Curso 1995/96

CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

CLAUDIO JEREZ DÍAZ

Transformaciones integrales de Watson en espacios de funciones y de distribuciones

Director

JORGE JUAN BETANCOR PÉREZ

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS

Serie Tesis Doctorales

A Margarita, Daniel y Javier.

Reconocimiento

Esta Memoria ha sido realizada bajo la dirección del Dr. D. Jorge J. Betancor, al que expreso mi más sincero agradecimiento, por su constante apoyo, seguimiento permanente y sobre todo por su infinita paciencia, sin la que esta Memoria no se habría podido llevar a buen término.

Mi agradecimiento también al resto de los compañeros del Departamento que me apoyaron y alentaron en todo momento.

Contenido

Prólogo

En la literatura matemática se conocen como transformaciones integrales de Watson aquellas que toman la forma

$$\mathbf{H}(f)(y) = \int_0^\infty k(xy) f(x) dx \ , \quad y \in (0, \infty) \ , \tag{.1}$$

donde la función k es llamada núcleo de la transformación $\mathbf{H}$. Dentro de esta clase de transformaciones integrales se encuentran, entre otras, las conocidas tranformaciones de Fourier–seno, Fourier–coseno, Hankel y Meijer.

Como es sabido la transformación integral de Mellin, que está intimamente relacionada con las transformaciones de Fourier y Laplace, se define como sigue

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \ , \ \ s \in \Omega \ ,$$

donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{C}$ que depende de la función f. Cuando f satisface adecuadas condiciones (véase, por ejemplo, I.N. Sneddon [73]) existe $c \in \mathbb{R}$ de manera que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \mathcal{M}(f)(s) ds \ , \quad x \in (0, \infty) \ .$$

La transformación $\mathbf{H}$ de Watson (definida en (.1)) se relaciona con la de Mellin por medio de la fórmula de multiplicación

$$\mathcal{M}\left[\mathbf{H}(f)\right](s) = K(s)\mathcal{M}(f)(1-s)$$

donde $K = \mathcal{M}(k)$, o, dicho de otra manera,

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{T}_k \circ \mathcal{M}(f)$$

Siendo $\mathcal{M}^{-1}$ la inversa de la transformación de Mellin y $\mathcal{T}_k$ la aplicación definida por

$$\mathcal{T}_k(F)(s) = K(s)F(1-s)\ .$$

Siguiendo a Ch. Fox [34], definimos las transformaciones de convolución de Watson como a continuación indicamos. Sean h y k dos funciones definidas en el intervalo $(0,\infty)$ que dan lugar al par recíproco de transformaciones de Watson

$$g(y) = \mathbf{H}(f)(y) = \int_0^\infty k(xy)f(x)dx\ , \quad y \in (0,\infty)\ ,$$

$$f(x) = \mathbf{H}^{-1}(g)(x) = \int_0^\infty h(xy)g(y)dy\ , \quad x \in (0,\infty)\ .$$

Definimos la transformación de convolución asociada a h y k por

$$W(f)(y) = \int_0^\infty f(x)L(x,y)dx\ , \quad y \in (0,\infty)\ ,$$

donde $L(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{h(xy)k(xy)}{E(u)}du$, $x, y \in (0,\infty)$, y $E(u) = \displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_m^2}\right)$, $u \in (0,\infty)$, siendo $a_n > 0$, $n \in I\!N - \{0\}$, y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2} < \infty$.

En esta Memoria estudiamos transformaciones integrales de Watson y de convolución en diferentes espacios de funciones y de distribuciones. La hemos dividido en tres capítulos cuyo contenido pasamos a comentar de forma sucinta.

En el capítulo primero, que consta de tres partes, estudiamos una clase de transformaciones de Watson, conocidas como transformaciones $I\!H$ de Fox, en espacios L_p con pesos. El núcleo de la transformación $I\!H$ es la función $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$ introducida por Ch. Fox [34].

En [64] P.G. Rooney investigó el comportamiento de algunas transformaciones integrales en espacios L_p con pesos potenciales. En la teoría desarrollada por este autor es fundamental el análisis de multiplicadores para la transformación de Mellin. En la primera parte de este capítulo investigamos el comportamiento de la transformación $I\!H$ de Fox en espacios L_p con pesos potenciales. Además describimos, en diferentes casos, el recorrido de la transformación $\mathbb{H}$ sobre dichos espacios mediante otros conocidos operadores (transformadas de Laplace y Hankel e integrales fraccionarias). Los resultados presentados aquí extienden los recogidos por P.G. Rooney en [66].

La segunda parte del primer capítulo se dedica al estudio de la transformación $\mathbb{H}$ sobre espacios L_p con pesos generales.

En la tercera parte obtenemos una nueva fórmula de inversión para transformaciones integrales de tipo Hankel en ciertos espacios L_p con peso y para distribuciones de soporte compacto sobre $(0, \infty)$. Asimismo caracterizamos el recorrido de estas transformaciones sobre los espacios L_p considerados.

Existen fundamentalmente dos procedimientos para definir una transformación integral en un espacio de distribuciones. Estos usualmente se conocen como métodos del núcleo y del operador adjunto. En la monografía de A.H. Zemanian [84] pueden encontrarse diferentes transformaciones integrales definidas en espacios de funciones generalizadas por ambos procedimientos.

J.J. Betancor y J.A. Barrios ([11] y [12]) inspirados en los trabajos de A. Schuitman ([68] y [69]), investigaron las transformaciones integrales de Meijer y Kratzel en espacios de distribuciones siguiendo la via del operador adjunto. En el segundo capítulo de esta Memoria modificamos el método desarrollado en [68] y [69] y definimos una amplia clase de transformaciones del tipo (.1) en espacios de funciones generalizadas. Asimismo la teoría desarrollada puede ser aplicada a transformaciones dadas por

$$T(f)(y) = \int_0^\infty k\left(\frac{x}{y}\right)\phi(x)\frac{dx}{x}\ , \quad y \in (0, \infty)\ . \tag{.2}$$

De entre las transformaciones del tipo (.2) a las que puede ser aplicada la teoría destacan, por ejemplo, las integrales fraccionarias de Riemann–Liouville y de Weyl.

En el capítulo tercero estudiamos transformaciones de convolución en espacios de distribuciones.

En la primera parte investigamos transformaiones de convolución de Watson de funciones generalizadas empleando el método del núcleo.

La transformación de convolución de Hankel distribucional fue definida por J.N. Pandey [59] y J.J. Betancor [9] siguiendo el procedimiento anteriormente citado. En al segunda parte de este capítulo analizamos la transformación de convolución de Hankel en los espacios de funciones y distribuciones introducidos por A.H. Zemanian ([81] y [82]) en relación con la transformación de Hankel. Seguimos aqui el método del operador adjunto.

Capítulo I

La transformación $\mathbb{H}$ de Fox en espacios de tipo L_p

I.1 Introducción y preliminares

En este capítulo, que está dividido en tres partes, estudiamos el comportamiento de la transformación integral de la clase de Watson definida por

$$\mathbb{H}(f)(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left(xt\Big|_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)}^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}\right) f(t)dt \tag{I.1}$$

sobre ciertos espacios de tipo L_p. La función $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left(\cdot\Big|_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)}^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}\right)$, núcleo de la transformación (I.1), fue introducida por Ch. Fox [34] y es por ello usualmente conocida como función de Fox. Recordamos ahora la definición y establecemos algunas propiedades de la función $\mathcal{H}$ que serán muy útiles en lo que sigue. Sean m,n,p,q $\in \mathbb{N}$, tales que $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, y p+q$\geq$1. Sean también $\alpha_j > 0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $(j = 1, \ldots, p)$ y $\beta_j > 0$, $b_j \in \mathbb{R}$, $(j = 1, \ldots, q)$. Definimos

$$\mathfrak{H}(s) = \mathfrak{H}_{p,q}^{m,n}\left(s\Big|_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)}^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}\right) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s)}. \tag{I.2}$$

En la última expresión si aparecen productos vacíos éstos son entendidos como 1.

Introducimos a continuación algunos parámetros reales que aparecen involucrados en interesantes propiedades de la función $\mathfrak{H}$. Estos son

$$\alpha = \begin{cases} \text{máx}\left\{-\frac{b_j}{\beta_j},\ j=1,\dots,m\right\}, & si \quad m>0 \\ -\infty, & si \quad m=0 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \text{mín}\left\{\frac{1-a_j}{\alpha_j},\ j=1,\dots,n\right\}, & si \quad n>0 \\ +\infty, & si \quad n=0 \end{cases}$$

$$\delta = m+n-\tfrac{1}{2}(p+q), \quad \mu = \sum_{j=1}^{q}\beta_j - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j, \quad \mu_1 = \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j$$

$$\mu_2 = \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j, \quad \nu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j, \quad \eta = \prod_{j=1}^{p}{\alpha_j}^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{q}{\beta_j}^{-\beta_j},$$

$$\xi = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j - \sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j + \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j.$$

Observamos inicialmente que la función $\mathfrak{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ es holomorfa en la banda $\alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta$.

En la siguiente proposición establecemos el comportamiento de las funciones $\mathfrak{H}(s)$ y $\mathfrak{H}'(s)$ cuando $|Im\, s| \to \infty$.

Proposición I.1.1 *(a)*

$$|\mathfrak{H}(\sigma+it)| \sim (2\pi)^{\delta}\eta^{-\sigma}\prod_{j=1}^{p}\alpha_j^{-a_j+\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{b_j-\frac{1}{2}}|t|^{\nu+\mu\sigma+\frac{p-q}{2}}exp\left(-\frac{\pi}{2}\xi|t|\right), \tag{I.3}$$

cuando $|t| \to \infty$, uniformemente en $\sigma \in \mathbb{K}$, para cada subconjunto $\mathbb{K}$ acotado de $\mathbb{R}$.

(b)

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{H}(\sigma+it) = i\mathfrak{H}(\sigma+it)\left\{\mu log|t| - log\eta + i\frac{\pi}{2}\xi sgnt + \frac{\nu+\mu\sigma+\frac{p-q}{2}}{it} + O(t^{-2})\right\} \tag{I.4}$$

cuando $|t| \to \infty$, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \sigma < \beta$. Aquí como es usual $sgn\, t = \frac{t}{|t|}$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Demostración: Para probar (a) es suficiente tener en cuenta que según 1.18(6) [30],

$$|\Gamma(x+iy)| \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}}|y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\pi\frac{|y|}{2}}, \text{ cuando } |y| \to \infty , \tag{I.5}$$

uniformemente en $x \in \mathbb{K}$, para cada subconjunto $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbb{R}$.

Por otra parte, para cada $s \in \mathbb{C}$ siendo $\alpha < \mathit{I\!R}e\, s < \beta$ se tiene

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{H}(s) = \mathfrak{H}(s)\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j\Psi(b_j+\beta_j s) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Psi(1-a_j-\alpha_j s)+\right.$$

$$\left. + \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j\Psi(1-b_j-\beta_j s) - \sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j\Psi(a_j+\alpha_j s)\right]$$

donde $\Psi(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$. Luego, ya que para cada $c \in \mathbb{C}$ y $\sigma \in \mathbb{R}$, tales que $\alpha < \mathit{I\!R}e\, c + \sigma < \beta$ (1,18(7) [30])

$$\Psi(c+\sigma \pm it) = log(\pm it) \pm \frac{c+\sigma-\frac{1}{2}}{it} + O(t^{-2}), \ \textit{cuando } |t| \to \infty , \tag{I.6}$$

la igualdad en (b) se sigue. ■

Decimos que $\gamma \in \mathit{I\!R}$ está en el conjunto excepcional (manteniendo la nomenclatura de [66]) para $\mathfrak{H}$ si $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $\mathfrak{H}$ tiene un cero en $1-\gamma$. Este conjunto jugará un importante papel en el estudio posterior.

La función $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x\middle|{}^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)}\right)$, $x \in (0,\infty)$, fue introducida por Ch. Fox [34]. Especificamos a continuación algunos casos en los que la función $\mathcal{H}$ es la transformación de Mellin de $\mathfrak{H}$.

Proposición I.1.2 *Sea $\alpha < \gamma < \beta$. Si se satisface una de las dos condiciones que siguen*

(i) $\xi > 0$;

(ii) $\xi = 0$, $\mu \neq 0$ *y* $\nu + \mu\gamma - \frac{1}{2}(q-p) \leq 0$,

entonces

$$\mathcal{H}(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} x^{-s}\mathfrak{H}(s)ds\,, \quad x \in (0,\infty). \tag{I.7}$$

Además si $\xi = 0$, $\mu = 0$ *y* $\nu - \frac{1}{2}(q-p) < 0$ *entonces (I.7) se verifica para cada* $x \in (0,\infty)$ *excepto* $x = \eta^{-1}$.

Demostración .Los resultados recogidos en esta proposición pueden ser probados como los correspondientes en el Lema 3.2 [66] recurriendo a la Proposición I.1.1.

■

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es la que sigue.

Corolario I.1.1 *Sea* $\alpha < \gamma < \beta$. *Si se verifica una de las dos condiciones siguientes*

(i) $\xi > 0$ *;*

(ii) $\xi = 0$, $\mu \neq 0$ *y* $\nu + \mu\gamma - \frac{1}{2}(q-p) < -1$*;*

entonces

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}\mathfrak{H}(s)ds \tag{I.8}$$

y

$$|\mathcal{H}(x)| \leq A_\gamma x^{-\gamma} \tag{I.9}$$

para cada $x \in (0,\infty)$, *donde* A_γ *es una constante positiva adecuada. Además, si* $\xi = 0$, $\mu = 0$ *y* $\nu - \frac{1}{2}(q-p) < -1$ *entonces (I.8) y (I.9) se tienen para cada* $x \in (0,\infty)$ *excepto para* $x = \eta^{-1}$. ■

P.G. Rooney ([61], [65], [66] y [67]) y P. Heywood y P.G. Rooney ([38] y [39]) han estudiado diferentes transformaciones integrales en espacios L_p pesados. En el procedimiento empleado por los anteriores autores los multiplicadores para la transformación integral de Mellin juegan un papel esencial. En esta misma linea destacan los trabajos de A.C. McBride y W.J. Spratt ([50], [51] y [52]).

En la primera parte de este capítulo inspirados en el trabajo de P.G. Rooney [66] investigamos la transformación $\mathbb{H}$ sobre espacios L_p con pesos potenciales. Concretamente consideramos para cada $\gamma \in \mathbb{R}$ y $1 \leq r \leq \infty$ el espacio $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ que está constituido por las funciones f medibles complejas sobre $(0, \infty)$ tales que

$$\|f\|_{\gamma,r} = \left\{ \int_0^\infty |x^\gamma f(x)|^r \, \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{r}} < \infty \ , \quad 1 \leq r < \infty \ ; \ \|f\|_{\gamma,\infty} = sup\,esen\; x^{1-\gamma}|f(x)| \, .$$

Analizamos el comportamiento de la transformación (I.1) sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$, describiendo en diferentes casos el recorrido de la misma en términos de operadores muy conocidos y estudiados como las integrales fraccionarias y la transformación integral de Laplace. Los resultados obtenidos generalizan los que se establecen en [66].

Recurriremos en nuestro estudio a una clase de funciones introducida por P.G. Rooney [64] que denotaremos por $\mathcal{A}$ y que está constituida por aquellas funciones m para las que existen dos números $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ en la recta real extendida tales que

(a) $m(s)$ es holomorfa en la banda $\alpha(m) < \ \mathbb{R}e\, s \ < \beta(m)$;

(b) m es acotada en $\sigma_1 {\leq} \mathbb{R}e\, s {\leq} \sigma_2$, siempre que $\alpha(m) < \sigma_1 {\leq} \sigma_2 < \beta(m)$; y

(c) $\left| \frac{d}{dt} m(\sigma + it) \right| = 0 \left(|t|^{-1} \right)$, cuando $|t| \to \infty$, para cada $\alpha(m) < \sigma < \beta(m)$.

Asimismo resulta de especial importancia la transformación integral de Mellin [64], la cual, como es sabido, está definida por

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt \, , \quad s \in \Omega$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, depende de f.

Si X e Y son dos espacios de Banach denotamos por $[X, Y]$ el espacio de las transformaciones acotadas de X en Y. Para simplificar denotaremos por $[X]$ al espacio $[X, X]$. En nuestro caso X e Y serán espacios L_p con peso.

Además para cada $1 < r < \infty$ definimos $\gamma(r) = \text{máx} \left\{ \frac{1}{r} \, , \, 1 - \frac{1}{r} \right\}$.

Desigualdades L_p pesadas para la transformación integral de Fourier han sido investigadas por diferentes autores en los últimos años (véanse por ejemplo [3], [4],

[5], [37], [40] y [57]). Con esta motivación en la segunda parte de este capítulo analizamos desigualdades pesadas para la transformación $\mathbb{H}$ definida en (I.1). Más concretamente obtenemos condiciones sobre una medida positiva Ω de Borel sobre $(0,\infty)$, y una función v medible no negativa sobre $(0,\infty)$ que son suficientes para que se de la desigualdad

$$\left\{\int_0^\infty |\mathbb{H}(f)(x)|^s \, d\Omega(x)\right\}^{\frac{1}{s}} \leq C\left\{\int_0^\infty v(x)\,|f(x)|^r \, dx\right\}^{\frac{1}{r}}, \quad f \in C_0\,, \tag{I.10}$$

donde $1 \leq r\,,\, s \leq \infty$ y C una constante positiva que no depende de $f \in C_0$. (Cuando r o $s = \infty$ la desigualdad (I.10) toma la forma obvia). Determinamos también condiciones sobre Ω y v que son necesarias para la verificación de (I.10). Además son estudiados algunos casos especiales de (I.10). Aquí, como es usual, C_0 representa el espacio de las funciones continuas con soporte compacto en $(0,\infty)$.

En la tercera parte de este capítulo consideramos una transformación integral tipo Hankel definida por

$$h_\nu(f)(y) = \int_0^\infty x^\nu C_\nu(xy) f(x) dx\,, \quad f \in C_0\,, \tag{I.11}$$

donde $C_\nu(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu\left(2\sqrt{z}\right)$, $z \in (0,\infty)$, es la función de Bessel–Clifford (véase N. Hayek [36]) de primera especie y orden ν. En lo que sigue, salvo que se diga otra cosa, el orden ν será un número real mayor o igual que $-\frac{1}{2}$. La transformación (I.11), que es usualmente conocida como transformación de Hankel–Clifford, ha sido estudiada en espacios de distribuciones por J.M.R. Méndez and M.M. Socas [56] y J.J. Betancor [8], entre otros. La transformación h_ν puede verse como una transformación $\mathbb{H}$ ya que la función C_ν es una función de Fox (véase [31], pag. 326).

En esta parte obtenemos una nueva fórmula de inversión para la transformación h_ν.

Introducimos el operador

$$\mathbf{H}^\nu_{k,t}[F] = \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) F(y) dy$$

para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, $t \in (0, \infty)$. Aquí ${}_1F_1$ representa la función hipergeométrica confluente ([72]). Veremos que, cuando se satisfacen adecuadas condiciones, el operador $\mathbf{H}^{\nu}_{k,t}$ está relacionado con el operador de Post–Widder definido por

$$\mathbf{L}_{k,t}[F] = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) , \quad k \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ y } t \in (0, \infty) .$$

Como es bien conocido, el operador de Post–Widder permite obtener una fórmula para la transformación integral de Laplace ([77]).

P.G. Rooney [62] investigó una fórmula de inversión para la transformación integral de Fourier haciendo uso del operador

$$\mathbf{F}_{k,t}[F] = \frac{\left(-\frac{ik}{t}\right)^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{ik}{t}\right)^{k+1}} F(x)dx , \quad k \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ y } t \in (0, \infty) .$$

$\mathbf{F}_{k,t}$ está también conectado con el operador de Post–Widder. El operador de inversión $\mathbf{F}_{k,t}$ permitió a P.G. Rooney [61] obtener caracterizaciones de la transformación de Fourier de ciertos espacios de la clase L_p .

En la Sección 8 damos condiciones bajo las cuales la fórmula de inversión

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^{\nu}_{k,t}\left[h_\nu f\right] = f(t) \tag{I.12}$$

se verifica cuando f es una función en un cierto espacio $\mathbf{L}_p$ pesado. El límite en (I.12) es entendido como un límite puntual o bien como un límite en el espacio L_p.

Además en la Sección 10 probamos una versión distribucional de la igualdad (I.12). Concretamente establecemos que si f es una distribución de soporte compacto sobre $(0, \infty)$ entonces (I.12) se verifica cuando el límite es entendido en la topología débil * de $\mathcal{D}'(I)$.

Los espacios $\mathcal{E}(0, \infty)$, $\mathcal{D}(0, \infty)$ y sus duales a los que recurrimos en la última Sección son bien conocidos y sus definiciones pueden ser encontradas en [70] o [84], por ejemplo.

Resultan muy útiles en el estudio desarrollado los comportamientos de las funciones C_ν y ${}_1F_1$ cerca del origen y del infinito. Para la función de Bessel–Clifford (vease [76]) tenemos

$$C_\nu(z) = O(1)\,, \quad \text{cuando } z \to 0^+\,, \tag{I.13}$$

y

$$C_\nu(z) = O\left(z^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\right)\,, \quad \text{cuando } z \to \infty\,. \tag{I.14}$$

También, para cada $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}$ son válidos (véase [72])

$${}_1F_1\,(a; b; -z) = O(1)\,, \quad \text{cuando } z \to 0^+\,, \tag{I.15}$$

y

$${}_1F_1\,(a; b; -z) = O\left(z^{-a}\right)\,, \quad \text{cuando } z \to \infty\,. \tag{I.16}$$

A lo largo de este Capítulo denotaremos por C siempre a una constante positiva adecuada no necesariamente la misma en cada aparición.

PRIMERA PARTE

La transformación $\mathbb{H}$ de Fox en los espacios $\mathcal{L}_{\gamma,r}$

Esta primera parte se dedica al estudio de la transformación integral $\mathbb{H}$ en los espacios $\mathcal{L}_{\gamma,r}$. Comenzamos (Sección 2) investigando $\mathbb{H}$ en $\mathcal{L}_{\gamma,2}$. En las secciones 3 y 4 analizamos la acotación de la transformación de Fox en los espacios $\mathcal{L}_{\gamma,r}$, $1 < r < \infty$, describiendo el recorrido de esta transformada en términos de integrales fraccionarias y la transformación de Laplace. El estudio de la transformación $\mathbb{H}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,1}$ es abordado en la sección 5. Finalizaremos esta parte presentando algunos casos particulares de la teoría desarrollada.

I.2 La transformación $\mathbb{H}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,2}$

En esta sección estudiamos la transformación $\mathbb{H}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,2}$.

Proposición I.2.1 *Sea $\alpha < 1-\gamma < \beta$. Supongamos que una de las dos condiciones que siguen se satisface:*

(i) $\xi > 0$ *;*

(ii) $\xi = 0$ *y* $\nu + \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}(q-p) \leq 0.$

Entonces existe una transformación $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}\ ,\ \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ uno a uno y tal que para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$

$$(\mathcal{M}\mathrm{T}f)(s) = \mathfrak{H}_{p,q}^{m,n}\left(s\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma. \tag{I.17}$$

Además T es sobre siempre que $\xi = 0$, $\nu + \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}(q-p) = 0$ y γ no pertenezca al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$.

Para cada $f, g \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$ se tiene

$$\int_0^\infty (Tf)(x)g(x)dx = \int_0^\infty f(x)\,(Tg)(x)dx. \tag{I.18}$$

También, si $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$ la transformada Tf de f viene dada por

$$(Tf)(x) = x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{\lambda+1}\int_0^\infty \mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(xt\Bigg|^{(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)}\right)f(t)dt, \text{ c. t. } x>0 \tag{I.19}$$

siempre que $\lambda > -\gamma$, y

$$(Tf)(x) = -x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{\lambda+1}\int_0^\infty \mathcal{H}^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left(xt\Bigg|^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)(-\lambda,1)}_{(-1-\lambda,1)(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)}\right)f(t)dt, \text{ c.t. } x>0 \tag{I.20}$$

cuando $\lambda < -\gamma$.

Además la transformación T no depende de γ en el sentido siguiente: si γ_i, satisface que $\alpha < 1-\gamma_i < \beta$, $i = 1, 2$, y $\xi > 0$ o $\nu + \mu(1-\gamma_i) - \frac{1}{2}(q-p) \leq 0$, i=1, 2, y T_i representa la transformación asociada a γ_i, i=1,2, entonces $T_1 f = T_2 f$, para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma_1,2} \cap \mathcal{L}_{\gamma_2,2}$.

Demostración . Sea $\alpha < 1-\gamma < \beta$. Definimos $\omega(t) = \mathfrak{H}(1-\gamma+it)$, $t \in \mathbb{R}$, ω es una función continua sobre $\mathbb{R}$ ya que $\alpha < 1-\gamma < \beta$. Además, en virtud de la Proposición I.1.1, $\omega(t) = O(1)$, cuando $|t| \to \infty$, siempre que se verifique una de las dos condiciones (i) o (ii) del enunciado. Por tanto $\omega \in L_\infty(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas sobre $\mathbb{R}$, y de acuerdo con el Lema 4.1(b) [66] existe una transformación $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ tal que para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$

$$(\mathcal{M}Tf)(1-\gamma+it) = \omega(t)(\mathcal{M}f)(\gamma-it), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al ser $\mathfrak{H}$ una función holomorfa en la banda $\alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta$, como $\mathfrak{H}$ no es idénticamente nula, los ceros de $\mathfrak{H}$ son aislados y $\omega(t) \neq 0$, casi todo $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente T es uno a uno.

Por otra parte, si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, $\omega(t) \neq 0$, para cada $t \in \mathbb{R}$, y de (I.3) se deduce que si $\xi = 0$ y $\nu + \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}(q-p) = 0$

$\frac{1}{\omega} \in L_\infty(\mathbb{R})$. Entonces el Lema 4.1(c) [66] implica que T es sobre. La igualdad (I.18) se sigue tambien del Lema 4.1(c) [66].

Probamos ahora la representación de T recogida en la fórmula (I.19). Sea $\lambda > -\gamma$. La función $\dfrac{\mathfrak{H}(1-\gamma+it)}{\lambda+\gamma-it}$, $t \in \mathbb{R}$, está en $L_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{\frac{1}{2},2}$. Ya que la transformación de Mellin es un operador unitario de $\mathcal{L}_{1-\gamma,2}$ sobre $L_2(\mathbb{R})$, la función

$$k(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\gamma-iR}^{1-\gamma+iR} x^{-s}\frac{\mathfrak{H}(s)}{\lambda+1-s}ds \in \mathcal{L}_{1-\gamma,2}\,, \tag{I.21}$$

donde el límite es entendido en el espacio $\mathcal{L}_{1-\gamma,2}$. También podemos escribir

$$\frac{\mathfrak{H}(s)}{\lambda+1-s} = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s)\Gamma(1-(-\lambda)-s)}{\displaystyle\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)\Gamma(1-(-1-\lambda)-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s)} =$$

$$= \mathfrak{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(s\left|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right.\right)\,, \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma\,.$$

Denotamos con primas los parámetros asociados a la última función. Estos se relacionan con los correspondientes a la función $\mathfrak{H}^{m,n}_{p,q}\left(s\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right)$ por: $\delta'=\delta$, $\mu'=\mu$, $\nu'=\nu-1$, $\xi'=\xi$, $\alpha'=\alpha$, $\beta'=min\{\beta,1+\lambda\}$, $n'=n+1$, $m'=m$, $p'=p+1$ y $q'=q+1$. Por tanto en virtud de la Proposición I.1.2

$$\mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x\left|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right.\right) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\gamma-iR}^{1-\gamma+iR} x^{-s}\frac{\mathfrak{H}(s)}{\lambda+1-s}ds \tag{I.22}$$

para cada $x \in (0,\infty)$, excepto cuando $x = \eta^{-1}$, a lo sumo.

De (I.21) y (I.22) concluimos que

$$k(x) = \mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x\left|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right.\right)\,, \quad c.t.\ x\in(0,\infty)\,,$$

y el Lema 4.1(b) [66] permite obtener la representación (I.19) para T.

Para establecer (I.20) es suficiente considerar para cada cada $\lambda < -\gamma$ la función $\dfrac{\mathfrak{H}(s)}{\lambda+1-s} = -\dfrac{\mathfrak{H}(s)\Gamma(s-\lambda-1)}{\Gamma(s-\lambda)}$ y proceder como en el caso anterior.

Finalmente supongamos que $\alpha < 1-\gamma_i < \beta$, $i = 1, 2$, y que $\xi > 0$ o $\nu + \mu(1-\gamma_i) - \frac{1}{2}(q-p) \leq 0$, $i = 1, 2$. Elegimos $\lambda > max\{-\gamma_1, -\gamma_2\}$. Entonces para dicho λ, T_i admite la representación (I.19) sobre $\mathcal{L}_{\gamma_i,2}, i = 1, 2$. Por consiguiente $T_1 f(x) = T_2 f(x)$ para casi todo $x \in (0,\infty)$, para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma_1,2} \cap \mathcal{L}_{\gamma_2,2}$. ■

Nótese que las condiciones $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $\nu + \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}(q-p) \leq 0$ son compatibles siempre que una de las tres condiciones que siguen

(i) $\mu = 0$ y $\nu \leq \frac{1}{2}(q-p)$;

(ii) $\mu > 0$ y $\alpha < \frac{1}{\mu}(\frac{1}{2}(q-p)-\nu)$;

(iii) $\mu < 0$ y $\beta > \frac{1}{\mu}(\frac{1}{2}(q-p)-\nu)$;

se satisfaga. Por tanto la transformación T verificando (I.17) y acotada de $\mathcal{L}_{\gamma,2}$ en $\mathcal{L}_{1-\gamma,2}$ existe para cada $\gamma \in I\!R$ tal que $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y una de las tres condiciones anteriores se verifica.

De la Proposición I.2.1 se infiere el siguiente

Corolario I.2.1 *Sea $\alpha < 1-\gamma < \beta$. Si*

(i) $\xi > 0$, o

(ii) $\xi = 0$ y $\nu + \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}(q-p) < -1$

entonces Tf viene dado por (I.1) para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$.

