Curso 1992/93

CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

MARÍA ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ

La convolución generalizada y espacios de Hilbert para la transformación integral Hankel

Director

JORGE JUAN BETANCOR PÉREZ

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS

Serie Tesis Doctorales

La convolución generalizada y espacios de Hilbert para la transformación integral de Hankel

Memoria que presenta la Licenciada en Ciencias Matemáticas Dª María Isabel Marrero Rodríguez para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

La Laguna, Octubre 1992.

Esta Memoria ha sido realizada bajo la dirección del Prof. Dr. D. Jorge J. Betancor Pérez, a quien expreso mi más profunda y sincera gratitud por su constante apoyo moral y material, su permanente seguimiento del trabajo y sus inestimables observaciones y sugerencias.

También deseo manifestar mi reconocimiento a los Profs. Drs. D. José M. Méndez Pérez y D. José Rodríguez Expósito, cuyo respaldo fue decisivo en los comienzos de esta investigación, así como a mis compañeros de despacho y amigos, Profs. Juan D. Betancor Ortiz y Rodrigo Trujillo González, por crear un agradable ambiente de trabajo.

Gracias, igualmente, a mi familia y demás amigos, que de una forma u otra me han alentado o ayudado en esta tarea.

M.I. Marrero Rodríguez

PROLOGO

Fue L. SCHWARTZ [1978] el primero en estudiar una transformación integral sobre un espacio de distribuciones. Definió la transformación integral de Fourier en el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$, dual del espacio $\mathcal{S}$ de funciones de rápido decrecimiento en el infinito. A partir de ese momento el estudio de transformaciones integrales en espacios de funciones generalizadas constituye una activa área de trabajo, que fue relanzada en el año 1968 con la publicación de la monografía de A.H. ZEMANIAN [1968].

Esta Memoria Doctoral está dedicada al estudio de algunos aspectos de la transformación distribucional de Hankel.

La transformación integral de Hankel presenta en la literatura matemática diferentes formas (véanse, por ejemplo, H. HANKEL [1875], A.H. ZEMANIAN [1966a], A.L. SCHWARTZ [1969] y J.M. MENDEZ [1988]). De todas ellas la que permite un estudio distribucional más elegante (en el sentido de que recuerda más exactamente el realizado por L. Schwartz sobre la transformación de Fourier) es la dada por

$$(\mathfrak{h}_\mu f)(y) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\mu(xy) f(x)dx \qquad (y\in I), \tag{1}$$

donde $I=]0,\infty[$ y J_μ denota, como es usual, la función de Bessel de primera especie y orden μ.

Al objeto de definir la transformación (1) en un espacio de distribuciones, A.H. ZEMANIAN [1966a] introduce el espacio $\mathcal{H}_\mu$, constituido por aquellas funciones regulares $\phi=\phi(x)$ definidas sobre I tales que

$$\lambda^\mu_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in I} |x^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| < \infty$$

para cada $m,k\in\mathbb{N}$. Dotado de la topología engendrada por la familia de seminormas $\{\lambda^{\mu}_{m,k}\}_{m,k\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio de Fréchet. La transformación $\mathfrak{H}_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ siempre que $\mu\geq-\frac{1}{2}$ (A.H. ZEMANIAN [1968, Theorem 5.5-1]). Se define entonces la transformación $\mathfrak{H}'_\mu$ sobre $\mathcal{H}'_\mu$ como la adjunta de la transformación $\mathfrak{H}_\mu$, esto es,

$$\langle\mathfrak{H}'_\mu T,\phi\rangle = \langle T,\mathfrak{H}_\mu\phi\rangle \qquad (T\in\mathcal{H}'_\mu,\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Resulta claro que $\mathfrak{H}'_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}'_\mu$ cuando $\mu\geq-\frac{1}{2}$.

Destaca también la investigación llevada a cabo por L.S. DUBE–J.N. PANDEY [1975] sobre la transformación generalizada de Hankel, si bien estos autores emplean otro procedimiento, conocido habitualmente como método del núcleo.

I.I. HIRSCHMAN [1960/61], F.M. CHOLEWINSKI [1965] y D.T. HAIMO [1965] definen una convolución para la transformación tipo Hankel

$$(h_\mu f)(y) = \int_0^\infty x^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)f(x)dx \qquad (y\in I). \tag{2}$$

Ya que $(\mathfrak{H}_\mu f)(y)=y^{\mu+1/2}h_\mu(x^{-\mu-1/2}f(x))(y)$, no resulta difícil definir una convolución para (1) a partir de la definida para (2). Denotando por $L^1_\mu(I)$ el espacio formado por las funciones $\phi=\phi(x)$ medibles sobre I tales que

$$\|\phi\|_{\mu,1} = \int_0^\infty |\phi(x)|x^{\mu+1/2}dx < \infty,$$

la trasladada de Hankel de $\phi\in L^1_\mu(I)$ es

$$(\tau_x\phi)(y) = \int_0^\infty \phi(z)D_\mu(x,y,z)dz \qquad (x,y\in I),$$

donde

$$D_\mu(x,y,z) = \int_0^\infty t^{-\mu-1/2}(xt)^{1/2}J_\mu(xt)(yt)^{1/2}J_\mu(yt)(zt)^{1/2}J_\mu(zt)dt \qquad (x,y,z\in I).$$

Para cada $\phi_1,\phi_2\in L^1_\mu(I)$, la convolución para la transformación $\mathfrak{H}_\mu$ se define por

$$(\phi_1\#\phi_2)(x) = \int_0^\infty \phi_1(y)(\tau_x\phi_2)(y)dy, \qquad \text{c.t.p. } x\in I.$$

El análisis de la #-convolución distribucional será uno de los objetivos de nuestro trabajo.

Hemos dividido esta Memoria Doctoral en tres capítulos. Pasamos a continuación a exponer de forma sucinta el contenido de cada uno de ellos.

En el Capítulo 1 investigamos propiedades topológicas de ciertos espacios de funciones y de distribuciones. Conviene señalar que los resultados obtenidos aquí serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

Comenzamos este Capítulo considerando en la Parte I los espacios zemanianos $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$. Probamos que $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio nuclear y, por lo tanto, Schwartz. Además, ya que $\mathcal{H}_\mu$ es Fréchet, también es Montel y entonces reflexivo. Después de introducir nuevas familias de seminormas que generan la topología de $\mathcal{H}_\mu$, los teoremas de representación de Riesz y de Hahn-Banach conducen a resultados sobre la estructura de los elementos de $\mathcal{H}'_\mu$ que mejoran los recogidos por J.J. BETANCOR **[1991]**. Asimismo, siguiendo un procedimiento similar podemos caracterizar las sucesiones convergentes y los subconjuntos acotados en $\mathcal{H}'_\mu$ (cuando sobre $\mathcal{H}'_\mu$ se consideran la topología débil* o la fuerte).

En la Parte II establecemos las correspondientes propiedades topológicas para los espacios $\mathcal{B}_{\mu,a}$, $\mathcal{B}_\mu$, $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ y $\mathcal{B}'_\mu$ introducidos por A.H. ZEMANIAN **[1966b]**.

La Parte III está dedicada al estudio del espacio $\mathcal{O}$ de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$. Una vez caracterizado $\mathcal{O}$ como el espacio de todas las funciones complejas regulares $\theta=\theta(x)$ definidas sobre I satisfaciendo que para cada $k\in\mathbb{N}$ existe $n_k\in\mathbb{N}$ tal que $(1+x^2)^{-n_k}(x^{-1}D)^k\theta(x)$ está acotada sobre I, discutimos algunas propiedades del espacio vectorial topológico $\mathcal{O}$ y de su dual fuerte. Más precisamente, se prueba que tanto uno como otro son completos, nucleares, Schwartz, Montel y reflexivos; además, $\mathcal{O}$ es bornológico. Aunque la estructura del espacio $\mathcal{O}$ es análoga a la del espacio $\mathcal{O}_M$ de los multiplicadores de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{S}'$, resalta el hecho de que $\mathcal{O}$ no es un espacio normal de distribuciones.

La #-convolución sólo había sido definida en ciertos espacios de distribuciones y para valores particulares del parámetro μ (veánse J. DE SOUSA PINTO **[1985]** y J.M. GONZALEZ **[1985]**). Nuestro objetivo en el Capítulo 2 de esta Memoria es hacer un estudio sistemático y detallado de la #-convolución distribucional.

Inicialmente (Parte I) trasladamos a (1) la definición y el estudio de la #-convolución efectuados por I.I. HIRSCHMAN **[1960/61]**, F.M. CHOLEWINSKI **[1965]** y D.T. HAIMO **[1965]** para la transformación (2).

En la Parte II introducimos el espacio $\mathcal{E}_\mu$ de las funciones complejas regulares $\phi=\phi(x)$ definidas sobre I para las cuales existe $\lim_{x\to 0+} (x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$. Dotado de la topología engendrada por la familia de seminormas $\{\chi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$, donde

$$\chi^\mu_{n,k}(\phi) = \sup_{x\in]0,n[} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \qquad (\phi\in\mathcal{E}_\mu,\ n,k\in\mathbb{N}),$$

$\mathcal{E}_\mu$ es un espacio de Fréchet. El espacio dual de $\mathcal{E}_\mu$, denotado por $\mathcal{E}'_\mu$, está constituido por los elementos de $\mathcal{B}'_\mu$ que tienen su soporte acotado por la derecha. Se define la #-convolución de $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $f\in\mathcal{E}'_\mu$ mediante

$$\langle T\#f,\phi\rangle = \langle T(x),\langle f(y),(\tau_x\phi)(y)\rangle\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu).$$

En esta Parte II del Capítulo 2 también tratamos las identidades aproximadas para la #-convolución y probamos un teorema de tipo Paley-Wiener para las transformadas de Hankel de las distribuciones en $\mathcal{E}'_\mu$.

A continuación (Parte III) investigamos la #-convolución en el espacio $\mathcal{H}'_\mu$. Para cada $m\in\mathbb{Z}$, definimos $O_{\mu,m,\#}$ como el espacio vectorial de las funciones $\psi\in C^\infty(I)$ tales que

$$o_k^{\mu,m}(\psi) = \sup_{x\in I} |(1+x^2)^m x^{-\mu-1/2} S_\mu^k \psi(x)| < \infty$$

cualquiera que sea $k\in\mathbb{N}$, donde $S_\mu = x^{-\mu-1/2}Dx^{2\mu+1}Dx^{-\mu-1/2}$. Se dota a este espacio de la topología engendrada por el sistema de seminormas $\{o_k^{\mu,m}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Así, $O_{\mu,m,\#}$ es un espacio de Fréchet. Es claro que $\mathcal{H}_\mu \subset O_{\mu,m,\#}$, para todo $m\in\mathbb{Z}$. Denotamos por $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ la clausura de $\mathcal{H}_\mu$ en $O_{\mu,m,\#}$, y escribimos $\mathcal{O}_{\mu,\#} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mu,m,\#}$. Sobre $\mathcal{O}_{\mu,\#}$ se define la topología final localmente convexa asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{O}_{\mu,m,\#} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mu,\#}\}_{m\in\mathbb{Z}}$. El espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, dual de $\mathcal{O}_{\mu,\#}$, puede ser caracterizado como el espacio de operadores de convolución en $\mathcal{H}_\mu$ en el sentido siguiente: un funcional lineal $T\in\mathcal{H}'_\mu$ está en $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ si, y sólo si, $(T\#\phi)(x)=\langle T,\tau_x\phi\rangle\in\mathcal{H}_\mu$ para cada $\phi\in\mathcal{B}_\mu$. Además, la transformación generalizada de Hankel $\mathfrak{H}'_\mu$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ en $x^{\mu+1/2}\mathcal{O}$. La #-convolución de $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ se define por

$$\langle u\#T,\phi\rangle = \langle u(x),\langle T(y),(\tau_x\phi)(y)\rangle\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu),$$

verificándose que

$$\mathfrak{H}'_\mu(u\#T)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu u)(t)(\mathfrak{H}'_\mu T)(t) \qquad (t\in I).$$

Probamos propiedades algebraicas y de continuidad para la #-convolución generalizada.

En la Parte IV caracterizamos los elementos de $\mathcal{H}'_\mu$ y de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y las sucesiones convergentes en cada uno de estos espacios por medio de la convolución investigada; previamente, introducimos las soluciones fundamentales del operador $(1-S_\mu)^r$ ($r\in\mathbb{N}$). Establecemos también que $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ es el espacio de los endomorfismos lineales de $\mathcal{H}_\mu$ (respectivamente, $\mathcal{H}'_\mu$) que conmutan con traslaciones de Hankel. Cabe señalar que el espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ desempeña en nuestra teoría el mismo papel que el espacio $\mathcal{O}'_c$ en la definición de la convolución en $\mathcal{S}'$.

En una serie de trabajos, J. KUCERA **[1969a]**, **[1969b]**, **[1971]** considera una cadena de espacios de Hilbert en los cuales la transformación de Fourier es un automorfismo, analizando multiplicadores en tales espacios. Muy recientemente, R.H. PICARD **[1990]** (sin hacer referencia a los trabajos de Kucera) desarrolla un estudio esencialmente similar al de aquel autor.

Inspirados en estas investigaciones, en la Parte I del Capítulo 3 introducimos una familia $\{\mathcal{H}^r_\mu\}_{r\in\mathbb{Z}}$ de espacios de Hilbert tales que la transformación $\mathfrak{h}_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}^r_\mu$ ($r\in\mathbb{Z}$). El espacio $\mathcal{B}_\mu$ es denso en $\mathcal{H}^r_\mu$ ($r\in\mathbb{Z}$). Además, $\mathcal{H}_\mu=\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^r_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^{-r}_\mu$, algebraica y topológicamente.

El espacio $\mathcal{O}_{r,s}$ de los multiplicadores de $\mathcal{H}^r_\mu$ en $\mathcal{H}^s_\mu$ ($r,s\in\mathbb{N}$) se estudia en la Parte II, estableciéndose interesantes propiedades del mismo haciendo uso de normas L^2 y L^∞. También se prueba, aprovechando que $\mathcal{O}$ es bornológico, la validez de la igualdad (algebraica y topológica) $\mathcal{O}=\bigcap_{s\in\mathbb{N}}\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{r,s}$. Los operadores de convolución en los espacios $\mathcal{H}^r_\mu$ son definidos por medio de la transformación $\mathfrak{h}'_\mu$ a partir de los espacios $\mathcal{O}_{r,s}$.

Finalizamos esta Memoria estudiando en la Parte III del Capítulo 3 un problema de Cauchy que contiene al operador S_μ de Bessel en el marco de los espacios introducidos. Establecemos la existencia y unicidad de solución para el problema considerado recurriendo a la teoría de semigrupos de operadores lineales.

INDICE

CAPITULO 1

TOPOLOGIA Y MULTIPLICADORES

DE $\mathscr{H}_{\mu}$ Y DE $\mathscr{H}'_{\mu}$

I. LOS ESPACIOS $\mathcal{H}_\mu$ Y $\mathcal{H}'_\mu$.

1. Introducción.

Sea $\mu\in\mathbb{R}$. El espacio $\mathcal{H}_\mu$, introducido por ZEMANIAN **[1968]**, está formado por todas aquellas funciones infinitamente derivables $\phi=\phi(x)$ definidas sobre $I=]0,\infty[$ para las cuales son finitas las cantidades

$$\lambda^\mu_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in I} |x^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \qquad (m,k\in\mathbb{N}). \tag{1.1}$$

Dotado de la topología engendrada por la familia de seminormas $\{\lambda^\mu_{m,k}\}_{m,k\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio de Fréchet. A menudo nos referiremos a esta topología como la *topología usual* de $\mathcal{H}_\mu$.

La colección de seminormas

$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in I} |(1+x^2)^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu)$$

define sobre $\mathcal{H}_\mu$ la misma topología que la familia (1.1).

La literatura matemática adolece de un análisis detallado de la estructura de $\mathcal{H}_\mu$ como espacio vectorial topológico, desconociéndose incluso (hasta el momento) si este espacio es reflexivo. En la Sección 4 contribuimos a paliar tal carencia probando que $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio nuclear. Nótese que los espacios nucleares son de Schwartz, que los espacios de Fréchet-Schwartz son de Montel, y que los espacios de Montel son reflexivos.

Al ser $\mathcal{H}_\mu$ un espacio de Montel, la convergencia débil* y la fuerte de sucesiones coinciden en $\mathcal{H}'_\mu$. Además, por ser $\mathcal{H}_\mu$ tonelado, también coinciden los subconjuntos débilmente* y fuertemente acotados de $\mathcal{H}'_\mu$. La Sección 5 contiene representaciones de los elementos de $\mathcal{H}'_\mu$, caracterizaciones de las sucesiones convergentes en $\mathcal{H}'_\mu$, y representaciones de los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}'_\mu$.

Para nuestro estudio (presente y futuro) resultará útil disponer de otras familias de seminormas que den lugar a la topología usual de $\mathcal{H}_\mu$. Dedicamos a ello las Secciones 2 y 3. En la Sección 2 se definen ciertas familias de normas sobre $\mathcal{H}_\mu$ y se demuestra, por argumentos de comparación usuales, que dichas familias generan la topología de $\mathcal{H}_\mu$. En la Sección 3 se introduce un nuevo espacio de funciones $\mathcal{S}_\mu$, donde la transformación de Hankel es un automorfismo si $\mu\geq-\frac{1}{2}$. Como consecuencia probamos que, al menos cuando $\mu\geq-\frac{1}{2}$, este espacio coincide con $\mathcal{H}_\mu$. Usando las seminormas que comparecen en la definición de $\mathcal{S}_\mu$ es posible demostrar directamente tanto que $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio de Schwartz como que es un espacio de Montel, cualquiera que sea $\mu\in\mathbb{R}$.

2. La topología de $\mathcal{H}_\mu$.

Introducimos aquí nuevas familias de normas que dan lugar a la topología usual de $\mathcal{H}_\mu$.

Para $\mu\in\mathbb{R}$, $1\leq p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, ponemos

$$\|\phi\|_{\mu,\infty,r} = \max_{0\leq k\leq r}\ \sup_{x\in I}\ |(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)|,$$

$$\|\phi\|_{\mu,p,r} = \max_{0\leq k\leq r}\left\{\int_0^\infty |(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{2.1}$$

Proposición 2.1. Sea $\mu\in\mathbb{R}$. La topología usual de $\mathcal{H}_\mu$ es compatible con todas y cada una de las familias de normas $\{\|\cdot\|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$, para $1\leq p\leq\infty$.

Demostración. Es claro que la familia $\{\|\cdot\|_{\mu,\infty,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ da lugar a la topología usual de $\mathcal{H}_\mu$. Probaremos que $\{\|\cdot\|_{\mu,\infty,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ y $\{\|\cdot\|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ $(1\leq p<\infty)$ generan la misma topología en $\mathcal{H}_\mu$.

Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y sea $1<p<\infty$. Multiplicando y dividiendo el integrando en (2.1) por $(1+x^2)^p$ encontramos que

$$\|\phi\|_{\mu,p,r} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/p}\|\phi\|_{\mu,\infty,r+1} \qquad (r\in\mathbb{N}). \tag{2.2}$$

El mismo recurso, seguido de una aplicación de la desigualdad de Hölder, establece que

$$\|\phi\|_{\mu,1,r} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/q}\|\phi\|_{\mu,p,r+1} \qquad (r\in\mathbb{N}), \tag{2.3}$$

donde $q=p(p-1)^{-1}$ es el exponente conjugado de p.

Dados $k\in\mathbb{N}$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, la función $(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ es de rápido decrecimiento en el infinito. Así, si $r\in\mathbb{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}(1+x^2)^r|(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| &\le \int_x^\infty (1+x^2)^r t|(t^{-1}D)^{k+1}t^{-\mu-1/2}\phi(t)|dt\\ &\le \int_x^\infty (1+t^2)^{r+1}|(t^{-1}D)^{k+1}t^{-\mu-1/2}\phi(t)|dt\\ &\le \int_0^\infty (1+t^2)^{r+1}|(t^{-1}D)^{k+1}t^{-\mu-1/2}\phi(t)|dt \qquad (x\in I),\end{aligned}$$

de donde

$$\|\phi\|_{\mu,\infty,r} \le \|\phi\|_{\mu,1,r+1} \qquad (r\in\mathbb{N}). \tag{2.4}$$

En vista de (2.2), (2.3) y (2.4) queda probada la Proposición.□

Ahora, si $\mu\ge-\frac{1}{2}$, $1\le p<\infty$, $r\in\mathbb{N}$, y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, definimos

$$|\phi|_{\mu,\infty,r} = \max_{0\le k\le r}\sup_{x\in I}|(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)|,$$

$$|\phi|_{\mu,p,r} = \max_{0\le k\le r}\left\{\int_0^\infty |(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \tag{2.5}$$

siendo $S_\mu=x^{-\mu-1/2}Dx^{2\mu+1}Dx^{-\mu-1/2}$ el operador de Bessel.

Lema 2.2. Para $\mu\ge-\frac{1}{2}$ y cada p, $1\le p\le\infty$, las familias $\{|\cdot|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ engendran la misma topología sobre $\mathcal{H}_\mu$.

Demostración. Sean $r,k\in\mathbb{N}$ $(0\le k\le r)$, y sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Se verifica:

$$|(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(x)| = (1+x^2)^r \left|\int_x^\infty Dt^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(t)\,dt\right|$$
$$\le \int_x^\infty (1+t^2)^r |Dt^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(t)|\,dt \tag{2.6}$$
$$\le \int_0^\infty (1+t^2)^r |Dt^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(t)|\,dt \quad (x\in I).$$

Por otra parte,

$$Dt^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(t) = t^{-2\mu-1}\int_0^t u^{\mu+1/2} S_\mu^{k+1}\phi(u)du = -t^{-2\mu-1}\int_t^\infty u^{\mu+1/2} S_\mu^{k+1}\phi(u)du \quad (t\in I).$$

Luego, existen $n=n(\mu)\in\mathbb{N}$, $n\ge 1$, y una constante positiva $M=M(r)$ tales que

$$\int_0^\infty (1+t^2)^r |Dt^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(t)|\,dt =$$

$$= \int_0^1 (1+t^2)^r t^{-2\mu-1}\left|\int_0^t u^{\mu+1/2} S_\mu^{k+1}\phi(u)du\right|dt + \int_1^\infty (1+t^2)^r t^{-2\mu-1}\left|\int_t^\infty u^{\mu+1/2} S_\mu^{k+1}\phi(u)du\right|dt$$

$$\le \int_0^1 (1+t^2)^r \int_0^t u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,dudt + \int_1^\infty \frac{t^{-2\mu-1}}{1+t^2}\int_t^\infty (1+u^2)^{r+1} u^{\mu+1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,dudt$$

$$\le 2^r \int_0^\infty u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,du + \frac{\pi}{2}\int_0^\infty (1+u^2)^{r+1} u^{2\mu+1} u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,du$$

$$\le 2^r \int_0^\infty u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,du + \frac{\pi}{2}\int_0^\infty (1+u^2)^{r+n} u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,du$$

$$\le M\int_0^\infty (1+u^2)^{r+n} u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,du. \tag{2.7}$$

Combinando (2.6) y (2.7) resulta

$$|(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(x)| \le M\int_0^\infty (1+u^2)^{r+n} u^{-\mu-1/2} |S_\mu^{k+1}\phi(u)|\,du \quad (x\in I),$$

de donde

$$|\phi|_{\mu,\infty,r} \le M|\phi|_{\mu,1,r+n} \qquad (r\in\mathbb{N}). \tag{2.8}$$

Particularizando p=1 en (2.5), multiplicando y dividiendo el integrando de esa expresión por $1+x^2$, y aplicando la desigualdad de Hölder encontramos que

$$|\phi|_{\mu,1,r} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/q}|\phi|_{\mu,p,r+1} \qquad (r\in\mathbb{N}), \tag{2.9}$$

siendo $1<p<\infty$ y q el exponente conjugado de p. Un procedimiento similar conduce a la desigualdad

$$|\phi|_{\mu,p,r} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/p}|\phi|_{\mu,\infty,r+1} \qquad (r\in\mathbb{N}), \tag{2.10}$$

válida para $1\le p<\infty$.

Atendiendo a (2.8), (2.9) y (2.10) queda probado el Lema.□

Proposición 2.3. Sea $\mu\ge-\frac{1}{2}$. Si $1\le p\le\infty$, las familias $\{|\cdot|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ engendran la topología usual de $\mathcal{H}_\mu$.

Demostración. La topología que genera sobre $\mathcal{H}_\mu$ la familia $\{|\cdot|_{\mu,\infty,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ es menos fina que la usual de este espacio, pues

$$x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x) = [(2\mu+2)(x^{-1}D)+x^2(x^{-1}D)^2]^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$$

siempre que $x\in I$, $k\in\mathbb{N}$, y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Por otra parte, de acuerdo con las Proposiciones IV.2.2 y IV.2.4 en SANCHEZ **[1987]**, para alguna constante $C>0$ tenemos:

$$\sup_{x\in I}|x^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \le C\sup_{x\in I}|(1+x^2)^{m+1}x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)| \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Así pues, la familia $\{|\cdot|_{\mu,\infty,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ engendra la topología usual de $\mathcal{H}_\mu$. Terminamos la demostración recurriendo al Lema 2.2.□

3. El espacio $\mathscr{S}_\mu$.

Sea $\mu\in\mathbb{R}$. Denotamos por $\mathscr{S}_\mu$ el espacio vectorial formado por las funciones complejas $\phi=\phi(x)$ infinitamente derivables sobre $I=]0,\infty[$ tales que $\omega^\mu_{m,k}(\phi)<\infty$, donde

$$\omega^\mu_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in I} |x^m T_{\mu,k}\phi(x)| \qquad (m,k\in\mathbb{N});$$

aquí $T_{\mu,k}=N_{\mu+k-1}\ldots N_\mu$, siendo $N_\mu=x^{\mu+1/2}Dx^{-\mu-1/2}$. Un cálculo directo establece que

$$\begin{aligned} T_{\mu,k} &= x^k(x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}) \\ &= b^\mu_{k,0}x^{-k} + b^\mu_{k,1}x^{-k+1}D + \ldots + b^\mu_{k,k}D^k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde los coeficientes $b^\mu_{k,j}$ $(0\le j\le k)$ son constantes, con $b^\mu_{k,k}=1$.

Se comprueba inmediatamente que $\Omega=\{\omega^\mu_{m,k}\}_{m,k\in\mathbb{N}}$ constituye una familia numerable de seminormas. Esta familia es separante, por cuanto $\{\omega^\mu_{m,0}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una colección de normas. Así pues, Ω dota a $\mathscr{S}_\mu$ de estructura de espacio numerablemente multinormado.

Obtenemos una familia de normas $P=\{\rho^\mu_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathscr{S}_\mu$ equivalente a Ω con la propiedad de que $\rho^\mu_r\le\rho^\mu_{r'}$, $(r,r'\in\mathbb{N},\ r\le r')$, poniendo

$$\rho^\mu_r = \max_{0\le m,\,k\le r} \omega^\mu_{m,k} \qquad (r\in\mathbb{N}). \tag{3.2}$$

Proposición 3.1. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathscr{S}_\mu$ es un espacio de Fréchet.

Demostración. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{S}_\mu$; necesitamos probar que esta sucesión converge en dicho espacio.

Sea $k\in\mathbb{N}$. Reescribiendo (3.1) en la forma

$$D^k = T_{\mu,k}-(b^\mu_{k,0}x^{-k} + b^\mu_{k,1}x^{-k+1}D + \ldots + b^\mu_{k,k-1}x^{-1}D^{k-1}) \tag{3.3}$$

y procediendo por inducción sobre k encontramos que dado cualquier subconjunto compacto K de I es posible determinar constantes $C^{\mu}_{k,j}$ $(0\le j\le k)$, dependientes de K, tales que

$$\sup_{x\in K} |D^k\phi(x)| \le C^{\mu}_{k,0}\omega^{\mu}_{0,0}(\phi) + C^{\mu}_{k,1}\omega^{\mu}_{0,1}(\phi) +\ldots+ C^{\mu}_{k,k}\omega^{\mu}_{0,k}(\phi) \qquad (\phi\in\mathscr{S}_\mu). \tag{3.4}$$

Como $\omega^{\mu}_{0,k}(\phi_q-\phi_p) \xrightarrow[q,p\to\infty]{} 0$, se infiere de (3.4) que $\{D^k\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de I para todo $k\in\mathbb{N}$, y por lo tanto existe una función infinitamente derivable $\phi=\phi(x)$ definida sobre I tal que

$$D^k\phi_p(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} D^k\phi(x)$$

cualesquiera sean $k\in\mathbb{N}$, $x\in I$.

Esta ϕ es el límite de $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{S}_\mu$. En efecto, para cada $m,k\in\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon>0$ podemos encontrar $N^{\mu}_{m,k}=N^{\mu}_{m,k}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$|x^mT_{\mu,k}(\phi_q-\phi_p)(x)| < \varepsilon \qquad (x\in I,\ q,p\ge N^{\mu}_{m,k}). \tag{3.5}$$

Tomando límites para $q\to\infty$ en (3.5) resulta

$$\omega^{\mu}_{m,k}(\phi-\phi_p) \le \varepsilon \qquad (p\ge N^{\mu}_{m,k}). \tag{3.6}$$

Por otra parte, existen constantes $B^{\mu}_{m,k}$, independientes de p, tales que $\omega^{\mu}_{m,k}(\phi_p)\le B^{\mu}_{m,k}$, lo que combinado con (3.6) garantiza que

$$\omega^{\mu}_{m,k}(\phi) \le B^{\mu}_{m,k}+\varepsilon \qquad (m,k\in\mathbb{N}). \tag{3.7}$$

Sigue de (3.7) que $\phi\in\mathscr{S}_\mu$, mientras que (3.6) establece la convergencia de $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ a ϕ en $\mathscr{S}_\mu$, como pretendíamos.□

Proposición 3.2. Para $\mu\ge-\frac{1}{2}$, el espacio de Zemanian $\mathscr{H}_\mu$ es el subespacio de $\mathscr{S}_\mu$ constituido por las funciones $\phi\in\mathscr{S}_\mu$ tales que

$$\lim_{x\to 0+} (x^{-1}D)^kx^{-\mu-1/2}\phi(x) \tag{3.8.a}$$

existe cualquiera que sea $k\in\mathbb{N}$. La inclusión $\mathscr{H}_\mu \hookrightarrow \mathscr{S}_\mu$ es continua.

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y sean m,k∈ℕ; entonces

$$\sup_{x\in I} |x^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| < \infty.$$

Puesto que $\mu\geq-\frac{1}{2}$, la función

$$x^{m+k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) = x^{k+\mu+1/2}(x^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x))$$

está acotada cuando $0<x<1$. Por otra parte,

$$x^{m+k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) = x^{k-n+\mu+1/2}(x^{m+n}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

si se elige $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande. Queda así probado que $\phi\in\mathcal{S}_\mu$ y que la inclusión $\mathcal{H}_\mu \hookrightarrow \mathcal{S}_\mu$ es continua.

La existencia del límite (3.8.a) para toda $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ ya ha sido establecida en ZEMANIAN [1968, Lemma 5.2-1]. Recíprocamente, sea ϕ una función en $\mathcal{S}_\mu$, fijemos m,k∈ℕ, y pongamos

$$\psi(x) = x^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (x\in I).$$

Ya que $\mu\geq-\frac{1}{2}$, resulta

$$|\psi(x)| \leq x^{-k-\mu-1/2}\omega^\mu_{m,k}(\phi) < \omega^\mu_{m,k}(\phi) \qquad (1<x<\infty),$$

y es claro que ψ permanece acotada en un entorno de 0 si (3.8.a) existe para ϕ. Por consiguiente $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, completando la demostración.□

Nota. Los argumentos anteriores ponen de manifiesto que la condición (3.8.a) puede ser reemplazada por la (más débil)

$$(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) = O(1) \qquad (x\to0+). \tag{3.8.b}$$

Si $\phi\in\mathcal{S}_\mu$, (3.8.a) y (3.8.b) son equivalentes.

Proposición 3.3. Sea $\mu\in\mathbb{R}$. Toda $\phi\in\mathscr{S}_\mu$ está acotada. Para cualquier $k\in\mathbb{N}$, $D^k\phi$ es de rápido decrecimiento en el infinito; en particular, $\mathscr{S}_\mu$ es un subespacio denso propio de $L^1(I)$.

Demostración. La primera parte de la Proposición se prueba considerando las seminormas $\omega^\mu_{0,0}$. Haciendo uso de (3.3) y de las seminormas $\omega^\mu_{m,k}$ $(m,k\in\mathbb{N})$, un proceso inductivo permite constatar fácilmente que tanto las funciones de $\mathscr{S}_\mu$ como sus derivadas de cualquier orden son de rápido decrecimiento en el infinito. Por último, puesto que $\mathcal{D}(I)$ es denso en $L^1(I)$, lo mismo cabe afirmar de $\mathscr{S}_\mu$.□

Supongamos ahora que $\mu\geq-\frac{1}{2}$. En tal caso, la transformación de Hankel clásica $\mathfrak{H}_\mu$ está bien definida sobre $\mathscr{S}_\mu$ mediante la fórmula

$$\Phi(y) = (\mathfrak{H}_\mu\phi)(y) = \int_0^\infty \phi(x)(xy)^{1/2}J_\mu(xy)dx \qquad (y\in I),$$

como se justifica por la Proposición 3.3 y por el hecho de que la función $z^{1/2}J_\mu(z)$ está acotada para $z\in I$. Nos proponemos demostrar que $\mathfrak{H}_\mu$ es un automorfismo de $\mathscr{S}_\mu$ (Teorema 3.5); con este objeto recogemos en la Proposición 3.4 algunas reglas operacionales de la transformación de Hankel sobre el espacio $\mathscr{S}_\mu$, cuya demostración, aunque similar a la de las propiedades correspondientes al espacio $\mathcal{H}_\mu$ (véase ZEMANIAN [1968, Lemma 5.4-1]), incluimos por completitud.

Proposición 3.4. Sea $\mu\geq-\frac{1}{2}$. Si $\phi\in\mathscr{S}_\mu$ entonces $N_\mu\phi\in\mathscr{S}_{\mu+1}$, y se verifica:

$$\mathfrak{H}_{\mu+1}(N_\mu\phi) = -y(\mathfrak{H}_\mu\phi), \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{H}_{\mu+1}(-x\phi) = N_\mu(\mathfrak{H}_\mu\phi). \tag{3.10}$$

Demostración. Puesto que

$$\omega^{\mu+1}_{m,k}(N_\mu\phi) = \omega^{\mu}_{m,k+1}(\phi) \qquad (\phi\in\mathcal{S}_\mu),$$

N_μ es, en realidad, una aplicación lineal continua de $\mathcal{S}_\mu$ en $\mathcal{S}_{\mu+1}$; en particular, el primer miembro de (3.9) tiene sentido. Integrando por partes y aplicando la fórmula

$$D_x x^{\mu+1}J_{\mu+1}(xy) = yx^{\mu+1}J_\mu(xy) \qquad (x,y\in I)$$

encontramos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{\mu+1}(N_\mu\phi)(y) &= y^{1/2}\int_0^\infty D_x(x^{-\mu-1/2}\phi(x))x^{\mu+1}J_{\mu+1}(xy)dx\\ &= -y\int_0^\infty \phi(x)(xy)^{1/2}J_\mu(xy)dx \qquad (y\in I).\end{aligned}$$

Al escribir la segunda igualdad hemos tenido en cuenta la Proposición 3.3 y el comportamiento asintótico de la función $z^{1/2}J_{\mu+1}(z)$ $(\mu\geq-\frac{1}{2})$ cuando $z\to0+$ y $z\to\infty$.

Para establecer (3.10) derivamos bajo el signo integral y usamos la fórmula

$$D_y y^{-\mu}J_\mu(xy) = -xy^{-\mu}J_{\mu+1}(xy) \qquad (x,y\in I),$$

con lo que resulta la igualdad

$$\begin{aligned}D_y y^{-\mu-1/2}\Phi(y) &= \int_0^\infty \phi(x)x^{1/2}D_y y^{-\mu}J_\mu(xy)dx\\ &= -\int_0^\infty \phi(x)x^{3/2}y^{-\mu}J_{\mu+1}(xy)dx \qquad (y\in I).\end{aligned} \tag{3.11}$$

La derivación bajo el signo integral es lícita, pues, siendo $J_{\mu+1}(z)$ acotada en I $(\mu\geq-\frac{1}{2})$, en virtud de la Proposición 3.3 la integral del segundo miembro de (3.11) converge uniformemente sobre compactos de I. Ahora, multiplicando por $y^{\mu+1/2}$ ambos miembros de (3.11) obtenemos (3.10).□

Ya estamos en disposición de probar el resultado fundamental.

Teorema 3.5. La transformación de Hankel $\mathfrak{h}_\mu$ es un automorfismo de $\mathscr{S}_\mu$ ($\mu\geq-\frac{1}{2}$).

Demostración. Sean $\phi\in\mathscr{S}_\mu$, $\Phi=\mathfrak{h}_\mu\phi$, y $m,k\in\mathbb{N}$. Aplicando (3.9) m veces y (3.10) k veces, y teniendo en cuenta la igualdad

$$N_{\mu+k+m-1}\cdots N_{\mu+k+1}N_{\mu+k}x^k\phi(x) = x^kN_{\mu+m-1}\cdots N_{\mu+1}N_\mu\phi(x) \qquad (x\in I),$$

encontramos que

$$\begin{aligned}(-y)^mN_{\mu+k-1}\cdots N_{\mu+1}N_\mu\Phi(y) &= \\ &= \int_0^\infty(-x)^k(N_{\mu+m-1}\cdots N_{\mu+1}N_\mu\phi(x))(xy)^{1/2}J_{\mu+m+k}(xy)dx \qquad (y\in I).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Si $C^\mu_{m,k}$ es una cota de $z^{1/2}J_{\mu+m+k}(z)$ $(z\in I)$, reescribimos (3.12) en la forma

$$(-1)^{m+k}y^mT_{\mu,k}\Phi(y) = \int_0^\infty(1+x^2)(x^kT_{\mu,m}\phi(x))(xy)^{1/2}J_{\mu+m+k}(xy)\frac{dx}{1+x^2} \qquad (y\in I)$$

para obtener

$$\omega^\mu_{m,k}(\Phi) \leq \frac{\pi}{2}C^\mu_{m,k}(\omega^\mu_{k,m}(\phi)+\omega^\mu_{k+2,m}(\phi)).$$

Así pues, $\Phi\in\mathscr{S}_\mu$, y la aplicación lineal $\mathfrak{h}_\mu$ es continua de $\mathscr{S}_\mu$ en $\mathscr{S}_\mu$.

El teorema de inversión clásico es aplicable gracias a la Proposición 3.3, y se verifica que $\mathfrak{h}_\mu^{-1}=\mathfrak{h}_\mu$. Concluimos que $\mathfrak{h}_\mu$ es un automorfismo de $\mathscr{S}_\mu$, como se pretendía.□

Mediante el Teorema 3.5 establecemos que, para $\mu\geq-\frac{1}{2}$, $\mathscr{S}_\mu$ no es otro que el espacio de Zemanian $\mathcal{H}_\mu$.

Teorema 3.6. Si $\mu\geq-\frac{1}{2}$, los espacios vectoriales topológicos $\mathcal{S}_\mu$ y $\mathcal{H}_\mu$ coinciden.

Demostración. Introduzcamos el operador

$$(Q_{\mu,k}\Phi)(y) = (-1)^k(y^{-1}D)^k y^{-\mu-1/2}\Phi(y) \qquad (y\in I).$$

Sea $\Phi\in\mathcal{S}_\mu$, y sea $\phi\in\mathcal{S}_\mu$ tal que $\mathfrak{H}_\mu\phi=\Phi$. Entonces

$$(Q_{\mu,k}\Phi)(y) = \int_0^\infty x^{2k+\mu+1/2}\phi(x)(xy)^{-\mu-k}J_{\mu+k}(xy)dx \qquad (y\in I).$$

La función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ $(\mu\geq-\frac{1}{2})$ está acotada sobre I (independientemente de μ). Si fijamos $r\in\mathbb{N}$ tal que $r>2k+\mu+\frac{3}{2}$ y expresamos la igualdad anterior en la forma

$$(Q_{\mu,k}\Phi)(y) = \int_0^\infty \frac{x^{2k+\mu+1/2}}{1+x^r}(1+x^r)\phi(x)(xy)^{-\mu-k}J_{\mu+k}(xy)dx \qquad (y\in I),$$

para cierta constante C_k^μ podemos escribir

$$\sup_{y\in I}|(Q_{\mu,k}\Phi)(y)| \leq C_k^\mu(\omega_{0,0}^\mu(\phi)+\omega_{r,0}^\mu(\phi)).$$

La conclusión deseada se desprende de la Proposición 3.2 y del teorema de la aplicación abierta.□

4. Algunas propiedades de $\mathcal{H}_\mu$.

En esta Sección demostramos que el espacio vectorial topológico $\mathcal{H}_\mu$ $(\mu\in\mathbb{R})$ es nuclear (TREVES [1967, Definition III.50.1]), Schwartz (HORVATH [1966, Definition 3.15.1]), Montel (HORVATH [1966, Definition 3.9.1]) y reflexivo, y deducimos que su dual fuerte es nuclear, Schwartz, bornológico (HORVATH [1966, Definition 3.7.1]), completo, Montel y reflexivo.

A fin de establecer la nuclearidad de $\mathcal{H}_\mu$ $(\mu\in\mathbb{R})$ será útil el resultado siguiente.

Lema 4.1. Sea $\mu\in\mathbb{R}$. Para $r,k\in\mathbb{N}$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, se verifica:

$$\sum_{k=0}^{r} \sup_{x\in I} |(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \le$$

$$\le (r+1)\sum_{k=0}^{r+1}\int_0^\infty |(1+t^2)^{r+1}(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t)|\,dt.$$

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned}(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) &= -\int_x^\infty D((1+t^2)^r(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t))dt\\ &= -\int_x^\infty 2rt(1+t^2)^{r-1}(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t)dt\\ &\quad -\int_x^\infty t(1+t^2)^r(t^{-1}D)^{k+1} t^{-\mu-1/2}\phi(t)dt \qquad (x\in I).\end{aligned}$$

Como $2t\le 1+t^2$ $(t\in I)$, sigue que

$$\begin{aligned}|(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| &\le r\int_0^\infty |(1+t^2)^r(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t)|dt\\ &\quad +\int_0^\infty |(1+t^2)^{r+1}(t^{-1}D)^{k+1} t^{-\mu-1/2}\phi(t)|dt \qquad (x\in I),\end{aligned}$$

probando el Lema.□

Proposición 4.2. El espacio $\mathcal{H}_\mu$ $(\mu\in\mathbb{R})$ es nuclear.

Demostración. Sean $r,k\in\mathbb{N}$, y sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Para $t\in I$ y $0\le k\le r+2$ definimos $u_{t,k}\in\mathcal{H}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle u_{t,k},\phi\rangle = (1+t^2)^{r+2}(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t) \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu),$$

y consideramos

$$V = \{\ \phi\in\mathcal{H}_\mu \ :\ \sum_{k=0}^{r+2}\sup_{t\in I}|(1+t^2)^{r+2}(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t)| < 1\ \}.$$

Nótese que V es un entorno del origen en $\mathcal{H}_\mu$, y que cada $u_{t,k}$ ($t\in I$, $0\le k\le r+2$) pertenece al conjunto polar V° de V. Es posible entonces definir sobre V° una medida de Radon positiva σ mediante la ecuación

$$\langle\sigma,\varphi\rangle = \int_{V\circ} \varphi d\sigma = (r+1) \sum_{k=0}^{r+2} \int_0^\infty \varphi(u_{t,k})(1+t^2)^{-1}dt \qquad (\varphi\in C(V^\circ)).$$

Ahora, el Lema 4.1 implica

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{\mu,\infty,r} &= \max_{0\le k\le r} \sup_{x\in I} |(1+x^2)^r (x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \\
&\le \sum_{k=0}^{r} \sup_{x\in I} |(1+x^2)^r (x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \\
&\le (r+1) \sum_{k=0}^{r+2} \int_0^\infty |(1+t^2)^{r+1} (t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\phi(t)|dt \\
&= (r+1) \sum_{k=0}^{r+2} \int_0^\infty |\langle u_{t,k},\phi\rangle| (1+t^2)^{-1}dt \\
&= \int_{V\circ} |\langle u,\phi\rangle| d\sigma(u) \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).
\end{aligned}$$

Puesto que los conjuntos

$$V(r,\varepsilon) = \{ \phi\in\mathcal{H}_\mu : \|\phi\|_{\mu,\infty,r} < \varepsilon \} \qquad (r\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0)$$

forman una base de entornos del origen en $\mathcal{H}_\mu$ (Proposición 2.1), la nuclearidad de este espacio sigue de PIETSCH [1972, Proposition 4.1.5].□

Una vez establecida la Proposición 4.2, es posible inferir algunas consecuencias aplicando propiedades generales de espacios nucleares.

Corolario 4.3. El espacio $\mathcal{H}'_\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$) es nuclear respecto de su topología fuerte.

Demostración. Los duales fuertes de espacios de Fréchet nucleares también son nucleares (TRÉVES [1967, Proposition III.50.6]).□

Corolario 4.4. Para todo $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathcal{H}'_\mu$ (con la topología fuerte) es un espacio de Schwartz.

Demostración. Los espacios nucleares son de Schwartz (WONG [1979, Proposition 3.2.5]).□

La misma razón aducida en la demostración del Corolario 4.4 prueba que $\mathcal{H}_\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$) es un espacio de Schwartz. Los espacios de Fréchet-Schwartz son de Montel (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.15.4]), y los espacios de Montel son reflexivos (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.9.1]). Por consiguiente, $\mathcal{H}_\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$) es Montel y reflexivo. Haciendo uso del Teorema 3.6 es posible encontrar demostraciones directas del carácter Schwartz y del carácter Montel de $\mathcal{H}_\mu$, al menos cuando $\mu>-\frac{1}{2}$. Esta restricción no es significativa, pues, habida cuenta de que la aplicación $\phi(x)\longmapsto x^{\nu-\mu}\phi(x)$ define un isomorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\nu$ cualesquiera sean $\mu,\nu\in\mathbb{R}$, podemos extender tales propiedades de $\mathcal{H}_\mu$ a todo valor de $\mu\in\mathbb{R}$.

Abordamos en primer lugar la propiedad de ser Schwartz. Para $\mu>-\frac{1}{2}$, consideramos sobre $\mathcal{H}_\mu$ la familia de normas $P=\{\rho^\mu_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, donde ρ^μ_r ($r\in\mathbb{N}$) viene dada por (3.2); dicha familia engendra en $\mathcal{H}_\mu$ la topología usual de este espacio (Teorema 3.6). Si $r\in\mathbb{N}$, definimos $\mathcal{S}^r_\mu$ como el espacio vectorial de las funciones $\phi\in C^r(I)$ tales que $\rho^\mu_r(\phi)<\infty$. Argumentos similares a los empleados en la demostración de la Proposición 3.1 permiten constatar que ρ^μ_r hace de $\mathcal{S}^r_\mu$ un espacio de Banach. Resulta evidente que $\mathcal{S}^{r+1}_\mu\subset\mathcal{S}^r_\mu$ con continuidad, y que la topología de $\mathcal{H}_\mu$ es la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\mathcal{H}_\mu\hookrightarrow\mathcal{S}^r_\mu$ ($r\in\mathbb{N}$). A continuación probaremos que a cada $s\in\mathbb{N}$ le corresponde $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, tal que la inclusión $\mathcal{S}^r_\mu\hookrightarrow\mathcal{S}^s_\mu$ es compacta.

Proposición 4.5. Sea $\mu>-\frac{1}{2}$. Dado $s\in\mathbb{N}$ existe $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, tal que la bola unidad cerrada $\mathbb{B}^r_\mu=\{\phi\in\mathscr{S}^r_\mu : \rho^\mu_r(\phi)\le 1\}$ de $\mathscr{S}^r_\mu$ es relativamente compacta en $\mathscr{S}^s_\mu$.

Demostración. Afirmamos que $\mathbb{B}^r_\mu$ es relativamente compacta en $\mathscr{E}^s(I)$ cuando $r>s$. Para comprobarlo observemos, ante todo, que los conjuntos

$$\{\, D^k\phi \;:\; \phi\in\mathbb{B}^r_\mu \,\} \qquad (k\in\mathbb{N},\ 0\le k\le s)$$

son equicontinuos. Pues, fijados $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le s$, $\phi\in\mathbb{B}^r_\mu$, un subintervalo compacto K de I, y puntos $x,y\in K$, con $x<y$, según (3.3) se cumple

$$\begin{aligned}|D^k\phi(x)-D^k\phi(y)| &= \left|\int_x^y D^{k+1}\phi(t)dt\right|\\ &\le \int_x^y |T_{\mu,k+1}\phi(t)|dt + \sum_{j=0}^{k}\int_x^y |b^\mu_{k+1,j}t^{-k-1+j}D^j\phi(t)|dt.\end{aligned}$$

De aquí, procediendo por inducción, resulta

$$|D^k\phi(x)-D^k\phi(y)| \le M|x-y| \qquad (x,y\in K),$$

donde M es cierta constante positiva dependiente de K. Con ello queda establecido nuestro aserto inicial. A partir de (3.3) se demuestra, asimismo por inducción, que los conjuntos

$$\{\, D^k\phi(x) \;:\; \phi\in\mathbb{B}^r_\mu \,\} \qquad (x\in I,\ k\in\mathbb{N},\ 0\le k\le s)$$

están acotados en $\mathbb{C}$. De Horvath [1966, Proposition 3.9.11], ya se infiere la precompacidad de $\mathbb{B}^r_\mu$ en $\mathscr{E}^s(I)$.

Valiéndonos ahora del Teorema 3.6 elegimos $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, y $C>0$, tales que

$$\sup_{x\in I} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\varphi(x)| \le C\rho^\mu_r(\varphi) \le C \qquad (0\le k\le s,\ \varphi\in\mathbb{B}^r_\mu),$$

y consideramos una sucesión $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{B}^r_\mu$, convergente a $\phi\in\mathscr{E}^s(I)$ en la topología de $\mathscr{E}^s(I)$. Completaremos la prueba estableciendo que $\phi\in\mathscr{S}^s_\mu$ y que $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ en la topología de $\mathscr{S}^s_\mu$.

Ya que

$$\rho_r^{\mu}(\varphi) = \max_{0\le m,\, k\le r}\ \sup_{x\in I} |x^m T_{\mu,k}\varphi(x)| \le 1 \qquad (\varphi\in \mathbb{B}_\mu^r),$$

se tiene

$$|x^m T_{\mu,k}\varphi(x)| \le x^{-1} \qquad (x\in I,\ 0\le m,k\le s,\ \varphi\in \mathbb{B}_\mu^r).$$

Consiguientemente, dado $\varepsilon>0$ existe $\eta>1$ tal que

$$|x^m T_{\mu,k}\phi_p(x)| \le \varepsilon/2 \qquad (x>\eta,\ 0\le m,k\le s,\ p\in\mathbb{N}), \tag{4.1}$$

y también

$$|x^m T_{\mu,k}\phi(x)| \le \varepsilon/2 \qquad (x>\eta,\ 0\le m,k\le s), \tag{4.2}$$

por cuanto la convergencia en $\mathcal{E}^s(I)$ entraña la convergencia puntual de las sucesiones $\{D^k\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ $(k\in\mathbb{N})$.

La elección de r permite encontrar $\eta>1$ de modo que, además,

$$\begin{aligned} |x^m T_{\mu,k}\phi_p(x)| &\le \eta^{-m-k-\mu-1/2}|(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi_p(x)| \\ &\le C\eta^{-m-k-\mu-1/2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.3) \\ &\le \varepsilon/2 \qquad (0<x<\eta^{-1},\ 0\le m,k\le s,\ p\in\mathbb{N}), \end{aligned}$$

y, por un paso al límite,

$$|x^m T_{\mu,k}\phi(x)| \le \varepsilon/2 \qquad (0<x<\eta^{-1},\ 0\le m,k\le s). \tag{4.4}$$

Sobre el compacto $\eta^{-1}\le x\le\eta$ la sucesión $\{D^k\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $D^k\phi$ cualquiera que sea $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le s$. Así, existe $N_s^{\mu}=N_s^{\mu}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ verificando

$$|x^m T_{\mu,k}(\phi-\phi_p)(x)| < \varepsilon \qquad (\eta^{-1}\le x\le\eta,\ 0\le m,k\le s,\ p\ge N_s^{\mu}). \tag{4.5}$$

De la combinación de (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) y (4.5) resulta

$$\rho_s^{\mu}(\phi-\phi_p) \le \varepsilon \qquad (p\ge N_s^{\mu}), \tag{4.6}$$

y sigue de (4.6) que

$$\rho^{\mu}_{s}(\phi) \leq \rho^{\mu}_{s}(\phi-\phi_{p}) + \rho^{\mu}_{s}(\phi_{p}) < \varepsilon + \rho^{\mu}_{s}(\phi_{p}) < \infty, \tag{4.7}$$

donde $p\in\mathbb{N}$, $p\geq N^{\mu}_{s}$, es fijo. La expresión (4.7) prueba que $\phi\in\mathscr{S}^{s}_{\mu}$, mientras que (4.6) establece la convergencia de $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ a ϕ en la topología de $\mathscr{S}^{s}_{\mu}$, como pretendíamos.□

Proposición 4.6. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathcal{H}_{\mu}$ es un espacio de Schwartz.

Demostración. Si $\mu>-\frac{1}{2}$ esta propiedad se deduce de la Proposición 4.5, atendiendo a un resultado de Sebastião e Silva (HORVATH [1966, Proposition 3.15.9]). Puesto que la aplicación $\phi(x)\longmapsto x^{\nu-\mu}\phi(x)$ define un isomorfismo de $\mathcal{H}_{\mu}$ en $\mathcal{H}_{\nu}$ cualesquiera sean $\mu,\nu\in\mathbb{R}$, podemos afirmar que $\mathcal{H}_{\mu}$ es Schwartz para todo $\mu\in\mathbb{R}$.□

Nos ocupamos a continuación de dar una prueba directa del carácter Montel de $\mathcal{H}_{\mu}$. Para la validez de los argumentos empleados se hace necesaria, al igual que antes, la restricción $\mu>-\frac{1}{2}$, sin que tal restricción sea significativa en virtud de la existencia del isomorfismo $\phi(x)\longmapsto x^{\nu-\mu}\phi(x)$ entre $\mathcal{H}_{\mu}$ y $\mathcal{H}_{\nu}$ $(\mu,\nu\in\mathbb{R})$.

Proposición 4.7. Para todo $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathcal{H}_{\mu}$ es un espacio de Montel.

