UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

La transformación integral de Chébli–Trimèche

Autor: Betancor Ortiz, Juan Diego

Directores: Jorge Betancor Pérez
y José Manuel Méndez Pérez

Departamento de Análisis Matemáticos

D. JORGE BETANCOR PÉREZ y D. JOSÉ MANUEL MÉNDEZ PÉREZ, Catedráticos de Análisis Matemático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna,

CERTIFICAN:

Que la presente memoria titulada

"LA TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE CHÉBLI–TRIMÈCHE"

ha sido realizada, bajo nuestra dirección, por el licenciado

D. Juan Diego Betancor Ortiz

y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Y para que así conste a los efectos oportunos, firmamos la presente certificación en La Laguna, a 28 de mayo de 2002.

Fdo.: Jorge Betancor Pérez   Fdo.: José Manuel Méndez Pérez

Índice

Prólogo.

El objetivo de esta Memoria es estudiar diferentes aspectos en relación con la transformación integral de Fourier generalizada y la operación de convolución asociadas a una clase de hipergrupos conocidos como de Chébli–Trimèche.

La noción de hipergrupo surge con los trabajos clásicos de Fröbenius, alrededor de 1900. Los estudios de F. Marty y H.S. Wall, en los años 30, recogen los orígenes de los hipergrupos algebraicos abstractos, mientras que el desarrollo del análisis armónico sobre hipergrupos comienza con las investigaciones de J. Delsarte ([42]) y B.M. Levitan entre 1938 y finales de la década de los 40. Años más tarde, en los 70, con objeto de desarrollar el análisis armónico estándar, C.F. Dunkl ([43]), R.J. Jewet ([74]) y R. Spector ([99]), independientemente, precisan la definición de hipergrupo. Como cabe esperar, los conjuntos de axiomas presentados por cada uno de ellos no coinciden en su totalidad. La monografía de W. Bloom y H. Heyer [32], junto a un elevado número de trabajos (véase, por ejemplo, [52], [81], [92], [96] y [106]), ha puesto de manifiesto las aplicaciones de los hipergrupos en muy diferentes e importantes tópicos de la matemática.

Recordamos a continuación la definición hoy admitida de hipergrupo ([74]).

Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y no vacío. Denotamos por $M^b(X)$ el espacio de las medidas de Borel complejas y acotadas sobre X. Un hipergrupo es un par $(X, *)$ donde $*$ es una aplicación, usualmente llamada convolución, bilineal y separadamente continua de $M^b(X) \times M^b(X)$ en $M^b(X)$ y que preserva el espacio de las medidas de probabilidad $M^1(X)$, esto es, $M^1(X) \times M^1(X) \subset M^1(X)$. Se verifican además las siguientes propiedades

H_1.- $\delta_x * (\delta_y * \delta_z) = (\delta_x * \delta_y) * \delta_z,\ x, y, z \in X$, donde δ_x denota la funcional de Dirac soportada en el punto x, para cada $x \in X$.

H_2.- Existe $e \in X$ tal que $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x,\ x \in X$.

H_3.- Existe una involución continua $x \to x^-$ de X tal que $e \in \mathrm{sop}(\delta_x * \delta_y)$ si, y sólo si, $x = y^-$, y la extensión canónica de esta involución a $M^b(X)$ satisface $(\delta_x * \delta_y)^- = \delta_{x^-} * \delta_{y^-},\ x, y \in X$.

H_4.- La aplicación $(x, y) \to \delta_x * \delta_y$ es débilmente continua de $X \times X$ en $M^1(X)$.

H_5.- El soporte de $\delta_x * \delta_y$ es compacto y la aplicación $(x, y) \to \mathrm{sop}(\delta_x * \delta_y)$ de $X \times X$ en el conjunto de los subconjuntos compactos de X es continua, donde este espacio es dotado de la topología de Michael ([108, pág. 45]).

Se dice que $(X, *)$ es conmutativo cuando $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x,\ x, y \in X$. Si $x^- = x$, para cada $x \in X$, se dice que el hipergrupo $(X, *)$ es hermítico y, en ese caso, es siempre conmutativo.

Necesitamos también algunas otras definiciones. Una medida m sobre X se llama de Haar para $(X,*)$ si, para cada $x \in X$, $m*\delta_x = \delta_x*m = m$. Una función ϕ continua y acotada en X es un carácter de $(X,*)$ cuando $\phi(x^-) = \overline{\phi(x)}$, $x \in X$, y $\int_X \phi d(\delta_x * \delta_y) = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in X$.

La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ asociada al hipergrupo $(X,*)$ se define para una medida $\mu \in M^b(X)$ por

$$\mathcal{F}(\mu)(\phi) = \int_X \overline{\phi(x)}\ d\mu(x), \quad \phi \text{ carácter de } (X,*).$$

Nótese que no se exige, en general, ninguna estructura algebraica en el espacio topológico X.

El álgebra de las medidas sobre un grupo X con identidad es un ejemplo de hipergrupo. La convolución $*$ se define por $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$, $x, y \in X$, y la involución $x^- = x^{-1}$, $x \in X$, donde x^{-1} representa el inverso de x en el grupo X.

Otro ejemplo interesante de hipergrupo aparece en la teoría de probabilidad y se debe a J.F.C. Kingman ([75]). Consideramos dos variables aleatorias independientes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sobre $\mathbf{R}^2$, con módulos X e Y, y con direcciones uniformemente distribuidas. La suma $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ es una variable aleatoria con dirección uniformemente distribuida, su módulo Z sin embargo es un número aleatorio en el intervalo $[|X-Y|, X+Y]$. Si los módulos de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ tienen distribuciones de probabilidad $\mu, \nu \in M_1(\mathbf{R}_+)$, respectivamente, entonces Z tiene una distribución de probabilidad dependiendo de μ y ν que denotamos por $\mu \circ \nu$. La operación $\circ$ se extiende a $M^b(\mathbf{R}_+)$. De este modo $(M^b(\mathbf{R}_+), \circ)$ es un hipergrupo. Los caracteres son las funciones $\phi_y(x) = J_0(xy)$, $y, x \geq 0$. Aquí J_α, como es usual, representa la función de Bessel de primera especie y de orden α. Se tiene la siguiente fórmula producto

$$\int_0^\infty \phi_y(x)\ d(\mu \circ \nu) = \int_0^\infty \phi_y(x)\ d\mu \int_0^\infty \phi_y(x)\ d\nu, \quad y \in [0,\infty).$$

Esto hace que el sustituto correcto de la función característica de la variable aleatoria $\mathbf{X}$ sea $\Phi_{\mathbf{X}}(y) = \int_0^\infty \phi_y d\mu$. Nótese que esta función $\Phi_{\mathbf{X}}$ no es más que la transformada de Hankel de orden 0 de la medida μ. Se tiene también la siguiente propiedad fundamental

$$\Phi_{\mathbf{Z}} = \Phi_{\mathbf{X}}\ \Phi_{\mathbf{Y}},$$

cuando $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son variables aleatorias independientes sobre $[0,\infty)$.

J.F.C. Kingman realmente describe, sin usar nunca la palabra hipergrupo, un continuo de hipergrupos hermíticos $([0,\infty), \circ_\alpha)$. El elemento identidad es 0 y los caracteres, para cada $\alpha \geq -1/2$, vienen dados por las funciones

$$\phi_y^{(\alpha)}(x) = 2^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)\ (yx)^{-\alpha}\ J_\alpha(yx), \quad x \in [0,\infty),$$

cuando $y \in [0,\infty)$.

No existe en el espacio topológico base $[0,\infty)$ ninguna estructura algebraica útil. Sin embargo J.F.C. Kingman pudo definir caminos aleatorios y movimiento Browniano, y obtener una ley de los grandes números, un teorema del límite central, un teorema de recurrencia, así como caracterizaciones para las distribuciones infinitamente divisibles y estables.

El trabajo de J.F.C. Kingman sirvió de punto de partida e inspiración a numerosos estudios posteriores (véase, por ejemplo, [10], [52], [98], [104], [117] y [118]).

La transformada de Fourier asociada al hipergrupo de Kingman de orden α coincide con la conocida transformación integral de Hankel h_α, que se define sobre el espacio $L_1((0,\infty), x^{2\alpha+1}dx)$ por

$$\begin{aligned} h_\alpha(f)(y) \quad &= \quad \int_0^\infty (xy)^{-\alpha}\ J_\alpha(xy)\ f(x)\ x^{2\alpha+1}\ dx, \\ &\qquad y\in(0,\infty),\ \ f\in L_1((0,\infty),x^{2\alpha+1}dx). \end{aligned}$$

La convolución $\circ_\alpha$ fue investigada por I.I. Hirschman ([71]), D.T. Haimo ([67]) y F.M. Cholewinski ([39]) en los espacios $L_p((0,\infty), x^{2\alpha+1}dx)$, $1\le p<\infty$, y por A.L. Schwartz ([95]) sobre medidas acotadas en $[0,\infty)$.

En particular la convolución $f\circ_\alpha g$ de $f,g\in L_1((0,\infty),x^{2\alpha+1}dx)$ toma la forma

$$(f\circ_\alpha g)(x) = \int_0^\infty f(y)\ ({}_\alpha\tau_x g)(y)\ \frac{y^{2\alpha+1}}{2^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)}\ dy, \quad x\in[0,\infty),$$

donde el operador de traslación ${}_\alpha\tau_x,\ x\in[0,\infty)$, se define mediante

$$({}_\alpha\tau_x g)(y) = \begin{cases} \int_0^\infty D_\alpha(x,y,z)\ g(z)\ \frac{z^{2\alpha+1}}{2^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)}\ dz, & x,y\in(0,\infty) \\ g(y), & x=0,\ y\in(0,\infty) \end{cases}.$$

Aquí $D_\alpha(x,y,z),\ x,y,z\in(0,\infty)$, es el núcleo de Delsarte y viene dado por

$$D_\alpha(x,y,z) = (2^\alpha\Gamma(\alpha+1))^2\int_0^\infty (xt)^{-\alpha}J_\alpha(xt)(yt)^{-\alpha}J_\alpha(yt)(zt)^{-\alpha}J_\alpha(zt)t^{2\alpha+1}dt,$$
$$x,y,z\in(0,\infty).$$

La transformación integral de Hankel fue estudiada en espacios de distribuciones de crecimiento lento y rápido por A.H. Zemanian ([113], [114] y [115]), G. Altenburg ([1]) y J.M. Méndez ([85] y [86]), entre otros. La convolución $\circ_\alpha$ de Hankel distribucional ha sido definida por J.J. Betancor e I. Marrero ([25] y [83]) y J.J. Betancor y L. Rodríguez–Mesa ([27] y [28]).

El hipergrupo de Kingman es un caso particular de una clase de hipergrupos sobre $X=[0,\infty)$ conocidos como hipergrupos de Chébli–Trimèche en honor de H. Chébli y K. Trimèche, quienes han estudiado sus principales propiedades. Como muestra [53, Corollary 3.8] muchos de los hipergrupos definidos sobre $[0,\infty)$ están asociados a operadores diferenciales de segundo orden y son del tipo Chébli–Trimèche. Una clasificación completa de los hipergrupos unidimensionales, y en particular de los hipergrupos sobre $[0,\infty)$, puede encontrarse en [94] (véase también [41] y [116]).

La estructura de convolución de un hipergrupo de Chébli–Trimèche está asociada a un operador diferencial de segundo orden que toma la forma

$$\Delta = \Delta_A = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{A'(x)}{A(x)}\frac{d}{dx},$$

donde la función A satisface las siguientes propiedades:

(i) $A(x) = x^{2\alpha+1}B(x),\ x \in [0,\infty)$, donde $\alpha > -1/2$ y $B \in C^\infty(\mathbf{R})$ es par tal que $B(0) = 1$.

(ii) A es creciente y no acotada en $(0,\infty)$.

(iii) $\frac{A'}{A}$ es una función decreciente y C^∞ sobre $(0,\infty)$.

Nótese que esto implica que existe $\lim_{x\to+\infty}\frac{A'(x)}{A(x)}$. En lo que sigue denotaremos por ρ el número definido por

$$\rho = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{A'(x)}{A(x)}.$$

(iv) Existen $\eta, M > 0$ y una función $\mathcal{C} \in C^\infty(0,\infty)$ tal que $\mathcal{C}^{(k)}$ es acotada sobre $(0,\infty)$, para cada $k \in \mathbf{N}$, siendo, cuando $x \in (M,\infty)$,

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \begin{cases} 2\rho + e^{-\eta x}\mathcal{C}(x), & \text{si } \rho > 0 \\ \frac{2\alpha+1}{x} + e^{-\eta x}\mathcal{C}(x), & \text{si } \rho = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(v) Existe $\delta > 0$ tal que $\left(\frac{B'(x)}{B(x)}\right)' = e^{-\delta x}D(x),\ x \in [0,\infty)$, donde D es una función continua y acotada sobre $[0,\infty)$.

Una función A verificando las propiedades anteriores se conoce como función de Chébli.

Denotamos por $([0,\infty),\sharp_\Delta)$ el hipergrupo de Chébli–Trimèche asociado al operador Δ (o lo que es lo mismo, a la función A). Este hipergrupo es conmutativo con elemento neutro 0 y con la identidad como involución. La medida de Haar para el hipergrupo en cuestión es $dm = A(x)dx$. La medida de probabilidad $\delta_x\sharp_\Delta\delta_y$ es absolutamente continua respecto de m y tiene su soporte contenido en el intervalo $[|x-y|, x+y]$, esto es, existe una función $D_\Delta(x,y,z) \geq 0,\ z > 0$, para la cual $d(\delta_x\sharp\delta_y)(z) = D_\Delta(x,y,z)A(z)dz$, para cada $x,y \in (0,\infty)$. El operador de traslación ${}_\Delta\tau_x,\ x \in [0,\infty)$, está definido en este marco por

$${}_\Delta\tau_x(f)(y) = \int_0^\infty f(z)D_\Delta(x,y,z)A(z)dz, \quad \text{p.c.t. } y \in (0,\infty), \text{y cada } x \in (0,\infty),$$

y

$${}_\Delta\tau_0(f) = f,$$

donde f es, por ejemplo, una función en $L_1((0,\infty),A(x)dx)$. De la desigualdad de Jensen se deduce sin dificultad que el operador de traslación ${}_\Delta\tau_x$ es contractivo en $L_p((0,\infty),A(x)dx),\ 1 \leq p \leq \infty$, para cada $x \in [0,\infty)$.

Los caracteres sobre $([0,\infty),\sharp_\Delta)$ son las funciones φ_λ soluciones del problema

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\varphi_\lambda(x)=(\lambda^2+\rho^2)\varphi_\lambda(x), \quad x>0\\ \varphi_\lambda(0)=1,\ \varphi'_\lambda(0)=0\end{array}\right. \tag{2}$$

para cada $\lambda\in\mathbf{C}$. Para cada $\lambda\in\mathbf{C}$, la función φ_λ está en $C^\infty(\mathbf{R})$ y es par. Además para cada $x\in\mathbf{R}$, la función $\lambda\to\varphi_\lambda(x)$ es entera. Las principales propiedades de $\varphi_\lambda(x)$, $x\in\mathbf{R}$ y $\lambda\in\mathbf{C}$, y sus derivadas están recogidas en [33, Lemma 3.4 y Lemma 3.6] (véase también [105]). Se tiene la importante propiedad de multiplicación

$$_\Delta\tau_x(\varphi_\lambda)(y)=\varphi_\lambda(x)\ \varphi_\lambda(y), \quad x,y\in[0,\infty),\ \lambda\in\mathbf{C}.$$

La convolución $\sharp_\Delta$ se define sobre $L_1((0,\infty),A(x)dx)$ como sigue

$$(f\sharp_\Delta g)(x)=\int_0^\infty f(y)\ _\Delta\tau_x(g)(y)\ A(y)\ dy, \quad x\in[0,\infty),$$

para cada $f,g\in L_1((0,\infty),A(x)dx)$. Para esta convolución es válida una desigualdad de Young.

El estudio de la convolución $\sharp_\Delta$ sobre medidas acotadas en $[0,\infty)$ fue realizado por M.N. Lazhari y K. Trimèche ([78]).

Asociada al hipergrupo $([0,\infty),\sharp_\Delta)$, la transformación de Fourier generalizada $\mathcal{F}_\Delta$ viene dada por

$$\mathcal{F}_\Delta(f)(\lambda)=\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ f(x)\ A(x)\ dx, \quad \lambda\in\mathbf{C},\ |\mathrm{Im}\lambda|\le\rho,$$

donde $f\in L_1((0,\infty),A(x)dx)$. Esta transformación la llamamos de Chébli–Trimèche.

La inversa $\mathcal{F}_\Delta^{-1}$ de $\mathcal{F}_\Delta$ viene dada por

$$\mathcal{F}_\Delta^{-1}(g)(x)=\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ g(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x\in(0,\infty),$$

donde $c(\lambda)$ es una función continua y sin ceros sobre $[0,\infty)$. Esta función puede ser vista como una función tipo Harish–Chandra en nuestro contexto.

Para la transformación de Chébli–Trimèche vale la siguiente igualdad de Plancherel ([32, Theorem 2.2.22])

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\ A(x)\ dx=\int_0^\infty |\mathcal{F}_\Delta(f)(\lambda)|^2\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2},$$

para cada $f\in L_2((0,\infty),A(x)dx)$. Ya que $|\varphi_\lambda(x)|\le 1$, $\lambda,x\in(0,\infty)$, $\mathcal{F}_\Delta$ aplica continuamente $L_1((0,\infty),A(x)dx)$ en $L_\infty((0,\infty),\frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2})$. Entonces, del teorema de interpolación de Riesz–Thorin se deduce que $\mathcal{F}_\Delta$ puede extenderse continuamente a $L_p((0,\infty),A(x)dx)$ como un operador acotado de $L_p((0,\infty),A(x)dx)$ en $L_{p'}((0,\infty),\frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2})$, para cada $1\le p\le 2$, siendo p', como es usual, el exponente conjugado de p.

Como se comentó anteriormente, el hipergrupo de Kingman es un caso particular de hipergrupo de Chébli–Trimèche. Concretamente, este hipergrupo surge cuando $A(x) = x^{2\alpha+1}$, $x \in (0,\infty)$ y $\alpha > -1/2$. En este caso el operador Δ se reduce al operador de Bessel $\Delta_\alpha = x^{-2\alpha-1}Dx^{2\alpha+1}D$ y la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ es la transformación de Hankel h_α.

Otro caso especial e importante de hipergrupo de Chébli–Trimèche es el hipergrupo de Jacobi, que aparece cuando $A(x) = (\sinh x)^{2\alpha+1}(\cosh x)^{2\beta+1}$, $x \in [0,\infty)$, donde $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ y $\alpha \neq -1/2$. El operador y la transformación de Jacobi, los cuales fueron ampliamente estudiados por M. Flensted–Jensen y T. Koornwinder ([49], [50] y [51]), se presentan en numerosos contextos. Por ejemplo, la transformación de Jacobi puede interpretarse, en ciertos casos, como la transformada esférica sobre espacios simétricos no compactos de rango uno (pueden consultarse, entre otros, los trabajos de L. Ehrenpreis y F.I. Mautner [45], K. Trimèche [107] y la monografía clásica de S. Helgason [68]). También, J.P. Anker, E. Damek y C. Yacoub ([3]) y F. Astengo ([5]) hacen uso de las funciones de Jacobi para estudiar análisis esférico sobre grupos de tipo NA.

H. Chébli ([38]) y K. Trimèche ([105]) establecieron teoremas de tipo Paley–Wiener para la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ de Chébli–Trimèche.

Para cada $a \in (0,\infty)$, por $\mathcal{D}_{*,a}$ representamos el espacio de las funciones $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$, pares y tales que $\phi(x) = 0$, $|x| \geq a$. Consideramos sobre $\mathcal{D}_{*,a}$ la topología asociada a la familia $\{p_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ de seminormas, donde, para cada $m \in \mathbf{N}$,

$$p_m(\phi) = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \frac{d^m}{dx^m}\phi(x) \right|, \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

El espacio unión $\mathcal{D}_* = \cup_{a>0}\mathcal{D}_{*,a}$ se dota de la topología inductiva.

Si $a \in (0,\infty)$, el espacio $H_{*,a}$ está constituido por las funciones Φ enteras, pares y tales que

$$\rho_{m,a}(\Phi) = \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} (1+|\lambda|^2)^m \ e^{-a|\mathrm{Im}\lambda|} \ |\Phi(\lambda)| < \infty,$$

para cada $m \in \mathbf{N}$. Sobre $H_{*,a}$ consideramos la topología generada por la familia $\{\rho_{m,a}\}_{m\in\mathbf{N}}$ de seminormas. Por H_* denotamos el espacio límite inductivo $\cup_{a>0}H_{*,a}$.

En [105, Théorème 7.2, (i)] se estableció que la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ es un isomorfismo de $\mathcal{D}_{*,a}$ en $H_{*,a}$, para cada $a > 0$, y, por tanto, de $\mathcal{D}_*$ en H_*.

La transformación de Chébli–Trimèche $\mathcal{F}_\Delta$ se define sobre el dual $\mathcal{D}'_*$ de $\mathcal{D}_*$ por trasposición, esto es, para cada $T \in \mathcal{D}'_*$, la transformada $\mathcal{F}'_\Delta T$ de T es el elemento de H'_* dado por

$$< \mathcal{F}'_\Delta T, \mathcal{F}_\Delta \phi > = < T, \phi >, \quad \phi \in D_*.$$

De este modo, $\mathcal{F}'_\Delta$ extiende la transformación clásica $\mathcal{F}_\Delta$. En efecto, si $\psi \in \mathcal{D}_*$ entonces ψ define un elemento T_ψ de $\mathcal{D}'_*$ mediante

$$< T_\psi, \phi > = \int_0^\infty \psi(x) \ \phi(x) \ A(x) \ dx, \quad \phi \in D_*.$$

Además, cada $\Psi \in H_*$ genera un elemento $\mathbf{T}_\Psi$ de H'_*, el espacio dual de H_*, por

$$< \mathbf{T}_\Psi, \Phi >= \int_0^\infty \Psi(\lambda)\ \Phi(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad \Phi \in H_*.$$

Supongamos ahora que $\psi \in \mathcal{D}_*$. Intercambiando el orden de integración se sigue que

$$\begin{aligned}
< \mathcal{F}'_\Delta T_\psi, \mathcal{F}_\Delta \phi > &= < T_\psi, \phi >= \int_0^\infty \psi(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx \\
&= \int_0^\infty \psi(x) \int_0^\infty \mathcal{F}_\Delta(\phi)(\lambda)\ \varphi_\lambda(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}\ A(x)\ dx \\
&= \int_0^\infty \mathcal{F}_\Delta(\phi)(\lambda) \int_0^\infty \psi(x)\ \varphi_\lambda(x)\ A(x)\ dx\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \\
&= < \mathbf{T}_{\mathcal{F}_\Delta(\psi)}, \mathcal{F}_\Delta \phi >, \quad \phi \in D_*.
\end{aligned}$$

Por E_* denotamos el espacio de las funciones pares en $C^\infty(\mathbf{R})$. Sobre E_* se considera la topología engendrada por el sistema $\{p_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{N}}$ de seminormas, donde, para cada $m, n \in \mathbf{N}$,

$$p_{m,n}(f) = \sup_{|x|\leq m} \left| \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|, \quad f \in E_*.$$

De este modo E_* es un espacio de Fréchet y es el espacio de multiplicadores puntuales en $\mathcal{D}_*$.

Recurriendo a [33, Lemma 4.18] puede verse que la topología de E_* coincide con la generada por la familia $\{q^\Delta_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{N}}$ de seminormas, siendo

$$q^\Delta_{m,n}(f) = \sup_{|x|\leq m} |\Delta^n f(x)|, \quad f \in E_*,\ m, n \in \mathbf{N}.$$

Es claro que $\mathcal{D}_*$ es un subespacio denso de E_*. Por tanto, el dual E'_* de E_* puede ser identificado con un subespacio de $\mathcal{D}'_*$. La transformada de Chébli–Trimèche $\mathcal{F}'_\Delta T$ de $T \in E'_*$ coincide con la funcional generada en H'_* por la función F_T entera par definida por

$$F_T(\lambda) =< T, \varphi_\lambda >, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

esto es, si $T \in E'_*$, se tiene que

$$< \mathcal{F}'_\Delta T, \mathcal{F}_\Delta \phi >= \int_0^\infty F_T(\lambda)\ (\mathcal{F}_\Delta \phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad \phi \in D_*.$$

La traslación ${}_\Delta\tau_x$ define, para cada $x \in [0, \infty)$, una aplicación lineal y continua de $\mathcal{D}_*$ en sí mismo ([105, Théorème 8.1, (1)]) y de E_* en sí mismo ([105, Proposition 8.3]).

Definimos, para cada $T \in \mathcal{D}'_*$ (respectivamente, $T \in E'_*$) y $\phi \in \mathcal{D}_*$ (respectivamente, $\phi \in E_*$), la convolución $T\sharp_\Delta\phi$ de T y ϕ como sigue

$$(T\sharp_\Delta\phi)(x) =< T, {}_\Delta\tau_x\phi >, \quad x \in [0, \infty).$$

El dual E'_* de E_* es el espacio de operadores de convolución de $\mathcal{D}_*$, esto es, si $T \in E'_*$ y $\phi \in \mathcal{D}_*$ entonces $T\sharp_\Delta \phi \in \mathcal{D}_*$. Además, si $T \in \mathcal{D}'_*$ y $T\sharp_\Delta\phi \in \mathcal{D}_*$, para cada $\phi \in \mathcal{D}_*$, necesariamente $T \in E'_*$.

La convolución $T\sharp_\Delta S$ de $T \in \mathcal{D}'_*$ y $S \in E'_*$ se define como el elemento de $\mathcal{D}'_*$ dado por

$$< T\sharp_\Delta S, \phi >=< T, S\sharp_\Delta \phi >, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

Además, es válida la siguiente fórmula de intercambio distribucional

$$\mathcal{F}'_\Delta(T\sharp_\Delta S) = \mathcal{F}'_\Delta(T)\ \mathcal{F}'_\Delta(S),$$

para cada $T \in \mathcal{D}'_*$ y $S \in E'_*$.

El estudio distribucional de la transformación integral y la convolución asociadas al hipergrupo $([0,\infty), \sharp_\Delta)$ de Chébli–Trimèche fue continuado por W. Bloom y Z. Xu ([33]). Teniendo como motivación, entre otras, el estudio realizado por J.P. Anker ([2]) para el caso de espacios simétricos riemannianos (puede verse también el trabajo de B. di Blasio [31]), W. Bloom y Z. Xu prueban que la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ de Chébli–Trimèche es un isomorfismo entre espacios de tipo Schwartz generalizados.

Comentamos a continuación algunos aspectos de la investigación de W. Bloom y Z. Xu que serán de mucho interés en relación con nuestro trabajo.

Sea $0 < p \leq 2$. Denotamos por $S_p((0,\infty), \sharp_\Delta)$ el espacio constituido por aquellas funciones $\phi \in C^\infty(0,\infty)$, para las cuales existen $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ pares tales que $\phi = \psi$, y verifican que

$$\mu^p_{k,l}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^l\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| < \infty, \quad k,l \in \mathbf{N}\setminus\{0\}.$$

Se considera sobre $S_p((0,\infty), \sharp_\Delta)$ la topología generada por la familia de seminormas $\{\mu^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$. Es claro que $\mu^p_{k,l}$ depende de Δ (vía φ_0) pero para simplificar la notación preferimos escribir sólo $\mu^p_{k,l}$.

En el caso de Hankel, esto es, cuando $A(x) = x^{2\alpha+1}$, $x \in [0,\infty)$, $\alpha > -1/2$, entonces $\varphi_0(x) = 1$ y $S_p((0,\infty), \sharp_\Delta)$ coincide, para cada $0 < p \leq 2$, con el espacio S_{even} de las funciones pares en la clase S de Schwartz. Por otra parte, si consideramos $A(x) = (\sinh x)^{2\alpha+1}(\cosh x)^{2\beta+1}$, $x \in [0,\infty)$, $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha \neq -1/2$, que recordamos corresponde al hipergrupo de Jacobi, entonces

$$\varphi_0(x) = {}_2F_1\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \alpha+1, -\sinh^2 x\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

donde ${}_2F_1$ representa a la función hipergeométrica de Gauss. En este caso el espacio $S_p((0,\infty), \sharp_\Delta)$ es, para ciertos valores de α y β, el espacio de Schwartz esférico sobre un espacio simétrico no compacto de rango 1.

En lo que sigue, para simplificar, escribiremos S_p en lugar de $S_p((0,\infty), \sharp_\Delta)$.

La imagen por medio de la transformación de Chébli–Trimèche del espacio S_p es el espacio H_p definido como sigue. Denotamos por $\Omega_p = \{z \in \mathbf{C} :\ |\mathrm{Im} z| \leq \left(\frac{2}{p} - 1\right)\rho\}$. Decimos que una función $\Phi \in H_p$ cuando verifica las siguientes propiedades

(i) Φ es holomorfa en $\{z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im} z| < \left(\frac{2}{p}-1\right)\rho\}$ y, para cada $k \in \mathbf{N}$, $\frac{d^k}{dx^k}\Phi(x)$ se extiende continuamente a Ω_p.

(ii) Para cada $k, m \in \mathbf{N}$,

$$\tau^p_{k,m}(\Phi) = \sup_{z\in\Omega_p} (1+|z|)^m \left|\frac{d^k}{dz^k}\Phi(z)\right| < \infty.$$

El espacio H_p se dota de la topología asociada a la familia $\{\tau^p_{k,m}\}_{k,m\in\mathbf{N}}$ de seminormas.

La transformación $\mathcal{F}_\Delta$ de Chébli–Trimèche es un isomorfismo de S_p en H_p ([33, Theorem 4.27]). En [33, Section 5] se comienza el estudio de la convolución $\sharp_\Delta$ sobre el espacio S_p y su dual S'_p. Uno de los objetivos en esta Memoria es completar, en varias direcciones, las investigaciones de W. Bloom y Z. Xu.

Recordamos que el núcleo de la transformación integral de Chébli–Trimèche es la función $\varphi_\lambda(x)$, $x \in [0,\infty)$ y $\lambda \in \mathbf{C}$, carácter del hipergrupo $([0,\infty), \sharp_\Delta)$. Presentamos ahora algunas propiedades de φ_λ a las que recurriremos con frecuencia a lo largo de nuestro trabajo.

Para la función φ_λ se tiene una fórmula de tipo Mehler, ésta es ([105, Théorème 4.1]),

$$\varphi_\lambda(t) = \int_0^t K(t,y)\ \cos(\lambda y)\ dy, \quad \lambda \in \mathbf{C},\ t \in (0,\infty), \tag{3}$$

donde $K(t,\cdot)$ es continua y par en $(-t,t)$ y con soporte en $[-t,t]$, para cada $t \in (0,\infty)$.

K. Trimèche ([103]) y A. Fitouhi ([48]) investigaron la convergencia de series de Taylor asociadas al operador Δ. En estos estudios resulta fundamental que la función φ_λ admite el desarrollo siguiente

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ b_n(x)\ (\lambda^2+\rho^2)^n, \quad \lambda \in \mathbf{C},\ x \in (0,\infty), \tag{4}$$

donde, para cada $n \in \mathbf{N}$, b_n es una función par en $C^\infty(\mathbf{R})$ definida por

$$b_n(x) = \int_0^x K(x,u)\ j_{n-1/2}(i\rho u)\ \frac{u^{2n}}{(2n)!}\ du, \quad x > 0, \tag{5}$$

donde

$$j_\mu(z) = \begin{cases} 2^\mu\ \Gamma(\mu+1)\ z^{-\mu}\ J_\mu(z), & \text{si } z \neq 0 \\ 1, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

y J_μ es, como se precisó con anterioridad, la función de Bessel de primera especie y de orden μ. Suponemos que $b_{-n} = 0$, cuando $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$.

Las principales propiedades de las funciones b_n, $n \in \mathbf{N}$, fueron mostradas en [48, Section 2.2]. En particular se tiene que

$$b_0 = 1,\ b_n(0) = 0,\ \Delta b_n = -b_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}. \tag{6}$$

Además, en virtud de [48, Corollary 2.1], para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq b_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

y

$$0 \leq b'_n(x) \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Las funciones $b_n,\ n \in \mathbf{N}$, juegan en las series de Taylor generalizadas de K. Trimèche ([103]) el papel de las funciones $x^n,\ n \in \mathbf{N}$, en las series de Taylor usuales.

La función K que aparece en la representación de Mehler (3) se toma como núcleo de una transformación generalizada de Weyl, conocida como transformación de Abel y definida del modo siguiente

$$\mathbf{A}f(x) = \int_x^\infty f(y)\ K(y,x)\ A(y)\ dy, \quad x \in (0,\infty),$$

Esta transformación $\mathbf{A}$ es un isomorfismo de $\mathcal{D}_*$ en sí mismo ([33, Lemma 4.10, (i)]). Además, para cada $a \in (0,\infty)$, $\mathbf{A}f \in \mathcal{D}_{*,a}$ si, y sólo si, $f \in \mathcal{D}_{*,a}$.

La transformación de Abel nos permite obtener una útil factorización de la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ de Chébli–Trimèche. Ésta es

$$\mathcal{F}_\Delta f = \mathcal{F}_0(\mathbf{A}f),$$

donde $\mathcal{F}_0$ representa la transformación de Fourier euclídea sobre $\mathbf{R}$ dada por

$$\mathcal{F}_0(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\ f(y)\ dy, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Hemos dividido esta Memoria en cinco capítulos. Pasamos a continuación a comentar el contenido de cada uno de ellos.

En [105, Théorème 7.2, (i)] se demostró que la transformación de Chébli–Trimèche es un isomorfismo de $\mathcal{D}_{*,a}$ en $H_{*,a}$, y, por tanto, de $\mathcal{D}_*$ en H_*. Este resultado puede decirse que es de tipo Paley–Wiener, puesto que caracteriza la imagen de una clase de funciones $\mathcal{D}_*$ de soporte compacto. En el procedimiento empleado en la prueba del mismo se recurre a argumentos complejos (véase también [38]). En el Capítulo I probamos nuevos teoremas de tipo Paley–Wiener para la transformación $\mathcal{F}_\Delta$. Los resultados establecidos en la Sección 2, que están motivados por las ideas desarrolladas por H.H. Bang ([6]) y, más recientemente, por Vu Kim Tuan ([110] y [111]), se prueban haciendo uso únicamente de técnicas reales. En la Sección 3 de este capítulo se presentan teoremas tipo Paley–Wiener para la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ en espacios de Lebesgue con pesos. Los antecedentes de nuestros estudios se encuentran en los trabajos de T.G. Genchev ([58] y [59]), T.G. Genchev y H.P. Heinig ([60]), relativos a la transformación de Fourier euclídea, y de J.J. Betancor, M. Linares y J.M. Méndez ([21]) sobre la transformación de Hankel. Los resultados fundamentales de este capítulo están recogidos en nuestro trabajo [18].

En el Capítulo II estudiamos la hiperciclicidad y el caos de ciertos operadores de convolución $\sharp_\Delta$.

Recordamos a continuación las definiciones fundamentales en relación con estos conceptos.

Supongamos que X es un espacio vectorial topológico y que $T : X \to X$ es una aplicación lineal y continua. Se dice que $x \in X$ es un vector hipercíclico para T cuando la órbita de x respecto de T, esto es, $\mathrm{Orb}(T, x) = \{T^n x : \ n \in \mathbf{N}\}$, es densa en X. Por tanto, si T tiene un vector hipercíclico, entonces X es separable. El operador T se llama hipercíclico si existe un vector $x \in X$ hipercíclico para T. En algunos textos se refieren a la hiperciclicidad como universalidad, y cabe extender el concepto a aplicaciones lineales y continuas $T : X \to Y$, donde X, Y son espacios vectoriales topológicos, en general, diferentes.

G. Herzog ([69]) demostró una propiedad de universalidad en relación con las soluciones de la ecuación del calor. Introdujo un espacio de Banach X separable y probó que el conjunto de funciones ϕ tales que $\{u_\phi(n, \cdot)\}_{n\in\mathbf{N}}$ es denso en el espacio $C(\mathbf{R})$ de las funciones continuas de $\mathbf{R}$ en sí mismo, es residual en X, esto es, el complemento en X del conjunto citado es de primera categoría en X. Aquí u_ϕ representa la solución de la ecuación del calor con valor inicial ϕ. En [19] J.J. Betancor y A. Bonilla, interpretando el resultado anterior como la iteración de un operador de convolución, establecen la propiedad correspondiente para otras operaciones de convolución, entre las que se encuentran las asociadas a los hipergrupos de Kingman, esto es, a las transformaciones h_α de Hankel. En la Sección 2 de este Capítulo II establecemos la propiedad de universalidad presentada por G. Herzog ([69]), en el contexto de los hipergrupos de Chébli–Trimèche.

Dado un espacio vectorial topológico X se dice que un operador continuo $T : X \to X$ es caótico si verifica las dos propiedades que siguen:

(i) T es topológicamente transitivo, o sea, para cada par de abiertos U y V en X existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(ii) El conjunto de vectores periódicos de T es denso en X. Decimos que $x \in X$ es periódico para T cuando $T^n x = x$, para algún $n \in \mathbf{N}$.

Señalamos que cada operador hipercíclico es topológicamente transitivo. G. Godefroy y J.H. Shapiro ([61]) caracterizan los operadores de convolución sobre $H(\mathbf{C}^n)$, el espacio de las funciones enteras en $\mathbf{C}^n$, $\ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, hipercíclicos y caóticos en $H(\mathbf{C}^n)$. Su trabajo tenía antecedentes en los ya clásicos de G.D. Birkhoff ([30]) sobre operadores de traslación usuales, y de G.R. MacLane ([82]) sobre el operador derivada. Recientemente, J. Bonet ([34]) extendió los resultados de G. Godefroy y J.H. Shapiro a cierta clase de funciones ultradiferenciables tipo Beurling, y M. Belhadj y J.J. Betancor ([9]) han estudiado la hiperciclicidad y el caos para operadores de convolución de Hankel sobre el espacio de las funciones enteras pares. En la Sección 3 analizamos, motivados por las investigaciones citadas, la hiperciclicidad y el caos para los operadores de convolución en el contexto de los hipergrupos de Chébli–Trimèche, definidos por elementos de E'_* sobre $\mathcal{D}'_*$ y E_*. Establecemos que cada elemento de E'_* que no sea un múltiplo escalar de la identidad, define un operador de convolución $\sharp_\Delta$ hipercíclico y caótico sobre $\mathcal{D}'_*$ y E_*.

El Capítulo III lo hemos dividido en dos partes. Abordamos en él el estudio distribucional de la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ y la convolución $\sharp_\Delta$ de Chébli–Trimèche.

El análisis realizado en la primera parte está motivado por los estudios de B.J. González y E.R. Negrín ([62] y [63]) y J.J. Betancor y B.J. González ([20]), quienes tratan la transformación de Fourier euclídea y la transformación de Hankel, respectivamente.

Consideramos, para cada $m \in \mathbf{Z},\ m < 0$, el espacio A_m constituido por las funciones $\phi \in C^\infty(0,\infty)$ que verifican las siguientes propiedades:

(i) Existe $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$, par, tal que $\psi(x) = \phi(x),\ x \in (0,\infty)$.

(ii) Para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\alpha_k^m(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^m \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| < \infty.$$

El espacio A_m se dota de la topología asociada a la familia $\{\alpha_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ de seminormas. De este modo A_m es un espacio de Fréchet. Denotamos por $\mathcal{A}_m$ a la clausura de $\mathcal{D}_*$ en A_m. El espacio $\mathcal{A}_m$ coincide con el subespacio de las funciones pares en el espacio $\mathcal{S}_m$ considerado por J. Horváth ([73]).

Probamos que la traslación ${}_\Delta\tau_x,\ x \in [0,\infty)$, define una aplicación continua de $\mathcal{A}_m$ en sí mismo, y que si $T \in \mathcal{A}'_m$ y $\phi \in \mathcal{A}_m$, la convolución $T\sharp_\Delta\phi$ de T y ϕ definida por

$$(T\sharp_\Delta\phi)(x) =< T,{}_\Delta\, \tau_x\phi >, \quad x \in [0,\infty),$$

es también un elemento de $\mathcal{A}_m$.

Si $T, S \in \mathcal{A}'_m$ la convolución $T\sharp_\Delta S$ de T y S se define mediante

$$< T\sharp_\Delta S, \phi >=< T, S\sharp_\Delta\phi >, \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

De este modo, $T\sharp_\Delta S \in \mathcal{A}'_m$.

El espacio $\mathcal{A}_m$ contiene a $S_p,\ 0 < p \le 2$, por tanto el dual S'_p de S_p contiene a $\mathcal{A}'_m$. La transformada de Chébli–Trimèche de una distribución $T \in \mathcal{A}'_m$, como elemento de $S'_p,\ 0 < p \le 2$, o de $\mathcal{D}'_*$, coincide con la distribución generada por la función $F(\lambda) =< T, \varphi_\lambda >,\ \lambda \in [0,\infty)$, sobre $\mathcal{A}'_m$. Establecemos las principales propiedades de la transformada de Chébli–Trimèche sobre $\mathcal{A}'_m$, entre las que destacamos el teorema de unicidad, donde la densidad de $\mathcal{D}_*$ en $\mathcal{A}_m$ es fundamental. Presentamos también una aplicación de la transformada distribucional considerada. En nuestro trabajo [15] recogemos el estudio realizado en esta primera parte.

En la segunda parte de este capítulo completamos las investigaciones de W. Bloom y Z. Xu ([33]). Si $0 < p \le 2,\ T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$, como ${}_\Delta\tau_x\phi \in S_p,\ x \in [0,\infty)$ ([33, Lemma 5.2]), se define la convolución $T\sharp_\Delta\phi$ por

$$(T\sharp_\Delta\phi)(x) =< T,{}_\Delta\, \tau_x\phi >, \quad x \in [0,\infty).$$

En general $T\sharp_\Delta\phi$ no pertenece a S_p para cada $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$. En efecto, consideramos la funcional T definida como sigue

$$< T, \phi >= \int_0^\infty \varphi_0(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx, \quad \phi \in S_p.$$

Observamos que, para cada $\phi \in S_p$, de [33, (3.5)] se deduce

$$\begin{aligned} |< T, \phi >| &\leq \int_0^\infty |\phi(x)| \ (1+x)^{\beta+1} \ e^{\rho x} \ dx \\ &\leq \int_0^\infty e^{\rho\left(1-\frac{2}{p}\right)x} \ (1+x)^{\beta+\frac{2}{p}+1} \ \varphi_0^{-2/p} \, |\phi(x)| \ dx. \end{aligned}$$

Por tanto, si $0 < p \leq 2$, $T \in S'_p$. Además, si $0 < p \leq 2$ y $\phi \in S_p$ es tal que $\int_0^\infty \varphi_0(x)\phi(x)A(x)dx \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} (T\sharp_\Delta \phi)(x) &= \int_0^\infty \varphi_0(y) \ ({}_\Delta\tau_x\phi)(y) \ A(y) \ dy \\ &= \int_0^\infty \phi(z) \int_0^\infty \varphi_0(y) \ D_\Delta(x,y,z) \ A(y) \ dy \ A(z) \ dz \\ &= \varphi_0(x) \int_0^\infty \varphi_0(z) \ \phi(z) \ A(z) \ dz \neq 0, \quad x \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Probamos así que, en las condiciones precisadas, $T\sharp_\Delta\phi \notin S_p$.

Nuestro objetivo es describir el subespacio de S'_p constituido por aquellas $T \in S'_p$ tales que $T\sharp_\Delta\phi \in S_p$, para cada $\phi \in S_p$. En el estudio realizado desempeñan un papel básico las soluciones fundamentales de los operadores del tipo $(1+\Delta)^m$, donde $m \in \mathbf{N}$.

En el Capítulo IV estudiamos la transformación de Chébli–Trimèche y la convolución $\sharp_\Delta$ en la variante de los espacios W de B.L. Gurevitch ([66]) considerados por S.J.L. van Eijndhoven y M.J. Kerkhof ([47]). Recurrimos al procedimiento desarrollado por J.P. Anker en [2] para probar que la transformación $\mathcal{F}_\Delta$ es un isomorfismo de $W_{M,a}$ en $W^{M^\times,1/a}$, para cada $a > 0$, donde M pertenece a una clase adecuada de funciones y $M^\times$ representa la dual de Young de M. Los resultados fundamentales de este capítulo están presentados en nuestro trabajo [16].

El Capítulo V se dedica al análisis de la hipoelipticidad de las ecuaciones de convolución $\sharp_\Delta$ sobre $\mathcal{D}_*$. Si $S \in E'_*$ decimos que S es Δ–hipoelíptica en $\mathcal{D}_*$ cuando se verifica la propiedad siguiente: $T \in E_*$ siempre que $T\sharp_\Delta S \in E_*$ y $T \in \mathcal{D}'_*$.

En particular consideramos el hipergrupo de Jacobi. En este caso caracterizamos la hipoelipticidad de una distribución $S \in E'_*$ mediante el crecimiento y la distribución de los ceros de su transformada de Jacobi, y por la existencia de una parametrix para S, esto es, que para ciertas $R \in E'_*$ y $\psi \in \mathcal{D}_*$ se tenga que $\delta = R\sharp_\Delta S + \psi$, donde Δ representa el operador de Jacobi y δ la funcional de Dirac. Este resultado tiene sus antecedentes en los trabajos clásicos de L. Ehrenpreis ([44]) y L. Hörmander ([72]).

La caracterización completa de la hipoelipticidad de las ecuaciones de convolución que se alcanza en el caso de Jacobi, la podemos obtener también para el hipergrupo de Kingman (caso de Hankel, puede verse [8] para un resultado parcial), pero no la hemos podido conseguir en el caso general. La clave está en que no hemos podido establecer la positividad de la función

$$b(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \int_0^\infty \varphi_{\lambda_1}(t)\ \varphi_{\lambda_2}(t)\ \varphi_{\lambda_3}(t)\ A(t)\ dt, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R},$$

que sería el núcleo de la traslación asociada a la convolución para la transformación inversa $\mathcal{F}_\Delta^{-1}$ de la de Chébli–Trimèche.

Es una cuestión abierta el estudio de la convolución para esta transformación $\mathcal{F}_\Delta^{-1}$ definida, como sabemos, por

$$\mathcal{F}_\Delta^{-1}(\Phi)(x) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \Phi(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in [0, \infty),$$

y donde Φ, por ejemplo, está en $L_1((0,\infty), \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2})$. En este caso no nos encontraremos con un hipergrupo en el sentido descrito al principio de este Prólogo ya que, en general, la función b cuando $\rho > 0$ es holomorfa en una banda y, por tanto, ya que no es nula idénticamente, no tiene soporte compacto.

Este problema se denomina, en muchas ocasiones, dual del problema original y ha sido, en relación con otras clases de hipergrupos, motivo de estudio por parte de numerosos autores (véanse, por ejemplo [4], [13], [14], [51], [54], [55], [70] y [100]). A excepción del trabajo de M. Flensted–Jensen y T. Koorwinder [51], en el que se refieren a la estructura dual del hipergrupo de Jacobi, no se ha realizado ningún otro estudio sobre hipergrupos duales de Chébli–Trimèche no triviales (casos de Hankel o Fourier euclídea, donde la estructura dual coincide con la original). El resto de las investigaciones a las que hacíamos referencia anteriormente conciernen a hipergrupos asociados a familias numerables ortogonales, respecto al peso asociado a la medida de Haar, de funciones. Todas ellas están basadas en una fórmula de linealización.

Por nuestra parte, y como paso previo a abordar el problema del análisis de la estructura dual del hipergrupo de Chébli–Trimèche, hemos estudiado en [17] la traslación y la convolución para la transformación de Jacobi discreta, dual del hipergrupo de Jacobi sobre el intervalo compacto $[-1, 1]$.

Consideramos los polinomios de Jacobi $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ que, entendidos como una función de la variable $x \in (-1, 1)$, satisfacen la ecuación diferencial siguiente, con $\alpha, \beta > -1$,

$$\begin{aligned}(x^2-1)\ \frac{d^2}{dx^2} R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ +\ [(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta]\ \frac{d}{dx} R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ -n(n+\alpha+\beta+1)\ R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad = \quad 0,\end{aligned}$$

y respecto a la variable discreta n verifican la relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned}&2\ (n+1)\ (n+\alpha+\beta+1)\ (2n+\alpha+\beta)\ R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= (2n+\alpha+\beta+1)\ [(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha^2-\beta^2]\ R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad -2\ (n+\alpha)\ (n+\beta)\ (2n+\alpha+\beta+2)\ R_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \in \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Resulta fundamental para definir la traslación en este contexto la relación de linealización que sigue ([54])

$$R_k^{(\alpha,\beta)}(x)\ R_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(k,m,n)\ h(n)\ R_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad x \in (-1,1),\ n,m \in \mathbf{N},$$

donde

$$\gamma(k,m,n) = \int_{-1}^{1} R_k^{(\alpha,\beta)}(z)\ R_m^{(\alpha,\beta)}(z)\ R_n^{(\alpha,\beta)}(z)\ (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta} dz, \quad k,n,m \in \mathbf{N},$$

y

$$h(n) = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)\ \Gamma(n+\alpha+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\ \Gamma(n+1)\ \left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2\ \Gamma(n+\beta+1)}.$$

Definimos entonces la traslación $\tau_m^{(\alpha,\beta)}$, $m \in \mathbf{N}$, del modo siguiente

$$\tau_m^{(\alpha,\beta)}((a_n)_{n\in\mathbf{N}})(k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ \gamma(k,m,n)\ h(n), \quad k,m \in \mathbf{N},$$

y la convolución $*_{(\alpha,\beta)}$ viene dada por

$$((a_n)_{n\in\mathbf{N}}\ *_{(\alpha,\beta)}\ (b_n)_{n\in\mathbf{N}})(m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \tau_m^{(\alpha,\beta)}((b_n)_{n\in\mathbf{N}})(k)\ h(k), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Aquí $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ están en el espacio $b^{(\alpha,\beta)}$ constituido por las sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ complejas tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| h(n) < \infty$.

No siempre el núcleo de la linealización $\gamma(k,m,n)$ es positivo. G. Gasper ([55, Theorem 1 y Theorem 2]) precisa condiciones en las que $\gamma(k,m,n) \geq 0$, $k,m,n \in \mathbf{N}$, y otras en las que $\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma(k,m,n)| h(k) \leq c$, $m,n \in \mathbf{N}$, para cierta constante $c > 0$.

Las dificultades encontradas en el estudio de esta estructura dual asociada al hipergrupo de Jacobi en un intervalo compacto, junto a la profundidad del análisis realizado en [51] sobre el caso no compacto de dicho hipergrupo, nos hacen creer que la investigación de la estructura dual del hipergrupo general de Chébli–Trimèche es una cuestión difícil y que requerirá previamente el conocimiento de algunos casos particulares más, que nos permitan obtener una clasificación completa en base al operador considerado en cada caso.

Al objeto de simplificar la notación, a lo largo de nuestra Memoria no haremos referencia al operador Δ asociado al hipergrupo en cada situación. Así escribiremos $\mathcal{F}$, τ_x, $\sharp$, D, en lugar de $\mathcal{F}_\Delta$, ${}_\Delta\tau_x$, $\sharp_\Delta$, D_Δ, respectivamente.

Además, siempre indicaremos por c a una constante positiva adecuada, que no será la misma necesariamente cada vez que aparezca.

Capítulo 1

Teoremas de tipo Paley–Wiener para la transformación de Chébli–Trimèche.

1.1 Introducción.

H. Chébli [38] y K. Trimèche [105] establecieron un teorema de Paley–Wiener para la transformación de Chébli–Trimèche. Este resultado, que fue probado empleando procedimientos complejos, extiende el clásico teorema de Paley–Wiener [88] relativo a la transformación de Fourier euclídea. Asimismo, aparecen como casos particulares del teorema de H. Chébli y K. Trimèche, los mostrados por J.L. Griffith [64] (véase también A.H. Zemanian [115]) y T. Koornwinder [76] para las transformaciones integrales de Hankel y de Jacobi, respectivamente.

Recientemente, Vu Kim Tuan probó nuevos teoremas tipo Paley–Wiener para la transformación de Hankel ([111]) y de Airy ([110]), entre otras. Este autor, inspirado en las ideas de H.H. Bang ([6]), demuestra sus resultados siguiendo un método real.

En la sección 2 de este capítulo establecemos para la transformación de Chébli–Trimèche teoremas de tipo Paley–Wiener, dando una prueba real de éstos. Nuestros resultados extienden algunos de los obtenidos por Vu Kim Tuam en [111] para la transformación de Hankel.

T.G. Genchev ([58] y [59]) mostró para la transformación de Fourier teoremas de Paley–Wiener en el marco de los espacios de Lebesgue pesados. J.J. Betancor, M. Linares y J.M. Méndez probaron en [21] los correspondientes resultados para la transformación integral de Hankel.