Demostración: Es fácil ver que

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\lambda+1}\mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x\left|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\dots,(a_p,\alpha_p)\\ \\(b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right.\right)\right] =$$

$$= x^\lambda \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1),\dots,(a_p,\alpha_p) \\ \\ (b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q) \end{matrix}\right) \ , \quad c.t. \ x \in (0,\infty) \ ,$$

cuando $\lambda > \alpha - 1$. Derivando bajo el signo integral se deduce de (I.19) que

$$(Tf)(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(xt \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1),\cdots,(a_p,\alpha_p) \\ \\ (b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q) \end{matrix}\right) f(t)dt \ , \quad c.t. \ x \in (0,\infty) \ ,$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$. La derivación bajo el signo integral está justificada ya que de acuerdo con el Corolario I.1.1 y haciendo uso de la desigualdad de Hölder podemos escribir para cada $\gamma_i, i = 1,2$,verificando $\alpha < \gamma_1 < 1-\gamma < \gamma_2 < \beta$,

$$\int_0^\infty \left| \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(xt \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1),\dots,(a_p,\alpha_p) \\ \\ (b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q) \end{matrix}\right) f(t) \right| dt \leq$$

$$\leq M_1 x^{-\gamma_1} \int_0^{\frac{1}{x}} t^{-\gamma_1} |f(t)| \, dt + M_2 x^{-\gamma_2} \int_{\frac{1}{x}}^\infty t^{-\gamma_2} |f(t)| \, dt \leq$$

$$\leq \|f\|_{\gamma,2} \left[M_1 x^{-\gamma_1} \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} t^{2(1-\gamma-\gamma_1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{2}} + M_2 x^{-\gamma_2} \left\{ \int_{\frac{1}{x}}^\infty t^{2(1-\gamma-\gamma_2)-1} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right] < \infty$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$. Aquí, M_i, $i = 1, \ 2$, denota una adecuada constante positiva. ■

I.3 Acotación y recorrido de la transformación $\mathbb{H}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ cuando $\xi = 0$

En la Sección I.2 probamos que existe $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ verificando (I.17) cuando $\alpha < 1-\gamma < \beta$, $\xi = 0$ y $\nu + \mu(1-\gamma) - \frac{1}{2}(q-p) \leq 0$. Probaremos ahora que este operador T puede ser extendido a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ para cada $1 < r < \infty$ y para adecuados $1 < s < \infty$. Además describimos el recorrido $T(\mathcal{L}_{\gamma,r})$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ por medio de los siguientes operadores

$$(M_\xi f)(x) = x^\xi f(x) \ , \qquad \xi \in \mathbb{C}$$

$$(N_a f)(x) = f(x^a) \ , \quad a \in \mathbb{R} - \{0\},$$

$$(D_a f)(x) = f(ax) \ , \quad a \in (0, \infty),$$

$$(Rf)(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(\mathcal{I}_{a,b,c} f)(x) = \frac{a x^{-a(c+b-1)}}{\Gamma(b)} \int_0^x (x^a - t^a)^{b-1} t^{ac-1} f(t) dt \ , \ a > 0, \ \mathbb{R}e\, b > 0, \ \text{y } c \in \mathbb{C}$$

$$(\mathcal{J}_{a,b,c} f)(x) = \frac{a x^{ac}}{\Gamma(b)} \int_x^\infty (t^a - x^a)^{b-1} t^{-a(b+c-1)-1} f(t) dt \ , \ a > 0, \ \mathbb{R}e\, b > 0, \ \text{y } c \in \mathbb{C}$$

$$(h_{a,b} f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{\frac{1}{a} - \frac{1}{2}} J_b\left(|a| (xt)^{\frac{1}{a}}\right) f(t) dt \ , \ \mathbb{R}e\, b > -1 \ y \ a \neq 0,$$

donde J_b denota la función de Bessel de primera especie y orden b. El comportamiento de estos operadores sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ fue investigado en [66] (despues de la Definición 2.2 y el Teorema 5.1).

Dividiremos nuestro estudio en varios casos. En el resto de esta parte T denotará la transformación definida en la Proposición I.2.1.

Proposición I.3.1 *Sean $\alpha < 1 - \gamma < \beta$, $\xi = \mu = \nu - \frac{1}{2}(q-p) = 0$ y $1 < r < \infty$. Entonces $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ puede ser extendido a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,r}]$. T es uno a uno cuando $1 < r \leq 2$ o γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$. Además si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ entonces $T(\mathcal{L}_{\gamma,r}) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$. La igualdad (I.18) es cierta para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,r'}$. La transformación T admite la representación (I.19) (respectivamente, (I.20)) sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ siempre que $\lambda > -\gamma$ (respectivamente, $\lambda < -\gamma$).*

Demostración: Sabemos que (Proposición I.2.1) $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ y que para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$

$$(\mathcal{M} T f)(s) = \mathfrak{H}(s) (\mathcal{M} f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma.$$

Definimos la función $\ell(s) = \eta^s \mathfrak{H}(s)$. Es obvio que ℓ es holomorfa en la banda $\alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta$. Además, de la Proposición I.1.1 se infiere que

$$\left|\ell(\sigma + it)\right| \sim (2\pi)^{\delta} \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{-a_j+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{b_j-\frac{1}{2}} \quad , \textit{ cuando } \quad |t| \to \infty\,,$$

uniformemente en $\sigma \in \mathbb{K}$ subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, y

$$\frac{d}{dt}\ell(\sigma + it) = i\ell(\sigma + it) O\left(|t|^{-2}\right) = O\left(|t|^{-2}\right), \qquad \textit{cuando} \quad |t| \to \infty\,,$$

para cada $\alpha < \sigma < \beta$. Por tanto $\ell \in \mathcal{A}$ siendo $\alpha(\ell) = \alpha$ y $\beta(\ell) = \beta$. En virtud del Teorema 2.1 [66] existe $\mathfrak{L} \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}]$ para cada $\alpha < \gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. También, si $\alpha < \gamma < \beta$ y $1 < r \leq 2$ entonces para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}f)(s) = \ell(s)(\mathcal{M}f)(s), \quad \mathbb{R}e\, s = \gamma,$$

y $\mathfrak{L}$ es uno a uno en $\mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Definimos ahora $\mathfrak{L}_1 = D_\eta\, \mathfrak{L}\, R$. De acuerdo con las propiedades de D_η y R (ver comentarios después de la definición 2.2 [66]) se tiene que $\mathfrak{L}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,r}]$ cuando $\alpha < 1 - \gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$, y que

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1 - s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma,$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$, siendo $1 < r \leq 2$. En particular

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = (\mathcal{M}Tf)(s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma \textit{ y } \; f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}.$$

Por consiguiente $T = \mathfrak{L}_1$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,2}$ y $\mathfrak{L}_1$ es la única extensión de T a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$. En lo que sigue denotaremos también a $\mathfrak{L}_1$ por T. Ya que D_η y R son uno a uno, T también lo es cuando $1 < r < \infty$ y $\alpha < 1 - \gamma < \beta$.

Los ceros de ℓ, que son los mismos que los de $\mathfrak{H}(s)$, son reales y dividen al intervalo (α, β) en un número finito de intervalos. Denotamos por (α_1, β_1) uno de tales intervalos. La función $\frac{1}{\ell}$ es holomorfa en $\alpha_1 < \mathbb{R}e\, s < \beta_1$. También, recurriendo nuevamente a la Proposición I.1.1, tenemos

$$\left|\frac{1}{\ell(\sigma+it)}\right| \sim (2\pi)^{-\delta}\prod_{j=1}^{p} {a_j}^{a_j-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{q} {b_j}^{-b_j+\frac{1}{2}}, \quad cuando \quad |t|\to\infty,$$

uniformemente en $\sigma\in\mathbb{K}$, cuando $\mathbb{K}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, y

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\ell(\sigma+it)} = O\left(|t|^{-2}\right), \quad cuando \quad |t|\to\infty\ ,$$

para cada $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$. Del Teorema 2.1 [66] se deduce que T es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $\mathfrak{L}\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{\gamma,r}$, cuando $1 < r < \infty$ y $\alpha_1 < \gamma < \beta_1$. Por tanto, ya que $R\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ y $D_\eta\left(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$, para cada $1 < r < \infty$ y $\gamma\in\mathbb{R}$, $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ siempre que $1 < r < \infty$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y γ no esté en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$.

Probamos ahora la igualdad (I.18) para $f\in\mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g\in\mathcal{L}_{\gamma,r'}$. La desigualdad de Hölder permite escribir

$$\left|\int_0^\infty (Tf)(x)g(x)dx\right| \le \int_0^\infty \frac{\left|(Tf)(x)x^{1-\gamma}\right|\,\left|g(x)x^{\gamma}\right|}{x^{\frac{1}{r}}\quad x^{\frac{1}{r'}}}dx \le$$

$$\le \|Tf\|_{1-\gamma,r}\|g\|_{\gamma,r'} \le C_{r,\gamma}\|f\|_{\gamma,r}\|g\|_{\gamma,r'}\ ,$$

para cada $f\in\mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g\in\mathcal{L}_{\gamma,r'}$. Aquí $C_{r,\gamma}$ representa la norma de T como elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r},\mathcal{L}_{1-\gamma,r}]$. Por tanto la aplicación

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathcal{L}_{\gamma,r}\times\mathcal{L}_{\gamma,r'} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^\infty (Tf)(x)g(x)dx \end{array}$$

es acotada.

De un modo similar puede establecerse que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} Q: & \mathcal{L}_{\gamma,r}\times\mathcal{L}_{\gamma,r'} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^\infty f(x)(Tg)(x)dx \end{array}$$

es acotada.

En la Proposición I.2.1 fue mostrado que $P(f,g) = Q(f,g)$, para cada $f, g \in C_0$. Ya que C_0 es un subespacio denso en $\mathcal{L}_{\gamma,r}$, $P \equiv Q$ y la igualdad I.18 se da para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,r'}$.

Supongamos que $\lambda > -\gamma$ y consideremos para cada $x > 0$ la función

$$g_x(t) = \begin{cases} t^\lambda & , \ 0 < t < x \\ 0 & , \ t > x \ . \end{cases}$$

Nótese que $g_x \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$, $1 < r < \infty$. De (I.19) obtenemos

$$(Tg_x)(y) = y^{-\lambda}\frac{d}{dy}y^{\lambda+1}\int_0^\infty \mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(yt\middle|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right)g_x(t)dt =$$

$$= y^{-\lambda}\frac{d}{dy}\int_0^{xy} \mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(t\middle|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right)t^\lambda dt =$$

$$= x^{\lambda+1}\mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(xy\middle|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right), \quad c.t. \quad y \in (0,\infty)\,.$$

Luego de (I.18) se deduce

$$\int_0^x t^\lambda (Tf)(t)dt = x^{\lambda+1}\int_0^\infty \mathcal{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(xt\middle|\begin{matrix}(-\lambda,1),(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q),(-1-\lambda,1)\end{matrix}\right)f(t)dt,\ x \in (0,\infty),$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$, y derivando respecto a x concluimos (I.19) para $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Para probar (I.20) cuando $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ es suficiente proceder como en el caso anterior considerando la función

$$h_x(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 < t < x \\ t^\lambda & , \ t > x \, , \end{cases}$$

con $x \in (0,\infty)$ y $\lambda < -\gamma$ en lugar de g_x. ∎

Antes de establecer la siguiente proposición observamos que $m + n > 0$ cuando $\xi = 0$. En efecto, si $m = n = 0$ entonces $\xi = -\sum_{j=1}^{p}\alpha_j - \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 0$ ya que $\alpha_j > 0$, $j = 1,\ldots,p$, y $\beta_j > 0$, $j = 1,\ldots,q$.

Proposición I.3.2 *Supongamos que* $\alpha < 1-\gamma < \beta$ $\xi = \mu = 0$, $\nu - \frac{1}{2}(q-p) < 0$, *y* $1 < r < \infty$. *La transformación* $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ *puede ser extendida a* $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ *como un elemento de* $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ *siempre que* $r \le s$ *y* $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \nu - \frac{1}{2}(q-p)$. *Si* $1 < r \le 2$ *o* γ *no está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$ *entonces* T *es uno a uno. Además cuando* γ *no pertenece al conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$ *entonces*

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{J}_{1,-\nu+\frac{1}{2}(q-p),-\alpha}\left(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}\right), \;\; \textit{cuando} \quad \alpha > -\infty, \tag{I.23}$$

y

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{I}_{1,-\nu+\frac{1}{2}(q-p),\beta}\left(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}\right), \;\; \textit{cuando} \quad \beta < +\infty \,, \tag{I.24}$$

y si γ *está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$, $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ *es un subconjunto del conjunto que aparece a la derecha de (I.23) y (I.24). La igualdad (I.18) se verifica para cada* $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ *y* $g \in \mathcal{L}_{\gamma,\ell}$ *cuando* $\ell' \ge r$ *y* $\frac{1}{r} + \frac{1}{\ell} < 1 - \nu + \frac{1}{2}(q-p)$. T *admite la representación (I.19) (respectivamente (I.20)) cuando* $\lambda > -\gamma$ *(respectivamente* $\lambda < -\gamma$*), para cada* $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$. *Si* $\nu - \frac{1}{2}(q-p) < -1$ *entonces* T *viene dado por (I.1), para cada* $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Demostración: Supongamos primero que $m > 0$ o, lo que es lo mismo, que $\alpha > -\infty$. Definimos la función

$$z(s) = \eta^s \;\frac{\Gamma\left(s-\alpha-\nu+\frac{1}{2}(q-p)\right)}{\Gamma(s-\alpha)}\;\; \mathfrak{H}(s) \;\; \alpha < \mathbb{R}\mathrm{e}\, s < \beta\,.$$

z es una función holomorfa en $\alpha < \mathbb{R}\mathrm{e}\, s < \beta$. Además la Proposición I.1.1 implica

$$|z(\sigma+it)| \sim (2\pi)^{\delta} \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{-a_j+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{b_j-\frac{1}{2}}, \; \textit{cuando} \quad |t| \to \infty\,,$$

uniformemente en $\sigma \in \mathbb{K}$, para cada subconjunto $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbb{R}$ y

$$\frac{d}{dt} z(\sigma+it) = O\left(|t|^{-2}\right), \; \textit{cuando} \quad |t| \to \infty,$$

para cada $\alpha < \sigma < \beta$. Por tanto $z \in \mathcal{A}$ y de acuerdo con el Teorema 2.1 [66] existe $\mathfrak{Z} \in [L_{\gamma,r}]$ para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha < \gamma < \beta$, tal que para cada $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \gamma < \beta$

$$(\mathcal{M}\mathfrak{Z}f)(s) = z(s)(\mathcal{M}f)(s), \quad \mathbb{R}e\, s = \gamma\,,$$

cuando $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Introducimos ahora el operador

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathcal{J}_{1,-\nu+\frac{1}{2}(q-p),-\alpha}\, D_\eta\, \mathfrak{Z}\, R.$$

Teniendo en cuenta la acotación de operadores R, D_η, y $\mathcal{J}_{1,-\nu+\frac{1}{2}(q-p),-\alpha}$ sobre los espacios $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ (Teorema 5.1(b) [66]) se sigue que $\mathfrak{Z}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ siempre que $\alpha < 1-\gamma < \beta$, $1 < r < \infty$, $\nu - \frac{1}{2}(q-p) < 0$, $\xi = \mu = 0$, $s \geq r$ y $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \nu - \frac{1}{2}(q-p)$. También, para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $1 < r \leq 2$

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}\mathfrak{Z}_1 f)(s) &= \frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma\left(s-\alpha-\nu+\frac{1}{2}(q-p)\right)}\,\mathcal{M}\left[D_\eta\, \mathfrak{Z}\, R\, f\right](s) = \\ &= \frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma\left(s-\alpha-\nu+\frac{1}{2}(q-p)\right)}\,\eta^{-s}\,\mathcal{M}\left[\mathfrak{Z}\, R\, f\right](s) = \\ &= \mathfrak{H}(s)\,\mathcal{M}\left[R\, f\right](s) = \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \qquad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma.\end{aligned}$$

Luego, la Proposición I.2.1 implica que

$$(\mathcal{M}\mathfrak{Z}_1 f)(s) = (\mathcal{M}Tf)(s)\,, \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma,$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$. Entonces $\mathfrak{Z}_1 f = Tf$, $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$, y $\mathfrak{Z}_1$ es la única extensión de T a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}\,,\, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$. En el resto de la prueba denotaremos por T también a $\mathfrak{Z}_1$.

La inyectividad y el recorrido de T pueden ser estudiados como en la proposición anterior.

Nuestro objetivo es probar (I.18) para $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,\ell}$. Sean $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,\ell}$ donde $\ell' \geq r$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{\ell} < 1 - \nu + \frac{1}{2}(q-p)$. Usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\left|\int_0^\infty (Tf)(x)g(x)dx\right| \leq \int_0^\infty \frac{|(Tf)(x)x^{1-\gamma}|\,|g(x)x^{\gamma}|}{x^{\frac{1}{\ell'}}\quad x^{\frac{1}{\ell}}}dx \leq$$

$$\leq \|Tf\|_{1-\gamma,\ell'}\|g\|_{\gamma,\ell} \leq C\ \|f\|_{\gamma,r}\|g\|_{\gamma,\ell}\,,$$

donde C denota la norma de T como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r},\mathcal{L}_{1-\gamma,\ell'}]$.

Por tanto la aplicación bilineal

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathcal{L}_{\gamma,r}\times\mathcal{L}_{\gamma,\ell} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^\infty (Tf)(x)g(x)dx \end{array}$$

es acotada. Análogamente puede probarse que la aplicaión bilineal

$$\begin{array}{rccl} Q: & \mathcal{L}_{\gamma,r}\times\mathcal{L}_{\gamma,\ell} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \longrightarrow & \displaystyle\int_0^\infty f(x)(Tg)(x)dx \end{array}$$

es acotada. Ya que C_0 es denso en $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ y que (I.18) es cierta cuando f y $g \in C_0$, entonces (I.18) también se verifica para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,\ell}$.

Las representaciones (I.19) y (I.20) para T pueden ser probadas como las correspondientes en la Proposición I.3.1.

Finalmente (I.1) se sigue de (I.19) cuando $\nu - \frac{1}{2}(q-p) < -1$ derivando bajo el signo integral.

Para probar (I.24) podemos proceder como en la prueba de (I.23) considerando la función

$$\omega(s) = \frac{\Gamma\left(\beta-\nu+\frac{1}{2}(q-p)-s\right)}{\Gamma(\beta-s)}\eta^s\mathfrak{H}(s)\ , \quad \alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta\,,$$

en lugar de z. ∎

Proposición I.3.3 *Sean $\xi = 0$, $\mu < 0$, $1 < r < \infty$ y $\alpha_1 < 1-\gamma < \beta_1$ donde*

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \mathit{máx}\left\{\alpha, -\frac{1}{\mu}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\gamma(r)-\frac{1}{2}\right), \frac{2\rho}{\mu}\right\}\ y \\ \beta_1 = \mathit{mín}\left\{\beta, -\frac{2}{\mu}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\rho\right)\right\} \end{array}$$

siendo $\rho > \text{máx}\left\{\frac{\mu\beta}{2}, \frac{1}{2}\left(\gamma(r) - \frac{1}{2} - \nu - \frac{p-q}{2}\right), -\frac{\mu}{2}\alpha - \nu - \frac{p-q}{2}\right\}$. *Entonces* $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ *puede ser extendida a* $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ *como un elemento de* $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ *para cada* $s \geq r$ *siendo* $s' > \left[\frac{1}{2} - \mu(1-\gamma) - \nu - \frac{p-q}{2}\right]^{-1}$. *Si* $1 < r \leq 2$ *o* γ *no está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$, T *es uno a uno sobre* $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ *. Además si* γ *no pertenece al conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$ *se tiene que*

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \left(N_{\frac{2}{\mu}}\ M_{\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+1\right)}\ h_{2,\nu+\frac{p-q}{2}+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{1-\frac{\mu(1-\gamma)}{2}-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+1\right),\, r}\right) \quad \text{(I.25)}$$

y si γ *está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$, $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ *es un subconjunto del conjunto de la parte derecha en (I.25). La igualdad (I.18) se satisface para cada* $f, g \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$, *cuando* $1 < r \leq 2$ *y* $r > \left[\frac{1}{2} - \mu(1-\gamma) - \nu - \frac{p-q}{2}\right]^{-1}$. *También si estas últimas condiciones se verifican entonces se tiene (I.19) (respectivamente, (I.20)) cuando* $\lambda > -\gamma$ *(respectivamente,* $\lambda < -\gamma$*) para cada* $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Demostración: Nótese inicialmente que $\nu + (1-\gamma)\mu + \frac{p-q}{2} \leq 0$ ya que $\gamma(r) \geq \frac{1}{2}$. Por tanto la Proposición I.2.1 implica que $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ y que para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$

$$\left(\mathcal{M}Tf\right)(s) = \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma\,.$$

Definimos la función

$$\ell(s) = \frac{\Gamma\left(\rho - \frac{\mu}{2}s\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{p-q}{2} + \rho + \frac{\mu}{2}s\right)} a^s \mathfrak{H}(s)\,,$$

siendo $a = |\frac{\mu}{2}|^{\mu}\ \eta$ y $\rho > \text{máx}\left\{\frac{\mu\beta}{2}, \frac{1}{2}\left(\gamma(r) - \frac{1}{2} - \nu - \frac{q-p}{2}\right), -\frac{\mu}{2}\alpha - \nu - \frac{p-q}{2}\right\}$. ℓ es holomorfa en la banda $\alpha_2 = \text{máx}\left\{\alpha, \frac{2\rho}{\mu}\right\} < \mathbb{R}e\, s < \beta$. Además $\ell \in \mathcal{A}$. En efecto, (I.3) y (I.5) conducen a

$$\left|\ell(\sigma+it)\right| \sim (2\pi)^{\delta} \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{-a_j+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{b_j-\frac{1}{2}} \left|\frac{\mu}{2}\right|^{-\nu-\frac{q-p}{2}}, \quad \textit{cuando } |t| \to \infty,$$

uniformemente en $\sigma \in \mathbb{K}$ para cada subconjunto $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbb{R}$, y de (I.4) y (I.6) se sigue que

$$\frac{d}{dt}\ell(\sigma+it) = i\ell(\sigma+it)\left\{-\frac{\mu}{2}\left(\Psi\left(\rho-\frac{\mu}{2}(\sigma+it)\right)\right)+\right.$$
$$+\Psi\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\rho+\frac{\mu}{2}(\sigma+it)\right)+loga+\mu log|t|-log\eta+\frac{\nu+\mu\sigma+\frac{p-q}{2}}{it}+$$
$$\left.+O\left(|t|^{-2}\right)\right\} = O\left(|t|^{-2}\right), \text{ cuando } |t|\to\infty,$$

para cada $\alpha_2 < \sigma < \beta$.

Ya que $\ell \in \mathcal{A}$ con $\alpha(\ell) = \alpha_2$ y $\beta(\ell) = \beta$ el Teorema 2.1 [66] garantiza que existe $\mathfrak{L} \in [\mathcal{L}_{\varepsilon,r}]$ para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha_2 < \varepsilon < \beta$. Además si $1 < r \le 2$, $\mathfrak{L}$ es uno a uno y

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}f)(s) = \ell(s)(\mathcal{M}f)(s), \quad \mathbb{R}e\, s = \varepsilon\ ,$$

cuando $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon,r}$.

Consideramos la función

$$g(s) = g_{0,2}^{1,0}\left(s\left|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \nu+\frac{p-q}{2}+\rho & 1-\rho \end{array}\right.\right) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\rho+s\right)}{\Gamma(\rho-s)}.$$

En la notación de P.G. Rooney [66] los parámetros asociados a g son $\delta_g = n_g = p_g = 0$, $q_g = 2$, $m_g = k_g = 1$, $\ell_g = -1$, $\nu_g = \nu+\frac{p-q}{2}+1$, $\alpha_g = -\nu-\frac{p-q}{2}-\rho$ y $\beta_g = +\infty$. Nótese que si $1-\gamma < \text{mín}\left\{\beta, -\frac{2}{\mu}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\rho\right)\right\}$ entonces $\alpha_g = -\nu-\frac{p-q}{2}-\rho < \frac{\mu(1-\gamma)}{2} < \beta_g$. Además $2\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{\mu(1-\gamma)}{2}\right)\right)+\nu_g \le \frac{1}{2}-\gamma(r)$ ya que $1-\gamma > \alpha_1 \ge -\frac{1}{\mu}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\gamma(r)-\frac{1}{2}\right)$. Por tanto de acuerdo con el Teorema 6.3 [66] existe $T_g \in \left[\mathcal{L}_{1-\frac{\mu}{2}(1-\gamma),r}, \mathcal{L}_{\frac{\mu}{2}(1-\gamma),s}\right]$ para cada $s \ge r$ tal que $s' \ge \left[\frac{1}{2}-\mu(1-\gamma)-\nu-\frac{p-q}{2}\right]^{-1}$. Además si $1 < r \le 2$ o γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ (lo que implica que $1-\frac{\mu}{2}(1-\gamma)$ no está en el conjunto excepcional de g) entonces T_g es uno a uno y para cada $1 < r \le 2$

$$(\mathcal{M}T_g f)(s) = g(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = \frac{\mu}{2}(1-\gamma)\ ,$$

cuando $f \in \mathcal{L}_{1-\frac{\mu}{2}(1-\gamma),r}$.

También $2\left(\frac{1}{2}-\alpha_g\right)-\nu_g-1 = \nu+\frac{p-q}{2}+2\rho-1 > -1$ ya que $\rho > -\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\frac{1}{2}-\gamma(r)\right) \ge -\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}\right)$. Por tanto si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$

$$T_g\left(\mathcal{L}_{1-\frac{\mu(1-\gamma)}{2},r}\right) = \left(M_{\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+1\right)}\, h_{2\,,\,\nu+\frac{p-q}{2}+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{1-\frac{\mu(1-\gamma)}{2}-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+1\right)\,,\,r}\right). \tag{I.26}$$

Introducimos el operador

$$\mathfrak{L}_1 = N_{\frac{2}{\mu}}\; T_g\; R\; N_{\frac{\mu}{2}}\; D_{\left|\frac{\mu}{2}\right|^{\mu}\eta}\; \mathfrak{L}\; R.$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de los operadores N_b, D_b, R (Definición 2.2 [66]) T_g y $\mathfrak{L}$ concluimos que $\mathfrak{L}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$. Además para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = {} & \mathcal{M}\left[T_g\; R\; N_{\frac{\mu}{2}}\; D_{\left|\frac{\mu}{2}\right|^{\mu}\eta}\; \mathfrak{L}\; R\; f\right]\left(s\tfrac{\mu}{2}\right)\left|\tfrac{\mu}{2}\right| = \\
= {} & g\left(s\tfrac{\mu}{2}\right)\; \mathcal{M}\left[N_{\frac{\mu}{2}}\; D_{\left|\frac{\mu}{2}\right|^{\mu}\eta}\; \mathfrak{L}\; R\; f\right]\left(s\tfrac{\mu}{2}\right)\left|\tfrac{\mu}{2}\right| = \\
= {} & g\left(s\tfrac{\mu}{2}\right)\; \mathcal{M}\left[D_{\left|\frac{\mu}{2}\right|^{\mu}\eta}\; \mathfrak{L}\; R\; f\right](s) = \\
= {} & g\left(s\tfrac{\mu}{2}\right)\left|\tfrac{\mu}{2}\right|^{-\mu s}\eta^{-s}\; \mathcal{M}\left[\mathfrak{L}\; R\; f\right](s) = \\
= {} & \mathfrak{H}(s)\mathcal{M}[f](1-s), \qquad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma.
\end{aligned}$$

Luego $(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = (\mathcal{M}Tf)(s)$, para $\mathbb{R}e\, s = 1-\gamma$ y $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$. Por tanto $\mathfrak{L}_1 = T$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,2}$ y $\mathfrak{L}_1$ es la única extensión de T a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$. El operador $\mathfrak{L}_1$ será denotado en lo que sigue tanbién por T.

Por otra parte, si $1 < r \leq 2$ o γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, T es inyectivo ya que T_g y $\mathfrak{L}$ lo son. Además si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ (I.26) es cierto y $\mathfrak{L}(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$. Por consiguiente se verifica (I.25). Cuando γ está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}(\mathcal{L}_{1-\gamma,r})$ es un subconjunto de $\mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ y por tanto $T(\mathcal{L}_{\gamma,r})$ es un subconjunto del conjunto que aparece en la parte derecha de (I.25).

La igualdad (I.18) y las fórmulas de representación (I.19) y (I.20) pueden ser establecidas como las correspondientes en la Proposición I.3.1. ■

Proposición I.3.4 *Supongamos que* $\xi = 0$, $\mu > 0$, $1 < r < \infty$ *y* $\alpha_1 < 1-\gamma < \beta_1$ *donde*

$$\alpha_1 = \text{máx}\left\{\alpha, -1-\tfrac{2}{\mu}\left(\nu+\tfrac{p-q}{2}+\rho\right)\right\} \text{ y}$$

$$\beta_1 = \text{mín}\left\{\beta, -\tfrac{1}{\mu}\left(\nu+\tfrac{p-q}{2}+\gamma(r)-\tfrac{1}{2}\right), \tfrac{1+2\rho}{\mu}\right\}, \text{ siendo}$$

$$\rho > \text{máx}\left\{\tfrac{-\mu(1-\alpha)}{2}, \tfrac{1}{2}\left(\gamma(r)-\tfrac{1}{2}-\nu-\tfrac{p-q}{2}\right), -\tfrac{\mu}{2}(1+\beta)-\nu-\tfrac{p-q}{2}\right\}.$$

La transformación $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ *puede extenderse a* $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ *como un elemento de* $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ *siempre que* $s \geq r$ *y* $s' > \left[\frac{1}{2}-\mu(1-\gamma)-\nu-\frac{p-q}{2}\right]^{-1}$. *Si* $1 < r \leq 2$ *o* γ *no está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$, T *es uno a uno sobre* $\mathcal{L}_{\gamma,r}$. *Además si* γ *no pertenece al conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$ *entonces*

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \\ = \left(M_{-1-\frac{2}{\mu}} N_{\frac{-2}{\mu}} M_{\frac{-1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\mu+1\right)} h_{-2,\nu+\frac{p-q}{2}+\mu+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\mu(1-\gamma)+1\right),r}\right) \tag{I.27}$$

siendo $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ *un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.27) cuando* γ *está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$.