Demostración. Como ha quedado dicho, podemos suponer que $\mu>-\frac{1}{2}$. Sabemos que $\mathcal{H}_{\mu}$ es tonelado porque es un espacio de Fréchet (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.6.3]); necesitamos probar que todo subconjunto acotado es relativamente compacto en $\mathcal{H}_{\mu}$. Sea entonces B un subconjunto acotado de $\mathcal{H}_{\mu}$. Ya que B es acotado en $\mathcal{E}(I)$, que es un espacio de Montel, basta demostrar que si $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en B que converge a ϕ en $\mathcal{E}(I)$ entonces $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}$ y $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ en $\mathcal{H}_{\mu}$.

La hipótesis de acotación en $\mathcal{H}_\mu$ de la sucesión $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ y los Teoremas 3.5 y 3.6 permiten hallar constantes $B^\mu_{m,k}$, independientes de p, satisfaciendo

$$|x^m T_{\mu,k}\phi_p(x)| \le B^\mu_{m,k}, \qquad |x^m T_{\mu,k}(\mathfrak{H}_\mu\phi_p)(x)| \le B^\mu_{m,k} \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ x\in I). \tag{4.8}$$

Como $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{E}(I)$, tomando límites para $p\to\infty$ en la primera desigualdad de (4.8) encontramos que $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, siendo

$$|x^m T_{\mu,k}\phi(x)| \le B^\mu_{m,k} \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ x\in I).$$

No se pierde generalidad al suponer también que

$$|x^m T_{\mu,k}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(x)| \le B^\mu_{m,k} \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ x\in I).$$

Sea ahora $\varepsilon>0$. En vista de (4.8) podemos elegir $\rho=\rho(\mu,m,k,\varepsilon)>0$ de manera que

$$|x^m T_{\mu,k}(\phi-\phi_p)(x)| \le 2B^\mu_{m+1,k}\rho^{-1} < \varepsilon \qquad (m,k,p\in\mathbb{N},\ x>\rho) \tag{4.9}$$

y que

$$|x^m T_{\mu,k}(\phi-\phi_p)(x)| \le 2C^\mu_k(B^\mu_{0,0}+B^\mu_{r,0})\rho^{-m-k-\mu-1/2} < \varepsilon \qquad (m,k,p\in\mathbb{N},\ x<\rho^{-1}), \tag{4.10}$$

donde $r\in\mathbb{N}$, $r>2k+\mu+\frac{3}{2}$, y C^μ_k es como en la demostración del Teorema 3.6. En el compacto $\rho^{-1}\le x\le\rho$ la sucesión $\{D^k\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $D^k\phi$ cualquiera que sea $k\in\mathbb{N}$; existe entonces $N^\mu_{m,k}=N^\mu_{m,k}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ verificando

$$|x^m T_{\mu,k}(\phi-\phi_p)(x)| < \varepsilon \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ p\ge N^\mu_{m,k},\ \rho^{-1}\le x\le\rho). \tag{4.11}$$

De la combinación de (4.9), (4.10) y (4.11) se concluye

$$\omega^\mu_{m,k}(\phi-\phi_p) \le \varepsilon \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ p\ge N^\mu_{m,k});$$

así, $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ en $\mathcal{H}_\mu$, como queríamos probar.□

Corolario 4.8. Para todo $\mu\in\mathbb{R}$, el espacio $\mathcal{H}_\mu$ es reflexivo.

Demostración. Los espacios de Montel son reflexivos (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.9.1]).□

Corolario 4.9. El espacio $\mathcal{H}'_\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$), provisto de su topología fuerte, es bornológico y completo; en particular, Montel y reflexivo.

Demostración. El dual fuerte de espacios de Fréchet reflexivos es bornológico (SCHAEFER [1971, IV-6.6, Corollary 2]). Nótese que $\mathcal{H}_\mu$ es bornológico, porque es un espacio de Fréchet (SCHAEFER [1971, II-8.1]). Los espacios bornológicos tienen duales fuertes completos (SCHAEFER [1971, IV-6.1]), y los espacios bornológicos, completos y nucleares son de Montel (SCHAEFER [1971, Exercise IV-19 (b)]). Finalmente, los espacios de Montel son reflexivos (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.9.1]).□

5. Estructura en $\mathcal{H}'_\mu$.

En esta Sección, motivados por resultados de KITCHENS-SWARTZ [1974, Theorem 6] para duales de espacios de tipo $K\{M_p\}$, obtenemos una caracterización de la convergencia secuencial en $\mathcal{H}'_\mu$. Mediante la misma técnica caracterizamos también los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}'_\mu$ y mejoramos y complementamos la representación de los elementos de este espacio dada por BETANCOR [1991, Theorem 4].

Proposición 5.1. Sea $\mu\in\mathbb{R}$. Un funcional lineal T está en $\mathcal{H}'_\mu$ si, y sólo si, a cada q, $1<q\le\infty$, le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_k\in L^q(I)$ $(0\le k\le r)$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k(1+x^2)^r f_k. \tag{5.1}$$

Demostración. Fijemos p, $1\le p<\infty$, y sea q, $1<q\le\infty$, el exponente conjugado de p. Si $T\in\mathcal{H}'_\mu$ entonces, en virtud de la Proposición 2.1 y de ZEMANIAN [1968, Theorem 1.8-1], existen $r\in\mathbb{N}$ y $C>0$ tales que

$$|\langle T,\phi\rangle| \le C\|\phi\|_{\mu,p,r} \quad (\phi\in\mathcal{H}_\mu). \tag{5.2}$$

Denotemos por Γ_p la suma directa de r+1 copias de $L^p(I)$, normado mediante

$$\|(f_j)_{0\le j\le r}\|_p = \max_{0\le j\le r} \|f_j\|_p, \tag{5.3}$$

y por Ξ_q la suma directa de r+1 copias de $L^q(I)$, normado por

$$\|(f_j)_{0\le j\le r}\|_q = \sum_{j=0}^{r} \|f_j\|_q.$$

Consideremos la aplicación inyectiva

$$\begin{aligned} F\colon \mathcal{H}_\mu &\longrightarrow \Gamma_p \\ \phi &\longmapsto F(\phi)=\left((1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)\right)_{0\le k\le r}, \end{aligned}$$

y definamos sobre $F(\mathcal{H}_\mu)\subset\Gamma_p$ el funcional lineal L mediante la fórmula $\langle L,F(\phi)\rangle=\langle T,\phi\rangle$. En vista de (5.2) y (5.3), L es continuo, con norma a lo sumo C. Continuamos denotando por L la extensión de Hahn-Banach de este funcional a Γ_p que conserva la norma. La representación de Riesz $(f_k)_{0\le k\le r}\in\Xi_q$ de L sobre Γ_p satisface

$$\langle T,\phi\rangle = \langle L,F(\phi)\rangle = \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty f_k(x)(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)dx \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Esto prueba (5.1).

Inversamente, fijemos q, $1<q\le\infty$, y sea p, $1\le p<\infty$, el exponente conjugado de q. Si T viene dado por (5.1), la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned} |\langle T,\phi\rangle| &\le \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty |f_k(x)(1+x^2)^r(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)|dx \\ &\le \|\phi\|_{\mu,p,r}\sum_{k=0}^{r}\|f_k\|_q \end{aligned}$$

para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, probando que $T\in\mathcal{H}'_\mu$.□

Conviene observar que en la caracterización de los elementos de $\mathcal{H}'_\mu$ obtenida en la Proposición 5.1 comparecen derivadas de múltiplos polinómicos de funciones pertenecientes a todas las clases $L^q(I)$, $1<q\leq\infty$, y no sólo a $L^\infty(I)$. Hemos obtenido así una representación más general, y formalmente más simple, que la dada por BETANCOR [1991, Theorem 4].

Mediante la técnica empleada en la prueba de la Proposición 5.1, y aplicando la Proposición 2.3 en sustitución de la Proposición 2.1, también se demuestra:

Proposición 5.2. Sea $\mu\geq-\frac{1}{2}$. Se verifica que $T\in\mathcal{H}'_\mu$ si, y sólo si, para cada q, $1<q\leq\infty$, existen $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_k\in L^q(I)$ $(0\leq k\leq r)$ tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k (1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} f_k .$$

En las Proposiciones 5.4 y 5.5 se establecerá que el máximo orden de los operadores diferenciales comparecientes en las representaciones dadas por las Proposiciones 5.1 y 5.2 es uniforme sobre subconjuntos acotados de $\mathcal{H}'_\mu$. En el siguiente Lema 5.3, que resulta fundamental para este propósito, hacemos notar que los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}'_\mu$ son independientes de la topología (débil* o fuerte) que se considere sobre dicho espacio.

Lema 5.3. Sea $\mu\in\mathbb{R}$, y sea B' un subconjunto de $\mathcal{H}'_\mu$. Son equivalentes:

(i) B' es débilmente* acotado.

(ii) B' es fuertemente acotado.

(iii) B' es equicontinuo.

(iv) Para todo $\varepsilon>0$ existe un entorno V de 0 en $\mathcal{H}_\mu$, tal que:

$$\sup \{ |\langle T,\phi\rangle| : T\in B',\ \phi\in V \} < \varepsilon.$$

(v) Para todo p, $1\leq p\leq\infty$, existen $C>0$, $r\in\mathbb{N}$ tales que

$$|\langle T,\phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{\mu,p,r} \qquad (T\in B',\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

(vi) *(Si $\mu\geq -\frac{1}{2}$)* Para todo p, $1\leq p\leq\infty$, existen $C>0$, $r\in\mathbb{N}$ tales que

$$|\langle T,\phi\rangle| \leq C|\phi|_{\mu,p,r} \qquad (T\in B',\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Demostración. La equivalencia entre *(i)*, *(ii)* y *(iii)* proviene de ser tonelado el espacio $\mathcal{H}_\mu$ (TRÉVES [1967, Theorem II.33.2]). Que los enunciados *(iii)* y *(iv)* son equivalentes sigue de la propia definición de equicontinuidad, mientras que *(iv)*, *(v)* y *(vi)* lo son en virtud de las Proposiciones 2.1 y 2.3.□

Proposición 5.4. Sea $\mu\in\mathbb{R}$, sea B' un subconjunto (débilmente*, fuertemente) acotado de $\mathcal{H}'_\mu$, y sea $1<q\leq\infty$. Existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$, y, para cada $T\in B'$, funciones $f_{T,k}\in L^q(I)$ $(0\leq k\leq r)$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k(1+x^2)^r f_{T,k},$$

con

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{T,k}\|_q \leq C.$$

Demostración. Basta proceder como en la prueba de la Proposición 5.1, teniendo en cuenta que, en virtud del Lema 5.3, la desigualdad (5.2) se verifica ahora para $C>0$ y $r\in\mathbb{N}$ independientes de $T\in B'$.□

Similarmente, se establece:

Proposición 5.5. Sea $\mu\geq -\frac{1}{2}$, sea B' un subconjunto (débilmente*, fuertemente) acotado de $\mathcal{H}'_\mu$, y sea $1<q\leq\infty$. Existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$, y, para cada $T\in B'$, funciones $f_{T,k}\in L^q(I)$ $(0\leq k\leq r)$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} f_{T,k},$$

cumpliéndose además

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{T,k}\|_q \leq C.$$

Nuestro próximo objetivo es caracterizar las sucesiones convergentes en $\mathcal{H}'_\mu$. Notemos, ante todo, que la convergencia débil* y la fuerte de sucesiones son equivalentes en $\mathcal{H}'_\mu$, porque $\mathcal{H}_\mu$ es Montel (TRÉVES [1967, Proposition II.34.6, Corollary 1]). Para el cumplimiento de tal propósito necesitamos introducir nuevos espacios de funciones.

Si $\mu\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{N}$ y $1\le p\le\infty$, $\mathcal{H}^p_{\mu,r}$ denota el espacio de todas aquellas $\phi\in C^r(I)$ cuya norma $\|\phi\|_{\mu,p,r}$ es finita, topologizado mediante esta norma (véase la Sección 2). Escribiremos $\mathcal{H}_{\mu,r}$ en vez de $\mathcal{H}^\infty_{\mu,r}$. Claramente $\mathcal{H}^p_{\mu,r+1}\subset\mathcal{H}^p_{\mu,r}$, con inclusión continua. La Proposición 2.1 garantiza que la topología de $\mathcal{H}_\mu$ coincide con la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\mathcal{H}_\mu\hookrightarrow\mathcal{H}^p_{\mu,r}$ para r recorriendo $\mathbb{N}$. Cabe advertir que, fijado p ($1\le p\le\infty$), dos cualesquiera de los espacios $\mathcal{H}^p_{\mu,r}$, $\mathcal{H}^p_{\nu,r}$ ($\mu,\nu\in\mathbb{R}$) son isométricamente isomorfos por la aplicación $\phi(x)\longmapsto x^{\nu-\mu}\phi(x)$.

Comenzamos estableciendo que dado $s\in\mathbb{N}$ existe $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, tal que la inclusión $\mathcal{H}^p_{\mu,r}\hookrightarrow\mathcal{H}^p_{\mu,s}$ es compacta.

Lema 5.6. Sean $\mu\in\mathbb{R}$, $1\le p\le\infty$. A cada $s\in\mathbb{N}$ le corresponde $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, tal que la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}^p_{\mu,r}$ es relativamente compacta en $\mathcal{H}^p_{\mu,s}$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mu>-\frac{1}{2}$. Sean $j\in\mathbb{N}$, $j>s$, y $C>0$, tales que

$$\|\phi\|_{\mu,\infty,s} \le C\rho^\mu_j(\phi) \qquad (\phi\in\mathcal{S}^j_\mu).$$

La bola unidad cerrada de algún $\mathcal{S}^i_\mu$, $i>j$, es relativamente compacta en $\mathcal{S}^j_\mu$ (Proposición 4.5), y también en $\mathcal{H}_{\mu,s}$, por la elección de j. Si $r\in\mathbb{N}$ no es menor que $2i+\mu+\frac{1}{2}$, de modo que la bola unidad cerrada de $\mathcal{S}^i_\mu$ contiene a la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}_{\mu,r}$, entonces esta última es relativamente compacta en $\mathcal{H}_{\mu,s}$. Las desigualdades (2.2), (2.3) y (2.4) completan la demostración en el caso $\mu>-\frac{1}{2}$. La observación que precede al Lema prueba que éste vale para cualquier $\mu\in\mathbb{R}$.□

Lema 5.7. Sea $\mu\in\mathbb{R}$, sea $1\le p\le\infty$, y sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}'_\mu$, (débilmente*, fuertemente) convergente a cero. Existen $r\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de constantes positivas tales que

$$|\langle T_n,\phi\rangle| \le C_n \|\phi\|_{\mu,p,r} \quad (n\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu), \qquad C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Demostración. Basta probar la existencia de $r\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sup\ \{\ |\langle T_n,\phi\rangle|\ :\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \|\phi\|_{\mu,p,r}\le 1\ \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{5.4}$$

El teorema de Banach-Steinhaus proporciona $s\in\mathbb{N}$ y una constante $M>0$ tales que

$$|\langle T_n,\phi\rangle| \le M\|\phi\|_{\mu,p,s} \qquad (n\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Asociemos $r\in\mathbb{N}$ a s como en el Lema 5.6. Si (5.4) fuera falso, existirían $\varepsilon>0$, una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}_\mu$, con $\|\phi_n\|_{\mu,p,r}\le 1$ $(n\in\mathbb{N})$, y una subsucesión de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que continuamos denotando de igual modo), tales que

$$|\langle T_n,\phi_n\rangle| \ge \varepsilon \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{5.5}$$

Por la elección de r podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{H}^p_{\mu,s}$, y, en particular, que esta sucesión es de Cauchy en este espacio. Así,

$$\begin{aligned} |\langle T_n,\phi_n\rangle| &\le |\langle T_n,\phi_n-\phi_m\rangle| + |\langle T_n,\phi_m\rangle| \\ &\le M\ \|\phi_n-\phi_m\|_{\mu,p,s} + |\langle T_n,\phi_m\rangle| \qquad (n,m\in\mathbb{N}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pero cada término del segundo miembro de (5.6) puede hacerse pequeño si n y m son suficientemente grandes, lo que contradice (5.5) y prueba el Lema.□

Lema 5.8. Sea $\mu\geq-\frac{1}{2}$, sea $1\leq p\leq\infty$, y sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}'_\mu$, (débilmente*, fuertemente) convergente a cero. Existen $r\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de constantes positivas tales que

$$|\langle T_n,\phi\rangle| \leq C_n|\phi|_{\mu,p,r} \quad (n\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu), \qquad C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Demostración. Como antes, basta encontrar $r\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\ |\langle T_n,\phi\rangle|\ :\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ |\phi|_{\mu,p,r}\leq1\ \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Puede probarse que, para cada $M>0$ y algún $s\in\mathbb{N}$,

$$\sup\{\ |\langle T_n,\phi\rangle|\ :\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \|\phi\|_{\mu,p,s}\leq M\ \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Lema 5.7). Además (Proposiciones 2.1 y 2.3), existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$ tales que:

$$\|\phi\|_{\mu,p,s} \leq C|\phi|_{\mu,p,r} \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Por consiguiente,

$$\sup\{\ |\langle T_n,\phi\rangle|\ :\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ |\phi|_{\mu,p,r}\leq1\ \}\leq$$

$$\leq \sup\{\ |\langle T_n,\phi\rangle|\ :\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \|\phi\|_{\mu,p,s}\leq C\ \} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Estamos ya en disposición de caracterizar la convergencia secuencial en $\mathcal{H}'_\mu$. Las Proposiciones 5.9 y 5.10 se prueban siguiendo la misma técnica que en la demostración de las anteriores, teniendo en cuenta los Lemas 5.7 y 5.8, respectivamente.

Proposición 5.9. Sea $\mu\in\mathbb{R}$. La sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge (débilmente*, fuertemente) a cero en $\mathcal{H}'_\mu$ si, y sólo si, a cada q, $1<q\leq\infty$, le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_{n,k}\in L^q(I)$ ($n\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$) tales que

$$T_n = \sum_{k=0}^{r} x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k(1+x^2)^r f_{n,k} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

con

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{n,k}\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Proposición 5.10. Sea $\mu\geq-\frac{1}{2}$. La sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge (débilmente*, fuertemente) a cero en $\mathcal{H}'_\mu$ si, y sólo si, para cada q, $1<q\leq\infty$, existen $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_{n,k}\in L^q(I)$ $(n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq r)$ tales que

$$T_n = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} f_{n,k} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

con

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{n,k}\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

II. LOS ESPACIOS $\mathcal{B}_\mu$ Y $\mathcal{B}'_\mu$.

6. Introducción.

Los espacios $\mathcal{B}_{\mu,a}$ y $\mathcal{B}_\mu$ han sido definidos por ZEMANIAN **[1966b]**. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$ y cada $a>0$, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ está formado por todas aquellas funciones $\phi=\phi(x)$ infinitamente derivables sobre I tales que $\phi(x)=0$ $(x\geq a)$, y

$$\gamma_k^\mu(\phi) = \sup_{x\in I} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| < \infty \quad (k\in\mathbb{N}). \tag{6.1}$$

Cuando se le dota de la topología generada por la familia de seminormas $\{\gamma_k^\mu\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ se convierte en un espacio de Fréchet. Nótese que $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es un subespacio de $\mathcal{H}_\mu$, y que la topología que consideramos sobre $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es la heredada de $\mathcal{H}_\mu$. Resulta claro que $\mathcal{B}_{\mu,a}\subset\mathcal{B}_{\mu,b}$ si $a\leq b$, algebraica y topológicamente. Más aún, $\mathcal{B}_{\mu,b}$ induce sobre $\mathcal{B}_{\mu,a}$ la topología de $\mathcal{B}_{\mu,a}$, lo que permite definir $\mathcal{B}_\mu = \bigcup_{a>0} \mathcal{B}_{\mu,a}$ como el límite inductivo estricto de la familia $\{\mathcal{B}_{\mu,a}\}_{a>0}$. De hecho, $\mathcal{B}_\mu$ puede ser contemplado como el límite inductivo estricto de la familia *numerable* de espacios de Fréchet $\{\mathcal{B}_{\mu,n}\}_{n=1}^\infty$; en otras palabras, $\mathcal{B}_\mu$ es un (LF)-espacio.

En esta Parte nos proponemos desarrollar para los espacios $\mathcal{B}_{\mu,a}$ y $\mathcal{B}_\mu$ un estudio análogo al ya efectuado para $\mathcal{H}_\mu$. Ahora este estudio se simplifica notablemente. Muchas de las propiedades que se establecieron para $\mathcal{H}_\mu$ como espacio vectorial topológico son heredadas por sus subespacios $\mathcal{B}_{\mu,a}$, y se transmiten al límite inductivo (estricto, numerable) de éstos, $\mathcal{B}_\mu$; otras admiten demostraciones basadas en las mismas técnicas. Así, podemos definir la topología de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ valiéndonos de otras familias de seminormas distintas de (6.1) (Sección 7), y $\mathcal{B}_{\mu,a}$ y $\mathcal{B}_\mu$ resultan ser espacios nucleares, de Schwartz, de Montel, y reflexivos (Sección 8). Siendo $\mathcal{B}_{\mu,a}$ espacios de Montel, la convergencia débil* y la fuerte de sucesiones coinciden en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$. Además, ya que los $\mathcal{B}_{\mu,a}$ son tonelados, también coinciden los subconjuntos débilmente* y fuertemente acotados de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$. La Sección 9 contiene representaciones de los elementos de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$, caracterizaciones de las sucesiones convergentes en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$, y representaciones de los subconjuntos acotados de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$. Estas representaciones se extienden a los elementos de $\mathcal{B}'_{\mu}$, ya que un funcional lineal está en $\mathcal{B}'_{\mu}$ si, y sólo si, su restricción a cada $\mathcal{B}_{\mu,a}$ está en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ (a>0).

7. La topología de $\mathcal{B}_{\mu,a}$.

Sean $\mu\in\mathbb{R}$, $a>0$, $1\le p\le\infty$. La restricción a $\mathcal{B}_{\mu,a}$ de los sistemas de seminormas $\{\|\cdot\|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ y $\{|\cdot|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$, introducidos sobre $\mathcal{H}_{\mu}$ en la Sección 2, toma la forma

$$\|\phi\|_{\mu,p,r} = \max_{0\le k\le r}\left\{\int_0^\infty |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

$$\|\phi\|_{\mu,\infty,r} = \max_{0\le k\le r}\ \sup_{x\in I}\ |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)|$$

$$|\phi|_{\mu,p,r} = \max_{0\le k\le r}\left\{\int_0^\infty |x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

$$|\phi|_{\mu,\infty,r} = \max_{0\le k\le r}\ \sup_{x\in I}\ |x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)| \qquad (\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a},\ r\in\mathbb{N}).$$

Proposición 7.1. Sean $a>0$, $1\le p\le\infty$. Si $\mu\in\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mu\ge-\frac{1}{2}$), entonces el sistema de seminormas $\{\|\cdot\|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ (respectivamente, $\{|\cdot|_{\mu,p,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$) genera sobre $\mathcal{B}_{\mu,a}$ la misma topología que $\{\gamma_k^\mu\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Proposiciones 2.1 y 2.3.□

Proposición 7.2. Para $\mu\ge-\frac{1}{2}$ y $a>0$, la topología de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ está generada por la familia de seminormas $\{\omega_k^\mu\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde

$$\omega_k^\mu(\phi) = \sup_{x\in I} |T_{\mu,k}\phi(x)| \qquad (k\in\mathbb{N}).$$

Demostración. Teorema 3.6.□

8. Algunas propiedades de $\mathcal{B}_\mu$.

Nuestro principal objetivo en esta Sección es probar que, para cada $\mu\in\mathbb{R}$, el espacio vectorial topológico $\mathcal{B}_\mu$ es completo, bornológico, nuclear, Schwartz, Montel y reflexivo. Su dual fuerte resulta ser entonces nuclear, completo, Schwartz, Montel y reflexivo. Previamente estudiamos las correspondientes propiedades de los espacios $\mathcal{B}_{\mu,a}$ y $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ (con la topología fuerte), para $\mu\in\mathbb{R}$ y $a>0$.

Proposición 8.1. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$ y cada $a>0$, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es un espacio nuclear. También lo es $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ respecto de su topología fuerte.

Demostración. Ya quedó dicho que $\mathcal{H}_\mu$ es nuclear (Proposición 4.2), y todo subespacio de un espacio nuclear también lo es (TRÉVES **[1967,** Proposition III.50.1**]**). Por tanto, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es nuclear. Los duales fuertes de espacios de Fréchet nucleares tienen igual propiedad (TRÉVES **[1967,** Proposition III.50.6**]**).□

Corolario 8.2. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$, los espacios $\mathcal{B}_\mu$ y $\mathcal{B}'_\mu$ (respecto de su topología fuerte) son nucleares.

Demostración. Los límites inductivos numerables y los duales fuertes de (LF)-espacios nucleares son asimismo nucleares (TRÉVES **[1967,** Corollary to Proposition III.50.1**]**).□

Como subespacio del espacio de Schwartz $\mathcal{H}_\mu$ (Proposición 4.6), $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es igualmente un espacio de Schwartz (HORVATH **[1966,** Proposition 3.15.6**]**). Se llega a la misma conclusión combinando la anterior Proposición 8.1 con WONG **[1979,** Proposition 3.2.5**]**. Sin embargo, esta propiedad también admite una demostración directa. Para darla precisamos introducir nuevos espacios de funciones.

Si $\mu\in\mathbb{R}$, $a>0$ y $r\in\mathbb{N}$, el espacio $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ está formado por todas aquellas $\phi=\phi(x)\in C^r(I)$ tales que $\phi(x)=0$ $(x\geq a)$ y $\lim_{x\to 0+}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ existe para todo $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$. Dotado de la topología generada por la norma $\|\bullet\|_{\mu,\infty,r}$, $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ es un espacio de Banach. Resulta claro que $\mathcal{B}^{r+1}_{\mu,a}\subset\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ con continuidad, y que la topología de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\mathcal{B}_{\mu,a}\hookrightarrow\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ $(r\in\mathbb{N})$.

Valiéndonos del siguiente criterio de compacidad relativa en $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ (Lema 8.3), nos proponemos demostrar que cada una de las inclusiones $\mathcal{B}^{r+1}_{\mu,a}\hookrightarrow\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ $(r\in\mathbb{N})$ es compacta (Proposición 8.4).

Lema 8.3. Sean $\mu\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r\in\mathbb{N}$. Un subconjunto F de $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ es relativamente compacto en este espacio si, y sólo si, se satisfacen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

(i) Para cada $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$, el conjunto $F_k=\{(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x):\phi\in F\}$ es equicontinuo.

(ii) Para cada $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$, y cada $x\in I$, el conjunto $F_k(x)=\{(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x):\phi\in F\}$ está acotado en $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la suma directa de r+1 copias del espacio $C([0,a])$. La aplicación $G:\mathcal{B}^r_{\mu,a}\longrightarrow\mathcal{C}$, definida por $G(\phi)=\left((x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)\right)_{0\leq k\leq r}$, establece un isomorfismo de $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ sobre $G(\mathcal{B}^r_{\mu,a})$. Al ser completo, $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ es cerrado en $\mathcal{C}$. Por el teorema de Tichonov F es relativamente compacto en $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ si, y sólo si, cada F_k lo es en $C([0,a])$ $(k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq r)$. En virtud del teorema de Ascoli esto equivale a que *(i)* y *(ii)* se verifiquen simultáneamente.□

Proposición 8.4. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$ y cada $a>0$, la bola unidad cerrada $\mathbb{B}^{r+1}_{\mu,a}=\{\phi\in\mathcal{B}^{r+1}_{\mu,a}:\|\phi\|_{\mu,\infty,r+1}\leq 1\}$ de $\mathcal{B}^{r+1}_{\mu,a}$ es relativamente compacta en $\mathcal{B}^r_{\mu,a}$ $(r\in\mathbb{N})$.

Demostración. Este hecho es consecuencia inmediata del Lema 8.3, ya que

$$|(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)-(y^{-1}D)^k y^{-\mu-1/2}\phi(y)| \le$$

$$\le a\int_x^y |(t^{-1}D)^{k+1}t^{-\mu-1/2}\phi(t)|\,dt \le a(y-x) \qquad (x,y\in I,\ x<y)$$

si $\phi\in\mathbb{B}^{r+1}_{\mu,a}$ y $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le r$.□

Corolario 8.5. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$ y cada $a>0$, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ y su dual fuerte son espacios de Schwartz, de Montel y reflexivos. Además, $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ (con su topología fuerte) es bornológico y completo.

Demostración. De la Proposición 8.4, en virtud de un conocido resultado de Sebastião e Silva (HORVATH [1966, Proposition 3.15.9]), inferimos que $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es un espacio de Schwartz. Que $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es de Montel y reflexivo sigue de HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.15.4 y Corollary to Proposition 3.9.1].

Haciendo uso de la Proposición 8.1 y de WONG [1979, Proposition 3.2.5] se establece que $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ (con la topología fuerte) es un espacio de Schwartz. Por otra parte, el dual fuerte de espacios de Fréchet reflexivos es bornológico (SCHAEFER [1971, IV-6.6, Corollary 2]). Siendo un espacio de Fréchet, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es bornológico (SCHAEFER [1971, II-8.1]); los espacios bornológicos tienen duales fuertes completos (SCHAEFER [1971, IV-6.1]). Ahora bien, los espacios bornológicos, completos y nucleares son de Montel (SCHAEFER [1971, Exercise IV-19 (b)]), y basta aplicar la Proposición 8.1 para deducir que $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ (con su topología fuerte) es un espacio de Montel. Finalmente, los espacios de Montel son reflexivos (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.9.1]).□

Corolario 8.6. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$, el espacio $\mathcal{B}_\mu$ es completo, bornológico, Schwartz, Montel y reflexivo. Su dual fuerte es completo, Schwartz, Montel y reflexivo.

Demostración. Los (LF)-espacios son completos y bornológicos (SCHAEFER [1971, II-6.6, Corollary y II-8.2, Corollary 2]). Que $\mathcal{B}_\mu$ es un espacio de Schwartz se infiere del Corolario 8.2 en virtud de WONG [1979, Proposition 3.2.5], o bien del Corolario 8.5 y del hecho de que todo límite inductivo de espacios de Schwartz es asimismo un espacio de Schwartz (HORVATH [1966, Proposition 3.15.8]). Finalmente, siendo $\mathcal{B}_\mu$ completo, también es Montel, luego reflexivo (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.15.4 y Corollary to Proposition 3.9.1]).

El Corolario 8.2, junto con el hecho de que los espacios nucleares son de Schwartz (WONG [1979, Proposition 3.2.5]), garantiza que que $\mathcal{B}'_\mu$ es un espacio de Schwartz respecto de su topología fuerte. Por otra parte, el dual fuerte de todo espacio reflexivo es también reflexivo (HORVATH [1966, Proposition 3.8.7]), y los espacios reflexivos son tonelados (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.8.6]). Luego, $\mathcal{B}'_\mu$ (con su topología fuerte) es reflexivo y tonelado. Todo espacio de Schwartz (casi-)completo es semi-Montel (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.15.4]); consecuentemente, dotado de su topología fuerte, $\mathcal{B}'_\mu$ es semi-Montel. Los espacios semi-Montel tonelados son de Montel (HORVATH [1966, Definition 3.9.1 y p. 217]).□

9. Estructura en $\mathcal{B}'_\mu$.

Un funcional lineal pertenece a $\mathcal{B}'_\mu$ si, y sólo si, sus restricciones a $\mathcal{B}_{\mu,a}$ pertenecen a $\mathcal{B}'_{\mu,a}$, para cada a>0. Por tanto, el estudio de la estructura de los elementos, de los subconjuntos acotados, y de las sucesiones convergentes en $\mathcal{B}'_\mu$ se reduce al correspondiente para los elementos de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ (a>0). Dicho estudio, que recogemos en esta Sección, es paralelo al efectuado en la Sección 5 para el espacio $\mathcal{H}'_\mu$.

En primer lugar, procediendo como en la prueba de la Proposición 5.1 también se demuestra:

Proposición 9.1. Sean $\mu\in\mathbb{R}$, $a>0$. Un funcional lineal T está en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ si, y sólo si, para cada $1<q\leq\infty$ existen $r\in\mathbb{N}$ y $f_k\in L^q([0,a])$, $(k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq r)$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k f_k.$$

Proposición 9.2. Sean $\mu\geq-\frac{1}{2}$, $a>0$. Un funcional lineal T está en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ si, y sólo si, para cada $1<q\leq\infty$ existen $r\in\mathbb{N}$ y $f_k\in L^q([0,a])$, $(k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq r)$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_{\mu}^{k} x^{-\mu-1/2} f_k.$$

Como $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es tonelado para cualesquiera $\mu\in\mathbb{R}$ y $a>0$, un subconjunto B' de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ es débilmente* acotado si, y sólo si, es fuertemente acotado (TRÉVES [1967, Theorem II.33.2]). En las dos Proposiciones siguientes obtenemos representaciones de los elementos $T\in B'$, siendo B' un subconjunto (débilmente*, fuertemente) acotado de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$, en las que el orden máximo de los operadores diferenciales que comparecen es independiente de $T\in B'$. La demostración de estos resultados es similar a la de las Proposiciones 5.4 y 5.5.

Proposición 9.3. Sean $\mu\in\mathbb{R}$, $a>0$. Un subconjunto B' de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ es (débilmente*, fuertemente) acotado en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ si, y sólo si, dado q, $1<q\leq\infty$, existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$ y, para cada $T\in B'$, funciones $f_{T,k}\in L^q([0,a])$ $(k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq r)$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k f_{T,k},$$

con

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{T,k}\|_q \leq C.$$

Proposición 9.4. Sean $\mu \geq -\frac{1}{2}$ y $a>0$. Un subconjunto B' de $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ es (débilmente*, fuertemente) acotado si, y sólo si, dado $1<q\leq\infty$ existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$ y, para cada $T\in B'$, funciones $f_{T,k}\in L^q([0,a])$ ($k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$), tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k x^{-\mu-1/2} f_{T,k},$$

con

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{T,k}\|_q \leq C.$$

Siendo $\mathcal{B}_{\mu,a}$ un espacio de Montel (Corolario 8.5), la clase de las sucesiones convergentes en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ es la misma cuando en este espacio se consideran tanto la topología débil* como la fuerte (TRÉVES [1967, Proposition II.34.6, Corollary 1]). A continuación damos representaciones de las sucesiones convergentes en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$, del mismo tipo que las obtenidas en las Proposiciones 5.9 y 5.10.

Proposición 9.5. Sean $\mu\in\mathbb{R}$ y $a>0$. Una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es (débilmente*, fuertemente) convergente a cero en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ si, y sólo si, a cada $1<q\leq\infty$ le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_{n,k}\in L^q([0,a])$ ($n,k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$), tales que

$$T_n = \sum_{k=0}^{r} x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k f_{n,k} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

con

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \|f_{n,k}\|_q = 0.$$

Proposición 9.6. Sean $\mu\geq -\frac{1}{2}$ y $a>0$. Una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es (débilmente*, fuertemente) convergente a cero en $\mathcal{B}'_{\mu,a}$ si, y sólo si, a cada $1<q\leq\infty$ le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_{n,k}\in L^q([0,a])$ ($n,k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$), tales que

$$T_n = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k x^{-\mu-1/2} f_{n,k} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

con

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \|f_{n,k}\|_q = 0.$$

III. MULTIPLICADORES DE $\mathcal{H}_\mu$ Y DE $\mathcal{H}'_\mu$.

10. Introducción.

En adelante, dado un espacio vectorial topológico X denotaremos por $\mathcal{L}_s(X)$ (respectivamente, $\mathcal{L}_b(X)$) el espacio de los endomorfismos de X dotado de la topología de la convergencia simple (respectivamente, de la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos acotados de X).

La transformación de Fourier de distribuciones temperadas ha sido investigada por SCHWARTZ **[1978]**. Este autor ha introducido el espacio $\mathcal{S}$, consistente en todas aquellas funciones infinitamente derivables $\phi=\phi(x)$ definidas sobre $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{|x|\to\infty} x^m D^k\phi(x)=0$ $(m,k\in\mathbb{N})$. Se dota al espacio $\mathcal{S}$ de la topología generada por la familia de seminormas $\{p_{m,k}\}_{m,k\in\mathbb{N}}$, donde

$$p_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k\phi(x)| \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{S}).$$

Entonces $\mathcal{S}$ es un espacio de Fréchet y la transformación de Fourier es un automorfismo de $\mathcal{S}$. El dual $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ es el espacio de las distribuciones temperadas.

El espacio de los multiplicadores de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{S}'$ es $\mathcal{O}_M$. Una función infinitamente derivable $\theta=\theta(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ está en $\mathcal{O}_M$ si para cada $k\in\mathbb{N}$ existe $n_k\in\mathbb{N}$ tal que $(1+x^2)^{-n_k}D^k\theta(x)$ está acotado sobre $\mathbb{R}$. La topología que $\mathcal{O}_M$ hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{S})$ es la generada por la familia de seminormas $\{q_{m,k;\phi}\}_{m,k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{S}}$, siendo

$$q_{m,k;\phi}(\theta) = p_{m,k}(\theta\phi) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{S},\ \theta\in\mathcal{O}_M),$$

o, equivalentemente, por el sistema de seminormas $\{q_{k;\phi}\}_{k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{S}}$, dado por

$$q_{k;\phi}(\theta) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)D^k\theta(x)| \qquad (k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{S},\ \theta\in\mathcal{O}_M).$$

Por otra parte, $\mathcal{L}_b(\mathcal{S})$ induce sobre $\mathcal{O}_M$ la topología generada por una cualquiera de las familias equivalentes de seminormas $\{r_{m,k;B}\}_{m,k\in\mathbb{N},B\in\mathfrak{B}}$ y $\{r_{k;B}\}_{k\in\mathbb{N},B\in\mathfrak{B}}$, donde

$$r_{m,k;B}(\theta) = \sup_{\phi\in B} q_{m,k;\phi}(\theta) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ B\in\mathfrak{B},\ \theta\in\mathcal{O}_M),$$

$$r_{k;B}(\theta) = \sup_{\phi\in B} q_{k;\phi}(\theta) \qquad (k\in\mathbb{N},\ B\in\mathfrak{B},\ \theta\in\mathcal{O}_M),$$

y $\mathfrak{B}$ representa la colección de todos los subconjuntos acotados de $\mathcal{S}$.

Es sabido que $\mathcal{L}_s(\mathcal{S})$ y $\mathcal{L}_b(\mathcal{S})$ inducen sobre $\mathcal{O}_M$ una misma topología (GROTHENDIECK **[1955**, Chapitre II, §4.4**]**), con la cual $\mathcal{O}_M$ se convierte en un espacio completo y bornológico (GROTHENDIECK **[1955**, Chapitre II, Théorème 16**]**).

ZEMANIAN (**[1966a]**, **[1968]**) ha llevado a cabo un estudio para la transformación de Hankel sobre $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$ similar al efectuado por Schwartz para la transformación de Fourier sobre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. El espacio vectorial $\mathcal{O}$ de todas aquellas $\theta=\theta(x)\in C^\infty(I)$ tales que para cada $k\in\mathbb{N}$ existen $n_k\in\mathbb{N}$, $A_k>0$ satisfaciendo

$$|(x^{-1}D)^k\theta(x)| \le A_k(1+x^2)^{n_k} \qquad (x\in I)$$

es un espacio de multiplicadores para $\mathcal{H}_\mu$ (ZEMANIAN **[1968]**). Aquí probamos que $\mathcal{O}$ es precisamente el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ (Sección 11) y de $\mathcal{H}'_\mu$ (Sección 13); al caracterizar $\mathcal{O}$ como el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}'_\mu$ hacemos uso de la reflexividad de $\mathcal{H}_\mu$ (Corolario 4.8).

Nuestro estudio de $\mathcal{O}$ es paralelo al desarrollado para $\mathcal{O}_M$ por Schwartz y otros autores. En la Sección 12 se aborda el problema de topologizar $\mathcal{O}$. Probamos que $\mathcal{O}$ hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$ y de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ una misma topología, con la cual las aplicaciones bilineales $(\theta,\vartheta)\longmapsto\theta\vartheta$ de $\mathcal{O}\times\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}$, $(\theta,\phi)\longmapsto\theta\phi$ de $\mathcal{O}\times\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu$, y $(\theta,T)\longmapsto\theta T$ de $\mathcal{O}\times\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$, son hipocontinuas respecto de subconjuntos acotados (TRÉVES **[1967**, Definition III.41.1**]**). Se demuestra además (Sección 13) que la topología de $\mathcal{O}$ coincide con la que este espacio hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}'_\mu)$ y de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}'_\mu)$.

La Sección 14 recoge algunas propiedades de $\mathcal{O}$ como espacio vectorial topológico. Al igual que $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}$ resulta ser completo, bornológico, nuclear, Schwartz, Montel y reflexivo. No obstante, cabe señalar una diferencia entre ambos: $\mathcal{O}$ no es un espacio normal de distribuciones (véase la Nota a continuación de la Proposición 12.6).

En la Sección 15 se estudia el dual $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$. Encontramos representaciones de los elementos de $\mathcal{O}'$ y establecemos que, provisto de su topología fuerte, $\mathcal{O}'$ es un espacio completo, nuclear, Schwartz, Montel, y reflexivo.

11. Multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$.

Sea $\mu\in\mathbb{R}$. Una función $\theta=\theta(x)$ definida sobre I es un *multiplicador* para $\mathcal{H}_\mu$ si la aplicación $\phi\longmapsto\theta\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu$. Nuestro propósito en esta Sección es caracterizar el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$. Tal es el cometido del Teorema 11.3; se requieren algunos resultados preliminares.

El Lema 11.2 proporciona ciertos ejemplos útiles de funciones en $\mathcal{H}_\mu$. Facilitará la construcción de tales funciones el siguiente caso particular de la desigualdad de Peetre (véase, por ejemplo, BARROS-NETO [1981, Lemma 5.2]).

Lema 11.1. Para cada $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, se verifica:

$$\frac{1+\xi^2}{1+\eta^2} \le 2(1+|\xi-\eta|^2).$$

Lema 11.2. Sea $\alpha\in\mathcal{D}(I)$ tal que $0\le\alpha\le1$, sop $\alpha=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$, y $\alpha(1)=1$. Sea también $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que satisfacen $x_0>1$ y $x_{j+1}>x_j+1$. Definamos

$$\phi(x) = x^{\mu+1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha(x-x_j+1)}{(1+x_j^2)^j} \qquad (x\in I). \tag{11.1}$$

Entonces $\phi\in\mathcal{H}_\mu$.

Demostración. Notemos, ante todo, que la suma compareciente en el segundo miembro de (11.1) es finita, porque los soportes de las funciones $\alpha(x-x_j+1)$ son disjuntos dos a dos. De hecho, si $m,k\in\mathbb{N}$ y si $x_j-\frac{1}{2}\le x\le x_j+\frac{1}{2}$, podemos escribir:

$$(1+x^2)^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) = \left(\frac{1+x^2}{1+x_j^2}\right)^m \frac{(x^{-1}D)^k\alpha(x-x_j+1)}{(1+x_j^2)^{j-m}}.$$

El Lema 11.1 garantiza que $\gamma^{\mu}_{m,k}(\phi)<\infty$. Así pues, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ como se había afirmado.□

Quedamos ya en disposición de obtener la caracterización anunciada.

Teorema 11.3. Cada una de las condiciones siguientes equivale a las otras dos:

(i) Se verifica que $\theta=\theta(x)\in C^\infty(I)$, y que para todo $k\in\mathbb{N}$ existe $n_k\in\mathbb{N}$ tal que $(1+x^2)^{-n_k}(x^{-1}D)^k\theta(x)$ $(x\in I)$ está acotada.

(ii) El producto $\theta\phi$ está en $\mathcal{H}_\mu$ siempre que $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y la aplicación $\phi\longmapsto\theta\phi$ es un endomorfismo continuo de $\mathcal{H}_\mu$.

(iii) Se cumple que $\theta=\theta(x)\in C^\infty(I)$ y que para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ la función $\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)$ está en $\mathcal{H}_\mu$, y la aplicación $\phi(x)\longmapsto\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)$ es un endomorfismo continuo de $\mathcal{H}_\mu$.

Demostración. Que *(i)* implica *(ii)* ya ha sido probado por ZEMANIAN ([1968, p. 134]).

Para demostrar que *(ii)* implica *(iii)* consideramos la función $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ definida por

$$\phi(x) = x^{\mu+1/2}e^{-x^2}. \tag{11.2}$$

De acuerdo con *(ii)*,

$$\psi(x) = x^{\mu+1/2}e^{-x^2}\theta(x) \tag{11.3}$$

pertenece a $\mathcal{H}_\mu$, así que

$$\theta(x) = x^{-\mu-1/2}\psi(x)e^{x^2} \tag{11.4}$$

es infinitamente derivable sobre I. Ahora basta probar que $(x^{-1}D)^k\theta(x)$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\mu$ cuando θ lo es. Pero esto se establece fácilmente por inducción sobre k a partir de la fórmula

$$\phi(x)(x^{-1}D)\theta(x) = x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)x^{-\mu-1/2}(\theta\phi)(x) - \theta(x)x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)x^{-\mu-1/2}\phi(x),$$

teniendo en cuenta que si ϕ está en $\mathcal{H}_\mu$ entonces también está la función

$$x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x).$$

Por último, supongamos que θ satisface *(iii)*. Como (11.2) es de $\mathcal{H}_\mu$, lo mismo cabe afirmar de (11.3). Pero entonces θ admite la representación (11.4), y, en particular, existe $\lim_{x\to 0+}\theta(x)$. Ya que, según *(iii)*, cada $(x^{-1}D)^k\theta(x)$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\mu$ si lo es θ, se concluye que $\lim_{x\to 0+}(x^{-1}D)^k\theta(x)$ existe para toda $k\in\mathbb{N}$.

Razonando por contradicción, supongamos que *(i)* es falso. Entonces podemos encontrar $k\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números reales, que, por lo que acabamos de probar, cabe elegir de modo que $x_0>1$ y $x_{j+1}>x_j+1$, cumpliendo:

$$\left|(x^{-1}D)^k\theta(x)\big|_{x=x_j}\right| > (1+x_j^2)^j.$$

Es evidente que la función $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ construida a partir de $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ como en el Lema 11.2 verifica

$$\left|x_j^{-\mu-1/2}\phi(x_j)(x^{-1}D)^k\theta(x)\big|_{x=x_j}\right| > \alpha(1) = 1 \qquad (j\in\mathbb{N}),$$

en contradicción con *(iii)*.□

12. Topología del espacio de multiplicadores.

De acuerdo con ZEMANIAN [1968], denotamos por $\mathcal{O}$ el espacio vectorial de todas aquellas funciones $\theta=\theta(x)\in C^{\infty}(I)$ tales que para cada $k\in\mathbb{N}$ existen $n_k\in\mathbb{N}$, $A_k>0$ satisfaciendo

$$|(x^{-1}D)^k\theta(x)| \le A_k(1+x^2)^{n_k} \qquad (x\in I).$$

La equivalencia entre las condiciones *(i)* y *(ii)* del Teorema 11.3 caracteriza a $\mathcal{O}$ como el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$, con independencia del valor del parámetro real μ. Ahora bien, fijado μ, la condición *(iii)* sugiere definir sobre $\mathcal{O}$ la familia (separante) de seminormas $H_\mu=\{\eta^\mu_{k;\phi}\}_{k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, donde

$$\eta^\mu_{k;\phi}(\theta) = \sup_{x\in I} |x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)| \qquad (k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}).$$

Como la aplicación $\phi(x)\longmapsto x^{\nu-\mu}\phi(x)=\varphi(x)$ establece un isomorfismo entre $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}_\nu$ cualesquiera sean $\mu,\nu\in\mathbb{R}$, la igualdad $\eta^\mu_{k;\phi}(\theta)=\eta^\nu_{k;\varphi}(\theta)$ vale para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $\theta\in\mathcal{O}$. Por consiguiente, todas las familias H_μ $(\mu\in\mathbb{R})$ definen una única topología sobre $\mathcal{O}$. En lo que sigue, salvo que se especifique otra cosa, supondremos siempre que $\mathcal{O}$ está provisto de esta topología, y μ representará cualquier número real.

Nótese que $\mathcal{O}$ es un espacio localmente convexo, Hausdorff y no metrizable.

Proposición 12.1. Si $\theta\in C^{\infty}(I)$ es tal que $\eta^\mu_{k;\phi}(\theta)<\infty$ para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces $\theta\in\mathcal{O}$.

Demostración. Fijemos $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, $m,k\in\mathbb{N}$, y para $0\le p\le k$ definamos $\phi_p\in\mathcal{H}_\mu$ mediante

$$\phi_p(x) = (1+x^2)^m x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k-p}x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (x\in I).$$

Como

$$(1+x^2)^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\theta\phi)(x) = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{-\mu-1/2}\phi_p(x)(x^{-1}D)^p\theta(x) \qquad (x\in I),$$

necesariamente

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\theta\phi) \leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \eta^{\mu}_{p;\phi_p}(\theta). \tag{12.1}$$

En general,

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\phi(x)(x^{-1}D)^r\theta(x)) \leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \eta^{\mu}_{p+r;\phi_p}(\theta) \qquad (r\in\mathbb{N}).$$

Nuestra afirmación sigue ahora como en la demostración de que *(iii)* implica *(i)* en el Teorema 11.3.□

Nota. La topología que hemos definido sobre $\mathcal{O}$ no es otra que la que este espacio hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$. En efecto, dicha topología también puede ser generada mediante la familia de seminormas $\{\delta^{\mu}_{m,k;\phi}\}_{m,k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, donde

$$\delta^{\mu}_{m,k;\phi}(\theta) = \gamma^{\mu}_{m,k}(\theta\phi) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Para comprobarlo fijemos $k\in\mathbb{N}$ y, si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y $p\in\mathbb{N}$ con $0\leq p\leq k$, definamos $\phi_p\in\mathcal{H}_\mu$ por:

$$\phi_p(x) = x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^p x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (x\in I).$$

La igualdad

$$x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} (x^{-1}D)^{k-p} x^{-\mu-1/2}(\theta\phi_p)(x) \qquad (x\in I),$$

válida cuando $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y $\theta\in\mathcal{O}$, prueba que

$$\eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta) \leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \delta^{\mu}_{0,k-p;\phi_p}(\theta). \tag{12.2}$$

Junto con (12.1), esta estimación demuestra nuestro aserto inicial.

Sea ahora $\mathcal{B}_\mu$ la familia de todos los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}_\mu$. Podemos considerar sobre $\mathcal{O}$ la topología generada por la familia de seminormas

$$\eta^{\mu}_{k;B}(\theta) = \sup_{\phi\in B} \eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta) \qquad (k\in\mathbb{N},\ B\in\mathcal{B}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}). \tag{12.3}$$

Claramente, esta topología es más fina que la introducida anteriormente sobre $\mathcal{O}$, y, como entonces, siendo isomorfos dos espacios cualesquiera $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}_\nu$, no depende del parámetro μ.

Nota. La topología generada sobre $\mathcal{O}$ por las seminormas (12.3) coincide con la que este espacio hereda de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$; en otras palabras, es compatible con la familia

$$\delta^\mu_{m,k;B}(\theta) = \sup_{\phi\in B} \gamma^\mu_{m,k}(\theta\phi) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ B\in\mathcal{B}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}).$$

En efecto, sean $m,k\in\mathbb{N}$, y para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y cada $p\in\mathbb{N}$, $0\le p\le k$, definamos $\phi_p\in\mathcal{H}_\mu$ mediante

$$\phi_p(x) = (1+x^2)^m x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k-p}x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (x\in I)$$

(véase la demostración de la Proposición 12.1). La regla de Leibniz prueba que la aplicación $\phi\longmapsto\phi_p$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo. Denotando por $B_p\in\mathcal{B}_\mu$ la imagen de $B\in\mathcal{B}_\mu$ mediante esta aplicación puede probarse, como en la demostración de la Proposición 12.1, que

$$\gamma^\mu_{m,k}(\theta\phi) \le \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\eta^\mu_{p;B_p}(\theta) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \theta\in\mathcal{O},\ \phi\in B). \tag{12.4}$$

Por otra parte, sea $k\in\mathbb{N}$ y, para cada $p\in\mathbb{N}$ con $0\le p\le k$, consideremos la aplicación continua $\phi\longmapsto\phi_p$, definida de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu$ mediante la fórmula

$$\phi_p(x) = x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^p x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (x\in I).$$

Si denotamos por $B_p\in\mathcal{B}_\mu$ la imagen de $B\in\mathcal{B}_\mu$ mediante esta aplicación, el mismo argumento que conduce a (12.2) también muestra

$$\eta^\mu_{k;B}(\theta) \le \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\delta^\mu_{0,k-p;B_p}(\theta) \qquad (k\in\mathbb{N},\ B\in\mathcal{B}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}). \tag{12.5}$$

Nuestra afirmación es consecuencia de (12.4) y (12.5).

Proposición 12.2. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$ y $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ inducen sobre $\mathcal{O}$ la misma topología.

Demostración. Fijemos $\mu\in\mathbb{R}$. Como ya hemos indicado, la topología que $\mathcal{O}$ hereda de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ es más fina que la que hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$.

Inversamente, sean $m\in\mathbb{N}$ y $B\in\mathfrak{B}_\mu$. Pongamos

$$\kappa^{\mu}_{m;B}(x) = \max_{0\leq k\leq m} \sup_{\phi\in B} |(1+x^2)^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \qquad (x\in I),$$

$$\lambda^{\mu}_{j,m;B} = \sup_{j-1\leq x\leq j} \kappa^{\mu}_{m;B}(x) \qquad (j\in\mathbb{N},\ j\geq 1),$$

y elijamos una función $\alpha\in\mathcal{D}(I)$ tal que $0\leq\alpha(x)\leq 1$ $(x\in I)$, $\alpha(x)=1$ $(x\in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[)$, y sop $\alpha=]\frac{1}{4},\frac{7}{4}[$. La función

$$\varphi_{m;B}(x) = x^{\mu+1/2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{\mu}_{j,m;B}\alpha(x-j+\frac{3}{2}) \qquad (x\in I)$$

está en $\mathcal{H}_\mu$. Además, $\kappa^{\mu}_{m;B}(x)\leq x^{-\mu-1/2}\varphi_{m;B}(x)$ $(x\in I)$.

La familia $\{N(m,\varepsilon;B)\}_{m\in\mathbb{N},\varepsilon>0,B\in\mathfrak{B}_\mu}$, donde

$$N(m,\varepsilon;B) = \{\ \theta\in\mathcal{O} : \max_{0\leq k\leq m} \sup_{x\in I} |(1+x^2)^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\theta\phi)(x)|<\varepsilon,\ \phi\in B\ \},$$

con $m\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$ y $B\in\mathfrak{B}_\mu$, es una base de entornos del origen en la topología que $\mathcal{O}$ hereda de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$.

