la definición 2.2.2, se tiene $\pi^i_{n+2}(f,g) = \pi_1^{(Ci^n,i^n)}(f,(\{h\rho^{n+1},h\rho^n\},g\rho^n))$ y $\pi^{i'}_{n+2}(f,gu) =$
$\pi_1^{(Ci'^n,i'^n)}(f,(\{hu\rho^{n+1},hu\rho^n\},gu\rho^n))$, y que $(\{hu\rho^{n+1},hu\rho^n\},gu\rho^n) =$
$(\{h\rho^{n+1},h\rho^n\}(I^{n+1}u \cup I^n u), g\rho^n I^n u) = (\{h\rho^{n+1},h\rho^n\},g\rho^n)(CI^n u, I^n u)$.

Conmutatividad: $(I(CI^n u, I^n u))^* j([F]) =$
$(I(CI^n u, I^n u))^*([\{F,h\rho^{n+1}\},g\rho^{n+1}]) = [\{F,h\rho^{n+1}\}ICI^n u, g\rho^{n+1}I^{n+1}u] =$
$[\{FI^{n+2}u, h\rho^{n+1}I^{n+1}u\}, gu\rho^{n+1}] = [\{FI^{n+2}u, hu\rho^{n+1}\}, gu\rho^{n+1}] =$
$j[FI^{n+2}u] = j(I^{n+2}u)^*([F])$. □

2.3 Sucesión Exacta de Homotopía Generalizada Asociada a un Morfismo

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$ se construye una sucesión exacta relacionando los grupos de homotopía relativos a la cofibración i del morfismo f, de su dominio Y y de su codominio X.

Los homomorfismos de grupos que intervienen son la inclusion natural j definida en la sección anterior, el homomorfismo proyección p_1 obtenido en el corolario 2.1.3 y el homomorfismo f_* obtenido por el apartado primero de la proposición 1.4.2.

Proposición 2.3.1. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *y un morfismo* $h = fg : A \to Y \to X$*, los homomorfismos de grupos* $j : \pi^i_{n+2}(X, h) \to \pi^i_{n+2}(f, g)$ *y* $p_1 : \pi^i_{n+2}(f, g) \to \pi^i_{n+1}(Y, g)$ *verifican para todo* $n \in \mathbb{N}$ *que* $Im\ j = Ker\ p_1$.

Demostración. $Im\ j \subseteq Ker\ p_1$:

Para toda $[F] \in \pi^i_{n+2}(X, h)$ se tiene que $p_1 j([F]) = p_1([\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}]) = [g\rho^{n+1}]$.

$Ker\ p_1 \subseteq Im\ j$:

Si $[F, G] \in \pi^i_{n+2}(f, g)$ verifica que $[G] = [g\rho^{n+1}]$ en $\pi^i_{n+1}(Y, g)$, entonces existe una homotopía $H : I^{n+2}A \to Y$ haciendo $H : G \simeq g\rho^{n+1}\ rel\ i^{n+1}$.

Sea $E : I^2 CI^n A \to X$ una extensión del cuadrado de homotopía $F\{Ci^n, k\}^1 = \{\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2, fH\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\}\iota_0$ asociado a la cofibración $\{Ci^n, k\}^1$. Obsérvese que $\{Ci^n, k\}^1 : I^1_{\{Ci^n,k\}} P\{k, i^n\} \to ICI^n A$ es cofibración por el axioma de cilindro relativo y por el teorema 2.2.1.

El morfismo $\{\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2, fH\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\}$, desde $II^1_{\{Ci^n,k\}} P\{k, i^n\}$ en X, existe pues:

$h\rho^n i^n \rho^3 I^2(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1 = \{h\rho^n i^n \rho^3 I^3(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}), h\rho^n i^n \rho^3 I^2 \iota_0, h\rho^n i^n \rho^3 I^2 \iota_1\} = \{h\rho^n i^n \rho^2 I^2 \rho I^3(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}), h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^n i^n \rho^2\} =$

$\{h\rho^n i^n \rho^2 I^2(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})I^2\rho, h\rho^2 I^2(\rho^n i^n), h\rho^n i^n \rho^2\} =$
$\{h\rho^n i^n \rho^2 I^2(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho), h\rho^2 I^2 \rho^n I^2 \iota_0^n I^2(\rho^n i^n), h\rho^n i^n \rho^2\} =$
$\{h\rho^n i^n \rho^2 I^2(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho), h\rho^2 I^2 \rho^n I^2 i^n I^2(i^n \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0})I^2\iota_0^{n-1} I^2(\rho^n i^n), h\rho^n i^n \rho^2\} =$
$\{h\rho^n i^n \rho^2 I^2(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho), h\rho^n i^n \rho^2 I^2(\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n), h\rho^n i^n \rho^2\} =$
$h\rho^n i^n \rho^2 I^2\{\widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{i^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n i^n, 1\}$.

Por tanto existe el morfismo $\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2\} : I^2 C I_i^n B \to X$; además $\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2\} I^2 k = h\rho^n i^n \rho^2 = h\rho^{n+2} I^2 i^n = fg\rho^{n+2} I^2 i^n = fHI^2 i^n$. Por tanto existe el morfismo $\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2, fH\} : I^2 P\{k, i^n\} \to X$; finalmente
$\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2, fH\} I\iota_\epsilon = \{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^n i^n \rho, fg\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^{n+2} I^2 i^n, h\rho^{n+1} I i^n, h\rho^{n+1}\} = \{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}\{I^2 i^n \cup I i^n, Ik\} =$
$\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho I\{Ci^n, k\}$.

La conmutatividad del cuadrado se verifica, pues $F\{Ci^n, k\}^1 =$
$\{FI\{Ci^n, k\}, F\iota_0, F\iota_1\} = \{FICi^n, FIk, F\iota_0, F\iota_1\} =$
$\{\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho ICi^n, fG, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\} =$
$\{\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}(I^2 i^n \cup I i^n), fH\iota_0, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\iota_0, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\iota_0\} =$
$\{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^n i^n \rho\}\rho\iota_0, fH\iota_0, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\iota_0, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\iota_0\} =$
$\{\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2, fH\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\}\iota_0$.

Por otro lado $EI^2 k = EI\{Ci^n, k\}^1 I(\widetilde{\{Ci^n, k\}}\overline{\{Ci^n, k\}} I\overline{k}) =$
$\{\{h\rho^n i^n \rho^3, h\rho^n i^n \rho^2, fH\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\}$
$I(\widetilde{\{Ci^n, k\}}\overline{\{Ci^n, k\}} I\overline{k}) = fH$, por tanto existe $(E, H) : I^2(CI^n A, I^n A) \to f$.

Como $(E, H)\iota_1 = (E\iota_1, H\iota_1) = (E\iota_1, g\rho^{n+1})$, $(E, H)\iota_0 = (E\iota_0, H\iota_0) =$ (F, G) y $(E, H)I(Ci^n, i^n)^1 = (EI(Ci^n)^1, HIi^{n+1}) =$
$(\{h\rho^{n+3}, h\rho^{n+2}\}I(Ci^n)^1, G\rho Ii^{n+1}) = (F(Ci^n)^1\rho, G\rho(Ii^n)^1) =$
$(F\rho I(Ci^n)^1, G\rho(Ii^n)^1) = (F, G)(\rho, \rho)I(Ci^n, i^n)^1$.
Por tanto $(E, H) : (F, G) \simeq (E\iota_1, g\rho^{n+1})\ rel\ (Ci^n, i^n)^1$ y como por los teoremas 1.2.2 y 2.2.1 $E\iota_1 Iqi^{n+2} =$
$E\iota_1\{Ci^n, k\}^1(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$
$EI\{Ci^n, k\}^1\iota_1(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$

$\{\{h\rho^n i^n\rho^3, h\rho^n i^n\rho^2, fH\},\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho,\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho\}\iota_1$
$(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$
$\{\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^n i^n\rho, h\rho^{n+1}\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\},\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\}$
$(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$
$\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, h\rho^{n+1}, h\rho^{n+1}, h\rho^{n+1}\} = h\rho^{n+2}i^{n+2}$ entonces
$[E\iota_1 Iq] \in \pi^i_{n+2}(X, h)$ y $j([E\iota_1 Iq]) = [\{E\iota_1 Iq, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] =$
$[\{E\iota_1 Iq, E\iota_1 Ik\}, g\rho^{n+1}] = [E\iota_1, g\rho^{n+1}] = [F, G]$.

□

Proposición 2.3.2. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, los homomorfismos de grupos $p_1 : \pi^i_{n+2}(f, g) \to \pi^i_{n+1}(Y, g)$ y $f_* : \pi^i_{n+1}(Y, g) \to \pi^i_{n+1}(X, h)$ verifican para todo $n \in \mathbb{N}$ que $Im\ p_1 = Ker\ f_*$.*

Demostración. $Im\ p_1 \subseteq Ker\ f_*$:

Para todo $[F, G] \in \pi^i_{n+2}(f, g)$ se tiene que $f_*p_1([F, G]) = f_*([G]) = [fG]$.

Sea $H : I^{n+3}A \to X$ una extensión del cuadrado de homotopía $FIqi^{n+2} = \{\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0, fG\chi_1, h\rho^{n+2}\}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+2}.

El morfismo $\{\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0, fG\chi_1, h\rho^{n+2}\} : II^{n+2}_i B \to X$ existe pues $fGIi^n = h\rho^{n+1}Ii^n = h\rho^n i^n\rho^2 I\iota_\epsilon$, y por tanto existe el morfismo $\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\} : II^{n+1}_i B \to X$; además $fG\chi_1 Ii^{n+1} =$
$\{fG\chi_1 IIi^n, fG\chi_1 I\iota_0, fG\chi_1 I\iota_1\} =$
$\{fGIi^n\chi_1, fG\iota_0\rho, fG\} = \{h\rho^n i^n\rho\chi_1, h\rho^{n+1}, fG\} =$
$\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0 I\iota_0$ y $\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0 I\iota_1 =$
$\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\iota_1\rho = \{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, h\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^{n+2}I^2 i^n, h\rho^{n+2}I\iota_0, h\rho^{n+2}I\iota_1\} = h\rho^{n+2}Ii^{n+1}$.

Efectivamente el cuadrado es conmutativo pues por los teoremas 1.2.2 y 2.2.1 se tiene que $FIqi^{n+2} = F\{Ci^n, k\}^1(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$
$\{FICi^n, FIk, F\iota_0, F\iota_1\}(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$
$\{\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho ICi^n, fG,\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\}(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$
$\{\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^n i^n\rho, fG\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\}(I\{\overline{i^n}q, \overline{k}\iota_0^n\rho^n, \overline{k}\} \cup q \cup q) =$

$\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG, h\rho^{n+1}, h\rho^{n+1}\} =$
$\{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0\iota_0, fG\iota_0\rho, h\rho^{n+2}\iota_0\} =$
$\{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0, fG\chi_1, h\rho^{n+2}\}\iota_0$.

Como $H\iota_1 i^{n+2} = HIi^{n+2}\iota_1 = \{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0, fG\chi_1, h\rho^{n+2}\}\iota_1 =$
$\{\{h\rho^{n+2} I^2 i^n, h\rho^{n+1}, fG\}\iota_1\rho, fG, h\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^{n+2} I^2 i^n, h\rho^{n+2} I\iota_0, fg\rho^{n+1}, fG, h\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^{n+2} I^2 i^n, h\rho^{n+2} I\iota_0, h\rho^{n+2} I\iota_1, fG, h\rho^{n+1}\} =$
$\{h\rho^{n+2} I i^{n+1}, fG, h\rho^{n+1}\}$. De donde $H\iota_1 : fG \simeq h\rho^{n+1}\ rel\ i^{n+1}$.

$Ker\ f_* \subseteq Im\ p_1$:

Para toda $[G] \in \pi^i_{n+1}(Y, g)$ verificando que $f_*([G]) = [fG] = [h\rho^{n+1}]$ en $\pi^i_{n+1}(X, h)$ existe $H : I^{n+2}A \to X$ haciendo $H : fG \simeq h\rho^{n+1}\ rel\ i^{n+1}$.

Sea $E : I^{n+3}A \to X$ una extensión del cuadrado de homotopía $Hi^{n+2} = \{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0, fG\chi_1, h\rho^{n+2}\}\iota_1$ asociado a la cofibración i^{n+2}.

Obsérvese que el morfismo
$\{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0, fG\chi_1, h\rho^{n+2}\} : II^{n+2}_i B \to X$ existe por lo dicho anteriormente, y que la conmutatividad es obvia pues la homotopía H hace la función de la anteriormente denominada $H\iota_1$.

Como $E\iota_0 I(\iota_0^n)^1 = E\iota_0 I\{I\iota_0^n, \iota_0, \iota_1\} = \{EI^3\iota_0^n, EI^2\iota_0, EI^2\iota_1\}\iota_0 =$
$\{EI^3\iota_0 I^3\iota_0^{n-1}, EI^2 i^{n+1} I^2 \widetilde{i^n} I^2 \overline{\iota_0}, EI^2 i^{n+1} I^2(\overline{\overline{i^n}\iota_1})\}\iota_0 =$
$\{EI^2 i^{n+1} I^2 \widetilde{i^n} I^2 \overline{i^n} I^3 \widetilde{i^{n-1}} I^3 \overline{\iota_0} I^3 \iota_0^{n-1}, \{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0 I^2 \widetilde{i^n} I^2 \overline{\iota_0},$
$\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0 I^2(\overline{\overline{i^n}\iota_1})\}\iota_0 =$
$\{\{h\rho^n i^n \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0 I^2 \widetilde{i^n} I^2 \overline{i^n} I^3 \widetilde{i^{n-1}} I^3 \overline{\iota_0} I^3 \iota_0^{n-1}, h\rho^{n+1}\chi_0, fG\chi_0\}\iota_0 =$
$\{h\rho^n i^n \rho^2 \chi_0 I^3 \widetilde{i^{n-1}} I^3 \overline{\iota_0} I^3 \iota_0^{n-1}, h\rho^{n+1}\chi_0, fG\chi_0\}\iota_0 =$
$\{h\rho^n i^n \widetilde{i^{n-1}} \overline{\iota_0} \iota_0^{n-1} \rho^2 \chi_0, h\rho^{n+1}\chi_0, fG\chi_0\}\iota_0 =$
$\{h\rho^n \iota_0 \iota_0^{n-1} \rho^2, h\rho^{n+1}, fG\} = \{fg\rho^n I\iota_0^{n-1} I\rho, fg\rho^n I\iota_0^{n-1} I\rho^{n-1} I\rho, fG\} =$
$\{fGI\iota_0 I\iota_0^{n-1} I\rho, fGI\iota_0 I\iota_0^{n-1} I\rho^n, fG\} = fGI\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$ y por tanto existe $\{E\iota_0, fG\} : ICI^nA \to X$.

Por otro lado $\{E\iota_0, fG\}(Ci^n)^1 =$

$\{\{E\iota_0, fG\}(I^2i^n \cup Ii^n), \{E\iota_0, fG\}\iota_0, \{E\iota_0, fG\}\iota_1\} =$
$\{\{E\iota_0 I^2i^n, fGIi^n\}, \{E\iota_0\iota_0, fG\iota_0\}, \{E\iota_0\iota_1, fG\iota_1\}\} =$
$\{\{EI^3i^n\iota_0, fg\rho^{n+1}Ii^n\}, \{EI\iota_0\iota_0, fg\rho^n\}, \{EI\iota_1\iota_0, fg\rho^n\}\} =$
$\{\{EI^2i^{n+1}I^2\widetilde{i^n}I^2\overline{i^n}\iota_0, h\rho^{n+1}Ii^n\}, \{fG\chi_1\iota_0, h\rho^n\}, \{h\rho^{n+2}\iota_0, h\rho^n\}\} =$
$\{\{\{h\rho^n i^n\rho^2, h\rho^{n+1}, fG\}\chi_0 I^2\widetilde{i^n}I^2\overline{i^n}\iota_0, h\rho^{n+1}Ii^n\},\{fG\iota_0\rho, h\rho^n\},\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\} =$
$\{\{h\rho^n i^n\rho^2\chi_0\iota_0, h\rho^{n+1}Ii^n\}, \{fg\rho^n\rho, h\rho^n\}, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\} =$
$\{\{h\rho^{n+2}I^2i^n, h\rho^{n+1}Ii^n\}, \{h\rho^{n+2}\iota_0, h\rho^{n+1}\iota_0\}, \{h\rho^{n+2}\iota_1, h\rho^{n+1}\iota_1\}\} =$
$\{\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}ICi^n, \{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}\iota_0, \{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}\iota_1\} =$
$\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}(Ci^n)^1 = \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho(Ci^n)^1$,
de donde $[\{E\iota_0, fG\}] \in \pi_1^{Ci^n}(X, \{h\rho^{n+1}, h\rho^n\})$ y como $\{E\iota_0, fG\}Ik = fG$ entonces $[\{E\iota_0, fG\}, G] \in \pi^i_{n+2}(f, g)$. Se concluye que $p_1([\{E\iota_0, fG\}, G]) = [G]$. $\square$

Proposición 2.3.3. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, los homomorfismos de grupos $f_* : \pi^i_{n+2}(Y, g) \to \pi^i_{n+2}(X, h)$ y $j : \pi^i_{n+2}(X, h) \to \pi^i_{n+2}(f, g)$ verifican para todo $n \in \mathbb{N}$ que $Im\ f_* = Ker\ j$.*

Demostración. $Im\ f_* \subseteq Ker\ j$:

Si $[G] \in \pi^i_{n+2}(Y, g)$ entonces $jf_*([G]) = j([fG]) = [\{fG, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}]$.

Como $fGI\chi_1 I^2(\iota_0^n)^1 = \{fGI\chi_1 I^3\iota_0^n, fGI\chi_1 I^2\iota_0, fGI\chi_1 I^2\iota_1\} =$
$\{fGI^2\iota_0^n I\chi_1, fGI\iota_0 I\rho, fG\} = \{fg\rho^{n+2}I^2\iota_0^n I\chi_1, fg\rho^{n+2}I\iota_0 I\rho, fG\} =$
$\{fg\rho^2 I\chi_1, fg\rho^{n+2}I^2\iota_0^n I^2\rho^n, fG\} = \{fg\rho^3, fGI^2\iota_0^n I^2\rho^n, fG\} =$
$\{fg\rho^{n+2}I^2\iota_0^n I^2\rho, fGI^2\iota_0^n I^2\rho^n, fG\} = \{fGI^2\iota_0^n I^2\rho, fGI^2\iota_0^n I^2\rho^n, fG\} =$
$fGI^2\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$ entonces existe el morfismo $\{fGI\chi_1, fG\} : I^2CI^nA \to X$. Además $\{fGI\chi_1, fG\}I^2k = fG$ y por tanto existe el morfismo de pares $(\{fGI\chi_1, fG\}, G) : (I^2CI^nA, I^{n+2}A) \to f$ verificando
$(\{fGI\chi_1, fG\}, G)(Ci^n, i^n)^2 =$
$\{(\{fGI\chi_1, fG\}, G)I^2(Ci^n, i^n), (\{fGI\chi_1, fG\}, G)I\iota_0, (\{fGI\chi_1, fG\}, G)I\iota_1,$
$(\{fGI\chi_1, fG\}, G)\iota_0, (\{fGI\chi_1, fG\}, G)\iota_1\} =$
$\{(\{fGI\chi_1 I^3i^n, fGI^2i^n\}, GI^2i^n), (\{fGI\iota_0 I\rho, fGI\iota_0\}, GI\iota_0),$

$(\{fG, fGI\iota_1\}, GI\iota_1), (\{fG\iota_0\chi_1, fG\iota_0\}, G\iota_0), (\{fG\iota_1\chi_1, fG\iota_1\}, G\iota_1)\} =$
$\{(\{fGI^2i^nI\chi_1, fg\rho^{n+2}I^2i^n\}, g\rho^{n+2}I^2i^n), (\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}),$
$(\{fG, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}), (\{fg\rho^{n+1}\chi_1, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}),$
$(\{fg\rho^{n+1}\chi_1, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})\} = (\{fg\rho^n i^n\rho^2 I\chi_1, fg\rho^{n+2}I^2i^n\}, g\rho^{n+2}I^2i^n),$
$(\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}), (\{fG, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}),$
$(\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}), (\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})\} =$
$\{(\{fg\rho^{n+3}, fg\rho^{n+2}\}, g\rho^{n+2})I^2(Ci^n, i^n), (\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}),$
$(\{fG, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}), (\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}),$
$(\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})\}$. Por la proposición 1.2.6 se concluye que
$(\{fg\rho^{n+2}, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}) \simeq (\{fG, fg\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})\ rel\ (Ci^n, i^n)^1$.

$Ker\ j \subseteq Im\ f_*$:

Si $[F] \in \pi^i_{n+2}(X, h)$ y $[\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] =$
$[\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] \in \pi^i_{n+2}(f, g)$ entonces existe
$(H, G) : (I^2CI^nA, I^{n+2}A) \to f$ tal que
$(\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}) \simeq (\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})\ rel\ (Ci^n, i^n)^1$.

Entonces $HI^2qi^{n+3} =$
$\{HI^2qI^3i^n, HI^2qI^2\iota_0, HI^2qI^2\iota_1, HI^2qI\iota_0, HI^2qI\iota_1, HI^2q\iota_0, HI^2q\iota_1\} =$
$\{HI^2Ci^nI^2q, HI^2kI^2\iota_0^nI^2\rho^n, HI^2k, HI\iota_0Iq, HI\iota_1Iq, H\iota_0Iq, H\iota_1Iq\} =$
$\{\{h\rho^{n+3}, h\rho^{n+2}\}I^2Ci^nI^2q, fGI^2\iota_0^nI^2\rho^n, fG, \{h\rho^{n+3}, h\rho^{n+2}\}I\iota_0Iq,$
$\{h\rho^{n+3}, h\rho^{n+2}\}I\iota_1Iq, \{F, h\rho^{n+1}\}Iq, \{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}Iq\} =$
$\{\{h\rho^{n+3}, h\rho^{n+2}\}I^2qI^3i^n, fg\rho^{n+2}I^2\iota_0^nI^2\rho^n, fG, \{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}Iq,$
$\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}Iq, F, h\rho^{n+2}\} =$
$\{h\rho^{n+3}I^3i^n, h\rho^{n+2}, fG, h\rho^{n+2}, h\rho^{n+2}, F, h\rho^{n+2}\}$. Por la proposición 1.24 se concluye que $fG \simeq F\ rel\ i^{n+2}$. De donde $f_*([G]) = [F]$. Nótese que $G : g\rho^{n+1} \simeq g\rho^{n+1}\ rel\ i^{n+1}$.

□

Teorema 2.3 .1. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *y un morfismo*

$h = fg : A \to Y \to X$, *la siguiente sucesión de grupos es exacta:*

$$\cdots \to \pi_4^i(X,h) \xrightarrow{j} \pi_4^i(f,g) \xrightarrow{p_1} \pi_3^i(Y,g) \xrightarrow{f_*}$$

$$\xrightarrow{f_*} \pi_3^i(X,h) \xrightarrow{j} \pi_3^i(f,g) \xrightarrow{p_1} \pi_2^i(Y,g) \xrightarrow{f_*} \pi_2^i(X,h)$$

Demostración. Consecuencia inmediata de las proposiciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3. □

Definición 2.3 .1. Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, la sucesión exacta del teorema 2.3.1 se denomina sucesión exacta de de homotopía generalizada relativa a la cofibración i del morfismo f basada en el morfismo g. Se simboliza por $S(i, f, g)$.

El carácter funtorial de los grupos de homotopía generalizada se trasmite a la sucesión exacta de homotopía generalizada de un morfismo.

Proposición 2.3.4. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, todo morfismo $u : X \to Z$ induce un homomorfismo entre sucesiones exactas de grupos $u_* : S(i, f, g) \to S(i, uf, g)$.*

Demostración. El homomorfismo $u_* : S(i, f, g) \to S(i, uf, g)$ viene definido por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "p_1"] & \pi_3^i(Y,g) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "1"] & \pi_3^i(X,h) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "u_*"] & \pi_3^i(f,g) \arrow[r, "p1"] \arrow[d, "u_*"] & \pi_2^i(Y,g) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "1"] & \pi_2^i(X,h) \arrow[d, "u_*"] \\
\cdots \arrow[r, "p_1"] & \pi_3^i(Y,g) \arrow[r, "(uf)_*"] & \pi_3^i(Z,uh) \arrow[r, "j"] & \pi_3^i(uf,g) \arrow[r, "p_1"] & \pi_2^i(Y,g) \arrow[r, "(uf)_*"] & \pi_2^i(Z,uh)
\end{tikzcd}$$

donde $u_* : \pi_{n+1}^i(X,h) \to \pi_{n+1}^i(Z,uh)$ es definido como en la primera parte de la proposición 1.4.2, y $u_* : \pi_{n+2}^i(f,g) \to \pi_{n+2}^i(uf,g)$ es definido como en la proposición 2.2.3.

Obsérvese que por la proposición 2.2.3 ya citada se tiene que $u_* j = j u_*$. Además $u_* f_* = (uf)_*$. Finalmente, para toda $[F,G] \in \pi_{n+2}^i(f,g)$ se tiene que $p_1 u_*([F,G]) = p_1([uF,G]) = [G] = p_1([F,G])$. □

Proposición 2.3.5. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, para todo cuadrado conmutativo $uj = iv$ relacionando cofibraciones i y j, se induce un homomorfismo entre sucesiones exactas de grupos $u^* : S(i,f,g) \to S(j,f,gu)$.*

Demostración. El homomorfismo $u^* : S(i,f,g) \to S(j,f,gu)$ viene definido por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \pi_3^i(Y,g) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "(I^3u)^*"] & \pi_3^i(X,h) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(I^3u)^*"] & \pi_3^i(f,g) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "(I(CIu,Iu))^*"] & \pi_2^i(Y,g) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "(I^2u)^*"] & \pi_2^i(X,h) \arrow[d, "(I^2u)^*"] \\
\cdots \pi_3^j(Y,gu) \arrow[r, "f_*"] & \pi_3^j(X,hu) \arrow[r, "j"] & \pi_3^j(f,gu) \arrow[r, "p_1"] & \pi_2^j(Y,gu) \arrow[r, "f_*"] & \pi_2^j(X,hu)
\end{tikzcd}$$

donde $(I^{n+1}u)^* : \pi_{n+1}^i(Y,g) \to \pi_{n+1}^j(Y,gu)$, $(I^{n+1}u)^* : \pi_{n+1}^i(X,h) \to \pi_{n+1}^j(X,hu)$ y $(I(CI^nu, I^nu))^* : \pi_{n+2}^i(f,g) \to \pi_{n+2}^j(f,gu)$ están definidos como en la segunda parte de la proposición 1.42. Por la proposición 2.24, $(I(CI^nu, I^nu))^* j = j(I^{n+2}u)^*$. Además para toda $[F,G] \in \pi_{n+2}^i(f,g)$, $(I^{n+1}u)^* p_1([F,G]) = (I^{n+1}u)^*([G]) = [GI^{n+1}u] = p_1([FICI^nu, GI^{n+1}u]) = p_1(I(CI^nu, I^nu))^*([F,G])$.

Finalmente, para toda $[G] \in \pi_{n+1}^i(Y,g)$ se tiene que $(I^{n+1}u)^* f_*([G]) = (I^{n+1}u)^*([fG]) = [fGI^{n+1}u] = f_*([GI^{n+1}u]) = f_*(I^{n+1}u)^*([G])$.

□

2.4 Acción equivariante del primer grupo de homotopía generalizada

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, el primer grupo de homotopía generalizada $\pi_1^i(Y,g)$ actúa por la derecha equivariantemente sobre la sucesión $S(i,f,g)$.

Para ello se deben definir acciones a la derecha de $\pi_1^i(Y,g)$ en los grupos $\pi_{n+1}^i(Y,g)$, $\pi_{n+1}^i(X,h)$ y $\pi_{n+2}^i(f,g)$. Dada $[H] \in \pi_1^i(Y,g)$ el isomorfismo $[H] : \pi_{n+1}^i(Y,g) \to \pi_{n+1}^i(Y,g)$ viene definido en el teorema 1.5.1. Por otro lado, si $[H] \in \pi_1^i(Y,g)$ entonces $[fH] \in \pi_1^i(X,h)$ y se define el isomorfismo $[H] = [fH] : \pi_{n+1}^i(X,h) \to \pi_{n+1}^i(X,h)$.

Obsérvese que por la parte primera de la proposición 1.4.2, $f_* : \pi_1^i(Y,g) \to \pi_1^i(X,h)$ es un homomorfismo de grupos y que por tanto si $[H_0] = [H_1]$ en $\pi_1^i(Y,g)$ entonces $[fH_0] = [fH_1]$ en $\pi_1^i(X,h)$, que $f_*([H]\cdot[G]) = (f_*([H]))\cdot(f_*([G])) = [fH]\cdot[fG]$ y que $[fg\rho] = [h\rho]$, por lo que la acción está bien definida.

Finalmente, si $[H] \in \pi_1^i(Y,g)$ se define el isomorfismo de grupos $[H] : \pi_{n+2}^i(f,g) \to \pi_{n+2}^i(f,g)$ de la siguiente forma:

Teorema 2.4 .1. *Dada una cofibración* $i : B \rightarrowtail A$ *y un morfismo* $h = fg : A \to Y \to X$*, se tiene que* $\theta : \pi_{n+2}^i(f,g) \times \pi_1^i(Y,g) \to \pi_{n+2}^i(f,g)$ *definida usando la notación del teorema 1.2.3, asociada a la cofibración* $(Ci^n, i^n)^1$*, por* $\theta([F,G],[H]) = [F,G]^{[H]} =$

$$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI(\rho^{n+1}i^{n+1}))_1([F,G]) \text{ es una acción.}$$

Demostración. Isomorfismos:

Obsérvese que $fHI\rho^{n+1}I(\iota_0^n)^1 = \{fHI\rho^{n+1}I^2\iota_0^n, fHI\rho^{n+1}I\iota_0, fHI\rho^{n+1}I\iota_1\} = \{fHI\rho^n I\iota_0^n I\rho, fHI\rho^n I\iota_0^n I\rho^n, fHI\rho^n\} = fHI\rho^n I\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$ y por tanto existe el morfismo $\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\} : ICI^nA \to X$.

Por otro lado $\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}Ik = fHI\rho^n$ y por tanto existe el morfismo de pares $(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n) : I(CI^nA, I^nA) \to f$. Como consecuencia se tiene la existencia del morfismo $(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)I\rho I(Ci^n, i^n)^1 = (\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}) : II^1_{(Ci^n,i^n)}(CI_i^nB, I_i^nB) \to f$.

Nótese que $(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0 =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}\iota_0(Ci^n)^1, H\iota_0\rho^{n+1}i^{n+1}) =$
$(\{fH\iota_0\rho^{n+2}, fH\iota_0\rho^{n+1}\}(Ci^n)^1, g\rho^{n+1}i^{n+1}) =$

$(\{h\rho^{n+1}, h\rho^n\}\rho(Ci^n)^1, g\rho^{n+1}i^{n+1})$ y por el teorema 1.2.3 se tiene que toda $[H]\in\pi_1^i(Y,g)$ induce una biyección $(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1$ desde el grupo
$\pi_{n+2}^i(f,g) = [(ICI^nA, I^{n+1}A), f]^{(\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}(Ci^n)^1, g\rho^{n+1}i^{n+1})\{(Ci^n, i^n\}^1)}$ en el mismo $\pi_{n+2}^i(f,g) = [(ICI^nA, I^{n+1}A), f]^{(\{h\rho^{n+2}, h\rho^{n+1}\}(Ci^n)^1, g\rho^{n+1}i^{n+1})\{(Ci^n, i^n)^1\}}$.

Una extensión similar a la usada en el teorema 1.4.1 da también en este caso que $(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1$ es un isomorfismo de grupos, esto es:

Si $H(F_1,G_1), H(F_2,G_2) : I^2(CI^nA, I^nA) \to f$ denotan respectivamente extensiones de los cuadrados de homotopía $(F_1,G_1)(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ y $(F_2,G_2)(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ asociados a la cofibración $(Ci^n,i^n)^1$, entonces el morfismo

$\{\{\{H(F_1,G_1), (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n), (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)\},$
$\{(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1}), (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n),$
$(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)\}\}I\nu, \{H(F_2,G_2), (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n),$
$(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)\}\}I\nu I\omega : I^2(CI^nA, I^nA) \to f$ es una extensión del cuadrado de homotopía $((F_1,G_1)*(F_2,G_2))(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ asociado a la cofibración $(Ci^n,i^n)^1$, que demuestra la igualdad
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F_1,G_1]\cdot[F_2,G_2]) =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F_1,G_1])\cdot$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F_2,G_2])$. La existencia de dicho morfismo se deduce de las siguientes igualdades, $H(F_1,G_1)I(Ci^n,i^n)^1 =$
$H(F_2,G_2)I(Ci^n,i^n)^1 = (\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1})I(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$\{(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)I\rho I^2(Ci^n,i^n), (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n),$
$(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)\} =$

$\{(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)I(Ci^n, i^n)I\rho, (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n),$
$(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)\} =$
$\{(\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n), (\{fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^n\}, HI\rho^n)\}$
$I(\{(Ci^n, i^n)\rho, 1\} \cup 1)$

Bien definida:

Si $[H_0] = [H_1] \in \pi_1^i(Y, g)$ entonces se probará que
$(\{fH_0I\rho^{n+2}, fH_0I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, H_0I\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1 =$
$(\{fH_1I\rho^{n+2}, fH_1I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, H_1I\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1$:

Por la proposición 1.2.6 existe un morfismo $H : I^2A \to Y$ verificando $Hi^2 = \{g\rho^2I^2i, H_0, H_1, g\rho, g\rho\}$.

Si $[F, G] \in \pi_{n+2}^i(f, g)$, el morfismo
$G = G'\iota_1 : H_0(F, G)\iota_1 \simeq H_1(F, G)\iota_1 \ rel \ (Ci^n, i^n)^1$,
y por tanto $(\{fH_0I\rho^{n+2}, fH_0I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, H_0I\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F, G]) =$
$(\{fH_1I\rho^{n+2}, fH_1I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, H_1I\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F, G])$, donde
$G' : I^3(CI^nA, I^nA) \to f$ es una extensión del cuadrado de homotopía $(F, G)\rho(Ci^n, i^n)^2 =$
$\{(\{fHI^2\rho^{n+1}, fHI^2\rho^n\}, HI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n, i^n)^1, H_0(F, G), H_1(F, G)\}\iota_0$ asociado a la cofibración $(Ci^n, i^n)^2$, y donde $H_0(F, G)$, $H_1(F, G)$ son extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía

$(F, G)(Ci^n, i^n)^1 = (\{fH_0I\rho^{n+2}, fH_0I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, H_0I\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ y $(F, G)(Ci^n, i^n)^1 = (\{fH_1I\rho^{n+2}, fH_1I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, H_1I\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ asociados a la cofibración $(Ci^n, i^n)^1$.

El morfismo
$\{(\{fHI^2\rho^{n+1}, fHI^2\rho^n\}, HI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n, i^n)^1, H_0(F, G), H_1(F, G)\}$ desde $II^2_{(Ci^n, i^n)}(CI_i^nB, I_i^nB)$ en f existe pues:

Se verifica $fHI^2\rho^{n+1}I^2(\iota_0^n)^1 =$
$\{fHI^2\rho^{n+1}I^3\iota_0^n, fHI^2\rho^{n+1}I^2\iota_0, fHI^2\rho^{n+1}I^2\iota_1\} =$
$\{fHI^2\rho^nI^2\iota_0^nI^2\rho, fHI^2\rho^nI^2\iota_0^nI^2\rho^n, fHI^2\rho^n\} =$

$fHI^2\rho^nI^2\{\iota_0^n\rho,\iota_0^n\rho^n,1\}$ y por tanto existe el morfismo $\{fHI^2\rho^{n+1},fHI^2\rho^n\}:I^2CI^nA\to X$.

Además $\{fHI^2\rho^{n+1},fHI^2\rho^n\}I^2k=fHI^2\rho^n$ y por tanto existe el morfismo de pares $(\{fHI^2\rho^{n+1},fHI^2\rho^n\},HI^2\rho^n):I^2(CI^nA,I^nA)\to f$.

Para concluir, $(\{fHI^2\rho^{n+1},fHI^2\rho^n\},HI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n,i^n)^1I\iota_\epsilon=$
$(\{fHI^2\rho^{n+1},fHI^2\rho^n\},HI^2\rho^n)I\iota_\epsilon I\rho I(Ci^n,i^n)^1=$
$(\{fHI\iota_\epsilon I\rho^{n+1},fHI\iota_\epsilon I\rho^n\},HI\iota_\epsilon I\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1=$
$(\{fH_\epsilon I\rho^{n+1},fH_\epsilon I\rho^n\},H_\epsilon I\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1=H_\epsilon(F,G)I(Ci^n,i^n)^1$.

Conservación de la identidad:

Si $H=g\rho:IA\to Y$ entonces
$(\{fHI\rho^{n+2},fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})=$
$(\{h\rho^{n+3},h\rho^{n+2}\},g\rho^{n+2})I(Ci^n,i^n)^1=(\{h\rho^{n+2},h\rho^{n+1}\},g\rho^{n+1})(Ci^n,i^n)^1\rho=$
$(F,G)(Ci^n,i^n)^1\rho=(F,G)\rho I(Ci^n,i^n)^1$, para todo $[F,G]\in\pi^i_{n+2}(f,g)$.

De donde $(F,G)\rho$ es una extensión del cuadrado de homotopía $(F,G)(Ci^n,i^n)^1=(\{fg\rho I\rho^{n+2},fg\rho I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,g\rho I\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ asociado a la cofibración $(Ci^n,i^n)^1$. Se concluye que
$(\{fg\rho I\rho^{n+2},fg\rho I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,g\rho I\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F,G])=[F,G]$.

Conservación de la operación:

Sea $[H],[G]\in\pi^i_1(Y,g)$ y sea $K:I^2A\to Y$ el morfismo de la demostración de la conservación de la operación en el teorema 1.5.1, existente por la proposición 1.3.9.