La igualdad (I.18) se verifica cuando $f, g \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$, *siendo* $1 < r \leq 2$ *y* $r > \left[\frac{1}{2}-\mu(1-\gamma)-\nu-\frac{p-q}{2}\right]^{-1}$. *Además si estas dos últimas condiciones se satisfacen entonces (I.19) (respectivamente (I.20)) es cierta cuando* $\lambda > -\gamma$ *(respectivamente,* $\lambda < -\gamma$*) para cada* $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Demostración: Ya que $1-\gamma < -\frac{1}{\mu}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\gamma(r)-\frac{1}{2}\right)$ y $\gamma(r) \geq \frac{1}{2}$, $\mu(1-\gamma)+\nu+\frac{p-q}{2} < 0$ y la Proposición I.2.1 nos dice que $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ y que para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$

$$\left(\mathcal{M}Tf\right)(s) = \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma.$$

Definimos $\ell(s) = \mathfrak{H}(1-s)$, para $1-\beta < \mathbb{R}e\, s < 1-\alpha$. Nótese que ℓ es también una función del tipo (I.2). Los parámetros asociados a ℓ, que denotaremos con primas, se relacionan con los correspondientes parámetros de $\mathfrak{H}$ mediante: $\xi' = \xi$, $\mu' = -\mu$, $\eta' = \eta^{-1}$, $\nu' = \nu + p - q + \mu$, $p' = q$, $q' = p$, $m' = n$, $n' = m$, $\beta'_j = \alpha_j$, $b'_j = 1 - a_j - \alpha_j$ $(j = 1, \ldots, p)$, $\alpha'_j = \beta_j$, $a'_j = 1 - b_j - \beta_j$, $(j = 1, \ldots, q)$, $\alpha' = 1 - \alpha$ y $\beta' = 1 - \beta$. También, ε está en el conjunto excepcional de ℓ si, y solamente si, $1 - \varepsilon$ está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$. Por tanto en virtud de la Proposición I.3.3 para cada $1 < r < \infty$, $\alpha'_1 < 1 - \varepsilon < \beta'_1$, donde

$\alpha'_1 = \text{máx}\left\{\alpha', -\frac{1}{\mu'}\left(\nu' + \frac{p'-q'}{2} + \gamma(r) - \frac{1}{2}\right), \frac{2\rho}{\mu'}\right\}$ y

$\beta'_1 = \text{mín}\left\{\beta', -\frac{2}{\mu'}\left(\nu' + \frac{p'-q'}{2} + \rho\right)\right\}$

siendo

$$\rho > \text{máx}\left\{\frac{\mu'\beta'}{2}, \frac{1}{2}\left(\gamma(r) - \frac{1}{2} - \nu' - \frac{p'-q'}{2}\right), -\frac{\mu'\alpha'}{2} - \nu' - \frac{p'-q'}{2}\right\} ;$$

para cada $s \geq r$ tal que si $s' > \left[\frac{1}{2} - \mu'(1-\varepsilon) - \nu' - \frac{p'-q'}{2}\right]^{-1}$, existe $\mathfrak{L} \in [\mathcal{L}_{\varepsilon,r}, \mathcal{L}_{1-\varepsilon,r}]$ tal que si $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon,r}$ y $1 < r \leq 2$

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}f)(s) = \mathfrak{L}(s)(\mathcal{M}f)(1-s) \quad \mathbb{R}e\, s = 1 - \varepsilon. \tag{I.28}$$

Puede observarse que las condiciones expuestas en las lineas anteriores coinciden con nuestras hipótesis cuando ε se reemplaza por $1 - \gamma$.

Introducimos ahora el operador $\mathfrak{L}_1 = R\ \mathfrak{L}\ R$. Bajo nuestras hipótesis $\mathfrak{L}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$. Además, por (I.28), si $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $1 < r \leq 2$,

$$\begin{aligned}&(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = (\mathcal{M}\mathfrak{L}Rf)(1-s) = \mathfrak{L}(1-s)(\mathcal{M}Rf)(s) = \\ &= \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma.\end{aligned}$$

En particular, $(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = (\mathcal{M}Tf)(s)$, $\mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma$, para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$. Por tanto $\mathfrak{L}_1 f = Tf$, $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$, y $\mathfrak{L}_1$ es la única extensión de T a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$. Denotaremos a continuación por T también a dicha extensión. La inyectividad de T se sigue inmediatamente de la Proposición I.3.3. Además teniendo en cuenta que $R\ N_a = M_{a-1}\ N_a\ R$, $R\ M_a = M_{-a}\ R$, $R\ h_{a,b} = h_{-a,b}\ R$, (I.25) conduce a

$$
\begin{aligned}
T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) &= \left(RN_{\frac{2}{\mu'}} M_{\frac{1}{2}\left(\nu'+\frac{p'-q'}{2}+1\right)} h_{2,\nu'+\frac{p'-q'}{2}+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{1-\frac{1}{2}\left(\mu'\gamma+\nu'+\frac{p'-q'}{2}+1\right),r}\right) \\
&= \left(M_{\frac{2}{\mu'}-1} N_{\frac{2}{\mu'}} M_{-\frac{1}{2}\left(\nu'+\frac{p'-q'}{2}+1\right)} h_{-2,\nu'+\frac{p'-q'}{2}+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{2}\left(\nu'+\mu'\gamma+\frac{p'-q'}{2}+1\right),r}\right) \\
&= \left(M_{-1-\frac{2}{\mu}} N_{-\frac{2}{\mu}} M_{-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\mu+1\right)} h_{-2,\nu+\frac{p-q}{2}+\mu+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{p-q}{2}+\mu(1-\gamma)+1\right),r}\right)
\end{aligned}
$$

siempre que γ no esté en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$. Además si γ está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ entonces $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es un subconjunto del último conjunto en (I.27) ya que

$$
\mathfrak{L}\left(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}\right) \subseteq \left(N_{\frac{2}{\mu'}} M_{\frac{1}{2}\left(\nu'+\frac{p'-q'}{2}+1\right)} h_{2,\nu'+\frac{p'-q'}{2}+2\rho-1}\right)\left(\mathcal{L}_{1-\frac{1}{2}\left(\nu'+\mu'\gamma+\frac{p'-q'}{2}+1\right),r}\right).
$$

La igualdad (I.18) y las representaciones dadas en (I.19) y (I.20) pueden ser probadas del modo usual. ■

I.4 Acotación y recorrido de la transformación $\mathbb{H}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ cuando $\xi > 0$

Fué probado en la Proposición I.2.1 y el Corolario I.2.1 que si $\xi > 0$ y $\alpha < 1-\gamma < \beta$ entonces la transformación T definida por

$$
(Tf)(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left(xt \middle| \begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right) f(t)dt, \quad f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}\,,
$$

está en $[\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ y para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$

$$
\left(\mathcal{M}Tf\right)(s) = \mathfrak{H}(s)\left(\mathcal{M}f\right)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma. \tag{I.29}
$$

En esta Sección probamos que T puede ser extendida a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ para cada $1 < r < \infty$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y s adecuado . Analizamos también el recorrido $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$. $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es descrito mediante los operadores definidos al comienzo de la Sección I.3 y una modificación de la transformación de Laplace definida por

$$(L_{a,b}f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{-|b|} e^{-|a|(xt)^{\frac{1}{a}}} f(t)dt, \quad a \neq 0 \text{ y } b \in \mathbb{R}.$$

El comportamiento de $L_{a,b}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ fue establecido en el Teorema 5.1(d) [66].

Proposición I.4.1 *Sea $\xi > 0$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r \leq s < \infty$. Entonces la transformación $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,2}, \mathcal{L}_{1-\gamma,2}]$ puede ser extendida a $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$. T es uno a uno siempre que $1 < r \leq 2$. Además la igualdad (I.18) se verifica para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,s'}$.*

Demostración: Sea $\alpha < 1-\gamma < \beta$. Elegimos ε_i , $i = 1, 2$, de manera que $\alpha < \varepsilon_1 < 1-\gamma < \varepsilon_2 < \beta$. De acuerdo con (I.9) para cada $1 < \ell < \infty$ se tiene

$$\int_0^\infty \left| x^{1-\gamma}\mathcal{H}(x)\right|^\ell \frac{dx}{x} \leq C\left\{\int_0^1 x^{(1-\gamma-\varepsilon_1)\ell-1}dx \; + \; \int_1^\infty x^{(1-\gamma-\varepsilon_2)\ell-1}dx\right\} < \infty$$

donde C es una constante positiva adecuada. Por tanto, $\mathcal{H} \in \mathcal{L}_{1-\gamma,\ell}$ y en virtud del Lema 5.1(b) [66] la transformación T definida (I.1) está en $[\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ cuando $1 < r \leq s < \infty$. Además si $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $1 < r \leq 2$

$$(\mathcal{M}Tf)(s) = \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma \, .$$

Ya que los ceros de $\mathfrak{H}(s)$ son aislados si $Tf = 0$ $(\mathcal{M}f)(s) = 0$ excepto, a lo sumo, cuando s está en un conjunto aislado. Por consiguiente $Tf = 0$. Se prueba así que T es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$, cuando $1 < r \leq 2$.

Para probar (I.18) para $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma,s'}$ es suficiente aplicar la desigualdad de Hölder y tener en cuenta que (I.18) es cierta para f y $g \in C_0$. $\blacksquare$

Investigamos ahora el recorrido $T(\mathcal{L}_{\gamma,r})$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ cuando $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. Distinguimos en nuestro estudio cinco casos.

Proposición I.4.2 *Sean $\xi > 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. Si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$ entonces T es uno a uno. Si $\omega = 1 + \mu_2\alpha + \mu_1\beta + \nu - \frac{1}{2}(q-p)$ y γ no está en el conjunto excepcional se tiene*

$$T(\mathcal{L}_{\gamma,r}) = \left(L_{\mu_2,\alpha}\, L_{-\mu_1,1-\beta+\frac{\omega}{\mu_1}}\right)(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}), \quad \textit{cuando } \omega \geq 0 \tag{I.30}$$

y

$$T(\mathcal{L}_{\gamma,r}) = \left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\mu_2},-\omega,-\mu_2\alpha} L_{\mu_2,\alpha}\, L_{-\mu_1,1-\beta}\right)(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}), \quad \textit{cuando } \omega < 0\,. \tag{I.31}$$

Además si γ pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ el recorrido $T(\mathcal{L}_{\gamma,r})$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ es un subconjunto del conjunto que aparece en la parte derecha de (I.30) o (I.31).

Demostración: Nótese que $m > 0$ ya que $\mu_2 > 0$ y $n > 0$ al ser $\mu_1 < 0$. Por tanto $\alpha > -\infty$ y $\beta < +\infty$.

Supongamos primero que $\omega = 1 + \mu_2\alpha + \mu_1\beta + \nu - \frac{1}{2}(q-p) \geq 0$. Definimos

$$\ell(s) = \mu_2^{\mu_2(s-\alpha)-1}(-\mu_1)^{\mu_1(s-\beta)+\omega-1}\eta^s \frac{\mathfrak{H}(s)}{\Gamma(\mu_2(s-\alpha))\,\Gamma(\mu_1(s-\beta)+\omega)}, \quad \alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta.$$

Teniendo presente que $\xi = \mu_2 - \mu_1$ y que $\mu = \mu_2 + \mu_1$, de la Proposición I.1.1 y de las propiedades (I.5) y (I.6) de la función Γ se sigue

$$|\ell(\sigma+it)| \sim (2\pi)^{\delta-1}(-\mu_1\mu_2)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{p} \alpha_j^{-a_j+\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{b_j-\frac{1}{2}}, \quad \textit{cuando } |t| \to \infty\,, \tag{I.32}$$

uniformemente en $\sigma \in \mathbb{K}$ para cada subconjunto $\mathbb{K}$ compacto de $\mathbb{R}$, y

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\ell(\sigma+it) &= i\ell(\sigma+it)\left\{\mu_2 log\mu_2 + \mu_1 log(-\mu_1) + log\eta - \mu_2\Psi(\mu_2(\sigma+it-\alpha)) - \right.\\ &-\mu_1\Psi(\mu_1(\sigma+it-\beta)+\omega) + \mu log|t| + i\tfrac{\pi}{2}\,\xi\, sgn\, t +\\ &\left.+\frac{\nu+\mu\sigma+\frac{p-q}{2}}{it} + O\left(t^{-2}\right)\right\} = O\left(t^{-2}\right), \quad \textit{cuando } |t| \to \infty\,,\end{aligned} \tag{I.33}$$

para cada $\alpha < \sigma < \beta$. Por tanto $\ell \in \mathcal{A}$ siendo $\alpha\left(\ell\right) = \alpha$ y $\beta\left(\ell\right) = \beta$. Entonces el Teorema 2.1 [66] implica que para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$ existe una transformación $\mathfrak{L} \in [\mathcal{L}_{\varepsilon,r}]$ tal que para cada $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon,r}$, con $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}f)(s) = \ell(s)(\mathcal{M}f)(s), \quad \mathbb{R}e\, s = \varepsilon \ .$$

Además $\mathfrak{L}$ es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\varepsilon,r}$ siempre que $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$ al ser los ceros de ℓ aislados. Además, si $\dfrac{1}{\ell} \in \mathcal{A}$, $\mathfrak{L}$ es uno a uno y sobre en $\mathcal{L}_{\varepsilon,r}$ para cada $1 < r < \infty$ y $\max\left(\alpha, \alpha\left(\dfrac{1}{\ell}\right)\right) < \varepsilon < \min\left(\beta, \beta\left(\dfrac{1}{\ell}\right)\right)$. ℓ tiene a lo sumo un número finito de ceros en la banda $\alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta$. Todos estos ceros son reales y los denotaremos por $(\sigma_i)_{i=1}^{d}$, siendo $\sigma_i < \sigma_{i+1}$, $i = 1, \ldots, d-1$. Entendemos que $d = 0$ cuando $\mathfrak{H}$ no tiene ceros en la banda considerada. Si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ existe $i = 0, \ldots, d$ tal que $\sigma_i < 1 - \gamma < \sigma_{i+1}$, donde $\sigma_0 = \alpha$ y $\sigma_{d+1} = \beta$. Además de (I.32) y (I.33) se infiere que $\dfrac{1}{\ell} \in \mathcal{A}$ siendo $\alpha\left(\dfrac{1}{\ell}\right) = \sigma_i$ y $\beta\left(\dfrac{1}{\ell}\right) = \sigma_{i+1}$, para cada $i = 0,\ 1, \ldots, d$. Por consiguiente $\mathfrak{L}$ es biyectiva de $\mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ en $\mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, $\alpha < 1 - \gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$.

Definimos ahora el operador

$$\mathfrak{L}_1 = L_{\mu_2,\alpha} L_{-\mu_1, 1-\beta+\frac{\omega}{\mu_1}} D_\eta \mathfrak{L} R \ .$$

Ya que $\mu_1\left(1 - \gamma - \beta + \dfrac{\omega}{\mu_1}\right) > 0$ y $\mu_2\,(1 - \gamma - \alpha) > 0$, $\mathfrak{L}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ cuando $1 < r \leq s < \infty$. También, $\mathfrak{L}_1$ es inyectivo. Además, de acuerdo con el Teorema 5.1 (d) [66] para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) &= \frac{\Gamma\left(\mu_2(s-\alpha)\right)}{\mu_2^{\mu_2(s-\alpha)-1}} \left(\mathcal{M} L_{-\mu_1, 1-\beta+\frac{\omega}{\mu_1}} D_\eta \mathfrak{L} R f\right)(1-s) = \\
&= \frac{\Gamma\left(\mu_2(s-\alpha)\right)}{\mu_2^{\mu_2(s-\alpha)-1}} \frac{\Gamma\left(\mu_1(s-\beta)+\omega\right)}{(-\mu_1)^{\mu_1(s-\beta)+\omega-1}} \mathcal{M}\left(D_\eta \mathfrak{L} R f\right)(s) = \\
&= \frac{\Gamma\left(\mu_2(s-\alpha)\right)}{\mu_2^{\mu_2(s-\alpha)-1}} \frac{\Gamma\left(\mu_1(s-\beta)+\omega\right)}{(-\mu_1)^{\mu_1(s-\beta)+\omega-1}} \eta^{-s} \mathcal{M}\left(\mathfrak{L} R f\right)(s) =
\end{aligned}$$

$$= \mathfrak{H}(s)\mathcal{M}(f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma\, . \tag{I.34}$$

Luego, de (I.29) y (I.34) se infiere que $\mathfrak{L}_1 f = Tf$, $f \in C_0$. Al ser C_0 un subespacio denso de $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $\mathfrak{L}_1$ y $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$, $\mathfrak{L}_1 = T$.

Los operadores R, D_η y $L_{a,b}$ son uno a uno. Por lo tanto T es uno a uno cuando lo sea $\mathfrak{L}$, y sólo en ese caso. Esto último ocurre cuuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$. Además si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ entonces $\mathfrak{L}\left(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$, cuando $1 < r < \infty$. Por tanto, si γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ (I.30) se verifica ya que $R\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ y $D_\eta\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \mathcal{L}_{\gamma,r}$, $1 < r < \infty$. Por otra parte si γ está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ y $1 < r < \infty$, $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es un subconjunto del conjunto en la parte derecha de (I.30) ya que $\mathfrak{L}\left(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}\right) \subset \mathcal{L}_{1-\gamma,r}$.

Sea ahora $\omega < 0$. Para probar (I.31) consideramos la función

$$\Omega(s) = \mu_2^{\mu_2(s-\alpha)-1}(-\mu_1)^{\mu_1(s-\beta)-1}\eta^s \frac{\Gamma\left(\mu_2(s-\alpha)-\omega\right)\mathfrak{H}(s)}{\left(\Gamma\left(\mu_2(s-\alpha)\right)\right)^2\Gamma\left(\mu_1(s-\beta)\right)}, \quad \alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta,$$

y procedemos como en el caso anterior. $\Omega \in \mathcal{A}$ siendo $\alpha\left(\Omega\right) = \alpha$ y $\beta\left(\Omega\right) = \beta$. Por consiguiente en virtud del Teorema 2.1 [66] existe $W \in [\mathcal{L}_{\varepsilon,r}]$, para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$, tal que

$$\left(\mathcal{M}Wf\right)(s) = \Omega(s)\left(\mathcal{M}f\right)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = \varepsilon\, , \tag{I.35}$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\varepsilon,r}$, con $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$.

De acuerdo con el Teorema 5.1, (b) y (d) [66] y de (I.35) se sigue que el operador W_1 definido por

$$W_1 = \mathcal{J}_{\frac{1}{\mu_2}\,,\, -\omega\,,\, -\mu_2\alpha}\, L_{\mu_2,\alpha}\, R\, L_{\mu_1\,\beta}\, R\, D_\eta\, W\, R \tag{I.36}$$

coincide con T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ siempre que $1 < r \leq 2$ y $\alpha < 1-\gamma < \beta$. El recorrido $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ puede ser descrito a partir de (I.36). ∎

Proposición I.4.3 *Sean $\xi > 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. Entonces T es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$. Además si $\omega = \mu_2\alpha + \frac{1}{2} + \nu - \frac{1}{2}(q-p)$ y γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ se tiene*

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = L_{\mu_2,\alpha-\frac{\omega}{\mu_2}}\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right), \quad \textit{cuando } \omega \geq 0\,, \tag{I.37}$$

y

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \left(\mathcal{J}_{\frac{1}{\mu_2}\,,\,-\omega\,,\,-\mu_2\alpha}\, L_{\mu_2,\alpha}\right)\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right), \quad \textit{cuando } \omega < 0\,, \tag{I.38}$$

y si γ está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ el recorrido $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ es un subconjunto de la parte derecha de (I.37) y (I.38).

Demostración: Observemos que $\alpha < -\infty$ ya que $\mu_2 > 0$. Supongamos primero que $\omega \geq 0$ y definamos la función

$$\ell(s) = \mu_2^{\mu_2(s-\alpha)+\omega-1}\eta^s \frac{\mathfrak{H}(s)}{\Gamma\left(\mu_2(s-\alpha)+\omega\right)}, \quad \alpha < \mathit{Re}\, s < \beta.$$

La Proposición I.1.1 y las propiedades (I.5) y (I.6) permiten probar que $\ell \in \mathcal{A}$ siendo $\alpha(\ell) = \alpha$ y $\beta(\ell) = \beta$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 2.1 [66], existe $\mathfrak{L} \in [\mathcal{L}_{\varepsilon,r}]$, para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$, tal que si $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$

$$\left(\mathcal{M}\mathfrak{L}f\right)(s) = \mathfrak{H}(s)\left(\mathcal{M}f\right)(s), \quad \mathit{Re}\, s = \varepsilon, \text{ y } f \in \mathcal{L}_{\varepsilon,r}\,. \tag{I.39}$$

De (I.39) se infiere que $\mathfrak{L}$ es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\varepsilon,r}$ cuando $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$ ya que los ceros de $\mathfrak{H}$ son aislados. Además si γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ entonces $\sigma_1 < 1-\gamma < \sigma_2$, donde σ_1 y σ_2 son dos ceros consecutivos de ℓ. Por consiguiente $\mathfrak{L}$ es biyectiva de $\mathcal{L}_{1-\gamma,r}$ sobre si mismo cuando $1 < r < \infty$ y γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$.

Introducimos ahora el operador

$$\mathfrak{L}_1 = L_{\mu_2\,,\,\alpha-\frac{\omega}{\mu_2}} R D_\eta \mathfrak{L} R\,.$$

Del Teorema 5.1 (d) [66] concluimos que $\mathfrak{L}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}, \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$, para cada $1 < r \leq s < \infty$. También, si $f \in \mathcal{L}_{\gamma,2}$, tenemos

$$\begin{aligned} &(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = \frac{\Gamma(\mu_2(s-\alpha)+\omega)}{\mu_2^{\mu_2(s-\alpha)+\omega-1}} (\mathcal{M}D_\eta \mathfrak{L}Rf)(1-s) = \\ &= \frac{\Gamma(\mu_2(s-\alpha)+\omega)}{\mu_2^{\mu_2(s-\alpha)+\omega-1}} \eta^{-s} \mathcal{M}(\mathfrak{L}Rf)(s) = \mathfrak{H}(s)(\mathcal{M}f)(1-s), \quad \mathbb{R}e\, s = 1-\gamma\ . \end{aligned} \tag{I.40}$$

De (I.29) y (I.40) se sigue que $\mathfrak{L}_1 f = Tf$, $f \in C_0$. Ya que $\mathfrak{L}_1$ y $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}\ ,\ \mathcal{L}_{\gamma,s}]$, cuando $1 < r \leq s < \infty$, $\mathfrak{L}_1 = T$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Por tanto, si γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$, T es uno a uno, al ser composición de operadores uno a uno . Además

$$T(\mathcal{L}_{\gamma,r}) = \left(L_{\mu_2\ ,\ \alpha-\frac{\omega}{\mu_2}}\ R\ D_\eta\ \mathfrak{L}\right)(\mathcal{L}_{1-\gamma,r}) \subseteq L_{\mu_2\ ,\ \alpha-\frac{\omega}{\mu_2}}(\mathcal{L}_{\gamma,r})$$

dándose la igualdad cuando γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$.

Cuando $\omega < 0$ para probar (I.38) basta considerar la función

$$\Omega(s) = \mu_2^{\mu_2(s-\alpha)-1} \eta^s \frac{\Gamma(\mu_2(s-\alpha)-\omega)\,\mathfrak{H}(s)}{(\Gamma(\mu_2(s-\alpha)))^2}\ ,\quad \alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta\ ,$$

en lugar de ℓ y proceder como en la prueba de (I.37). ■

Proposición I.4.4 *Supongamos que $\xi > 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 = 0$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. Entonces T es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ cuando γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$. Además si $\omega = \mu_1\beta + \frac{1}{2} + \nu - \frac{1}{2}(q-p)$ y γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ entonces*

$$T(\mathcal{L}_{\gamma,r}) = L_{\mu_1,\beta-\frac{\omega}{\mu_1}}(\mathcal{L}_{\gamma,r})\,,\quad \textit{cuando}\ \ \omega \geq 0\ , \tag{I.41}$$

y

$$T(\mathcal{L}_{\gamma,r}) = \left(\mathcal{J}_{-\frac{1}{\mu_1}\ ,\ -\omega\ ,\ -\mu_1(2-\beta)}\ M_2\ L_{\mu_1,\beta}\right)(\mathcal{L}_{\gamma,r})\,,\quad \textit{cuando}\ \ \omega < 0\ , \tag{I.42}$$

mientras si γ pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ el recorrido $T(\mathcal{L}_{\gamma,r})$ de T sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.41) o de (I.42).

Demostración: De acuerdo con la Proposición I.4.3 la función $g(s) = \mathfrak{H}(1-s)$ tiene asociada una transformación $\mathfrak{G} \in [\mathcal{L}_{1-\gamma,r} \;\; \mathcal{L}_{\gamma,s}]$, cuando $1 < r \leq s < \infty$ y $\alpha < 1-\gamma < \beta$. La transformación de Mellin permite probar que $T = R\,\mathfrak{G}\,R$ y la demostración puede ser finalizada recurriendo a la Proposición I.4.3. ■

Proposición I.4.5 *Sean $\xi > 0$, $\mu_1 > 0$, $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. Entonces T es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ si γ no pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$. Si $\beta < \infty$, elegimos $\omega = \xi c - \frac{1}{2} - \nu + \frac{1}{2}(q-p) \geq \frac{1}{2} + 2\mu_1\beta$ con $c \geq -\alpha$ y tomamos $b < -\beta + \frac{\omega}{\mu_1}$ y $b \leq \alpha$. Cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ se tiene*

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \left(M_{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2\mu_1}} \;\; h_{2\mu_1\,,\,\omega-1-2\mu_1 b} \;\; L_{-\xi\,,\,c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\right)\left(\mathcal{L}_{\frac{3}{2}-\gamma-\frac{\omega}{2\mu_1}\,,\,r}\right) \tag{I.43}$$

y si γ pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.43). Si $\beta = \infty$, elegimos $\omega = \xi c - \frac{1}{2} - \nu + \frac{1}{2}(q-p) \geq \frac{1}{2} + 2\mu_1(1-\gamma)$ donde $c \geq -\alpha$ y $b \leq \alpha$ siendo $\omega > \mu_1(1-\gamma+b)$. Entonces (I.43) es cierta cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, y si γ pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ entonces $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.43).

Demostración: Supongamos que $\beta < \infty$. Consideramos

$$\ell(s) = \mu_1^{2\mu_1 s-\omega}\xi^{\xi(s+c)-1}\eta^s \frac{\Gamma\left(\omega-\mu_1(b+s)\right)\mathfrak{H}(s)}{\Gamma\left(\mu_1(s-b)\right)\Gamma\left(\xi(c+s)\right)}\;,$$

donde $b < -\beta + \frac{\omega}{\mu_1}$, $\omega = \xi c - \frac{1}{2} - \nu + \frac{1}{2}(q-p)$ y $c \geq -\alpha$. Es obvio que $\Gamma\left(\omega - \mu_1(b+s)\right)$ es holomorfa cuando $\mathbb{R}e\, s > -b + \frac{\omega}{\mu_1}$. Por tanto, ya que $-b + \frac{\omega}{\mu_1} > \beta$ la función ℓ es holomorfa en la banda $\alpha < \mathbb{R}e\, s < \beta$. Además la Proposición I.1.1 y (I.5) y (I.6) nos permiten obtener

$$\left|\ell(\sigma+it)\right| \sim (2\pi)^{\delta-\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{p}\alpha_j^{-a_j+\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{b_j-\frac{1}{2}}\;,\;\; \textit{cuando } |t| \to \infty\;,$$

uniformemente en σ cuando $\sigma \in \mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, y

$$\frac{d}{dt}\ell(\sigma+it) = i\ell(\sigma+it)\left\{log\eta + 2\mu_1 log\mu_1 + \xi log\xi - \mu_1\left(\Psi\left(\omega-\mu_1(\sigma+it+b)\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\Psi\left(\mu_1(\sigma+it-b)\right)\right) - \xi\Psi\left(\xi(c+s)\right) + \mu log|t| - log\eta + i\tfrac{\pi}{2}\,\xi\, log|t| +$$

$$\left.+\frac{\nu+\mu\sigma+\frac{p-q}{2}}{it} + O\left(t^{-2}\right)\right\} = O\left(t^{-2}\right), \quad cuando\ |t| \to \infty\ ,$$

para cada $\alpha < \sigma < \beta$. Por tanto $\ell \in \mathcal{A}$ con $\alpha(\ell) = \alpha$ y $\beta(\ell) = \beta$.

En virud del Teorema 2.1 [66] existe una transformación $\mathfrak{L} \in [\mathcal{L}_{\varepsilon,r}]$ para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$, tal que si $1 < r \leq 2$ y $\alpha < \varepsilon < \beta$,

$$\left(\mathcal{M}\mathfrak{L}f\right)(s) = \ell(s)\left(\mathcal{M}f\right)(s), \quad \mathbb{R}e\, s = \varepsilon\ , \tag{I.44}$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$ y $\mathfrak{L}$ es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma r}$.

Además si $\ell(\varepsilon) \neq 0$, entonces $\mathfrak{L}$ es biyectiva de $\mathcal{L}_{\varepsilon,r}$ en si mismo. Nótese que $\ell(1-\gamma) \neq 0$, si γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$.