Dados $m\in\mathbb{N}$, $\delta>0$ y $B\in\mathfrak{B}_\mu$, definimos

$$M(m,\delta;\varphi_{m;B}) = \{\ \theta\in\mathcal{O} : \max_{0\leq k\leq m} \sup_{x\in I} |x^{-\mu-1/2}\varphi_{m;B}(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)|<\delta\ \}.$$

Para cada $\theta\in M(m,\delta;\varphi_{m;B})$, $\phi\in B$, $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq m$, $x\in I$, y algún $C>0$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&|(1+x^2)^m(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\theta\phi)(x)| \leq \\
&\qquad\leq C\sum_{i=0}^{k}|(1+x^2)^m(x^{-1}D)^i x^{-\mu-1/2}\phi(x)||(x^{-1}D)^{k-i}\theta(x)| \\
&\qquad\leq C\,\kappa^{\mu}_{m;B}(x)\sum_{i=0}^{k}|(x^{-1}D)^{k-i}\theta(x)| \\
&\qquad\leq C\sum_{i=0}^{k}|x^{-\mu-1/2}\varphi_{m;B}(x)(x^{-1}D)^i\theta(x)| \\
&\qquad\leq C(k+1)\delta.
\end{aligned}$$

Así, $\theta\phi\in N(m,\varepsilon;B)$ cuando $\theta\in M(m,\frac{\varepsilon}{C(m+1)};\varphi_{m;B})$. Ya que $M(m,\frac{\varepsilon}{C(m+1)};\varphi_{m;B})$ es un entorno del origen en la topología inducida por $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$ sobre $\mathcal{O}$, la Proposición queda probada.□

A continuación reunimos varias propiedades de continuidad de ciertos operadores sobre $\mathcal{O}$. La primera de ellas quedará superada por la Proposición 12.5.

Proposición 12.3. Se verifica:

(i) La aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\times\mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (\theta,\vartheta) &\longmapsto \theta\vartheta \end{aligned}$$

es continua en cada variable.

(ii) Si $R(x)=P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y Q no se anula en $[0,\infty[$, entonces la aplicación $\theta(x)\longmapsto R(x^2)\theta(x)$ es continua de $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}$.

(iii) Para cada $k\in\mathbb{N}$, la aplicación $\theta(x)\longmapsto(x^{-1}D)^k\theta(x)$ es continua de $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}$.

Demostración. Sean $\theta,\vartheta\in\mathcal{O}$, $k\in\mathbb{N}$, y para $0\leq p\leq k$ supongamos que $n_p\in\mathbb{N}$, $A_p>0$ satisfacen

$$|(x^{-1}D)^p\theta(x)| \leq A_p(1+x^2)^{n_p} \qquad (x\in I).$$

Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, definamos

$$\phi_p(x) = (1+x^2)^{n_p}\phi(x) \qquad (x\in I).$$

Nótese que $\phi_p\in\mathcal{H}_\mu$. La fórmula

$$x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k(\theta\vartheta)(x) = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^{-\mu-1/2}\phi_p(x)\frac{(x^{-1}D)^p\theta(x)}{(1+x^2)^{n_p}}(x^{-1}D)^{k-p}\vartheta(x),$$

válida para cada $x\in I$, conduce a la desigualdad

$$\eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta\vartheta) \le \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} A_p \eta^{\mu}_{k-p;\phi_p}(\vartheta),$$

que prueba *(i)*.

El apartado *(ii)* puede ser deducido inmediatamente de *(i)* y de ZEMANIAN [1968, Lemma 5.3-1], mientras que *(iii)* proviene de la relación

$$\eta^{\mu}_{p;\phi}((x^{-1}D)^k\theta(x)) = \eta^{\mu}_{k+p;\phi}(\theta). \qquad \square$$

Proposición 12.4. La aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\times\mathcal{H}_{\mu} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\mu} \\ (\theta,\phi) &\longmapsto \theta\phi \end{aligned} \tag{12.6}$$

es hipocontinua.

Demostración. Que (12.6) es continua en cada variable sigue del Teorema 11.3 y de (12.1).

Como $\mathcal{H}_{\mu}$ es un espacio de Fréchet, el teorema de Banach-Steinhaus garantiza la hipocontinuidad respecto de los subconjuntos acotados de $\mathcal{O}$. La $\mathfrak{B}_{\mu}$-hipocontinuidad es consecuencia de (12.4).$\square$

Proposición 12.5. La aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\times\mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (\theta,\vartheta) &\longmapsto \theta\vartheta \end{aligned}$$

es hipocontinua.

Demostración. Ya quedó dicho que esta aplicación es continua en cada variable (Proposición 12.3).

Sea ahora $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos acotados de $\mathcal{O}$. Si $A\in\mathcal{B}$ y $B\in\mathcal{B}_\mu$, necesariamente $AB\in\mathcal{B}_\mu$ (Proposición 12.4 y HORVATH [1966, Proposition 4.7.2]). Fijemos $k\in\mathbb{N}$, $\theta\in A$, $\vartheta\in\mathcal{O}$, $\phi\in B$; entonces

$$\delta^\mu_{m,k;B}(\theta\vartheta) \le \delta^\mu_{m,k;AB}(\vartheta).$$

Esto completa la prueba.□

Proposición 12.6. La aplicación $\varphi(x)\longmapsto x^{-\mu-1/2}\varphi(x)$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{O}$.

Demostración. Se verifica:

$$\eta^\mu_{k;\phi}(x^{-\mu-1/2}\varphi(x)) \le \sup_{x\in I} |x^{-\mu-1/2}\phi(x)|\ \gamma^\mu_{0,k}(\varphi) \qquad (k\in\mathbb{N},\ \phi,\varphi\in\mathcal{H}_\mu).$$ □

Nota. Afirmamos que el espacio de funciones prueba $\mathcal{D}(I)$ no es denso en $x^{-\mu-1/2}\mathcal{H}_\mu$ respecto de la topología de $\mathcal{O}$. Admitiendo por el momento la veracidad de este aserto, sigue de la Proposición 12.6 que $\mathcal{D}(I)$ no es denso en $\mathcal{O}$. Esto impide que $\mathcal{O}$ sea un espacio normal de distribuciones, a diferencia de lo que acontece con $\mathcal{O}_M$ (véase BARROS-NETO [1981, Theorem 4.7]).

Probemos nuestra afirmación, fijando $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ y suponiendo (para alcanzar una contradicción) que $\{x^{-\mu-1/2}\alpha_\iota(x)\}_{\iota\in J}$ es una red en $\mathcal{D}(I)$, convergente a $x^{-\mu-1/2}\varphi(x)$ en la topología de $\mathcal{O}$. Dados $k\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$, existe $\iota_0=\iota_0(k,\varepsilon)\in J$, con

$$|e^{-x^2}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\alpha_{\iota_0}-\varphi)(x)| < \varepsilon/e \qquad (x\in I).$$

Si $x\in]0,1[$, podemos escribir:

$$|(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\alpha_{\iota_0}-\varphi)(x)| \le e|e^{-x^2}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\alpha_{\iota_0}-\varphi)(x)| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, a cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, le corresponden $\iota_n\in J$, $x_n\in]0,\frac{1}{n}[$, tales que

$$\begin{aligned}|(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\varphi(x)_{|x=x_n}| &\leq |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\alpha_{\iota_n}-\varphi)(x)_{|x=x_n}| \\ &\quad + |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\alpha_{\iota_n}(x)_{|x=x_n}| \\ &< 1/n,\end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} (x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\varphi(x)_{|x=x_n} = 0.$$

Sin embargo, las particularizaciones $\varphi(x)=x^{\mu+1/2}e^{-x^2}$ y $k=0$ conducen a

$$\lim_{x\to 0+} (x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\varphi(x) = 1,$$

proporcionando la contradicción esperada.

Proposición 12.7. Sea $\mu\geq-\frac{1}{2}$. Dada $\theta\in\mathcal{O}$, la función $x^{\mu+1/2}\theta(x)$ define un elemento en $\mathcal{H}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{\mu+1/2}\theta(x)\phi(x)dx \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu), \tag{12.7}$$

y la aplicación $\theta(x)\longmapsto x^{\mu+1/2}\theta(x)$ es continua de $\mathcal{O}$ en $\mathcal{H}'_\mu$ cuando sobre $\mathcal{H}'_\mu$ se considera tanto la topología débil* como la fuerte.

Demostración. Tomemos $\theta\in\mathcal{O}$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y elijamos $r\in\mathbb{N}$ y $A_r>0$ satisfaciendo

$$|\theta(x)| \leq A_r(1+x^2)^r \qquad (x\in I).$$

Sea también $s\in\mathbb{N}$, $s>\mu+1$, tal que

$$C_s^\mu = \int_0^\infty \frac{x^{2\mu+1}}{(1+x^2)^s}dx < \infty.$$

Tras multiplicar y dividir por $x^{-\mu-1/2}(1+x^2)^s$ el integrando en (12.7) encontramos que

$$|\langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle| \le A_r C_s^{\mu}\, \gamma^{\mu}_{r+s,0}(\phi)$$

y que

$$|\langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle| \le C_s^{\mu}\, \eta^{\mu}_{0;\phi_s}(\theta),$$

donde $\phi_s(x)=(1+x^2)^s\phi(x)\in\mathcal{H}_\mu$.

Por otra parte, la aplicación $\phi(x)\longmapsto\phi_s(x)=(1+x^2)^s\phi(x)$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu$. Si $B\in\mathfrak{B}_\mu$ y denotamos por B_s la imagen de B mediante esta aplicación, resulta análogamente que

$$\sup_{\phi\in B} |\langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle| \le C_s^{\mu}\, \eta^{\mu}_{0;B_s}(\theta). \qquad \square$$

13. Multiplicadores de $\mathcal{H}'_\mu$.

Ahora nos proponemos caracterizar $\mathcal{O}$ como el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}'_\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$). A tal fin será necesaria la reflexividad de $\mathcal{H}_\mu$ (Corolario 4.8).

Para $\theta\in\mathcal{O}$ y $T\in\mathcal{H}'_\mu$, se define θT por transposición:

$$\langle\theta T,\phi\rangle = \langle T,\theta\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Sea $\theta\in C^\infty(I)$ tal que $(x^{-1}D)^k\theta(x)$ está acotada en un entorno de cero para cada $k\in\mathbb{N}$. Si $T\in\mathcal{H}'_\mu$ entonces T pertenece a $\mathcal{B}'_\mu$, el espacio dual de $\mathcal{B}_\mu$, y podemos definir consistentemente $\theta T\in\mathcal{B}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle\theta T,\psi\rangle = \langle T,\theta\psi\rangle \qquad (\psi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Quedamos en disposición de probar que el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}'_\mu$ es precisamente $\mathcal{O}$:

Teorema 13.1. Supongamos que $\theta\in C^\infty(I)$ es tal que $(x^{-1}D)^k\theta(x)$ $(k\in\mathbb{N})$ está acotada en un entorno de cero. Si, para cada $T\in\mathcal{H}'_\mu$, el funcional lineal $\theta T\in\mathcal{B}'_\mu$ puede ser (*a fortiori* unívocamente) extendido hasta $\mathcal{H}_\mu$ como elemento de $\mathcal{H}'_\mu$ de modo que la aplicación $T\longmapsto\theta T$ sea (débilmente*, fuertemente) continua de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo, entonces $\theta\in\mathcal{O}$.

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Nuestras hipótesis implican que el funcional lineal $T\longmapsto\langle\theta T,\phi\rangle$ es continuo sobre $\mathcal{H}'_\mu$. Por la reflexividad de $\mathcal{H}_\mu$ (Corolario 4.8), existe $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ satisfaciendo

$$\langle\theta T,\phi\rangle = \langle T,\varphi\rangle \qquad (T\in\mathcal{H}'_\mu).$$

En particular:

$$\langle\theta\phi,\psi\rangle = \langle\phi,\theta\psi\rangle = \langle\theta\psi,\phi\rangle = \langle\psi,\varphi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle \qquad (\psi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Luego, $\theta\phi=\varphi\in\mathcal{H}_\mu$. Dado que el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ es $\mathcal{O}$ (Teorema 11.3), concluimos que $\theta\in\mathcal{O}$.□

Proposición 13.2. La aplicación bilineal

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\times\mathcal{H}'_\mu &\longrightarrow \mathcal{H}'_\mu\\ (\theta,T) &\longmapsto \theta T\end{aligned}$$

es continua en cada variable cuando se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ tanto de la topología débil* como de la fuerte.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mathcal{H}'_\mu$ está provisto de la topología débil*. En tal caso, la Proposición 12.4, junto con TRÉVES [1967, Corollary to Proposition II.19.5], implica que cada aplicación $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$. Además, mediante la propiedad universal de las topologías iniciales es fácil ver que cada aplicación $\theta\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{O}$ en $\mathcal{H}'_\mu$.

Si $\mathcal{H}'_\mu$ está provisto de la topología fuerte, la continuidad en la segunda variable se infiere nuevamente de TRÉVES [1967, Corollary to Proposition II.19.5]. Por otra parte, sean $T\in\mathcal{H}'_\mu$, $\theta\in\mathcal{O}$, $B\in\mathcal{B}_\mu$. Existen $r\in\mathbb{N}$ y una constante $C>0$ tales que

$$|\langle T,\varphi\rangle| \le C \max_{0\le m,\,k\le r} \gamma^\mu_{m,k}(\varphi) \qquad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Así

$$|\langle \theta T,\phi\rangle| = |\langle T,\theta\phi\rangle| \le C \max_{0\le m,\,k\le r} \gamma^\mu_{m,k}(\theta\phi) \qquad (\phi\in B),$$

de donde se concluye la desigualdad

$$\sup\{\ |\langle \theta T,\phi\rangle| : \phi\in B\ \} \le C \max_{0\le m,\,k\le r} \delta^\mu_{m,k;B}(\theta). \qquad \square$$

En relación con los dos resultados siguientes conviene observar que el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ de las aplicaciones lineales continuas de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo es independiente de la topología (débil* o fuerte) que se considere sobre $\mathcal{H}'_\mu$.

Proposición 13.3. La topología de $\mathcal{O}$ coincide con la que este espacio hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}'_\mu)$.

Demostración. Probaremos que coinciden las topologías σ_s y σ'_s, inducidas sobre $\mathcal{O}$ por $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$ y por $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}'_\mu)$, respectivamente. Denotemos por $\mathcal{M}'$ la colección de todos los entornos débiles* del origen en $\mathcal{H}'_\mu$, y por $\mathcal{N}$ la colección de todos los entornos del origen en $\mathcal{H}_\mu$.

Un σ'_s-entorno subbásico V' del origen en $\mathcal{O}$ es de la forma

$$V' = V'(T;W') = \{\ \theta\in\mathcal{O} : \theta T\in W'\ \},$$

donde $T\in\mathcal{H}'_\mu$ y $W'\in\mathcal{M}'$. A fin de establecer que σ'_s es menos fina que σ_s, debemos encontrar un σ_s-entorno V del origen en $\mathcal{O}$ tal que $V\subset V'$.

Nótese que si $W'_i \in \mathcal{M}'$ (i=1,2) y si $W'_1 \subset W'_2$, entonces $V'(T;W'_1) \subset V'(T;W'_2)$. Consecuentemente, podemos suponer que

$$W' = W'(\varphi;\varepsilon) = \{ S \in \mathcal{H}'_\mu : |\langle S,\varphi\rangle| < \varepsilon \},$$

con $\varphi \in \mathcal{H}_\mu$ y $\varepsilon > 0$.

El conjunto

$$W = W(T;\varepsilon) = \{ \phi \in \mathcal{H}_\mu : |\langle T,\phi\rangle| < \varepsilon \}$$

está en $\mathcal{N}$. Pongamos ahora

$$V = V(\varphi;W) = \{ \theta \in \mathcal{O} : \theta\varphi \in W \}.$$

Este V es un σ_s-entorno básico del origen en $\mathcal{O}$. Además, $\theta \in V$ implica

$$|\langle \theta T,\varphi\rangle| = |\langle T,\theta\varphi\rangle| < \varepsilon,$$

de modo que $\theta \in V'$. Se prueba similarmente que σ'_s es más fina que σ_s.□

Proposición 13.4. La topología de $\mathcal{O}$ coincide con la que este espacio hereda de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}'_\mu)$.

Demostración. Es análoga a la de la Proposición 13.3. Ahora se trata de probar que coinciden las topologías σ_b y σ'_b, inducidas sobre $\mathcal{O}$ por $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ y por $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}'_\mu)$, respectivamente. Como antes, sea $\mathcal{N}$ la colección de todos los entornos del origen en $\mathcal{H}_\mu$, y denotemos por $\mathcal{N}'$ la colección de todos los entornos fuertes del origen en $\mathcal{H}'_\mu$. Sea también $\mathcal{B}'_\mu$ la colección de todos los subconjuntos (débilmente*, fuertemente) acotados de $\mathcal{H}'_\mu$ (Lema 5.3).

Consideremos un σ'_b-entorno subbásico V′ del origen en $\mathcal{O}$, de la forma

$$V' = V'(B';W') = \{ \theta \in \mathcal{O} : \theta T \in W' \ (T \in B') \}$$

con $B' \in \mathcal{B}'_\mu$ y $W' \in \mathcal{N}'$. No se pierde generalidad al suponer que

$$W' = W'(B;\varepsilon) = \{ T \in \mathcal{H}'_\mu : |\langle T,\phi\rangle| < \varepsilon \ (\phi \in B) \}$$

para ciertos $B \in \mathcal{B}_\mu$ y $\varepsilon > 0$.

Ya que $\mathcal{H}_\mu$ es tonelado, el conjunto

$$W = W(B';\varepsilon) = \{ \phi\in\mathcal{H}_\mu : |\langle T,\phi\rangle|<\varepsilon \ (T\in B') \}$$

está en $\mathcal{N}$ (TRÉVES [1967, Proposition II.36.1 y Theorem II.33.1]). Definiendo

$$V = V(B;W) = \{ \theta\in\mathcal{O} : \theta\phi\in W \ (\phi\in B) \}$$

encontramos que V es un σ_b-entorno básico del origen en $\mathcal{O}$ contenido en V', por cuanto

$$|\langle\theta T,\phi\rangle| = |\langle T,\theta\phi\rangle| < \varepsilon \quad (\theta\in V,\ T\in B',\ \phi\in B).$$

Así pues, σ_b es más fina que σ'_b. El mismo argumento establece que σ'_b es más fina que σ_b.□

14. Algunas propiedades de $\mathcal{O}$.

El objeto de esta Sección es demostrar que el espacio localmente convexo $\mathcal{O}$ es completo, bornológico, nuclear, Schwartz, Montel y reflexivo.

Proposición 14.1. La inclusión $\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{E}(I)$ es continua.

Demostración. Basta observar que

$$D^k\theta(x) = \frac{1}{x^{-\mu-1/2}\phi(x)} \sum_{p=0}^{k} C_p x^{\alpha(p)} x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^{\beta(p)}\theta(x) \qquad (x\in I)$$

para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $\theta\in\mathcal{O}$, donde $\phi(x)=x^{\mu+1/2}e^{-x^2}$ $(x\in I)$ pertenece a $\mathcal{H}_\mu$, $C_p>0$ $(0\le p\le k)$ son constantes adecuadas, y $0\le\alpha(p)\le k$, $0\le\beta(p)\le k$ $(0\le p\le k)$ denotan enteros no negativos, con $C_k=1$ y $\alpha(k)=\beta(k)=k$.□

Proposición 14.2. El espacio vectorial topológico $\mathcal{O}$ es localmente convexo, Hausdorff, no metrizable, y completo.

Demostración. La única propiedad que requiere comprobación es la completitud.

Sea $\{\theta_\iota\}_{\iota\in J}$ una red de Cauchy en $\mathcal{O}$. Ya que $\mathcal{O}$ se inyecta continuamente en $\mathcal{E}(I)$ (Proposición 14.1), $\{\theta_\iota\}_{\iota\in J}$ es también una red de Cauchy en $\mathcal{E}(I)$. Siendo $\mathcal{E}(I)$ completo, $\{\theta_\iota\}_{\iota\in J}$ converge a cierta $\theta\in\mathcal{E}(I)$ en $\mathcal{E}(I)$. Debemos probar que $\theta\in\mathcal{O}$ y que $\{\theta_\iota\}_{\iota\in J}$ converge a θ en la topología de $\mathcal{O}$.

Fijemos $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, $k\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$. Por hipótesis, existe $\iota_0=\iota_0(\phi,k,\varepsilon)\in J$ tal que

$$\eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta_\iota-\theta_{\iota'}) < \varepsilon \qquad (\iota,\iota'\geq\iota_0). \tag{14.1}$$

Consideremos $x\in I$, $\eta>0$. Como $\{\theta_\iota\}_{\iota\in J}$ converge a θ en $\mathcal{E}(I)$, se cumple

$$|x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k(\theta-\theta_{\iota'})(x)| < \eta \tag{14.2}$$

para algún $\iota'=\iota'(\phi,x,\eta)\geq\iota_0$. La combinación de (14.1) y (14.2) proporciona

$$|x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k(\theta-\theta_\iota)(x)| < \varepsilon+\eta \qquad (\iota\geq\iota_0),$$

y de la arbitrariedad de x y η se infiere que

$$\eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta-\theta_\iota) \leq \varepsilon \qquad (\iota\geq\iota_0).$$

Con la desigualdad

$$\eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta) \leq \eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta-\theta_\iota) + \eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta_\iota) \qquad (\iota\geq\iota_0)$$

probamos finalmente que $\theta\in\mathcal{O}$ (Proposición 12.1) y que $\{\theta_\iota\}_{\iota\in J}$ converge a θ en $\mathcal{O}$.□

Para demostrar que $\mathcal{O}$ es bornológico necesitamos considerar el subespacio $\mathcal{S}_e$ de la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ formado por las funciones pares de $\mathcal{S}$, al que dotamos de la topología inducida por la del espacio $\mathcal{S}$. Denotamos por $\mathcal{O}_e$ el espacio de multiplicadores de $\mathcal{S}_e$, y definimos sobre $\mathcal{O}_e$ la topología asociada a la familia de seminormas $\{q_{m,k;\phi}\}_{m,k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{S}_e}$.

El próximo resultado será de gran utilidad en lo que sigue.

Lema 14.3. $\mathcal{O}_e = \{ \theta\in\mathcal{O}_M : \theta$ es par $\}$.

Demostración. No es difícil ver que $\theta\in\mathcal{O}_e$ cuando $\theta\in\mathcal{O}_M$ es par.

Inversamente, sea $\theta\in\mathcal{O}_e$. Como $e^{-x^2}\in\mathcal{S}_e$, también $\theta(x)e^{-x^2}\in\mathcal{S}_e$. Por tanto $\theta(x)e^{-x^2}$ es infinitamente derivable y par, así que lo mismo cabe afirmar de θ.

Supongamos ahora que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(1+x^2)^{-m}D^k\theta(x)$ no está acotada en $\mathbb{R}$ para ningún $m\in\mathbb{N}$, y tal que para cada $i\in\mathbb{N}$, $0\le i\le k-1$, existe $m_i\in\mathbb{N}$ de modo que $(1+x^2)^{-m_i}D^i\theta(x)$ está acotada sobre $\mathbb{R}$. Podemos encontrar una sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos con $x_0>1$, $x_{j+1}>x_j+1$, y $|(1+x_j^2)^{-j}D^k\theta(x)_{|x=x_j}|>j$ $(j\in\mathbb{N})$. Elijamos $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfaciendo $\alpha(x)=1$ $(|x|\le\frac{1}{4})$, $\alpha(x)=0$ $(|x|\ge\frac{3}{8})$, y $0\le\alpha(x)\le1$ $(x\in\mathbb{R})$, y definamos

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha(x-x_j)+\alpha(-x-x_j)}{(1+x_j^2)^j} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Claramente, φ es par y $\varphi\in\mathcal{S}$; en otras palabras, $\varphi\in\mathcal{S}_e$. Además,

$$|\varphi(x)D^k\theta(x)_{|x=x_j}| = (1+x_j^2)^{-j}|D^k\theta(x)_{|x=x_j}| > j \qquad (j\in\mathbb{N}).$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}} |D^k(\theta\varphi)(x)| \ge \\
&\ge \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)D^k\theta(x)| - \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(D^j\varphi(x))(D^{k-j}\theta(x))| \\
&\ge \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)D^k\theta(x)| - \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^{m_{k-j}}D^j\varphi(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^{-m_{k-j}}D^{k-j}\theta(x)| \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

probando que $\theta\varphi\notin\mathcal{S}$. Pero esto contradice el hecho de que $\theta\in\mathcal{O}_e$, y permite concluir que $\theta\in\mathcal{O}$.□

Proposición 14.4. El espacio $\mathcal{O}$ es bornológico.

Demostración. Para simplificar, escribiremos $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{-1/2}$.

En virtud de EIJNDHOVEN–GRAAF [1983, Corollary 4.8] y de la observación que le sigue, la aplicación

$$\begin{aligned} i\colon \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{S}_e \\ \phi &\longmapsto \phi \end{aligned}$$

es biyectiva. Además, puede probarse que para cada $m,k\in\mathbb{N}$ existen $C>0$, $n\in\mathbb{N}$ y $m_i,k_i\in\mathbb{N}$ $(1\leq i\leq n)$ satisfaciendo

$$p_{m,k}(\phi) \leq C \sum_{i=1}^{n} \gamma^{-1/2}_{m_i,k_i}(\phi) \qquad (\phi\in\mathcal{H}).$$

Luego, i es continua de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{S}_e$, y se infiere del teorema de la aplicación abierta que i es, en realidad, un homeomorfismo de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{S}_e$. Dicho de otra manera, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S}_e$ coinciden tanto algebraica como topológicamente. En consecuencia $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_e$ también coinciden, y las familias de seminormas $\{q_{m,k;\phi}\}_{m,k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{S}_e}$ y $\{\delta^{\mu}_{m,k;\phi}\}_{m,k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}}$ son equivalentes sobre $\mathcal{O}$.

Consideramos ahora la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{O}_M &\longrightarrow \mathcal{O}_e \\ \theta &\longmapsto (T\theta)(x)=\frac{1}{2}\,(\theta(x)+\theta(-x)). \end{aligned}$$

Claramente, T es sobre. Además, es continua y abierta. En efecto, si $m,k\in\mathbb{N}$ y $\phi\in\mathcal{S}_e$ entonces

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k(\phi T\theta)(x)| &\leq \frac{1}{2}\Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k(\theta\phi)(x)| \\ &\qquad + \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k(\theta\phi)(-x)| \Big\} \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k(\theta\phi)(x)| \qquad (\theta\in\mathcal{O}_M). \end{aligned}$$

Así pues, T es continua. Para probar que es abierta, fijemos $m,k\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$, y $\phi\in\mathcal{S}$, y consideremos el conjunto

$$U(m,k,\varepsilon;\phi) = \{ \theta\in\mathcal{O}_M : \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k(\theta\phi)(x)|<\varepsilon \}.$$

Nótese que $U(m,k,\varepsilon;\phi)$ es un entorno del origen en $\mathcal{O}_M$. Escribamos $\phi_e(x)=\frac{1}{2}(\phi(x)+\phi(-x))$, $\phi_o(x)=\frac{1}{2}(\phi(x)-\phi(-x))$, e introduzcamos el conjunto $V(m,k,\varepsilon;\phi)$ de todas aquellas $\theta\in\mathcal{O}_e$ que satisfacen

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^k(\theta\phi_e)(x)| < \varepsilon/3,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^{m+1} D^k x^{-1}(\theta\phi_o)(x)| < \varepsilon/3,$$

y

$$k \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^m D^{k-1} x^{-1}(\theta\phi_o)(x)| < \varepsilon/3.$$

Entonces $V(m,k,\varepsilon;\phi)$ es un entorno del origen en $\mathcal{O}_e$. Para $\theta\in V(m,k,\varepsilon;\phi)$ se cumple que $\theta\in\mathcal{O}_M$, que $T\theta=\theta$, y que

$$|(1+x^2)^m D^k(\theta\phi_o)(x)| \le |(1+x^2)^m x D^k x^{-1}(\theta\phi_o)(x)|$$

$$+ k|(1+x^2)^m D^{k-1} x^{-1}(\theta\phi_o)(x)| < 2\varepsilon/3 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Por consiguiente $V(m,k,\varepsilon;\phi)\subset TU(m,k,\varepsilon;\phi)$, probando que T es abierta.

Como T es sobre, continua y abierta, la aplicación

$$\begin{aligned} \tau:\ \mathcal{O}_M/\mathrm{Ker}\ T &\longrightarrow \mathcal{O}_e \\ \theta+\mathrm{Ker}\ T &\longmapsto T\theta \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. De Horvath [1966, Corollary to Proposition 3.7.4], siendo $\mathcal{O}_M$ bornológico (Grothendieck [1955, Chapitre II, Théorème 16] concluimos que $\mathcal{O}_e$ también lo es. Esto completa la demostración.□

Proposición 14.5. El espacio $\mathcal{O}$ es nuclear, Schwartz y Montel (en particular, reflexivo).

Demostración. Ya que $\mathcal{H}_\mu$ es completo y tonelado, y $\mathcal{H}'_\mu$ (con su topología fuerte) es completo y nuclear (Corolarios 4.3 y 4.9), $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ es nuclear (TRÉVES [1967, Corollary to Proposition III.50.5]). Consecuentemente, $\mathcal{O}$ es nuclear como subespacio de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ (TRÉVES [1967, Proposition III.50.1]). Además, los espacios nucleares son de Schwartz (WONG [1979, Proposition 3.2.5]).

Finalmente, $\mathcal{O}$ es tonelado, porque es (casi-)completo y bornológico (SCHAEFER [1971, II-8.4]). De SCHAEFER [1971, Exercise IV-19 (b)] inferimos que $\mathcal{O}$, siendo nuclear, (casi-)completo y tonelado, es Montel (luego, reflexivo en virtud de HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.9.1]).□

15. El espacio dual de $\mathcal{O}$.

En esta Sección discutiremos algunas propiedades del espacio $\mathcal{O}'$, dual de $\mathcal{O}$. Encontramos representaciones de los elementos de $\mathcal{O}'$ y establecemos que, provisto de su topología fuerte, $\mathcal{O}'$ es un espacio completo y nuclear (luego, Schwartz, Montel, y reflexivo).

Para $S\in\mathcal{H}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, definimos el funcional lineal ϕS sobre $\mathcal{O}$ por transposición:

$$\langle\phi S,\theta\rangle = \langle S,\theta\phi\rangle \qquad (\theta\in\mathcal{O}).$$

Proposición 15.1. Si $S\in\mathcal{H}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces $\phi S\in\mathcal{O}'$. Recíprocamente, dado $v\in\mathcal{O}'$ existen $n\in\mathbb{N}$, $S_i\in\mathcal{H}'_\mu$, y $\phi_i\in\mathcal{H}_\mu$ $(1\le i\le n)$, tales que $v=\sum_{i=1}^{n}\phi_i S_i$.

Demostración. Sean $S\in\mathcal{H}'_\mu$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Para ciertos $C>0$, $r\in\mathbb{N}$ se cumple

$$|\langle\phi S,\theta\rangle| = |\langle S,\theta\phi\rangle| \le C \max_{0\le m,\,k\le r} \gamma^{\mu}_{m,k}(\theta\phi) \le C \max_{0\le m,\,k\le r} \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\eta^{\mu}_{p;\phi_p}(\theta) \qquad (\theta\in\mathcal{O}),$$

donde $\phi_p(x)=(1+x^2)^m x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k-p}x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ $(x\in I)$ (véase la demostración de la Proposición 12.1). Por consiguiente, $\phi S\in\mathcal{O}'$.

Los espacios $\mathcal{L}'_s(\mathcal{H}_\mu)$ y $\mathcal{H}_\mu\otimes\mathcal{H}'_\mu$ son algebraicamente isomorfos (SCHAEFER [1971, IV-4.3, Corollary 4]). Dado $v\in\mathcal{L}'_s(\mathcal{H}_\mu)$ existen $n\in\mathbb{N}$, $S_i\in\mathcal{H}'_\mu$, y $\phi_i\in\mathcal{H}_\mu$ $(1\le i\le n)$, tales que

$$v(U) = \sum_{i=1}^{n}\langle S_i,U\phi_i\rangle \qquad (U\in\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)).$$

Toda $v\in\mathcal{O}'$ admite una extensión como elemento de $\mathcal{L}'_s(\mathcal{H}_\mu)$, así que ciertos $n\in\mathbb{N}$, $S_i\in\mathcal{H}'_\mu$, y $\phi_i\in\mathcal{H}_\mu$ $(1\le i\le n)$, satisfacen

$$v(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\langle S_i,\theta\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\phi_i S_i,\theta\rangle \qquad (\theta\in\mathcal{O}).$$ □

Proposición 15.2. Sea $1<q\le\infty$. Si $v\in\mathcal{O}'$, existen $r\in\mathbb{N}$ y funciones medibles f_k $(0\le k\le r)$, tales que $(1+x^2)^m f_k(x)\in L^q(I)$ $(m\in\mathbb{N},\ 0\le k\le r)$, con

$$v = \sum_{k=0}^{r}(-Dx^{-1})^k(1+x^2)^r f_k.$$

Demostración. Sea $v\in\mathcal{O}'$. La Proposición 15.1 asegura la existencia de $n\in\mathbb{N}$, $S_i\in\mathcal{H}'_\mu$, y $\phi_i\in\mathcal{H}_\mu$ $(1\le i\le n)$, tales que $v=\sum_{i=1}^{n}\phi_i S_i$. De otra parte (Proposición 5.1), dados q, $1<q\le\infty$, y $S\in\mathcal{H}'_\mu$ existen $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_k\in L^q(I)$ $(0\le k\le r)$ verificando

$$S = \sum_{k=0}^{r}x^{-\mu-1/2}(-Dx^{-1})^k(1+x^2)^r f_k = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k x^{-\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\frac{(1+x^2)^r}{x}f_k.$$

Además, para $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y $f\in L^q(I)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k\frac{(1+x^2)^r}{x}f(x) &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x^{-1}D)^{k-j}\left(\frac{(1+x^2)^r}{x}g_j(x)\right)\\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{j}x^{-1}(-Dx^{-1})^{k-j}((1+x^2)^r g_j(x)),\end{aligned}$$

donde $g_j(x)=f(x)(x^{-1}D)^j x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ y $(1+x^2)^m g_j(x)\in L^q(I)$ $(m\in\mathbb{N},\ 0\le j\le k)$.

De lo anterior ya se concluye la representación deseada.□

Proposición 15.3. Dotado de su topología fuerte, el dual $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ es un espacio completo y nuclear.

Demostración. El dual fuerte de todo espacio bornológico es completo (SCHAEFER [1971, IV–6.1]); luego, provisto de su topología fuerte, $\mathcal{O}'$ es completo en virtud de la Proposición 14.4.

Como $\mathcal{H}_\mu$ es completo y nuclear (Proposición 4.2) y $\mathcal{H}'_\mu$ es nuclear respecto de su topología fuerte (Corolario 4.3), $\mathcal{L}'_b(\mathcal{H}_\mu)$, con su topología fuerte, es nuclear (GROTHENDIECK [1955, Theorem II–2.9, Corollary 3]). Lo mismo cabe aseverar entonces de $\mathcal{O}'$, que es isomorfo a un cociente de $\mathcal{L}'_b(\mathcal{H}_\mu)$ (TRÉVES [1967, Proposition III.50.1]).□

Corolario 15.4. El espacio $\mathcal{O}'$ (con su topología fuerte) es Schwartz, Montel, y reflexivo.

Demostración. Los espacios nucleares son de Schwartz (WONG [1979, Proposition 3.2.5]). De acuerdo con la Proposición 15.3, $\mathcal{O}'$ es Schwartz.

El dual fuerte de un espacio reflexivo es también reflexivo (HORVATH [1966, Proposition 3.8.7]), y los espacios reflexivos son tonelados (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.8.6]). Luego, $\mathcal{O}'$ (con su topología fuerte) es reflexivo y tonelado (Proposición 14.5).

Todo espacio de Schwartz (casi–)completo es semi-Montel (HORVATH [1966, Corollary to Proposition 3.15.4]); en consecuencia, dotado de su topología fuerte, $\mathcal{O}'$ es semi-Montel (Proposición 15.3). Los espacios semi-Montel tonelados son de Montel (HORVATH [1966, Definition 3.9.1 y p. 217]).□

CAPITULO 2

LA CONVOLUCION DE HANKEL GENERALIZADA

I. LA CONVOLUCION DE HANKEL EN $L^1_\mu(I)$.

1. Introducción.

HIRSCHMAN [1960/61], CHOLEWINSKI [1965] y HAIMO [1965] han introducido y estudiado una convolución (clásica) para la transformación integral tipo Hankel

$$(h_\mu\phi)(t) = \int_0^\infty \phi(x)(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)x^{2\mu+1}dx \qquad (\mu\geq -\tfrac{1}{2}). \tag{1.1}$$

Ya que $\mathfrak{H}_\mu(x^{\mu+1/2}\phi(x))(t)=t^{\mu+1/2}(h_\mu\phi)(t)$ $(t\in I)$, mediante un oportuno cambio de variables es posible definir y estudiar una convolución para la transformación de Hankel

$$(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t) = \int_0^\infty (xt)^{1/2}J_\mu(xt)\phi(x)dx \qquad (\mu\geq -\tfrac{1}{2}). \tag{1.2}$$

Llevamos a cabo esta tarea en la próxima Sección 2. Para nuestra ulterior investigación de la convolución generalizada se revelan particularmente útiles la desigualdad tipo Young recogida en el Teorema 2.3 y la fórmula de intercambio

$$\mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t) \qquad (t\in I) \tag{1.3}$$

que figura en la Proposición 2.5.

La transformación (1.2) permite un estudio distribucional más elegante que la (1.1), en el sentido de que recuerda más exactamente el realizado por SCHWARTZ [1978] para la transformación de Fourier. Por esta razón, hemos preferido adoptar (1.2) en vez de (1.1) a la hora de estudiar sistemáticamente la convolución de Hankel en espacios de funciones generalizadas. Una aparente desventaja de (1.2) frente a (1.1) es que la fórmula de intercambio

$$h_\mu(\phi\#\varphi)(t) = (h_\mu\phi)(t)(h_\mu\varphi)(t) \qquad (t\in I)$$

correspondiente a (1.1) (véase HIRSCHMAN [1960/61, Theorem 2.d]) no contiene el peso $t^{-\mu-1/2}$, que sí comparece en (1.3). Debemos hacer notar, sin embargo, que en la literatura matemática existen precedentes de operaciones de convolución cuya fórmula de intercambio incluye pesos, al igual que (1.3). Estas convoluciones son las denominadas *de tipo Churchill* (véase CHURCHILL [1972, pp. 319–320]).

A lo largo de toda esta Parte supondremos que μ es un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$.

2. La convolución de Hankel clásica.

Sea $\mathcal{J}_\mu(t)=t^{1/2}J_\mu(t)$ $(t\in I)$. Inspirados en trabajos anteriores de HIRSCHMAN [1960/61], CHOLEWINSKI [1965] y HAIMO [1965] consideramos el núcleo

$$D_\mu(x,y,z) = \int_0^\infty t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)\mathcal{J}_\mu(yt)\mathcal{J}_\mu(zt)dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(xyz)^{1/2-\mu}(z^2-(x-y)^2)^{\mu-1/2}((x+y)^2-z^2)^{\mu-1/2}}{2^{3\mu-1}\pi^{1/2}\Gamma(\mu+1/2)} & (x,y,z\in I,\ |x-y|<z<x+y), \\ 0 & (x,y,z\in I,\ 0<z<|x-y| \text{ ó } x+y<z<\infty), \end{cases} \tag{2.1}$$

para el que es posible establecer las propiedades siguientes:

(i) Si $x,y\in I$ y $0\le t<\infty$, entonces

$$t^{\mu+1/2}\int_0^\infty \mathcal{J}_\mu(zt)D_\mu(x,y,z)dz = \mathcal{J}_\mu(xt)\mathcal{J}_\mu(yt).$$

(ii) Si $x,y\in I$, entonces

$$\int_0^\infty D_\mu(x,y,z)z^{\mu+1/2}dz = c_\mu^{-1}(xy)^{\mu+1/2},$$

donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$.

(iii) $D_\mu(x,y,z)\geq 0$ $(x,y,z\in I)$.

(iv) $D_\mu(x,y,z)=D_\mu(z,x,y)=D_\mu(y,z,x)=\ldots$ $(x,y,z\in I)$.

Definición 2.1. Sean $\phi=\phi(x)$, $\varphi=\varphi(x)$ $(x\in I)$ dos funciones cualesquiera. Si las integrales involucradas existen, se define la *trasladada* de φ por $x\in I$ mediante la fórmula:

$$(\tau_x\varphi)(y) = \int_0^\infty \varphi(z)D_\mu(x,y,z)dz \qquad (y\in I),$$

y la *convolución de Hankel* de ϕ y φ como la función

$$(\phi\#\varphi)(x) = \int_0^\infty \phi(y)(\tau_x\varphi)(y)dy \qquad (x\in I).$$

Para $1\leq p<\infty$ denotamos por $L^p_\mu(I)$ el espacio de las funciones medibles complejas $\phi=\phi(x)$ definidas sobre I cuya norma

$$\|\phi\|_{\mu,p} = \left\{ \int_0^\infty |\phi(x)|^p x^{\mu+1/2}dx \right\}^{1/p}$$

es finita. Mediante $L^\infty_\mu(I)$ denotamos el espacio de las funciones medibles complejas $\phi=\phi(x)$ $(x\in I)$ tales que $\|\phi\|_{\mu,\infty}<\infty$, siendo $\|\phi\|_{\mu,\infty}$ el supremo esencial de $x^{-\mu-1/2}|\phi(x)|$ sobre I.

Proposición 2.2. Si $\phi\in L^1_\mu(I)$ y $x\in I$ entonces $\tau_x\phi\in L^1_\mu(I)$.

Demostración. Para $\phi\in L^1_\mu(I)$ y $x\in I$, se tiene

$$\int_0^\infty |\tau_x\phi(y)|y^{\mu+1/2}dy \leq \int_0^\infty |\phi(z)|dz\int_0^\infty D_\mu(x,y,z)y^{\mu+1/2}dy \leq c_\mu^{-1}x^{\mu+1/2}\int_0^\infty |\phi(z)|z^{\mu+1/2}dz$$

donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$.□

Teorema 2.3. Si $\phi,\varphi\in L^1_\mu(I)$ entonces $(\phi\#\varphi)(x)$ existe para casi todo $x\in I$, y se cumple

$$\|\phi\#\varphi\|_{\mu,1} \le c_\mu^{-1}\|\phi\|_{\mu,1}\|\varphi\|_{\mu,1},$$

siendo $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$. Si $\phi\in L^1_\mu(I)$ y $\varphi\in L^\infty_\mu(I)$ entonces $(\phi\#\varphi)(x)$ existe para todo $x\in I$, y es continua.

Demostración. Dadas $\phi,\varphi\in L^1_\mu(I)$, se verifica:

$$\int_0^\infty |\phi(y)|dy\int_0^\infty |\varphi(z)|dz\int_0^\infty D_\mu(x,y,z)x^{\mu+1/2}dx =$$

$$= c_\mu^{-1}\int_0^\infty |\phi(y)|y^{\mu+1/2}dy \int_0^\infty |\varphi(z)|z^{\mu+1/2}dz = c_\mu^{-1}\|\phi\|_{\mu,1}\|\varphi\|_{\mu,1};$$

así, la primera parte es consecuencia del teorema de Fubini.

Supongamos ahora que $\phi\in L^1_\mu(I)$ y $\varphi\in L^\infty_\mu(I)$, y fijemos $x,x_0\in I$. De ser

$$(\phi\#\varphi)(x)-(\phi\#\varphi)(x_0) = \int_0^\infty\int_0^\infty \phi(y)\varphi(z)(D_\mu(x,y,z)-D_\mu(x_0,y,z))dx,$$

sigue que

$$|(\phi\#\varphi)(x)-(\phi\#\varphi)(x_0)| \le \int_0^\infty\int_0^\infty |\phi(y)||z^{-\mu-1/2}\varphi(z)||D_\mu(x,y,z)-D_\mu(x_0,y,z)|z^{\mu+1/2}dzdy$$

$$\le \|\varphi\|_{\mu,\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty |\phi(y)||D_\mu(x,y,z)-D_\mu(x_0,y,z)|z^{\mu+1/2}dzdy.$$

Como

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^\infty |D_\mu(x,y,z)-D_\mu(x_0,y,z)|z^{\mu+1/2}dz = 0$$

y

$$|\phi(y)||D_\mu(x,y,z)-D_\mu(x_0,y,z)|z^{\mu+1/2} \le c_\mu^{-1}|y^{\mu+1/2}\phi(y)|(x^{\mu+1/2}+x_0^{\mu+1/2}),$$

el teorema de la convergencia dominada permite concluir que

$$\lim_{x\to x_0} |(\phi\#\varphi)(x)-(\phi\#\varphi)(x_0)| = 0. \qquad \square$$

Proposición 2.4. Si $\phi\in L^1_\mu(I)$ y $x\in I$, entonces

$$\mathfrak{H}_\mu(\tau_x\phi)(t) = t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t) \qquad (t\in I).$$

Demostración. Basta tener en cuenta la Proposición 2.2 y aplicar el teorema de Fubini.□

Proposición 2.5. Si $\phi,\varphi\in L^1_\mu(I)$, entonces

$$\mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t) \qquad (t\in I).$$

Demostración. Valiéndonos del teorema de Fubini obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)(t) &= \int_0^\infty (\phi\#\varphi)(x)\mathcal{J}_\mu(xt)dx \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \phi(y)\varphi(z)D_\mu(x,y,z)\mathcal{J}_\mu(xt)dxdydz \\ &= t^{-\mu-1/2}\int_0^\infty \phi(y)\mathcal{J}_\mu(yt)dy\int_0^\infty \varphi(z)\mathcal{J}_\mu(zt)dz \\ &= t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t) \qquad (t\in I).\end{aligned}$$

□

Los tres resultados siguientes se refieren a identidades aproximadas para la convolución de Hankel.

Teorema 2.6. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones no negativas en $L^1_\mu(I)$, de norma unidad, tales que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\infty k_n(x)x^{\mu+1/2}dx = 0 \qquad (\delta>0).$$

Si $\phi\in L^\infty_\mu(I)$ es continua en $x_0\in I$ entonces

$$c_\mu \lim_{n\to\infty}(\phi\#k_n)(x_0) = \phi(x_0),$$

donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$.

Demostración. Pongamos $\varphi(x)=x^{-\mu-1/2}\phi(x)$,

$$\mathcal{I} = c_\mu(\phi\#k_n)(x_0)-\phi(x_0) = c_\mu\int_0^\infty\int_0^\infty(\varphi(x)-\varphi(x_0))k_n(y)D_\mu(x_0,x,y)x^{\mu+1/2}dxdy.$$

Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta>0$ de modo que $|x-x_0|<\delta$ implique $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, y sean:

$$\mathcal{I}_1 = c_\mu\int_\delta^\infty\int_0^\infty(\varphi(x)-\varphi(x_0))k_n(y)D_\mu(x_0,x,y)x^{\mu+1/2}dxdy,$$

$$\mathcal{I}_2 = c_\mu\int_0^\delta\int_0^\infty(\varphi(x)-\varphi(x_0))k_n(y)D_\mu(x_0,x,y)x^{\mu+1/2}dxdy.$$

Entonces

$$|\mathcal{I}_1| \le 2c_\mu\|\phi\|_{\mu,\infty}\int_\delta^\infty\int_0^\infty k_n(y)D_\mu(x_0,x,y)x^{\mu+1/2}dxdy \le 2\|\phi\|_{\mu,\infty}x_0^{\mu+1/2}\int_\delta^\infty k_n(y)y^{\mu+1/2}dy,$$

probando que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}_1=0$.

Por otra parte

$$D_\mu(x_0,x,y) = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\pi^{1/2}}(xx_0z)^{1/2-\mu}\Delta(x,x_0,z)^{2\mu-1},$$

donde $\Delta(x,x_0,z)$ es el área del triángulo de lados x,x_0,z, si existe tal triángulo, mientras que $D_\mu(x_0,x,y)=0$, si dicho triángulo no existe (HIRSCHMAN [1960/61, p. 308]). Consecuentemente, para $0<y<\delta$ es $D_\mu(x_0,x,y)=0$ excepto cuando $x_0-\delta\le x\le x_0+\delta$, en cuyo caso $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$. Tenemos así:

$$|\mathcal{I}_2| \le \varepsilon c_\mu\int_0^\delta\int_0^\infty k_n(y)D_\mu(x_0,x,y)x^{\mu+1/2}dxdy \le \varepsilon\int_0^\delta k_n(y)(x_0y)^{\mu+1/2}dy \le \varepsilon x_0^{\mu+1/2}.$$

Sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathcal{I}| \le \limsup_{n\to\infty} |\mathcal{I}_1| + \limsup_{n\to\infty} |\mathcal{I}_2| \le \varepsilon x_0^{\mu+1/2},$$

y de la arbitrariedad de $\varepsilon>0$ resulta la conclusión deseada.□

Corolario 2.7. Bajo las mismas hipótesis sobre $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que en el Teorema 2.6, sea $\phi\in L^1_\mu(I)$, y sea $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$. Se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \|c_\mu(\phi\# k_n)-\phi\|_{\mu,1} = 0.$$

Demostración. Si $\psi\in L^1_\mu(I)$ y $\psi_n\in L^1_\mu(I)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ son tales que $\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x)$ c.t.p. en I, con $\|\psi_n\|_{\mu,1}\le\|\psi\|_{\mu,1}$ $(n=1,2,3\ldots)$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|_{\mu,1}=0$. Ahora, el Corolario 2.7 es consecuencia de los Teoremas 2.3 y 2.6 en el caso particular de que $\phi\in L^1_\mu(I)$ sea continua y acotada. Como tales funciones son densas en $L^1_\mu(I)$, el caso general sigue por aproximación.□

Teorema 2.8. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones no negativas en $L^1_\mu(I)$, de norma unidad, tales que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\infty k_n(x)x^{\mu+1/2}dx = 0 \qquad (\delta>0),$$

con $\mathfrak{h}_\mu k_n\in L^1_\mu(I)$ y $\mathfrak{h}_\mu(\mathfrak{h}_\mu k_n)=k_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Dada $\phi\in L^1_\mu(I)$, se cumple

$$\lim_{n\to\infty}\|c_\mu\mathfrak{h}_\mu(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{h}_\mu k_n)(t))-\phi\|_{\mu,1} = 0,$$

donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$.

Demostración. Por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_\mu(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{h}_\mu k_n)(t))(x) &= \\
&= \int_0^\infty t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{h}_\mu k_n)(t)\mathcal{J}_\mu(xt)dt \\
&= \int_0^\infty t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu k_n)(t)\mathcal{J}_\mu(xt)dt\int_0^\infty\phi(y)\mathcal{J}_\mu(yt)dy \\
&= \int_0^\infty\phi(y)dy\int_0^\infty t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu k_n)(t)\mathcal{J}_\mu(xt)\mathcal{J}_\mu(yt)dt \\
&= \int_0^\infty\phi(y)dy\int_0^\infty(\mathfrak{h}_\mu k_n)(t)dt\int_0^\infty\mathcal{J}_\mu(zt)D_\mu(x,y,z)dz \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\phi(y)k_n(z)D_\mu(x,y,z)dydz = (\phi\# k_n)(x) \qquad (x\in I).
\end{aligned}$$

Basta aplicar el Corolario 2.7.□

Un ejemplo de sucesión que satisface las hipótesis del Teorema 2.8 viene dado por las funciones

$$k_n(x) = \frac{n^{2\mu+2}}{\Gamma(2\mu+2)} x^{\mu+1/2} e^{-nx} \qquad (x\in I,\ n=1,2,3,\ldots)$$

(véase WATSON [1956, pp. 386 y 434]).

Corolario 2.9. Si $\phi\in L^1_\mu(I)$ y $\mathfrak{h}_\mu\phi\in L^1_\mu(I)$ es posible redefinir ϕ en un conjunto de medida nula para hacerla continua sobre I, siendo válida la fórmula de inversión

$$\phi(x) = \int_0^\infty (\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xt)dt \qquad (x\in I).$$

Consecuencia inmediata del Teorema 2.8 es la propiedad asociativa siguiente:

Proposición 2.10. Si $\phi,\varphi,\psi\in L^1_\mu(I)$, entonces

$$((\phi\#\varphi)\#\psi)(x) = (\phi\#(\varphi\#\psi))(x) \qquad \text{c.t.p. } x\in I.$$

Demostración. De la igualdad

$$\mathfrak{h}_\mu((\phi\#\varphi)\#\psi)(t) = t^{-2\mu-1}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{h}_\mu\varphi)(t)(\mathfrak{h}_\mu\psi)(t) = \mathfrak{h}_\mu(\phi\#(\varphi\#\psi))(t) \qquad (t\in I)$$

y del Teorema 2.8 sigue que

$$\|(\phi\#\varphi)\#\psi-\phi\#(\varphi\#\psi)\|_{\mu,1} = 0.$$ □

La convolución de Hankel es conmutativa:

Proposición 2.11. Si $\phi,\varphi\in L^1_\mu(I)$, entonces

$$(\phi\#\varphi)(x) = (\varphi\#\phi)(x) \quad \text{c.t.p. } x\in I.$$

Demostración. Basta proceder como en la prueba de la Proposición 2.10.□

II. LA CONVOLUCION DE HANKEL EN $\mathcal{B}_\mu$ Y EN $\mathcal{B}'_\mu$.

3. Introducción.

Hasta ahora, la convolución de Hankel ha sido definida sólo en ciertos espacios de distribuciones y para valores particulares del parámetro μ (véanse SOUSA PINTO [1985] y GONZALEZ [1985]). Nuestro objetivo en esta Parte es estudiar la convolución de Hankel en los espacios $\mathcal{B}_\mu$ y $\mathcal{B}'_\mu$.

En la Sección 4 probamos propiedades de permanencia y continuidad de la traslación y de la convolución de Hankel en $\mathcal{B}_\mu$. La Sección 5 contiene algunos resultados sobre aproximación en $\mathcal{B}_\mu$ por convolución con identidades aproximadas en este espacio. Los correspondientes resultados para $\mathcal{B}'_\mu$ se demuestran en la Sección 6. Allí introducimos el espacio $\mathcal{E}_\mu$ de las funciones complejas regulares $\phi=\phi(x)$ definidas sobre I para las cuales existe $\lim_{x\to 0+} (x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$. Su dual, $\mathcal{E}'_\mu$, está constituido por los elementos de $\mathcal{B}'_\mu$ que tienen su soporte acotado por la derecha. Llegamos a definir $T\#f$ para $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $f\in\mathcal{E}'_\mu$, estableciendo algunas propiedades algebraicas de esta convolución. Probamos también teoremas de tipo Paley-Wiener para las transformadas de Hankel de los elementos de $\mathcal{B}'_\mu$.