Dada $[F_1,F_2]\in\pi^i_{n+2}(f,g)$, sean $H(F_1,F_2)$, $(H*G)(F_1,F_2)$ y $G(H(F_1,F_2)\iota_1)$ extensiones respectivas de los cuadrados de homotopía $(F_1,F_2)(Ci^n,i^n)^1=(\{fHI\rho^{n+2},fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$,
$(F_1,F_2)(Ci^n,i^n)^1=(\{f(H*G)I\rho^{n+2},f(H*G)I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,(H*G)I\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$
y $H(F_1,F_2)\iota_1(Ci^n,i^n)^1=(\{fGI\rho^{n+2},fGI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,GI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$
asociados a la cofibración $(Ci^n,i^n)^1$.
Sea $L':I^3(CI^nA,I^nA)\to f$ una extensión del cuadrado de homotopía

$H(F_1,F_2)(Ci^n,i^n)^2 =$
$\{(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n,i^n)^1,(H*G)(F_1,F_2),G(H(F_1,F_2)\iota_1)\}\iota_0$
asociado a la cofibración $(Ci^n,i^n)^2$. El morfismo
$\{(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n,i^n)^1,(H*G)(F_1,F_2),$
$G(H(F_1,F_2)\iota_1)\} : II^2_{(Ci^n,i^n)}(CI^n_iB,I^n_iB)\to f$ existe pues
$(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n,i^n)^1I\iota_0 =$
$(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I\iota_0I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fKI\iota_0I\rho^{n+1},fKI\iota_0I\rho^n\},KI\iota_0I\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{f(H*G)I\rho^{n+1},f(H*G)I\rho^n\},(H*G)I\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$(H*G)(F_1,F_2)I(Ci^n,i^n)^1$ y
$(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n,i^n)^1I\iota_1 =$
$(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I\iota_1I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fKI\iota_1I\rho^{n+1},fKI\iota_1I\rho^n\},KI\iota_1I\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$(\{fGI\rho^{n+1},fGI\rho^n\},GI\rho^n)I\rho I(Ci^n,i^n)^1 =$
$G(H(F_1,F_2)\iota_1)I(Ci^n,i^n)^1$.

El morfismo de pares $(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n) : I^2(CI^nA,I^nA)\to f$ existe por la misma razón que existía el morfismo $(\{fHI^2\rho^{n+1},fHI^2\rho^n\},HI^2\rho^n)$ desde $I^2(CI^nA,I^nA)$ en f al probar que la acción estaba bien definida.

Como $L'\iota_1(Ci^n,i^n)^2 =$
$\{(\{fKI^2\rho^{n+1},fKI^2\rho^n\},KI^2\rho^n)I^2\rho I^2(Ci^n,i^n)^1,$
$(H*G)(F_1,F_2),G(H(F_1,F_2)\iota_1)\}\iota_1 =$
$\{(\{h\rho^{n+3},h\rho^{n+2}\},g\rho^{n+2})I(Ci^n,i^n)^1,(H*G)(F_1,F_2)\iota_1,G(H(F_1,F_2)\iota_1)\iota_1\} =$
$\{(H*G)(F_1,F_2)\iota_1\rho I(Ci^n,i^n)^1,(H*G)(F_1,F_2)\iota_1,G(H(F_1,F_2)\iota_1)\iota_1\}$. Se concluye que
$(\{f(H*G)I\rho^{n+2},f(H*G)I\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,(H*G)I\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F_1,F_2]) =$
$(\{fGI\rho^{n+2},fGI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,GI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1$
$(\{fHI\rho^{n+2},fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1,HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})_1([F_1,F_2])$. □

Las acciones definidas anteriormente del grupo $\pi_1^i(Y,g)$ sobre los distintos grupos de la sucesión $S(i, f, g)$ dejan a ésta invariante.

Proposición 2.4.1. *Para toda* $[H] \in \pi_1^i(Y, g)$ *y toda* $[G] \in \pi_n^i(Y, g)$ *se tiene que* $f_*([G]^{[H]}) = (f_*([G]))^{[H]}$.

Demostración. Si $H(G)$ es una extensión del cuadrado de homotopía $Gi^n = HI\rho^n Ii^n \iota_0$ asociado a la cofibración i^n, entonces $fH(G)\iota_0 = fG$ y $fH(G)Ii^n = fHI\rho^n Ii^n$ por lo que el morfismo $fH(G)$ es una extensión del tipo $fH(fG)$ del cuadrado de homotopía $fGi^n = fHI\rho^n Ii^n \iota_0$ asociado a la cofibración i^n. Se concluye que $f_*([G]^{[H]}) = f_*([H(G)\iota_1]) = [fH(G)\iota_1] = [fH(fG)\iota_1] = [fG]^{[fH]} = (f_*([G]))^{[fH]} = (f_*([G]))^{[H]}$. $\square$

Proposición 2.4.2. *Para toda* $[H] \in \pi_1^i(Y, g)$ *y toda* $[F, G] \in \pi_{n+2}^i(f, g)$ *se tiene que* $p_1([F, G]^{[H]}) = (p_1([F, G]))^{[H]}$.

Demostración. Si el morfismo $H(F, G)$ es una extensión del cuadrado de homotopía $(F, G)(Ci^n, i^n)^1 = (\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$ asociado a la cofibración $(Ci^n, i^n)^1$, entonces como $p_1(H(F, G))Ii^{n+1} =$
$p_1((\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})) = HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}$ y
$p_1(H(F, G))\iota_0 = p_1((F, G)) = G$ se tiene que $p_1(H(F, G))$ es una extensión del tipo $H(G)$ del cuadrado $Gi^{n+1} = HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+1}.

Se concluye que $p_1([F, G]^{[H]}) = p_1([H(F, G)\iota_1]) = [p_1(H(F, G)\iota_1)] = [p_1(H(F, G))\iota_1] = [H(G)\iota_1] = [G]^{[H]} = (p_1([F, G]))^{[H]}$. $\square$

Proposición 2.4.3. *Para toda* $[H] \in \pi_1^i(Y, g)$ *y toda* $[F] \in \pi_{n+2}^i(X, h)$ *se tiene que* $j([F]^{[H]}) = (j([F]))^{[H]}$.

Demostración. Si $fH(F) : I^{n+3}A \to X$ es una extensión del cuadrado de homotopía $Fi^{n+2} = fHI\rho^{n+2}Ii^{n+2}\iota_0$ asociado a la cofibración i^{n+2} entonces como
$(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1})I(Ci^n, i^n)^1 =$
$(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}) =$
$(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}\{I^2Ci^n, I\iota_0, I\iota_1\}, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}) =$

$(\{\{(fH)(F)I^3i^n, fHI\rho^{n+1}I^2i^n\}, \{(fH)(F)I\iota_0, fHI\rho^{n+1}I\iota_0\},$
$\{(fH)(F)I\iota_1, fHI\rho^{n+1}I\iota_1\}\}, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}) =$
$(\{\{fHI\rho^{n+2}I^3i^n, fHI\rho^{n+1}I^2i^n\}, \{fHI\rho^{n+2}I\iota_0, fHI\rho^{n+1}I\iota_0\},$
$\{fHI\rho^{n+2}I\iota_1, fHI\rho^{n+1}I\iota_1\}\}, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1}) =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})$ y
$(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1})\iota_0 =$
$(\{(fH)(F)\iota_0, fH\iota_0\rho^{n+1}\}, H\iota_0\rho^{n+1}) =$
$(\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})$, se tiene que
$(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1}) : I^2(CI^nA, I^nA) \to f$ es una extensión del cuadrado de homotopía $(\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1})(Ci^n, i^n)^1 =$
$(\{fHI\rho^{n+2}, fHI\rho^{n+1}\}I(Ci^n)^1, HI\rho^{n+1}Ii^{n+1})\iota_0$
asociado a la cofibración $(Ci^n, i^n)^1$. Obsérvese que $(fH)(F)I^2(\iota_0^n)^1 =$
$\{(fH)(F)I^3\iota_0^n, (fH)(F)I^2\iota_0, (fH)(F)I^2\iota_1\} =$
$\{fHI\rho^{n+2}I^3\iota_0^n, fHI\rho^{n+2}I^2\iota_0, fHI\rho^{n+2}I^2\iota_1\} =$
$\{fHI\rho^2, fHI\rho^{n+1}, fHI\rho^{n+1}\} =$
$\{fHI\rho^{n+1}I^2\iota_0^nI^2\rho, fHI\rho^{n+1}I^2(\iota_0)^nI^2\rho^n, fHI\rho^{n+1}\} =$
$fHI\rho^{n+1}I^2\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$
y por tanto existe el morfismo $\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\} : I^2CI^nA \to X$, y el morfismo de pares $(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1}) : I^2(CI^nA, I^nA) \to f$.

Se concluye que $j([F]^{[H]}) = j([(fH)(F)\iota_1]) = [\{(fH)(F)\iota_1, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}] =$ $[\{(fH)(F)\iota_1, fH\iota_1\rho^{n+1}\}, H\iota_1\rho^{n+1}] = [(\{(fH)(F), fHI\rho^{n+1}\}, HI\rho^{n+1})\iota_1] =$ $[\{F, h\rho^{n+1}\}, g\rho^{n+1}]^{[H]} = (j([F]))^{[H]}$. □

Teorema 2.4 .2. *Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y un morfismo $h = fg : A \to Y \to X$, se tiene que el primer grupo de homotopía generalizada $\pi_1^i(Y, g)$ actúa por la derecha equivariantemente sobre la sucesión de homotopía generalizada $S(i, f, g)$ asociada al morfismo f y basada en el morfismo g.*

Demostración. Consecuencia inmediata de las proposiciones 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3 anteriores. □

Capítulo 3

I-Categorías Generalizadas Punteadas

En muchas teorías de homotopía se parte de una categoría punteada para definir grupos de homotopía y sucesiones exactas de estos. Es el caso de la homotopía clásica de los espacios topológicos, donde es necesario puntear los espacios topológicos para definir sus grupos de homotopía y sus sucesiones. También en la teoría de homotopía propia de los espacios topológicos, según se use un espacio topológico como punto u otro, salen grupos de homotopía propia diferentes, como por ejemplo los de Brown o los de Steenrod [7],[9].

Cuando se tiene una estructura de I-categoría generalizada, cualquier objeto de la categoría puede actuar como punto. En este sentido, considerando la categoría de cofibraciones con dominio en un objeto fijo y mediante el uso de push outs asociados a dichos objetos, se genera una estructura de I-categoría punteada generalizada en dicha categoría.

La mencionada estructura es independiente de los push outs asociados a los objetos, lo que hace de dicha técnica una herramienta fundamental a la hora de trabajar en esta categoría.

La estructura viene generada por la respectiva que posee la categoría original.

Los principales objetos homotópicos, como son cilindros y cilindros relativos, son obtenidos mediante push outs asociados a los objetos de la categoría. Como consecuencia de ello se pueden expresar los grupos de homotopía punteados de una categoría bajo un objeto como grupos de homotopía generalizados de la categoría original.

Asimismo, usando la técnica de los push outs, se puede asociar un push out de la categoría de pares de la original a todo par punteado. De esta forma también surgen isomorfismos entre los grupos de homotopía punteados de pares de la categoría bajo un objeto y los generalizados de la categoría original.

Los mencionados isomorfismos no sólo hacen isomorfas a la sucesión exacta de homotopía punteada asociada a un morfismo punteado con una sucesión exacta de homotopía generalizada asociada a dicho morfismo en la categoría original, sino que también traslada isomórficamente las acciones del primer grupo de homotopía sobre ambas sucesiones.

De lo anterior se concluye que las teorías de homotopía punteada desarrolladas en las categorías bajo un objeto son ejemplos de la teoría de homotopía generalizada desarrollada en la categoría original.

En las categorías punteadas con objetos basados, se obtienen morfismos "cero" como composición de la "inclusión" del punto en el objeto con la "proyección" de dicho objeto sobre el punto. En esta axiomática, "inclusión" significa cofibración y "proyección" significa retracción de dicha cofibración. Se crean así, a semejanza de lo que ocurre en otras teorías de homotopía cilíndrica, grupos de homotopía de objetos punteados a través de suspensiones punteadas de objetos, obteniéndose sucesiones exactas mediante las mencionadas suspensiones. También en este caso ocurre lo mismo, es decir, que los grupos de homotopía y las sucesiones de ellos así obtenidos pueden ser expresados como grupos de homotopía generalizados y sucesiones de estos en la categoría original. Esto permite extender las sucesiones exactas de homotopía generalizada, que en la categoría original terminaban con el grupo de orden dos, y finalizarlas con el grupo de orden uno.

De lo anterior se deduce que cualquier estructura de homotopía punteada, inducida por la estructura de I-categoría generalizada, en la categoría bajo un objeto de la original genera una teoría de homotopía recogida en la teoría de homotopía generalizada de la original. Esto justifica, en parte, el término de "generalizada".

3.1 Categorías punteadas asociadas a una I-categoría generalizada

Dado un objeto A de una I-categoría generalizada $\mathcal{C}$, se verá que dicho objeto hace las veces de punto en la categoría $\mathcal{C}^A$, haciendo de ésta una I-categoría generalizada punteada.

Definición 3.1.1. Una I-categoría generalizada punteada es una I-categoría generalizada con todos sus objetos cofibrantes y con su cilindro preservando el objeto inicial.

Dada una I-categoría generalizada $\mathcal{C}$ y un objeto A de $\mathcal{C}$, se define la categoría cof^A como la subcategoría llena de $\mathcal{C}^A$ cuyos objetos son cofibraciones. Los objetos de cof^A se denotarán por (x, X), donde $x : A \rightarrowtail X$ es cofibración en $\mathcal{C}$.

Definición 3.1.2. Un diagrama push out cofibrado del tipo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "s"] \arrow[d, tail, "j"'] & A \arrow[d, tail, "x"] \\ T \arrow[r, "\bar{s}"'] & X \end{tikzcd}$$

se denominará un push out asociado al objeto (x, X). Nótese que todo objeto (x, X) tiene asociado un push out canónico donde $X = P\{x, 1_A\}$.

Los push out asociados a objetos de cof^A serán muy importantes a la hora de ver la relación existente entre la homotopía generalizada de esa categoría y la respectiva de $\mathcal{C}$.

Dado un push out asociado $P\{j,s\}$ del objeto (x,X), se define el cilindro $I_*(x,X)=(\overline{Ij},P\{Ij,s\rho\})$.

Proposición 3.1.1. *La definición de $I_*(x,X)$ no depende del push out asociado al objeto (x,X).*

Demostración. Es suficiente probar que $P\{Ij,s\rho\}=P\{Ix,\rho\}$. Para ello basta observar el siguiente diagrama teniendo en cuenta que el cilindro conserva push out por el axioma **GI2**, que la composición de ellos también lo es por la proposición 0.2.2, y que $\rho Is=s\rho$

$$\begin{tikzcd}
IS \arrow[r, "Is"] \arrow[d, tail, "Ij"'] & IA \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, tail, "Ix"] & A \arrow[d, tail, "\overline{Ix}"] \\
IT \arrow[r, "I\overline{s}"'] & IX \arrow[r, "\overline{\rho}"'] & P\{Ix,\rho\}
\end{tikzcd}$$

$\square$

El objeto $I_*(x,X)$ será también denotado por $(\overset{(1}{\overline{x}},I_*X)$ donde $I_*X=P\{Ix,\rho\}$ y $\overset{(1}{\overline{x}}=\overline{Ix}:A\to I_*X=P\{Ix,\rho\}$. Inductivamente se genera la siguiente notación: $\overset{(0}{\overline{x}}=x$, $\overset{(1}{\overline{x}}=\overline{Ix}=\overline{I\overset{(0}{\overline{x}}}$,... $\overset{(n+1}{\overline{x}}=\overline{I\overset{(n}{\overline{x}}}$,... De esta forma se tiene que $I_*^n(x,X)=(\overset{(n}{\overline{x}},I_*^nX)$.

Definición 3.1.3. Un morfismo entre push outs $P\{j,s\}$ y $P\{j',s'\}$ asociados a respectivos objetos (x,X) y (x',X') es un morfismo del tipo $f\cup_g 1:P\{j,s\}\to P\{j',s'\}$.

Todo morfismo $f:(x,X)\to(x',X')$ induce un morfismo entre los respectivos push out canónicos asociados $f\cup_1 1:P\{x,1\}\to P\{x',1\}$.

Asimismo, induce un morfismo entre cualquier push out $P\{j,s\}$ asociado al objeto (x,X) y al canónico asociado a (x',X'), $f\overline{s}\cup_s 1:P\{j,s\}\to P\{x',1\}$. Nótese que $f\overline{s}j=fxs=x's$.

Definición 3.1 .4. Dado un morfismo entre push outs asociados $h = f \cup_g 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s'\}$, con $h : (x, X) \to (x', X')$, entonces $I_*h = If \cup_{Ig} 1 : P\{Ij, s\rho\} \to P\{Ij', s'\rho\}$ es un morfismo entre push outs asociados que define $I_*h : I_*(x, X) \to I_*(x', X')$.

Proposición 3.1.2. *La definición del cilindro de un morfismo en cof^A no depende de los push outs asociados.*

Demostración. Sea $h = f \cup_g 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s'\}$, entonces $h = h \cup_1 1 : P\{x, 1_A\} \to P\{x', 1_A\}$ y $I_*h = Ih \cup_1 1 : P\{Ix, \rho\} \to P\{Ix', \rho\}$. Por la proposición 3.1.1 anterior, $P\{Ix, \rho\} = P\{Ij, s\rho\}$ y $P\{Ix', \rho\} = P\{Ij', s'\rho\}$. El funtor cilindro conserva push outs cofibrados, por tanto $(If \cup_{Ig} 1_A)\overline{\rho} = \overline{\rho}(If \cup_{Ig} 1_{IA}) = \overline{\rho}I(f \cup_g 1_A) = \overline{\rho}Ih$, y $(If \cup_{Ig} 1_{IA}) \frac{(1}{x} = \frac{(1}{x'}$. De donde $If \cup_{Ig} 1 = Ih \cup_1 1 : P\{Ij, s\rho\} = P\{Ix, \rho\} \to P\{Ij', s'\rho\} = P\{Ix', \rho\}$.

$\square$

Así, se tiene un funtor cilindro $I_* : cof^A \to cof^A$ definido para los objetos (x, X) como $I_*(x, X) = (\frac{(1}{x}, I_*X)$, y para los morfismos $f : (x, X) \to (x', X')$ como $I_*f = If \cup_1 1 : P\{Ix, \rho\} \to P\{Ix', \rho\}$.

Teorema 3.1.1. *Dado un push out $P\{j, s\}$ asociado al objeto (x, X), el siguiente cuadrado es un push out:*

$$\begin{tikzcd}
I^n S \arrow[r, "s\rho^n"] \arrow[d, tail, "I^n j"'] & A \arrow[d, tail, "\frac{(n}{x}"] \\
I^n T \arrow[r, "\overline{\rho}I\overline{\rho}\cdots I^{n-1}\overline{\rho}I^n\overline{s}"'] & I^n_* X
\end{tikzcd}$$

Además, si $h = f \cup_g 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s'\}$ es un morfismo entre push outs asociados, con $h : (x, X) \to (x', X')$, se verifica que el morfismo entre push outs asociados $I^n f \cup_{I^n g} 1 : P\{I^n j, s\rho^n\} \to P\{I^n j', s'\rho^n\}$ define el morfismo $I^n_* h : I^n_*(x, X) \to I^n_*(x', X')$.

Demostración. Si $P\{j,s\}$ es un push out asociado al objeto (x,X), por la proposición 3.1.1 $I_*X = P\{Ij, s\rho\}$ con morfismos inducidos $\overline{\rho}I\overline{s}$ y $\overset{(1}{\overline{x}}$. Se tiene ahora que $P\{Ij, s\rho\}$ está asociado al objeto $(\overset{(1}{\overline{x}}, I_*X)$, por lo que usando la misma proposición se tendría que $I_*^2X = I_*I_*X = P\{I^2j, s\rho^2\}$ con morfismos inducidos $\overline{\rho}I(\overline{\rho}I\overline{s}) = \overline{\rho}I\overline{\rho}I^2\overline{s}$ y $\overset{(1}{\overline{\overset{(1}{\overline{x}}}} = \overline{I\overset{(1}{\overline{x}}} = \overset{(2}{\overline{x}}$.

Iterando el proceso se concluye que $I_*^nX = P\{I^nj, s\rho^n\}$ con morfismos inducidos $\overline{\rho}I\overline{\rho}\cdots I^{n-1}\overline{\rho}I^n\overline{s}$ y $\overset{(n}{\overline{x}}$.

Asimismo, por la proposición 3.1.2, se tiene $I_*h = I_*(f \cup 1) = If \cup 1 : P\{Ij, s\rho\} \to P\{Ij', s'\rho\}$. Por lo que $I_*^2h = I_*I_*h = I_*(If \cup 1) = I^2f \cup 1 : P\{I^2j, s\rho^2\} \to P\{I^2j', s'\rho^2\}$. Iterando el proceso se concluye que $I_*^nh = I^nf \cup 1 : P\{I^nj, s\rho^n\} \to P\{I^nj', s'\rho^n\}$.

□

Dado el push out $P\{j,s\}$ asociado al objeto (x,X), se define $\iota_{\epsilon *} : (x,X) \to I_*(x,X)$, para $\epsilon \in \{0,1\}$, como $\iota_\epsilon \cup_{\iota_\epsilon} 1 : P\{j,s\} \to P\{Ij, s\rho\}$.

Asimismo se define el morfismo $\rho_* : I_*(x,X) \to (x,X)$ como $\rho \cup_\rho 1 : P\{Ij, s\rho\} \to P\{j,s\}$.

Finalmente se define $\chi_{\epsilon *} : I_*^2(x,X) \to I_*(x,X)$, para $\epsilon \in \{0,1\}$, como $\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1 : P\{I^2j, s\rho^2\} \to P\{Ij, s\rho\}$.

Proposición 3.1.3. *Los morfismos $\iota_{\epsilon *}$, ρ_* y $\chi_{\epsilon *}$ no dependen de la elección del push out asociado al objeto.*

Demostración. Como el funtor cilindro conserva push outs, se tiene que $\iota_\epsilon : P\{j,s\} = X \to IP\{j,s\} = IX$ es un morfismo, entonces $\overline{\rho}\iota_\epsilon\overline{s} = \overline{\rho}I\overline{s}\iota_\epsilon$ y $\overline{\rho}\iota_\epsilon x = \overline{\rho}Ix\iota_\epsilon = \overset{(1}{\overline{x}}\rho\iota_\epsilon = \overset{(1}{\overline{x}}$ y por tanto $\iota_\epsilon \cup_{\iota_\epsilon} 1 : P\{j,s\} \to P\{Ij, s\rho\}$ coincide con el morfismo $\overline{\rho}\iota_\epsilon : X \to I_*X$ independientemente del push out asociado.

Similarmente a lo anterior se tiene $\rho : IX \to X$ y $\{\rho, x\} : P\{Ix, \rho\} \to X$ pues $\rho Ix = x\rho$. Como $\{\rho, x\}\overline{\rho}I\overline{s} = \rho I\overline{s} = \overline{s}\rho$ y $\{\rho, x\}\overset{(1}{\overline{x}} = x$, entonces $\{\rho, x\} = \rho \cup_\rho 1$ independientemente del push out asociado al objeto.

Finalmente $\chi_\epsilon : I^2X \to IX$ verifica $\chi_\epsilon I^2x = Ix\chi_\epsilon$ y $\rho\chi_\epsilon = \rho^2$, por tanto existe el morfismo $\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1 : P\{I^2x, \rho^2\} \to P\{Ix, \rho\}$. Como $(\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1)\overline{\rho}I\overline{\rho}I^2\overline{s} = \overline{\rho}\chi_\epsilon I^2\overline{s} = \overline{\rho}I\overline{s}\chi_\epsilon$ y $(\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1) \overset{(2}{\overline{x}} = \overset{(1}{\overline{x}}$, se concluye que el morfismo $\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1 : P\{I^2x, \rho^2\} \to P\{Ix, \rho\}$ coincide con $\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1 : P\{I^2j, s\rho^2\} \to P\{Ij, s\rho\}$ y por tanto es independiente del push out asociado al objeto. Nótese que por el teorema 3.1.1, los dominios y codominios de ambos morfismos son los mismos. □

Proposición 3.1.4. *Las transformaciones* $\iota_{\epsilon *} : 1_{cof^A} \to I_*$, $\rho_* : I_* \to 1_{cof^A}$ *y* $\chi_{\epsilon *} : I_*^2 \to I_*$ *son naturales.*

Demostración. Dado un morfismo $f \cup 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s'\}$ entonces $I_*(f\cup 1)\iota_{\epsilon *} = (If\cup 1)(\iota_\epsilon \cup 1) = (If\iota_\epsilon)\cup 1 = (\iota_\epsilon f)\cup 1 = (\iota_\epsilon \cup 1)(f\cup 1) = \iota_{\epsilon *}(f\cup 1)$.

Por otro lado $\rho_* I_*(f \cup 1) = (\rho \cup 1)(If \cup 1) = (\rho If) \cup 1 = (f\rho) \cup 1 = (f \cup 1)(\rho \cup 1) = (f \cup 1)\rho_*$.

Finalmente, por el teorema 3.1.1, $\chi_{\epsilon *} I_*^2(f \cup 1) = (\chi_\epsilon \cup 1)(I^2 f \cup 1) = (\chi_\epsilon I^2 f) \cup 1) = (If\chi_\epsilon) \cup 1 = (If \cup 1)(\chi_\epsilon \cup 1) = I_*(f \cup 1)\chi_{\epsilon *}$. □

Corolario 3.1.1. *Dado el push out* $P\{j, s\}$ *asociado al objeto* (x, X)*, se tiene:*

1. $\iota_{\epsilon * I_*^n(x,X)} = \iota_{\epsilon I^n T} \cup 1 : P\{I^n j, s\rho^n\} \to P\{I^{n+1} j, s\rho^{n+1}\}$.

2. $I_*^n \iota_{\epsilon *(x,X)} = I^n \iota_{\epsilon T} \cup 1 : P\{I^n j, s\rho^n\} \to P\{I^{n+1} j, s\rho^{n+1}\}$.

3. $\rho_* I_*^n(x, X) = \rho_{I^n T} \cup 1 : P\{I^{n+1} j, s\rho^{n+1}\} \to P\{I^n j, s\rho^n\}$.

4. $I_*^n \rho_{*(x,X)} = I^n \rho_T \cup 1 : P\{I^{n+1} j, s\rho^{n+1}\} \to P\{I^n j, s\rho^n\}$.

5. $\chi_{\epsilon * I_*^n(x,X)} = \chi_{\epsilon I^n T} \cup 1 : P\{I^{n+2} j, s\rho^{n+2}\} \to P\{I^{n+1} j, s\rho^{n+1}\}$.

6. $I_*^n \chi_{\epsilon *(x,X)} = I^n \chi_{\epsilon T} \cup 1 : P\{I^{n+2} j, s\rho^{n+2}\} \to P\{I^{n+1} j, s\rho^{n+1}\}$.

Demostración. Los apartados segundo, cuarto y sexto son consecuencia del teorema 3.1.1 observando por la proposición 3.1.3 que $\iota_{\epsilon *(x,X)} =$

$\iota_\epsilon \cup 1 : P\{j,s\} \to P\{Ij,s\rho\}$, $\rho_{*(x,X)} = \rho \cup 1 : P\{Ij,s\rho\} \to P\{j,s\}$ y $\chi_{\epsilon*(x,X)} = \chi_\epsilon \cup 1 : P\{I^2j,s\rho^2\} \to P\{Ij,s\rho\}$.

Para los apartados primero, tercero y quinto se tiene por el teorema 3.1.1 que $P\{I^nj,s\rho^n\}$ está asociado al objeto $(\overset{(n}{x}, I^n_*X) = I^n_*(x,X)$, y por la proposición 3.1.3 se concluye lo afirmado.

□

La categoría cof^A va a ser una I-categoría generalizada punteada. Para ello se necesita la noción de cofibración, que surge de forma natural.

Definición 3.1.5. Un morfismo $i : (x,X) \to (x',X')$ se dirá una cofibración cuando $i : X \to X'$ lo sea en la categoría original $\mathcal{C}$.

Ya se ha visto que todo morfismo $f : (x,X) \to (x',X')$ se puede interpretar como un morfismo entre push outs canónicos asociados:

$$f \cup 1 : P\{x,1\} \to P\{x',1\}$$

En particular, a la cofibración i también le sucede esto. Sin embargo, para hablar de cofibraciones entre push outs asociados se necesita algo más, pues aunque $i : T \to T'$ sea cofibración, no se puede garantizar que $i \cup 1 : P\{j,s\} \to P\{j',s'\}$ lo sea.

Definición 3.1.6. Un morfismo $i = \alpha \cup_\beta 1 : P\{j,s\} \to P\{j',s'\}$ entre push outs asociados, con $i : (x,X) \to (x',X')$, se dice una cofibración entre push outs asociados cuando α y β lo son en la categoría original $\mathcal{C}$ y $(j',j) : (S',S) \to (T',T)$ es una cofibración en $cof\ \mathcal{C}$.

Observación 3.1.1. Un morfismo $g = f \cup_1 1 : P\{j,s\} \to P\{j',s\}$ entre push outs asociados, con $g : (x,X) \to (x',X')$, es una cofibración entre push outs asociados si y solo si f es cofibración en $\mathcal{C}$. Basta tener en cuenta que $\{j',f\} = f : P\{1_S,j\} = T \to T'$.

Proposición 3.1.5. *Si* $i = \alpha \cup_\beta 1 : P\{j,s\} \to P\{j',s'\}$ *es una cofibración entre push outs asociados, con* $i : (x,X) \to (x',X')$*, entonces* i *es una cofibración en* cof^A*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la proposición 1.1.3, pues $\{j',\alpha\} : P\{\beta,j\} \to T'$ es cofibración por ser (j',j) una cofibración de pares. □

Teorema 3.1.2. *La estructura* $(cof^A, I_*, \iota_{\epsilon *}, \rho_*, \chi_{\epsilon *}, cof)$*, siendo* cof *la familia de morfismos dada por la definición 3.1.5, es una* I*-categoría generalizada punteada.*

Demostración. Categoría punteada:

Para cualquier objeto (x,X) de cof^A, sólo existe trivialmente el morfismo $x : (1,A) \to (x,X)$. Por otro lado, este morfimo es cofibración en cof^A, y por tanto, todo objeto (x,X) es cofibrante. Por último, $I_*(1,A) = (\overline{I1}, P\{I1,\rho\}) = (1,A)$.

- GI1 Axioma de cilindro:

Para todo push out $P\{j,s\}$ asociado a un objeto (x,X) se tiene que $\rho_*\iota_{\epsilon *} = (\rho \cup_\rho 1)(\iota_\epsilon \cup_{\iota_\epsilon} 1) = (\rho\iota_\epsilon) \cup_{\rho\iota_\epsilon} 1 = 1 \cup_1 1 = 1$.

- GI2 Axioma de push out:

Dada una cofibración $i : (x,X) \rightarrowtail (x',X')$ y un morfismo $f : (x,X) \to (x'',X'')$, se define en cof^A el objeto $P\{i,f\} = (\bar{i}x'', P\{i,f\})$ con inducidas $\bar{i} : (x'',X'') \to (\bar{i}x'', P\{i,f\})$ y $\overline{f} : (x',X') \to (\bar{i}x'', P\{i,f\})$. Nótese que $\overline{f}x' = \overline{f}ix = \bar{i}fx = \bar{i}x''$, y que $P\{i,f\}$ existe en $\mathcal{C}$ por ser i cofibración en $\mathcal{C}$, que es I-categoría generalizada. Evidentemente $\bar{i}$ es una cofibración en cof^A.

Si la cofibración se expresa entre push outs asociados como $i = \alpha \cup_\beta 1 : P\{j,s\} \to P\{j',s'\}$ y el morfismo como $f = g \cup_h 1 : P\{j,s\} \to P\{j'',s''\}$ entonces por el teorema 0.2.1 se tiene que $P\{i,f\} = P\{\alpha \cup_\beta 1, g \cup_h 1\} = P\{j' \cup_j j'', s' \cup_s s''\}$.

Se tiene entonces que $P\{j' \cup_j j'', s' \cup_s s''\}$ es un push out asociado al objeto $(\bar{i}x'', P\{i, f\})$. Nótese que por la proposición 1.1.3, $j' \cup_j j''$ es cofibración ya que lo son j, j', j'' y el morfismo $\{\alpha, j'\} : P\{j, \beta\} \rightarrowtail T'$ por la observación 2.1.1. Además, por el axioma **GI2** de la categoría de pares, como el morfismo de pares $(j', j) : (S', S) \to (T', T)$ es una cofibración de pares, también lo es $(j' \cup_j j'', j'') : (P\{\beta, h\}, S'') \to (P\{\alpha, g\}, T'')$ y por tanto el morfismo $\overline{\alpha} \cup_{\overline{\beta}} 1 : P\{j'', s''\} \to P\{j' \cup_j j'', s' \cup_s s''\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con $\bar{i} : (x'', X'') \to (\bar{i}x'', P\{i, f\})$.

Por los teoremas 3.1.1 y 0.2.1 se verifica que
$I_*P\{i, f\} = P\{Ij' \cup_{Ij} Ij'', Is' \cup_{Is} Is''\} = P\{I\alpha \cup_{I\beta} 1, Ig \cup_{Ih} 1\} = P\{I_*i, I_*f\}$.

- GI3 Axioma de cofibración:

El morfismo $\iota_{\epsilon*(x,X)} = \iota_{\epsilon X} \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{Ix, \rho\}$ y como $\{Ix, \iota_\epsilon\} : P\{\iota_\epsilon, x\} \to IX$ es cofibración por la observación 1.1.4 y la proposición 1.1.2, entonces $\iota_{\epsilon X} \cup 1$ también lo es por la proposición 1.1.3.

Evidentemente, las identidades y la composición de cofibraciones son cofibraciones de nuevo.

Sea un cuadrado de homotopía $hi = H\iota_{\epsilon*}$ asociado a una cofibración $i : (x, X) \rightarrowtail (x', X')$. Si reemplazamos los morfismos por los respectivos entre push outs asociados a los objetos:
$i \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{x', 1\}$, $\iota_\epsilon \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{Ix, \rho\}$,
$H\overline{\rho} \cup 1 : P\{Ix, \rho\} \to P\{x'', 1\}$ y $h \cup 1 : P\{x', 1\} \to P\{x'', 1\}$
se tiene el cuadrado de homotopía $hi = h\{x', i\} = \{x''\rho, H\overline{\rho}\}\iota_\epsilon$ asociado a la cofibración $i = \{x', i\}$.

Sea $F : IX' \to X''$ una extensión del cuadrado de homotopía obtenido. Entonces $FIx' = x''\rho$ y por tanto existe $F \cup 1 : P\{Ix', \rho\} \to P\{x'', 1\}$. Más aún, $(F \cup 1)\iota_{\epsilon*} = (F \cup 1)(\iota_\epsilon \cup 1) = F\iota_\epsilon \cup 1 = h \cup 1 = h$, y $(F \cup 1)I_*i = (F \cup 1)(Ii \cup 1) = FIi \cup 1 = H\overline{\rho} \cup 1 = H$. En consecuencia se verifica la propiedad de extensión de homotopía para las cofibraciones de cof^A.

- GI4 Axioma de cilindro relativo:

Dada una cofibración $i : (x, X) \rightarrowtail (x', X')$, usando los morfismos entre push outs asociados $i \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{x', 1\}$ y $\iota_0 \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{Ix, \rho\}$ se tiene por el teorema 0.2.1 que $P\{\iota_{0*}, i\} = P\{Ix \cup x', \rho \cup 1\} = P\{\bar{i}Ix, \rho\}$. Si ahora tomamos como morfismos entre push outs asociados $i \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{x', 1\}$ y $\bar{i}\iota_1 \cup 1 : P\{x, 1\} \to P\{\bar{i}Ix, \rho\}$ se tiene por el teorema 0.2.1 que $P\{\bar{i}\iota_{1*}, i\} = P\{\bar{i}\iota_1 \cup 1, i \cup 1\} = P\{\bar{i}Ix \cup x', \rho \cup 1\} = P\{\widetilde{\bar{i}i}Ix, \rho\}$. Se concluye entonces que el siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd}
IA \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\widetilde{\bar{i}i}Ix"'] & A \arrow[d, "(\widetilde{i})_*(\bar{i})_*\overset{(1}{\overline{x}}"] \\
I_i^1 X \arrow[r, "\overline{\rho} \cup 1 \cup 1"'] & I_{*i}^1 X
\end{tikzcd}$$

Como $i^1\widetilde{\bar{i}i}Ix = IiIx = Ix'$ existe el morfismo $i^1 \cup 1 : P\{\widetilde{\bar{i}i}Ix, \rho\} = I_{*i}^1 X \to P\{Ix', \rho\} = I_* X'$. Además, por el teorema 0.2.1 y la observación 0.2.1 se tiene que $(i)_*^1 = \{I_* i, \iota_{0*}, \iota_{1*}\} = \{Ii \cup 1, \iota_0 \cup 1, \iota_1 \cup 1\} =$
$\{\{\overline{\rho}Ii, \overset{(1}{\overline{x}}\}, \{\overline{\rho}\iota_0, \overset{(1}{\overline{x}}\}, \{\overline{\rho}\iota_1, \overset{(1}{\overline{x}}\}\} = \{\{\overline{\rho}Ii, \overline{\rho}\iota_0, \overline{\rho}\iota_1\}, \{\overset{(1}{\overline{x}}, \overset{(1}{\overline{x}}, \overset{(1}{\overline{x}}\}\} = \{\overline{\rho}i^1, \overset{(1}{\overline{x}}\} = i^1 \cup 1$.

Observando que $\{Ix', i^1\} = i^1 : P\{1, \widetilde{\bar{i}i}Ix\} = I_i^1 X \to IX'$, se tiene, por la proposición 1.1.3, que $(i)_*^1$ es cofibración en $\mathcal{C}$ y por consiguiente en cof^A.