En la Sección 3 presentamos para la transformación de Chébli–Trimèche teoremas tipo Paley–Wiener sobre espacios L_p con pesos.

1.2 Teoremas de tipo Paley–Wiener para la transformación de Chébli–Trimèche.

El espacio S_p coincide con el espacio $S_{even}(\mathbf{R})$ cuando $\rho = 0$. Como es usual, la topología de S_{even} está generada por el sistema $\{\mu_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ de seminormas donde, para cada $n, m \in \mathbf{N}$,

$$\mu_{n,m}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^m \left| \frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \right|, \quad \phi \in S_{even}.$$

A continuación obtenemos una nueva descripción de la topología de S_{even}. Este resultado, además de ser de interés en sí mismo, nos será muy útil en lo que sigue.

Lema 1.1 *Sea $1 \le q \le \infty$. Para cada $m, n \in \mathbf{N}$ definimos la seminorma $\gamma^q_{n,m}$ sobre S_{even} por*

$$\gamma^q_{n,m}(\phi) = \left\|(1+x^2)^m \Delta^n \phi\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}, \quad \phi \in S_{even}(\mathbf{R})$$

La topología de S_{even} coincide con la definida sobre él por la familia $\{\gamma^q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ de seminormas.

Demostración.
Consideramos, para cada $n, m \in \mathbf{N}$, la seminorma $\gamma_{n,m}$ dada por

$$\gamma_{n,m}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{d^n}{dx^n}((1+x^2)^m \phi(x)) \right|, \quad \phi \in S_{even}.$$

El sistema $\{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ de seminormas genera la topología de S_{even}.

En efecto, observamos en primer lugar que de la regla de Leibniz se sigue sin dificultad que la topología definida sobre S_{even} por $\{\mu_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ es más fina que la que genera $\{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ sobre este espacio. Además, $\{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ define una topología Fréchet sobre $S_{even}(\mathbf{R})$. Para probar esto tomamos una sucesión $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}} \subset S_{even}(\mathbf{R})$ de Cauchy respecto de $\{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ y vamos a ver que converge en $(S_{even}(\mathbf{R}), \{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}})$. Es claro que, para cada $m \in \mathbf{N}$, la sucesión $((1+x^2)^m\phi_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy en E_*. Por tanto, ya que E_* es Fréchet, para cada $m \in \mathbf{N}$, existe $\psi_m \in E_*$ tal que $(1+x^2)^m\phi_\nu \to \psi_m$, cuando $\nu \to \infty$. Definimos $\varphi_m(x) = (1+x^2)^{-m}\psi_m(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$. Observamos que, en particular, $\phi_\nu \to \psi_0$, cuando $\nu \to \infty$, en E_*, y ya que la convergencia en E_* implica la convergencia puntual, concluimos que $\varphi_m(x) = \psi_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$. Por tanto, para cada $n, m \in \mathbf{N}$, se tiene

$$\gamma_{n,m}(\phi_\nu - \psi_0) \to 0, \quad \textit{cuando} \quad \nu \to \infty.$$

Además $\psi_0 \in S_{even}(\mathbf{R})$. En efecto, ya que $\phi_\nu \in S_{even}(\mathbf{R})$, para cada $\nu \in \mathbf{N}$, podemos asegurar que ψ_0 es una función par. También, ya que $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy en $(S_{even}(\mathbf{R}), \{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}})$ existe, para cada $n \in \mathbf{N}$, $c_n > 0$ tal que

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^n |\phi_\nu(x)| \le c_n \quad y \quad \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{d^n}{dx^n}\phi_\nu(x) \right| \le c_n, \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^n \, |\psi_0(x)| < \infty \quad y \quad \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{d^n}{dx^n}\psi_0(x)\right| < \infty.$$

Teniendo en cuenta [40] se deduce ya que $\psi_0 \in S_{even}(\mathbf{R})$.

Una vez garantizada la completitud de la topología que sobre $S_{even}(\mathbf{R})$ genera $\{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$, el teorema de la aplicación abierta permite concluir que $\{\gamma_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ y $\{\mu_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ son familias de seminormas equivalentes sobre $S_{even}(\mathbf{R})$.

Procediendo como en la prueba de [33, Proposition 4.24] podemos obtener, para cada $n, m \in \mathbf{N}$ y $\phi \in S_{even}(\mathbf{R})$,

$$\frac{d^n}{dy^n}(y^{2m}(\mathcal{F}\phi)(y)) = \int_0^\infty \Delta^m\phi(x)\frac{d^n}{dy^n}(\varphi_y(x))A(x)dx, \quad y \in (0,\infty).$$

Sea $1 \leq q \leq \infty$. Recurriendo a [33, Lemma 3.4, (iv) y (3.5)] y usando la desigualdad de Hölder conseguimos

$$\sup_{y\in(0,\infty)} \left|\frac{d^n}{dy^n}(y^{2m}(\mathcal{F}\phi)(y))\right| \leq c \left\|(1+x^2)^l \, \Delta^m\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}, \quad \phi \in S_{even}(\mathbf{R}),$$

para cierto $l \in \mathbf{N}$ que no depende de $\phi \in S_{even}(\mathbf{R})$.

Por tanto, de [33, Theorem 4.27] se deduce que, para cada $n, m \in \mathbf{N}$, existen k y $l \in \mathbf{N}$ tales que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^m \left|\frac{d^n}{dx^n}\phi(x)\right| &\leq c \max_{0\leq\alpha,\beta\leq k} \sup_{y\in(0,\infty)} \left|\frac{d^\alpha}{dy^\alpha}(y^{2\beta}(\mathcal{F}\phi)(y))\right| \\ &\leq c \max_{0\leq\alpha,\beta\leq l} \left\|(1+x^2)^\alpha\Delta^\beta\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}, \quad \phi \in S_{even}(\mathbf{R}).\end{aligned}$$

Esto muestra que la topología definida por $\{\gamma^q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ es más fina que la generada sobre él por $\{\mu_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$.

Por otra parte, a tenor de [33, Lemma 4.18 y (3.5)], para cada $n, m \in \mathbf{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\left\|(1+x^2)^n\Delta^m\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)} &\leq c \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^l \, |\Delta^m\phi(x)| \\ &\leq c\sum_{j=0}^{2m} \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^l \left|\frac{d^j}{dx^j}\phi(x)\right|, \quad \phi \in S_{even}(\mathbf{R}),\end{aligned}$$

para cierta $l \in \mathbf{N}$ que no depende de $\phi \in S_{even}(\mathbf{R})$. Por tanto, $\{\mu_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ define sobre $S_{even}(\mathbf{R})$ una topología más fina que la asociada a $\{\gamma^q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$.

De este modo queda probado que las familias $\{\mu_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ y $\{\gamma^q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}}$ son equivalentes sobre $S_{even}(\mathbf{R})$.

■

Establecemos a continuación un teorema de tipo Paley–Wiener para la transformación de Chébli–Trimèche.

Proposición 1.2 *Sean $0 < p < 2$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\phi \in S_p$. Entonces, existe el límite que sigue*

$$\sigma_\phi = \lim_{k\to\infty} \left\|(\Delta - \rho^2)^k \phi\right\|^{1/2k}_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}.$$

Además, se tiene que

$$\sigma_\phi = \sup\{|y| : y \in sop(\mathcal{F}\phi)\}, \quad cuando\ \phi \neq 0$$

y

$$\sigma_\phi = 0, \quad cuando\ \phi = 0.$$

En particular, el soporte de $\mathcal{F}\phi$ está contenido en $[-\sigma,\sigma]$ si, y sólo si, $\sigma_\phi \leq \sigma$.

Demostración.
Definimos

$$\omega_\phi = \sup\{|y| : y \in \mathrm{sop}(\mathcal{F}\phi)\}, \quad \text{cuando } \phi \neq 0,$$

y

$$\omega_\phi = 0, \quad \text{cuando } \phi = 0.$$

Suponemos inicialmente que $\omega_\phi = 0$. En este caso $\phi = 0$ y $\sigma_\phi = 0$.

Nótese que, en virtud de [33, Theorem 4.27], si $\rho > 0$ la función $\mathcal{F}\phi$ es holomorfa en la banda $\{z \in \mathbf{C} : |\mathrm{Im}\ z| < \rho(\frac{2}{p} - 1)\}$. Por tanto, si $\rho > 0$ y $\omega_\phi < \infty$, sigue que $\phi = 0$ siendo $\sigma_\phi = \omega_\phi = 0$. Luego cuando $\rho > 0$ sólo nos resta por considerar el caso $\omega_\phi = +\infty$.

Asumimos ahora que $\omega_\phi > 0$. Una relación que nos resultará muy útil es la siguiente

$$\mathcal{F}((\Delta - \rho^2)^k\phi)(y) = y^{2k}\mathcal{F}(\phi)(y), \quad y \in (0,\infty), \tag{1.1}$$

la cual es válida para cada $k \in \mathbf{N}$. La fórmula (1.1) puede ser establecida integrando por partes y teniendo en cuenta que $\Delta\varphi_y(x) = (y^2 + \rho^2)\varphi_y(x), \quad y, x \in (0,\infty)$.

Distinguimos a continuación diferentes casos.

(i) Sea $q = 2$. De la igualdad de Plancherel para la transformación de Chébli–Trimèche ([109, Theorem II.4]) inferimos que

$$\begin{aligned}
\left\|(\Delta - \rho^2)^k\phi\right\|^2_{L_2((0,\infty),A(x)dx)} &= \left\|\mathcal{F}\left((\Delta - \rho^2)^k\phi\right)\right\|^2_{L_2((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})} \\
&= \int_0^\infty y^{4k}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2 \frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad k \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Cuando $\omega_\phi = +\infty$, para cada $k, N \in \mathbf{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{4k}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2 \frac{dy}{|c(y)|^2} &\geq \int_N^\infty y^{4k}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2 \frac{dy}{|c(y)|^2} \\
&\geq N^{4k}\int_N^\infty |\mathcal{F}(\phi)(y)|^2 \frac{dy}{|c(y)|^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, en este caso,

$$\left\|(\Delta-\rho^2)^k\phi\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k} \geq N\left(\int_N^\infty |\mathcal{F}(\phi)(y)|^2\frac{dy}{|c(y)|^2}\right)^{\frac{1}{4k}}, \quad k,N\in\mathbf{N}.$$

y ya que $\displaystyle\int_N^\infty |\mathcal{F}(\phi)(y)|^2\frac{dy}{|c(y)|^2}>0$, para cada $N\in\mathbf{N}$, se concluye

$$\liminf_{k\to\infty}\left\|(\Delta-\rho^2)^k\phi\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k}\geq N,\quad N\in\mathbf{N}.$$

Luego, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left\|(\Delta-\rho^2)^k\phi\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k}=+\infty$, cuando $\omega_\phi=+\infty$.

Supongamos en este punto que $\omega_\phi\in(0,\infty)$. Entonces $\rho=0$. Al ser $\mathcal{F}\phi$ una función continua en $\mathbf{R}$, para cada $0<\varepsilon<\omega_\phi$ tenemos que

$$\int_{\omega_\phi-\varepsilon}^{\omega_\phi}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2\frac{dy}{|c(y)|^2}>0.$$

Sea $0<\varepsilon<\omega_\phi$. Procediendo como antes obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\Delta^k\phi\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^2 &= \int_0^\infty y^{4k}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2\frac{dy}{|c(y)|^2}\\ &\geq \int_{\omega_\phi-\varepsilon}^{\omega_\phi} y^{4k}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2\frac{dy}{|c(y)|^2}\\ &\geq (\omega_\phi-\varepsilon)^{4k}\int_{\omega_\phi-\varepsilon}^{\omega_\phi}|\mathcal{F}(\phi)(y)|^2\frac{dy}{|c(y)|^2},\quad k\in\mathbf{N}\end{aligned}$$

Entonces

$$\liminf_{k\to\infty}\left\|\Delta^k\phi\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k}\geq\omega_\phi-\varepsilon.$$

La arbitrariedad de ε nos permite concluir que

$$\liminf_{k\to\infty}\left\|\Delta^k\phi\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k}\geq\omega_\phi.$$

(ii) Sea $2\leq q\leq\infty$. Como se comentó en el Prólogo, la inversa de la transformación generalizada de Fourier $\mathcal{F}$ viene dada por [33, pág. 91]

$$f(x)=\int_0^\infty\varphi_y(x)\mathcal{F}(f)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2},$$

cuando f se encuentra, por ejemplo, en S_p. Definimos pues la transformación $\mathcal{F}^{-1}$ por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x)=\int_0^\infty\varphi_y(x)\ f(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2},\quad f\in L_1((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2}).$$

Ya que $|\varphi_y(x)|\leq 1$, $x,y\in(0,\infty)$ ([33, Lemma 3.4, (i)], $\mathcal{F}^{-1}$ es una aplicación continua de $L_1((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$ en $L_\infty((0,\infty),A(x)dx)$. Además la identidad de Plancherel [109, Theorem 2.4] nos dice que $\mathcal{F}^{-1}$ es una isometría de

$L_2((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$ en $L_2((0,\infty),A(x)dx)$. El teorema de interpolación de Riesz–Thorin implica entonces que $\mathcal{F}^{-1}$ puede ser extendida a $L_r((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$ como un operador continuo de $L_r((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$ en $L_{r'}((0,\infty),A(x)dx)$, para cada $1<r<\infty$. Aquí r' como es usual representa el exponente conjugado de r, esto es, $r'=\frac{r}{r-1}$, cuando $1<r<\infty$.

Pretendemos probar que

$$\limsup_{k\to\infty}\left\|(\Delta-\rho^2)^k\phi\right\|^{1/2k}_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}\leq\omega_\phi.$$

Nótese que esto es claro cuando $\omega_\phi=+\infty$. Suponemos pues, en lo que sigue, que $\omega_\phi\in(0,\infty)$ y que, por tanto, $\rho=0$.

Sea $k\in\mathbf{N}$. De (1.1) sigue que

$$y^{2k}\mathcal{F}(\phi)(y)=\mathcal{F}(\Delta^k\phi)(y),\quad y\in(0,\infty).$$

Ya que $\phi\in S_p$, [33, Theorem 4.27] nos dice que $\mathcal{F}(\Delta^k\phi)\in L_1((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$. Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\left\|\Delta^k\phi\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}(y^{2k}\mathcal{F}(\phi)(y))\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}\\ &\leq c\left\|y^{2k}\mathcal{F}(\phi)(y)\right\|_{L_{q'}((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})}\\ &\leq c\,\omega_\phi^{2k}\left\|\mathcal{F}(\phi)\right\|_{L_{q'}((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})}.\end{aligned}$$

Además, al ser $\omega_\phi>0$, $\|\mathcal{F}(\phi)\|_{L_{q'}((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})}\in(0,\infty)$, y concluimos que

$$\limsup_{k\to\infty}\left\|\Delta^k\phi\right\|^{1/2k}_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}\leq\omega_\phi.$$

(iii) Sea $1\leq q<2$. Supongamos que $\rho=0$ y que $\omega_\phi\in(0,\infty)$. Teniendo en cuenta [33, (3.5)] podemos encontrar $c>0$ y $m\in\mathbf{N}$ tales que

$$0\leq A(x)\leq c(1+x^2)^m,\quad x\in(0,\infty).$$

Además, $S_p=S_{even}(\mathbf{R})$ y $\mathcal{F}(S_{even}(\mathbf{R}))=\mathcal{F}S_{even}(\mathbf{R})$. Por tanto, en virtud del Lema 1.1 existen $c>0$ y $\beta\in\mathbf{N}$ para las cuales

$$\left\|\Delta^k\phi\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}\leq c\max_{0\leq s\leq\beta}\left\|(1+x^2)^\beta\Delta^s(x^{2k}\mathcal{F}(\phi))\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}. \tag{1.2}$$

De acuerdo con las hipótesis impuestas a la función A tenemos que

$$\frac{A'(x)}{A(x)}=\frac{2\alpha+1}{x}+B(x),\quad x\in(0,\infty),$$

donde $\alpha>-1/2$ y B es una función C^∞ sobre $(0,\infty)$ tal que, para cada $s\in\mathbf{N}$, $\frac{d^s}{dx^s}B$ es acotada sobre $(0,\infty)$.

Por tanto, el operador Δ puede ser escrito como sigue

$$\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx} - B(x)\frac{d}{dx},$$

y una correcta manipulación conduce a

$$\max_{0\le s\le\beta} \left\|(1+x^2)^\beta \Delta^s(x^{2k}\mathcal{F}(\phi))\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)} \le c\ k^{2s}\ \omega_\phi^{2k}, \tag{1.3}$$

siempre que k sea suficientemente grande.

De (1.2) y (1.3) se deduce que

$$\limsup_{k\to\infty} \left\|\Delta^k\phi\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k} \le \omega_\phi. \tag{1.4}$$

Por otra parte, si $\rho > 0$ y $\omega_\phi = +\infty$, entonces (1.4) es obvia.

(iv) Sea $1 \le q \le \infty$. Para cada $k \in \mathbf{N}$, integrando por partes y aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left|(\Delta-\rho^2)^k\phi(x)\right|^2 A(x)dx \\ &= \int_0^\infty (\Delta-\rho^2)^k\phi(x)\overline{(\Delta-\rho^2)^k\phi(x)}A(x)dx \\ &= \int_0^\infty \overline{\phi(x)}(\Delta-\rho^2)^{2k}\phi(x)A(x)dx \\ &\le \|\phi\|_{L_{q'}((0,\infty),A(x)dx)} \left\|(\Delta-\rho^2)^{2k}\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}. \end{aligned}$$

Por tanto, de (i) y (ii) (en el caso $q = 2$) se sigue

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \lim_{k\to\infty} \left\|(\Delta-\rho^2)^k\phi(x)\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k} \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \left\|(\Delta-\rho^2)^{2k}\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}^{1/4k}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Además, para cada $k \in \mathbf{N}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} &\left\|(\Delta-\rho^2)^{k+1}\phi(x)\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^2 \le \\ &\le \left\|(\Delta-\rho^2)\phi(x)\right\|_{L_{q'}((0,\infty),A(x)dx)} \left\|(\Delta-\rho^2)^{2k+1}\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}. \end{aligned}$$

Nótese que, al ser $\phi \ne 0$, $(\Delta-\rho^2)\phi \ne 0$. En efecto, si $(\Delta-\rho^2)\phi = 0$ entonces, de (1.1) se deduce que $y^2\mathcal{F}(\phi) = 0$ y la unicidad de la transformación $\mathcal{F}$ ([33, Theorem 4.27]) conduce a que $\phi = 0$.

Por tanto, usando nuevamente (i) y (ii), conseguimos

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \lim_{k\to\infty} \left\|(\Delta-\rho^2)^{k+1}\phi(x)\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2(k+1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\|(\Delta-\rho^2)^{k+1}\phi(x)\right\|_{L_2((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k+1} \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \left\|(\Delta-\rho^2)^{2k+1}\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2(2k+1)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

De (1.5) y (1.6) se deduce que

$$\omega_\phi \leq \lim \inf_{k\to\infty} \left\|(\Delta - \rho^2)^k \phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k}.$$

(v) Combinando los resultados anteriores concluimos que

$$\omega_\phi = \lim_{k\to\infty} \left\|(\Delta - \rho^2)^k \phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),A(x)dx)}^{1/2k},$$

como queríamos ver.

∎

Sabemos que (véase [105, Proposition 7.1, (2)], [109, (III,3)] y [33, Lemma 4.11]) la transformación de Chébli–Trimèche y la transformación $\mathcal{F}_0$ de Fourier euclídea sobre $\mathbf{R}$ se relacionan mediante la siguiente relación

$$\mathcal{F}\phi = \mathcal{F}_0(\mathbf{A}\phi), \tag{1.7}$$

donde $\mathbf{A}$ representa la transformación de Abel definida, para cada $f \in \mathcal{D}_*$, por

$$(\mathbf{A}f)(x) = \int_x^\infty f(y)K(y,x)A(y)dy, \quad x \in (0,\infty).$$

Aquí, para cada $y \in (0,\infty)$, $K(y,\cdot)$ es una función continua, par, no negativa que está soportada en $[-y,y]$ y que permite dar la siguiente representación para la función φ_y

$$\varphi_y(x) = \int_0^x K(x,t)\cos(yt)dt, \quad x \in (0,\infty) \text{ e } y \in \mathbf{C}.$$

([105, Théorème 4.1], [109, (I.2)] y [33, pág. 92]).

Proposición 1.3 *Sea $\phi = \mathcal{F}(\Phi)$, donde $\Phi \in \mathcal{D}_* = \cup_{a>0}\mathcal{D}_{a,*}$. Entonces, para cada $1 \leq q \leq \infty$, se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\frac{d^k}{dx^k}\phi\right\|_{L_q((0,\infty),dx)}^{1/k} = \sigma_\phi,$$

donde $\sigma_\phi = \sup\{y \in (0,\infty) : y \in sop\,\Phi\}$, cuando $\phi \neq 0$, y $\sigma_\phi = 0$, cuando $\phi = 0$.

Demostración.
En virtud de [33, Lemma 4.10] y [109, Theorem III.1, (iii)], $\Phi \in \mathcal{D}_{a,*}$, para cierto $a > 0$, si, y sólo si, $\mathbf{A}\Phi \in \mathcal{D}_{a,*}$.

Puede deducirse entonces de [6, Theorem 1], teniendo en cuenta (1.7), que

$$\sigma_\phi = \lim_{k\to\infty} \left\|\frac{d^k}{dx^k}\phi\right\|_{L_q((0,\infty),dx)}^{1/k}, \tag{1.8}$$

donde σ_ϕ es definido como en el enunciado de la proposición. En efecto, de (1.7) se sigue que:

$$\mathbf{A}\mathcal{F}^{-1}(\phi) = \mathcal{F}_0^{-1}(\phi).$$

Por tanto [6, Theorem 1] implica que

$$\sup\{|y| : y \in \mathrm{sop}\mathbf{A}(\Phi)\} = \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{d^k}{dx^k}\phi \right\|_{L_q((0,\infty),dx)}^{1/k}.$$

Luego, a tenor de [33, Lemma 4.10], concluimos que (1.8) es cierto.

■

1.3 Teoremas de tipo Paley–Wiener para la transformación de Chébli–Trimèche en espacios L_p con pesos.

Para cada $\sigma > 0$ denotamos por E_σ el espacio de las funciones Φ enteras, pares y tales que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$ para la cual

$$|\Phi(z)| \le c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Inspirados en los trabajos de T.G. Genchev ([58] y [59]) describimos subespacios de E_σ constituidos por funciones que son transformadas de funciones de soporte contenido en $[0,\sigma]$, mediante la transformación de Chébli–Trimèche.

Proposición 1.4 *Sean $\sigma > 0$ y $\Phi \in E_\sigma$. Supongamos que $\int_0^\infty |\Phi(x)|x^{2\alpha+1}dx < \infty$. Entonces existe una función ϕ continua y acotada en $(0,\infty)$ tal que $\mathcal{F}(\phi) = \Phi$ y siendo $\phi(x) = 0,\ x \ge \sigma$.*

Demostración.
De [58, Lemma 3] se deduce que Φ es una función acotada en $\mathbf{R}$. Entonces [58, Lemma 1] implica que existe $M > 0$ tal que

$$|\Phi(z)| \le M e^{\sigma|\mathrm{Im}\, z|}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{1.9}$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$ elegimos una función $\psi_n \in \mathcal{D}_*$ tal que
(i) $\psi_n(x) = 0, \quad x \notin (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$,
(ii) $\psi_n(x) \ge 0, \quad x \in (0,\infty)$, y
(iii) $\int_o^\infty \psi_n(x)A(x)dx = 1$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}(\psi_n)(y) \to_{n\to\infty} 1$, uniformemente en $y \in (0, Y)$, para cada $Y > 0$. A tenor de la propiedad (iii) podemos escribir.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\psi_n)(y) - 1 &= \int_0^\infty \varphi_y(x)\psi_n(x)A(x)dx - \int_0^\infty \psi_n(x)A(x)dx \\ &= \int_{1/n+1}^{1/n} (\varphi_y(x) - 1)\psi_n(x)A(x)dx, \quad y \in (0,\infty) \text{ y } n \in \mathbf{N}.\end{aligned}$$

La función $\varphi_y(x)$ es continua en $\{(x,y):\ x\in[0,\infty)\times\mathbf{C}\}$ y $\varphi_y(0)=1,\ y\in\mathbf{C}$. Por tanto, fijados $\varepsilon,\gamma>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$|\varphi_y(x)-1|<\varepsilon,\quad x\in(0,\delta) \text{ e } y\in[0,\gamma].$$

Luego, para cierto $n_0\in\mathbf{N}$ se tiene que

$$|\mathcal{F}(\psi_n)(y)-1|<\varepsilon\int_{1/n+1}^{1/n}\psi_n(x)A(x)dx=\varepsilon,\quad n\geq n_0,\ n\in\mathbf{N} \text{ e } y\in[0,\gamma].$$

Definimos, para cada $n\in\mathbf{N}$, $\phi_n=\mathcal{F}^{-1}(\Phi\mathcal{F}(\psi_n))$. De (1.9) se sigue, en virtud de [105, Théorème 7.2], $\Phi\mathcal{F}(\psi_n)\in\mathcal{H}_{*,\sigma+\frac{1}{n}}$ y, por tanto, $\phi_n\in\mathcal{D}_{*,\sigma+\frac{1}{n}}$, para cada $n\in\mathbf{N}$. Asimismo consideramos la función

$$\phi(x)=\int_0^\infty\varphi_y(x)\Phi(y)\frac{dy}{|c(y)|^2},\quad x\in(0,\infty).$$

De este modo, ya que $\frac{1}{|c(y)|^2}\sim y^{2\alpha+1}$, cuando $y\to\infty$ ([109, pág. 99]), y que $|\varphi_y(x)|\leq 1,\ y,x\in(0,\infty)$ ([33, Lemma 3.4, (i)]), ϕ es una función continua, par y acotada en $\mathbf{R}$.

Tenemos que, para cada $n\in\mathbf{N}$,

$$|\varphi_y(x)\Phi(y)(\mathcal{F}(\psi_n)(y)-1)|\,\frac{1}{|c(y)|^2}\leq c\left\{\begin{array}{l}|\Phi(y)|,\ y\in(0,1)\\ |\Phi(y)|\ y^{2\alpha+1},\ y\in(1,\infty)\end{array}\right.,$$
$$x\in(0,\infty).$$

Por tanto, aplicando el teorema de la convergencia dominada conduce a

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\phi(x),\quad x\in(0,\infty).$$

Además, ya que $\phi_n(x)=0,\ x\geq\sigma+\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}$, concluimos que $\phi(x)=0,\ x\geq\sigma$.

Finalmente, observamos que, para cada $y\in(0,\infty)$,

$$\Phi(y)=\lim_{n\to\infty}\Phi(y)\mathcal{F}(\psi_n)(y)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}(\phi_n)(y)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sigma+1}\phi_n(x)\varphi_y(x)A(x)dx=\int_0^\sigma\phi(x)\varphi_y(x)A(x)dx=\mathcal{F}(\phi)(y).$$

El intercambio del límite y la integral está garantizado de nuevo por el teorema de la convergencia dominada.

■

Sea $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ una función medible no negativa sobre $(0,\infty)$ y $1\leq p\leq\infty$. El espacio $L_p(u)$ de Lebesgue está constituido por las funciones f medibles sobre $(0,\infty)$ tales que

$$\|f\|_{p,u}=\left\{\int_0^\infty u(x)|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}<\infty,\quad \text{cuando } 1\leq p<\infty,$$

y, si $p = \infty$,

$$\|f\|_{\infty,u} = \sup \operatorname{esen}_u |f| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_{\{x\in(0,\infty):\ |f(x)|>\varepsilon\}} u(x)dx = 0 \right\} < \infty.$$

Cuando $u = 1$ escribimos, como es usual, $L_{p,u}$ y $\| \ \|_{p,u}$, L_p y $\| \ \|_p$, respectivamente. No es difícil ver que $L_{\infty,u} = L_\infty$, para cada función u en las condiciones especificadas.

Sean $u, v \in L^1_{\text{loc}}(0,\infty)$ funciones medibles no negativas sobre $(0,\infty)$ y $1 \leq p, q \leq \infty$. Decimos que el par $(u, v) \in \mathcal{F}_{p,q}$ cuando la transformación inversa de Chébli–Trimèche $\mathcal{F}^{-1}$ definida por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_0^\infty \varphi_y(x) f(y) \frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad x \in (0,\infty),$$

para cada $f \in L_1((0,\infty), \frac{dy}{|c(y)|^2})$, puede ser extendida a $L_p(u)$ como una aplicación continua de $L_p(u)$ en $L_q(v)$. A tenor de lo comentado en el apartado (ii) de la prueba de la Proposición 1.2 el par $(\frac{1}{|c(y)|^2}, A(y))$ está en $\mathcal{F}_{p,p'}$, para cada $p \in [1,2]$.

En la siguiente proposición presentamos un teorema tipo Paley–Wiener en espacios de Lebesgue pesados.

Proposición 1.5 *Sean $\sigma > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $(u, v) \in \mathcal{F}_{p,q}$ de manera que*
(i) existan $c, N > 0$ tales que $u(x) \geq c$, $x \in (N,\infty)$, y
(ii) $v^{1-q'} \in L_1((0, \sigma + 1), dx)$.
Supongamos que $\Phi \in E_\sigma \cap L_{p,u}$. Entonces existe $\phi \in L_{q,v}$ tal que $\phi(x) = 0$, para casi todo $x \geq \sigma$ y $\mathcal{F}(\phi) = \Phi$.

Demostración

Consideramos, para cada $n \in \mathbf{N}$, una función ψ_n como en la prueba de la Proposición 1.4.

Sabemos que $\Phi\mathcal{F}(\psi_n) \in E_{\sigma+\frac{1}{n}}$, para cada $n \in \mathbf{N}$.

Supongamos que $1 < p, q < \infty$. En los otros casos se procede análogamente.

Sea $n \in \mathbf{N}$.

Ya que, para ciertas $c, N > 0$ se tiene que $u(x) \geq c$, $x \in (N,\infty)$, podemos escribir que

$$\int_N^\infty y^{2\alpha+1} |\mathcal{F}(\psi_n)(y)\Phi(y)|\, dy$$

$$\leq \left\{ \int_N^\infty y^{(2\alpha+1)p'} |\mathcal{F}(\psi_n)(y)|^{p'} dy \right\}^{1/p'} \left\{ \int_N^\infty |\Phi(y)|^p\, dy \right\}^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{c} \left\{ \int_0^\infty y^{(2\alpha+1)p'} |\mathcal{F}(\psi_n)(y)|^{p'} dy \right\}^{1/p'} \left\{ \int_0^\infty u(y)\, |\Phi(y)|^p\, dy \right\}^{1/p} < \infty$$

Hemos tenido en cuenta que $\mathcal{F}(\psi_n) \in \mathcal{H}_*$.

Por tanto
$$\int_0^\infty y^{2\alpha+1} |\mathcal{F}(\psi_n)(y)\Phi(y)|\, dy < \infty. \tag{1.10}$$

Atendiendo a la Proposición 1.4, $\mathcal{F}(\phi_n) = \mathcal{F}(\psi_n)\Phi$, para una cierta función ϕ_n continua y acotada en $(0, \infty)$ tal que $\phi_n(x) = 0,\ x \geq \sigma + \frac{1}{n}$.

Al ser $\frac{1}{|c(y)|^2} \sim y^{2\alpha+1}$, cuando $y \to \infty$ ([109, pág. 99]), (1.10) implica que $\mathcal{F}(\phi_n) \in L_1((0,\infty), \frac{dy}{|c(y)|^2})$. Además $\phi_n \in L_1((0,\infty), A(x)dx)$, y de [109, Theorem II.3] se sigue que

$$\phi_n(x) = \int_0^\infty \varphi_y(x)\mathcal{F}(\psi_n)(y)\Phi(y)\frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad x \in (0,\infty).$$

Podemos escribir, ya que $(u,v) \in \mathcal{F}_{p,q}$,

$$\|\phi_n - \phi_m\|_{q,v} \leq c\|(\mathcal{F}(\psi_n) - \mathcal{F}(\psi_m))\Phi\|_{p,u}, \quad n,m \in \mathbf{N}. \tag{1.11}$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$|\mathcal{F}(\psi_n)(y)| \leq \int_0^\infty \psi_n(x)A(x)dx = 1, \quad y \in (0,\infty).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $\Phi \in L_{p,u}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_\delta^\infty |\mathcal{F}(\psi_n)(y) - \mathcal{F}(\psi_m)(y)|^p\, |\Phi(y)|^p\, u(y)dy < \varepsilon, \quad n,m \in \mathbf{N}.$$

Además, como establecimos durante la prueba de la proposición anterior, $\mathcal{F}(\psi_n) \to 1$ cuando $n \to \infty$, uniformemente en $(0, Y)$, para cada $Y > 0$. Luego, existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tal que

$$\int_0^\delta |\mathcal{F}(\psi_n)(y) - \mathcal{F}(\psi_m)(y)|^p\, |\Phi(y)|^p\, u(y)dy < \varepsilon, \quad n,m \geq n_0.$$

Concluimos pues que la sucesión $(\mathcal{F}(\psi_n)\Phi)_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy en $L_{p,u}$. De (1.11) se infiere entonces que $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L_q(v)$. Al ser $L_q(v)$ un espacio completo, existe $\phi \in L_q(v)$ para la cual $\phi_n \to \phi$, cuando $n \to \infty$, en $L_q(v)$. Por tanto, para una cierta subsucesión $(\phi_{n_j})_{j\in\mathbf{N}}$ de $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\phi_{n_j}(x) \to \phi(x)$, cuando $j \to \infty$, para casi todo $x \in (0,\infty)$. Ya que $\phi_{n_j}(x) = 0,\ x \geq \sigma + \frac{1}{n_j}$, para cada $j \in \mathbf{N}$, tenemos que $\phi(x) = 0$, para casi todo $x \geq \sigma$.

Finalmente, observamos que

$$\Phi(y) = \lim_{n\to\infty} \Phi(y)\mathcal{F}(\psi_n)(y) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sigma+1} \phi_n(x)\varphi_y(x)A(x)dx$$
$$= \int_0^{\sigma+1} \phi(x)\varphi_y(x)A(x)dx, \quad y \in (0,\infty)$$

Para probar esta última igualdad aplicamos la desigualdad de Hölder como sigue:

$$\left|\int_0^{\sigma+1}(\phi_n(x)-\phi(x))\varphi_y(x)A(x)dx\right| \le \int_0^{\sigma+1}|\phi_n(x)-\phi(x)|\,|\varphi_y(x)|\,A(x)dx$$

$$\le \left\{\int_0^{\sigma+1}|\phi_n(x)-\phi(x)|^q\,v(x)dx\right\}^{1/q}\left\{\int_0^{\sigma+1}v(x)^{1-q'}\,|\varphi_y(x)|^{q'}\,A(x)^{q'}dx\right\}^{1/q'}$$

$$\le c\left\{\int_0^{\sigma+1}v(x)^{1-q'}dx\right\}^{1/q'}\|\phi_n-\phi\|_{q,v}\,, \quad n\in\mathbf{N},\ y\in(0,\infty).$$

Hemos tenido en cuenta que $|\varphi_y(x)|\le 1,\ x,y\in(0,\infty)$ ([33, Lemma 3.4, (i)]) y que $A(x)\le A(\sigma{+}1),\ x\in(0,\sigma{+}1)$. Por tanto, ya que $v^{1-q'}\in L_1((0,\sigma{+}1),dx)$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sigma+1}\phi_n(x)\varphi_y(x)A(x)dx = \int_0^{\sigma+1}\phi(x)\varphi_y(x)A(x)dx, \quad y\in(0,\infty).$$

■

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es la propiedad que sigue.

Corolario 1.6 *Sean $\sigma>0$ y $1\le p\le 2$. Si $\Phi\in E_\sigma\cap L_p((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$, entonces existe $\phi\in L_{p'}((0,\infty),A(x)dx)$ tal que $\phi(x)=0$, para casi todo $x\in(\sigma,\infty)$, y siendo $\Phi=\mathcal{F}(\phi)$, siempre que $\int_0^{\sigma+1}A(x)^{1-p}dx<\infty$.*

Demostración.
Como ya fue comentado, $\mathcal{F}^{-1}$ puede ser extendida a $L_p((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$ como un operador acotado de $L_p((0,\infty),\frac{dy}{|c(y)|^2})$ en $L_{p'}((0,\infty),A(x)dx)$. Además, se tiene que $\frac{1}{|c(y)|^2}\sim y^{2\alpha+1}$, cuando $y\to\infty$ ([109, pág. 99]). Por tanto, existen $c,N>0$ tales que $\frac{1}{|c(y)|^2}\ge c,\ y\ge N$. Basta ahora recurrir a la Proposición 1.5. ■

Capítulo 2

Hiperciclicidad y caos para operadores de convolución en hipergrupos de Chébli–Trimèche.

2.1 Introducción.

En este capítulo estudiamos la hiperciclicidad y el caos para operadores de convolución en hipergrupos de Chébli–Trimèche.

G. Herzog [69] probó una propiedad de universalidad para las soluciones de la ecuación del calor. Este autor introdujo, para cada $\beta > 0$, el espacio A_β constituido por las funciones reales y continuas ϕ definidas sobre $\mathbf{R}$ tales que

$$\lim_{|x|\to\infty} e^{-\beta|x|}\phi(x) = 0.$$

Fijamos $\beta > 0$. Definimos, para cada $t > 0$ y $\phi \in A_\beta$, $\tau_t^*\phi$ por

$$(\tau_t^*\phi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \phi(s)ds, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Nótese que, para cada $t > 0$, τ_t^* es un operador de convolución usual. En [69, Theorem 1.1] se estableció que el conjunto

$$U_\beta = \left\{\phi \in A_\beta : \ \overline{\{\tau_n^*\phi : \ n \in \mathbf{N}\}} = C(\mathbf{R},\mathbf{R})\right\}$$

es un conjunto residual de A_β, esto es, $A_\beta \setminus U_\beta$ es de primera categoría en A_β. Por $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ denotamos el espacio de las funciones reales y continuas sobre $\mathbf{R}$, el cual es dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre cada compacto de $\mathbf{R}$.

En la sección 2 de este capítulo probamos, para ciertos operadores de convolución de Chébli–Trimèche, el resultado correspondiente al mostrado en [69, Theorem 1.1]. Nuestro resultado puede verse como una extensión del establecido en [19] para los operadores de convolución de Hankel.

La sección 3 se dedica al estudio de la hiperciclicidad y el caos de los operadores de convolución de Chébli–Trimèche definidos por elementos de E'_* sobre $\mathcal{D}'_*$ y E_*. Concretamente, motivados por los resultados mostrados en [34] y [61], probamos que si un elemento de E'_* no es un múltiplo escalar de la funcional de Dirac, entonces define un operador de convolución hipercíclico y caótico sobre $\mathcal{D}'_*$ y E_*.

2.2 Una propiedad de universalidad para ciertos operadores de convolución $\sharp$.

Como en [19], consideramos el conjunto $\mathcal{A}$ que está formado por las funciones h definidas en $[0,\infty)$ que son positivas, decrecientes, continuas en $[0,\infty)$ y que satisfacen la desigualdad que sigue

$$h(x+y) \geq c\,h(x)\,h(y), \quad x,y \in [0,\infty), \tag{2.1}$$

donde c es una constante positiva que no depende de $x,y \in [0,\infty)$.

Si $h \in \mathcal{A}$, representamos por E_h el espacio de funciones constituido por aquellas f continuas sobre $[0,\infty)$ tales que $\lim_{x\to\infty} h(x)f(x) = 0$. Sobre E_h se define la norma $\|\cdot\|_h$ mediante

$$\|f\|_h = \sup_{x\in[0,\infty)} h(x)|f(x)|.$$

Proposición 2.1 *Sea $h \in \mathcal{A}$. E_h es un espacio de Banach separable.*

Demostración.
Probamos en primer lugar que E_h es un espacio separable.
Denotamos por P el espacio de polinomios en $\mathbf{R}$ con coeficientes racionales.
Sea $n \in \mathbf{N}$. Definimos el conjunto Q_n como sigue. Una función g está en Q_n cuando toma la forma siguiente

$$g(x) = \begin{cases} p(x), & x \in [0,n] \\ p(n)(n+1-x), & x \in [n,n+1) \\ 0, & x \in [n+1,\infty) \end{cases} \tag{2.2}$$

para algún $p \in P$. Es claro que Q_n es numerable por serlo P. Llamamos Q a la unión $\cup_{n=1}^{\infty} Q_n$. De este modo Q es numerable y está contenido en E_h.

Vamos a ver ahora que Q es denso en E_h. Sean $f \in E_h$ y $\varepsilon > 0$. Ya que $\lim_{x\to\infty} h(x)f(x) = 0$, existe $n > 0$ tal que $|h(x)f(x)| < \varepsilon,\ x \geq n$. Elegimos $p \in P$ de manera que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon,\ x \in [0,n]$. Definimos la función g asociada a p por (2.2). Tenemos que

- Si $x \in [0, n]$: $|h(x)(f(x) - g(x))| \leq h(x)|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon h(0)$.
- Si $x \in [n, n+1)$: $|h(x)(f(x) - g(x))| \leq |h(x)f(x)| + h(x)|g(x)| < \varepsilon + h(n)|p(n)| \leq \varepsilon + h(1)|p(n) - f(n)| + h(n)|f(n)| \leq (2 + h(1))\varepsilon$.
- Si $x \in [n+1, \infty)$: $|h(x)(f(x) - g(x))| \leq |h(x)f(x)| < \varepsilon$.

Por tanto, para una cierta $c > 0$ que no depende de ε, conseguimos que

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |h(x)(f(x) - g(x))| \leq c\, \varepsilon.$$

Concluimos así que Q es denso en E_h y que E_h es separable.

Utilizando argumentos usuales podemos probar que E_h es un espacio de Banach.

■

Sean $0 < p \leq 2$ y $\phi \in S_p$. Definimos T_ϕ como el operador de convolución asociado a ϕ, esto es,

$$T_\phi(f) = \phi \sharp f, \quad f \in E_h.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, el operador $T_{\phi,n}$ es dado por

$$T_{\phi,n}(f) = \phi^{\sharp n} \sharp f, \quad f \in E_h,$$

donde $\phi^{\sharp n} = \overbrace{\phi \sharp \ldots \sharp \phi}^{n}$. Nótese que, atendiendo a [33, Lemma 5.2, (i)], $\phi^{\sharp n} \in S_p$ y, entonces, $T_{\phi,n} = T_{\phi^{\sharp n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

A continuación presentamos nuestro resultado de universalidad para el operador de convolución T_ϕ.

Proposición 2.2 *Sean $\phi \in S_1$ y $h \in \mathcal{A}$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\phi/h \in L_1((0,\infty), A(x)dx)$;

(ii) $\mathcal{F}(\phi)(i\rho) = 1$ y $|\mathcal{F}(\phi)(x)| < 1$, para casi todo $x \in (0,\infty)$;

(iii) $h(x)\cosh(x)$ es una función acotada en $[0,\infty)$;

(iv) la función $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n$ es holomorfa en $D(0,r)$, donde $r > 1$ y $\delta_n = \int_0^\infty b_n(x)\phi(x)A(x)dx$, $n \in \mathbf{N}$.

Entonces el conjunto

$$U_\phi = \left\{ f \in E_h : \overline{\{T_{\phi,n}(f) : n \in \mathbf{N}\}} = C([0,\infty)) \right\}$$

es un conjunto residual en E_h, donde $C([0,\infty))$ representa el espacio de las funciones continuas en $[0,\infty)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre $[0,a]$, para cada $a > 0$.

Demostración.

El operador T_ϕ es acotado de E_h en $C([0,\infty))$. En efecto, sea $f \in E_h$. Sabemos que, para cada $x, y \in (0,\infty)$, $D(x,y,z)A(z)dz$ es una medida de probabilidad sobre $[0,\infty)$ soportada en $[|x-y|, |x+y|]$ ([38, pág. 453] y [33, pág. 90]). Por tanto, podemos escribir

$$|(\tau_x f)(y)| \leq \int_{|x-y|}^{x+y} |f(z)| D(x,y,z)A(z)dz \leq \|f\|_h \int_{|x-y|}^{x+y} \frac{1}{h(z)} D(x,y,z)A(z)dz$$

$$\leq \frac{1}{h(x+y)} \|f\|_h \leq c \frac{\|f\|_h}{h(x)h(y)}, \quad x, y \in [0,\infty).$$

Se sigue entonces que

$$|T_\phi(f)(x)| \leq \int_0^\infty |\phi(y)| \, |(\tau_x f)(y)| \, A(y)dy$$

$$\leq c \, \|f\|_h \, \frac{1}{h(x)} \int_0^\infty \frac{|\phi(y)|}{h(y)} A(y)dy, \quad x \in (0,\infty).$$

Atendiendo ahora a (i) obtenemos, para cada $a > 0$,

$$\sup_{x \in [0,a]} |T_\phi(f)(x)| \leq c\|f\|_h,$$

siendo $c > 0$ independiente de f.

Observamos que para que T_ϕ sea acotado de E_h en $C([0,\infty))$ es suficiente con que se verifique la propiedad (i).

Probaremos a continuación que $T_{\phi,n}$ es acotado de E_h en $C([0,\infty))$, para cada $n \in \mathbf{N}$. De acuerdo con lo comentado, basta ver que, para cada $n \in \mathbf{N}$, $\phi^{\sharp n}/h \in L_1((0,\infty), A(x)dx)$.

Tratemos el caso $n = 2$. A tenor de las propiedades ya comentadas para la medida $D(x,y,z)A(z)dz$, $x, y \in [0,\infty)$, y ya que la función h es decreciente, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{|(\phi \sharp \phi)(x)|}{h(x)} A(x)dx$$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^\infty A(y)|\phi(y)| \int_{|x-y|}^{x+y} |\phi(z)| D(x,y,z)A(z)dzdy \, \frac{A(x)}{h(x)} dx$$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^\infty A(y) \; |\phi(y)| \; h(|x-y|) \; \tau_x(|\phi/h|)(y) \; dy \; \frac{A(x)}{h(x)} dx.$$

Además, si $0 \leq x \leq y < \infty$, $h(y) = h(y-x+x) \geq c \; h(y-x)h(x)$. Por tanto,

$$\int_0^\infty |\phi(y)| \; h(|x-y|) \; \tau_x(|\phi/h|)(y) \; A(y)dy$$

$$= \left(\int_0^x + \int_x^\infty \right) \; |\phi(y)| \; h(|x-y|) \; \tau_x(|\phi/h|)(y) \; A(y)dy$$

$$\leq c \left(h(x) \int_0^x \frac{|\phi(y)|}{h(y)} \; \tau_x(|\phi/h|)(y) \; A(y)dy \right.$$

$$\left. + h(x) \int_x^\infty \frac{|\phi(y)|}{h(y)} \; \tau_x(|\phi/h|)(y) \; A(y)dy \right)$$

$$\leq c \; h(x) \; \left(\frac{\phi}{h} \sharp \frac{\phi}{h} \right)(x), \quad x \in (0, \infty).$$

De aquí se deduce que

$$\int_0^\infty \frac{|(\phi \sharp \phi)(x)|}{h(x)} A(x)dx \leq c \; \left\| \frac{\phi}{h} \sharp \frac{\phi}{h} \right\|_{L_1((0,\infty), A(x)dx)}.$$

En virtud de [109, (II.14)] y [33, Theorem 2.4, (iii)], concluimos que

$$\frac{(\phi \sharp \phi)}{h} \in L_1((0, \infty), A(x)dx).$$

De un modo análogo puede probarse que si $\phi^{\sharp n}/h \in L_1((0, \infty), A(x)dx)$, para cierto $n \in \mathbf{N}$, entonces $\phi^{\sharp(n+1)}/h \in L_1((0, \infty), A(x)dx)$. Por tanto un argumento inductivo nos da que $\phi^{\sharp n}/h \in L_1((0, \infty), A(x)dx)$, para cada $n \in \mathbf{N}$.

Denotamos por E_h^0 el subespacio de E_h constituido por las funciones $f \in E_h$ verificando que $f(x) = 0, \; x \geq a$, para algún $a > 0$. Como puede comprobarse sin dificultad E_h^0 es denso en E_h.

Nuestro próximo objetivo es ver que, para cada $f \in E_h^0$,

$$\lim_{n \to \infty} T_{\phi,n}(f)(x) = 0,$$

uniformemente en $x \in (0, \infty)$.

Sea $f \in E_h^0$. De [33, Theorem 2.4,(ii)] y [109, Theorem 2.3] se sigue que

$$T_{\phi,n}(f)(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}(f)(y) \; (\mathcal{F}(\phi)(y))^n \; \varphi_y(x) \; \frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad x \in (0, \infty), \; n \in \mathbf{N}.$$

Sabemos que $\frac{1}{|c(y)|^2} \sim y^{2\alpha+1}$, cuando $y \to \infty$ [109, pág. 99]. Elegimos $l \in \mathbf{N}$ tal que $l > \alpha+1$. En virtud de [33, Theorem 4.27] $(1+y^2)^l \mathcal{F}(\phi)(y) \to 0$, cuando $y \to \infty$. Existe entonces $y_0 > 0$ verificando que $(1 + y^2)^l |\mathcal{F}(\phi)(y)| < \frac{1}{2}, \; y > y_0$. Por tanto, ya que $f \in E_h^0$ y que $|\varphi_y(x)| \leq 1, \; y, x \in [0, \infty)$ [33, Lemma 3.4, (i)] obtenemos

$$\left| \int_{y_0}^\infty \mathcal{F}(f)(y) \; (\mathcal{F}(\phi)(y))^n \; \varphi_y(x) \; \frac{dy}{|c(y)|^2} \right|$$

$$\leq c \int_{y_0}^\infty \left((1 + y^2)^l \, |\mathcal{F}(\phi)(y)| \right)^n \; \frac{y^{2\alpha+1}}{(1 + y^2)^l} dy$$

$$\leq c \left(\frac{1}{2} \right)^n \int_0^\infty \frac{y^{2\alpha+1}}{(1 + y^2)^l} dy, \quad x \in (0, \infty). \tag{2.3}$$

Por otra parte, podemos también escribir que

$$\left|\int_0^{y_0} \mathcal{F}(f)(y)\ (\mathcal{F}(\phi)(y))^n\ \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}\right| \leq c\int_0^{y_0} |\mathcal{F}(\phi)(y)|^n\,dy, \quad x\in(0,\infty). \tag{2.4}$$

Combinando (2.3) y (2.4) y recurriendo al teorema de la convergencia dominada, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T_{\phi,n}(f)(x) = 0, \text{ uniformemente en } x\in(0,\infty).$$

Hemos tenido en cuenta que $|\mathcal{F}(\phi)(y)| < 1$, para casi todo $y \in (0,\infty)$ (propiedad (ii) en el enunciado).

De este modo hemos probado que el conjunto

$$\left\{f\in E_h:\ \lim_{n\to\infty} T_{\phi,n}f \text{ existe en } C[0,\infty)\right\}$$

es denso en E_h.

Por tanto, de acuerdo con [65, Proposition 6], nuestro resultado queda probado cuando veamos que el conjunto U_ϕ definido por

$$U_\phi = \left\{f\in E_h:\ \overline{\{T_{\phi,n}(f):\ n\in\mathbf{N}\}} = C([0,\infty))\right\},$$

no es vacío.

Definimos ahora el espacio de Banach F_h como sigue. Decimos que una función f está en el conjunto F cuando admite la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)a_n, \quad x\in[0,\infty), \tag{2.5}$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0$. Denotamos por c_0 al espacio de las sucesiones reales convergentes a 0.

Podemos observar que la serie en (2.5) converge para cada $x\in(0,\infty)$, ya que $0\leq b_n(x)\leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in\mathbf{R}$ ([48, Corollary 2.1]). Además (6) garantiza la unicidad de la representación (2.5) para f.

Sobre F definimos la norma $\mathfrak{p}_h$ como sigue

$$\mathfrak{p}_h(f) = \sup_{p\in\mathbf{N},\ x\in(0,\infty)} h(x)|\Delta^p f(x)|, \quad f\in F.$$

Si $f\in F$, $\mathfrak{p}_h(f)<\infty$. En efecto, sea $f\in F$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)a_n,\ x\in(0,\infty),$$

siendo $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\in c_0$. Teniendo en cuenta (5), (6), (7), (8) y la propiedad (iii), existe una constante C de manera que

$$h(x)|\Delta^p f(x)| \leq c\ h(x)\sum_{n=p}^{\infty} b_{n-p}(x) \leq c\ h(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq c\ h(x)\cosh(x) < C,$$

para cada $x \in (0,\infty)$ y $p \in \mathbf{N}$. Luego, $\sup_{p\in\mathbf{N},x\in(0,\infty)} h(x)|\Delta^p f(x)| < \infty$.

Representamos por F_h el espacio F cuando es dotado de la topología asociada a la norma $\mathfrak{p}_h$.