Los espacios $\mathcal{B}_\mu$ y $\mathcal{B}'_\mu$ desempeñan en la convolución de Hankel el mismo papel que los espacios $\mathcal{D}$ (funciones de soporte compacto en $\mathbb{R}$) y su dual $\mathcal{D}'$ en la teoría de la convolución usual. Existe un paralelismo semejante entre los espacios $\mathcal{E}_\mu$ y $\mathcal{E}'_\mu$, por un lado, y $\mathcal{E}$ (funciones infinitamente derivables sobre $\mathbb{R}$) y $\mathcal{E}'$ (distribuciones de soporte compacto en $\mathbb{R}$), por otro.

En lo que sigue C denotará una constante positiva adecuada (no necesariamente la misma en cada comparecencia). Además, μ representará siempre un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$. Para simplificar, introduciremos la función $b_\mu(z)=z^{-\mu}J_\mu(z)$ $(z\in I)$.

4. La convolución de Hankel en $\mathcal{B}_\mu$.

Definimos los espacios $\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$, con $a>0$ y $r\in\mathbb{N}$, como sigue. Una función $\Phi=\Phi(\eta)$ está en $\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$ si, y sólo si, $\eta^{-\mu-1/2}\Phi(\eta)$ es una función entera par de la variable compleja η y

$$\sigma^\mu_{a,r}(\Phi) = \max_{0\leq k\leq r}\ \sup_{\eta\in\mathbb{C}} |e^{-a|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}\Phi(\eta)| < \infty.$$

Normado mediante $\sigma^\mu_{a,r}$, $\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$ es un espacio de Banach. Resulta claro que el espacio $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ considerado en ZEMANIAN **[1966b]** coincide con $\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$. Además, la topología de $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ es la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{Y}_{\mu,a}\hookrightarrow\mathcal{Y}^r_{\mu,a}\}_{r\in\mathbb{N}}$. Fue demostrado por ZEMANIAN **[1966b,** Theorem 1**]** que la transformación de Hankel $\mathfrak{H}_\mu$ define un isomorfismo de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ en $\mathcal{Y}_{\mu,a}$.

La Proposición siguiente establece una relación muy útil entre los espacios $\mathcal{B}^m_{\mu,a}$, definidos en la Sección 1.8, e $\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$.

Proposición 4.1. Sean $r\in\mathbb{N}$ y $a>0$. La transformación de Hankel es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{B}^{2r}_{\mu,a}$ en $\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$ y de $\mathcal{Y}^r_{\mu,a}$ en $\mathcal{B}^s_{\mu,a}$, con $r>s+\mu+1$.

Demostración. Basta proceder como en la prueba de ZEMANIAN **[1966b,** Theorem 1**]**.□

Ahora estudiaremos la traslación y la convolución de Hankel sobre $\mathcal{B}_\mu$.

Proposición 4.2. Sean $x,a>0$, y sean $r,s\in\mathbb{N}$, con $r>s+\mu+1$. La aplicación lineal $\phi\longmapsto\tau_x\phi$ es continua de $\mathcal{B}^{2r}_{\mu,a}$ en $\mathcal{B}^s_{\mu,x+a}$.

Demostración. Fijemos $\phi\in\mathcal{B}^{2r}_{\mu,a}$. De acuerdo con la Proposición 2.4,

$$\mathfrak{H}_{\mu}(\tau_{x}\phi)(\eta) = x^{\mu+1/2}b_{\mu}(x\eta)(\mathfrak{H}_{\mu}\phi)(\eta) \qquad (\eta\in\mathbb{C}).$$

Como $b_{\mu}(z)$ es una función entera par, y como $\mathfrak{H}_{\mu}\phi\in\mathcal{Y}^{r}_{\mu,a}$, la función $\eta^{-\mu-1/2}\mathfrak{H}_{\mu}(\tau_{x}\phi)(\eta)$ es par y entera. Además, existe $M=M(\mu)$ tal que

$$|e^{-x|\mathrm{Im}\eta|}b_{\mu}(x\eta)| \le M \qquad (\eta\in\mathbb{C}). \tag{4.1}$$

Luego

$$\sigma^{r}_{\mu,a+x}(\mathfrak{H}_{\mu}(\tau_{x}\phi)) \le C\sigma^{r}_{\mu,a}(\mathfrak{H}_{\mu}\phi) \le C\, x^{\mu+1/2}\|\phi\|_{\mu,\infty,2r},$$

probando que $\mathfrak{H}_{\mu}(\tau_{x}\phi)\in\mathcal{Y}^{r}_{\mu,x+a}$. Por la Proposición 4.1, $\tau_{x}\phi\in\mathcal{B}^{s}_{\mu,x+a}$ siempre que $s\in\mathbb{N}$ y $r>s+\mu+1$. Que el operador traslación es continuo de $\mathcal{B}^{2r}_{\mu,a}$ en $\mathcal{B}^{s}_{\mu,x+a}$ sigue también de la Proposición 4.1.□

Corolario 4.3. La aplicación $\phi\longmapsto\tau_{x}\phi$ es continua de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ en $\mathcal{B}_{\mu,x+a}$ $(x,a>0)$ y de $\mathcal{B}_{\mu}$ en $\mathcal{B}_{\mu}$.

Demostración. La primera afirmación del Corolario es consecuencia inmediata de la Proposición 4.2. Al ser $\mathcal{B}_{\mu}$ bornológico (Corolario 1.8.6), la segunda resulta de la primera en virtud de HORVATH [1966, Theorem 2.12.2 y Proposition 3.7.1].

Proposición 4.4. Sean $a,b>0$. La aplicación $(\phi,\varphi)\longmapsto\phi\#\varphi$ es continua de $\mathcal{B}_{\mu,a}\times\mathcal{B}_{\mu,b}$ en $\mathcal{B}_{\mu,a+b}$ y de $\mathcal{B}_{\mu}\times\mathcal{B}_{\mu}$ en $\mathcal{B}_{\mu}$.

Demostración. Fijemos $\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$, $\varphi\in\mathcal{B}_{\mu,b}$. En virtud de la Proposición 2.5,

$$\mathfrak{H}_{\mu}(\phi\#\varphi)(\eta) = \eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_{\mu}\phi)(\eta)(\mathfrak{H}_{\mu}\varphi)(\eta) \qquad (\eta\in\mathbb{C}).$$

Sea $k\in\mathbb{N}$. Podemos escribir:

$$\sup_{\eta\in\mathbb{C}} |e^{-(a+b)|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_{\mu}\phi)(\eta)(\mathfrak{H}_{\mu}\varphi)(\eta)| \le$$

$$\le \sup_{\eta\in\mathbb{C}} |e^{-a|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_{\mu}\phi)(\eta)| \sup_{\eta\in\mathbb{C}} |e^{-b|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_{\mu}\varphi)(\eta)|.$$

Por consiguiente

$$\sigma^{\mu}_{a+b,r}(\mathfrak{h}_{\mu}(\phi\#\varphi)) \le \sigma^{\mu}_{a,r}(\mathfrak{h}_{\mu}\phi)\ \sigma^{\mu}_{b,0}(\mathfrak{h}_{\mu}\varphi)$$

para cada $r\in\mathbb{N}$, así que $\mathfrak{h}_{\mu}(\phi\#\varphi)\in\mathcal{Y}_{\mu,a+b}$. Ya que $\mathfrak{h}_{\mu}$ es un isomorfismo de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ en $\mathcal{Y}_{\mu,a}$, concluimos que $\phi\#\varphi\in\mathcal{B}_{\mu,a+b}$ y que la aplicación $(\phi,\varphi)\longmapsto\phi\#\varphi$ es continua de $\mathcal{B}_{\mu,a}\times\mathcal{B}_{\mu,b}$ en $\mathcal{B}_{\mu,a+b}$. La continuidad de la convolución de $\mathcal{B}_{\mu}\times\mathcal{B}_{\mu}$ en $\mathcal{B}_{\mu}$ sigue ahora como en el Corolario 4.3.□

Proposición 4.5. Si $\phi,\varphi\in\mathcal{B}_{\mu}$ y $x\in I$, entonces:

$$\tau_x(\phi\#\varphi) = (\tau_x\phi)\#\varphi = \phi\#(\tau_x\varphi).$$

Demostración. Para $t\in I$, en virtud del Teorema 2.3 y de las Proposiciones 2.4 y 2.5 se cumple:

$$\mathfrak{h}_{\mu}(\tau_x(\phi\#\varphi))(t) = t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_{\mu}(xt)\mathfrak{h}_{\mu}(\phi\#\varphi)(t) = t^{-2\mu-1}\mathcal{J}_{\mu}(xt)(\mathfrak{h}_{\mu}\phi)(t)(\mathfrak{h}_{\mu}\varphi)(t),$$

$$\mathfrak{h}_{\mu}((\tau_x\phi)\#\varphi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_{\mu}\phi)(t)\mathfrak{h}_{\mu}(\tau_x\varphi)(t) = t^{-2\mu-1}\mathcal{J}_{\mu}(xt)(\mathfrak{h}_{\mu}\phi)(t)(\mathfrak{h}_{\mu}\varphi)(t),$$

$$\mathfrak{h}_{\mu}(\phi\#(\tau_x\varphi))(t) = t^{-\mu-1/2}\mathfrak{h}_{\mu}(\tau_x\phi)(t)(\mathfrak{h}_{\mu}\varphi)(t) = t^{-2\mu-1}\mathcal{J}_{\mu}(xt)(\mathfrak{h}_{\mu}\phi)(t)(\mathfrak{h}_{\mu}\varphi)(t).$$

Ahora basta aplicar ZEMANIAN **[1966b,** Theorem 1**]**.□

5. Identidades aproximadas para la convolución de Hankel.

En esta Sección nos ocuparemos de las identidades aproximadas para la convolución de Hankel. Consideremos una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones infinitamente derivables sobre I tales que, cualquiera que sea $n\in\mathbb{N}$, k_n satisface

(i) $k_n(x)\ge 0$ $(x\in I)$,

(ii) $k_n(x)=0$ $(0<x<(n+1)^{-1},\ x>n^{-1})$; y

(iii) $c_{\mu}^{-1}\int_0^{1/n} k_n(x)x^{\mu+1/2}dx=1$, donde $c_{\mu}=2^{\mu}\Gamma(\mu+1)$.

Nótese que la sucesión $\{c_\mu^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple las hipótesis, y por lo tanto las tesis, de los Teoremas 2.6 y 2.8 y del Corolario 2.7.

Se establecerán a continuación algunos resultados sobre aproximación en $\mathcal{B}_\mu$ por convolución con identidades aproximadas. A tal fin, para $a>0$ y $m\in\mathbb{N}$ introducimos el espacio $\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ de todas aquellas funciones $\psi\in C^{2m}(I)$ tales que $\psi(x)=0$ $(x\geq a)$, para las cuales existe $\lim\limits_{x\to 0+}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ $(k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq 2m)$. Dotamos a $\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ de la topología definida por la norma $|\cdot|_{\mu,\infty,m}$ (Sección 1.7).

Proposición 5.1. Sean $a,\varepsilon>0$, y sean $m,r\in\mathbb{N}$, con $m>r+\mu+2$. Si $\psi\in\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ entonces existe $n_0=n_0(\varepsilon)$ tal que $k_n\#\psi\in\mathcal{B}_{\mu,a+\varepsilon}$ para cada $n\geq n_0$. Además, $\lim\limits_{n\to\infty}|k_n\#\psi-\psi|_{\mu,\infty,r}=0$.

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Por la Proposición 2.5 y por ZEMANIAN [1966b, Theorem 1], $k_n\#\psi\in\mathcal{B}_{\mu,a+\varepsilon}$ si, y sólo si, $\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)\in\mathcal{Y}_{\mu,a+\varepsilon}$.

Notemos, ante todo, que $\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)=\int_0^a b_\mu(\eta x)x^{\mu+1/2}\psi(x)dx$ es una función entera par, ya que $\psi\in\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ y $b_\mu(z)$ es par y entera. Sea ahora $k\in\mathbb{N}$. Para cada $\eta\in\mathbb{C}$ tenemos

$$|\eta^{2k-2\mu-1}e^{-(a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\eta|}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)|\leq$$

$$\leq|\eta^{2k-\mu-1/2}e^{-(a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\eta|}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)|\int_0^a|x^{2\mu+1}b_\mu(\eta x)||x^{-\mu-1/2}\psi(x)|dx.$$

Usando (4.1) se concluye

$$\sup_{\eta\in\mathbb{C}}|\eta^{2k-2\mu-1}e^{-(a+\varepsilon)|\mathrm{Im}\eta|}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)|\leq$$
$$\leq C\sup_{\eta\in\mathbb{C}}|\eta^{2k-\mu-1/2}e^{-\varepsilon|\mathrm{Im}\eta|}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)|. \tag{5.1}$$

Existe $n_0=n_0(\varepsilon)$ tal que $k_n\in\mathcal{B}_{\mu,\varepsilon}$ si $n\geq n_0$. Sigue de (5.1) que $\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)\in\mathcal{Y}_{\mu,a+\varepsilon}$, o, lo que es lo mismo, que $(k_n\#\psi)(x)\in\mathcal{B}_{\mu,a+\varepsilon}$ para todo $n\geq n_0$.

Ahora, usando la Proposición 2.5 y ZEMANIAN [1968, Lemma 5.4–1], podemos escribir

$$\begin{aligned} x^{-\mu-1/2}S_\mu^k(k_n\#\psi-\psi)(x) &= \\ &= \int_0^\infty b_\mu(xy)(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)y^{\mu+1/2}\mathfrak{H}_\mu(S_\mu^k\psi)(y)dy \end{aligned} \tag{5.2}$$

cuando $n\geq n_0$, $k\in\mathbb{N}$ con $0\leq k\leq m$, y $0<x<a+\varepsilon$.

Sea $\alpha>0$. Existe $n_1\geq n_0$ tal que

$$|(1+y^2)^{-1}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)| < \alpha \tag{5.3}$$

para cada $n\geq n_1$ y cada $y\in I$. En efecto, se tiene:

$$y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1 = \int_0^{1/n}(b_\mu(xy)-c_\mu^{-1})k_n(x)x^{\mu+1/2}dx \qquad (y\in I,\ n\geq n_0). \tag{5.4}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &|(1+y^2)^{-1}(y^{-\mu-1/2}\mathfrak{H}_\mu(k_n)(y)-1)| \leq \\ &\leq C(1+y^2)^{-1}\int_0^{1/n}k_n(x)x^{\mu+1/2}dx \leq C(1+y^2)^{-1} \qquad (y\in I,\ n\geq n_0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nótese que aquí C no depende de $n\geq n_0$.

Podemos encontrar $y_0>0$ tal que

$$|(1+y^2)^{-1}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)| < \alpha \qquad (y\geq y_0,\ n\geq n_0). \tag{5.6}$$

Por otra parte,

$$|b_\mu(z)-c_\mu^{-1}| < \alpha c_\mu^{-1} \qquad (0<z<z_0)$$

para un $z_0>0$ convenientemente elegido.

Por tanto, si $n_1 \geq n_0$ y $n_1 > y_0 z_0^{-1}$, (5.4) permite escribir

$$|(1+y^2)^{-1}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)| \leq$$

$$\leq \int_0^{1/n} |b_\mu(xy)-c_\mu^{-1}|x^{\mu+1/2}k_n(x)dx \tag{5.7}$$

$$\leq \alpha\, c_\mu^{-1}\int_0^{1/n} x^{\mu+1/2}k_n(x)dx = \alpha \qquad (0<y<y_0,\ n\geq n_1).$$

Combinando (5.6) y (5.7) resulta (5.3).

De acuerdo con (5.2) y (5.3), para $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r$, es

$$\sup_{x\in]0,a+\varepsilon[} |x^{-\mu-1/2}S_\mu^k(k_n\#\psi-\psi)(x)| \leq \alpha\, C\int_0^\infty \frac{y^{2\mu+1}}{(1+y^2)^\ell}|y^{-\mu-1/2}\mathfrak{H}_\mu((1-S_\mu)^{\ell+1}S_\mu^k\psi)(y)|dy$$

siempre que $n\geq n_1$. Aquí ℓ puede ser elegido mayor que $\mu+1$ porque $m>r+\mu+2$. Esto completa la demostración.□

Proposición 5.2. Si $\psi\in\mathcal{B}_\mu$ entonces $\lim_{n\to\infty} k_n\#\psi=\psi$ en $\mathcal{B}_\mu$.

Demostración. Basta proceder como en la prueba de la Proposición 5.1.□

Proposición 5.3. Sea $a>0$. Supongamos que $\psi\in\mathcal{B}^0_{\mu,a}$, y que $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}_{\mu,a}$ es tal que $\lim_{j\to\infty} \|\psi_j-\psi\|_{\mu,\infty,0}=0$. Entonces, para cada $\phi\in\mathcal{B}_\mu$, $\lim_{j\to\infty} \phi\#\psi_j=\phi\#\psi$ en $\mathcal{B}_\mu$.

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{B}_{\mu,b}$ para algún $b>0$. Razonando como en la demostración de la Proposición 5.1 podemos probar que $\phi\#\psi\in\mathcal{B}_{\mu,a+b}$. Además (Proposición 4.4), $\phi\#\psi_j\in\mathcal{B}_{\mu,a+b}$ para cada $j\in\mathbb{N}$. En virtud de ZEMANIAN [1966b, Theorem 1], y de la Proposición 2.5, $\lim_{j\to\infty} \phi\#\psi_j=\phi\#\psi$ en $\mathcal{B}_{\mu,a+b}$ cuando, y sólo cuando, $\lim_{j\to\infty} \eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu\psi_j)(\eta)=\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)$ en $\mathcal{Y}_{\mu,a+b}$.

Ahora bien, ya que $\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\psi)(\eta)$ es una función entera par, para establecer la última propiedad basta observar que, por (4.1), se tiene

$$
\begin{aligned}
&|\eta^{2k-2\mu-1}e^{-(a+b)|\operatorname{Im}\eta|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta)\mathfrak{H}_\mu(\psi_j-\psi)(\eta)| \le \\
&\le |\eta^{2k-\mu-1/2}e^{-b|\operatorname{Im}\eta|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta)|e^{-a|\operatorname{Im}\eta|}\int_0^a |x^{2\mu+1}b_\mu(x\eta)||x^{-\mu-1/2}(\psi_j(x)-\psi(x))|dx \\
&\le C\|\psi_j-\psi\|_{\mu,\infty,0}
\end{aligned}
$$

cualesquiera sean $j,k\in\mathbb{N}$ y $\eta\in\mathbb{C}$.□

6. La convolución de Hankel en $\mathcal{B}'_\mu$.

Definición 6.1. Para cada $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y cada $\phi\in\mathcal{B}_\mu$, definimos la *convolución de Hankel* de T y ϕ por

$$(T\#\phi)(x) = \langle T,\tau_x\phi\rangle \quad (x\in I). \tag{6.1}$$

Nótese que la Definición 6.1 tiene sentido en virtud del Corolario 4.3. Además, toda $\psi\in\mathcal{B}_\mu$ genera una distribución regular en $\mathcal{B}'_\mu$ mediante

$$\langle\psi,\phi\rangle = \int_0^\infty \psi(x)\phi(x)dx \quad (\phi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Luego

$$\langle\psi,\tau_x\phi\rangle = \int_0^\infty \psi(y)(\tau_x\phi)(y)dy \quad (\phi\in\mathcal{B}_\mu),$$

así que la convolución de Hankel clásica es un caso particular de la convolución generalizada (6.1).

Una propiedad interesante de la convolución de Hankel generalizada es la siguiente.

Proposición 6.2. Si $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{B}_\mu$ entonces la función $L(x)=\langle T,\tau_x\phi\rangle$ $(x\in I)$ define un elemento regular en $\mathcal{B}'_\mu$ que satisface

$$\langle L(x),\psi(x)\rangle = \langle T,\phi\#\psi\rangle \qquad (\psi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Demostración. Sean $a,b>0$, $\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$ y $\psi\in\mathcal{B}_{\mu,b}$. Por la Proposición 4.4 $\phi\#\psi\in\mathcal{B}_{\mu,a+b}$, y según la Proposición 1.9.2 existen $r\in\mathbb{N}$ y $f_k\in L^\infty(]0,a+b[)$ $(k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le r)$, tales que

$$\langle T,\phi\#\psi\rangle = \sum_{k=0}^{r}\int_0^{a+b} f_k(y)y^{-\mu-1/2}S^k_{\mu,y}\int_0^b \psi(x)(\tau_y\phi)(x)dxdy$$

$$= \int_0^b \psi(x)\sum_{k=0}^{r}\int_0^{a+b} f_k(y)y^{-\mu-1/2}S^k_{\mu,y}(\tau_x\phi)(y)dydx$$

$$= \int_0^b \psi(x)\langle T,\tau_x\phi\rangle dx = \langle L(x),\psi(x)\rangle.$$

La continuidad de la aplicación definida por $L(x)$ sigue ahora de la Proposición 4.4, completando la prueba.□

Corolario 6.3. Si $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $\phi,\psi\in\mathcal{B}_\mu$, entonces

$$(T\#\phi)\#\psi = T\#(\phi\#\psi).$$

Demostración. En virtud de las Proposiciones 4.5 y 6.2,

$$((T\#\phi)\#\psi)(x) = \langle T\#\phi,\tau_x\psi\rangle = \langle T,\phi\#\tau_x\psi\rangle = \langle T,\tau_x(\phi\#\psi)\rangle = (T\#(\phi\#\psi))(x) \qquad (x\in I). \qquad \square$$

El siguiente resultado se refiere a aproximación en $\mathcal{B}'_\mu$ por regularización.

Proposición 6.4. Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una identidad aproximada en $\mathcal{B}_\mu$ (Sección 5) y si $T\in\mathcal{B}'_\mu$, entonces $T\#k_n\in\mathcal{B}'_\mu$ $(n\in\mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} T\#k_n=T$ (débilmente*, fuertemente) en $\mathcal{B}'_\mu$.

Demostración. La convergencia débil* y la fuerte de sucesiones son equivalentes en $\mathcal{B}'_\mu$, ya que $\mathcal{B}_\mu$ es Montel (Corolario 1.8.6 y TRÉVES [1967, Proposition II.34.6, Corollary 1]). Fijemos a>0, $\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$. Se tiene:

$$\langle T\#k_n,\phi\rangle = \langle T,k_n\#\phi\rangle \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

La conclusión que se persigue resulta tomando límites para $n\to\infty$ en esta igualdad y aplicando la Proposición 5.2.□

A fin de investigar la convolución de Hankel de funciones generalizadas, dado $\mu\in\mathbb{R}$ introducimos el espacio $\mathcal{E}_\mu$ de todas aquellas funciones infinitamente derivables $\phi=\phi(x)$ definidas sobre I para las cuales existen los límites $\lim_{x\to 0+}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ $(k\in\mathbb{N})$. Topologizamos este espacio mediante la familia (separante) de seminormas $\{\chi^\mu_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$, donde

$$\chi^\mu_{n,k}(\phi) = \sup_{x\in]0,n[} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \qquad (n,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{E}_\mu).$$

Se comprueba fácilmente:

Proposición 6.5. El espacio $\mathcal{E}_\mu$ es de Fréchet.

Resulta claro que $\mathcal{B}_\mu\subset\mathcal{H}_\mu\subset\mathcal{E}_\mu\subset\mathcal{E}(I)$, y que cada una de estas inclusiones es continua. Como de costumbre, $\mathcal{E}'_\mu$ denotará el espacio dual de $\mathcal{E}_\mu$; dotamos a $\mathcal{E}'_\mu$ de su topología débil*.

Proposición 6.6. $\mathcal{B}_\mu$ (luego, $\mathcal{H}_\mu$) es denso en $\mathcal{E}_\mu$. En consecuencia, $\mathcal{E}'_\mu$ puede ser identificado con un subespacio de $\mathcal{B}'_\mu$, a saber, el espacio de todas aquellas $f\in\mathcal{B}'_\mu$ con la siguiente propiedad:

(P) Existe $a_f>0$ tal que $\langle f,\phi\rangle=0$ siempre que $\phi=\phi(x)\in\mathcal{B}_\mu$ satisface $\phi(x)=0$ para todo $0<x<a_f+\varepsilon$ y algún $\varepsilon>0$.

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{E}_\mu$, sea a>0, y definamos una función infinitamente derivable $\lambda=\lambda(x)$ sobre I por

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & (0<x<a), \\ 0 & (2a<x<\infty). \end{cases}$$

Entonces el producto $\lambda(x)\phi(x)$ está en $\mathcal{B}_\mu$, y, para cada k∈ℕ,

$$\sup_{x\in]0,a[} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\phi(x)-\lambda(x)\phi(x))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sup_{x\in]0,a[} |(x^{-1}D)^{k-i}(1-\lambda(x))| \sup_{x\in]0,a[} |(x^{-1}D)^i x^{-\mu-1/2}\phi(x)| = 0.$$

Así pues, $\mathcal{B}_\mu$ es denso en $\mathcal{E}_\mu$, y podemos identificar $\mathcal{E}'_\mu$ con un subespacio de $\mathcal{B}'_\mu$.

Para caracterizar este subespacio, supongamos que $f\in\mathcal{B}'_\mu$ tiene la propiedad *(P)*, y dado $\varepsilon>0$ definamos $\lambda=\lambda(x)\in C^\infty(I)$ por

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & (0<x<a_f+\varepsilon), \\ 0 & (2a_f+\varepsilon<x<\infty). \end{cases}$$

Se tiene

$$\langle f,\phi\rangle = \langle f,\lambda\phi+(1-\lambda)\phi\rangle = \langle f,\lambda\phi\rangle + \langle f,(1-\lambda)\phi\rangle = \langle f,\lambda\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu),$$

ya que $(1-\lambda(x))\phi(x)=0$ si $0<x<a_f+\varepsilon$. Ahora podemos extender f a $\mathcal{E}_\mu$ definiendo $\langle f,\phi\rangle=\langle f,\lambda\phi\rangle$ para $\phi\in\mathcal{E}_\mu$. Esta extensión pertenece a $\mathcal{E}'_\mu$, toda vez que la multiplicación por λ es continua de $\mathcal{E}_\mu$ en $\mathcal{B}_\mu$.

Recíprocamente, supongamos que $f\in\mathcal{B}'_\mu$ no posee la propiedad *(P)*. Entonces, a cada n∈ℕ le corresponde una función infinitamente derivable $\phi_n=\phi_n(x)\in\mathcal{B}_\mu$ tal que $\phi_n(x)=0$ si $0<x<n+\varepsilon_n$, para algún $\varepsilon_n>0$, y $\langle f,\phi_n\rangle=1$ (n∈ℕ). Dado a>0, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que n∈ℕ y $n>n_0$ implica

$$\sup_{x\in]0,a[} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi_n(x)| = 0 \qquad (k\in\mathbb{N}).$$

Esto impide que f pertenezca a $\mathcal{E}'_\mu$ y completa la prueba.□

Para todo $y\in I$, $\mathcal{J}_\mu(xy)$ está en $\mathcal{E}_\mu$ como función de x. En efecto, se tiene

$$(x^{-1}D_x)^k x^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xy) = y^{\mu+1/2}(x^{-1}D_x)^k b_\mu(xy)$$

$$= (-1)^k y^{\mu+1/2+2k} b_{\mu+k}(xy) \qquad (y\in I,\ k\in\mathbb{N}),$$

así que

$$\lim_{x\to 0+} (x^{-1}D_x)^k x^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xy) = (-1)^k y^{\mu+1/2+2k} b_{\mu+k}(z)\big|_{z=0} \qquad (y\in I,\ k\in\mathbb{N}).$$

Proposición 6.7. Sea $f\in\mathcal{E}'_\mu$. Si $F(y)=\langle f(x),\mathcal{J}_\mu(xy)\rangle$ $(y\in\mathbb{C})$, entonces la función $G(y)=y^{-\mu-1/2}F(y)$ $(y\in\mathbb{C})$ es par y entera. Además, existen $A,B>0$ y $r,n\in\mathbb{N}$ tales que

$$|F(y)| \le A \begin{cases} y^{\mu+1/2} & (0<y\le 1), \\ y^{\mu+1/2+2r} & (1\le y<\infty), \end{cases}$$

y

$$|G(y)| \le B\ (1+|y|^{2r})e^{n|\operatorname{Im} y|} \qquad (y\in\mathbb{C}).$$

Demostración. Antes que nada notemos que, en virtud de la observación precedente, la función F(y) está bien definida. Ahora,

$$G(y) = y^{-\mu-1/2}F(y) = \langle f(x), x^{\mu+1/2} b_\mu(xy)\rangle \qquad (y\in\mathbb{C}).$$

Como $b_\mu(z)$ es par, también G(y) lo es.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{G(y+h)-G(y)}{h} &= \langle f(x), \lim_{h\to 0} x^{\mu+1/2}\frac{b_\mu(x(y+h))-b_\mu(xy)}{h}\rangle \\ &= \langle f(x), x^{\mu+1/2} D_y b_\mu(xy)\rangle \qquad (y\in\mathbb{C}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

En efecto, sean $x\in I$, $y\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$, sea C_1 un disco centrado en y, de radio r_1, y sea $h\in\mathbb{C}$, con $|h|<r<r_1$. Entonces

$$(x^{-1}D_x)^k\left(\frac{b_\mu(x(y+h))-b_\mu(xy)}{h}-D_y b_\mu(xy)\right) =$$

$$= (x^{-1}D_x)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-y-h}-\frac{1}{z-y}\right)-\frac{1}{(z-y)^2}\right)b_\mu(xz)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(-z^2)^k b_{\mu+k}(xz)\frac{1}{(z-y-h)(z-y)^2}dz,$$

de modo que, para cada $a>0$,

$$\sup_{x\in]0,a[}\left|(x^{-1}D_x)^k\left(\frac{b_\mu(x(y+h))-b_\mu(xy)}{h}-D_y b_\mu(xy)\right)\right| \le \frac{C|h|}{(r_1-r)r_1}\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Esto justifica (6.2).

Finalmente, puede probarse que, para ciertos $r,n\in\mathbb{N}$ y cierto $A>0$ (no necesariamente el mismo en cada comparecencia),

$$|F(y)| \le A \max_{0\le k\le r}\ \sup_{x\in]0,n[}|(x^{-1}D_x)^k x^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xy)|$$

$$= A \max_{0\le k\le r}\ \sup_{x\in]0,n[}|y^{2k+\mu+1/2}b_{\mu+k}(xy)|$$

$$\le A\begin{cases} y^{\mu+1/2} & (0<y\le 1),\\ y^{\mu+1/2+2r} & (1<y<\infty).\end{cases}$$

Existe $C>0$ tal que

$$|b_{\mu+k}(xy)| \le Ce^{n|\operatorname{Im} y|} \qquad (0<x<n,\ y\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N},\ 0\le k\le r)$$

(ZEMANIAN **[1966b**, p. 683]). Luego, para algún $B>0$ también debemos tener

$$|G(y)| \le B(1+|y|^{2r})e^{n|\operatorname{Im} y|} \qquad (y\in\mathbb{C}),$$

completando la demostración.□

Proposición 6.8. Si $f\in\mathcal{E}'_\mu$ y si $F(y)=\langle f(x),\mathcal{J}_\mu(xy)\rangle$ $(y\in I)$, entonces

$$\langle F(y),\phi(y)\rangle = \langle f,\mathfrak{h}_\mu\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Demostración. Comenzamos observando que

$$\psi_Y(x) = \int_Y^\infty \phi(y)\mathcal{J}_\mu(xy)dy \xrightarrow[Y\to\infty]{} 0 \quad \text{en } \mathcal{E}_\mu$$

cuando $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, ya que

$$(x^{-1}D_x)^k x^{-\mu-1/2}\psi_Y(x) = (-1)^k\int_Y^\infty y^{2k+\mu+1/2}\phi(y)b_{\mu+k}(xy)dy \qquad (x\in I,\ Y>0,\ k\in\mathbb{N})$$

implica

$$\sup_{x\in]0,a[} |(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\psi_Y(x)| \le C\int_Y^\infty y^{2k+\mu+1/2}|\phi(y)|dy \xrightarrow[Y\to\infty]{} 0 \qquad (a>0,\ k\in\mathbb{N}).$$

Ahora, fijados $Y\in I$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$,

$$\int_0^Y \phi(y)\langle f(x),\mathcal{J}_\mu(xy)\rangle dy = \langle f(x),\int_0^Y \phi(y)\mathcal{J}_\mu(xy)dy\rangle.$$

En efecto, pongamos $d_n = \frac{Y}{n}$, $y_{\nu,n}=\nu d_n$. Entonces

$$\int_0^Y \phi(y)F(y)dy = \lim_{n\to\infty} d_n\sum_{\nu=1}^n \phi(y_{\nu,n})F(y_{\nu,n}) = \lim_{n\to\infty}\langle f(x),d_n\sum_{\nu=1}^n \phi(y_{\nu,n})\mathcal{J}_\mu(xy_{\nu,n})\rangle$$

$$= \langle f(x),\lim_{n\to\infty} d_n\sum_{\nu=1}^n \phi(y_{\nu,n})\mathcal{J}_\mu(xy_{\nu,n})\rangle = \langle f(x),\int_0^Y \phi(y)\mathcal{J}_\mu(xy)dy\rangle.$$

La última igualdad se justifica como sigue. Para cada $a>0$ y cada $k\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in]0,a[} |(x^{-1}D)^k[x^{-\mu-1/2}\int_0^Y \phi(y)\mathcal{J}_\mu(xy)dy - d_n\sum_{\nu=1}^n \phi(y_{\nu,n})\mathcal{J}_\mu(xy_{\nu,n})]| =$$

$$= \sup_{x\in]0,a[} |\int_0^Y y^{2k+\mu+1/2}b_{\mu+k}(xy)\phi(y)dy - d_n\sum_{\nu=1}^n y_{\nu,n}^{2k+\mu+1/2}b_{\mu+k}(xy_{\nu,n})\phi(y_{\nu,n})| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Aquí hemos usado la continuidad (uniforme) de la función $y^{2k+\mu+1/2}b_{\mu+k}(xy)\phi(y)$ en $\Omega=\{(x,y):0\le x\le a, 0\le y\le Y\}$ (ZEMANIAN **[1966b**, p. 149**]**). Llegado este punto, basta argumentar como en la prueba de ZEMANIAN **[1968**, Theorem 5.6-3**]**.□

Definición 6.9. Si $x\in I$ y si $\phi\in\mathcal{B}_\mu$, entonces $\tau_x\phi\in\mathcal{B}_\mu$. Así, para $f\in\mathcal{E}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{B}_\mu$ podemos definir la *convolución de Hankel* $f\#\phi$ mediante la fórmula

$$(f\#\phi)(x) = \langle f,\tau_x\phi\rangle \qquad (x\in I).$$

Proposición 6.10. Si $f\in\mathcal{E}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{B}_\mu$, entonces

$$\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(y) = y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(y)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y) \qquad (y\in I).$$

Demostración. Fijemos $y\in I$. Por definición,

$$\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(y) = \int_0^\infty \langle f,\tau_x\phi\rangle \mathcal{J}_\mu(xy)dx = \langle f,\int_0^\infty(\tau_x\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xy)dx\rangle.$$

Para justificar la última igualdad comenzamos observando que, cualesquiera sean $k\in\mathbb{N}$, $X>0$ y $t\in I$, se tiene

$$(t^{-1}D_t)^k t^{-\mu-1/2}\int_X^\infty(\tau_x\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xy)dx =$$

$$= (t^{-1}D_t)^k\int_X^\infty \mathfrak{H}_\mu(b_\mu(zt)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(z))(x)\mathcal{J}_\mu(xy)dx$$

$$= \int_X^\infty \mathfrak{H}_\mu(b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{H}_\mu(S_\mu^k\phi)(z))(x)\mathcal{J}_\mu(xy)dx$$

$$= \int_X^\infty \mathcal{J}_\mu(xy)\int_0^\infty b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{H}_\mu(S_\mu^k\phi)(z)\mathcal{J}_\mu(zx)dzdx$$

$$= \int_X^\infty (1+x^2)^{-1}\mathcal{J}_\mu(xy)\int_0^\infty(1-S_{\mu,z})(b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{H}_\mu(S_\mu^k\phi)(z))\mathcal{J}_\mu(zx)dzdx,$$

de donde

$$\sup_{t\in]0,a[}\left|(t^{-1}D_t)^k t^{-\mu-1/2}\int_X^\infty(\tau_x\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xy)dx\right| \xrightarrow[X\to\infty]{} 0 \qquad (a>0).$$

En segundo lugar, afirmamos que

$$\int_0^X \langle f,\tau_x\phi\rangle \mathcal{J}_\mu(xy)dx = \lim_{n\to\infty} d_n \sum_{\nu=1}^{n} \langle f,\tau_{x_{\nu,n}}\phi\rangle \mathcal{J}_\mu(x_{\nu,n}y)$$

$$= \langle f\,,\lim_{n\to\infty} d_n \sum_{\nu=1}^{n} (\tau_{x_{\nu,n}}\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(x_{\nu,n}y)\rangle$$

$$= \langle f\,,\int_0^X (\tau_x\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xy)dx\rangle \qquad (X>0),$$

donde $d_n=\frac{X}{n}$ y $x_{\nu,n}=\nu d_n$. La veracidad de esta afirmación seguirá tan pronto se establezca la convergencia

$$\lim_{n\to\infty} d_n \sum_{\nu=1}^{n} (\tau_{x_{\nu,n}}\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(x_{\nu,n}y) = \int_0^X (\tau_x\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xy)dx$$

en la topología de $\mathcal{E}_\mu$. Para comprobarlo, si $k\in\mathbb{N}$ y $t\in I$ escribamos

$$(t^{-1}D_t)^k t^{-\mu-1/2}[d_n \sum_{\nu=1}^{n} (\tau_{x_{\nu,n}}\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(x_{\nu,n}y) - \int_0^X (\tau_x\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xy)dx] =$$

$$= (t^{-1}D_t)^k t^{-\mu-1/2}[d_n \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\mu(z^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(zt)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z))(x_{\nu,n})\mathcal{J}_\mu(x_{\nu,n}y)$$

$$- \int_0^X \mathfrak{h}_\mu(z^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(zt)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z))(x)\mathcal{J}_\mu(xy)dx]$$

$$= d_n \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\mu((-z^2)^k b_{\mu+k}(zt)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z))(x_{\nu,n})\mathcal{J}_\mu(x_{\nu,n}y)$$

$$- \int_0^X \mathfrak{h}_\mu((-z^2)^k b_{\mu+k}(zt)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z))(x)\mathcal{J}_\mu(xy)dx$$

$$= d_n \sum_{\nu=1}^{n} (x_{\nu,n}y)^{\mu+1/2}\mathfrak{h}_\mu(b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{h}_\mu(S_\mu^k\phi)(z))(x_{\nu,n})b_\mu(x_{\nu,n}y)$$

$$- \int_0^X (xy)^{\mu+1/2}\mathfrak{h}_\mu(b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{h}_\mu(S_\mu^k\phi)(z))(x)b_\mu(xy)dx.$$

El integrando en el segundo miembro de esta igualdad es (uniformemente) continuo sobre $\Omega=\{(x,t):0\le x\le X, 0\le t\le a\}$, con $a>0$, así que el primer miembro de la misma tiende a 0 uniformemente para $0\le t\le a$ cuando $n\to\infty$.

Finalmente, para ciertos $r\in\mathbb{N}$, $a>0$ y $C>0$ se cumple

$$
\begin{aligned}
|\langle f,\tau_x\phi\rangle| &\leq C \max_{0\leq k\leq r} \sup_{t\in]0,a[} |(t^{-1}D_t)^k t^{-\mu-1/2}(\tau_x\phi)(t)| \\
&= C \max_{0\leq k\leq r} \sup_{t\in]0,a[} |\mathfrak{H}_\mu(b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{H}_\mu(S_\mu^k\phi)(z))(x)| \\
&= C \max_{0\leq k\leq r} \sup_{t\in]0,a[} |(1+x^2)^{-1}\mathfrak{H}_\mu((1-S_{\mu,z})[b_{\mu+k}(zt)\mathfrak{H}_\mu(S_\mu^k\phi)(z)])(x)| \\
&\leq C(1+x^2)^{-1} \quad (x\in I),
\end{aligned}
$$

de donde

$$\int_X^\infty |\langle f,\tau_x\phi\rangle|\,|\mathcal{J}_\mu(xy)|dx \xrightarrow[X\to\infty]{} 0.$$

La Proposición queda probada combinando los resultados anteriores.□

Proposición 6.11. Sea $f\in\mathcal{E}'_\mu$. Si $\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$ entonces $f\#\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a+n}$ para algún $n\in\mathbb{N}$. La aplicación $\phi\longmapsto f\#\phi$ es continua de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ en $\mathcal{B}_{\mu,a+n}$ y de $\mathcal{B}_\mu$ en $\mathcal{B}_\mu$.

Demostración. Como (Proposición 6.10)

$$\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(y) = y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(y)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y) \quad (y\in\mathbb{C}),$$

sigue de la Proposición 6.7 que, para ciertos $r,n\in\mathbb{N}$ y cualquier $y\in\mathbb{C}$,

$$
\begin{aligned}
&|y^{2k-\mu-1/2}e^{-(n+a)|\operatorname{Im} y|}\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(y)| \leq \\
&\leq |y^{-\mu-1/2}e^{-n|\operatorname{Im} y|}(\mathfrak{H}'_\mu f)(y)|\,|y^{2k-\mu-1/2}e^{-a|\operatorname{Im} y|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)| \\
&\leq C\ \{\ |y^{2(k+r)-\mu-1/2}e^{-a|\operatorname{Im} y|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)| + |y^{2k-\mu-1/2}e^{-a|\operatorname{Im} y|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)|\ \},
\end{aligned}
$$

así que

$$
\begin{aligned}
&\sup_{y\in\mathbb{C}} |y^{-\mu-1/2+2k}e^{-(n+a)|\operatorname{Im} y|}\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(y)| \leq \\
&\leq C\ \{\ \sup_{y\in\mathbb{C}}|y^{2(k+r)-\mu-1/2}e^{-a|\operatorname{Im} y|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)| + \sup_{y\in\mathbb{C}}|y^{2k-\mu-1/2}e^{-a|\operatorname{Im} y|}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)|\ \}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)\in\mathcal{Y}_{\mu,a+n}$, o, equivalentemente, $f\#\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a+n}$. La continuidad de la aplicación $\phi\longmapsto f\#\phi$ de $\mathcal{B}_{\mu,a}$ en $\mathcal{B}_{\mu,a+n}$ sigue también de esta última estimación sin más que tener en cuenta ZEMANIAN [1966b, Theorem 1]. Se completa la prueba como en el Corolario 4.3.□

Definición 6.12. Dados $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $f\in\mathcal{E}'_\mu$, la Proposición 6.11 permite definir la *convolución de Hankel* $T\#f$ por

$$\langle T\#f,\phi\rangle = \langle T(x),\langle f(y),(\tau_x\phi)(y)\rangle\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Nótese que $T\#f\in\mathcal{B}'_\mu$, porque $f\in\mathcal{E}'_\mu$ y $\lim_{j\to\infty}\phi_j=0$ en $\mathcal{B}_\mu$ implica $\lim_{j\to\infty} f\#\phi_j=0$ en $\mathcal{B}_\mu$ (Proposición 6.11). Además, si $f\in\mathcal{E}'_\mu$ entonces la aplicación $T\longmapsto T\#f$ es continua de $\mathcal{B}'_\mu$ en sí mismo cuando se dota a $\mathcal{B}'_\mu$ tanto de su topología débil* como de su topología fuerte.

Debe observarse también que, de acuerdo con la Proposición 6.2, y ya que $\mathcal{B}_\mu\subset\mathcal{E}'_\mu$, la Definición 6.12 extiende la Definición 6.1.

Proposición 6.13. Para $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $f\in\mathcal{E}'_\mu$, se cumple

$$\mathfrak{H}'_\mu(T\#f)(y) = y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(y)(\mathfrak{H}'_\mu T)(y) \qquad (y\in I).$$

Demostración. Podemos escribir:

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{H}'_\mu(T\#f),\mathfrak{H}_\mu\phi\rangle &= \langle T\#f\,,\phi\rangle = \langle T,f\#\phi\rangle = \langle\mathfrak{H}'_\mu T,\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)\rangle\\ &= \langle(\mathfrak{H}'_\mu T)(y)\,,y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(y)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\rangle\\ &= \langle y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(y)(\mathfrak{H}'_\mu T)(y),(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu).\end{aligned}$$ □

Estableceremos a continuación un resultado de tipo Paley-Wiener, recíproco de la Proposición 6.7.

Teorema 6.14. Sea $F=F(z)$ $(z\in\mathbb{C})$ una función compleja tal que $z^{-\mu-1/2}F(z)$ es par y entera, y satisface

$$|z^{-\mu-1/2}F(z)| \le C(1+|z|)^r e^{A|\mathrm{Im}z|} \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{6.3}$$

para ciertos $A,C>0$ y cierto $r\in\mathbb{N}$. Entonces F define un elemento regular en $\mathcal{H}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle F,\phi\rangle = \int_0^\infty F(x)\phi(x)dx \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu),$$

y $f=\mathfrak{H}'_\mu F\in\mathcal{H}'_\mu\subset\mathcal{B}'_\mu$ está en $\mathcal{E}'_\mu$.

Demostración. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una identidad aproximada en $\mathcal{B}_\mu$ para la convolución de Hankel. Como $k_n\in\mathcal{B}_{\mu,1/n}$ y como

$$\mathfrak{H}'_\mu(f\# k_n)(x) = x^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(x)(\mathfrak{H}_\mu k_n)(x) = x^{-\mu-1/2}F(x)(\mathfrak{H}_\mu k_n)(x) \qquad (x\in I),$$

(6.3) implica que $\mathfrak{H}'_\mu(f\# k_n)(x)\in\mathcal{Y}_{\mu,A+1/n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Puesto que $\mathfrak{H}'_\mu=\mathfrak{H}_\mu$ sobre $\mathcal{Y}_{\mu,A+1/n}$, necesariamente $f\# k_n\in\mathcal{B}_{\mu,A+1/n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Además (Proposición 5.2),

$$\langle f\# k_n,\phi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f,\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Luego,

$$\int_0^\infty (f\# k_n)(x)\phi(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f,\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu).$$

Si $\phi\in\mathcal{B}_\mu$ es tal que $\phi(x)=0$ cuando $0<x<A+1$ entonces $\int_0^\infty (f\# k_n)(x)\phi(x)dx=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, así que $\langle f,\phi\rangle=0$. De la Proposición 6.6 se concluye que $f\in\mathcal{E}'_\mu$.□

Corolario 6.15. Si $f_1,f_2\in\mathcal{E}'_\mu$, entonces $f_1\# f_2\in\mathcal{E}'_\mu$.

Demostración. Como las funciones $\mathfrak{H}'_\mu f_1$ y $\mathfrak{H}'_\mu f_2$ satisfacen las hipótesis del Teorema 6.14 (Proposición 6.7), lo mismo acontece con la función

$$\mathfrak{H}'_\mu(f_1\# f_2)(y) = y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f_1)(y)(\mathfrak{H}'_\mu f_2)(y) \qquad (y\in\mathbb{C}).$$ □

Reunimos seguidamente algunas propiedades algebraicas de la convolución de Hankel generalizada.

Proposición 6.16. Sea $T\in\mathcal{B}'_\mu$, y sean $f,f_1,f_2\in\mathcal{E}'_\mu$.

(i) *(Asociatividad)* Se cumple:

$$T\#(f_1\#f_2) = (T\#f_1)\#f_2.$$

(ii) *(Conmutatividad)* Se verifica:

$$f_1\#f_2 = f_2\#f_1.$$

(iii) *(Identidad)* La distribución $\delta_\mu\in\mathcal{E}'_\mu$, definida por

$$\langle\delta_\mu,\phi\rangle = c_\mu \lim_{x\to 0+} x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (\phi\in\mathcal{E}_\mu),$$

donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$, satisface $T\#\delta_\mu=T$.

(iv) *(Comportamiento respecto de S_μ)* El operador S_μ conmuta con la convolución de Hankel:

$$S_\mu(T\#f) = (S_\mu T)\#f = T\#(S_\mu f).$$

Demostración. El apartado *(i)* es consecuencia de la Proposición 6.13 y el Corolario 6.15, mientras que *(ii)* y *(iv)* pueden ser establecidos tomando transformadas de Hankel. Para probar *(iii)*, notemos que

$$\langle f\#\delta_\mu,\phi\rangle = \langle f,\langle\delta_\mu,\tau_x\phi\rangle\rangle = \langle f,\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{B}_\mu). \qquad \square$$

Finalizamos esta Sección justificando la denominación de identidad aproximada para las sucesiones consideradas en la Sección 5.

Proposición 6.17. Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una identidad aproximada en $\mathcal{B}_\mu$ (Sección 5), entonces $\lim_{n\to\infty} k_n=\delta_\mu$ (débilmente*, fuertemente) en $\mathcal{B}'_\mu$.

Demostración. Proposiciones 6.4 y 6.16 *(iii)*.□

III. LA CONVOLUCION DE HANKEL EN $\mathcal{H}_\mu$ Y EN $\mathcal{H}'_\mu$.

7. Introducción.

En esta Parte nos proponemos investigar el espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ de los operadores de convolución en $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$. Abordamos esta tarea en la Sección 10, donde, tras describir dicho espacio, definimos u#T para $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, probando la correspondiente fórmula de intercambio y estableciendo algunas propiedades algebraicas de esta convolución. Previamente, estudiamos la traslación y la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}_\mu$ (Sección 8) y discutimos algunos aspectos de la convolución generalizada sobre $\mathcal{H}'_\mu$; llegamos a definir u#f para $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $f\in\mathcal{E}'_\mu$ (Sección 6) y demostramos la fórmula de intercambio para esta convolución (Sección 9).

El problema de topologizar el espacio vectorial $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ se trata en la Sección 11, donde se demuestra que la transformación de Hankel $\mathfrak{H}_\mu$ establece un isomorfismo entre $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $x^{\mu+1/2}\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}$ el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$ descrito en la Parte III del Capítulo 1. Del estudio allí realizado concluimos inmediatamente algunas propiedades de continuidad de la convolución, junto con otras del espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$; más precisamente, $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ resulta ser completo, bornológico, nuclear, Schwartz, Montel y reflexivo. Nuestras investigaciones extienden y complementan las de Sousa Pinto [1985].

En todo lo que sigue continuamos suponiendo que μ es un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$ y denotando por C una constante positiva adecuada (no necesariamente la misma en cada comparecencia).

8. La convolución de Hankel en $\mathcal{H}_\mu$.

En esta Sección estudiamos la traslación y la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}_\mu$. Los resultados que se obtengan serán de utilidad más adelante.

Proposición 8.1. Se verifica:

(i) Para cada $x\in I$, la aplicación $\phi \longmapsto \tau_x\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo.

(ii) Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, $k\in\mathbb{N}$, y $x\in I$, entonces $\tau_x S_\mu^k\phi = S_\mu^k\tau_x\phi$.

Demostración. Las Proposiciones 2.2 y 2.4 y el Corolario 2.9 permiten escribir

$$(\tau_x\phi)(y) = \mathfrak{H}_\mu(t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t))(y) \qquad (y\in I). \tag{8.1}$$

Como $t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)\in\mathcal{O}$ para cada $x\in I$, y dado que $\mathfrak{H}_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$, concluimos que $\phi\longmapsto\tau_x\phi$ es una aplicación continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo.

La igualdad en *(ii)* deriva inmediatamente de (8.1) y de Zemanian [1968, Lemma 5.4-1 (4-5)].□

Proposición 8.2. Se verifica:

(i) La aplicación bilineal $(\phi,\varphi)\longmapsto\phi\#\varphi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu\times\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu$.

(ii) Para cada $\phi,\varphi\in\mathcal{H}_\mu$,

$$S_\mu(\phi\#\varphi) = (S_\mu\phi)\#\varphi = \phi\#(S_\mu\varphi).$$

Demostración. Sean $\phi,\varphi\in\mathcal{H}_\mu$. En virtud del Teorema 2.3, la función $\phi\#\varphi$ está en $L_\mu^1(I)$; luego, de acuerdo con la Proposición 2.5 y el Corolario 2.9, podemos escribir:

$$(\phi\#\varphi)(x) = \mathfrak{H}_\mu(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(y))(x) \qquad (x\in I).$$

Siendo $\mathfrak{H}_\mu$ un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$, concluimos que la aplicación en *(i)* es continua.

Para establecer *(ii)* basta recordar que $\mathfrak{H}_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ y aplicar Zemanian [1968, Lemma 5.4-1 (4-5)].□

9. La convolución de Hankel en $\mathcal{H}'_\mu$.

La Proposición 8.1 sugiere dar la siguiente

Definición 9.1. Para $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, la *convolución de Hankel* de u y ϕ es la función

$$(u\#\phi)(x) = \langle u(y),(\tau_x\phi)(y)\rangle \qquad (x\in I).$$

Cada $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ genera un elemento regular en $\mathcal{H}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle\varphi,\phi\rangle = \int_0^\infty \varphi(y)\phi(y)dy \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Luego

$$\langle\varphi,\tau_x\phi\rangle = \int_0^\infty \varphi(y)(\tau_x\phi)(y)dy \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu),$$

así que la convolución de Hankel clásica es un caso particular de la generalizada.

En el resto de esta Sección se discutirán algunas propiedades de la convolución generalizada.

Lema 9.2. Si $f\in\mathcal{E}'_\mu$ entonces $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(t)$ $(t\in I)$ está en $\mathcal{O}$.