- GI5 Axioma de producto:

Por la definición de transformación natural y por el corolario 3.1.1, se verifica:

$$\chi_{\epsilon *}\iota_{\nu * I_*} = (\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1)(\iota_{\nu I} \cup_{\iota_{\nu I}} 1) = (\chi_\epsilon \iota_{\nu I}) \cup_{\chi_\epsilon \iota_{\nu I}} 1 = \left\{ \begin{array}{cc} 1 \cup_1 1 \ , & \nu = \epsilon \\ \iota_\nu \rho \cup_{\iota_\nu \rho} 1 \ , & \nu \neq \epsilon \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 \ , & \nu = \epsilon \\ (\iota_\nu \cup_{\iota_\nu} 1)(\rho \cup_\rho 1) \ , & \nu \neq \epsilon \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 \ , & \nu = \epsilon \\ \iota_{\nu *}\rho_* \ , & \nu \neq \epsilon \end{array} \right.$$

$$\chi_{\epsilon *} I_* \iota_{\nu *} = (\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1)(I\iota_\nu \cup_{\iota_\nu} 1) = \chi_\epsilon I\iota_\nu \cup_{\chi_\epsilon I\iota_\nu} 1 = \left\{ \begin{array}{cc} 1 \cup_1 1 \ , & \nu = \epsilon \\ (\iota_\nu \rho) \cup_{\iota_\nu \rho} 1 \ , & \nu \neq \epsilon \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 \ , & \nu = \epsilon \\ (\iota_\nu \cup_{\iota_\nu} 1)(\rho \cup_\rho 1) \ , & \nu \neq \epsilon \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 \ , & \nu = \epsilon \\ \iota_{\nu *}\rho_* \ , & \nu \neq \epsilon \end{array} \right.$$

Finalmente, $\rho_*\chi_{\epsilon *} = (\rho \cup_\rho 1)(\chi_\epsilon \cup_{\chi_\epsilon} 1) = \rho\chi_\epsilon \cup_{\rho\chi_\epsilon} 1 = \rho^2 \cup_{\rho^2} 1 = (\rho \cup_\rho 1)(\rho \cup_\rho 1) = \rho_*^2$.

□

De esta forma, en la categoría cof^A se puede definir una homotopía generalizada relativa a cofibraciones así como una punteada, usando la cofibración inicial del dominio de los morfismos.

Proposición 3.1 .6. *Dada una cofibración entre push outs asociados* $i = \alpha \cup_\beta 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s'\}$, *con* $i : (x, X) \to (x', X')$, *se tiene que* $I^1_{*i}(x, X)$ *tiene como push out asociado* $I^1_{*i}X = P\{I^1_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho, s', s'\}\}$ *y* $(i)^1_* = \alpha^1 \cup_{\beta^1} 1 : I^1_{*i}X = P\{I^1_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho, s', s'\}\} \to I_*X' = P\{Ij', s'\rho\}$ *es una cofibración entre push outs asociados con* $(i)^1_* : I^1_{*i}(x, X) \to I_*(x', X')$.

Demostración. Los morfismos $\beta : S \to S'$, $\alpha : T \to T'$ e $i : X \to X'$ son cofibraciones en $\mathcal{C}$, y por tanto existen los objetos $I^1_\beta S$, $I^1_\alpha T$ y $I^1_i X$ y el morfismo $\{s\rho, s', s'\}$ pues $s\rho\iota_0 = s\rho\iota_1 = s = s'\beta$. Por el teorema 0.2.1 y observando que $\iota_{\epsilon *} = \iota_\epsilon \cup_{\iota_\epsilon} 1 : P\{j, s\} \to P\{Ij, s\rho\}$ se tiene que $P\{\iota_{0*}, i\} = P\{\iota_0 \cup_{\iota_0} 1, \alpha \cup_\beta 1\} = P\{Ij \cup_j j', \{s\rho, s'\}\}$ y $P\{\bar{i}\iota_{1*}, i\} = P\{\overline{\alpha}\iota_1 \cup_{\overline{\beta}\iota_1} 1, \alpha \cup_\beta 1\} = P\{I^1_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho, s', s'\}\}$, de donde se concluye que $I^1_{*i}X = P\{I^1_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho, s', s'\}\}$.

El morfismo $(i)^1_* = \{I_*i, \iota_{0*}, \iota_{1*}\} = \{I\alpha \cup_{I\beta} 1, \iota_0 \cup_{\iota_0} 1, \iota_1 \cup_{\iota_1} 1\} : I^1_{*i}X = P\{\overline{\alpha}\iota_1 \cup_{\overline{\beta}\iota_1} 1, \alpha \cup_\beta 1\} \to I_*X' = P\{Ij', s'\rho\}$ coincide, por el cuarto apartado del teorema 0.2.1 y la observación 0.2.1, con el morfismo $\{I\alpha, \iota_0, \iota_1\} \cup_{\{I\beta, \iota_0, \iota_1\}} \{1, 1, 1\} = \alpha^1 \cup_{\beta^1} 1 : P\{I^1_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho, s', s'\}\} \to P\{Ij', s'\rho\}$. De la proposición 1.2.7 se tiene que los push outs son cofibrados y de la observación 2.1.4 se concluye el resultado. □

Consecuencia de esta proposición se obtiene la relación entre los cilindros relativos en la categoría original $\mathcal{C}$ con los de la categoría cof^A.

Teorema 3.1 .3. *Dada una cofibración entre push outs asociados* $i = \alpha \cup_\beta 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s'\}$, *con* $i : (x, X) \rightarrowtail (x', X')$, *se tiene que* $I^n_{*i}(x, X)$

tiene como push out asociado $I^n_{*i}X = P\{I^n_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho^n, s'\rho^{n-1}, s'\rho^{n-1}\cdots s'\rho^{n-1}\}\}$ *y además* $(i)^n_* = \alpha^n \cup_{\beta^n} 1 : I^n_{*i}X =$ $P\{I^n_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho^n, s'\rho^{n-1}, s'\rho^{n-1}\cdots s'\rho^{n-1}\}\} \rightarrow I^n_*X' = P\{I^n j', s'\rho^n\}$ *es una cofibración entre push outs asociados, con* $(i)^n_* : I^n_{*i}(x,X) \rightarrow I^n_*(x',X')$.

Demostración. Si $n = 1$, es cierto por la proposición 3.1.6. Supuesto cierto para $n = m-1$ se tiene que $(i)^{m-1}_* = \alpha^{m-1} \cup_{\beta^{m-1}} 1 : I^{m-1}_{*i}X =$ $P\{I^{m-1}_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho^{m-1}, s'\rho^{m-2}, s'\rho^{m-2}\cdots s'\rho^{m-2}\}\} \rightarrow I^{m-1}_*X' = P\{I^{m-1}j', s'\rho^{m-1}\}$ es una cofibración entre push outs asociados por hipótesis de inducción, con $(i)^{m-1}_* : I^{m-1}_{*i}(x,X) \rightarrow I^{m-1}_*(x',X')$. Usando la proposición 3.1.6 anterior se concluye que $I^m_{*i}(x,X) = I^1_{*(i)^{m-1}_*}I^{m-1}_{*i}(x,X)$ tiene como push out asociado $I^m_{*i}X = P\{I^1_{(\alpha^{m-1},\beta^{m-1})}I^{m-1}_{(\alpha,\beta)}j, \{\{s\rho^{m-1}, s'\rho^{m-2}, \cdots s'\rho^{m-2}\}\rho, s'\rho^{m-1}, s'\rho^{m-1}\}\} =$ $P\{I^m_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho^m, s'\rho^{m-1}, s'\rho^{m-1}\cdots s'\rho^{m-1}\}\}$ y $(i)^m_* = ((i)^{m-1}_*)^1_* = (\alpha^{m-1})^1 \cup_{(\beta^{m-1})^1} 1 = \alpha^m \cup_{\beta^m} 1 : I^m_{*i}X =$ $P\{I^m_{(\alpha,\beta)}j, \{s\rho^m, s'\rho^{m-1}, s'\rho^{m-1}\cdots s'\rho^{m-1}\}\} \rightarrow I^m_*X' = P\{I^m j', s'\rho^m\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con $(i)^m_* : I^m_{*i}(x,X) \rightarrow I^m_*(x',X')$. □

Corolario 3.1 .2. *Dada una cofibración entre push outs asociados* $i = \alpha\cup_1 1 : P\{j,s\} \rightarrow P\{j',s\}$*, con* $i : (x,X) \rightarrowtail (x',X')$*, se tiene que* $I^n_{*i}(x,X)$ *tiene como push outs asociados* $I^n_{*i}X = P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\}$ *y además* $(i)^n_* = \alpha^n \cup_1 1 : I^n_{*i}X =$ $P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\} \rightarrow I^n_*X' = P\{I^n j', s\rho^n\}$ *es una cofibración entre push outs asociados, con* $(i)^n_* : I^n_{*i}(x,X) \rightarrow I^n_*(x',X')$.

Demostración. Basta observar que si en el teorema 3.1.3 anterior se toma $\beta = 1 : S \rightarrow S$ entonces $\beta^n = 1 : I^n S \rightarrow I^n S$ y $I^n_{(\alpha,\beta)}j = \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j$. Nótese que el push out $P\{\iota_{0*}, (i)^{n-1}_*\}$ en cof^A tiene como push out asociado $P\{\iota_{0*}, (i)^{n-1}_*\} = P\{\overline{\alpha^{n-1}}I\widetilde{\alpha^{n-2}}I\overline{\alpha^{n-2}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\}$ y que los morfismos $\overline{\iota_{0*}} = \overline{\iota_0} \cup_{\iota_0} 1 : I^{n-1}_*X' = P\{I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} \rightarrow P\{\iota_{0*}, (i)^{n-1}_*\} =$ $P\{\overline{\alpha^{n-1}}I\widetilde{\alpha^{n-2}}I\overline{\alpha^{n-2}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\}$, $\overline{(i)^{n-1}_*} = \overline{\alpha^{n-1}} \cup_1 1 : I_*I^{n-1}_{*i}X =$ $P\{I\widetilde{\alpha^{n-2}}I\overline{\alpha^{n-2}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\} \rightarrow P\{\iota_{0*}, (i)^{n-1}_*\} =$

$P\{\overline{\alpha^{n-1}}I\widetilde{\alpha^{n-2}}I\overline{\alpha^{n-2}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^nj, s\rho^n\}$,
$\overline{\overline{(i)^{n-1}_{*}}}\iota_{1*} = \overline{\overline{\overline{\alpha^{n-1}}}\iota_1} \cup_{\iota_1} 1 : I^{n-1}_{*}X' = P\{I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} \to I^n_{*i}X =$
$P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^nj, s\rho^n\}$ y
$\widetilde{(i)^{n-1}_{*}} = \widetilde{\alpha_{n-1}} \cup_1 1 : P\{\iota_{0*}, (i)^{n-1}_{*}\} =$
$P\{\overline{\alpha^{n-1}}I\widetilde{\alpha^{n-2}}I\overline{\alpha^{n-2}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^nj, s\rho^n\} \to I^n_{*i}X =$
$P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^nj, s\rho^n\}$ son las cofibraciones entre push outs asociados inducidas. $\square$

3.2 Homotopía generalizada en categorías punteadas

La relación establecida anteriormente entre los cilindros punteados y los cilindros originales, así como entre los relativos punteados y los relativos originales permite describir la homotopía generalizada de cof^A en términos de la de $\mathcal{C}$. Más aún, usando la estructura de homotopía de cof^A es posible crear homotopía generalizada para objetos arbitrarios de $\mathcal{C}$ y basados en morfismos cuyo dominio esté en cof^A.

A lo largo de esta sección, $i : (x, X) \rightarrowtail (x', X')$ será una cofibración que se puede expresar como una cofibración entre push outs asociados de la forma $i = \alpha \cup_1 1 : P\{j, s\} \to P\{j', s\}$.

Como la cofibración i lo es en $\mathcal{C}$ y en cof^A, entonces existirán dos homotopías según se use el cilindro normal o el cilindro punteado. Los diferentes corchetes, grupos y demás objetos homotópicos que aparezcan se seguirán diferenciando mediante $*$ para los punteados.

Obsérvese que por la proposición 0.2.2, el cuadrado $\widetilde{s}\alpha = i\overline{s}$ es un push out, y por tanto la homotopía relativa a i es equivalente a la relativa a la cofibración α.

Definición 3.2 .1. Dados dos morfismos $h_0, h_1 : X' \to Y$ se dirá que

$h_0 \simeq_* h_1\ rel\ i$ si existe $H : I_*X' \to Y$ con $H(i)^1_* = \{h_0 i\rho_*, h_0, h_1\}$.

Las demostraciones hechas en homotopía relativa en $\mathcal{C}$ a lo largo de todo este trabajo siguen siendo válidas cuando la homotopía utilizada sea la definida anteriormente usando la estructura de homotopía ya descrita en cof^A.

Proposición 3.2.1. *Para todo objeto Y de $\mathcal{C}$ y todo morfismo $u : X \to Y$, los corchetes $[T', Y]^{u\overline{s}\{\alpha\}}$ y $[X', Y]^{u\{i\}}_*$ son biyectivos.*

Demostración. Sea $\gamma : [X', Y]^{u\{i\}}_* \to [T', Y]^{u\overline{s}\{\alpha\}}$ definida por $\gamma([h]) = [h\widetilde{s}]$.

- Bien definida:

Si $[h_0] = [h_1]$ en $[X', Y]^{u\{i\}}_*$ entonces existe $H : I_*X' \to Y$ tal que $H(i)^1_* = \{u\rho_*, h_0, h_1\}$. El morfismo $H\overline{\rho}I\widetilde{s} : IT' \to Y$ verifica $H\overline{\rho}I\widetilde{s}I\alpha = HI_*i\overline{\rho}I\overline{s} = u\rho_*\overline{\rho}I\overline{s} = u\overline{s}\rho$, $H\overline{\rho}I\widetilde{s}\iota_0 = H\iota_{0*}\widetilde{s} = h_0\widetilde{s}$ y $H\overline{\rho}I\widetilde{s}\iota_1 = H\iota_{1*}\widetilde{s} = h_1\widetilde{s}$.

Por tanto $H\overline{\rho}I\widetilde{s} : h_0\widetilde{s} \simeq h_1\widetilde{s}\ rel\ \alpha$.

- Inyectiva:

Si $H : IT' \to Y$ hace $h_0\widetilde{s} \simeq h_1\widetilde{s}\ rel\ \alpha$ entonces $HIj' = HI\alpha Ij = u\overline{s}\rho Ij = u\overline{s}j\rho = uxs\rho$ y por tanto existe $\{H, ux\} : P\{Ij', s\rho\} = I_*X' \to Y$. De donde $\{H, ux\}I_*i = \{H, ux\}(I\alpha \cup 1) = \{HI\alpha, ux\} = \{u\overline{s}\rho, ux\} = \{u\overline{s}, ux\}(\rho \cup 1) = u\{\overline{s}, x\}(\rho \cup 1) = u\rho_*$, $\{H, ux\}\iota_{0*} = \{H, ux\}(\iota_0 \cup 1) = \{H\iota_0, ux\} = \{h_0\widetilde{s}, ux\} = \{h_0\widetilde{s}, h_0 ix\} = \{h_0\widetilde{s}, h_0 x'\} = h_0$ y $\{H, ux\}\iota_{1*} = \{H, ux\}(\iota_1 \cup 1) = \{H\iota_1, ux\} = \{h_1\widetilde{s}, h_1 ix\} = \{h_1\widetilde{s}, h_1 x'\} = h_1$.

- Suprayectiva:

Si $h\alpha = u\overline{s}$ entonces $hj' = h\alpha j = u\overline{s}j = uxs$, de donde existe $\{h, ux\} : X' \to Y$. Evidentemente $\{h, ux\}\widetilde{s} = h$ y $\{h, ux\}i = \{h, ux\}(\alpha \cup 1) = \{h\alpha, ux\} = \{u\overline{s}, ux\} = u$.

□

Teorema 3.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $h : X' \to Y$, los grupos de homotopía $\pi^\alpha_n(Y, h\widetilde{s})$ y $\pi^i_{*n}(Y, h)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\gamma : \pi^i_{*n}(Y,h) \to \pi^\alpha_n(Y, h\widetilde{s})$ definida por $\gamma([H]_*) = [H\widetilde{s\rho^n}]$.

- γ está bien definida:

El morfismo $H\widetilde{s\rho^n} : I^nT' \to Y$ verifica por el teoremas 3.1.1 y el corolario 3.1.2, que $H\widetilde{s\rho^n}\alpha^n = H(i)^n_*\overline{s\rho^n} = h\rho^n_*(i)^n_*\overline{s\rho^n} = h\rho^n_*\widetilde{s\rho^n}\alpha^n = h\widetilde{s}\rho^n\alpha^n$.

Obsérvese que $\rho^n_* = \rho^n \cup_{\rho^n} 1 : I^n_*X' = P\{I^nj', s\rho^n\} \to X' = P\{j', s\}$.

Y por tanto $H\widetilde{s\rho^n} : h\widetilde{s}\rho^{n-1} \simeq h\widetilde{s}\rho^{n-1}\ rel\ \alpha^{n-1}$.

Si $[H_0]_* = [H_1]_*$ en $\pi^i_{*n}(Y,h)$ entonces existe $H : I^{n+1}_*X' \to Y$ tal que $H : H_0 \simeq_* H_1\ rel\ (i)^n_*$. El morfismo $H\widetilde{s\rho^{n+1}} : I^{n+1}T' \to Y$ verifica que $H\widetilde{s\rho^{n+1}}\alpha^{n+1} = H(i)^{n+1}_*\overline{s\rho^{n+1}} = \{HI_*(i)^n_*, H\iota_{0*}, H\iota_{1*}\}\overline{s\rho^{n+1}} =$
$\{h\rho^{n+1}_*I_*(i)^n_*, H_0, H_1\}\overline{s\rho^{n+1}} = \{h\rho^{n+1}_*I_*(i)^n_*\widehat{s\rho^{n+1}}, H_0\widetilde{s\rho^n}, H_1\widetilde{s\rho^n}\} =$
$\{h\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+1}}I\alpha^n, H_0\widetilde{s\rho^n}, H_1\widetilde{s\rho^n}\} = \{h\widetilde{s}\rho^{n+1}I\alpha^n, H_0\widetilde{s\rho^n}, H_1\widetilde{s\rho^n}\}$,
de donde $H\widetilde{s\rho^{n+1}} : H_0\widetilde{s\rho^n} \simeq H_1\widetilde{s\rho^n}\ rel\ \alpha^n$.

- γ es inyectiva:

Si $[H_0\widetilde{s\rho^n}] = [H_1\widetilde{s\rho^n}]$ en $\pi^\alpha_n(Y, h\widetilde{s})$ entonces existe $H : I^{n+1}T' \to Y$ haciendo $H_0\widetilde{s\rho^n} \simeq H_1\widetilde{s\rho^n}\ rel\ \alpha^n$. Como $HI^{n+1}j' = HI^{n+1}\alpha I^{n+1}j = h\widetilde{s}\rho^{n+1}I^{n+1}\alpha I^{n+1}j = h\widetilde{s}\alpha j\rho^{n+1} = hi\overline{s}j\rho^{n+1} = hixs\rho^{n+1}$, existe el morfismo $\{H, hix\} : I^{n+1}_*X' \to Y$ verificando por el corolario 3.1.2 que $\{H, hix\}(i)^{n+1}_* =$
$\{H, hix\}(\alpha^{n+1} \cup 1) = \{H\alpha^{n+1}, hix\} =$
$\{\{h\widetilde{s}\rho^{n+1}I\alpha^n, H_0\widetilde{s\rho^n}, H_1\widetilde{s\rho^n}\}, hix\} =$
$\{\{h\widetilde{s}\rho^{n+1}I\alpha^n, hix\}, \{H_0\widetilde{s\rho^n}, hix\}, \{H_1\widetilde{s\rho^n}, hix\}\} =$
$\{\{h\widetilde{s}\rho^{n+1}, hix\}(I\alpha^n \cup 1), H_0, H_1\} = \{\{h\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+1}}, hix\}I_*(i)^n_*, H_0, H_1\} =$
$\{h\rho^{n+1}_*I_*(i)^n_*, H_0, H_1\}$ y por tanto $\{H, hix\} : H_0 \simeq_* H_1\ rel\ (i)^n_*$.

Nótese que $H_\epsilon \overset{(n}{\overline{x'}}= H_\epsilon(i)^n_* \overset{(n}{\overline{x}}= h\rho^n_*(i)^n_* \overset{(n}{\overline{x}}= h\rho^n_* \overset{(n}{\overline{x'}}= hx' = hix$, para $\epsilon \in \{0,1\}$. De donde $H_\epsilon = \{H_\epsilon\widetilde{s\rho^n}, hix\}$ y $h\rho^n_* = \{h\rho^n_*\widetilde{s\rho^n}, hix\}$.

- γ es suprayectiva:

Si $H : I^nT' \to Y$ hace $h\widetilde{s}\rho^{n-1} \simeq h\widetilde{s}\rho^{n-1}\ rel\ \alpha^{n-1}$ entonces $HI^nj' = HI^n\alpha I^nj = h\widetilde{s}\rho^nI^n\alpha I^nj = h\widetilde{s}\alpha j\rho^n = hi\overline{s}j\rho^n = hixs\rho^n$ y por tanto existe $\{H, hix\} : I^n_*X' \to Y$, verificando por el corolario 3.1.2 que $\{H, hix\}(i)^n_* =$

$\{H, hix\}(\alpha^n \cup 1) = \{H\alpha^n, hix\} = \{h\widetilde{s}\rho^n\alpha^n, hix\} = \{h\widetilde{s}\rho^n, hix\}(\alpha^n \cup 1) = \{h\widetilde{s}\rho^n, hix\}(i)^n_* = \{h\widetilde{s}, hx'\}(\rho^n \cup 1)(i)^n_* = h\rho^n_*(i)^n_*$. Evidentemente $\{H, hix\}\widetilde{s\rho^n} = H$.

- γ es homomorfismo de grupos:

Usando el corolario 3.1.2 y la proposición 0.2.1 se tiene que $P\{(i)^{n-1}_*, (i)^{n-1}_*\} = P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$, donde $\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j' = \overline{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j' : I^{n-1}S \to P\{\alpha^{n-1}, \alpha^{n-1}\}$,
y $\{(i)^{n-1}_*\rho_*, 1\} \cup 1 = (\{\alpha^{n-1}\rho, 1\} \cup 1) \cup_\rho 1 : I^n_{*i}X = P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}I\widetilde{\alpha^{n-2}} \cdots I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\} \to P\{(i)^{n-1}_*, (i)^{n-1}_*\} = P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$.
De donde $I^{(i)^{n-1}_*}_* = P\{(i)^n_*, \{(i)^{n-1}_*\rho_*, 1\} \cup 1\} = P\{\alpha^n \cup 1, (\{\alpha^{n-1}\rho, 1\} \cup 1) \cup 1\} = P\{j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$, donde $j_0 I^{n-1}j' = \{j_0, j_1\}\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j' = \{j_0, j_1\}\overline{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j' = j_1 I^{n-1}j' : I^{n-1}T' \to I^{\alpha^{n-1}}$. Como $\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j'$ y $j_0 I^{n-1}j'$ son cofibraciones, entonces los objetos de cof^A $P\{(i)^{n-1}_*, (i)^{n-1}_*\}$ y $I^{(i)^{n-1}_*}_*$ tienen como push outs asociados a $P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$ y $P\{j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$ respectivamente, obteniéndose los morfismos entre push outs asociados $\omega_* = \omega \cup_\rho 1 : I^n_* X' = P\{I^n j', s\rho^n\} \to I^{(i)^{n-1}_*}_* = P\{j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$ y $\{j_{0*}, j_{1*}\} = \{j_0, j_1\} \cup_1 1 : P\{(i)^{n-1}_*, (i)^{n-1}_*\} = P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} \to I^{(i)^{n-1}_*}_* = P\{j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$.

Nótese que $j_{0*} = \{j_{0*}, j_{1*}\}\widetilde{(i)^{n-1}_*} = (\{j_0, j_1\} \cup 1)(\widetilde{\alpha^{n-1}} \cup 1) = j_0 \cup 1 : I^{n-1}_* X' = P\{I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} \to I^{(i)^{n-1}_*}_* = P\{j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$; análogamente $j_{1*} = j_1 \cup 1 : I^{n-1}_* X' = P\{I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} \to I^{(i)^{n-1}_*}_* = P\{j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$.

Usando lo anterior se tiene que $P\{j_{0*}, j_{0*}\} = P\{\overline{j_0}j_0 I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$. Entonces, si $\nu' : II^{\alpha^{n-1}} \to P\{j_0, j_0\}$ es una extensión del cuadrado de homotopía $\widetilde{j_0}\{j_0, j_1\} = (\omega \cup j_1\rho)\iota_0$ asociado a la cofibración $\{j_0, j_1\}$, se tiene que $\nu' I j_0 I^n j' = \widetilde{j_0}\omega I^n j' = \widetilde{j_0}\omega I^n \alpha I^n j = \widetilde{j_0} j_0 I^{n-1}\alpha\rho I^n j = \overline{j_0} j_0 I^{n-1}\alpha I^{n-1} j\rho = \overline{j_0} j_0 I^{n-1}j'\rho$ y $s\rho^{n-1}\rho = s\rho^n$, y por el teorema 3.1.1 existe el morfismo entre push outs asociados $\nu' \cup_\rho 1 : I_* I^{(i)^{n-1}_*}_* = P\{I j_0 I^n j', s\rho^n\} \to P\{j_{0*}, j_{0*}\} =$

$P\{\overline{j_0}j_0I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\}$ verificando $(\nu' \cup_\rho 1)\iota_{0*} = (\nu' \cup_\rho 1)(\iota_0 \cup_{\iota_0} 1) = (\nu'\iota_0) \cup_{\rho\iota_0} 1 = \widetilde{j_0} \cup_1 1 = \widetilde{j_{0*}} : P\{j_0I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} =$
$I_*^{(i)_*^{n-1}} \to P\{\overline{j_0}j_0I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} = P\{j_{0*}, j_{0*}\}$ y
$(\nu'\cup 1)I_*\{j_{0*}, j_{1*}\} = (\nu'\cup 1)(I\{j_0, j_1\}\cup 1) = (\nu' I\{j_0, j_1\})\cup 1 = (\omega\cup j_1\rho)\cup 1 = \omega_* \cup (j_{1*}\rho_*) : P\{I\overline{\alpha^{n-1}}I^n j', s\rho^n\} = I_*P\{(i)_*^{n-1}, (i)_*^{n-1}\} \to P\{\overline{j_0}j_0I^{n-1}j', s\rho^{n-1}\} = P\{j_{0*}, j_{0*}\}$ y por tanto $\nu'_* = \nu' \cup 1$ es una extensión adecuada en cof^A para el cuadrado de homotopía $\widetilde{j_{0*}}\{j_{0*}, j_{1*}\} = (\omega_* \cup j_{1*}\rho_*)\iota_{0*}$ asociado a la cofibración $\{j_{0*}, j_{1*}\}$.

Se concluye que $\gamma([F * G]) =$
$\gamma([\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*, \{G, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*\omega_*]) =$
$[\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*, \{G, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*\omega_*\widetilde{s\rho^n}] =$
$[\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*, \{G, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*\widetilde{s\rho^{n-1}}\omega] =$
$[\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*, \{G, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\widehat{s\rho^{n-1}}\nu\omega] =$
$[\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\nu_*\overline{s\rho^{n-1}},$
$\{G, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\overline{s\rho^{n-1}}\}\nu\omega] =$
$[\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\}\widehat{s\rho^{n-1}}\nu,$
$\{G\widetilde{s\rho^n}, h\rho_*^{n-1}\widetilde{s\rho^{n-1}}, h\rho_*^{n-1}\widetilde{s\rho^{n-1}}\}\}\nu\omega] =$
$[\{\{\{F, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\overline{s\rho^{n-1}}, \{h\rho_*^n, h\rho_*^{n-1}, h\rho_*^{n-1}\}\overline{s\rho^{n-1}}\}\nu,$
$\{G\widetilde{s\rho^n}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}\}\}\nu\omega] =$
$[\{\{\{F\widetilde{s\rho^n}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}\}, \{h\widetilde{s}\rho^n, h\widetilde{s}\rho^{n-1}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}\}\}\nu,$
$\{G\widetilde{s\rho^n}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}, h\widetilde{s}\rho^{n-1}\}\}\nu\omega] =$
$[F\widetilde{s\rho^n} * G\widetilde{s\rho^n}] = [F\widetilde{s\rho^n}] \cdot [G\widetilde{s\rho^n}] = \gamma([F]) \cdot \gamma([G])$.

$\square$

Corolario 3.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $h : X' \to Y$, los grupos de homotopía $\pi_n^i(Y, h)$ y $\pi_{*n}^i(Y, h)$ son isomorfos.*

Demostración. Consecuencia del teorema 3.2.1 anterior observando que con los push outs canónicos asociados se tiene: $i = i \cup_1 1 : X = P\{x, 1\} \to X' = P\{x', 1\}$. $\square$

En la categoría de cofibraciones de cof^A, esto es, la subcategoría llena de pares de cof^A cuyos objetos son cofibraciones, se puede realizar un proceso similar al hecho en la sección primera de éste capítulo, asociando push outs a objetos de esta categoría y definiendo morfismos y cofibraciones entre estos push outs asociados. Como sucedía en la sección mencionada, también en ésta, dicho proceso facilitará los desarrollos a realizar en la categoría de cofibraciones de cof^A. Nótese que la categoría de cofibraciones de cof^A coincide con $cof^{(A,A)}$.

Definición 3.2.2. Un diagrama push out cofibrado en la categoría $cof\ \mathcal{C}$ del tipo

$$\begin{tikzcd}
(S',S) \arrow[r, "{(s',s)}"] \arrow[d, tail, "{(j',j)}"'] & (A,A) \arrow[d, tail, "{(x',x)}"] \\
(T',T) \arrow[r, "{(\overline{s'},\overline{s})}"'] & (X',X)
\end{tikzcd}$$

se denominará un push out asociado al par $((x',X'),(x,X))$ cuando $P\{j',s'\}$ y $P\{j,s\}$ sean push outs asociados respectivamente a los objetos (x',X') y (x,X), y $(X',X) = P\{(j',j),(s',s)\} = \varphi = \alpha \cup_\beta 1 : P\{j,s\} \to P\{j',s'\}$ sea una cofibración entre push outs asociados, con $\varphi : (x,X) \to (x',X')$ la cofibración asociada al par $((x',X'),(x,X))$.

Nótese que todo par $((x',X'),(x,X))$ tiene asociado un push out canónico donde $(X',X) = P\{(x',x),1_{(A,A)}\}$.

Definición 3.2 .3. Un morfismo entre push outs $P\{(j',j),(s',s)\}$ y $P\{(j''',j''),(s''',s'')\}$ asociados a pares $((x',X'),(x,X))$ y $((x''',X'''),(x'',X''))$ respectivamente, es un morfismo de la forma
$(g_0,g_1)\cup_{(h_0,h_1)} 1 : P\{(j',j),(s',s)\} \to P\{(j''',j''),(s''',s'')\}$.

Todo morfismo de pares $(f_0,f_1) : ((x',X'),(x,X)) \to ((x''',X'''),(x'',X''))$ induce un morfismo entre los respectivos push out canónicos asociados $(f_0,f_1)\cup_1 1 : P\{(x',x),1\} \to P\{(x''',x''),1\}$.

Asimismo, induce un morfismo entre cualquier push out $P\{(j',j),(s',s)\}$ asociado al par $((x',X'),(x,X))$ y al canónico asociado a $((x''',X'''),(x'',X''))$, $(f_0\overline{s'},f_1\overline{s})\cup_{(s',s)} 1 : P\{(j',j),(s',s)\} \to P\{(x''',x''),1\}$.

Definición 3.2 .4. Un morfismo entre push outs asociados $(u,v) = (\alpha_0,\alpha_1)\cup_{(\beta_0,\beta_1)} 1 : P\{(j',j),(s',s)\} \to P\{(j''',j''),(s''',s'')\}$,
con $(u,v) : ((x',X'),(x,X)) \to ((x''',X'''),(x'',X''))$, se dice una cofibración de pares entre push outs asociados, cuando lo son en $cof\ \mathcal{C}$ los morfismos (α_0,α_1), (β_0,β_1) y $(\{j''',\alpha_0\},\{j'',\alpha_1\}) : P\{(\beta_0,\beta_1),(j',j)\} \to (T''',T'')$. Por el teorema 0.2.1 y por las condiciones exigidas se tiene que
$u = \alpha_0 \cup_{\beta_0} 1 : P\{j',s'\} \to P\{j''',s'''\}$ y $v = \alpha_1 \cup_{\beta_1} 1 : P\{j,s\} \to P\{j'',s''\}$ son cofibraciones entre push outs asociados, con $u : (x',X') \to (x''',X''')$ y $v : (x,X) \to (x'',X'')$.

Observación 3.2 .1. Un morfismo entre push outs asociados $(\gamma_0,\gamma_1) = (\alpha_0,\alpha_1)\cup_1 1 : P\{(j',j),(s',s)\} \to P\{(j''',j''),(s',s)\}$,
con $(\gamma_0,\gamma_1) : ((x',X'),(x,X)) \to ((x''',X'''),(x'',X''))$, es una cofibración de pares entre push outs asociados si y solo si (α_0,α_1) es una cofibración de pares. Basta tener en cuenta que $(\{j''',\alpha_0\},\{j'',\alpha_1\}) = (\alpha_0,\alpha_1) : P\{1_{(S',S)},(j',j)\} = (T',T) \to (T''',T'')$.

Dada la cofibración i introducida al principio de esta sección, se procede al estudio de los conos en la categoría cof^A generados por ella.

Proposición 3.2 .2. *Dada la cofibración entre push outs asociados* $i = \alpha \cup_1 1 : P\{j,s\} \rightarrowtail P\{j',s\}$*, con* $i : (x,X) \to (x',X')$*, se verifica:*

a) *El objeto* $C_*I_*^n(x',X')$ *tiene como push out asociado* $C_*I_*^nX' = P\{CI^nj',\{s\rho^{n+1},s\rho^n\}\}$

b) *El objeto* $C_*I_{*i}^n(x,X)$ *tiene como push out asociado* $C_*I_{*i}^nX = P\{C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^nj),\{s\rho^{n+1},s\rho^n\}\}$

c) *El morfismo* $C_*(i)_*^n = (C\alpha^n)\cup_1 1 : C_*I_{*i}^nX = P\{C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^nj),\{s\rho^{n+1},s\rho^n\}\} \to C_*I_*^nX' = P\{CI^nj',\{s\rho^{n+1},s\rho^n\}\}$ *es una cofibración entre push outs asociados con* $C_*(i)_*^n : C_*I_{*i}^n(x,X) \to C_*I_*^n(x',X')$.

Demostración. *a)* Por la definición de la transformación natural ι_{0*} y por el corolario 3.1.1 se verifica que el morfismo $\iota^n_{0*(x',X')} =$
$\iota^n_{0T'} \cup_{\iota^n_{0S'}} 1 : X' = P\{j', s\} \to I^n_* X' = P\{I^n j', s\rho^n\}$ es una cofibración entre push outs asociados con $\iota^n_{0*(x',X')} : (x', X') \to I^n_*(x', X')$.

Por lo anterior y por el teorema 3.1.3, el morfismo $(\iota^n_{0*})^1_* = (\iota^n_0)^1 \cup_{(\iota^n_0)^1} 1$, desde $I^1_{*\iota^n_{0*}} X' = P\{I^1_{(\iota^n_0,\iota^n_0)} j', \{s\rho, s\rho^n, s\rho^n\}\}$ en $I^{n+1}_* X' = P\{I^{n+1} j', s\rho^{n+1}\}$, es una cofibración entre push outs asociados,
con $(\iota^n_{0*})^1_* : I^1_{*\iota^n_{0*}}(x', X') \to I^{n+1}_*(x', X')$.

Por el teorema 0.2.1 se tiene el morfismo entre push outs asociados
$\{\iota^n_{0*}\rho_*, \iota^n_{0*}\rho^n_*, 1\} = \{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\} \cup_{\{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}} 1 : I^1_{*\iota^n_{0*}} X' =$
$P\{I^1_{(\iota^n_0,\iota^n_0)} j', \{s\rho, s\rho^n, s\rho^n\}\} \to I^n_* X' = P\{I^n j', s\rho^n\}$,
con $\{\iota^n_{0*}\rho_*, \iota^n_{0*}\rho^n_*, 1\} : I^1_{*\iota^n_{0*}}(x', X') \to I^n_*(x', X)$.
De donde $C_* I^n_* X' = P\{(\iota^n_{0*})^1_*, \{\iota^n_{0*}\rho_*, \iota^n_{0*}\rho^n_*, 1\}\} =$
$P\{(\iota^n_0)^1 \cup_{(\iota^n_0)^1} 1, \{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\} \cup_{\{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}} 1\} = P\{CI^n j', \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$.
Nótese que $CI^n j' = I^{n+1} j' \cup_{I^1_{(\iota^n_0,\iota^n_0)} j'} I^n j' : CI^n S \to CI^n T'$, definido como en el lema 2.2.1, es cofibración pues el morfismo de pares (ι^n_0, ι^n_0) es una cofibración de pares al ser la composición consigo mismo n veces de la cofibración de pares (ι_0, ι_0), y por la observación 2.1.3 se tiene que $((\iota^n_0)^1, (\iota^n_0)^1)$ también lo es. De donde por la observación 2.1.2 se tiene que la cofibración asociada al par
$P\{((\iota^n_0)^1, (\iota^n_0)^1), (\{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\}, \{\iota^n_0\rho, \iota^n_0\rho^n, 1\})\}$ es justamente $CI^n j'$.

Se concluye que el objeto $C_* I^n_*(x', X')$ tiene como push out asociado $C_* I^n_* X' = P\{CI^n j', \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$.

b) Por el corolario 3.1.2 se tiene que el morfismo $\widetilde{(i)^{n-1}_*}\overline{\iota_{0*}}\iota^{n-1}_{0*} =$
$\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota^{n-1}_0 \cup_{\iota^n_0} 1 : X' = P\{j', s\} \to I^n_{*i} X =$
$P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j, s\rho^n\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con $\widetilde{(i)^{n-1}_*}\overline{\iota_{0*}}\iota^{n-1}_{0*} : (x', X') \to I^n_{*i}(x, X)$. Nótese que el mor-

fismo de pares $(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}, \iota_0^n) = (\widetilde{\alpha^{n-1}}, 1)(\overline{\iota_0}, \iota_0)(\iota_0, \iota_0)\cdots(\iota_0, \iota_0)$ es una cofibración de pares, por serlo (ι_0, ι_0), $(\overline{\iota_0}, \iota_0)$ y $(\widetilde{\alpha^{n-1}}, 1)$. Estas dos últimas lo son por la demostración del axioma **GI2** del teorema 3.1.2 y la observación 2.1.1. De donde por la misma observación mencionada también lo es el morfismo $(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, j')$.