Sobre c_0 consideramos su norma usual, esto es, la generada por la norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|, \quad (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0.$$

Probaremos ahora que la aplicación L definida por

$$L((a_n)_{n\in\mathbf{N}})(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x), \quad x \in (0,\infty),$$

es un homeomorfismo de c_0 sobre F_h.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0$. Recurriendo de nuevo a las propiedades de $b_n, n \in \mathbf{N}$, conseguimos

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_h(L((a_n)_{n\in\mathbf{N}})) &= \sup_{p\in\mathbf{N},x\in(0,\infty)} h(x)\left|\sum_{n=p}^{\infty} b_{n-p}(x)a_n\right| \\ &\leq \|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_\infty \sup_{x\in(0,\infty)} h(x)\cosh(x).\end{aligned}$$

Por tanto L es una aplicación continua de c_0 en F_h.

El carácter inyectivo de la aplicación L sigue de (6).

Sea ahora $f \in F$. Supongamos que $f = L((a_n)_{n\in\mathbf{N}})$, donde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0$.

Entonces, de (6), para cada $n \in \mathbf{N}$, $a_n = (-1)^n \Delta^n f(0)$. Podemos pues escribir

$$\|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\Delta^n f(0)| \leq \frac{1}{h(0)}\mathfrak{p}_h(f).$$

Probamos así que L^{-1}, la inversa de L, es continua.

Ya que c_0 es un espacio de Banach separable, también lo es F_h.

El espacio F está contenido en E_h. En efecto, sea $f \in F$ admitiendo la representación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x), \quad x \in [0,\infty),$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$, $n > n_0$. De (7) y teniendo en cuenta la propiedad (iii) se sigue

$$\left|h(x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n b_n(x)\right| \leq \varepsilon h(x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n(x) \leq \varepsilon h(x)\cosh(x) \leq c\,\varepsilon,\ x \in (0,\infty). \tag{2.6}$$

Recurriendo de nuevo a (iii), obtenemos que $\lim_{x\to\infty} h(x)x^{2n} = 0$, para cada $n \in \mathbf{N}$. Ciertamente, si $n \in \mathbf{N}$,

$$h(x)x^{2(n+1)} = h(x)\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}(2(n+1))!$$

$$\leq h(x)\cosh x\ (2(n+1))! \leq c\,(2(n+1))!, \quad x \in (0,\infty).$$

Por tanto, para cierto $x_0 > 0$, se tiene

$$\left| h(x)\sum_{n=0}^{n_0} a_n b_n(x) \right| \leq \|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_\infty \sum_{n=0}^{n_0} \frac{h(x)x^{2n}}{(2n)!} < \varepsilon, \quad x \geq x_0. \tag{2.7}$$

La arbitrariedad de ε permite concluir de (2.6) y (2.7) que $\lim_{x\to\infty} h(x)f(x) = 0$. Vemos así que $f \in E_h$.

Además, el espacio F es denso en $C([0,\infty))$. Para ver esto es suficiente probar que, para cada $k \in \mathbf{N}$, $p_k(z) = z^{2k}$, $z \in [0,\infty)$, está en la clausura en $C([0,a))$ del espacio vectorial generado por $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, cuando $a > 0$. Esto es así ya que el espacio de los polinomios reales en z^2 es denso en $C([0,\infty))$.

Sean $k \in \mathbf{N}$ y $a > 0$. Definimos una función q_k C^∞ sobre $\mathbf{R}$ tal que $q_k(x) = 0$, $|x| > a+1$, y $q_k(x) = p_k(x)$, $|x| < a$. De este modo $q_k \in \mathcal{D}_*$. Por tanto, [105, Théorème 7.1] implica que $\mathcal{F}(q_k) \in H_* \subset L_1((0,\infty), \frac{dy}{|c(y)|^2})$ y que

$$q_k(x) = \int_0^\infty \varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad x \in [0,\infty).$$

Sea $\varepsilon > 0$. En virtud de [33, Lemma 3.4] existe $y_0 > 0$ de manera que

$$\left| \int_{y_0}^\infty \varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2} \right| \leq \int_{y_0}^\infty |\mathcal{F}(q_k)(y)|\,\frac{dy}{|c(y)|^2} < \varepsilon, \quad x \in [0,\infty).$$

Por otra parte, al ser la función $\varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)/|c(y)|^2$ uniformemente continua en $\{(x,y):\ x \in [0,a] \times [0,y_0]\}$, podemos escribir

$$\int_0^{y_0} \varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0}{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\frac{y_0 j}{n}}(x)\ \mathcal{F}(q_k)\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\left|c\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\right|^{-2},$$

donde el límite es uniforme en $x \in [0,a]$. Luego, existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tal que

$$\left| \int_0^\infty \varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2} - \frac{y_0}{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\frac{y_0 j}{n}}(x)\ \mathcal{F}(q_k)\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\left|c\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\right|^{-2} \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{y_0} \varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2} - \frac{y_0}{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\frac{y_0 j}{n}}(x)\ \mathcal{F}(q_k)\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\left|c\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\right|^{-2} \right|$$

$$+ \left| \int_{y_0}^\infty \varphi_y(x)\mathcal{F}(q_k)(y)\frac{dy}{|c(y)|^2} \right| < 2\varepsilon, \quad n \geq n_0,\ x \in [0,a].$$

En otras palabras,

$$\sup_{x\in[0,a]} \left| p_k(x) - \frac{y_0}{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{\frac{y_0 j}{n}}(x)\ \mathcal{F}(q_k)\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\left|c\left(\frac{y_0 j}{n}\right)\right|^{-2} \right| \leq 2\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

De este modo probamos que p_k está en la clausura en $C([0,a])$ del espacio vectorial generado por $\{\varphi_y\}_{y\in(0,\infty)}$.

Además, de (4) tenemos que, para cada $y \in (0,\infty)$,

$$\varphi_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n(x)(y^2+\rho^2)^n, \quad x \in \mathbf{R},$$

donde la serie converge uniformemente en $[0,a]$. Por tanto, para cada $y > 0$, φ_y pertenece a la clausura en $C([0,a])$ del espacio vectorial generado por $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Concluimos que p_k está en la clausura en $C([0,a])$ del espacio vectorial generado por $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Nuestro próximo objetivo es ver que, para cada $f \in F$,

$$T_\phi(f) = K_\phi(f),$$

donde

$$K_\phi(f) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \; \delta_n \; \Delta^n f(x), \quad x \in (0,\infty),$$

y $\delta_n = \delta_n(\phi) = \int_0^\infty b_n(y)\phi(y)A(y)dy$, para cada $n \in \mathbf{N}$. Nótese que de (7) y [33, (3.5)] se deduce que, para cada $n \in \mathbf{N}$, la integral que define δ_n es absolutamente convergente. En efecto, si $n \in \mathbf{N}$, para cierto $\beta > 0$, se tiene que

$$\int_0^\infty |b_n(y)\phi(y)|\, A(y)dy \leq c \int_0^\infty \; y^\beta \; |\phi(y)| \; e^{2\rho y}dy < \infty,$$

al ser $\phi \in S_1$. Señalamos también que por hipótesis (propiedad (iv)) resulta que $\sum_{n=1}^\infty |\delta_n| < \infty$.

Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^p a_n b_n(x)$, $x \in [0,\infty)$, donde $p \in \mathbf{N}$ y $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 0,1,...,p$. Es claro que $f \in F$.

Teniendo en cuenta [103, Théorème 4], podemos escribir

$$\begin{aligned}
T_\phi(f)(x) &= (\phi\sharp f)(x) \\
&= \int_0^\infty \phi(y)(\tau_x f)(y)A(y)dy \\
&= \int_0^\infty \phi(y)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \; b_k(x) \; \Delta^k f(y) \; A(y)dy \\
&= \sum_{k=0}^{p} b_k(x)\int_0^\infty \phi(y) \; (-1)^k \sum_{n=0}^{p} a_n \; \Delta^k b_n(y) \; A(y) \; dy \\
&= \sum_{k=0}^{p} b_k(x)\sum_{n=k}^{p} a_n \int_0^\infty \phi(y) \; b_{n-k}(y) \; A(y) \; dy \\
&= \sum_{k=0}^{p} b_k(x)\sum_{n=k}^{p} a_n \; \delta_{n-k}, \quad x \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned} K_\phi(f)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \delta_n\ \Delta^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \delta_n\ \sum_{k=0}^{p} a_k\ \Delta^n b_k(x) \\ &= \sum_{n=0}^{p}\delta_n \sum_{k=n}^{p} a_k\ b_{k-n}(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k(x)\sum_{n=k}^{p} a_n\ \delta_{n-k}, \quad x\in(0,\infty). \end{aligned}$$

Por tanto $K_\phi(f) = T_\phi(f)$.

Definimos ahora el conjunto $\mathcal{H}$ como sigue

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in F:\ f = \sum_{n=0}^{p} a_n\ b_n,\ \text{donde } p\in\mathbf{N} \text{ y } a_n\in\mathbf{R},\ n=0,1,...,p \right\}.$$

$\mathcal{H}$ es un subespacio denso de F_h. En efecto, sea $f \in F$ con la representación $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x),\ x\in[0,\infty)$, para cierto $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0$. Teniendo presente las propiedades de $b_n,\ n\in\mathbf{N}$, y considerando $b_{-n}=0,\ n\in\mathbf{N}$, sigue

$$\begin{aligned} \sup_{p\in\mathbf{N},\ x\in(0,\infty)} h(x)\left|\Delta^p\left(\sum_{n=k}^{\infty} b_n(x) a_n\right)\right| &\le \sup_{n\ge k}|a_n| \sup_{p\in\mathbf{N},\ x\in(0,\infty)} h(x)\sum_{n=k}^{\infty} b_{n-p}(x) \\ &\le \sup_{n\ge k}|a_n| \sup_{x\in(0,\infty)} h(x)\cosh x, \quad k\in\mathbf{N}. \end{aligned}$$

Ya que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\in c_0$, de la propiedad (iii) se infiere que

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n\ b_n(x) = f(x),$$

en el sentido de la convergencia en F_h.

De acuerdo con lo probado hasta ahora, para mostrar que $K_\phi = T_\phi$ sobre F, es suficiente ver que K_ϕ es una aplicación continua de F_h en $C([0,\infty))$.

Sea $a > 0$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} |K_\phi(f)(x)| &\le \sum_{n=0}^{\infty}|\delta_n||\Delta^n f(x)| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}|\delta_n|\frac{1}{h(x)}\sup_{p\in\mathbf{N},\ x\in(0,\infty)} h(x)|\Delta^p f(x)| \\ &\le \frac{1}{h(a)}\sum_{n=0}^{\infty}|\delta_n|\mathfrak{p}_h(f), \quad x\in[0,a]. \end{aligned}$$

Concluimos pues que K_ϕ es continua de F_h en $C([0,\infty))$.

De este modo queda probado que $T_\phi = K_\phi$ sobre F.

Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(x),\ x\in[0,\infty)$, donde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\in c_0$. Tenemos que

$$T_\phi f = K_\phi f = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\delta_k\Delta^k f = \sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\sum_{n=k}^{\infty} a_n\ b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\ b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_{n+k}$$

Además, si $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon,\ n > n_0$, y entonces

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_{n+k}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k||a_{n+k}| < \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k|, \quad n > n_0.$$

Por tanto $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_{n+k}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0$ y $T_\phi f \in F$.

Es inmediato ver que $\mathfrak{p}_h(\Delta f) \leq \mathfrak{p}_h(f),\ f \in F$, y teniendo en cuenta de nuevo la propiedad (iv), se deduce que T_ϕ es una aplicación continua de F_h en F_h.

Nos proponemos ahora probar que

$$T_\phi(T_\phi f) = T_{\phi,2} f, \quad f \in F.$$

Sea $k \in \mathbf{N}$. En virtud de (4) podemos escribir

$$b_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^k \varphi_\lambda(x)_{|\lambda=i\rho}, \quad x \in (0,\infty). \tag{2.8}$$

Aplicando [33, Theorem 2.4, (i)] obtenemos

$$\begin{aligned}
T_\phi(b_k)(x) &= \int_0^\infty b_k(y)(\tau_x\phi)(y)A(y)dy \\
&= \lim_{\lambda\to i\rho} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^k \int_0^\infty \varphi_\lambda(y)(\tau_x\phi)(y)A(y)dy \\
&= \lim_{\lambda\to i\rho} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^k (\varphi_\lambda(x)\mathcal{F}(\phi(\lambda))) \\
&= \lim_{\lambda\to i\rho} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^j (\varphi_\lambda(x)) \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{k-j} (\mathcal{F}(\phi(\lambda))) \\
&= \lim_{\lambda\to i\rho} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2^j j!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^j (\varphi_\lambda(x)) \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{2^{k-j}(k-j)!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{k-j} (\mathcal{F}(\phi(\lambda))) \\
&= \sum_{j=0}^{k} b_j(x) \int_0^\infty b_{k-j}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy, \quad x \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Luego, para cada $x \in (0,\infty)$,

$$T_\phi(T_\phi(b_k))(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{j} b_l(x) \int_0^\infty b_{j-l}(y)\phi(y)A(y)\ dy \int_0^\infty b_{k-j}(y)\phi(y)A(y)\ dy.$$

Por otra parte, procediendo de un modo similar conseguimos

$$\begin{aligned}
T_{\phi\sharp\phi}(b_k)(x) &= \sum_{j=0}^{k} b_j(x) \int_0^\infty b_{k-j}(y)(\phi\sharp\phi)(y)\ A(y)\ dy \\
&= \sum_{j=0}^{k} b_j(x) \frac{(-1)^{k-j}}{2^{k-j}(k-j)!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{k-j} \mathcal{F}((\phi\sharp\phi)(\lambda))_{|\lambda=i\rho} \\
&= \sum_{j=0}^{k} b_j(x) \sum_{l=0}^{k-j} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{l} \mathcal{F}(\phi(\lambda))_{|\lambda=i\rho} \\
&\quad \frac{(-1)^{k-j-l}}{2^{k-j-l}(k-j-l)!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{k-j-l} \mathcal{F}(\phi(\lambda))_{|\lambda=i\rho} \\
&= \sum_{j=0}^{k} b_j(x) \sum_{l=0}^{k-j} \int_0^\infty b_l(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&\quad \cdot \int_0^\infty b_{k-j-l}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&= \sum_{j=0}^{k} b_j(x) \sum_{s=j}^{k} \int_0^\infty b_{s-j}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&\quad \cdot \int_0^\infty b_{k-s}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{j} b_l(x) \int_0^\infty b_{j-l}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&\quad \cdot \int_0^\infty b_{k-j}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&= T_\phi(T_\phi(b_k))(x), \quad x \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Por tanto $T_{\phi,2}(f) = T_\phi(T_\phi(f)),\ f \in \mathcal{H}$.

Además, si probamos que la función $\phi\sharp\phi$ satisface las propiedades (i), (ii) y (iv) que imponemos a ϕ en el enunciado, entonces $T_{\phi,2}$ es continua de F_h en F_h, y al ser $\mathcal{H}$ denso en F_h, podemos concluir que

$$T_{\phi,2}(f) = T_\phi(T_\phi(f)),\ f \in\ F.$$

La propiedad (i) para $\phi\sharp\phi$ fue establecida con anterioridad. De [33, Lemma 2.4, (i)] se sigue que

$$\mathcal{F}(\phi\sharp\phi)(i\rho) = \mathcal{F}(\phi)(i\rho)\mathcal{F}(\phi)(i\rho) = 1$$

y

$$|\mathcal{F}(\phi\sharp\phi)(x)| = |\mathcal{F}(\phi)(x)||\mathcal{F}(\phi)(x)| < 1, \text{ para casi todo } x \in (0,\infty).$$

Probamos así (ii) para $\phi\sharp\phi$.

Veamos ahora (iv) para $\phi\sharp\phi$. Sea $n \in \mathbf{N}$. De (2.8) y la fórmula de intercambio para la transformación $\mathcal{F}$ inferimos

$$\begin{aligned}
\delta_n(\phi\sharp\phi) &= \int_0^\infty b_n(x)(\phi\sharp\phi)(x)\ A(x)\ dx \\
&= \lim_{\lambda\to i\rho} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^n \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ (\phi\sharp\phi)(x)\ A(x)\ dx \\
&= \lim_{\lambda\to i\rho} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{2^j j!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^j \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx\ \cdot \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^{n-j}}{2^{n-j}(n-j)!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{n-j} \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx \\
&= \sum_{j=0}^n \int_0^\infty b_j(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \int_0^\infty b_{n-j}(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \\
&= \sum_{j=0}^n \delta_j(\phi)\delta_{n-j}(\phi).
\end{aligned}$$

También podemos escribir

$$\left(\sum_{k=0}^\infty \delta_k(\phi)z^n\right)\left(\sum_{j=0}^\infty \delta_j(\phi)z^n\right) = \sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^n \delta_k(\phi)\delta_{n-k}(\phi)\right)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \delta_n(\phi\sharp\phi)z^n, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Por tanto (iv) es válido para $\phi\sharp\phi$.

Un argumento inductivo nos permite concluir que, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$T_{\phi,n}(f) = \overbrace{T_\phi(...(T_\phi(f)))}^{n}, \quad f \in F.$$

El operador Δ es sobre en F_h (véase (6)). Además el conjunto $\mathcal{H}$ está contenido en $\cup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}(\Delta^n)$, y, por consiguiente, $\cup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{Ker}(\Delta^n)$ es un subconjunto denso de F_h. Ya que $\delta_0 = \mathcal{F}(\phi)(i\rho)$ y el espectro $\sigma(\Delta)$ de Δ en F_h está contenido en el disco unidad cerrado $\overline{D}(0,1)$, al ser $\mathfrak{p}_h(\Delta f) \leq \mathfrak{p}_h(f)$, $f \in F$, [87, Corollary 1] implica que T_ϕ es hipercíclico en F_h. Esto es, el conjunto

$$\left\{f \in F:\ \overline{\{T_{\phi,n}f:\ n \in \mathbf{N}\}}^{F_h} = F\right\}$$

no es vacío. Teniendo en cuenta que la topología de F_h es más fuerte que la inducida sobre F por la de $C([0,\infty))$ y que F es un subespacio denso de $C([0,\infty))$, concluimos que el conjunto U_ϕ no es vacío.

De este modo la prueba está completa.

■

2.3 Operadores de convolución de Chébli–Trimèche hipercíclicos y caóticos en E_* y D'_*.

G. Godefroy y J. Shapiro caracterizaron las aplicaciones lineales y continuas de $H(\mathbf{C}^n)$, el espacio de las funciones holomorfas en $\mathbf{C}^n$, que conmutan con las traslaciones usuales [61, Proposition 5.2]. Como consecuencia de este resultado los autores citados extienden trabajos clásicos de Birkhoff ([30]) y MacLane ([82]) sobre la hiperciclicidad de la traslación y la diferenciación sobre $H(\mathbf{C})$. Concretamente, en [61, Theorems 5.1 y 6.2] establecen que cada operador diferencial sobre $\mathbf{R}^n$ que no es un múltiplo escalar de la identidad es hipercíclico y caótico en $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Recientemente, J. Bonet ([34]) mostró que los operadores de convolución usuales que no son múltiplos escalares de la identidad, son hipercíclicos y caóticos sobre ciertos espacios de funciones ultradiferenciables de tipo Beurling. En esta sección presentamos versiones de los resultados de Bonet para operadores de convolución de Chébli–Trimèche sobre E_* y D'_*.

Comenzamos introduciendo un espacio de funciones que juega en nuestra teoría el mismo papel que el espacio de las funciones enteras en la desarrollada por G. Godefroy y J. Shapiro ([61]).

Denotamos por $\mathcal{G}$ el espacio constituido por las sucesiones complejas $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tales que la serie $\sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|}{(2n)!}|x|^n < \infty$, para cada $x \in \mathbf{R}$. El espacio de funciones H se define como sigue. Una función par f, definida sobre $\mathbf{R}$, está en H cuando existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$ tal que $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n b_n(x),\ x \in \mathbf{R}$. Nótese, en virtud de (7), que si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$ entonces $\sum_{n=0}^\infty |a_n| b_n(x)$ converge uniformemente en $x \in [0, a]$, para cada $a > 0$.

Proposición 2.3 *Si $f \in H$ entonces $f \in E_*$. Además, si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$ entonces la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ converge en E_*.*

Demostración.
La igualdad (5) podemos escribirla

$$b_n = \chi\left(\frac{u^{2n}}{(2n)!} j_{n-\frac{1}{2}}(i\rho u)\right), \quad n \in \mathbf{N},$$

donde χ representa la transformada generalizada de Riemann–Liouville definida por [105]

$$\chi(f)(x) = \int_0^x K(x,y)\ f(y)\ dy, \quad x \in [0,\infty).$$

Aquí, como se señaló en el Prólogo, para cada $x \in (0,\infty)$, $K(x,\cdot)$ es una función par, no negativa, integrable y con soporte en $[-x,x]$, y por j_μ representamos la función $j_\mu(z) = z^{-\mu} J_\mu(z) 2^\mu \Gamma(\mu+1)$, $z \in (0,\infty)$, donde J_μ es la función de Bessel de primera especie y de orden μ.

Ya que χ es un automorfismo sobre E_* ([105, Théorème 5.1]), para cada $m \in \mathbf{N}$ y $a > 0$ existen $l \in \mathbf{N}$ y $b > 1$ tales que

$$\sup_{|x|\le a}\left|\frac{d^m}{dx^m} b_n(x)\right| \le c \max_{j=0,1,\ldots,l} \sup_{|y|\le b}\left|\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^j \left(\frac{y^{2n}}{(2n)!} j_{n-\frac{1}{2}}(i\rho y)\right)\right|$$

$$\leq c \max_{j=0,1,\dots,l} \sup_{|y|\leq b} \sum_{s=0}^{j} \left| \left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{s} y^{2n} \right| \left| \left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{j-s} \left(j_{n-\frac{1}{2}}(i\rho y)\right) \right| \frac{1}{(2n)!}$$

$$\leq c \max_{j=0,1,\dots,l} \sup_{|y|\leq b} \sum_{s=0}^{j} 2^{s} n(n-1)...(n-s+1)\, y^{2(n-s)}\, (i\rho)^{2(j-s)}\, j_{n-j+s-\frac{1}{2}}(i\rho y)\, \frac{1}{(2n)!}$$

$$\leq c\, \frac{b^{2n}}{(2(n-l))!}, \quad n \in \mathbf{N},\ n > l. \tag{2.9}$$

En la última desigualdad hemos usado [114, (7), Chapter 5] y que $j_\mu(iu) \leq \cosh u,\ u \in \mathbf{R}$ ([48, pág. 246]).

Sea $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$. De (2.9) se deduce que, para cada $m \in \mathbf{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^m}{dx^m} b_n(x)$ es uniformemente convergente en $[-a, a]$, para cada $a > 0$. Por tanto, la función f definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ b_n(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

está en E_*. El argumento anterior prueba también que la serie converge en E_*.

■

Proposición 2.4 *H es un subespacio denso de E_*.*

Demostración.

Sea $T \in E'_*$. La transformación generalizada de Fourier $\mathcal{F}(T)$ se define por (véase [105])

$$\mathcal{F}(T)(\lambda) =< T(x), \varphi_\lambda(x) >, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Supongamos que $T_{|H} = 0$. Entonces, ya que $\varphi_\lambda \in H$, para cada $\lambda \in \mathbf{C}$ (recordemos (4)), se tiene que $(\mathcal{F}T)(\lambda) = 0,\ \lambda \in \mathbf{C}$. Por tanto $T = 0$. El teorema de Hahn–Banach nos permite concluir que H es denso en E_*.

■

Consideramos sobre el espacio H la topología inducida sobre él por el espacio E_*. De (6) sigue que el operador Δ es lineal y continuo de H en sí mismo. En efecto, sea $f \in H$ admitiendo la representación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ b_n(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$. Tenemos que

$$\Delta f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_{n-1}(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} b_n(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Además, $(a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$ ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|}{(2n)!}|x|^{2n} < \infty,\ x \in \mathbf{R}$, al ser $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(2n)!}|x|^{2n} < \infty,\ x \in \mathbf{R}$. Por tanto Δ define una aplicación de H en sí mismo. La continuidad de Δ sobre H sigue de la continuidad de Δ en E_*.

A continuación estudiamos el comportamiento del operador de traslación $\tau_x,\ x \in [0, \infty)$, sobre H.

Proposición 2.5 *Sea $x \in [0,\infty)$. El operador de traslación τ_x es una aplicación lineal y continua de H en sí mismo. Además, si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, donde $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$, entonces*

$$\tau_x f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; b_n(x) \; \Delta^n f,$$

donde la serie converge en E_*.

Demostración.
Sea $n \in \mathbf{N}$. De (2.8) y (3) se sigue que

$$\begin{aligned}
(\tau_x b_n)(y) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^n \int_0^\infty \varphi_\lambda(z)\; D(x,y,z)\; A(z)\; dz_{|\lambda=i\rho}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^n (\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y))_{|\lambda=i\rho}\\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{2^j j!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^j (\varphi_\lambda(x))_{|\lambda=i\rho}\\
&\quad \cdot \frac{(-1)^{n-j}}{2^{n-j}(n-j)!}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^{n-j} (\varphi_\lambda(y))_{|\lambda=i\rho}\\
&= \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\; b_{n-j}(y), \quad y \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$ y tomemos $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n(y)$, $y \in \mathbf{R}$. Esta última serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbf{R}$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
(\tau_x f)(y) &= \int_{|x-y|}^{|x+y|} f(z)D(x,y,z)A(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau_x b_n)(y)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} b_k(y)\; b_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(y) \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k}(x) a_n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(y) \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) a_{n+k}, \quad y \in (0,\infty). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Observamos que $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) a_{n+k})_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$. En efecto, de (7) se sigue

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)a_{n+k}\right| \frac{|y|^k}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |b_n(x)||a_{n+k}| \frac{|y|^k}{(2k)!}\\
\leq\;& \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+k}| \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\frac{|y|^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \frac{|x|^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}\frac{|y|^k}{(2k)!}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \frac{|y|^k}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2(n-k))!(2k)!} |x|^{2(n-k)} |y|^k$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} |x|^{2(n-k)} |y|^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(2n)!} \left(|x| + \sqrt{|y|}\right)^{2n} < \infty,$$

ya que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}$.

Probamos así que $\tau_x f \in H$.

De [105, Proposition 8.3, (1)] podemos deducir ahora que τ_x define una aplicación continua de H en sí mismo.

Teniendo en cuenta (6), (2.10) se reescribe

$$(\tau_x f)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\ (-1)^n\ \Delta^n f(y), \quad y \in [0, \infty). \tag{2.11}$$

Sea $m \in \mathbf{N}$. Para cada $l_1, l_2 \in \mathbf{N},\ l_1 < l_2$, de (2.10) se infiere

$$\left|\Delta_y^m \sum_{n=l_1}^{l_2} (-1)^n\ b_n(x)\ \Delta^n f(y)\right| = \left|\Delta_y^m \sum_{n=l_1}^{l_2} b_n(x)\ \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j}\ b_j(y)\right|$$

$$\leq \sum_{n=l_1}^{l_2} b_n(x)\ \sum_{j=m}^{\infty} |a_{n+j}|\ b_{j-m}(y) \leq \sum_{n=l_1}^{l_2} b_n(x)\ \sum_{j=m+n}^{\infty} |a_j|\ b_{j-m-n}(y)$$

$$\leq \sum_{j=l_1+m}^{l_2+m} |a_j| \sum_{n=l_1}^{j-m} b_n(x)\ b_{j-m-n}(y) + \sum_{j=l_2+m}^{\infty} |a_j| \sum_{n=l_1}^{l_2} b_n(x)\ b_{j-m-n}(y)$$

$$\leq \sum_{j=l_1+m}^{l_2+m} \frac{|a_j|}{(2(j-m))!} \sum_{n=l_1}^{j-m} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{y^{2(j-m-n)}}{(2(j-m-n))!} (2(j-m))!$$

$$+ \sum_{j=l_2+m}^{\infty} \frac{|a_j|}{(2(j-m))!} \sum_{n=l_1}^{l_2} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{y^{2(j-m-n)}}{(2(j-m-n))!} (2(j-m))!$$

$$\leq \sum_{j=l_1+m}^{l_2+m} \frac{|a_j|}{(2(j-m))!} \sum_{n=l_1}^{j-m} \binom{2(j-m)}{2(j-m-n)} x^{2n}\ y^{2(j-m-n)}$$

$$+ \sum_{j=l_2+m}^{\infty} \frac{|a_j|}{(2(j-m))!} \sum_{n=l_1}^{l_2} \binom{2(j-m)}{2(j-m-n)} x^{2n}\ y^{2(j-m-n)}$$

$$\leq \sum_{j=l_1+m}^{\infty} \frac{|a_j|}{(2(j-m))!}\ (x+y)^{2(j-m)}, \quad y \in (0, \infty).$$

Si $y, \varepsilon > 0$ existe $l_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\sum_{j=l_1+m}^{\infty} |a_j|/(2(j-m))!\ (x+y)^{2(j-m)} < \varepsilon$, cuando $l_1 > l_0$. Por tanto,

$$\Delta_y^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ b_n(x)\ \Delta^n f(y),$$

converge uniformemente en $y \in [0, a]$ para cada $a > 0$.

De este modo la prueba de la propiedad termina.

■

Diremos que una sucesión compleja $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ está en $\mathcal{P}$ cuando existen $c, r > 0$ y $l \in \mathbf{N}$ para los cuales

$$|c_n| \leq c\ \frac{r^{2n}}{(2(n-l))!}, \quad n \in \mathbf{N},\ n \geq l.$$

Definimos, dada un sucesión compleja $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, el operador $T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$ sobre H como sigue

$$T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}} f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \Delta^n f, \quad f \in H.$$

Procediendo como en la prueba de la Proposición 2.5 podemos mostrar la próxima propiedad

Proposición 2.6 *Sea $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{P}$. Entonces el operador $T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$ es lineal y continuo de H en sí mismo. Además, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n f$ converge en E_*, para cada $f \in H$.*

■

Recurriendo a los teoremas de Hahn–Banach y de representación de Riesz establecemos el siguiente resultado. Éste nos da una representación muy útil de los elementos de E'_*.

Proposición 2.7 *Sea T un operador lineal de E_* en $\mathbf{C}$. Entonces, $T \in E'_*$ si, y sólo si, existen $k \in \mathbf{N}$ y medidas regulares complejas $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ con soporte compacto en $[0, \infty)$, tales que*

$$< T, f >= \sum_{j=0}^{k} \int_0^{\infty} \Delta^j f(x)\ d\mu_j(x), \quad f \in E_*. \tag{2.12}$$

Demostración.

Observamos en primer lugar que si T admite la representación (2.12), para ciertas medidas complejas regulares $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ con soporte compacto en $[0, \infty)$, existe $a > 0$ tal que

$$|< T, f >| \quad \leq \quad \sum_{j=0}^{k} \int_0^{a} \left|\Delta^j f(x)\right|\ d|\mu_j|(x)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in(0,a)} \left|\Delta^j f(x)\right| \; |\mu_j|([0,a])$$

$$\leq c\sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in(0,a)} \left|\Delta^j f(x)\right|, \quad f \in E_*,$$

donde, como es usual, $|\mu_j|$ representa la medida variación total de μ_j, $j = 0,...,k$. Por tanto, $T \in E'_*$.

Supongamos ahora que $T \in E'_*$. Existen $k \in \mathbf{N}$ y $a, c > 0$ tales que

$$|< T, f >| \leq c \max_{j=0,...,k} \sup_{x\in[0,a]} \left|\Delta^j f(x)\right|, \quad f \in E_*. \tag{2.13}$$

Definimos las aplicaciones

$$\begin{array}{llll} J: & E_* & \longrightarrow & \overbrace{C([0,a]) \times ... \times C([0,a])}^{k+1} \\ & f & \longrightarrow & (f, \Delta f, ..., \Delta^k f) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{llll} L: & J(E_*) \subset \overbrace{C([0,a]) \times ... \times C([0,a])}^{k+1} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & (f, \Delta f, ..., \Delta^k f) & \longrightarrow & < T, f > \end{array}$$

donde $J(E_*)$ representa la imagen de E_* por J.

La aplicación J es inyectiva sobre E_*, lo que implica que L está bien definida. Además, de (2.13) se sigue que L es continua, cuando sobre $J(E_*)$ se considera la topología producto de $\overbrace{C([0,a]) \times ... \times C([0,a])}^{k+1}$.

El teorema de Hahn–Banach permite extender L a $\overbrace{C([0,a]) \times ... \times C([0,a])}^{k+1}$ como un elemento del dual de $\overbrace{C([0,a]) \times ... \times C([0,a])}^{k+1}$. Por tanto, del teorema de representación de Riesz se infiere que, para ciertas medidas complejas regulares $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ con soporte en $[0, a]$

$$< T, f >= L(f, \Delta f, ..., \Delta^k f) = \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \Delta^j f(x) \; d\mu_j(x), \quad f \in E_*.$$

■

A continuación caracterizamos las aplicaciones lineales y continuas de H en sí mismo que conmutan con el operador de traslación τ_x, para cada $x \in [0, \infty)$. Nuestro resultado corresponde en nuestra teoría al establecido por G. Godefroy y J.H. Shapiro [61, Proposition 5.2] para operadores sobre el espacio de las funciones enteras que conmutan con la traslación usual.

Proposición 2.8 *Supongamos que L es una aplicación lineal y continua de E_* en sí mismo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) L conmuta con el operador de traslación τ_x, esto es, $L\tau_x = \tau_x L$, sobre E_*, para cada $x \in [0, \infty)$.

(b) Existe $T \in E'_*$ tal que $Lf = T\sharp f$, $f \in E_*$.

(c) Existen $k \in \mathbf{N}$ y medidas complejas regulares $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ con soporte compacto sobre $[0, \infty)$, de manera que

$$L(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \tau_x(\Delta^j f)(y)\ d\mu_j(y), \quad f \in E_*,\ x \in [0, \infty).$$

(d) Existe una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{P}$ tal que $L_{|H} = T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$.

(e) L conmuta con el operador Δ, esto es, $L\Delta = \Delta L$ sobre E_*.

Demostración.

De la Proposición 2.5 se sigue que los operadores Δ y τ_x, $x \in [0, \infty)$, conmutan. Por tanto, la Proposición 2.7 implica que las propiedades (b) y (c) son equivalentes.

(a) $\Rightarrow$ (c). Definimos la funcional

$$< T, f >= (Lf)(0), \quad f \in E_*.$$

De este modo $T \in E'_*$. Recurriendo de nuevo a la Proposición 2.7, obtenemos para T la representación

$$< T, f >= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \Delta^j f(x)\ d\mu_j(x), \quad f \in E_*,$$

para ciertas medidas complejas regulares $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ con soporte compacto sobre $[0, \infty)$.

Asumiendo (a) concluimos que

$$\begin{aligned} L(f)(x) &= \tau_x(Lf)(0) = L(\tau_x f)(0) =< T, \tau_x f > \\ &= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \tau_x(\Delta^j f)(y)\ d\mu_j(y), \quad f \in E_* \end{aligned}$$

y (c) queda establecido.

(c) $\Rightarrow$ (d). Supongamos que (c) es cierto, esto es, que existen medidas complejas regulares $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ con soporte compacto en $[0, \infty)$ para las cuales se tiene

$$L(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \tau_x(\Delta^j f)(y)\ d\mu_j(y), \quad f \in E_*,\ x \in [0, \infty).$$

Sea $f \in H$. En virtud de la Proposición 2.5 podemos escribir, para cierto $a > 1$,

$$\begin{aligned} L(f)(x) &= \sum_{j=0}^{k} \int_0^a \Delta^j(\tau_x f)(y)\ d\mu_j(y) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ \Delta^n f(x) \int_0^a \Delta^j b_n(y)\ d\mu_j(y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(x) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-j} \int_0^a b_{n-j}(y)\ d\mu_j(y), \quad x \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Hemos tenido en cuenta que $(\tau_x f)(y) = (\tau_y f)(x),\ x, y \in [0,\infty)$.
Además, de (7) se infiere que

$$\left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-j} \int_0^a b_{n-j}(y)\ d\mu_j(y) \right| \leq \sum_{j=0}^{k} \int_0^a \frac{y^{2(n-j)}}{(2(n-j))!}\ d|\mu_j|(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{a^{2(n-j)}}{(2(n-j))!}\ |\mu_j|([0,a]) \leq c\ \frac{a^{2n}}{(2(n-k))!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Luego, escribiendo

$$c_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-j} \int_0^{\infty} b_{n-j}(y)\ d\mu_j(y), \quad n \in \mathbf{N},$$

la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ está en $\mathcal{P}$, y $L_{|H} = T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$.

(d) $\Rightarrow$ (a). Asumimos que $L_{|H} = T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$, para una cierta $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{P}$.

Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n f$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbf{R}$, para cada $f \in H$ (Proposición 2.6). Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \tau_x(Lf)(x) &= \int_{|x-y|}^{x+y} D(x,y,z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \Delta^n f(x)\ A(z)\ dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{|x-y|}^{x+y} D(x,y,z)\ \Delta^n f(x)\ A(z)\ dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \tau_x(\Delta^n f)(y), \quad f \in H,\ x, y \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Ya que Δ y $\tau_x,\ x \in (0,\infty)$, conmutan sobre H, obtenemos que $\tau_x(Lf) = L(\tau_x f),\ f \in H$.

Al ser H un subespacio denso de E_* (Proposición 2.4), [105, Proposition 8.3, (1)] permite completar la prueba de (a).

(e) $\Rightarrow$ (a). Si (e) es cierto, la Proposición 2.5 implica que L y τ_x, $x \in [0,\infty)$, conmutan sobre H. Recurriendo de nuevo a la Proposición 2.5 y a [105, Proposition 8.3, (1)] concluimos que $L\tau_x = \tau_x L$, $x \in [0,\infty)$, sobre E_*.

(d) $\Rightarrow$ (e). Sea $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{P}$ tal que $L_{|H} = T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}$. En la Proposición 2.6 se estableció que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\Delta^n f$ converge en E_*, para cada $f \in H$.

Entonces, ya que Δ es una aplicación lineal y continua de H en sí mismo, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}} f &= \Delta\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \Delta^n f\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \Delta^{n+1} f \\ &= T_{(c_n)_{n\in\mathbf{N}}}\Delta f, \quad f \in H. \end{aligned}$$

Probamos así que $\Delta L = L\Delta$ sobre H. De la Proposición 2.4 se sigue ya que $\Delta L = L\Delta$ sobre E_*, en virtud de la continuidad, como operadores de E_* en sí mismo, de L y Δ.

■

El principal resultado de esta sección es el que sigue. Establecemos la hiperciclicidad y el caos de ciertos operadores de convolución sobre E_*.

Proposición 2.9 *Sea L una aplicación lineal y continua de E_* en sí mismo. Supongamos que L no es un múltiplo escalar de la identidad. Si L conmuta con el operador de traslación τ_x, $x \in [0,\infty)$, entonces L es hipercíclico y caótico en E_*, y existe un subespacio vectorial $\mathcal{M}$ de E_* que es invariante respecto de L, denso en E_*, y tal que cada elemento no nulo de $\mathcal{M}$ es un vector hipercíclico para L. Además, el conjunto de vectores hipercíclicos es residual en E_*.*

Demostración.

Supongamos en primer lugar que V es un subconjunto de $\mathbf{C}$ que tiene puntos de acumulación. Entonces, el espacio vectorial S generado por $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in V}$ es denso en E_*. En efecto, sea $T \in E'_*$ tal que $< T, \varphi_\lambda >= 0$, para cada $\lambda \in V$. De acuerdo con la Proposición 2.7, existen medidas complejas regulares $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ con soporte compacto sobre $[0,\infty)$ tales que

$$< T, f >= \sum_{j=0}^{k} \int_0^{\infty} \Delta^j f(x)\ d\mu_j(x), \quad f \in E_*. \tag{2.14}$$

En particular, a tenor de (2), tenemos

$$< T, \varphi_\lambda >= \sum_{j=0}^{k} (\lambda^2+\rho^2)^j \int_0^{\infty} \varphi_\lambda(x)\ d\mu_j(x), \quad \lambda \in \mathbf{C}. \tag{2.15}$$

Entonces, la función $F(\lambda) =< T, \varphi_\lambda >$, $\lambda \in \mathbf{C}$, es entera y par. Además $F(\lambda) = 0$, $\lambda \in V$, y V tiene puntos de acumulación. Sigue ya que $F(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

De (2.14) y (2.15) se deduce que, para cada $m \in \mathbf{N}$,

$$< T, \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^m \varphi_\lambda >= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \Delta^j \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^m \varphi_\lambda(x)\ d\mu_j(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^m \left[(\lambda^2+\rho^2)^j \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ d\mu_j(x)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^m F(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Luego, de (4) inferimos que

$$< T, b_m >=< T, \frac{(-1)^m}{2^m m!} \left(\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}\right)^m \varphi_{\lambda|\lambda=i\rho} >= 0, \quad m \in \mathbf{N}.$$

En virtud de las Proposiciones 2.3 y 2.4, el espacio vectorial generado por $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es denso en E_*. Por tanto $T = 0$.

El teorema de Hahn–Banach implica que S es denso en E_*.

Supongamos que L es una aplicación lineal y continua de E_* en sí mismo que conmuta con las traslaciones $\tau_x,\ x \in [0,\infty)$. De acuerdo con la Proposición 2.8 podemos encontrar una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{P}$ tal que

$$Lf = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \Delta^n f, \quad f \in H.$$

Para cada $\lambda \in \mathbf{C}$, se tiene entonces que

$$L\varphi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \Delta^n \varphi_\lambda = \varphi_\lambda \Phi(\lambda), \tag{2.16}$$

donde $\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda^2+\rho^2)^n,\ \lambda \in \mathbf{C}$. Ya que $(c_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{P},\ \Phi$ es entera y par. Φ no es idénticamente cero, ya que si así fuera, tendríamos $c_n = 0,\ n \in \mathbf{N}$, lo que implicaría $L = 0$, caso que no admitimos, al no ser L un múltiplo escalar de la identidad. Por tanto el conjunto

$$W = \{\lambda \in \mathbf{C} :\ \Phi(\lambda) \neq 0\}$$

es abierto y no vacío en $\mathbf{C}$, y el espacio vectorial S_W generado por W, es denso en E_*. Además (2.16) dice que S_W está contenido en el recorrido de L. Concluimos pues que el recorrido de L es denso en E_*.

Procediendo ahora como en la prueba de [61, Theorem 5.1] (véase también [84, Proposición 3.4] y [7, Theorem 2.2]) haciendo uso de las funciones φ_λ, podemos probar que existe un subespacio vectorial $\mathcal{M}$ denso en E_*, que es invariante respecto de L y tal que cada elemento no nulo de $\mathcal{M}$ es un vector hipercíclico de L. Asimismo, recurriendo a [7, Lemma 2.1] obtenemos que el conjunto de vectores hipercíclicos de L es residual en E_*.

Para probar que L es caótico en E_* es suficiente ver que el conjunto de puntos periódicos de L es denso en E_*.

Sean $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y Φ como antes. Ya que L no es un múltiplo escalar de la identidad, Φ no es constante en $\mathbf{C}$. Por tanto, existe $m \in \mathbf{N}$ de manera que

$$\Phi(\overline{D(0,m)}) \cap \partial D(0,1)$$

contiene un subconjunto abierto y no vacío de $\partial D(0,1)$.

Definimos $G = \left\{ z \in \overline{D(0,m)} : \ \Phi(z)^l = 1, \text{ para algún } l \in \mathbf{N} \right\}$. G es infinito y, por tanto, G tiene puntos de acumulación en $\overline{D(0,m)}$. De aquí se deduce que el espacio vectorial S_G generado por $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in G}$ es denso en E_*. Además, si $\lambda \in G$, para algún $l \in \mathbf{N}$,

$$L^l(\varphi_\lambda) = \Phi(\lambda)^l \ \varphi_\lambda = \varphi_\lambda.$$

De este modo probamos que cada elemento de S_G es un punto periódico para L y que, por tanto, el conjunto de puntos periódicos de L es denso en E_*.

La prueba de este modo termina.

■

Analizamos ahora los operadores de convolución $\sharp$ sobre $\mathcal{D}'_*$.

Proposición 2.10 *Sea $T \in E'_*$. El operador de convolución L_T definido sobre $\mathcal{D}'_*$ por*

$$L_T(S) = S\sharp T, \quad S \in \mathcal{D}'_*,$$

es hipercíclico y caótico, siempre que T no sea un múltiplo escalar de la funcional δ de Dirac.

Demostración.

El espacio E_* es denso en $\mathcal{D}'_*$ (véase [25]). Además si $f \in E_*$ entonces $L_T(f)$ coincide con la distribución generada por la función $T\sharp f \in E_*$ ([105]). En efecto, sea $f \in E_*$. La convolución $S_f\sharp T$ de S_f y T, donde S_f representa la distribución generada por f, viene dada sobre $\mathcal{D}_*$ por

$$< S_f\sharp T, \phi >=< S_f, T\sharp\phi >= \int_0^\infty f(x) < T, \tau_x\phi > A(x)\ dx, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

En virtud de la Proposición 2.7, existen medidas complejas regulares μ_0, μ_1, ..., μ_k con soporte compacto en $[0,\infty)$ tales que

$$< T, f >= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \Delta^j f(x)\ d\mu_j(x), \quad f \in E_*.$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}_{*,a}$. Sabemos que $T\sharp\phi \in \mathcal{D}_*$. Luego, para cierto $b > 0$, se tiene que

$$\int_0^\infty f(x) < T, \tau_x\phi > A(x)\ dx$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^b f(x) \int_0^\infty \tau_x(\Delta^j \phi)(y)\ d\mu_j(y)\ A(x)\ dx$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)\ \tau_y(\Delta^j \phi)(x)\ A(x)\ dx\ d\mu_j(y)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)\ \Delta_x^j \tau_y(\phi)(x)\ A(x)\ dx\ d\mu_j(y)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \int_0^{a+y} \Delta_x^j f(x)\ \tau_y(\phi)(x)\ A(x)\ dx\ d\mu_j(y)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \int_0^\infty \tau_y(\Delta^j f)(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx\ d\mu_j(y)$$

$$= \int_0^\infty \phi(x) \left(\sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \Delta^j(\tau_x f)(y)\ d\mu_j(y) \right) A(x)\ dx$$

$$=< S_{T\sharp f}, \phi > .$$

Para establecer la validez de las igualdades anteriores hemos tenido en cuenta que, para cada $c > 0$, existe $\psi \in \mathcal{D}_*$ tal que $\psi = f$ en $(0, c)$.

El resultado enunciado en la proposición sigue ahora como una consecuencia del principio de comparación [93, pág. 11] (véase también [34, Lemma 3]) y la Proposición 2.9.

■

Capítulo 3

La transformación de Chébli–Trimèche en espacios de distribuciones.

3.1 Introducción.

Como se comentó en el Prólogo, el estudio distribucional de la transformación integral de Chébli–Trimèche fue comenzado por K. Trimèche ([105]). Este autor probó que la transformación $\mathcal{F}$ es un isomorfismo de $\mathcal{D}_*$ en H_* y definió la transformación en cuestión sobre el espacio $\mathcal{D}'_*$, dual de $\mathcal{D}_*$, por trasposición. La transformación distribucional la denotamos por $\mathcal{F}'$ para indicar que actúa sobre duales de los espacios de funciones considerados. Concretamente, si $T \in \mathcal{D}'_*$ se define la transformada $\mathcal{F}'T$ de T como sigue

$$< \mathcal{F}'T, \mathcal{F}\phi > = < T, \phi >, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

En particular, si $T \in E'_*$, la transformada $\mathcal{F}'T$ de T coincide con la distribución generada por la función

$$F(\lambda) = < T, \varphi_\lambda >, \quad \lambda \in [0, \infty).$$

En otras palabras, si $T \in E'_*$ se tiene que

$$\int_0^\infty F(\lambda)\ (\mathcal{F}\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} = < T, \phi >, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

Más recientemente W. Bloom y Z. Xu ([33]) investigaron la transformación de Chébli–Trimèche sobre los espacios $S_p,\ 0 < p \leq 2$, y los correspondientes duales. En [33] también se comenzó el análisis de la convolución $\sharp$ sobre los espacios $S_p,\ 0 < p \leq 2$, y sus duales.

Este capítulo, que hemos dividido en dos partes, lo dedicamos al estudio de la transformación de Chébli–Trimèche en nuevos espacios de distribuciones, completando en algunos aspectos los resultados de W. Bloom y Z. Xu.

Recordamos la definición de los espacios considerados por W. Bloom y Z. Xu en [33] a los que recurriremos a los largo de este capítulo.

Sea $0 < p \leq 2$. El espacio S_p consta de aquellas funciones $\phi \in C^\infty(0,\infty)$ para las cuales existen funciones pares $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tales que $\psi(x) = \phi(x),\ x \in (0,\infty)$, y siendo

$$\mu^p_{k,l}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^l\ \varphi_0(x)^{-2/p}\ \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| < \infty,$$

para cada $l, k \in \mathbf{N}$. S_p es un espacio de Fréchet cuando se define sobre él la topología generada por la familia $\{\mu^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas.

Representamos por H_p el espacio constituido por la funciones Φ que son pares y holomorfas en la banda $\Big\{\lambda \in \mathbf{C} :\ |\mathrm{Im}\lambda| < \rho(\frac{2}{p}-1)\Big\}$, tales que $\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi$ puede ser continuamente extendida a $\Big\{\lambda \in \mathbf{C} :\ |\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho(\frac{2}{p}-1)\Big\}$, para cada $k \in \mathbf{N}$, y que satisfacen

$$\tau^p_{k,l}(\Phi) = \sup_{|\mathrm{Im}\lambda|\leq\rho\left(\frac{2}{p}-1\right)} (1+|\lambda|)^l \left|\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi(\lambda)\right| < \infty,$$

para cada $k, l \in \mathbf{N}$. Cuando $p = 2$ o $\rho = 0$ el espacio H_p se entiende de la forma natural. H_p es dotado de la topología asociada al sistema $\{\tau^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas. Así H_p es un espacio de Fréchet.

La transformación integral $\mathcal{F}$ de Chébli–Trimèche es un isomorfismo de S_p en H_p, siendo la inversa $\mathcal{F}^{-1}$ de $\mathcal{F}$ dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi)(x) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \Phi(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in (0,\infty)$$

([33, Theorem 4.27]).

Parte I

En esta primera parte presentamos nuevos espacios de distribuciones, en los que estudiamos la transformación $\mathcal{F}$ de Chébli–Trimèche y la convolución $\sharp$. Esta operación de convolución es cerrada en nuestros espacios. El estudio realizado tiene como antecedentes los trabajos de B. González y E. Negrín ([63] y [62]) y de J.J. Betancor y B. González ([20]), sobre las transformaciones integrales de Fourier y de Hankel, respectivamente.

3.2 Los espacios de funciones $\mathcal{A}_m,\ m \in \mathbf{Z},\ m < 0$ y sus duales.

En esta sección introducimos nuevos espacios de funciones, sobre cuyos duales analizaremos la transformación de Chébli–Trimèche y la convolución asociada a la misma.

Sea $m \in \mathbf{Z},\ m < 0$. Decimos que una función ϕ está en A_m cuando existe una función par $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\phi(x) = \psi(x),\ x \in (0, \infty)$, y se verifica que

$$\alpha_k^m(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^m \left| \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) \right| < \infty,$$

para cada $k \in \mathbf{N}$.

Sobre A_m se considera la topología generada por la familia $\{\alpha_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ de seminormas. Siguiendo argumentos usuales podemos probar que A_m es un espacio de Fréchet.

A continuación damos una nueva descripción del espacio A_m que nos será muy útil.

Proposición 3.1 *Sea $m \in \mathbf{Z},\ m < 0$. Supongamos que ϕ está en $C^\infty(0, \infty)$ y que existe una función par $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\psi(x) = \phi(x),\ x \in (0, \infty)$. Entonces, $\phi \in A_m$ si, y sólo si, para cada $k \in \mathbf{N}$,*

$$\beta_k^m(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^m \left|\Delta^k\phi(x)\right| < \infty.$$

Además, el sistema $\{\beta_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ de seminormas genera la topología de A_m.

Demostración.