Demostración. Para simplificar, introduciremos las funciones

$$F(t) = (\mathfrak{H}'_\mu f)(t) \qquad (t\in I),$$

$$b_{\mu,x}(t) = (xt)^{-\mu}J_\mu(xt) \qquad (x,t\in I).$$

La relación

$$F(t) = \langle f(x),\mathcal{J}_\mu(xt)\rangle \qquad (t\in I)$$

(Proposición 6.8), entraña:

$$t^{-\mu-1/2}F(t) = \langle f(x),x^{\mu+1/2}b_{\mu,x}(t)\rangle \qquad (t\in I).$$

En primer lugar, pretendemos establecer la igualdad:

$$(t^{-1}D)t^{-\mu-1/2}F(t) = \langle f(x),x^{\mu+1/2}t^{-1}D_t b_{\mu,x}(t)\rangle \qquad (t\in I). \tag{9.1}$$

A este fin, sean $t\in I$ y $|\Delta t|\in]0,t[$. Escribiendo

$$\frac{(t+\Delta t)^{-\mu-1/2}F(t+\Delta t)-t^{-\mu-1/2}F(t)}{\Delta t} - \langle f(x),x^{\mu+1/2}D_t b_{\mu,x}(t)\rangle =$$

$$= \langle f(x),x^{\mu+1/2}G_{\mu,t}(x)\rangle,$$

donde

$$G_{\mu,t}(x) = \frac{b_{\mu,x}(t+\Delta t)-b_{\mu,x}(t)}{\Delta t} - D_t b_{\mu,x}(t) \quad (x\in I),$$

advertimos que (9.1) queda probado tan pronto se establezca la convergencia

$$\lim_{\Delta t\to 0} x^{\mu+1/2}G_{\mu,t}(x) = 0 \tag{9.2}$$

en la topología de $\mathcal{E}_\mu$. Con este objeto, expresamos la función $G_{\mu,t}(x)$ en la forma

$$G_{\mu,t}(x) = (\Delta t)^{-1}\int_0^{\Delta t} dz\int_0^z D_v^2 b_{\mu,x}(t+v)dv \quad (x\in I).$$

Puesto que $D_v^2=(t+v)^{-1}D_v+(t+v)^2((t+v)^{-1}D_v)^2$, para todo $k\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$|(x^{-1}D_x)^k G_{\mu,t}(x)| \le C(1+x^2)^2|\Delta t|^{-1}\sum_{i=0}^{k+1}\left|\int_0^{\Delta t} dz\int_0^z (t+v)^{2i}dv\right|$$

$$= C\sum_{i=0}^{k+1}(1+x^2)^2\left|\frac{(t+\Delta t)^{2i+2}-t^{2i+2}}{(2i+1)(2i+2)\Delta t} - \frac{t^{2i+1}}{2i+1}\right| \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0 \quad (x\in I).$$

Esto prueba (9.2), y con ello (9.1). Por inducción sobre k a partir de (9.1) resulta entonces la igualdad

$$(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}F(t) = \langle f(x),x^{\mu+1/2}(t^{-1}D_t)^k b_{\mu,x}(t)\rangle \quad (t\in I), \tag{9.3}$$

válida para cualquier $k\in\mathbb{N}$. Por otra parte, ya que $f\in\mathcal{E}'_\mu$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le C \max_{0\le r\le n}\ \sup_{x\in]0,n[} |(x^{-1}D)^r x^{-\mu-1/2}\varphi(x)| \quad (\varphi\in\mathcal{E}_\mu). \tag{9.4}$$

De (9.3) y (9.4) se concluye

$$
\begin{aligned}
|(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2} F(t)| &\le C \max_{0\le r\le n} \sup_{x\in]0,n[} |(x^{-1}D_x)^r x^{2k} b_{\mu+k,x}(t)| \\
&\le C \sum_{\ell=0}^{n} \sup_{x\in]0,n[} |(x^{-1}D_x)^\ell b_{\mu+k,x}(t)| \\
&\le C(1+t^2)^n \quad (t\in I).
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración.□

La siguiente Proposición 9.3 es análoga a la Proposición 6.10, y ambas admiten demostraciones similares. La técnica habitual para la prueba de este tipo de resultados en el marco de las transformaciones integrales es la de las sumas de Riemann, utilizada en la Proposición 6.10. Para ilustrar el uso de otros procedimientos, en la Proposición 9.3 recurrimos a la teoría de la integración vectorial de Pettis. Esta técnica, aunque coincide sustancialmente con aquélla, hace uso de herramientas de análisis funcional, y, por lo tanto, permite un tratamiento más general y más elegante del problema que se aborda.

Proposición 9.3. Sea $f\in\mathcal{E}'_\mu$. Para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, se verifica:

$$\mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(t)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t) \quad (t\in I).$$

La aplicación $\phi\longmapsto f\#\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo. Además, dada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, la función $f\#\phi$ genera una distribución regular en $\mathcal{H}'_\mu$ que satisface

$$\langle f\#\phi,\varphi\rangle = \langle f,\phi\#\varphi\rangle \quad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu). \tag{9.5}$$

Demostración. Sean $N\in\mathbb{N}$, $t\in I$, y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Afirmamos que la aplicación $G:[0,N]\longrightarrow\mathcal{H}_\mu$, definida por $G(x)=\mathcal{J}_\mu(xt)\tau_x\phi$, es continua. En efecto, fijemos $0\le x_0\le N$; debemos probar que

$$\sup_{y\in I} |(1+y^2)^m (y^{-1}D_y)^k y^{-\mu-1/2}(G(x)(y)-G(x_0)(y))| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

con $0\leq x\leq N$, para cada $m,k\in\mathbb{N}$. Ahora bien, si $m,k\in\mathbb{N}$ y si $0\leq x\leq N$, se cumple:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in I} &|(1+y^2)^m(y^{-1}D_y)^k y^{-\mu-1/2}(G(x)(y)-G(x_0)(y))| \leq\\ &\leq |\mathcal{J}_\mu(xt)-\mathcal{J}_\mu(x_0t)| \sup_{y\in I} |(1+y^2)^m(y^{-1}D_y)^k y^{-\mu-1/2}(\tau_x\phi)(y)| \\ &+ |\mathcal{J}_\mu(x_0t)| \sup_{y\in I} |(1+y^2)^m(y^{-1}D_y)^k y^{-\mu-1/2}((\tau_x\phi)(y)-(\tau_{x_0}\phi)(y))|.\end{aligned} \tag{9.6}$$

El primer sumando del segundo miembro de (9.6) convergerá a cero para $x\to x_0$ tan pronto se demuestre que el conjunto $A=\{\tau_x\phi:0\leq x\leq N\}$ está acotado en $\mathcal{H}_\mu$. Nótese que, siendo $\mathfrak{h}_\mu$ un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$, A está acotado en $\mathcal{H}_\mu$ si, y sólo si, lo está el conjunto $B=\{z^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xz)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z):0\leq x\leq N\}$.

Definamos $b_{\mu,x}(z)=(xz)^{-\mu}J_\mu(xz)$ $(x,z\in I)$, como en el Lema 9.2. Si $m,k\in\mathbb{N}$ y $z\in I$ entonces

$$\begin{aligned}|(1+z^2)^m(z^{-1}D_z)^k z^{-\mu-1/2}(z^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xz)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z))| &=\\ \leq x^{\mu+1/2}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} |(1+z^2)^m(z^{-1}D_z)^{k-i}z^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z)|\ x^{2i}|b_{\mu+i,x}(z)|\\ \leq C\sum_{i=0}^{k}\gamma^\mu_{m,k-i}(\mathfrak{h}_\mu\phi) \qquad (0\leq x\leq N),\end{aligned}$$

de modo que B está acotado en $\mathcal{H}_\mu$.

Probaremos ahora que

$$(\tau_x\phi)(y)-(\tau_{x_0}\phi)(y) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad \text{en } \mathcal{H}_\mu. \tag{9.7}$$

Obsérvese que (9.7) obliga a que el segundo sumando del segundo miembro de (9.6) converja a cero cuando $x\to x_0$. La condición (9.7) equivale a

$$z^{-\mu-1/2}(\mathcal{J}_\mu(xz)-\mathcal{J}_\mu(x_0z))(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad \text{en } \mathcal{H}_\mu. \tag{9.8}$$

Así pues, establezcamos (9.8). Para cada $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq x\leq N$, y $z\in I$, se tiene:

$$\begin{aligned}|(1+z^2)^m(z^{-1}D_z)^k z^{-\mu-1/2}(z^{-\mu-1/2}(\mathcal{J}_\mu(xz)-\mathcal{J}_\mu(x_0z))(\mathfrak{h}_\mu\phi)(z))| &\leq\\ \leq \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\gamma^\mu_{m,k-i}(\mathfrak{h}_\mu\phi)|x^{\mu+1/2+2i}b_{\mu+i,x}(z)-x_0^{\mu+1/2+2i}b_{\mu+i,x_0}(z)|.\end{aligned} \tag{9.9}$$

Sea $\varepsilon>0$. Por (9.9), existe $z_0\in I$ tal que

$$|(1+z^2)^m(z^{-1}D_z)^k z^{-\mu-1/2}(z^{-\mu-1/2}(\mathcal{J}_\mu(xz)-\mathcal{J}_\mu(x_0z))(\mathfrak{H}_\mu\phi)(z))| < \varepsilon \tag{9.10}$$

cuando $z\geq z_0$, y el teorema del valor medio conduce a

$$\begin{aligned} |x^{\mu+1/2+2i}b_{\mu+i,x}(z)-x_0^{\mu+1/2+2i}b_{\mu+i,x_0}(z)| &\leq \\ &\leq C\,(|x^{\mu+1/2+2i}-x_0^{\mu+1/2+2i}|+|x-x_0|) \end{aligned} \tag{9.11}$$

si $0\leq i\leq k$ y $0\leq z\leq z_0$. Combinando (9.9), (9.10) y (9.11) resulta finalmente (9.8).

Ahora, de acuerdo con Rudin [1991, Theorem 3.27], para cada $t\in I$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_\mu((f\#\phi)(x))(t) &= \int_0^\infty \langle f(y),(\tau_x\phi)(y)\rangle \mathcal{J}_\mu(xt)dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^N \langle f(y),\mathcal{J}_\mu(xt)(\tau_x\phi)(y)\rangle dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\langle f(y),\int_0^N \mathcal{J}_\mu(xt)(\tau_y\phi)(x)dx\rangle . \end{aligned} \tag{9.12}$$

Además,

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \mathcal{J}_\mu(xt)(\tau_y\phi)(x)dx = \int_0^\infty \mathcal{J}_\mu(xt)(\tau_y\phi)(x)dx \quad \text{en } \mathcal{E}_\mu. \tag{9.13}$$

En efecto, fijados $k\in\mathbb{N}$ y $t\in I$ se verifica

$$\begin{aligned} (y^{-1}D_y)^k y^{-\mu-1/2}\int_N^\infty \mathcal{J}_\mu(xt)(\tau_y\phi)(x)dx &= \\ = (-1)^{k+1}\int_N^\infty x^{-2}\mathcal{J}_\mu(xt)\mathfrak{H}_\mu(z^{\mu+1/2}[z^2(z^{-1}D)^2 &+ \\ + (2\mu+2)(z^{-1}D)][b_{\mu+k,y}(z)z^{2k}z^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(z)])(x)dx \quad &(y\in I). \end{aligned}$$

Por tanto, dado cualquier $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, resulta

$$\sup_{y\in]0,n[} |(y^{-1}D_y)^k y^{-\mu-1/2}\int_N^\infty \mathcal{J}_\mu(xt)(\tau_y\phi)(x)dx| \leq C\int_N^\infty x^{-2}dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

como habíamos afirmado.

En virtud de (9.12) y (9.13) encontramos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_\mu((f\#\phi)(x))(t) &= \langle f(y),\mathfrak{H}_\mu(\tau_y\phi)(t)\rangle \\ &= t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)\langle f(y),\mathcal{J}_\mu(yt)\rangle \\ &= t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(t)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t) \quad (t\in I).\end{aligned}$$

Siendo $\mathfrak{H}_\mu$ un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$, el Lema 9.2 asegura la continuidad de la aplicación $\phi\longmapsto f\#\phi$ de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo.

Finalmente, si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ entonces $f\#\phi$ genera una distribución regular en $\mathcal{H}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle f\#\phi,\varphi\rangle = \int_0^\infty (f\#\phi)(y)\varphi(y)dy \quad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu).$$

La igualdad de Parseval para la transformación de Hankel (ZEMANIAN [1968, Theorem 5.1-2]), junto con la Proposición 2.5, permite escribir

$$\begin{aligned}\langle f\#\phi,\varphi\rangle &= \int_0^\infty \mathfrak{H}_\mu(f\#\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t)dt \\ &= \int_0^\infty t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(t)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t)dt \\ &= \langle \mathfrak{H}'_\mu f,\mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)\rangle = \langle f,\phi\#\varphi\rangle\end{aligned}$$

cuando $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$.□

Nota. Si $u\in\mathcal{H}'_\mu$, pero $u\notin\mathcal{E}'_\mu$, y si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, no podemos afirmar, en general, que $u\#\phi\in\mathcal{H}_\mu$. En efecto, la función $u(x)=x^{\mu+1/2}$ $(x\in I)$ es infinitamente derivable y genera una distribución regular en $\mathcal{H}'_\mu$. Sin embargo, las igualdades

$$(u\#\phi)(x) = \int_0^\infty y^{\mu+1/2}(\tau_x\phi)(y)dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty y^{\mu+1/2}\phi(z)D_\mu(x,y,z)dydz$$

$$= c_\mu^{-1}x^{\mu+1/2}\int_0^\infty z^{\mu+1/2}\phi(z)dz \qquad (x\in I),$$

donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$, prueban que ninguna de las cantidades $\gamma^\mu_{m,0}(u\#\phi)$ $(m=1,2,3...)$ es finita, lo que impide que $u\#\phi$ pertenezca a $\mathcal{H}_\mu$.

Ahora bien, si $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ entonces $x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x)\in\mathcal{O}$:

Proposición 9.4. Sean $u\in\mathcal{H}'_\mu$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Se cumple que $x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x)\in\mathcal{O}$. Además, $u\#\phi$ genera un elemento regular en $\mathcal{H}'_\mu$, tal que

$$\langle u\#\phi,\varphi\rangle = \langle u,\phi\#\varphi\rangle \qquad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu), \tag{9.14}$$

con:

$$\mathfrak{h}'_\mu(u\#\phi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t) \qquad (t\in I). \tag{9.15}$$

La aplicación $\phi\longmapsto u\#\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$, cuando $\mathcal{H}'_\mu$ está provisto tanto de su topología débil* como de su topología fuerte.

Demostración. Sean $u\in\mathcal{H}'_\mu$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Según la Proposición 1.5.2, para probar que $x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x)\in\mathcal{O}$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\langle u,\varphi\rangle = \int_0^\infty f(y)(1+y^2)^m y^{-\mu-1/2}S_\mu^k\varphi(y)dy \qquad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu)$$

con $m,k\in\mathbb{N}$ y $f\in L^{\infty}(I)$. Ahora, usando la Proposición 8.1 escribimos

$$\begin{aligned}(u\#\phi)(x) &= \int_0^{\infty} f(y)(1+y^2)^m y^{-\mu-1/2} S^k_{\mu,y}(\tau_x\phi)(y)dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y)(1+y^2)^m y^{-\mu-1/2} \tau_x(S^k_{\mu,y}\phi)(y)dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y)(1+y^2)^m y^{-\mu-1/2} \mathfrak{H}_\mu(t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)\mathfrak{H}_\mu(S^k_{\mu,y}\phi)(t))(y)dy \\ &= (-1)^k x^{\mu+1/2}\int_0^{\infty} f(y)(1+y^2)^m y^{-\mu-1/2} \mathfrak{H}_\mu(t^{2k}\Phi(t)b_{\mu,x}(t))(y)dy \qquad (x\in I),\end{aligned}$$

donde $\Phi(t)=(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)$ $(t\in I)$, y, como antes, $b_{\mu,x}(t)=(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)$ $(x,t\in I)$.

Para cada $r\in\mathbb{N}$ y cada $x\in I$, se tiene:

$$\begin{aligned}&(x^{-1}D)^r x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x) = \\ &= (-1)^{k+r}\int_0^{\infty} \frac{f(y)}{1+y^2}(1+y^2)^{m+1} y^{-\mu-1/2} \mathfrak{H}_\mu(t^{2(k+r)}\Phi(t)b_{\mu+r,x}(t))(y)dy.\end{aligned} \tag{9.16}$$

Por otra parte, si $n,i\in\mathbb{N}$ y $x,t\in I$, entonces

$$\begin{aligned}&(1+t^2)^n(t^{-1}D_t)^{2i}t^{-\mu-1/2}t^{2(k+r)}\Phi(t)b_{\mu+r,x}(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{2i}\binom{2i}{j}(-1)^j x^{2j} b_{\mu+r+j,x}(t)(1+t^2)^n(t^{-1}D)^{2i-j}t^{-\mu-1/2}t^{2(k+r)}\Phi(t).\end{aligned}$$

Luego,

$$\gamma^{\mu}_{n,2i}(t^{2(k+r)}\Phi(t)b_{\mu+r,x}(t)) \le C(1+x^2)^{2i}\sum_{j=0}^{2i}\binom{2i}{j}\gamma^{\mu}_{n,2i-j}(t^{2(k+r)}\Phi(t)). \tag{9.17}$$

De ZEMANIAN [1968, Theorem 5.4-1], de (9.16), y de (9.17), sigue que

$$|(x^{-1}D)^r x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x)| \le \frac{\pi}{2}\|f\|_\infty \sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+1}{i} \sup_{y\in I}|y^{2i}\mathfrak{H}_\mu(t^{2(k+r)}\Phi(t)b_{\mu+r,x}(t))(y)|$$

$$\le C\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{n=0}^{s}\gamma^\mu_{n,2i}(t^{2(k+r)}\Phi(t)b_{\mu+r,x}(t))$$

$$\le C\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{n=0}^{s}\sum_{j=0}^{2i}\gamma^\mu_{n,2i-j}(t^{2(k+r)}\Phi(t))(1+x^2)^{2(m+1)}$$

para $x\in I$, donde $s\in\mathbb{N}$, $s>m+\mu+\frac{5}{2}$. Así, $x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x)\in\mathcal{O}$.

Sean $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Como $x^{-\mu-1/2}(u\#\phi)(x)\in\mathcal{O}$, la función $(u\#\phi)(x)$ define un elemento de $\mathcal{H}'_\mu$ mediante la fórmula

$$\langle u\#\phi,\varphi\rangle = \int_0^\infty (u\#\phi)(x)\varphi(x)dx \qquad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu).$$

(Proposición 1.12.7). Para ciertos $r,k\in\mathbb{N}$, ciertas $f_k\in L^\infty(I)$ $(0\le k\le r)$, y cualquier $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$, la Proposición 1.5.2 permite escribir

$$\langle u\#\phi,\varphi\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty \varphi(x)\int_0^\infty f_k(y)(1+y^2)^r y^{-\mu-1/2}S^k_{\mu,y}(\tau_x\phi)(y)dydx$$

$$= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\int_0^\infty \varphi(x)\int_0^\infty f_k(y)(1+y^2)^r y^{-\mu-1/2}\mathfrak{H}_\mu(t^{-\mu-1/2+2k}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t))(y)dydx.$$

Por el teorema de Fubini,

$$\langle u\#\phi,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\int_0^\infty f_k(y)(1+y^2)^r y^{-\mu-1/2}\mathfrak{H}_\mu(t^{-\mu-1/2+2k}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t))(y)dy$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty f_k(y)(1+y^2)^r y^{-\mu-1/2}S^k_\mu(\phi\#\varphi)(y)dy = \langle u,\phi\#\varphi\rangle \qquad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Luego, vale (9.14). Además,

$$\langle \mathfrak{H}'_\mu(u\#\phi), \mathfrak{H}_\mu \varphi\rangle = \langle u\#\phi, \varphi\rangle = \langle u, \phi\#\varphi\rangle$$

$$= \langle \mathfrak{H}'_\mu u, \mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)\rangle$$

$$= \langle (\mathfrak{H}'_\mu u)(t), t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t)\rangle$$

$$= \langle t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}'_\mu u)(t), (\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t)\rangle \qquad (\varphi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Esto prueba (9.15). Finalmente, se deduce sin dificultad de (9.15) que, para cada $u\in\mathcal{H}'_\mu$, la aplicación $\phi\longmapsto u\#\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$ cuando sobre este último espacio se considera su topología fuerte. Es claro que esta misma aplicación sigue siendo continua si se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ de su topología débil*.□

Las Proposiciones 9.3 y 9.4 justifican la siguiente

Definición 9.5. Si $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $f\in\mathcal{H}_\mu\cup\mathcal{E}'_\mu$, se define la *convolución de Hankel* $u\#f\in\mathcal{H}'_\mu$ por

$$\langle u\#f,\phi\rangle = \langle u,f\#\phi\rangle = \langle u\otimes f,\tau_x\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Aquí, $\otimes$ denota el producto tensorial distribucional usual.

La Definición 9.5 es consistente con la Definición 9.1 en virtud de (9.5) y (9.14).

Argumentando como en las demostraciones de las Proposiciones 9.3 y 9.4 podemos probar:

Proposición 9.6. Para cada $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y cada $f\in\mathcal{H}_\mu\cup\mathcal{E}'_\mu$, se verifica

$$\mathfrak{H}'_\mu(u\#f)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu f)(t)(\mathfrak{H}'_\mu u)(t) \qquad (t\in I).$$

Si $f\in\mathcal{H}_\mu\cup\mathcal{E}'_\mu$ entonces la aplicación $u\longmapsto u\#f$ es continua de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo, cuando sobre este espacio se consideran tanto la topología débil* como la fuerte.

10. El espacio de los operadores de convolución.

Ahora pretendemos definir la convolución de Hankel generalizada sobre un subespacio de $\mathcal{H}'_\mu$ más amplio que $\mathcal{H}_\mu\cup\mathcal{E}'_\mu$.

Dado $m\in\mathbb{Z}$ consideramos el espacio vectorial $O_{\mu,m,\#}$ de todas aquellas funciones infinitamente derivables $\psi=\psi(x)$ definidas sobre I tales que

$$o_k^{\mu,m}(\psi) = \sup_{x\in I} |(1+x^2)^m x^{-\mu-1/2} S_\mu^k \psi(x)|$$

es finita para cada $k\in\mathbb{N}$. Provisto de la topología generada por la familia de seminormas $\{o_k^{\mu,m}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $O_{\mu,m,\#}$ es un espacio de Fréchet. Resulta evidente que $\mathcal{H}_\mu\subset O_{\mu,m,\#}$ $(m\in\mathbb{Z})$.

Si $m\in\mathbb{Z}$, denotamos por $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ la clausura de $\mathcal{H}_\mu$ en $O_{\mu,m,\#}$, mientras que $\mathcal{O}_{\mu,\#}$ representa el espacio unión de los $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ para m recorriendo $\mathbb{Z}$, dotado de la topología final localmente convexa inducida por la familia de inclusiones $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}\hookrightarrow\mathcal{O}_{\mu,\#}$ $(m\in\mathbb{Z})$.

La siguiente propiedad será útil.

Lema 10.1. Sea $m\in\mathbb{Z}$. Si T está en $\mathcal{O}'_{\mu,m,\#}$, el espacio dual de $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$, entonces existen $r,s\in\mathbb{N}$ (donde s no depende de m) y funciones $f_j\in L^\infty(I)$ $(0\leq j\leq r)$, tales que T puede ser representada por

$$T = \sum_{j=0}^{r} S_\mu^j (1+x^2)^{m+s} x^{-\mu-1/2} f_j$$

sobre $\mathcal{H}_\mu$.

Demostración. Fijemos $T\in\mathcal{O}'_{\mu,m,\#}$. Existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$|\langle T,\psi\rangle| \leq C \max_{0\leq k\leq n} o_k^{\mu,m}(\psi) \qquad (\psi\in\mathcal{O}_{\mu,m,\#}). \tag{10.1}$$

Dado $m\in\mathbb{N}$, fue probado en la demostración del Lema 1.2.2 que

$$o_k^{\mu,m}(\phi) \le C\int_0^\infty (1+u^2)^{m+s}u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu,\ k\in\mathbb{N}) \tag{10.2}$$

para algún $s=s(\mu)\in\mathbb{N}$, $s\ge 1$, independiente de m.

Por otra parte, si $m\in\mathbb{Z}$, $m\le -1$, si $k\in\mathbb{N}$, y si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces

$$|(1+x^2)^m x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)| = |\int_x^\infty D(1+t^2)^m t^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)dt|$$

$$\le \int_0^\infty |D(1+t^2)^m t^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)|dt \qquad (x\in I).$$

Pero

$$|D(1+t^2)^m t^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)| \le |m|\,|(1+t^2)^m t^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)|$$

$$+ |(1+t^2)^m Dt^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)| \qquad (t\in I),$$

con

$$\int_0^\infty |(1+t^2)^m Dt^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)|dt = \int_0^\infty (1+t^2)^m t^{-2\mu-1}|\int_0^t u^{\mu+1/2}S_\mu^{k+1}\phi(u)du|dt$$

$$\le \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}|\int_0^t (1+u^2)^{m+1}u^{-\mu-1/2}S_\mu^{k+1}\phi(u)du|dt$$

$$\le \frac{\pi}{2}\int_0^\infty (1+u^2)^{m+1}u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du.$$

Luego,

$$o_k^{\mu,m}(\phi) \le |m|\int_0^\infty (1+u^2)^m u^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi(u)|du$$
$$+ \frac{\pi}{2}\int_0^\infty (1+u^2)^{m+1}u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu,\ k\in\mathbb{N}). \tag{10.3}$$

En definitiva, de acuerdo con (10.1), (10.2) y (10.3), para cada $m\in\mathbb{Z}$ es posible encontrar $r,s\in\mathbb{N}$, con s independiente de m, de modo que

$$|\langle T,\phi\rangle| \le C \max_{0\le j\le r} \|(1+x^2)^{m+s}x^{-\mu-1/2}S_\mu^j\phi(x)\|_1 \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Un procedimiento análogo al empleado en la prueba de la Proposición 1.5.1 conduce finalmente a la conclusión deseada.□

A continuación caracterizaremos los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

Teorema 10.2. Sea $T\in\mathcal{H}'_{\mu}$. Son equivalentes:

(i) $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

(ii) $T=\mathfrak{H}'_{\mu}\theta$, donde $x^{-\mu-1/2}\theta\in\mathcal{O}$.

(iii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existen $k=k(m)\in\mathbb{N}$ y funciones continuas f_p definidas sobre I $(0\leq p\leq k)$ tales que

$$T = \sum_{p=0}^{k} S_{\mu}^{p} f_p, \tag{10.4}$$

con

$$(1+x^2)^m f_p \in L^{\infty}(I) \qquad (0\leq p\leq k). \tag{10.5}$$

(iv) Dado $m\in\mathbb{N}$ existen $k=k(m)\in\mathbb{N}$ y funciones continuas acotadas f_p definidas sobre I $(0\leq p\leq k)$ satisfaciendo (10.4), con

$$(1+x^2)^m f_p \in L^{1}(I) \qquad (0\leq p\leq k).$$

(v) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existen $k=k(m)\in\mathbb{N}$ y funciones continuas acotadas f_p definidas sobre I $(0\leq p\leq k)$ que verifican (10.4), tales que

$$\lim_{x\to\infty} (1+x^2)^m f_p(x) = 0 \qquad (0\leq p\leq k). \tag{10.6}$$

Demostración. Probemos que *(i)* implica *(ii)*. Supongamos que $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, y sea $m\in\mathbb{Z}$. Por el Lema 10.1, existen $r,s\in\mathbb{N}$ (s independiente de m) y $f_j\in L^{\infty}(I)$ $(0\leq j\leq r)$, tales que T admite la representación

$$T = \sum_{j=0}^{r} S_{\mu}^{j}(1+x^2)^{m+s} x^{-\mu-1/2} f_j = \sum_{j=0}^{r} S_{\mu}^{j} g_j$$

sobre $\mathcal{H}_\mu$, donde

$$g_j = (1+x^2)^{m+s}x^{-\mu-1/2}f_j \qquad (0\le j\le r).$$

Para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, tenemos:

$$\langle \mathfrak{H}'_\mu T,\phi\rangle = \langle T,\mathfrak{H}_\mu\phi\rangle = \sum_{j=0}^{r}\int_0^\infty g_j(x)(\mathfrak{H}_\mu(-y^2)^j\phi(y))(x)dx.$$

Además, si $j\in\mathbb{N}$, $0\le j\le r$, entonces, por el teorema de Fubini,

$$\int_0^\infty g_j(x)(\mathfrak{H}_\mu(-y^2)^j\phi(y))(x)dx =$$

$$= (-1)^j\int_0^\infty y^{\mu+1/2+2j}\phi(y)\int_0^\infty g_j(x)x^{\mu+1/2}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)dxdy,$$

con tal de que $m+s<0$. Por tanto

$$(\mathfrak{H}'_\mu T)(y) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j y^{\mu+1/2+2j}\int_0^\infty g_j(x)x^{\mu+1/2}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)dx \qquad (y\in I),$$

y

$$(y^{-1}D)^k y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i+j}(y^{-1}D)^{k-i}(y^{2j})\int_0^\infty g_j(x)x^{\mu+1/2+2i}(xy)^{-\mu-i}J_{\mu+i}(xy)dx \qquad (y\in I)$$

siempre que $k\in\mathbb{N}$ con $m+s<-k$. Esto implica

$$|(y^{-1}D)^k y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(y)| \le P(y) \qquad (y\in I),$$

donde $P(y)$ denota un polinomio oportuno. La arbitrariedad de $m\in\mathbb{Z}$ proporciona $y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(y)\in\mathcal{O}$, que es equivalente a *(ii)*.

Ahora probaremos que *(ii)* implica *(iii)*. Como $y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(y)\in\mathcal{O}$, a cada $q\in\mathbb{N}$ le corresponden $n_q\in\mathbb{N}$ y cierta constante $C_q>0$ tales que

$$|(x^{-1}D)^q x^{-\mu-1/2}\theta(x)| \le C_q(1+x^2)^{n_q} \qquad (x\in I),$$

donde $\theta=\mathfrak{h}'_\mu T$. Fijado $m\in\mathbb{N}$, pongamos

$$\ell=\max_{0\le q\le 2m} n_q, \qquad C=\max_{0\le q\le 2m} C_q;$$

elijamos $r\in\mathbb{N}$ con $2r>2m+\mu+\frac{3}{2}$, y escribamos $k=\ell+r$, de modo que

$$\max_{0\le q\le 2m} |(x^{-1}D)^q x^{-\mu-1/2}\theta(x)| \le C(1+x^2)^k(1+x^2)^{-r} \quad (x\in I). \tag{10.7}$$

Sea $\vartheta(x)=(1+x^2)^{-k}\theta(x)$ $(x\in I)$. Las funciones

$$f_p = (-1)^p\binom{k}{p}\mathfrak{h}_\mu\vartheta \quad (0\le p\le k)$$

satisfacen (10.4) y (10.5). En efecto, según (10.7) se cumple

$$\max_{0\le q\le 2m} |(x^{-1}D)^q x^{-\mu-1/2}\vartheta(x)| \le C(1+x^2)^{-r} \quad (x\in I). \tag{10.8}$$

Como $\vartheta\in L^1(I)$, necesariamente $\mathfrak{h}'_\mu\vartheta=\mathfrak{h}_\mu\vartheta$, y podemos escribir:

$$T = \mathfrak{h}'_\mu\theta = \mathfrak{h}'_\mu(1+x^2)^k\vartheta = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(-S_\mu)^p\mathfrak{h}'_\mu\vartheta = \sum_{p=0}^{k} S_\mu^p f_p.$$

Esto demuestra (10.4). Ahora, fijemos $q\in\mathbb{N}$, $0\le q\le 2m$. De nuevo por (10.7),

$$x^{\mu+1/2+i}\mathcal{J}_{\mu+i+1}(xy)(x^{-1}D)^i x^{-\mu-1/2}\vartheta(x)\Big|_{x\to 0+}^{x\to\infty} = 0 \quad (0\le i\le q-1).$$

En consecuencia,

$$(-1)^q y^q(\mathfrak{h}_\mu\vartheta)(y) = \int_0^\infty x^{\mu+1/2+q}\mathcal{J}_{\mu+q}(xy)(x^{-1}D)^q x^{-\mu-1/2}\vartheta(x)dx \quad (y\in I).$$

Aplicando (10.8) resulta

$$|y^q(\mathfrak{h}_\mu\vartheta)(y)| \le C\int_0^\infty \frac{x^{\mu+1/2+q}}{(1+x^2)^r}dx \quad (y\in I).$$

La última integral converge por la elección de r, probando *(iii)*.

Que *(iii)* implica *(iv)* implica *(v)* es obvio.

Finalmente, estableceremos que *(v)* implica *(i)*. Sea $m\in\mathbb{Z}$, y elijamos $a\in\mathbb{N}$ de modo que la integral $\int_0^\infty x^{\mu+1/2}(1+x^2)^{-m-a}dx$ converja. Por *(v)*, existen $k=k(a)\in\mathbb{N}$ y funciones continuas acotadas f_p $(0\leq p\leq k)$ sobre I que cumplen (10.4) y (10.6). Definimos

$$\langle T,\psi\rangle = \sum_{p=0}^{k}\int_0^\infty f_p(x)S_\mu^p\psi(x)dx \qquad (\psi\in\mathcal{O}_{\mu,m,\#}).$$

Entonces

$$|\langle T,\psi\rangle| \leq \sum_{p=0}^{k}\int_0^\infty |(1+x^2)^a f_p(x)|\,|(1+x^2)^m x^{-\mu-1/2}S_\mu^p\psi(x)|x^{\mu+1/2}(1+x^2)^{-m-a}dx$$

$$\leq C\sum_{p=0}^{k} o_p^{\mu,m}(\psi) \qquad (\psi\in\mathcal{O}_{\mu,m,\#}).$$

Consecuentemente, T puede ser extendido a $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ como elemento de $\mathcal{O}'_{\mu,m,\#}$, para cada $m\in\mathbb{Z}$. Esta extensión es única, porque $\mathcal{H}_\mu$ es denso en $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ $(m\in\mathbb{Z})$. Concluimos que $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, completando la prueba.□

El espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ desempeña en la teoría de la convolución de Hankel el mismo papel que el espacio $\mathcal{O}'_C$ en la convolución ordinaria sobre la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ y sobre su dual $\mathcal{S}'$, el espacio de las distribuciones temperadas (véase SCHWARTZ **[1978]**). Para empezar, los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ definen operadores de convolución sobre $\mathcal{H}_\mu$.

Proposición 10.3. Si $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, entonces la aplicación $\phi\longmapsto T\#\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo.

Demostración. Sean $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Como $T\in\mathcal{H}'_\mu$, sigue de la Proposición 9.4 que $T\#\phi\in\mathcal{H}'_\mu$, con

$$\mathfrak{h}'_\mu(T\#\phi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t) \qquad (t\in I).$$

Ahora bien (Teorema 10.2), $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)\in\mathcal{O}$. Luego, $\mathfrak{H}'_\mu(T\#\phi)\in\mathcal{H}_\mu$. Además,

$$T\#\phi = \mathfrak{H}'_\mu(\mathfrak{H}'_\mu(T\#\phi)) = \mathfrak{H}_\mu(\mathfrak{H}'_\mu(T\#\phi))$$

está en $\mathcal{H}_\mu$, y la aplicación $\phi\longmapsto T\#\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo.□

Estamos en disposición de dar la siguiente:

Definición 10.4. Para $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, definimos la *convolución de Hankel* $u\#T$ mediante la fórmula

$$\langle u\#T,\phi\rangle = \langle u,T\#\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Nota. *(i)* Por la Proposición 10.3, $u\#T\in\mathcal{H}'_\mu$ cuando $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

(ii) La Definición 10.4 extiende a la Definición 9.5, ya que $\mathcal{H}_\mu\cup\mathcal{E}'_\mu$ es un subconjunto propio de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Para comprobarlo, fijemos $r\in\mathbb{N}$, con $2r>\mu+\frac{3}{2}$, y consideremos las funciones

$$\phi(x) = \frac{x^{\mu+1/2}}{(1+x^2)^r}, \qquad \varphi(y) = \frac{2^{1-r}y^{r-1/2}}{\Gamma(r)}K_{\mu-r+1}(y) \qquad (x,y\in I).$$

Aquí $K_{\mu-r+1}$ denota la función modificada de Bessel de segunda especie y orden $\mu-r+1$. De acuerdo con OBERHETTINGER [1972, 1.4.23] tenemos que $\mathfrak{H}_\mu\phi=\varphi$, y $\varphi\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ porque $x^{-\mu-1/2}\phi(x)\in\mathcal{O}$ (Teorema 10.2). Sin embargo, $\varphi\notin\mathcal{H}_\mu\cup\mathcal{E}'_\mu$.

Los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ también definen operadores de convolución sobre $\mathcal{H}'_\mu$.

Proposición 10.5. Para cada $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y cada $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, se verifica:

$$\mathfrak{H}'_\mu(u\#T)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)(\mathfrak{H}'_\mu u)(t) \qquad (t\in I). \tag{10.9}$$

Si $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ entonces la aplicación $u\longmapsto u\#T$ es continua de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo cuando sobre $\mathcal{H}'_\mu$ se consideran tanto la topología débil* como la fuerte.

Demostración. La prueba de (10.9) es similar a la de la Proposición 9.6, mientras que la continuidad (débil* o fuerte) de la aplicación $u \longmapsto u\#T$ sigue fácilmente de (10.9).□

Otra consecuencia inmediata de (10.9) es:

Corolario 10.6. Si $S,T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ entonces $S\#T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

A continuación estableceremos algunas propiedades algebraicas de la convolución de Hankel generalizada.

Proposición 10.7. Sea $u\in\mathcal{H}'_{\mu}$, y sean $S,T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

(i) *(Asociatividad)* Se cumple:

$$(u\#S)\#T=u\#(S\#T).$$

(ii) *(Conmutatividad)* Se verifica:

$$S\#T=T\#S.$$

(iii) *(Identidad)* Si $c_{\mu}=2^{\mu}\Gamma(\mu+1)$ y sobre $\mathcal{H}_{\mu}$ se define la función generalizada δ_{μ} por

$$\langle\delta_{\mu},\phi\rangle = c_{\mu} \lim_{x\to 0+} x^{-\mu-1/2}\phi(x) \qquad (\phi\in\mathcal{H}_{\mu}),$$

entonces $\delta_{\mu}\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $u\#\delta_{\mu}=u$.

(iv) *(Comportamiento respecto de S_{μ})* El operador S_{μ} conmuta con la convolución de Hankel:

$$S_{\mu}(u\#T)=(S_{\mu}u)\#T=u\#(S_{\mu}T).$$

Demostración. Para establecer *(i)*, *(ii)* y *(iv)* basta usar (10.9). Probemos *(iii)*.

El funcional δ_μ está en $\mathcal{H}'_\mu$. Ciertamente, tenemos:

$$|\langle\delta_\mu,\phi\rangle| = |c_\mu \lim_{x\to 0+} x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \le c_\mu \sup_{x\in I} |x^{-\mu-1/2}\phi(x)| = c_\mu \gamma^\mu_{0,0}(\phi) \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Además, por convergencia dominada,

$$\langle\mathfrak{H}'_\mu\delta_\mu,\phi\rangle = c_\mu \lim_{x\to 0+} x^{-\mu-1/2}\int_0^\infty \phi(t)\mathcal{J}_\mu(xt)dt = \int_0^\infty t^{\mu+1/2}\phi(t)dt = \langle t^{\mu+1/2},\phi(t)\rangle.$$

Esto es, $(\mathfrak{H}'_\mu\delta_\mu)(t)=t^{\mu+1/2}$. Luego $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu\delta_\mu)(t)\in\mathcal{O}$, así que $\delta_\mu\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ (Teorema 10.2). En virtud de (10.9) resulta

$$\mathfrak{H}'_\mu(u\#\delta_\mu)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu\delta_\mu)(t)(\mathfrak{H}'_\mu u)(t) = (\mathfrak{H}'_\mu u)(t) \qquad (u\in\mathcal{H}'_\mu),$$

completando la prueba.□

11. La topología de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

La Proposición 10.3 sugiere considerar sobre $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ la topología que este espacio hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$. Dicha topología está definida por la familia de seminormas $\{\delta^{\mu,\#}_{m,k;\phi}\}_{m,k\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, donde

$$\delta^{\mu,\#}_{m,k;\phi}(T) = \gamma^\mu_{m,k}(T\#\phi) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}).$$

Proposición 11.1. La aplicación $L(T)=x^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(x)$ define un isomorfismo de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ sobre $\mathcal{O}$.

Demostración. En virtud del Teorema 10.2, L es biyectiva. Además, si $\phi,\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ son tales que $\phi=\mathfrak{H}_\mu\varphi$ y si $m,k\in\mathbb{N}$ entonces existen $n\in\mathbb{N}$ y $m_i,k_i\in\mathbb{N}$ $(0\le i\le n)$ satisfaciendo

$$\delta^\mu_{m,k;\phi}(L(T)) = \gamma^\mu_{m,k}(x^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(x)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(x)) = \gamma^\mu_{m,k}(\mathfrak{H}_\mu(T\#\varphi))$$

$$\le C\sum_{i=1}^n \gamma^\mu_{m_i,k_i}(T\#\varphi) = C\sum_{i=1}^n \delta^{\mu,\#}_{m_i,k_i;\phi}(T).$$

Por tanto, L es continua. Se prueba similarmente que L^{-1} también lo es.□

Teniendo en cuenta el estudio realizado en la Parte III del Capítulo 1, se concluyen inmediatamente de la Proposición 11.1 algunas propiedades de continuidad de la convolución y del propio espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

Si $\mathfrak{B}_\mu$ es la familia de todos los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}_\mu$, podemos definir sobre $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ la topología generada por la familia de seminormas

$$\delta^{\mu,\#}_{m,k;B}(T) = \sup_{\phi\in B} \gamma^{\mu}_{m,k}(T\#\phi) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ B\in\mathfrak{B}_\mu,\ T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}).$$

Esta topología de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ no es otra que la heredada de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$.

Corolario 11.2. Para cada $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\mu)$ y $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}_\mu)$ inducen sobre $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ la misma topología.

Demostración. Proposiciones 11.1 y 1.12.2.□

Proposición 11.3. Se verifica:

(i) Las aplicaciones bilineales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_{\mu,\#}\times\mathcal{H}_\mu & \longrightarrow & \mathcal{H}_\mu \\ (T,\phi) & \longmapsto & T\#\phi \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}'_{\mu,\#}\times\mathcal{O}'_{\mu,\#} & \longrightarrow & \mathcal{O}'_{\mu,\#} \\ (S,T) & \longmapsto & S\#T \end{array}$$

son hipocontinuas.

(ii) La aplicación bilineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}'_\mu\times\mathcal{O}'_{\mu,\#} & \longrightarrow & \mathcal{H}'_\mu \\ (u,T) & \longmapsto & u\#T \end{array}$$

es continua en cada variable cuando se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ tanto de la topología débil* como de la fuerte.

Demostración. Basta combinar la Proposición 11.1 con las 1.12.4, 1.12.5 y 1.13.2, respectivamente.□

La Proposición 10.5 permite contemplar $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ como un subespacio del espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ de las aplicaciones lineales continuas de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo. Recordemos que $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ es independiente de la topología (débil* o fuerte) que se considere sobre $\mathcal{H}'_\mu$.

Proposición 11.4. La topología de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ coincide con la que este espacio hereda de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}'_\mu)$ y de $\mathcal{L}_b(\mathcal{H}'_\mu)$.

Demostración. Proposiciones 11.1, 1.13.3 y 1.13.4.□

Proposición 11.5. El espacio vectorial topológico $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ es localmente convexo, Hausdorff, no metrizable, completo, bornológico, nuclear, Schwartz, Montel y reflexivo.

Demostración. Proposiciones 11.1, 1.14.2, 1.14.4 y 1.14.5.□

IV. ESTRUCTURA Y CONVERGENCIA SECUENCIAL EN $\mathcal{H}'_\mu$ Y EN $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

12. Introducción.

Nuestro objetivo es caracterizar los elementos (Sección 15) y la convergencia secuencial (Sección 18) en los espacios $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ en términos de la convolución de Hankel generalizada. Este estudio se inspira en los realizados por SWARTZ **[1972a]**, **[1972b]**, SAMPSON-ZIELEZNY **[1976]** y SCHWARTZ **[1978]** para el espacio $\mathcal{S}'$ de distribuciones temperadas y su espacio de operadores de convolución $\mathcal{O}'_C$, así como para duales de espacios de tipo $K\{M_p\}$. Previamente establecemos resultados sobre aproximación en $\mathcal{H}_\mu$ y en $\mathcal{H}'_\mu$ por regularización (Sección 13) y determinamos las soluciones fundamentales del operador $(1-S_\mu)^r$ $(r\in\mathbb{N})$ (Sección 14). En la Sección 16 caracterizamos $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ como el subespacio de los elementos en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ y en $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ que conmutan con las traslaciones de Hankel. La Sección 17 contiene una propiedad de los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ semejante a la establecida en SNAJDER-ZIELEZNY **[1978,** Theorem 2**]**.

En toda esta Parte μ representará un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$. Además, convendremos en denotar por C una constante positiva adecuada (no necesariamente la misma en cada comparecencia).

13. Regularización en $\mathcal{H}'_\mu$.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $k_n\in C^\infty(I)$ tal que:

(i) $k_n(x)\geq 0$ $(x\in I)$,

(ii) $k_n(x)=0$ $(0<x<(n+1)^{-1},\ x>n^{-1})$; y

(iii) $c_\mu^{-1}\int_0^{1/n} k_n(x)x^{\mu+1/2}dx = 1$, donde $c_\mu=2^\mu\Gamma(\mu+1)$

(véase la Sección 5).

Recordemos una vez más que, siendo $\mathcal{H}_\mu$ un espacio de Montel (Proposición 1.4.7), la convergencia débil* y la fuerte de sucesiones son equivalentes en $\mathcal{H}'_\mu$ (TRÉVES [1967, Proposition II.34.6, Corollary 1]).

Proposición 13.1. Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Entonces $k_n\#\phi\in\mathcal{H}_\mu$ ($n\in\mathbb{N}$) y $\lim_{n\to\infty} k_n\#\phi=\phi$ en $\mathcal{H}_\mu$.

Demostración. Se cumple que $\lim_{n\to\infty} k_n\#\phi=\phi$ en $\mathcal{H}_\mu$ si, y sólo si,

$$\lim_{n\to\infty} t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(t)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t) = (\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)$$

en $\mathcal{H}_\mu$. Fijemos $\varepsilon>0$. Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|(1+t^2)^{-1}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(t) - 1| < \varepsilon \qquad (t\in I,\ n\geq n_0)$$

(véase la demostración de la Proposición 5.1). Supongamos ahora que $k\in\mathbb{N}$, $k\geq1$, y sea $t\in I$. Se tiene:

$$(t^{-1}D)^k(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(t) - 1) = (-1)^k\int_0^{1/n}(xt)^{-\mu-k}J_{\mu+k}(xt)x^{\mu+1/2+2k}k_n(x)dx.$$

Luego, existe $M>0$ satisfaciendo:

$$\begin{aligned} |(t^{-1}D)^k(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(t) - 1)| &\leq M\int_0^{1/n} x^{\mu+1/2+2k}k_n(x)dx \\ &\leq Mn^{-2k}\int_0^{1/n} k_n(x)x^{\mu+1/2}dx = Mc_\mu n^{-2k}. \end{aligned} \tag{13.1}$$

El segundo miembro de (13.1) se puede hacer menor que ε para n suficientemente grande. Cualesquiera sean $m,k\in\mathbb{N}$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y $n\in\mathbb{N}$ grande, podemos ya escribir

$$\sup_{t\in I} |(1+t^2)^m(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(t)-1)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} \sup_{t\in I} |(1+t^2)^{-1}(t^{-1}D)^j(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(t)-1)|$$

$$\sup_{t\in I} |(1+t^2)^{m+1}(t^{-1}D)^{k-j}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)|$$

$$\leq \varepsilon\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\gamma^{\mu}_{m+1,k-j}(\mathfrak{H}_\mu\phi),$$

completando la prueba.□

Proposición 13.2. Sea $u\in\mathcal{H}'_\mu$. Entonces $u\#k_n\in\mathcal{H}'_\mu$ $(n\in\mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} u\#k_n=u$ (débilmente*, fuertemente) en $\mathcal{H}'_\mu$.

Demostración. Proposiciones 9.4 y 13.1.□

Corolario 13.3. Se verifica que $\lim_{n\to\infty} k_n=\delta_\mu$ (débilmente*, fuertemente) en $\mathcal{H}'_\mu$.

Demostración. Proposiciones 10.7 *(iii)* y 13.2.□

Corolario 13.4. El espacio $x^{\mu+1/2}\mathcal{O}$ es (débilmente*, fuertemente) denso en $\mathcal{H}'_\mu$.

Demostración. Para cada $u\in\mathcal{H}'_\mu$ se tiene que $u\#k_n\in x^{\mu+1/2}\mathcal{O}$ $(n\in\mathbb{N})$, por la Proposición 9.4. Basta aplicar la Proposición 13.2.□

Corolario 13.5. $\mathcal{H}_\mu$ es (débilmente*, fuertemente) denso en $\mathcal{H}'_\mu$.

Demostración. Sea $\theta\in\mathcal{O}$. Las funciones $f_n(x)=x^{\mu+1/2}\theta(x)e^{-x^2/n}$ $(x\in I,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1)$ están en $\mathcal{H}_\mu$, y se tiene

$$\langle f_n,\phi\rangle = \int_0^\infty x^{\mu+1/2}\theta(x)e^{-x^2/n}\phi(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty x^{\mu+1/2}\theta(x)\phi(x)dx = \langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle$$

para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, por el teorema de la convergencia dominada. Completamos la demostración recurriendo al Corolario 13.4.□

14. Soluciones fundamentales del operador $(1-S_\mu)^r$.

Dedicamos esta Sección al estudio de las soluciones fundamentales del operador $(1-S_\mu)^r$.

Teorema 14.1. Sea $r\in\mathbb{N}$ tal que $r>\mu+1$. La función

$$e_{\mu,r}(x) = \int_0^\infty y^{\mu+1/2}(1+y^2)^{-r}\mathcal{J}_\mu(xy)dy \qquad (x\in I)$$

es infinitamente derivable sobre I, y genera un elemento regular en $\mathcal{H}'_\mu$ mediante

$$\langle e_{\mu,r},\phi\rangle = \int_0^\infty e_{\mu,r}(x)\phi(x)dx \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu)$$

que satisface la ecuación distribucional

$$\delta_\mu(x) = (1-S_\mu)^r e_{\mu,r}(x) \qquad (x\in I). \tag{14.1}$$

Además, si a>0, si $m\in\mathbb{N}$, si $r>2m+\mu+1$, y si $\gamma=\gamma(x)$ es una función infinitamente derivable sobre I tal que $0\le\gamma(x)\le 1$ $(x\in I)$ pero $\gamma(x)=1$ $(0<x<\varepsilon)$, donde $0<\varepsilon<a$, y $\gamma(x)=0$ $(x>a)$, entonces $\gamma e_{\mu,r}\in\mathcal{W}^m_{\mu,a}$, y se cumple

$$\delta_\mu = (1-S_\mu)^r(\gamma e_{\mu,r}) - \varphi \tag{14.2}$$

para alguna $\varphi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$.

Demostración. Fijemos $r\in\mathbb{N}$, $r>\mu+1$. Siendo $2r>\mu+\frac{1}{2}$, se tiene

$$e_{\mu,r}(x) = \frac{2^{1-r}x^{r-1/2}}{\Gamma(r)}K_{\mu-r+1}(x) \qquad (x\in I), \tag{14.3}$$

donde $K_{\mu-r+1}(x)$ denota la función modificada de Bessel de segunda especie y orden $\mu-r+1$ (OBERHETTINGER [1972, 1.4.23]). Luego, $e_{\mu,r}(x)\in C^\infty(I)$.

Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Por el teorema de Fubini,

$$\langle e_{\mu,r},\phi\rangle = \int_0^\infty\int_0^\infty \phi(x)\mathcal{J}_\mu(xy)y^{\mu+1/2}(1+y^2)^{-r}dxdy$$

$$= \int_0^\infty y^{\mu+1/2}(1+y^2)^{-r}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)dy.$$

Luego,

$$|\langle e_{\mu,r},\phi\rangle| \le \gamma^\mu_{0,0}(\mathfrak{H}_\mu\phi)\int_0^\infty y^{2\mu+1}(1+y^2)^{-r}dy.$$

Como la integral en el segundo miembro de esta desigualdad es convergente y como la transformación de Hankel $\mathfrak{H}_\mu$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo, se infiere que $e_{\mu,r}(x)$ define una distribución regular en $\mathcal{H}'_\mu$.

Además, se satisface (14.1):

$$\langle(1-S_\mu)^r e_{\mu,r},\phi\rangle = \langle e_{\mu,r},(1-S_\mu)^r\phi\rangle = \int_0^\infty y^{\mu+1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)dy$$

$$= \langle y^{\mu+1/2},\mathfrak{H}_\mu\phi\rangle = \langle\mathfrak{H}'_\mu\delta_\mu,\mathfrak{H}_\mu\phi\rangle = \langle\delta_\mu,\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Sean $r,m\in\mathbb{N}$, $r>2m+\mu+1$. Dado $a>0$, consideremos una función $\gamma=\gamma(x)$ infinitamente derivable sobre I tal que $0\le\gamma(x)\le1$ $(x\in I)$, pero $\gamma(x)=1$ $(0<x<\varepsilon)$ con $0<\varepsilon<a$, mientras que $\gamma(x)=0$ $(x>a)$. Afirmamos que $\gamma e_{\mu,r}\in\mathcal{W}^m_{\mu,a}$. En efecto, resulta claro que esta función se anula en el intervalo $[a,\infty[$. Por otra parte, para cada i, $0\le i\le2m$, se tiene

$$(x^{-1}D)^i x^{-\mu-1/2}e_{\mu,r}(x) = (-1)^i\int_0^\infty y^{2\mu+1+2i}(1+y^2)^{-r}(xy)^{-\mu-i}J_{\mu+i}(xy)dy \qquad (x\in I).$$

(La derivación bajo el signo integral está justificada porque la integral en el segundo miembro de esta igualdad converge absolutamente). Ahora, para probar nuestra afirmación basta aplicar la regla de Leibniz.

Finalmente, establezcamos (14.2). Si $x\in I$, un cálculo directo conduce a

$$\begin{aligned}(1-S_\mu)^r(\gamma e_{\mu,r})(x) &= \\ &= \gamma(x)(1-S_\mu)^r e_{\mu,r}(x) + \sum_{k=0}^{2r} p_k x^{a_1(k)}(x^{-1}D)^{a_2(k)}(e_{\mu,r}(x))(x^{-1}D)^{a_3(k)}(\gamma(x))\end{aligned} \tag{14.4}$$

donde $p_k\in\mathbb{R}$ y $a_i(k)\in\mathbb{N}$ $(i=1,2,3)$, con $0\le a_i(k)\le2r$ $(i=1,2)$ y $0<a_3(k)\le2r$ $(0\le k\le2r)$, denotan constantes oportunas.