Por la proposición 3.1.6 se tiene que el morfismo
$(\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1})_*^1 = (\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1 \cup_{(\iota_0^n)^1} 1 : I^1_{*\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}} X' =$
$P\{I^1_{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}, \iota_0^n)} j', \{s\rho, s\rho^n, s\rho^n\}\} \to I_* I_{*i}^n X =$
$P\{I(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j), s\rho^{n+1}\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con
$(\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1})_*^1 : I^1_{*\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}}(x', X') \to I_* I_{*i}^n(x, X)$. Por otro lado se tiene el morfismo entre push outs asociados
$\{\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}\rho_*, \widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}\rho_*^n(i)_*^n, 1\} =$
$\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\alpha^n, 1\} \cup_{\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}} 1 : I^1_{*\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}} X' =$
$P\{I^1_{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}, \iota_0^n)} j', \{s\rho, s\rho^n, s\rho^n\}\} \to I_{*i}^n X =$
$P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j, s\rho^n\}$ con
$\{\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}\rho_*, \widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}\rho_*^n(i)_*^n, 1\} : I^1_{*\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}}(x', X') \to I_{*i}^n(x, X)$.

Por el teorema 0.2.1 se tiene que $C_* I_{*i}^n X =$
$P\{(\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1})_*^1, \{\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}\rho_*, \widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1}\rho_*^n(i)_*^n, 1\}\} =$
$P\{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1 \cup_{(\iota_0^n)^1} 1, \{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\alpha^n, 1\} \cup_{\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}} 1\} =$
$P\{C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j), \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$, donde
$C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j) =$
$I(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j) \cup_{I^1_{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}, \iota_0^n)} j'} \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots$
$I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j : CI^n S = P\{(\iota_0^n)^1, \{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}\} \to CI_\alpha^n T =$
$P\{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1, \{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\alpha^n, 1\}\}$ es cofibración pues el morfismo de pares $(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}, \iota_0^n) = (\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}, \iota_0)(\iota_0, \iota_0)\cdots(\iota_0, \iota_0)$ es una cofibración de pares por ser composición de ellas. Nótese que

$(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}, \iota_0) : (I^{n-1}T', I^{n-1}_\alpha T) \to (I^n_\alpha T, II^{n-1}_\alpha T)$ es cofibración de pares pues ι_0 y $\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}, \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\} = \widetilde{\alpha^{n-1}}\{\overline{\iota_0}, \overline{\alpha^{n-1}}\} =$
$\widetilde{\alpha^{n-1}} : P\{\alpha^{n-1}, \iota_0\} \to I^n_\alpha T$ lo son en $\mathcal{C}$. Por la observación 2.1.3 se tiene que $((\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1, (\iota_0^n)^1)$ también lo es. De donde por la observación 2.1.2 se tiene que la cofibración asociada al par
$P\{((\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1, (\iota_0^n)^1), (\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho, \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\alpha^n, 1\},$
$\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\})\}$ es justamente $C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j)$.

Se concluye que el objeto $C_*I^n_{*i}(x, X)$ tiene como push out asociado $C_*I^n_{*i}X = P\{C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j), \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$.

c) Por el teorema 3.1.1, el corolario 3.1.2 y el teorema 0.2.1 se tiene que $C_*(i)^n_* = I_*(i)^n_* \cup_{I^1_{*(\iota^n_{0*}, \widetilde{(i)^{n-1}_*}\overline{\iota_{0*}}\iota^{n-1}_{0*})}} {}_1 (i)^n_* =$
$(I\alpha^n \cup_1 1) \cup_{1\cup(\alpha^n\cup_1 1)\cup(\alpha^n\cup_1 1)} (\alpha^n \cup_1 1) =$
$(I\alpha^n \cup_{1\cup\alpha^n\cup\alpha^n} \alpha^n) \cup_1 1 = (C\alpha^n) \cup_1 1 : C_*I^n_{*i}X =$
$P\{C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j), \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\} \to C_*I^n_*X' =$
$P\{CI^n j', \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con $C_*(i)^n_* : C_*I^n_{*i}(x, X) \to C_*I^n_*(x', X')$. Nótese que por el corolario 2.2 .1, $C\alpha^n$ es una cofibración, y que por la observación 3.1.1, el morfismo anterior es una cofibración entre push outs asociados.

$\square$

Observación 3.2.2. Por la demostración de los apartados primero y segundo de la proposición 3.2.2 anterior y por el axioma **GI2** en $cof\ \mathcal{C}$ se tiene que $\underline{(\overline{(\iota_0^n)^1}, \overline{(\iota_0^n)^1}) :} (I^nT', I^nS) \to (CI^nT', CI^nS)$ y
$((\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1, \overline{(\iota_0^n)^1}) : (I^n_\alpha T, I^nS) \to (CI^n_\alpha T, CI^nS)$ son cofibraciones de pares. De donde, por la observación 2.1.1, también lo son (CI^nj', I^nj') desde (CI^nS, I^nS) en (CI^nT', I^nT') y
$(C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j), \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j)$ desde (CI^nS, I^nS) en $(CI^n_\alpha T, I^n_\alpha T)$.

Análogamente a como se ha venido haciendo hasta ahora, las cofibraciones $\overline{(\iota_0^n)^1}$ y $\overline{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1}$ se representarán simplemente por k.

Proposición 3.2.3. *El morfismo de pares* $(C_*(i)_*^n, (i)_*^n) =$
$(C\alpha^n, \alpha^n) \cup_1 1 : (C_* I_{*i}^n X, I_{*i}^n X) =$
$P\{(C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots$
$I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), (\{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}, s\rho^n\})\} \to (C_* I_{*i}^n X', I_{*i}^n X') =$
$P\{(CI^n j', I^n j'), (\{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}, s\rho^n)\}$ *es una cofibración de pares entre push outs asociados, con*
$(C_*(i)_*^n, (i)_*^n) : (C_* I_{*i}^n(x, X), I_{*i}^n(x, X)) \to (C_* I_{*i}^n(x', X'), I_{*i}^n(x', X'))$.

Demostración. Es consecuencia del teorema 3.1.1, el corolario 3.1.2, la proposición 3.2.2 y la observación 3.2.2.

Obsérvese que por el corolario 2.2.1, $(C\alpha^n, \alpha^n)$ es una cofibración de pares y por la observación 3.2.1 se tiene que el morfismo
$(C\alpha^n, \alpha^n) \cup_1 1 : P\{(C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots$
$I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), (\{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}, s\rho^n\})\} \to$
$P\{(CI^n j', I^n j'), (\{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}, s\rho^n)\}$ es una cofibración de pares entre push outs asociados.

Nótese que $P\{(C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), \widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots$
$I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), (\{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}, s\rho^n\})\} = k_* =$
$\overline{(\widetilde{(i)_*^{n-1}}\overline{\iota_{0*}}\iota_{0*}^{n-1})_*^1} = \overline{(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1})^1} \cup_{\overline{(\iota_0^n)^1}} 1 =$
$k \cup_k 1 : I_{*i}^n X = P\{\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j, s\rho^n\} \to C_* I_{*i}^n X =$
$P\{C(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} \cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha} I^{n-1}\overline{\alpha} I^n j), \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$ y
$P\{(CI^n j', I^n j'), (\{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}, s\rho^n)\} = k_* = \overline{(\iota_{0*}^n)_*^1} = \overline{(\iota_0^n)^1} \cup_{\overline{(\iota_0^n)^1}} 1 =$
$k \cup_k 1 : I_*^n X' = P\{I^n j', s\rho^n\} \to C_* I_*^n X' = P\{CI^n j', \{s\rho^{n+1}, s\rho^n\}\}$
son cofibraciones entre push outs asociados respectivamente, con
$k_* : I_{*i}^n(x, X) \to C_* I_{*i}^n(x, X)$ y $k_* : I_*^n(x', X') \to C_* I_*^n(x', X')$. $\square$

Teorema 3.2.2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *todo morfismo* $g : X' \to Y$ *y todo morfismo* $f : Y \to Z$*, los grupos de homotopía* $\pi_{*n+2}^i(f, g)$ *y* $\pi_{n+2}^\alpha(f, g\widetilde{s})$ *son isomorfos.*

Demostración. Obsérvese que por el teorema 3.1.2 y la observación 2.1.3 se tiene que $(C_*(i)^n_*, (i)^n_*)^1_* = ((C_*(i)^n_*)^1_*, (i)^{n+1}_*)$. Por el corolario 3.1.2 $(i)^{n+1}_* = \alpha^{n+1} \cup_1 1 : I^{n+1}_{*i}X = P\{\widetilde{\alpha^n}\overline{\alpha^n}\cdots I^n\widetilde{\alpha}I^n\overline{\alpha}I^{n+1}j, s\rho^{n+1}\} \rightarrow I^{n+1}_*X' = P\{I^{n+1}j', s\rho^{n+1}\}$, y por la proposición 3.2.2
$(C(i)^n_*)^1_* = (C\alpha^n)^1 \cup_1 1 : I^1_{*C_*(i)^n_*}C_*I^n_{*i}X =$
$P\{\widetilde{C\alpha^n}\overline{C\alpha^n}IC(\widetilde{\alpha^{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}}\cdots I^{n-1}\widetilde{\alpha}I^{n-1}\overline{\alpha}I^n j), \{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}\} \rightarrow I_*C_*I^n_*X' =$
$P\{ICI^n j', \{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}\}$, y por el teorema 3.1.1 y el corolario 3.1.1 se tiene que $I_*k_* = Ik \cup_{Ik} 1 = (I_*C_*I^n_*X', I^{n+1}_*X') =$
$P\{(ICI^n j', I^{n+1}j'), (\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}, s\rho^{n+1})\} : I^{n+1}_*X' =$
$P\{I^{n+1}j', s\rho^{n+1}\} \rightarrow I_*C_*I^n_*X' = P\{ICI^n j', \{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}\}$.

Sea $\gamma : \pi^i_{*n+2}(f,g) = \pi^{(C_*(i)^n_*,(i)^n_*)}_{*1}(f, (\{fg\rho^{n+1}_*, fg\rho^n_*\}, g\rho^n_*)) \rightarrow \pi^{\alpha}_{n+2}(f, g\widetilde{s}) = \pi^{(C\alpha^n,\alpha^n)}_1(f, (\{fg\widetilde{s}\rho^{n+1}, fg\widetilde{s}\rho^n\}, g\widetilde{s}\rho^n))$ definido usando la proposición 0.2.4 por $\gamma([F,G]_*) = [(F,G)(\widetilde{\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}, s\rho^{n+1})}] = [F\widetilde{\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}}, G\widetilde{s\rho^{n+1}}]$.

Teniendo en cuenta la proposición 3.2.2 y la proposición 3.2.3, una demostración en categoría de pares análoga a la hecha en el teorema 3.2.1 concluye que γ es un isomorfismo de grupos.

□

Los isomorfismos γ así definidos son compatibles con las sucesiones exactas de homotopía generalizada asociada al morfismo f haciendo que ambas sean isomorfas. Asimismo también los isomorfismos γ preservan la acción de los 1-grupos de homotopía.

Proposición 3.2.4. *La sucesión exacta de homotopía relativa a α del morfismo f basada en el morfismo $g\widetilde{s}$, $S(\alpha, f, g\widetilde{s})$, es isomorfa a la respectiva sucesión exacta punteada de homotopía relativa a i del morfismo f basado en el morfismo g, $S_*(i, f, g)$.*

Demostración. 1. Dada $[F]_* \in \pi^i_{*n}(Y, g)$, se tiene que $f_*(\gamma([F]_*)) = f_*([F\widetilde{s\rho^n}]) = \gamma([fF]_*) = \gamma f_*([F]_*)$.

2. Dada $[F,G]_* \in \pi^i_{*n+2}(f,g)$ se tiene que $p_1\gamma([F,G]_*) =$ $p_1([F\widetilde{\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}}, G\widetilde{s\rho^{n+1}}]) = [G\widetilde{s\rho^{n+1}}] = \gamma([G]_*) = \gamma p_1([F,G]_*)$

3. Dada $[F]_* \in \pi^i_{*n+2}(Z,fg)$ se tiene que $j\gamma([F]_*) = j[F\widetilde{s\rho^{n+2}}] =$
$[\{F\widetilde{s\rho^{n+2}}, fg\widetilde{s}\rho^{n+1}\}, g\widetilde{s}\rho^{n+1}] =$
$[\{F\widetilde{s\rho^{n+2}}, fg\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+1}}\}, g\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+1}}] =$
$[\{F, fg\rho^{n+1}_*\}\widetilde{\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}}, g\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+1}}] =$
$\gamma[\{F, fg\rho^{n+1}_*\}, g\rho^{n+1}_*]_* = \gamma j([F]_*)$.

□

Proposición 3.2 .5. *Si* $[F]_* \in \pi^i_{*n}(Y,g)$ *y* $[H]_* \in \pi^i_{*1}(Y,g)$ *entonces* $\gamma([F]_*^{[H]_*}) = (\gamma([F]_*))^{\gamma([H]_*)}$*, donde* γ *es el isomorfismo de grupos definido en el teorema 3.2.1.*

Demostración. Observando que por el corolario 3.1.2
$(HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}I\alpha^n = (HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1 I_*(i)^n_*\overline{s\rho^{n+1}} = HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*\overline{s\rho^{n+1}} =$
$HI_*\rho^n_*\widetilde{s\rho^{n+1}}I\alpha^n = H\widetilde{s\rho}\; I\rho^n I\alpha^n$ y $(HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}\iota_0 =$
$(HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\iota_{0*}\widetilde{s\rho^n} = F\widetilde{s\rho^n}$, se tiene que $(HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}$ es una extensión del cuadrado de homotopía $F\widetilde{s\rho^n}\alpha^n = H\widetilde{s\rho}\; I\rho^n I\alpha^n\iota_0$ asociado a la cofibración α^n. De donde $(\gamma([F]_*))^{\gamma([H]_*)} = [F\widetilde{s\rho^n}]^{[H\widetilde{s\rho}\,]} = [(HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}\iota_1] =$
$[(HI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\iota_{1*}\widetilde{s\rho^n}] = \gamma([F]_*^{[H]_*})$. □

Proposición 3.2 .6. *Si* $[F]_* \in \pi^i_{*n}(Z,fg)$ *y* $[H]_* \in \pi^i_{*1}(Y,g)$ *entonces* $\gamma([F]_*^{[H]_*}) = (\gamma([F]_*))^{\gamma([H]_*)}$*, donde* γ *es el isomorfismo de grupos definido en el teorema 3.2.1.*

Demostración. Observando que por el corolario 3.1.2
$(fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}I\alpha^n = (fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1 I_*(i)^n_*\overline{s\rho^{n+1}} =$
$fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*\overline{s\rho^{n+1}} = fHI_*\rho^n_*\widetilde{s\rho^{n+1}}I\alpha^n =$
$fH\widetilde{s\rho}\; I\rho^n I\alpha^n$ y $(fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}\iota_0 = (fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\iota_{0*}\widetilde{s\rho^n} = F\widetilde{s\rho^n}$, se tiene que $(fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}$ es una extensión del cuadrado de homotopía $F\widetilde{s\rho^n}\alpha^n = fH\widetilde{s\rho}\; I\rho^n I\alpha^n\iota_0$ asociado a la cofibración α^n. De donde por

la proposición 3.2.4 $(\gamma([F]_*))^{\gamma([H]_*)} = (\gamma([F]_*))^{f_*\gamma([H]_*)} = (\gamma([F]_*))^{\gamma([fH]_*)} = [F\widetilde{s\rho^n}]^{[fH\widetilde{s\rho}\,]} = [(fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\widetilde{s\rho^{n+1}}\iota_1] = [(fHI_*\rho^n_*I_*(i)^n_*)_1\iota_{1*}\widetilde{s\rho^n}] = \gamma([F]^{[fH]_*}_*) = \gamma([F]^{[H]_*}_*)$. □

Proposición 3.2.7. *Si* $[F,G]_* \in \pi^i_{*n+2}(f,g)$ *y* $[H]_* \in \pi^i_{*1}(Y,g)$ *entonces* $\gamma([F,G]^{[H]_*}_*) = (\gamma([F,G]_*))^{\gamma([H]_*)}$*, donde* γ *son los isomorfismos de grupos definidos en los teoremas 3.2.1 y 3.2.2.*

Demostración. Observando que por el corolario 3.1.2 y las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 $(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*, HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*))_1$
$(\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+3}\}, s\rho^{n+2})(I(C\alpha^n)^1, I\alpha^{n+1}) =$
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*, HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*))_1(I_*(C_*(i)^n_*)^1_*,$
$I_*(i)^{n+1}_*)\overline{(\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\}, s\rho^{n+2})} =$
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*,fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*,HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*))\overline{(\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\},s\rho^{n+2})} =$
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*\overline{\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\}}, HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*)\overline{s\rho^{n+2}}) =$
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\}I(C\alpha^n)^1, HI_*\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+2}}I\alpha^{n+1}) =$
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*\widetilde{s\rho^{n+3}}, fHI_*\rho^{n+1}_*\widetilde{s\rho^{n+2}}\}I(C\alpha^n)^1, H\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+1}I\alpha^{n+1}) =$
$(\{fH\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+2}, fH\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+1}\}I(C\alpha^n)^1, H\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+1}I\alpha^{n+1})$ y
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*, HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*))_1$
$(\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\}, s\rho^{n+2})\iota_0 =$
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*, HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*))_1\iota_{0*}$
$(\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}, s\rho^{n+1})=$
$(F,G)(\widetilde{\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}}\,,\widetilde{s\rho^{n+1}}) = (F\widetilde{\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}}\,,G\widetilde{s\rho^{n+1}})$, se tiene que
$(\{fHI_*\rho^{n+2}_*, fHI_*\rho^{n+1}_*\}I_*(C_*(i)^n_*)^1_*, HI_*(\rho^{n+1}_*(i)^{n+1}_*))_1(\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\}, s\rho^{n+2})$
es una extensión del cuadrado de homotopía
$(F,G)(\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}, s\rho^{n+1})((C\alpha^n)^1, \alpha^{n+1}) =$
$(\{fH\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+2},fH\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+1}\}I(C\alpha^n)^1,H\widetilde{s\rho}\,I\rho^{n+1}I\alpha^{n+1})\iota_0$ asociado a la cofibración $(C\alpha^n, \alpha^n)^1$.

De donde $(\gamma([F,G]_*))^{\gamma([H]_*)} = [(F,G)\overbrace{(\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}, s\rho^{n+1})}\ ]^{[H\widetilde{s\rho}\,]} =$
$[(\underbrace{\{fHI_*\rho_*^{n+2}, fHI_*\rho_*^{n+1}}\}I_*(C_*(i)_*^n)_*^1, HI_*(\rho_*^{n+1}(i)_*^{n+1}))_1$
$(\{s\rho^{n+3}, s\rho^{n+2}\}, s\rho^{n+2})\iota_1] =$
$[(\underbrace{\{fHI_*\rho_*^{n+2}, fHI_*\rho_*^{n+1}}\}I_*(C_*(i)_*^n)_*^1, HI_*(\rho_*^{n+1}(i)_*^{n+1}))_1\iota_{1*}$
$(\{s\rho^{n+2}, s\rho^{n+1}\}, s\rho^{n+1})] = \gamma([F,G]_*^{[H]_*})$. □

Definición 3.2.5. Dado el objeto (x, X) de cof^A y un objeto (x', X') de $\mathcal{C}^A$, se define el corchete de homotopía $[(x, X), (x', X')] = [X, X']_*^{x'\{x\}}$. Nótese que el morfismo $x : (1, A) \rightarrowtail (x, X)$ es una cofibración en cof^A, y que por la proposición 3.2.1, usando los push outs canónicos para los objetos, se tiene que $[(x, X), (x', X')]$ es biyectivo con $[X, X']^{x'\{x\}}$.

Dado un objeto (x, X) se define el n-grupo de homotopía referido al objeto (x, X) del objeto X' basado en un morfismo $g : X \to X'$ como $\pi_n^{(x,X)}(X', g) = \pi_{*n}^x(X', g)$.

Por los teoremas 3.2.1 y 3.2.2 usando los push outs canónicos asociados a los objetos (x, X) y (x', X') se tiene que para toda cofibración $i : (x, X) \rightarrowtail (x', X')$ existen los isomorfismos de grupos $\pi_{*n}^i(Y, g) \cong \pi_n^i(Y, g)$ y $\pi_{*n+2}^i(f, g) \cong \pi_{n+2}^i(f, g)$. En este sentido se tiene el isomorfismo de grupos $\pi_n^{(x,X)}(X', g) \cong \pi_n^x(X', g)$.

3.3 Homotopía punteada

En las secciones 1 y 2 de este capítulo se ha relacionado la homotopía obtenida en las categorías del tipo cof^A con la homotopía generalizada de la categoría $\mathcal{C}$. En este sentido se ha visto que las construcciones homotópicas de cof^A son isomorfas a las respectivas hechas en homotopía generalizada. Más concretamente, si $i = \alpha \cup_1 1 : X = P\{j, s\} \rightarrowtail X' = P\{j', s\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con $i : (x, X) \to (x', X')$, entonces todas las construcciones de homotopía bajo A relativas a la cofibración i: grupos de homotopía de un objeto basados en un morfismo, grupos de homotopía de un morfismo basados en otro morfismo, sucesiones exactas de homotopía relativa a la cofibración i de un morfismo basado en otro morfismo y acciones del primer grupo de homotopía, son construcciones de homotopía generalizada relativas a la cofibración α.

Para hablar de homotopía punteada se necesita basar el objeto codominio de la cofibración para obtener "morfismos cero".

Definición 3.3.1. Un objeto (x, X) de cof^A se dirá basado en $a : X \to A$ cuando $ax = 1_A$. Un morfismo $f : (x, X) \to (x', X')$ se dirá basado en $a' : X' \to A$ cuando el objeto (x', X') esté basado en a'. Obsérvese que entonces el objeto (x, X) está basado en $a'f : X \to A$.

Un push out $P\{j, s\}$ asociado a un objeto (x, X) se dirá basado en $a : T \to A$ cuando $aj = s$. Nótese que si $P\{j, s\}$ está basado en a entonces (x, X) está basado en $\{a, 1\} : X = P\{j, s\} \to A$. Asimismo, si (x, X) está basado en $a : X \to A$ entonces cualquier push out asociado $P\{j, s\}$ está basado en $a\overline{s} : T \to A$. De esta forma un morfismo entre push outs asociados de la forma $f = g \cup_h 1 : (x, X) = P\{j, s\} \to (x', X') = P\{j', s'\}$ será basado cuando lo sea el push out $P\{j', s'\}$. Si $a' : T' \to A$ es una base para dicho push out entonces $a'g$ es una base para el push out $P\{j, s\}$, pues $a'gj = a'j'h = s'h = s$.

En una I-categoría generalizada punteada se definen los conceptos de cono y suspensión de un objeto basado de forma análoga a los respectivos de una I-categoría. En este sentido, dado un objeto basado (x, X, a) se define $X \vee X = P\{x, x\}$. Así se obtiene el cono de X como $CX = P\{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}, \{xa, 1\}\}$ y $SX = P\{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}, \{a, a\}\}$. Observando que $a\{xa, 1\} = \{a, a\}$ también se tiene $SX = P\{k, a\}$, donde $k = \overline{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}} : X \to CX$. Se usará la siguiente notación $Sx = \overline{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}} = \overline{k} : A \to SX = P\{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}, \{a, a\}\} = P\{k, a\}$

Proposición 3.3.1. *Dado un objeto basado (x, X, a) se tiene que $CX = P\{x^1, \{xa\rho\{Ix, \iota_0\}, 1\}\}$ y $SX = P\{x^1, a\rho x^1\}$.*

Demostración. Basta observar que el siguiente cuadrado es un push out componible con los usados para definir CX y SX.

$$\begin{tikzcd}
I^1_x A \arrow[r, "\{\widetilde{x}x\rho,\widetilde{x},\overline{x}\}"] \arrow[d, tail, "x^1"'] & X \vee X \arrow[d, "\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}"] \\
IX \arrow[r, "\overline{\rho}"'] & I_*X
\end{tikzcd}$$

donde $\overline{\rho}$ es la inducida por ρ en la definición de $I_*X = P\{Ix, \rho\}$.

El morfismo $\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\} : X \vee X \to I_*X$ existe pues $\iota_{\epsilon *}x = \overline{\rho}\iota_\epsilon x = \overline{\rho}Ix\iota_\epsilon = x\rho\iota_\epsilon = x$.

También existe el morfismo $\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\} : I^1_x A \to X \vee X$ pues $\widetilde{x}x\rho\iota_\epsilon = \widetilde{x}x = \overline{x}x$.

- Conmutatividad: $\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\} = \{\iota_{0*}x\rho, \iota_{0*}, \iota_{1*}\} = \{x\rho, \overline{\rho}\iota_0, \overline{\rho}\iota_1\} = \overline{\rho}\{Ix, \iota_0, \iota_1\} = \overline{\rho}x^1$.

- Propiedad push out: Si los morfismos $\{f_0, f_1\} : X \vee X \to Y$ y $H : IX \to Y$ verifican $Hx^1 = \{f_0, f_1\}\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\}$ entonces $HIx = f_0x\rho$ y existe $\{H, f_0x\} : P\{Ix, \rho\} = I_*X \to Y$ verificando $\{H, f_0x\}\overline{\rho} = H$, $\{H, f_0x\}\iota_{0*} = \{H, f_0x\}\overline{\rho}\iota_0 = H\iota_0 = f_0$ y $\{H, f_0x\}\iota_{1*} = \{H, f_0x\}\overline{\rho}\iota_1 = H\iota_1 = f_1$. Se concluye que $\{H, f_0, f_1\} = \{H, f_0x\} : P\{x^1, \{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\}\} = P\{Ix, \rho\} \to Y$.

Nótese que $f_0x = f_1x$. Además $\{xa, 1\}\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\} = \{x\rho, xa, 1\} = \{xa\rho\{Ix, \iota_0\}, 1\}$ y que $\{a, a\}\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\} = \{\rho, a, a\} = a\rho x^1$. □

Corolario 3.3.1. *Dado un push out $P\{j, s\}$ basado en un morfismo $a : T \to A$ asociado a un objeto (x, X), se tiene que $CX = P\{j^1, \{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}\}$ y $SX = P\{j^1, a\rho j^1\}$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 1.2.2 a $P\{j, s\}$ y componer con los push outs que definen CX y SX en la proposición 3.3.1 anterior. □

Obsérvese que dado un objeto basado (x, X, a), el cono de dicho objeto CX puede ser también definido por $CX = P\{\iota_{0*}, a\}$, teniendo en cuenta que el siguiente cuadrado es un push out:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\iota_{0*}"'] & A \arrow[d, "kx"] \\
I_*X \arrow[r, "\overline{\{xa,1\}}"'] & CX
\end{tikzcd}$$

Efectivamente, por la definición de cono, $kxa = k\{xa,1\}\widetilde{x} = \overline{\{x,a\}}\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}\widetilde{x} = \overline{\{xa,1\}}\iota_{0*}$, y si $g : A \to Z$ y $H : I_*X \to Z$ son morfismos tales que $H\iota_{0*} = ga$ entonces $H\iota_{1*}\{xa,1\} = \{H\iota_{1*}xa, H\iota_{1*}\} = \{H\iota_{0*}xa, H\iota_{1*}\} = \{gaxa, H\iota_{1*}\} = \{ga, H\iota_{1*}\} = H\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}$ y por tanto $\{H,g\} = \{H, H\iota_{1*}\} : P\{\iota_{0*}, a\} = P\{\{\iota_{0*},\iota_{1*}\},\{xa,1\}\} \to Z$.

Proposición 3.3.2. *Dado un objeto basado (x, X, a) se tiene que $CX = P\{\{Ix,\iota_0\}, a\rho\{Ix,\iota_0\}\}$ con $\overline{a\rho\{Ix,\iota_0\}} = \overline{\{xa\rho\{Ix,\iota_0\},1\}}$ y $\overline{\{Ix,\iota_0\}} = kx$.*

Demostración. Basta observar que el siguiente cuadrado es un push out y componer con el anterior:

$$\begin{tikzcd}
P\{\iota_0, x\} \arrow[r, "\rho\{Ix,\iota_0\}"] \arrow[d, "\{Ix,\iota_0\}"'] & X \arrow[d, "\iota_{0*}"] \\
IX \arrow[r, "\overline{\rho}"'] & I_*X
\end{tikzcd}$$

- Conmutatividad: $\iota_{0*}\rho\{Ix,\iota_0\} = \overline{\rho}\iota_0\rho\{Ix,\iota_0\} = \{\overline{\rho}Ix\iota_0\rho, \overline{\rho}\iota_0\} = \{x\rho\iota_0\rho, \overline{\rho}\iota_0\} = \{x\rho, \overline{\rho}\iota_0\} = \overline{\rho}\{Ix,\iota_0\}$.

- Propiedad push out: Si los morfismos $g : X \to Z$ y $H : IX \to Z$ verifican $HIx = gx\rho$ y $H\iota_0 = g$ entonces $H\iota_1 x = HIx\iota_1 = gx\rho\iota_1 = gx$ y por tanto existe el morfismo $\{g, H\iota_1\} : X \vee X \to Z$ verificando $\{g, H\iota_1\}\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\} = \{gx\rho, g, H\iota_1\} = \{HIx, H\iota_0, H\iota_1\} = Hx^1$ y por tanto se tiene que $\{H,g\} = \{H, g, H\iota_1\} : P\{\{Ix,\iota_0\}, \rho\{Ix,\iota_0\}\} = P\{x^1, \{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\}\} \to Z$. Componiendo se concluye que $CX = P\{\{Ix,\iota_0\}, a\rho\{Ix,\iota_0\}\}$ con $\overline{a\rho\{Ix,\iota_0\}} = \overline{\{xa\rho\{Ix,\iota_0\},1\}}$ y $\overline{\{Ix,\iota_0\}} = kx$. $\square$

Corolario 3.3 .2. *Dado el push out $P\{j,s\}$ basado en el morfismo $a: T \to A$ asociado al objeto (x,X), se tiene que $CX = P\{\{Ij,\iota_0\}, a\rho\{Ij,\iota_0\}\}$ con $\overline{a\rho\{Ij,\iota_0\}} = \overline{\{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}}$ y $\overline{\{Ij,\iota_0\}} = kx$.*

Demostración. Basta aplicar la proposición 1.2.8 a $P\{j,s\}$ y componer con el push out de definición de CX dado en la proposición 3.3.2 anterior. Nótese que $\overline{\{x\{a,1\}\rho\{Ix,\iota_0\},1\}I\overline{s}} = \overline{\{x\rho, x\{a,1\},1\}I^1_{(x,j)}s} = \overline{\{x\rho Is, x\{a,1\}\overline{s},\overline{s}\}} = \overline{\{xs\rho, xa, \overline{s}\}} = \overline{\{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}}$. □

Proposición 3.3.3. *Dado un morfismo basado entre push outs asociados $h = f\cup_g 1 : X = P\{j,s\} \to X' = P\{j',s'\}$, basados respectivamente en $a: T \to A$ y $a': T' \to A$, con $h:(x,X,\{a,1\}) \to (x',X',\{a',1\})$, se tiene que $Ch = If\cup_{Ig\cup_g f} 1 : CX = P\{\{Ij,\iota_0\}, a\rho\{Ij,\iota_0\}\} \to CX' = P\{\{Ij',\iota_0\}, a'\rho\{Ij',\iota_0\}\}$ con morfismos base respectivos $a\rho : IT \to A$ y $a'\rho : IT' \to A$, con $Ch : (kx, CX, \{a\rho,1\}) \to (kx', CX', \{a'\rho,1\})$; y $Sh = If \cup_{I^1_{(j',j)}g} 1 : SX = P\{j^1, a\rho j^1\} \to SX' = P\{(j')^1, a'\rho(j')^1\}$ basados también en los morfismos anteriores, con $Sh : (Sx, SX, \{a\rho,1\}) \to (Sx', SX', \{a'\rho,1\})$.*

Demostración. En general, $Ch = I_*h \cup_h 1 : CX = P\{\iota_{0*}, \{a,1\}\} \to CX' = P\{\iota_{0*}, \{a',1\}\}$ y $Sh = I_*h \cup_{h\vee h} 1 : SX = P\{\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}, \{\{a,1\},\{a,1\}\}\} \to SX' = P\{\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}, \{\{a',1\},\{a',1\}\}\}$. Por el teorema 3.1.1 se tiene que $I_*h = If \cup_{Ig} 1 : I_*X = P\{Ij, s\rho\} \to I_*X' = P\{Ij', s'\rho\}$ es un morfismo entre push outs asociados, con $I_*h : (I_*(x,X), \{a\rho,1\}) \to (I_*(x',X'), \{a'\rho,1\})$.

Se tiene que $I_*h\overline{\rho}I\overline{s} = I_*h\overline{\rho Is} = I_*h\overline{s\rho} = (If \cup_{Ig} 1)\overline{s\rho} = \widetilde{s}\rho If = \widetilde{\rho}I\widetilde{s}If$. Además, por el teorema 1.2.2 y la proposición 1.2.8 aplicados al cuadrado conmutativo $fj = j'g$ se tiene que $Ifj^1 = (j')^1 I^1_{(j',j)}g$ y $If\{Ij,\iota_0\} = \{Ij',\iota_0\}(Ig\cup_g f)$. Por otro lado, $\{\widetilde{x'}x'\rho, \widetilde{x'}, \overline{x'}\}I^1_{(x',j')}s'I^1_{(j',j)}g = \{\widetilde{x'}x'\rho, \widetilde{x'}, \overline{x'}\}I^1_{(x',j)}s'g = \{\widetilde{x'}x'\rho I(s'g), \widetilde{x'}\overline{s'}f, \overline{x'}\overline{s'}f\} = \{\widetilde{x'}x's'g\rho, \widetilde{x'}(f\cup_g 1)\overline{s}, \overline{x'}(f\cup_g 1)\overline{s}\} = \{\widetilde{x'}\overline{s'}j'g\rho, ((f\cup_g 1)\vee(f\cup_g 1))\widetilde{xs}, ((f\cup_g 1)\vee(f\cup_g 1))\overline{xs}\} =$

$\{\widetilde{x'}\overline{s'}fj\rho, ((f \cup_g 1) \vee (f \cup_g 1))\widetilde{x}\overline{s}, ((f \cup_g 1) \vee (f \cup_g 1))\overline{xs}\} =$
$((f \cup_g 1) \vee (f \cup_g 1))\{\widetilde{x}\overline{s}j\rho, \widetilde{x}\overline{s}, \overline{xs}\} = ((f \cup_g 1) \vee (f \cup_g 1))\{\widetilde{x}xs\rho, \widetilde{x}\overline{s},)\overline{xs}\} =$
$((f \cup_g 1) \vee (f \cup_g 1))\{\widetilde{x}x\rho, \widetilde{x}, \overline{x}\}I^1_{(x,j)}s$ y
$\{x'\rho, 1\}(Is' \cup_{s'} \overline{s'})(Ig \cup_g f) = \{x'\rho, 1\}(I(s'g) \cup_{s'g} \overline{s'}f) = \{x'\rho I(s'g), \overline{s'}f\} =$
$\{x's'g\rho, (f \cup_g 1)\overline{s}\} = \{\overline{s'}j'g\rho, (f \cup_g 1)\overline{s}\} = \{\overline{s'}fj\rho, (f \cup_g 1)\overline{s}\} =$
$(f \cup_g 1)\{\overline{s}j\rho, \overline{s}\} = (f \cup_g 1)\{xs\rho, \overline{s}\} = (f \cup_g 1)\{x\rho, 1\}(Is \cup_s \overline{s})$.

Teniendo en cuenta que $I_* h \iota_{\epsilon *} = \iota_{\epsilon *} h = \iota_{\epsilon *}(f \cup_g 1)$ y los corolarios 3.3.1 y 3.3.2 se concluye por la proposición 0.2.3 que $Sh = I_* h \cup_{h \vee h} 1 =$
$If \cup_{I^1_{(j',j)}g} 1 : SX = P\{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}, \{\{a,1\}, \{a,1\}\}\} = P\{j^1, a\rho j^1\} \to SX' = P\{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}, \{\{a',1\}, \{a',1\}\}\} = P\{(j')^1, a'\rho(j')^1\}$ y $Ch = I_* h \cup_h 1 = If \cup_{Ig \cup_g f} 1 : CX = P\{\iota_{0*}, \{a,1\}\} = P\{\{Ij, \iota_0\}, a\rho\{Ij, \iota_0\}\} \to CX' = P\{\iota_{0*}, \{a',1\}\} = P\{\{Ij', \iota_0\}, a'\rho\{Ij', \iota_0\}\}$. □

Corolario 3.3 .3. *Dada una cofibración* $h : (x, X) \rightarrowtail (x', X')$ *entonces* $Ch : (kx, CX) \to (kx', CX')$ *y* $Sh : (Sx, SX) \to (Sx', SX')$ *también son cofibraciones.*

Demostración. Supóngase que $h = f \cup_g 1 : X = P\{j, s\} \rightarrowtail X' = P\{j', s'\}$ es una cofibración entre push outs asociados, con $h : (x, X) \to (x', X')$. Entonces por la proposición 3.3.3 anterior se tiene que $Ch =$
$If \cup_{Ig \cup_g f} 1 : CX = P\{\{Ij,\iota_0\},a\rho\{Ij,\iota_0\}\} \to CX' = P\{\{Ij',\iota_0\},a'\rho\{Ij',\iota_0\}\}$ y $Sh = If \cup_{I^1_{(j',j)}g} 1 : SX = P\{j^1, a\rho j^1\} \to SX' = P\{(j')^1, a'\rho(j')^1\}$ son morfismos entre push outs asociados, con $Ch : (kx, CX) \to (kx', CX')$ y $Sh : (Sx, SX) \to (Sx', SX')$.

Por ser $f \cup_g 1 : P\{j, s\} \rightarrowtail P\{j', s'\}$ una cofibración entre push outs asociados se tiene que f y g son cofibraciones y que (j', j) es una cofibración de pares. Por la observación 1.1.4, el morfismo If es cofibración; por la proposición 1.2.7, $I^1_{(j',j)}g$ es cofibración y por la observación 2.1.3, $((j')^1, j^1)$ es una cofibración de pares. Concluyéndose que $Sh = I_f \cup_{I^1_{(j',j)}g} 1 : P\{j^1, a\rho j^1\} \to P\{(j')^1, a'\rho(j')^1\}$ es una cofibración.