Asumimos inicialmente que $\phi \in A_m$. Entonces, teniendo en cuenta [33, Lemma 4.18, (ii) y (iii)] obtenemos que $\beta_k^m(\phi) < \infty$, para cada $k \in \mathbf{N}$. En efecto, sea $k \in \mathbf{N}$. De [33, Lemma 4.18, (i)] se deduce que existe $\delta > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbf{N}$, podemos encontrar $s_k \in \mathbf{N}$ y $c_k > 0$ verificando la propiedad que sigue: para cada $x \in [0, \delta]$ existe $\xi_j = \xi_j(x, k) \in [0, x]$ para el cual

$$\left|\Delta^k \phi(x)\right| \leq c_k \left(\sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=0}^{s_k} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(\xi_j) \right| + \sum_{i=1}^{2k} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right| \right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
(1+x)^m \left|\Delta^k \phi(x)\right| &\leq c \left(\sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=0}^{s_k} \left(\frac{1+\xi_j}{1+x} \right)^{-m} (1+\xi_j)^m \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(\xi_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{2k} (1+x)^m \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right| \right) \\
&\leq c \sum_{i=1}^{2k} \sup_{x \in (0,\infty)} (1+x)^m \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|, \quad x \in [0, \delta]. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Además, [33, Lemma 4.18, (iii)] implica que

$$(1+x)^m \left|\Delta^k \phi(x)\right| \leq c \sum_{i=1}^{2k} (1+x)^m \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|, \quad x \geq \delta. \quad (3.2)$$

Combinando (3.1) y (3.2) concluimos que

$$\beta_k^m(\phi) \leq c \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i^m(\phi), \quad k \in \mathbf{N},$$

donde $c > 0$ no depende de ϕ. Luego $\{\beta_k^m\}_{k \in \mathbf{N}}$ genera sobre A_m una topología menos fina que la que define $\{\alpha_k^m\}_{k \in \mathbf{N}}$ sobre él.

Supongamos ahora que $\beta_k^m(\phi) < \infty$, para cada $k \in \mathbf{N}$. Ya que ϕ admite una extensión par y C^∞ en $\mathbf{R}$ podemos escribir

$$\int_0^x \Delta\phi(t)\ A(t)\ dt = -\int_0^x \frac{d}{dt} \left(A(t) \frac{d}{dt} \right) \phi(t)\ dt$$

$$= -\ A(t)\ \frac{d}{dt}\phi(t) \Big]_0^x = -A(x)\ \frac{d}{dx}\phi(x), \quad x \in (0, \infty).$$

Luego,

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{-1}{A(x)} \int_0^x \Delta\phi(t)\ A(t)\ dt, \quad x \in (0, \infty).$$

Por tanto, ya que A es creciente, se deduce que

$$(1+x)^m \left|\frac{d}{dx}\phi(x)\right| \leq \int_0^x (1+t)^m \, |\Delta\phi(t)| \, dt \leq x \; \beta_1^m(\phi), \quad x \in (0,\infty). \qquad (3.3)$$

Asumimos en este punto que $\rho = 0$. Atendiendo a la propiedad (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta\phi(x) &= -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{A'(x)}{A(x)}\frac{d}{dx}\right)\phi(x) \\ &= -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx} + e^{-\delta x}D(x)\frac{d}{dx}\right)\phi(x), \quad x \geq x_0, \quad (3.4) \end{aligned}$$

donde $\delta, x_0 > 0$ y D es una función $C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\frac{d^k}{dx^k}D$ es acotada sobre $\mathbf{R}$, para cada $k \in \mathbf{N}$.

Ya que $\beta_1^m(\phi) < \infty$, de (3.3) y (3.4) se infiere que $(1+x)^m \frac{d^2}{dx^2}\phi(x)$ es acotada sobre $(0,\infty)$. También $(1+x)^m\phi(x)$ es acotada en $(0,\infty)$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \phi(x) - \phi(x+1) - \int_x^{x+1} \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) \; (x+1-t) \; dt, \quad x \in (0,\infty),$$

podemos concluir entonces que $(1+x)^m \frac{d}{dx}\phi(x)$ es acotada sobre $(0,\infty)$.

Al ser $\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{A'}{A}\right)$ acotada en $(0,\infty)$, para cada $k \in \mathbf{N}$, y para valores grandes de x ([33, pág. 93]), un procedimiento inductivo nos permite ver que, para cada $k \in \mathbf{N}$, $(1+x)^m \frac{d^k}{dx^k}\phi$ es acotada sobre $(0,\infty)$ o, en otras palabras, que $\alpha_k^m(\phi) < \infty$, $k \in \mathbf{N}$.

Sea ahora $\rho > 0$. La propiedad (1) nos da

$$-\Delta\phi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + 2\rho \, \frac{d}{dx}\phi(x) + e^{-\delta x}D(x)\frac{d}{dx}\phi(x), \quad x \geq x_0,$$

para ciertos $\delta, x_0 > 0$ y una función D que es $C^\infty(\mathbf{R})$ y que tiene sus derivadas acotadas sobre $\mathbf{R}$.

De (3.3), ya que $\beta_1^m(\phi) < \infty$, se deduce que

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^m \left|\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + 2\rho \, \frac{d}{dx}\phi(x)\right| < \infty. \qquad (3.5)$$

Definimos $h(x) = \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + 2\rho\frac{d}{dx}\phi(x)$, $x \in (0,\infty)$. Integrando obtenemos

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = e^{-2\rho x}\left(\int_0^x e^{2\rho t} \; h(t) \; dt + \phi'(0)\right), \quad x \in (0,\infty).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (1+x)^m \frac{d}{dx}\phi(x) &\leq e^{-2\rho x}\left(\int_0^x (1+t)^m \; e^{2\rho t} \; |h(t)| \; dt + (1+x)^m\phi'(0)\right) \\ &\leq c\left(e^{-2\rho x}\int_0^x e^{2\rho t} \; dt + 1\right) \leq c, \quad x \in (0,\infty). \end{aligned}$$

De (3.5) sigue entonces que $(1+x)^m \frac{d^2}{dx^2}\phi(x)$ está acotado sobre $(0,\infty)$.

Procediendo de nuevo inductivamente probamos que $\alpha_k^m(\phi) < \infty$, para cada $k \in \mathbf{N}$.

Por otra parte, argumentos ordinarios (véase, por ejemplo, [112] y [113, 6.3]) nos permiten probar que las familias $\{\alpha_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ y $\{\beta_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ definen topologías Fréchet sobre A_m. Ya que $\{\alpha_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ genera una topología más fina que la inducida sobre A_m por $\{\beta_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$, el teorema de la aplicación abierta implica que $\{\alpha_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ y $\{\beta_k^m\}_{k\in\mathbf{N}}$ son equivalentes sobre A_m.

$\blacksquare$

Es inmediato ver que el espacio S_p está contenido en A_m, para cada $0 < p \leq 2$.

Ahora bien, el espacio S_p no es denso en A_m. En efecto, si ϕ está en la clausura de S_p en A_m, existe una sucesión $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset S_p$ tal que $\phi_j \to \phi$, cuando $j \to \infty$, en A_m. En particular $(1+x)^m|\phi_j(x) - \phi(x)| \to 0$, cuando $j \to \infty$, uniformemente en $(0,\infty)$. Ya que $\lim_{x\to\infty}(1+x)^m\phi_j(x) = 0$, para cada $j \in \mathbf{N}$, también $\lim_{x\to\infty}(1+x)^m\phi(x) = 0$. Consideramos una función $\psi \in C^\infty(0,\infty)$ tal que $\psi(x) = 0,\ x \in (0,1)$, y $\psi(x) = (1+x)^{-m},\ x \in [2,\infty)$. No es difícil ver que $\psi \in A_m$ y, sin embargo, $\psi(x)(1+x)^m = 1,\ x \in [2,\infty)$. Por tanto, ψ no está en la clausura de S_p en A_m.

Definimos $\mathcal{A}_{m,p}$ como la clausura de S_p en A_m, para cada $0 < p \leq 2$.

A continuación probamos que el espacio $\mathcal{A}_{m,p}$ no depende de $0 < p \leq 2$. Por $\mathcal{D}_*$, como en capítulos anteriores, denotamos el espacio de las funciones pares, C^∞ sobre $\mathbf{R}$ y que tienen soporte compacto en $\mathbf{R}$.

Proposición 3.2 *Sean $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, y $0 < p \leq 2$. Supongamos que $\phi \in C^\infty(0,\infty)$ y que existe una función par $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\phi(x) = \psi(x),\ x \in (0,\infty)$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) $\phi \in \mathcal{A}_{m,p}$,

(b) para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^m \, \frac{d^k}{dx^k}\phi(x) = 0, \tag{3.6}$$

(c) Existe una sucesión $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_*$ tal que $\phi_j \to \phi$, cuando $j \to \infty$, en A_m.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que $\phi \in \mathcal{A}_{m,p}$. Existe entonces una sucesión $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ en S_p tal que $\phi_j \to \phi$, cuando $j \to \infty$, en A_m.

Sean $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbf{N}$. Existe $j \in \mathbf{N}$ de manera que

$$\begin{aligned}(1+x)^m\left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| &\leq \sup_{t\in(0,\infty)}(1+t)^m\left|\frac{d^k}{dt^k}(\phi(t)-\phi_j(t))\right| \\ &\quad +(1+x)^m\left|\frac{d^k}{dx^k}\phi_j(x)\right| \\ &< \varepsilon + (1+x)^m\left|\frac{d^k}{dx^k}\phi_j(x)\right|, \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

Al ser $\phi_j \in S_p$, $(1+x)^m \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi_j(x)\right| \to 0$, cuando $x \to \infty$, y entonces, para cierto $x_0 > 0$, se tiene

$$(1+x)^m \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| < 2\varepsilon, \quad x \geq x_0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^m \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Asumamos que se verifica (3.6), para cada $k \in \mathbf{N}$. Elegimos una función $\xi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\xi(x) = 1$, $x \leq 0$, y $\xi(x) = 0$, $x \geq 1$. Para cada $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, definimos

$$\xi_n(x) = \xi(x-n), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Nótese que $\phi\xi_n \in \mathcal{D}_*$, $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. En efecto, para cada $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, existe una función par $\psi_n \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\psi_n = \phi\xi_n$ sobre $(0,\infty)$ y $\psi_n(x) = 0$, $|x| \geq n+1$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbf{N}$. La regla de Leibniz conduce, para cada $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, a

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}(\phi(x)\xi_n(x) - \phi(x)) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}(\phi(x))\ \frac{d^j}{dx^j}(\xi_n(x)) \\ &\quad + \frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\ (\xi_n(x)-1), \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(1+x)^m \left|\frac{d^k}{dx^k}(\phi(x)\xi_n(x) - \phi(x))\right| \leq c\sum_{j=0}^{k}(1+x)^m\left|\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\phi(x)\right| \cdot$$

$$\cdot \left(\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\frac{d^j}{dt^j}\xi(t)\right| + 1\right), \quad x \in (0,\infty),\ n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}.$$

De acuerdo con la hipótesis, existe $x_0 > 0$ tal que

$$(1+x)^m \left|\frac{d^k}{dx^k}(\phi(x)\xi_n(x) - \phi(x))\right| < \varepsilon, \quad x \geq x_0,\ n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}.$$

Además, si $n \in \mathbf{N}$ y $n \geq x_0$, $\phi(x)\xi_n(x) = \phi(x)$, $x \in (0, x_0)$. Por tanto, $\phi\xi_n \to \phi$, cuando $n \to \infty$, en A_m.

(c) $\Rightarrow$ (a). Basta observar que $\mathcal{D}_*$ está contenido en S_p.

■

De acuerdo con la Proposición 3.2, el espacio $\mathcal{A}_{m,p}$ no depende de $0 < p \leq 2$. Escribimos, por ello, en lo que sigue $\mathcal{A}_m$ en lugar de $\mathcal{A}_{m,p}$. Además la Proposición 3.2 nos dice que el espacio $\mathcal{A}_m$ puede ser identificado con el espacio constituido por las funciones pares en el espacio $\mathcal{S}_m$ considerado por J. Horváth ([73]).

Precisamos a continuación condiciones bajo las cuales, para cada $k \in \mathbf{N}$, la función $\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\varphi_\lambda$ está en $\mathcal{A}_m$.

Proposición 3.3

(a) Sea $\rho > 0$ y $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$. Para cada $k \in \mathbf{N}$, la función $\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, cuando $|Im\lambda| < \rho$. Además $\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$ si $|Im\lambda| = \rho$.

(b) Si $\rho = 0$ y $k \in \mathbf{N}$, entonces $\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, siempre que $m \leq -1-k$ y $\lambda \in \mathbf{R}$.

Demostración.

(a) Supongamos que $\rho > 0$. Ya que la función $\lambda \to \varphi_\lambda(x)$ es entera, para cada $x \in (0,\infty)$, podemos escribir, cuando $k \in \mathbf{N}$, $x \in (0,\infty)$ e $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$,

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda(x) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{c_\lambda} \frac{\varphi_\eta(x)}{(\eta-\lambda)^{k+1}}d\eta, \tag{3.7}$$

donde c_λ es la circunferencia que tiene por parametrización $\eta(t) = \lambda + r_\lambda e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ y $r_\lambda = \frac{1}{2}(\rho - |\mathrm{Im}\lambda|)$. Nótese que de (3.7) se deduce que, para cada $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$, la función $\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda(x)$ es par.

De (3.7) sigue que, para cada $l, k \in \mathbf{N}$, $x \in (0,\infty)$ e $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$,

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l}\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda(x) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{c_\lambda} \frac{\partial^l}{\partial x^l}\frac{\varphi_\eta(x)}{(\eta-\lambda)^{k+1}}d\eta.$$

Sean $k, l \in \mathbf{N}$. En virtud de la Proposición 3.1, que también es válida cuando $m = 0$, existen $j \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ tales que

$$\sup_{x\in(0,\infty)}\left|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\varphi_\eta(x)\right| \leq c \max_{0\leq s\leq j}\sup_{x\in(0,\infty)}|\Delta^s\varphi_\eta(x)|, \quad \eta \in \mathbf{C}.$$

Por tanto,

$$\sup_{x\in(0,\infty)}\left|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\varphi_\eta(x)\right| \leq c\ (|\eta|^2+\rho^2+1)^j \sup_{x\in(0,\infty)}|\varphi_\eta(x)|, \quad \eta \in \mathbf{C}. \tag{3.8}$$

De (3.7), (3.8) y [33, Lemma 3.4] se deduce que

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda(x)\right| \leq c\ (|\lambda|^2+\rho^2+1)^j\ (\rho - |\mathrm{Im}\lambda|)^{-k},$$

cuando $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$ y $x \in (0,\infty)$.

Luego, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{-1}\frac{\partial^l}{\partial x^l}\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda(x) = 0$, siempre que $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$.

Esto prueba ya, recordando [33, Lemma 3.1], que $\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, cuando $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$, y $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$.

Además, las Proposiciones 3.1 y 3.2 y [33, Lemma 3.4] implican que $\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, cuando $|\mathrm{Im}\lambda| = \rho$ y $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, procediendo como en el caso anterior.

(b) Supongamos que $\rho = 0$. Sean $k, l \in \mathbf{N}$. En virtud de [33, Lemma 3.4, (iv)] obtenemos

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Delta^l\varphi_\lambda(x)\right| \leq c\ (1+x)^k\ (1+|\lambda|)^{2l}, \quad x \in (0,\infty),\ \lambda \in \mathbf{R}. \tag{3.9}$$

Por tanto recurriendo de nuevo a las Proposiciones 3.1 y 3.2 concluimos que $\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, siempre que $m \leq -1-k$.

■

El espacio dual de $\mathcal{A}_m$ se denota, como es usual, por $\mathcal{A}'_m$, para cada $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$.

Presentamos ahora una representación para los elementos de $\mathcal{A}'_m$ que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 3.4 *Sea $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$. Supongamos que T es una funcional sobre $\mathcal{A}_m$. Entonces $T \in \mathcal{A}'_m$ si, y sólo si, existen $k \in \mathbf{N}$ y medidas complejas regulares $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ sobre $[0,\infty)$, tales que*

$$< T, \phi > = \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty (1+x)^m \, \frac{d^j}{dx^j}\phi(x) \, d\mu_j(x), \quad \phi \in \mathcal{A}_m. \tag{3.10}$$

Demostración.

Si T admite la representación (3.10) para ciertas $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ medidas complejas regulares sobre $[0,\infty)$, entonces

$$|< T, \phi >| \leq \sum_{j=0}^{k} |\mu_j|([0,\infty)) \, \alpha_j^m(\phi), \quad \phi \in \mathcal{A}_m,$$

donde $|\mu_j|$ representa la medida variación total de μ_j, $j = 0, ..., k$. Por tanto $T \in \mathcal{A}'_m$.

Supongamos ahora que $T \in \mathcal{A}'_m$. Existen $k \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ para las cuales se tiene

$$|< T, \phi >| \leq c \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in (0,\infty)} (1+x)^m \left| \frac{d^j}{dx^j}\phi(x) \right|, \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

Además, para cada $\phi \in \mathcal{A}_m$, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^m \frac{d^j}{dx^j}\phi(x) = 0$, $j \in \mathbf{N}$.

Recurriendo a los teoremas de Hahn–Banach y de representación de Riesz, los argumentos empleados en la prueba de la Proposición 2.7, nos permiten concluir que T admite la representación (3.10) para ciertas medidas complejas regulares sobre $[0,\infty)$.

■

3.3 La transformación de Chébli–Trimèche sobre los espacios tipo Schwartz S_p, $0 < p \leq 2$ y sus duales.

Como se mencionó en la Sección 3.1, W. Bloom y Z. Xu ([33, Theorem 4.27]) probaron que la transformación generalizada de Fourier $\mathcal{F}$ es un isomorfismo de S_p en H_p. El caso particular $p = 2$ fue estudiado por K. Trimèche ([109, Theorem II.2]). La inversa $\mathcal{F}^{-1}$ de $\mathcal{F}$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi)(x) = \int_0^\infty \Phi(\lambda)\ \varphi_\lambda(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in (0,\infty) \text{ y } \Phi \in H_p,$$

donde c es una función continua y sin ceros en $[0,\infty)$.

La transformación $\mathcal{F}$ de Chébli–Trimèche se define sobre el dual S_p' de S_p por trasposición. Esto es, si $T \in S_p'$ la transformada $\mathcal{F}'T$ de T es el elemento de H_p' dado por

$$< \mathcal{F}'T, \mathcal{F}\phi > = < T, \phi >, \quad \phi \in S_p. \tag{3.11}$$

La transformación distribucional definida por (3.11) extiende la definición de la transformación de Chébli–Trimèche sobre S_p, cuando $0 < p \leq 2$. Justificamos ahora esta afirmación.

Sean $0 < p \leq 2$ y f una función medible Lebesgue definida sobre $(0,\infty)$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2\rho x}{p}}\ (1+x)^{-l+\frac{2}{p}}\ |f(x)|\ A(x)\ dx < \infty,$$

para algún $l \in \mathbf{N}$. Entonces la funcional T_f definida sobre S_p por

$$< T_f, \phi > = \int_0^\infty f(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx, \quad \phi \in S_p,$$

está en S_p'. En efecto, tenemos que

$$|< T_f, \phi >| \leq \mu_{l,0}^p(\phi) \int_0^\infty e^{-\frac{2\rho x}{p}}\ (1+x)^{-l+\frac{2}{p}}\ |f(x)|\ A(x)\ dx, \quad \phi \in S_p.$$

En particular, S_p puede ser visto como un subespacio de S_p' cuando $0 < p \leq 2$, ya que, a tenor de [33, (3.5)], tenemos

$$\int_0^\infty e^{-2\rho x/p} \frac{|\phi(x)|\ A(x)}{(1+x)^{2\beta+1-\frac{2}{p}+l}}\ dx \leq c \int_0^\infty e^{-2\rho x/p}\ |\phi(x)|\ \frac{x^\beta e^{2\rho x}}{(1+x)^{2\beta+1-\frac{2}{p}+l}}\ dx$$

$$\leq c \int_0^\infty e^{-2\rho x\left(\frac{2}{p}-1\right)} \frac{x^\beta}{(1+x)^{2\beta+1-\frac{2}{p}+l}}\ dx < \infty.$$

Aquí β es la constante positiva que aparece en [33, (3.5)] y $l \in \mathbf{N},\ l > 2/p$.

Supongamos ahora que F es una función medible sobre $(0,\infty)$ tal que

$$\int_0^\infty (1+y)^{-l}\ |F(y)|\ \frac{dy}{|c(y)|^2} < \infty,$$

para algún $l \in \mathbf{N}$. Definimos la funcional $\mathcal{T}_F$ sobre H_p por

$$< \mathcal{T}_F, \Phi > = \int_0^\infty F(y)\ \Phi(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2},\ \Phi \in H_p.$$

De este modo $\mathcal{T}_F \in H'_p$. En efecto, tenemos que, para cada $\Phi \in H_p$,

$$|< \mathcal{T}_F, \Phi >| \leq \int_0^\infty |F(y)| \; |\Phi(y)| \; \frac{dy}{|c(y)|^2} \leq \int_0^\infty |F(y)| \; (1+y)^{-l} \; \frac{dy}{|c(y)|^2} \; \tau^p_{0,l}(\Phi).$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{|c(y)|^2} \sim y^{2\alpha+1}$, cuando y es grande ([109, pág. 99]), se sigue entonces que H_p puede identificarse con un subespacio de H'_p.

Sea $\phi \in S_p$, donde $0 < p \leq 2$. Sabemos que $\mathcal{F}(\phi) \in H_p$ ([33, Theorem 4.27]). Intercambiando el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned}
< \mathcal{T}_{\mathcal{F}\phi}, \mathcal{F}\psi > &= \int_0^\infty (\mathcal{F}\phi)(y) \; (\mathcal{F}\psi)(y) \; \frac{dy}{|c(y)|^2} \\
&= \int_0^\infty (\mathcal{F}\psi)(y) \left(\int_0^\infty \phi(x)\varphi_y(x) \; A(x) \; dx \right) \; \frac{dy}{|c(y)|^2} \\
&= \int_0^\infty \phi(x) \left(\int_0^\infty (\mathcal{F}\psi)(y)\varphi_y(x) \; \frac{dy}{|c(y)|^2} \right) A(x) \; dx \\
&= \int_0^\infty \phi(x) \; \psi(x) \; A(x) \; dx, \quad \psi \in S_p.
\end{aligned}$$

Probamos así que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}\phi} = \mathcal{F}(T_\phi)$, y establecemos que la transformación distribucional de Chébli–Trimèche dada por (3.11) extiende la transformación clásica sobre S_p.

3.4 La transformación de Chébli–Trimèche sobre los espacios $\mathcal{A}'_m$, $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$.

Como se estableció en la Proposición 3.3, $\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, siempre que $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho$.

Teniendo esto presente, definimos la transformada $\mathcal{F}'T$ de Chébli–Trimèche de $T \in \mathcal{A}'_m$, $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, como sigue

$$(\mathcal{F}'T)(\lambda) =< T, \varphi_\lambda >, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho.$$

Probamos a continuación algunas propiedades de la transformación generalizada que acabamos de definir

Proposición 3.5 *(acotación). Sea $T \in \mathcal{A}'_m$. Entonces existe un polinomio Q tal que*

$$|(\mathcal{F}'T)(\lambda)| \leq Q(|\lambda|^2), \quad \lambda \in \mathbf{C} \text{ y } |Im\lambda| \leq \rho.$$

Demostración.

De acuerdo con la Proposición 3.1 existen $r \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ tales que

$$| < T, \phi > | \leq c \max_{0\leq k\leq r} \beta^m_k(\phi), \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

En particular, si $\lambda \in \mathbf{C}$ y $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho$, [33, Lemma 3.4] permite escribir

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}'T)(\lambda)| &\leq c \max_{0\leq k\leq r} \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^m \left|\Delta^k \varphi_\lambda(x)\right| \\ &\leq c \max_{0\leq k\leq r} (\rho^2+|\lambda|^2)^k \leq c\,(1+\rho^2+|\lambda|^2)^r. \end{aligned}$$

Proposición 3.6 *(regularidad). Sea $T \in \mathcal{A}'_m$. Tenemos que*
(i) Cuando $\rho > 0$, $\mathcal{F}'T$ es holomorfa en $|Im\lambda| < \rho$.
(ii) Si $\rho = 0$, $\mathcal{F}'T$ es continua en $\mathbf{R}$. Además, $\mathcal{F}'T$ es k veces diferenciable siempre que $m < -k-1$.

Demostración.
Escribimos $F = \mathcal{F}'T$. Suponemos en primer lugar que $\rho > 0$.
Sea $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tal que $|\mathrm{Im}\lambda_0| < \rho$. Vamos a probar que

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{F(\lambda_0+\lambda)-F(\lambda_0)}{\lambda} =< T, \frac{\partial}{\partial z}\varphi_z(\cdot)_{|z=\lambda_0} > . \tag{3.12}$$

Nótese que, a tenor de la Proposición 3.3, $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_\lambda \in \mathcal{A}_m$, cuando $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$. Por tanto, la parte derecha de (3.12) tiene sentido.

Para mostrar (3.12) basta establecer que

$$\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x)-\varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda} \to \frac{d}{dz}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0}, \quad \text{cuando } \lambda \to 0,$$

en A_m.

Elegimos $0 < r < R < \rho - |\mathrm{Im}\lambda_0|$. Ya que la función $\lambda \to \varphi_\lambda(x)$ es entera, para cada $x \in (0,\infty)$, la fórmula de Cauchy nos permite escribir

$$\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x)-\varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda} - \frac{d}{dz}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\lambda}{(\eta-\lambda_0)^2(\eta-\lambda_0-\lambda)}\varphi_\eta(x)d\eta,$$

para cada $x \in (0,\infty)$ y $|\lambda| < r$, donde C denota la circunferencia centrada en λ_0 y radio R.

Recurriendo a [33, Lemma 3.4], para cada $k \in \mathbf{N}$, $x \in (0,\infty)$ y $|\lambda| < r$,

$$\left|\Delta^k\left(\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x)-\varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda} - \frac{d}{dz}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0}\right)\right| \leq c\frac{|\lambda|}{R(R-r)}.$$

Por tanto, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\beta_k^m\left(\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(\cdot)-\varphi_{\lambda_0}(\cdot)}{\lambda} - \frac{d}{dz}\varphi_z(\cdot)_{|z=\lambda_0}\right) \to 0, \quad \text{cuando } \lambda \to 0.$$

De este modo (3.12) queda probado.

Supongamos ahora que $\rho = 0$.

Sea $\lambda_0 \in (0,\infty)$. Para ver que F es continua en λ_0 es suficiente mostrar que $\varphi_\lambda \to \varphi_{\lambda_0}$, cuando $\lambda \to \lambda_0$, en A_m.

Fijamos $k \in \mathbf{N}$. De [33, Lemma 3.4, (i)] se sigue

$$\begin{aligned} (1+x)^m \left|\Delta^k(\varphi_\lambda(x) - \varphi_{\lambda_0}(x))\right| &\leq (1+x)^m \left|\lambda^{2k}\varphi_\lambda(x) - \lambda_0^{2k}\varphi_{\lambda_0}(x)\right| \\ &\leq c\,(1+x)^m, \quad x \in (0,\infty),\ 0 < \lambda < 2\lambda_0. \end{aligned}$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$(1+x)^m \left|\Delta^k(\varphi_\lambda(x) - \varphi_{\lambda_0}(x))\right| < \varepsilon, \quad 0 < \lambda < 2\lambda_0,\ x \geq R.$$

Además, ya que $\lambda^{2k}\varphi_\lambda(x)$ es una función uniformemente continua en

$$\{(x,\lambda):\ x \in [0,R],\ \lambda \in [0,2\lambda_0]\},$$

$\lambda^{2k}\varphi_\lambda(x) \to \lambda_0^{2k}\varphi_{\lambda_0}(x)$, cuando $\lambda \to \lambda_0$, uniformemente en $x \in [0,R]$. Luego, si $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ para el cual

$$\left|\lambda^{2k}\varphi_\lambda(x) - \lambda_0^{2k}\varphi_{\lambda_0}(x)\right| < \varepsilon, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta,\ x \in [0,R].$$

Los argumentos anteriores nos permiten concluir que

$$\beta_k^m(\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda_0}) \to 0, \quad \text{cuando } \lambda \to \lambda_0,$$

y, por tanto, que $\varphi_\lambda \to \varphi_{\lambda_0}$, cuando $\lambda \to \lambda_0$, en A_m.

Consideramos en lo que sigue que $m \in \mathbf{Z},\ m < -2$. Vamos a ver que F es una función diferenciable sobre $(0,\infty)$.

Sea $\lambda_0 \in [0,\infty)$. Para mostrar la diferenciabilidad de F en λ_0 tenemos que ver que

$$\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x) - \varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial z}\varphi_{z|z=\lambda_0} \to 0, \quad \text{cuando } \lambda \to 0,$$

en A_m.

Para cada $x \in (0,\infty)$ y $\lambda \neq 0$ podemos escribir

$$\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x) - \varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial z}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda_0}^{\lambda+\lambda_0}\int_{\lambda_0}^{u}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\varphi_\eta(x)\ d\eta\ du.$$

Entonces, si $k \in \mathbf{N},\ x \in (0,\infty)$ y $\lambda \neq 0$, sigue

$$\begin{aligned} &\Delta^k\left(\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x) - \varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial z}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda_0}^{\lambda+\lambda_0}\int_{\lambda_0}^{u}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\eta^{2k}\varphi_\eta(x)\right)\ d\eta\ du \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda_0}^{\lambda+\lambda_0}\int_{\lambda_0}^{u}\Big(2k(2k-1)\eta^{2k-2}\varphi_\eta(x) \\ &+4k\eta^{2k-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi_\eta(x) + \eta^{2k}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\varphi_\eta(x)\Big)\ d\eta\ du. \end{aligned}$$

Luego, de [33, Lemma 3.4, (iv)] se infiere que

$$\left|\Delta^k\left(\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x)-\varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda}-\frac{d}{dz}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0}\right)\right|$$

$$\leq c\,(1+x)^2\left|\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda_0}^{\lambda+\lambda_0}\int_{\lambda_0}^{u}\left|2k(2k-1)\eta^{2k-2}+4k\eta^{2k-1}+\eta^{2k}\right|\,d\eta\,du\right|,\quad (3.13)$$

para cada $k\in\mathbf{N}$, $x\in(0,\infty)$ y $\lambda\neq 0$.

De (3.13) se deduce que

$$(1+x)^m\left|\Delta^k\left(\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(x)-\varphi_{\lambda_0}(x)}{\lambda}-\frac{d}{dz}\varphi_z(x)_{|z=\lambda_0}\right)\right|$$

$$\leq (1+x)^{m+2}\frac{1}{|\lambda|}\left|\int_{\lambda_0}^{\lambda+\lambda_0}2k(\lambda^{2k-1}-\lambda_0^{2k-1})+2(u^{2k}-\lambda_0^{2k})+\frac{u^{2k+1}-\lambda_0^{2k+1}}{2k+1}\,du\right|$$

$$=(1+x)^{m+2}\frac{1}{|\lambda|}\left|(\lambda+\lambda_0)^{2k}-\lambda_0^{2k}-2k\lambda_0^{2k-1}\lambda+\frac{2}{2k+1}((\lambda+\lambda_0)^{2k+1}-\lambda_0^{2k+1})\right.$$

$$\left.-2\lambda_0^{2k}\lambda+\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2k+2}((\lambda+\lambda_0)^{2k+2}-\lambda_0^{2k+2})-\lambda_0^{2k+1}\lambda\right)\right|=$$

$$=(1+x)^{m+2}\frac{1}{|\lambda|}\left|\sum_{j=2}^{2k}\binom{2k}{j}\lambda_0^{2k-j}\lambda^j+\frac{2}{2k+1}\sum_{j=2}^{2k+1}\binom{2k+1}{j}\lambda_0^{2k+1-j}\lambda^j\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\sum_{j=2}^{2k+2}\binom{2k+2}{j}\lambda_0^{2k+2-j}\lambda^j\right|$$

$$\leq c\,|\lambda|(1+x)^{m+2},\quad x\in(0,\infty)\text{ y }\lambda\in(0,1),$$

para cada $k=1,2,....$ Cuando $k=0$ se procede análogamente.

Por tanto,

$$\beta_k^m\left(\frac{\varphi_{\lambda_0+\lambda}(\cdot)-\varphi_{\lambda_0}(\cdot)}{\lambda}-\frac{d}{dz}\varphi_z(\cdot)_{|z=\lambda_0}\right)\to 0,\quad\text{cuando }\lambda\to 0,$$

para cada $k\in\mathbf{N}$ siempre que $m<-2$.

Análogamente, cuando $\lambda_0\leq 0$ podemos razonar de la misma manera.

Un argumento similar nos permite probar que F es k veces diferenciable sobre $\mathbf{R}$ cuando $m<-k-1$, para cada $k\in\mathbf{N}$, $k\geq 1$.

$\blacksquare$

Para cada $0<p\leq 2$, el espacio S_p está continuamente contenido en $\mathcal{A}_m$. Por tanto el dual $\mathcal{A}'_m$ está contenido en S'_p. Si $T\in\mathcal{A}'_m$ podemos entonces definir la transformada $\mathcal{F}'T$ de dos modos aparentemente diferentes: uno como elemento de S'_p, esto es, por

$$<\mathcal{F}'T,\mathcal{F}\phi>=<T,\phi>,\quad \phi\in S_p;$$

el otro, como elemento de $\mathcal{A}'_m$ del modo siguiente

$$(\mathcal{F}'T)(\lambda) =< T, \varphi_\lambda >, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho.$$

A continuación veremos que ambas definiciones coinciden.

Proposición 3.7 *Sean* $0 < p \leq 2$ *y* $T \in \mathcal{A}'_m$. *Si*

$$F(y) =< T, \varphi_y >, \quad y \in (0, \infty),$$

se tiene que

$$< \mathcal{T}_F, \mathcal{F}\phi >=< T, \phi >, \quad \phi \in S_p.$$

Demostración.

De acuerdo con la Proposición 3.5 existe un polinomio Q tal que $|F(y)| \leq Q(|y|^2),\ y \in \mathbf{R}$. Por tanto, de acuerdo a lo comentado en la sección 3.3, ya que $\frac{1}{|c(y)|^2} \sim y^{2\alpha+1}$, cuando y es grande ([109, pág. 99]), F define un elemento $\mathcal{T}_F$ en H'_p mediante

$$< \mathcal{T}_F, \Phi >= \int_0^\infty F(y)\ \Phi(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad \Phi \in H_p.$$

En particular, tenemos que, para cada $\phi \in S_p$,

$$< \mathcal{T}_F, \mathcal{F}\phi >= \int_0^\infty F(y)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad \phi \in S_p.$$

En virtud de la Proposición 3.4 existen medidas $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k$ complejas regulares sobre $[0, \infty)$ tales que

$$< T, \phi >= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty (1+x)^m\ \frac{d^j}{dx^j}\phi(x)\ d\mu_j(x), \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

Ya que $\varphi_y \in \mathcal{A}_m,\ y \in (0, \infty)$, podemos escribir que

$$\begin{aligned}
< \mathcal{T}_F, \mathcal{F}(\phi) > &= \int_0^\infty \mathcal{F}(\phi)(y) \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty (1+x)^m\ \frac{d^j}{dx^j}\varphi_y(x)\ d\mu_j(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty (1+x)^m \int_0^\infty \frac{d^j}{dx^j}\varphi_y(x)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}\ d\mu_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty (1+x)^m \frac{d^j}{dx^j} \int_0^\infty \varphi_y(x)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}\ d\mu_j(x) \\
&= < T, \phi >, \quad \phi \in S_p.
\end{aligned}$$

Nótese que, teniendo en cuenta [33, Lemma 3.4 y Theorem 4.27] junto a que $\frac{1}{|c(y)|^2} \sim y^{2\alpha+1}$, cuando y es grande ([109, pág. 99]), el intercambio de orden de integración y la diferenciación bajo el signo integral están justificados.

■

Como una consecuencia de la Proposición 3.7 obtenemos un teorema de unicidad para la transformación distribucional de Fourier generalizada.

Proposición 3.8 *(unicidad). Sea $T \in \mathcal{A}'_m$. Si $(\mathcal{F}'T)(y) = 0$, $y \in (0,\infty)$, entonces $T = 0$.*

Demostración.
Es suficiente con recurrir a la Proposición 3.7 y recordar que $\mathcal{D}_*$ es un subespacio denso de $\mathcal{A}_m$. En efecto, para cada $\phi \in \mathcal{D}_*$ se tiene que

$$0 =< \mathcal{F}'T, \mathcal{F}\phi >=< T, \phi > .$$

Por tanto $T = 0$.

■

A continuación establecemos una fórmula de inversión para la transformación distribucional de Chébli–Trimèche.

Proposición 3.9 *(inversión). Sea $0 < p \leq 2$ y $T \in \mathcal{A}'_m$. Entonces*

$$T = \lim_{r\to\infty} \int_0^r (\mathcal{F}'T)(y)\ \varphi_y(\cdot)\ \frac{dy}{|c(y)|^2},$$

*en la topología débil * de S'_p.*

Demostración.
Denotamos $F = \mathcal{F}'T$. Observamos inicialmente que, en virtud de la Proposición 3.6, la función $F(y)\varphi_y(x)/|c(y)|^2$ es integrable sobre $[0,r]$, para cada $r > 0$, y la función F_r definida, para cada $r > 0$, por

$$F_r(x) = \int_0^r F(y)\ \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}, \quad x \in (0,\infty),$$

genera una distribución en S'_p. En efecto, de acuerdo con [33, Lemma 3.4] y la Proposición 3.5, podemos escribir, para cada $r \in (0,\infty)$,

$$|F_r(x)| \leq \int_0^r |F(y)|\ |\varphi_y(x)|\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \leq c\ (1+x)\ e^{-\rho x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Por tanto, de [33, (3.5)] sigue, para cada $r \in (0,\infty)$,

$$\int_0^\infty |F_r(x)|\ (1+x)^{-l+\frac{2}{p}}\ e^{-2\rho x/p}\ A(x)\ dx$$

$$\leq c \int_0^\infty (1+x)^{-l+\frac{2}{p}+1}\ e^{\rho x\left(1-\frac{2}{p}\right)}\ x^\beta\ dx < \infty, \quad \text{si } l \in \mathbf{N},\ l > \frac{2}{p} + \beta + 2.$$

Luego, según lo comentado en la sección 3.3, F_r define un elemento en S'_p por

$$< F_r, \phi >= \int_0^\infty F_r(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx, \quad \phi \in S_p,\ r > 0.$$

Sea $\phi \in S_p$. El teorema de Fubini nos permite, procediendo como en la prueba de la Proposición 3.7 (recurriendo a la representación de T establecida en la Proposición 3.4), obtener

$$\int_0^\infty F_r(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx = \int_0^r F(y) \int_0^\infty \phi(x)\ \varphi_y(x)\ A(x)\ dx\ \frac{dy}{|c(y)|^2}$$

$$=< T, \int_0^r \varphi_y(\cdot)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} >, \quad r > 0. \tag{3.14}$$

Nótese que $\int_0^r \varphi_y(x)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \in \mathcal{A}_m$, para cada $r > 0$ (recuérdese que $m < 0$).

Además, de [33, Lemma 3.4], sigue que, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\beta_k^m \left(\int_r^\infty \varphi_y(x)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right) \leq \int_r^\infty |\mathcal{F}(\phi)(y)|\ (y^2 + \rho^2)^k\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \to 0,$$

cuando $r \to \infty$.

Por tanto, aplicando [33, Theorem 4.27],

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r \varphi_y(x)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} = \int_0^\infty \varphi_y(x)\ \mathcal{F}(\phi)(y)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} = \phi(x),$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{A}_m$.

De (3.14) se deduce entonces que

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r (\mathcal{F}'T)(y)\ \varphi_y(\cdot)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} = T,$$

en la topología débil * de S'_p.

■

Nótese que, al ser S_p un subespacio denso de $\mathcal{A}_m$, la fórmula establecida en la proposición anterior determina la funcional $T \in \mathcal{A}'_m$.

Presentamos ahora una regla operacional para la transformación distribucional estudiada.

Previamente establecemos que el operador Δ es continuo de $\mathcal{A}_m$ en sí mismo.

Proposición 3.10 *El operador Δ es continuo de $\mathcal{A}_m$ en sí mismo.*

Demostración.

Es claro, en virtud de la Proposición 3.1, que Δ aplica continuamente A_m en sí mismo. Nótese que $\frac{A'}{A}$ es una función impar.

Sea $\phi \in \mathcal{A}_m$. Sabemos que

$$\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{A'(x)}{A(x)} \frac{d}{dx}.$$

Luego, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\frac{d^k}{dx^k} \Delta\phi(x) = -\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}\phi(x) - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} \left(\frac{A'(x)}{A(x)} \right) \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(\phi(x)),\ x \in [0, \infty).$$

De aquí se deduce, al ser $\frac{d^l}{dx^l}\left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)$ acotada en un entorno de infinito, para cada $l \in \mathbf{N}$, que $\lim_{x\to\infty}(1+x)^m \frac{d^k}{dx^k}\Delta\phi(x) = 0$, para cada $k \in \mathbf{N}$. La Proposición 3.2 implica ya que $\Delta\phi \in \mathcal{A}_m$.

De este modo la prueba está completa.

■

Denotamos por Δ^* el adjunto formal del operador Δ. Esto es, para cada $T \in \mathcal{A}'_m$, $\Delta^* T$ es el elemento de $\mathcal{A}'_m$ definido por

$$< \Delta^* T, \phi > = < T, \Delta\phi >, \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

El operador Δ^* es continuo de $\mathcal{A}'_m$ en sí mismo, cuando sobre este espacio se considera la topología débil * o la fuerte.

Proposición 3.11 *Sea $T \in \mathcal{A}'_m$. Entonces*

$$\mathcal{F}(\Delta^* T)(\lambda) = (\lambda^2 + \rho^2)(\mathcal{F}T)(\lambda), \quad |Im\lambda| \leq \rho. \tag{3.15}$$

Demostración.

Es suficiente tener en cuenta que $\Delta_x \varphi_\lambda(x) = (\lambda^2+\rho^2)\varphi_\lambda(x)$, $x \in (0,\infty)$ y $\lambda \in \mathbf{C}$.

■

La igualdad (3.15) es también válida cuando $T \in S'_p$, donde $0 < p \leq 2$. En este caso la igualdad es entendida en H'_p.

3.5 Aplicaciones de la transformación distribucional de Chébli–Trimèche.

Como en los casos anteriores, suponemos que $0 < p \leq 2$ y $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$. Nuestro objetivo ahora es encontrar una funcional $T \in S'_p$ tal que

$$P(\Delta^*)T = S, \tag{3.16}$$

donde $S \in \mathcal{A}'_m$ es conocido y P es un polinomio tal que $P(y) \neq 0$, $y \geq \rho^2$.

De la Proposición 3.11 se sigue que si (3.16) se verifica, entonces

$$P(\lambda^2+\rho^2)F = G, \tag{3.17}$$

donde F y G representan las transformadas de Chébli–Trimèche de T y S, respectivamente.

La igualdad (3.17) junto a la Proposición 3.9 sugiere definir la funcional

$$< T, \phi > = \lim_{n\to\infty} < \int_0^n \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)}\, \varphi_y(\cdot)\, \frac{dy}{|c(y)|^2}, \phi >, \quad \phi \in S_p.$$

Veremos a continuación que el límite anterior existe para cada $\phi \in S_p$.

Sean $m, n \in \mathbf{N},\ m > n$. Para cada polinomio Q sin ceros en $[\rho^2, \infty)$, se tiene que

$$Q(\Delta) \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} = \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}. \tag{3.18}$$

De acuerdo con la Proposición 3.5 podemos encontrar un polinomio Q sin ceros en $[\rho^2, \infty)$ tal que

$$\frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} = O(y^{-r}), \quad \text{cuando } y \to \infty, \tag{3.19}$$

donde $r > 2\alpha + 2$.

Sea $\phi \in S_p$. Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^\infty \Delta_x \left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right) \phi(x)\ A(x)\ dx$$

$$= - \left[\frac{d}{dx} \left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right) \phi(x)\ A(x) \right]_{x=0}^{x\to\infty}$$

$$+ \left[\left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right)\ A(x) \frac{d}{dx} \phi(x) \right]_{x=0}^{x\to\infty}$$

$$- \int_0^\infty \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \Delta\phi(x)\ A(x)\ dx.$$

De [33, Lemma 3.6,(ii)], al ser $\frac{dy}{|c(y)|^2} \sim y^{2\alpha+1}$, cuando y es grande ([109, pág. 99]), se deduce que

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right) \right| \leq c\,(1+x)^3\, e^{-\rho x}, \quad x \in [0, \infty).$$

También

$$\left| \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right| \leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Por tanto, inferimos de [33, (3.5)] que

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2} \right) \phi(x)\ A(x) \right|$$

$$\leq c\ (1+x)^\beta\ e^{\rho x}\ |\phi(x)| \leq \frac{c}{1+x}\ e^{\rho x \left(1 - \frac{2}{p}\right)} \to 0, \quad \text{cuando } x \to \infty,$$

donde $\beta > 0$ es adecuado, y

$$\left| \left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \varphi_y(x)\ \frac{dy}{|c(y)|^2}\ A(x) \frac{d}{dx} \phi(x) \right) \right|$$

$$\leq \frac{c}{1+x} \ e^{\rho x\left(1-\frac{2}{p}\right)} \to 0, \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

Además, ya que $A(0) = 0$, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)}\varphi_y(x) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}\right) \phi(x) \ A(x)_{|x=0} = 0$$

y

$$\left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)}\varphi_y(x) \ \frac{dy}{|c(y)|^2} \ A(x)\frac{d}{dx}\phi(x)\right)_{|x=0} = 0.$$

Se concluye entonces que

$$\int_0^\infty \Delta_x \left(\int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)}\varphi_y(x) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}\right) \phi(x) \ A(x) \ dx$$

$$= \int_0^\infty \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)}\varphi_y(x) \ \frac{dy}{|c(y)|^2} \ \Delta\phi(x) \ A(x) \ dx.$$

Aplicando esta igualdad, (3.18) conduce a

$$< \int_n^n \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)} \ \varphi_y(\cdot) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}, \phi >$$

$$=< \int_n^m \frac{G(y) \ \varphi_y(\cdot)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \frac{dy}{|c(y)|^2}, Q(\Delta)\phi > .$$

Recurriendo de nuevo a [33, (3.5) y Lemma 3.4] conseguimos

$$\left|< \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)} \ \varphi_y(\cdot) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}, \phi >\right|$$

$$= \left|< \int_n^m \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)} \ \varphi_y(\cdot) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}, Q(\Delta)\phi >\right|$$

$$\leq c \int_n^m \left|\frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)Q(y^2+\rho^2)}\right| \frac{dy}{|c(y)|^2} \ \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^\beta \ \varphi_0(x)^{-2/p} \ |Q(\Delta)\phi(x)|,$$

para cierto $\beta > 0$.

Por tanto, la sucesión $\left(\int_0^n \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)}\varphi_y(\cdot)\frac{dy}{|c(y)|^2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy en la topología débil * de S'_p. Existe entonces $T \in S'_p$ tal que,

$$< T, \phi >= \lim_{n\to\infty} < \int_0^n \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)} \ \varphi_y(\cdot) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}, \phi >, \quad \phi \in S_p.$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} < P(\Delta^*)T, \phi > \ &= \ < T, P(\Delta)\phi > \\ &= \ \lim_{n\to\infty} < \int_0^n \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)} \ \varphi_y(\cdot) \ \frac{dy}{|c(y)|^2}, P(\Delta)\phi > \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} < P(\Delta) \int_0^n \frac{G(y)}{P(y^2+\rho^2)} \varphi_y(\cdot) \frac{dy}{|c(y)|^2}, \phi(x) > \\
&= \lim_{n\to\infty} < \int_0^n G(y)\varphi_y(\cdot) \frac{dy}{|c(y)|^2}, \phi > \\
&= < S, \phi >, \quad \phi \in S_p.
\end{aligned}
$$

Probamos así que $T \in S'_p$ es una solución de (3.16) en S'_p.

3.6 La convolución $\sharp$ sobre $\mathcal{A}'_m$.

En esta sección estudiamos la convolución $\sharp$ asociada a la transformación de Chébli–Trimèche sobre el espacio $\mathcal{A}'_m,\ m \in \mathbf{Z},\ m < 0$.

Recordamos que si $f \in L_1([0,a], A(x)dx)$, para cada $a > 0$, la traslación $\tau_x,\ x \in [0,\infty)$, está definida por

$$
(\tau_x f)(y) = \begin{cases} \int_0^\infty D(x,y,z)\ f(z)\ A(z)\ dz, & y \in (0,\infty),\ x \in (0,\infty) \\ f(y), & y \in (0,\infty),\ x = 0 \end{cases},
$$

donde $D(x,y,z)A(z)dz$ es, para cada $x, y \in [0,\infty)$, una medida de probabilidad soportada en el intervalo $[|x-y|, |x+y|]$.

Comenzamos analizando el operador de traslación $\tau_x,\ x \in (0,\infty)$, sobre $\mathcal{A}_m$.

Proposición 3.12

(a) Sea $x \in (0,\infty)$. Entonces τ_x define una aplicación lineal y continua de $\mathcal{A}_m$ en sí mismo.

(b) Sea $\phi \in \mathcal{A}_m$. La aplicación F_ϕ definida por

$$
F_\phi(x) = \tau_x \phi, \quad x \in [0,\infty),
$$

es continua de $[0,\infty)$ en $\mathcal{A}_m$.

Demostración.

(a) Probamos en primer lugar que τ_x aplica $\mathcal{A}_m$ en sí mismo.

Sea $\phi \in \mathcal{A}_m$. Existe una sucesión $(\phi_j)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_*$ tal que $\phi_j \to \phi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{A}_m$ (Proposición 3.2). Entonces, de [105, Corollaire 8.2 y Proposition 8.3.3] se sigue que $(\tau_x\phi_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_*$. Además $(\tau_x\phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{A}_m$. En efecto, sea $k \in \mathbf{N}$. Podemos escribir, para cada $y \in (0,\infty)$ y $j, l \in \mathbf{N}$,

$$
\Delta^k((\tau_x\phi_j)(y) - (\tau_x\phi_l)(y)) = \int_0^\infty (\Delta^k\phi_j(z) - \Delta^k\phi_l(z))\ D(x,y,z)\ A(z)\ dz.
$$

Por tanto, ya que $m < 0$, tenemos

$$
(1+y)^m \left|\Delta^k((\tau_x\phi_j)(y) - (\tau_x\phi_l)(y))\right|
$$

$$
\leq (1+y)^m \int_{|x-y|}^{|x+y|} (\Delta^k\phi_j(z) - \Delta^k\phi_l(z))\ D(x,y,z)\ A(z)\ dz
$$

$$\leq c\ (1+x)^{-m} \int_{|x-y|}^{|x+y|} (1+z)^m \left|\Delta^k \phi_j(z) - \Delta^k \phi_l(z)\right|\ D(x,y,z)\ A(z)\ dz$$

$$\leq c\ (1+x)^{-m}\ \beta_k^m(\phi_j - \phi_l), \quad j,l \in \mathbf{N},\ y \in (0,\infty).$$

Concluimos que

$$\beta_k^m(\tau_x\phi_j - \tau_x\phi_l) \leq c\ (1+x)^{-m}\ \beta_k^m(\phi_j - \phi_l), \quad j,l \in \mathbf{N}.$$

De este modo queda probado que $(\tau_x\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}_m$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{A}_m$ es un espacio de Fréchet, existe $\psi \in \mathcal{A}_m$ tal que $\tau_x\phi_j \to \psi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{A}_m$. Además, $(\tau_x\phi_j)(y) \to \psi(y)$, cuando $j \to \infty$, para cada $y \in (0,\infty)$, ya que la convergencia en $\mathcal{A}_m$ implica la convergencia puntual. Aplicando ahora el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$(\tau_x\phi_j)(y) = \int_{|x-y|}^{|x+y|} \phi_j(z)\ D(x,y,z)\ A(z)\ dz$$

$$\to \int_{|x-y|}^{|x+y|} \phi(z)\ D(x,y,z)\ A(z)\ dz = (\tau_x\phi)(y), \quad \text{cuando } j \to \infty,$$

para cada $y \in (0,\infty)$. Por tanto, $\tau_x\phi = \psi$.

Para probar que τ_x define una aplicación continua del $\mathcal{A}_m$ en sí mismo, recurrimos al teorema del grafo cerrado. Supongamos que $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{A}_m$ tal que $\phi_j \to \phi$ y $\tau_x\phi_j \to \psi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{A}_m$, para ciertas $\phi, \psi \in \mathcal{A}_m$. Entonces, como acabamos de ver

$$(\tau_x\phi_j)(y) \to (\tau_x\phi)(y) \quad \text{y} \quad (\tau_x\phi_j)(y) \to \psi(y), \quad \text{cuando } j \to \infty,$$

para cada $y \in (0,\infty)$. De este modo probamos que $\tau_x\phi = \psi$ y la continuidad de la aplicación definida por τ_x.

(b) Sea $x_0 \in [0,\infty)$. Tenemos que ver que

$$\tau_x\phi - \tau_{x_0}\phi \to 0, \quad \text{cuando } x \to x_0, \tag{3.20}$$

en $\mathcal{A}_m$, donde $\phi \in \mathcal{D}_*$.