Introducimos ahora el operador

$$\mathfrak{L}_1 = M_{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2\mu_1}}\, h_{2\mu_1\, ,\,\omega-1-2\mu_1 b}\, L_{-\xi\, ,\, c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\, M_{-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\, \mathfrak{L}\, D_\eta\, R.$$

Ya que $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$, $M_{-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\mathfrak{L}D_\eta R \in \left[\mathcal{L}_{\gamma,r}\ ,\ \mathcal{L}_{\frac{3}{2}-\gamma-\frac{\omega}{2\mu_1}\ ,\ r}\right]$. También, el Teorema 5.1 (d) [66] $L_{-\xi\, ,\, c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}} \in \left[\mathcal{L}_{\frac{3}{2}-\gamma-\frac{\omega}{2\mu_1}\ ,\ r}\ ,\ \mathcal{L}_{\gamma-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}\ ,\ r}\right]$ para cada $1 < r < \infty$ y $\alpha < 1-\gamma < \beta$, al ser

$$-\xi\left(\gamma-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}-c-\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2\mu_1}\right) = \xi(c+1-\gamma) \geq \xi(-\alpha+1-\gamma) > 0.$$

Además, ya que $\omega \geq \frac{1}{2} + 2\mu_1\beta$, $1-\gamma < \beta$ y $b \leq \alpha$, las desigualdades $\gamma(r) \leq 2\mu_1(\gamma-1)+\omega-\frac{1}{2} < \omega+\frac{1}{2}-2\mu_1 b$ son válidas. Por tanto del Teorema 5.1 [66] se sigue que

$$h_{2\mu_1\, ,\,\omega-1-2\mu_1 b} \in \left[\mathcal{L}_{\gamma-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}\ ,\ r}\ ,\ \mathcal{L}_{\frac{3}{2}-\gamma-\frac{\omega}{2\mu_1}\ ,\ s}\right]$$

cuando $1 < r \leq s < \infty$ y $s' \geq \left(2\mu_1(\gamma - 1) + \omega - \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Por consiguiente $\mathfrak{L}_1 \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}\ ,\ \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ bajo las condiciones impuestas.

Teniendo en cuenta el comportamiento de la Transformación de Mellin sobre los operadores que aparecen en la definición de $\mathfrak{L}_1$ (Theorem 5.1 (d) [66]) y (I.44) obtenemos cuando $1 < r \leq 2$

$$(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) =$$

$$= \left(\mathcal{M}\ h_{2\mu_1\ ,\ \omega-1-2\mu_1 b}\ L_{-\xi\ ,\ c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\ M_{-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\ \mathfrak{L}\ D_\eta\ R\ f\right)\left(s + \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2\mu_1}\right) =$$

$$= \mu_1^{-2\mu_1 s+\omega} \frac{\Gamma\left(\mu_1(s-b)\right)}{\Gamma\left(\omega - \mu_1(b+s)\right)} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathcal{M}\ L_{-\xi\ ,\ c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\ M_{-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\ \mathfrak{L}\ D_\eta\ R\ f\right)\left(-s + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2\mu_1}\right) =$$

$$= \mu_1^{-2\mu_1 s+\omega} \frac{\Gamma\left(\mu_1(s-b)\right)\Gamma\left(\xi(s+c)\right)}{\Gamma\left(\omega - \mu_1(b+s)\right)\ \xi^{-\xi(-s-c)-1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathcal{M}\ M_{-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_1}}\ \mathfrak{L}\ D_\eta\ R\ f\right)\left(s + \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2\mu_1}\right) =$$

$$= \mu_1^{-2\mu_1 s+\omega} \xi^{-\xi(s+c)+1} \frac{\Gamma\left(\mu_1(s-b)\right)\Gamma\left(\xi(s+c)\right)}{\Gamma\left(\omega - \mu_1(b+s)\right)} \eta^{-s}\ \ell(s)\ \left(\mathcal{M}f\right)(1-s) =$$

$$= \mathfrak{H}(s)\left(\mathcal{M}f\right)(1-s)\,, \quad \mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma\,,$$

para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,r}$.

Por tanto, en particular para cada $f \in C_0$ $(\mathcal{M}\mathfrak{L}_1 f)(s) = (\mathcal{M}Tf)(s)$, $\mathbb{R}e\, s = 1 - \gamma$, y entonces para cada $f \in C_0$ $\mathfrak{L}_1 f = Tf$. Ya que $\mathfrak{L}_1$ y $T \in [\mathcal{L}_{\gamma,r}\ ,\ \mathcal{L}_{1-\gamma,s}]$ se sigue la igualdad de T y $\mathfrak{L}_1$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$. El resto de la prueba cuando $\beta < +\infty$ sigue como en las proposiciones anteriores. Cuando $\beta = +\infty$ los resultados pueden ser probados de un modo similar. ∎

Proposición I.4.6 *Supongamos que $\xi > 0$, $\mu_2 < 0$, $\alpha < 1 - \gamma < \beta$ y $1 < r < \infty$. Entonces T es uno a uno sobre $\mathcal{L}_{\gamma,r}$ cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ o $1 < r \leq 2$. Si $\alpha > -\infty$ elegimos $\omega = \xi c - \frac{1}{2} - \nu - \mu - \frac{1}{2}(p-q) \geq \frac{1}{2} - 2\mu_2(1-\alpha)$*

siendo $c \geq \beta - 1$ y tomamos $b < \alpha - 1 - \frac{\omega}{\mu_2}$ y $b \leq 1 - \beta$. Cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ se tiene

$$T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right) = \left(M_{-\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2\mu_2}}\ h_{2\mu_2\,,\,\omega-1+2\mu_2 b}\ L_{\xi\,,\,-c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2\mu_2}}\right)\left(\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}-\gamma-\frac{\omega}{2\mu_2}\,,\,r}\right) \qquad \text{(I.45)}$$

mientras $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.45) cuando γ pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$. Si $\alpha = -\infty$, escogemos $\omega = \xi c - \frac{1}{2} - \nu - \mu - \frac{1}{2}(p-q) \geq \frac{1}{2} - 2\mu_2\gamma$, donde $c \geq \beta - 1$, y $b \leq 1 - \beta$, siendo $\omega > -\mu_2(\gamma + b)$. Entonces (I.45) se verifica cuando γ no está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$, y si γ pertenece al conjunto excepcional de $\mathfrak{H}$ $T\left(\mathcal{L}_{\gamma,r}\right)$ es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.45).

Demostración: Los resultados recogidos en esta Proposición se deducen de la anterior procediendo como en la prueba de la Proposición I.3.4 ∎

I.5 La transformación $\mathbb{H}$ sobre los espacios $\mathcal{L}_{\gamma,1}$

En esta Sección completamos nuestro estudio de la transformación $\mathbb{H}$ sobre los espacios $\mathcal{L}_{\gamma,r}$. Inspirados en el trabajo de P. Heywood y P.G. Rooney [39] sobre transformaciones de Bessel, estudiamos aquí el comportamiento de la transformación $\mathbb{H}$ sobre $\mathcal{L}_{\gamma,1}$.

Suponemos en esta Sección que se satisface una de las siguientes condiciones

(i) $\xi > 0$

(ii) $\xi = 0$, $\mu > 0$ y $\beta < -\frac{1}{\mu}\left(\nu + 1 + \frac{1}{2}(p-q)\right)$

(iii) $\xi = 0$, $\mu < 0$ y $\alpha > -\frac{1}{\mu}\left(\nu + 1 + \frac{1}{2}(p-q)\right)$

(iv) $\xi = 0$, $\mu = 0$ y $\nu + \frac{1}{2}(p-q) < 0$.

Probaremos previamente el siguiente resultado del que haremos uso en la demostración de la proposición de esta sección.

Lema I.5.1 *Sea $\alpha - 1 < \gamma < \beta - 1$. Entonces*

$$\int_0^\infty x^\gamma \, |\mathcal{H}(x)| \, dx < \infty \, .$$

Demostración: Es suficiente observar que en virtud de (I.9) podemos escribir

$$\int_0^\infty x^\gamma \, |\mathcal{H}(x)| \, dx \le A_{\gamma_1} \int_0^1 x^{\gamma-\gamma_1} dx \; + \; A_{\gamma_2} \int_1^\infty x^{\gamma-\gamma_2} dx$$

donde $\alpha - 1 < \gamma_1 - 1 < \gamma < \gamma_2 - 1 < \beta - 1$ y A_{γ_i}, $i = 1, 2$, es, una adecuada constante positiva. ∎

Proposición I.5.1 *Sean $\alpha < 1 - \gamma < \beta$ y $1 \le r \le \infty$. Entonces la transformación $\mathbb{H}$ definida en (I.1) es acotada de $\mathcal{L}_{\gamma,1}$ en $\mathcal{L}_{1-\gamma,r}$.*

Demostración: Para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma,1}$ se tiene, recurriendo de nuevo a (I.9), que

$$|\mathbb{H}(f)(x)| \le \int_0^\infty |\mathcal{H}(xt)||f(t)|dt \le M \int_0^\infty (xt)^{-1+\gamma}|f(t)|dt$$

donde $\alpha < 1 - \gamma < \beta$. Por tanto

$$\|\mathbb{H}(f)\|_{1-\gamma,\infty} \le C\|f\|_{\gamma,1} \; , \quad f \in \mathcal{L}_{\gamma,1} \, .$$

Además, intercambiando el orden de integración, obtenemos

$$\int_0^\infty x^{1-\gamma}|\mathbb{H}(f)(x)|\frac{dx}{x} \le \int_0^\infty |f(t)| \int_0^\infty x^{-\gamma}|\mathcal{H}(xt)|dxdt =$$
$$= \int_0^\infty |f(t)|t^{\gamma-1}dt \int_0^\infty u^{-\gamma}|\mathcal{H}(u)|du \; , \quad f \in \mathcal{L}_{\gamma,1} \, .$$

Luego, de acuerdo con el Lema I.5.1, $\mathbb{H} \in [\mathcal{L}_{\gamma,1} \; , \; \mathcal{L}_{1-\gamma,1}]$.

Finalmente, usando un conocido teorema de interpolación se infiere que $\mathbb{H}$ es un operador acotado de $\mathcal{L}_{\gamma,1}$ en $\mathcal{L}_{1-\gamma,r}$, para cada $1 \le r \le \infty$. ∎

I.6 Algunas transformaciones especiales

En esta Sección presentamos algunas transformaciones integrales a las cuales podemos aplicar la teoría desarrollada en las secciones anteriores.

I.- E. Kratzel [45] introdujo la transformación integral definida por

$$\left(\mathbf{L}_\nu^{(n)} f\right)(x) = \int_0^\infty \lambda_\nu^{(n)}(xt) f(t) dt \; ,$$

donde

$$\lambda_\nu^{(n)}(z) = \frac{(2\pi)^{\dfrac{n-1}{2}} \sqrt{n} \left(\dfrac{z}{n}\right)^{n\nu}}{\Gamma\left(\nu + 1 - \frac{1}{n}\right)} \int_1^\infty (t^n - 1)^{\nu - \frac{1}{n}} e^{-zt} dt \; ,$$

para $z > 0$, $n \in I\!N - \{0\}$ y $\nu > -1 + \frac{1}{n}$. La transformación $\mathbf{L}_\nu^{(n)}$ se reduce a la transformación $\mathcal{K}_\nu$ ([53] y [54]) cuando $n = 2$. La transformada de Mellin de $\lambda_\nu^{(n)}$ es (véase [45])

$$\mathcal{M}\left[\lambda_\nu^{(n)}\right](s) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+n\nu}} \frac{\Gamma(s + n\nu)\, \Gamma\left(\frac{s}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{n} + \nu + 1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+n\nu}} \mathfrak{H}_{1\,,\,2}^{2\,,\,0}\left(s \middle| \begin{matrix} (\nu+1-\frac{1}{n}\,,\,\frac{1}{n}) \\ \\ (n\nu\,,\,1)\,,\,(0\,,\,\frac{1}{n}) \end{matrix}\right).$$

Se infiere de las proposiciones I.4.1 y I.4.3 inmediatamente la proposición que sigue.

Proposición I.6.1 *Sea* $\text{máx}\{-n\nu\,,\,0\} < 1 - \gamma$.

(i) Sea $1 < r \le s < \infty$. *Entonces la transformación* $\mathbf{L}_\nu^{(n)} \in [\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}\,,\,\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,s}]$ *y para cada* $f \in \mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ *y* $g \in \mathcal{L}_{\gamma\,,\,s'}$ *se tiene*

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{L}_\nu^{(n)}\, f\right)(x) g(x) dx = \int_0^\infty f(x) \left(\mathbf{L}_\nu^{(n)}\, g\right)(x) dx.$$

$\mathbf{L}_\nu^{(n)}$ *es uno a uno sobre* $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ *cuando* γ *no está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}(s) = \mathfrak{H}_{1\,,\,2}^{2\,,\,0}\left(s \middle| \begin{matrix} (\nu+1-\frac{1}{n}\,,\,\frac{1}{n}) \\ \\ (n\nu\,,\,1)\,,\,(0\,,\,\frac{1}{n}) \end{matrix}\right)$ *o* $1 < r \le 2$. *Además si* γ *no pertenece al conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$ *entonces*

$$\mathbf{L}_\nu^{(n)}(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}) = L_{1\,,\,\nu(1-n)+1-\frac{1}{n}}\,(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r})\;,\ \text{cuando}\ \nu \ge \tfrac{1}{n}\;,$$

$$\mathbf{L}_\nu^{(n)}(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}) = \mathcal{J}_{1\,,\,\nu(1-n)+1-\frac{1}{n}\,,\,0}\, L_{1\,,\,0}(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r})\;,\ \ \textit{cuando}\ 0 \le \nu < \tfrac{1}{n}\;,\ \textit{y}$$

$$\mathbf{L}_\nu^{(n)}(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}) = \mathcal{J}_{1\,,\,\nu+1-\frac{1}{n}\,,\,n\nu}\, L_{1\,,\,0}(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r})\;,\ \ \textit{cuando}\ 1 - \tfrac{1}{n} < \nu < 0\;,$$

mientras, si γ está en el conjunto excepcional de $\mathfrak{H}\ \mathbf{L}_\nu^{(n)}\left(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}\right)$ es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de la igualdad en cada caso.

(ii) Sea $1 \leq s \leq \infty$. Entonces $\mathbf{L}_\nu^{(n)} \in [\mathcal{L}_{\gamma\,,\,1}\ ,\ \mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,s}]$. ■

II.- La transformación generalizada de Hankel definida por

$$\left(\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu} f\right)(x) \ = \ \int_0^\infty \mathbf{k}_{\lambda\,,\,\mu}(xt) f(t) dt \ ,$$

donde $\mathbf{k}_{\lambda\,,\,\mu}(z) \ = \ 2^{-\lambda}\ z^{\lambda+\frac{1}{2}}\ \mathbf{J}_\lambda^\mu\left(\frac{z^2}{4}\right)$ y $\mathbf{J}_\lambda^\mu$ representa una generalización de la función de Bessel usualmente llamada función de Wright [78], fue introducida por R. P. Agarwal [1]. Concretamente

$$\left(\mathbf{H}_{\lambda\,,\,1} f\right)(x) \ = \ \left(h_\lambda f\right)(x) \ = \ \int_0^\infty \sqrt{xt}\mathbf{J}_\lambda(xt) f(t) dt \ ,$$

que es la conocida transformación integral de Hankel. Aquí $\mathbf{J}_\lambda$ denota la función de Bessel de primera especie y orden λ. La transformación h_λ fue investigada sobre $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ por P.G. Rooney [65].

La transformada de Mellin de $\mathbf{k}_{\lambda\,,\,\mu}$ es ([58])

$$\mathcal{M}\left[\mathbf{k}_{\lambda\,,\,\mu}\right](s) \ = \ 2^{s\,-\,\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{\mu}{2}\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right)\right)} \ =$$

$$= \ 2^{s-\frac{1}{2}}\ \mathfrak{H}_{0\,,\,2}^{1\,,\,0}\left(s \left| \begin{array}{cc} - & - \\ \left(\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ ,\ \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{\mu}{2}(\lambda+1)-\lambda\ ,\ \frac{\mu}{2}\right) \end{array} \right.\right).$$

Las Proposiciones I.4.1 y I.4.5 conducen a la siguiente

Proposición I.6.2 *Sean $0 < \mu < 1$, $\lambda > -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) < 1-\gamma$*

(i) Sea $1 < r \leq s < \infty$. Entonces la transformación $\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu} \in [\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}\ ,\ \mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,s}]$ y para cada $f \in \mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ y $g \in \mathcal{L}_{\gamma\,,\,s'}$

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu}\ f\right)(x) g(x) dx = \int_0^\infty f(x) \left(\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu}\ g\right)(x) dx.$$

$\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu}$ *es uno a uno sobre* $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ *cuando* γ *no está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}(s) = \mathfrak{H}^{1\,,\,0}_{0\,,\,2}\left(s \middle| \begin{matrix} - & - \\ \left(\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\,,\,\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{\mu}{2}(\lambda+1)-\lambda\,,\,\frac{\mu}{2}\right) \end{matrix}\right)$ *o* $1 < r \leq 2$. *Además si* γ *no pertenece al conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$ *eligiendo* $c \geq \frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$,

$$\omega = \frac{1-\mu}{2}c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) - \frac{\mu}{2}(\lambda+1) + \lambda \geq \frac{1}{2} + \mu(1-\gamma)$$

y $b \leq -\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$ *siendo* $\omega > \frac{\mu}{2}\,(1-\gamma+b)$, *entonces*

$$\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu}\,(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}) \;=\; M_{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{\mu}}\;\; h_{\mu\,,\,\omega-1-\mu b}\;\; L_{\frac{\mu-1}{2}\,,\,c+\frac{1}{2}+\frac{\omega}{\mu}}\;\; \left(\mathcal{L}_{\frac{3}{2}-\gamma-\frac{\omega}{\mu}\,,\,r}\right) \tag{I.46}$$

y si γ *está en el conjunto excepcional de* $\mathfrak{H}$, $\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu}\,(\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r})$ *es un subconjunto del conjunto de la parte derecha de (I.46)*

(ii) Sea $1 \leq s \leq \infty$ *entonces* $\mathbf{H}_{\lambda\,,\,\mu} \in [\mathcal{L}_{\gamma\,,\,1}\;,\;\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,s}]$. ■

Los resultados presentados en la Proposición I.6.1 mejoran los obtenidos en [6].

SEGUNDA PARTE

La transformación $\mathbb{H}$ de Fox en los espacios L_p con pesos (caso general)

En esta segunda parte del capítulo primero obtenemos condiciones necesarias y suficientes sobre, una medida Ω positiva de Borel sobre $(0\ ,\ \infty)$ y una función v medible no negativa sobre $(0\ ,\ \infty)$, para que la desigualdad L_p pesada

$$\left\{\int_0^\infty |\mathbb{H}(f)(x)|^s\ d\Omega(x)\right\}^{\frac{1}{s}} \leq C\left\{\int_0^\infty v(x)\,|f(x)|^r\ dx\right\}^{\frac{1}{r}}\ ,\quad f \in C_0\,, \tag{I.47}$$

se verifique. Asimismo, analizamos algunos casos particulares.

A lo largo de esta parte, supondremos que se satisface una de las cuatro condiciones indicadas en la Sección I.5.

I.7 Desigualdades L_p pesadas para la transformación $\mathbb{H}$ de Fox

Damos en esta Sección condiciones sobre una función v y una medida de Borel Ω sobre $(0,\infty)$ que son suficientes para que la desigualdad (I.47) sea cierta.

Proposición I.7.1 *Supongamos que Ω es una medida Borel positiva sobre $(0,\infty)$ y que v es una función medible no negativa sobre $(0,\infty)$ que está en $L^1_{loc}(0,\infty)$.*

Si $1 \leq r \leq s \leq \infty$ y existe $\alpha < a$, $b < \beta$ tales que

$$B_1 = \sup_{x>0}\left\{\int_0^x t^{-as}d\Omega(t)\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\int_0^{\frac{1}{x}} t^{-ar'}v(t)^{1-r'}dt\right\}^{\frac{1}{r'}} < \infty\ ,$$

y

$$B_2 = \sup_{x>0}\left\{\int_x^\infty t^{-bs}d\Omega(t)\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\int_{\frac{1}{x}}^\infty t^{-br'}v(t)^{1-r'}dt\right\}^{\frac{1}{r'}} < \infty\ ,$$

entonces (I.47) se verifica.

También si $1 \leq s < r < \infty$ y existen $\alpha < a$, $b < \beta$ tales que

$$B_1' = \int_0^\infty \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} z^{-as} d\Omega(z) \right\}^{\frac{h}{s}} \left\{ \int_0^x z^{-ar} v(z)^{1-r'} dz \right\}^{\frac{h}{s'}} x^{-ar'} v(x)^{1-r'} dx < \infty \,,$$

y

$$B_2' = \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{1}{x}}^\infty z^{-bs} d\Omega(z) \right\}^{\frac{h}{s}} \left\{ \int_x^\infty z^{-br} v(z)^{1-r'} dz \right\}^{\frac{h}{s'}} x^{-br'} v(x)^{1-r'} dx < \infty \,,$$

donde $\frac{1}{h} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$, entonces (I.47) es satisfecha.

Demostración: Consideremos inicialmente $1 \leq r \leq s < \infty$.

Sea $f \in C_0$. en virtud de (I.9) para cada $\alpha < a$, $b < \beta$ se tiene

$$|\mathbb{H}(f)(x)| \leq C \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} (xt)^{-a} |f(t)| dt + \int_{\frac{1}{x}}^\infty (xt)^{-b} |f(t)| dt \right\} \,, \quad x > 0.$$

De la desigualdad de Minkowski se deduce que

$$\left\{ \int_0^\infty |\mathbb{H}(f)(x)|^s \, d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}} \leq C \left[\left\{ \int_0^\infty \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} t^{-a} |f(t)| dt \right\}^s x^{-as} d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{1}{x}}^\infty t^{-b} |f(t)| dt \right\}^s x^{-bs} d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}} \right] = C \left(J_1 + J_2 \right). \qquad \text{(I.48)}$$

Un sencillo cambio de variable conduce a

$$J_1 = \left\{ \int_0^\infty \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} t^{-a} |f(t)| dt \right\}^s x^{-as} d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}} = \left\{ \int_0^\infty \left\{ \int_x^\infty h(u) du \right\}^s x^{-as} d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}}$$

donde $h(u) = u^{a-2} \left| f\left(\frac{1}{u}\right) \right|$, $u > 0$.

Por tanto el Teorema 4(1.3.1) [49] implica

$$J_1 \leq C \left\{ \int_0^\infty h(t)^r v_1(t) dt \right\}^{\frac{1}{r}} = C \left\{ \int_0^\infty |f(t)|^r \, v(t) dt \right\}^{\frac{1}{r}} \qquad \text{(I.49)}$$

siempre que $B_1 < \infty$. Aquí $v_1(t) = v\left(\frac{1}{t}\right) t^{2(r-1)-ar}$, $t > 0$.

Por otra parte, tenemos

$$J_2 = \left\{ \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{1}{x}}^\infty t^{-b} |f(t)| dt \right\}^s x^{-bs} d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}} = \left\{ \int_0^\infty \left\{ \int_0^x g(t) dt \right\}^s x^{-bs} d\Omega(x) \right\}^{\frac{1}{s}}$$

siendo $g(t) = t^{b-2} \left| f\left(\frac{1}{t}\right) \right|$, $t > 0$. Entonces del Teorema 1(1.3.1) [49] se sigue que cuando $B_2 < \infty$

$$J_2 \le C \left\{ \int_0^\infty g(t)^r v_2(t) dt \right\}^{\frac{1}{r}} = C \left\{ \int_0^\infty |f(t)|^r \, v(t) dt \right\}^{\frac{1}{r}} \tag{I.50}$$

donde $v_2(t) = v\left(\frac{1}{t}\right) t^{2r-2-br}$, $t > 0$.

Combinando ahora (I.48), (I.49) y (I.50) obtenemos (I.47).

Cuando $r = \infty$ o $s = \infty$ la prueba puede hacerse de un modo similar.

En el caso $1 \le s < r \le \infty$, (I.47) puede ser establecido análogamente pero recurriendo al Teorema 2(1.3.2) [49]. ■

A continuación presentamos algunos casos particulares de la desigualdad (I.47). Nuestros resultados están relacionados con conocidas desigualdades pesadas para otras transformaciones integrales ([2], [28], [38], [39] y [57]).

Establecemos ahora la Proposición I.5.1 como consecuencia de la Proposición I.7.1.

Proposición I.7.2 *Sea $\alpha < 1-\gamma < \beta$ y $1 \le s < \infty$. Entonces*

$$\left\{ \int_0^\infty \left| x^{1-\gamma} \mathbf{IH}(f)(x) \right|^s \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \le C \int_0^\infty x^{\gamma-1} |f(x)| dx \ , \quad f \in C_0 \, . \tag{I.51}$$

Demostración: Si $1-\gamma < a < \beta$ se tiene

$$\left\{ \int_x^\infty t^{s(1-\gamma-a)-1} dt \right\}^{\frac{1}{s}} \left\| t^{-a-\gamma+1} \chi_{\left[\frac{1}{x},\infty\right)}(t) \right\|_{\infty, t^{\gamma-1}dt} = (s(1-\gamma-a))^{\frac{1}{s}} \ ,$$

para cada $x > 0$ y $1 \le s < \infty$. Aquí $\| \ \|_{\infty, t^{\gamma-1}dt}$ denota el supremo esencial respecto de la medida $t^{\gamma-1}dt$ y χ_E representa la función característica respecto del conjunto medible E.

De un modo similar podemos obtener cuando $\alpha < b < 1-\gamma$ y $1 \leq s < \infty$.

$$\sup_{x>0}\left\{\int_0^x t^{s(1-\gamma-b)-1}dt\right\}^{\frac{1}{s}} \left\|t^{-b-\gamma+1}\chi_{(0.\frac{1}{x})}(t)\right\|_{\infty,t^{\gamma-1}dt} < \infty.$$

Luego, de la Proposición I.7.1 se sigue el resultado deseado. ∎

Proposición I.7.3 *Sean* $1 \leq r \leq 2$, $\alpha < 0$ *y* $\frac{1}{2} < \beta$. *Si* u *es una función localmente integrable sobre* $(0\,,\,\infty)$ *tal que* $\int_E u(x)\,dx \;\leq\; C\,|E|^{r-1}$, *para cada conjunto medible* E *de* $(0,\infty)$, *donde como es usual* $|E|$ *denota la medida de Lebesgue de* E, *entonces*

$$\int_0^\infty u(x)\,|\mathbb{H}(f)(x)|^r\;dx \;\leq\; C\int_0^\infty |f(x)|^r\;dx\;,\quad f\;\in\;C_0\;. \tag{I.52}$$

Demostración: Nuestra prueba es análoga a la del Teorema 1 [2]. Sea $1 < r < 2$. Definimos el operador

$$(Tf)(x) \;=\; \left\{\begin{array}{cl} u^{-\frac{b}{2}}(x)\,\mathbb{H}(f)(x) & ,\; si\; u(x)\;\neq\;0 \\ \\ 0 & ,\; si\; u(x)\;=\;0 \end{array}\right.\;,\;\; f\;\in\;C_0\;,$$

donde $b \;=\; \frac{2}{2-r}$.

Ya que $\alpha \;<\; 0 \;<\; \beta$, de (I.9) se sigue que $\mathfrak{H}$ es una función acotada sobre $(0\,,\,\infty)$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 2 [2] obtenemos

$$\int_{\{x\,:\,|Tf(x)|\,>\,\lambda\}} u^b\,(x)\,dx \;\leq\; \int_{\left\{x\,:\,u^{\frac{b}{2}}(x)\,\leq\,\frac{C}{\lambda}\,\int_0^\infty\,|f(x)|\,dx\right\}} u^b(x)\,dx \;\leq$$

$$\leq\; \frac{C}{\lambda}\int_0^\infty |f(x)|\,dx\,,\;\; f \in C_0\;.$$

De este modo concluimos que T es de tipo débil $(1\,,\,1)$, considerando los espacios de medida $(\,(0\,,\,\infty),\,dx\,)$ y $(\,(0\,,\,\infty),\,u^b(x)\,dx\,)$.

Además, de la Proposición I.2.1 se sigue que $\mathbb{H}$ es un operador acotado de $L_2\,(0\,,\,\infty) = \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\,,\,2}$ en si mismo, ya que $\alpha \;<\; \frac{1}{2} \;<\; \beta$. Por tanto

$$\int_0^\infty |Tf(x)|^2\,u^b(x)\,dx \;\leq\; C\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx\,,\;\; f \in C_0\,,$$

y T es de tipo fuerte $(2\,,\,2)$ entre los espacios considerados.

El conocido teorema de interpolación de Marcinkiewicz implica el resultado deseado para $1 < r < 2$. Finalmente observamos que cuando $r = 1$ entonces $\int_0^\infty u(x)dx < \infty$ y (I.52) sigue inmediatamente, ya que $\alpha < 0 < \beta$ recurriendo de nuevo a (I.9). Además si $r = 2$ la función u está en $L_\infty(0,\infty)$ y al ser $\alpha < \frac{1}{2} < \beta$, (I.9) implica (I.52). ∎

Obtenemos ahora condiciones sobre u que se deducen de (I.52).

Proposición I.7.4 *Sea $1 \leq r < \infty$. Supongamos que una de las dos condiciones que siguen se satisface:*

(i) Existe $j_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq j_0 \leq p$, tal que $-\frac{a_{j_0}}{\alpha_{j_0}} > \text{máx}\left\{\alpha\,,\,1-\frac{1}{r}\right\}$ y

$$\inf_{0<x<1}\left|\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a'_1,\alpha_1),\ldots,(a'_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right| > 0 \qquad \text{(I.53)}$$

donde $a'_{j_0} = a_{j_0} + 1$ y $a'_j = a_j$, $1 \leq j \leq p$, $j \neq j_0$;

(ii) Existe $j_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq j_0 \leq q$, tal que $\frac{1-b_{j_0}}{\beta_{j_0}} > \text{máx}\left\{\beta\,,\,1-\frac{1}{r}\right\}$ y

$$\inf_{0<x<1}\left|\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b'_1,\beta_1),\ldots,(b'_q,\beta_q)\end{matrix}\right)\right| > 0 \qquad \text{(I.54)}$$

donde $b'_{j_0} = b_{j_0} - 1$ y $b'_j = b_j$, $1 \leq j \leq q$, $j \neq j_0$.