Por otro lado, el morfismo $Ig \cup_g f : P\{\iota_0, j\} \to P\{\iota_0, j'\}$ es cofibración por la proposición 1.1.3 pues $\{Ig, \iota_0\} : P\{\iota_0, g\} \to IS'$ lo es por la observación 1.1.4.

El siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd}
P\{j,g\} \arrow[rr, "\{f,j'\}"] \arrow[d, "\iota_0"'] & & T' \arrow[d, "\overline{\{Ij,\iota_0\}}\overline{\iota_0}"] \\
P\{Ij,Ig\} \arrow[r, "\{\overline{Ig\cup_g f},\overline{\{Ij,\iota_0\}}\overline{j'}\}"'] & & P\{Ig\cup_g f,\{Ij,\iota_0\}\}
\end{tikzcd}$$

Efectivamente $\overline{Ig \cup_g f} Ij = \overline{Ig \cup_g f}\{Ij,\iota_0\}\overline{j} = \overline{\{Ij,\iota_0\}}(Ig \cup_g f)\overline{j} = \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{j'} Ig$ y por tanto existe el morfismo
$\{\overline{Ig \cup_g f}, \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{j'}\} : P\{Ij, Ig\} \to P\{Ig \cup_g f, \{Ij, \iota_0\}\}$.
Además $\{\overline{Ig \cup_g f}, \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{j'}\}\iota_0 = \{\overline{Ig \cup_g f}\iota_0, \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{j'}\iota_0\} =$
$\{\overline{Ig \cup_g f}\{Ij, \iota_0\}\overline{\iota_0}, \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{\iota_0}j'\} = \{\overline{\{Ij, \iota_0\}}(Ig \cup_g f)\overline{\iota_0}, \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{\iota_0}j'\} =$
$\{\overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{\iota_0}f, \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{\iota_0}j'\} = \overline{\{Ij, \iota_0\}}\overline{\iota_0}\{f, j'\}$ y por tanto el cuadrado es conmutativo. Dados morfismos $\{f_0, f_1\} : P\{Ij, Ig\} \to X$ y $f_2 : T' \to X$ verificando $\{f_0, f_1\}\iota_0 = f_2\{f, j'\}$, entonces $f_1\iota_0 = f_2 j'$ y existe el morfismo $\{f_1, f_2\} : P\{\iota_0, j'\} \to X$ verificando $\{f_1, f_2\}(Ig \cup_g f) = \{f_1 Ig, f_2 f\} = \{f_0 Ij, f_0\iota_0\} = f_0\{Ij, \iota_0\}$. Se concluye que
$\{\{f_0, f_1\}, f_2\} = \{\{f_1, f_2\}, f_0\} : P\{\iota_0, \{f, j'\}\} = P\{Ig \cup_g f, \{Ij, \iota_0\}\} \to X$.

En particular $\{\{Ij', \iota_0\}, If\} = \{\{If, Ij'\}, \iota_0\} =$
$\{I\{f, j'\}, \iota_0\} : P\{Ig \cup_g f, \{Ij, \iota_0\}\} = P\{\iota_0, \{f, j'\}\} \to IT'$, y por la observación 1.1.4 es cofibración, al serlo $\{f, j'\} : P\{j, g\} \to T'$ ya que (j', j) es una cofibración de pares. De lo anterior se tiene que el morfismo $(\{Ij', \iota_0\}, \{Ij, \iota_0\})$ es una cofibración de pares y se concluye que $Ch = If \cup_{Ig\cup_g f} 1 : CX = P\{\{Ij, \iota_0\}, a\rho\{Ij, \iota_0\}\} \to CX' = P\{\{Ij', \iota_0\}, a'\rho\{Ij', \iota_0\}\}$ es una cofibración entre push outs asociados. □

Corolario 3.3.4. *Si el par* $((x', X'), (x, X))$ *tiene como push out asociado* $P\{(j', j), (s', s)\}$ *con* $a' : T' \to A$ *y* $a : T \to A$ *morfismos base respectivos* *de los push outs $P\{j,s\}$ y $P\{j',s'\}$, entonces los pares $((kx',CX'),(kx,CX))$ y $((Sx',SX'),(Sx,SX))$ tienen como push outs asociados respectivamente $P\{(\{Ij',\iota_0\},\{Ij,\iota_0\}),(a'\rho\{Ij',\iota_0\},a\rho\{Ij,\iota_0\})\}$ y $P\{((j')^1,j^1),(a'\rho(j')^1,a\rho j^1)\}$.*

De esta forma, dado un push out $P\{j,s\}$ basado en un morfismo $a : T \to A$ asociado a un objeto (x,X), se tiene que el cono de dicho objeto es el objeto basado $(kx, CX, \{a\rho, 1\})$ donde $CX = P\{\{Ij,\iota_0\}, a\rho\{Ij,\iota_0\}\}$ y $k = \overline{j^1} : X \to CX$ inducida en $P\{j^1, \{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}\}$. De forma similar se tiene que la suspensión de dicho objeto es el objeto basado $(Sx, SX, \{a\rho, 1\})$ donde $SX = P\{j^1, a\rho j^1\}$ y $Sx = \overline{j^1}$.

Si $h = f \cup_g 1 : X = P\{j,s\} \to X' = P\{j',s'\}$ es un morfismo basado entre push outs asociados basados respectivamente en $a : T \to A$ y $a' : T' \to A$, con $h : (x,X,\{a,1\}) \to (x',X',\{a',1\})$, se tiene que $Ch = If \cup_{Ig \cup_g f} 1 : (kx, CX) = P\{\{Ij,\iota_0\}, a\rho\{Ij,\iota_0\}\} \to (kx', CX') = P\{\{Ij',\iota_0\}, a'\rho\{Ij',\iota_0\}\}$ y $Sh = If \cup_{I^1_{(j',j)}g} 1 : (Sx, SX) = P\{j^1, a\rho j'\} \to (Sx', SX') = P\{(j')^1, a'\rho(j')^1\}$ son también morfismos basados pues $\{a'\rho,1\}Ch = \{a'\rho,1\}(If \cup_{Ig\cup_g f} 1) = \{a'f\rho, 1\} = \{a\rho,1\}$ y $\{a'\rho,1\}Sh = \{a'\rho,1\}(If \cup_{I^1_{(j',j)}g} 1) = \{a'f\rho,1\} = \{a\rho,1\}$.

Dado un objeto basado (x,X,a), el morfismo $x : A \to X$ puede ser considerado como un morfismo basado entre los push outs asociados $x = x \cup_1 1 : (1,A) = P\{1,1\} \to (x,X) = P\{x,1\}$ basados respectivamente en $1 : A \to A$ y $a : X \to A$. Entonces por la proposición 3.3.3 anterior $Cx = Ix \cup_{I1\cup_1 x} 1 : (k1, CA, \{1\rho,1\}) \to (kx, CX, \{a\rho,1\})$ y $Sx = Ix \cup_{I^1_{(x,1)}1} 1 : (S1, SA, \{1\rho, 1\}) \to (Sx, SX, \{a\rho,1\})$. Como $\{I1,\iota_0\} = 1_{IA}$ y $1^1 = 1_{IA}$ entonces $CA = P\{1,\rho\} = A$ y $SA = P\{1,\rho\} = A$, por tanto $(k1, CA, \{1\rho,1\}) = (1,A,1)$ y $(S1, SA, \{1\rho,1\}) = (1,A,1)$. De donde $Cxk1 = Cx = kx$ y $SxS1 = Sx$. Esta última igualdad confirma la notación de la inducida.

Proposición 3.3 .4. *Dado un push out $P\{j,s\}$ basado en un morfismo $a : T \to A$ asociado a un objeto (x,X), se tiene que el morfismo $k =$*

$\iota_1 \cup_{\overline{j}\iota_1} 1 : X = P\{j, s\} \to CX = P\{\{Ij, \iota_0\}, a\rho\{Ij, \iota_0\}\}$ *es una cofibración basada entre push outs asociados, con* $k : (x, X, \{a, 1\}) \to (kx, CX, \{a\rho, 1\})$.

Demostración. El morfismo $\iota_1 \cup_{\overline{j}\iota_1} 1$ existe pues $\iota_1 j = Ij\iota_1 = \{Ij, \iota_0\}\overline{j}\iota_1$ y $a\rho\{Ij, \iota_0\}\overline{j}\iota_1 = a\rho Ij\iota_1 = a\rho\iota_1 j = aj = s$. Observando que por el corolario 3.3.1 $k\overline{s} = \overline{\{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}}\iota_1$, y que por el corolario 3.3.2 $\overline{\{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}} = \overline{a\rho\{Ij, \iota_0\}}$, se tiene que $(\iota_1 \cup_{\overline{j}\iota_1} 1)x = kx$ y $(\iota_1 \cup_{\overline{j}\iota_1} 1)\overline{s} = \overline{a\rho\{Ij, \iota_0\}}\iota_1 = \overline{\{\overline{s}j\rho, xa, \overline{s}\}}\iota_1 = k\overline{s}$. Se concluye que $k = \iota_1 \cup_{\overline{\iota_0}\iota_1} 1$.

Por el axioma **GI4** se tiene que $\{Ij, \iota_0, \iota_1\} : I^1_j S = P\{\overline{j}\iota_1, j\} \to IT$ es una cofibración, y por tanto, $(\{Ij, \iota_0\}, j)$ es una cofibración de pares. Observando que $\iota_1, \overline{j}\iota_1$ y 1 también lo son, se concluye el resultado.

□

Corolario 3.3.5. *Dado un push out* $P\{j, s\}$ *basado en un morfismo* $a : T \to A$ *asociado a un objeto* (x, X)*, se tiene* $Sk = I\iota_1 \cup_{I^1_{(\{Ij,\iota_0\},j)}\overline{j}\iota_1} 1 : SX = P\{j^1, a\rho j^1\} \to SCX = P\{\{Ij, \iota_0\}^1, a\rho^2\{Ij, \iota_0\}^1\}$ *es una cofibración entre push outs asociados, con* $Sk : (Sx, SX) \to (S(kx), SCX)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de los corolarios 3.3.2 y 3.3.3 y de las proposiciones 3.3.3 y 3.3.4. □

Corolario 3.3.6. *Dado un push out* $P\{j, s\}$ *basado en un morfismo* $a : T \to A$ *asociado a un objeto* (x, X)*, se tiene que el par* $((S(kx), SCX), (Sx, SX))$ *tiene como push out asociado a* $P\{(\{Ij, \iota_0\}^1, j^1), (a\rho^2\{Ij, \iota_0\}^1, a\rho j^1)\}$.

Para un objeto basado (x, X, a) y otro objeto (h, Y) de $\mathcal{C}^A$ se obtienen los grupos de homotopía punteados del objeto (h, Y) referido al objeto (x, X, a) como $\pi_n^{(x,X,a)}(h, Y) = [(S^n x, S^n X), (h, Y)] = [S^n X, Y]_*^{h\{S^n x\}}$, que coincide por el apartado tercero de la proposición 1.2.9 con $[I_* S^{n-1} X, Y]_*^{\{ha^{n-1}, ha^{n-1}\}\rho_*\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}\{\{\iota_{0*}, \iota_{1*}\}\}}$, donde a^{n-1} representa el morfismo base natural del objeto $(S^{n-1}x, S^{n-1}X)$.

Observación 3.3.1. Para todo objeto (x, X) ya se vio que $x : (1, A) \to (x, X)$ es una cofibración entre objetos de cof^A. Observando que para el objeto $(1, A)$

se verifica que $\iota_{\epsilon*} = 1_A : A \to I_*A = P\{1,\rho\} = A$ se tiene que $I^1_{*x}A = P\{x,x\} = X \vee X$ y que $(x)^1_* = \{\iota_{0*},\iota_{1*}\} : X \vee X \to I_*X$. De donde $[I_*S^{n-1}X,Y]_*^{\{ha^{n-1},ha^{n-1}\}\rho_*\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}\{\{\iota_{0*},\iota_{1*}\}\}} =$
$[I_*S^{n-1}X,Y]_*^{\{ha^{n-1},ha^{n-1}\}\rho_*(S^{n-1}x)^1_*\{(S^{n-1}x)^1_*\}} = \pi_{*1}^{S^{n-1}x}(Y,ha^{n-1})$ que por el corolario 3.2.1 coincide con $\pi_1^{S^{n-1}x}(Y,ha^{n-1})$.

Proposición 3.3 .5. *Dado un objeto basado (x,X,a), el objeto basado (S^nx,S^nX) tiene como push out asociado $P\{x^n,a\rho^nx^n\}$, con morfismo base $a\rho^n : I^nX \to A$.*

Demostración. Por la proposición 3.3.1 se tiene que el objeto basado (Sx,SX,a^1) tiene como push out asociado $P\{x^1,a\rho x^1\}$ con morfismo base $a\rho : IX \to A$. Usando el corolario 3.3.1 se tiene que el objeto (S^2x,S^2X,a^2) tiene como push out asociado $P\{(x^1)^1,a\rho\rho(x^1)^1\} = P\{x^2,a\rho^2x^2\}$ con morfismo base $a\rho^2 : I^2X \to A$. Iterando el proceso se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$, el objeto basado (S^nx,S^nX,a^n) tiene como push out asociado $P\{x^n,a\rho^nx^n\}$ con morfismo base $a\rho^n : I^nX \to A$. $\square$

Teorema 3.3.1. *Dado un objeto basado (x,X,a) y un objeto (h,Y) de $\mathcal{C}^A$, se tiene que $\pi_n^{(x,X,a)}(h,Y)$ es isomorfo a $\pi_n^x(Y,ha)$.*

Demostración. Por la proposición 3.3.5 anterior, la observación 3.3.1 y la proposición 1.4.2 se tienen los siguientes isomorfismos de grupos:
$\pi_n^{(x,X,a)}(h,Y) \cong \pi_1^{S^{n-1}x}(Y,ha^{n-1}) \cong \pi_1^{x^{n-1}}(Y,ha\rho^{n-1})$.

Por la proposición 1.4.1 se concluye el resultado:

$$\pi_n^{(x,X,a)}(h,Y) \cong \pi_n^x(Y,ha)$$

$\square$

Corolario 3.3.7. *Dado un push out $P\{j,s\}$ basado en un morfismo $a : T \to A$ y asociado a un objeto (x,X), se tiene que $\pi_n^{(x,X,\{a,1\})}(h,Y) \cong \pi_n^j(Y,ha)$.*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema 3.3.1 anterior y del tercer apartado de la proposición 1.4.2. Obsérvese que $h\{a,1\}\overline{s} = ha$. $\square$

Para todo objeto basado (x,X,a) y todo objeto (h,Y) de $\mathcal{C}^A$, se induce una sucesión exacta de homotopía:

$$\cdots \to \pi_3^{(x,X,a)}(h,Y) \xrightarrow{j} \pi_3^{(x,X,a)}(h) \xrightarrow{\Delta} \pi_2^{(x,X,a)}(1,A) \xrightarrow{h_*}$$

$$\xrightarrow{h_*} \pi_2^{(x,X,a)}(h,Y) \xrightarrow{j} \pi_2^{(x,X,a)}(h) \xrightarrow{\Delta} \pi_1^{(x,X,a)}(1,A) \xrightarrow{j} \pi_1^{(x,X,a)}(h,Y)$$

Por otro lado, dada la cofibración $x : A \rightarrowtail X$, y los morfismos $a : X \to A$ y $h : A \to Y$, existe por resultados probados en el capítulo anterior, una sucesión exacta $S(x,h,a)$ relativa a la cofibración x del morfismo h basada en el morfismo a:

$$\cdots \pi_3^x(Y,ha) \xrightarrow{j} \pi_3^x(h,a) \xrightarrow{p_1} \pi_2^x(A,a) \xrightarrow{h_*} \pi_2^x(Y,ha)$$

Ambas sucesiones se verá que son isomorfas a partir de $\pi_2^{(x,X,a)}(h,Y)$ y $\pi_2^x(Y,ha)$ respectivamente, lo que evidencia que la sucesión exacta de homotopía punteada es un caso particular de la respectiva generalizada. De esta forma, cuando la categoría es punteada, la sucesión exacta de homotopía generalizada puede ser extendida hasta los grupos de orden uno.

Teorema 3.3.2. *Dado un objeto basado (x,X,a), se verifica que el par $((S(kS^nx), SCS^nX), (S^{n+1}x, S^{n+1}X))$ tiene como push out asociado $P\{((Cx^n)^1, x^{n+1}), (\{a\rho^{n+2}, a\rho^{n+1}\}(Cx^n)^1, a\rho^{n+1}x^{n+1})\} = Sk_{S^nX}$.*

Demostración. Como $a\rho^{n+2}I(\iota_0^n)^1 = \{a\rho^2, a\rho^{n+1}, a\rho^{n+1}\} =$ $\{a\rho^{n+1}I(\iota_0)^nI\rho, a\rho^{n+1}I(\iota_0)^nI\rho^n, a\rho^{n+1}\} = a\rho^{n+1}I\{\iota_0^n\rho, \iota_0^n\rho^n, 1\}$, existe el morfismo $\{a\rho^{n+2}, a\rho^{n+1}\} : ICI^nX \to A$. Por la proposición 2.2.1 y el apartado segundo del teorema 1.2.2 se tiene que

$(\{a\rho^{n+2}, a\rho^{n+1}\}(Cx^n)^1, a\rho^{n+1}x^{n+1})(I^1_{(Cx^n,\{Ix^n,\iota_0\})}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}, 1) =$
$(\{a\rho^{n+2}, a\rho^{n+1}\}(Cx^n)^1 I^1_{(Cx^n,\{Ix^n,\iota_0\})}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}, a\rho^{n+1}x^{n+1}) =$
$(\{a\rho^{n+2}, a\rho^{n+1}\}Iq\{Ix^n, \iota_0\}^1, a\rho^{n+1}x^{n+1}) = (a\rho^{n+2}\{Ix^n, \iota_0\}^1, a\rho^{n+1}x^{n+1})$. Observando que $P\{(\{Ix^n, \iota_0\}^1, x^{n+1}), (I^1_{(Cx^n,\{Ix^n,\iota_0\})}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}, 1)\}$ tiene

como morfismos inducidos $\overline{(\{Ix^n,\iota_0\}^1, x^{n+1})} = (\overline{\{Ix^n,\iota_0\}^1}, \overline{x^{n+1}}) = ((Cx^n)^1, x^{n+1})$ y $\overline{(I^1_{(Cx^n,\{Ix^n,\iota_0\})}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}, 1)} =$
$(\overline{I^1_{(Cx^n,\{Ix^n,\iota_0\})}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}}, \overline{1}) = (Iq, 1)$ y que por la proposición 3.3.5, el corolario 3.3.6 y la proposición 0.2.2 se tiene que el par
$((S(kS^nx), SCS^nX), (S^{n+1}x, S^{n+1}X))$ tiene como push out asociado
$P\{(\{Ix^n,\iota_0\}^1, x^{n+1}), (a\rho^{n+2}\{Ix^n,\iota_0\}^1, a\rho^{n+1}x^{n+1})\} =$
$P\{((Cx^n)^1, x^{n+1}), (\{a\rho^{n+2}, a\rho^{n+1}\}(Cx^n)^1, a\rho^{n+1}x^{n+1})\}$.

Nótese que $I^1_{(Cx^n,\{Ix^n,\iota_0\})}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}I^1_{(\{Ix^n,\iota_0\},x^n)}\overline{x^n}\iota_1 =$
$I^1_{(Cx^n,x^n)}\{q, k\widetilde{x^{n-1}}\overline{\iota_0}\iota_0^{n-1}\rho^n\}\overline{x^n}\iota_1 =$
$I^1_{(Cx^n,x^n)}q\iota_1 = I^1_{(Cx^n,x^n)}k$ y que $IqI\iota_1 = Ik$ de donde se tiene que $Ik = I\iota_1 \cup_{I^1_{(\{Ix^n,\iota_0\},x^n)}\overline{x^n}\iota_1} I^1_{(Cx^n,x^n)}k : I^{n+1}X \to ICI^nX$.

□

Por teoría de homotopía punteada se tiene que $\pi_{n+1}^{(x,X,a)}(h) = [S^nk, h]_* \cong [Sk_{S^{n-1}}, h]_*$.

Proposición 3.3.6. *Dado un objeto basado (x, X, a) y un objeto (h, Y) de $\mathcal{C}^A$, se tiene que $\pi_{n+2}^{(x,X,a)}(h) \cong \pi_{n+2}^x(h, a)$.*

Demostración. Por la proposición 3.2.1 aplicada a pares se tiene que $\pi_{n+2}^{(x,X,a)}(h) \cong [Sk_{S^n}, h]_* \cong [Sk_{S^n}, h]^{(h,1)\{(S(kS^nx),S^{n+1}x)\}}$.

Usando el teorema 3.3.2 y por el tercer apartado de la proposición 1.2.9 se tiene que $[Sk_{S^n}, h]^{(h,1)\{(S(kS^nx),S^{n+1}x)\}}$ es biyectivo con
$[Ik, h]^{(\{ha\rho^{n+2}, ha\rho^{n+1}\}(Cx^n)^1, a\rho^{n+1}x^{n+1})\{((Cx^n)^1, x^{n+1})\}} \cong \pi_{n+2}^x(h, a)$.

Un razonamiento similar al realizado en la demostración del teorema 3.3.1 concluye que la biyección obtenida entre $\pi_{n+2}^{(x,X,a)}(h)$ y $\pi_{n+2}^x(h, a)$ es un isomorfismo de grupos. □

Corolario 3.3.8. *Para todo objeto basado (x, X, a) y todo objeto (h, Y) de $\mathcal{C}^A$ se tiene que la sucesión exacta de homotopía punteada $S_*((x, X, a), (h, Y))$ asociada al objeto (h, Y) y referida al objeto (x, X, a) es isomorfa a la sucesión* *exacta de homotopía $S(x,h,a)$ relativa a la cofibración x del morfismo h basada en el morfismo a:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "h_*"] & \pi_3^{(x,X,a)}(h,Y) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_3^{(x,X,a)}(h) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_2^{(x,X,a)}(1,A) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_2^{(x,X,a)}(h,Y) \arrow[d, "\cong"] \\
\cdots \arrow[r, "h_*"] & \pi_3^x(Y,ha) \arrow[r, "j"] & \pi_3^x(h,a) \arrow[r, "p", "1"'] & \pi_2^x(A,a) \arrow[r, "h_*"] & \pi_2^x(Y,ha)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Es evidente que los isomorfismos del teorema 3.3.1 y los de la proposición 3.3.6 anterior son compatibles con los homomorfismos de dichas sucesiones. □

El isomorfismo de sucesiones dado en el corolario 3.3.8 anterior permite afirmar para homotopía generalizada que si $i : B \rightarrowtail A$ es una cofibración con una retracción $r : A \to B$ y $f : B \to X$ es un morfismo, entonces la sucesión exacta de homotopía generalizada $S(i,f,r)$ relativa a la cofibración i del morfismo f basada en el morfismo r puede ser extendida hasta $\pi_1^i(Y, fr)$.

Capítulo 4

Teoría dual. Aplicaciones y ejemplos

Todo lo desarrollado en los capítulos precedentes tiene una dualización. Así surgen los conceptos de P-categoría generalizada con sus caminos generalizados y sus fibraciones.

Como sucede en diversas teorías de homotopía, también en ésta pueden existir dos estructuras que hagan de la categoría una I-categoría generalizada y una P-categoría generalizada. Pero se necesita una cierta compatibilidad de dichas estructuras para que la homotopía obtenida por ambas sea coincidente. Esto se consigue mediante el concepto de IP-categoría generalizada. Cuando también existe una compatibilidad entre las cofibraciones y las fibraciones, entonces los grupos de homotopía generalizados van a ser isomorfos en ambas estructuras.

Todo cilindro generalizado genera cofibraciones de forma que la categoría con estas cofibraciones generadas llega a ser una I-categoría generalizada. Lo mismo sucede dualmente con los caminos generalizados y las fibraciones generadas. De esta forma basta tener un funtor adjunto a derecha (resp. a izquierda) de un cilindro generalizado (resp. caminos generalizado) para generar una estructura de IP-categoría generalizada.

Cuando la teoría es desarrollada en categorías aditivas, resulta más sencilla su elaboración. En este tipo de categorías, la propiedad de extensión de homotopía de las cofibraciones iteradas es una simple consecuencia de dicha propiedad de la cofibración sin iterar. Así, las cofibraciones generadas por un cilindro generalizado en una categoría aditiva con push out son exactamente los morfismos que verifican la propiedad de extensión de homotopía.

La operación de los grupos de homotopía generalizada basados en el morfismo cero viene inducida por la suma de los morfismos de la categoría. Por ello, en una I-categoría aditiva generalizada, incluso el grupo de homotopía de orden uno es abeliano.

Al ser la adición de la categoría lo que da la estructura aditiva a los grupos de homotopía, puede obviarse que los cilindros conserven push outs cofibrados. De esta forma, dada una construcción cono en una categoría aditiva, surge una estructura de I-categoría generalizada en dicha categoría.

Igualmente sucede con coconos y caminos generalizados, concluyéndose que en el caso de funtores adjuntos es lo mismo obtener primero la construcción cono-cocono y posteriormente la IP-categoría generalizada, que obtener primero la I-categoría generalizada y después mediante adjunción, la IP-categoría generalizada.

Similarmente a como se obtienen los grupos de homotopía de los espacios topológicos punteados, una I-categoría generalizada se puede puntear para obtener esferas y, mediante éstas, crear los grupos de homotopía esféricos de un objeto punteado. Estos grupos esféricos son un ejemplo más de grupos de homotopía generalizada.

Existen muchos ejemplos de teorías de homotopías que verifican la teoría de homotopía aquí desarrollada. La homotopía ordinaria de los espacios topológicos es uno de ellos. Los grupos de homotopía de los espacios topológicos punteados, así como las sucesiones exactas originadas por ellos, son solo un caso particular de la homotopía generalizada que posee la categoría de los espacios topológicos. En ella, usando los desarrollos establecidos en los capítulos anteriores, se puede hablar de grupos de homotopía relativos a cofibraciones y sucesiones exactas asociadas a una aplicación continua, tanto para las cofibraciones de Hurewicz (generadas por el cilindro topológico) como para las cerradas. También los caminos topológicos dotan a esta categoría de una estructura de P-categoría generalizada y, en conjunto, es una IP-categoría generalizada.

La homotopía propia de los espacios topológicos tiene también una estructura de I-categoría generalizada. Para ello hay que definir dicha estructura en una supercategoría de ésta, denominada categoría de los espacios exteriores.

La homotopía de los complejos de cadena de una categoría abeliana tiene una estructura de IP-categoría generalizada. En esta estructura, las cofibraciones (fibraciones) generadas coinciden con los monomorfismos (epimorfismos) normales.

La homotopía proyectiva descrita por Eckman y Hilton en R-módulos tiene estructura de P-categoría generalizada y no existe ningún funtor adjunto a izquierda al de sus caminos. En esta homotopía es equivalente decir que dos homomorfismos de R-módulos son homótopos a decir que su diferencia se factoriza a través de un módulo proyectivo.

Análogamente sucede con la homotopía inyectiva de R-módulos de Eckman y Hilton. En este caso, la homotopía tiene asociada una estructura de I-categoría generalizada, que no tiene un funtor adjunto a derecha del cilindro. La homotopía entre dos morfismos es equivalente a que su diferencia se factorice a través de un módulo inyectivo.

Por último, existen homotopías tensoriales en grupos, R-casi módulos y R-módulos, que también son ejemplos de IP-categorías generalizadas.

4.1 Homotopía en una P-categoría generalizada. Adjunción

Todo lo desarrollado en los capítulos precedentes tiene una versión dual que se puede englobar bajo el título de homotopía de una P-categoría generalizada. Al ser válidos los razonamientos duales para obtener grupos de homotopía generalizados y sucesiones exactas de dichos grupos, no se dará más que la definición de P-categoría generalizada para justificar la nomenclatura de los conceptos duales.

Definición 4.1.1. (Dual de la definición 1.1.2) Una P-Categoría Generalizada es una estructura del tipo $(\mathcal{C}, P, \rho_\epsilon, \iota, \theta_\epsilon, fib)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor denominado caminos, $\rho_0, \rho_1 : P \to 1_\mathcal{C}$ son transformaciones naturales denominadas proyecciones, $\iota : 1_\mathcal{C} \to P$ es una transformación natural denominada inclusión, $\theta_0, \theta_1 : P \to P^2$ son transformaciones naturales denominadas coproductos y "fib" es una familia distinguida de morfismos denominados fibraciones y representados por "$\twoheadrightarrow$", verificando los axiomas **GP1**, **GP2**, **GP3**, **GP4** y **GP5**:

GP1 (Axioma de Caminos) $\rho_\epsilon \iota = id$, $\epsilon \in \{0, 1\}$

GP2 (Axioma de Pull back) Para toda fibración $p : A \twoheadrightarrow B$ y todo morfismo $f : X \to B$ existe el objeto pull back $P < f, p >$ con $\bar{p}$ fibración:

$$\begin{array}{ccc} P<f,p> & \xrightarrow{\bar{f}} & A \\ {\scriptstyle \bar{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

El funtor caminos P transforma pull backs fibrados en pull backs, esto es, $P(P < f, g >) = P < Pf, Pg >$.

GP3 (Axioma de Fibración) Para todo objeto X de $\mathcal{C}$, $\rho_{0X}, \rho_{1X} : PX \twoheadrightarrow X$ y $1_X : X \twoheadrightarrow X$ son fibraciones. La composición de fibraciones es fibración. Toda fibración verifica la propiedad de levantamiento de homotopía (P.L.H.):

Un morfismo $p : A \to B$ se dice que verifica la P.L.H. cuando todo cuadrado de homotopía

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & A \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ PB & \xrightarrow[\rho_\epsilon]{} & B \end{array} \qquad , \epsilon \in \{0, 1\}$$

tiene una elevación $F : X \to PA$ tal que $\rho_\epsilon F = h$ y $PpF = H$.

GP4 (Axioma de Caminos Relativo) Para toda fibración $p : A \twoheadrightarrow B$, el morfismo $p^1 =< Pp, \rho_0, \rho_1 >: PA \to P^1_p B = P < \rho_1\overline{p}, p >$ es una fibración

$$
\begin{tikzcd}
PA \arrow[dr, "p^1"] \arrow[drr, bend left, "\rho_1"] \arrow[ddr, bend right, "<Pp,\rho_0>"'] & & \\
& P < \rho_1\overline{p}, p > \arrow[r, "\overline{\rho_1\overline{p}}"] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & A \arrow[d, "p"] \\
& P < \rho_0, p > \arrow[r, "\rho_1\overline{p}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

GP5 (Axioma de Coproducto)

$$(P\rho_\nu)\theta_\epsilon = \rho_{\nu P}\theta_\epsilon = \begin{cases} id \quad , \quad \nu = \epsilon \\ \iota\rho_\nu \quad , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases} \text{ y } \quad \theta_\epsilon\iota = \iota^2 \quad ; \text{con } \nu, \epsilon \in \{0, 1\}.$$

Ciertas teorías de homotopía pueden ser obtenidas usando indistintamente un funtor cilindro o uno caminos. Para ello se necesitan las compatibilidades de dichos funtores, de las transformaciones naturales intervinientes asociadas a cada uno de ellos y de las cofibraciones y fibraciones de la categoría. En la teoría desarrollada en este trabajo también se llega a resultados similares.

Definición 4.1.2. Una IP-categoría generalizada es una estructura del tipo $(\mathcal{C}, I, P, \iota_\epsilon, \rho_\epsilon, \rho, \iota, \chi_\epsilon, \theta_\epsilon, cof, fib)$ donde $(\mathcal{C}, I, \iota_\epsilon, \rho, \chi_\epsilon, cof)$ es una estructura de I-categoría generalizada sobre $\mathcal{C}$ y $(\mathcal{C}, P, \rho_\epsilon, \iota, \theta_\epsilon, fib)$ es una estructura de P-categoría generalizada sobre $\mathcal{C}$.

Además el funtor P es adjunto a derecha del funtor I mediante un isomorfismo de adjunción $\gamma : Hom(I-, \sim) \to Hom(-, P \sim)$ que hace las estructuras compatibles, $\iota_\epsilon^* \cong \rho_{\epsilon *}$, $\iota_* \cong \rho^*$ y $\chi_\epsilon^* \cong \theta_{\epsilon *}$, esto es, para todo morfismo $F : IA \to X$ se verifica $F\iota_\epsilon = \rho_\epsilon\gamma(F)$, para todo morfismo $f : A \to X$ se verifica $\gamma(f\rho) = \iota f$ y $\gamma^2(F\chi_\epsilon) = \theta_\epsilon\gamma(F)$.

Definición 4.1 .3. En una IP-categoría generalizada, una fibración $p : X \twoheadrightarrow Y$ y una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ se dirán compatibles si para todo morfismo $f : A \to X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, todo morfismo $H : I^n A \to X$ verificando $HI^n i = fi\rho^n$ y todo morfismo $G : A \to P^n X$ verificando $P^n pG = \iota^n pf$ se tiene que $pH = pf\rho^n$ y $Gi = \iota^n fi$.

La compatibilidad de las estructuras queda claramente mostrada en el siguiente teorema.

Teorema 4.1 .1. *En una IP-categoría generalizada, dada una fibración $p : X \twoheadrightarrow Y$ y una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ compatibles, se tiene que para toda $f : A \to X$, los grupos de homotopía $\pi_n^i(X, f)$ y $\pi_n^p(A, f)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $[H] \in \pi_n^i(X, f)$, entonces como $H : I^n A \to X$ se tiene que $\gamma^n(H) : A \to P^n X$. Por las compatibilidades de las estructuras, y de la cofibración y la fibración, se verifica que $p^n\gamma^n(H) =$
$< P^n p, P^{n-1}\rho_0, P^{n-1}\rho_1, \cdots \rho_0, \rho_1 > \gamma^n(H) =$
$< P^n p\gamma^n(H), P^{n-1}\rho_0\gamma^n(H), P^{n-1}\rho_1\gamma^n(H), \cdots \rho_0\gamma^n(H), \rho_1\gamma^n(H) >=$
$< \gamma^n(pH), \gamma^{n-1}(\rho_0\gamma(H)), \gamma^{n-1}(\rho_1\gamma(H)), \cdots \gamma^{n-1}(H)\iota_0, \gamma^{n-1}(H)\iota_1 >=$
$< \gamma^n(pf\rho^n), \gamma^{n-1}(H\iota_0), \gamma^{n-1}(H\iota_1), \cdots \gamma^{n-1}(HI^{n-1}\iota_0), \gamma^{n-1}(HI^{n-1}\iota_1) >=$
$< \gamma^{n-1}(\iota pf\rho^{n-1}), \gamma^{n-1}(f\rho^{n-1}), \gamma^{n-1}(f\rho^{n-1}), \cdots \gamma^{n-1}(f\rho^{n-1}), \gamma^{n-1}(f\rho^{n-1}) >=$
$< \iota^n pf, \iota^{n-1}f, \iota^{n-1}f, \cdots \iota^{n-1}f, \iota^{n-1}f >=$
$< P^n p\iota^n f, P^{n-1}\rho_0\iota^n f, P^{n-1}\rho_1\iota^n f, \cdots \rho_0\iota^n f, \rho_1\iota^n f >=$
$< P^n p, P^{n-1}\rho_0, P^{n-1}\rho_1, \cdots \rho_0, \rho_1 > \iota^n f =$
$p^n\iota^n f$. Por tanto $[\gamma^n(H)] \in \pi_n^p(A, f)$. Se define $\gamma^n : \pi_n^i(X, f) \to \pi_n^p(A, f)$ por $\gamma^n([H]) = [\gamma^n(H)]$.
γ^n bien definida:

Si $[H_0] = [H_1] \in \pi_n^i(X, f)$ entonces existe $H : I^{n+1}A \to X$ tal que $H\iota_0 = H_0$, $H\iota_1 = H_1$ y $HIi^n = H_0\rho Ii^n = H_0 i^n\rho = f\rho^n i^n\rho = f\rho^{n+1}Ii^n$, en particular $HI^{n+1}i = fi\rho^{n+1}$, y por la compatibilidad de la cofibración y la fibración se tiene que $pH = pf\rho^{n+1}$.

El morfismo $\gamma^{n+1}(H) : A \to P^{n+1}X$ verifica $p^{n+1}\gamma^{n+1}(H) =$
$< \gamma^{n+1}(pH), \gamma^n(H\iota_0), \gamma^n(H\iota_1), \gamma^n(HI\iota_0), \gamma^n(HI\iota_1), \cdots \gamma^n(HI^n\iota_1) >=$

$< \gamma^{n+1}(pf\rho^{n+1}), \gamma^n(H_0), \gamma^n(H_1), \gamma^n(f\rho^n), \gamma^n(f\rho^n), \cdots \gamma^n(f\rho^n), \gamma^n(f\rho^n) >=$ $< \iota^{n+1}pf, \gamma^n(H_0), \gamma^n(H_1), \iota^n f, \iota^n f, \cdots \iota^n f, \iota^n f >$, y por el dual de la proposición 1.2.6 se tiene que $[\gamma^n(H_0)] = [\gamma^n(H_1)]$ en $\pi_n^p(A, f)$.

γ^n es homomorfismo de grupos:

Por la proposición 1.3.6, si $[G] = [F]^{-1}$ en $\pi_n^i(X, f)$ entonces existe una extensión $H : I^{n+1}A \to X$ del morfismo $\{f\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, F, f\rho^n, f\rho^n, G\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}. Entonces $\gamma^{n+1}(H) : A \to P^{n+1}X$ verifica $p^{n+1}\gamma^{n+1}(H) =$ $< P^{n+1}p\iota^{n+1}f, \iota^n f, \gamma^n(G), \gamma^n(F), \iota^n f, \cdots \iota^n f >$ y por la proposición dual de la 1.3.8 se tiene que $[\gamma^n(G)] = [\gamma^n(F)]^{-1}$ en $\pi_n^p(A, f)$. En otras palabras, $[\gamma^n(\overline{F})] = [\overline{\gamma^n(F)}]$.