Cualquiera que sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, se cumple

$$\langle\gamma(x)(1-S_\mu)^r e_{\mu,r}(x),\phi(x)\rangle = \langle\delta_\mu(x),\gamma(x)\phi(x)\rangle = c_\mu \lim_{x\to 0+} x^{-\mu-1/2}\gamma(x)\phi(x)$$

$$= c_\mu \lim_{x\to 0+} x^{-\mu-1/2}\phi(x) = \langle\delta_\mu,\phi\rangle. \tag{14.5}$$

Luego, $\gamma(x)(1-S_\mu)^r e_{\mu,r}(x)=\delta_\mu$ en el sentido de igualdad en $\mathcal{H}'_\mu$. De acuerdo con (14.3), la función $e_{\mu,r}(x)$ y sus derivadas de cualquier orden permanecen acotadas en $[c,b[$, con $c>0$ (ZEMANIAN **[1968**, p. 172**]**). Siendo $(x^{-1}D)^i\gamma(x)=0$ $(0<x<\varepsilon)$ para cada $i\in\mathbb{N}$, $i\geq 1$, sigue que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2r} p_k x^{a_1(k)}(x^{-1}D)^{a_2(k)}(e_{\mu,r}(x))(x^{-1}D)^{a_3(k)}(\gamma(x)) \qquad (x\in I)$$

está en $\mathcal{B}_{\mu,a}$. Este hecho, junto con (14.4) y (14.5), proporciona (14.2).□

15. Caracterización de los elementos en $\mathcal{H}'_\mu$ y en $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

Motivados por PRICE **[1969]**, SWARTZ **[1972a]**, **[1972b]**, SCHWARTZ **[1978]** y KELLER **[1983]**, en esta Sección caracterizamos los elementos de $\mathcal{H}'_\mu$ y de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ en términos de la convolución de Hankel generalizada.

El siguiente Lema 15.1 será de utilidad para nuestro propósito.

Lema 15.1. Sea $\mathcal{U}$ una familia de aplicaciones lineales continuas de $\mathcal{B}_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$ tal que, cualquiera que sea $\psi\in\mathcal{B}_\mu$, el conjunto $\mathcal{U}\psi=\{U\psi:U\in\mathcal{U}\}$ está débilmente* (fuertemente) acotado en $\mathcal{H}'_\mu$. Si $a>0$ entonces existe $m\in\mathbb{N}$ tal que oportunas extensiones continuas a $\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ de los elementos de $\mathcal{U}$ constituyen una familia equicontinua de aplicaciones lineales de $\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ en $\mathcal{H}'_\mu$.

Demostración. Sea $b>0$. Las restricciones a $\mathcal{B}_{\mu,b}$ de los elementos de $\mathcal{U}$ son lineales y continuas, y el conjunto $\mathcal{U}\psi$ está acotado en $\mathcal{H}'_\mu$, para cada $\psi\in\mathcal{B}_{\mu,b}$.

La sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$B_n = \{ \phi\in\mathcal{H}_\mu : |\phi|_{\mu,\infty,n} < \frac{1}{n} \} \quad (n\in\mathbb{N}),$$

es una base numerable de entornos del origen en $\mathcal{H}_\mu$.

Definamos

$$K(n,k) = \{ T\in\mathcal{H}'_\mu : |\langle T,\phi\rangle| \le k \ (\phi\in B_n) \} \quad (n,k\in\mathbb{N}),$$

$$V(n,k) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U^{-1}K(n,k) \quad (n,k\in\mathbb{N}).$$

Nótese que, de acuerdo con el teorema de Banach-Alaoglu, $K(n,k)$ es débilmente* compacto en $\mathcal{H}'_\mu$ para cualesquiera $n,k\in\mathbb{N}$. Como las aplicaciones en $\mathcal{U}$ son continuas y $\mathcal{U}$ está puntualmente acotado en $\mathcal{B}_{\mu,b}$, cada $V(n,k)$ $(n,k\in\mathbb{N})$ es cerrado y $\{V(n,k)\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ forma un recubrimiento numerable de $\mathcal{B}_{\mu,b}$. Luego, en virtud del teorema de categoría de Baire, existen $n_0,k_0\in\mathbb{N}$ tales que $V(n_0,k_0)$ tiene un punto interior ψ_0. Supongamos que $W=\{\psi\in\mathcal{B}_{\mu,b} : |\psi|_{\mu,\infty,s}<\varepsilon\}$, con $s\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon>0$, es un entorno del origen en $\mathcal{B}_{\mu,b}$ que satisface $V=\psi_0+W\subset V(n_0,k_0)$. Se tiene que $\mathcal{U}V$ está acotado en $\mathcal{H}'_\mu$, porque es una parte de $K(n_0,k_0)$, y, por hipótesis, $\mathcal{U}\psi_0$ está acotado en $\mathcal{H}'_\mu$. Entonces $\mathcal{U}W$ también está acotado en $\mathcal{H}'_\mu$, luego es absorbido por cualquier entorno del origen en $\mathcal{H}'_\mu$. En particular, si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ existe $C>0$ tal que

$$|\langle U\psi,\phi\rangle| \le C|\psi|_{\mu,\infty,s} \quad (U\in\mathcal{U},\ \psi\in\mathcal{B}_{\mu,b}).$$

Sea $0<a<b$, y sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $m>s+\mu+2$. Dado $\psi\in\mathcal{W}^m_{\mu,a}$, tomemos una sucesión $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}_{\mu,b}$, convergente a ψ en $\mathcal{W}^s_{\mu,b}$ (Proposición 5.1). Entonces

$$|\langle U\psi_j,\phi\rangle| \le C|\psi|_{\mu,\infty,s} \quad (U\in\mathcal{U},\ j\in\mathbb{N})$$

implica

$$|\langle U\psi,\phi\rangle| \le C|\psi|_{\mu,\infty,s} \le C|\psi|_{\mu,\infty,m} \quad (U\in\mathcal{U}),$$

donde $U\psi=\lim_{j\to\infty} U\psi_j$ en $\mathcal{H}'_\mu$. Nótese que $U\psi$ no depende de la sucesión aproximante $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Se obtiene así una extensión de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{W}^m_{\mu,a}$ en los términos requeridos, completando la prueba.□

En las siguientes Proposiciones 15.2 y 15.3 caracterizamos los elementos de $\mathcal{H}'_\mu$ y de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, respectivamente.

Proposición 15.2. Son equivalentes:

(i) $T\in\mathcal{H}'_\mu$.

(ii) Para cada $1<q\le\infty$ existen $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_k\in L^q(I)$ $(0\le k\le r)$ tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} f_k.$$

(iii) $T\in\mathcal{B}'_\mu$ y $T\#\psi\in\mathcal{H}'_\mu$ para cada $\psi\in\mathcal{B}_\mu$.

Demostración. Que *(i)* implica *(ii)* es el contenido de la Proposición 1.5.2.

Estableceremos a continuación que *(ii)* implica *(iii)*. Sea T un funcional lineal sobre $\mathcal{H}_\mu$, tal que

$$\langle T,\phi\rangle = \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty f_k(t)(1+t^2)^r t^{-\mu-1/2} S_\mu^k\phi(t)dt \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu)$$

para ciertos $r\in\mathbb{N}$ y $\{f_k\}_{0\le k\le r}\subset L^\infty(I)$. En particular, si $a>0$ entonces

$$\langle T,\phi\rangle = \sum_{k=0}^{r}\int_0^a f_k(t)(1+t^2)^r t^{-\mu-1/2} S_\mu^k\phi(t)dt \qquad (\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a}),$$

y, como se comprueba fácilmente, $T\in\mathcal{B}'_{\mu,a}$. Así, $T\in\mathcal{B}'_\mu$.

Sean $a>0$, $x\in I$. En virtud del Corolario 4.3, $\tau_x\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a+x}$ para cada $\phi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$, de manera que

$$(T\#\phi)(x) = \sum_{k=0}^{r}\int_0^{a+x} f_k(t)(1+t^2)^r t^{-\mu-1/2} S_\mu^k(\tau_x\phi)(t)dt.$$

Se infiere de (8.1) que

$$\begin{aligned}|(T\#\phi)(x)| &\le x^{\mu+1/2}\sum_{k=0}^{r}\int_0^{a+x}|f_k(t)(1+t^2)^r|\\ &\qquad \int_0^\infty |(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)|\,|(yt)^{-\mu}J_\mu(yt)|\,y^{\mu+1/2}|(\mathfrak{H}_\mu S_\mu^k\phi)(y)|dydt\\ &\le M\, x^{\mu+1/2}(1+x^2)^r\sum_{k=0}^{r}\|f_k\|_\infty,\end{aligned}$$

donde M es una constante positiva adecuada dependiente de ϕ y $\|\bullet\|_\infty$ denota la norma usual de $L^\infty(I)$. Así pues, $x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)(x)\in\mathcal{O}$, y $T\#\phi$ define una distribución regular en $\mathcal{H}'_\mu$.

Para probar que *(iii)* implica *(i)*, consideremos una identidad aproximada de Hankel $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}_\mu$. Por hipótesis, $T_n=T\#k_n=\langle T,\tau_x k_n\rangle\in\mathcal{H}'_\mu$ ($n\in\mathbb{N}$). Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos operadores lineales continuos $U_n:\mathcal{B}_\mu\longrightarrow\mathcal{H}'_\mu$ por $U_n\psi=T_n\#\psi$ ($\psi\in\mathcal{B}_\mu$). Si $\psi\in\mathcal{B}_\mu$ entonces la sucesión $\{U_n\psi\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$, porque converge a $T\#\psi$ en $\mathcal{H}'_\mu$. Ciertamente, según el Corolario 6.3,

$$\langle U_n\psi,\phi\rangle = \langle T_n\#\psi,\phi\rangle = \langle (T\#k_n)\#\psi,\phi\rangle = \langle T\#(k_n\#\psi),\phi\rangle$$

$$= \langle T\#(\psi\#k_n),\phi\rangle = \langle (T\#\psi)\#k_n,\phi\rangle = \langle T\#\psi,k_n\#\phi\rangle \quad (n\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

De aquí (Proposición 13.1),

$$\lim_{n\to\infty}\langle U_n\psi,\phi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T\#\psi,k_n\#\phi\rangle = \langle T\#\psi,\phi\rangle \quad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Así pues, la sucesión $\mathcal{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las hipótesis del Lema 15.1, y dado $a>0$ podemos encontrar $s\in\mathbb{N}$ tal que oportunas extensiones continuas de cada U_n a $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$, que continuamos denotando U_n, constituyen una familia equicontinua de operadores de $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$ en $\mathcal{H}'_\mu$.

Elijamos $0<b<a$ y sean $m,r\in\mathbb{N}$ tales que $m>s+\mu+2$ y $r>2m+\mu+1$. El Teorema 14.1 permite escribir

$$\delta_\mu = (1-S_\mu)^r\psi_0 - \varphi_0$$

para ciertos $\psi_0\in\mathcal{W}^m_{\mu,b}$ y $\varphi_0\in\mathcal{B}_{\mu,b}$. Entonces

$$T_n = T_n\#\delta_\mu = (1-S_\mu)^r T_n\#\psi_0 - T_n\#\varphi_0 \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{15.1}$$

Además, como $T_n\in\mathcal{H}'_\mu$ ($n\in\mathbb{N}$), se cumple

$$U_n\psi_0 = T_n\#\psi_0 \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{15.2}$$

Para probar (15.2) elegimos una sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}_{\mu,a}$, convergente a ψ_0 en $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$ (Proposición 5.1). Es inmediato que

$$\lim_{j\to\infty} \langle U_n\phi_j,\phi\rangle = \langle U_n\psi_0,\phi\rangle \qquad (n\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Procediendo como en la demostración de la Proposición 5.3 también se prueba que $\lim_{j\to\infty} \phi_j\#\phi=\psi_0\#\phi$ en $\mathcal{H}_\mu$, y en tal caso

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_n\#\phi_j,\phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle T_n,\phi_j\#\phi\rangle = \langle T_n,\psi_0\#\phi\rangle = \langle T_n\#\psi_0,\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Siendo $U_n\phi_j=T_n\#\phi_j$ $(j\in\mathbb{N})$, se verifica (15.2).

La sucesión $\{T_n\#\varphi_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$, porque $\varphi_0\in\mathcal{B}_\mu$. Para demostrar que $\{T_n\#\psi_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$, sea V un entorno convexo de cero en $\mathcal{H}'_\mu$. Dado que $\mathcal{U}$ es equicontinua de $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$ en $\mathcal{H}'_\mu$, eligiendo $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ como antes hallamos que $T_n\#\psi_0-T_n\#\phi_j=U_n\psi_0-U_n\phi_j\in V$ $(n\in\mathbb{N})$, para algún $j\in\mathbb{N}$. La acotación de $\{T_n\#\phi_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}'_\mu$ proporciona $\lambda>0$ tal que $T_n\#\phi_j\in\lambda V$ $(n\in\mathbb{N})$. De la convexidad de V sigue que $T_n\#\psi_0\in(1+\lambda)V$ $(n\in\mathbb{N})$, probando que V absorbe a $\{T_n\#\psi_0\}_{n\in\mathbb{N}}$. Concluimos que esta sucesión está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$, como se afirmaba.

Ahora, por (15.1), la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$, que es un espacio de Montel. Denotemos por $U\in\mathcal{H}'_\mu$ el límite en $\mathcal{H}'_\mu$ de alguna subsucesión de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $T_n=T\#k_n$ converge a T cuando $n\to\infty$ en $\mathcal{B}'_\mu$ (Proposición 6.4), necesariamente $T=U\in\mathcal{H}'_\mu$. Esto establece *(i)* y completa la prueba.□

A continuación demostraremos la recíproca de la Proposición 10.3.

Proposición 15.3. Sea $T\in\mathcal{H}'_\mu$. Entonces $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ si, y sólo si, $T\#\psi\in\mathcal{H}_\mu$ para cada $\psi\in\mathcal{B}_\mu$.

Demostración. La necesidad ha sido establecida en la Proposición 10.3.

Supongamos que $T\#\psi\in\mathcal{H}_\mu$ cuando $\psi\in\mathcal{B}_\mu$. Entonces cada conjunto $\{(1+x^2)^n\tau_xT : x\in I\}$ $(n\in\mathbb{N})$ es débilmente* acotado en $\mathcal{B}'_\mu$. Así, fijados $n\in\mathbb{N}$ y $a>0$

existe $s\in\mathbb{N}$ tal que las extensiones a $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$ de los elementos de $\{(1+x^2)^n\tau_x T: x\in I\}$ dadas por

$$\langle(1+x^2)^n\tau_x T,\phi\rangle = \sum_{k=0}^{s}\int_0^a f_{x,k}(t)t^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(t)dt \qquad (\phi\in\mathcal{W}^s_{\mu,a}),$$

con $f_{x,k}\in L^\infty(I)$ $(x\in I,\ 0\le k\le s)$, constituyen una familia equicontinua sobre $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$ (Proposición 1.9.4). Elijamos $0<b<a$, y sean $m,r\in\mathbb{N}$ satisfaciendo $m>s+\mu+2$ y $r>2m+\mu+1$, de modo que $\delta_\mu=(1-S_\mu)^r\psi_0-\varphi_0$ para ciertos $\psi_0\in\mathcal{W}^m_{\mu,b}$, $\varphi_0\in\mathcal{B}_{\mu,b}$ (Teorema 14.1). Entonces

$$T = T\#\delta_\mu = (1-S_\mu)^r T\#\psi_0 - T\#\varphi_0. \tag{15.3}$$

Por una parte

$$\sup_{x\in I}|(1+x^2)^n(T\#\varphi_0)(x)| < \infty, \tag{15.4}$$

ya que $T\#\varphi_0\in\mathcal{H}_\mu$.

Por otra parte, $(1+x^2)^n(T\#\psi_0)(x)=\langle(1+x^2)^n\tau_x T,\psi_0\rangle$ como elementos de $\mathcal{H}'_\mu$. En efecto, en virtud de la Proposición 5.1, ψ_0 es límite en la topología de $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$ de alguna sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{B}_{\mu,a}$. Consecuentemente,

$$\lim_{j\to\infty}\langle(1+x^2)^n\tau_x T,\phi_j\rangle = \langle(1+x^2)^n\tau_x T,\psi_0\rangle$$

en $\mathcal{H}'_\mu$, porque la familia $\{(1+x^2)^n\tau_x T: x\in I\}$ es equicontinua sobre $\mathcal{W}^s_{\mu,a}$. Además,

$$\lim_{j\to\infty}\langle(1+x^2)^n(T\#\phi_j)(x),\phi(x)\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle T,\phi_j\#(1+x^2)^n\phi(x)\rangle = \langle T,\psi_0\#(1+x^2)^n\phi(x)\rangle$$

$$= \langle(1+x^2)^n(T\#\psi_0)(x),\phi(x)\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu),$$

por cuanto

$$\lim_{j\to\infty}\phi_j\#((1+x^2)^n\phi(x)) = \psi_0\#((1+x^2)^n\phi(x))$$

en la topología de $\mathcal{H}_\mu$. Pero $(1+x^2)^n(T\#\phi_j)(x)=\langle(1+x^2)^n\tau_x T,\phi_j\rangle$ $(j\in\mathbb{N})$, así que $(1+x^2)^n(T\#\psi_0)(x)=\langle(1+x^2)^n\tau_x T,\psi_0\rangle$ en el sentido de igualdad en $\mathcal{H}'_\mu$. Ahora, para algún $C>0$ podemos escribir

$$\sup_{x\in I}|(1+x^2)^n(T\#\psi_0)(x)| = \sup_{x\in I}|\langle(1+x^2)^n\tau_x T,\psi_0\rangle| \le C|\psi_0|_{\mu,\infty,m} < \infty. \tag{15.5}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 10.2, de (15.3), (15.4) y (15.5) resulta la conclusión deseada.□

16. Caracterización de los operadores de convolución.

Sea $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ (respectivamente, $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$) el espacio de todos los operadores lineales continuos de $\mathcal{H}_\mu$ (respectivamente, $\mathcal{H}'_\mu$) en sí mismo. Nuestro objetivo en esta Sección es caracterizar $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ como el espacio de los elementos en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ y en $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ que conmutan con las traslaciones de Hankel.

Definición 16.1. Si $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $x\in I$, definimos $\tau_x u\in\mathcal{H}'_\mu$ por transposición:

$$\langle\tau_x u,\phi\rangle = \langle u,\tau_x\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu). \tag{16.1}$$

Se verifica:

Lema 16.2. Sean $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $x\in I$. Entonces:

$$\mathfrak{h}'_\mu(\tau_x u)(t) = t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t) \qquad (t\in I).$$

Demostración. Para $u\in\mathcal{H}'_\mu$, $x\in I$, y $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, combinando (8.1) y (16.1) resulta:

$$\langle\mathfrak{h}'_\mu(\tau_x u),\mathfrak{h}_\mu\phi\rangle = \langle\tau_x u,\phi\rangle = \langle u,\tau_x\phi\rangle = \langle\mathfrak{h}'_\mu u,\mathfrak{h}_\mu(\tau_x\phi)\rangle$$

$$= \langle(\mathfrak{h}'_\mu u)(t),t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)\rangle$$

$$= \langle t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t),(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)\rangle.$$ □

La convolución de Hankel generalizada conmuta con las traslaciones de Hankel:

Lema 16.3. Supongamos que $u\in\mathcal{H}'_\mu$ y $x\in I$. Si $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, entonces

$$\tau_x(u\#T) = (\tau_x u)\#T = u\#(\tau_x T).$$

Demostración. Como $\mathfrak{h}'_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}'_\mu$, el Lema queda establecido sin más que fijar $t\in I$ y usar el Lema 16.2, junto con (10.9), para obtener:

$$\mathfrak{h}'_\mu(\tau_x(u\#T))(t) = t^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xt)\mathfrak{h}'_\mu(u\#T)(t) = t^{-2\mu-1}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t),$$

$$\mathfrak{h}'_\mu((\tau_x u)\#T)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\mathfrak{h}'_\mu(\tau_x u)(t) = t^{-2\mu-1}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t),$$

$$\mathfrak{h}'_\mu(u\#(\tau_x T))(t) = t^{-\mu-1/2}\mathfrak{h}'_\mu(\tau_x T)(t)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t) = t^{-2\mu-1}\mathcal{J}_\mu(xt)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)(\mathfrak{h}'_\mu u)(t). \quad \square$$

Estamos ya en disposición de probar:

Teorema 16.4. Si $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y si L es el elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ definido por

$$L\phi = T\#\phi \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu), \tag{16.2}$$

entonces

$$\tau_x L = L\tau_x \qquad (x\in I). \tag{16.3}$$

Inversamente, si $L\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ satisface (16.3) entonces existe una única $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ para la que se verifica (16.2).

Demostración. Sea $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Que $L\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ definida por (16.2) satisface (16.3) es parte del Lema 16.3. Supongamos ahora que $L\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mu)$ es tal que se verifica (16.3), y definamos $T\in\mathcal{H}'_\mu$ por

$$\langle T,\phi\rangle = \langle\delta_\mu, L\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

Entonces

$$(T\#\phi)(x) = \langle T,\tau_x\phi\rangle = \langle\delta_\mu, L\tau_x\phi\rangle = \langle\delta_\mu,\tau_x L\phi\rangle = (\delta_\mu\#L\phi)(x) = (L\phi)(x) \qquad (x\in I)$$

para $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, probando (16.2). Como $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ es el espacio de los operadores de convolución sobre $\mathcal{H}_\mu$ (Proposición 15.3), sigue de (16.2) que $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$. En cuanto a la unicidad, nótese que si $S\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ es tal que $S\#\phi=0$ para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces $S=0$. Ciertamente, $S\#\phi=0$ $(\phi\in\mathcal{H}_\mu)$ y (10.9) implican $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)\phi(t)=0$ $(\phi\in\mathcal{H}_\mu,$ $t\in I)$. Particularizando $\phi(t)=t^{\mu+1/2}e^{-t^2}$ $(t\in I)$ encontramos que $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)=0$, de donde $\mathfrak{H}'_\mu S=0$ y $S=0$.□

El resultado siguiente será de gran ayuda a la hora de caracterizar los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ como aquellos en $\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ que conmutan con las traslaciones de Hankel.

Lema 16.5. La envolvente lineal del conjunto de las funciones generalizadas de la forma $\tau_x\delta_\mu$ $(x\in I)$ es débilmente* densa en $\mathcal{H}'_\mu$.

Demostración. Como $(\mathfrak{H}'_\mu\delta_\mu)(t)=t^{\mu+1/2}$ $(t\in I)$, en virtud del Lema 16.2 tenemos

$$\mathfrak{H}'_\mu(\tau_x\delta_\mu)(t) = \mathcal{J}_\mu(xt) \qquad (x,t\in I).$$

Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ no se anula idénticamente existe $x\in I$ tal que $\phi(x)\neq0$, así que

$$\langle\tau_x\delta_\mu,\phi\rangle = \langle\mathfrak{H}'_\mu(\tau_x\delta_\mu),\mathfrak{H}_\mu\phi\rangle = \int_0^\infty(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)\mathcal{J}_\mu(xt)dt = \phi(x) \neq 0.$$

Esto significa que el subconjunto $\{\tau_x\delta_\mu\}_{x\in I}$ de $\mathcal{H}'_\mu$ separa puntos en $\mathcal{H}_\mu$. Atendiendo a KELLEY [1968, Problem W (b)], dicha familia es total en $\mathcal{H}'_\mu$ respecto de su topología débil*.□

Teorema 16.6. Si $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y se define $L\in\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ por

$$Lu = u\#T \qquad (u\in\mathcal{H}'_\mu), \tag{16.4}$$

entonces

$$\tau_xL = L\tau_x \qquad (x\in I), \tag{16.5}$$

y además

$$L\delta_\mu \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}. \tag{16.6}$$

Recíprocamente, dado $L\in\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ satisfaciendo (16.5) y (16.6), es posible encontrar una única $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ para la que se verifica (16.4).

Demostración. Que L dado por (16.4) satisface (16.5) es consecuencia del Lema 16.3. Obviamente, también satisface (16.6).

Recíprocamente, sea $L\in\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$ cumpliendo (16.5) y (16.6). Entonces

$$L(u\#\delta_\mu) = u\#(L\delta_\mu) \qquad (u\in\mathcal{H}'_\mu). \tag{16.7}$$

Para probar (16.7), definamos de $\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$ la aplicación lineal

$$\Lambda u = L(u\#\delta_\mu)-u\#(L\delta_\mu) \qquad (u\in\mathcal{H}'_\mu).$$

La definición de Λ es consistente en virtud de (16.6). Como $\Lambda\in\mathcal{L}(\mathcal{H}'_\mu)$, su núcleo es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}'_\mu$. En vista de (16.5) este núcleo contiene a $\tau_x\delta_\mu$ $(x\in I)$, y por lo tanto (Lema 16.5) también es denso en $\mathcal{H}'_\mu$. Consecuentemente, se verifica (16.7).

Poniendo ahora $T=L\delta_\mu$ tenemos

$$u\#T = u\#(L\delta_\mu) = L(u\#\delta_\mu) = Lu,$$

lo que establece (16.4).

En cuanto a la unicidad, supongamos que $S\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ no es la distribución nula, de modo que existe $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ satisfaciendo $S\#\phi\neq 0$. Como $\mathcal{H}'_\mu$ separa puntos en $\mathcal{H}_\mu$, podemos encontrar $u\in\mathcal{H}'_\mu$ tal que

$$\langle u\#S,\phi\rangle = \langle u,S\#\phi\rangle \neq 0.$$

Esto completa la prueba.□

17. Una propiedad de los operadores de convolución.

Motivada por SNAJDER–ZIELEZNY [1978, Theorem 2], el propósito de esta Sección es establecer:

Teorema 17.1. Para $S\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$, son equivalentes:

(i) A cada $k\in\mathbb{N}$ le corresponden $m,n\in\mathbb{N}$ y una constante positiva M, tales que

$$\max_{0\leq\ell\leq m}\ \sup\ \{\ |(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}S)(t)|\ :\ t\in I,\ |x-t|\leq(1+x^2)^{-k}\ \}\ \geq\ (1+x^2)^{-n}$$

cuando $x\in I$, $x\geq M$.

(ii) Si $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $S\#T\in\mathcal{H}_{\mu}$, entonces $T\in\mathcal{H}_{\mu}$.

Demostración. Supongamos que no se satisface *(ii)*. Entonces existe $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ tal que $S\#T\in\mathcal{H}_{\mu}$ pero $T\notin\mathcal{H}_{\mu}$. Esto significa que $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}T)(t)\in\mathcal{O}$, $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}S)(t)(\mathfrak{H}'_{\mu}T)(t)\in\mathcal{H}_{\mu}$, y $\mathfrak{H}'_{\mu}T\notin\mathcal{H}_{\mu}$.

Como $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}S)(t)$ y $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}T)(t)$ están ambas en $\mathcal{O}$, a cada $\ell\in\mathbb{N}$ le corresponden $r_{\ell}\in\mathbb{N}$, $M_{\ell}>0$ satisfaciendo

$$|(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}S)(t)|\ \leq\ M_{\ell}(1+t^2)^{r_{\ell}}\qquad(t\in I),\tag{17.1}$$

y $s_{\ell}\in\mathbb{N}$, $N_{\ell}>0$ satisfaciendo

$$|(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}T)(t)|\ \leq\ N_{\ell}(1+t^2)^{s_{\ell}}\qquad(t\in I).\tag{17.2}$$

Además, como $\mathfrak{H}'_{\mu}T\notin\mathcal{H}_{\mu}$, existen $\ell_0,n_0\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en I, tales que $t_j\xrightarrow[j\to\infty]{}\infty$ y

$$|(t^{-1}D)^{\ell_0}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}T)(t)_{|t=t_j}|\ \geq\ (1+t_j^2)^{-n_0}\qquad(j\in\mathbb{N}).\tag{17.3}$$

Pongamos $k=s_{\ell_0+1}+n_0+2$, y definamos

$$B_{j,k}\ =\ \{\ t\in I\ :\ |t-t_j|\leq(1+t_j^2)^{-k}\ \}\qquad(j\in\mathbb{N}).\tag{17.4}$$

Se infiere de (17.2) y (17.3) que, para j suficientemente grande,

$$\inf_{t\in B_{j,k}} \left|(t^{-1}D)^{\ell_0} t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\right| \ge \frac{1}{2}(1+t_j^2)^{-n_0} > 0. \tag{17.5}$$

En efecto, si j es grande y si $t\in B_{j,k}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\left|(t^{-1}D)^{\ell_0} t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\right| \ge \\
&\qquad \ge \left|(y^{-1}D)^{\ell_0} y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(y)\Big|_{y=t_j}\right| \\
&\qquad\quad - (t_j+(1+t_j^2)^{-k})(1+t_j^2)^{-k} \sup_{y\in B_{j,k}} \left|(y^{-1}D)^{\ell_0+1} y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(y)\right| \\
&\qquad \ge (1+t_j^2)^{-n_0} - C(1+t_j^2)^{s_{\ell_0+1}-k+1} \\
&\qquad = (1+t_j^2)^{-n_0} - C(1+t_j^2)^{-n_0-1},
\end{aligned}$$

donde $C>0$ es una constante independiente de j. Esto demuestra (17.5).

Ahora $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\in\mathcal{H}_\mu$, y por tanto

$$\sup_{t\in B_{j,k}} \left|(t^{-1}D)^{\ell} t^{-2\mu-1}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\right| = O((1+t_j^2)^{-n}) \qquad (\ell,n\in\mathbb{N},\ j\to\infty). \tag{17.6}$$

Ciertamente, fijados $\ell,n\in\mathbb{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in B_{j,k}} \left|(t^{-1}D)^{\ell} t^{-2\mu-1}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\right| = \\
&\qquad = \sup_{|t|\le(1+t_j^2)^{-k}} \left|(y^{-1}D)^{\ell} y^{-2\mu-1}(\mathfrak{h}'_\mu S)(y)(\mathfrak{h}'_\mu T)(y)\Big|_{y=t+t_j}\right| \\
&\qquad \le C_{n,\ell} \sup_{|t|\le(1+t_j^2)^{-k}} (1+(t+t_j)^2)^{-n} \le C_{n,\ell}(1+t_j^2-(1+t_j^2)^{-k})^{-n},
\end{aligned}$$

donde $C_{n,\ell}>0$ es una constante, y el segundo miembro de esta desigualdad es claramente $O((1+t_j^2)^{-n})$ para $j\to\infty$.

A continuación probaremos que

$$\max_{0\le \ell\le m}\ \sup_{t\in B_{j,k}} |(t^{-1}D)^{\ell} t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)| = O((1+t_j^2)^{-n}) \qquad (m,n\in\mathbb{N},\ j\to\infty), \tag{17.7}$$

contradiciendo *(i)*. En lo que sigue, n denotará un entero positivo arbitrario.

Supondremos primeramente que $\ell_0=0$ y procederemos por inducción sobre m. En vista de (17.5) y de (17.6), tenemos

$$\sup_{t\in B_{j,k}} |t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)| \le 2(1+t_j^2)^{n_0} \sup_{t\in B_{j,k}} |t^{-2\mu-1}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)|$$

$$= O((1+t_j^2)^{-n}) \qquad (j\to\infty).$$

Así pues, se satisface (17.7) con m=0.

Supongamos ahora que se verifica (17.7) para algún m. Debemos probar que también se cumple para m+1. Por la regla de Leibniz,

$$t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)(t^{-1}D)^{m+1}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (t^{-1}D)^{m+1-i}(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)(t^{-1}D)^i t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)) \qquad (t\in I).$$

Teniendo presentes (17.2), (17.6) y las hipótesis inductivas, encontramos que

$$\sup_{t\in B_{j,k}} |(t^{-1}D)^{m+1-i}(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)(t^{-1}D)^i t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t))| = O((1+t_j^2)^{-n})$$

para $j\to\infty$, cuando $0\le i\le m+1$. Consecuentemente

$$t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)(t^{-1}D)^{m+1}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)$$

satisface esta misma estimación, y se concluye de (17.5) que

$$\sup_{t\in B_{j,k}} |(t^{-1}D)^{m+1}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)| \le$$

$$\le 2(1+t_j^2)^{n_0} \sup_{t\in B_{j,k}} |t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)(t^{-1}D)^{m+1}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)|$$

$$= O((1+t_j^2)^{-n}) \qquad (j\to\infty).$$

Esto demuestra que se verifica (17.7) con $\ell_0=0$.

Supongamos ahora que $\ell_0\neq 0$ y que ℓ_0 es el menor entero positivo para el cual pueden encontrarse $n_0\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en I cumpliendo (17.3) (y, por consiguiente, (17.5), si j es suficientemente grande). Esto significa que

$$(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t) = O((1+t^2)^{-n}) \qquad (\ell<\ell_0,\ t\to\infty).$$

Razonando como en la demostración de (17.6) encontramos que

$$\sup_{t\in B_{j,k}} |(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)| = O((1+t_j^2)^{-n}) \qquad (\ell<\ell_0,\ j\to\infty). \tag{17.8}$$

En virtud de la regla de Leibniz,

$$t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)(t^{-1}D)^{\ell_0}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^{\ell}\binom{\ell_0}{\ell}(t^{-1}D)^{\ell_0-\ell}(t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S))(t) \qquad (t\in I).$$

De (17.1), (17.6) y (17.8) sigue que

$$\sup_{t\in B_{j,k}} |t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu S)(t)(t^{-1}D)^{\ell_0}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_\mu T)(t)| = O((1+t_j^2)^{-n}) \qquad (j\to\infty). \tag{17.9}$$

Finalmente, usando (17.5), (17.6) y (17.9) obtenemos (17.7) por un argumento similar al empleado en el caso $\ell_0=0$. Esto completa la demostración de que *(i)* implica *(ii)*.

Recíprocamente, supongamos que no se verifica *(i)*. Entonces existen $k\in\mathbb{N}$ y una sucesión $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en I, con $t_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$, tales que

$$\max_{0\le\ell\le j}\ \sup_{t\in B_{j,k}} |(t^{-1}D)^{\ell}t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}'_{\mu}S)(t)| < (1+t_j^2)^{-j} \qquad (j\in\mathbb{N}), \tag{17.10}$$

donde los conjuntos $B_{j,k}$ vienen dados por (17.4). No se pierde generalidad suponiendo que $t_0>1$ y que $t_{j+1}>t_j+1$. Sea $\alpha\in\mathcal{D}(I)$ tal que $0\le\alpha\le 1$, sop $\alpha=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$, y $\alpha(1)=1$, y pongamos

$$\theta_j(t) = \alpha(1+\frac{1}{2}(t-t_j)(1+t_j^2)^k), \qquad \theta(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(t) \qquad (t\in I).$$

La suma que define a θ es finita, porque sop $\theta_j=B_{j,k}$ $(j\in\mathbb{N})$ y $B_{i,k}\cap B_{j,k}=\varnothing$ $(i,j\in\mathbb{N},\ i\ne j)$. Si $\ell,j\in\mathbb{N}$ y $t\in B_{j,k}$ entonces, para ciertas $a_m\in\mathbb{R}$ $(0\le m\le\ell)$, tenemos

$$\begin{aligned}
|(t^{-1}D)^{\ell}\theta(t)| &= |(t^{-1}D)^{\ell}\theta_j(t)| = \sum_{m=0}^{\ell}|a_m t^{-\ell-m}D^m\theta_j(t)| \\
&\le 2^{\ell+m}\sum_{m=0}^{\ell}|a_m D^m\theta_j(t)| \\
&\le C_\ell\, 2^{-k\ell}(1+t_j^2)^{k\ell}\sum_{m=0}^{\ell}|D^m\theta_j(y)|_{y=1+\frac{1}{2}(t-t_j)(1+t_j^2)^k}| \\
&\le C_\ell(1+t_j^2)^{k\ell} \le C_\ell(1+t^2)^{k\ell},
\end{aligned}$$

donde $C_\ell>0$ denota una constante oportuna (no necesariamente la misma en cada comparecencia). Entonces

$$|(t^{-1}D)^{\ell}\theta(t)| \le C_\ell(1+t^2)^{k\ell} \qquad (t\in I), \tag{17.11}$$

probando que $\theta\in\mathcal{O}$. Luego, existe $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ tal que $(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)=t^{\mu+1/2}\theta(t)$ $(t\in I)$. Sean $n,\ell\in\mathbb{N}$. La función

$$(1+t^2)^n(t^{-1}D)^\ell t^{-2\mu-1}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t) \qquad (t\in I)$$

está acotada en el intervalo $0<t<t_{n+k\ell}-(1+t^2_{n+k\ell})^{-k}$. Poniendo $j=n+k\ell+r$ $(r\in\mathbb{N})$ y $t\in B_{j,k}$, la regla de Leibniz, junto con (17.10) y (17.11), implica

$$\begin{aligned}|(1+t^2)^n(t^{-1}D)^\ell t^{-2\mu-1}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)| &= |(1+t^2)^n(t^{-1}D)^\ell t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)\theta(t)| \\ &\leq C(1+t^2)^{n+k\ell}(1+t_j^2)^{-n-k\ell} \leq C.\end{aligned}$$

Esto prueba que $t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu S)(t)(\mathfrak{h}'_\mu T)(t)\in\mathcal{H}_\mu$. Pero $\mathfrak{h}'_\mu T\notin\mathcal{H}_\mu$, ya que

$$t_j^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(t_j) = \alpha(1) = 1$$

y $t_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$. Concluimos que $T\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y que $S\# T\in\mathcal{H}_\mu$ aunque $T\notin\mathcal{H}_\mu$, lo que contradice *(ii)* y completa la demostración.□

18. Convergencia secuencial en $\mathcal{H}'_\mu$ y en $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

El propósito de esta Sección es caracterizar la convergencia secuencial en los espacios $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

Proposición 18.1. Son equivalentes:

(i) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}'_\mu$ y $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{H}'_\mu$.

(ii) A cada q, $1<q\leq\infty$, le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_{n,k}\in L^q(I)$ $(n\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq r)$ tales que

$$T_n = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2} f_{n,k} \qquad (n\in\mathbb{N}), \tag{18.1}$$

con

$$\sum_{k=0}^{r} \|f_{n,k}\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{18.2}$$

(iii) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}'_\mu$ y $T_n\#\phi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{H}'_\mu$ $(\phi\in\mathcal{H}_\mu)$.

Demostración. Nótese que, siendo $\mathcal{H}_\mu$ un espacio de Montel, la convergencia secuencial débil* y la fuerte son equivalentes en $\mathcal{H}'_\mu$.

Que *(i)* implica *(ii)* es el contenido de la Proposición 1.5.10. Demostraremos ahora que *(ii)* implica *(iii)*. Por *(ii)*, existen $r\in\mathbb{N}$ y funciones $f_{n,k}\in L^\infty(I)$ $(0\le k\le r)$ cumpliendo (18.1) y (18.2), con $q=\infty$. Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$; entonces

$$(T_n\#\phi)(x) = \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty f_{n,k}(t)(1+t^2)^r t^{-\mu-1/2} S_\mu^k \tau_x \phi(t)dt \qquad (x\in I).$$

Consiguientemente

$$\begin{aligned}
|(T_n\#\phi)(x)| &\le \\
&\le \sum_{k=0}^{r}\|f_{n,k}\|_\infty \int_0^\infty (1+t^2)^r t^{-\mu-1/2} |\tau_x S_\mu^k \phi(t)|dt \\
&\le \sum_{k=0}^{r}\|f_{n,k}\|_\infty \int_0^\infty (1+t^2)^r t^{-\mu-1/2} |\mathfrak{H}_\mu (y^{-\mu-1/2}\mathcal{J}_\mu(xy)(\mathfrak{H}_\mu S_\mu^k\phi)(y))(t)|dt \\
&= x^{\mu+1/2}\sum_{k=0}^{r}\|f_{n,k}\|_\infty \int_0^\infty t^{-\mu-1/2} |\mathfrak{H}_\mu ((1-S_{\mu,y})^r (xy)^{-\mu} J_\mu(xy)(\mathfrak{H}_\mu S_\mu^k\phi)(y))(t)|dt \\
&\le x^{\mu+1/2} P_\phi(x) \sum_{k=0}^{r}\|f_{n,k}\|_\infty,
\end{aligned}$$

donde $P_\phi(x)$ es algún polinomio dependiente de ϕ. Por tanto, si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ entonces $T_n\#\phi\in\mathcal{H}'_\mu$ y, para cada $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$, tenemos

$$|\langle (T_n\#\phi)(x),\varphi(x)\rangle| \le \int_0^\infty |(T_n\#\phi)(x)\varphi(x)|dx \le \sum_{k=0}^{r}\|f_{n,k}\|_\infty \int_0^\infty x^{\mu+1/2} P_\phi(x)|\varphi(x)|dx.$$

El segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero cuando $n\to\infty$, probando *(iii)*.

Para demostrar que *(iii)* implica *(i)* estableceremos, equivalentemente, la siguiente propiedad: si $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{H}'_\mu$ tal que $t^{-\mu-1/2}\phi(t)T_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{H}'_\mu$ para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{H}'_\mu$. A este fin, basta probar que la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$. En efecto, supongamos que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente* (fuertemente) acotada en $\mathcal{H}'_\mu$. Si esta sucesión no converge a cero en $\mathcal{H}'_\mu$ entonces existen $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$, $\varepsilon>0$, y una subsucesión de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos de igual modo, tales que

$$|\langle T_n,\varphi\rangle| > \varepsilon \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{18.4}$$

Ya que $\mathcal{H}'_\mu$ es un espacio de Montel, alguna subsucesión de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que continuamos denotando $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a cierta $T\in\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$. Además, por hipótesis

$$\langle T_n,\psi\rangle = \langle T_n(t),t^{-\mu-1/2}\gamma(t)\psi(t)\rangle = \langle t^{-\mu-1/2}\gamma(t)T_n(t),\psi(t)\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (\psi\in\mathcal{B}_\mu),$$

donde para $\psi\in\mathcal{B}_{\mu,a}$ $(a>0)$ se elige la función $\gamma\in\mathcal{B}_\mu$ de modo que $\gamma(t)=t^{\mu+1/2}$ $(0<t<b)$, con $b>a$. La densidad de $\mathcal{B}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu$ obliga a que sea $T=0$, lo cual contradice (18.4).

Supongamos ahora que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada en $\mathcal{H}'_\mu$. Entonces existen $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ y una subsucesión de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotamos $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), satisfaciendo

$$|\langle T_n,\varphi\rangle| > n \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{18.5}$$

Elijamos $e\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $0\le e(t)\le 1$ $(t\in\mathbb{R})$, $e(t)=1$ $(|t|\le\frac{1}{2})$, y $e(t)=0$ $(|t|\ge\frac{3}{4})$, y pongamos $e_q(t)=t^{\mu+1/2}e(t-q)$ $(q\in\mathbb{N},\ t\in I)$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ consideramos el espacio de Banach E_k (véase KELLER **[1983]**), consistente en todas aquellas sucesiones complejas $a=\{a_{n,q}\}_{n,q\in\mathbb{N}}$ cuya norma

$$\|a\|_k = \sup_{n,q\in\mathbb{N}} |a_{n,q}(\log(1+n))^{-k}(1+q)^{-k}|$$

es finita. Como $E_k\subset E_{k+1}$ con continuidad, podemos definir el límite inductivo E de los espacios E_k $(k\in\mathbb{N})$. Entonces E es un espacio localmente convexo, Hausdorff y (LS).

Nos proponemos establecer la continuidad de la aplicación $u:\mathcal{H}_\mu \longrightarrow E$ dada por $u(\phi)=a=\{a_{n,q}\}_{n,q\in\mathbb{N}}$ $(\phi\in\mathcal{H}_\mu)$, donde

$$a_{n,q} = \langle t^{-\mu-1/2}e_q(t)T_n(t),\phi(t)\rangle.$$

Para ver que u está bien definida, notemos que existen $r\in\mathbb{N}$, $A>0$ satisfaciendo:

$$\begin{aligned} |a_{n,q}| &= |\langle t^{-\mu-1/2}e_q(t)T_n(t),\phi(t)\rangle| = |\langle t^{-\mu-1/2}\phi(t)T_n(t),e_q(t)\rangle| \\ &\le A \max_{0\le k\le r} \sup_{t\in I} |(1+t)^r(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}e_q(t)| \quad (n,q\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu). \end{aligned} \tag{18.6}$$

Además,

$$\max_{0\le k\le r} \sup_{t\in I} |(1+t)^r(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}e_q(t)| \le B(1+q)^r \quad (q\in\mathbb{N}), \tag{18.7}$$

donde $B>0$ es una constante oportuna. De (18.6) y (18.7) resulta

$$|a_{n,q}| \le C(1+q)^r \quad (n,q\in\mathbb{N}),$$

probando que $\|a\|_r<\infty$ y, con ello, que u está bien definida.

Para demostrar que u es continua haremos uso del teorema del grafo cerrado. Supongamos que $\phi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{H}_\mu$, y que $u(\phi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} a_0$ en E. Existe $s\in\mathbb{N}$ tal que $\{u(\phi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}\subset E_s$ y $u(\phi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} a_0$ en E_s. Además, como $\{t^{-\mu-1/2}e_q(t)T_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}'_\mu$ $(q\in\mathbb{N})$, necesariamente

$$a_{n,q;j} = \langle t^{-\mu-1/2}e_q(t)T_n(t),\phi_j(t)\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad (n,q\in\mathbb{N}), \tag{18.8}$$

donde $\{a_{n,q;j}\}_{n,q\in\mathbb{N}}=u(\phi_j)$ $(j\in\mathbb{N})$. La convergencia en la topología de E_s entraña la convergencia componente a componente, y se infiere de (18.8) que $a_0=0$. Consecuentemente, u es continua.

En virtud del teorema B de Grothendieck (véase GROTHENDIECK [1955]), existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $u(\mathcal{H}_{\mu})\subset E_m$. Pongamos $m'=m+2$, y definamos

$$\theta(t) = \sum_{q\in\mathbb{N}} (1+q)^{-m'} e_q(t) \qquad (t\in I).$$

Nótese que $\theta\in C^{\infty}(I)$. De la desigualdad

$$|(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2}\theta(t)| \le \sum_{q\in\mathbb{N}} (1+q)^{-m'} |(t^{-1}D)^k t^{-\mu-1/2} e_q(t)| \le M \qquad (k\in\mathbb{N},\ t\in I),$$

donde $M>0$ es cierta constante, sigue que $t^{-\mu-1/2}\theta(t)\in\mathcal{O}$. Además, teniendo en cuenta que

$$|t^{-\mu-1/2}\theta(t)| \ge (1+q)^{-m'} \ge (2+t)^{-m'} \qquad (t\in I,\ q\in\mathbb{N},\ |t-q|\le \tfrac{1}{2})$$

y procediendo inductivamente a partir de la identidad

$$(t^{-1}D)^k t^{\mu+1/2}(1/\theta(t)) =$$

$$= -t^{\mu+1/2}(1/\theta(t)) \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (t^{-1}D)^{k-i}(t^{\mu+1/2}(1/\theta(t)))(t^{-1}D)^{i}(t^{-\mu-1/2}\theta(t)),$$

válida para cualesquiera $k\in\mathbb{N}$, $t\in I$, se prueba que $t^{\mu+1/2}(1/\theta(t))\in\mathcal{O}$.

Estableceremos a continuación que $\{(\log(1+n))^{-m} t^{-\mu-1/2}\theta(t)T_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathcal{H}'_{\mu}$. En efecto, sea $n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$|\langle(\log(1+n))^{-m} t^{-\mu-1/2}\theta(t)T_n(t),\phi(t)\rangle| \le$$

$$\le (\log(1+n))^{-m} |\langle T_n(t), t^{-\mu-1/2}\theta(t)\phi(t)\rangle|$$

$$\le (\log(1+n))^{-m} \sum_{q\in\mathbb{N}} (1+q)^{-m'} |\langle T_n(t), t^{-\mu-1/2} e_q(t)\phi(t)\rangle| \tag{18.9}$$

$$= (\log(1+n))^{-m} \sum_{q\in\mathbb{N}} (1+q)^{-m'} |\langle t^{-\mu-1/2} e_q(t)T_n(t),\phi(t)\rangle|$$

$$\le \|u(\phi)\|_m \sum_{q\in\mathbb{N}} (1+q)^{-2} \le C \qquad (\phi\in\mathcal{H}_{\mu}).$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
&|\langle(\log(1+n))^{-m}T_n(t),\phi(t)\rangle| \le \\
&\le |\langle(\log(1+n))^{-m}t^{-\mu-1/2}\theta(t)T_n(t),t^{\mu+1/2}(1/\theta(t))\phi(t)\rangle| \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).
\end{aligned} \tag{18.10}
$$

Dado que $t^{\mu+1/2}(1/\theta(t))\phi(t)\in\mathcal{H}_\mu$ para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, (18.9) y (18.10) implican

$$|\langle T_n,\phi\rangle| \le C(\log(1+n))^m \qquad (n\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

En particular

$$|\langle T_n,\varphi\rangle| \le C(\log(1+n))^m \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

contradiciendo (18.5). Esto completa la prueba.□

Proposición 18.2. Dada una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}'_\mu$, son equivalentes:

(i) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$.

(ii) Para cada $\psi\in\mathcal{B}_\mu$, $T_n\#\psi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $\mathcal{H}_\mu$.

(iii) A cada $s\in\mathbb{N}$ le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones continuas acotadas $f_{n,k}$ $(n\in\mathbb{N},\ 0\le k\le r)$ sobre I tales que

$$T_n = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k f_{n,k} \qquad (n\in\mathbb{N}), \tag{18.11}$$

con

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in I}\ (1+x^2)^s|f_{n,k}(x)| = 0 \qquad (0\le k\le r). \tag{18.12}$$

(iv) A cada $s\in\mathbb{N}$ le corresponden $r\in\mathbb{N}$ y funciones continuas acotadas $f_{n,k}$ $(n\in\mathbb{N},\ 0\le k\le r)$ sobre I, verificando (18.11) y

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty(1+x^2)^s|f_{n,k}(x)|\,dx = 0 \qquad (0\le k\le r). \tag{18.13}$$

Demostración. Es claro que *(i)* implica *(ii)*. Para demostrar que *(ii)* implica *(iii)*, sea $s\in\mathbb{N}$. Por *(ii)*, para cada $\phi\in\mathcal{B}_\mu$ tenemos

$$\sup_{x\in I} |\langle (1+x^2)^s \langle T_n,\tau_x\phi\rangle| = \sup_{x\in I} |(1+x^2)^s\langle \tau_x T_n,\phi\rangle| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por consiguiente, la red $\{(1+x^2)^s\tau_x T_n:(x,n)\in I\times\mathbb{N}\}$, dirigida por la relación $(x,i)\geq(y,j)$ si, y sólo si, $i\geq j$, converge débilmente* a 0 en $\mathcal{B}'_\mu$. Sea $a>0$. En virtud de la Proposición 1.9.6, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(1+x^2)^s\tau_x T_n$ $(x\in I,\ n\in\mathbb{N})$ pueden ser extendidas a $\mathcal{W}^k_{\mu,a}$ (extensiones que serán denotadas de igual modo), y la red $\{(1+x^2)^s\tau_x T_n:(x,n)\in I\times\mathbb{N}\}$ converge débilmente* a cero en el dual $(\mathcal{W}^k_{\mu,a})'$. Por otra parte, según el Teorema 14.1, si $0<b<a$ y $m,r\in\mathbb{N}$ son tales que $m>k+\mu+2$ y $r>2m+\mu+1$, existen $\psi_0\in\mathcal{W}^m_{\mu,b}$, $\varphi_0\in\mathcal{B}_{\mu,b}$ satisfaciendo

$$T_n = (1-S_\mu)^r T_n\#\psi_0 - T_n\#\varphi_0 \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{18.14}$$

Procediendo como en la demostración de la Proposición 15.3 encontramos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I} |(1+x^2)^s(T_n\#\psi_0)(x)| &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I} |(1+x^2)^s\langle\tau_x T_n,\psi_0\rangle| = 0,\\
\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I} |(1+x^2)^s(T_n\#\varphi_0)(x)| &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I} |(1+x^2)^s\langle\tau_x T_n,\varphi_0\rangle| = 0.
\end{aligned} \tag{18.15}$$

Ahora *(iii)* sigue de (18.14) y (18.15).

Es claro que *(iii)* implica *(iv)*. Finalmente, supongamos que se cumple *(iv)*. Entonces $T_n\in\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ $(n\in\mathbb{N})$, por el Teorema 10.2. Dado $k\in\mathbb{N}$, sea $s\in\mathbb{N}$ tal que $2s>2k+\mu+\frac{1}{2}$. Existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$ de modo que

$$|(1+x^2)^{-r}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T_n)(x)| \leq C\sum_{j=0}^{r}\int_0^\infty (1+y^2)^s|f_{n,j}(y)|\,dy \qquad (x\in I,\ n\in\mathbb{N}).$$

Además, para $\phi\in\mathcal{H}_\mu$,

$$\lim_{n\to\infty} \eta^{\mu}_{k,\phi}(x^{-\mu-1/2}\mathfrak{h}'_\mu T_n) \leq$$

$$\leq \sup_{x\in I} |(1+x^2)^r x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |(1+x^2)^{-r}(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T_n)(x)|$$

$$\leq C\gamma^{\mu}_{r,0}(\phi) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{r}\int_0^\infty (1+y^2)^s |f_{n,j}(y)|dy = 0.$$

Esto significa que $\{x^{-\mu-1/2}\mathfrak{h}'_\mu T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathcal{O}$, completando la prueba.□

CAPITULO 3

MULTIPLICADORES Y OPERADORES DE CONVOLUCION SOBRE ESPACIOS DE HILBERT TRANSFORMABLES HANKEL

I. ESPACIOS DE HILBERT DE DISTRIBUCIONES TRANSFORMABLES HANKEL.

1. Introducción.

En lo que sigue supondremos que μ es un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$ y C denotará una constante positiva oportuna (no necesariamente la misma en cada comparecencia).

Motivados por trabajos de KUCERA **[1969a]**, **[1969b]**, PICARD **[1990]** y GONZALEZ **[1991]**, en la Sección 2 introducimos una sucesión $\{\mathcal{H}_\mu^r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de espacios de Hilbert tales que la transformación integral de Hankel $\mathfrak{H}_\mu$ es un automorfismo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\mu^r$ ($r\in\mathbb{N}$). La transformación de Hankel generalizada $\mathfrak{H}'_\mu$ es entonces un automorfismo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\mu^{-r}$, dual de $\mathcal{H}_\mu^r$ ($r\in\mathbb{N}$). Establecemos algunas propiedades topológicas de $\mathcal{H}_\mu^r$ ($r\in\mathbb{Z}$). Por medio de la convolución de Hankel, investigada en el Capítulo 2, demostramos que el espacio $\mathcal{B}_\mu$ es denso en $\mathcal{H}_\mu^r$ ($r\in\mathbb{Z}$); probamos también que $\mathcal{H}_\mu=\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_\mu^r$ y $\mathcal{H}'_\mu=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_\mu^{-r}$, tanto algebraica como topológicamente.