De [105, Corollaire 8.2 y Proposition 8.3.3] se sigue que, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\Delta^k((\tau_x\phi)(y) - (\tau_{x_0}\phi)(y)) = \int_0^\infty (\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_0))\ \varphi_\lambda(y)\ \mathcal{F}(\Delta^k\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2},$$

para cada $x, y \in (0,\infty)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando [33, Lemma 3.4 y Theorem 4.27] podemos encontrar $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\int_{\lambda_0}^\infty (\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_0))\ \varphi_\lambda(y)\ \mathcal{F}(\Delta^k\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} < \varepsilon, \quad x, y \in (0,\infty).$$

Por otra parte, la función $\varphi_\lambda(x)$ es continua en $\{(\lambda, x) : \lambda, x \in [0, \infty)\}$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_0)| < \varepsilon,$$

para cada $x \in (0, \infty)$, $|x - x_0| < \delta$ y $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Teniendo en cuenta de nuevo [33, Lemma 3.4 y Theorem 4.27] obtenemos que

$$\int_0^{\lambda_0} \left|(\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x_0))\, \varphi_\lambda(y)\, \mathcal{F}(\Delta^k \phi)(\lambda)\right| \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \leq c\, \varepsilon,$$

siempre que $x \in (0, \infty)$ y $|x - x_0| < \delta$.

De este modo probamos (3.20).

$\blacksquare$

De acuerdo con la Proposición 3.12 definimos la convolución $T\sharp\phi$ de $T \in \mathcal{A}'_m$ y $\phi \in \mathcal{A}_m$ mediante

$$(T\sharp\phi)(x) =< T, \tau_x\phi >, \quad x \in [0, \infty).$$

Nuestro próximo objetivo es mostrar que $T\sharp\phi \in \mathcal{A}_m$.

Proposición 3.13 *Sea $T \in \mathcal{A}'_m$. Entonces la aplicación $\phi \to T\sharp\phi$ es continua de $\mathcal{A}_m$ en sí mismo.*

Demostración.

Sea $\phi \in \mathcal{A}_m$. Existe una sucesión $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_*$ tal que $\phi_j \to \phi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{A}_m$. La sucesión $(T\sharp\phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{A}_m$. Para probar esta propiedad comenzamos estableciendo que

$$\frac{d^k}{dx^k}(T\sharp\psi)(x) =< T, \frac{d^k}{dx^k}(\tau_x\psi) >, \quad x \in (0, \infty), \tag{3.21}$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}_*$ y $k \in \mathbf{N}$.

Sea $\psi \in \mathcal{D}_*$. Nótese que, en virtud de la Proposición 3.12,(a), $T\sharp\psi$ es una función continua sobre $(0, \infty)$. Tomamos $x_0 \in (0, \infty)$. Para ver que

$$\frac{d}{dx}(T\sharp\psi)(x)_{|x=x_0} =< T, \frac{d}{dx}(\tau_x\psi)_{|x=x_0} >,$$

debemos mostrar que

$$\frac{(\tau_{x+x_0}\psi)(y) - (\tau_{x_0}\psi)(y)}{x} - \frac{d}{dz}(\tau_z\psi)(y)_{|z=x_0}$$

$$= \frac{1}{x}\int_{x_0}^{x_0+x} \int_{x_0}^{u} \frac{d^2}{d\eta^2}(\tau_\eta\psi)(y)\, d\eta du \to 0,$$

cuando $x \to 0$, en $\mathcal{A}_m$.

Sea $k \in \mathbf{N}$. Recurrimos ahora a (3.8) y (3.9). Teniendo en cuenta [33, Theorem 4.27] conseguimos

$$\left|\Delta_y^k\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\tau_\eta\psi)(y)\right)\right| = \left|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\varphi_\lambda(\eta)\ \mathcal{F}(\Delta^k\psi)(\lambda)\right)(y)\right| \leq c,$$

para cada $\eta \in \left(\frac{x_0}{2}, x_0+1\right)$ e $y \in (0,\infty)$.

Por tanto, ya que $m < 0$,

$$\beta_k^m\left(\frac{\tau_{x+x_0}\psi - \tau_{x_0}\psi}{x} - \frac{d}{dz}(\tau_z\psi)(y)_{|z=x_0}\right) \leq \frac{c}{x}\int_{x_0}^{x_0+x}\int_{x_0}^{u} d\eta du =$$

$$= \frac{c}{x}\int_{x_0}^{x_0+x}(u-x_0)\ du = \frac{c}{x}\int_0^x u\ du \leq c\ x \to 0, \quad \text{cuando } x \to 0^+.$$

Para probar la fórmula (3.21) para cada $k \in \mathbf{N}$ podemos proceder inductiva y análogamente.

De (3.21) se deduce inmediatamente que

$$\Delta^k(T\sharp\psi)(x) =< T, \tau_x(\Delta^k\psi) >, \quad x \in (0,\infty), \tag{3.22}$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}_*$ y $k \in \mathbf{N}$.

Sea $k \in \mathbf{N}$. La igualdad (3.22) implica que, para ciertas $c > 0$ y $r \in \mathbf{N}$, si $j, l \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\Delta^k(T\sharp(\phi_j - \phi_l))(x)\right| &= \left|< T, \tau_x(\Delta^k\phi_j - \Delta^k\phi_l) >\right| \\ &\leq c \max_{0\leq n\leq r}\beta_n^m(\tau_x(\Delta^k\phi_j - \Delta^k\phi_l)), \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

puesto que $(\tau_x\psi)(y) = (\tau_y\psi)(x),\ x, y \in (0,\infty)$, y $\psi \in \mathcal{D}_*$. Procediendo como en la prueba de la Proposición 3.12 obtenemos, para cada $j, l \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}&\left|\Delta^k(T\sharp(\phi_j - \phi_l))(x)\right| \\ &\leq c \max_{0\leq n\leq r}\sup_{y\in(0,\infty)}(1+y)^m\left|\tau_x(\Delta^{k+n}\phi_j)(y) - \tau_x(\Delta^{k+n}\phi_l)(y)\right| \\ &\leq c\ (1+x)^{-m}\max_{0\leq n\leq r}\beta_{k+n}^m(\phi_j - \phi_l), \quad x \in (0,\infty).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\beta_k^m(T\sharp\phi_j - T\sharp\phi_l) \leq \max_{0\leq n\leq r+k}\beta_k^m(\phi_j - \phi_l), \quad j, l \in \mathbf{N} \text{ y } x \in (0,\infty).$$

De aquí se sigue ya que $(T\sharp\phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A_m.

Sea $\psi \in \mathcal{D}_*$. Probaremos a continuación que $T\sharp\psi \in \mathcal{A}_m$. Supongamos que $k \in \mathbf{N}$. Al ser

$$(\tau_x\psi)(y) = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi_\lambda(x)(\mathcal{F}\psi)(\lambda)\right)(y), \quad x, y \in (0,\infty),$$

[33, Lemma 3.4 y Theorem 4.27] y la Proposición 3.1 nos conducen a

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}(T\sharp\psi)(x)\right| = \left|< T, \frac{d^k}{dx^k}(\tau_x\psi) >\right| \leq c \max_{0\leq l\leq r} \beta_l^m \left(\frac{d^k}{dx^k}(\tau_x\psi)\right)$$

$$\leq c \max_{0\leq l\leq r} \sup_{y\in(0,\infty)} \left|\Delta_y^l \int_0^\infty \varphi_\lambda(y) \frac{d^k}{dx^k}(\varphi_\lambda(x)) \ (\mathcal{F}\psi)(\lambda) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}\right| \leq c, \ x \in (0,\infty).$$

Aquí r es elegido adecuadamente.

La Proposición 3.2 permite concluir que $T\sharp\psi \in \mathcal{A}_m$.

Ya que $(\phi_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_*$ y que $\mathcal{A}_m$ es Fréchet, existe $\psi \in \mathcal{A}_m$ tal que $T\sharp\phi_j \to \psi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{A}_m$. Entonces $(T\sharp\phi_j)(x) \to \psi(x)$, cuando $j \to \infty$, para cada $x \in (0,\infty)$.

Por otra parte, en virtud de la Proposición 3.12, para cada $x \in (0,\infty)$, $\tau_x\phi_j \to \tau_x\phi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{A}_m$. Luego, $(T\sharp\phi_j)(x) \to (T\sharp\phi)(x)$, cuando $j \to \infty$, para cada $x \in (0,\infty)$. Se sigue entonces que $\psi = T\sharp\phi \in \mathcal{A}_m$.

Hemos probado que la aplicación $\phi \to T\sharp\phi$ lleva $\mathcal{A}_m$ en sí mismo. El teorema del grafo cerrado nos permite concluir, procediendo como en la prueba de la proposición anterior, que la aplicación en cuestión es continua.

■

Definimos la convolución $T\sharp S$ de $T \in \mathcal{A}'_m$ y $S \in \mathcal{A}'_m$, cuando $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, como la funcional sobre $\mathcal{A}_m$ dada por

$$< T\sharp S, \phi > = < T, S\sharp\phi >, \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

Nótese que de la Proposición 3.13 se sigue que $T\sharp S \in \mathcal{A}'_m$, para cada $T, S \in \mathcal{A}'_m$.

En la siguiente proposición establecemos una fórmula de intercambio para la transformación de Chébli–Trimèche distribucional.

Proposición 3.14 *Para cada $T, S \in \mathcal{A}'_m$,*

$$\mathcal{F}'(T\sharp S)(\lambda) = \mathcal{F}'(T)(\lambda) \ \mathcal{F}'(S)(\lambda), \quad |Im\lambda| \leq \rho.$$

Demostración.

Es suficiente tener en cuenta que $\tau_x(\varphi_\lambda)(y) = \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)$, para cada $x, y \in (0,\infty)$ y $\lambda \in \mathbf{C}$ tal que $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho$ [78, pág. 166].

■

Las principales propiedades algebraicas de la convolución distribucional son las siguientes

Proposición 3.15 *Para cada $S, T, R \in \mathcal{A}'_m$ se tienen*

(a) $T\sharp(S\sharp R) = (T\sharp S)\sharp R$,

(b) $T\sharp S = S\sharp T$,

(c) Si δ es la funcional de Dirac, entonces $\delta \in \mathcal{A}'_m$ y $T\sharp\delta = T$,

(d) $\Delta^*(T\sharp S) = (\Delta^* T)\sharp S$.

Demostración.

(a) y (b) son consecuencias de las Proposiciones 3.8 y 3.14.

Es inmediato ver que $\delta \in \mathcal{A}'_m$. Además, ya que $\varphi_\lambda(0) = 1,\ \lambda \in \mathbf{C}$, se deduce que $\mathcal{F}(\delta) = 1$. Recurriendo de nuevo a las Proposiciones 3.8 y 3.14 se sigue (c).

Finalmente (d) se deduce de las Proposiciones 3.8, 3.11 y 3.14.

■

Parte II

En la segunda parte de este Capítulo III completamos en algunos aspectos la teoría distribucional para la transformación y la convolución de Chébli–Trimèche desarrollada por W. Bloom y Z. Xu ([33]). J.J. Betancor e I. Marrero en una serie de trabajos ([23], [24] y [25]) desarrollaron una teoría distribucional para la convolución de Hankel paralela a la clásica de L. Schwartz ([97]) para la convolución usual. Estos autores consideraron distribuciones de crecimiento lento y rápido. Más recientemente, J.J. Betancor y L. Rodríguez–Mesa ([27]) estudiaron la convolución de Hankel sobre distribuciones de crecimiento exponencial. A continuación, inspirados en los trabajos señalados, continuamos las investigaciones de W. Bloom y Z. Xu.

3.7 Sobre los espacios S_p y H_p, $0 < p \leq 2$.

En esta sección presentamos nuevas propiedades de los espacios S_p y H_p, $0 < p \leq 2$, introducidos por W. Bloom y Z. Xu en [33] (véase, por ejemplo, la introducción de este capítulo para las definiciones).

Comenzamos dando una nueva familia de seminormas que define la topología de S_p.

Proposición 3.16 *La topología de S_p, $0 < p \leq 2$, es generada por el sistema $\{\eta^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas, donde, para cada $k, l \in \mathbf{N}$,*

$$\eta^p_{k,l}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^l \ \varphi_0(x)^{-2/p} \ |\Delta^k \phi(x)|, \quad \phi \in S_p.$$

Demostración.

Sea $0 < p \leq 2$. Teniendo en cuenta [33, Lemma 4.18] y procediendo como en la prueba de la Proposición 3.1, podemos ver que la familia $\{\eta^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ genera sobre S_p una topología menos fina que la asociada a $\{\mu^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$.

Sean $k, l \in \mathbf{N}$. Como se prueba en [33, pág. 99], para cada $\phi \in S_p$, se tiene que

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}((\lambda^2+\rho^2)^l \mathcal{F}(\phi)(\lambda)) = \int_0^\infty \Delta^l \phi(x) \ \frac{d^k}{d\lambda^k}(\varphi_\lambda(x)) A(x) dx, \ |\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right).$$

Por tanto, de [33, (3.5) y Lemma 3.4, (iii)], se sigue, cuando $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$,

$$\left|\frac{d^k}{d\lambda^k}((\lambda^2+\rho^2)^l\mathcal{F}(\phi)(\lambda))\right| \leq \int_0^\infty |\Delta^l\phi(x)|\ (1+x)^{k+\beta}\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|+\rho)x}\ dx$$

$$\leq \int_0^\infty |\Delta^l\phi(x)|\ \varphi_0(x)^{-2/p}\ (1+x)^{k+\beta+1}\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|+\rho\left(1-\frac{2}{p}\right))x}\ dx$$

para cierta $\beta > 0$. Existe pues $r \in \mathbf{N}$ de manera que

$$\left|\frac{d^k}{d\lambda^k}((\lambda^2+\rho^2)^l\mathcal{F}(\phi)(\lambda))\right| \leq c\ \eta^p_{r,l}(\phi), \quad |\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right),\ \phi \in S_p. \quad (3.23)$$

Mostramos ahora que la familia $\{\Omega^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas define la topología de H_p, donde

$$\Omega^p_{k,l}(\Phi) = \sup_{|\mathrm{Im}\lambda|\leq\rho\left(\frac{2}{p}-1\right)} \left|\frac{d^k}{d\lambda^k}((\lambda^2+\rho^2)^l\Phi(\lambda))\right|, \quad \Phi \in H_p.$$

En efecto, no es difícil ver que $\{\Omega^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ define sobre H_p una topología menos fina que la asociada a $\{\tau^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$. Por otra parte H_p dotado de la topología engendrada por $\{\Omega^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ es Fréchet. Para probar esto, tomamos una sucesión $(\Phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de Cauchy respecto de $\{\Omega^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$. Entonces, para cada $l \in \mathbf{N}$, $((\rho^2+\lambda^2)^l\Phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy uniforme en $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$. Existe pues Φ holomorfa y par en $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$ y continua en $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$ tal que $(\rho^2+\lambda^2)^l\Phi_j \to (\rho^2+\lambda^2)^l\Phi$, cuando $j\to\infty$, uniformemente en $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$, para cada $k,l \in \mathbf{N}$. De aquí se concluye que, al ser, para cada $l,k \in \mathbf{N}$, $\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}((\rho^2+\lambda^2)^l\Phi_j(\lambda))\right)_{j\in\mathbf{N}}$ una sucesión de Cauchy uniforme en $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$, $\frac{d^k}{d\lambda^k}((\rho^2+\lambda^2)\Phi_j(\lambda)) \to \frac{d^k}{d\lambda^k}((\rho^2+\lambda^2)\Phi(\lambda))$, cuando $j\to\infty$, uniformemente en $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$, para cada $k,l \in \mathbf{N}$. Por tanto $(H_p, \{\Omega^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}})$ es un espacio Fréchet.

Del teorema de la aplicación abierta se infiere ya que $\{\tau^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ y $\{\Omega^p_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ son equivalentes sobre H_p.

Recurrimos ahora a [33, Theorem 4.27] para escribir que, para cada $k,l \in \mathbf{N}$,

$$\mu^p_{k,l}(\phi) = \mu^p_{k,l}(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\phi)) \leq c \max_{0\leq r,s\leq m} \Omega^p_{r,s}(\mathcal{F}\phi), \quad \phi \in S_p,$$

para ciertos $m \in \mathbf{N}$ y $c > 0$. Luego, de (3.23) se sigue que, para alguna $m \in \mathbf{N}$,

$$\mu^p_{k,l}(\phi) \leq c \max_{0\leq r,s\leq m} \eta^p_{r,s}(\phi), \quad \phi \in S_p.$$

Concluimos así que $\{\eta_{k,l}^p\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ define sobre S_p una topología más fina que la de $\{\mu_{k,l}^p\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ y la prueba queda completa.

■

Como en el Capítulo I, denotamos por S_{even} el subespacio del espacio S de Schwartz constituido por las funciones $\phi \in S$ pares. Sobre S_{even} consideramos la topología inducida por S. Además, de [46, Corollary 4.8 y comentarios a continuación] se infiere que S_{even} coincide con el espacio de las funciones $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ pares tales que

$$\gamma_{k,l}(\phi) = \sup_{x\in[0,\infty)} (1+x)^l \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \phi(x)\right| < \infty,$$

para cada $k, l \in \mathbf{N}$. Por tanto, S_{even} es el espacio considerado por G. Altenburg en [1].

La aplicación L definida por $L(\phi) = \varphi_0^{2/p}\phi,\ \phi \in S_{even}$, es un isomorfismo de S_{even} sobre S_p. En efecto, sea $\phi \in S_{even}$. Teniendo en cuenta [33, Lemmas 3.4,(i) y 3.6,(ii)], se sigue

$$\begin{aligned}
\mu_{k,l}^p(\varphi_0^{2/p}\phi) &= \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^l\ \varphi_0^{-2/p}(x) \left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\varphi_0^{2/p}(x)\phi(x)\right)\right| \\
&\le c\sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^l\ e^{2\rho x/p} \left|\frac{d^j}{dx^j}\varphi_0^{2/p}(x)\right| \left|\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\phi(x)\right| \\
&\le c\sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^r\ \left|\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\phi(x)\right|,
\end{aligned}$$

para cierto $r \in \mathbf{N}$. Luego, ya que $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbf{R})$ es par y no nula, la aplicación L es continua de S_{even} en S_p.

Supongamos ahora que $\phi \in S_p$. Tenemos que, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\varphi_0^{-2/p}(x)\phi(x)\right)\right| \le c\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{d^j}{dx^j}\varphi_0^{-2/p}(x)\right|\left|\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\phi(x)\right|$$

$$\le c\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\phi(x)\right| e^{2\rho x/p}\ (1+x)^r, \quad x\in(0,\infty),$$

para algún $r \in \mathbf{N}$.

Por tanto, para cada $k, l \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^l\ \left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\varphi_0^{-2/p}(x)\phi(x)\right)\right| \le c\sum_{j=0}^{k}\mu_{k-j,r}^p(\phi),$$

para cierto $r \in \mathbf{N}$.

Probamos así que L^{-1} es continua de S_p en S_{even}.

Estamos en condiciones ya de mostrar la propiedad siguiente, que nos da una caracterización de los multiplicadores de S_p.

Proposición 3.17 *Sean $0 < p \leq 2$ y f una función definida sobre $(0, \infty)$. Entonces, f es un multiplicador para S_p si, y sólo si, f es un multiplicador para S_{even}.*

Demostración.

Supongamos que f es un multiplicador para S_p. Sea $\phi \in S_{even}$. Tenemos que $f\phi = f\varphi_0^{2/p}\phi\varphi_0^{-2/p} = L^{-1}(fL\phi)$, donde L es la aplicación definida arriba. Por tanto $f\phi \in S_{even}$.

Análogamente podemos ver que si f es un multiplicador para S_{even} entonces lo es para S_p.

■

Recurriendo a [22, Theorem 2.3] se deduce de la última proposición lo que sigue

Proposición 3.18 *Sean $0 < p \leq 2$ y una función $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ y par. Son equivalentes las propiedades que siguen:*

(a) $f\phi \in S_p$, para cada $\phi \in S_p$,

(b) la aplicación $\phi \to f\phi$ es continua de S_p en sí mismo,

(c) para cada $k \in \mathbf{N}$ existe $n_k \in \mathbf{N}$ tal que $(1 + x^2)^{-n_k} \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k f(x) \right|$ es acotada en $(0, \infty)$.

■

Denotamos por Θ el espacio de multiplicadores de $S_p, 0 < p \leq 2$. Como hemos visto en la Proposición 3.18, Θ no depende de p. No es difícil ver que S_p está contenido en Θ, para cada $0 < p \leq 2$.

Nuestro próximo objetivo es estudiar diferentes topologías sobre Θ.

Representamos por $\mathcal{L}(S_p)$ el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de S_p en sí mismo. $\mathcal{L}_s(S_p)$ y $\mathcal{L}_b(S_p)$ denotan a $\mathcal{L}(S_p)$ cuando se considera sobre él la topología de la convergencia puntual o la de la convergencia uniforme sobre los acotados de S_p, respectivamente. Procediendo como en [26, Proposition 1] podemos ver que $\mathcal{L}_s(S_p) = \mathcal{L}_b(S_p)$.

Sean $k, n \in \mathbf{N}$. El espacio $\Theta_{n,k}$ está constituido por las funciones pares $f \in C^n(\mathbf{R})$ tales que

$$\alpha_{n,k}(f) = \sup_{x \in (0,\infty),\ 0 \leq j \leq n} (1 + x^2)^{-k} \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^j f(x) \right| < \infty.$$

$\Theta_{n,k}$ es dotado de la topología definida por la norma $\alpha_{n,k}$. De este modo $\Theta_{n,k}$ es un espacio de Banach. Tenemos que $\Theta = \cap_{n \in \mathbf{N}} \cup_{k \in \mathbf{N}} \Theta_{n,k}$, donde la igualdad se entiende algebraicamente.

Proposición 3.19 *La topología que $\mathcal{L}_s(S_p)$ (equivalentemente, $\mathcal{L}_b(S_p)$) define sobre Θ coincide con la topología proyectiva–inductiva de $\cap_{n \in \mathbf{N}} \cup_{k \in \mathbf{N}} \Theta_{n,k}$.*

Demostración.

Probaremos, en primer lugar, que la topología que $\mathcal{L}_s(S_p)$ induce sobre Θ es más fuerte que la topología proyectiva–inductiva sobre $\cap_{n\in\mathbf{N}} \cup_{k\in\mathbf{N}} \Theta_{n,k}$.

Supongamos que A es un conjunto acotado de Θ cuando se considera sobre él la topología de la convergencia puntual. Entonces, para cada $n \in \mathbf{N}$, existen $k \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ de manera que

$$\sup_{x\in[0,\infty)} (1+x^2)^{-k} \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \right| \leq c, \quad f \in A.$$

En efecto, supongamos que $n \in \mathbf{N}$ es tal que, para cada $k \in \mathbf{N}$, existen $x_k \in (0,\infty)$ y $f_k \in A$ siendo

$$(1+x_k^2)^{-k} \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f_k(x)_{|x=x_k} \right| \geq k, \tag{3.24}$$

y, para cada $j \in \mathbf{N},\ 0 \leq j \leq n-1$, podemos encontrar $k \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ para los cuales

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^{-k} \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^j f(x) \right| \leq c, \quad f \in A.$$

Asumimos que podemos escoger la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tal que $x_0 > 1/4$ y $x_k \leq x_{k+1} - 1,\ k \in \mathbf{N}$. Consideramos una función $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$, par, cuyo soporte está contenido en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ y verificando que $\phi(0) = 1$. Definimos la función ψ como sigue

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_0^{2/p}(x_k) \frac{\phi(x-x_k)}{(1+x_k^2)^k}, \quad x \in [0,\infty),$$

y siendo $\psi(x) = \psi(-x),\ x \in (-\infty, 0)$. De este modo, $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ y ψ es par.

Además, de [33, Lemma 3.4], para cada $l, m \in \mathbf{N}$, podemos escribir

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_0^{-2/p}(x)\ (1+x)^l\ \left| \frac{d^m}{dx^m}\psi(x) \right|$$

$$\leq c \sup_{|x|<1/4} \left| \frac{d^m}{dx^m}\phi(x) \right| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi_0(x_k+1/4)}{\varphi_0(x_k)} \right)^{-2/p} \frac{(1+(x_k+1/4)^2)^l}{(1+x_k^2)^k}$$

$$\leq c \sup_{|x|<1/4} \left| \frac{d^m}{dx^m}\phi(x) \right| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+(x_k+1/4)^2)^{l+\ 2/p}}{(1+x_k^2)^k} < \infty,$$

ya que $x_k \to \infty$, cuando $k \to \infty$. Por tanto, $\psi \in S_p$.

Por otra parte, la regla de Leibniz conduce a

$$\varphi_0^{-2/p}(x_k) \left| \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (f_k\psi)(x)_{|x=x_k} \right|$$

$$\geq \varphi_0^{-2/p}(x_k) \left| \psi(x_k) \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f_k(x)_{|x=x_k} \right|$$

$$-\varphi_0^{-2/p}(x_k)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^j f_k(x)_{|x=x_k}\right|\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^{n-j}\psi(x)_{|x=x_k}\right|$$

$$\geq (1+x_k^2)^{-k}\left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f_k(x)_{|x=x_k}\right| - c \geq k-c, \quad k\in\mathbf{N},$$

para una cierta $c>0$ que no depende de $k\in\mathbf{N}$.

Esto indica que si (3.24) se da, para una sucesión del tipo especificado, A no es un conjunto acotado en Θ cuando se considera la topología inducida por $\mathcal{L}_s(S_p)$. Hemos tenido en cuenta que la familia de seminormas $\{\omega_{n,k}^p\}_{n,k\in\mathbf{N}}$, donde

$$\omega_{n,k}^p(\phi)=\sup_{x\in[0,\infty)}(1+x)^k\ \varphi_0(x)^{-2/p}\ \left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\phi(x)\right|, \quad \phi\in S_p,$$

genera la topología de S_p.

Supongamos ahora que no podemos encontrar una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ como ha sido indicada anteriormente. Existen entonces $l\in\mathbf{N},\ \alpha, c>0$ tales que

$$(1+x^2)^{-l}\ \left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right|\leq c, \quad x\geq\alpha \text{ y } f\in A.$$

Por tanto, $x_k\in(0,\alpha)$ cuando k es suficientemente grande. Elegimos una función $\psi\in C^\infty(\mathbf{R})$, par, tal que $\psi(x)=1,\ x\in(0,\alpha)$, y $\psi(x)=0,\ x\geq\alpha+1$. Es obvio que $\psi\in S_p$. Además, si k es grande, recurriendo a [33, Lemma 3.4],

$$\varphi_0^{-2/p}(x_k)\left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(f_k\psi)(x)_{|x=x_k}\right|\geq\varphi_0^{-2/p}(x_k)\left|\psi(x_k)\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f_k(x)_{|x=x_k}\right|$$

$$-\varphi_0^{-2/p}(x_k)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^j f_k(x)_{|x=x_k}\right|\left|\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n-j}\psi(x)_{|x=x_k}\right|$$

$$\geq\varphi_0^{-2/p}(x_k)\ k\ (1+x_k^2)^k - c\geq e^{2\rho x_k/p}\ k\ (1+x_k^2)^{k-\ 2/p}$$

Esto no es compatible con que el conjunto A sea acotado en Θ cuando sobre Θ se considera la topología de la convergencia puntual.

Queda probado pues que A es acotado en el espacio inductivo $\cup_{k\in\mathbf{N}}\Theta_{n,k}$, para cada $n\in\mathbf{N}$. Ya que Θ, dotado de la topología de la convergencia puntual, es bornológico (véase [26, Proposition 2]), podemos concluir que la inclusión $i:\Theta\to\cup_{k\in\mathbf{N}}\Theta_{n,k}$ es continua, para cada $n\in\mathbf{N}$. Por tanto, la topología inducida por $\mathcal{L}_s(S_p)$ sobre Θ es más fuerte que la topología proyectiva–inductiva de $\cap_{n\in\mathbf{N}}\cup_{k\in\mathbf{N}}\Theta_{n,k}$, al ser esta última topología la topología inicial asociada a las inclusiones $i:\Theta\to\cup_{k\in\mathbf{N}}\Theta_{n,k},\ n\in\mathbf{N}$.

Para ver que la topología proyectiva–inductiva de $\cap_{n\in\mathbf{N}}\cup_{k\in\mathbf{N}}\Theta_{n,k}$ es más fuerte que la topología que induce $\mathcal{L}_s(S_p)$ sobre Θ, podemos proceder como en [101, Proposition 2.20].

$\blacksquare$

Señalamos aquí que la prueba presentada para la Proposición 3.19 es diferente que la que aparece en [101, Corollary 3.37] en relación con el espacio de multiplicadores del espacio $K\{M_p\}$.

Obtenemos a continuación una caracterización de los elementos del espacio S_p' dual de S_p.

Proposición 3.20 *Sea T una funcional sobre S_p. Las siguientes propiedades son equivalentes*

(a) $T \in S_p'$,

(b) Existen $r \in \mathbf{N}$ y funciones $f_0, f_1, ..., f_r$ esencialmente acotadas (respecto a la medida de Lebesgue) sobre $(0, \infty)$, para las cuales

$$< T, \phi >= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty (1+x)^r \ \varphi_0^{-2/p}(x) \ \frac{d^k}{dx^k}(\phi(x)) f_k(x) \ dx, \quad \phi \in S_p.$$

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que $T \in S_p'$. Existen $c > 0$ y $r \in \mathbf{N}$ tales que

$$|< T, \phi >| \leq c \sum_{j=0}^{r} \mu_{j,r}^p(\phi), \quad \phi \in S_p. \tag{3.25}$$

De [33, Lemma 3.4, (iii)] inferimos que, para cada $j, r \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \mu_{j,r}^p(\phi) &= \sup_{x \in (0,\infty)} (1+x)^r \ \varphi_0^{-2/p}(x) \ \left| \frac{d^j}{dx^j} \phi(x) \right| \\ &\leq c \sup_{x \in (0,\infty)} (1+x)^r \ e^{2\rho x/p} \ \left| \frac{d^j}{dx^j} \phi(x) \right|, \quad \phi \in S_p. \end{aligned}$$

Ya que $\frac{d^j}{dx^j}\phi(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$, para cada $j \in \mathbf{N}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \mu_{j,r}^p(\phi) &\leq c \sup_{x \in (0,\infty)} (1+x)^r \ e^{2\rho x/p} \int_x^\infty \left| \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \phi(t) \right| dt \\ &\leq c \sup_{x \in (0,\infty)} \int_x^\infty (1+t)^r \ e^{2\rho t/p} \ \left| \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \phi(t) \right| dt, \quad \phi \in S_p, \ j, r \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Recurriendo de nuevo a [33, Lemma 3.4, (iii)] obtenemos

$$\mu_{j,r}^p(\phi) \leq c \int_0^\infty (1+x)^{r+\ 2/p} \ \varphi_0^{-2/p}(x) \ \left| \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} \phi(x) \right| dx, \quad \phi \in S_p, \ j, r \in \mathbf{N},$$

y de (3.25) se deduce que

$$|< T, \phi >| \leq c \sum_{j=0}^{r+1} \int_0^\infty (1+x)^{r+\ 2/p} \ \varphi_0^{-2/p}(x) \ \left| \frac{d^j}{dx^j} \phi(x) \right| dx, \quad \phi \in S_p.$$

Recordando que el dual de $L_1((0,\infty),dx)$ es $L_\infty((0,\infty),dx)$ y utilizando el teorema de Hahn–Banach, podemos obtener, siguiendo los argumentos presentados en la Proposición 2.7, la representación para T enunciada en (b).

(b) $\Rightarrow$ (a). Es suficiente observar que si T admite la representación

$$< T,\phi >= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty (1+x)^r \ \varphi_0^{-2/p}(x) \ \frac{d^k}{dx^k}(\phi(x)) f_k(x) \ dx, \quad \phi \in S_p,$$

donde $f_k \in L_\infty((0,\infty),dx)$ $k = 0,1,...,r$, entonces

$$|< T,\phi >| \leq \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} \ \|f_k\|_\infty \ \mu_{k,r+2}^p(\phi), \quad \phi \in S_p,$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma en $L_\infty((0,\infty),dx)$. Por tanto $T \in S_p'$.

■

Sabemos que S_p puede ser identificado con un subespacio de S_p' (véase sección 3.3). También el espacio Θ de multiplicadores de S_p puede ser visto como un subespacio de S_p', cuando $\rho = 0$ o $\rho > 0$ y $0 < p \leq 1$. En efecto, sea $f \in \Theta$. Existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^{-n} \ |f(x)| < \infty.$$

Por tanto, de [33, (3.5)] se sigue que, para cierto $\beta > 0$, y cada $l \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^\infty e^{-2\rho x/p} \ |f(x)| \ (1+x)^{-l} \ A(x) \ dx \leq \int_0^\infty e^{2\rho x\left(1-\frac{1}{p}\right)} \ (1+x^2)^n \ (1+x)^{-l+\beta} \ dx.$$

Eligiendo l suficientemente grande obtenemos que

$$\int_0^\infty e^{-2\rho x/p} \ |f(x)| \ (1+x)^{-l} \ A(x) \ dx < \infty,$$

siempre que $\rho = 0$ o $\rho > 0$ y $0 < p \leq 1$.

En [33] se considera el espacio $\mathcal{S}_\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, definido como sigue. Sea $\varepsilon \geq 0$. Supongamos que Φ es una función definida en la banda cerrada $\Omega_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbf{C} : \ |\mathrm{Im}\lambda| \leq \varepsilon\}$. Decimos que Φ está en $\mathcal{S}_\varepsilon$ cuando verifica las dos propiedades siguientes:

(i) Φ es holomorfa y par en $\{\lambda \in \mathbf{C} : \ |\mathrm{Im}\lambda| < \varepsilon\}$, y para cada $k \in \mathbf{N}$, $\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi$ puede ser extendida continuamente a Ω_ε.

(ii) $\tau_{k,l;\varepsilon}(\Phi) = \sup_{\lambda\in\Omega_\varepsilon}(1+|\lambda|)^l \left|\frac{d^k}{d\lambda^k}\Phi(\lambda)\right| < \infty$, para cada $l,k \in \mathbf{N}$.

$\mathcal{S}_\varepsilon$ se dota de la topología asociada a la familia $\{\tau_{k,l;\varepsilon}\}_{k,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas. De este modo $\mathcal{S}_\varepsilon$ es un espacio de Fréchet.

Observamos que $\mathcal{S}_{\rho\left(\frac{2}{p}-1\right)} = H_p, \ 0 < p \leq 2$.

A continuación caracterizamos los multiplicadores puntuales de $\mathcal{S}_\varepsilon$.

Proposición 3.21 *Sea F una función definida sobre Ω_ε. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) F satisface la condición (i) anterior y, para cada $k \in \mathbf{N}$, existe $l \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sup_{\lambda\in\Omega_\varepsilon} (1+|\lambda|)^{-l} \left|\frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda)\right| < \infty,$$

(b) $F\Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon$, para cada $\Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon$,

(c) La aplicación $\Phi \to F\Phi$ es continua de $\mathcal{S}_\varepsilon$ en sí mismo.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b). Sean $k, m \in \mathbf{N}$. Si (a) es cierto, existe $l \in \mathbf{N}$ para la cual

$$\begin{aligned}
\tau_{k,m;\varepsilon}(\Phi F) &= \sup_{\lambda\in\Omega_\varepsilon} (1+|\lambda|)^m \left|\frac{d^k}{d\lambda^k}(F\Phi)(\lambda)\right| \\
&\le c\sum_{j=0}^{k} \sup_{\lambda\in\Omega_\varepsilon} (1+|\lambda|)^m \left|\frac{d^j}{d\lambda^j}\Phi(\lambda)\right| \left|\frac{d^{k-j}}{d\lambda^{k-j}}F(\lambda)\right| \\
&\le c\sum_{j=0}^{k} \sup_{\lambda\in\Omega_\varepsilon} (1+|\lambda|)^{m+l} \left|\frac{d^j}{d\lambda^j}\Phi(\lambda)\right| \\
&\le c\sum_{j=0}^{k} \tau_{j,m+l;\varepsilon}(\Phi), \quad \Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $F\Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon$, para cada $\Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon$. Nótese que asimismo hemos probado que (a) $\Rightarrow$ (c).

(b) $\Rightarrow$ (c). Es una consecuencia del teorema del grafo cerrado. Supongamos que (b) se verifica. Sea $(\Phi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}_\varepsilon$ tal que $\Phi_j \to \Phi$ y $F\Phi_j \to \Psi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{S}_\varepsilon$ para ciertos Φ y $\Psi \in \mathcal{S}_\varepsilon$. Ya que la convergencia en $\mathcal{S}_\varepsilon$ implica la convergencia puntual, se tiene que

$$\Phi_j(\lambda) \to \Phi(\lambda) \quad \text{y} \quad F(\lambda)\Phi_j(\lambda) \to \Psi(\lambda), \text{ cuando } j \to \infty,$$

para cada $\lambda \in \mathbf{C}$. Luego, $F\Phi = \Psi$. Del teorema del grafo cerrado sigue ahora que la aplicación $\Phi \to F\Phi$ es continua de $\mathcal{S}_\varepsilon$ en sí mismo.

(c) $\Rightarrow$ (a). Consideramos la función $\Phi(\lambda) = e^{-\lambda^2}$, $\lambda \in \Omega_\varepsilon$. Esta función Φ está en $\mathcal{S}_\varepsilon$. En efecto, tenemos que, para cada $l, k \in \mathbf{N}$, existe $r \in \mathbf{N}$, tal que

$$\begin{aligned}
(1+|\lambda|^2)^l \left|\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{-\lambda^2})\right| &\le c(1+|\lambda|^2)^r \left|e^{-\lambda^2}\right| \\
&\le c(1+|\mathrm{Re}\lambda|^2+|\mathrm{Im}\lambda|^2)^r \; e^{-(\mathrm{Re}\lambda)^2+(\mathrm{Im}\lambda)^2} \\
&\le c\,(1+(\mathrm{Re}\lambda)^2)^r \; e^{-(\mathrm{Re}\lambda)^2} \le c, \quad \lambda \in S_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Además es claro que Φ es una función entera y par. Por tanto $\Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon$. Si (c) se verifica, $F\Phi \in \mathcal{S}_\varepsilon$. Por tanto F satisface la propiedad (i) anterior.

Supongamos ahora que, verificándose la antedicha propiedad (i), (a) no es cierto. Podemos entonces encontrar $k \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sup_{\lambda \in \Omega_\varepsilon} (1+|\lambda|)^{-n} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda) \right| = \infty,$$

para cada $n \in \mathbf{N}$, y para el cual existe $l \in \mathbf{N}$ siendo

$$\sup_{\lambda \in \Omega_\varepsilon} (1+|\lambda|)^{-l} \left| \frac{d^j}{d\lambda^j} F(\lambda) \right| < \infty, \quad j = 0, 1, 2, ..., k-1.$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbf{N}$, existe $\lambda_n \in \Omega_\varepsilon$ tal que

$$(1+|\lambda_n|)^{-n} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda)_{|\lambda=\lambda_n} \right| \geq n.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|\mathrm{Re}\lambda_n| \leq |\mathrm{Re}\lambda_{n+1}| - 1$, $n \in \mathbf{N}$.

Definimos, para cada $n \in \mathbf{N}$, la función Φ_n entera y par, mediante

$$\Phi_n(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda - \lambda_n) + \Phi(\lambda + \lambda_n)}{(1+|\lambda_n|)^n}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon,$$

donde, como antes, $\Phi(\lambda) = e^{-\lambda^2}$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Nótese que, para cada $m, \beta \in \mathbf{N}$, se sigue

$$\begin{aligned}
\tau_{m,\beta;\varepsilon}(\Phi_n) &\leq \sup_{\lambda \in \Omega_\varepsilon} \frac{(1+|\lambda|)^\beta}{(1+|\lambda_n|)^n} \left| \frac{d^m}{d\lambda^m} \Phi(\lambda - \lambda_n) \right| \\
&\quad + \sup_{\lambda \in \Omega_\varepsilon} \frac{(1+|\lambda|)^\beta}{(1+|\lambda_n|)^n} \left| \frac{d^m}{d\lambda^m} \Phi(\lambda + \lambda_n) \right| \\
&\leq 2 \sup_{\lambda \in \Omega_{2\varepsilon}} \frac{(1+|\lambda|+|\lambda_n|)^\beta}{(1+|\lambda_n|)^n} \left| \frac{d^m}{d\lambda^m} \Phi(\lambda) \right| \\
&\leq c\,(1+|\lambda_n|)^{\beta-n} \sup_{\lambda \in \Omega_{2\varepsilon}} (1+|\lambda|)^\beta \left| \frac{d^m}{d\lambda^m} \Phi(\lambda) \right|.
\end{aligned}$$

Aquí c no depende de $n \in \mathbf{N}$. Se deduce entonces que $\Phi_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{S}_\varepsilon$.

Sin embargo, la regla de Leibniz conduce a

$$\sup_{\lambda \in \Omega_\varepsilon} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} (F(\lambda)\Phi_n(\lambda)) \right| \geq \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} (F(\lambda)\Phi_n(\lambda))_{|\lambda=\lambda_n} \right|$$

$$\geq \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda)_{|\lambda=\lambda_n} \right| |\Phi_n(\lambda_n)| - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \left| \frac{d^j}{d\lambda^j} F(\lambda)_{|\lambda=\lambda_n} \right| \left| \frac{d^{k-j}}{d\lambda^{k-j}} \Phi_n(\lambda)_{|\lambda=\lambda_n} \right|$$

$$\geq (1+|\lambda_n|)^{-n} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda)_{|\lambda=\lambda_n} \right| \left| 1 + e^{-4\lambda_n^2} \right| - c$$

$$\geq (1+|\lambda_n|)^{-n}\left|\frac{d^k}{d\lambda^k}F(\lambda)_{|\lambda=\lambda_n}\right|\left(1-e^{-4(\mathrm{Re}\lambda_n)^2+4(\mathrm{Im}\lambda_n)^2}\right)-c\geq\frac{1}{2}n-c,$$

con $n\in\mathbf{N}$ y n suficientemente grande. La constante positiva c no depende de $n\in\mathbf{N}$.

Por tanto, $F\Phi_n\not\to 0$, cuando $n\to\infty$, en $\mathcal{S}_\varepsilon$.

De este modo probamos que si (a) no se verifica, tampoco lo hace (c).

La prueba queda ya completa.

■

En la siguiente proposición presentamos algunos importantes multiplicadores en $\mathcal{S}_\varepsilon$.

Proposición 3.22 *Para cada $x\in(0,\infty)$ y $k\in\mathbf{N}$, tenemos que $\frac{\partial^{k+n}}{\partial x^k\partial\lambda^n}\varphi_\lambda(x)$ es un multiplicador de $\mathcal{S}_\varepsilon$, siempre que $0<\varepsilon<\rho$.*

Demostración.

Ya que la aplicación $\lambda\to\varphi_\lambda(x)$ es entera, para cada $x\in(0,\infty)$, podemos escribir

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi_\lambda(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\frac{\varphi_\eta(x)}{(\eta-\lambda)^{n+1}}d\eta,\quad n\in\mathbf{N}\text{ y }x\in(0,\infty).$$

donde C_λ representa la circunferencia de centro λ y radio r_λ orientada positivamente, siendo $r_\lambda=\rho-|\mathrm{Im}\lambda|$.

Procediendo ahora como en la prueba de la Proposición 3.3 obtenemos, para cada $n,k\in\mathbf{N}$,

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi_\lambda(x)\right|\leq c\;(1+|\lambda|)^m\;(\rho-|\mathrm{Im}\lambda|)^{-n}\;(1+x)\;e^{-(\rho-|\mathrm{Im}\lambda|)x},$$
$$x\in(0,\infty)\text{ y }|\mathrm{Im}\lambda|<\rho.$$

Aquí $c>0$ y $m\in\mathbf{N}$ no dependen de $x\in(0,\infty)$ y $|\mathrm{Im}\lambda|<\rho$. Entonces

$$\sup_{\lambda\in\Omega_\varepsilon}(1+|\lambda|)^{-m}\left|\frac{d^k}{dx^k}\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi_\lambda(x)\right|\leq c\;(1+x)\;e^{-(\rho-\varepsilon)x},\quad x\in(0,\infty).\tag{3.26}$$

Luego, de la Proposición 3.21, se sigue que $\frac{\partial^{k+n}}{\partial x^k\partial\lambda^n}\varphi_{(\cdot)}(x)$ es un multiplicador de $\mathcal{S}_\varepsilon$.

■

3.8 La convolución distribucional de Chébli–Trimèche sobre el espacio S_p'.

W.Bloom y Z. Xu comenzaron recientemente en [33] el estudio de la convolución $\sharp$ sobre el espacio S_p'. Concretamente, estos autores definen la convolución de una funcional $T\in S_p'$ y una función $\phi\in S_p$.

Asumimos, como siempre, que $0 < p \leq 2$. En [33, Lemma 5.2] se probó que $\phi \sharp \psi \in S_p$, siempre que $\phi, \psi \in S_p$, y también se estableció que $\tau_x \phi \in S_p$, para cada $\phi \in S_p$ y $x \in (0, \infty)$. La convolución $T \sharp \phi$ de $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$ se define por

$$(T \sharp \phi)(x) = < T, \tau_x \phi >, \quad x \in (0, \infty). \tag{3.27}$$

Nótese que si $\psi \in S_p$ y T_ψ denota la funcional generada por ψ sobre S'_p se tiene que

$$T_\psi \sharp \phi = \psi \sharp \phi, \quad \phi \in S_p.$$

W. Bloom y Z. Xu probaron en [33, Theorem 5.17] que $T \sharp \phi \in C^1(0, \infty)$, para cada $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$. Asimismo, se mostró que si $T \in S'_p$ y $\psi \in S_p$, entonces

$$(T \sharp \psi) \sharp \phi = T \sharp (\psi \sharp \phi), \quad \psi \in S_p. \tag{3.28}$$

De (3.28) se deduce sin dificultad, la fórmula de intercambio que relaciona la convolución $\sharp$ y la transformación $\mathcal{F}$ que sigue

$$\mathcal{F}'(T \sharp \phi) = \mathcal{F}'(T) \ \mathcal{F}(\phi), \quad T \in S'_p, \ \phi \in S_p.$$

A continuación establecemos un resultado que mejora el recogido en [33, Theorem 5.17]. Probamos que si $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$, $T \sharp \phi \in \Theta$, para cada $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$ cuando $\rho > 0$ y $1 < p \leq 2$.

Proposición 3.23 *Sean $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$, para cierto $1 < p \leq 2$ y $\rho > 0$. Entonces $T \sharp \phi \in \Theta$, esto es, $T \sharp \phi$ es un multiplicador para S_q, para cada $0 < q \leq 2$.*

Demostración.

Comenzamos probando que $T \sharp \phi$ es una función par en $C^\infty(\mathbf{R})$.

Sabemos que, para cada $y, x \in (0, \infty)$, $(\tau_x \phi)(y) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_\lambda(x) \mathcal{F}(\phi))(y)$. Al ser la aplicación $x \to \varphi_\lambda(x)$ par, para cada $\lambda \in \mathbf{C}$, $\tau_x \phi$ es una función par.

De acuerdo con la Proposición 3.20, existen $r \in \mathbf{N}$ y funciones $f_0, f_1, ..., f_k$ esencialmente acotadas en $(0, \infty)$ tales que

$$< T, \psi > = \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(y) \ (1+y)^r \ \varphi_0^{-2/p}(y) \ \frac{d^k}{dy^k} \psi(y) \ dy, \quad \psi \in S_p.$$

Entonces

$$(T \sharp \phi)(x) = \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(y) \ (1+y)^r \ \varphi_0^{-2/p}(y) \ \frac{d^k}{dy^k} (\tau_x \phi)(y) \ dy, \quad x \in (0, \infty).$$

Por tanto, únicamente tenemos que probar que

$$\int_0^\infty f(y) \ (1+y)^r \ \varphi_0^{-2/p}(y) \ \frac{d^k}{dy^k} (\tau_x \phi)(y) \ dy \in C^\infty(0, \infty), \tag{3.29}$$

donde $f \in L_\infty((0,\infty),dx)$ y $r,k \in \mathbf{N}$. Sean pues $f \in L_\infty((0,\infty),dx)$ y $r,k \in \mathbf{N}$. Podemos escribir que, para cada $l \in \mathbf{N}$ y $x \in (0,\infty)$,

$$\frac{d^l}{dx^l}\left(\int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}(\tau_x\phi)(y)\ dy\right)$$

$$= \int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d^l}{dx^l}\varphi_z(x)(\mathcal{F}\phi)(z)\right)(y)\ dy \qquad (3.30)$$

La diferenciación bajo el signo integral en la última igualdad está justificada ya que, de acuerdo con la Proposición 3.22, $\frac{d^l}{dx^l}\varphi_z(x)$ es un multiplicador en H_p.

Tenemos que, si $l \in \mathbf{N}$,

$$\left|\int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d^l}{dx^l}\varphi_z(x)(\mathcal{F}\phi)(z)\right)(y)\ dy\ \right|$$

$$\leq \int_0^\infty |f(y)|\ (1+y)^{-2}\ \mu^p_{k,r+2}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d^l}{dx^l}\varphi_z(x)(\mathcal{F}\phi)(z)\right)\right)\ dy$$

$$\leq c\ \mu^p_{k,r+2}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{d^l}{dx^l}\varphi_z(x)(\mathcal{F}\phi)(z)\right)\right), \quad x \in (0,\infty).$$

En virtud de [33, Theorem 4.27] y recurriendo de nuevo a la Proposición 3.22 (concretamente a (3.26)) concluimos, gracias a (3.31), que, si $l \in \mathbf{N}$, al ser $1 < p \leq 2$,

$$\left|\frac{d^l}{dx^l}\left(\int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}(\tau_x\phi)(y)\ dy\right)\right| \leq c\ (1+x), \quad x \in (0,\infty). \qquad (3.31)$$

Consecuentemente, $\int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}(\tau_x\phi)(y)\ dy \in \Theta$, ya que para cada $l \in \mathbf{N}$, $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l = \sum_{k=0}^l a_{l,k}(x)\frac{d^k}{dx^k}$, para ciertos polinomios $a_{l,k}(x),\ k = 0,1,...,l$.

■

Nuestro próximo resultado es similar al anterior. Ahora el operador Δ sustituye al operador $\frac{d}{dx}$.

Proposición 3.24 *Sea $T \in S'_p$. Entonces, existe $l \in \mathbf{N}$ tal que, para cada $\phi \in S_p$ y $k \in \mathbf{N}$, tenemos*

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^{-l}\ |\Delta^k(T\sharp\phi)(x)| < \infty,$$

siempre que $0 < p \leq 2$ y $\rho \geq 0$.

Demostración.

Como en la prueba de la Proposición 3.23 es suficiente mostrar la propiedad cuando $T \in S'_p$ toma la forma

$$< T,\psi >= \int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}\psi(y)\ dy, \quad \psi \in S_p,$$

donde $f \in L_\infty((0,\infty), dx)$ y $r, k \in \mathbf{N}$.

En este caso, para cada $\phi \in S_p$ y $x \in (0,\infty)$, obtenemos

$$(T\sharp\phi)(x) = \int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}(\tau_x\phi)(y)\ dy.$$

A tenor de [33, Lemma 3.11] (véase también Proposición 3.22), para cada $x \in (0,\infty)$, $\frac{d^j}{dx^j}\varphi_\lambda(x)$ es un multiplicador en H_p, para $j = 0, 1, 2$, siempre que $0 < p \leq 2$ y $\rho \geq 0$.

Por tanto, ya que $\Delta_x(\tau_x\phi)(y) = \tau_x(\Delta\phi)(y),\ x, y \in (0,\infty)$, se sigue

$$\begin{aligned}
\Delta_x(T\sharp\phi)(x) &= -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{A'(x)}{A(x)}\frac{d}{dx}\right)(T\sharp\phi)(x) \\
&= \int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}\tau_x(\Delta\phi)(y)\ dy, \quad x \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Al ser Δ un operador continuo de S_p en sí mismo, concluimos que, para cada $s \in \mathbf{N}$

$$\Delta_x^s(T\sharp\phi)(x) = \int_0^\infty f(y)\ (1+y)^r\ \varphi_0^{-2/p}(y)\ \frac{d^k}{dy^k}\tau_x(\Delta^s\phi)(y)\ dy, \quad x \in (0,\infty).$$

Teniendo en cuenta ahora [33, Theorem 4.27 y Lemma 3.4,(iv)], para cada $s \in \mathbf{N}$, conseguimos

$$\begin{aligned}
|\Delta_x^s(T\sharp\phi)(x)| &\leq \|f\|_\infty \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \sup_{z\in(0,\infty)} (1+z)^{r+2} \\
&\qquad \varphi_0^{-2/p}(z) \left|\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi_\lambda(x)\mathcal{F}(\Delta^s\phi)(\lambda)\right)(z)\right| \\
&\leq c\ (1+x)^l, \quad x \in (0,\infty),
\end{aligned}$$

para cierta $l \in \mathbf{N}$.