Por la proposición 1.3.7, si $[H] = [F] \cdot [G]$ en $\pi_n^i(X, f)$, entonces existe una extensión $E : I^{n+1}A \to X$ del morfismo $\{f\rho^{n+1}I^2 i^{n-1}, \overline{F}, f\rho^n, G, H\}$ relativa a la cofibración i^{n+1}. Entonces $\gamma^{n+1}(E) : A \to P^{n+1}X$ verifica $p^{n+1}\gamma^{n+1}(E) =$ $< P^{n+1}p\iota^{n+1}f, \gamma^n(G), \gamma^n(H), \gamma(\overline{F}), \iota^n f, \cdots \iota^n f >$ y por la proposición dual de la 1.3.9 y lo anterior se concluye que $[\gamma^n(H)] = [\gamma^n(F)] \cdot [\gamma^n(G)]$ en $\pi_n^p(A, f)$.

Una demostración similar usando γ^{-1} prueba que $\gamma^{-n} : \pi_n^p(A, f) \to \pi_n^i(X, f)$ es también un homomorfismo de grupos inverso de γ^n. Se concluye que γ^n es un isomorfismo de grupos. □

Definición 4.1.4. Dada una categoría $\mathcal{C}$, un cilindro generalizado es un funtor $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y transformaciones naturales $\rho : I \to 1_{\mathcal{C}}$, $\iota_\epsilon : 1_{\mathcal{C}} \to I$ y $\chi_\epsilon : II \to I$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, verificando los axiomas **GI1** y **GI5** de la definición 1.1.2 de I-categoría generalizada.

La familia de cofibraciones generada por un cilindro $(I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon)$ son aquellos morfismos i de la categoría tales que $i, i^1, \cdots\ i^n, \cdots$ verifican la propiedad de extensión de homotopía y siempre tienen push out. Nótese que si i tiene push out para todo morfismo con su mismo dominio entonces existe i^1. Iterando el proceso, existe i^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.1.2. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ con un cilindro generalizado $(I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon)$ de forma que ι_ϵ son cofibraciones generadas para todo objeto de la categoría,* *y el cilindro I transforma push outs con cofibraciones generadas en push outs, entonces $(\mathcal{C}, I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon, cof)$, donde cof son las cofibraciones generadas, es una I-categoría generalizada.*

Demostración. **GI1** y **GI5** se verifican por la definición de cilindro generalizado.

El axioma **GI4** es consecuencia inmediata de la definición de cofibraciones generadas. Nótese que $(i^n)^m = i^{n+m}$.

Axioma **GI2**:

Que las cofibraciones generadas tienen push out se da por definición. Que el cilindro transforma push outs cofibrados en push outs se tiene por hipótesis.

Dado el push out $P\{i, f\}$, hay que ver que $\bar{i}$ es una cofibración generada. Por el apartado segundo del corolario 1.2.1, basta probar que $\bar{i}$ tiene push out para cualquier morfismo con su mismo dominio, y que verifica la P.E.H.

Por la proposición 0.2.2, si el dominio de un morfismo g coincide con el dominio de $\bar{i}$, entonces el dominio de g coincide con el codominio de f y $P\{i, gf\} = P\{\bar{i}, g\}$.

Dado el siguiente cuadrado de homotopía $g\bar{i} = G\iota_\epsilon$ asociado a $\bar{i}$, entonces $GIf\iota_0 = G\iota_0 f = g\bar{i}f = g\overline{f}i$ es un cuadrado de homotopía asociado a i, y al verificar i la P.E.H. tiene una extensión H tal que $H\iota_0 = g\overline{f}$ y $HIi = GIf$. Al transformar el funtor I los push outs con i en push outs, existe el morfismo $\{H, G\}$ verificando $\{H, G\}I\bar{i} = G$ y $\{H, G\}\iota_0 = \{H\iota_0, G\iota_0\} = \{g\overline{f}, g\bar{i}\} = g$.

Axioma **GI3**:

Por hipótesis, ι_ϵ son cofibraciones generadas para todo objeto de la categoría. Dado el morfismo 1_A, se tiene que $(1_A)^n = 1_{I^n A}$, que efectivamente tiene push out para cualquier morfismo con su mismo dominio y dado un cuadrado de homotopía $h1 = H\iota_0$ asociado a 1, el propio morfismo H es una extensión.

Falta probar que si los morfismos $i : B \rightarrowtail A$ y $j : C \rightarrowtail B$ son cofibraciones generadas, entonces $ij : C \to A$ también lo es.

Aplicando el corolario 1.2.1 a los cuadrados $1(ij) = ij$ e $(ij)1 = ij$ se tiene

respectivamente que $I^n 1(ij)^n = i^n I^n_{(i,ij)} j$ y que $(ij)^n I^n_{(ij,j)} 1 = I^n ij^n$. Sea F un morfismo con dominio $I^n_{ij} C$, entonces $FI^n_{(ij,j)}1$ tiene como dominio $I^n_j C$. Al ser j una cofibración generada entonces existe $P\{j^n, FI^n_{(ij,j)}1\}$. El morfismo F es de la forma $\{f_{2n}, f_{2n-1}, \cdots\ f_1, f_0\}$, entonces $\overline{FI^n_{(ij,j)}1} I^k \iota_1 = \overline{j^n} f_{2k} I^{n-1} i$ y $\overline{FI^n_{(ij,j)}1} I^k \iota_0 = \overline{j^n} f_{2k+1} I^{n-1} i$ y por tanto existe el morfismo $\{\overline{FI^n_{(ij,j)}1}, \overline{j^n} f_{2n-1}, \overline{j^n} f_{2n-2}, \cdots\ \overline{j^n} f_1, \overline{j^n} f_0\}$ con dominio $I^n_i B$. Nótese que la compatibilidad de los términos $\overline{j^n} f_i$ entre si está probada por existir el morfismo $F = \{f_{2n}, \cdots\ f_1, f_0\}$. Se tiene entonces que $\overline{j^n} F =$
$\{\overline{j^n} f_{2n}, \overline{j^n} f_{2n-1}, \cdots\ \overline{j^n} f_1, \overline{j^n} f_0\} =$
$\{\overline{FI^n_{(ij,j)}1} I^n j, \overline{j^n} f_{2n-1}, \cdots\ \overline{j^n} f_1, \overline{j^n} f_0\} =$
$\{\overline{FI^n_{(ij,j)}1}, \overline{j^n} f_{2n-1}, \cdots\ \overline{j^n} f_1, \overline{j^n} f_0\} I^n_{(i,ij)} j$,
y por tanto se tiene un cuadrado conmutativo $\overline{j^n} F =$
$\{\overline{FI^n_{(ij,j)}1}, \overline{j^n} f_{2n-1}, \cdots\ \overline{j^n} f_1, \overline{j^n} f_0\} I^n_{(i,ij)} j$.

Dados dos morfismos g y G verificando que $GI^n_{(i,ij)} j = gF$ entonces $gFI^n_{(ij,j)} 1 = G_{2n} j^n$ pues $G_{2n} I^n j = g f_{2n}$, $G_{2n} I^k \iota_1 = G_{2k} I^{n-1} i = g f_{2k} I^{n-1} i$ y $G_{2n} I^k \iota_0 = G_{2k+1} I^{n-1} i = g f_{2k+1} I^{n-1} i$. Por tanto existe $\{G_{2n}, g\}$ con dominio $P\{j^n, FI^n_{(ij,j)}1\}$. Además $\{G_{2n}, g\}\overline{j^n} = g$ y
$\{G_{2n}, g\}\{\overline{FI^n_{(ij,j)}1}, \overline{j^n} f_{2n-1}, \cdots\ \overline{j^n} f_1, \overline{j^n} f_0\} =$
$\{G_{2n}, g f_{2n-1}, g f_{2n-2}, \cdots\ g f_0\} = \{G_{2n}, G_{2n-1}, \cdots\ G_1, G_0\} = G$. Se concluye con la igualdad de morfismos $\{G_{2n}, g\} = \{G, g\}$ con dominios respectivos $P\{j^n, FI^n_{(ij,j)}1\} = P\{I^n_{(i,ij)} j, F\}$. De donde al ser $(ij)^n = i^n I^n_{(i,ij)} j$, tiene push out para cualquier morfismo F por composición de ellos al ser i una cofibración generada y tener i^n push out.

Finalmente se verá que $(ij)^n$ verifica la propiedad de extensión de homotopía. Para ello es suficiente probar que $I^n_{(i,ij)} j$ la verifica, pues si se tiene un cuadrado de homotopía $h(ij)^n = H\iota_\epsilon$ asociado al morfismo $(ij)^n$ entonces existe $F : II^n_i B \to codom\ h$ verificando $hi^n = F\iota_\epsilon$, que es un nuevo cuadrado de homotopía asociado al morfismo i^n, y al ser i una cofibración generada, existe una extensión G de dicho cuadrado que verifica $G\iota_\epsilon = h$ y $GIi^n I^n_{(i,ij)}j = FII^n_{(i,ij)}j = H$.

Sea ahora $GI^n_{(i,ij)}j = F\iota_\epsilon$ un cuadrado de homotopía asociado al morfismo $I^n_{(i,ij)}j$. Entonces el morfismo G es de la forma $\{G_{2n}, G_{2n-1}, \cdots\ G_1, G_0\}$ y F es de la forma $\{F_{2n}, F_{2n-1}, \cdots\ F_0\}$. Además $G_{2n}I^n j = F_{2n}\iota_\epsilon$ y $G_k = F_k\iota_\epsilon$, $0 \leq k \leq 2n-1$. Por tanto $G_{2n}I^k\iota_1 = G_{2k}I^{n-1}i = F_{2k}\iota_\epsilon I^{n-1}i = F_{2k}I^n i\iota_\epsilon$ y $G_{2n}I^k\iota_0 = G_{2k+1}I^{n-1}i = F_{2k+1}\iota_\epsilon I^{n-1}i = F_{2k+1}I^n i\iota_\epsilon$. De donde se obtiene el cuadrado de homotopía $G_{2n}j^n = FI(I^n_{(ij,j)}1)\iota_\epsilon$. Al ser j una cofibración generada, existe una extensión H de dicho cuadrado de homotopía.

Como $HI^k\iota_1 = F_{2(k-1)}I^n i$ y $HI^k\iota_0 = F_{2(k-1)+1}I^n i$ entonces existe $\{H, F_{2n-1}, F_{2n-2}, \cdots\ F_1, F_0\}$ con dominio $I(I^n_i B)$. Nótese que la compatibilidad de los morfismos $F_k I^n i$ entre sí existe por el morfismo $FI(I^n_{(ij,j)}1)$. El morfismo $\{H, F_{2n-1}, \cdots\ F_0\}$ es una extensión del cuadrado de homotopía asociado al morfismo $I^n_{(i,ij)}j$ pues $\{H, F_{2n-1}, \cdots\ F_0\}\iota_\epsilon = \{H\iota_\epsilon, F_{2n-1}\iota_\epsilon, \cdots\ F_0\iota_\epsilon\} = \{G_{2n}, G_{2n-1}, \cdots G_0\} = G$ y $\{H, F_{2n-1}, \cdots\ F_0\}I^n_{(i,ij)}j = \{HI^n j, F_{2n-1}, \cdots\ F_0\} = \{F_{2n}, F_{2n-1}, \cdots F_0\} = F$. □

Para tener una IP-cateoría generalizada basta tener una I-categoría generalizada con un mínimo de propiedades y un funtor adjunto a derecha del funtor cilindro.

Proposición 4.1.1. *Dado un cilindro generalizado $(I, \iota_\epsilon, \rho, \chi_\epsilon)$ y un funtor P adjunto a derecha del funtor I, entonces el isomorfismo de adjunción $\gamma : Hom(I-, \sim) \to Hom(-, P \sim)$ induce una estructura de caminos generalizado $(P, \rho_\epsilon, \iota, \theta_\epsilon)$ compatible con el cilindro generalizado.*

Demostración. Sea $\gamma : Hom(I-, \sim) \to Hom(-, P \sim)$ el isomorfismo natural de adjunción entre los funtores dados. Se definen $\iota : 1_\mathcal{C} \to P$, $\rho_\epsilon : P \to 1_\mathcal{C}$ y $\theta_\epsilon : P \to P^2$ por $\iota = \gamma(\rho)$, $\rho_\epsilon = \gamma^{-1}(1_P)\iota_{\epsilon P}$ y $\theta_\epsilon = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})$ respectivamente.

La naturalidad de las transformaciones anteriores se deduce de la naturalidad de las transformaciones ρ, ι_ϵ y χ_ϵ respectivamente:

- $Pf\iota = Pf\gamma(\rho) = \gamma(f\rho) = \gamma(\rho If) = \gamma(\rho)f$
- $\rho_\epsilon Pf = \gamma^{-1}(1_P)\iota_{\epsilon P}Pf = \gamma^{-1}(1_P)I(Pf)\iota_{\epsilon P} = \gamma^{-1}(1_P Pf)\iota_{\epsilon P} =$ $\gamma^{-1}(Pf1_P)\iota_{\epsilon P} = f\gamma^{-1}(1_P)\iota_{\epsilon P}$.
- $P^2f\theta_\epsilon = P^2f\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}) = \gamma^2(f\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}) =$ $\gamma^2(\gamma^{-1}(Pf1_P)\chi_{\epsilon P}) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P Pf)\chi_{\epsilon P}) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)IPf\chi_{\epsilon P}) =$ $\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}I^2Pf) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}Pf$.

La estructura de camino generalizado de $(P, \rho_\epsilon, \iota, \theta_\epsilon)$ se deduce de la de cilindro generalizado de $(I, \iota_\epsilon, \rho, \chi_\epsilon)$:

Axioma **GP1:**

$\rho_\epsilon\iota = \gamma^{-1}(1_P)\iota_{\epsilon P}\gamma(\rho) = \gamma^{-1}(1_P)I\gamma(\rho)\iota_\epsilon = \gamma^{-1}(1_P\gamma(\rho))\iota_\epsilon = \gamma^{-1}(\gamma(\rho))\iota_\epsilon = \rho\iota_\epsilon = 1$

Axioma **GP5:**

$$\rho_{\nu P}\theta_\epsilon = \gamma^{-1}(1_{P^2})\iota_{\nu P^2}\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}) = \gamma^{-1}(1_{P^2})I\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})\iota_{\nu P} = \gamma^{-1}(1_{P^2}\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}))\iota_{\nu P} = \gamma^{-1}(\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}))\iota_{\nu P} = \gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})\iota_{\nu P} =$$

$$\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}I\iota_{\nu P}) = \begin{cases} \gamma(\gamma^{-1}(1_P)1_P) & , \quad \nu = \epsilon \\ \gamma(\gamma^{-1}(1_P)\iota_{\nu P}\rho_P) & , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \gamma(\gamma^{-1}(1_P)) & , \quad \nu = \epsilon \\ \gamma(\rho I(\gamma^{-1}(1_P)\iota_{\nu P})) & , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases} = \begin{cases} 1_P & , \quad \nu = \epsilon \\ \gamma(\rho)\gamma^{-1}(1_P)\iota_{\nu P} & , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 1_P & , \quad \nu = \epsilon \\ \iota\rho_\nu & , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases}$$

Además $P\rho_\nu\theta_\epsilon = P\rho_\nu\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}) = \gamma(\rho_\nu\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})) =$ $\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\iota_{\nu P}\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})) = \gamma(\gamma^{-1}(1_P)I\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})\iota_{\nu IP}) =$ $\gamma(\gamma^{-1}(1_P\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}))\iota_{\nu IP}) = \gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}\iota_{\nu IP}) =$

$$\begin{cases} \gamma(\gamma^{-1}(1_P)) & , \quad \nu = \epsilon \\ \gamma(\gamma^{-1}(1_P)\iota_{\nu P}\rho_P) & , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases} = \begin{cases} 1_P & , \quad \nu = \epsilon \\ \iota\rho_\nu & , \quad \nu \neq \epsilon \end{cases}$$

Finalmente $\theta_\epsilon\iota = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})\gamma(\rho) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}I^2\gamma(\rho)) =$
$\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)I\gamma(\rho)\chi_\epsilon) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P\gamma(\rho))\chi_\epsilon) = \gamma^2(\rho\chi_\epsilon) = \gamma^2(\rho^2) =$
$\gamma(\gamma(\rho I\rho)) = \gamma(\gamma(\rho)\rho) = \gamma(\rho I\gamma(\rho)) = \gamma(\rho)\gamma(\rho) = \iota^2$.

Compatibilidad de las estructuras:

- $\gamma(f\rho) = \gamma(\rho If) = \gamma(\rho)f = \iota f$.
- $\rho_\epsilon\gamma(f) = \gamma^{-1}(1_P)\iota_{\epsilon P}\gamma(f) = \gamma^{-1}(1_P)I\gamma(f)\iota_\epsilon = \gamma^{-1}(1_P\gamma(f))\iota_\epsilon =$
  $\gamma^{-1}(\gamma(f))\iota_\epsilon = f\iota_\epsilon$.
- $\theta_\epsilon\gamma(f) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P})\gamma(f) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{\epsilon P}I^2\gamma(f)) =$
  $\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)I\gamma(f)\chi_\epsilon) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_P\gamma(f))\chi_\epsilon) = \gamma^2(f\chi_\epsilon)$.

□

Una vez obtenidos unos caminos generalizados a través de un cilindro generalizado y un funtor adjunto a derecha del funtor cilindro, se procede al estudio de las posibles fibraciones que se asociarán a la estructura de caminos generalizados para crear una IP-categoría generalizada. Para ello es necesario usar cofibraciones de retracto por deformación fuerte y la propiedad de levantamiento de homotopía relativa, conceptos que serán definidos de acuerdo con lo que sucede en la homotopía ordinaria de los espacios topológicos.

Definición 4.1.5. Una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ en una I-categoría generalizada se dirá de retracto por deformación fuerte cuando exista un morfismo $r : A \to B$ tal que $ri = 1$ e $ir \simeq 1 \; rel \; i$

Definición 4.1.6. Un morfismo $p : X \to Y$ en una I-categoría generalizada se dirá que verifica la propiedad de levantamiento de homotopía relativa cuando para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y todo cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "\{G,g\}"] \arrow[d, "\{Ii,\iota_0\}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ IA \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe una extensión $F : IA \to X$ tal que $F\{Ii, \iota_0\} = \{G, g\}$ y $pF = H$.

Proposición 4.1.2. *En una I-categoría generalizada, dada una cofibración de retracto por deformación fuerte $i : B \rightarrowtail A$ y un cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

si p verifica la propiedad de levantamiento de homotopía relativa, entonces existe $f : A \to X$ tal que $fi = g$ y $pf = h$

Demostración. Por la definición de retracto por deformación fuerte, existe $r : A \to B$ y $H : IA \to A$ tal que $ri = 1$ y $H : ir \simeq 1 \ rel \ i$, esto es, $Hi^1 = \{i\rho, ir, 1\}$. Por tanto, se tiene el cuadrado conmutativo $H\{Ii, \iota_0\} = i\{\rho, r\}$. Componiendo este cuadrado con el del enunciado y al verificar p la propiedad de levantamiento de homotopía relativa, existe $F : IA \to X$ tal que $F\{Ii, \iota_0\} = g\{\rho, r\}$ y $pF = hH$. Entonces el morfismo $F\iota_1 : A \to X$ verifica $pF\iota_1 = hH\iota_1 = h$ y $F\iota_1 i = FIi\iota_1 = g\rho\iota_1 = g$. □

Proposición 4.1.3. *En una I-categoría generalizada, para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y objeto Z, las cofibraciones $\{Ii, \iota_\epsilon\} : P\{\iota_\epsilon, i\} \rightarrowtail IA$ y $\iota_{\epsilon Z} : Z \rightarrowtail IZ$ son de retracto por deformación fuerte, con $\epsilon \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Se supondrá que $\epsilon = 0$. Para $\epsilon = 1$, la demostración es similar.

El morfismo $\chi_1 : I^2A \to IA$ verifica $\chi_1 I\{Ii, \iota_0\} = \{Ii\chi_1, \iota_0\rho\} = \{Ii\chi_1, \iota_0\rho\}I\rho I\iota_1$. Por otro lado, el morfismo $\{Ii, \iota_0\}r\chi_1 : I^2A \to IA$, donde $r : IA \to P\{\iota_0, i\}$ es la retracción existente por el teorema 1.1.1, verifica $\{Ii, \iota_0\}r\chi_1 I\{Ii, \iota_0\} = \{Ii, \iota_0\}r\{Ii\chi_1, \iota_0\rho\} = \{Ii\chi_1, \iota_0\rho\} = \{Ii\chi_1, \iota_0\rho\}I\rho I\iota_0$. Por tanto existe $\{\{Ii\chi_1, \iota_0\rho\}I\rho, \{Ii, \iota_0\}r\chi_1, \chi_1\} : II^1_{\{Ii,\iota_0\}}P\{\iota_0, i\} \to IA$ y verifica $\{\{Ii\chi_1, \iota_0\rho\}I\rho, \{Ii, \iota_0\}r\chi_1, \chi_1\}\iota_0 = \{\{Ii\iota_0\rho, \iota_0\rho\iota_0\}\rho, \{Ii, \iota_0\}r\iota_0\rho, \iota_0\rho\} = \{\{\iota_0\rho Ii, \iota_0\rho\iota_0\}\rho, \iota_0\rho, \iota_0\rho\} = \{\iota_0\rho^2 I\{Ii, \iota_0\}, \iota_0\rho^2\iota_0, \iota_0\rho^2\iota_1\} = \iota_0\rho^2\{Ii, \iota_0\}^1$ y por

la propiedad de extensión de homotopía existe $H' : I^3A \to IA$ verificando $H'I\{Ii,\iota_0\}^1 = \{\{Ii\chi_1,\iota_0\rho\}I\rho,\{Ii,\iota_0\}r\chi_1,\chi_1\}$ y $H'\iota_0 = \iota_0\rho^2$. Se tiene entonces que $H'\iota_1 = H : I^2A \to IA$ verifica $H\{Ii,\iota_0\}^1 =$
$\{\{Ii\chi_1,\iota_0\rho\}I\rho,\{Ii,\iota_0\}r\chi_1,\chi_1\}\iota_1 = \{\{Ii,\iota_0\}\rho,\{Ii,\iota_0\}r,1\}$. Por tanto $\{Ii,\iota_0\}$ es una cofibración de retracto por deformación fuerte.

El morfismo $\chi_1 : I^2Z \to IZ$ verifica $\chi_1 I\iota_0 = \iota_0\rho = \iota_0\rho^2 I\iota_1 = \iota_0\rho^2 I\iota_0$ y por tanto existe $\{\iota_0\rho^2,\iota_0\rho^2,\chi_1\} : II^1_{\iota_0}Z \to IZ$ verificando $\{\iota_0\rho^2,\iota_0\rho^2,\chi_1\}\iota_0 = \{\iota_0\rho,\iota_0\rho,\iota_0\rho\} = \iota_0\rho^2(\iota_0)^1$ y por la propiedad de extensión de homotopía existe $H' : I^3Z \to IZ$ verificando $H'I(\iota_0)^1 = \{\iota_0\rho^2,\iota_0\rho^2,\chi_1\}$ y $H'\iota_0 = \iota_0\rho^2$. Entonces $H = H'\iota_1 : I^2Z \to IZ$ verifica $H(\iota_0)^1 = \{\iota_0\rho^2,\iota_0\rho^2,\chi_1\}\iota_1 = \{\iota_0\rho,\iota_0\rho,1\}$. Se concluye que $\iota_0 : Z \to IZ$ es una cofibración de retracto por deformación fuerte.

□

Proposición 4.1.4. *Dada una I-categoría generalizada y un funtor P adjunto a derecha del funtor cilindro I, un morfismo $p : X \to Y$ verifica la propiedad de levantamiento de homotopía (P.L.H.) si y solo si todo cuadrado del tipo*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\iota_\epsilon"'] & X \arrow[d, "p"] \\ IZ \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

tiene una diagonal $F : IZ \to X$ tal que $F\iota_\epsilon = h$ y $pF = H$, $\epsilon \in \{0,1\}$.

Demostración. Sea $\gamma : Hom(I-,\sim) \to Hom(-,P\sim)$ el isomorfismo natural de adjunción entre los funtores I y P, y sea $(P,\rho_\epsilon,\iota,\theta_\epsilon)$ la estructura de caminos generalizada compatible con el cilindro generalizado existente por la proposición 4.1.1. Dado un cuadrado como el indicado, entonces se tiene el cuadrado de homotopía $\rho_\epsilon\gamma(H) = H\iota_\epsilon = ph$ asociado al morfismo p. Por la propiedad de levantamiento de homotopía existe $F : Z \to PX$ verificando $\rho_\epsilon F = h$ y $PpF = \gamma(H)$. Se concluye que $\gamma^{-1}(F) : IZ \to X$ verifica $\gamma^{-1}(F)\iota_\epsilon = \rho_\epsilon F = h$ y $p\gamma^{-1}(F) = \gamma^{-1}(PpF) = \gamma^{-1}\gamma(H) = H$.

Recíprocamente, dado un cuadrado de homotopía $\rho_\epsilon H = ph$ asociado al morfismo p, entonces el cuadrado conmutativo $\gamma^{-1}(H)\iota_\epsilon = \rho_\epsilon H = ph$ es del tipo expresado en el enunciado, por tanto existe una diagonal verificando $F\iota_\epsilon = h$ y $pF = \gamma^{-1}(H)$. De donde $\gamma(F)$ es una elevación relativa al morfismo p del cuadrado de homotopía dado pues $\rho_\epsilon\gamma(F) = F\iota_\epsilon = h$ y $Pp\gamma(F) = \gamma(pF) = \gamma\gamma^{-1}(H) = H$ □

Teorema 4.1.3. *Dada una estructura $(\mathcal{C}, I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon, cof)$ de I-categoría generalizada, si P es un funtor adjunto a derecha de I y la categoría $\mathcal{C}$ posee pull backs entonces $(\mathcal{C}, I, P, \rho, \iota, \iota_\epsilon, \rho_\epsilon, \chi_\epsilon, \theta_\epsilon, cof, fib)$ es una IP-categoría generalizada, donde las transformaciones ι,ρ_ϵ y θ_ϵ son definidas como en la proposición 4.1.1 y fib denota la clase de morfismos $p : X \to Y$ tales que p^n verifica la propiedad de levantamiento de homotopía relativa para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Por la proposición 4.1.1, faltaría comprobar que se verifican los axiomas **GP2**, **GP3** y **GP4**

Axioma **GP2**:

Existen pull backs para todo morfismo que verifique la propiedad de levantamiento de homotopía relativa pues la categoría los tiene para todo morfismo. Además, por ser P funtor adjunto a derecha de I, conserva límites (Borceux, [4], proposición 3.2.2), en particular pull backs.

Falta comprobar que la inducida de una fibración en un pull back es también una fibración: Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ y el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "\{G,g\}"] \arrow[d, "\{Ii,\iota_0\}"'] & P<f,p> \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"] & X \arrow[d, "p"] \\
IA \arrow[r, "H"'] & Z \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

se tiene que por verificar p la propiedad de levantamiento de homotopía relativa, existe $F : IA \to X$ tal que $F\{Ii, \iota_0\} = \overline{f}\{G, g\}$ y $pF = fH$ de donde, por la propiedad de pull back existe el morfismo $< H, F >: IA \to P < f, p >$ verificando $\overline{p} < H, F >= H$, entonces como $\overline{p} < H, F > \{Ii, \iota_0\} = H\{Ii, \iota_0\} = \overline{p}\{G, g\}$ y $\overline{f} < H, F > \{Ii, \iota_0\} = F\{Ii, \iota_0\} = \overline{f}\{G, g\}$ se concluye que $< H, F > \{Ii, \iota_0\} = \{G, g\}$.

Axioma **GP3**:

Trivialmente, para todo objeto X de $\mathcal{C}$, 1_X verifica la propiedad de levantamiento de homotopía relativa pues si $H\{Ii, \iota_0\} = 1\{G, g\}$ entonces el propio morfismo H es una extensión de dicho cuadrado conmutativo.

Dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$, si se tiene un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "\{G,g\}"] \arrow[d, "\{Ii,\iota_0\}"'] & PX \arrow[d, "\rho_\epsilon"] \\ IA \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

entonces el isomorfismo de adjunción γ permite crear un cuadrado de homotopía asociado a la cofibración $\{Ii, \iota_0\}$, este es, $\gamma^{-1}(\{G, g\})\iota_\epsilon = \rho_\epsilon\{G, g\} = H\{Ii, \iota_0\}$. Sea $F : IIA \to X$ una extensión de dicho cuadrado de homotopía, esto es, $F\iota_\epsilon = H$ y $FI\{Ii, \iota_0\} = \gamma^{-1}(\{G, g\})$. Se tiene que $\gamma(F) : IA \to PX$ verifica $\gamma(F)\{Ii, \iota_0\} = \gamma(FI\{Ii, \iota_0\}) = \gamma(\gamma^{-1}(\{G, g\})) = \{G, g\}$ y $\rho_\epsilon\gamma(F) = F\iota_\epsilon = H$. Por lo tanto ρ_ϵ verifica la P.L.H.R.

Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ morfismos verificando la P.L.H.R., entonces dada una cofibración $i : B \rightarrowtail A$ considérese un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "\{G,g\}"] \arrow[d, "\{Ii,\iota_0\}"'] & X \arrow[d, "qp"] \\ IA \arrow[r, "H"'] & Z \end{tikzcd}$$

Como q verifica la P.L.H.R. existe una extensión $F : IA \to Y$ verificando $qF = H$ y $F\{Ii, \iota_0\} = p\{G, g\}$. Ahora, por verificar p la P.L.H.R. existe una extensión $U : IA \to X$ verificando $pU = F$ y $U\{Ii, \iota_0\} = \{G, g\}$. De donde U es una extensión del cuadrado dado pues $qpU = qF = H$.

Si p verifica la P.L.H.R. entonces por las proposiciones 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4, p verifica la P.L.H.

Axioma **GP4**:

Evidente observando que $(p^n)^m = p^{n+m}$. □

El teorema anterior permite crear con un cilindro $(I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon)$ y un funtor adjunto a derecha, F, del funtor cilindro I, IP-categorías generalizadas cuando la categoría tenga push outs y pull backs: una tomando las cofibraciones generadas por el cilindro y las fibraciones obtenidas como en el teorema anterior, otra siguiendo el proceso dual, esto es, las fibraciones generadas por el funtor camino y las cofibraciones definidas dualmente a las fibraciones del teorema, e iterando el proceso con las nuevas cofibraciones y fibraciones obtenidas seguirán apareciendo IP-categorías generalizadas. Los resultados obtenidos en esta sección también tienen sus resultados duales con demostraciones totalmente duales. Por ello se omiten. Nótese que la propiedad de levantamiento de homotopía relativa es una propiedad autodual.

Si se tiene un cuadrado conmutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "H"] \arrow[d, tail, "i"'] & PX \arrow[d, "<Pp{,}\rho_0>"] \\ A \arrow[r, "<G{,}h>"'] & P<\rho_0, p> \end{tikzcd}$$

entonces el siguiente cuadrado también es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "\{\gamma^{-1}(H){,}h\}"] \arrow[d, "\{Ii{,}\iota_0\}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ IA \arrow[r, "\gamma^{-1}(G)"'] & Y \end{tikzcd}$$

Obsérvese que $\gamma^{-1}(H)\iota_0 = \rho_0\gamma\gamma^{-1}(H) = \rho_0 H = hi$, y por tanto existe el morfismo $\{\gamma^{-1}(H), h\} : P\{\iota_0, i\} \to X$. Efectivamente, $p\{\gamma^{-1}(H),h\} = \{p\gamma^{-1}(H),ph\} = \{\gamma^{-1}(PpH), \rho_0 G\} = \{\gamma^{-1}(Gi),\gamma^{-1}(G)\iota_0\} = \{\gamma^{-1}(G)Ii, \gamma^{-1}(G)\iota_0\} = \gamma^{-1}(G)\{Ii, \iota_0\}$. Por la propiedad de levantamiento de homotopía relativa existe $F : IA \to X$ verificando $F\{Ii, \iota_0\} = \{\gamma^{-1}(H), h\}$ y $pF = \gamma^{-1}(G)$. El morfismo $\gamma(F) : A \to PX$ verifica $\gamma(F)i = \gamma(FIi) = \gamma(\gamma^{-1}(H)) = H$ y $< Pp, \rho_0 > \gamma(F) =< Pp\gamma(F), \rho_0\gamma(F) >=< \gamma(pF), F\iota_0 >=< \gamma(\gamma^{-1}(G)), h >=< G, h >$.

4.2 Categorías aditivas

En categorías aditivas, la suma de morfismos hace que diversas propiedades de las I-categorías generalizadas se verifiquen con menos exigencias. En este sentido, la propia axiomática de definición puede ser simplificada.

Obsérvese que si $i : B \to A$ no es cofibración, aunque sí exista el objeto push out $P\{\iota_0, i\}$, puesto que ι_0 sí que es cofibración, no se puede asegurar nada sobre la existencia del objeto push out $P\{\bar{i}\iota_1, i\}$, ya que ninguno de los morfismos tiene porqué ser cofibración. Sin embargo, en muchos casos, dicho objeto push out sí puede existir, como por ejemplo en categorías que tengan push outs.

Teorema 4.2.1. *En una I-categoría generalizada aditiva, si un morfismo $i : B \to A$ verifica la P.E.H. entonces, si existe el morfismo $i^1 : I_i^1 B \to A$, también la verifica.*

Demostración. Si existe el morfismo $i^1 : I_i^1 B \to IA$ entonces el siguiente cuadrado es un push out

$$\begin{tikzcd}
P\{\iota_0, i\} \arrow[r, "\{Ii,\iota_0\}"'] \arrow[d, "I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1"] & IA \arrow[d, "\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}"] \\
P\{\iota_0, \{Ii, \iota_0\}\} \arrow[r, "\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}"'] & P\{\iota_0, i^1\}
\end{tikzcd}$$

Efectivamente, como $\overline{i^1}I\widetilde{i}\iota_0 = \overline{i^1}\iota_0\widetilde{i} = \widetilde{\iota_0}i^1\widetilde{i} = \widetilde{\iota_0}\{Ii, \iota_0\}$, existe el morfismo $\{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\} : P\{\iota_0, \{Ii, \iota_0\}\} \to P\{\iota_0, i^1\}$. Además $I(\bar{i}\iota_1)\iota_0 = \iota_0\bar{i}\iota_1$ y $\{Ii, \iota_0\}\bar{i}\iota_1 = Ii\iota_1 = \iota_1 i$, por tanto existe el morfismo $I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1 : P\{\iota_0, i\} \to P\{\iota_0, \{Ii, \iota_0\}\}$.

Obsérvese que todos los objetos push out del diagrama siempre existen pues ι_0 es cofibración.

Por otro lado se tiene que $\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\{Ii,\iota_0\} = \{\overline{i^1}I\widetilde{i}I(\bar{i}\iota_1), \overline{i^1}\iota_0\overline{\bar{i}\iota_1}\} =$
$\{\overline{i^1}I\widetilde{i}I(\bar{i}\iota_1), \widetilde{\iota_0}i^1\overline{\bar{i}\iota_1}\} = \{\overline{i^1}I\widetilde{i}I(\bar{i}\iota_1), \widetilde{\iota_0}\iota_1\} = \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}(I(\bar{i}\iota_1) \cup_{\bar{i}\iota_1} \iota_1)$ y por tanto el cuadrado es conmutativo.

Dados los morfismos $f_1 : IA \to X$ y $\{F, f_0, f_2\} : P\{\iota_0, \{Ii, \iota_0\}\} \to X$ verificando que $f_1\{Ii,\iota_0\} = \{F, f_0, f_2\}(I(\bar{i}\iota_1) \cup_{\bar{i}\iota_1} \iota_1) = \{FI\iota_1, f_2\iota_1\}$, se tiene que $f_1 Ii = \{F, f_0\}I(\bar{i}\iota_1)$, por tanto existe el morfismo $\{F, f_0, f_1\} : II_i^1 B \to X$. Por otro lado, $f_2 i^1 = \{f_2\{Ii,\iota_0\}, f_2\iota_1\} = \{\{F, f_0\}\iota_0, f_1\iota_0\} = \{F, f_0, f_1\}\iota_0$. Nótese que $f_2\{Ii,\iota_0\} = \{F, f_0\}\iota_0$ por existir el morfismo $\{F, f_0, f_2\}$. Se concluye que $\{\{F, f_0, f_2\}, f_1\} = \{\{F, f_0, f_1\}, f_2\} : P\{I(\bar{i}\iota_1) \cup_{\bar{i}\iota_1} \iota_1, \{Ii,\iota_0\}\} = P\{\iota_0, i^1\} \to X$.

En particular $\{\{I^2 i, I\iota_0, \iota_0\}, I\iota_1\} = \{Ii^1, \iota_0\} : P\{I(\bar{i}\iota_1) \cup_{\bar{i}\iota_1} \iota_1, \{Ii,\iota_0\}\} = P\{\iota_0, i^1\} \to I^2 A$.