2. El espacio $\mathcal{H}_\mu^r$ y la transformación de Hankel.

Para cada $r\in\mathbb{N}$ definimos $\mathcal{H}_\mu^r$ como el espacio de las funciones $\phi\in L^2(I)$ tales que las distribuciones $T_{\mu,k}\phi$ ($0\le k\le r$) son regulares y satisfacen

$$\|\phi\|_{\mu,r} = \left\{ \sum_{m+k=0}^{r} \int_0^\infty |x^m T_{\mu,k}\phi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty,$$

donde $T_{\mu,k}$ denota el operador $N_{\mu+k-1}\ldots N_\mu$ ($k\in\mathbb{N}$), con $N_\mu=x^{\mu+1/2}Dx^{-\mu-1/2}$. Es claro que la norma $\|\bullet\|_{\mu,r}$ considerada sobre $\mathcal{H}_\mu^r$ proviene del producto escalar

$$[\phi,\psi]_{\mu,r} = \sum_{m+k=0}^{r} \int_0^\infty x^{2m} T_{\mu,k}\phi(x) T_{\mu,k}\bar{\psi}(x)dx \qquad (\phi,\psi\in\mathcal{H}_\mu^r).$$

Dotamos a $\mathcal{H}_\mu^r$ de la topología inducida por $\|\bullet\|_{\mu,r}$.

Proposición 2.1. $\mathcal{H}_{\mu}^{r}$ ($r\in\mathbb{N}$) es un espacio de Hilbert.

Demostración. Fijemos $r\in\mathbb{N}$. Debemos probar que el espacio $\mathcal{H}_{\mu}^{r}$ es completo. Sea $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_{\mu}^{r}$. Para cada $m,k\in\mathbb{N}$, $0\le m+k\le r$, la sucesión $\{x^m T_{\mu,k}\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(I)$, y por lo tanto converge en media cuadrática a cierta $\phi_{m,k}\in L^2(I)$.

Dado $a>0$, la desigualdad de Hölder implica

$$\int_0^a |x^m\phi_{0,k}(x)-\phi_{m,k}(x)|\,dx \le \left\{\int_0^a x^{2m}dx\right\}^{1/2}\left\{\int_0^a |\phi_{0,k}(x)-T_{\mu,k}\phi_j(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$
$$+\ a^{1/2}\left\{\int_0^a |x^m T_{\mu,k}\phi_j(x)-\phi_{m,k}(x)|^2dx\right\}^{1/2}. \tag{2.1}$$

Haciendo $j\to\infty$ en (2.1) resulta

$$\int_0^a |x^m\phi_{0,k}(x)-\phi_{m,k}(x)|\,dx = 0 \qquad (a>0),$$

de modo que $x^m\phi_{0,k}(x)=\phi_{m,k}(x)$ para casi todo $x\in I$.

Por otra parte, si $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le r$, y $\varphi\in\mathcal{D}(I)$, entonces

$$(\phi_{0,k},\varphi) = \lim_{j\to\infty}(T_{\mu,k}\phi_j,\varphi) = \lim_{j\to\infty}(\phi_j,T'_{\mu,k}\varphi) = (\phi_{0,0},T'_{\mu,k}\varphi) = (T_{\mu,k}\phi_{0,0},\varphi),$$

donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto escalar de $L^2(I)$ y $T'_{\mu,k}$ representa el operador adjunto de $T_{\mu,k}$. Así, $\phi_{0,k}=T_{\mu,k}\phi_{0,0}$ en sentido distribucional. Concluimos que $\phi_{0,0}\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}$ y que $\lim_{j\to\infty}\|\phi_{0,0}-\phi_j\|_{\mu,r}=0$, completando la prueba.□

Teorema 2.2. La transformación de Hankel $\mathfrak{h}_{\mu}$ es un automorfismo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mu}^{r}$ ($r\in\mathbb{N}$).

Demostración. Si r=0 entonces $\mathcal{H}_\mu^r=L^2(I)$, y en tal caso el Teorema 2.2 es conocido (BOCHNER [1948, p. 180]). Supongamos, por tanto, que r≥1. Como $L^2(I)\subset\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathfrak{H}_\mu\phi=\mathfrak{H}'_\mu\phi$ $(\phi\in\mathcal{H}_\mu^r)$, de acuerdo con ZEMANIAN [1968, Theorem 5.5-2], para $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$ y $m,k\in\mathbb{N}$ con $0\le m+k\le r$, tenemos

$$\begin{aligned}(-1)^m y^m T_{\mu,k}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y) &= (-1)^m y^m T_{\mu,k}(\mathfrak{H}'_\mu\phi)(y)\\ &= (-1)^k\mathfrak{H}'_{\mu+m+k}(x^kT_{\mu,m}\phi(x))(y) \qquad (2.2)\\ &= (-1)^k\mathfrak{H}_{\mu+m+k}(x^kT_{\mu,m}\phi(x))(y) \qquad (y\in I)\end{aligned}$$

en el sentido de igualdad en $\mathcal{H}'_\mu$. Al ser $\mathfrak{H}_\mu$ una isometría de $L^2(I)$, sigue de (2.2) que

$$\|\mathfrak{H}_\mu\phi\|_{\mu,r} = \|\phi\|_{\mu,r} \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu^r).$$

Además, valiéndonos de la identidad de Parseval para la transformación de Hankel (BOCHNER [1948, p. 180]) y de (2.2), podemos escribir

$$\begin{aligned}[\mathfrak{H}_\mu\phi,\mathfrak{H}_\mu\psi]_{\mu,r} &= \sum_{m+k=0}^{r}\int_0^\infty y^{2m}T_{\mu,k}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)T_{\mu,k}(\mathfrak{H}_\mu\overline{\psi})(y)dy\\ &= \sum_{m+k=0}^{r}\int_0^\infty \mathfrak{H}_{\mu+m+k}(x^kT_{\mu,m}\phi(x))(y)\mathfrak{H}_{\mu+m+k}(x^kT_{\mu,m}\overline{\psi}(x))(y)dy\\ &= \sum_{m+k=0}^{r}\int_0^\infty x^{2k}T_{\mu,m}\phi(x)T_{\mu,m}\overline{\psi}(x)dx\\ &= [\phi,\psi]_{\mu,r} \qquad (\phi,\psi\in\mathcal{H}_\mu^r).\end{aligned}$$

□

Denotamos por $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ el espacio dual de $\mathcal{H}_\mu^r$; la norma de $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ será representada por $\|\bullet\|_{\mu,-r}$. Es bien sabido que esta norma viene generada por el producto interior $[\bullet,\bullet]_{\mu,-r}$, definido sobre $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ como sigue. Si $S,T\in\mathcal{H}_\mu^{-r}$ y si $\phi_S,\phi_T\in\mathcal{H}_\mu^r$ son sus respectivas representaciones de Fréchet-Riesz, entonces

$$[S,T]_{\mu,-r} = [\phi_T,\phi_S]_{\mu,r}.$$

Otra consecuencia directa del teorema de representación de Fréchet-Riesz es la siguiente.

Proposición 2.3. Sea $r\in\mathbb{N}$. Un funcional lineal T está en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ si, y sólo si, existen $f_{m,k}\in L^2(I)$ $(m,k\in\mathbb{N},\ 0\le m+k\le r)$ tales que

$$T = \sum_{m+k=0}^{r} T'_{\mu,k} x^m f_{m,k}.$$

La sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a cero en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ si, y sólo si, existen $f_{n,m,k}\in L^2(I)$ $(n,m,k\in\mathbb{N},\ 0\le m+k\le r)$ tales que

$$T_n = \sum_{m+k=0}^{r} T'_{\mu,k} x^m f_{n,m,k} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

con

$$\max_{0\le m+k\le r} \|f_{n,m,k}\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Aquí $T'_{\mu,k}$ denota, como antes, el operador adjunto de $T_{\mu,k}$ $(k\in\mathbb{N})$.

Para $r\in\mathbb{N}$, se define la transformación de Hankel generalizada $\mathfrak{h}'_\mu$ sobre $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ como la adjunta de $\mathfrak{h}_\mu$, es decir,

$$\langle \mathfrak{h}'_\mu T,\phi\rangle = \langle T,\mathfrak{h}_\mu\phi\rangle \qquad (T\in\mathcal{H}_\mu^{-r},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu^r).$$

Del Teorema 2.2 se infiere inmediatamente que $\mathfrak{H}'_\mu$ es una isometría de $\mathcal{H}_\mu^{-r}$, con

$$[\mathfrak{H}'_\mu T,\mathfrak{H}'_\mu S]_{\mu,-r} = [T,S]_{\mu,-r} \qquad (S,T\in\mathcal{H}_\mu^{-r}).$$

Nótese que si $\phi\in L^2(I)\subset\mathcal{H}_\mu^{-r}$ entonces $\mathfrak{H}'_\mu\phi=\mathfrak{H}_\mu\phi$, de modo que $\mathfrak{H}'_\mu$ puede ser contemplada como una extensión de la transformación $\mathfrak{H}_\mu$ clásica. En efecto, cuando $\phi\in L^2(I)$ y $\psi\in\mathcal{H}_\mu^r$, la identidad de Parseval para $\mathfrak{H}_\mu$ permite escribir

$$\langle\mathfrak{H}'_\mu\phi,\psi\rangle = \langle\phi,\mathfrak{H}_\mu\psi\rangle = \int_0^\infty \phi(x)(\mathfrak{H}_\mu\psi)(x)dx = \int_0^\infty (\mathfrak{H}_\mu\phi)(x)\psi(x)dx = \langle\mathfrak{H}_\mu\phi,\psi\rangle.$$

El siguiente resultado es de comprobación inmediata.

Proposición 2.4. Para cada $p,q\in\mathbb{Z}$, $p\geq q$, se cumple

$$\|\phi\|_{\mu,p} \geq \|\phi\|_{\mu,q} \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu^p,\ q\geq 0),$$

$$\|T\|_{\mu,p} \geq \|T\|_{\mu,q} \qquad (T\in\mathcal{H}_\mu^p,\ p<0).$$

Luego

$$\ldots\supset \mathcal{H}_\mu^{-2} \supset \mathcal{H}_\mu^{-1} \supset \mathcal{H}_\mu^{0} = L^2(I) \supset \mathcal{H}_\mu^{1} \supset \mathcal{H}_\mu^{2} \supset\ldots,$$

y cada una de estas inclusiones es continua.

Claramente, el espacio de Zemanian $\mathcal{B}_\mu$ (véase la Parte II del Capítulo 1) está contenido en $\mathcal{H}_\mu^r$ $(r\in\mathbb{Z})$. A continuación estableceremos que $\mathcal{B}_\mu$ es denso en $\mathcal{H}_\mu^r$ $(r\in\mathbb{Z})$, valiéndonos de los siete lemas auxiliares siguientes.

Lema 2.5. Sea $\beta_1\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $0\leq\beta_1(x)\leq 1$ $(x\in\mathbb{R})$, $\beta_1(x)=1$ $(|x|\leq 1)$, y $\beta_1(x)=0$ $(|x|\geq 2)$. Para $\phi\in L^2(I)$ definimos $\phi_{m,n}(x)=\phi(x)(x^{-1}D)^m\beta_n(x)$ $(m,n\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ x\in I)$, donde $\beta_n(x)=\beta_1(x/n)$ $(x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$. Entonces $\phi_{m,n}\in L^2(I)$ $(m,n\in\mathbb{N},\ n\geq 1)$, con

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{0,n} = \phi$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{m,n} = 0 \qquad (m\in\mathbb{N},\ m\geq 1)$$

en $L^2(I)$.

Demostración. En primer lugar,

$$\|\phi_{0,n}-\phi\|_2^2 = \int_0^\infty |\phi_{0,n}(x)-\phi(x)|^2dx = \int_0^\infty (1-\beta_n(x))^2|\phi(x)|^2dx \leq \int_n^\infty |\phi(x)|^2dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Supongamos ahora que $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$. Existen $a_{m,i}\in\mathbb{R}$ $(0\leq i\leq m-1)$ tales que

$$(x^{-1}D)^m\beta_n(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{m,i}x^{-m-i}D^{m-i}\beta_n(x) \qquad (n\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ x\in I).$$

Además

$$|D^{m-i}\beta_n(x)| \leq \begin{cases} 0, & \text{si } |x|\leq n \text{ ó } |x|\geq 2n \\ Cn^{-m+i}, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (0\leq i\leq m-1),$$

donde $C>0$ no depende de n. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|\phi(x)(x^{-1}D)^m\beta_n(x)\|_2 &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |a_{m,i}|\,\|\phi(x)x^{-m-i}D^{m-i}\beta_n(x)\|_2 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} |a_{m,i}| \left\{ \int_n^{2n} |x^{-m-i}D^{m-i}\beta_n(x)|^2|\phi(x)|^2dx \right\}^{1/2} \\ &\leq Cn^{-2m}\sum_{i=0}^{m-1} |a_{m,i}| \left\{ \int_n^{2n} |\phi(x)|^2dx \right\}^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Lema 2.6. Sea $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión definida en el Lema 2.5. Si $r\in\mathbb{N}$ y si $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n-\phi\|_{\mu,r}=0$, donde $\phi_n=\beta_n\phi$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 1)$.

Demostración. Basta observar que, en virtud del Lema 2.5, para cada $m,k\in\mathbb{N}$ con $0\le m+k\le r$ se tiene

$$x^m T_{\mu,k}\phi_n(x) = x^{m+k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k(x^{-\mu-1/2}\beta_n(x)\phi(x))$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}((x^{-1}D)^{k-j}\beta_n(x))x^{m+k-j}T_{\mu,j}\phi(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^m T_{\mu,k}\phi(x)$$

en $L^2(I)$.□

Las identidades aproximadas para la convolución de Hankel han sido estudiadas en las Secciones 2.2, 2.5 y 2.13.

Lema 2.7. Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una identidad aproximada en $\mathcal{B}_\mu$ y si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi\#k_n-\phi\|_2 = 0.$$

Demostración. Se verifica que $\lim_{n\to\infty} \phi\#k_n=\phi$ en la topología de $\mathcal{H}_\mu$ (Proposición 2.13.1). Por consiguiente, si $r\in\mathbb{N}$, $r>\mu+1$, existe $C>0$ tal que

$$\|\phi\#k_n-\phi\|_2 = \left\{ \int_0^\infty \left((1+x)^r x^{-\mu-1/2}|\phi\#k_n(x)-\phi(x)|\right)^2 \frac{x^{2\mu+1}}{(1+x)^{2r}}\,dx \right\}^{1/2}$$

$$\le C \sup_{x\in I} |(1+x)^r x^{-\mu-1/2}(\phi\#k_n(x)-\phi(x))| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Lema 2.8. Si $\phi\in L^2(I)$ y si $x^{\mu+1/2}\psi(x)\in L^1(I)$ entonces la función $\phi\#\psi$ (Definición 2.2.1) está en $L^2(I)$, con

$$\|\phi\#\psi\|_2 \le c_\mu^{-1}\,\|\phi\|_2\|x^{\mu+1/2}\psi(x)\|_1.$$

Demostración. Sigue de HIRSCHMAN **[1960/61,** Theorem 2.b**]** sin más que efectuar un oportuno cambio de variable.□

Lema 2.9. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una identidad aproximada en $\mathcal{B}_\mu$. Para $\phi\in L^2(I)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi\#k_n-\phi\|_2 = 0.$$

Demostración. El espacio $\mathcal{H}_\mu$ es denso en $L^2(I)$, porque contiene al espacio $\mathcal{D}(I)$ de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto en I. Así, dado $\varepsilon>0$ existe $\varphi\in\mathcal{H}_\mu$ tal que $\|\phi-\varphi\|_2<\varepsilon/3$. Recurriendo a los Lemas 2.7 y 2.8 podemos escribir

$$\begin{aligned}\|\phi\#k_n-\phi\|_2 &\le \|(\phi-\varphi)\#k_n\|_2 + \|\varphi\#k_n-\varphi\|_2 + \|\phi-\varphi\|_2\\ &\le 2\|\phi-\varphi\|_2 + \|\varphi\#k_n-\varphi\|_2 < \varepsilon,\end{aligned}$$

si $n\in\mathbb{N}$ es suficientemente grande.□

Lema 2.10. Sean $\phi\in L^2(I)$, $\varphi\in\mathcal{B}_\mu$. Entonces

$$\mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)(t) = t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t) \qquad (t\in I).$$

Demostración. Fijemos $\varphi\in\mathcal{B}_\mu$. En virtud del Lema 2.8 y de BOCHNER **[1948, Satz 55]**, el operador $T_\varphi\phi=\mathfrak{H}_\mu(\phi\#\varphi)$ $(\phi\in L^2(I))$ es acotado de $L^2(I)$ en sí mismo. Además, $L_\varphi\phi=t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t)$ $(\phi\in L^2(I))$ define un operador acotado de $L^2(I)$ en sí mismo, porque, por el Teorema 2.2,

$$\|t^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(t)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(t)\|_2 \le \sup_{t\in I} \left|\int_0^\infty (xt)^{-\mu}J_\mu(xt)\varphi(x)x^{\mu+1/2}dx\right| \|\mathfrak{H}_\mu\phi\|_2 = C\|\phi\|_2$$

para algún $C>0$ y todo $\phi\in L^2(I)$. Como $T_\varphi=L_\varphi$ sobre $\mathcal{D}(I)$ (HIRSCHMAN **[1960/61, Theorem 2.d]**), que es denso en $L^2(I)$, necesariamente $T_\varphi=L_\varphi$ sobre $L^2(I)$. Esto completa la prueba.□

Lema 2.11. Sean $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una identidad aproximada en $\mathcal{B}_\mu$, $r\in\mathbb{N}$, $a>0$, y $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$ tales que $\phi(x)=0$ $(x\ge a)$. Entonces $\phi\#k_n\in\mathcal{B}_\mu\subset\mathcal{H}_\mu^r$ $(n\in\mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} \|\phi\#k_n-\phi\|_{\mu,r}=0$.

Demostración. Sea $\phi_n=\phi\#k_n$ $(n\in\mathbb{N})$, y fijemos $n\in\mathbb{N}$. Probaremos que $\phi_n\in\mathcal{B}_\mu$ estableciendo las dos propiedades siguientes de su transformada de Hankel (véase ZEMANIAN **[1966b]**):

(i) $\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi_n)(\eta)$ es una función entera par; y

(ii) $\sup\limits_{\eta\in\mathbb{C}} |e^{-(a+1)|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi_n)(\eta)| < \infty$ $(k\in\mathbb{N})$.

En primer lugar,

$$\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta) = \int_0^a (\eta x)^{-\mu}J_\mu(\eta x)\phi(x)x^{\mu+1/2}dx \qquad (\eta\in\mathbb{C})$$

es una función entera par, porque $\phi\in L^2(I)$ y $z^{-\mu}J_\mu(z)$ $(z\in\mathbb{C})$ es par y entera. Además, $\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)$ es una función entera par (ZEMANIAN **[1966b**, Theorem 1**]**), así que

$$\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi_n)(\eta) = (\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta))(\eta^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)) \qquad (\eta\in\mathbb{C})$$

también lo es. Esto demuestra *(i)*. Por otra parte, para cada $\eta\in\mathbb{C}$, cada $k\in\mathbb{N}$, y alguna constante $C>0$, se cumple

$$\begin{aligned}
&|e^{-(a+1)|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi_n)(\eta)| \le \\
&\quad\le |e^{-(a+1)|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-2\mu-1}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(\eta)(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)| \\
&\quad\le |e^{-|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)| \int_0^a |e^{-a|\mathrm{Im}\eta|}(\eta x)^{-\mu}J_\mu(\eta x)||x^{\mu+1/2}\phi(x)|dx \\
&\quad\le C\left\{\int_0^a |\phi(x)|^2dx\right\}^{1/2} \sup_{\eta\in\mathbb{C}} |e^{-|\mathrm{Im}\eta|}\eta^{2k-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(\eta)|,
\end{aligned}$$

probando *(ii)*.

Ahora, para $m,k\in\mathbb{N}$, con $0\leq m+k\leq r$, tenemos

$$\|x^m T_{\mu,k}(\phi_n(x)-\phi(x))\|_2 = \|\mathfrak{H}_{\mu+m+k}(x^m T_{\mu,k}(\phi_n(x)-\phi(x)))\|_2$$

$$= \|y^k T_{\mu,m}((\mathfrak{H}_\mu\phi_n)(y)-(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y))\|_2$$

$$= \|y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^m((y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y))\|_2$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\|y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^{m-j}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)(y^{-1}D)^j y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2$$

$$= \|(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^m y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2 +$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\|y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^{m-j}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)(y^{-1}D)^j y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2.$$

El primer término del segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a cero cuando $n\to\infty$. En efecto, los Lemas 2.9 y 2.10 permiten escribir

$$\|(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^m y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2 =$$

$$= \|(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)y^k T_{\mu,m}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2$$

$$= \|(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)(\mathfrak{H}_\mu\varphi)(y)\|_2 = \|\mathfrak{H}_\mu(\varphi\# k_n-\varphi)\|_2 = \|\varphi\# k_n-\varphi\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donde $\varphi=\mathfrak{H}_\mu(y^k T_{\mu,m}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y))$.

Para el segundo término del segundo miembro de la desigualdad anterior encontramos que

$$\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\|y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^{m-j}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)(y^{-1}D)^j y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\sup_{y\in I}|(y^{-1}D)^{m-j}(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu k_n)(y)-1)|\,\|y^{m+k+\mu+1/2}(y^{-1}D)^j y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}n^{-2(m-j)}\|y^{m+k-j}T_{\mu,j}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Consecuentemente,

$$\|\phi_n-\phi\|_{\mu,r} = \left\{\sum_{m+k=0}^{r}\|x^m T_{\mu,k}(\phi_n(x)-\phi(x))\|_2^2\right\}^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Quedamos ya en disposición de probar:

Proposición 2.12. $\mathcal{B}_\mu$ es un subespacio denso de $\mathcal{H}^r_\mu$ ($r\in\mathbb{Z}$).

Demostración. Sean $r\in\mathbb{N}$, $\phi\in\mathcal{H}^r_\mu$, y $\varepsilon>0$. Según el Lema 2.6, existen $a>0$ y $\varphi\in\mathcal{H}^r_\mu$ tales que $\varphi(x)=0$ $(x\geq a)$ y $\|\phi-\varphi\|_{\mu,r}<\varepsilon$. Además, el Lema 2.11 asegura que $\|\varphi-\psi\|_{\mu,r}<\varepsilon$ para algún $\psi\in\mathcal{B}_\mu$. Luego, $\mathcal{B}_\mu$ es denso en $\mathcal{H}^r_\mu$. De este hecho y del teorema de representación de Fréchet-Riesz se concluye que $\mathcal{B}_\mu$ también es denso en $\mathcal{H}^{-r}_\mu$.$\square$

Corolario 2.13. $\mathcal{H}^p_\mu$ es denso en $\mathcal{H}^q_\mu$ ($p,q\in\mathbb{Z}$, $p\geq q$).

Demostración. Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.4 y 2.12.$\square$

El resultado que sigue será útil a la hora de determinar las relaciones entre los espacios $\mathcal{H}^r_\mu$ ($r\in\mathbb{Z}$), $\mathcal{H}_\mu$, y $\mathcal{H}'_\mu$.

Lema 2.14. Sea $r\in\mathbb{N}$. Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu^{r+1}$ entonces $\phi\in C^r(I)$, y para cada $i,j\in\mathbb{N}$, con $0\le i+j\le r$, existe $C>0$ tal que

$$\sup_{x\in I}\,(1+x^2)^{i/2}|T_{\mu,j}\phi(x)| \le C\|\phi\|_{\mu,r+1}.$$

Demostración. Fijemos $r\in\mathbb{N}$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu^{r+1}$, y $0\le j\le r$. La desigualdad de Hölder y el Teorema 2.2 establecen que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |y^j(\mathfrak{h}_\mu\phi)(y)|dy &= \int_0^\infty (1+y^2)^{(1-1)/2}|y^j(\mathfrak{h}_\mu\phi)(y)|dy\\ &\le \left\{\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}\right\}^{1/2}\left\{\int_0^\infty (1+y^2)|y^j(\mathfrak{h}_\mu\phi)(y)|^2dy\right\}^{1/2}\\ &\le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\|\mathfrak{h}_\mu\phi\|_{\mu,r+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\|\phi\|_{\mu,r+1}.\end{aligned}$$

Luego, $y^j(\mathfrak{h}_\mu\phi)(y)\in L^1(I)$.

En virtud de la fórmula de inversión para la transformación de Hankel (ZEMANIAN [1968, Theorem 5.1-1]), y aplicando propiedades bien conocidas de la función J_μ de Bessel (ZEMANIAN [1968, p. 129]), se obtiene

$$x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^jx^{-\mu-1/2}\phi(x) = (-1)^j\int_0^\infty y^j(\mathfrak{h}_\mu\phi)(y)(xy)^{1/2}J_{\mu+j}(xy)dy. \tag{2.3}$$

La derivación bajo el signo integral es lícita porque $y^j(\mathfrak{h}_\mu\phi)(y)\in L^1(I)$ y $z^{1/2}J_{\mu+j}(z)$ $(z\in I)$ está acotada. Que $\phi\in C^r(I)$ resulta de (2.3) mediante un cálculo directo.

Finalmente, para $i,j\in\mathbb{N}$, con $0\le i+j\le r$, y $x\in I$, de acuerdo con el Lema 5.4-1 en ZEMANIAN [1968] y con el Teorema 2.2, se cumple

$$\begin{aligned}|x^iT_{\mu,j}\phi(x)| &= |\mathfrak{h}_{\mu+i+j}\mathfrak{h}_{\mu+i+j}(x^iT_{\mu,j}\phi(x))|\\ &\le \int_0^\infty |\mathfrak{h}_{\mu+i+j}(x^iT_{\mu,j}\phi(x))(t)||(xt)^{1/2}J_{\mu+i+j}(xt)|dt\\ &\le C\int_0^\infty |t^jT_{\mu,i}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)|dt\\ &\le C\left\{\int_0^\infty |(1+t)t^jT_{\mu,i}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(t)|^2dt\right\}^{1/2}\\ &\le C\|\mathfrak{h}_\mu\phi\|_{\mu,r+1} = C\|\phi\|_{\mu,r+1}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\sup_{x\in I} (1+x^2)^{i/2}|T_{\mu,j}\phi(x)| \le C\|\phi\|_{\mu,r+1}. \qquad \square$$

Proposición 2.15. Se verifica:

$$\mathcal{H}_\mu = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\mu^r, \qquad \mathcal{H}'_\mu = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\mu^{-r}.$$

La topología de $\mathcal{H}_\mu$ es la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{H}_\mu \hookrightarrow \mathcal{H}_\mu^r\}_{r\in\mathbb{N}}$, y la topología fuerte de $\mathcal{H}'_\mu$ es la topología final localmente convexa asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{H}_\mu^{-r} \hookrightarrow \mathcal{H}'_\mu\}_{r\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Que $\mathcal{H}_\mu \supset \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\mu^r$ es consecuencia inmediata del Lema 2.14. Inversamente, si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y $r\in\mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{\mu,r} &= \left\{ \sum_{m+k=0}^{r} \int_0^\infty |x^m T_{\mu,k}\phi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \\
&\le \left\{ \sum_{m+k=0}^{r} \sup_{x\in I} |x^m(1+x)T_{\mu,k}\phi(x)|^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} \right\}^{1/2} \\
&\le C \sum_{m+k=0}^{r} \left\{ \sup_{x\in I} |x^m T_{\mu,k}\phi(x)| + \sup_{x\in I} |x^{m+1} T_{\mu,k}\phi(x)| \right\}
\end{aligned}$$

para alguna $C>0$, de donde $\mathcal{H}_\mu \subset \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\mu^r$. Es claro ahora que la topología de $\mathcal{H}_\mu$ coincide con la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{H}_\mu \hookrightarrow \mathcal{H}_\mu^r\}_{r\in\mathbb{N}}$.

Por otra parte, $T\in\mathcal{H}'_\mu$ si, y sólo si, existen $r\in\mathbb{N}$ y $C>0$ tales que

$$|\langle T,\phi\rangle| \le C \max_{0\le m,k\le r} \sup_{x\in I} |x^m T_{\mu,k}\phi(x)| \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

En virtud del Lema 2.14, esto ocurre si, y sólo si, existen $r\in\mathbb{N}$, $C>0$ satisfaciendo

$$|\langle T,\phi\rangle| \le C\|\phi\|_{\mu,r} \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu);$$

es decir, si, y sólo si, $T\in \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\mu^{-r}$. Concluimos que $\mathcal{H}'_\mu = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\mu^{-r}$.

Sea ahora B un subconjunto acotado de $\mathcal{H}_\mu$. Ya que B está acotado en cada $\mathcal{H}_\mu^r$ ($r\in\mathbb{N}$), se tiene

$$\sup_{\phi\in B} |\langle T,\phi\rangle| \leq C_r \|T\|_{\mu,-r}$$

para todo $T\in\mathcal{H}_\mu^{-r}$, donde $C_r=\sup_{\phi\in B} \|\phi\|_{\mu,r}$ ($r\in\mathbb{N}$). Esto prueba que la topología fuerte de $\mathcal{H}'_\mu$ es menos fina que la topología final localmente convexa asociada a la familia $\{\mathcal{H}_\mu^{-r}\hookrightarrow\mathcal{H}'_\mu\}_{r\in\mathbb{N}}$.

Recíprocamente, como la topología fuerte de $\mathcal{H}'_\mu$ es bornológica (Corolario 1.4.9), podemos completar la prueba estableciendo que todo subconjunto fuertemente acotado de $\mathcal{H}'_\mu$ está acotado respecto de la topología final localmente convexa asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{H}_\mu^{-r}\hookrightarrow\mathcal{H}'_\mu\}_{r\in\mathbb{N}}$ (HORVATH [1966, Proposition 3.7.1]). En efecto, si B es un subconjunto fuertemente acotado de $\mathcal{H}'_\mu$ entonces, puesto que $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio de Fréchet, el teorema de Banach-Steinhaus asegura que B es equicontinuo, y por lo tanto acotado en algún $\mathcal{H}_\mu^{-r}$.□

Proposición 2.16. Supongamos que $\mu>-\frac{1}{2}$. Dado $s\in\mathbb{N}$, existe $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, tal que la inclusión $\mathcal{H}_\mu^r\hookrightarrow\mathcal{H}_\mu^s$ es compacta.

Demostración. Sea $s\in\mathbb{N}$. Debemos encontrar $r\in\mathbb{N}$, $r>s$, de modo que la bola unidad cerrada $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\mu^r)$ de $\mathcal{H}_\mu^r$ sea relativamente compacta en $\mathcal{H}_\mu^s$. Es fácil comprobar que

$$\|\phi\|_{\mu,s} \leq C\rho^\mu_{s+1}(\phi) \qquad (\phi\in\mathcal{S}_\mu^{s+1}), \tag{2.4}$$

donde el espacio $\mathcal{S}_\mu^{s+1}$ se define como en la Sección 1.4. En virtud de la Proposición 1.4.5, existe $i\in\mathbb{N}$, $i>s+1$, tal que la bola unidad cerrada de $\mathcal{S}_\mu^i$ es relativamente compacta en $\mathcal{S}_\mu^{s+1}$, luego (por (2.4)) en $\mathcal{H}_\mu^s$. Pero si $r=2i+1$ entonces $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\mu^r)$ es relativamente compacta en $\mathcal{H}_\mu^s$ (Lema 2.14).□

A continuación estudiamos el comportamiento del operador N_{μ} en el espacio $\mathcal{H}^{r}_{\mu}$ y de su adjunto N'_{μ} en el espacio $\mathcal{H}^{-r}_{\mu}$ ($r\in\mathbb{N}$).

Proposición 2.17. Para cada $r\in\mathbb{N}$, el operador diferencial N_{μ} establece una aplicación lineal y continua de $\mathcal{H}^{r+1}_{\mu}$ en $\mathcal{H}^{r}_{\mu+1}$. Por consiguiente, su adjunto N'_{μ} es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{H}^{-r}_{\mu+1}$ en $\mathcal{H}^{-r-1}_{\mu}$.

Demostración. Basta observar que

$$\|N_{\mu}\phi\|_{\mu+1,r} \le \|\phi\|_{\mu,r+1} \qquad (\phi\in\mathcal{H}^{r+1}_{\mu})$$

para cada $r\in\mathbb{N}$.□

II. MULTIPLICADORES Y OPERADORES DE CONVOLUCION SOBRE ESPACIOS DE HILBERT TRANSFORMABLES HANKEL.

3. Introducción.

De aquí en adelante μ denotará siempre un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$, mientras que C representará una constante estrictamente positiva adecuada (no necesariamente la misma en cada comparecencia).

En la Parte I de este Capítulo hemos considerado una cadena $\{\mathcal{H}_\mu^r\}_{r\in\mathbb{Z}}$ de espacios de Hilbert tales que $\mathfrak{H}_\mu$ (respectivamente, $\mathfrak{H}'_\mu$) es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu^r$ (respectivamente, $\mathcal{H}_\mu^{-r}$) para todo $r\in\mathbb{N}$.

A continuación investigaremos el espacio $\mathcal{O}_{r,s}$ de multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu^r$ en $\mathcal{H}_\mu^s$ (Sección 4) y el espacio $\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$ de operadores de convolución Hankel de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ (Sección 5), con $r,s\in\mathbb{N}$. Nuestro estudio está motivado por una serie de trabajos debidos a KUCERA (**[1969a]**, **[1969b]**, **[1971]**, **[1976]**) y a KUCERA-MCKENNON **[1975]**. Probamos que cada $\mathcal{O}_{r,s}$ $(r,s\in\mathbb{N})$ es un espacio de Banach, al que describimos usando normas L^2. La unión $\mathcal{O}_s=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{r,s}$ resulta ser el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$ $(s\in\mathbb{N})$. Se establece que $\mathcal{O}=\bigcap_{s\in\mathbb{N}}\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{r,s}$ tanto algebraica como topológicamente. Como los espacios $\mathcal{O}_{r,s}$ y $\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$ $(r,s\in\mathbb{N})$ están relacionados mediante la transformación $\mathfrak{H}_\mu$, resulta inmediatamente la igualdad $\mathcal{O}'_{\mu,\#}=\bigcap_{s\in\mathbb{N}}\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$.

4. Multiplicadores en $\mathcal{H}_\mu^r$.

Dados $r,s\in\mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{O}_{r,s}=\mathcal{O}_{r,s}^{\mu}$ el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu^r$ en $\mathcal{H}_\mu^s$, es decir, el espacio vectorial de todas aquellas funciones complejas

$\theta=\theta(x)$ definidas sobre I tales que $\theta\phi\in\mathcal{H}^s_\mu$ cuando $\phi\in\mathcal{H}^r_\mu$. La Proposición 4.1 establece que $\mathcal{O}_{r,s}$ es, en realidad, el espacio de los multiplicadores *continuos* de $\mathcal{H}^r_\mu$ en $\mathcal{H}^s_\mu$.

Proposición 4.1. Sean $r,s\in\mathbb{N}$. Si $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$ entonces la aplicación lineal $\phi\longmapsto\theta\phi$ es continua de $\mathcal{H}^r_\mu$ en $\mathcal{H}^s_\mu$.

Demostración. Haremos uso del teorema del grafo cerrado. Sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}^r_\mu$ tal que existen

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi \quad \text{en } \mathcal{H}^r_\mu, \qquad \lim_{n\to\infty} \theta\phi_n = \psi \quad \text{en } \mathcal{H}^s_\mu.$$

Debemos probar que $\theta\phi=\psi$. Ahora bien, como $\lim_{n\to\infty} \phi_n=\phi$ en $\mathcal{H}^r_\mu$ implica $\lim_{n\to\infty} \phi_n=\phi$ en $L^2(I)$, alguna subsucesión $\{\phi_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{1,n}(x) = \phi(x) \qquad \text{c.t. } x\in I.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} (\theta\phi_{1,n})(x) = (\theta\phi)(x) \qquad \text{c.t. } x\in I.$$

Por otra parte, ya que $\lim_{n\to\infty} \theta\phi_{1,n}=\psi$ en $\mathcal{H}^s_\mu$, necesariamente $\lim_{n\to\infty} \theta\phi_{1,n}=\psi$ en $L^2(I)$, y existe una subsucesión $\{\phi_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{\phi_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo

$$\lim_{n\to\infty} (\theta\phi_{2,n})(x) = \psi(x) \qquad \text{c.t. } x\in I.$$

Concluimos que $(\theta\phi)(x)=\psi(x)$ c.t. $x\in I$.□

Topologizamos $\mathcal{O}_{r,s}$ mediante la norma

$$\|\theta\|_{r,s} = \|\theta\|^{\mu}_{r,s} = \sup_{\|\phi\|_{\mu,r}\leq 1} \|\theta\phi\|_{\mu,s} \qquad (\theta\in\mathcal{O}_{r,s}).$$

Sigue de la Proposición 4.1 que la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{r,s}\times\mathcal{H}^r_\mu &\longrightarrow \mathcal{H}^s_\mu \\ (\theta,\phi) &\longmapsto \theta\phi \end{aligned}$$

es continua. Dualmente, si $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$ y si $T\in\mathcal{H}_\mu^{-s}$, definimos $\theta T\in\mathcal{H}_\mu^{-r}$ mediante la fórmula

$$\langle\theta T,\phi\rangle = \langle T,\theta\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu^r).$$

La continuidad de la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{r,s}\times\mathcal{H}_\mu^{-s} &\longrightarrow \mathcal{H}_\mu^{-r} \\ (\theta,T) &\longmapsto \theta T \end{aligned}$$

es entonces inmediata.

Proposición 4.2. $\mathcal{O}_{r,s}$ es un espacio de Banach ($r,s\in\mathbb{N}$).

Demostración. Fijemos $r,s\in\mathbb{N}$. Sólo necesitamos probar que $\mathcal{O}_{r,s}$ es completo. A tal fin, elijamos una sucesión de Cauchy $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{O}_{r,s}$, y tomemos $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$. Como $\{\theta_n\phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}_\mu^s$ y este espacio es completo, existe $\theta_\phi\in\mathcal{H}_\mu^s$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|\theta_n\phi-\theta_\phi\|_{\mu,s}=0$. En particular, $\{\theta_n\phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a θ_ϕ en $L^2(I)$.

Definamos ahora

$$\phi_k(x) = \omega_k\left(\frac{kx-1}{k^2-1}+\frac{1}{2}\right) \qquad (x\in I,\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2),$$

donde $\omega_k\in\mathcal{D}(I)$ se elige de modo que $\omega_k(x)=1$ $(x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}])$ y $\omega_k(x)=0$ $(x<a_k\in]\frac{1}{1-k^2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)$ para $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Resulta claro que $\phi_k\in\mathcal{H}_\mu^r$, con $\phi_k(x)=1$ $(x\in[\frac{1}{k},k],\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2)$. Mediante un procedimiento diagonal en el que intervienen las funciones ϕ_k, el cual describiremos a continuación, encontramos que alguna subsucesión de $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge c.t.p. en I.

Pongamos $\theta_{1,n}(x)=\theta_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$. Existe una subsucesión $\{\theta_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{\theta_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(\theta_{2,n}\phi_2)(x)=\theta_{\phi_2}(x)$ c.t. $x\in I$. Luego, $\lim_{n\to\infty}\theta_{2,n}(x)=\theta_{\phi_2}(x)$ para $x\in B_2$, donde $B_2\subset[\frac{1}{2},2]$ y $|[\frac{1}{2},2]\setminus B_2|=0$. Elijamos ahora una subsucesión $\{\theta_{3,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{\theta_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(\theta_{3,n}\phi_3)(x)=\theta_{\phi_3}(x)$ c.t. $x\in I$ y

$\lim_{n\to\infty} \theta_{3,n}(x)=\theta_{\phi_3}(x)$ c.t. $x\in[\frac{1}{3},3]$. Claramente, $\theta_{\phi_3}(x)=\theta_{\phi_2}(x)$ $(x\in B_2)$. Denotamos por B_3 el subconjunto de $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}[\cup]2,3]$ donde $\{\theta_{3,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Iterando el proceso construimos una sucesión $\{B_j\}_{j\geq 2}$ de conjuntos tales que $B_j\subset I_j=[\frac{1}{j},\frac{1}{j-1}[\cup]j-1,j]$, con $|I_j\setminus B_j|=0$ $(j\in\mathbb{N},\ j\geq 2)$; y sucesiones $\{\theta_{j,n}\}_{j\geq 1,n\in\mathbb{N}}$ de funciones que satisfacen:

(i) $\theta_{1,n}=\theta_n$ $(n\in\mathbb{N})$,

(ii) $\{\theta_{j+1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{\theta_{j,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(j\in\mathbb{N},\ j\geq 1)$; y

(iii) $\lim_{n\to\infty} \theta_{j,n}(x)=\theta_{\phi_j}(x)$ $(x\in B_j,\ j\in\mathbb{N},\ j\geq 2)$.

Introduzcamos ahora la función $\theta(x)=\theta_{\phi_j}(x)$ $(x\in B_j,\ j\in\mathbb{N},\ j\geq 2)$. Como $|I\setminus B|=0$, donde $B=\bigcup_{j=2}^{\infty} B_j$, $\theta(x)$ está definida c.t. $x\in I$. La sucesión diagonal $\{\theta_{j,j}\}_{j\geq 1}$ converge a $\theta(x)$ c.t. $x\in I$. En efecto, si $x\in B$ entonces existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $x\in B_{j_0}$ implica $\lim_{n\to\infty} \theta_{j_0,n}(x)=\theta(x)$. Luego, dado $\varepsilon>0$ podemos encontrar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|\theta_{j_0,n}(x)-\theta(x)|<\varepsilon$ $(n\geq n_0)$. Se infiere de *(ii)* que $|\theta_{j,j}(x)-\theta(x)|<\varepsilon$ $(j\geq\max\{j_0,n_0\})$. En otras palabras, $\{\theta_{j,j}\}_{j\geq 1}$ es la subsucesión de $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente c.t.p. cuya existencia habíamos afirmado.

Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$ entonces $\lim_{j\to\infty} \theta_{n_j}\phi=\theta_\phi$ en $L^2(I)$. Sigue que $\theta_\phi(x)=(\theta\phi)(x)$ c.t. $x\in I$, así que $\theta\phi\in\mathcal{H}_\mu^s$, de donde $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$. Por último, supongamos que $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$ es tal que $\|\phi\|_{\mu,r}\leq 1$. Podemos escribir:

$$\|\theta_n\phi-\theta\phi\|_{\mu,s} \leq \|\theta_n\phi-\theta_m\phi\|_{\mu,s} + \|\theta_m\phi-\theta\phi\|_{\mu,s} \qquad (n,m\in\mathbb{N}).$$

Ya que $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{O}_{r,s}$, dado $\varepsilon>0$ existe $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $n,m\geq n_0$ implica $\|\theta_n\phi-\theta_m\phi\|_{\mu,s}<\varepsilon/2$. Además, existe $m_0=m_0(\varepsilon,\phi)$ de modo que $\|\theta_m\phi-\theta\phi\|_{\mu,s}<\varepsilon/2$ siempre que $m\geq m_0$. Consecuentemente, si $n\geq n_0$ (y $m\geq\max\{n_0,m_0\}$) entonces $\|\theta_n\phi-\theta\phi\|_{\mu,s}<\varepsilon$ cuando ϕ recorre la bola unidad de $\mathcal{H}_\mu^r$. Concluimos que $\|\theta_n-\theta\|_{r,s}\leq\varepsilon$ $(n\geq n_0)$, probando que $\lim_{n\to\infty} \theta_n=\theta$ en $\theta_{r,s}$.□

De la Proposición 2.4 se deduce sin dificultad la siguiente:

Proposición 4.3. Sean p,q,r,s∈ℕ. Se verifica:

$$\|\theta\|_{q,r} \geq \|\theta\|_{q,s}, \quad \|\theta\|_{q,r} \geq \|\theta\|_{p,r} \qquad (\theta\in\mathcal{O}_{q,r},\ r\geq s,\ p\geq q).$$

Luego

$$\mathcal{O}_{q,r} \subset \mathcal{O}_{q,s}, \quad \mathcal{O}_{q,r} \subset \mathcal{O}_{p,r} \qquad (r\geq s,\ p\geq q),$$

con inclusión continua.

El próximo resultado será de utilidad más adelante.

Lema 4.4. Dado n∈ℕ, existen r∈ℕ, C>0 tales que

$$\max_{0\leq k\leq n} \|(1+x^2)^n(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)\|_{\infty} \leq C\|\phi\|_{\mu,r} \qquad (\phi\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}).$$

Demostración. Sean r∈ℕ y $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}$. Entonces (demostración del Teorema 2.2),

$$(-1)^m y^m T_{\mu,k}(\mathfrak{H}_{\mu}\phi)(y) = (-1)^k \mathfrak{H}_{\mu+m+k}(x^k T_{\mu,m}\phi(x))(y) \qquad (m,k\in\mathbb{N},\ 0\leq m+k\leq r).$$

Si n,k∈ℕ, con 3n≤r y 0≤k≤n, se cumple

$$\begin{aligned}(1+x^2)^n(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} x^{-k+2i-\mu-1/2} T_{\mu,k}\phi(x)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} x^{-k-\mu-1/2}(-1)^k \mathfrak{H}_{\mu+k+2i}(y^k T_{\mu,2i}(\mathfrak{H}_{\mu}\phi)(y))(x).\end{aligned}$$

Así, para $n,k,r\in\mathbb{N}$, con $0\le k\le n$ y $r>4n+2v$, donde $v\in\mathbb{N}$ es tal que $2v>\mu+\frac{3}{2}$, y aplicando propiedades bien conocidas de la función J_μ de Bessel (WATSON [1956, pp. 46–48 y p. 199]) encontramos que

$$\sup_{x\in I} |(1+x^2)^n(x^{-1}D)^k x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sup_{x\in I} \left| \int_0^\infty (xy)^{-\mu-k} J_{\mu+k+2i}(xy) y^{\mu+1/2+2k} T_{\mu,2i}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)dy \right|$$

$$\le C \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \int_0^\infty \frac{y^{\mu+1/2}}{(1+y^2)^v} (1+y^2)^{v+k} |T_{\mu,2i}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)|dy$$

$$\le C \max_{0\le j\le 2n} \sup_{y\in I} |(1+y^2)^{v+k} T_{\mu,j}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)|.$$

Según el Lema 2.14 y el Teorema 2.2,

$$\max_{0\le j\le 2n} \sup_{y\in I} |(1+y^2)^{v+k} T_{\mu,j}(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)| \le C\|\mathfrak{H}_\mu\phi\|_{\mu,r} = C\|\phi\|_{\mu,r}.$$

Esto completa la prueba.□

Proposición 4.5. Sea $s\in\mathbb{N}$, y sea $\theta=\theta(x)$ una función compleja definida sobre I.

(i) Si θ posee derivadas generalizadas tales que

$$(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^i\theta(x)\in L^\infty(I) \qquad (i\in\mathbb{N},\ 0\le i\le s),$$

con $r\in\mathbb{N}$, entonces $\theta\in\mathcal{O}_{r+s,s}$. Además,

$$\|\theta\|_{r+s,s} \le C \max_{0\le i\le s} \|(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^i\theta(x)\|_\infty.$$

(ii) Si existe $p\in\mathbb{N}$ tal que las derivadas generalizadas de θ verifican

$$(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\in L^\infty(I) \qquad (j\in\mathbb{N},\ 0\leq j\leq s),$$

y si se asocia $r\in\mathbb{N}$ a $[\frac{p}{2}+s]+2$ como en el Lema 4.4, entonces $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$, con

$$\|\theta\|_{r,s} \leq C \max_{0\leq j\leq s} \|(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_\infty.$$

(iii) Si $r\in\mathbb{N}$ y $\theta\in\mathcal{O}_{r,s+1}$ entonces existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$(1+x^2)^{-m/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^\infty(I) \qquad (k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq s).$$

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu^{r+s}$, y sea

$$M_\theta = \max_{0\leq i\leq s} \|(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^i\theta(x)\|_\infty.$$

Se cumple

$$\|\theta\phi\|_{\mu,s} = \left\{ \sum_{m+k=0}^{s} \int_0^\infty |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{m+k=0}^{s} \left\{ \int_0^\infty |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq M_\theta \sum_{m+k=0}^{s} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^\infty |(1+x^2)^{r/2} x^{m+j} T_{\mu,k-j}\phi(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq CM_\theta \|\phi\|_{\mu,r+s},$$

probando *(i)*.

Para obtener *(ii)* fijamos $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}$ y procedemos como en la demostración de *(i)*. Escribiendo $n=[\frac{p}{2}+s]+1$ y aplicando el Lema 4.4 encontramos que

$$\|\theta\phi\|_{\mu,s} \le \sum_{m+k=0}^{s}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left\{\int_0^\infty |(1+x^2)^{p/2}x^{m+k-j}(x^{-1}D)^{k-j}x^{-\mu-1/2}\phi(x)|^2\right.$$

$$\left.|(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{j}\theta(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$\le C\sum_{i=0}^{n}\|(1+x^2)^{n}(x^{-1}D)^{i}x^{-\mu-1/2}\phi(x)\|_2$$

$$\max_{0\le j\le s}\|(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{j}\theta(x)\|_\infty$$

$$\le C\sum_{i=0}^{n+1}\|(1+x^2)^{n+1}(x^{-1}D)^{i}x^{-\mu-1/2}\phi(x)\|_\infty$$

$$\max_{0\le j\le s}\|(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{j}\theta(x)\|_\infty$$

$$\le C\|\phi\|_{\mu,r}\max_{0\le j\le s}\|(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{j}\theta(x)\|_\infty .$$

Finalmente, probaremos *(iii)*. Razonando por contradicción, supongamos que existe $k\in\mathbb{N}$, $0\le k\le s$, tal que $(1+x^2)^{-m/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k}\theta(x)\notin L^\infty(I)$ para ningún $m\in\mathbb{N}$, mientras que a cada $i\in\mathbb{N}$, $0\le i<k$, le corresponde $m_i\in\mathbb{N}$ satisfaciendo $(1+x^2)^{-m_i/2}x^{i+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{i}\theta(x)\in L^\infty(I)$. Pongamos $m=\max\{m_i : i\in\mathbb{N}, 0\le i<k\}$, y tomemos $n\in\mathbb{N}$, $n>\max\{m,\mu+r+1\}$. Entonces $x^{\mu+1/2}(1+x^2)^{-n/2}\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}$. Sin embargo, de acuerdo con el Lema 2.14, existe $C>0$ tal que

$$C\|x^{\mu+1/2}(1+x^2)^{-n/2}\theta(x)\|_{\mu,s+1} \ge$$

$$\ge \|x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k}(1+x^2)^{-n/2}\theta(x)\|_\infty$$

$$\ge \|(1+x^2)^{-n/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k}\theta(x)\|_\infty$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\|x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{j}(1+x^2)^{-n/2}(x^{-1}D)^{k-j}\theta(x)\|_\infty,$$

lo que impide que θ pertenezca a $\mathcal{O}_{r,s+1}$.□

De la Proposición 4.5 se desprende el siguiente

Corolario 4.6. Sean $r,s\in\mathbb{N}$, y sea $P=P(x)$ un polinomio.

(i) Si P tiene grado m y si $r\geq 2m$, entonces $P(x^2)\in\mathcal{O}_{r+s,s}$.

(ii) Si P no tiene raíces en $[0,\infty[$, entonces $\frac{1}{P(x^2)}\in\mathcal{O}_{r+s,s}$.

Ahora estableceremos un análogo de la Proposición 4.5, reemplazando $L^2(I)$ por $L^\infty(I)$.

Proposición 4.7. Sea $s\in\mathbb{N}$, y sea $\theta=\theta(x)$ una función compleja definida sobre I.

(i) Si θ posee derivadas generalizadas que verifican

$$(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^i\theta(x)\in L^2(I) \qquad (i\in\mathbb{N},\ 0\leq i\leq s),$$

con $r\in\mathbb{N}$, entonces $\theta\in\mathcal{O}_{r+s+1,s}$. Además,

$$\|\theta\|_{r+s+1,s} \leq C\sum_{j=0}^{s}\|(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_2.$$

(ii) Si existe $p\in\mathbb{N}$ tal que las derivadas generalizadas de θ satisfacen

$$(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\in L^2(I) \qquad (j\in\mathbb{N},\ 0\leq j\leq s),$$

y si se asocia $r\in\mathbb{N}$ a $[\frac{p}{2}+s]+1$ como en el Lema 4.4, entonces $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$, con

$$\|\theta\|_{r,s} \leq C\sum_{j=0}^{s}\|(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_2.$$

(iii) Sea $r\in\mathbb{N}$. Si $\theta\in\mathcal{O}_{r,s+1}$, entonces $\theta\in C^s(I)$. Si $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$ entonces la distribución $(x^{-1}D)^s\theta(x)$ es regular, y existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$(1+x^2)^{-m/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\in L^2(I) \qquad (j\in\mathbb{N},\ 0\leq j\leq s).$$

Demostración. Para probar *(i)*, sea $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}^{r+s+1}$. En virtud del Lema 2.14 podemos escribir:

$$\|\theta\phi\|_{\mu,s} = \left\{ \sum_{m+k=0}^{s} \int_0^{\infty} |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{m+k=0}^{s} \left\{ \int_0^{\infty} |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq \sum_{m+k=0}^{s} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^{\infty} |x^{m+j} T_{\mu,k-j}\phi(x)|^2 |(x^{-1}D)^j\theta(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq C \max_{0\leq m+k\leq s} \sum_{j=0}^{k} \|(1+x^2)^{r/2} x^{m+j} T_{\mu,k-j}\phi(x)\|_{\infty} \|(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_2$$

$$\leq C\|\phi\|_{\mu,r+s+1} \sum_{j=0}^{s} \|(1+x^2)^{-r/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_2 .$$

Sea ahora $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}$. El Lema 4.4 conduce a

$$\|\theta\phi\|_{\mu,s} \leq \sum_{m+k=0}^{s} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\{ \int_0^{\infty} |(1+x^2)^{p/2} x^{m+k-j}(x^{-1}D)^{k-j} x^{-\mu-1/2}\phi(x)|^2 \right.$$

$$\left. |(1+x^2)^{-p/2} x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq C \max_{0\leq j\leq n} \|(1+x^2)^n (x^{-1}D)^j x^{-\mu-1/2}\phi(x)\|_{\infty}$$

$$\sum_{j=0}^{s} \|(1+x^2)^{-p/2} x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_2$$

$$\leq C\|\phi\|_{\mu,r} \sum_{j=0}^{s} \|(1+x^2)^{-p/2} x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\|_2 \qquad (\phi\in\mathcal{H}_{\mu}^{r}).$$

Aquí, $n=[\frac{p}{2}+s]+1$. Esto prueba *(ii)*.