$\blacksquare$

Si $T \in S'_p$ y $\phi \in S_p$ no siempre se tiene que $T\sharp\phi \in S_p$. En efecto, consideremos la funcional T definida sobre S_p por

$$< T, \phi >= \int_0^\infty \phi(x)\ \varphi_0(y)\ A(y)\ dy, \quad \phi \in S_p.$$

Recordamos que $A(y) \leq A(1)y^\beta e^{2\rho y}$, cuando y es grande y para cierta $\beta > 0$ ([33, (3.5)]). Aplicando [33, Lemma 3.4, (iii)] obtenemos

$$\left|\int_0^\infty e^{-2\rho y/p}\ (1+y)^{-l}\ \varphi_0(y)\ A(y)\ dy\right| \leq c\int_0^\infty e^{-\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho y}\ (1+y)^{-l+\beta+1}\ dy < \infty,$$

siempre que $l \in \mathbf{N}$ y $l > \beta + 2$. Entonces $T \in S'_p$.

Por otra parte, podemos escribir, para cada $\phi \in S_p$ y $x \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}(T\sharp\phi)(x) &= \int_0^\infty \varphi_0(y)\ (\tau_x\phi)(y)\ A(y)\ dy = \mathcal{F}(\tau_x\phi)(0)\\ &= \varphi_0(x)\ \mathcal{F}(\phi)(0) = \varphi_0(x)\int_0^\infty \varphi_0(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy.\end{aligned}$$

Luego, si $\phi \in S_p$, es tal que $\phi \neq 0$, y $\phi \geq 0$, se tiene

$$\varphi_0^{-2/p}(x)\ |(T\sharp\phi)(x)| = \varphi_0^{1-2/p}(x)\int_0^\infty \varphi_0(y)\ \phi(y)\ A(y)\ dy \nrightarrow 0,$$

cuando $x \to \infty$. De este modo probamos que $T\sharp\phi \notin S_p$.

Nuestro próximo objetivo es describir los elementos de S'_p que definen operadores de convolución en S_p. Estamos motivados por resultados clásicos sobre operadores de convolución en el espacio de Schwartz ([97]) y por los estudios sobre la convolución para la transformación de Hankel es espacios de distribuciones presentados en [27] y [83].

Recordemos ahora que, para cada $m \in \mathbf{Z}$, como en la primera parte de este capítulo, el espacio A_m constituido por aquellas ϕ definidas en $(0,\infty)$ para las cuales existe $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ par y tal que $\phi(x) = \psi(x),\ x \in (0,\infty)$, y verifican

$$\alpha_k^m(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)}(1+x)^m\ \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| < \infty,$$

para cada $k \in \mathbf{N}$.

Nos restringiremos, como en la primera parte, a valores de $m < 0$.

En primer lugar, observemos que el espacio A_m está contenido en Θ. En efecto, sea $f \in A_m$. Para cada $k \in \mathbf{N}$ se tiene que

$$\sup_{x\in(0,\infty)}(1+x)^m\ \left|\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right| < \infty.$$

Por tanto, f es un multiplicador para el espacio de Schwartz S. Además, ya que f es par, f es un multiplicador para S_{even}, esto es, $f \in \Theta$.

Sabemos que S_p está contenido en A_m, para cada $0 < p \leq 2$. Denotamos por $\mathcal{A}_m$ la clausura de S_p en A_m, la cual no depende de $0 < p \leq 2$ (Proposición 3.2).

Mejoramos ahora el resultado establecido en la Proposición 3.23.

Proposición 3.25 *Sea $T \in S'_p$. Entonces, cuando $1 < p < 2$ y $\rho > 0$, para cada $\phi \in S_p$, se tiene que $T\sharp\phi \in \mathcal{A}_{-2}$.*

Demostración.

Sean $\phi \in S_p,\ 1 < p < 2$ y $\rho > 0$. En virtud de (3.31), podemos escribir que, para cada $l \in \mathbf{N}$,

$$\left|\frac{d^l}{dx^l}(T\sharp\phi)(x)\right| \leq c\ (1+x), \quad x \in (0,\infty),$$

siendo $T\sharp\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ una función par.

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{-2}\left|\frac{d^l}{dx^l}(T\sharp\phi)(x)\right| = 0$, para cada $l \in \mathbf{N}$, y la Proposición 3.2 implica que $T\sharp\phi \in \mathcal{A}_{-2}$.

■

Damos a continuación una representación de los elementos de $\mathcal{A}'_m$, el espacio dual de $\mathcal{A}_m$.

Proposición 3.26 *Sea $T \in \mathcal{A}'_m$, donde $m \in \mathbf{Z}$, $m < -2$, y $0 < p \leq 2$. Entonces, existen $r \in \mathbf{N}$ y funciones $f_0, f_1, ..., f_r$ esencialmente acotadas sobre $(0,\infty)$, tales que*

$$< T, \phi >= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(x)\ (1+x)^{m+2}\ \Delta^k\phi(x)\ dx, \quad \phi \in S_p.$$

Demostración.

De acuerdo con la Proposición 3.1, existen $c > 0$ y $r \in \mathbf{N}$ de manera que

$$|< T, \phi >| \leq c \max_{0\leq k\leq r} \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x)^m\ \left|\Delta^k\phi(x)\right|, \tag{3.32}$$

para cada $\phi \in \mathcal{A}_m$.

Sea $\phi \in S_p$. Para cada $k \in \mathbf{N}$ y $x \in (0,\infty)$, podemos escribir

$$(1+x)^m\ \Delta^k\phi(x) = -\int_x^\infty \frac{d}{dt}\left((1+t)^m\ \Delta^k\phi(t)\right) dt, \tag{3.33}$$

ya que de (3.2) se sigue que $\lim_{x\to\infty}(1+x)^m\Delta^k\phi(x) = 0$, y

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = -\frac{1}{A(x)}\int_0^x \Delta\phi(t)\ A(t)\ dt, \quad x \in (0,\infty). \tag{3.34}$$

Combinando (3.33) y (3.34) obtenemos, para cada $k \in \mathbf{N}$ y $x \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
\left|(1+x)^m\ \Delta^k\phi(x)\right| &\leq \int_x^\infty \left(m(1+t)^{m-1}\left|\Delta^k\phi(t)\right| + (1+t)^m\left|\frac{d}{dt}\Delta^k\phi(t)\right|\right) dt \\
&\leq m\int_0^\infty (1+t)^{m-1}\left|\Delta^k\phi(t)\right| dt \\
&\quad + \int_x^\infty (1+t)^m \frac{1}{A(t)}\left(\int_0^t \left|\Delta^{k+1}\phi(z)\right| A(z)dz\right)\ dt \\
&\leq c\left(\int_0^\infty (1+t)^{m-1}\left|\Delta^k\phi(t)\right| dt\right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty (1+t)^{-2}\left(\int_0^t (1+z)^{m+2}\left|\Delta^{k+1}\phi(z)\right| dz\right)\ dt\right) \\
&\leq c\left(\int_0^\infty (1+t)^{m-1}\left|\Delta^k\phi(t)\right| dt + \int_0^\infty (1+t)^{m+2}\left|\Delta^{k+1}\phi(t)\right| dt\right).
\end{aligned}$$

Luego, de (3.32) se deduce

$$|< T, \phi >| \leq c \max_{0 \leq k \leq r+1} \int_0^\infty (1+t)^{m+2} \left|\Delta^k \phi(t)\right| dt.$$

El teorema de Hahn–Banach y argumentos de dualidad, procediendo como en la demostración de la Proposición 2.7, nos permiten terminar la demostración de este aserto.

■

Es claro que $\mathcal{A}_{m+1}$ está continuamente contenido en $\mathcal{A}_m$, $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$. Dotamos al espacio unión $\mathcal{A} = \cup_{m \in \mathbf{Z},\ m<0} \mathcal{A}_m$ con la topología inductiva.

Nos proponemos ver que los elementos de $\mathcal{A}'$, el espacio dual de $\mathcal{A}$, definen operadores de convolución sobre S_p. Previamente damos algunas caracterizaciones de las funcionales en $\mathcal{A}'$.

Proposición 3.27 *Sea $T \in S'_p$. Enunciamos las siguientes propiedades:*

(a) $T \in \mathcal{A}'$,

(b) $\mathcal{F}'T$ es un multiplicador de H_p,

(c) Para cada $m \in \mathbf{N}$, existe $l \in \mathbf{N}$ y funciones continuas f_j sobre $(0, \infty)$, $j = 0, 1, ..., l$, tales que

$$T = \sum_{j=0}^{l} \Delta^{*j} f_j \tag{3.35}$$

y, para cada $j \in \mathbf{N}$, la función $(1+x)^m \varphi_0(x)^{-2/p} f_j$ es acotada sobre $(0, \infty)$.

Entonces, (a) $\Rightarrow$ (b), y (b) $\Rightarrow$ (c), cuando $\rho = 0$ y $0 < p \leq 2$ o $\rho > 0$ y $1 \leq p \leq 2$. Además, si $\rho = 0$ y $0 < p \leq 2$ o $\rho > 0$ y $0 < p \leq 1$, se tiene que (c) $\Rightarrow$ (a) y (c) $\Rightarrow$ (b).

Demostración.

Supongamos que $\rho = 0$ y $0 < p \leq 2$ o $\rho > 0$ y $1 \leq p \leq 2$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que $T \in \mathcal{A}'$. Entonces $T \in \mathcal{A}'_m$, para cada $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$. En lo que sigue consideramos $m < -3$. De la Proposición 3.26 se sigue que, existen $r \in \mathbf{N}$ y funciones esencialmente acotadas $f_0, f_1, ..., f_r$ sobre $(0, \infty)$ para las cuales

$$< T, \phi >= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(y)\ (1+y)^{m+2}\ \Delta^k \phi(y)\ dy, \quad \phi \in S_p.$$

Por tanto, para cada $\phi \in S_p$, aplicando el teorema de Fubini se llega a que

$$< \mathcal{F}T, \mathcal{F}\phi >= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(y)\ (1+y)^{m+2}\ \Delta^k \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\phi)(y)\ dy$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(y)\ (1+y)^{m+2}\ \mathcal{F}^{-1}\left((\lambda^2+\rho^2)^k \mathcal{F}(\phi)(\lambda)\right)(y)\ dy$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty f_k(y)\ (1+y)^{m+2} \left(\int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}(\phi)(\lambda)\ \varphi_\lambda(y)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \right)\ dy$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}(\phi)(\lambda) \left(\int_0^\infty f_k(y)\ (1+y)^{m+2}\ \varphi_\lambda(y)\ dy \right) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}.$$

Concluimos entonces que

$$(\mathcal{F}T)(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} (\lambda^2+\rho^2)^k \int_0^\infty f_k(y)\ (1+y)^{m+2}\ \varphi_\lambda(y)\ dy, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \le \rho. \quad (3.36)$$

Nótese que las integrales anteriores convergen absolutamente cuando $|\mathrm{Im}\lambda| \le \rho$.

La función $\mathcal{F}T$ es holomorfa y par en $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$, cuando $\rho > 0$ y $p \neq 2$, y para cada $k \in \mathbf{N}$, $\frac{d^k}{d\lambda^k}(\mathcal{F}T)(\lambda)$ es continua en $|\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$, siempre que $\rho \ge 0$. En efecto, sea $f \in L_\infty((0,\infty), dx)$ y $m < -5$. En virtud de [33, Lemma 3.4, (iv)], tenemos

$$\int_0^\infty |f(y)|\ (1+y)^{m+2} \left| \frac{d}{d\lambda}\varphi_\lambda(y) \right|\ dy \le c \int_0^\infty (1+y)^{m+4}\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|-\rho)y}\ dy < \infty,$$

cuando $|\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$. La arbitrariedad de m (< -3) en (3.36) nos permite establecer la regularidad de $\mathcal{F}T$ enunciada anteriormente.

Sea $l \in \mathbf{N}$. Elegimos $m \in \mathbf{Z}$ tal que $m + l < -4$. Consideramos para $\mathcal{F}T$ la representación en (3.36) asociada a esta m. Recurriendo de nuevo a [33, Lemma 3.4, (iv)] obtenemos

$$\left| \frac{d^l}{d\lambda^l}(\mathcal{F}T)(\lambda) \right|$$
$$\le c \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{l} \left| \frac{d^{l-j}}{d\lambda^{l-j}}(\lambda^2+\rho^2)^k \right| \int_0^\infty |f_k(y)|\ (1+y)^{m+l+3}\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|-\rho)y}\ dy$$
$$\le c\ (1+|\lambda|^2)^r, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right).$$

Por tanto, $\mathcal{F}T$ es un multiplicador de H_p (Proposición 3.21).

(b) $\Rightarrow$ (c). Sea $T \in S_p'$. Supongamos que $F = \mathcal{F}'T$ es un multiplicador del espacio H_p. Entonces, a tenor de la Proposición 3.21, para cada $k \in \mathbf{N}$ existe $n_k \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sup_{|\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)} (1+|\lambda|)^{-n_k} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} F(\lambda) \right| < \infty.$$

Denotamos por $l \in \mathbf{N}$ un número que será especificado. Consideramos la función G definida por

$$G(\lambda) = ((\rho+1)^2+\lambda^2)^{-l}\ F(\lambda), \quad |\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right).$$

De este modo G es una función holomorfa y par en $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$, y, para cada $k \in \mathbf{N}$, $\frac{d^k}{d\lambda^k}G$ puede ser extendida continuamente a $|\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right)$.

Ya que $|c(\lambda)|^2 \sim y^{2\alpha+1}$, cuando $y \to \infty$ ([109, pág. 99]), se tiene que

$$\int_0^\infty |G(\lambda)|\ |\varphi_\lambda(x)|\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \le c \int_0^\infty \lambda^{-2l+2\alpha+1+n_0} d\lambda < \infty, \quad x \in (0,\infty),$$

cuando $2l > \alpha + 1 + n_0$. Además, intercambiando el orden de integración, conseguimos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \phi(x)\ \mathcal{F}^{-1}(G)(x)\ A(x)\ dx \\
&= \int_0^\infty \phi(x) \left(\int_0^\infty G(\lambda)\ \varphi_\lambda(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}\right) A(x)\ dx \\
&= \int_0^\infty G(\lambda) \left(\int_0^\infty \phi(x)\ \varphi_\lambda(x)\ A(x)\ dx\right) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \\
&= \int_0^\infty G(\lambda)\ \mathcal{F}(\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad \phi \in S_p.
\end{aligned}$$

En otras palabras, hemos mostrado que la inversa de la transformación de Chébli–Trimèche $\mathcal{F}^{-1}(G)$ de G, como un elemento de H_p', coincide con la transformada inversa clásica de Chébli–Trimèche de G.

Para ciertos $c_{j,l} \in \mathbf{R},\ j = 0,1,...,l$, podemos escribir

$$T = \mathcal{F}^{-1}\left(((\rho+1)^2+\lambda^2)^l G(\lambda)\right) = \sum_{j=0}^{l} c_{j,l}\Delta^{*j}\mathcal{F}^{-1}(G) = \sum_{j=0}^{l} \Delta^{*j} f_j,$$

donde $f_j = c_{j,l}\mathcal{F}^{-1}(G),\ j = 0,1,...,l$.

Fijamos $m \in \mathbf{N}$. Veremos ahora que si elegimos l suficientemente grande, $(1+x)^m \varphi_0(x)^{-2/p}\mathcal{F}^{-1}(G)(x)$ es acotada sobre $(0,\infty)$.

Sea $h = \mathcal{F}^{-1}(G)$ y definamos $g = \mathcal{F}_0^{-1}(G)$, donde $\mathcal{F}_0$ denota la transformada de Fourier euclídea sobre $\mathbf{R}$. Tenemos pues que

$$\mathcal{F}_0(g)(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\ g(x)\ dx, \quad y \in \mathbf{R},$$

y

$$\mathcal{F}_0^{-1}(G)(x) = g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\ G(y)\ dy, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Nótese que si l es suficientemente grande, la función g es absolutamente integrable sobre $\mathbf{R}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(1+x^2)g(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\left(e^{ixy}\right)\ G(y)\ dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(1 - \frac{d^2}{dy^2}\right) G(y)\ dy, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

siendo la última integral absolutamente convergente. Por tanto la fórmula de inversión para la transformada de Fourier es válida y $\mathcal{F}_0(g) = G$. Luego $h = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0 g)$.

Consideramos ahora una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de funciones $C^\infty(\mathbf{R})$, pares y tales que $f_n(x) = 1,\ |x| \leq n$, y $f_n(x) = 0,\ |x| \geq n+1$, para cada $n \in \mathbf{N}$. Suponemos también que, para cada $k \in \mathbf{N}$, existe $c_k > 0$ verificando

$$\left|\frac{d^k}{dx^k} f_n(x)\right| \leq c_k, \quad n \in \mathbf{N} \text{ y } x \in (0,\infty).$$

No es difícil encontrar una sucesión que satisfaga las propiedades anteriores.

Sea $n \in \mathbf{N}$. Consideramos la descomposición

$$g = f_n g + (1 - f_n) g.$$

Escribimos $g_n = (1 - f_n)g$ y definimos $G_n = \mathcal{F}_0(g_n)$ y $h_n = \mathcal{F}^{-1}(G_n)$. Nótese que $f_n(x)g(x) = 0,\ |x| \geq n+1$. Por tanto, teniendo en cuenta [105, Théorème 7.2] $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_0(f_n g) = 0,\ |x| > n+1$. De aquí se deduce que

$$h_n(x) = \mathcal{F}^{-1}(G_n)(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_0(g_n)(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_0(g)(x) = h(x), \quad |x| > n+1.$$

Sea $0 \leq j \leq m$. Ya que $|c(\lambda)|^2 \sim |\lambda|^{2\alpha+1}$, cuando $|\lambda|$ es grande, se tiene

$$\sup_{x\in[0,1]} \varphi_0^{-2/p}(x)\ x^j \left|\int_0^\infty G(\lambda)\ \varphi_\lambda(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}\right| < \infty,$$

cuando $2l > n_0 + 2\alpha + 2$.

Además, podemos escribir

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in[n+1,n+2]} \varphi_0^{-2/p}(x)\ x^j \left|\int_0^\infty G(\lambda)\ \varphi_\lambda(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}\right| \\ &\qquad \leq c\ n^{j+1}\ e^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho n} \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \left|(1+\lambda^2)^r\ G_n(\lambda)\right|, \end{aligned} \tag{3.38}$$

donde, $r \in \mathbf{N},\ r > \alpha + 1$.

Supongamos ahora que hemos escogido l, r de manera que $l - n_0/2 - \alpha - 1 > r > \alpha + 1$. Entonces, procediendo como en (3.37) podemos establecer que

$$\begin{aligned} (1+\lambda^2)^r\ G_n(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{d^2}{dt^2}\right)^r \left(e^{-it\lambda}\right)\ g_n(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\ \left(1 + \frac{d^2}{dt^2}\right)^r (g_n(t))\, dt, \quad \lambda \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Esta última igualdad puede ser establecida integrando por partes. Ciertamente, para cada $s \in \mathbf{N},\ 0 \leq s \leq 2r$, ya que $l > n_0/2 + \alpha + 1 + r$, se sigue

$$\frac{d^s}{dt^s} g_n(t) = \frac{d^s}{dt^s} g(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\ y^s\ i^s\ e^{tyi}\ dy, \quad t \geq n+1,$$

siendo la función $G(y)y^s \in L_1((0,\infty),dx)$. Entonces, el lema de Riemann–Lebesgue implica que $\lim_{|t|\to\infty} \frac{d^j}{dt^j} g_n(t) = 0,\ j \in \mathbf{N},\ 0 \le j \le 2r$.

Por tanto,

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \left|(1+\lambda^2)^r\ G_n(\lambda)\right| \le c \sum_{s=0}^{r} \sup_{t\in(0,\infty)} (1+t)^2 \left|\frac{d^{2s}}{dt^{2s}} g_n(t)\right|. \tag{3.39}$$

Aquí c no depende de n.

Teniendo presente las propiedades anteriormente mencionadas para las funciones $f_n,\ n \in \mathbf{N}$, de (3.39) se deduce que

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \left|(1+\lambda^2)^r\ G_n(\lambda)\right| \le c \sum_{s=0}^{2r} \sup_{t\ge n} (1+t)^2 \left|\frac{d^{s}}{dt^{s}} g(t)\right|.$$

Concluimos entonces que

$$n^{j+1}\ e^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho n} \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \left|(1+\lambda^2)^r\ G_n(\lambda)\right| \le c \sum_{s=0}^{2r} \sup_{t\ge n} (1+t)^{j+3}\ e^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho t} \left|\frac{d^{s}}{dt^{s}} g(t)\right|.$$

Ahora de (3.38) se infiere, ya que $n \in \mathbf{N}$ es arbitrario, que

$$\sup_{x\in[1,\infty]} \varphi_0^{-2/p}(x)\ x^j \left|\int_0^\infty G(\lambda)\ \varphi_\lambda(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}\right|$$

$$\le c \sum_{s=0}^{2r} \sup_{t\ge 0} (1+t)^{j+3}\ e^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho t} \left|\frac{d^{s}}{dt^{s}} g(t)\right|. \tag{3.40}$$

Fijamos $s \in \mathbf{N},\ 0 \le s \le 2r$. Recurriendo de nuevo a conocidas reglas operacionales para la transformación de Fourier euclídea, obtenemos

$$(1+t)^{j+3} \frac{d^s}{dt^s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tyi}\ G(y)\ dy = (1+t)^{j+3}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tyi}\ (iy)^s\ G(y)\ dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tyi} \left(1 + \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\right)^{j+3} ((iy)^s\ G(y))\ dy, \quad t \in (0,\infty),$$

siempre que l sea suficientemente grande.

Si además $\rho > 0$ y $1 \le p \le 2$, utilizando la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tyi} \left(1 + \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\right)^{j+3} ((iy)^s\ G(y))\ dy$$

$$= \int_{-\infty+i\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho}^{+\infty+i\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho} e^{tyi} \left(1 + \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\right)^{j+3} ((+iy)^s\ G(y))\ dy, \quad t \in (0,\infty), \tag{3.41}$$

cuando l sea lo bastante grande.

En efecto, para cada $t \in [0, \infty)$,

$$\left| \int_{R+i\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho}^{R} e^{tyi} \left(1 + \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\right)^{j+3} ((iy)^s\; G(y))\; dy \right| \to 0, \quad \text{cuando } |R| \to \infty,$$

siempre que l sea adecuadamente grande.

Ya que la función $e^{ity}\left(1 + \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\right)^{j+3}((iy)^s G(y))$ es holomorfa en $|\text{Im}\lambda| < \rho\left(\frac{2}{p} - 1\right)$ y continua en $|\text{Im}\lambda| \leq \rho\left(\frac{2}{p} - 1\right)$, para cada $t \in \mathbf{R}$, se tiene también que

$$\int_{C_R} e^{ity}\; \left(1 + \frac{1}{i}\frac{d}{dy}\right)^{j+3} ((iy)^s G(y))\; dy = 0,$$

donde C_R es el rectángulo de vértices $R, -R, -R-i\left(\frac{2}{p} - 1\right)\rho$ y $R-i\left(\frac{2}{p} - 1\right)\rho$, orientado positivamente.

Concluimos, pues, que (3.41) se verifica.

Por tanto, podemos escribir

$$\sup_{t\in(0,\infty)} (1 + t)^{j+3}\; e^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\rho t}\; \left|\frac{d^s}{dt^s} g(t)\right| < \infty,$$

cuando l se elige suficientemente grande.

Combinando las estimaciones anteriores obtenemos que, cuando l es adecuadamente grande

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1 + x)^m\; \varphi_0^{-2/p}(x)\; |\mathcal{F}^{-1}(G)(x)| < \infty.$$

De este modo (c) queda probado.

Supongamos ahora que $\rho = 0$ y $0 < p \leq 2$ o $\rho > 0$ y $0 < p \leq 1$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sea $m \in \mathbf{N}$. Asumamos que $T \in S'_p$ admite la representación (3.35) donde f_j es continua sobre $(0, \infty)$ y $(1 + x)^m \varphi_0^{-2/p}(x) f_j(x)$ es acotada sobre $(0, \infty)$, para $j = 0, 1, ..., l$. Entonces

$$< T, \phi >= \sum_{j=0}^{l} \int_0^\infty f_j(x)\; \Delta^j \phi(x)\; A(x)\; dx, \quad \phi \in S_p. \tag{3.42}$$

En virtud de [33, (3.5)], se sigue que, para cierto $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} |< T, \phi >| \;&\leq\; c \sum_{j=0}^{l} \int_0^\infty |f_j(x)|\; (1 + x)^\beta\; e^{2\rho x}\; \left|\Delta^j \phi(x)\right|\; dx \\ &\leq\; c \sum_{j=0}^{l} \sup_{x\in(0,\infty)} (1 + x)^m\; |f_j(x)|\, \varphi_0^{-2/p}(x) \\ &\quad \cdot \sup_{x\in(0,\infty)} (1 + x)^{\beta-m+2+\frac{2}{p}} \left|\Delta^j \phi(x)\right|, \end{aligned} \tag{3.43}$$

para cada $\phi \in S_p$.

Sea $k \in \mathbf{Z},\ k < 0$. Tomamos $m \in \mathbf{N}$ tal que $\beta - m + 2 + \frac{2}{p} < k$. De (3.43) se deduce que T es continua en S_p cuando se considera sobre S_p la topología inducida por $\mathcal{A}_k$. Además, ya que S_p es denso en $\mathcal{A}_k$, T puede ser extendido de forma única de S_p a $\mathcal{A}_k$ continuamente, y esta extensión viene dada por (3.42).

De este modo concluimos que $T \in \mathcal{A}'_k$, para cada $k \in \mathbf{Z},\ k < 0$, y que, por tanto, $T \in \mathcal{A}'$.

(c) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que f es una función continua sobre $(0, \infty)$ tal que $(1+x)^m \varphi_0^{-2/p}(x) f(x)$ es acotada sobre $(0, \infty)$, donde $m \in \mathbf{N}$ es tal que $m > 1 + \beta + \frac{4}{p}$, donde $\beta > 0$ es el exponente que aparece en [33, (3.5)]. Observamos que

$$\int_0^\infty e^{-2\rho x/p}\ (1+x)^{2/p}\ |f(x)|\ A(x)\ dx$$

$$\leq c \int_0^\infty e^{-2\rho x\left(\frac{1}{p}-1\right)}\ (1+x)^{\beta+2/p}\ |f(x)|\ dx$$

$$\leq c \int_0^\infty e^{-2\rho x\left(\frac{2}{p}-1\right)}\ (1+x)^{\beta+(4/p)-m}\ dx < \infty$$

Por tanto, f define un elemento T_f de S'_p dado por (véase la sección 3.3)

$$< T_f, \phi >= \int_0^\infty f(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx, \quad \phi \in S_p.$$

Además $f \in L_1((0, \infty), A(x)dx)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(x)|\ A(x)\ dx &\leq c \int_0^\infty |f(x)|\ (1+x)^\beta\ e^{2\rho x}\ dx \\ &\leq c \int_0^\infty (1+x)^{-m+\beta+2/p}\ e^{2\rho x\left(1-\frac{1}{p}\right)}\ dx < \infty.\end{aligned}$$

También podemos escribir, intercambiando el orden de integración,

$$\begin{aligned}< \mathcal{F}' T_f, \mathcal{F}\phi > &= < T_f, \phi > \\ &= \int_0^\infty f(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx \\ &= \int_0^\infty f(x) \left(\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \mathcal{F}(\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \right) A(x)\ dx \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F}(\phi)(\lambda) \left(\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ f(x)\ A(x)\ dx \right) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \\ &= \int_0^\infty \mathcal{F}(\phi)(\lambda)\ \mathcal{F}(f)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \\ &= < \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(\phi) >, \quad \phi \in S_p.\end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{F}' T_f = \mathcal{F}(f)$.

Sean $k, l \in \mathbf{N}$. Supongamos que $T \in S'_p$ admite la representación (3.35) donde, para cada $j \in \mathbf{N}$, $j \leq l$, la función $(1+x)^m \varphi_0^{-2/p}(x) f_j(x)$ es continua y acotada sobre $(0, \infty)$, siendo $m \in \mathbf{N}$ y $m > 2 + \beta + k + \frac{2}{p}$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{F}'T = \sum_{j=0}^{l} (\rho^2 + \lambda^2)^j \mathcal{F} f_j$$

Derivando ahora bajo el signo integral y teniendo en cuenta [33, Lemma 3.4, (ii) y (iv)] conseguimos

$$\left| \frac{d^k}{d\lambda^k} (\mathcal{F}'T)(\lambda) \right| \leq c \sum_{j=0}^{l} \sum_{s=0}^{k} \left| \frac{d^{k-s}}{d\lambda^{k-s}} (\rho^2 + \lambda^2)^j \right| \left| \frac{d^s}{d\lambda^s} (\mathcal{F} f_j)(\lambda) \right|$$

$$\leq c \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \left| \frac{d^{k-s}}{d\lambda^{k-s}} (\rho^2 + \lambda^2)^j \right| \int_0^\infty (1+x)^{\beta+s-m+1+\frac{2}{p}} \, dx, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \leq \rho \left(\frac{2}{p} - 1 \right).$$

Por tanto, $\mathcal{F}'T$ es un multiplicador de H_p.

■

No es difícil comprobar (véase, por ejemplo, [83, Proposition 4.2]) que la hipótesis $(1+x)^m \varphi_0^{-2/p}(x) f_j(x)$, $j = 0, 1, ..., l$, es acotada sobre $(0, \infty)$, que aparece en la Proposición 3.27, puede ser sustituida, manteniendo cierto el resultado enunciado en la proposición anterior, por esta otra: $(1+x)^m \ \varphi_0^{-2/p} \ f_j \in L_q((0, \infty), dx)$, $j = 0, 1, ..., l$, para algún $q \in [1, \infty)$.

Como consecuencia de la Proposición 3.27 podemos describir ciertos elementos de S'_p que definen operadores de convolución sobre S_p.

Proposición 3.28 *Sea $0 < p \leq 2$. Supongamos que $T \in S'_p$ y que $\mathcal{F}'T$ es un multiplicador de H_p. Entonces la aplicación $\phi \to T \sharp \phi$ es continua de S_p en sí mismo.*

Demostración.

Sea $T \in S'_p$ tal que $\mathcal{F}'T$ es un multiplicador de H_p. De la fórmula de intercambio distribucional para la transformación $\mathcal{F}$ y la convolución $\sharp$ se sigue

$$\mathcal{F}(T \sharp \phi) = \mathcal{F}'(T) \ \mathcal{F}(\phi), \quad \phi \in S_p,$$

en el sentido de la igualdad en H'_p.

Podemos entonces escribir que, para cada $\phi, \psi \in S_p$,

$$< T \sharp \phi, \psi > = < \mathcal{F}(T \sharp \phi), \mathcal{F}(\psi) >$$

$$= < \mathcal{F}'(T) \mathcal{F}(\phi), \mathcal{F}(\psi) > = < \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}'(T) \mathcal{F}(\phi)), \psi > .$$

Por tanto, $T \sharp \phi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}'(T) \mathcal{F}(\phi))$, $\phi \in S_p$, y [33, Theorem 4.27] implica que la aplicación $\phi \to T \sharp \phi$ es continua de S_p en sí mismo.

■

Para simplificar, en lo que sigue, escribiremos $T \in \mathcal{M}_p$, $0 < p \leq 2$, para referirnos a que $T \in S_p'$ y $\mathcal{F}'T$ es un multiplicador de H_p.

En virtud de la Proposición 3.27, si se verifica una de las condiciones siguientes

(i) $T \in \mathcal{A}'$, y $\rho = 0$ y $0 < p \leq 2$ o $\rho > 0$ y $1 < p \leq 2$,

(ii) $T \in S_p'$ satisface la propiedad (c) en la Proposición 3.27 y $\rho = 0$ y $0 < p \leq 2$ o $\rho > 0$ y $0 < p \leq 1$,

entonces $T \in \mathcal{M}_p$.

Si $T \in \mathcal{M}_p$, la Proposición 3.28 nos dice que la aplicación $\phi \to T\sharp\phi$ es continua.

Definimos la convolución $T\sharp L$ de $T \in S_p'$ y $L \in \mathcal{M}_p$, $0 < p \leq 2$, como la funcional sobre S_p dada por

$$< T\sharp L, \phi > = < T, L\sharp\phi >, \quad \phi \in S_p. \tag{3.44}$$

De este modo $T\sharp L \in S_p'$.

W. Bloom y Z. Xu ([33, Theorem 5.17, (iii)] mostraron que, para cada $T \in S_p'$ y $\psi \in S_p$, se tiene

$$< T\sharp\psi, \phi > = < T, \psi\sharp\phi >, \quad \psi \in S_p.$$

Ya que $\psi \in S_p \subset S_p'$ y que $\mathcal{F}(\psi) \in H_p$ es un multiplicador de H_p, ψ está en $\mathcal{M}_p$, y la definición (3.44) puede verse como una extensión de la definición (3.27).

Recogemos a continuación las principales propiedades algebraicas de la convolución que acabamos de definir.

Proposición 3.29 *Sea $0 < p \leq 2$. Supongamos que $T \in S_p'$ y $L_1, L_2 \in \mathcal{M}_p$. Entonces*

(a) $\mathcal{F}'(T\sharp L_1) = \mathcal{F}'(T)\mathcal{F}'(L_1)$,

(b) La funcional δ de Dirac está en $\mathcal{A}' \cap \mathcal{M}_p$ y $T\sharp\delta = T$,

(c) $\Delta^*(T\sharp L_1) = (\Delta^* T)\sharp L_1 = T\sharp(\Delta^* L_1)$,

(d) $L_1\sharp L_2 \in \mathcal{M}_p$ y $L_1\sharp L_2 = L_2\sharp L_1$,

(e) $T\sharp(L_1\sharp L_2) = (T\sharp L_1)\sharp L_2$.

Demostración.

Para probar la fórmula de intercambio en (a) basta observar que, para cada $\phi \in S_p$,

$$< \mathcal{F}'(T\sharp L_1), \mathcal{F}\phi > = < T\sharp L_1, \phi > = < T, L_1\sharp\phi >$$

$$= < \mathcal{F}'(T), \mathcal{F}(L_1\sharp\phi) > = < \mathcal{F}'(T), \mathcal{F}'(L_1)\mathcal{F}(\phi) > = < \mathcal{F}'(T)\mathcal{F}'(L_1), \mathcal{F}(\phi) > .$$

Por otra parte, se tiene que, para cada $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$,

$$|< \delta, \phi >| = |\phi(0)| \leq \sup_{x \in [0,\infty)} (1+x)^m \; |\phi(x)|, \quad \phi \in \mathcal{A}_m.$$

Luego $\delta \in \mathcal{A}_m'$, $m \in \mathbf{Z}$, $m < 0$, y se concluye que $\delta \in \mathcal{A}'$.

Además, para cada $\phi \in S_p$,

$$< \mathcal{F}'\delta, \mathcal{F}\phi >=< \delta, \phi >= \phi(0) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(0)\ \mathcal{F}(\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} =< 1, \mathcal{F}(\phi) >,$$

Por tanto, $\mathcal{F}'\delta = 1$ es un multiplicador de H_p, y concluimos que $\delta \in \mathcal{M}_p$.

La fórmula de intercambio en (a) permite ahora probar que $T\sharp\delta = T$.

Asimismo de (a) se infiere (c), teniendo en cuenta que $\mathcal{F}'(\Delta^* T) = (\lambda^2 + \rho^2)\mathcal{F}'(T)$, y también (d) y (e).

■

Nuestro próximo objetivo es probar un inverso de la Proposición 3.28. Necesitamos establecer previamente algunos resultados.

Obtenemos a continuación una representación para la solución fundamental del operador $(1 + \Delta)^r$, para cada $r \in \mathbf{N}$.

Proposición 3.30 *Sea $l \in \mathbf{N}$. La función h_l definida por*

$$h_l(x) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

es par, acotada y continua sobre $\mathbf{R}$, y está en $C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \cap S_p'$, siempre que $l > \alpha + 1$ y $0 < p \leq 2$. Además, para cada $k \in \mathbf{N}$, existe $l_k \in \mathbf{N}$, tal que $h_l \in C^k(\mathbf{R})$, cuando $l \geq l_k$.

Si, como es usual, denotamos por δ a la funcional de Dirac, entonces

$$\delta = (1 + \Delta^*)^l h_l,$$

en el sentido de la igualdad en S_p', para cada $0 < p \leq 2$, siempre que $l > \alpha + 1$.

Demostración.

Ya que $|\varphi_\lambda(x)| \leq 1,\ x, \lambda \in \mathbf{R}$ ([33, Lemma 3.4,(i)]), teniendo en cuenta que $|c(\lambda)|^2 \sim \lambda^{2\alpha+1}$, cuando $\lambda \to \infty$ ([109, pág. 99]), podemos ver que, cuando $l > \alpha + 1$, la función h_l es continua y acotada en $\mathbf{R}$. La paridad de h_l se sigue de la misma propiedad para φ_λ.

Además, si $k \in \mathbf{N}$, de [33, Lemma 3.6, (ii)] se deduce que existe $l_k \in \mathbf{N}$ de manera que $h_l \in C^k(\mathbf{R})$, para cada $l \geq l_k$.

Por otra parte, se tiene que, si $l > \alpha + 1$,

$$|h_l(x)| \leq \int_0^\infty e^{-\rho x}\ (1 + x)\ \frac{1 + \lambda^{2\alpha+1}}{(1 + \rho^2 + \lambda^2)^l}\ d\lambda \leq c\ e^{-\rho x}\ (1 + x), \quad x \in (0, \infty).$$

Luego,

$$\int_0^\infty |h_l(x)|\ e^{-\frac{2}{p}\rho x}\ (1 + x)^{-k}\ A(x)\ dx \leq \int_0^\infty e^{\rho x\left(1 - \frac{2}{p}\right)}\ (1 + x)^{-k+1+\beta}\ dx < \infty,$$

cuando $k > 2 + \beta$, siendo β dada en [33, (3.5)]. Concluimos así que $h_l \in S_p'$.

Sabemos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0\mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ representa la transformación de Abel definida en [33, (4.9)] (véase también [105]). La inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de $\mathbf{A}$ fue obtenida en [105, Théorème 6.3].

Sea $x_0 \in (0, \infty)$. Elegimos una función par $\kappa \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $\kappa(x) = 0,\ |x| < x_0/4$, y $\kappa(x) = 1,\ |x| > x_0/2$. Podemos escribir

$$h_m(x) = \mathbf{A}^{-1}\left(\kappa \mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-m})\right)(x), \quad x > x_0,$$

ya que $\kappa(x) = 1,\ x > x_0$, y $\mathbf{A}^{-1}(f)(x)$ sólo depende de la función f en el intervalo $[x, +\infty)$ (véase [105, Théorème 6.3]).

La función $\kappa\mathcal{F}_0^{-1}((1+\rho^2+\lambda^2)^{-m})$ es par. La integración parcial nos permite probar que la función $\mathcal{F}_0^{-1}((1+\rho^2+\lambda^2)^{-l})$ está en $C^\infty(\mathbf{R}-\{0\})$ y que la función $\kappa\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})$ está en el espacio S de Schwartz.

En efecto, tenemos que

$$\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}\ d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi i x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda}(e^{ix\lambda})\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}\ d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi i x}\left(e^{ix\lambda}\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\left. +2l\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\ \lambda\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l-1}\ d\lambda\right)$$

$$= \frac{2l}{\pi i x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\ \lambda\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l-1}\ d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Luego $\mathcal{F}_0^{-1}((1+\rho^2+\lambda^2)^{-l}) \in C^1(\mathbf{R}\setminus\{0\})$. Iterando el argumento, podemos concluir que $\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}) \in C^\infty(\mathbf{R}\setminus\{0\})$. Además, para cada $k \in \mathbf{N}$, $\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})$ está acotada en $\mathbf{R}\setminus[-\frac{x_0}{4}, \frac{x_0}{4}]$. Por tanto, si $k \in \mathbf{N}$, al ser $\kappa(x) = 0,\ |x| \le \frac{x_0}{4}$, y $\kappa(x) = 1,\ |x| \ge \frac{x_0}{2}$, se sigue que

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\kappa\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})\right)(x)\right|$$

$$\le c\left(\sum_{j=0}^{k-1}\sup_{\frac{x_0}{2}\le x\le 2x_0}\frac{d^j}{dx^j}\left(\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})\right)(x)\right.$$

$$\left. + \sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\kappa(x)\frac{d^k}{dx^k}\left(\mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})\right)(x)\right|\right) < \infty.$$

Por otra parte, se tiene que

$$x\ \mathcal{F}_0^{-1}((1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l})(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\lambda}(e^{ix\lambda})\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}\ d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left(e^{ix\lambda}\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2l\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\ \lambda\ (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l-1}\ d\lambda\Bigg)$$

$$= \frac{2l}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} \; \lambda \; (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l-1} \; d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Análogamente, podemos ver que para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \kappa(x) \; x^k \; \mathcal{F}^{-1}((1 + \lambda^2 + \rho^2)^{-l})(x) \right| < \infty.$$

Recurriendo ahora a [40] concluimos que $\kappa \mathcal{F}^{-1}((1+\lambda^2+\rho^2)^{-l})$ está en S_{even}. Por tanto, de acuerdo con [108, Corollary 6.II.4, (ii)], $\mathbf{A}^{-1}(\kappa \mathcal{F}^{-1}((1 + \lambda^2 + \rho^2)^{-m}))$ pertenece a S. En particular $h_m \in C^\infty((x_0, \infty))$, y la arbitrariedad de x_0 nos da que $h_m \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\})$.

Sea $\phi \in S_p$, donde $0 < p \leq 2$. Tenemos

$$< (1 + \Delta^*)^l h_l, \phi >=< h_l, (1 + \Delta)^l \phi >= \int_0^\infty h_l(x) \; (1 + \Delta)^l \phi(x) \; A(x) \; dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi_\lambda(x) \; (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l} \; \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} \right) (1 + \Delta)^l \phi(x) \; A(x) \; dx$$

$$= \int_0^\infty (1 + \rho^2 + \lambda^2)^{-l} \left(\int_0^\infty \varphi_\lambda(x) \; (1 + \Delta)^l \phi(x) \; A(x) \; dx \right) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}$$

$$= \int_0^\infty \varphi_\lambda(0) \left(\int_0^\infty \varphi_\lambda(x) \; \phi(x) \; A(x) \; dx \right) \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2} = \phi(0) =< \delta, \phi > .$$

De este modo se termina la prueba.

■

Recordamos que, para cada $a \in (0, \infty)$, el espacio $\mathcal{D}_{*,a}$ está constituido por las funciones $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$, pares y tales que $\phi(x) = 0, \; |x| \geq a$. La topología de $\mathcal{D}_{*,a}$ está definida por la familia $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ de seminormas, donde

$$\gamma_k(\phi) = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \phi(x) \right|, \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

$\mathcal{D}_{*,a}$ es un espacio de Fréchet. $\mathcal{D}_*$ representa el límite inductivo $\cup_{a>0} \mathcal{D}_{*,a}$.

La imagen por la transformación $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}_{*,a}$ es $H_{*,a}$, para cada $a > 0$ ([109, Theorem 7.2]). Si $a > 0$, el espacio $H_{*,a}$ está formado por las funciones Φ enteras pares verificando que

$$\rho_k^a(\Phi) = \sup_{\lambda \in \mathbf{C}} (1 + |\lambda|)^k \; e^{-a|\mathrm{Im}\lambda|} \; |\Phi(\lambda)| < \infty,$$

para cada $k \in \mathbf{N}$. $H_{*,a}$ es un espacio de Fréchet cuando se considera sobre él la topología asociada a la familia $\{\rho_k^a\}_{k \in \mathbf{N}}$ de normas, siendo $\mathcal{F}$ un isomorfismo topológico de $\mathcal{D}_{*,a}$ en $H_{*,a}, \; a > 0$.

En la siguiente proposición describimos la topología de $\mathcal{D}_{*,a}, \; a > 0$, mediante otros sistemas de seminormas.

Proposición 3.31 *Sean $a > 0$ y $1 \leq q \leq \infty$. Para cada $k \in \mathbf{N}$, η_k^q se define sobre $\mathcal{D}_{*,a}$ por*

$$\eta_k^q(\phi) = \left\|\Delta^k \phi\right\|_{L_q((0,\infty),dx)}, \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

El sistema $\{\eta_k^q\}_{k\in\mathbf{N}}$ de seminormas, es equivalente a $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ sobre $\mathcal{D}_{*,a}$.

Demostración.

Procediendo como en la prueba del Lema 1.1, a partir de [33, Lemma 4.18] podemos probar que la topología que genera $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ es más fina que la asociada a $\{\eta_k^q\}_{k\in\mathbf{N}}$ sobre $\mathcal{D}_{*,a}$.

Por otra parte, para cada $k \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$(\lambda^2 + \rho^2)^k \ (\mathcal{F}\phi)(\lambda) = \int_0^a \varphi_\lambda(x) \ \Delta^k \phi(x) \ A(x) \ dx, \quad \lambda \in \mathbf{C} \text{ y } \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

Entonces, [33, Lemma 3.4] conduce a

$$\left|(\lambda^2 + \rho^2)^k \ (\mathcal{F}\phi)(\lambda)\right| \leq c \ e^{a|\mathrm{Im}\lambda|} \ \left\|\Delta^k \phi\right\|_q, \quad \lambda \in \mathbf{C} \text{ y } \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

Por tanto,

$$\rho_k^a(\mathcal{F}\phi) \leq c \ \eta_k^q(\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

Esta desigualdad prueba que la transformación $\mathcal{F}$ es continua de $\mathcal{D}_{*,a}$, cuando se considera sobre él la topología asociada a $\{\eta_k^q\}_{k\in\mathbf{N}}$, en $H_{*,a}$. Por tanto, [33, Theorem 4.27] implica que las familias $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ y $\{\eta_k^q\}_{k\in\mathbf{N}}$ son equivalentes sobre $\mathcal{D}_{*,a}$.

■

Obtenemos ahora representaciones de los elementos del espacio dual $\mathcal{D}'_{*,a}$ de $\mathcal{D}_{*,a}$, $a > 0$.

Proposición 3.32 *Sean $a > 0$ y $1 < q \leq \infty$. Un subconjunto B' de $\mathcal{D}'_{*,a}$ es débilmente (o, lo que es lo mismo, fuertemente) acotado si, y sólo si, existen $c > 0$ y $r \in \mathbf{N}$ tales que, para cada $T \in B'$ podemos encontrar $f_{k,T} \in L_q((0,\infty), dx)$, $k = 0, 1, ..., r$, para las cuales*

$$< T, \phi >= \sum_{k=0}^{r} \int_0^a f_{k,T}(x) \ \Delta^k \phi(x) \ dx, \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a},$$

y $\sum_{k=0}^{r} \|f_{k,T}\|_{L_q((0,\infty),dx)} \leq c$.

Demostración.

Sea B' un subconjunto débilmente acotado en $\mathcal{D}'_{*,a}$. En virtud de la Proposición 3.31 y [102, Theorem 3.7] existen $c > 0$ y $r \in \mathbf{N}$ tales que

$$|< T, \phi >| \leq c \max_{0 \leq k \leq r} \left\|\Delta^k \phi\right\|_{q'}, \quad T \in B', \ \phi \in \mathcal{D}_{*,a},$$

donde q' representa el conjugado de q.

La prueba puede ser ya terminada siguiendo el procedimiento utilizado para mostrar la Proposición 3.4.

■

Sean $a > 0$ y $m \in \mathbf{N}$. Representamos por $\mathcal{D}^m_{*,a}$ el espacio de las funciones $\phi \in C^{2m}(\mathbf{R})$, pares y tales que $\phi(x) = 0,\ |x| \geq a$. Sobre $\mathcal{D}^m_{*,a}$ se considera la topología asociada a la norma α_m definida por

$$\alpha_m(\phi) = \max_{0\leq k\leq 2m} \gamma_k(\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}^m_{*,a}.$$

Nótese que si $b > a$ y $\phi \in \mathcal{D}^m_{*,a}$, existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}_{*,b}$ tal que $\phi_n \to \phi$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{D}^m_{*,b}$. Para probar esto podemos recurrir a regularizaciones.

Nuestro próximo resultado puede verse como un inverso de la Proposición 3.28.

Proposición 3.33 *Sea $T \in S'_p$, donde $0 < p \leq 2$. Si $T\sharp\phi \in S_p$, para cada $\phi \in \mathcal{D}_*$, entonces, para cada $m \in \mathbf{N}$ existen $l \in \mathbf{N}$ y funciones continuas $f_j,\ j = 0, 1, ..., l$, tales que*

$$T = \sum_{j=0}^{l} \Delta^{*j} f_j,$$

y, para cada $j \in \mathbf{N},\ j = 0, 1, ..., l,\ (1 + x)^m \varphi_0^{-2/p}(x) f_j(x)$ es acotada sobre $(0, \infty)$.

Demostración.

Supongamos que $m \in \mathbf{N},\ m > 2$. Sea $\phi \in \mathcal{D}_*$. Ya que $T\sharp\phi \in S_p$, se tiene que

$$\sup_{x\in(0,\infty)} (1 + x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ |(T\sharp\phi)(x)|$$

$$= \sup_{x\in(0,\infty)} \Big| < (1 + x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ \tau_x T, \phi > \Big| < \infty.$$

Aquí el operador de traslación $\tau_x,\ x \in (0, \infty)$, se define sobre S'_p por trasposición.

Por tanto, el conjunto $\{(1 + x)^m \varphi_0^{-2/p}(x)\tau_x T\}_{x\in(0,\infty)}$ es un subconjunto débilmente acotado de $\mathcal{D}'_*$.

Sea $a > 0$. De acuerdo con la Proposición 3.32 existe $\theta \in \mathbf{N}$ y $c > 0$ tales que, para cada $x \in (0, \infty)$ existen $f_{j,x} \in L_\infty((0, \infty), dx),\ j = 0, 1, ..., \theta$, para las cuales

$$< (1 + x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ \tau_x T, \phi >= \sum_{j=0}^{\theta} \int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j \phi(t)\ dt, \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a}, \quad (3.45)$$

donde $\sum_{j=0}^{\theta} \|f_{j,x}\|_{L_\infty((0,\infty),dx)} \leq c$. Por tanto, para cada $x \in (0, \infty),\ (1 + x)^m \varphi_0^{-2/p}(x)\tau_x T$ puede ser continuamente extendido a $\mathcal{D}^\theta_{*,a}$. Una de tales extensiones viene dada por (3.45).

Supongamos que $x \in (0,\infty)$ y $S \in (\mathcal{D}^\theta_{*,a})'$ para las cuales $S = (1+x)^m \varphi_0^{-2/p}(x)\tau_x T$ cuando actúa sobre $\mathcal{D}_{*,a}$, entonces S es dado sobre $\mathcal{D}^\theta_{*,b}$ por la parte derecha de (3.45), para cada $0 < b < a$.

En efecto, sean $0 < b < a$ y $\phi \in \mathcal{D}^\theta_{*,b}$. Existe una sucesión $(\phi_j) \subset \mathcal{D}_{*,a}$ tal que $\phi_j \to \phi$, cuando $j \to \infty$, en $\mathcal{D}^\theta_{*,a}$. Entonces

$$< S, \phi_j >=< (1+x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ \tau_x T, \phi_j >= \sum_{i=0}^{\theta} \int_0^\infty f_{i,x}(t)\ \Delta^i \phi_j(t)\ dt$$

$$\to \sum_{i=0}^{\theta} \int_0^\infty f_{i,x}(t)\ \Delta^i \phi(t)\ dt =< S, \phi >, \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Elegimos ahora $k \in \mathbf{N}$ de manera que la solución fundamental h_k del operador $(1+\Delta)^k$ (definida en el Proposición 3.30) está en $C^{2\theta}(\mathbf{R})$. También escogemos una función $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$, par, tal que $\varphi(x) = 0,\ |x| > \frac{3a}{4}$, y $\varphi(x) = 1,\ |x| < \frac{a}{2}$. La regla de Leibniz conduce a

$$(1+\Delta^*)^k(h_k\varphi) = \varphi(1+\Delta^*)^k h_k + \zeta,$$

donde $\zeta(x) = \sum_{i=1}^{2k} p_i(x) \frac{d^i}{dx^i}\varphi(x)\frac{d^{2k-i}}{dx^{2k-i}}h_k(x),\ x \in \mathbf{R}$, para ciertas funciones $p_i \in C^\infty(\mathbf{R}\setminus\{0\}),\ i = 1,2,...,2k$. Nótese que $\zeta(x) = 0,\ |x| < \frac{a}{2}$ o $|x| > \frac{3a}{4}$, y que, al ser $h_k \in C^\infty(\mathbf{R}\setminus\{0\}),\ \zeta \in \mathcal{D}_{*,a}$. Además, de la Proposición 3.30 se sigue que

$$< \varphi(1+\Delta^*)^k h_k, \phi >=< (1+\Delta^*)^k h_k, \phi\varphi >$$
$$= \phi(0)\varphi(0) = \phi(0) =< \delta, \phi >, \quad \phi \in S_p.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\delta = (1+\Delta^*)^k(h_k\varphi) - \zeta. \tag{3.46}$$

La función $h_k\varphi \in \mathcal{D}^\theta_{*,\frac{3a}{4}}$. Luego $h_k\varphi \in S'_p$ y la transformada distribucional de Chébli–Trimèche $\mathcal{F}'(h_k\varphi)$ de $h_k\varphi$ viene dada por

$$\mathcal{F}'(h_k\varphi)(\lambda) = \int_0^\infty h_k(y)\ \varphi(y)\ \varphi_\lambda(y)\ A(y)\ dy, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right),$$

y es un multiplicador de H_p. Ciertamente, para cada $s \in \mathbf{N}$, de [33, Lemma 3.4, (iv)] inferimos

$$\left|\frac{d^s}{d\lambda^s}\mathcal{F}'(h_k\varphi)(\lambda)\right| \le c\int_0^a |h_k(y)|\ |\varphi(y)|\ A(y)\ dy, \quad |\mathrm{Im}\lambda| \le \rho\left(\frac{2}{p}-1\right).$$

Concluimos pues que $h_k\varphi \in \mathcal{M}_p$. Podemos entonces definir la convolución $T\sharp(h_k\varphi)$ de T y $h_k\varphi$ como el elemento de S'_p dado por

$$< T\sharp(h_k\varphi), \phi >=< T, (h_k\varphi)\sharp\phi >, \quad \phi \in S_p.$$

Nuestro próximo objetivo es ver que

$$(1+x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ (T\sharp(h_k\varphi))(x)=\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j(h_k\varphi)(t)\ dt,\quad x\in(0,\infty).$$

Ya que $h_k\varphi\in\mathcal{D}^\theta_{*,\frac{3a}{4}}$ existe una sucesión $(\phi_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{D}_{*,a}$ tal que $\phi_\nu\to h_k\varphi$, cuando $\nu\to\infty$, en $\mathcal{D}^\theta_{*,a}$. Por tanto, al ser $\sup_{x\in(0,\infty)}\|f_{j,x}\|<\infty,\ j=0,1,...,\theta$, se deduce, como se comentó anteriormente, que

$$(1+x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ (T\sharp\phi_\nu)(x)\to\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j(h_k\varphi)(t)\ dt,\quad \text{cuando } \nu\to\infty, \tag{3.47}$$

uniformemente en $x\in(0,\infty)$.