Por el teorema 1.1.1, al verificar i la P.E.H se tiene que el morfismo $\{Ii,\iota_0\}$ es una sección. Sea $r : IA \to P\{\iota_0, i\}$ una retracción del morfismo $\{Ii,\iota_0\}$. Entonces $(\overline{\{Ii,\iota_0\}}Ir + \overline{\iota_0}\rho - \overline{\{Ii,\iota_0\}}\iota_0\rho Ir)\{I\{Ii,\iota_0\},\iota_0\} =$
$\{\overline{\{Ii,\iota_0\}}, \overline{\{Ii,\iota_0\}}\iota_0 r\} + \{\overline{\iota_0}\{Ii,\iota_0\}\rho, \overline{\iota_0}\} - \{\overline{\iota_0}\{Ii,\iota_0\}\rho, \overline{\{Ii,\iota_0\}}\iota_0 r\} =$
$\{\overline{\{Ii,\iota_0\}}, \overline{\iota_0}\} = 1.$
Si denotamos por $r' = \overline{\{Ii,\iota_0\}}Ir + \overline{\iota_0}\rho - \overline{\{Ii,\iota_0\}}\iota_0\rho Ir : I^2 A \to P\{\iota_0, \{Ii,\iota_0\}\}$ se tiene que

$(\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\chi_1 + \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' - \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' I\iota_1\chi_1)\{Ii^1, \iota_0\} =$
$(\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\chi_1 + \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' - \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' I\iota_1\chi_1)\{\{I^2 i, I\iota_0, \iota_0\}, I\iota_1\} =$
$\{\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\chi_1\{I^2 i, I\iota_0, \iota_0\}, \overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}+$
$\{\{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}, \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' I\iota_1\} - \{\{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' I\iota_1\chi_1\{I^2 i, I\iota_0, \iota_0\}, \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' I\iota_1\} =$
$\{\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\{Ii\chi_1, \iota_0\rho, \iota_0\rho\}, \overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}+$
$\{\{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\} - \{\overline{i^1}I\widetilde{i}, \widetilde{\iota_0}\}r' I\iota_1\{Ii\chi_1, \iota_0\rho, \iota_0\rho\}, 0\} =$
$\{\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\{Ii,\iota_0\}\{\bar{i}\chi_1, \overline{\iota_0}\rho, \overline{\iota_0}\rho\}+$

$$
\begin{aligned}
&\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}-\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}r'I\iota_1\{Ii,\iota_0\}\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\},\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}=\\
&\{\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}(I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1)\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\}+\\
&\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}-\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}r'\{I^2iI\iota_1,\iota_0\iota_1\}\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\},\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}=\\
&\{\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}(I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1)\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\}+\\
&\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}-\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}r'\{I^2i,I\iota_0,\iota_0\}(I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1)\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\},\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}=\\
&\{\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}(I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1)\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\}+\\
&\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}-\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\}(I(\bar{i}\iota_1)\cup_{\bar{i}\iota_1}\iota_1)\{\bar{i}\chi_1,\overline{\iota_0}\rho,\overline{\iota_0}\rho\},\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}=\\
&\{\{\overline{i^1}I\widetilde{i},\widetilde{\iota_0}\},\overline{i^1}I\overline{\bar{i}\iota_1}\}=1.
\end{aligned}
$$

De forma análoga se hace para $\{Ii^1,\iota_1\}$. El teorema 1.1.1 concluye que i^1 verifica la P.E.H. □

Corolario 4.2 .1. *Las cofibraciones generadas por un cilindro generalizado $(I,\rho,\iota_\epsilon,\chi_\epsilon)$ sobre una categoría aditiva con push outs, coinciden con los morfismos que verifican la P.E.H.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición de cofibración generada y del teorema 4.2.1 anterior. □

Como consecuencia de lo anterior, basta dar una estructura de cilindro generalizado que conserve push outs sobre una categoría aditiva y con push outs para tener un ejemplo de I-categoría generalizada, con sus cofibraciones definidas por la P.E.H.

Teorema 4.2.2. *En una I-categoría generalizada aditiva, para toda cofibración $i:B\rightarrowtail A$ y todo objeto X de la categoría, la operación del grupo $\pi_n^i(X,0)$ coincide con la inducida por la suma de los morfismos.*

Demostración. Obsérvese que si $[F],[G]\in\pi_n^i(X,0)$ entonces $Fi^n=0$ y $Gi^n=0$, y por tanto $(F+G)i^n=Fi^n+Gi^n=0+0=0$. Propiedad que en general no es cierta si el morfismo base elegido no es $0:A\to X$.

Por otra parte, si $F:f_0\simeq f_1\ rel\ i^n$ y $G:g_0\simeq g_1\ rel\ i^n$ con $[f_0],[f_1],[g_0],[g_1]\in\pi_n^i(X,0)$ entonces $(F+G)i^{n+1}=Fi^{n+1}+Gi^{n+1}=\{0,f_0,f_1\}+$

$\{0, g_0, g_1\} = \{0+0, f_0+g_0, f_1+g_1\} = \{0, f_0+g_0, f_1+g_1\}$ y por tanto $F+G : f_0+g_0 \simeq f_1+g_1$. Se concluye que la suma de morfismos es compatible con la relación de homotopía, y por consiguiente el conjunto $\pi_n^i(X,0)$ tiene una estructura de grupo abeliano con la operación definida por $[F]+[G] = [F+G]$.

Dada $[F], [G] \in \pi_n^i(X,0)$ se tiene que $(F*0)+(0*G) =$
$\{\{\{F,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu, \{0,0,0\}\}\nu\omega + \{\{\{0,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu, \{G,0,0\}\}\nu\omega =$
$(\{\{\{F,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu, \{0,0,0\}\} + \{\{\{0,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu, \{G,0,0\}\})\nu\omega =$
$\{\{\{F,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu + \{\{0,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu, \{0,0,0\} + \{G,0,0\}\}\nu\omega =$
$\{\{\{F+0,0+0,0+0\},\{0+0,0+0,0+0\}\}\nu, \{0+G,0+0,0+0,\}\}\nu\omega =$
$\{\{\{F,0,0\},\{0,0,0\}\}\nu, \{G,0,0\}\}\nu\omega = F*G$. De donde $[F]\cdot[G] = [F*G] =$
$[(F*0)+(0*G)] = [F*0+0*G] = [F]+[G]$. Obsérvese que $0 = 0p^n$ es el elemento neutro del grupo $\pi_n^i(X,0)$. □

Corolario 4.2.2. *En una I-categoría generalizada aditiva el grupo de homotopía $\pi_1^i(X,0)$ es también abeliano.*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema anterior. □

Dado un cilindro generalizado en una categoría aditiva con push out, por el teorema anterior, aunque el cilindro no conserve push outs, siempre se tendrán los grupos de homotopía $\pi_n^i(X,0)$ para toda cofibración $i : B \rightarrowtail A$, objeto X y $n \in \mathbb{N}$, usando la estructura de grupo inducida por la suma de las homotopías.

Dada una I-categoría generalizada aditiva, se puede obtener una construcción cono (C,k,p) en el sentido descrito por F. Díaz y S. Rodríguez [17]. Donde el funtor cono es definido por $C = coker\ \iota_0 = P\{\iota_0, 0\}$ y las transformaciones naturales k y p son definidas por $k = q\iota_1$ donde $q : I \to coker\ \iota_0$ es la proyección en el conúcleo y $p = \{q\chi_1, 0, 0\} : P\{\iota_{0C}, 0\} \to P\{\iota_0, 0\}$.

Teorema 4.2.3. *Dada una construcción cono (C,k,p) conservando push outs en una categoría aditiva $\mathcal{A}$ con push outs, entonces existe un cilindro generalizado $(I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon)$ conservando push outs.*

Demostración. Se define el funtor cilindro $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ para todo objeto X como $IX = X \oplus CX$, y para el morfismo $f : X \to Y$ como
$If = f \oplus Cf = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & Cf \end{pmatrix} : X \oplus CX \to Y \oplus CY$.

Evidentemente, como el funtor cono, el funtor identidad y la suma directa conservan push outs, también los conserva el funtor cilindro.

Se definen las transformaciones naturales para todo objeto X de $\mathcal{A}$ como sigue:

$$\iota_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : X \to X \oplus CX$$

$$\iota_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} : X \to X \oplus CX$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} : X \oplus CX \to X$$

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix} : X \oplus CX \oplus CX \oplus C^2X \to X \oplus CX$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} : X \oplus CX \oplus CX \oplus C^2X \to X \oplus CX$$

Obsérvese que por conservar el funtor C push outs, $C(X \oplus Y) = CX \oplus CY$ para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{A}$ pues $X \oplus Y = P\{0_X, 0_Y\}$. Por otro lado,

$$\rho\iota_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1) \text{ y } \rho\iota_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = (1)$$

$$\chi_0\iota_{0I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_0 I\iota_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_0\iota_{1I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & 0 \\ 0 & k_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 - pk_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_0 I\iota_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & Ck \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 - pCk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que $pCk = pk_C = 1_C$ y que $\iota_1\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$

Por otro lado $\rho\chi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho^2.$

Respecto a la transformación natural χ_1 se tiene que

$$\chi_1\iota_{1I=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & 0 \\ 0 & k_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & pk_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_1 I\iota_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & Ck \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & pCk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_1\iota_{0I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_1 I\iota_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que $\iota_0\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Finalmente $\rho\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho^2$.

La naturalidad de estas transformaciones es una simple comprobación y se deduce de la naturalidad de las transformaciones k y p.

□

Si el funtor cono no conserva push outs pero sí conserva la suma directa finita, también se puede definir el funtor cilindro, aunque éste no necesariamente conservará push outs.

Definición 4.2.1. En una categoría aditiva con un cilindro generalizado, dados morfismos $f, g : X \to Y$ se dice que f es homótopo a g si existe un morfismo $H : IX \to Y$ verificando $H\iota_0 = f$ y $H\iota_1 = g$. El morfismo H se dice una homotopía entre f y g y se denota por $H : f \simeq g$.

Nótese que "ser homótopo" es una relación de equivalencia sobre el conjunto $Hom(X, Y)$ para todo par de objetos X, Y de la categoría aditiva con cilindro generalizado, pues $f\rho : f \simeq f$, si $H : f \simeq g$ entonces $(f + g)\rho - H : g \simeq f$, y si $U : f \simeq g$ y $V : g \simeq h$ entonces $U + V - g\rho : f \simeq h$.

Proposición 4.2.1. *En una categoría aditiva con un cilindro generalizado, $f \simeq g$ si y solo si $g - f \simeq 0$.*

Demostración. Si $H : f \simeq g$ entonces $g\rho - H : g - f \simeq 0$. Recíprocamente, si $H : g - f \simeq 0$ entonces $g\rho - H : f \simeq g$. □

Es conocido que en una categoría con una construcción cono, un morfismo $f : X \to Y$ se dice nulhomótopo cuando se puede factorizar a través del cono de su dominio, esto es, existe $F : CX \to Y$ tal que $f = Fk$ (ver [17]).

Proposición 4.2.2. *Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría aditiva con cono es nulhomótopo si y solo si $f \simeq 0$.*

Demostración. Si f nulhomótopo entonces existe $F : CX \to Y$ con $Fk = f$. De donde $\begin{pmatrix} f & -F \end{pmatrix} : IX = X \oplus CX \to Y$ hace $f \simeq 0$, pues $\begin{pmatrix} f & -F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (f)$ y $\begin{pmatrix} f & -F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = (f - Fk) = (f - f) = (0)$.

Recíprocamente, si existe $\begin{pmatrix} H_0 & H_1 \end{pmatrix} : IX = X \oplus CX \to Y$ haciendo $f \simeq 0$ entonces $\begin{pmatrix} H_0 & H_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (H_0) = (f)$ y $\begin{pmatrix} H_0 & H_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = (H_0 + H_1 k) = (0)$. De donde $f = H_0 = -H_1 k$ y por tanto f es nulhomótopo. $\square$

Nótese que si $U : f \simeq g$ y $V : f' \simeq g'$ en $Hom(X, Y)$ entonces $U + V : f + f' \simeq g + g'$ y la relación de equivalencia definida anteriormente por un cilindro generalizado en una categoría aditiva es compatible con la suma de morfismos. Y por tanto $[X, Y] = Hom(X, Y)/\sim$ es un grupo abeliano, donde "$\sim$" representa la relación de equivalencia de homotopía de la definición 4.2.1.

Análogamente a lo desarrollado para cilindros, si una construcción cono (C, k, p) tiene adjunto a derecha C', se induce una estructura de cocono, donde $k' = \gamma^{-1}(1_{C'})k_{C'}$ y $p' = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'})$, donde γ es el isomorfismo natural generado por la adjunción entre C y C':

$$\gamma : Hom(C-, \sim) \to Hom(-, C' \sim).$$

Si la categoría es aditiva, usando el teorema 4.2.3 surge un isomorfismo natural

$$\gamma' : Hom(- \oplus C-, \sim) \to Hom(-, \sim \oplus C' \sim)$$

definido por $\gamma'\begin{pmatrix} \diamond & \approx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diamond \\ \gamma(\approx) \end{pmatrix}$.

Proposición 4.2.3. *Dado un cono (C, k, p) sobre una categoría aditiva, si C' es un funtor adjunto a derecha de C, entonces el funtor caminos generalizado $(P, \iota, \rho_\epsilon, \theta_\epsilon)$ engendrado por el cocono generado por adjunción (C', k', p'), coincide con la construcción caminos generalizada $(I', \rho', \iota'_\epsilon, \chi'_\epsilon)$ engendrada por el isomorfismo de adjunción $\gamma' : Hom(I-, \sim) \to Hom(-, I' \sim)$ donde $I- = -\oplus C-$ y $I' \sim = \sim \oplus C' \sim$.*

Demostración. Es consecuencia de la proposición 4.1.1 y del teorema 4.2.3. Evidentemente, los funtores P e I' coinciden en su definición: $P- = I'- = - \oplus C'-$. Además

$$\iota'_0 = (\gamma')^{-1}(1_{I'})\iota_{0I'} = (\gamma')^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho_0$$

$$\iota'_1 = (\gamma')^{-1}(1_{I'})\iota_{1I'} = (\gamma')^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \\ k & 0 \\ 0 & k_{C'} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \\ k & 0 \\ 0 & k_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^{-1}(1_{C'})k_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k' \end{pmatrix} = \rho_1$$

$$\rho' = \gamma'(\rho) = \gamma' \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \iota$$

$$\chi_0' = (\gamma')^2((\gamma')^{-1}(1_{I'})\chi_{0I'}) =$$

$$(\gamma')^2 \left((\gamma')^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_C & 0 & 1_C & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{CC'} & 0 & 1_{CC'} & 0 & -p_{C'} \end{pmatrix} \right) =$$

$$(\gamma')^2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_C & 0 & 1_C & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{CC'} & 0 & 1_{CC'} & 0 & -p_{C'} \end{pmatrix} \right) =$$

$$(\gamma')^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) & 0 & -\gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'} \end{pmatrix} =$$

$$\gamma' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) \\ 0 & \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})) & 0 & -\gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{C'} \\ 0 & 1_{C'} \\ 0 & -\gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -p' \end{pmatrix} = \theta_0$$

$$\chi_1' = (\gamma')^2((\gamma')^{-1}(1_{I'})\chi_{1I'}) =$$

$$(\gamma')^2\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{C'} \end{pmatrix}\right) =$$

$$(\gamma')^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'} \end{pmatrix} = \gamma'\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(\gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{C'})p_{C'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p' \end{pmatrix} = \theta_1$$

□

4.3 Grupos de homotopía esféricos. Categoría de los espacios topológicos

En la tercera sección del capítulo 3 se vio cómo se podían definir grupos de homotopía punteados para objetos de la categoría $\mathcal{C}^A$ referidos a objetos de la forma (x, X, a). A semejanza de lo que ocurre en los espacios topológicos punteados, cuando el objeto A es cofibrante existe un objeto de referencia canónico, cuyos grupos se denominarán esféricos por ser una generalización de los respectivos en los espacios topológicos punteados.

Definición 4.3.1. En una I-categoría generalizada $\mathcal{C}$ con objeto inicial $\emptyset$, un objeto A se dirá cofibrante cuando el morfismo inicial $\emptyset_A : \emptyset \to A$ sea una cofibración.

Definición 4.3.2. Si A es un objeto cofibrante entonces el objeto $A \sqcup A = P\{\emptyset_A, \emptyset_A\}$ se denominará la 0-esfera en $\mathcal{C}^A$ y se denotará por $S^0 A$ o simplemente por S^0 de $\mathcal{C}^A$. Los morfismos $j_0 = \widetilde{\emptyset_A}$, $j_1 = \overline{\emptyset_A} : A \to A \sqcup A$ son cofibraciones por ser inducidas de cofibraciones. Además $(j_1, S^0, \{1, 1\})$ es un objeto referencial con push out asociado $P\{\emptyset_A, \emptyset_A\}$.

Por la proposición 3.3.5 y el corolario 1.2.1 se tiene que $S^n S^0 = P\{\emptyset_A^n, \rho^n \emptyset_A^n\}$.

Definición 4.3.3. La n-esfera S^n de $\mathcal{C}^A$ se define por $S^n = S^n S^0 = P\{\emptyset_A^n, \rho^n \emptyset_A^n\}$.

Proposición 4.3.1. *Los grupos de homotopía punteados de un objeto (x, X) de $\mathcal{C}^A$ referidos a la 0-esfera S^0 son isomorfos a $\pi_n^{\emptyset_A}(X, x)$.*

Demostración. Evidente observando por el teorema 3.3.1 y el corolario 3.3.7 que $\pi_n^{(j_1, S^0, \{1,1\})}(x, X) \cong \pi_n^{j_1}(X, \{x, x\}) \cong \pi_n^{\emptyset_A}(X, x)$. □

Definición 4.3.4. Los grupos de homotopía referidos a la 0-esfera S^0 de $\mathcal{C}^A$, de un objeto (x, X) se denominan grupos de homotopía esféricos de X basados en x, y se denotan simplemente por $\pi_n(X, x)$.

Usando las definiciones 1.4.2 y 1.4.3 se tiene que todo objeto X de una I-categoría generalizada con objeto inicial $\emptyset$ es $1 - \emptyset$-cofibrado. Nótese que el único morfismo que existe con dominio $\emptyset$ y codominio un objeto, es el morfismo inicial sobre dicho objeto, que es cofibración si éste es cofibrante. De estas observaciones se obtiene la generalización de las definiciones y resultados clásicos de la homotopía ordinaria de los espacios topológicos.

Definición 4.3.5. El conjunto de componentes conexas por camino de un objeto X de una I-categoría generalizada con punto un objeto cofibrantes A es el conjunto de componentes conexas por caminos relativo a la cofibración $\emptyset_A : \emptyset \to A$ en $\emptyset_X : \emptyset \to X$, esto es, $[A, X]^{\emptyset_X\{\emptyset_A\}}$, también denotado por $[A, X]$. Si $H : x \simeq y \ rel \ \emptyset_A$ entonces H se dirá que es un camino con origen en el punto x y final el punto y.

Definición 4.3.6. Un objeto X de una I-categoría generalizada se dirá conexo por caminos respecto al punto A cuando $[A, X]$ sea unitario.

Proposición 4.3.2. *Si dos puntos $x, y : A \to X$ están conectados por un camino entonces $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(X, y)$.*

Demostración. Es obvia por el teorema 1.4.2. □

Corolario 4.3.1. *Si X es un objeto conexo por caminos referido al punto A entonces los grupos de homotopía esféricos $\pi_n(X, x)$ son independientes, salvo isomorfismo, del punto $x : A \to X$ elegido. En este caso se denotan simplemente por $\pi_n(X)$.*

La categoría de los espacios topológicos es una I-categoría generalizada, donde el funtor cilindro, como se sabe, viene definido por $IX = X \times I$ y las transformaciones naturales $\iota_0, \iota_1 : X \to X \times I$ son respectivamente $\iota_0(x) = (x, 0)$ y $\iota_1(x) = (x, 1)$, y la transformación $\rho : X \times I \to X$ es $\rho(x, t) = x$.

Las cofibraciones son definidas por la propiedad de extensión de homotopía, esto es, $i : B \to A$ es cofibración si verifica la P.E.H. en el sentido expresado en el axioma **GI3** de la definición 1.1.2, o equivalentemente, en el teorema 1.1.1. Obsérvese que en este caso las cofibraciones son exactamente las generadas por el cilindro pues la categoría posee push outs y todo morfismo $i : B \rightarrowtail A$ que verifique la P.E.H. hace que también la verifique $i^1 : I_i^1 B \to IA$. Una demostración de que los espacios topológicos son una I-categoría con esta estructura puede verse en [2].

Las transformaciones naturales $\chi_0, \chi_1 : X \times I \times I \to X \times I$ son definidas por $\chi_0(x, t, s) = (x, 1 - (1-t)(1-s))$ y $\chi_1(x, t, s) = (x, ts)$.

Proposición 4.3.3. *La estructura anteriormente definida en los espacios topológicos hace de estos una I-categoría generalizada.*

Demostración. Obsérvese que χ_0 y χ_1 son naturales pues $(f \times 1)\chi_0(x, t, s) = (f \times 1)(x, 1 - (1-t)(1-s)) = (f(x), 1 - (1-t)(1-s)) = \chi_0(f(x), t, s) = \chi_0(f \times 1 \times 1)(x, t, s)$ y $(f \times 1)\chi_1(x, t, s) = (f \times 1)(x, ts) = (f(x), ts) = \chi_1(f(x), t, s) = \chi_1(f \times 1 \times 1)(x, t, s)$.

Por lo dicho anteriormente, faltaría probar el axioma de producto **GI5**:

$\chi_1\iota_0(x,t) = \chi_1(x,t,0) = (x,0) = \iota_0(x) = \iota_0\rho(x,t)$

$\chi_1 I\iota_0(x,t) = \chi_1(x,0,t) = (x,0) = \iota_0(x) = \iota_0\rho(x,t)$

$\chi_1\iota_1(x,t) = \chi_1(x,t,1) = (x,t)$

$\chi_1 I\iota_1(x,t) = \chi_1(x,1,t) = (x,t)$

$\chi_0\iota_0(x,t) = \chi_0(x,t,0) = (x,1-(1-t)(1-0)) = (x,t)$

$\chi_0 I\iota_0(x,t) = \chi_0(x,0,t) = (x,1-(1-0)(1-t)) = (x,t)$

$\chi_0\iota_1(x,t) = \chi_0(x,t,1) = (x,1-(1-t)(1-1)) = (x,1) = \iota_1(x) = \iota_1\rho(x,t)$

$\chi_0 I\iota_1(x,t) = \chi_0(x,1,t) = (x,1-(1-1)(1-t)) = (x,1) = \iota_1(x) = \iota_1\rho(x,t)$

$\rho\chi_0(x,t,s) = \rho(x,1-(1-t)(1-s)) = x = \rho(x,ts) = \rho\chi_1(x,t,s)$.

Evidentemente $\rho^2(x,t,s) = \rho(x,t) = x$. □

Se tiene entonces que en la categoría de los espacios topológicos se puede desarrollar la teoría de homotopía generalizada aquí establecida obteniéndose grupos de homotopía relativos a las cofibraciones y basados en morfismos, así como sucesiones exactas de estos.

Si se considera ahora la categoría de los espacios topológicos punteados, para cualquier par de espacios topológicos punteados A, X se obtienen los grupos de homotopía punteados $\pi_n^A(X)$ en la forma ya conocida y que por lo dicho a lo largo del trabajo, son exactamente grupos de homotopía generalizados $\pi_n^a(X,x)$, sin mas que observar que la cofibración $a : * \rightarrowtail A$ y $x : * \to X$ son aplicaciones definidas por $a(*) = a \in A$ y $x(*) = x \in X$. Nótese que toda aplicación $x : * \rightarrowtail X$ induce una $x : A \to X$ definida por $x(A) = \{x\} \subset X$ y es este morfismo el usado para puntear $\pi_n^a(X,x)$. Por otro lado, la retracción usada para estos espacios topológicos punteados es la única existente $p : A \to *$. En consecuencia, se usa la notación $x : A \to X$ al quedar perfectamente determinada la composición $xp : A \to X$. Así, estos grupos de homotopía de los espacios topológicos punteados pueden ser expresados como un caso particular de los grupos de homotopía generalizados.

Más aún, los grupos de homotopía esféricos de un espacio topológico punteado (X, x) son, por lo que ya se ha visto anteriormente en esta sección, los grupos de homotopía relativos a la cofibración inicial del punto, del espacio topológico X basado en el morfismo $x : * \to X$.

Las sucesiones exactas de homotopía de pares de espacios topológicos son también casos particulares de las sucesiones exactas de homotopía generalizada obtenidas a lo largo de este trabajo.

En este sentido se ve, como sucede en todas las I-categorías, que siempre que éstas posean transformaciones producto, la homotopía punteada de dichas categorías no es mas que un caso particular de la homotopía generalizada desarrollada en este trabajo.

Es conocido que el funtor cilindro definido en la categoría de los espacios topológicos tiene un funtor adjunto a derecha definido para todo espacio topológico X como el espacio topológico de los caminos en dicho espacio X^I. El isomorfismo natural de adjunción γ viene definido para toda applicación continua $f : X \times I \to Y$ por $\gamma(f)(x) : I \to Y$ donde $\gamma(f)(x)(t) = f(x, t)$. Su inversa se define para todo $g : X \to Y^I$ por $\gamma^{-1}(g) : X \times I \to Y$ donde $\gamma^{-1}(g)(x, t) = g(x)(t)$.

Se deduce entonces por la proposición 4.1.1, que para todo espacio topológico X, la transformación natural $\iota : X \to X^I$ viene definida por $\iota(x)(t) = \gamma(\rho)(x)(t) = \rho(x, t) = x$.

Las transformaciones $\rho_0, \rho_1 : X^I \to X$ vienen definidas por $\rho_0(\alpha) = \gamma^{-1}(1_{X^I})\iota_0(\alpha) = \gamma^{-1}(1_{X^I})(\alpha, 0) = \alpha(0)$ y $\rho_1(\alpha) = \gamma^{-1}(1_{X^I})\iota_1(\alpha) = \gamma^{-1}(1_{X^I})(\alpha, 1) = \alpha(1)$.

Finalmente las transformaciones $\theta_0, \theta_1 : X^I \to (X^I)^I \cong X^{I\times I}$ se definen por $\theta_0(\alpha)(t)(s) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{X^I})\chi_0)(\alpha)(t)(s) = \gamma(\gamma^{-1}(1_{X^I})\chi_0)(\alpha, t)(s) = \gamma^{-1}(1_{X^I})\chi_0(\alpha, t, s) = \gamma^{-1}(1_{X^I})(\alpha, 1 - (1 - t)(1 - s)) = \alpha(1-(1-t)(1-s))$ y $\theta_1(\alpha)(t)(s) = \gamma^2(\gamma^{-1}(1_{X^I})\chi_1)(\alpha)(t)(s) = \gamma(\gamma^{-1}(1_{X^I})\chi_1)(\alpha, t)(s) = \gamma^{-1}(1_{X^I})\chi_1(\alpha, t, s) = \gamma^{-1}(1_{X^I})(\alpha, ts) = \alpha(ts)$

Se tiene entonces por la proposición 4.1.1 que las construcciones cilindro y caminos así definidas dan origen a estructuras de IP-categorías generalizadas en los espacios topológicos.

La categoría de los espacios topológicos con la estructura de cilindro definida anteriormente y las cofibraciones cerradas, esto es, cofibraciones $i : B \rightarrowtail A$ tales que $i(B)$ es un subconjunto cerrado de A, es también una I-categoría generalizada.

Obsérvese que si $i : B \rightarrowtail A$ es una cofibración cerrada y $f : B \to X$ una aplicación continua entonces $\bar{i}^{-1}(\bar{i}(X)) = X$ y $\overline{f}^{-1}(\bar{i}(X)) = i(B)$ son cerrados en X y en A respectivamente. Por tanto $\bar{i}(X)$ es cerrado en $P\{i, f\}$. Además $i^1(I^1_i B) = (i \times 1)(B \times I) \cup (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\}) =$
$(i(B) \times I) \cup (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$ es cerrado en $A \times I$ por ser unión de tres productos de cerrados.

Por otro lado, la estructura adjunta dual creada en los espacios topológicos a través del funtor caminos, con las fibraciones de Hurewicz, aplicaciones continuas que verifican la propiedad de levantamiento de homotopía, hacen de los espacios topológicos una P-categoría generalizada.

Estas fibraciones de Hurewicz verifican la propiedad de levantamiento de homotopía relativa respecto a las cofibraciones cerradas, pues si $i : B \rightarrowtail A$ es una cofibración cerrada trivial y $p : X \twoheadrightarrow Y$ una fibración, entonces para todo cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ A \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe una diagonal $F : A \to X$ verificando $Fi = f$ y $pF = h$. Observando que $\{Ii, \iota_\epsilon\} : P\{\iota_\epsilon, i\} \to IA$ son cofibraciones de retractos por deformación fuerte, en particular cofibraciones cerradas triviales, se concluye lo afirmado. Para un estudio más concreto de los resultados usados anteriormente pueden consultarse los trabajos de Strøm [58] y [59] sobre cofibraciones cerradas y fibraciones.

4.4 Ejemplos

En esta sección se analizarán distintos ejemplos de I-categorías generalizadas, P-categorías generalizadas e IP-categorías generalizadas.

4.4.1 Homotopía de los espacios exteriores

La categoría **P** formada por los espacios topológicos con las aplicaciones propias no posee, en general, límites y colímites. En particular no siempre existen push outs, y es necesario extender esta categoría a una más amplia que la contenga como subcategoría llena y que sí los posea para poder así definir una estructura de cilindro generalizado cuya homotopía restringida a la subcategoría llena **P** coincida con la homotopía propia de los espacios topológicos (ver [25]).

Definición 4.4.1. Una externología de un espacio topológico (X, τ) es un subconjunto $\epsilon \in \tau$ verificando

E1: Para todo $E, F \in \epsilon$, $E \cap F \in \epsilon$.

E2: Si $A \in \tau$ y existe $E \in \epsilon$ con $E \subseteq A$ entonces $A \in \epsilon$.

Definición 4.4.2. Un espacio exterior es una terna (X, τ, ϵ) donde (X, τ) es espacio topológico y ϵ es una externología en (X, τ). Una aplicación exterior $f : (X, \tau, \epsilon) \to (X', \tau', \epsilon')$ es una aplicación continua $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ verificando que para todo $E \in \epsilon'$, el conjunto $f^{-1}(E)$ pertenece a ϵ.

La categoría **E** de los espacios exteriores está formada por estos espacios como objetos y las aplicaciones exteriores como morfismos.

Si (X, τ) es un espacio topológico se define $\epsilon = \{A \in \tau /\ A^c$ es cerrado y compacto$\}$. Entonces ϵ es una externología pues si $A, B \in \epsilon$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, y la unión finita de cerrados y compactos es cerrado y compacto. Además, si $A \in \tau$ y $E \in \epsilon$ con $E \subseteq A$ entonces $A^c \subseteq E^c$, cerrado contenido en un compacto, y por tanto A^c también compacto.

De esta forma, todo espacio topológico puede ser considerado un espacio exterior. Dados dos espacios topológicos (X, τ) y (X', τ') con sus respectivas externologías definidas mediante complementarios de compactos cerrados, se tiene que $f:(X,\tau,\epsilon)\to(X',\tau',\epsilon')$ es exterior si y solo si f es propia.

Así, la categoría **P** es una subcategoría llena de la categoría **E** de los espacios exteriores.

Se define un funtor cilindro I :**E**$\to$**E** por $I(X,\tau,\epsilon)=(X\times I,\tau_{X\times I},\epsilon_{X\times I})$ donde I es el intervalo unidad con la topología usual, $\tau_{X\times I}$ es la topología producto y $\epsilon_{X\times I}$ es la externología producto considerando en I la externología $\epsilon_I=\{I\}$, esto es, $A\subseteq X\times I$ pertenece a $\epsilon_{X\times I}$ si y solo si $A\in\tau_{X\times I}$ y existe $E\in\epsilon$ tal que $E\times I\subseteq A$.

Si $f:(X,\tau,\epsilon)\to(X',\tau',\epsilon')$ es una aplicación exterior entonces $(f\times 1_I)^{-1}(A')\supseteq(f\times 1_I)^{-1}(E'\times I)=f^{-1}(E')\times I$, y como f es exterior entonces $f^{-1}(E')\in\epsilon$ y por tanto $(f\times 1_I)^{-1}(A)\in\epsilon_{X\times I}$.

Las transformaciones naturales $\iota_0,\iota_1:X\to X\times I$ se definen como en **Top**. Si $A\in\epsilon_{X\times I}$ entonces $\iota_\nu^{-1}(A)$ contiene a $\iota_\nu^{-1}(E\times I)=E\in\epsilon$ para algún E y como $\iota_\nu^{-1}(A)\in\tau$ entonces $\iota_\nu^{-1}(A)\in\epsilon$.

La transformación natural $\rho:X\times I\to X$ también es externa pues $\rho^{-1}(E)=E\times I\in\epsilon_{X\times I}$ para todo $E\in\epsilon$.

Las transformaciones naturales producto $\chi_0,\chi_1:X\times I\times I\to X\times I$ son externas pues para todo $A\in\epsilon_{X\times I}$, $\chi_\nu^{-1}(A)\supseteq\chi_\nu^{-1}(E\times I)=E\times I\times I\in\epsilon_{X\times I\times I}$ para algún $E\in\epsilon$ y por tanto $\chi_\nu^{-1}(A)\in\epsilon_{X\times I\times I}$.

De esta forma se tiene una construcción de cilindro generalizado sobre la categoría de los espacios exteriores.

La categoría de los espacios exteriores tiene push outs, coincidentes con los de **Top** con la externología definida de la siguiente forma:
si $f:(X,\tau,\epsilon)\to(X',\tau',\epsilon')$ y $g:(X,\tau,\epsilon)\to(X'',\tau'',\epsilon'')$ son aplicaciones exteriores, se define la externología

$$\epsilon_{P\{f,g\}}=\{A\in\tau_{P\{f,g\}}/\ \overline{f}^{-1}(A)\in\epsilon'' \text{ y } \overline{g}^{-1}(A)\in\epsilon'\}.$$

Evidentemente, si $A,B\in\epsilon_{P\{f,g\}}$ entonces $\overline{f}^{-1}(A\cap B)=\overline{f}^{-1}(A)\cap\overline{f}^{-1}(B)\in\epsilon''$ y $\overline{g}^{-1}(A\cap B)=\overline{g}^{-1}(A)\cap\overline{g}^{-1}(B)\in\epsilon'$. Además si $A\in\tau_{P\{f,g\}}$ y $B\in\epsilon_{P\{f,g\}}$ con $B\subseteq A$ entonces $\overline{f}^{-1}(B)\subseteq\overline{f}^{-1}(A)$ y $\overline{g}^{-1}(B)\subseteq\overline{g}^{-1}(A)$ por lo que $\overline{f}^{-1}(A)\in\epsilon''$

y $\overline{g}^{-1}(A) \in \epsilon'$ y en consecuencia $A \in \epsilon_{P\{f,g\}}$.

Por la definición de push out y por la de cilindro, es obvio que el cilindro conserva push outs. Por tanto, la categoría de los espacios exteriores con las cofibraciones generadas es una I-categoría generalizada.

4.4.2 Complejos de cadena sobre una categoría abeliana

Una homotopía de los complejos de cadena sobre una categoría abeliana fue estudiada por Kamps [38]. Aquí se usarán algunos resultados obtenidos por él para probar que los complejos de cadena sobre una categoría abeliana pueden ser dotados de una estructura de IP-categoría generalizada.

Dada una categoría abeliana $\mathcal{A}$, se define la categoría $\delta\mathcal{A}$ de complejos de cadena sobre $\mathcal{A}$ como aquella cuyos objetos son de la forma $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con X_n objetos de $\mathcal{A}$ y tal que para todo n entero existen morfismos $\delta_n : X_n \to X_{n-1}$ verificando $\delta_{n-1}\delta_n = 0$. En general los morfismos δ_n se denotarán simplemente por δ, quedando así la propiedad que verifican como $\delta^2 = 0$. Un morfismo $f : X \to Y$ entre dos complejos de cadena es del tipo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $f_n : X_n \to Y_n$ son morfismos de $\mathcal{A}$ verificando $\delta f_n = f_{n-1}\delta$.

Se define el funtor cilindro $I : \delta\mathcal{A} \to \delta\mathcal{A}$ para un complejo de cadena X como $(IX)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$ con

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta & 0 & -1 \\ 0 & \delta & 1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} : X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \to X_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus X_{n-2},$$

y para un morfismo entre complejos de cadena $f : X \to Y$ como

$$(If)_n = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 \\ 0 & 0 & f_{n-1} \end{pmatrix} : X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \to Y_n \oplus Y_n \oplus Y_{n-1}.$$

Las transformaciones naturales para un complejo de cadena X son definidas como sigue:

$$\iota_{0n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : X_n \to X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$$

$$\iota_{1n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : X_n \to X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1}$$

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \to X_n$$

$$\chi_{0n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{1n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma se tiene que $(I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon)$ es un cilindro generalizado sobre los complejos de cadena de la categoría abeliana $\mathcal{A}$.

Se define un funtor caminos $P : \delta\mathcal{A} \to \delta\mathcal{A}$ para un complejo de cadena X como $(PX)_n = X_n \oplus X_n \oplus X_{n+1}$ con

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ -1 & 1 & -\delta \end{pmatrix} : X_n \oplus X_n \oplus X_{n+1} \to X_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus X_n,$$

y para un morfismo entre complejos de cadena $f : X \to Y$ como

$$(Pf)_n = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 \\ 0 & 0 & f_{n+1} \end{pmatrix} : X_n \oplus X_n \oplus X_{n+1} \to Y_n \oplus Y_n \oplus Y_{n+1}.$$

Proposición 4.4.1. *El funtor P es adjunto a derecha del funtor I.*

Demostración. Dados dos complejos de cadena X e Y, si $\alpha : IX \to Y$ es un morfismo de complejos de cadena entonces
$\alpha_n = \begin{pmatrix} f_n & g_n & h_{n-1} \end{pmatrix} : X_n \oplus X_n \oplus X_{n-1} \to Y_n$. Además se tiene que $\alpha_n \delta = \delta \alpha_{n+1}$, esto es,

$$\begin{pmatrix} f_n & g_n & h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 & -1 \\ 0 & \delta & 1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n\delta & g_n\delta & -f_n + g_n - h_{n-1}\delta \end{pmatrix} =$$

$\delta\alpha_{n+1} = \delta \begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} & h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta f_{n+1} & \delta g_{n+1} & \delta h_n \end{pmatrix}$;
de donde se sigue que $f_n\delta = \delta f_{n+1}$, $g_n\delta = \delta g_{n+1}$ y $h_{n-1}\delta + \delta h_n = g_n - f_n$. Se concluye entonces que $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : X \to Y$ y $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}} : X \to Y$ son morfismos de complejos de cadena, mientras que $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ no tiene porqué serlo.

Se define $\gamma : Hom(I-, \sim) \to Hom(-, P \sim)$ para $\alpha : IX \to Y$ como
$$(\gamma(\alpha))_n = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix} : X_n \to Y_n \oplus Y_n \oplus Y_{n+1}$$

Obsérvese que $(\gamma(\alpha))_n(\delta) = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix} (\delta) = \begin{pmatrix} f_n\delta \\ g_n\delta \\ h_n\delta \end{pmatrix}$ y que $\delta(\gamma(\alpha))_{n+1} =$
$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ -1 & 1 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta f_{n+1} \\ \delta g_{n+1} \\ -f_{n+1} + g_{n+1} - \delta h_{n+1} \end{pmatrix}$. Por tanto, coinciden por las propiedades que verifica α en este sentido.