Finalmente, estableceremos *(iii)*. Pongamos $\phi(x)=x^{\mu+1/2}e^{-x^2}$ $(x\in I)$. Como $\theta\in\mathcal{O}_{r,s+1}$ y $\phi\in\mathcal{H}_\mu\subset\mathcal{H}^r_\mu$ implican $\theta\phi\in\mathcal{H}^{s+1}_\mu\subset C^s(I)$ (Lema 2.14), necesariamente $\theta\in C^s(I)$. Además, si $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$ entonces la distribución $(x^{-1}D)^s\theta(x)$ es regular. En efecto, se tiene

$$x^s\phi(x)(x^{-1}D)^s\theta(x) = \sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{s}{j}x^jT_{\mu,s-j}(\theta\phi_j)(x),$$

donde $\phi_j(x)=x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^jx^{-\mu-1/2}\phi(x)\in\mathcal{H}_\mu\subset\mathcal{H}^r_\mu$. Luego, $(\theta\phi_j)(x)\in\mathcal{H}^s_\mu$ $(0\le j\le s)$, y

$$(x^{-1}D)^s\theta(x) = \frac{x^{-s}}{\phi(x)}\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{s}{j}x^jT_{\mu,s-j}(\theta\phi_j)(x)$$

es una distribución regular.

El resto de *(iii)* se prueba razonando como en la demostración del aserto correspondiente en la Proposición 4.5.□

Nótese que *(ii)* y *(iii)* en la Proposición 4.7 son recíprocos, mientras que *(ii)* y *(iii)* en la Proposición 4.5 no lo son.

Ahora procedemos a discutir algunas relaciones entre los espacios $\mathcal{H}^r_\mu$ y $\mathcal{O}_{r,s}$. Compárense las Proposiciones 4.8 y 4.9 con las 1.12.6 y 1.12.7, respectivamente.

Proposición 4.8. Sean $r,s\in\mathbb{N}$, con $r>2s+\mu+1$. Se cumple que $\mathcal{H}^r_\mu\subset x^{\mu+1/2}\mathcal{O}_{s,s}$, y la aplicación lineal $\phi(x)\longmapsto x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ es continua de $\mathcal{H}^r_\mu$ en $\mathcal{O}_{s,s}$.

Demostración. Fijemos $\phi\in\mathcal{H}^r_\mu$. Entonces $\phi\in C^s(I)$. Además, en virtud del Teorema 2.2, y de acuerdo con propiedades bien conocidas de la función J_μ de Bessel (Zemanian [1968, p. 129]), para $0\le i\le s$ y $x\in I$ se verifica

$$(-1)^i(x^{-1}D)^ix^{-\mu-1/2}\phi(x) = \int_0^\infty \frac{y^{2i+\mu+1/2}}{1+y^r}(1+y^r)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)(xy)^{-\mu-i}J_{\mu+i}(xy)dy.$$

La acotación de $z^{-\mu}J_\mu(z)$ $(z\in I)$, junto con la desigualdad de Hölder, da lugar a

$$\sup_{x\in I} |(x^{-1}D)^i x^{-\mu-1/2}\phi(x)| \le C\int_0^\infty \left|\frac{y^{2i+\mu+1/2}}{1+y^r}\right| |(1+y^r)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)|dy$$

$$\le C\left\{\int_0^\infty\left(\frac{y^{2i+\mu+1/2}}{1+y^r}\right)^2 dy\right\}^{1/2}\left\{\int_0^\infty |(1+y^r)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(y)|^2 dy\right\}^{1/2}$$

$$\le C\,\|\phi\|_{\mu,r} \qquad (i\in\mathbb{N},\ 0\le i\le s).$$

Completamos la demostración recurriendo a la Proposición 4.5.□

Proposición 4.9. Sean $r,s\in\mathbb{N}$, $s>\mu+1$. Para cada $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$, la función $x^{\mu+1/2}\theta(x)$ $(x\in I)$ define una distribución regular en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ mediante la fórmula

$$\langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{\mu+1/2}\theta(x)\phi(x)dx \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu^r),$$

y la aplicación lineal $\theta(x)\longmapsto x^{\mu+1/2}\theta(x)$ es continua de $\mathcal{O}_{r,s}$ en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$.

Demostración. Sea $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$. Aplicando la desigualdad de Hölder resulta

$$|\langle x^{\mu+1/2}\theta(x),\phi(x)\rangle| \le \int_0^\infty |x^{\mu+1/2}(1+x^2)^{-s/2}|\,|(1+x^2)^{s/2}(\theta\phi)(x)|dx$$

$$\le C\left\{\int_0^\infty \frac{x^{2\mu+1}}{(1+x^2)^s}dx\right\}^{1/2}\left\{\int_0^\infty (1+x^2)^s|(\theta\phi)(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$\le C\|\theta\phi\|_{\mu,s} \le C\|\theta\|_{r,s}\|\phi\|_{\mu,r} \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu^r).$$

Así, $x^{\mu+1/2}\theta(x)\in\mathcal{H}_\mu^{-r}$ y $\|x^{\mu+1/2}\theta(x)\|_{\mu,-r}\le C\|\theta\|_{r,s}$.□

Llegado este punto, introducimos el espacio $\mathcal{O}_s=\mathcal{O}_s^\mu=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{r,s}$ $(s\in\mathbb{N})$. El resultado siguiente puede ser deducido fácilmente de las Proposiciones 4.5 y 4.7.

Proposición 4.10. Sea $s\in\mathbb{N}$, y sea $\theta=\theta(x)$ una función compleja definida sobre I.

(i) Si las derivadas generalizadas de θ son tales que

$$(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\in L^{\infty}(I) \qquad (j\in\mathbb{N},\ 0\leq j\leq s)$$

para algún $p\in\mathbb{N}$, entonces $\theta\in\mathcal{O}_s$.

(ii) $\theta\in\mathcal{O}_s$ si, y sólo si, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que las derivadas generalizadas de θ satisfacen

$$(1+x^2)^{-p/2}x^{j+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j\theta(x)\in L^{2}(I) \qquad (j\in\mathbb{N},\ 0\leq j\leq s).$$

Reunimos a continuación algunas propiedades de los elementos de $\mathcal{O}_s$ en las que intervienen normas L^{∞}.

Proposición 4.11. Sean $s\in\mathbb{N}$, $\theta:I\longrightarrow\mathbb{C}$, y consideremos las afirmaciones siguientes.

(i) $\theta\in\mathcal{O}_{s+1}$.

(ii) Si $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}$ y si $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$, entonces $x^mT_{\mu,k}(\theta\phi)(x)\in L^{\infty}(I)$.

(iii) Si $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}$ y si $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$, entonces $x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^{\infty}(I)$.

(iv) $\theta\in\mathcal{O}_s$.

Se verifican las implicaciones *(i)⇒(ii)*, *(ii)⇔(iii)*, y *(iii)⇒(iv)*.

Demostración. *(i)⇒(ii).* Sea $\theta\in\mathcal{O}_{s+1}$. Existe $r\in\mathbb{N}$ tal que $\theta\in\mathcal{O}_{r,s+1}$. Como $\mathcal{H}_{\mu}\subset\mathcal{H}_{\mu}^{r}$, necesariamente $x^mT_{\mu,k}(\theta\phi)(x)\in L^{\infty}(I)$ ($\phi\in\mathcal{H}_{\mu}$, $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$) (Lema 2.14).

(ii)⇒(iii). Para $\phi\in\mathcal{H}_{\mu}$, la regla de Leibniz permite escribir

$$\begin{aligned} x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x) &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}x^{m+k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k-j}x^{-\mu-1/2}(\theta\phi_j)(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}x^{m+j}T_{\mu,k-j}(\theta\phi_j)(x) \qquad (x\in I,\ m,k\in\mathbb{N},\ 0\leq m+k\leq s), \end{aligned}$$

siendo $\phi_j(x)=x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^j x^{-\mu-1/2}\phi(x)\in\mathcal{H}_\mu$ ($j\in\mathbb{N}$, $0\leq j\leq k$), e inferimos de *(ii)* que $x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^\infty(I)$ ($m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$).

(iii)⇒(ii). Para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, se tiene

$$x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{m+j}(T_{\mu,k-j}\phi(x))(x^{-1}D)^j\theta(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{m+k}\phi_j(x)(x^{-1}D)^j\theta(x) \quad (m,k\in\mathbb{N},\ 0\leq m+k\leq s),$$

donde $\phi_j(x)=x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k-j}x^{-\mu-1/2}\phi(x)$ ($j\in\mathbb{N}$, $0\leq j\leq k$). Así, *(ii)* sigue fácilmente de *(iii)*.

(iii)⇒(iv). Supongamos que se verifica *(iii)* y (para alcanzar una contradicción) que *(iv)* es falso. De acuerdo con la Proposición 4.10, si $\theta\notin\mathcal{O}_s$ entonces existe $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq s$, tal que $(1+x^2)^{-m/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\notin L^\infty(I)$ para ningún $m\in\mathbb{N}$. Por *(iii)*, $x^k\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^\infty(I)$ cuando $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. En particular $x^{k+\mu+1/2}e^{-x^2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^\infty(I)$, así que $x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^\infty(]0,T[)$ $(T>0)$. Cabe elegir ahora una sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos tales que $x_0>1$, $x_{j+1}>x_j+1$, y

$$\left|x_j^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)_{|x=x_j}\right| > (1+x_j^2)^{j/2} \quad (j\in\mathbb{N}). \tag{4.1}$$

Supongamos que $\alpha\in\mathcal{D}(I)$ satisface $0\leq\alpha(x)\leq1$ ($x\in I$), sop $\alpha=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$, y $\alpha(1)=1$. No es difícil ver que la función

$$\varphi(x) = x^{\mu+1/2}\sum_{j=0}^{\infty} j(1+x_j^2)^{-j/2}\alpha(x-x_j+1) \quad (x\in I)$$

está en $\mathcal{H}_\mu$. Además, (4.1) implica

$$\left|x_j^k\varphi(x_j)(x^{-1}D)^k\theta(x)_{|x=x_j}\right| > j \quad (j\in\mathbb{N}),$$

de manera que $x^k\varphi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)\notin L^\infty(I)$. Esta contradicción completa la prueba.□

Nos disponemos ahora a caracterizar $\mathcal{O}_s$ usando normas L^2.

Proposición 4.12. Sea $s\in\mathbb{N}$, y sea $\theta=\theta(x)$ una función compleja definida sobre I. Son equivalentes:

(i) $\theta\in\mathcal{O}_s$.

(ii) Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y si $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$, entonces $x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)\in L^2(I)$.

(iii) Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ y si $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$, entonces $x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^2(I)$.

Demostración. Que *(i)⇒(ii)⇒(iii)* se prueba como en las correspondientes implicaciones de la Proposición 4.11.

(iii)⇒(i). Supongamos que se verifica *(iii)*, y (razonando por contradicción) que no se verifica *(i)*. En virtud de la Proposición 4.10, si $\theta\notin\mathcal{O}_s$ existen $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq s$, tales que $(1+x^2)^{-m/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\notin L^2(I)$ para ningún $m\in\mathbb{N}$. Combinando *(iii)* con el hecho de que $x^{\mu+1/2}e^{-x^2}\in\mathcal{H}_\mu$ resulta $(1+x^2)^{-m/2}x^{k+\mu+1/2}e^{-x^2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^2(I)$ $(m\in\mathbb{N})$. En particular, $(1+x^2)^{-m/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)\in L^2(]0,T[)$ cualesquiera sean $m\in\mathbb{N}$ y $T>0$. Podemos determinar entonces una sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos tales que $x_0=0$, $x_{j+1}>x_j+1$, y

$$\int_{E_j} |(1+x^2)^{-j/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)|^2 dx > j+1 \qquad (j\in\mathbb{N}),$$

donde $E_j=[x_j,x_{j+1}]$ $(j\in\mathbb{N})$. Para $j\in\mathbb{N}$, $j\geq1$, elegimos $\alpha_j\in\mathcal{D}(I)$ satisfaciendo $0\leq\alpha_j(x)\leq1$ $(x\in I)$, y sop $\alpha_j=[x_j-\frac{1}{4},x_{j+1}+\frac{1}{4}]$, con $\alpha_j(x)=1$ $(x\in E_j)$, tal que $\sup_{x\in I}|(x^{-1}D)^k\alpha_j(x)|$ no depende de j. Se advierte sin dificultad que la función

$$\varphi(x) = x^{\mu+1/2}\sum_{j=1}^{\infty}(1+x^2)^{-j/2}\alpha_j(x) \qquad (x\in I)$$

está en $\mathcal{H}_\mu$, y que $x^{-\mu-1/2}\varphi(x)\geq(1+x^2)^{-j/2}$ ($x\in E_j$, $j\in\mathbb{N}$, $j\geq1$). Consecuentemente,

$$\int_0^\infty |x^k\varphi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)|^2dx \geq$$

$$\geq \int_{E_j} |x^k\varphi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)|^2dx$$

$$\geq \int_{E_j} |(1+x^2)^{-j/2}x^{k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^k\theta(x)|^2dx > j+1 \qquad (j\in\mathbb{N},\ j\geq1).$$

Esto significa que $x^k\varphi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)\notin L^2(I)$, contradiciendo *(iii)* y completando la prueba.□

Nos disponemos a caracterizar $\mathcal{O}_s$ como el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$.

Proposición 4.13. Sea $s\in\mathbb{N}$. Una función compleja $\theta=\theta(x)$ definida sobre I pertenece a $\mathcal{O}_s$ si, y sólo si, la aplicación lineal $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$ cuando se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ de su topología fuerte.

Demostración. A lo largo de toda la prueba supondremos que $\mathcal{H}'_\mu$ está provisto de su topología fuerte.

Si $\theta\in\mathcal{O}_s$ entonces la aplicación $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$, para algún $r\in\mathbb{N}$. Al ser continua también la aplicación $\mathcal{H}_\mu^{-r}\hookrightarrow\mathcal{H}'_\mu$ (Proposición 2.15), concluimos que $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$.

Recíprocamente, supongamos que la aplicación $U:\mathcal{H}_\mu^{-s}\longrightarrow\mathcal{H}'_\mu$, definida por $UT=\theta T$, es continua. Como $(\mathcal{H}'_\mu)'=\mathcal{H}_\mu$ y $(\mathcal{H}_\mu^{-s})'=\mathcal{H}_\mu^s$, la adjunta U^* de U, dada por $U^*\phi=\theta\phi$ ($\phi\in\mathcal{H}_\mu$), aplica continuamente $\mathcal{H}_\mu$ en $\mathcal{H}_\mu^s$. Luego $x^mT_{\mu,k}(\theta(x)\phi(x))\in L^2(I)$ ($\phi\in\mathcal{H}_\mu$, $m,k\in\mathbb{N}$, $0\leq m+k\leq s$), y de la Proposición 4.12 deducimos que $\theta\in\mathcal{O}_s$.□

Es natural dotar a $\mathcal{O}_s$ de la topología final localmente convexa asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{O}_{r,s} \hookrightarrow \mathcal{O}_s\}_{r\in\mathbb{N}}$. La Proposición 4.12 sugiere considerar otras topologías sobre este espacio, que introducimos y comparamos en la Proposición 4.14.

Proposición 4.14. Sea $s\in\mathbb{N}$.

(i) La topología final localmente convexa de $\mathcal{O}_s$ es más fina que la que genera en este espacio la familia de seminormas $\{\sigma_{2,s;\phi}\}_{\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, dada por

$$\sigma_{2,s;\phi}(\theta) = \left\{ \sum_{m+k=0}^{s} \int_0^\infty |x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \quad (\phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}_s).$$

(ii) La topología definida sobre $\mathcal{O}_s$ por $\{\sigma_{2,s;\phi}\}_{\phi\in\mathcal{H}_\mu}$ coincide con la generada sobre este espacio por el sistema de seminormas $\{\tau_{2,s;\phi}\}_{\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, donde

$$\tau_{2,s;\phi}(\theta) = \left\{ \sum_{m+k=0}^{s} \int_0^\infty |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \quad (\phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}_s).$$

Demostración. Sea $\theta\in\mathcal{O}_{r,s}$ para algún $r\in\mathbb{N}$. Si $m,k\in\mathbb{N}$, $0\le m+k\le s$, y si $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, entonces

$$x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x^{m+j} T_{\mu,k-j}(\theta\phi_j)(x), \tag{4.2}$$

donde $\phi_j(x)=x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^j x^{-\mu-1/2}\phi(x)\in\mathcal{H}_\mu$ ($j\in\mathbb{N}$, $0\le j\le s$). Luego

$$\sigma_{2,s;\phi}(\theta) \le C \max_{0\le j\le s} \|\theta\phi_j\|_{\mu,s} \le (C \max_{0\le j\le s} \|\phi_j\|_{\mu,r})\|\theta\|_{r,s},$$

y la aplicación $\mathcal{O}_{r,s} \hookrightarrow \mathcal{O}_s$ es continua cuando se dota a $\mathcal{O}_s$ de la topología generada por $\{\sigma_{2,s;\phi}\}_{\phi\in\mathcal{H}_\mu}$. Esto demuestra *(i)*.

Para establecer *(ii)*, basta tener en cuenta (4.2) y la igualdad

$$x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{(m+k-j)+j}(x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^{k-j}x^{-\mu-1/2}\phi(x))(x^{-1}D)^j\theta(x),$$

válida para todo $x\in I$ cuando $\theta\in\mathcal{O}_s$, $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y $m,k\in\mathbb{N}$, con $0\le m+k\le s$.□

Proposición 4.15. Para cada $s\in\mathbb{N}$, la aplicación bilineal $(\theta,T)\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{O}_s\times\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$, cuando se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ de su topología fuerte.

Demostración. Sea V un entorno del origen en $\mathcal{H}'_\mu$. Como $\mathcal{H}'_\mu=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_\mu^{-r}$ (Proposición 2.15), existe una sucesión $\{a_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tales que V contiene a la envolvente absolutamente convexa de $\bigcup_{r\in\mathbb{N}} V_r$, donde $V_r=\{T\in\mathcal{H}_\mu^{-r}: \|T\|_{\mu,-r}<a_r\}$ $(r\in\mathbb{N})$. Para $r,s\in\mathbb{N}$, pongamos $G_{r,s}=\{\theta\in\mathcal{O}_{r,s}: \|\theta\|_{r,s}<a_r\}$, $U_s=\{T\in\mathcal{H}_\mu^{-s}: \|T\|_{\mu,-s}<1\}$. La envolvente absolutamente convexa G_s de $\bigcup_{r\in\mathbb{N}} G_{r,s}$ es un entorno del origen en $\mathcal{O}_s$, y $\theta T\in V_r$ cuando $\theta\in G_{r,s}$ y $T\in U_s$. Así, $\theta T\in V$ siempre que $\theta\in G_s$ y $T\in U_s$.□

Escribimos $\Omega=\bigcap_{s\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_s$ y dotamos a Ω de la topología inicial asociada a la familia de inclusiones $\{\Omega\hookrightarrow\mathcal{O}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$. Como veremos, se cumple que $\Omega=\mathcal{O}$ algebraica y topológicamente.

Proposición 4.16. Los espacios vectoriales topológicos Ω y $\mathcal{O}$ coinciden.

Demostración. En primer lugar, estableceremos la igualdad algebraica $\Omega=\mathcal{O}$.

Sean $\theta\in\mathcal{O}$ y $s\in\mathbb{N}$. Existen $p=p(s)\in\mathbb{N}$, $C>0$ tales que

$$\max_{0\le i\le s} |(x^{-1}D)^i\theta(x)| \le C(1+x^2)^p \quad (x\in I).$$

Si $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$, con r=s+2p, entonces

$$\left\{\int_0^\infty |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)|^2dx\right\}^{1/2}\le$$

$$\le \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\left\{\int_0^\infty |x^{m+k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j(x^{-\mu-1/2}\phi(x))(x^{-1}D)^{k-j}\theta(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$\le C\sum_{j=0}^k \left\{\int_0^\infty |(1+x^2)^p x^{m+k+\mu+1/2}(x^{-1}D)^j x^{-\mu-1/2}\phi(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$\le C\sum_{j=0}^k \left\{\int_0^\infty |(1+x^2)^p x^{m+k-j} T_{\mu,j}\phi(x)|^2dx\right\}^{1/2} \quad (m,k\in\mathbb{N},\ 0\le m+k\le s).$$

Consecuentemente, $\|\theta\phi\|_{\mu,s}\le C\|\phi\|_{\mu,r}$ $(\phi\in\mathcal{H}_\mu^r)$. Esto significa que $\mathcal{O}\subset\Omega$.

Recíprocamente, sea $\theta\in\Omega$, y sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$. Entonces $\theta\phi\in\mathcal{H}_\mu^s$, para cada $s\in\mathbb{N}$. Como $\mathcal{H}_\mu=\bigcap_{s\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_\mu^s$ (Proposición 2.15), y como $\mathcal{O}$ es el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ (Teorema 1.11.3), encontramos que $\Omega\subset\mathcal{O}$.

Ahora demostraremos que la topología de Ω es más fina que la de $\mathcal{O}$. Sea $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, $\phi\neq0$, sea $k\in\mathbb{N}$, y definamos $G=\{\theta\in\mathcal{O}:\eta^\mu_{k;\phi}(\theta)<1\}$. Ya que la familia de normas $\{\|\cdot\|_{\mu,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ genera la topología usual de $\mathcal{H}_\mu$, para ciertas $S\in\mathbb{N}$, $C>0$ se cumple

$$\eta^\mu_{k;\phi}(\theta) = \sup_{x\in I} |x^{-\mu-1/2}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)|$$

$$\le \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \sup_{x\in I} |(x^{-1}D)^{k-j}x^{-\mu-1/2}(\theta\phi_j)(x)|$$

$$\le C\sum_{j=0}^k \|\theta\phi_j\|_{\mu,S} \qquad (\theta\in\mathcal{O}),$$

donde $\phi_j(x)=x^{\mu+1/2}(x^{-1}D)^j x^{-\mu-1/2}\phi(x)\in\mathcal{H}_\mu$ $(0\le j\le k,\ x\in I)$. Definamos

$$G_{r,S} = \{\ \theta\in\mathcal{O}_{r,S}\ :\ \|\theta\|_{r,S}<(C\sum_{p=0}^k \|\phi_p\|_{\mu,r})^{-1}\ \}.$$

La envolvente absolutamente convexa G_s de $\bigcup_{r\in\mathbb{N}} G_{r,s}$ es un entorno del origen en $\mathcal{O}_s$. Para cada $\theta\in G_s$, existen $m\in\mathbb{N}$ y $\lambda_i\geq 0$ ($i\in\mathbb{N}$, $0\leq i\leq m$), con $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i=1$, tales que $\theta=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\theta_i$, donde $\theta_i\in G_{r_i,s}$ ($i\in\mathbb{N}$, $0\leq i\leq m$). Si $\theta\in\mathcal{O}\cap G_s$, podemos escribir:

$$\eta^{\mu}_{k;\phi}(\theta) \leq C\sum_{j=0}^{k}\|\theta\phi_j\|_{\mu,s} \leq C\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\|\theta_i\phi_j\|_{\mu,s}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\,(C\|\theta_i\|_{r_i,s}\sum_{j=0}^{k}\|\phi_j\|_{\mu,r_i}) < \sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 1.$$

Habiendo encontrado un entorno $\mathcal{O}\cap G_s$ del origen en Ω contenido en G, concluimos que Ω está embebido continuamente en $\mathcal{O}$.

Para completar la prueba estableceremos la continuidad de las inclusiones $\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{O}_s$ ($s\in\mathbb{N}$).

Sea $s\in\mathbb{N}$, sea B un subconjunto acotado de $\mathcal{O}$, y sea V un entorno del origen en $\mathcal{O}_s$. A cada $r\in\mathbb{N}$ le corresponde un entorno V_r del origen en $\mathcal{O}_{r,s}$ tal que V contiene a la envolvente absolutamente convexa de $\bigcup_{r=0}^{\infty} V_r$. Dado $r\in\mathbb{N}$, elijamos $p_r>0$ con $\{\theta\in\mathcal{O}_{r,s}:\|\theta\|_{r,s}\leq p_r\}\subset V_r$. Como el conjunto $\{\theta\phi:\theta\in B\}$ está acotado en $\mathcal{H}^s_\mu$ para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu$, y puesto que la familia de normas $\{p_r\|\cdot\|_{\mu,r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ genera la topología del espacio de Fréchet $\mathcal{H}_\mu$, el teorema de Banach-Steinhaus proporciona $m\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon_r>0$ ($r\in\mathbb{N}$, $0\leq r\leq m$) tales que $\|\theta\phi\|_{\mu,s}<1$ cuando $\theta\in B$ y $p_r\|\phi\|_{\mu,r}<\varepsilon_r$ ($0\leq r\leq m$). Tomando $\varepsilon=\min_{0\leq r\leq m} p_r^{-1}\varepsilon_r$ obtenemos $\|\theta\phi\|_{\mu,s}<(\varepsilon p_m)^{-1}$ ($\theta\in B$) para $\phi\in\mathcal{H}_\mu$ con $\|\phi\|_{\mu,m}<p_m^{-1}$. Por consiguiente $B\subset(\varepsilon p_m)^{-1}V_m\subset(\varepsilon p_m)^{-1}V$, probando que B es acotado en $\mathcal{O}_s$. La continuidad de la inclusión $\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{O}_s$ sigue ahora de ser $\mathcal{O}$ bornológico (Proposición 1.14.4 y HORVATH [1966, Proposition 3.7.1]).□

Nota. En relación con las Proposiciones 4.14 y 4.16, cabe observar que la topología de $\mathcal{O}$ también puede ser generada mediante una cualquiera de las familias de seminormas $\{\sigma_{2,s;\phi}\}_{s\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, $\{\tau_{2,s;\phi}\}_{s\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, $\{\sigma_{\infty,s;\phi}\}_{s\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, o

$\{\tau_{\infty,s;\phi}\}_{s\in\mathbb{N},\phi\in\mathcal{H}_\mu}$, donde estas últimas vienen dadas por

$$\sigma_{\infty,s;\phi}(\theta) = \max_{0\le m+k\le s} \sup_{x\in I} |x^{m+k}\phi(x)(x^{-1}D)^k\theta(x)| \quad (s\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}),$$

$$\tau_{\infty,s;\phi}(\theta) = \max_{0\le m+k\le s} \sup_{x\in I} |x^m T_{\mu,k}(\theta\phi)(x)| \quad (s\in\mathbb{N},\ \phi\in\mathcal{H}_\mu,\ \theta\in\mathcal{O}).$$

Quedamos en disposición de dar una nueva demostración de una propiedad de $\mathcal{O}$ ya establecida (Teorema 1.13.1).

Proposición 4.17. Una función $\theta\in C^\infty(I)$ está en $\mathcal{O}$ si, y sólo si, la aplicación lineal $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}'_\mu$ en sí mismo cuando se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ de su topología fuerte.

Demostración. Si $\theta\in\mathcal{O}$ entonces $\theta\in\mathcal{O}_s$ para cada $s\in\mathbb{N}$, de modo que $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$ con su topología fuerte, para cada $s\in\mathbb{N}$. La topología fuerte de $\mathcal{H}'_\mu=\bigcup_{s\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_\mu^{-s}$ coincide con la topología final localmente convexa asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{H}_\mu^{-s}\hookrightarrow\mathcal{H}'_\mu\}_{s\in\mathbb{N}}$ (Proposición 2.15), así que $T\longmapsto\theta T$ es continua de $\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$ cuando sobre este espacio se considera su topología fuerte.

Recíprocamente, si $\theta\notin\mathcal{O}$ entonces existe $s\in\mathbb{N}$ tal que $\theta\notin\mathcal{O}_s$. De la Proposición 4.13 se infiere que la aplicación $T\longmapsto\theta T$ no es continua de $\mathcal{H}_\mu^{-s}$ en $\mathcal{H}'_\mu$, luego tampoco de $\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$, respecto de la topología fuerte de este espacio.□

En la Proposición 1.13.2 se probó que la aplicación bilineal $(\theta,T)\longmapsto\theta T$ de $\mathcal{O}\times\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$ es continua en cada variable cuando $\mathcal{H}'_\mu$ está provisto de su topología fuerte. Ahora podemos mejorar este resultado.

Proposición 4.18. La aplicación bilineal $(\theta,T)\longmapsto\theta T$ es $\mathcal{O}$-hipocontinua de $\mathcal{O}\times\mathcal{H}'_\mu$ en $\mathcal{H}'_\mu$ cuando se dota a $\mathcal{H}'_\mu$ de su topología fuerte.

Demostración. Sea V un entorno fuerte del origen en $\mathcal{H}'_\mu$, y, para cada $s\in\mathbb{N}$, definamos G_s, U_s como en la prueba de la Proposición 4.15. Si B es un subconjunto acotado de $\mathcal{O}$ entonces para cada $s\in\mathbb{N}$ podemos encontrar $\lambda_s>0$ tal que $B\subset\lambda_s G_s$. Pongamos $W_s=\lambda_s^{-1}U_s$. La envolvente absolutamente convexa W de $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} W_s$ es un entorno fuerte del origen en $\mathcal{H}'_\mu$ tal que $\theta\in B$ y $T\in W$ implica $\theta T\in V$.□

5. Operadores de convolución en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$.

En esta Sección introducimos operadores de convolución en los espacios $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ ($r\in\mathbb{N}$). Dichos operadores se hallan íntimamente ligados a los operadores de multiplicación discutidos en la Sección anterior.

Sean $r,s\in\mathbb{N}$. El espacio $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}=\mathcal{O}^{\mu,\#}_{r,s}$ está formado por todas aquellas $T\in\bigcup_{p=0}^{\infty}\mathcal{H}_\mu^{-p}=\mathcal{H}'_\mu$ tales que $y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(y)\in\mathcal{O}_{r,s}$. Topologizamos $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}$ mediante la norma

$$\|T\|^{\#}_{r,s} = \|T\|^{\mu,\#}_{r,s} = \|y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{h}'_\mu T)(y)\|_{r,s} \qquad (T\in\mathcal{O}^{\#}_{r,s}).$$

Las primeras propiedades de $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}$ se hallan recogidas a continuación.

Proposición 5.1. Sean $r,s\in\mathbb{N}$.

(i) $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}=\mathfrak{h}'_\mu(x^{\mu+1/2}\mathcal{O}_{r,s})$.

(ii) $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}$ es un espacio de Banach.

(iii) Si $s>\mu+1$ y $r>2s+\mu+1$, entonces $\mathcal{H}_\mu^{r}\subset\mathcal{O}^{\#}_{r,s}\subset\mathcal{H}_\mu^{-r}$, y cada una de estas inclusiones es continua. En particular, $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}$ es denso en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$.

Demostración. Para probar *(i)* basta observar que $(\mathfrak{h}'_\mu)^{-1}=\mathfrak{h}'_\mu$ sobre $\mathcal{H}'_\mu$, que contiene a $x^{\mu+1/2}\mathcal{O}_{r,s}$. El apartado *(ii)* sigue inmediatamente de *(i)*. Al ser $\mathfrak{h}'_\mu$ una isometría de $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ (Teorema 2.2), la cadena de inclusiones en *(iii)* deriva de las Proposiciones 4.3, 4.8 y 4.9. Finalmente, $\mathcal{O}^{\#}_{r,s}$ es denso en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ porque $\mathcal{H}_\mu^{r}$ lo es (Corolario 2.13).□

Para $r,s\in\mathbb{N}$, $S\in\mathcal{H}_{\mu}^{-s}$, y $T\in\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$, definimos la *convolución de Hankel* $S\#T$ de S y T por

$$S\#T = \mathfrak{H}_{\mu}'(y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_{\mu}'T)(y)(\mathfrak{H}_{\mu}'S)(y)).$$

Nótese que $S\#T\in\mathcal{H}_{\mu}^{-r}$ cuando $S\in\mathcal{H}_{\mu}^{-s}$ y $T\in\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$.

Como $(\mathfrak{H}_{\mu}')^{-1}=\mathfrak{H}_{\mu}'$ sobre $\mathcal{H}_{\mu}^{-r}$ ($r\in\mathbb{N}$), se cumple:

Proposición 5.2. Para $r,s\in\mathbb{N}$, $S\in\mathcal{H}_{\mu}^{-s}$, $T\in\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$, y $x^{-\mu-1/2}\theta(x)\in\mathcal{O}_{r,s}$, tenemos

$$\mathfrak{H}_{\mu}'(S\#T)(y) = y^{-\mu-1/2}(\mathfrak{H}_{\mu}'T)(y)(\mathfrak{H}_{\mu}'S)(y) \qquad (y\in I),$$

$$\mathfrak{H}_{\mu}'(x^{-\mu-1/2}\theta(x)S(x)) = (\mathfrak{H}_{\mu}'S)\#(\mathfrak{H}_{\mu}'\theta).$$

Las propiedades de $\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$ que se enumeran a continuación pueden ser deducidas de las correspondientes para $\mathcal{O}_{r,s}$, sin más que tener en cuenta la Proposición 5.2.

Proposición 5.3. Se verifica:

(i) Sean $r,s\in\mathbb{N}$. La aplicación bilineal $(S,T)\longmapsto S\#T$ es continua de $\mathcal{H}_{\mu}^{-s}\times\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$ en $\mathcal{H}_{\mu}^{-r}$.

(ii) Si se dota a $\mathcal{O}_{s}^{\#}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{r,s}^{\#}$ ($s\in\mathbb{N}$) de la topología final localmente convexa asociada a la familia de inclusiones $\{\mathcal{O}_{r,s}^{\#}\hookrightarrow\mathcal{O}_{s}^{\#}\}_{r\in\mathbb{N}}$, y si $\Omega^{\mu,\#}=\bigcap_{s\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{s}^{\#}$ está provisto de la topología inicial generada por la familia de inclusiones $\{\Omega^{\mu,\#}\hookrightarrow\mathcal{O}_{s}^{\#}\}_{s\in\mathbb{N}}$, entonces los espacios vectoriales topológicos $\Omega^{\mu,\#}$ y $\mathcal{O}_{\mu,\#}'$ coinciden.

(iii) Para cada $s\in\mathbb{N}$ la aplicación bilineal $(S,T)\longmapsto S\#T$ es continua de $\mathcal{H}_{\mu}^{-s}\times\mathcal{O}_{s}^{\#}$ en $\mathcal{H}_{\mu}'$, si $\mathcal{H}_{\mu}'$ está dotado de su topología fuerte.

(iv) La aplicación bilineal $(S,T)\longmapsto S\#T$ es $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$-hipocontinua de $\mathcal{H}'_\mu\times\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ en $\mathcal{H}'_\mu$, cuando se dota a este último de su topología fuerte.

III. APLICACIONES.

6. Introducción.

En esta Parte continuaremos suponiendo que μ es un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$. Motivados por GONZALEZ [1991] y haciendo uso de la teoría de semigrupos analíticos de operadores lineales, investigamos problemas de Cauchy en $\mathcal{H}_\mu^r$ ($r\in\mathbb{N}$) donde interviene el operador de Bessel $S_\mu=x^{-\mu-1/2}Dx^{2\mu+1}Dx^{-\mu-1/2}$.

7. Problemas de Cauchy en los que comparece el operador S_μ.

Fijemos $r\in\mathbb{N}$, y sea P un polinomio con coeficientes reales. Definimos sobre $\mathcal{H}_\mu^r$ el operador $''P(S_\mu)''$ mediante

$$''P(S_\mu)''\phi = \mathfrak{H}_\mu(P(-x^2)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(x)) \qquad (\phi\in D(''P(S_\mu)'')),$$

donde $D(''P(S_\mu)'')=\{\phi\in\mathcal{H}_\mu^r:P(-x^2)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(x)\in\mathcal{H}_\mu^r\}$. Claramente $\mathcal{H}_\mu\subset D(''P(S_\mu)'')$, porque $\mathfrak{H}_\mu$ es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ y $\phi(x)\longmapsto P(-x^2)\phi(x)$ define una aplicación lineal continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo (ZEMANIAN [1968, Chapter 5]). Por tanto, $''P(S_\mu)''$ constituye una extensión del operador diferencial usual $P(S_\mu)$.

Dado que $\mathcal{H}_\mu^r\subset\mathcal{H}_\mu'$, podemos definir también el operador $'P(S_\mu)'$ mediante

$$'P(S_\mu)'T = P(S_\mu)T \qquad (T\in D('P(S_\mu)')),$$

donde el segundo miembro de esta igualdad debe entenderse como el operador $P(S_\mu)$ generalizado actuando sobre $T\in\mathcal{H}_\mu'$, con $D('P(S_\mu)')=\{T\in\mathcal{H}_\mu^r:'P(S_\mu)'T\in\mathcal{H}_\mu^r\}$.

Comenzamos estableciendo la igualdad de los operadores $''P(S_\mu)''$ y $'P(S_\mu)'$.

Proposición 7.1. $''P(S_\mu)''='P(S_\mu)'$.

Demostración. Sea $\psi\in D(''P(S_\mu)'')$. Puesto que $\psi\in\mathcal{H}'_\mu$, según ZEMANIAN [1968, Theorem 5.5-2] tenemos

$$\langle P(S_\mu)\psi,\phi\rangle = \langle\psi,P(S_\mu)\phi\rangle = \langle\mathfrak{H}'_\mu\psi,P(-x^2)(\mathfrak{H}_\mu\phi)(x)\rangle = \langle\mathfrak{H}'_\mu(P(-x^2)\mathfrak{H}'_\mu\psi),\phi\rangle \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu).$$

La igualdad $\mathfrak{H}'_\mu\varphi=\mathfrak{H}_\mu\varphi$ $(\varphi\in L^2(I))$ entraña $\mathfrak{H}'_\mu(P(-x^2)(\mathfrak{H}'_\mu\psi))=\mathfrak{H}_\mu(P(-x^2)(\mathfrak{H}_\mu\psi))\in\mathcal{H}^r_\mu$. Luego $\psi\in D('P(S_\mu)')$, y $''P(S_\mu)''\psi='P(S_\mu)'\psi$. Similarmente, puede probarse que si $\psi\in D('P(S_\mu)')$ entonces $\psi\in D(''P(S_\mu)'')$ y $''P(S_\mu)''\psi='P(S_\mu)'\psi$.□

De acuerdo con la Proposición 7.1, de ahora en adelante escribiremos simplemente $P(S_\mu)$ en vez de $''P(S_\mu)''$ o $'P(S_\mu)'$. Además, como es habitual, $\rho(P(S_\mu))$ denotará el conjunto resolvente del operador $P(S_\mu)$, mientras que $R(\lambda;P(S_\mu))=(\lambda I-P(S_\mu))^{-1}$ $(\lambda\in\rho(P(S_\mu)))$ representará la resolvente de $P(S_\mu)$.

La existencia y unicidad de soluciones para problemas de Cauchy en los que comparece el operador $P(S_\mu)$ se hallan íntimamente ligadas al hecho de que este operador genera un semigrupo de operadores lineales en $\mathcal{H}^r_\mu$ (véase PAZY [1983, Chapter 4]).

Proposición 7.2. Sea $r\in\mathbb{N}$, y sea P un polinomio de coeficientes reales tal que $P(x)<0$ para $x\le 0$. El operador $P(S_\mu)$ genera en $\mathcal{H}^r_\mu$ un semigrupo analítico de operadores lineales $\{T_\mu(t)\}_{t\ge 0}$, dado por

$$T_\mu(t)\phi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda;P(S_\mu))\phi\,d\lambda \qquad (\phi\in\mathcal{H}^r_\mu). \tag{7.1}$$

Aquí Γ representa un camino plano $\lambda=\lambda(s)$ $(s\in\mathbb{R})$ tal que $\lim_{|s|\to\infty}|\lambda(s)|=\infty$; para $|s|$ pequeño, $\lambda(s)$ yace en el semiplano derecho del plano complejo λ; y para ciertos $\varepsilon,\theta>0$, $\frac{\pi}{2}+\varepsilon\le\operatorname{Arg}\lambda(s)\le\theta$ cuando $s\to+\infty$, mientras que $-\frac{\pi}{2}-\varepsilon\le\operatorname{Arg}\lambda(s)\le-\theta$ cuando $s\to-\infty$.

Demostración. Comenzamos observando que $D(P(S_\mu))$ es denso en $\mathcal{H}^r_\mu$, porque contiene a $\mathcal{B}_\mu$ (Proposición 2.12). Además, si $\lambda\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$ entonces $\lambda\in\rho(P(S_\mu))$, y

$$R(\lambda;P(S_\mu))\phi = \mathfrak{h}_\mu\left(\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)\right) \qquad (\phi\in\mathcal{H}^r_\mu).$$

En efecto, sea $\lambda\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$. En virtud del Teorema 2.2 se tiene

$$\left\|\mathfrak{h}_\mu\left(\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)\right)\right\|^2_{\mu,r} =$$

$$= \left\|\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)\right\|^2_{\mu,r}$$

$$\leq \sum_{m+k=0}^{r}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\int_0^\infty |x^{m+j}T_{\mu,k-j}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)|^2\left|(x^{-1}D)^j\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}\right|^2dx \qquad (7.2)$$

$$\leq \sum_{m+k=0}^{r}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sup_{x\in I}\left|(x^{-1}D)^j\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}\right|^2\int_0^\infty |x^{m+j}T_{\mu,k-j}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)|^2dx$$

$$\leq K_\lambda\|\mathfrak{h}_\mu\phi\|^2_{\mu,r} = K_\lambda\|\phi\|^2_{\mu,r} \qquad (\phi\in\mathcal{H}^r_\mu)$$

para cierto $K_\lambda>0$. Así pues, $\mathfrak{h}_\mu\left(\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)\right)$ define un operador lineal continuo de $\mathcal{H}^r_\mu$ en sí mismo.

Es fácil ver que

$$(\lambda I-P(S_\mu))\mathfrak{h}_\mu\left(\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}(\mathfrak{h}_\mu\phi)(x)\right) = \phi \qquad (\phi\in\mathcal{H}^r_\mu),$$

y

$$\mathfrak{h}_\mu\left(\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}(\mathfrak{h}_\mu(\lambda I-P(S_\mu))\phi)(x)\right) = \phi \qquad (\phi\in D(P(S_\mu))).$$

Por otra parte, un procedimiento inductivo basado en la igualdad

$$(x^{-1}D)^k\frac{1}{\lambda-P(-x^2)} = \frac{-1}{\lambda-P(-x^2)}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(x^{-1}D)^{k-j}\left(\frac{1}{\lambda-P(-x^2)}\right)(x^{-1}D)^j(\lambda-P(-x^2)),$$

válida para $k\in\mathbb{N}$, $x\in I$, y $\lambda\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, conduce a la estimación

$$\max_{0\le k\le r}\ \sup_{x\in I}\ \left|(x^{-1}D)^k \frac{1}{\lambda-P(-x^2)}\right| \le \frac{C}{|\lambda|} \qquad (\mathrm{Re}\lambda>0), \tag{7.3}$$

con $C>0$. Atendiendo a (7.2) y (7.3) se tiene

$$\|R(\lambda;P(S_\mu))\|_{\mu,r} \le \frac{A}{|\lambda|} \qquad (\mathrm{Re}\lambda>0), \tag{7.4}$$

donde $A>0$.

Sea ahora $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\lambda\le 0$ y $\left|\frac{\mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda}\right|<\frac{1}{2A}$. Elijamos $\lambda_0\in\mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}\lambda_0=\mathrm{Im}\lambda$ y $\mathrm{Re}\lambda_0\in]0,\frac{1}{4A}|\mathrm{Im}\lambda_0|[$, y definamos

$$S(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^m R(\lambda_0;P(S_\mu))^{m+1}.$$

Como $|\lambda_0-\lambda|\le\frac{3}{4A}|\lambda_0|$ y $\left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|\le\frac{2A+1}{2A}$, sigue de (7.4) que $S(\lambda)=R(\lambda;P(S_\mu))$, siendo

$$\|\lambda R(\lambda;P(S_\mu))\|_{\mu,r} \le \frac{2A+1}{2A}.$$

Consecuentemente, si $\lambda\in\mathbb{C}$ y $|\mathrm{Arg}\lambda|<\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arctg}\frac{1}{2A}$ entonces $\lambda\in\rho(P(S_\mu))$, y

$$\|\lambda R(\lambda;P(S_\mu))\|_{\mu,r} \le B$$

para una constante adecuada $B>0$. En virtud de PAZY **[1983,** Theorem 5.2**]** y YOSIDA **[1980,** p. 255**]**, se concluye que $P(S_\mu)$ es el generador infinitesimal en $\mathcal{H}_\mu^r$ de un semigrupo analítico de operadores lineales $\{T_\mu(t)\}_{t\ge 0}$, dado por (7.1), con $\theta=\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arctg}\frac{1}{2A}$ y $0<\varepsilon<\theta-\frac{\pi}{2}$. □

Procediendo como en la demostración de la Proposición 7.2 también se establece:

Proposición 7.3. Sea $r\in\mathbb{N}$. El operador S_μ genera en $\mathcal{H}_\mu^r$ un semigrupo analítico de operadores lineales $\{T_\mu(t)\}_{t\geq 0}$, dado por

$$T_\mu(t)\phi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda;P(S_\mu))\phi(\lambda)d\lambda \qquad (\phi\in\mathcal{H}_\mu^r),$$

donde Γ es como en la Proposición 7.2.

Consecuencia inmediata de PAZY [1983, Corollary 10.6 y Theorem 5.2], y de las Proposiciones 7.2 y 7.3, es:

Corolario 7.4. Sea $r\in\mathbb{N}$ y sea P un polinomio de coeficientes reales tal que $P(x)=x$ ó $P(x)<0$, para $x\leq 0$. El operador adjunto $P(S_\mu)'$ de $P(S_\mu)$ genera en $\mathcal{H}_\mu^{-r}$ el semigrupo analítico de operadores lineales $\{T_\mu(t)'\}_{t\geq 0}$, donde $T_\mu(t)'$ denota el adjunto de $T_\mu(t)$ $(t\geq 0)$.

Valiéndonos de PAZY [1983, Corollary 4-3.3] y de YOSIDA [1980, p. 255], deducimos de las Proposiciones 7.2 y 7.3 la siguiente.

Proposición 7.5. Sea $r\in\mathbb{N}$ y sea P un polinomio de coeficientes reales tal que $P(x)=x$ ó $P(x)<0$, para $x\leq 0$. Si $f\in L^1(]0,T[;\mathcal{H}_\mu^r)$ es localmente Hölder-continua en $]0,T]$ $(T>0)$, entonces para cada $\phi\in\mathcal{H}_\mu^r$ el problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = P(S_\mu)u(x,t)+f(t) & (0\leq t\leq T), \\ u(x,0) = \phi(x) & \end{array}\right. \tag{7.5}$$

tiene una única solución, dada por

$$u(x,t) = T_\mu(t)\phi(x) + \int_0^t T_\mu(t-s)f(s)ds \qquad (0\leq t\leq T),$$

donde $\{T_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ denota el semigrupo de operadores lineales generado por $P(S_\mu)$. Además, si $f=0$ entonces la única solución de (7.5) es regular como función de $t>0$.

Nota. En la Proposición 7.5, $P(S_\mu)$, $T_\mu(t)$, y $\mathcal{H}_\mu^r$ pueden ser sustituidos por $P(S_\mu)'$, $T_\mu(t)'$, y $\mathcal{H}_\mu^{-r}$, respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

BARROS-NETO, J.

[1981] *An Introduction to the Theory of Distributions*. R. E. Krieger, Malabar, Florida.

BETANCOR, J.J.

[1991] *A characterization of Hankel transformable generalized functions*, Internat. J. Math. Math. Sci. **14**, 269–274.

BETANCOR, J.J. - MARRERO, I.

[1992a] *Some linear topological properties of the Zemanian space* $\mathcal{H}_{\mu}$, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **61** (3–4), 299–314.

[1992b] *Multipliers of Hankel transformable generalized functions*, Comment. Math. Univ. Carolin. **33** (3), 389–401.

[1992c] *Structure and convergence in certain spaces of distributions and the generalized Hankel convolution*, Math. Japon., por aparecer.

[1992d] *Some properties of Hankel convolution operators*, Canad. Math. Bull., por aparecer.

[1992e] *A Hilbert-space approach to Hankel-transformable distributions*, Appl. Anal., por aparecer.

[1993a] *The Hankel convolution and the Zemanian spaces* $\mathcal{B}_{\mu}$ *and* $\mathcal{B}'_{\mu}$, Math. Nachr. **160**, 277–298.

[1993b] *Multipliers and convolution operators on Hankel transformable Hilbert spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **51** (2), 147–168.

BOCHNER, S.

[1948] *Vorlesungen über Fouriersche integrale*. Chelsea, New York.

CHOLEWINSKI, F.M.

[1965] *A Hankel Convolution Complex Inversion Theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **58**.

CHURCHILL, R.V.

[1972] *Operational Mathematics*. McGraw-Hill, New York.

DUBE, L.S. - PANDEY, J.N.

[1975] *On the Hankel transform of distributions*, Tôhoku Math. J. **27**, 337-354.

EIJNDHOVEN, S.J.L. van - GRAAF, J. de

[1983] *Some results on Hankel invariant distribution spaces*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **86** (1), 77-87.

ERDELYI, A. - MAGNUS, W. - OBERHETTINGER, F. - TRICOMI, F.G.

[1954] *Tables of Integral Transforms, Vol. II*. McGraw-Hill, New York.

FRIEDMAN, A.

[1963] *Generalized Functions and Partial Differential Equations*. Prentice Hall, New Jersey.

GOLDSTEIN, J.A.

[1985] *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford University Press, Oxford.

GONZALEZ, J.M.

[1985] *Sobre el problema de Cauchy para ecuaciones en derivadas parciales que contienen alguno de los operadores tipo Bessel* DP'_{μ} *o* S_{μ}. Tesis Doctoral, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.

[1991] *Cauchy's problem for partial differential equations with Bessel-type differential operators*, Jñānābha **21**, 135-150.

GROTHENDIECK, A.

[1955] *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16**.

HAIMO, D.T.

[1965] *Integral equations associated with Hankel convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **116**, 330–375.

HANKEL, H.

[1875] *Die Fouriers'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen*, Math. Ann. **8**, 471–494.

HIRSCHMAN I.I., Jr.

[1960/61] *Variation diminishing Hankel transforms*, J. Analyse Math. **8**, 302–336.

HORVATH, J.

[1966] *Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

JARCHOW, H.

[1981] *Locally convex spaces*. B.G. Teubner, Stuttgart.

KELLER, K.

[1983] *Some convergence properties of convolutions*, Studia Math. **77**, 87–94.

KELLEY, J.L.

[1968] *General topology*. D. van Nostrand, Princeton, New Jersey.

KITCHENS, L. - SWARTZ, Ch.

[1974] *Convergence in the dual of certain* $K\{M_p\}$*-spaces*, Colloq. Math. **30**, 149–155.

KOHAN, V.-K.

[1972] *Distributions, Analyse de Fourier, Operators aux Derivées Partielles, Tomes I, II*. Vuibert, Paris.

KUCERA, J.

[1969a] *Fourier* L^2*-transforms of distributions*, Czechoslovak Math. J. **19** (94), 143–153.

[1969b] *Laplace* L^2*-transforms of distributions*, Czechoslovak Math. J. **19** (94), 181–189.

[1971] *On multipliers of temperate distributions*, Czechoslovak Math. J. **21** (96), 610–618.

[1976] *Extension of the L. Schwartz space* $\mathcal{O}_M$ *of multipliers of temperate distributions*, J. Math. Anal. Appl. **56**, 368–372.

KUCERA, J. - McKENNON, K.

[1975] *Certain topologies on the space of temperate distributions and its multipliers*, Indiana Univ. Math. J. **24** (8), 773–775.

MÉNDEZ, J.M.

[1988] *A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation*, Proc. Amer. Math. Soc. **102**, 619–624.

OBERHETTINGER, F.

[1972] *Tables of Bessel transforms*. Springer, Berlin.

PAZY, A.

[1983] *Semigroups of Linear Operators and Applications in Partial Differential Equations*. Springer, New York.

PICARD, R.H.

[1990] *A Hilbert space approach to distributions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115**, 275–288.

PIETSCH, A.

[1972] *Nuclear Locally Convex Spaces*. Springer, Berlin.

PRICE, J.F.

[1969] *Multipliers between some spaces of distributions*, J. Austral. Math. Soc. **9**, 415–423.

RUDIN, W.

[1991] *Functional Analysis*, 2nd. ed.. McGraw-Hill, New York.

SAMPSON, G. - ZIELEZNY, Z.

[1976] *Hypoelliptic convolution equations in* $\mathcal{K}'_p$, $p>1$, Trans. Amer. Math. Soc. **223**, 133–154.

SANCHEZ, A.M.

[1987] *La transformación integral generalizada de Hankel-Schwartz.* Tesis Doctoral, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.

SCHAEFER, H.H.

[1971] *Topological Vector Spaces.* Springer, New York.

SCHWARTZ, A.L.

[1969] *An inversion theorem for Hankel transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (3), 713–717.

SCHWARTZ, L.

[1978] *Théorie des Distributions, Vols. I, II*, reimpresión. Hermann, Paris.

SOUSA PINTO, J. de

[1985] *A generalized Hankel convolution*, SIAM J. Math. Anal. **16**, 1335–1346.

SWARTZ, Ch.

[1972a] *Continuous linear functionals on certain* $K\{M_p\}$ *spaces*, SIAM J. Math. Anal. **3**, 595–598.

[1972b] *Convergence of convolution operators*, Studia Math. **42** (1972), 249–257.

[1992] *An Introduction to Functional Analysis.* M. Dekker, New York.

SZNAJDER, S. - ZIELEZNY, Z.

[1978] *On some properties of convolution operators in* $\mathcal{K}'_1$ *and* $\mathcal{S}'$, J. Math. Anal. Appl. 65, 543–554.

TIEN, Sh.-Y.

[1973] *The Topologies on the Spaces of Multipliers and Convolution Operators on* $K\{M_p\}$ *Spaces.* Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico.

TITCHMARSH, E.C.

[1948] *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford University Press, Oxford.

TREVES, F.

[1967] *Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels.* Academic Press, New York.

WATSON, G.N.

[1956] *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, Cambridge.

WILANSKY, A.

[1978] *Modern Methods in Topological Vector Spaces.* McGraw-Hill, New York.

WONG, Y.-Ch.

[1979] *Schwartz Spaces, Nuclear Spaces, and Tensor Products.* Lecture Notes in Math. 726, Springer, Berlin.

YOSIDA, K.

[1980] *Functional Analysis.* Springer, Berlin.

ZEMANIAN, A.H.

[1966a] *A distributional Hankel transform,* SIAM J. Appl. Math. 14, 561–576.

[1966b] *The Hankel transformation of certain distributions of rapid growth*, SIAM J. Appl. Math. **14**, 678–690.

[1968] *Generalized Integral Transformations*. Interscience, New York.

ZIELEZNY, Z.

[1968] *On the space of convolution operators in* $\mathcal{K}_1$, Studia Math. **31**, 111–124.