Además, para cada $\phi\in S_p$, $\phi_\nu\sharp\phi\to(h_k\varphi)\sharp\phi$, cuando $\nu\to\infty$, en S_p. En efecto, sea $\phi\in S_p$. Teniendo en cuenta [33, Lemma 3.4, (iv)] y que $\phi_\nu\to h_k\varphi$, cuando $\nu\to\infty$, en $\mathcal{D}^\theta_{*,a}$, podemos ver que

$$(\mathcal{F}(\phi_\nu)-\mathcal{F}(h_k\varphi))\mathcal{F}(\phi)\to 0,\quad \text{cuando } \nu\to\infty,$$

en H_p. Luego, la fórmula de intercambio nos permite, recordando [33, Theorem 4.27], obtener que

$$\phi_\nu\sharp\phi\to(h_k\varphi)\sharp\phi,\quad \text{cuando } \nu\to\infty,$$

en S_p.

Concluimos pues que, para cada $\phi\in S_p$,

$$<T\sharp\phi_\nu,\phi>=<T,\phi_\nu\sharp\phi>\to<T,(h_k\varphi)\sharp\phi>=<T\sharp(h_k\varphi),\phi>,\ \text{cuando } \nu\to\infty.$$

Por tanto,

$$\varphi_0^{2/p}(x)(1+x)^{-m}\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j(h_k\varphi)(t)\ dt=(T\sharp(h_k\varphi))(x), \tag{3.48}$$

en el sentido de la igualdad en S_p', ya que, para cada $\phi\in S_p$, tenemos, en virtud de (3.47), que

$$\left|\int_0^\infty\left(\varphi_0^{2/p}(x)(1+x)^{-m}\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j(h_k\varphi)(t)\ dt\right.\right.$$
$$\left.-T\sharp\phi_\nu(x)\right)\phi(x)\ A(x)\ dx\Big|$$
$$\le\int_0^\infty\varphi_0^{2/p}(x)(1+x)^{-m}\left|\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j(h_k\varphi)(t)\ dt\right.$$

$$-\varphi_0^{-2/p}(x)(1+x)^m(T\sharp\phi_\nu)(x)\Big|\,|\phi(x)|\ A(x)\ dx$$

$$\leq c\int_0^\infty e^{-2\rho x\left(\frac{2}{p}-1\right)}\ (1+x)^{-2}\left|\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty f_{j,x}(t)\ \Delta^j(h_k\varphi)(t)\ dt\right.$$

$$\left.-\varphi_0^{-2/p}(x)(1+x)^m(T\sharp\phi_\nu)(x)\right|dx\to 0,\quad \text{cuando } \nu\to\infty.$$

De (3.46), y teniendo en cuenta las reglas operacionales para la convolución $\sharp$ distribucional recogidas en la Proposición 3.29, se sigue que

$$\begin{aligned} T &= (1+\Delta^*)^k(T\sharp(h_k\varphi))-T\sharp\zeta \\ &= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\Delta^{*s}(T\sharp(h_k\varphi))-T\sharp\zeta. \end{aligned}$$

Ya que $\zeta\in\mathcal{D}_{*,a},\ \zeta\in\mathcal{M}_p$ y, por tanto, $T\sharp\zeta\in S_p$. En particular

$$\sup_{x\in(0,\infty)}(1+x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ \ |(T\sharp\zeta)(x)|<\infty.$$

Además, de (3.48) inferimos que

$$\sup_{x\in(0,\infty)}(1+x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x)\ \ |(T\sharp(h_k\varphi))(x)|$$

$$\leq\sup_{x\in(0,\infty)}\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^\infty|f_{j,x}(t)|\ \left|\Delta^j(h_k\varphi)(t)\right|\ dt$$

$$\leq c\sum_{j=0}^{\theta}\int_0^a\left|\Delta^j(h_k\varphi)(t)\right|\ dt<\infty.$$

De este modo la prueba queda completa.

■

De las Proposiciones 3.27, 3.28 y 3.33 se deducen las propiedades que siguen

Corolario 3.34 *Sea $T\in S'_p$, donde $0<p\leq 2$ cuando $\rho=0$, y $0<p\leq 1$ cuando $\rho>0$. Las dos propiedades que siguen son equivalentes*

(a) La aplicación $\phi\to T\sharp\phi$ es continua de S_p en sí mismo.

(b) Para cada $m\in\mathbf{N}$, existen $l\in\mathbf{N}$ y funciones continuas $f_j,\ j=0,1,...,l$, tales que

$$T=\sum_{j=0}^{l}\Delta^{*j}f_j,$$

y, para cada $j=0,1,...,l$, $(1+x)^m\varphi_0^{-2/p}(x)f_j$ es acotada sobre $(0,\infty)$.

■

Corolario 3.35 *Sea* $T \in S_p'$*, donde* $0 < p \leq 2$ *cuando* $\rho = 0$*, y* $p = 1$ *cuando* $\rho > 0$*. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

(a) La aplicación $\phi \to T \sharp \phi$ *es continua de* S_p *en sí mismo.*

(b) $T \in \mathcal{A}'$*.*

(c) $\mathcal{F}'T$ *es un multiplicador de* H_p*.*

(d) Para cada $m \in \mathbf{N}$*, existen* $l \in \mathbf{N}$ *y funciones continuas* f_j*,* $j = 0, 1, ..., l$*, tales que*

$$T = \sum_{j=0}^{l} \Delta^{*j} f_j,$$

y, para cada $j = 0, 1, ..., l$*,* $(1+x)^m \varphi_0^{-2/p}(x) f_j$ *es acotada sobre* $(0, \infty)$*.*

■

Capítulo 4

La transformación de Chébli–Trimèche sobre espacios de tipo W.

4.1 Introducción.

En este capítulo estudiamos el comportamiento de la transformación de Chébli–Trimèche en espacios de tipo W.

Los espacios W fueron introducidos por B.L. Gurevich ([66]). I.M. Gelfand y G.E. Shilov ([57]) presentaron las propiedades fundamentales de los espacios W y analizaron la transformación de Fourier euclídea sobre estos espacios. En [47] (véase también [90]), S.J.L. Eijndhoven y M.J. Kerkhof investigaron la transformación integral de Hankel sobre las funciones pares en W.

Recordamos las definiciones de los espacios de tipo W considerados en [47].

Representamos por $\mathbf{K}$ el conjunto de las funciones $M \in C^2([0,\infty))$ tales que $M(0) = M'(0) = 0,\ M'(\infty) = \infty$ y $M''(x) > 0,\ x \in (0,\infty)$. Si $M \in \mathbf{K},\ M^\times$ denota la función dual de Young de M. Las principales propiedades de las funciones de $\mathbf{K}$ pueden encontrarse en [47] y [57, Chapter 1]. En particular, serán muy útiles las siguientes:

(i) $M(x) + M(y) \leq M(x+y), \quad x, y \in [0,\infty)$.

(ii) $xy \leq M(x) + M^\times(y), \quad x, y \in [0,\infty)$.

Supongamos que $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. El espacio $W_{M,a}$ está formado por aquellas funciones $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$, pares y tales que, para cada $0 < \alpha < a$ y $l \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in[0,\infty)} e^{M(\alpha x)}\, |D^l\phi(x)| < \infty.$$

$W_{M,a}$ se dota de la topología generada por la familia $\{p_{n,l}\}_{n,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas, donde

$$p_{n,l}(\phi) = \sup_{x\in[0,\infty)} e^{M(a\frac{n}{n+1}x)}\, |D^l\phi(x)|, \quad \phi \in W_{M,a},\ n,l \in \mathbf{N}.$$

De este modo $W_{M,a}$ es un espacio de Fréchet.

El espacio $W_{M,a}$ está continuamente contenido en el espacio $S_p,\ 0<p\leq 2$, introducido por W. Bloom y Z. Xu ([33]). En efecto, sean $m\in\mathbf{N}$ y $\alpha\in(0,a)$. En virtud de [33, Lemma 3.4, (iii)] y [47, Lemma 2.4], se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-M(\alpha x)}\ (1+x)^m\ \varphi_0^{-2/p}(x) &\leq e^{-M(\alpha x)+2\rho\frac{x}{p}}\ (1+x)^m \\ &\leq e^{M^\times(\frac{k}{\alpha})-\left(k-\frac{2\rho}{p}\right)x}\ (1+x)^m\leq c,\quad x\in(0,\infty), \end{aligned}$$

donde $k\in\mathbf{N}$ se escoge de manera que $k>\frac{2\rho}{p}$.

Por tanto, de [33, Theorem 4.27] se deduce que, para cada $\phi\in W_{M,a},\ \mathcal{F}\phi\in H_p$ y

$$\phi(x)=\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ (\mathcal{F}\phi)(x)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

El espacio $W^{M,a}$ lo constituyen las funciones enteras y pares Φ tales que, para cada $\beta>a$ y $l\in\mathbf{N}$,

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta|\mathrm{Im}z|)}\ |z^{2l}\Phi(z)|<\infty.$$

$W^{M,a}$ es un espacio de Fréchet cuando se considera sobre él la topología generada por la familia $\{q_{n,l}\}_{n,l\in\mathbf{N}}$ de seminormas, donde, para cada $n,l\in\mathbf{N}$,

$$q_{n,l}(\Phi)=\sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(a\frac{n+2}{n+1}|\mathrm{Im}z|)}\ |z^{2l}\Phi(z)|,\quad \Phi\in W^{M,a}.$$

El espacio $W^{M,a}$ está continuamente contenido en el espacio $H_p,\ 0<p\leq 2$, de W. Bloom y Z. Xu ([33]). Ciertamente, sean $0<p\leq 2$ y $\Phi\in W^{M,a}$. Ya que Φ es entera, podemos escribir, para cada $n,m\in\mathbf{N}$,

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^m\Phi(\lambda))=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\frac{\omega^m\Phi(\omega)}{(\omega-\lambda)^{n+1}}\ d\omega,\quad \lambda\in\mathbf{C},$$

donde C_λ representa la circunferencia centrada en λ y de radio 1, orientada positivamente. Por tanto, para cada $m,n\in\mathbf{N}$, se tiene

$$\begin{gathered} \left|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^m\Phi(\lambda))\right|\leq c\left|\int_{C_\lambda}\frac{\omega^m\Phi(\omega)}{(\omega-\lambda)^{n+1}}\ d\omega\right| \\ \leq c\ \sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(2a|\mathrm{Im}z|)}\ |z|^m\ |\Phi(z)|,\quad \lambda\in\Omega_p. \end{gathered}$$

Recordemos que $\Omega_p=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ |\mathrm{Im}\lambda|\leq\rho\left(\frac{2}{p}-1\right)\}$.

En particular,

$$\left|\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi(\lambda)\right|\leq c\ \sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(2a|\mathrm{Im}z|)}\ |\Phi(z)|,\quad \lambda\in\Omega_p.$$

Supongamos que, siendo $l, k \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$\left|\lambda^j \frac{d^i}{d\lambda^i}\Phi(\lambda)\right| \leq c \sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(2a|\mathrm{Im} z|)}\ (1+|z|)^j\ |\Phi(z)|,$$
$$\lambda \in \Omega_p,\ j = 0, 1, ..., k,\ i = 0, 1, ..., l.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left|\lambda^{k+1}\ \frac{d^l}{d\lambda^l}\Phi(\lambda)\right| &\leq \left|\frac{d^l}{d\lambda^l}(\lambda^{k+1}\Phi(\lambda))\right| + \sum_{j=0}^{l-1}\binom{l}{j}\left|\frac{d^{l-j}}{d\lambda^{l-j}}\lambda^{k+1}\right|\left|\frac{d^j}{d\lambda^j}\Phi(\lambda)\right| \\ &\leq c\left(\left|\frac{d^l}{d\lambda^l}(\lambda^{k+1}\Phi(\lambda))\right| + \sum_{j=0}^{l-1}|\lambda|^{k+1-l+j}\left|\frac{d^j}{d\lambda^j}\Phi(\lambda)\right|\right) \\ &\leq c \sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(2a|\mathrm{Im} z|)}\ (1+|z|)^{k+1}\ |\Phi(z)|, \quad \lambda\in\Omega_p.\end{aligned}$$

Este proceso inductivo nos permite concluir que, para cada $n, m \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{\lambda\in\Omega_p}\left|\lambda^n\ \frac{d^m}{d\lambda^m}\Phi(\lambda)\right| \leq c \sup_{z\in\mathbf{C}} e^{-M(2a|\mathrm{Im} z|)}\ (1+|z|)^n\ |\Phi(z)|.$$

Por tanto, [33, Theorem 4.27] implica que, para cada $\Phi \in W^{M,a}$, la función ϕ definida por

$$\phi(x) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \Phi(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

está en S_p, $0 < p \leq 2$ y $\mathcal{F}\phi = \Phi$.

Los espacios de tipo S fueron considerados por I.M. Gelfand y G.E. Shilov ([56]) y se reducen en algunos casos a espacios W.

Si $\alpha > 0$ y $A > 0$, el espacio $S_{\alpha,A}$ está constituido por aquellas funciones pares $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ verificando

$$\sup_{x\in\mathbf{R},\ k\in\mathbf{N}} \frac{\left|x^k D^m\phi(x)\right|}{(A+\delta)^k k^{k\alpha}} < \infty,$$

para cada $\delta > 0$ y $m \in \mathbf{N}$.

$S_{\alpha,A}$ coincide con el espacio $W_{M,a}$ cuando $a = \frac{1}{Ae^\alpha}$ y $M(x) = \alpha x^{1/\alpha}$, $x \in (0,\infty)$, siempre que $0 < \alpha < 1$ [56, pág. 172].

Para cada $\beta > 0$ y $B > 0$, el espacio $S^{\beta,B}$ lo forman las funciones pares $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tales que, para cada $\xi > 0$ y $k \in \mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbf{R},\ m\in\mathbf{N}} \frac{\left|x^k D^m\phi(x)\right|}{(B+\xi)^m m^{m\beta}} < \infty.$$

Cuando $M(x) = (1-\beta)x^{1/(1-\beta)}$, $x > 0$ y $0 < \beta < 1$, y $a = Be^\beta$, el espacio $W^{M,a}$ coincide con $S^{\beta,B}$ [56, pág. 210].

4.2 La transformación de Chébli–Trimèche en espacios de tipo W.

Analizamos ahora el comportamiento de la transformación $\mathcal{F}$ de Chébli–Trimèche en los espacios W.

Comenzamos presentando una propiedad para la función φ_λ, $\lambda \in \mathbf{C}$, que nos será útil en lo que sigue.

Lema 4.1 *Para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $c > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi_\lambda(x)\right| \leq c\ (1+x)^{n+1}\ e^{(|Im\lambda|-\rho)x}, \quad x \in [0,\infty),\ \lambda \in \mathbf{C}.$$

Demostración.

Esta propiedad puede ser probada como [33, Lemma 3.4, (iv)], aunque allí la desigualdad fue establecida para $|\mathrm{Im}\lambda| < \rho$.

■

Proposición 4.2 *Sean $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. Entonces la transformación de Chébli–Trimèche define una aplicación continua de $W_{M,a}$ en $W^{M^\times,1/a}$.*

Demostración.

Sea $\phi \in W_{M,a}$ y definimos $\Phi = \mathcal{F}\phi$. La función Φ es holomorfa en $\mathbf{C}$. En efecto, de acuerdo con el Lema 4.1 y [33, (3.5)], para cierto $\beta > 0$ podemos escribir

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi_\lambda(x)\right| |\phi(x)|\ A(x)\ dx \leq c \int_0^\infty (1+x)^\beta\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|+\rho)x}\ |\phi(x)|\ dx$$

$$\leq c \int_0^\infty (1+x)^\beta\ e^{M\left(\frac{ax}{4}\right)}\ |\phi(x)|\ dx$$

$$\leq c \int_0^\infty (1+x)^\beta\ e^{-M\left(\frac{ax}{4}\right)}\ dx \sup_{x\in[0,\infty)} e^{M\left(\frac{ax}{2}\right)}\ |\phi(x)|, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Nótese que la última integral es finita, ya que

$$M\left(\frac{ax}{4}\right) \geq -M^\times\left(\frac{4}{a}\right) + x, \quad x \in (0,\infty).$$

Esta propiedad ([47, Lemma 2.4]) fue usada también en la segunda desigualdad.

Sea $n \in \mathbf{N}$. Al ser $\phi \in S_p$, para cada $0 < p \leq 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda^{2n}\Phi(\lambda) &= (\lambda^2+\rho^2-\rho^2)^n\ \Phi(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-\rho^2)^{n-j}\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\Delta^j\phi(x)\ A(x)dx,\ \lambda \in \mathbf{C}. \quad (4.1)\end{aligned}$$

Fijado $j \in \mathbf{N}$, a tenor de [33, Lemma 4.18, (ii)], existen $\delta > 0$ y $s_j \in \mathbf{N}$, tal que para cada $x \in (0, \delta)$ podemos encontrar $\chi_l \in (0, x)$, $l = 0, 1, ..., s_j$, de modo que

$$\left|\Delta^j \phi(x)\right| \leq c \sum_{i=1}^{2j} \left(\sum_{l=0}^{s_j} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(\chi_l) \right| + \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right| \right).$$

Por tanto, el Lema 4.1 nos lleva, para cada $\alpha > 1$, a

$$\int_0^\delta \left|\varphi_\lambda(x)\ \Delta^j \phi(x)\right|\ A(x)\ dx$$

$$\leq c \int_0^\delta e^{(|\mathrm{Im}\lambda| - \rho)x} (1+x) A(x) \sum_{i=1}^{2j} \left(\sum_{l=0}^{s_j} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(\chi_l) \right| + \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right| \right) dx$$

$$\leq c\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \sum_{i=1}^{2j} \sup_{x \in (0,\infty)} e^{M\left(\frac{a}{\alpha}x\right)} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|, \quad \lambda \in \mathbf{C}. \tag{4.2}$$

Aquí c no depende de ϕ. Nótese que δ tampoco depende de ϕ ([33, pág. 97]).

Además, teniendo en cuenta [33, Lemma 4.18, (iii), y (3.5)] obtenemos

$$\int_\delta^\infty \left|\varphi_\lambda(x)\ \Delta^j \phi(x)\right|\ A(x)\ dx$$

$$\leq c \sum_{i=1}^{2j} \int_\delta^\infty e^{(|\mathrm{Im}\lambda| + \rho)x}\ (1+x)^\beta\ \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|\ dx$$

$$\leq c\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \sum_{i=1}^{2j} \int_\delta^\infty e^{M\left(\frac{a}{\alpha}x\right)}\ e^{M\left(\frac{\alpha-1}{4\alpha}ax\right)}\ (1+x)^\beta\ \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|\ dx$$

$$\leq c\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \sum_{i=1}^{2j} \sup_{x \in (0,\infty)} e^{M\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}ax\right)} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|, \quad \lambda \in \mathbf{C}. \tag{4.3}$$

para cada $\alpha > 1$ y para cierto $\beta > 0$.

Combinando ahora (4.1), (4.2) y (4.3) podemos concluir que si $\alpha > 1$ y $n \in \mathbf{N}$, existe $c > 0$ verificando

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{C}} e^{-M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2n} \Phi(\lambda)\right| \leq c \sum_{i=1}^{2n} \sup_{x \in (0,\infty)} e^{M\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}ax\right)} \left| \frac{d^i}{dx^i} \phi(x) \right|.$$

De este modo probamos que la transformación de Chébli–Trimèche es continua de $W_{M,a}$ en $W^{M^\times, 1/a}$.

$\blacksquare$

Proposición 4.3 *Sean $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. Entonces la aplicación $\mathcal{G}$ definida por*

$$\mathcal{G}(\Phi)(x) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \Phi(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

es continua de $W^{M,a}$ en $W_{M^\times,1/a}$.

Demostración.
Para probar este resultado adaptamos un argumento desarrollado por J.P. Anker ([2]) en su investigación sobre la transformación de Fourier esférica asociada a cierta clase de espacios de Lie semisimples.

Sea $\Phi \in W^{M,a}$ y definimos $\phi = \mathcal{G}\Phi$. Consideramos también la función $\psi = \mathcal{F}_0^{-1}(\Phi)$, donde $\mathcal{F}_0$ representa la transformación de Fourier euclídea sobre $\mathbf{R}$, esto es,

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\ \Phi(y)\ dy, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Fijamos $l \in \mathbf{N}$ y $\alpha \in (0,1)$. Atendiendo a [33, Lemma 3.6, (ii)] podemos escribir

$$\left|\frac{d^l}{dx^l}\phi(x)\right| \leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x}\int_0^\infty \left|\lambda^2+\rho^2\right|^m\ |\Phi(\lambda)|\ \frac{d\lambda}{|c(\lambda)|^2}, \quad x \in (0,\infty),$$

para una cierta $m \in \mathbf{N}$. Además, de [109, pág. 99] se deduce que

$$\left|\frac{d^l}{dx^l}\phi(x)\right| \leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x}\int_0^\infty \left|\lambda^2+\rho^2\right|^m\ |\Phi(\lambda)|\ \lambda^{2\alpha+1}\ d\lambda$$

$$\leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x}\left(\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^{2s}\Phi(\lambda)\right| + \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ |\Phi(\lambda)|\right),$$

donde $s \in \mathbf{N}$, $s > m+\alpha+1$ y $\beta > 1$. El número β será especificado más adelante.

Por tanto, obtenemos para cada $j \in \mathbf{N}$, $c_j > 0$ tal que

$$\sup_{x\in(0,j+1]} e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}x\right)}\left|\frac{d^l}{dx^l}\phi(x)\right|$$

$$\leq c_j\left(\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\left|\lambda^{2s}\Phi(\lambda)\right| + \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\left|\Phi(\lambda)\right|\right). \tag{4.4}$$

Elegimos ahora una sucesión $(\omega_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de funciones verificando
(i) $\omega_j \in C^\infty(\mathbf{R})$ es par, para cada $j \in \mathbf{N}$,
(ii) $\omega_j(x) = 1$, $|x| \leq j$, y $\omega_j(x) = 0$, $|x| > j+1$, para cada $j \in \mathbf{N}$,
(iii) para cada $k \in \mathbf{N}$, existe $c_k > 0$ tal que $\left|\frac{d^k\omega_j(x)}{dx^k}\right| \leq c_k$, $x \in \mathbf{R}$ y $j \in \mathbf{N}$.
Consideramos la siguiente descomposición de ψ:

$$\psi = \omega_j\psi + (1-\omega_j)\psi,$$

para cada $j \in \mathbf{N}$. Definimos las funciones ψ_j, Φ_j y ϕ_j como sigue

$$\psi_j = (1-\omega_j)\psi,\ \Phi_j = \mathcal{F}_0\psi_j,\ \phi_j = \mathcal{G}\Phi_j, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Nótese que $\omega_j\psi(x) = 0,\ |x| \geq j+1,\ j \in \mathbf{N}$. Por tanto, recurriendo a [33, Lemma 4.11], ya que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0\mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ denota la transformada de Abel definida en [33, (4.9)], se sigue que

$$\phi(x) = \phi_j(x), \quad |x| \geq j+1,\ j \in \mathbf{N}.$$

En efecto, sea $j \in \mathbf{N}$. Se tiene que

$$(\phi-\phi_j)(x) = \mathcal{G}(\Phi-\Phi_j)(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F}_0(\psi)-\mathcal{F}_0(\psi_j))(x) = \mathbf{A}^{-1}(\psi-\psi_j)(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Al ser $(\psi-\psi_j)(x) = 0,\ |x| \geq j+1$, de [33, Lemma 4.10, (ii)] se infiere que $\phi(x) = \phi_j(x),\ |x| \geq j+1$.

Fijamos ahora $j \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. Procediendo como antes obtenemos

$$\sup_{j+1\leq x\leq j+2} e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}x\right)} \left|\frac{d^l}{dx^l}\phi(x)\right| \leq c\ (j+2)^3\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}(j+2)\right)-\rho j}\ .$$

$$\cdot\left(\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^{2s}\Phi_j(\lambda)\right| + \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ |\Phi_j(\lambda)|\right) \tag{4.5}$$

Integrando por partes, se sigue

$$\lambda^{2s}\Phi_j(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\ \frac{d^{2s}}{dt^{2s}}\psi_j(t)\ dt, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

teniendo en cuenta que $\psi \in W_{M^\times,1/a}$ ([57, Theorem 2, pág. 21]).

Supongamos que $\delta > 1$ tal que $\alpha\delta < 1$. En virtud de [57, Theorem 1, pág. 20] conseguimos

$$\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^{2s}\Phi_j(\lambda)\right| \leq c \sup_{t\in(0,\infty)} e^{M^\times\left(\frac{\gamma}{a}t\right)} \left|\frac{d^{2s}}{dt^{2s}}\psi_j(t)\right|,$$

donde $0 < \gamma < 1$ depende de β. En un análisis cuidadoso de la demostración de [57, Theorem 1, pág. 20] podemos ver que β puede ser elegido de manera que $\alpha\delta + \gamma < 1$.

Entonces, las propiedades de ω_j nos conducen a

$$\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^{2s}\Phi_j(\lambda)\right| \leq c\sum_{l=0}^{2s}\sup_{t\geq j} e^{M^\times\left(\frac{\gamma}{a}t\right)}\left|\frac{d^l}{dt^l}\psi(t)\right|.$$

Aprovechando el crecimiento de la función $M^\times$ obtenemos

$$(j+2)^3\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}(j+2)\right)-\rho j} \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^{2s}\Phi_j(\lambda)\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq (j+2)^3\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha\delta}{a}j\right)-\rho j} \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\beta a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^{2s}\Phi_j(\lambda)\right| \\
&\leq c\sum_{l=0}^{2s}\sup_{t\geq j} t^3\ e^{M^\times\left(\frac{\alpha\delta}{a}t\right)+M^\times\left(\frac{\gamma}{a}t\right)-\rho t}\left|\frac{d^l}{dt^l}\psi(t)\right| \\
&\leq c\sum_{l=0}^{2s}\sup_{t\in(0,\infty)} e^{M^\times\left(\frac{\alpha\delta+\gamma}{a}t\right)}\left|\frac{d^l}{dt^l}\psi(t)\right|, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

siempre que $j\in\mathbf{N}$ sea suficientemente grande.

Se concluye de [57, Theorem 2, pág. 21] que

$$\sup_{t\in(0,\infty)} e^{M^\times\left(\frac{\alpha\delta+\gamma}{a}t\right)}\left|\frac{d^l}{dt^l}\psi(t)\right| \leq c\sum_{k=0}^{p}\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M(\varepsilon a|\mathrm{Im}\lambda|)}\ \left|\lambda^k\Phi(\lambda)\right|, \qquad (4.7)$$

para cada $l=0,1,...,2s$, y para cierto $\varepsilon>1$.

Combinando ahora (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7) probamos que la transformación $\mathcal{G}$ aplica continuamente $W^{M,a}$ en $W_{M^\times,1/a}$.

■

Una consecuencia inmediata de las Proposiciones 4.2 y 4.3 junto a [33, Theorem 4.27] es la que sigue

Corolario 4.4 *Sean $M\in\mathbf{K}$ y $a>0$. Entonces la transformación de Chébli–Trimèche es un isomorfismo de $W_{M,a}$ sobre $W^{M^\times,1/a}$.*

■

Un caso particular del Corolario 4.4 es el que presentamos ahora.

Corolario 4.5 *Si $0<\alpha<1$ y $A>0$, la transformación de Chébli–Trimèche es un isomorfismo de $S_{\alpha,A}$ sobre $S^{\alpha,A}$.*

■

Es un problema aún no tratado el análisis de la transformación de Chébli–Trimèche sobre el espacio $W^{M,a}$, con $M\in\mathbf{K}$ y $a>0$. El trabajo de A. Pasquale [89], donde estudia teoremas de tipo Paley–Wiener para la inversa de la transformación de Jacobi, que es un caso particular de la transformación que nos ocupa, recoge ideas interesantes que pensamos que pueden ser de utilidad en la investigación del problema abierto citado.

Inspirados en los estudios de R.S. Pathak y S.K. Upadhyay ([91]), J.J. Betancor y L. Rodríguez–Mesa ([29]) obtuvieron nuevas caracterizaciones de los espacios W por medio del operador de Bessel. Nuestro próximo objetivo es describir el espacio $W_{M,a}$ mediante el operador Δ.

Sea $1\leq q\leq\infty$. Diremos que una función par $\phi\in C^\infty(\mathbf{R})$ está en $W^{q,\Delta}_{M,a}$ si, y sólo si, $e^{\rho x}(1+x)^{1+\beta}\frac{d^j}{dx^j}\Delta^m\phi(x)\to 0$, cuando $x\to\infty$, para cada $m\in\mathbf{N}$ y $j=0,1$, donde $\beta>0$ es la constante positiva que aparece en [33, (3.5)], esto es, $\beta>0$ es tal que

$$A(x)\leq A(1)\ x^\beta\ e^{2\rho x}, \quad \text{cuando } x \text{ es grande,}$$

y se verifica que

$$\alpha_{m,n}^{q,\Delta}(\phi) = \left\| e^{M\left(a\frac{n}{n+1}x\right)}\ \Delta^m \phi \right\|_{L_q((0,\infty),dx)} < \infty,$$

para cada $m, n \in \mathbf{N}$. Sobre $W_{M,a}^{q,\Delta}$ consideramos la topología asociada a la familia $\{\alpha_{m,n}^{q,\Delta}\}_{m,n\in\mathbf{N}}$ de seminormas.

Proposición 4.6 *Sea $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. Para cada $1 \leq q \leq \infty$, $W_{M,a}^{q,\Delta} = W_{M,a}$, donde la igualdad es algebraica y topológica.*

Demostración.

Sea $1 \leq q \leq \infty$. Supongamos que $\phi \in W_{M,a}$ y $m, n \in \mathbf{N}$. A la vista de [33, Lemma 4.18] podemos escribir, para ciertos $c, \delta > 0$, que no dependen de ϕ,

$$e^{M\left(a\frac{n}{n+1}x\right)}\ |\Delta^m \phi(x)| \leq c \sum_{j=1}^{2m} e^{M\left(a\frac{n}{n+1}x\right)} \left| \frac{d^j}{dx^j}\phi(x) \right|, \quad x \in (\delta, \infty),$$

y

$$e^{M\left(a\frac{n}{n+1}x\right)}\ |\Delta^m \phi(x)|$$
$$\leq c \sum_{i=1}^{2m} \left(\sum_{j=1}^{s_m} e^{M\left(a\frac{n}{n+1}\chi_j\right)} \left| \frac{d^i}{dx^i}\phi(\chi_j) \right| + e^{M\left(a\frac{n}{n+1}x\right)} \left| \frac{d^i}{dx^i}\phi(x) \right| \right), \quad x \in [0, \delta],$$

para ciertos $s_m \in \mathbf{N}$ y $\chi_j = \chi_j(x, m) \in [0, x]$, $j = 1, 2, ..., s_m$.

Por tanto se deduce que

$$\begin{aligned}
\alpha_{m,n}^{q,\Delta}(\phi) &\leq c \sum_{i=1}^{2m} p_{n+1,i}(\phi) \left(\int_\delta^\infty e^{\left(M\left(a\frac{n}{n+1}x\right) - M\left(a\frac{n+1}{n+2}x\right)\right)q} dx + 1 \right) \\
&\leq c \sum_{i=1}^{2m} p_{n+1,i}(\phi) \left(\int_\delta^\infty e^{-M\left(a\frac{1}{(n+1)(n+2)}x\right)q} dx + 1 \right) \\
&\leq c \sum_{i=1}^{2m} p_{n+1,i}(\phi) \left(\int_\delta^\infty e^{-lx} dx + 1 \right) \\
&\leq c \sum_{i=1}^{2m} p_{n+1,i}(\phi).
\end{aligned}$$

Aquí l representa una adecuada constante positiva, que surge de las propiedades de la función $M \in \mathbf{K}$.

Además, procediendo como en la prueba de [33, Lemma 4.18, (iii)], podemos ver que

$$\left| \frac{d}{dx}\Delta^m \phi(x) \right| \leq c \sum_{j=1}^{2m+1} \left| \frac{d^j}{dx^j}\phi(x) \right|, \quad x \in (\delta, \infty). \tag{4.8}$$

Entonces, de [47, Lemma 2.4] y (4.8) se obtiene,

$$e^{\rho x}\ (1+x)^{\beta+1}\left|\frac{d}{dx}\Delta^m\phi(x)\right| \leq c\sum_{j=1}^{2m+1}\left|\frac{d^j}{dx^j}\phi(x)\right|\ e^{M\left(\frac{xa}{4}\right)+M^{\times}\left(\frac{\rho 4}{a}\right)}\ (1+x)^{\beta+1}$$

$$\leq c\sum_{j=1}^{2m+1} e^{M\left(\frac{ax}{2}\right)}\left|\frac{d^j}{dx^j}\phi(x)\right| e^{-M\left(\frac{xa}{4}\right)}\ (1+x)^{\beta+1}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\sup_{t\in(0,\infty)} e^{M\left(\frac{at}{2}\right)}\left|\frac{d^j}{dt^j}\phi(t)\right|\right) e^{-lx}\ (1+x)^{\beta+1}\to 0, \quad \text{cuando } x\to\infty.$$

Aquí l es un número positivo que aparece teniendo en cuenta, como antes, las propiedades de M.

Probamos de este modo que $W_{M,a}$ está continuamente contenido en $W_{M,a}^{q,\Delta}$.

Supongamos ahora que $\phi\in W_{M,a}^{q,\Delta}$ y definamos $\Phi=\mathcal{F}\phi$. La integración parcial nos permite escribir

$$\lambda^2\Phi(\lambda)=\int_0^\infty \Delta_x(\varphi_\lambda(x))\ \phi(x)\ A(x)\ dx-\rho^2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx$$

$$=\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \Delta\phi(x)\ A(x)\ dx-\rho^2\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \phi(x)\ A(x)\ dx, \quad \lambda\in(0,\infty).$$

Hemos tenido en cuenta que, al ser $\phi\in W_{M,a}^{q,\Delta}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\varphi_\lambda(x)\right)\ \phi(x)\ A(x)=\lim_{x\to 0}\varphi_\lambda(x)\ \frac{d}{dx}\left(\phi(x)\right)\ A(x)=0, \quad \lambda\in(0,\infty). \tag{4.9}$$

y

$$\lim_{x\to \infty}\frac{d}{dx}\left(\varphi_\lambda(x)\right)\ \phi(x)\ A(x)=\lim_{x\to \infty}\varphi_\lambda(x)\ \frac{d}{dx}\left(\phi(x)\right)\ A(x)=0, \quad \lambda\in(0,\infty). \tag{4.10}$$

Las igualdades en (4.9) se siguen de que $A(0)=0$. Por otra parte, de la Proposición 3.1 junto a [33, Lemma 3.4 y (3.5)], al ser $\lim_{x\to\infty}e^{\rho x}(1+x)^{1+\beta}\frac{d^j}{dx^j}\phi(x)=0$, $j=0,1$, se deduce que (4.10) es cierto.

Iterando este argumento, para cada $n\in\mathbf{N}$, se tiene que

$$\lambda^{2n}\Phi(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-\rho^2)^{n-j}\int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\ \Delta^j(\phi(x))\ A(x)\ dx, \quad \lambda\in(0,\infty). \tag{4.11}$$

Además, procediendo como en la prueba de la Proposición 4.2 puede verse que los dos términos de la igualdad (4.11) definen funciones holomorfas en $\mathbf{C}$. Por tanto, la igualdad en (4.11) es válida para cada $\lambda\in\mathbf{C}$.

De (4.11), si $n \in \mathbf{N}$ y $\alpha > 1$, concluimos que

$$\left|\lambda^{2n}\Phi(\lambda)\right| \leq c\sum_{j=0}^{n}\int_0^\infty e^{(|\mathrm{Im}\lambda|+\rho)x}\,(1+x)^\beta\,\left|\Delta^j\phi(x)\right|\,dx$$

$$\leq c\,e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\sum_{j=0}^{n}\int_0^\infty e^{M\left(\frac{a}{\alpha}x\right)+M\left(\frac{\alpha-1}{4\alpha}ax\right)}\,(1+x)^\beta\,\left|\Delta^j\phi(x)\right|\,dx$$

$$\leq c\,e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\sum_{j=0}^{n}\int_0^\infty e^{M\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}ax\right)-M\left(\frac{\alpha-1}{4\alpha}ax\right)}\,(1+x)^\beta\,\left|\Delta^j\phi(x)\right|\,dx$$

$$\leq c\,e^{M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\sum_{j=0}^{n}\left\|e^{M\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}ax\right)}\Delta^j\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),dx)},\quad \lambda\in\mathbf{C},$$

donde, como en otras ocasiones, β es la constante positiva de [33, (3.5)].

Luego,

$$\sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M^\times\left(\frac{\alpha}{a}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\,\left|\lambda^{2n}\Phi(\lambda)\right| \leq c\sum_{j=0}^{n}\left\|e^{M\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}ax\right)}\Delta^j\phi(x)\right\|_{L_q((0,\infty),dx)}.$$

De este modo establecemos que la transformación de Chébli–Trimèche aplica continuamente $W_{M,a}^{q,\Delta}$ en $W^{M^\times,1/a}$.

Finalmente, la Proposición 4.3 y [33, Theorem 4.27] permiten concluir que $W_{M,a}^{q,\Delta}$ está continuamente contenido en $W_{M,a}$.

■

Nótese que la última proposición es una extensión del resultado recogido en [29, Theorem 2.1].

4.3 La convolución $\sharp$ sobre el espacio $W_{M,a}$ y su dual.

Estudiamos ahora la convolución asociada a la transformación integral de Chébli–Trimèche sobre el espacio $W_{M,a}$ y su dual $W'_{M,a}$.

Comenzamos analizando el comportamiento de la traslación τ_x, $x \in (0,\infty)$, sobre los espacios considerados.

Proposición 4.7 *Sean $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. El operador de traslación τ_x define una aplicación lineal y continua de $W_{M,a}$ en sí mismo, para cada $x \in (0,\infty)$.*

Demostración.

Sean $x \in (0,\infty)$ y $\phi \in W_{M,a}$. [33, Theorem 2.4, (i)] nos dice que

$$(\tau_x\phi)(y) = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi_\lambda(x)\mathcal{F}(\phi)(\lambda)\right)(y),\quad y\in(0,\infty).$$

Por tanto, en virtud del Corolario 4.4, la prueba estará completa cuando veamos que la aplicación definida por

$$\Phi \rightarrow \varphi_\lambda(x)\Phi$$

es continua de $W^{M^\times,1/a}$ en sí mismo.

Sea $\Phi \in W^{M^\times,1/a}$. Ya que $\varphi_\lambda(x)$ es una función entera par, $\varphi_\lambda(x)\Phi(x)$ es también entera y par. Además, de [33, Lemma 3.4], para cada $m,n \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
& e^{-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+2}{n+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2m}\ \varphi_\lambda(x)\ \Phi(\lambda)\right| \\
&\leq c\ (1+x)\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|-\rho)x-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+2}{n+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2m}\Phi(\lambda)\right| \\
&\leq c\ (1+x)e^{-\rho x}\ e^{|\mathrm{Im}\lambda|x-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+3}{n+2}|\mathrm{Im}\lambda|\right)+M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+3}{n+2}|\mathrm{Im}\lambda|\right)-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+2}{n+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2m}\Phi(\lambda)\right| \\
&\leq c\ (1+x)\ e^{-\rho x}\ e^{|\mathrm{Im}\lambda|x-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{|\mathrm{Im}\lambda|}{n^2+3n+2}\right)} e^{-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+3}{n+2}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2m}\Phi(\lambda)\right| \\
&\leq c\ (1+x)\ e^{-\rho x+M(xa(n^2+3n+2))}\ e^{-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{n+3}{n+2}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2m}\Phi(\lambda)\right| \\
&\leq c\ (1+x)\ e^{-\rho x+M(xa(n^2+3n+2))}\ q_{n+1,m}(\Phi), \quad \lambda \in \mathbf{C}.
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos conseguido

$$q_{n,m}\left(\varphi_\lambda(x)\Phi(\lambda)\right) \leq c\ (1+x)\ e^{-\rho x+M(xa(n^2+3n+2))}\ q_{n+1,m}(\Phi), \quad m,n \in \mathbf{N}.$$

De este modo completamos la prueba.

■

Estudiamos ahora la convolución $\sharp$ sobre los espacios $W_{M,a}$.

Proposición 4.8 *Sean $M \in \mathbf{K}$ y $a,b > 0$. La aplicación definida por $(\phi,\psi) \rightarrow \phi\sharp\psi$ es bilineal y continua de $W_{M,a} \times W_{M,b}$ en $W_{M,c}$, siendo $c = \frac{ab}{a+b}$.*

Demostración.

Sean $\phi \in W_{M,a}$ y $\psi \in W_{M,b}$. La fórmula de intercambio para la transformación de Chébli–Trimèche ([33, Theorem 2.4, (ii)]) da

$$\mathcal{F}(\phi\sharp\psi) = \mathcal{F}(\phi)\ \mathcal{F}(\psi).$$

Por tanto, el Corolario 4.4 implica que la propiedad enunciada queda probada cuando veamos que la aplicación de multiplicación $(\Phi,\Psi) \rightarrow \Phi\Psi$ es continua de $W^{M,a} \times W^{M,b} \rightarrow W^{M,a+b}$. Sean $m,n \in \mathbf{N}$. Para cada $\Phi \in W^{M,a}$ y $\Psi \in W^{M,b}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
q_{m,n}(\Phi\Psi) &= \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M\left((a+b)\frac{m+2}{m+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2n}\Phi(\lambda)\Psi(\lambda)\right| \\
&\leq \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M\left(a\frac{m+2}{m+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\lambda^{2n}\Phi(\lambda)\right| \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} e^{-M\left(b\frac{m+2}{m+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)} \left|\Psi(\lambda)\right|.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce la continuidad de la aplicación multiplicación citada, y con ello la prueba de la propiedad termina.

$\blacksquare$

La Proposición 4.7 nos permite definir la convolución $T\sharp\phi$ de $T \in W'_{M,a}$ y $\phi \in W_{M,a}$ como sigue

$$(T\sharp\phi)(x) =< T, \tau_x\phi >, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Proposición 4.9 *Sean $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. Si $T \in W'_{M,a}$ y $\phi \in W_{M,a}$, entonces $T\sharp\phi \in E_*$ y, para cada $k \in \mathbf{N}$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que*

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}(T\sharp\phi)(x)\right| \leq c\ e^{M(mx)}, \quad x \in [0,\infty).$$

Demostración.

Sean $T \in W'_{M,a}$ y $\phi \in W_{M,a}$. En virtud de la Proposición 4.6 y recurriendo al teorema de Hahn–Banach y argumentos de dualidad (procediendo como, por ejemplo, en la prueba de la Proposición 2.7), obtenemos para T la representación siguiente

$$< T, \psi >= \sum_{j=0}^{n} \int_0^\infty e^{M\left(a\frac{n}{n+1}y\right)}\ \Delta^j\psi(y)\ f_j(y)\ dy, \quad \psi \in W_{M,a},$$

para ciertas $n \in \mathbf{N}$ y funciones $f_j \in L_\infty((0,\infty), dx),\ j = 0, 1, ..., n$.

En particular, ya que $\Delta(\tau_x\psi)(y) = \tau_x(\Delta\psi)(y),\ x, y \in (0,\infty)$, para cada $\psi \in S_p,\ 0 < p \leq 2$, se sigue que

$$(T\sharp\phi)(x) = \sum_{j=0}^{n} \int_0^\infty e^{M\left(a\frac{n}{n+1}y\right)}\ \tau_x(\Delta^j\phi)(y)\ f_j(y)\ dy, \quad x \in (0,\infty). \qquad (4.12)$$

La función $T\sharp\phi$ es par, al ser $\tau_y,\ y \in (0,\infty)$, y Δ^j aplicaciones continuas de S_p en $S_p,\ 0 < p \leq 2$, espacio cuyas funciones son pares.

Veamos ahora que la aplicación definida por

$$\Phi \to \frac{d^k}{dx^k}(\varphi_\lambda(x))\Phi(x),$$

es continua de $W^{M^\times,1/a}$ en sí mismo, para cada $x \in (0,\infty)$ y $k \in \mathbf{N}$.

Sean $x \in (0,\infty)$ y $k \in \mathbf{N}$. A tenor de [33, Lemma 3.6, (ii)] tenemos que, para cierta $m \in \mathbf{N}$,

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\varphi_\lambda(x)\right| \leq c\ (1+x)^3\ (|\lambda|^2+\rho^2)^m\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|-\rho)x}, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Por tanto, si $s, l \in \mathbf{N}$, para cada $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$e^{-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{s+2}{s+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\left|\lambda^{2l}\ \Phi(\lambda)\ \frac{d^k}{dx^k}\varphi_\lambda(x)\right|$$

$$\leq c\ (1+x)^3\ e^{(|\mathrm{Im}\lambda|-\rho)x-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{s+2}{s+1}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\ (|\lambda|^2+\rho^2)^m\ \left|\lambda^{2l}\ \Phi(\lambda)\right|$$

$$\leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x+M(ax(s^2+3s+2))}\ e^{-M^\times\left(\frac{1}{a}\frac{s+3}{s+2}|\mathrm{Im}\lambda|\right)}\ (|\lambda|^2+\rho^2)^m\ \left|\lambda^{2l}\ \Phi(\lambda)\right| \tag{4.13}$$

Concluimos que, para cada $s, l \in \mathbf{N}$,

$$q_{s,l}\left(\frac{d^k}{dx^k}(\varphi_\lambda(x))\ \Phi(\lambda)\right) \leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x+M(ax(s^2+3s+2))} \sum_{j=0}^{m} q_{s+1,l+j}(\Phi).$$

Probamos así que la aplicación definida por $\Phi \to \frac{d^k}{dx^k}(\varphi_\lambda(x))\Phi(\lambda)$, es continua de $W^{M^\times,1/a}$ en sí mismo.

Teniendo en cuenta el Corolario 4.4 establecemos que la aplicación

$$\phi \to \frac{d^k}{dx^k}(\tau_x(\phi)),$$

es continua de $W_{M,a}$ en sí mismo, para cada $k \in \mathbf{N}$ y $x \in (0,\infty)$.

Sea $k \in \mathbf{N}$. De (4.12) se sigue, eligiendo $l \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{l} < 1$, que

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}(T\sharp\phi)(x)\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \int_0^\infty e^{M\left(a\frac{n}{n+1}y\right)}\ \left|\frac{d^k}{dx^k}\tau_x(\Delta^j\phi)(y)\right|\ |f_j(y)|\ dy$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \int_0^\infty e^{-M\left(\frac{ay}{l}\right)}\ e^{M\left(a\left(\frac{n}{n+1}+\frac{1}{l}\right)y\right)}\ \left|\frac{d^k}{dx^k}\tau_x(\Delta^j\phi)(y)\right|\ |f_j(y)|\ dy$$

$$\leq c\ (1+x)^3\ e^{-\rho x+M(ax(s^2+3s+2))} \int_0^\infty e^{-M\left(\frac{ay}{l}\right)}\ dy, \quad x \in (0,\infty).$$

para cierto $s \in \mathbf{N}$.

De aquí se deduce ya el resultado deseado.

■

Un resultado de naturaleza análoga a la propiedad enunciada en la última proposición es el siguiente, donde el operador Δ sustituye a $\frac{d}{dx}$.

Proposición 4.10 *Sean $M \in \mathbf{K}$ y $a > 0$. Si $T \in W'_{M,a}$ y $\phi \in W_{M,a}$, entonces $T\sharp\phi \in E_*$ y, para cada $k \in \mathbf{N}$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que*

$$\left|\Delta^k(T\sharp\phi)(x)\right| \leq c\ e^{M(mx)}, \quad x \in [0,\infty).$$

Demostración.

Basta tener en cuenta que, en virtud de (4.12),

$$\Delta^k(T\sharp\phi)(x) = \sum_{j=0}^{n} \int_0^\infty e^{M\left(a\frac{n}{n+1}y\right)}\ \tau_x(\Delta^{j+k}\phi)(y)\ f_j(y)\ dy, \quad x \in [0,\infty),$$

para ciertas $n \in \mathbf{N}$ y $f_j \in L_\infty((0,\infty), dx)$, $j = 0, 1, ..., n$, y recurrir a la Proposición 4.9.

■

Capítulo 5

Hipoelipticidad de operadores de convolución de Jacobi sobre distribuciones de Schwartz.

5.1 Introducción.

En este capítulo se caracteriza la hipoelipticidad de los operadores de convolución de Jacobi sobre distribuciones de Schwartz. Asimismo, estudiamos la hipoelipticidad de ecuaciones de convolución en el marco de los hipergrupos de Chébli–Trimèche.

La motivación para nuestro estudio se encuentra en los trabajos clásicos de L. Ehrenpreis ([44]) y L. Hörmander ([72]), y los más recientes de J. Bonet, C. Fernández y R. Meise ([35]) y M. Belhadj y J.J. Betancor ([9]).

El análisis armónico asociado al operador de Jacobi $\Delta_{\alpha,\beta}$ dado por

$$\Delta_{\alpha,\beta} = \frac{1}{A_{\alpha,\beta}(t)} \frac{d}{dt} \left(A_{\alpha,\beta}(t) \frac{d}{dt} \right),$$

donde $A_{\alpha,\beta}(t) = 2^{2(\alpha+\beta+1)} (\sinh t)^{2\alpha+1} (\cosh t)^{2\beta+1}$, $t \in [0, \infty)$, y $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, fue desarrollado inicialmente por M. Flensted–Jensen y T.H. Koorwinder ([49], [50], [51] y [77]). Nótese que el operador de Jacobi es un caso particular del operador de Chébli–Trimèche.

Para cada $\alpha > -1/2$ y $\beta \in \mathbf{R}$, la función de Jacobi $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ está definida por

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}(\rho + i\lambda), \frac{1}{2}(\rho - i\lambda); \alpha + 1; -\sinh^2 t \right), \quad t \in [0, \infty), \ \lambda \in \mathbf{C},$$

donde $\rho = \alpha + \beta + 1$ y ${}_2F_1$ representa, como es usual, la función hipergeométrica de Gauss. Como se sabe $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ es una función $C^\infty(\mathbf{R})$, par, que satisface el siguiente problema de valor inicial

$$\Delta_{\alpha,\beta}u + (\lambda^2 + \rho^2)u = 0, \quad u(0) = 1 \text{ y } u'(0) = 0. \tag{5.1}$$

La transformación de Jacobi viene dada como sigue

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t)\ \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

cuando, por ejemplo, f está en el espacio de Lebesgue $L_1((0,\infty), A_{\alpha,\beta}(t)dt)$. En [49] M. Flensted–Jensen estableció un teorema de Paley–Wiener para la transformación $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$. Probó que la transformación de Jacobi es un isomorfismo de $\mathcal{D}_*$ sobre H_*. La aplicación inversa $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}$ de la transformación $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ es

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F(\lambda)\ \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(x)\ \frac{d\lambda}{|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

siendo

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\rho - i\lambda}\ \Gamma(i\lambda)\ \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{\rho+i\lambda}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\rho+i\lambda}{2} - \beta\right)}, \quad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{mi:\ m \in \mathbf{N}\}.$$

Procediendo como en las pruebas de [89, Theorems 2.1 y 2.2] puede mostrarse un teorema tipo Paley–Wiener para la transformación $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{-1}$.