Entonces

$$\int_0^a u(x)\,dx \;\leq\; C\,a^{r-1}\;,\ \text{para cada } a > 0, \qquad \text{(I.55)}$$

siempre que (I.52) se verifica.

Demostración: Probaremos el resultado cuando (i) se satisface siendo $n+1 \leq j_0 \leq p$. La prueba en los otros casos puede ser hecha de un modo similar.

Es fácil ver que

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-a_{j_0}}\, \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x^{\alpha_{j_0}} \Big|^{(a'_1,\alpha_1),\ldots,(a'_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right)\right] =$$

$$= -x^{-(a_{j_0}+1)}\, \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x^{\alpha_{j_0}} \Big|^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right), \quad x > 0 \tag{I.56}$$

donde $a'_{j_0} = a_{j_0} + 1$ y $a'_j = a_j$, $j = 1, \ldots, p$, $j \neq j_0$.

Sea $a > 0$. Definimos

$$f_a(x) = \begin{cases} x^{-\frac{\alpha_{j_0}+a_{j_0}}{\alpha_{j_0}}} & , \ 0 < x \leq \frac{1}{a} \\ 0 & , \ x > \frac{1}{a} \end{cases} .$$

Usando (I.56) podemos escribir

$$(\mathbb{H}\, f_a)\,(x) = \int_0^{\frac{1}{a}} t^{-\frac{\alpha_{j_0}+a_{j_0}}{\alpha_{j_0}}}\, \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(tx \Big|^{(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right) dt =$$

$$= \alpha_{j_0}\, x^{\frac{a_{j_0}}{\alpha_{j_0}}} \int_0^{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_{j_0}}}} \frac{d}{dv}\left[-v^{-a_{j_0}}\, \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(v^{\alpha_{j_0}} \Big|^{(a'_1,\alpha_1),\ldots,(a'_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right)\right] dv =$$

$$= -\alpha_{j_0}\, a^{\frac{a_{j_0}}{\alpha_{j_0}}}\, \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{x}{a} \Big|^{(a'_1,\alpha_1),\ldots,(a'_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right)$$

al ser

$$\lim_{v\to 0^+} v^{-a_{j_0}}\, \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(v^{\alpha_{j_0}} \Big|^{(a'_1,\alpha_1),\ldots,(a'_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right) = 0\,. \tag{I.57}$$

Ya que $\alpha < -\frac{a_{j_0}}{\alpha_{j_0}}$ para probar (I.57) es suficiente tener en cuenta (I.9). Por tanto de acuerdo con (I.53) podemos escribir

$$\int_0^a u(x)\, dx \leq C \int_0^a u(x) \left| \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(\frac{x}{a} \Big|^{(a'_1,\alpha_1),\ldots,(a'_p,\alpha_p)}_{(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)} \right)\right|^r dx =$$

$$= C\left(\alpha_{j_0}\, a^{\frac{a_{j_0}}{\alpha_{j_0}}} \right)^{-r} \int_0^a u(x)\, \left|\mathbb{H}(f_a)(x)\right|^r\, dx$$

Luego, de (I.52) se infiere

$$\int_0^a u(x)\,dx \,\leq\, C\, a^{-\frac{a_{j_0} r}{\alpha_{j_0}}} \int_0^{\frac{1}{a}} x^{-\frac{(\alpha_{j_0}+a_{j_0})\,r}{\alpha_{j_0}}}\,dx \,=\, C\,a^{r-1} \ .$$

De este modo la prueba termina. ∎

Nótese que si $r = 1$ (I.55) implica que u es integrable sobre $(0\,,\infty)$. Cuando $r = 2$, u es acotada sobre $(0\,,\infty)$ cuando (I.55) se da. Si $r > 2$ entonces $u \equiv 0$ siempre que (I.55) sea cierto. En los casos $r = 1$ y $r = 2$ la condición (I.55) es equivalente a la condición suficiente impuesta en la Proposición I.7.3.

Procediendo como en §7 [2] no es difícil obtener condiciones necesarias y suficientes sobre una función v (análogas a las presentadas en las Proposiciones I.7.3 y I.7.4) para que (I.47) se de, donde $r = s \in [1, 2]$ y siendo Ω la medida de Lebesgue sobre $(0, \infty)$.

B. Muckenhoupt [57] obtuvo condiciones suficientes sobre las funciones medibles u y v que garantizan que la desigualdad (I.47) se da, con $d\Omega(x) = u(x)dx$, cuando la transformación $\mathbb{H}$ se sustituye por la transforamción de Fourier. El estudió también el problema inverso probando que en ciertos casos las condiciones a las que hacíamos referencia son también necesarias para que se verifique (I.47). P. Heywood y P.G. Rooney [38] analizaron el mismo problema para la transformación de Hankel. Abordamos aquí la cuestión para la transformación $\mathbb{H}$ (nótese que esta transformación se reduce a la de Hankel para adecuados valores de los parámetros).

Recordamos inicialmente algunas definiciones (véase [38]).

Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, $1 \leq r < \infty$ y v función medible no negativa sobre $(0\,,\infty)$, el espacio $\mathcal{L}_{\gamma\,,v\,,r}$ está constituido por aquellas funciones f medibles sobre $(0\,,\infty)$ tales que

$$\|f\|_{\gamma\,,v\,,r} \,=\, \left\{\int_0^\infty |x^\gamma\, v(x)\, f(x)|^r \,\frac{dx}{x}\right\}^{\frac{1}{r}} \,<\, \infty \ .$$

El espacio $\mathcal{L}_{\eta\,,v\,,r}$ es de Banach cuando se considera sobre él la norma $\|\ \ \|_{\gamma\,,v\,,r}$. Si u

y v son funciones medibles no negativas sobre $(0\,,\,\infty)$ se dice que $(u\,,\,v)\,\in\,A(r\,,\,s\,,\,\delta)$ con $\delta\,\in\,\mathbb{R}$ y $1\,<\,r,\,s\,<\,\infty$, cuando existen constantes positivas B y C para las que

$$\left[\int_{u(x)\,>\,B\,\omega}\left\{x^{\delta}\,u(x)\right\}^{s}\,\frac{dx}{x}\right]^{\frac{1}{s}}\left[\int_{v(x)\,<\,\omega}\left\{\frac{x^{\delta}}{v(x)}\right\}^{r'}\,\frac{dx}{x}\right]^{\frac{1}{r'}}\,\leq\,C\,,$$

para cada $\omega\,>\,0$.

En la primera parte presentamos algunas condiciones sobre los parámetros involucrados en la definición de la función $\mathcal{H}$ de Fox que permiten extender la transformación $\mathbb{H}$ al espacio $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ como un operador acotado de $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,r}$ en $\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,s}$. Ahora mejoramos aquellos resultados estableciendo condiciones bajo las cuales la transformación puede ser extendida a $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$ como un elemento de $[\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}\,,\,\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s}]$.

Proposición I.7.5 *Sea* $1\,<\,r\,\leq\,s\,<\,\infty\,,\,\xi\,>\,0$ *y* $\alpha\,<\,1-\gamma\,<\,\beta$. *Supongamos que* $(u\,,\,v)\,\in\,A\,(r\,,\,s\,,\,1-\gamma-\sigma)$, *con* $\alpha\,<\,\sigma\,<\,\beta$. *Entonces la transformación* $\mathbb{H}$ *puede ser extendida a* $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$ *como un elemento de* $[\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}\,,\,\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s}]$.

Demostración: Es suficiente tener en cuenta que, por (I.9), $|\mathcal{H}(x)|\,\leq\,C\,x^{-\sigma}$, $x\,>\,0$, siendo $\alpha\,<\,\sigma\,<\,\beta$. Usando esta última desigualdad en lugar de (2.5) [38] y la Proposición I.4.1 la prueba del resultado requerido sigue como la del Teorema 1 [38].

Además este aserto puede ser también establecido recurriendo a la Proposición I.7.1 ya que si $(u,v)\in A\,(r,s,1-\gamma-\sigma)$ siendo $\alpha<1-\gamma<\beta$ y $\alpha<\sigma<\beta$, entonces las condiciones $B_i<\infty$, $i=1,2$, de la Proposición I.7.1 se satisfacen cuando se sustituyen $d\Omega$ y v por $x^{(1-\gamma-\sigma)s-1}u(x)^s dx$ y por $x^{(1-\gamma-\sigma)r-1}v(x)^r$, respectivamente. ∎

El resultado establecido en la Proposición anterior corresponde a la Proposición I.4.1. De un modo similar pueden ser enunciados otros en relación con las proposiciones I.3.1–I.3.4.

Nos proponemos ahora probar un inverso (parcial) para la Proposición I.7.5. Necesitamos previamente establecer lo siguiente.

Lema I.7.1 *Sean* $1 < r \leq s < \infty$ *y* $0 < \gamma < 1$. *Supongamos que* u *y* v *son funciones medibles no negativas sobre* $(0\,,\,\infty)$ *siendo* u *decreciente,* $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ *y* v *creciente. Asumamos también que*

$$\inf_{0<x<1} \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(x\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\ \\ (b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right) > 0\ . \tag{I.58}$$

Entonces existe $B > 0$ *para la cual*

$$sup\,\{\,x\,:\,u(x) > B\,\omega\}\cdot sup\,\{\,x\,:\,v(x) < \omega\} \leq 1\,,$$

para cada $\omega > 0$*, siempre que* $\mathbb{H}$ *sea un operador acotado de* $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$ *en* $\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s}$.

Demostración: El resultado quedará probado desde que veamos que si

$$sup\,\{\,x\,:\,u(x) > B\,\omega\}\cdot sup\,\{\,x\,:\,v(x) < \omega\} > 1$$

para algún $\omega > 0$, entonces B es menor que una constante positiva únicamente dependiente de r, s y γ.

Sean $B\,,\,\omega > 0$. Por simplificar denotamos

$$M = M(\,B\,,\,\omega\,) = sup\,\{\,x\,:\,u(x) > B\,\omega\}\ .$$

Ya que $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, $M(\,B\,,\,\omega\,) < \infty$. Supongamos ahora que

$$M(\,B\,,\,\omega\,)\,.\,sup\,\{x\,:\,v(x) < \omega\} > 1\ .$$

Definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,\ \text{si}\ 0 < x < \frac{1}{M} \\ \\ 0 & ,\ \text{si}\ \ x > \frac{1}{M}\ \ . \end{cases}$$

Es claro que $f \in \mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$ teniéndose que

$$\|f\|_{\gamma\,,\,v\,,\,r} = \left\{ \int_0^{\frac{1}{M}} |x^\gamma\, v(x)|^r \,\frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{r}} \le \left\{ \int_0^{\frac{1}{M}} \omega^r\, x^{\gamma\, r\, -\, 1}\, dx \right\}^{\frac{1}{r}} = \frac{\omega}{M^\gamma\,(\gamma\, r)^{\frac{1}{r}}} \tag{I.59}$$

al ser v creciente. Por tanto $\mathbb{H}\, f \in \mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s}$ y teniendo en cuenta (I.58) y que u es decreciente podemos escribir

$$\|\mathbb{H}\, f\|_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s} \ge \left\{ \int_0^M \left| x^{1-\gamma}\, u(x) \int_0^{\frac{1}{M}} \mathcal{H}(xt)\, dt \right|^s \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \ge$$

$$\ge \frac{C}{M} \left\{ \int_0^M \left| x^{1-\gamma}\, u(x) \right|^s \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \ge \frac{C\, B\, \omega}{M} \left\{ \int_0^M x^{(1-\gamma)s-1} dx \right\}^{\frac{1}{s}} = \frac{C\, B\, \omega}{M^\gamma\,(s(1-\gamma))^{\frac{1}{s}}}\,.$$

Además

$$\|\mathbb{H}\, f\|_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s} \le C\, \|f\|_{\gamma\,,\,v\,,\,r}\,. \tag{I.60}$$

Combinando (I.58), (I.59) y (I.60) se concluye que

$$B \le \frac{C\,[s(1-\gamma)]^{\frac{1}{s}}}{(\gamma\, r)^{\frac{1}{r}}}$$

y la prueba queda completa. ∎

Proposición I.7.6 *Sean* $1 < r \le s < \infty$ *y* $0 < \gamma < 1$. *Sean* u *y* v *funciones medibles no negativas sobre* $(0\,,\,\infty)$ *verificando las siguientes propiedades:* u *es decreciente,* $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, v *es creciente y* $\displaystyle\int_{v(x)\,<\,\omega} \left(\frac{x^{1-\gamma}}{v(x)}\right)^{r'} \frac{dx}{x} < \infty$, *para cada* $\omega > 0$. *Entonces* $(u\,,\,v) \in \mathcal{A}(r\,,\,s\,,\,1-\gamma)$ *siempre que* $\mathbb{H}$ *sea un operador acotado de* $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$ *en* $\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s}$ *y se satisfaga (I.58).*

Demostración: Sea $\omega > 0$. Definimos la función

$$f_\omega(x) = \begin{cases} x^{\frac{\gamma\, r\, -1}{1\, -\, r}}\, v(x)^{-r'} & ,\ \text{si}\quad 0 < v(x) < \omega \\[2ex] 0 & ,\ \text{de otro modo}\,. \end{cases}$$

No es difícil ver que

$$\|f_\omega\|_{\gamma\,,\,v\,,\,r} \;=\; \left\{ \int_{v(x)\,<\,\omega} \left\{ \frac{x^{1-\gamma}}{v(x)} \right\}^{r'} \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{r}} .$$

Por tanto $f_\omega \in \mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$. Ya que $\mathbb{H}$ es un operador acotado de $\mathcal{L}_{\gamma\,,\,v\,,\,r}$ en $\mathcal{L}_{1-\gamma\,,\,u\,,\,s}$ se tiene

$$\|\mathbb{H}\, f_\omega\|_{1\,-\,\gamma\,,\,u\,,\,s} \;\le\; C\; \|f_\omega\|_{\gamma\,,\,v\,,\,r}\ .$$

Entonces

$$\left\{ \int_{u(x)\,>\,B\,\omega} \left| x^{1-\gamma}\, u(x)\, \mathbb{H}\,(f_\omega)\,(x) \right|^{s} \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \;\le\; \|\mathbb{H} f_\omega\|_{1\,-\,\gamma\,,\,u\,,\,s} \;\le$$

$$\le\; C \left\{ \int_{v(x)\,<\,\omega} \left(\frac{x^{1-\gamma}}{v(x)} \right)^{r'} \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{r}}\ , \tag{I.61}$$

donde B es la constante dada por el Lema I.7.1.

Además, de acuerdo con el Lema I.7.1, si $\omega\,,\,x\,,\,t\,>\,0$, $u(x)\,>\,B\,\omega$ y $v(t)\,<\,\omega$, entonces

$$x\,t \;\le\; sup\,\{x\,:\,u(x)\,>\,B\,\omega\}\;\, sup\,\{\,t\,:\,v(t)\,<\,\omega\} \;\le\; 1\ \ .$$

Luego de (I.58) se sigue

$$\left\{ \int_{u(x)\,>\,B\,\omega} \left| x^{1-\gamma}\, u(x)\, \mathbb{H}\,(f_\omega)\,(x)\right|^{s} \tfrac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \;=$$

$$=\left\{ \int_{u(x)\,>\,B\,\omega} \left| x^{1-\gamma}\, u(x)\, \int_{v(t)\,<\,\omega} t^{\frac{\gamma\,r\,-\,1}{1\,-\,r}}\; \mathcal{H}(xt)\, v(t)^{-r'}\, dt \right|^{s} \tfrac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \;\ge \tag{I.62}$$

$$\ge\; C\, \left\{ \int_{u(x)\,>\,B\,\omega} \left| x^{1-\gamma}\, u(x)\, \right|^{s} \tfrac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{s}} \int_{v(x)\,<\,\omega} \left\{ \tfrac{t^{1\,-\,\gamma}}{v(t)} \right\}^{r'} \tfrac{dt}{t}\ .$$

De (I.61) y (I.62) inferimos ya que $(\,u\,,\,v\,)\;\in\;\mathcal{A}\,(\,r\,,\,s\,,\,1\,-\,\gamma\,)$. ∎

S.A. Emara y H.P. Heinig [28] establecieron teoremas de interpolación (Teoremas 1 y 2 de [28]) que les permitieron estudiar las transformaciones $\mathbf{K}$ y de Hankel en ciertos espacios L_p con peso. Pueden ser utilizados también dichos teoremas de interpolación para obtener desigualdades del tipo (I.47) para la transformación $\mathbb{H}$. Ese será nuestro último objetivo de esta Sección.

Creemos conveniente recordar algunas definiciones antes de establecer los resultados. Sean u y v funciones medibles no negativas definidas sobre $(0\,,\,\infty)$ y denotemos por u^* y $\left(\frac{1}{v}\right)^*$ los reordenamientos decrecientes equimedibles de u y $\frac{1}{v}$, respectivamente. Decimos que $(u\,,\,v)\,\in\,F^*_{r\,,\,s}$ siempre que

$$\sup_{\omega>0}\left\{\int_0^{\frac{1}{\omega}} u^*(t)^s\,dt\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\int_0^{\omega}\left[\left(\frac{1}{v}\right)^*(t)\right]^{r'}dt\right\}^{\frac{1}{r'}} \;<\; \infty \tag{I.63}$$

se verifique para cada $1\,<\,r\,\leq\,s\,<\,\infty$, y cuando se satisfagan las condiciones

$$\int_0^{\infty}\left\{\left\{\int_0^{\frac{1}{x}} u^*(t)^s\,dt\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\int_0^{x}\left[\left(\frac{1}{v}\right)^*(t)\right]^{r'}dt\right\}^{\frac{1}{r'}}\right\}^{h}\left[\left(\frac{1}{v}\right)^*(x)\right]^{r'}dx \;<\; \infty \tag{I.64}$$

y

$$\int_0^{\infty}\left\{\left\{\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\left[t^{-\frac{1}{2}}u^*(t)\right]^s dt\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\int_x^{\infty}\left[t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{v}\right)^*(t)\right]^{r'}dt\right\}^{\frac{1}{r'}}\right\}^{h}\left[x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{v}\right)^*(x)\right]^{r'}dx<\infty \tag{I.65}$$

donde $\frac{1}{h}\;=\;\frac{1}{s}\;-\;\frac{1}{r}$, para cada $1<s<r<\infty$.

Además si se satisfacen (I.63) o (I.64)–(I.65) con u^* y $\left(\frac{1}{v}\right)^*$ reemplazadas por u y $\frac{1}{v}$, respectivamente, decimos que $(u\,,\,v)\,\in\,F_{r\,,\,s}$, en cada caso.

Proposición I.7.7 *Sean* $1\,<\,r,\;s\,<\,\infty$, $\alpha\,<\,0$ *y* $\frac{1}{2}\,<\,\beta$. *Entonces*

$$\left\{\int_0^{\infty}|u(x)\mathbb{H}(f)(x)|^s\,dx\right\}^{\frac{1}{s}}\;\leq\;C\left\{\int_0^{\infty}|v(x)f(x)|^r\,dx\right\}^{\frac{1}{r}}\;,\quad f\in C_0\,, \tag{I.66}$$

siempre que $(u,v)\in F^*_{r,s}$.

Demostración: Ya que $\alpha\,<\,0\,<\,\beta$, en virtud de (I.9) podemos escribir

$$\sup_{x>0}|\mathbb{H}\,(f)\,(x)|\;\leq\;C\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx\;,\quad f\;\in\;L_1(0\,,\,\infty)\;.$$

Por tanto $\mathbb{H}$ es un operador acotado de $L_1(0\,,\,\infty)$ en $L_\infty(0\,,\,\infty)$.

Además, $\mathbb{H}$ es un operador acotado de $L_2(0\,,\,\infty)$ en $L_2(0\,,\,\infty)$ ya que $\alpha < \frac{1}{2} < \beta$ (Proposición I.2.1).

Si $(u,v) \in F^*_{r,s}$ entonces (I.66) sigue inmediatamente de los Teoremas 1 y 2 de [28]. ∎

Probamos a continuación un inverso (parcial) para la Proposición I.7.7. Nótese que no hacemos ninguna hipótesis sobre la monotonía de las funciones pesos u y v.

Proposición I.7.8 *Sean $1 < r \leq s < \infty$ y u y v funciones medibles no negativas sobre $(0\,,\,\infty)$. Asumamos que (I.58) es cierto y que $\int_0^\omega v(x)^{-r'}dx < \infty$, para cada $\omega > 0$. Entonces $(u\,,\,v) \in F_{r\,,\,s}$ siempre que (I.66) se de.*

Demostración. Sea $\omega > 0$. Definimos la función

$$f_\omega(x) = \begin{cases} v(x)^{-r'} & ,\ \text{si} \quad 0 < x < \omega \\ 0 & ,\ \text{si} \quad x > \omega\ . \end{cases}$$

De (I.58) se deduce

$$\int_0^\infty |u(x)\,\mathbb{H}\,(f_\omega)\,(x)|^s\,dx = \int_0^\infty \left| u(x) \int_0^\infty \mathcal{H}(xt)\, f_\omega(t)\,dt \right|^s dx \geq$$

$$\geq \int_0^{\frac{1}{\omega}} \left| u(x) \int_0^\omega \mathcal{H}(xt)\, v(t)^{-r'} dt \right|^s dx \geq C \int_0^{\frac{1}{\omega}} u(x)^s dx \left(\int_0^\omega v(t)^{-r'} dt \right)^s .$$

Además,

$$\int_0^\infty |f_\omega(x)\,v(x)|^r\,dx = \int_0^\omega v(x)^{-r'} dx\ .$$

Por consiguiente, ya que (I.66) se verifica obtenemos

$$\left(\int_0^{\frac{1}{\omega}} u(x)^s dx \left(\int_0^\omega v(t)^{-r'} dt \right)^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \left(\int_0^\omega v(t)^{-r'} dt \right)^{\frac{1}{r}} .$$

Se concluye de aquí que $(u\,,\,v) \in F_{r\,,\,s}$. ∎

TERCERA PARTE

Una nueva fórmula de inversión para la transformación integral de Hankel en espacios L_p con peso y de distribuciones

Obtenemos en esta trecera parte una nueva fórmula de inversión para la tranformación integral de Hankel definida por

$$h_\nu(f)(y) = \int_0^\infty x^\nu C_\nu(xy) f(x) dx \ , \quad f \in C_0 \ , \tag{I.67}$$

donde la función $C_\nu(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{z})$, $z \in (0,\infty)$, es la conocida usualmente como función de Bessel–Clifford (véase [36]). La transformación h_ν es también conocida como transformación de Hankel–Clifford ([6], [36] y [48] entre otros).

La transformación integral de Hankel puede presentar otras formas distintas de (I.67) ([71], [73] y [84] por ejemplo). En cualquier caso, los resultados probados para h_ν pueden ser obtenidos para estas otras formas modificando adecuadamente los conseguidos para h_ν.

Para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ introducimos el operador $\mathbf{H}^\nu_{k,t}$ definido por

$$\mathbf{H}^\nu_{k,t}[F] = \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) F(y) dy \ , \ \ t \in (0,\infty) \ ,$$

siendo ${}_1F_1$ la función hipergeométrica confluente ([72]).

En la Sección I.8 investigamos condiciones bajo las cuales la fórmula de inversión

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h_\nu f\right] = f(t) \tag{I.68}$$

se verifica. Consideraremos funciones f que están en ciertos espacios L_p pesados que a continuación precisamos y el límite será entendido puntualmente o en los espacios tipo L_p considerados.

Sean $1 \le p < \infty$ y $\nu \in \mathbb{R}$. El espacio $\mathbf{L}^\nu_p$ está constituido por aquellas funciones medibles f sobre $(0,\infty)$ tales que $x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} f \in L_p(0,\infty)$. Sobre $\mathbf{L}^\nu_p$ consideramos la norma natural

$$|f|_{p,\nu} = \|x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} f\|_p \;, \quad f \in \mathbf{L}_p^\nu \;,$$

donde $\| \quad \|_p$ denota la norma usual en $L_p(0,\infty)$. Denotamos por $\mathcal{L}_p^\nu$ el espacio formado por las funciones f medibles sobre $(0,\infty)$ tales que $x^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}} f \in L_p(0,\infty)$. La norma que definimos sobre $\mathcal{L}_p^\nu$ es

$$_\nu|f|_p = \|x^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}} f\|_p \;, \quad f \in \mathcal{L}_p^\nu \;.$$

En la Sección I.8 estudiamos la acotación de la transformación h_ν entre los espacios de tipo L_p considerados. Se da en la Sección I.9 una caracterización, en términos de los operadores $\mathbf{H}_{k,t}^\nu$, el recorrido de h_ν sobre los espacios $\mathbf{L}_p^\nu$ y $\mathcal{L}_p^\nu$. Finalmente en la Sección I.10 se prueba la validez distribucional de la igualdad (I.68). Concretamente, demostramos que si f es una distribución de soporte compacto en $(0,\infty)$ entonces (I.68) se da cuando el límite es entendido en el espacio de Schwartz $\mathcal{D}'(0,\infty)$.

I.8 Un operador de inversión para la transformación de Hankel

En esta Sección establecemos algunas condiciones bajo las cuales los operadores $\mathbf{H}_{k,t}^\nu$ conducen a la fórmula de inversión (I.68) para h_ν.

Necesitamos previamente establecer algunos resultados que presentamos a modo de lemas.

Lema I.8.1 *Sean $1 < p \leq 2$ y $\nu \geq -\frac{1}{2}$. La transformación de Hankel h_ν puede ser extendida a $\mathbf{L}_p^\nu$ como un operador en $\left[\mathbf{L}_p^\nu \;,\; \mathcal{L}_{p'}^\nu\right]$.*

Demostración.- Es suficiente tener en cuenta (I.13), (I.14), y el Teorema [23] p. 180 y aplicar el teorema de interpolación de Riesz-Thorin. ∎

Lema I.8.2 *Sean $1 < p \leq 2$ y $t \in (0, \infty)$.*

(i) Si $-\frac{1}{2} \leq \nu < k$ entonces

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) h_\nu(f)(y)dy = \\ &= \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-\frac{kx}{t}} f(x)dx \ , \end{aligned} \tag{I.69}$$

para cada $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ y $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

(ii) Si $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ entonces

$$t \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(1; \nu+1; -ty\right) h_\nu(f)(y)dy = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}} f(x)dx \ , \tag{I.70}$$

para cada $f \in \mathbf{L}_p^\nu$.

Demostración.- Probaremos (i). La demostración de (ii) puede hacerse de forma similar . Sea $f \in C_0$. De acuerdo con (**8.6.(14)**) [32] podemos escribir

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) h_\nu(f)(y)dy = \\ &= \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) \int_0^\infty x^\nu C_\nu(xy) f(x)dxdy = \\ &= \int_0^\infty f(x)\, x^\nu \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) C_\nu(xy)dydx = \\ &= \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-\frac{kx}{t}} f(x)dx \ , \quad t \in (0,\infty) \text{ y } k \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{aligned}$$

El intercambio en el orden de integración está justificado ya que en virtud de (I.13), (I.14), (I.15) y (I.16) podemos concluir que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left| {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) x^\nu C_\nu(xy) f(x) \right| dxdy \ < \ \infty \ .$$

De este modo probamos la igualdad (I.69) para cada $f \in C_0$.

Para finalizar la prueba es suficiente ver que los dos términos de la igualdad (I.69) definen funcionales acotados sobre $\mathbf{L}_p^\nu$. Para cada $f \in \mathbf{L}_p^\nu$, se tiene haciendo uso de la desigualdad de Hölder

$$\left| \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-\frac{kx}{t}} f(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} |f|_{p,\nu} \left\{ \int_0^\infty \left| x^{k+\frac{1}{2p}-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{kx}{t}} \right|^{p'} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} ,$$

para cada $k \in I\!N - \{0\}$ y $t \in (0,\infty)$. Por tanto, el funcional $T_1(f) = \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-\frac{kx}{t}} f(x)dx$, $f \in \mathbf{L}_p^\nu$, es acotado en $\mathbf{L}_p^\nu$.

Por otra parte, en virtud del Lema I.8.1 y recurriendo de nuevo a la desigualdad de Hölder, para cada $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ obtenemos

$$\left| \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right) h_\nu(f)(y)dy \right| \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^\infty \left| \frac{y^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2p'}-\frac{1}{4}}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right) \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} |h_\nu f|_{p',\nu} \leq$$

$$\leq C|f|_{p,\nu} \left\{ \int_0^\infty \left| \frac{y^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2p'}-\frac{1}{4}}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right) \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} ,$$

para cada $k \in I\!N - \{0\}$ y $t \in (0,\infty)$. Además, de (I.15) y (I.16) se deduce que

$$\int_0^\infty \left| \frac{y^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2p'}-\frac{1}{4}}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right) \right|^p dy < \infty ,$$

y por consiguiente la funcional definida por

$T_2 f = \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right) h_\nu(f)(y)dy$, $f \in \mathbf{L}_p^\nu$,

es acotada sobre $\mathbf{L}_p^\nu$.

La prueba de (i) queda así completa. ∎

Lema I.8.3 *Sean $1 < p \leq 2$, $q \geq 2$ y $\nu \geq -\frac{1}{2}$. La transformación de Hankel h_ν puede ser extendida a $\mathcal{L}_q^\nu$ como un operador acotado de $\mathcal{L}_q^\nu$ en $\mathbf{L}_q^\nu$. También h_ν puede ser extendido a $\mathbf{L}_p^\nu$ como un operador acotado de $\mathbf{L}_p^\nu$ en $\mathcal{L}_p^\nu$.*

Demostración:Estos resultados pueden ser establecidos como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz procediendo como en la prueba de la Proposición I.7.3. $\blacksquare$

Lema I.8.4 *Sean $q \geq 2$ y $t \in (0,\infty)$. Si $f \in \mathcal{L}_q^\nu$, (I.69) se verifica para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ siempre que $-\frac{1}{2} \leq \nu < k$ y (I.70) se satisface cuando $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$.*

Demostración: La prueba puede ser realizada como la del Lemma I.8.2 haciendo uso del Lema I.8.3. $\blacksquare$

Presentamos en la siguiente proposición condiciones bajo las cuales (I.68) es válido puntualmente.