De forma similar se tiene la inversa $\gamma^{-1} : Hom(-, P \sim) \to Hom(I-, \sim)$ definida para $\beta : X \to PY$ por $(\gamma^{-1}(\beta))_n = \begin{pmatrix} f_n & g_n & h_{n-1} \end{pmatrix}$ donde
$\beta_n = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix}$.

Si $s : X' \to X$ y $r : Y \to Y'$ son morfismos de complejo de cadena se tiene que

$$(r\alpha Is)_n = (r_n)\begin{pmatrix} f_n & g_n & h_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_n & 0 & 0\\ 0 & s_n & 0\\ 0 & 0 & s_{n-1}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_nf_n & r_ng_n & r_nh_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_n & 0 & 0\\ 0 & s_n & 0\\ 0 & 0 & s_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_nf_ns_n & r_ng_ns_n & r_nh_{n-1}s_{n-1}\end{pmatrix},$$

por tanto $\gamma((r\alpha s)_n) = \begin{pmatrix} r_nf_ns_n\\ r_ng_ns_n\\ r_{n+1}h_ns_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_nf_n & r_ng_n & r_{n+1}h_n\end{pmatrix}(s_n) =$

$$\begin{pmatrix} r_n & 0 & 0\\ 0 & r_n & 0\\ 0 & 0 & r_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_n\\ g_n\\ h_n\end{pmatrix}(s_n) = (Pr\gamma(\alpha)s)_n.$$ □

Proposición 4.4.2. *La estructura de camino generalizado inducida por la adjunción de I con P viene dada por* $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$,

$$\iota = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \ \theta_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix} \ \text{y } \theta_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\end{pmatrix}$$

Demostración. Por la proposición 4.1.1 se tiene que

$$\rho_0 = \gamma^{-1}(1_P)\iota_{0P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\rho_1=\gamma^{-1}(1_P)\iota_{1P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\iota=\gamma(\rho)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta_0=\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{0P}).$$

Como $\gamma^{-1}(1_P)\chi_{0P}=$

$$\begin{pmatrix}1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{0P})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{0P})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en las anteriores matrices, $Id_{3\times3}$ representa la matriz identidad de orden 3×3 y $0_{3\times3}$ representa la matriz nula del mismo orden.

Finalmente $\theta_1=\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{1P})$. Como $\gamma^{-1}(1_P)\chi_{1P}=$

$$\begin{pmatrix}1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} & Id_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\gamma(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{1P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$\gamma^2(\gamma^{-1}(1_P)\chi_{1P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Definición 4.4.3. Dada la categoría $\delta\mathcal{A}$, un monomorfismo (epimorfismo) normal es un morfismo entre complejos de cadena tal que para todo n entero, f_n es sección (retracción) en $\mathcal{A}$.

Teorema 4.4 .1. *Las cofibraciones generadas por el cilindro generalizado $(I, \rho, \iota_\epsilon, \chi_\epsilon)$ son los monomorfismos normales.*

Demostración. Nótese que los complejos de cadena sobre categorías abelianas tienen push out, pues si $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$ son dos morfismos entre complejos de cadena, entonces $(P\{f, g\})_n = P\{f_n, g_n\}$ con $\delta = \delta \cup_\delta \delta$.

Sea $i : B \to A$ un morfismo entre complejos de cadena. Entonces, por lo dicho anteriormente, $\{Ii, \iota_0\} : P\{i, \iota_0\} \to IA$ viene definido por $\{Ii, \iota_0\}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i_n & 0 \\ 0 & 0 & i_{n-1} \end{pmatrix} : P\{\iota_0, i_n\} = A_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \to IA = A_n \oplus A_n \oplus A_{n-1}$.

Obsérvese que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (i_n) = \begin{pmatrix} i_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además el cuadrado conmutativo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (i_n) = \begin{pmatrix} i_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un push out:

Dado $s : A_n \to X$ y $\begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix} : B_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \to X$ verificando que $\begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (f) = (si_n)$ entonces $\begin{pmatrix} s & g & h \end{pmatrix} : A_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \to X$ es el único morfismo que verifica $\begin{pmatrix} s & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (s)$ y $\begin{pmatrix} s & g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} si_n & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix}$, de donde $\{Ii, \iota_0\}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i_n & 0 \\ 0 & 0 & i_{n-1} \end{pmatrix}$, y si existe una retracción $r : IA \to P\{\iota_0, i\}$, se tiene que $r_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : A_n \oplus A_n \oplus A_{n-1} \to A_n \oplus B_n \oplus B_{n-1}$. Entonces $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i_n & 0 \\ 0 & 0 & i_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}i_n & a_{13}i_{n-1} \\ a_{21} & a_{22}i_n & a_{23}i_{n-1} \\ a_{31} & a_{32}i_n & a_{33}i_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto $r_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ con $a_{22}i_n = 1$ y $a_{33}i_{n-1} = 1$, concluyéndose que para todo entero n, i_n es una sección.

Además, como $r : IA \to P\{\iota_0, i\}$ entonces $r_n\delta = \delta r_{n+1}$ y por tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 & -1 \\ 0 & \delta & 1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & -1 \\ 0 & a_{22}\delta & a_{22} \\ 0 & 0 & -a_{33}\delta \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & -i_n \\ 0 & \delta & 1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & -i_n a'_{33} \\ 0 & \delta a'_{22} & a'_{33} \\ 0 & 0 & -\delta a'_{33} \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que $a_{22}\delta = \delta a'_{22}$, $-1 = -i_n a'_{33}$, $a_{22} = a'_{33}$ y $-a_{33}\delta = -\delta a'_{33}$. Luego coinciden las retracciones a_{22} y a'_{33} para i_n, y se denotarán por $\alpha_n : A_n \to B_n$; además $\delta\alpha_{n+1} = \alpha_n\delta$. Se tiene pues que $\alpha : A \to B$ es para todo entero n una retracción de i_n y por tanto $i : B \to A$ es un monomorfismo normal.

Recíprocamente, si i es un monomorfismo normal, sea $\alpha : A \to B$ un morfismo de complejo de cadena tal que para todo entero n, $\alpha_n : A_n \to B_n$ es una retracción para i_n. Por lo hecho anteriormente se tiene que $r : IA \to P\{\iota_0, i\}$ definida por

$$r_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} : A_n \oplus A_n \oplus A_{n-1} \to A_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \text{ es una retracción}$$

para $\{Ii, \iota_0\} : P\{\iota_0, i\} \to IA$.
De forma similar se prueba que $r : IA \to P\{\iota_1, i\}$ definida por

$$r_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} : A_n \oplus A_n \oplus A_{n-1} \to B_n \oplus A_n \oplus B_{n-1} \text{ es una retracción}$$

para $\{Ii, \iota_1\} : P\{\iota_1, i\} \to IA$. Por el corolario 4.21, observando que la categoría de complejos de cadena sobre una categoría abeliana es también abeliana, y en particular aditiva y con push outs, se concluye el resultado. □

Asimismo, por los duales del teorema 4.2.1 y del corolario 4.2.1, así como por la adjunción existente entre el cilindro y los caminos definidos en la categoría de complejos de cadena $\delta\mathcal{A}$, se tiene que las fibraciones generadas coinciden con los epimorfismos normales.

En la categoría de los complejos de cadena sobre una categoría aditiva se puede definir una estructura de IP-categoría generalizada de forma similar a la descrita anteriormente para los complejos de cadena en una categoría abeliana. En este caso no se puede asegurar la existencia de push outs ni de pull backs, aunque por la adjunción de los funtores sí se da la conservación de los push outs por los cilindros y de los pull backs por los caminos. Los monomorfismos normales y los epimorfismos normales son los homomorfismos que verifican respectivamente las propiedades de extensión y elevación de homotopía, y por el teorema 4.2.1 y su dual, los axiomas **I4** y **P4** se verifican respectivamente para este tipo de morfismos. A pesar de esto, habrá que exigir la existencia de push outs y pull backs a la hora de definir respectivamente las cofibraciones y fibraciones generadas.

4.4.3 Homotopía Proyectiva sobre R-módulos

Dado un R-módulo M, y considerando el funtor olvido se tiene que M es un conjunto punteado por el cero. Se puede considerar entonces LM como el R-módulo libre generado por el conjunto punteado $(M, 0)$.

Es conocido que la categoría de R-módulos es una categoría abeliana, y en particular, aditiva. En esta categoría aditiva, independientemente de la lateralidad considerada, se define una construcción cocono (C', k', p') como sigue: El funtor C' se define para un R-módulo M como $C'M$, el R-módulo libre engendrado por el conjunto punteado $(M, 0)$; y para un homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$ por $C'f : C'M \to C'N$ como el único homomorfismo de R-módulos que verifica la conmutatividad $C'fi = jf$, donde $i : M \to C'M$ y $j : N \to C'N$ son las inclusiones conjuntistas de los respectivos conjuntos en sus R-módulos libres.

Las transformaciones naturales $k' : C' \to 1$ y $p' : C' \to (C')^2$ se definen para un R-módulo M como los únicos homomorfismos de R-módulos que verifican $k'i = 1$ y $p'i = ji$, donde $i : M \to C'M$ y $j : C'M \to (C')^2 M$ son las inclusiones de los respectivos conjuntos en sus R-módulos libres.

Nótese que $k'_{C'}p'i = k'_{C'}ji = i = 1i$ y por la propiedad universal de objeto libre, $k'_{C'}p' = 1$. Asimismo $C'k'p'i = C'k'ji = ik'i = i = 1i$. De donde $C'k'p' = 1$. Por otro lado $p'_{C'}p'i = p'_{C'}ji = sji$ y $C'p'p'i = C'p'ji = sp'i = sji$. De donde $p'_{C'}p' = C'p'p'$.

Por el teorema dual del teorema 4.2.3, se tienen unos caminos generalizados que no conservan pull backs ya que el funtor C' tampoco los conserva en general, aunque sí conserva sumas directas finitas.

El funtor caminos P es definido para un R-módulo M como el objeto $PM = M \oplus C'M$, y para un homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$ como $Pf = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & C'f \end{pmatrix} : M \oplus C'M \to N \oplus C'N$.

Las transformaciones naturales son de la forma:

$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} : M \oplus C'M \to M$,

$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & k' \end{pmatrix} : M \oplus C'M \to M$,

$\iota = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : M \to M \oplus C'M$,

$\theta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -p' \end{pmatrix} : M \oplus C'M \to M \oplus C'M \oplus C'M \oplus (C')^2 M$ y

$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p' \end{pmatrix} : M \oplus C'M \to M \oplus C'M \oplus C'M \oplus (C')^2 M$.

Obsérvese que el funtor libre C' conserva sumas directas. Aunque el funtor caminos no conserva pull backs, por el dual del teorema 4.2.2, tienen sentido los grupos de homotopía relativos a fibraciones de un objeto basado en el morfismo cero.

Por otro lado, el funtor caminos no conserva límites finitos, y en consecuencia se puede asegurar que no existe un funtor cilindro adjunto a izquierda de éste.

Teorema 4.4.2. *Dado un homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$, $f \simeq 0$ si y solo si f se factoriza a través de un R-módulo proyectivo.*

Demostración. Si $f \simeq 0$ entonces se factoriza a través de un R-módulo libre, y todo R-módulo libre es proyectivo.

Recíprocamente, sea $f = rs : M \to P \to N$, con P un R-módulo proyectivo. Entonces $k' : LN \to N$ es un epimorfismo de R-módulos pues por construcción $k'i = 1$ y por tanto k' es un homomorfismo suprayectivo. Por ser P proyectivo, existe un homomorfismo de R-módulos $r' : P \to LN$ tal que $k'r' = r$. Se tiene que $f = k'r's$ y por tanto $f \simeq 0$. □

Corolario 4.4.1. *Dos homomorfismos de R-módulos $f, g : M \to N$ son homótopos si y solo si su diferencia se factoriza a través de un R-módulo proyectivo.*

Demostración. Consecuencia inmediata del dual de la proposición 4.2.1 y del teorema 4.4.2 anterior. Obsérvese que si $< f, H_1 >: f \simeq g$ entonces $k'H_1 = g - f$. □

El teorema 4.4.2 anterior demuestra que el funtor caminos definido da origen a la teoría de homotopía proyectiva definida por Eckman y Hilton sobre R-módulos [32].

4.4.4 Homotopía Inyectiva

Análogamente a lo realizado en el ejemplo 4.4.3 anterior, la teoría de homotopía que se va a definir puede ser desarrollada tanto en la categoría de R-módulos a izquierda como en la de R-módulos a derecha. Por ello se fijará la lateralidad simplemente para usar la notación adecuada.

Sea Q_1 el grupo aditivo de los racionales módulo los enteros. Entonces se puede definir una construcción cono (C, k, p) en la categoría de R-módulos a derecha como sigue: para todo módulo M se define su cono como $CM = Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1)$, donde C' representa el funtor cocono definido en la homotopía proyectiva y Hom representa homomorfismos de grupo. Nótese que $Hom(M, Q_1)$ es un R-módulo a izquierda, pues el funtor $Hom(-, Q_1)$ es un módulo al lado contrario del módulo sobre el que actúa. Por consiguiente, en este caso, el funtor cono tiene como dominio y codominio los R-módulos a derecha, al intercambiar el funtor $Hom(-, Q_1)$ la lateralidad dos veces.

Para un morfismo entre R-módulos $f : M \to N$ se define su cono $Cf : Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1) \to Hom(C'Hom(N, Q_1), Q_1)$ como $Cf = (C'f^*)^*$. La transformación natural $k : M \to Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1)$ se define por $k(m)(\bigoplus_{i \in M_1} r_i \alpha_i) = \sum_{i \in M_1} r_i \alpha_i(m) = \sum_{i \in M_1} \alpha_i(mr_i)$, para todo $m \in M$, todo homomorfismo de grupos $\alpha_i : M \to Q_1$ y todo $r_i \in R$, $r_i = 0$ salvo para un número finito; donde $M_1 = Hom(M, Q_1)$.

La transformación natural p, definida desde
$Hom(C'Hom(Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1), Q_1), Q_1)$ en
$Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1)$, viene dada por $p(\alpha)(\bigoplus_{j \in M_1} r_j \beta_j) = \alpha(\bigoplus_{j \in M_1} r_j \widetilde{\beta}_j)$
para todo homomorfismo de grupos
$\alpha : C'Hom(Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1), Q_1) \to Q_1$ y toda $\bigoplus_{j \in M_1} r_j \beta_j$ de $C'Hom(M, Q_1)$, donde $\widetilde{\beta}_j : Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1) \to Q_1$ es un homomorfismo de grupos definido por $\widetilde{\beta}_j(\gamma) = \gamma(\beta_j)$ para todo homomorfismo de grupos $\gamma : C'Hom(M, Q_1) \to Q_1$. Nótese que el homomorfismo de grupos $\beta_j : M \to Q_1$ es un elemento del grupo libre $C'Hom(M, Q_1)$.

Obsérvese que para todo homomorfismo de grupos $\alpha : C'Hom(M, Q_1) \to Q_1$ y toda suma directa $\bigoplus_{j \in M_1} r_j \beta_j \in C'Hom(M, Q_1)$ se tiene
$(pkC(\alpha(\bigoplus_{j \in M_1} r_j \beta_j)) = p(kC(\alpha))(\bigoplus_{j \in M_1} r_j \beta_j) = kC(\alpha)(\bigoplus_{j \in M_1} r_j \widetilde{\beta}_j) =$
$\sum_{j \in M_1} \widetilde{\beta}_j(\alpha r_j) = \sum_{j \in M_1} \alpha r_j(\beta_j) = \sum_{j \in M_1} \alpha(r_j \beta_j) = \alpha(\bigoplus_{j \in M_1} r_j \beta_j)$.

Además $(pCk)(\alpha)(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\beta_j) = p(Ck(\alpha))(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\beta_j) =$
$Ck(\alpha)(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) = (C'k^*)^*(\alpha)(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) = \alpha C'k^*(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) =$
$\alpha(\bigoplus_{j\in M_1} k^*(r_j\widetilde{\beta}_j)) = \alpha(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j k) = \alpha(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\beta_j)$.
Nótese que para todo m de M_1, $r_j\widetilde{\beta}_j k(m) = \widetilde{\beta}_j(k(m)r_j) = k(m)(r_j\beta_j) = r_j\beta_j(m)$.

También se tiene $ppC(\alpha)(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\beta_j) = p\alpha(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) = \alpha(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\widetilde{\beta}}_j)$ y $pCp(\alpha)(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\beta_j) = (Cp(\alpha))(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) = (C'p^*)^*(\alpha)(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) =$
$\alpha C'p^*(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j) = \alpha(\bigoplus_{j\in M_1} p^*(r_j\widetilde{\beta}_j)) = \alpha(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\beta}_j p) = \alpha(\bigoplus_{j\in M_1} r_j\widetilde{\widetilde{\beta}}_j)$.
Nótese que para todo homomorfismos de grupo
$\alpha : C'Hom(Hom(C'Hom(M,Q_1),Q_1),Q_1) \to Q_1$ se tiene que $r_j\widetilde{\beta}_j p(\gamma) = \widetilde{\beta}_j(p(\gamma)r_j) = p(\gamma)(r_j\beta_j) = \gamma(r_j\widetilde{\beta}_j) = r_j\widetilde{\widetilde{\beta}}_j(\gamma)$.

Por tanto (C,k,p) es una estructura de cono sobre la categoría de los R-módulos a derecha. El funtor cono C no conserva push outs pero sí conserva sumas directas finitas, y por el teorema 4.2.3, se tiene una estructura de cilindro generalizado.

Proposición 4.4 .3. *Para todo R-módulo a derecha M, se tiene que $Hom(C'Hom(M,Q_1),Q_1)$ es un R-módulo inyectivo.*

Demostración. El funtor $M\otimes_R -$ es adjunto a izquierda del funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(M,-)$. Dado un R-módulo M, el R-módulo libre $C'M$ es isomorfo a $\bigoplus_{\alpha\in M} R_\alpha$, con $R_\alpha = R$.

Observando que el producto tensorial es distributivo respecto a la suma directa y que el producto tensorial por el anillo es isomorfo al grupo del módulo, se tiene que $\bigoplus\limits_M(R\otimes_R -) \cong \bigoplus\limits_M(-)$ es un funtor adjunto a izquierda del funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(C'M,-)$. De lo anterior se deduce que para todo R-módulo a izquierda A y todo grupo abeliano G existe un isomorfismo natural entre $Hom_{\mathbb{Z}}(\bigoplus\limits_M A, G)$ y $Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(C'M,G))$.

Sea $\nu : A \to B$ un monomorfismo de R-módulos a izquierda, y sea $\alpha : A \to Hom_{\mathbb{Z}}(C'M,Q_1)$, entonces por el isomorfismo natural ya mencionado, existe un homomorfismo de grupos $\widetilde{\alpha} : \bigoplus_M A \to Q_1$. Al ser $\nu : A \to B$ un homomorfismo inyectivo, se tiene que $\bigoplus_M \nu : \bigoplus_M A \to \bigoplus_M B$ también es un homomorfismo de grupos inyectivo. Al ser Q_1 divisible (y por tanto inyectivo) existe $\widetilde{\beta} : \bigoplus_M B \to Q_1$ tal que $\widetilde{\beta} \bigoplus_M \nu = \widetilde{\alpha}$. Usando de nuevo el isomorfismo natural, existe un homomorfismo de R-módulos a izquierda $\beta : B \to Hom_{\mathbb{Z}}(C'M, Q_1)$ verificando $\widetilde{\beta\nu} = \widetilde{\beta} \bigoplus_M \nu = \widetilde{\alpha}$ y por tanto $\beta\nu = \alpha$.

Esta proposición también es cierta si M es un R-módulo a izquierda. La demostración es análoga observando que el funtor $- \otimes_R M$ es también adjunto a izquierda de $Hom_{\mathbb{Z}}(M, -)$. En particular $Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1)$ es un R-módulo inyectivo con la misma lateralidad que M. □

Teorema 4.4.3. *Un homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$ es nulhomótopo si y solo si se factoriza a través de un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Si f es nulhomótopo entonces existe un homomorfismo $F : Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1) \to N$ tal que $f = Fk$ y por la proposición 4.4.3 se concluye el resultado.

Recíprocamente, si $f = rs : M \to I \to N$ con I un R-módulo inyectivo, entonces $k : M \to Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1)$ es un homomorfismo inyectivo de R-módulos, y por tanto existe un homomorfismo
$s' : Hom(C'Hom(M, Q_1), Q_1) \to I$ tal que $s'k = s$, de donde $f = rs = rs'k$ y por tanto nulhomótopa.

Obsérvese que k es efectivamente un homomorfismo inyectivo pues, si suponemos $k(m) = 0$ para $m \in M$ y $m \neq 0$ entonces se puede obtener, por ser Q_1 inyectivo, un homomorfismo $\alpha : M \to Q_1$ tal que $\alpha(m) \neq 0$:

Por ejemplo, si el orden de m es p finito, entonces se puede usar el homomorfismo inclusión del grupo cíclico $i : \mathbb{Z}_p \to M$ con $i(1) = m$, y el homomorfismo de grupos $\beta : \mathbb{Z}_p \to Q_1$ generado por $\beta(1) = \frac{1}{p}$ para obtener $\alpha : M \to Q_1$ tal que $\alpha(m) = \frac{1}{p}$. En caso de que m no tenga orden finito, se considera el homomorfismo inclusión $i : \mathbb{Z} \to M$ con $i(1) = m$ y el homomorfismo $\beta : \mathbb{Z} \to Q_1$

generado por $\beta(1) = q \neq 0$, donde $q \in Q_1$. En este caso $\alpha(m) = q$.

Entonces $k(m)(\alpha) = \alpha(m) \neq 0$ y por tanto $k(m) \neq 0$.

□

Corolario 4.4.2. *Dados dos homomorfismos de R-módulos $f, g : M \to N$, $f \simeq g$ si y solo si $g - f$ se factoriza a través de un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la proposición 4.2.1. □

De esta forma se obtiene la teoría de homotopía inyectiva definida por Eckman y Hilton sobre los R-módulos, mediante un cilindro generalizado que permite la obtención de grupos de homotopía relativos a la cofibración basados en el homomorfismo cero.

4.4.5 Homotopía en grupos abelianos

La homotopía desarrollada por L.J. Hernández [30] en la categoría de grupos abelianos también tiene asociada una estructura de IP-categoría generalizada.

Sea R un anillo unitario. Se define un funtor cono C en la categoría de los grupos abelianos como sigue: para un grupo abeliano G, el cono es $CG = G \otimes_{\mathbb{Z}} R$, y para un homomorfismo de grupos $f : G \to H$, $Cf = f \otimes 1_R : G \otimes R \to H \otimes R$. La transformación natural $k : G \to G \otimes R$ se define por $k(g) = g \otimes 1$, donde 1 es el elemento identidad de R; y la transformación natural $p : G \otimes R \otimes R \to G \otimes R$, por $p(g \otimes r \otimes s) = g \otimes (rs)$.

Entonces (C, k, p) es una construcción cono en la categoría de los grupos abelianos, que conserva push outs pues el funtor C es adjunto a izquierda del funtor C' definido por $C'G = Hom_{\mathbb{Z}}(R, G)$. Por el teorema 4.2.3 se obtiene una construcción de cilindro generalizado que conserva push outs, y por el corolario 4.2.1 la categoría de los grupos abelianos tiene estructura de I-categoría generalizada usando como cofibraciones los homomorfismos de grupos que verifican la P.E.H.

Por la proposición 4.2.3, también esta categoría es una P-categoría generalizada con funtores adjuntos I y P compatibles con la estructura de forma que se obtiene una IP-categoría generalizada.

Definición 4.4.4. Dado un anillo unitario R, un R-casi módulo es un grupo abeliano M con un producto externo $\cdot : R \times M \to M$ verificando las propiedades **M1**, **M2** y **M3** para elementos cualesquiera $m_1, m_2 \in M$ y $r_1, r_2 \in R$:

M1: $r_1(m_1 + m_2) = r_1m_1 + r_2m_2$

M2: $(r_1 + r_2)m_1 = r_1m_1 + r_2m_1$

M3: $1m_1 = m_1$

Nótese que si se verificase la propiedad **M4**: $(r_1r_2)m_1 = r_1(r_2m_1)$, entonces se tendría que M sería un R-módulo a izquierda.

En los R-casi módulos no se especifica la lateralidad pues a cualquier R-casi módulo se le puede cambiar isomórficamente de forma natural la operación $mr = rm$.

Proposición 4.4.4. *Un grupo abeliano M es un R-casi módulo si y solo si 1_M es nulhomótopo.*

Demostración. En general, si un morfismo f es nulhomótopo respecto a una construcción cono (C, k, p) entonces f también es nulhomótopo respecto a cualquier cocono engendrado por un funtor C' adjunto a derecha de C. Basta aplicar el isomorfismo natural de adjunción γ a la nulhomotopía. Por ello se usará en este caso, para la demostración, el funtor cono $- \otimes R$.

Si 1_M es nulhomótopo entonces existe un homomorfismo de grupos $h : M \otimes R \to M$ verificando que $hk_M = 1_M$. Se define el producto externo para todo $m \in M$ y $r \in R$ por $mr = h(m \otimes r)$:

M1: $(m_1 + m_2)r = h((m_1 + m_2) \otimes r) = h(m_1 \otimes r + m_2 \otimes r) = h(m_1 \otimes r) + h(m_2 \otimes r) = m_1r + m_2r$.

M2: $m(r_1 + r_2) = h(m \otimes (r_1 + r_2)) = h(m \otimes r_1 + m \otimes r_2) = h(m \otimes r_1) + h(m \otimes r_2) = mr_1 \otimes mr_2$

M3: $m1 = h(m \otimes 1) = hk(m) = 1_M(m) = m$

Sea M un R-casi módulo. Se define $h : M \otimes R \to M$ por $h(m \otimes r) = mr$. Es fácil comprobar, análogamente a lo anterior, que h está bien definida y que $hk_M = 1_M$. □

Teorema 4.4.4. *Un homomorfismo de grupos $f : G \to H$ es nulhomótopo si y solo si se factoriza a través de un R-casi módulo.*

Demostración. Si f es nulhomótopo, entonces f se factoriza mediante una nulhomotopía $F : G \otimes R \to H$, donde $f = Fk$. La transformación natural $p_G : G \otimes R \otimes R \to G \otimes R$ hace que $G \otimes R$ sea un R-casi módulo.

Recíprocamente, si $f = rs : G \to M \to H$ y M es un R-casi módulo, por la proposición 4.4.4 anterior existe $H : M \otimes R \to M$ tal que $Hk_M = 1$. Entonces $rs = rHks = rH(s \otimes 1_R)k$ y por tanto f es nulhomótopa. □

Corolario 4.4.3. *Dados dos homomorfismos de grupos $f, g : G \to H$, $f \simeq g$ si y solo si $g - f$ se factoriza a través de un R-casi módulo.*

4.4.6 Homotopía en R-casi módulos

Los R-casi módulos con los homomorfismos de grupo que conservan el producto externo forman una categoría. Observando que el anillo unitario R tiene estructura de R-casi módulo con su producto interno, se puede definir un producto tensorial similar al de los R-módulos, esto es, el grupo abeliano libre generado por $M \times R$ con las relaciones $(m_1 + m_2) \otimes r - m_1 \otimes r - m_2 \otimes r$, $m \otimes (r_1 + r_2) - m \otimes r_1 - m \otimes r_2$ y $ms \otimes r - m \otimes sr$, donde $m_1, m_2, m \in M$ y $r_1, r_2, r, s \in R$. Nótese que $M \otimes R$ es un R-casi módulo con la operación $(m \otimes r)s = ms \otimes r = m \otimes sr$.

De esta forma surge una construcción cono (C, k, p) análoga a la definida en el ejemplo 4.4.5 anterior, que da origen a un cilindro generalizado en la categoría de los R-casi módulos. Este funtor cono $- \otimes R$ también tiene un adjunto a derecha definido por $Hom(R, -)$, donde Hom representa los homomorfismos de R-casi módulos. Nótese que $Hom(R, M)$ es un R casi módulo con la operación $gs(r) = g(sr)$ para homomorfismos de R-casi módulos $g : R \to M$ y $s, r \in R$.

Se concluye que, siguiendo un proceso similar al realizado con los grupos abelianos, la categoría de los R-casi módulos tiene una estructura de IP-categoría generalizada.

Proposición 4.4.5. *Un R-casi módulo M es un R-módulo si y solo si 1_M es nulhomótopo.*

Demostración. Si 1_M es nulhomótopo entonces existe $F : M \otimes R \to M$ tal que $Fk = 1_M$. Se define un producto externo para todo $m \in M$ y $r \in R$ mediante $mr = F(m \otimes r)$. Entonces **M1, M2** y **M3** se verifican de forma análoga al caso de los grupos abelianos. Para **M4** se tiene que $m(rs) = F(m \otimes rs) = F(mr \otimes s) = (mr)s$.

Recíprocamente, si M es un R-módulo, se define $F : M \otimes R \to M$ por $F(m \otimes r) = mr$. Por lo dicho anteriormente, es fácil ver que F está bien definida y que $Fk = 1_M$. □

Teorema 4.4.5. *Un homomorfismo de R-casi módulos $f : M \to N$ es nulhomótopo si y solo si se factoriza a través de un R-módulo.*

Demostración. Si f es nulhomótopo entonces existe $F : M \otimes R \to N$ tal que $Fk = f$. En la proposición anterior se prueba que M es R-módulo si y solo si existe un homomorfismo de R-casi módulos $F : M \otimes R \to M$ verificando $Fk = 1_M$. Por tanto $p_M : M \otimes R \otimes R \to M \otimes R$ hace que $M \otimes R$ sea un R-módulo.

Recíprocamente, si $f = rs : M \to K \to N$, donde K es un R-módulo, entonces existe $H : K \otimes R \to K$ tal que $Hk = 1$ y se concluye que $f = rH(s \otimes 1)k$. □

Corolario 4.4.4. *Dados dos homomorfismos de R-casi módulos $f, g : M \to N$, entonces $f \simeq g$ si y solo si $g - f$ se factoriza a través de un R-módulo.*

4.4.7 Homotopía en R-módulos

La homotopía definida en el ejemplo 4.4.5 para grupos abelianos puede ser extendida a la categoría de R-módulos, donde R es un anillo conmutativo y unitario.

Sea S un anillo unitario y $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos conservando la unidad, $f(1) = 1$. Nótese que los grupos abelianos son $\mathbb{Z}$-módulos y el homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to S$ viene definido por $f(z) = z1 = 1 + \overset{(z}{\dots} + 1$.

En la categoría de los R-módulos se puede definir para todo módulo M el producto tensorial $M \otimes_R S$ teniendo en cuenta que el anillo S es un R-módulo con la operación $rs = f(r)s$. Como el anillo R es conmutativo, entonces $M \otimes_R S$ es también un R-módulo. Se obtiene así una construcción cono (C, k, p) sobre los R-módulos, que da origen a un cilindro generalizado. También este funtor cono $- \otimes_R S$ tiene un funtor adjunto a derecha $Hom_R(S, -)$, que dota a la categoría de los R-módulos de una estructura de IP-categoría generalizada.

De forma análoga a lo que sucedía en los grupos abelianos, un R-módulo es un S-casi módulo si y solo si el homomorfismo identidad es nulhomótopo. Por lo que un homomorfismo entre R-módulos es nulhomótopo si y solo si se factoriza a través de un R-módulo S-casi módulo. En consecuencia, dos homomorfismos entre R-módulos son homótopos si y solo si su diferencia se factoriza a través de un R-módulo S-casi módulo.

Bibliografía

[1] H.J. Baues, *Obstruction theory on homotopy classification of maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 628, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[2] ———, *Algebraic homotopy*, Cambridge University Press, 1989.

[3] H.J. Baues and A. Quintero, *On the locally finite chain algebra of a proper homotopy type*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **3** (1996), no. 2, 161–175.

[4] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra. 1. Basic category theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[5] ———, *Handbook of categorical algebra. 2. Categories and structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] ———, *Handbook of categorical algebra. 3. Categories of sheaves*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 52, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[7] E.M. Brown, *Proper homotopy theory in simplicial complexes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 375, Springer-Verlag, Berlin, 1974, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973).

[8] K.S. Brown, *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1974), 419–458.

[9] Z. Čerin, *On various relative proper homotopy groups*, Tsukuba J. Math. **4** (1980), 177–202.

[10] F.J. Díaz, J. García-Calcines, and S. Rodríguez-Machín, *Homotopía algebraica: descripción e interrelación de las principales teorías*, Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza **5** (1994).

[11] ______, *Grupos en categorías de homotopía*, Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza **6** (1995).

[12] ______, *Homotopía axiomática*, Secretariado de Publicaciones. Universidad de La Laguna, 1996, Simposium Internacional de la Matemática Actual.

[13] ______, *Un estudio en homotopía aditiva*, Secretariado de Publicaciones. Universidad de La Laguna, 1996, Simposium Internacional de la Matemática Actual.

[14] F.J. Díaz, J. Remedios, and S. Rodríguez-Machín, *Equivariant action of the generalizaed homotopy group*, Mathematik-Arbeitspapiere **54** (2000), 149–153, CatMAT 2000, Proceedings of the Conference Categorical Methods in Algebra and Topology.

[15] ______, *Generalized homotopy in C-categories*, Extracta Mathematicae **16** (2001), no. 3, 393–403.

[16] ______, *Pointed and generalized exact homotopy sequence*, Barcelona 2001 EuroPhD Topology Conference, Proceedings, 2001.

[17] F.J. Díaz and S. Rodríguez-Machín, *Una estructura cónica para la homotopía*, Monografías de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza **15** (2000).

[18] ______, *Homotopy theory induced by cones*, Extracta Mathematicae **16** (2001), no. 2, 287–292.

[19] T. Dieck, K.H. Kamps, and D. Puppe, *Homotopietheorie*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 157, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[20] B. Eckmann, *Homotopie et dualité*, Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956 (1957), 41–53, Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris.

[21] B. Eckmann and P.J. Hilton, *Groupes d'homotopie et dualité*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 271–281.

[22] ______, *Group-like structures in general categories. I. Multiplications and comultiplications*, Math. Ann. **145** (1961/1962), 227–255.

[23] S. Eilemberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[24] P. Freyd, *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*, Harper's Series in Modern Mathematics, Harper & Row, Publishers, New York, 1964.

[25] J.M. García-Calcines, M. García-Pinillos, and L.J. Hernández-Paricio, *A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 221–242.

[26] M. Golasiński and G. Gromadzki, *The homotopy category of chain complexes is a homotopy category*, Colloq. Math. **47** (1982), no. 2, 173–178, (1983).

[27] S. Halperin and C. Watkiss, *Relative homotopical algebra*, Publ. IRMA Lille.

[28] A. Heller, *Stable homotopy categories*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 28–63.

[29] ______, *Abstract homotopy in categories of fibrations and the spectral sequence of Eilenberg and Moore*, Illinois J. Math. **16** (1972), 454–474.

[30] L.J. Hernández-Paricio, *An example of homotopy theory in abelian groups. (Spanish)*, Collect. Math. **33** (1982), no. 2, 161–176.

[31] P. Hilton, *Homotopy theory of modules and duality*, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO (1958), 273–281, Symposium internacional de topología algebraica, Mexico City.

[32] ______, *Homotopy theory and duality*, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1965.

[33] P.J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1971.

[34] P.J. Huber, *Homotopy theory in general categories*, Math. Ann. **144** (1961), 361–385.

[35] ______, *Standard constructions in abelian categories*, Math. Ann. **146** (1962), 321–325.

[36] K.H. Kamps, *Kan-bedingungen und abstrakte homotopiethoerie*, Math. Z. **124** (1972), 215–236.

[37] ______, *Fundamentalgruppoid und homotopien*, Arch. Math. (Basel) **24** (1973), 456–460.

[38] ______, *Note on normal sequences of chain complexes*, Colloq. Math. **39** (1978), no. 2, 225–227.

[39] K.H. Kamps and T. Porter, *Abstract homotopy and simple homotopy theory*, World Scientific, Singapore, 1997.

[40] D.M. Kan, *Abstract homotopy. I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **41** (1955), 1092–1096.

[41] ———, *Abstract homotopy. II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 255–258.

[42] H. Kleisli, *Homotopy theory in abelian categories*, Canad. J. Math. **14** (1962), 139–169.

[43] ———, *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 544–546.

[44] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[45] S. Mardešić and J. Segal, *Shape theory. The inverse system approach*, North-Holland Mathematical Library, vol. 26, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.

[46] E. G. Minian, *Generalized cofibration categories and global actions*, K-Theory **20** (2000), no. 1, 37–95, Special issues dedicated to Daniel Quillen on the occasion of his sixtieth birthday, Part I.

[47] E.G. Minian, *Λ-cofibration categories and the homotopy categories of global actions and simplicial complexes*, Appl. Categ. Structures **10** (2002), no. 1, 1–21.

[48] E. Padrón and S. Rodríguez-Machín, *Model-additive categories*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. (1990), no. 24, 465–474, Fourth Conference on Topology (Sorrento, 1988).

[49] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, London Mathematical Society Monographs, vol. 3, Academic Press, London-New York, 1973.

[50] V. Puppe, *A remark on "homotopy fibrations"*, Manuscripta Math. **12** (1974), 113–120.

[51] D.G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[52] ———, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 205–295.

[53] J. Remedios and S. Rodríguez-Machín, *Generalized homotopy theory*, Extracta Mathematicae **16** (2001), no. 2, 279–285.

[54] S. Rodríguez-Machín, *Homotopy theories in additive categories are homotopies of Δ-groups*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **39** (1990), no. 1, 47–57.

[55] M. Sanz, *Homotopía en R-casi módulos*, Ph.D. thesis, Universidad de Zaragoza, Dpto. Geometría y Topología, 1980.

[56] J.A. Seebach Jr., *Injectives and homotopy*, Illinois J. Math. **16** (1972), 446–453.

[57] A. Strøm, *The homotopy category is a homotopy category*, Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 435–441.

[58] ———, *Note on cofibrations*, Math Scand. **19** (1966), 11–14.

[59] ———, *Note on cofibrations II*, Math Scand. **22** (1968), 130–142.

[60] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy. I*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213–245.

[61] ———, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 51–110.

[62] ———, *Algebraic homotopy theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2 (1952), 354–357, Amer. Math. Soc. Providence, R. I.

Josué Remedios Gómez
Departamento de Matemática Fundamental
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna
España

e-mail: jremed@ull.es