Para valores particulares de α y β las funciones de Jacobi pueden ser interpretadas como funciones esféricas sobre espacios simétricos no compactos de rango real 1 y, en esos casos, la transformación de Jacobi se reduce a la correspondiente transformada de Fourier esférica (véase, por ejemplo, [77]).

El operador de traslación en el marco de Jacobi fue considerado por M. Flensted–Jensen y H. Koorwinder ([51]). La trasladada de Jacobi $\tau_x^{\alpha,\beta} f$ de $f \in L_1((0,\infty), A_{\alpha,\beta}(x)dx)$ por $x \in (0,\infty)$, se define por

$$(\tau_x^{\alpha,\beta} f)(y) = \int_0^\infty f(z)\ K(x,y,z)\ A_{\alpha,\beta}(z)\ dz, \quad x, y \in (0,\infty),$$

y $\tau_0^{\alpha,\beta} f = f$, donde

$$K(x,y,z) = \frac{2^{-\rho}\ \Gamma(\alpha+1)(\cosh x \cosh y \cosh z)^{\alpha-\beta-1}}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ (\sinh x \sinh y \sinh z)^{2\alpha}}\ (1 - B^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$\cdot\ {}_2F_1(\alpha+\beta, \alpha-\beta; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(1-B)),$$

cuando $|x-y| < z < x+y,\ x, y \in (0,\infty)$; y $K(x,y,z) = 0$, en otro caso. Aquí

$$B = \frac{(\cosh x)^2 + (\cosh y)^2 + (\cosh z)^2 - 1}{2 \cosh x \cosh y \cosh z}, \quad x, y, z \in (0,\infty).$$

La convolución de Jacobi $f\sharp_{\alpha,\beta}g$ de $f, g \in L_1((0,\infty), A_{\alpha,\beta}(x)dx)$ es dada entonces por

$$(f\sharp_{\alpha,\beta}g)(x) = \int_0^\infty f(y)\ (\tau_x^{\alpha,\beta}g)(y)\ A_{\alpha,\beta}(y)\ dy, \quad x \in (0,\infty).$$

Recientemente, J. Liu ([80]) ha investigado funciones maximales en el contexto de Jacobi que incluyen la convolución $\sharp_{\alpha,\beta}$.

Para cada $x \in [0,\infty)$, el operador $\tau_x^{\alpha,\beta}$ define una aplicación continua de E_* en sí mismo ([105, Proposition 8.3]) y de $\mathcal{D}_*$ en sí mismo ([105, Corollaire 8.2]).

Si $T \in \mathcal{D}'_*$ (respectivamente, E'_*) y $\phi \in \mathcal{D}_*$ (respectivamente, E_*) la convolución $T\sharp_{\alpha,\beta}\phi$ de T y ϕ se define por

$$(T\sharp_{\alpha,\beta}\phi)(x) = < T, \tau_x^{\alpha,\beta}\phi >, \quad x \in [0,\infty).$$

De este modo $\sharp_{\alpha,\beta}$ aplica $\mathcal{D}'_* \times \mathcal{D}_*$ y $E'_* \times E_*$ en E_*.

El espacio E'_* puede caracterizarse como el espacio de operadores de convolución sobre $\mathcal{D}_*$, esto es, si $T \in \mathcal{D}'_*$ entonces $T \in E'_*$ si, y sólo si, $T\sharp_{\alpha,\beta}\phi \in \mathcal{D}_*$, para cada $\phi \in \mathcal{D}_*$.

Si $T \in \mathcal{D}'_*$ y $S \in E'_*$ la convolución $T\sharp_{\alpha,\beta}S$ de T y S es el elemento de $\mathcal{D}'_*$ dado por

$$< T\sharp_{\alpha,\beta}S, \phi > = < T, S\sharp_{\alpha,\beta}\phi >, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

La convolución $\sharp_{\alpha,\beta}$ aplica $E'_* \times E'_*$ en E'_*.

La transformación distribucional $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}$ se define sobre $\mathcal{D}'_*$ por trasposición, esto es,

$$< \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}T, \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\phi > = < T, \phi >, \quad T \in \mathcal{D}'_*,\ \phi \in \mathcal{D}_*.$$

En particular, si $S \in E'_*$ la transformada $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)$ coincide con el elemento que define en H'_* la función $F_{\alpha,\beta}(\lambda) = < T, \varphi_\lambda^{\alpha,\beta} >$, $\lambda \in \mathbf{C}$. En otras palabras, se tiene que

$$< \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}S, \mathcal{F}_{\alpha,\beta}\phi > = \int_0^\infty F_{\alpha,\beta}(\lambda)\ (\mathcal{F}_{\alpha,\beta}\phi)(\lambda)\ \frac{d\lambda}{|c_{\alpha,\beta}(\lambda)|^2}, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

El espacio $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(E'_*)$, imagen de E'_*, puede ser caracterizado como el espacio de las funciones enteras y pares con un cierto control de tipo exponencial. Concretamente, una función $F \in \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(E'_*)$ si, y sólo si, F es entera par y, para ciertos $a > 0$ y $m \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{C}} (1 + |\lambda|^2)^{-m}\ |F(\lambda)|\ e^{-a|\mathrm{Im}\lambda|} < \infty.$$

Si $T \in \mathcal{D}'_*$ y $S \in E'_*$ la siguiente fórmula de intercambio distribucional para $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}$

$$\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(T\sharp_{\alpha,\beta}S) = \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(T)\ \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S) \tag{5.2}$$

es válida.

Estos resultados son casos particulares de los obtenidos por K. Trimèche ([105]) para la transformación y la convolución de Chébli–Trimèche.

Un operador de convolución para la inversa $\mathcal{F}^{-1}_{\alpha,\beta}$ de la transformación de Jacobi fue investigado por M. Flensted–Jensen y T.H. Koornwinder ([51]) y N. Ben Salem y K. Trimèche ([12], [13] y [14]).

5.2 Ecuaciones de convolución de Jacobi hipoelípticas sobre distribuciones de Schwartz.

Sea $S \in E'_*$. Se dice que S es (α,β)–hipoelíptica cuando se verifica la siguiente propiedad: $T \in E_*$ siempre que $T \in \mathcal{D}'_*$ y $T\sharp_{\alpha,\beta}S \in E_*$.

A continuación obtenemos una caracterización de la (α,β)–hipoelipticidad por medio de la transformación $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ de Jacobi.

Proposición 5.1 *Sean* $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ *y* $S \in E'_*$ *tal que* $\mathcal{Z}_S = \{z \in \mathbf{C} : \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(z) = 0\}$ *es infinito. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) S *es* (α,β)*–hipoelíptica.*

(b) S *satisface las dos propiedades que siguen:*

(b.1) $\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\mathcal{Z}_S} \frac{|Imz|}{\log|z|} = \infty$.

(b.2) Existen $A, R > 0$ *tales que* $|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)| \geq x^{-A},\ x \geq R$.

(c) Existe una parametrix para S*, esto es, existen* $R \in E'_*$ *y* $\psi \in \mathcal{D}_*$ *de manera que* $\delta = R\sharp_{\alpha,\beta}S + \psi$*, donde* δ *representa, como es usual, la funcional de Dirac.*

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b). Asumimos que S es (α,β)–hipoelíptica. Entonces $S \neq 0$. En efecto, si $S = 0$, tenemos que $\delta\sharp S = 0 \in E_*$ y, sin embargo, $\delta \in \mathcal{D}'_* \setminus E_*$. Por tanto, ya que $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)$ es una función entera, el teorema de unicidad para la transformación $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}$ implica que el conjunto $\mathcal{Z}_S$ no tiene puntos de acumulación en $\mathbf{C}$, y, por tanto, que $\mathcal{Z}_S$ es numerable y no acotado.

Supongamos también que la propiedad (b.1) no se verifica. Existen entonces una sucesión no acotada $(z_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de números complejos y un $M > 0$, tales que $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(z_j) = 0,\ |z_j| > 1$, y $|\mathrm{Im} z_j| \leq M\log|z_j|$, para cada $j \in \mathbf{N}$. De aquí concluiremos una contradicción usando un procedimiento desarrollado por J. Bonet, C. Fernández y R. Meise ([35, en la prueba de la Proposición 2.3]).

Sea $\phi \in \mathcal{D}_*$. En virtud del teorema de Paley–Wiener para la transformación de Jacobi ([49, Theorem 4, (i)]), existe $s \in \mathbf{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbf{N}$, podemos encontrar $c_n > 0$ para la cual se tiene

$$|\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(z)| \leq c_n\ e^{s|\mathrm{Im} z| - n\log(1+|z|)}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Tomamos $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > sM + 1$. Obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(z_j)| &\leq c\ e^{s|\mathrm{Im} z_j| - n\log(1+|z_j|)} \\ &\leq c\ e^{s|\mathrm{Im} z_j| - n\log|z_j|} \\ &\leq c\ e^{(sM-n)\log|z_j|} \leq c, \quad \text{para cada } j \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Denotamos por l^1, como es usual, el espacio constituido por las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ complejas tales que $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = \|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_{l^1} < \infty$. l^1 es dotado de la topología asociada a la norma $\|\cdot\|_{l^1}$.

Sea $(a_j)_{j\in\mathbf{N}} \in l_1$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{k} a_j < \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}, \phi >\right| &\leq \sum_{j=0}^{k} |a_j| \left|\int_0^\infty \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}(t)\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt\right| \\ &\leq c\sum_{j=0}^{k} |a_j|, \quad k \in \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Hemos tenido en cuenta que $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi) \in H_*$ ([49, Theorem 4, (i)]).

Por tanto, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}$ converge en la topología débil * (o en la topología fuerte) de $\mathcal{D}'_*$. Además, la aplicación definida por $(a_j)_{j\in\mathbf{N}} \to \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}$ es continua de l^1 en $\mathcal{D}'_*$, cuando en $\mathcal{D}'_*$ se considera la topología débil * (o también la topología fuerte), ya que $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ aplica continuamente $\mathcal{D}_*$ en H_*.

Recurriendo a la fórmula de intercambio (5.2) obtenemos

$$< \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}\right) \sharp_{\alpha,\beta} S, \phi > = < \sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}, S\sharp_{\alpha,\beta}\phi >$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}, S\sharp_{\alpha,\beta}\phi > = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^\infty \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}(x)\ (S\sharp_{\alpha,\beta}\phi)(x)\ A_{\alpha,\beta}(x)\ dx$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(z_j)\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(z_j) = 0, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

Luego, $\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}\right) \sharp_{\alpha,\beta} S = 0$, y, al ser S hipoelíptico, se deduce que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)} \in E_*$.

Podemos concluir pues que la aplicación $\mathcal{L}$ definida por

$$\mathcal{L}((a_j)_{j\in\mathbf{N}}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\ \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}, \quad (a_j)_{j\in\mathbf{N}} \in l^1,$$

aplica l^1 en E_*. Además, ya que la convergencia en E_* implica la convergencia en $\mathcal{D}'_*$, del teorema del grafo cerrado se infiere que $\mathcal{L}$ es continua de l^1 en E_*. En efecto, sea $\{(a_j^n)_{j\in\mathbf{N}}\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en l^1 tal que

$$(a_j^n)_{j\in\mathbf{N}} \to (a_j)_{j\in\mathbf{N}}, \quad \text{cuando } n \to \infty, \text{ en } l^1, \text{ y}$$

$$\mathcal{L}((a_j^n)_{j\in\mathbf{N}}) \to f, \quad \text{cuando } n \to \infty, \text{ en } E_*.$$

Entonces, de acuerdo con lo probado más arriba,

$$\mathcal{L}((a_j^n)_{j\in\mathbf{N}}) \to \mathcal{L}((a_j)_{j\in\mathbf{N}}), \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

en la topología débil * de $\mathcal{D}'_*$. Por tanto $f = \mathcal{L}((a_j)_{j\in\mathbf{N}})$.

El operador de Jacobi $\Delta_{\alpha,\beta}$ es continuo de E_* en sí mismo. Existe entonces $c > 0$ tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \Delta_{\alpha,\beta} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \; \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)} \right) (x) \right| \leq c \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|, \quad (a_j)_{j\in\mathbf{N}} \in l^1.$$

En particular, se tiene que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \Delta_{\alpha,\beta} \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}(x) \right| \leq c, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Ya que $\varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}$ satisface (5.1) conseguimos

$$|z_j^2 + \rho^2| \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}(0) \leq \sup_{x\in[0,1]} |(z_j^2 + \rho^2) \varphi_{z_j}^{(\alpha,\beta)}(x)| \leq c, \quad j \in \mathbf{N}.$$

De este modo probamos que la sucesión $(z_j)_{j\in\mathbf{N}}$ es acotada, lo que supone una contradicción con la elección de la misma. Por tanto, (a) $\Rightarrow$ (b.1).

Supongamos ahora que (b.2) no es cierto. Podemos encontrar una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset (0, \infty)$ tal que $x_j \geq 2^j$ y $|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j)| < x_j^{-j}$, para cada $j \in \mathbf{N}$. Definimos la funcional T sobre $\mathcal{D}_*$ como sigue

$$< T, \phi >= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x_j), \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

Nótese que, al ser $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi) \in H_*$, la serie que define $< T, \phi >$ converge absolutamente. Además $T \in \mathcal{D}'_*$. En efecto, de acuerdo con [49, Theorem 4, (i)] de nuevo, obtenemos, para cada $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x_j) \right| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x_j)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x_j} \sup_{z\in(0,\infty)} |z \; \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(z)| \\ &\leq c \max_{0\leq k\leq n} p_k(\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,m}, \end{aligned}$$

donde $n \in \mathbf{N}$ depende de m. También T puede escribirse

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{x_j}^{(\alpha,\beta)}.$$

La fórmula de intercambio (5.2) conduce a

$$< T \sharp_{\alpha,\beta} S, \phi >=< T, S \sharp_{\alpha,\beta} \phi >= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(S \sharp_{\alpha,\beta} \phi)(x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j)\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j) \int_0^{\infty} \varphi_{x_j}^{(\alpha,\beta)}(t)\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j)\ \varphi_{x_j}^{(\alpha,\beta)}(t)\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

La última igualdad se justifica por medio del teorema de la convergencia dominada ya que $|\varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(t)| \leq c,\ t, \lambda \in \mathbf{R}$ ([49, Lemma 13]) y que $|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j)| \leq 2^{-j},\ j \in \mathbf{N}$.

Por tanto, $T\sharp_{\alpha,\beta}S = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j)\varphi_{x_j}^{(\alpha,\beta)}$, y teniendo en cuenta [49, Lemma 15] podemos ver que $T\sharp_{\alpha,\beta}S \in C^{\infty}(\mathbf{R})$. Ciertamente, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x_j)\right| \left|\frac{d^k}{dx^k}\varphi_{x_j}^{(\alpha,\beta)}(x)\right| \leq c \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1+x_j)^{k+m}}{x_j^j}\ (1+x), \quad x \in (0,\infty),$$

para cierta $m \in \mathbf{N}$. Además, ya que $\varphi_{x_j}^{(\alpha,\beta)}$ es par, para cada $j \in \mathbf{N}$, se concluye que $T\sharp_{\alpha,\beta}S \in E_*$.

Nuestro objetivo es mostrar que $T \notin E_*$. Supongamos que T es una función $C^{\infty}(\mathbf{R})$. Sea $k \in \mathbf{N}$ par. Elegimos una función $\phi \in \mathcal{D}_*$ tal que $\phi \geq 0$ sobre $\mathbf{R}$, $\phi(0) = 1$, y $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi) \geq 0$, sobre $\mathbf{R}$. Utilizando la convolución $\sharp_{\alpha,\beta}$ podemos construir una función con estas características. Tomamos una función $\psi_1 \geq 0$ en $\mathcal{D}_*$, siendo ψ_1 no idénticamente cero. Definimos $\psi_2 = \psi_1\sharp_{\alpha,\beta}\psi_1$. Se verifica que

$$\psi_2(x) = \int_0^{\infty} \psi_1(y)\ (\tau_x^{\alpha,\beta}\psi_1)(y)\ A_{\alpha,\beta}(y)\ dy \geq 0,$$

y

$$\psi_2(0) = \int_0^{\infty} \psi_1^2(y)\ A_{\alpha,\beta}(y)\ dy \neq 0.$$

La función $\phi = \psi_2/\psi_2(0)$ satisface las condiciones requeridas.

Una sencilla manipulación nos permite escribir

$$< \varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(x)\Delta_{\alpha,\beta}^k T(x), \phi(x) >= \int_0^{\infty} T(x)\ \Delta_{\alpha,\beta}^k(\varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x)\ A_{\alpha,\beta}(x)\ dx$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\Delta_{\alpha,\beta}^k(\varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}\phi))(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} (x_j^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j).$$

Además, de acuerdo con [49, Theorem 4, (i)], obtenemos

$$< \varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(x)\Delta_{\alpha,\beta}^k T(x), \phi(x) >$$

$$= \int_0^{\infty} \varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(x)\ \Delta_{\alpha,\beta}^k(T(x))\phi(x)\ A_{\alpha,\beta}(x)\ dx \to 0, \quad \text{cuando } \lambda \to \infty, \tag{5.3}$$

ya que $\Delta_{\alpha,\beta}^k(T)\phi \in \mathcal{D}_*$.

Por tanto,

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(x_j^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j)=0.$$

De [51] se sigue que

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j)=\int_0^\infty a(x_l,x_j,t)\ \Phi(t)\frac{dt}{|c_{\alpha,\beta}(t)|^2},\quad l,j\in\mathbf{N},$$

donde $\Phi=\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)$ y

$$a(x,y,z)=2\pi\int_0^\infty \varphi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\ \varphi_y^{(\alpha,\beta)}(t)\ \varphi_z^{(\alpha,\beta)}(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt,\quad x,y,z\in[0,\infty).$$

Ya que $a(x,y,z)\geq 0,\ x,y,z\in[0,\infty)$, la elección de ϕ implica que

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j)\geq 0,\quad l,j\in\mathbf{N}.$$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{\infty}(x_j^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j)\geq(x_l^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_l)$$

$$=(x_l^2+\rho^2)^k\int_0^\infty \varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}(t)^2\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt,\quad l\in\mathbf{N}. \tag{5.4}$$

La representación de Mehler de la función $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ es la siguiente ([13, (0.1)])

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)=\int_0^t K_{\alpha,\beta}(t,s)\ \cos(\lambda s)\ ds,\quad t>0,$$

donde $K_{\alpha,\beta}(t,\cdot),\ t>0$, es una función positiva que es continua sobre $(-t,t)$ y cuyo soporte es $[-t,t]$.

En particular

$$\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}(t)=\int_0^t K_{\alpha,\beta}(t,s)\ \cos(x_l s)\ ds,\quad t>0,\ l\in\mathbf{N}.$$

Por tanto, para cada $l\in\mathbf{N}$, se infiere que

$$\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}(t)\geq\cos 1\int_0^t K_{\alpha,\beta}(t,s)\ ds=\varphi_0^{(\alpha,\beta)}(t)\ \cos 1\geq c,\quad t\in\left(0,\frac{1}{x_l}\right),$$

para cierta $c>0$.

Entonces, al ser $\phi\geq 0$ sobre $\mathbf{R}$ y $\phi(0)=1$, se sigue

$$\int_0^\infty \varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}(t)^2\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt\geq\int_0^{1/x_l}\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}(t)^2\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt$$

$$\geq c \int_0^{1/x_l} A_{\alpha,\beta}(t)\ dt \geq c\ x_l^{-2\alpha-2}, \tag{5.5}$$

cuando $l \in \mathbf{N}$ es suficientemente grande. En la última desigualdad hemos usado que $A_{\alpha,\beta}(t) \sim t^{2\alpha+1}$, cuando $t \to 0$.

Combinando (5.4) y (5.5) obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty}(x_j^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j) \geq c\ x_l^{2(k-\alpha-1)}, \tag{5.6}$$

siempre que l sea suficientemente grande.

Si elegimos $k > \alpha+1$, se deduce de (5.6) que

$$\sum_{j=0}^{\infty}(x_j^2+\rho^2)^k\ \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\varphi_{x_l}^{(\alpha,\beta)}\phi)(x_j) \to \infty, \quad l \to \infty.$$

Esto contradice (5.3). Por consiguiente $T \notin E_*$.

Hemos establecido que si S no satisface (b.2), S no es hipoelíptica.

Queda probado así que (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c). Supongamos que S satisface las propiedades (b.1) y (b.2).

Teniendo presente [73, Theorem 2] podemos encontrar $\gamma, \varepsilon > 0$ tales que, para cada $m \in \mathbf{N}$, existe $c_m > 0$ para la cual

$$|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(z)| \geq |\mathrm{Re}z|^{-\gamma}e^{-\varepsilon|\mathrm{Im}z|}, \quad \text{cuando } |\mathrm{Im}z| \leq (m+1)\log(1+|z|) \text{ y } |z| \geq c_m. \tag{5.7}$$

Asumamos que $c_0 \geq R$, donde R es la constante positiva que aparece en (b.2), y que $m \leq c_m \leq c_{m+1}-1$, para cada $m \in \mathbf{N}$.

Definimos la funcional P sobre $\mathcal{D}_*$ como sigue

$$< P, \phi >= \int_{c_0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)} \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2}, \quad \phi \in \mathcal{D}_*.$$

De este modo $P \in \mathcal{D}'_*$. En efecto, sea $a > 0$. Para cada $\phi \in \mathcal{D}_{*,a}$, recurriendo a (b.2) y [11, (1.10)] tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{c_0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)} \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2}\right| &\leq c\int_{c_0}^{\infty} x^A\ |\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x)|\ \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2} \\
&\leq c\int_{c_0}^{\infty} x^{A+2\alpha+1}\ |\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x)|\ dx \\
&\leq c \sup_{x\in(0,\infty)} x^{A+2\alpha+3}\ |\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x)|\,.
\end{aligned}$$

Entonces, [49, Theorem 4, (i)] implica que, para un cierto $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|\int_{c_0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)} \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2}\right| \leq c \max_{0\leq k\leq n} \sup_{x\in(0,\infty)} \left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right|, \quad \phi \in \mathcal{D}_{*,a}.$$

Por tanto P es continua de $\mathcal{D}_{*,a}$ en $\mathbf{C}$. Concluimos pues que $P \in \mathcal{D}'_*$.

Por otra parte, (5.2) nos conduce, para cada $\phi \in \mathcal{D}_*$, a que

$$\begin{aligned} < P\sharp_{\alpha,\beta}S, \phi > &= < P, S\sharp_{\alpha,\beta}\phi >= \int_{c_0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(S\sharp_{\alpha,\beta}\phi)(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)} \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2} \\ &= \int_{c_0}^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x) \; \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2} \\ &= \int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x) \; \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2} - \int_0^{c_0} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x) \; \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2} \\ &= \phi(0) - \int_0^{\infty} \phi(t) \; A_{\alpha,\beta}(t) \; \left(\int_0^{c_0} \varphi_x^{(\alpha,\beta)}(t) \; \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2} \right) \; dt. \end{aligned}$$

En otras palabras, hemos probado que

$$P\sharp_{\alpha,\beta}S = \delta - H \tag{5.8}$$

donde δ representa la funcional de Dirac y $H(t) = \int_0^{c_0} \varphi_x^{(\alpha,\beta)}(t) \frac{dx}{|c(x)|^2}, \; t \in \mathbf{R}$. Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones de Jacobi podemos ver que $H \in E_*$.

Para cada $a > 0$ elegimos una función $\phi_a \in \mathcal{D}_*$ tal que $\phi_a(x) = 1, \; x \in (0, a)$. La distribución $\phi_a P$ está en E'_*, para cada $a > 0$, ya que tiene su soporte acotado.

Nuestro próximo objetivo es probar que $(1 - \phi_a)P \in E_*$ cuando a es suficientemente grande.

Para cada $\phi \in \mathcal{D}_*$ se tiene que

$$< (1-\phi_a)P, \phi >=< P, (1-\phi_a)\phi >= \int_{c_0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}((1-\phi_a)\phi)(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)} \frac{dx}{|c_{\alpha,\beta}(x)|^2}, \; a > 0.$$

Fijamos $a > 0$ que será especificado más tarde.

Obtenemos ahora una nueva forma para la distribución P cuando actúa sobre funciones $\phi \in \mathcal{D}_*$ tales que $\phi(x) = 0, \; |x| \leq a$.

Sea $\phi \in \mathcal{D}_*$ tal que $\phi(x) = 0, \; |x| \leq a$. Atendiendo a [11, (1.8)] podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\phi)(x) &= \int_0^{\infty} \varphi_x^{(\alpha,\beta)}(t) \; \phi(t) \; A_{\alpha,\beta}(t) \; dt \\ &= c_{\alpha,\beta}(x) \int_0^{\infty} \Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t) \; \phi(t) \; A_{\alpha,\beta}(t) \; dt \\ &\quad + c_{\alpha,\beta}(-x) \int_0^{\infty} \Phi_{-x}^{(\alpha,\beta)}(t) \; \phi(t) \; A_{\alpha,\beta}(t) \; dt, \quad x \in (0, \infty), \end{aligned}$$

donde

$$\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t) = (e^t - e^{-t})^{ix-\rho} \cdot$$

$$\cdot \; {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+1-ix), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-ix); 1-ix, -\frac{1}{(\sinh t)^2} \right),$$

para $t \in (0,\infty)$ y $x \in \mathbf{C}$, siendo $\mathrm{Im}x \geq 0$.

Entonces, ya que $|c_{\alpha,\beta}(x)|^2 = c_{\alpha,\beta}(x)c_{\alpha,\beta}(-x)$,

$$\begin{aligned} < P,\phi > &= \int_{c_0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)} \int_0^{\infty} \Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt\ dx \\ &\quad + \int_{c_0}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(x)} \int_0^{\infty} \Phi_{-x}^{(\alpha,\beta)}(t)\ \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt\ dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-c_0} + \int_{c_0}^{\infty} \right) \frac{\Psi(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx, \end{aligned}$$

donde $\Psi(x) = \int_0^\infty \Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\phi(t)A_{\alpha,\beta}(t)dt,\ x \in \mathbf{R}$. Recordamos que $\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)$ es una función par.

Consideramos ahora un camino tipo Hörmander definido por

$$\Gamma_+ = \sum_{m=0}^{\infty} (\chi_m + \eta_m)$$

donde, para cada $m \in \mathbf{N}$,

$$\chi_m(t) = c_m + it, \quad t \in [m \log(1+c_m), (m+1)\log(1+c_m))$$

y

$$\eta_m(t) = t + i(m+1)\log(1+t), \quad t \in [c_m, c_{m+1}).$$

De acuerdo con [11, (1.5)] tenemos, para cada $k \in \mathbf{N}$,

$$\Psi(x) = (-1)^k (x^2+\rho^2)^{-k} \int_0^\infty \Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\ \Delta_{\alpha,\beta}^k \phi(t)\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt, \\ x \in \mathbf{C} \setminus \{i\rho\},\ \mathrm{Im}x \geq 0.$$

Además de [11, (1.6) y (1.7)] se deduce que

$$\begin{aligned} |\Psi(x)| &\leq c\ |x|^{-2k} \int_a^\infty e^{-t\mathrm{Im}x}\ \left|\Delta_{\alpha,\beta}^k \phi(t)\right|\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt \\ &\leq c\ |x|^{-2k}\ e^{-a\mathrm{Im}x}, \quad k \in N,\ |x| \geq c_0,\ \mathrm{Im}x \geq 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por tanto, combinando (5.7), (5.9) y [11, (1.10)], obtenemos que

$$\frac{|\Psi(x)|}{\left|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)\right|} \leq c\ |x|^{\alpha+\frac{1}{2}+\gamma-2k}\ e^{(\varepsilon-a)\mathrm{Im}x}, \quad k \in N,\ |x| \geq c_0,\ \mathrm{Im}x \geq 0.$$

Tomando $a > \varepsilon$ y $k \in \mathbf{N}$ de manera que $\alpha + \frac{3}{2} - 2k + \gamma < 0$, se sigue

$$\left| \int_{B_R} \frac{\Psi(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx \right| \leq \frac{c}{R}, \quad R \geq c_0,$$

donde B_R representa el arco de circunferencia de radio R que une el eje OX con Γ_+ en el semiplano superior.

El teorema de Cauchy permite concluir que

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{\Psi(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx = \int_{\Gamma_+} \frac{\Psi(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx.$$

Además, recurriendo de nuevo a (5.7) y [11, (1.7) y (1.10)] podemos mostrar que

$$\int_{\Gamma_+} \frac{1}{\left|\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)\right|} \int_0^{\infty} \left|\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\right|\ |\phi(t)|\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt\ |dx| < \infty,$$

siempre que a sea suficientemente grande.

Consecuentemente, para a grande,

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{\Psi(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx$$

$$= \int_0^{\infty} \phi(t) \int_{\Gamma_+} \frac{\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt.$$

De un modo similar podemos ver que

$$\int_{-\infty}^{-c_0} \frac{\Psi(x)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx$$

$$= \int_0^{\infty} \phi(t) \int_{\Gamma_-} \frac{\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx\ A_{\alpha,\beta}(t)\ dt,$$

cuando a es grande. Aquí Γ_- representa el camino simétrico a Γ_+ respecto al eje OY.

En lo que sigue fijamos a suficientemente grande para que lo anterior se verifique.

Hemos probado que si $\phi \in \mathcal{D}_*$ es tal que $\phi(x) = 0,\ |x| \leq a$, entonces

$$\begin{aligned} < P, \phi > \quad = \quad & \int_0^{\infty} \phi(t) \left(\int_{\Gamma_+} \frac{\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_-} \frac{\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx \right) A_{\alpha,\beta}(t)\ dt. \end{aligned}$$

Por tanto la distribución P coincide con la funcional f definida por

$$f(t) = \int_{\Gamma_+} \frac{\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx + \int_{\Gamma_-} \frac{\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\ dx,\ t \in (a, \infty),$$

cuando P actúa sobre funciones en $\mathcal{D}_*$ que se anulan en $[-a, a]$.

A tenor de (5.7) y de [11, (1.6), (1.7) y (1.10)], f es una función $C^\infty(a,\infty)$ y, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}f(t) &= \int_{\Gamma_+} \frac{\frac{d^n}{dt^n}\left(\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\right)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\,dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_-} \frac{\frac{d^n}{dt^n}\left(\Phi_x^{(\alpha,\beta)}(t)\right)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(S)(x)\ c_{\alpha,\beta}(-x)}\,dx, \quad t \in (a,\infty).\end{aligned}$$

Además, f es una función par.

Concluimos que $(1-\phi_a)P = (1-\phi_a)f \in E_*$.

Se sigue de (5.8) que

$$(\phi_a P)\sharp_{\alpha,\beta}S = \delta - H - ((1-\phi_a)P)\sharp_{\alpha,\beta}S,$$

y escribiendo $R = \phi_a P$ y $\varphi = H + ((1-\phi_a)P)\sharp_{\alpha,\beta}S$, tenemos

$$\delta = R\sharp_{\alpha,\beta}S + \varphi.$$

De este modo $\varphi \in E_*$. Además, ya que $R \in E'_*$ y $\delta \in E'_*$, se tiene que $\varphi \in \mathcal{D}_*$. La prueba de (c) queda completa.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que (c) es cierto, esto es,

$$\delta = R\sharp_{\alpha,\beta}S + \psi$$

donde $R \in E'_*$ y $\psi \in \mathcal{D}_*$.

Sea $T \in \mathcal{D}'_*$ tal que $T\sharp_{\alpha,\beta}S \in E_*$. Recurriendo a las propiedades algebraicas de la convolución $\sharp_{\alpha,\beta}$ obtenemos

$$T = T\sharp_{\alpha,\beta}\delta = T\sharp_{\alpha,\beta}(R\sharp_{\alpha,\beta}S) + T\sharp_{\alpha,\beta}\psi = (T\sharp_{\alpha,\beta}R)\sharp_{\alpha,\beta}S + T\sharp_{\alpha,\beta}\psi.$$

Ya que $E'_*\sharp_{\alpha,\beta}E_*$ y $\mathcal{D}'_*\sharp_{\alpha,\beta}\mathcal{D}_*$ están contenidos en E_*, concluimos que $T \in E_*$. Por tanto S es (α,β)–hipoelíptica.

■

Nótese que si $S \in E'_*$ y $\mathcal{Z}_S$ es finito, entonces S es (α,β)–hipoelíptica. En efecto, si $S \in E'_*$, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(S)$ es una función entera par de tipo exponencial. Por tanto, cuando $\mathcal{Z}_S$ es finito, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(S)$ es un polinomio par. S es entonces de la forma $S = P(\Delta_{\alpha,\beta})$, donde P es un polinomio, y, puesto que $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(S)$ admite una parametrix, es (α,β)–hipoelíptica.

5.3 Hipoelipticidad de ecuaciones de convolución de Chébli–Trimèche.

Como en el resto de la memoria, denotamos por $\sharp$ la convolución asociada al hipergrupo de Chébli–Trimèche.

Decimos que una distribución $S \in E'_*$ es $\sharp$–hipoelíptica si $T \in E_*$ siempre que $T \in \mathcal{D}'_*$ y $T\sharp S \in E_*$.

Siguiendo un procedimiento similar al empleado en la prueba de la Proposición 5.1, podemos obtener el siguiente resultado relativo a la hipoelipticidad de las ecuaciones de convolución $\sharp$. Las propiedades necesarias de las funciones φ_λ y $c(\lambda)$ pueden ser encontradas en los trabajos de O. Bracco ([36] y [37]).

Proposición 5.2 *Sea $S \in E'_*$ tal que $\mathcal{Z}_S = \{z \in \mathbf{C} : \ \mathcal{F}'(S)(z) = 0\}$ es infinito. Enunciamos las siguientes tres propiedades para S.*

(a) S satisface las dos condiciones que siguen:

(a.1) $\lim_{z\to\infty,\ z\in\mathcal{Z}_S} \frac{|Imz|}{\log|z|} = \infty$.

(a.2) Existen $A, R > 0$ tales que $|\mathcal{F}'(S)(x)| \geq x^{-A}, \ x \geq R$.

(b) S tiene una parametrix, esto es, existen $R \in E'_*$ y $\psi \in \mathcal{D}_*$ para las cuales

$$\delta = R\sharp S + \psi.$$

(c) S es $\sharp$–hipoelíptica.

Entonces, (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a.1).

■

Cuando $S \in E'_*$ y $\mathcal{Z}_S$ es finito, entonces, como en el caso de Jacobi, S es $\sharp$–hipoelíptica.

Si (c) $\Rightarrow$ (a.2) es una cuestión abierta. Para probar esta implicación, al menos siguiendo el procedimiento usual, deberíamos conocer la operación de convolución para la transformación inversa $\mathcal{F}^{-1}$ de $\mathcal{F}$ y establecer la positividad del núcleo de la traslación asociada a la misma, que viene dado por

$$L(x,y,z) = \int_0^\infty \varphi_x(t) \ \varphi_y(t) \ \varphi_z(t) \ A(t) \ dt, \quad x,y,z \in (0,\infty).$$

El operador de Bessel $\Delta_\mu = x^{-2\mu-1}\frac{d}{dx}\left(x^{2\mu+1}\frac{d}{dx}\right)$, $\mu > -1/2$, es un caso particular del operador $\Delta = \frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{d}{dx}\right)$. Como es claro, Δ_μ aparece cuando se considera en Δ la función $A(x) = x^{2\mu+1}, \ x \in (0,\infty)$. En este caso la transformación $\mathcal{F}$ de Chébli–Trimèche se reduce a la transformación h_μ de Hankel definida por

$$h_\mu(\phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} \ J_\mu(xy) \ \phi(y) \ y^{2\mu+1} \ dy, \quad x \in (0,\infty).$$

La hipoelípticidad de las ecuaciones de convolución de Hankel fue estudiada por M. Belhadj y J.J. Betancor ([9]) sobre E'_*. El resultado obtenido en la Proposición 5.2 referido al caso de Bessel mejora el establecido en [9, Theorem 1].

Bibliografía

[1] G. Altenburg, *Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall* $\Omega = (0, \infty)$ *und deren Dualräumen*, Math. Nachr., **108** (1982), 197–218.

[2] J.P. Anker, *The spherical Fourier transform of rapidly decreasing functions. A simple proof of a characterization due to Harish–Chandra, Helgason, Trombi, and Varadarajan*, J. Funct. Anal., **96** (1991), 331–349.

[3] J.P. Anker, E. Damek y C. Yacoub, *Spherical analysis on harmonic AN groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **23** (4) (1996), 643–679.

[4] R. Askey, *Linearization of the product of orthogonal polynomials*, Problems in analysis (papers dedicated to Salomon Bochner, 1969), pp. 131–138. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[5] F. Astengo, *A class of* L^p*–convolutors on harmonic extensions of H–type groups*, J. Lie Theory, **5** (2) (1995), 147–164.

[6] H.H. Bang, *A property of infinitely differentiable functions*. Proc. Amer. Math. Soc., **108** (1990), 73–76.

[7] L. Bernal–González y J.A. Prado–Tendero, *Sequences of differential operators: exponentials, hypercyclicity and equicontinuity*, Ann. Polon. Math., **77** (2001), 169–187.

[8] M. Belhadj y J.J. Betancor, *Hankel convolution operators on entire functions and distributions*, aparecerá en J. Math. Anal. Appl..

[9] M. Belhadj y J.J. Betancor, *Hypoellipticity of Hankel convolution equations on Schwartz distribution spaces*, aparecerá en Arch. Math..

[10] N. Ben Salem, *Convolution semigroups and central limit theorem associated with a dual convolution structure*, J. Theoret. Probab., **7** (2) (1994), 417–436.

[11] N. Ben Salem y A. Dachraoui, *Pseudo-differential operators associated with the Jacobi differential operator*, J. Math. Anal. Appl., **220** (1998), 365–381.

[12] N. Ben Salem y K. Trimèche, *Mehler integral transforms associated with Jacobi functions with respect to the dual variable*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **18** (1) (1996), 22–26.

[13] N. Ben Salem y K. Trimèche, *Mehler integral transforms associated with Jacobi functions with respect to the dual variable*, J. Math. Anal. Appl., **214** (2) (1997), 691–720.

[14] N. Ben Salem y K. Trimèche, *Results on the Jacobi functions with respect to the dual variable as eigenfunctions and applications*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can., **20** (2) (1998), 56–61.

[15] J.J. Betancor, J.D. Betancor y J.M. Méndez, *Distributional Fourier transform and convolution associated to Chébli–Trimèche hypergroups*, Monatsh. Math., **134** (4) (2002), 265–286.

[16] J.J. Betancor, J.D. Betancor y J.M. Méndez, *Chébli–Trimèche hypergroups and W–type spaces*, aparecerá en J. Math. Anal. Appl..

[17] J.J. Betancor, J.D. Betancor y J.M. Méndez, *Generalized convolution for the discrete Jacobi transformation*, Acta Math. Hungar. **96** (1–2) (2002), 1–19.

[18] J.J. Betancor, J.D. Betancor y J.M. Méndez, *Paley–Wiener type theorems for Chébli–Trimèche transforms*, Pub. Math. Debrecen **60** (3–4) (2002), 347–358.

[19] J.J. Betancor y A. Bonilla, *On a universality property of certain integral operator*, J. Math. Anal. Appl., **250**(1) (2000), 162–180.

[20] J.J. Betancor y B. González, *A convolution operation for a distribuitonal Hankel transformation*, Studia Math., **117** (1) (1995), 57–72.

[21] J.J. Betancor, M. Linares y J.M. Méndez, *Paley–Wiener theorems for the Hankel transformation*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **44** (1995), 293–300.

[22] J.J. Betancor e I. Marrero, *Multipliers of Hankel transformable generalized functions*, Comment. Math. Univ. Carolin., **33** (3) (1992), 389–401.

[23] J.J. Betancor e I. Marrero, *Some properties of Hankel convolution operators*, Canad. Math. Bull., **36** (4) (1993), 398–406.

[24] J.J. Betancor e I. Marrero, *Structure and convergence in certain spaces of distributions and the generalized Hankel convolution*, Math. Japon., **38** (6) (1993), 1141–1155.

[25] J.J. Betancor e I. Marrero, *The Hankel convolution and the Zemanian spaces β_μ and β'_μ*, Math. Nachr., **160** (1993), 277-298.

[26] J.J. Betancor e I. Marrero, *On the topology of Hankel multipliers and of Hankel convolution operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **44** (3) (1995), 469–478.

[27] J.J. Betancor y L. Rodríguez–Mesa, *Hankel convolution of distribution spaces with exponential growth*, Studia Math., **121** (1) (1996), 35–52.

[28] J.J. Betancor y L. Rodríguez–Mesa, *On Hankel convolutors on certain Hankel transformable function spaces*, Glasgow Math. J., **39** (3) (1997), 351–369.

[29] J.J. Betancor y L. Rodríguez–Mesa, *Characterizations of W–type spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (5) (1998), 1371–1379.

[30] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad. Sci. Paris, **189** (1929), 473–475.

[31] B. di Blasio, *Paley–Wiener type theorems on harmonic extensions of H–type groups*, Monatsh. Math., **123** (1997), 21–42.

[32] W. Bloom y H. Heyer, *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, de Gruyter Studies in Mathematics, 20. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[33] W. Bloom y Z. Xu, *Fourier transforms of Schwartz functions on Chébli-Trimèche hypergroups*, Monatsh. Math. **125** (1998), 89–109.

[34] J. Bonet, *Hypercyclic and chaotic convolution operators*, J. London Math. Soc., (2) **62** (2000), 253–262.

[35] J. Bonet, C. Fernández y R. Meise, *Characterization of the ω–hypoelliptic convolution operators on ultradistributions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **25** (2) (2000), 261–284.

[36] O. Bracco, *Fonction maximale associée à des opérateurs de Sturm–Liouville singuliers*, Thèse, Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 1999/03.

[37] O. Bracco, *Propiétés de la mesure spectrale pour une classe d'opérateurs différentiels singuliers sur* $[0, +\infty)$, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **329** (4) (1999), 299–302.

[38] H. Chébli, *Sur un théorème de Paley-Wiener associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville sur* $]0, \infty[$, J. Func. Anal., **17** (1974), 447–461.

[39] F.M. Cholewinski, *A Hankel convolution complex inversion theory*, Mem. Amer. Math. Soc., **58** (1965).

[40] J. Chung, S.–Y. Chung and D. Kim, *Une caractérisation de l'espace S de Schwartz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **316** (1993), 23–25.

[41] W.C. Connet y A.L. Schwartz, *Analysis of a class of probability preserving measures algebras on compact intervals*, Trans. Amer. Math. Soc., **320** (1990), 371–393.

[42] J. Delsarte, *Sur une extension de la formule de Taylor*, J. Math. Pures et Appl., **17** Fasc. III (1938), 213–231.

[43] C.F. Dunkl, *The measure algebra of a locally compact hypergroup*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 331–348.

[44] L. Ehrenpreis, *Solution of some problems of division, IV. Invertible and elliptic opertors*, Amer. J. Math., **82** (1960), 522–588.

[45] L. Ehrenpreis y F.I. Mautner, *Some properties of the Fourier tranform on semisimple Lie groups*, Annals of Math., **61** (3) (1955), 406–440.

[46] S.J.L. Eijndhoven y J. de Graaf, *Some results on Hankel invariant distribution spaces*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., **45** (1) (1983), 77–87.

[47] S.J.L. Eijndhoven y M.J. Kerkhof, *The Hankel transformation and spaces of type W*, Reports on Appl. and Numer. Analysis, 10, Dept. of Maths. and Comp. Sci., Eindhoven University of Technology, 1988.

[48] A. Fitouhi, *Heat "polynomials" for a singular differential operator on* $(0, \infty)$, Constr. Approx., **5** (1989), 241–270.

[49] M. Flensted–Jensen, *Paley–Wiener type theorems for a differential operator connected with symetric spaces*, Ark. Mat., **10** (1972), 143–162.

[50] M. Flensted–Jensen y T.H. Koorwinder, *The convolution structure for Jacobi function expansions*, Ark. Mat., **11** (1973), 245–262.

[51] M. Flensted–Jensen y T.H. Koorwinder, *Jacobi junctions: the addition formula and the positivity of dual convolution structure*, Ark. Mat., **17** (1979), 139–151.

[52] L. Gallardo y O. Gebuhver, *Marches aléatoires et hypergroupes*, Expo. Math., **5** (1987), 41–73.

[53] L. Gallardo y K. Trimèche, *Lie theorems for one dimensional hypergroups*, Prepublication, Laboratoire de Mathématiques et Phisique Théorique, no. 205/2000, Université de Tours.

[54] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials I*, Can. J. Math., **22** (1970), 171–175.

[55] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials II*, Can. J. Math., **22** (1970), 582–593.

[56] I.M. Gelfand y G.E. Shilov, *Generalized functions 2: Spaces of fundamental and generalized functions*, Academic Press, New York, 1968.

[57] I.M. Gelfand y G.E. Shilov, *Generalized functions 3: Theory of differential equations*, Academic Press, New York, 1968.

[58] T.G. Genchev, *Entire functions of exponential type with polynomial growth on* $\mathbf{R}^n_x$, J. Math. Anal. Appl., **60** (1977), 103–119.

[59] T.G. Genchev, *A weighted version of the Paley–Wiener theorem*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **105** (1989), 389–395.

[60] T.G. Genchev y H.P. Heinig, *The Paley–Wiener theorem with general weights*, J. Math. Anal. Appl., **153** (1990), 460–469.

[61] G. Godefroy y J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal., **98** (1991), 229–269.

[62] B. González y E. Negrín, *Convolution over the spaces* S'_k, J. Math. Anal. Appl., **190** (3) (1995), 829–843.

[63] B. González y E. Negrín, *Fourier transform over the spaces* S'_k, J. Math. Anal. Appl., **194** (3) (1995), 780–798.

[64] J.L. Griffith, *Hankel transforms of funcitons zero outside a finite interval*, J. Proc. Roy. Soc. New South Wales, **89**, (1955), 109–115.

[65] K.G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **36** (1999), 345–381.

[66] B.L. Gurevich, *Nouveaux spaces de fonctions fondamentales et généralisées et le problème de Cauchy pour des systems d'equations aux différences finies*, D.A.N. SSSR, **99** (1954), 893–896.

[67] D.T. Haimo, *Integral equations associated with Hankel convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc., **116** (1965), 330–375.

[68] S. Helgason, *Geometric Analysis on Symmetric spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, Amer. Math. Soc., Rodhe Island, 1993.

[69] G. Herzog, *On a universality of the heat equations*, Math. Nachr., **188** (1997), 169–171.

[70] I.I. Hirschman, *Harmonic analysis and the ultraspherical polynomials*, symposium of the Conference on Harmonic Analysis (Cornell), 1956.

[71] I.I. Hirschman, *Variation diminishing Hankel transforms*, J. Analyse Math., **8** (1960/61), 302–336.

[72] L. Hörmander, *Hypoelliptic convolution equations*, Math. Scand., **9** (1961), 178–184.

[73] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions. Vol. I*, Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Mass.–London–Don Mills, Ont. 1966.

[74] R.I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution measure*, Adv. Math., **18** (1975), 1–101.

[75] J.F.C. Kingman, *Random walks with spherical symmetry*, Acta Math., **109** (1963), 11–53.

[76] T. Koorwinder, *A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform*, Ark. Mat., **13** (1975), 145–159.

[77] T. Koorwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, in "Special functions: Group Theoretical Aspects and Applications", 1–85, Math. Appl., Reidel, Dordsecht / Boston / Lancaster, 1984.

[78] M.N. Lazhari y K. Trimèche, *Convolution algebras and factorization of measures on Chébli–Trimèche hypergroups*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **17** (4) (1995), 165–169.

[79] B.M. Levitan, *Generalized translation operators and some of their applications*, Israel Program of Scientific translations, 1964.

[80] J. Liu, *Maximal functions associated with the Jacobi transform*, Bull. London Math. Soc., **32** (2000), 582–588.

[81] G.L. Litinov, *Hypergroups and hypergroup algebras*, J. Soviet Math., **33** (1987), 1734–1761.

[82] G.R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math., **2** (1952), 72–87.

[83] I. Marrero y J.J. Betancor, *Hankel convolution of generalized functions*, Rend. di Matematica, **15** (1995), 351–380.

[84] F. Martínez–Giménez, *Operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet*, Revista Colombiana de Matemáticas, **33** (1999), 51–76.

[85] J.M. Méndez, *A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation*, Proc. Amer. Math. Soc., **102** (1988), 619–624.

[86] J.M. Méndez, *On the Bessel transforms of arbitrary order*, Math. Nachr., **136** (1988), 233-239.

[87] T.L. Miller and V.G. Miller, *Local spectral theory and orbits of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), 1029–1037.

[88] R.E.A.C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., **19**, 1934.

[89] A. Pasquale, *A Paley–Wiener theorem for the inverse spherical transform*, Pacific J. Math., **193** (1) (2000), 143–176.

[90] R.S. Pathak, *On Hankel transformable spaces and a Cauchy problem*, Canad. J. Math., **37** (1985), 84–106.

[91] R.S. Pathak y S.K. Upadhyay, *W^p–spaces and Fourier transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **121** (3) (1994), 733–738.

[92] K.A. Ross, *Introduction to hypergroups*, Proceeding of the international conference on Harmonic Analysis held in Delhi, India, December 18–22, 1995.

[93] J.H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Springer–Verlag, New York, 1993.

[94] A.L. Schwartz, *Clasification on one dimensional hypergroups*, Proc. Amer. Math. Soc., **103** (1988), 1073–1081.

[95] A.L. Schwartz, *The structure of the algebra of Hankel transforms and the algebra of Hankel–Stieltjes transforms*, Canad. J. Math., **23** (1971), 2, 236–246.

[96] A.L. Schwartz, *Three lectures on hypergroups*, Proceeding of the international conference on Harmonic Analysis held in Delhi, India, December 18–22, 1995.

[97] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1978.

[98] M. Sifi, *Central limit theorem and infinitely divisible probabilities associated with partial differential operators*, J. Theor. Prob., **8** (3) (1995), 475–499.

[99] R. Spector, *Aperçu de la théorie des hypergroupes*, In: Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém. Nancy–Strasbourg, 1973–1975), 643–673. Lecture Notes Math., **497** (1975), Berlín, Springer, 1975.

[100] R. Szwarc, *Orthogonal polynomials and a discrete boundary value problem I*, SIAM J. Math. Anal., **23** (1992), 965–969.

[101] Sh.–Y. Tien, *The topologies on the spaces of multipliers and convolution operator on $K\{M_p\}$ spaces*, Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, New México State University, Las Cruces, New México.

[102] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York–London, 1967.

[103] K. Trimèche, *Convegence des séries de Taylor généralisées au sens de Delsarte*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B, **281** (1975), 1015–1017.

[104] K. Trimèche, *Probabilités indéfiniment divisibles et théorème de la limite centrale pour une convolution généralisée sur la demi droite*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B, **286** (1978), 1, A63–A66.

[105] K. Trimèche, *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley–Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur* $(0,\infty)$, J. Math. Pures Appl. (9), **60**, (1981), 51–98.

[106] K. Trimèche, *Wavelets on hypergroups*, Proceeding of the international conference on Harmonic Analysis held in Delhi, India, December 18–22, 1995.

[107] K. Trimèche, *Continuous wavelet transforms on semisimple Lie groups and inversion of the Abel transform and its dual*, Collect. Math., **47** (3) (1997), 231–268.

[108] K. Trimèche, *Generalized wavelets and hypergroups*, Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam, 1997.

[109] K. Trimèche, *Inversion of the Lions transmutation operators using waveletes*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **4** (1997), 97–112.

[110] Vu Kim Tuan, *Airy integral transform and the Paley–Wiener theorem*, Transform methods & special functions, Proceedings, Varna'96, (1996), 23–30.

[111] Vu Kim Tuan, *On the range of the Hankel and extended Hankel transforms*, J. Math. Anal. Appl., **209** (1997), 460–478.

[112] A.I. Zayed, *Asymptotic expansions of some integral transforms by using generalized functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **272** (2) (1982), 785–802.

[113] A.H. Zemanian, *A distributional Hankel transformation*, SIAM J. Appl. Math., **14** (1966), 561–576.

[114] A.H. Zemanian, *Generalized integral transformations*, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1968.

[115] A.H. Zemanian, *The Hankel transformation of certain distributions of rapid growth*, SIAM J. Appl. Math., **14** (1996), 678–690.

[116] H.M. Zeuner, *One dimensional hypergroups*, Adv. Math., **76** (1989), 1–18.

[117] H.M. Zeuner, *The central limit theorem for Chébli–Trimèche hypergroups*, J. Theor. Prob., **2** (1) (1989), 51–63.

[118] H.M. Zeuner, *Limit theorems for one–dimensional hypergroups*, Habilitationes–Chrift–Tübingen, 1990.