Proposición I.8.1 *(i) Si $1 < p \leq 2$, $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$ y $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}_{k,t}^\nu [h_\nu f] = f(t) \tag{I.71}$$

para cada $t \in (0,\infty)$ que esté en el conjunto de Lebesgue de f.

(ii) Si $2 \leq q < \infty$, $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ y $f \in \mathcal{L}_q^\nu$ entonces (I.71) se verifica para cada $t \in (0,\infty)$ que esté en el conjunto de Lebesgue de f.

Demostración: Sea $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ donde $1 < p \leq 2$ y $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$. Para cada $t \in (0,\infty)$ y $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ siendo $\nu < k$, en virtud del Lema I.8.2 se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{k,t}^\nu [h_\nu f] &= \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k}\right) h_\nu(f)(y)dy = \\ &= \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-\frac{kx}{t}} f(x)dx = \mathbf{L}_{k,t}[g]\end{aligned}$$

donde $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, $s \in (0,\infty)$, y $\mathbf{L}_{k,t}$ representa el operador Post–widder definido en la introducción (véase [77]).

La desigualdad de Hölder conduce a

$$\int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt \leq \left\{\int_0^\infty \left|e^{-st} t^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2p}}\right|^{p'} dt\right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{\int_0^\infty \left|t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} f(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

También sabemos que $f \in L^1(0,R)$, para cada $R > 0$.

Por tanto por el Teorema 6.a [77] implica que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^{\nu}_{k,t}\,[h_\nu f] = f(t)$$

para cada $t \in (0,\infty)$ que esté en el conjunto de Lebesgue de f.

De este modo (i) queda probado.

Para demostrar (ii) podemos proceder de un modo similar usando el Lema I.8.4 en lugar del Lema I.8.2. ■

Analizamos ahora la convergencia en norma p en (I.68).

Proposición I.8.2 *Sea $\nu \geq -\frac{1}{2}$.*

(i) Si $1 < p \leq 2$, para cada $f \in \mathbf{L}^{\nu}_p$ tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^{\nu}_{k,t}\,[h_\nu f] = f(t)\ , \quad \text{en } \mathbf{L}^{\nu}_p\ .$$

(ii) Si $2 \leq q < \infty$, para cada $f \in \mathcal{L}^{\nu}_q$,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^{\nu}_{k,t}\,[h_\nu f] = f(t)\ , \quad \text{en } \mathcal{L}^{\nu}_q\ .$$

Demostración: Como en las proposiciones anteriores probaremos ahora (i) ya que el aserto en (ii) puede ser probado de forma similar.

Sea $f \in \mathbf{L}^{\nu}_p$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$ y $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ siendo $\nu < k$. El Lema I.8.2(i) permite escribir

$$\mathbf{H}^{\nu}_{k,t}\,[h_\nu f] - f(t) = \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-\frac{kx}{t}} [f(x) - f(t)]dx\ , \quad t \in (0,\infty).$$

Por tanto, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\left|\mathbf{H}^{\nu}_{k,t}\,[h_\nu f] - f(t)\right| \leq \left\{ \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty y^k e^{-\frac{ky}{t}} \left|f(y) - f(t)\right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}\ , \quad t \in (0,\infty).$$

Haciendo sencillas manipulaciones sigue

$$\int_0^\infty t^{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right)p} \left| \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h_\nu f\right] - f(t) \right|^p dt =$$

$$= \frac{k^{k+1}}{k!} \int_0^\infty t^{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right)p-k-1} \int_0^\infty e^{-\frac{ky}{t}} y^k \left| f(y) - f(t) \right|^p dy\, dt =$$

$$= \frac{k^{k+1}}{k!} \int_0^\infty t^{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right)p} \int_0^\infty e^{-ku} u^k \left| f(tu) - f(t) \right|^p du\, dt =$$

$$= \frac{k^{k+1}}{k!} \int_0^\infty e^{-ku} u^k \int_0^\infty t^{\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}\right)p} \left| f(tu) - f(t) \right|^p dt\, du \,.$$

Procediendo ahora como en la prueba del Teorema 3 [62] se concluye que

$$\left| \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h_\nu f\right] - f(t) \right|_{\nu,p} \to 0 \,, \text{ cuando } k \to \infty. \quad \blacksquare$$

I.9 Representación de funciones como transformdas de Hankel de ciertos espacios L_p con peso

En los lemas I.8.1 y I.8.3 fue probado que la transformación h_ν puede ser extendida a $\mathbf{L}^\nu_p$ como un elemento de $\left[\mathbf{L}^\nu_p \,,\, \mathcal{L}^\nu_{p'}\right]$, para cada $1 < p \leq 2$, y a $\mathcal{L}^\nu_q$ como un miembro de $\left[\mathcal{L}^\nu_q \,,\, \mathbf{L}^\nu_q\right]$, cuando $2 \leq q < \infty$. Sin embargo h_ν sobre los espacios considerados es una aplicación sobreyectiva sólo en el caso $p = q = 2$. En esta Sección caracterizamos el recorrido de la transformación de Hankel h_ν sobre $\mathbf{L}^\nu_p$ $(1 < p \leq 2)$ y $\mathcal{L}^\nu_q$ $(2 \leq q < \infty)$ por medio de los operadores $\mathbf{H}^\nu_{k,t}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Inicialmente establecemos un interesante y útil resultado de unicidad para la transformación ${}_1F_1$ sobre los espacios L_p que consideramos.

Lema I.9.1 *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $f \in \mathbf{L}^\nu_p$ $\left(\mathcal{L}^\nu_p\right)$. *Si*

$$\int_0^\infty y^\nu {}_1F_1(1; \nu+1; -yx) f(y) dy = 0 \,, \quad x \in (0, \infty) \,,$$

entonces $f = 0$ *en casi todo punto de* $(0, \infty)$, *siempre que* $0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ $\left(0 < \nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}\right)$.

Demostración: Probaremos nuestro resultado para $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ cuando $0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$, el correspondiente para $f \in \mathcal{L}_p^\nu$ puede ser visto de una manera similar

En virtud del Teorema 3 [29] para cada $f \in C_0$ se tiene

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty y^\nu {}_1F_1(1;\nu+1;-yx) f(y)dy = \int_0^\infty e^{-xy} y^\nu J(f)(y)dy\ , \quad x \in (0,\infty)\ , \tag{I.72}$$

donde $J(f)(y) = \dfrac{y^{-\nu}}{\Gamma(\nu)} \displaystyle\int_y^\infty (u-y)^{\nu-1} f(u)du$, $y \in (0,\infty)$.

Además cada miembro de la igualdad (I.72) define un funcional acotado sobre $\mathbf{L}_p^\nu$, para cada $x \in (0,\infty)$. Por una parte teniendo en cuenta (I.15) y (I.16) y usando la desigualdad de Hölder obtenemos para cada $f \in \mathbf{L}_p^\nu$

$$|\textstyle\int_0^\infty y^\nu {}_1F_1(1;\nu+1;-yx) f(y)dy| \leq$$

$$\leq \left\{ \textstyle\int_0^\infty y^{\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2p}\right)p'} \left|{}_1F_1(1;\nu+1;-yx)\right|^{p'} dy \right\}^{\frac{1}{p'}} |f|_{p,\nu} \leq C\, |f|_{p,\nu}\ ,$$

siempre que $0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$.

Por otra parte, de acuerdo con el Corolario 3.1 [65] concluimos

$$\left| \int_0^\infty e^{-xy} y^\nu J(f)(y)dy \right| \leq \left\{ \int_0^\infty e^{-xyp'} y^{\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2p}\right)p'} dy \right\}^{\frac{1}{p'}} |J(f)|_{p,\nu} \leq$$

$$\leq C\,|f|_{p,\nu}\ , \quad f \in \mathbf{L}_p^\nu\ ,$$

cuando $0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$.

Ya que C_0 es un subconjunto denso de $\mathbf{L}_p^\nu$ la igualdad (I.72) se da para cada $f \in \mathbf{L}_p^\nu$.

Sea ahora $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ tal que $\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)} \displaystyle\int_0^\infty y^\nu {}_1F_1(1;\nu+1;-yx) f(y)dy = 0$, $x \in (0,\infty)$. Entonces de (I.72) se sigue que

$$\int_0^\infty e^{-xy} y^\nu J(f)(y)dy = 0\ , \ \ x \in (0,\infty)\ .$$

Por tanto, en virtud del Teorema 6.a [77] $J(f)(y) = 0$, casi todo $y \in (0,\infty)$, y del Lema 3.4 [63] se infiere que $f(y) = 0$, casi todo $y \in (0,\infty)$. $\blacksquare$

Proposición I.9.1 *Sean* $1 < p \leq 2$ *y* $0 < \nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$. *Si* $F \in \mathbf{L}_{p'}^{\nu}$ *entonces existe* $f \in \mathbf{L}_p^{\nu}$ *tal que* $F = h_\nu f$ *si, y sólo si, existe* $C > 0$ *para la cual*

$$\int_0^\infty \left| t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} \mathbf{H}_{k,t}^{\nu}[F] \right|^p dt \leq C\,, \quad k \in I\!N - \{0\}\,. \tag{I.73}$$

Demostración: Sea $F \in \mathbf{L}_{p'}^{\nu}$. Si $F = h_\nu f$, para algún $f \in \mathbf{L}_p^{\nu}$ entonces de la Proposición I.8.2 se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}_{k,t}^{\nu}[F] = f(t)\,, \quad \text{en } \mathbf{L}_p^{\nu}\,.$$

Por tanto $\left\{\mathbf{H}_{k,t}^{\nu}[F]\right\}_{k\in I\!N-\{0\}}$ es acotado en $\mathbf{L}_p^{\nu}$, o dicho de otra forma (I.73) se verifica.

Supongamos ahora que (I.73) se satisface. Introducimos la función g definida por

$$g(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty {}_1F_1\left(1;\nu+1;-\frac{y}{s}\right)\frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)}F(y)dy\,,\ \ s \in (0,\infty).$$

Para cada $k \in I\!N$ tenemos

$$\frac{d^k}{ds^k}g(s) = (-1)^k k! s^{-1-k}\int_0^\infty {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y}{s}\right)\frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)}F(y)dy\,,\ \ s \in (0,\infty)\,,$$

ya que

$$(-1)^k\frac{1}{k!}x^{1+k}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x}\,{}_1F_1\left(1;\nu+1;-\frac{1}{x}\right)\right) = {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{1}{x}\right)\,,$$

para cada $k \in I\!N$ y $x \in (0,\infty)$ ((2.I.4) [72]). La derivación bajo el signo integral está justificada ya que aplicando la desigualdad de Hölder y (I.15) y (I.16) se tiene

$$\int_0^\infty \left|\frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)}{}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y}{s}\right)F(y)\right|dy \leq$$

$$\leq \left\{\int_0^\infty \left|{}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y}{s}\right)\frac{y^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2p'}}}{\Gamma(\nu+1)}\right|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^\infty \left|y^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p'}}F(y)\right|^{p'}dy\right\}^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, siempre que $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$.

Por tanto $\mathbf{L}_{k,t}[g] = \mathbf{H}^{\nu}_{k,t}[F]$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $t \in (0, \infty)$. En virtud de (I.73) existe una sucesión $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de enteros no negativos y una función $f \in \mathbf{L}^{\nu}_p$ tal que

$$\int_0^{\infty} \beta(t) t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} \mathbf{L}_{k_i,t}[g] dt \;\to\; \int_0^{\infty} \beta(t) t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} f(t) dt \;,\; i \to \infty,$$

para cada $\beta \in \mathbf{L}_{p'}(0, \infty)$. Tomando $\beta(t) = t^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2p}} e^{-st}$, $t \in (0, \infty)$, donde $s \in (0, \infty)$ obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{L}_{k_i,t}[g] dt \;\to\; \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \;,\; \text{cuando}\, i \to \infty \;,$$

para cada $s \in (0, \infty)$.

Por otra parte la desigualdad de Hölder conduce a

$$\int_0^x |\mathbf{L}_{k,t}[g]|\, dt \leq \left\{ \int_0^x t^{\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2p}\right)p'} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_0^{\infty} \left| t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} \mathbf{L}_{k,t}[g] \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C\, x^{-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2p'}} \;,\;\; x \in (0, \infty) \text{ y } k \in \mathbb{N} - \{0\} \;.$$

Luego

$$\int_0^x |\mathbf{L}_{k,t}[g]|\, dt = O(x) \;, \quad \text{cuando } x \to \infty \,.$$

También $|g(s)| \leq C\; s^{\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2p}}$, $s \in (0, \infty)$, lo que implica que $g(s) \to 0$, cuando $s \to \infty$, siempre que $\nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$.

De acuerdo con el Teorema 11(b), Cap.7, [77] concluimos

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{L}_{k_i,t}[g] dt = g(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \,, \;\; s \in (0, \infty).$$

Definimos ahora $G = h_\nu f \in \mathbf{L}^{\nu}_{p'}$ (Lema I.8.1). Asimismo definimos

$$g^*(s) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} {}_1F_1 \left(1; \nu+1; -\frac{y}{s} \right) \frac{y^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} G(y) dy \,, \;\; s \in (0, \infty) \,.$$

El Lema I.8.2 (ii) nos permite escribir

$$g^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = g(s) \;, \quad s \in (0, \infty) \,.$$

Por tanto en virtud del Lema I.9.1 se infiere que $F = G$ en casi todo $(0, \infty)$. ■

Proposición I.9.2 *Sean $q \geq 2$ y $0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$. Si $F \in \mathbf{L}_q^\nu$ entonces $F = h_\nu f$ para alguna $f \in \mathcal{L}_q^\nu$ si, y sólo si, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty \left| t^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{2q}} \mathbf{H}_{k,t}^\nu[F] \right|^q dt \leq C\,, \quad k \in I\!N - \{0\}. \tag{I.74}$$

Demostración: Sea $F \in \mathbf{L}_q^\nu$. Si $F = h_\nu f$, para alguna $f \in \mathcal{L}_q^\nu$. De la Proposición I.8.2 (ii), se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}_{k,t}^\nu[F] = f\,, \quad \text{en } \mathcal{L}_q^\nu\,,$$

de donde se deduce (I.74).

Supongamos ahora que (I.74) es cierto. Como en la prueba de la Proposición I.9.1 introducimos la función

$$g(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty {}_1F_1\left(1; \nu+1; -\frac{y}{s}\right) \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} F(y)dy\,, \quad s \in (0,\infty)\,.$$

Derivando bajo el signo integral obtenemos

$$\mathbf{L}_{k,t}[g] = \mathbf{H}_{k,t}^\nu[F]\,, \quad t \in (0,\infty)\,,$$

para cada $k \in I\!N$ suficientemente grande.

Del Teorema 11(b), Cap.7 [77] se deduce que

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\,, \quad s \in (0,\infty)\,.$$

La prueba puede ser finalizada procediendo como en la prueba de la Proposición I.9.1. ■

Proposición I.9.3 *Sean $1 < p \leq 2$ y $0 < \nu < \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$. Si $F \in \mathcal{L}_p^\nu$ entonces $F = h_\nu f$ para alguna $f \in \mathbf{L}_p^\nu$ si, y sólo si, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty \left| t^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}} \mathbf{H}_{k,t}^\nu[F] \right|^p dt \leq C\,, \quad k \in I\!N - \{0\}.$$

Demostración: Este resultado puede ser probado de una forma similar a los presentados en las Proposiciones I.9.1 y I.9.2. ■

I.10 Una nueva fórmula de inversión para la transformación distribucional de Hankel

La transformación h_ν de Hankel ha sido estudiada en espacios de distribuciones por J.M.R. Méndez y M.M. Socas [48] y J.J. Betancor [7], entre otros.

Sea $f \in \mathcal{E}'(0,\infty)$. Definimos la transformada de Hankel $h'_\nu f$ de f por

$$(h'_\nu f)(y) = \langle f(x)\ ,\ x^\nu C_\nu(xy)\ \rangle\ , \quad y \in (0,\infty)\ .$$

De acuerdo con el Teorema 6, [7] la función $h'_\nu f$ es infinitamente derivable en $(0,\infty)$. Además, en virtud del Teorema 7 [7] existe una constante $C > 0$ y un entero no negativo r tales que

$$\left|(h'_\nu f)(y)\right| \leq C y^\nu (1 + y^r)\ , \quad y \in (0,\infty)\,. \tag{I.75}$$

En esta Sección damos una versión distribucional para la fórmula de inversión probada en la Proposición I.8.1.

Proposición I.10.1 *Sean $\nu > -\frac{1}{2}$ y $f \in \mathcal{E}'(0,\infty)$. entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h'_\nu f\right] = f(t)$$

en el sentido de la convergencia de $\mathcal{D}'(0,\infty)$.

Demostración: Debemos probar que

$$\langle\ \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h'_\nu f\right]\ ,\ \phi(t)\ \rangle \to \langle\ f(t)\ ,\ \phi(t)\ \rangle\,,\quad \text{cuando } k \to \infty\,,$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}(0,\infty)$.

Nótese inicialmente que $\mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h'_\nu f\right]$ es una función continua en $t \in (0,\infty)$, para cada $k \in I\!N$ tal que $k > 2\nu + r$, donde r es el definido en (I.75). En efecto, si $k \in I\!N$, siendo $k > 2\nu + r$, obtenemos de (I.15), (I.16) y (I.75)

$$\int_0^\infty \left|\frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)(h'_\nu f)(y)\right| dy \leq$$

$$\leq C\int_0^\infty \frac{y^{2\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\left|{}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\right|(1+y^r)\,dy<\infty\,.$$

Sean $\phi\in\mathcal{D}(0,\infty)$ y $0<a<b<\infty$, de manera que $\phi(t)=0$, $t\notin(a,b)$. Supongamos que $k\in\mathbb{N}$ y $k>2\nu+r$. Podemos escribir intercambiando el orden de integración

$$\langle\ \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h'_\nu f\right]\ ,\ \phi(t)\ \rangle=\int_a^b \mathbf{H}^\nu_{k,t}\left[h'_\nu f\right]\phi(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty\left(h'_\nu f\right)(y)\,y^\nu\int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy\ .$$

Nuestro objetivo es probar que

$$\int_0^\infty\left(h'_\nu f\right)(y)\,y^\nu\int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy=$$

$$=\Big\langle\ f(x)\,,\ x^\nu\int_0^\infty C_\nu(xy)\,y^\nu\int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy\ \Big\rangle \tag{I.76}$$

cuando k es suficientemente grande.

Ya que $f\in\mathcal{E}'(0,\infty)$ existen $C>0$, $m\in\mathbb{N}$ y un subconjunto compacto $K\subset(0,\infty)$ tal que

$$|\langle\ f,\psi\ \rangle|\leq C\,\text{máx}_{0\leq\ell\leq m}\sup_{x\in K}\left|D^\ell\left(x^{-\nu}\psi(x)\right)\right|\ ,\quad \psi\in\mathcal{E}(0,\infty)\,. \tag{I.77}$$

Sea $0<c<\infty$. Tenemos que:

$$\int_0^c\left(h'_\nu f\right)(y)\,y^\nu\int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}\sum_{\mu=1}^n\left(h'_\nu f\right)(y_{\mu,n})\,y^{\nu}_{\mu,n}\int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y_{\mu,n}\,t}{k}\right)\phi(t)dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big\langle\ f(x)\ ,\ x^\nu\frac{c}{n}\sum_{\mu=1}^n C_\nu\left(xy_{\mu,n}\right)y^{\nu}_{\mu,n}\int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y_{\mu,n}\,t}{k}\right)\phi(t)dt\ \Big\rangle$$

donde $\{y_{\mu,n}\}_{\mu=0}^n$ representa la partición del intervalo $[0\,,\,c]$ $y_{\mu\,n}=\mu\frac{c}{n}$, $\mu=1,\ldots,n$, para cada $n\in\mathbb{N}-\{0\}$.

Además tomando en consideración resultados presentados en la pag. 69 [84] obtenemos para cada $\ell \in \mathbb{N}$

$$I_{n,\ell}(x) = D^\ell x^{-\nu} \left[x^\nu \frac{c}{n} \sum_{\mu=1}^{n} C_\nu\left(xy_{\mu,n}\right) y_{\mu,n}^{\nu} \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y_{\mu,n}\,t}{k}\right)\phi(t)dt - \right.$$

$$\left. - x^\nu \int_0^c C_\nu(xy) y^\nu \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y\,t}{k}\right)\phi(t)dtdy \right] =$$

$$= (-1)^\ell \left[\frac{c}{n} \sum_{\mu=1}^{n} C_{\nu+\ell}\left(xy_{\mu,n}\right) y_{\mu,n}^{\nu+\ell} \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{y_{\mu,n}\,t}{k}\right)\phi(t)dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^c C_{\nu+\ell}(xy) y^{\nu+\ell} \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dt \right], \quad x \in (0,\infty).$$

Por tanto $I_{n,\ell}(x) \to 0$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en cada subconjunto compacto de $(0,\infty)$, para cada $\ell \in \mathbb{N}$. De este modo hemos establecido que

$$\int_0^c \left(h'_\nu f\right)(y)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy =$$

$$= \left\langle\, f(x)\,,\; x^\nu \int_0^c C_\nu(xy)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy \,\right\rangle .$$

Sea ahora $c > 0$ y $\ell \in \mathbb{N}$ siendo $\ell \leq m$. En virtud de (I.13), (I.14), (I.15) y (I.16) podemos escribir

$$\left| D^\ell \int_c^\infty C_\nu(xy)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy \right| \leq$$

$$\leq \int_c^\infty \left|C_{\nu+\ell}(xy)\right| y^{\nu+\ell} \int_a^b \left| {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)\right| dtdy \leq$$

$$\leq C \int_c^\infty y^{\nu+\ell-k-1} dy\,, \quad x \in \mathbb{K}\,,$$

siempre que $k > \nu + m$. Por consiguiente de (I.77) sigue que

$$\left\langle\, f(x)\,,\; x^\nu \int_c^\infty C_\nu(xy)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dtdy \,\right\rangle \to \infty \text{ , cuando } c \to \infty\,.$$

Además, de (I.15), (I.16) y (I.75) se infiere

$$\int_c^\infty \left| \left(h'_\nu f\right)(y)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1\left(k+1;\nu+1;-\frac{yt}{k}\right)\phi(t)dt \right| dy \leq$$

$$\leq C \int_c^\infty (1 + y^r)\, y^{2\nu-k-1} dy \ .$$

Por tanto

$$\int_c^\infty \left| (h'_\nu f)\,(y)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1 \left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k} \right) \phi(t) dt \right| dy \ \rightarrow \ 0 \ , \text{ cuando } c \rightarrow \infty \ ,$$

cuando $2\nu + r < k$.

De los argumentos que hemos desarrollado concluímos que (I.76) es cierto cuando k es suficientemente grande.

Además, intercambiando el orden de integración y usando (8.6.(14)) [32] obtenemos

$$\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty C_\nu(xy)\, y^\nu \int_a^b {}_1F_1 \left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k} \right) \phi(t) dt dy =$$

$$= x^\nu \int_a^b \phi(t) \int_0^\infty \frac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} C_\nu(xy) {}_1F_1 \left(k+1; \nu+1; -\frac{yt}{k} \right) dy dt =$$

$$= x^k \int_a^b \phi(t) \left(\frac{k}{t} \right)^{k+1} \frac{1}{k!}\, e^{-\frac{kx}{t}} dt \ ,$$

siempre que k sea suficientemente grande.

Recurriendo nuevamente a las sumas de Riemann podemos probar que

$$\langle\ \mathbf{H}^\nu_{k,t} \left[h'_\nu f \right]\ ,\ \phi(t)\ \rangle = \int_a^b \phi(t) \left(\frac{k}{t} \right)^{k+1} \frac{1}{k!}\ \langle\ f(x)\, ,\, x^k e^{-\frac{kx}{t}}\ \rangle dt$$

cuando k es suficientemente grande.

Por tanto de (10) [80] se concluye que

$$\lim_{k\to\infty} \langle\ \mathbf{H}^\nu_{k,t} \left[h'_\nu f \right]\ ,\ \phi(t)\ \rangle = \langle\ f(t)\, ,\, \phi(t)\ \rangle\ ,$$

y la prueba termina. ■

Capítulo II

Transformaciones integrales tipo Watson en espacios de funciones generalizadas

II.1 Introducción

J.A. Barrios and J.J. Betancor ([11] y [12]) definieron las transformaciones $\mathbf{K}_\nu$ y de Krätzel en espacios de funciones generalizadas empleando el método del operador adjunto. La técnica desarrollada estaba inspirada en trabajos de A. Schuitman ([68] y [69]) y B.L.J. Braaksma y A. Schuitman [21] y en ella la transformación integral de Mellin juega un importante papel.

En este capítulo modificamos el procedimiento seguido en [11] y [12] definiendo nuevas transformaciones integrales en espacios de funciones generalizadas. Concretamente investigamos transformaciones de la forma

$$W(\phi)(x) = \int_0^\infty \mathfrak{k}(xt)\phi(t)dt \tag{II.1}$$

donde $\mathfrak{k}(x) = \dfrac{1}{2\pi\, i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}K(s)ds$, para algún $c \in I\!R$, y siendo K una función meromorfa con polos reales. Habitualmente las transformaciones integrales (II.1) son llamadas de Watson o tipo Watson.

En la Sección 2 introducimos nuevos espacios de Frèchet de funciones analizando el comportamiento de la transformación de Mellin sobre los mismos. La transformción W cuando $K(s)$ tiene un crecimiento potencial al ser $|Im\ s|$ grande es estudiada en los espacios citados en la Sección 3. Ello permitirá definir la transformación (II.1) en los correspondientes espacios duales siguiendo la via del operador adjunto. A continuación investigamos las transformaciones W asociadas a funciones $K(s)$ con crecimiento exponencial cuando $|Im\, s| \to \infty$. Finalizamos el capítulo presentando algunos casos especiales de la teoría desarrollada.

A lo largo de este capítulo denotaremos por I al intervalo $(0, \infty)$.

II.2 Algunos nuevos espacios de funciones

Introducimos en esta Sección nuevos espacios de funciones sobre los cuales será investigada la transformación de Watson en las secciones que siguen.

Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tales que

$$\inf\{a_n - a_{n+1} : n \in I\!N - \{0\}\} > 0$$

y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tales que

$$\inf\{b_{n+1} - b_n \ : \ n \in I\!N - \{0\}\} \ > \ 0 \ .$$

Además suponemos que $a_1 \ < \ b_1$.

El espacio $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ está constituido por las funciones complejas e infinitamente diferenciables $\phi = \phi(x)\, ,\ x \in \mathbf{I}$, tales que la cantidad

$$\gamma_{\ell,\,k}^{m}(\phi) \ = \ \sup_{x \in \mathbf{I}} \left| x^{m(a_{k+1} - b_{\ell+1})} \prod_{i=1}^{\ell} \left(x^{b_{i+1} - b_i + 1} \frac{d}{dx} \right) \right.$$
$$\left. \left(x^{b_1 - a_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \left(x^{a_{j+1} - a_j + 1} \frac{d}{dx} \right) (x^{a_1} \phi(x)) \right) \right|$$

es finita para cada $\ell,\ k \ \in \ I\!N$ y $m \ = \ 0, 1$. Aquí y en el resto del capítulo $\prod_{i=1}^{0}$ se entiende como 1. El espacio $\mathcal{A}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ es dotado con la topología generada por la familia $\left\{\gamma^m_{\ell,k}\right\}_{\ell,k\in\mathbb{N};\, m=0,1}$ de seminormas. Mediante procedimientos habituales (véase, por ejemplo, A.H. Zemanian [84], p. 131, y A. Zayed [79]) podemos probar que $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ es un espacio de Frèchet.

Sea ahora $\epsilon > 0$ tal que $b_1 - a_1 > 2\epsilon$, $a_{n+1} + \epsilon < a_n$ y $b_n + \epsilon < b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Definimos el espacio $\mathcal{B}_\epsilon\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ como sigue. Una función Φ meromorfa en $\mathbb{C}$ está en $\mathcal{B}_\epsilon\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones

(i) Φ es holomorfa en $\mathbb{C} - \left(\{a_n\}_{n=1}^\infty \cup \{b_n\}_{n=1}^\infty\right)$ y $\Phi(s)$ tiene a lo sumo polos simples en $s = a_n$ y $s = b_n$, para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, y

(ii) $\omega^\epsilon_{\ell,k}(\Phi) = \sup_{s\in V_\epsilon(k,\ell)} \left| \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, \Phi(s) \right| < \infty$,

donde $V_\epsilon(k,\ell) = \{s \in \mathbb{C}\ :\ a_{k+1} + \epsilon \leq \mathbb{R}e\, s \leq b_{\ell+1} - \epsilon\}$, for every $\ell, k \in \mathbb{N}$.

Consideramos sobre $\mathcal{B}_\epsilon\left((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ la topología asociada a la familia de normas $\left\{\omega^\epsilon_{\ell,k}\right\}_{\ell,k\in\mathbb{N}}$. Asi $\mathcal{B}_\epsilon\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ es un espacio de Frèchet . No es dificil ver que el espacio $\mathcal{B}_\epsilon\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ no depende de ϵ siempre que $\epsilon > 0$, $b_1 - a_1 > 2\epsilon$, $a_{n+1} + \epsilon < a_n$ y $b_n + \epsilon < b_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Por ello en lo que sigue denotaremos por $\mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$, $\omega_{\ell,k}$ y $V(k,\ell)$ a $\mathcal{B}_\epsilon\left((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty\right)$, $\omega^\epsilon_{\ell,k}$ y $V_\epsilon(k,\ell)$, respectivamente.

Como es bien conocido la transformación integral de Mellin se define por

$$(\mathcal{M}\phi)(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\phi(t)dt\,,\ s \in \Omega,$$

donde Ω es un subconjunto del plano complejo asociado a ϕ. La transformación de Mellin desempeñará un papel fundamental en la teoría que desarrollaremos. A continuación probamos que la transformación $\mathcal{M}$ es un homeomorfismo de $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ en $\mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty\right)$.

Proposición II.2.1 *La transformación integral de Mellin es un homeomorfismo de* $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ *en* $\mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$.

Demostración.- Sea $\phi \in \mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$. No resulta complicado ver que la función

$$\Phi(s) = \left(\mathcal{M}\phi\right)(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\phi(t)dt \tag{II.2}$$

es holomorfa en $\{s \in \mathbb{C}\ :\ a_1 < \mathbb{R}e\, s < b_1\}$. Además la integral en la parte derecha de (II.2) es absolutamente convergente en $\{s \in \mathbb{C}\ :\ a_1 < \mathbb{R}e\, s < b_1\}$.

Integrando por partes obtenemos

$$\Phi(s) = \frac{-1}{s-a_1}\int_0^{\infty} x^{s-a_2-1}\left(x^{a_2-a_1+1}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{a_1}\phi(x)\right)dx\ ,\ a_1 < \mathbb{R}e\, s < b_1\ , \tag{II.3}$$

y la última integral converge absolutamente en $\{s \in \mathbb{C}\ :\ a_2 < \mathbb{R}e\, s < b_1\}$. Por tanto la función Φ puede ser extendida holomórficamente a $\{s \in \mathbb{C}\ :\ a_2 < \mathbb{R}e\, s < b_1\} - \{a_1\}$ por la función definida en la parte derecha de (II.3). La nueva función que seguiremos denotando por Φ presenta en $s = a_1$ a lo sumo un polo simple.

Repitiendo el argumento se prueba que la función $\Phi(s)$ puede ser extendida analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que continuaremmos representando por Φ. Esta función tiene polos a lo sumo en a_n y en b_n, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Además si presenta algún polo éste ha de ser simple. Obtenemos que

$$\Phi(s) = \frac{(-1)^{k+\ell}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell}(s-b_i)\prod_{j=1}^{k}(s-a_j)}\int_0^{\infty} x^{s-b_{\ell+1}-1}\prod_{i=1}^{\ell}\left(x^{b_{i+1}-b_i+1}\frac{d}{dx}\right)\cdot$$

$$\left(x^{b_1-a_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}\left(x^{a_{j+1}-a_j+1}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{a_1}\phi(x)\right)\right)dx\ ,$$

$$s \in \{s \in \mathbb{C}\ :\ a_{k+1} < \mathbb{R}e\, s < b_{\ell+1}\} - \left(\{a_n\}_{n=1}^{k}\ \cup\ \{b_n\}_{n=1}^{\ell}\right),\ \ell,\ k \in \mathbb{N}.$$

Luego para cada $s \in\ V(k,\ell)$ con $k,\ \ell\ \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left|\prod_{i=1}^{\ell}(s-b_i)\prod_{j=1}^{k}(s-a_j)\,\Phi(s)\right| \leq \int_0^1 x^{\mathbb{R}e\, s-a_{k+1}-1}dx\ \gamma_{\ell,k}^{1}(\phi)+$$

$$+\int_1^{\infty} x^{\mathbb{R}e\, s-b_{\ell+1}-1} dx\; \gamma_{\ell,k}^0(\phi) =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{R}e\, s - a_{k+1}}\; \gamma_{\ell,k}^1(\phi) + \frac{1}{b_{\ell+1} - \mathbb{R}e\, s}\; \gamma_{\ell,k}^0(\phi) \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\left[\gamma_{\ell,k}^1(\phi) + \gamma_{\ell,k}^0(\phi)\right].$$

Se concluye entonces que

$$\omega_{\ell,k}\left(\Phi\right) \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\left(\,\gamma_{\ell,k}^1(\phi) + \gamma_{\ell,k}^0(\phi)\right)\;,\; \ell, k \in \mathbb{N}.$$

De este modo se prueba que la transformación $\mathcal{M}$ es continua de $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\;,\;(b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ en $\mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\;,\;(b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$.

Sea ahora $\Phi \in \mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\;,\;(b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$. Definimos la función

$$\left(\mathcal{T}\Phi\right)(x) = \phi(x) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\Phi(s)ds\,,\; x \in \mathbf{I},$$

donde $c \in (a_1\,,\,b_1)$. El teorema de los residuos de Cauchy nos permite ver que la última integral es independiente de c siempre que $c \in (a_1\,,\,b_1)$.

Derivando bajo el signo integral obtenemos

$$x^{m(a_{k+1}-b_{\ell+1})}\prod_{i=1}^{\ell}\left(x^{b_{i+1}-b_i+1}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{b_1-a_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}\left(x^{a_{j+1}-a_j+1}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{a_1}\phi(x)\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{k+\ell}}{2\pi\, i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{m(a_{k+1}-b_{\ell+1})-s+b_{\ell+1}}\prod_{i=1}^{\ell}\left(s-b_i\right)\prod_{j=1}^{k}\left(s-a_j\right)\Phi(s)ds\,,$$

para cada $x \in \mathbf{I}$, $\ell,\; k \in \mathbb{N}$, y $m = 0, 1$. La derivación bajo el signo integral está justificada ya que $\Phi \in \mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$.

Fijamos $\ell, k \in \mathbb{N}$. De la igualdad anterior se deduce haciendo $m = 0$ que

$$\left|\prod_{i=1}^{\ell}\left(x^{b_{i+1}-b_i+1}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{b_1-a_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}\left(x^{a_{j+1}-a_j+1}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{a_1}\phi(x)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|(c+it-b_{\ell+1})\,(c+it-b_{\ell+2})\right|}dt\;\omega_{\ell+2,k}\left(\Phi\right)\;,\; x \in (0,1)\;, \qquad \text{(II.4)}$$

ya que $c < b_{\ell+1}$.

Por otra parte, para cada $x \in [1\,,\,\infty)$ y $R > 0$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int_{\Gamma_R} \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, x^{-s+b_{\ell+1}} \Phi(s) ds \;=$$

$$= Res \left[\prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, x^{-s+b_{\ell+1}} \Phi(s)\,;\, s = b_{\ell+1} \right] \qquad \text{(II.5)}$$

donde Γ_R es el camino cerrado de la Figura 1 y c_1 lo escogemos en el intervalo $(b_{\ell+1}\,,\,b_{\ell+2})$.

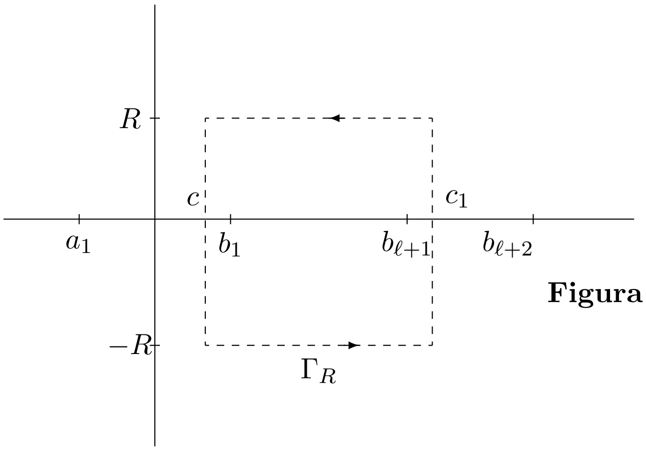

Figura 1

Además, si denotamos por $\mathbf{L}_{R,\alpha}$ el camino con parametrización

$$s(t) = t + i\alpha R\,, \;\; t \in [c, c_1]\,,$$

para $\alpha = 1,\ -1$, podemos escribir

$$\left| \int_{\mathbf{L}_{R,\alpha}} \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, x^{-s+b_{\ell+1}} \Phi(s) ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{R^2} \int_{c}^{c_1} x^{-t+b_{\ell+1}} dt\, \omega_{\ell+2,k}\,(\Phi) \to 0\,, \;\; \text{cuando} \;\; R \to \infty\,,$$

para $\alpha = 1,\ -1$.

Por tanto haciendo $R \to \infty$ en (II.5) se concluye

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s+b_{\ell+1}} \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, \Phi(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi\, i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} x^{-s+b_{\ell+1}} \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, \Phi(s) ds - \tag{II.6}$$

$$-Res \left[\prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, x^{-s+b_{\ell+1}} \Phi(s)\, ;\ s = b_{\ell+1} \right].$$

También, ya que $c_1 > b_{\ell+1}$, se tiene

$$\left| \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} x^{-s+b_{\ell+1}} \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, \Phi(s) ds \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|(c_1 + it - b_{\ell+1})\,(c_1 + it - b_{\ell+2})|} dt\ \omega_{\ell+2,k}\,(\Phi)\ ,\ x \in [1\,,\,\infty). \tag{II.7}$$

Además,

$$\left| Res \left[\prod_{i=1}^{\ell} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, x^{-s+b_{\ell+1}} \Phi(s)\, ; s = b_{\ell+1} \right] \right| = \tag{II.8}$$

$$= \lim_{s \to b_{\ell+1}} \left| \prod_{i=1}^{\ell+1} (s - b_i) \prod_{j=1}^{k} (s - a_j)\, x^{-s+b_{\ell+1}} \Phi(s) \right| \leq \omega_{\ell+1,k}\,(\Phi)\,,\ x \in [1, \infty).$$

Combinando ahora (II.4), (II.6), (II.7) y (II.8) inferimos

$$\gamma^0_{\ell,k}(\phi) \leq\ C_1 \left[\omega_{\ell+2,k}\,(\Phi)\ +\ \omega_{\ell+1,k}\,(\Phi) \right]\ , \tag{II.9}$$

para cierta $C_1 > 0$.

Procediendo de un modo similar podemos probar que existe $C_2 > 0$ de manera que

$$\gamma^1_{\ell,k}(\phi) \leq\ C_2 \left[\omega_{\ell+2,k}\,(\Phi)\ +\ \omega_{\ell+1,k}\,(\Phi) \right]. \tag{II.10}$$

De (II.9) y (II.10) se deduce ya que $\mathcal{T}$ es una aplicación continua de $\mathcal{B}\,((a_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (b_n)_{n=1}^{\infty})$ en $\mathcal{A}\,((a_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (b_n)_{n=1}^{\infty})$.

Para terminar la prueba es suficiente tener en cuenta que $\mathcal{T} \circ \mathcal{M}(\phi) = \phi$, $\phi \in \mathcal{A}\,((a_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (b_n)_{n=1}^{\infty})$ y $\mathcal{M} \circ \mathcal{T}\,(\Phi) = \Phi$, $\Phi \in \mathcal{B}\,((a_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (b_n)_{n=1}^{\infty})$. (I.N. Sneddon [73], p. 273). ■

Estudiaremos ahora un multiplicador entre espacios de tipo $\mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ que será muy útil en lo que sigue.

Proposición II.2.2 *Sean* $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales tales que* $\inf\{a_{n,i}-a_{n+1,i}\ :\ n\in I\!N-\{0\}\}>0$ *y* $(b_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales tales que* $\inf\{b_{n+1,i}-b_{n,i}\ :\ n\in I\!N-\{0\}\}>0$*, para* $i=1,2$*. Suponemos que* $a_{1,i}<b_{1,i}\,,\ i=1,2.$

Si $K(s)$ *es una función meromorfa en el plano complejo que satisface las condiciones que se siguen*

(i) $K(s)$ *tiene ceros simples en* $s=1-a_{n,1}$ *y* $s=1-b_{n,1}\,,\ n\in I\!N-\{0\}$*,*

(ii) $K(s)$ *tiene sus singularidades a lo sumo en* $s=a_{n,2}$ *y* $s=b_{n,2}\,,\ n\in I\!N-\{0\}$*; además tales singularidades son polos simples, y*

(iii) para cada subconjunto $\mathbf{J}$ *compacto de* $I\!R$ *existen* $M_{\mathbf{J}}>0$*,* $Y_{\mathbf{J}}>0$ *y* $\alpha_{\mathbf{J}}\in I\!R$ *tales que*

$$|K(s)|\le M_{\mathbf{J}}\,|Im\,s|^{\alpha_{\mathbf{J}}}\ ,\ \text{cuando}\,|Im\,s|>Y_{\mathbf{J}}\ \text{y}\ I\!Re\,s\ \in\mathbf{J},$$

entonces la aplicación definida por $\mathcal{T}_K(\Phi)(s)=K(s)\Phi(1-s)$ *es lineal y continua de* $\mathcal{B}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$ *en* $\mathcal{B}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$*.*

<u>Demostración</u>.- Sea $\Phi\in\mathcal{B}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$. Como es fácil ver la función $K(s)\Phi(1-s)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene como singularidades a lo sumo polos simples en $s=a_{n,2}$ y $s=b_{n,2}\,,\ n\in I\!N-\{0\}$.

Sean $\ell\,,\ k\ \in I\!N$ y elijamos $\epsilon>0$ suficientemente pequeño. Definimos

$$V_\epsilon^i(k,\ell)=\{s\in\mathbb{C}\ :\ a_{k+1,i}+\epsilon\le I\!Re\,s\le\ b_{\ell+1,i}-\epsilon\}\ ,\ i=1,2\ .$$

Escogemos también $\gamma,\ \beta\ \in I\!N$ de manera que

$$\omega_\epsilon^2(k,\ell)=\left\{s\in\mathbb{C}\ :\ 1-s\in\ V_\epsilon^2(k,\ell)\right\}\ \subset\ V_\epsilon^1(\beta,\gamma)$$

y $\ell + k + \alpha < \gamma + \beta$, donde α es la constante positiva $\alpha_{\mathbf{J}}$ dada en la hipótesis (iii) cuando $\mathbf{J} = [\epsilon + 1 - b_{\ell+1,2}\,,\, \epsilon + 1 - a_{k+1,2}]$.

Entonces en virtud de las condiciones impuestas a la función K existe una constante $C > 0$ para la cual

$$\sup_{s\in V_\epsilon^2(k,\ell)} \left| \prod_{i=1}^{\ell} (s - b_{i,2}) \prod_{j=1}^{k} (s - a_{j,2})\, \mathcal{T}_K(\Phi)(s) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{s\in \omega_\epsilon^2(k,\ell)} \left| \frac{\prod_{i=1}^{\ell} (1 - b_{i,2} - s) \prod_{j=1}^{k} (1 - a_{j,2} - s)\, K(1-s)}{\prod_{i=1}^{\gamma} (s - b_{i,1}) \prod_{j=1}^{\beta} (s - a_{j,1})} \right| \cdot$$

$$\cdot \sup_{s\in V_\epsilon^1(\beta,\gamma)} \left| \prod_{i=1}^{\gamma} (s - b_{i,1}) \prod_{j=1}^{\beta} (s - a_{j,1})\, \Phi(s) \right| \leq$$

$$\leq C \sup_{s\in V_\epsilon^1(\beta,\gamma)} \left| \prod_{i=1}^{\gamma} (s - b_{i,1}) \prod_{j=1}^{\beta} (s - a_{j,1})\, \Phi(s) \right| .$$

Por tanto la aplicación $\mathcal{T}_K$ es continua de $\mathcal{B}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\, (b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$ en $\mathcal{B}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\, (b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$. ■

Una inmediata consecuencia de la Proposición II.2.2 es la siguiente .

Corolario II.2.1 *Sean $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ y $(b_{n,i})_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, como en la Proposición II.2.2.*

Si $K(s)$ es una función meromorfa en el plano complejo verificando

(i) $K(s)$ tiene ceros simples en $s = 1 - a_{n,1}$ y $s = 1 - b_{n,1}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$,

(ii) $K(s)$ tiene sus singularidades en $s = a_{n,2}$ y $s = b_{n,2}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$; además tales singularidades son polos simples, y

(iii) para cada subconjunto $\mathbf{J}$ compacto de $\mathbb{R}$ existen $M_{\mathbf{J}} > 0$, $Y_{\mathbf{J}} > 0$, $\alpha_{\mathbf{J}} > 0$ y $\beta_{\mathbf{J}} > 0$ tales que

$$\frac{1}{M_{\mathbf{J}}} |Im\, s|^{\beta_{\mathbf{J}}} \leq |K(s)| \leq M_{\mathbf{J}} |Im\, s|^{\alpha_{\mathbf{J}}} \text{ , cuando } |Im\, s| > Y_{\mathbf{J}} \text{ y } \mathbb{R}e\, s \in \mathbf{J} \text{ ,}$$

entonces la aplicación definida por $\mathcal{T}_K(\Phi)(s) = K(s)\Phi(1-s)$ *es un homeomorfismo de* $\mathcal{B}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$ *en* $\mathcal{B}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$. ■

II.3 La transformación integral de Watson

En esta Sección estudiaremos la transformación de Watson (II.1) sobre espacios del tipo $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ y sus duales cuando la transformada de Mellin $K = \mathcal{M}(\mathfrak{k})$ de $\mathfrak{k}$ satisface ciertas condiciones de crecimiento y regularidad.

El principal resultado de esta Sección es el siguiente.

Teorema II.3.1 *Sean* $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_{n,i})_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$, *y* K *como en el Corolario II.2.1. Suponemos que* $a = \max\{1 - b_{1,1}\,,\ a_{1,2}\} < \min\{1 - a_{1,1}\,,\ b_{1,2}\} = b$ *y que para cada subconjunto* $\mathbf{J}$ *compacto de* (a, b) *existen* $M_{\mathbf{J}} > 0$, $Y_{\mathbf{J}} > 0$ *y* $\alpha_{\mathbf{J}} < -1$ *tales que*

$$|K(s)| \leq M_{\mathbf{J}}\, |Im\, s|^{\alpha_{\mathbf{J}}}\ ,\ \text{para}\ \ |Im\, s| > Y_{\mathbf{J}}\ \text{y}\ \mathbb{R}e\, s \in \mathbf{J}.$$

Entonces la transformación de Watson definida en (II.1), donde

$$\mathfrak{k}(x) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}K(s)ds\ ,\quad x \in \mathbf{I}, \tag{II.11}$$

con $a < c < b$, *es un homeomorfismo de* $\mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}, (b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$ *sobre* $\mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}, (b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$.

Demostración. Nótese que la integral en (II.11) es independiente de c cuando $c \in (a, b)$.

Sea $\phi \in \mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\,,\ (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$. Tenemos

$$W(\phi)(y) = \frac{1}{2\,\pi\, i}\int_0^{\infty}\phi(x)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(xy)^{-s}K(s)ds\, dx\ ,\quad y \in \mathbf{I}\,,$$

donde $a < c < b$.

Ya que $\int_0^\infty |\phi(x)|x^{-c}dx < \infty$, cuando $a < c < b$, el teorema de Fubini conduce a

$$W(\phi)(y) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K(s)y^{-s}\int_0^\infty \phi(x)x^{-s}dx\,ds\,,\quad y \in \mathbf{I}\,.$$

Por tanto podemos escribir

$$W(\phi)(y) = \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{T}_K \circ \mathcal{M}(\phi)(y)\,,\quad y \in \mathbf{I}, \tag{II.12}$$

donde $\mathcal{M}$ denota, como es usual, la transformación integral de Mellin, y $\mathcal{T}_K$ es la aplicación definida en la Sección 2.

El resultado deseado sigue ya de (II.12) como consecuencia de la Proposición II.2.1 y el Corolario II.2.1. ■

Establecemos ahora una igualdad de Parseval para la transformación W.

Proposición II.3.1 *Sean $(a_{n,i})_{n=1}^\infty$ y $(b_{n,i})_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$, y K como en la Proposición II.2.2. Asumimos que $a = \max\{1 - b_{1,1}\,,\, 1 - b_{1,2}\} < \min\{1 - a_{1,1}\,,\, 1 - a_{1,2}\} = b$ y que para cada subconjunto J compacto en (a, b) exiten $M_\mathbf{J} > 0$, $Y_\mathbf{J} > 0$ y $\alpha_\mathbf{J} < -1$ tales que $|K(s)| \leq M_\mathbf{J}\,|Im\,s|^{\alpha_\mathbf{J}}$, para $|Im\,s| > Y_\mathbf{J}$ y $\mathbb{R}e\,s \in \mathbf{J}$. Si W denota la transformación integral definida en (II.1), donde $\mathfrak{k}(x) = \frac{1}{2\pi\,i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}K(s)ds$, con $a < c < b$, entonces*

$$\int_0^\infty \phi_1(x)W\left(\phi_2\right)(x)dx = \int_0^\infty W\left(\phi_1\right)(x)\phi_2(x)dx \tag{II.13}$$

para cada $\phi_i \in \mathcal{A}\left((a_{n,i})_{n=1}^\infty\,,\ (b_{n,i})_{n=1}^\infty\right)\,,\ i = 1, 2.$

<u>Demostración</u>. Sean $\phi_i \in \mathcal{A}\left((a_{n,i})_{n=1}^\infty\,,\ (b_{n,i})_{n=1}^\infty\right)\,,\ i = 1, 2$. Ya que $\mathfrak{k}(x) = \frac{1}{2\pi\,i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}K(s)ds$, donde la integral es independiente de $c \in (a, b)$, en virtud de las propiedades impuestas a la función K, para cada $c \in (a, b)$ existe $M_c > 0$ para la cual

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\phi_1(x)\phi_2(y)\mathfrak{k}(xy)|\,dx\,dy \,\leq\, M_c\int_0^\infty x^{-c}\,|\phi_1(x)|\,dx\int_0^\infty x^{-c}\,|\phi_2(x)|\,dx.$$

Luego, al ser $\int_0^\infty x^{-c}\,|\phi_i(x)|\,dx < \infty$, $i = 1,\ 2$, cuando $c \in (a, b)$, sigue que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\phi_1(x)\phi_2(y)\mathfrak{k}(xy)|\,dx\,dy \ < \ \infty \ ,$$

y aplicando el teorema de Fubini concluimos

$$\int_0^\infty \phi_1(x) W\left(\phi_2\right)(x) dx = \int_0^\infty \phi_1(x) \int_0^\infty \mathfrak{k}(xy)\phi_2(y) dy\, dx \ =$$

$$= \int_0^\infty \phi_2(y) \int_0^\infty \mathfrak{k}(xy)\phi_1(x) dx\, dy \ = \ \int_0^\infty \phi_2(y) W\left(\phi_1\right)(y) dy. \blacksquare$$

Definimos la transformación W' de Watson sobre $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)'$, el espacio dual de $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$, como la traspuesta de la transformación W. El resultado que sigue es una consecuencia inmediata del Teorema II.3.1.

Teorema II.3.2 *Sean* $(a_{n,i})_{n=1}^\infty$ *y* $(b_{n,i})_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$, K *y* $\mathfrak{k}$ *como en el Teorema II.3.1. Entonces la transformada de Watson* $W'f$ *de* $f \in \mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,2})_{n=1}^\infty\right)'$ *definida por*

$$\langle W'f\ ,\ \phi\rangle = \langle\, f\ ,\ W\phi\rangle\ ,\ \ \phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,1})_{n=1}^\infty\right)\ , \tag{II.14}$$

da lugar a un homeomorfismo de $\mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,2})_{n=1}^\infty\right)'$ *en* $\mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,1})_{n=1}^\infty\right)'$ *cuando ambos espacios son dotados de las topologías débil * o con las topologías fuertes .* $\blacksquare$

Una condición suficiente para que $\mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,1})_{n=1}^\infty\right)$ sea un subespacio de $\mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,2})_{n=1}^\infty\right)'$ es la que se recoge a continuación.

Proposición II.3.2 *Sean* $(a_{n,i})_{n=1}^\infty$ *y* $(b_{n,i})_{n=1}^\infty$ *como en la Proposición II.2.2. Supongamos también que* $a_{1,1} + a_{1,2} < 1$ *y* $b_{1,1} + b_{1,2} > 1$. *Entonces*

$$\mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,1})_{n=1}^\infty\right) \subset \mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^\infty\ ,\ (b_{n,2})_{n=1}^\infty\right)'$$

en el sentido siguiente : cada $\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$ *define un elemento de* $\mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty},(b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)'$ *mediante*

$$\langle \phi\,,\,\psi\rangle = \int_0^\infty \phi(x)\psi(x)dx\,,\ \psi \in \mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right).$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$. Para cada $\psi \in \mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$ se tiene

$$\left|\int_0^\infty \phi(x)\psi(x)dx\right| \leq \int_0^1 x^{-a_{1,1}-a_{1,2}}dx\ \sup_{t\in\mathbf{I}}|t^{a_{1,1}}\phi(t)|\,.\sup_{t\in\mathbf{I}}|t^{a_{1,2}}\psi(t)| +$$
$$+\int_1^\infty x^{-b_{1,1}-b_{1,2}}dx\ \sup_{t\in\mathbf{I}}\left|t^{b_{1,1}}\phi(t)\right|\sup_{t\in\mathbf{I}}\left|t^{b_{1,2}}\psi(t)\right|.$$

Luego, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\int_0^\infty \phi(x)\psi(x)dx\right| \leq C\left(\sup_{t\in\mathbf{I}}|t^{a_{1,2}}\psi(t)|\,+\,\sup_{t\in\mathbf{I}}\left|t^{b_{1,2}}\psi(t)\right|\right),$$

para cada $\psi \in \mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$. Se prueba así que ϕ está en $\mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)'$. ■

A la vista de la Proposición II.3.2 si $\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$ podemos definir la transformación clásica de Watson $W\phi$ y la transformación generalizada de Watson $W'\phi$. Probamos ahora que ambas coinciden como elementos de $\mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)'$.

Proposición II.3.3 *Supongamos que* $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_{n,i})_{n=1}^{\infty}$, $i = 1,2$, K *y* $\mathfrak{k}$ *satisfacen las condiciones del Teorema II.3.1 y de la Proposición II.3.1. Además asumimos que* $a_{1,1}+a_{1,2} < 1$ *y* $b_{1,1}+b_{1,2} > 1$. *Entonces para cada* $\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$

$$\langle W\phi\,,\,\psi\rangle\ =\ \langle \phi\,,\,W\psi\rangle\ ,\ \psi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right).$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)$. De acuerdo con el Teorema II.3.1, $W\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,2})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,2})_{n=1}^{\infty}\right)$. Por tanto, de la Proposición II.3.2, se infiere que $W\phi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right)'$ siendo

$$\langle W\phi\,,\,\psi\rangle\ =\ \int_0^\infty W(\phi)(x)\psi(x)dx\,,\ \psi \in \mathcal{A}\left((a_{n,1})_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_{n,1})_{n=1}^{\infty}\right).$$

La prueba se termina haciendo uso de (II.13). ■

La transformación W puede verse entonces como un caso particular de la transformación W'.

II.4 Otras transformaciones tipo Watson

En la Sección 3 estudiamos transformaciones de Watson cuyos núcleos $\mathfrak{k}$ tienen una transformada $K = \mathcal{M}(\mathfrak{k})$ de Mellin con crecimiento potencial cuando $|Im\, s| \to \infty$. Aquí inspirados por los trabajos de A. Schuitman [69] y J.A. Barrios y J.J. Betancor ([11] y [12]), extendemos los resultados anteriores a otras transformciones tipo Watson con núcleo $\mathfrak{k}$ cuya transformada $K(s) = \mathcal{M}(\mathfrak{k})(s)$ de Mellin tiene crecimiento exponencial cuando $|Im\, s| \to \infty$. Las pruebas de la mayor parte de los resulatdos de esta Sección son similares a los de la precedente y por ello serán omitidas.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tales que $\inf \{a_n - a_{n+1} \, : \, n \in I\!N\} > 0$ y sea $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tales que $\inf \{b_{n+1} - b_n \, : \, n \in I\!N\} > 0$. También suponemos que $a_1 < b_1$. Para cada $\theta \in (0\, ,\, \pi)$ definimos

$$G_\theta = \{x \in \mathbb{C} \, : \, |Arg\, x| \leq \theta\}$$

donde, como es usual, $Arg\, x$ denota el argumento principal de $x \in \mathbb{C}$. G_θ° representará el interior de G_θ. Nótese que $0 \notin G_\theta$.

El espacio $\mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\, ,\, (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ está constituido por todas aquellas funciones $\phi = \phi(x)$, $x \in G_\theta$, que satisfacen las dos condiciones que siguen:

(i) ϕ es holomorfa en G_θ° y $\dfrac{d^m}{dx^m}\phi$ puede ser extendida con continuidad a G_θ, para cada $m \in I\!N$, y

(ii) Para cada $\ell,\ k \in I\!N$ y $m = 0,\ 1,$

$$\gamma_{\ell\,,\,k}^{\theta\,,\,m}(\phi) \;=\; \sup_{x\in G_\theta}\left| x^{m(a_{k+1}-b_{\ell+1})}\prod_{i=1}^{\ell}\left(x^{b_{i+1}-b_i+1}\frac{d}{dx}\right)\right.$$
$$\left.\left(x^{b_1-a_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}\left(x^{a_{j+1}-a_j+1}\frac{d}{dx}\right)(x^{a_1}\phi(x))\right)\right| < \infty$$

$\mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ es dotado de la topología generada por la familia $\left\{\gamma_{\ell\,,\,k}^{\theta\,,\,m}\right\}_{\ell\,,\,k\in I\!N,\,m=0,1}$ de normas. De este modo $\mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ es un espacio de Fréchet.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $b_1 - a_1 > 2\epsilon$, $a_{n+1}+\epsilon < a_n$ y $b_n + \epsilon < b_{n+1}$, $n \in I\!N - \{0\}$. $\mathcal{B}_\epsilon^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ consta de aquellas funciones Φ meromorfas sobre $\mathbb{C}$ que satisfacen

(i) Φ es holomorfa en $\mathbb{C} - \left(\{a_n\}_{n=1}^\infty \cup \{b_n\}_{n=1}^\infty\right)$ teniendo en $s = a_n$ y $s = b_n$, $n \in I\!N - \{0\}$, a lo sumo polos simples, y

(ii) para cada $\ell, k \in I\!N$,

$$\omega_{\ell,k}^{\theta,\epsilon}(\Phi) = \sup_{s\in V_\epsilon(k,\ell)}\left|\prod_{i=1}^{\ell}(s-b_i)\prod_{j=1}^{k}(s-a_j)\,\Phi(s)e^{\theta|Im\,s|}\right| < \infty\ , \qquad \text{(II.15)}$$

donde $V_\epsilon(k,\ell)$ es el conjunto definido en la Sección 2.

Sobre $\mathcal{B}_\epsilon^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ consideramos la topología engendrada por la familia $\left\{\omega_{\ell,k}^{\theta,\epsilon}\right\}_{\ell,k\in I\!N}$ de normas. $\mathcal{B}_\epsilon^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ es un espacio de Fréchet. Como en la Sección 2 puede probarse que el espacio $\mathcal{B}_\epsilon^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ no depende de $\epsilon > 0$ siempre que $b_1 - a_1 > 2\epsilon$, $a_{n+1}+\epsilon < a_n$ y $b_n+\epsilon < b_{n+1}$, para cada $n \in I\!N - \{0\}$. Por ello escribiremos en lo sucesivo $\mathcal{B}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ y $\omega_{\ell,k}^\theta$ en lugar de $\mathcal{B}_\epsilon^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\ ,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$ y $\omega_{\ell,k}^{\theta,\epsilon}$. Además si en (II.15) sustituimos $e^{\theta|Im\,s|}$ por $e^{\theta\,|s|}$ entonces la familia de normas resultante genera la misma topología que $\left\{\omega_{\ell,k}^\theta\right\}_{\ell,k\in I\!N}$.

Los dos resultados que presentamos a continuación pueden probarse de un modo similar a los correspondientes establecidos en la Sección 2.

Proposición II.4.1 *La transformación integral de Mellin es un homeomorfismo de* $\mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty,(b_n)_{n=1}^\infty\right)$ *sobre* $\mathcal{B}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty,(b_n)_{n=1}^\infty\right)$. ■

Proposición II.4.2 *Sean* $(a_{n,i})_{n=1}^\infty$ *y* $(b_{n,i})_{n=1}^\infty$, $i=1,2$, *como en la Proposición II.2.2. Si* K *es una función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *que satisface*

(i) $K(s)$ *tiene ceros simples en* $s=1-a_{n,1}$ *y* $s=1-b_{n,1}$, $n\in\mathbb{N}-\{0\}$,

(ii) $K(s)$ *es holomorfa en* $\mathbb{C}-\left(\{a_{n,2}\}_{n=1}^\infty\cup\{b_{n,2}\}_{n=1}^\infty\right)$ *y tiene polos simples en* $s=a_{n,2}$ *y* $s=b_{n,2}$, $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, *y*

(iii) Existe $\alpha\in(-\theta\ ,\ \pi-\theta)$ *tal que para cada subconjunto* $\mathbf{J}$ *compacto de* $\mathbb{R}$ *existen* $M_{\mathbf{J}}>0$, $Y_{\mathbf{J}}>0$, $\alpha_{\mathbf{J}}\in\mathbb{R}$ *y* $\beta_{\mathbf{J}}\in\mathbb{R}$ *para los que*

$$\frac{1}{M_{\mathbf{J}}}\,|Im\, s|^{\beta_{\mathbf{J}}}\le|K(s)|\,e^{|Im\, s|\alpha}\le M_{\mathbf{J}}\,|Im\, s|^{\alpha_{\mathbf{J}}}\ ,$$

cuando $|Im\, s|>Y_{\mathbf{J}}$ *y* $\mathbb{R}e\, s\in\mathbf{J}$,

entonces la aplicación definida por $\left(\mathcal{T}_K\Phi\right)(s)=K(s)\Phi(1-s)$ *es un homeomorfismo de* $\mathcal{B}^\theta\left((a_{n,1})_{n=1}^\infty,(b_{n,1})_{n=1}^\infty\right)$ *en* $\mathcal{B}^{\theta+\alpha}\left((a_{n,2})_{n=1}^\infty,(b_{n,2})_{n=1}^\infty\right)$. ■

El resultado fundamental de esta Sección es el siguiente.

Teorema II.4.1 *Sean* $(a_{n,i})_{n=1}^\infty$, $(b_{n,i})_{n=1}^\infty$, $i=1,2$, *y* K *como en la Proposición II.4.2. Supongamos que* $0<\alpha<\pi-\theta$ *y que* $a=\text{máx}\{1-b_{1,1}\,,\,a_{1,2}\}<\text{mín}\{1-a_{1,1}\,,\,b_{1,2}\}=b$. *Definimos*

$$\mathfrak{k}(x)=\frac{1}{2\pi\, i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{-s}K(s)ds\ ,\quad x\in G_\alpha^\circ\ ,$$

donde $a < c < b$.

Entonces la transformaciónintegral W^* definida por

$$W^*(\phi)(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty e^{i\xi}} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du\,,\ x \in G^\circ_{\theta+\alpha} \tag{II.16}$$

donde $|\xi| < \alpha$ y $|Arg\,x - \xi| < \theta$, es un homeomorfismo de $\mathcal{A}^\theta\left((a_{n,1})_{n=1}^\infty\,,\ (b_{n,1})_{n=1}^\infty\right)$ en $\mathcal{A}^{\theta+\alpha}\left((a_{n,2})_{n=1}^\infty\,,\ (b_{n,2})_{n=1}^\infty\right)$. Además $W^*(\phi)(x) = W(\phi)(x)$, para cada $x \in \mathbf{I}$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\,,\ (b_n)_{n=1}^\infty\right)$. La integral en (II.16) no depende de ξ siempre que $|\xi| < \alpha$, $|Arg\,x - \xi| < \theta$ y $x \in G^\circ_{\theta+\alpha}$. En efecto, para cada $R > 0$ denotemos por Γ_R el camino que admite la representación paramétrica $z(\varphi) = R\,e^{i\,\varphi}$, $\xi_1 < \varphi < \xi_2$, donde $|\xi_i| < \alpha$, $|Arg\,x - \xi_i| < \theta$, $i = 1, 2$, y $x \in G^\circ_{\theta+\alpha}$. Teniendo en cuenta que existe $M_c > 0$ tal que $|\mathfrak{k}(x)| \leq M_c|x|^{-c}$, para $x \in G_{\xi_2}$, se sigue

$$\left|\int_{\Gamma_R} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du\right| \leq \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left|\mathfrak{k}\left(R\,e^{i\,\varphi}\right)\right| \left|\phi\left(\frac{R\,e^{i\,\varphi}}{x}\right)\right| R\,d\varphi \leq$$

$$\leq M_c \int_{\xi_1}^{\xi_2} R^{-c+1} \left|\phi\left(\frac{R\,e^{i\,\varphi}}{x}\right)\right| d\varphi,\ c \in (a,b) \text{ y } R > 0.$$

Por tanto para cada $c \in (a,b)$ existe $M_c > 0$ tal que

$$\left|\int_{\Gamma_R} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du\right| \leq M_c \sup_{t \in G_\theta} \left|t^{a_{1,1}}\phi(t)\right| R^{-c-a_{1,1}+1}\,,\ R > 0\,,$$

y

$$\left|\int_{\Gamma_R} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du\right| \leq M_c \sup_{t \in G_\theta} \left|t^{b_{1,1}}\phi(t)\right| R^{-c-b_{1,1}+1}\,,\ R > 0.$$

Entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du \,=\, \lim_{R\to 0} \int_{\Gamma_R} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du \,=\, 0\,.$$

Usando ahora el teorema de Cauchy obtenemos que

$$\int_0^{\infty e^{i\xi_1}} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du \,=\, \int_0^{\infty e^{i\xi_2}} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du.$$

Concretamente, si $x \in \mathbf{I}$ podemos escoger $\xi = 0$ y entonces

$$W^* (\phi)(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \mathfrak{k}(u) \phi\left(\frac{u}{x}\right) du = \int_0^\infty \mathfrak{k}(ux)\phi(u) du = W(\phi)(x).$$

Por otra parte, el teorema de Fubini nos permite escribir

$$\int_0^{\infty e^{i\xi}} \mathfrak{k}(u)\phi\left(\frac{u}{x}\right) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K(s) \int_0^{\infty e^{i\xi}} u^{-s} \phi\left(\frac{u}{x}\right) du\, ds\,, \; x \in G^{\circ}_{\theta+\alpha}. \tag{II.17}$$

Además, haciendo un cambio de variables y aplicando de nuevo el teorema de Cauchy obtenemos

$$\int_0^{\infty e^{i\xi}} u^{-s}\phi\left(\frac{u}{x}\right) du =$$

$$= x^{1-s} \int_0^{\infty e^{i(\xi - Arg\, x)}} z^{-s}\phi(z) dz = x^{1-s} \int_0^\infty z^{-s}\phi(z) dz\,, \; x \in G^{\circ}_{\theta+\alpha}. \tag{II.18}$$

Luego, de (II.17) y (II.18) se infiere

$$W^*(\phi) = \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{T}_K \circ \mathcal{M}(\phi)\,.$$

La prueba puede ser finalizada recurriendo a las Proposiciones II.4.1 y II.4.2. ∎

La transformación W^* es posible definirla en $\mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\,,\,(b_n)_{n=1}^\infty\right)'$, el espacio dual de $\mathcal{A}^\theta\left((a_n)_{n=1}^\infty\,,\,(b_n)_{n=1}^\infty\right)$, siguiendo el método del operador adjunto de forma similar a como fue definida W sobre $\mathcal{A}\left((a_n)_{n=1}^\infty\,,\,(b_n)_{n=1}^\infty\right)'$ en la Sección precedente.

II.5 Un ejemplo y algunas extensiones del método

La teoría desarrollada puede aplicarse al estudio de una amplia clase de transformaciones integrales que tienen por núcleo funciones $\mathcal{H}$ introducidas por Ch. Fox [34]

En el primer Capítulo de esta Memoria investigamos transformaciones integrales de la forma

$$W(\phi)(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left(xt \middle| \begin{matrix} (\gamma_1,\alpha_1),\ldots,(\gamma_p,\alpha_p) \\ \\ (\delta_1,\beta_1),\ldots,(\delta_q,\beta_q) \end{matrix}\right) \phi(t)dt\,, \quad x \in \mathbf{I} \tag{II.19}$$

donde $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}$ representa la citada función de Fox. Atendiendo a bien conocidas propiedades de la función Γ (ver, por ejemplo, A. Erdelyi [30]) puede probarse que para elecciones adecuadas de los parámetros presentes la transformación integral definida en (II.19) cabe investigarla en los espacios $\mathcal{A}^{\theta}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\,,\,(b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ recurriendo a los resultados establecidos en las Secciones 2, 3, y 4 precedentes.

Para finalizar este Capítulo queremos presentar otras clases de transformaciones integrales a las que nuestra teoría no puede ser aplicada, aunque modificando adecuadamente el método podemos abordar la investigación de las mismas en espacios de funciones y distribuciones.

1.- Las ideas desarrolladas aquí pueden ser modificadas para analizar transformaciones de Watson (II.1) donde la función núcleo $\mathfrak{k}$ tiene una transformada $K = \mathcal{M}(\mathfrak{k})$ de Mellin verificando las propiedades que siguen:

(i) K es una función meromorfa en $\mathbb{C}$,

(ii) K tiene como singularidades polos simples reales. Además K tiene únicamente ceros simples reales. Las sucesiones de ceros y polos se acumulan sólo en $+\infty$ o $-\infty$. Los términos consecutivos de estas sucesiones distan entre sí más que un número positivo fijo.

(iii) K satisface condiciones de crecimiento como las impuestas en los Teoremas II.3.1 o II.4.1.

Un ejemplo de esta situación lo presenta la transformación de Krätzel estudiada en [12]. Otros casos particulares son las transformaciones integrales de Wright [1], Struve [65] y Hardy [26].

2.- Nuestro procedimiento permite estudiar también transformaciones integrales definidas por

$$\mathcal{Y}\left(\phi\right)(x) = \int_0^{\infty} \mathfrak{k}\left(\frac{x}{t}\right)\phi(t)\frac{dt}{t}\,,\ x \in \mathbf{I}. \tag{II.20}$$

Bajo adecuadas condiciones se tiene que

$$\mathcal{Y}(\phi) = \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{T}_K \circ L \circ \mathcal{M}(\phi)$$

donde L denota la aplicación definida por

$$L(\Phi)(s) = \Phi(1-s)$$

y $K = \mathcal{M}(\mathfrak{k})$, siendo $\mathcal{M}$ la transformación integral de Mellin. No es difícil establecer las versiones de los Teoremas II.3.1, II.3.2 y II.4.1 para la transformación (II.20). Nótese que la aplicación L es un homeomorfismo de $\mathcal{B}\left((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ en $\mathcal{B}\left((1-b_n)_{n=1}^{\infty}, (1-a_n)_{n=1}^{\infty}\right)$

Importantes ejemplos de (II.20) a los que podríamos aplicar nuestra teoría son las integrales fraccionarias de Riemann–Liouville y de Weyl [63].

Capítulo III

Transformaciones integrales de convolución en espacios de distribuciones

III.1 Introducción

En este capítulo, que está dividido en dos partes, estudiamos una clase de transformaciones integrales de convolución en ciertos espacios de funciones generalizadas.

Como ya fue comentado en el capítulo anterior las transformaciones de Watson son aquéllas definidas por un par de la forma

$$\begin{aligned} g(y) &= K[f](y) = \int_0^\infty k(xy)f(x)dx \ , \quad y \in I, \\ f(x) &= K^{-1}[g](x) = \int_0^\infty h(xy)g(y)dy \ , \quad x \in I. \end{aligned} \tag{III.1}$$

G.H. Hardy y E.C. Titchmarsh [35] establecieron la siguiente fórmula de inversión para la transformación integral definida por el par (III.1).

Teorema A. Denotamos por K y H a las transformadas de Mellin de k y h, respectivamente. Supongamos que K y H son funciones meromorfas en una banda $\sigma_1 < \mathbb{R}e\ s < \sigma_2$, siendo $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 > 1$, y que tienen a lo sumo un número finito de polos simples sobre el eje imaginario. Asumamos tambien que K y H tienen la forma

$$\Gamma(s)\cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\left(\alpha+\frac{\beta}{s}+O\left(|s|^{-2}\right)\right)\ , \qquad \text{cuando } |Im\, s|\to\infty\ ,$$

donde α y β no son necesariamente los mismos para K y para H. Además $K(s)H(1-s)=1$, cuando $\max(1-\sigma_2\,,\sigma_1) < I\!Re\ s < min\,(1-\sigma_1\,,\sigma_2)$ y siempre que s no sea un polo de K y $1-s$ no sea un polo de H.

Entonces si $f\in L_1(I)$ y f es de variación acotada en un entorno de $x_0\in I$ se tiene

$$\int_0^\infty h(x_0u)g(u)du=\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$$

donde $g(u)=\displaystyle\int_0^\infty k(uy)f(y)dy\ ,\ u\in I.$ ∎

Una versión distribucional de este teorema fue probado por R.S. Pathak [60].

Motivado por los trabajos de Ch. Fox [33], J.N. Pandey [59] y J.J. Betancor [9] se introducen aquí las transformaciones integrales de convolución tipo Watson. Estas transformaciones son definidas como sigue

$$F(y)=W(f)(y)=\int_0^\infty S(x,y)f(x)dx\ ,\quad y\in I, \tag{III.2}$$

donde $S(x,y)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{k(xu)h(yu)}{E(u)}du$, $x,y\in I$, y $E(u)=\displaystyle\prod_{j=1}^\infty\left(1+\left(\frac{u}{a_j}\right)^p\right)$, $u\in I$, y siendo $p\in I\!N$ y $a_j>0$, $j\in I\!N-\{0\}$, tales que $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty a_j^{-p}<\infty$.

Nótese que cuando $k(u)=h(u)=\sqrt{u}J_\mu(u)$ y $p=2$ la transformacion W se reduce a la transformación de convolución de Hankel investigada por los autores anteriormente citados.

En la primera parte de este Capítulo se define la transformación integral (III.2) en espacios de funciones generalizadas siguiendo el método del núcleo. Establecemos previamente una fórmula de inversión para la transformación W clásica obteniéndose después la correspondiente versión distribucional.

La segunda parte de este Capítulo se dedica al estudio de la transformación de convolución de Hankel en ciertos espacios de distribuciones introducidos por A.H. Zemanian [82] en su investigación sobre la transformación distribucional de Hankel. A la fórmula de inversión probada por Ch. Fox [33] para la transformación de convolución de Hankel se le da ahora un sentido distribucional.

PRIMERA PARTE

A lo largo de la primera parte de este Capítulo supondremos que h y k satisfacen las condiciones exigidas en el Teorema **A** y además

(i) h y k son funciones infinitamente diferenciables sobre I,

(ii) para cada $\ell \in I\!N$, $\frac{d^\ell}{dx^\ell}k(x)$ y $\frac{d^\ell}{dx^\ell}h(x)$ son funciones acotadas cerca del origen, y

(iii) existe un operador Q generalizado de Euler, en el sentido de R.P. Boas [22] tal que

$$Q_x k(xy) = (-1)^p y^p k(xy) , \quad x, \ y \in I , \text{ y}$$

$$Q_x^* h(xy) = (-1)^p y^p h(xy) , \quad x, \ y \in I ,$$

donde Q^* denota el operador adjunto de Q y p es el número natural presente en la definición de la función E.

III.2 La transformación de convolución de Watson

En esta Sección establecemos una fórmula de inversión para la transformación (III.2). Previamente probamos una propiedad que nos será muy útil.

Lema III.2.1 *Para cada* $\ell \in I\!N$ $\frac{d^\ell}{dx^\ell}k(x) = O\left(x^{-\ell}\right)$, cuando $x \to \infty$.

Demostración.- En virtud del Lema α, pag. 234 [74], la función k es acotada en I. Ademas para cada $\ell \in I\!N$

$$\mathrm{Q}^{\ell} k(x) = (-1)^{p\ell} k(x) \ , \quad x \in I \ ,$$

siendo Q^{ℓ} un operador de Euler generalizado. Se deduce entonces del Teorema 2 [22]

$$\frac{d^{\ell} k(x)}{dx^{\ell}} = O\left(x^{-\ell}\right) \ , \ \text{cuando } x \to \infty. \ \blacksquare$$

Teorema III.2.1 (de inversión) *Sea $f \in L_1(I)$. Supongamos que f es de variación acotada en un entorno de $x_0 \in I$. Entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} \mathrm{Q}^*\right) F(x_0) = \frac{1}{2} \left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right)$$

donde $F(y) = \int_0^{\infty} S(x,y) f(x) dx$, $y \in I$.

Demostración.- El teorema de Fubini nos permite escribir para cada $m \in I\!N$

$$\prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} \mathrm{Q}^*\right) F(x_0) = \int_0^{\infty} T_m(x_0,u) du \ ,$$

donde $T_m(x_0,u) = \dfrac{h(x_0 u)}{E_m(u)} \displaystyle\int_0^{\infty} k(yu) f(y) dy$ y $E_m(u) = \displaystyle\prod_{j=m+1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{-u}{a_j}\right)^p\right)$, para cada $m \in I\!N$ y $u \in I$. Nótese que la diferenciación bajo el signo integral está justificada por las propiedades de las funciones h, k y el Lema III.2.1.

En lo que sigue denotaremos $T(x_0,u) = h(x_0 u) \displaystyle\int_0^{\infty} k(yu) f(y) dy$, $u \in I$.

Nuestro objetivo es probar que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\infty} T_m(x_0,u) du = f(x_0). \tag{III.3}$$

De acuerdo con el Teorema **A** para establecer (III.3) es suficiente mostrar que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\infty} T_m(x_0,u) du = \int_0^{\infty} T(x_0,u) du \ . \tag{III.4}$$

Procedemos entonces a probar (III.4).

Sea $m \in I\!N$. Para cada $x \in I$ podemos escribir

$$\int_0^\infty (T_m(x_0,u) - T(x_0,u))\,du = I_{1,m}(x) + I_{2,m}(x) - I_3(x)\ ,$$

donde

$$I_{1,m}(x) = \int_0^x (T_m(x_0,u) - T(x_0,u))\,du,$$

$$I_{2,m}(x) = \int_x^\infty T_m(x_0,u)du\ , \quad \text{y}$$

$$I_3(x) = \int_x^\infty T(x_0,u)du\ .$$

Fijamos $\epsilon > 0$. Ya que $\displaystyle\int_0^\infty T(x_0,u)du = f(x_0)$ existe $\alpha \in I$ tal que

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} T(x_0,u)du\right| < \epsilon\ ,$$

para cada $x_1,\ x_2 \in [\alpha,\infty)$. Por tanto $|I_3(x)| < \epsilon$, cuando $x \geq \alpha$. Teniendo en cuenta las propiedades de la función E_m y aplicando el segundo teorema del valor medio obtenemos

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} T_m(x_0,u)du\right| = \left|\frac{1}{E_m(x_1)}\int_{x_1}^{x_3} T(x_0,u)du\right| < \epsilon$$

siempre que $\alpha < x_1 < x_2$ y para cierto $x_1 < x_3 < x_2$. Entonces $|I_{2,m}(x)| < \epsilon$, para cada $x > \alpha$ y $m \in I\!N$.

Finalmente, ya que h y k son funciones acotadas sobre I y que $f \in L_1(I)$ se tiene

$$|I_{1,m}(\alpha)| \leq \int_0^\alpha \left(1 - \frac{1}{E_m(u)}\right)|h(x_0u)|\int_0^\infty |k(yu)|\,|f(y)|dydu \leq$$

$$\leq C\int_0^\alpha \left(1 - \frac{1}{E_m(u)}\right)du \leq C\alpha\left(1 - \frac{1}{E_m(\alpha)}\right) \to\ 0\ ,$$

cuando $m \to \infty$. Aquí C denota una adecuada constante positiva.

De este modo se establece (III.4) y terminamos la prueba del teorema. ■

III.3 La transformación de convolución de Watson generalizada

Nuestro objetivo en esta Sección es definir la transformación de convolución de Watson en un espacio de funciones generalizadas.

Introducimos, para ello, el espacio $\mathcal{A}$ constituido por las funciones complejas regulares $\phi = \phi(x)$, $x \in I$, verificando que

$$\gamma_\ell(\phi) = \sup_{x\in I}\left|\xi(x)\ \mathrm{Q}^\ell\phi(x)\right| < \infty\ ,$$

para cada $\ell \in I\!N$, donde ξ es una función regular y positiva en I tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} \xi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \xi(x) = 0$. El espacio $\mathcal{A}$ es dotado de la topología generada por la familia $\{\gamma_\ell\}_{\ell\in I\!N}$ de seminormas. De este modo $\mathcal{A}$ es un espacio metrizable. Además en virtud del Lemma 3.1(i)[79], $\mathcal{A}$ es un espacio de Fréchet. Como es usual el espacio dual de $\mathcal{A}$ lo denotamos por $\mathcal{A}'$.

Mediante un procedimiento similar al usado por F. Treves, Teorema 25.4 [75] , L.S. Dube and J.N. Pandey, Teorema 4 [27] y J.J. Betancor, Teorema 4 [10], entre otros, nos permite obtener una representación para los elementos de $\mathcal{A}'$ cuando son restringidos a $\mathcal{D}(I)$.

Proposición III.3.1 *Para cada $f \in \mathcal{A}'$ existen $n \in I\!N$ y funciones $\{f_0, \dots, f_n\} \subset L_\infty(I)$ tales que*

$$f = \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{Q}^{*\ell}\xi(x)\frac{d}{dx}f_\ell(x)\ ,\ \ \text{sobre}\ \ \mathcal{D}(I).$$

Demostración.- Sea $f \in \mathcal{A}'$. Existen $C > 0$ y $n \in I\!N$ tales que

$$|\langle f, \phi\rangle| \le C\text{máx}_{0\le\ell\le n}\gamma_\ell(\phi)\ ,\ \ \phi \in \mathcal{A}\ .$$

Por tanto, si $\phi \in \mathcal{D}(I)$ podemos escribir

$$|\langle f, \phi\rangle| \le C \max_{0\le\ell\le n}\sup_{x\in I}\left|\int_0^x \frac{d}{dt}\left[\xi(t)\mathrm{Q}^\ell\phi(t)\right] dt\right| \le$$

$$\leq C \max_{0\leq \ell\leq n} \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \left[\xi(t) \mathrm{Q}^\ell \phi(t) \right] \right| dt \ . \tag{III.5}$$

Definimos ahora la aplicación

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathcal{D}(I) & \longrightarrow & H\mathcal{D}(I) \subset (L_1(I))^{n+1} \\ & \phi & \longrightarrow & \left(\frac{d}{dt} \left[\xi(t) \mathrm{Q}^\ell \phi(t) \right] \right)_{\ell=0}^n \end{array} \ .$$

Es claro que H es uno a uno.

Consideremos también la aplicación

$$\begin{array}{rccl} L: & H\mathcal{D}(I) \subset (L_1(I))^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \left(\frac{d}{dt} \left[\xi(t) \mathrm{Q}^\ell \phi(t) \right] \right)_{\ell=0}^n & \longrightarrow & \langle f \ , \ \phi \rangle \end{array} \ .$$

De (III.5) se deduce que L es continua cuando en $H\mathcal{D}(I)$ se tiene la topología inducida por $(L_1(I))^{n+1}$. Entonces, en virtud del teorema de Hahn–Banach L puede ser extendida a $(L_1(I))^{n+1}$ continuamente. Esa extensión la seguiremos representando por L. Por tanto, ya que $L_1(I)'$ es isomorfo a $L_\infty(I)$, existen $f_0, \ f_1, \ \cdots, f_n$ funciones en $L_\infty(I)$ tales que

$$\langle L \ , \ (\phi_0 \ , \cdots , \ \phi_n) \ \rangle = \sum_{\ell=0}^n \int_0^\infty f_\ell(x) \phi_\ell(x) dx \ , \quad (\phi_\ell)_{\ell=0}^n \in (L_1(I))^{n+1} \ .$$

Concretamente, para cada $\phi \in \mathcal{D}(I)$

$$\langle f \ , \ \phi \rangle = \sum_{\ell=0}^n \int_0^\infty f_\ell(x) \frac{d}{dx} \left[\xi(x) \ \mathrm{Q}^\ell \phi(x) \right] dx \ ,$$

quedando probado lo que queriamos. ■

El núcleo de la transformación de convolución de Watson está en $\mathcal{A}$.

Proposición III.3.2 *Para cada* $y \in I$, $S(\cdot, y) \in \mathcal{A}$.

Demostración.- Sea $y \in I$. Ya que las funciones ξ, k y h son funciones acotadas en I existe $C > 0$ tal que

$$\left|\xi(x)\ \mathrm{Q}^{\ell} S(x,y)\right| \leq C \int_0^\infty \frac{u^{p\ell}}{E(u)} du\ , \quad x \in I \ \ y \ \ \ell \in I\!N\,.$$

Además, de (25) [33] se infiere que

$$\int_0^\infty \frac{u^{p\ell}}{E(u)} du < \infty\ , \quad \ell \in I\!N\,.$$

Por tanto $\gamma_\ell\left(S(\cdot, y)\right) < \infty$ para cada $\ell \in I\!N$. ∎

Estamos ya en condiciones de definir la transformación de convolución de Watson sobre $\mathcal{A}'$ como sigue: si $f \in \mathcal{A}'$, la transformación $W'f$ de convolución de Watson de f es la función

$$\left(W'f\right)(y) = \langle f(x)\ ,\ S(x,y)\rangle\ , \quad y \in I.$$

Probaremos a continuación la acotación y la regularidad de la función $W'f$ para cada $f \in \mathcal{A}'$.

Proposición III.3.3 *Sea* $f \in \mathcal{A}'$. *Entonces* $W'(f)$ *es una función acotada sobre* I.

Demostración.- En virtud de **1.8-1** [84] existen $C > 0$ y $r \in I\!N$ tales que

$$\left|W'(f)(y)\right| \leq C \max_{0 \leq \ell \leq r} \gamma_\ell\left(S(x,y)\right)\ , \quad y \in I.$$

Además para cada $\ell \in I\!N$ tenemos

$$\gamma_\ell\left(S(x,y)\right) = \sup_{x \in I}\left|\xi(x) \int_0^\infty \frac{k(xu) u^{p\ell} h(uy)}{E(u)} du\right| \leq$$

$$\leq C_1 \int_0^\infty \frac{u^{p\ell}}{E(u)} du\ , \quad y \in I \ \text{ y } \ell \in I\!N\,,$$

para una cierta $C_1 > 0$.

Por tanto $W'(f)$ está acotada sobre I. ∎

Proposición III.3.4 *Sea $f \in \mathcal{A}'$. Entonces la función $W'(f)$ es regular sobre I.*

Demostración.- Probaremos inicialmente que $F = W'(f)$ es una función continua sobre I.

Sea $y \in I$. Tenemos que mostrar que

$$F(y+z) - F(y) = \Big\langle f(x)\ ,\ S(x, y+z) - S(x,y) \Big\rangle \rightarrow\ 0\ ,\ \ \text{cuando } z \rightarrow\ 0\ .$$

Para ello es suficiente ver que

$$S(x, y+z) - S(x,y) \rightarrow\ 0\ ,\ \ \text{cuando } z \rightarrow\ 0\ ,\ \text{en } \mathcal{A}\ .$$

Tomamos $\ell \in I\!N$ y $z \in I\!R$ tal que $0 < |z| < y$. Se tiene

$$\Big|\xi(x)\mathrm{Q}^{\ell}\left(S(x,y+z) - S(x,y)\right)\Big| \leq \xi(x) \int_0^\infty \frac{|h\left(u(y+z)\right) - h(uy)|\, u^{p\ell} |k(xu)|}{E(u)} du \leq$$

$$\leq C \int_0^\infty \frac{u^{p\ell}}{E(u)} \left|h\left(u(y+z)\right) - h(uy)\right| du\ ,\ \ x \in I\ ,$$

donde C es una adecuada constante positiva.

Por consiguiente, el teorema de la convergencia dominada conduce a

$$\gamma_\ell \left(S(x,y+z) - S(x,y)\right) \longrightarrow\ 0\ ,\ \ \text{cuando } z \rightarrow\ 0\ ,$$

para cada $\ell \in I\!N$. De este modo la continuidad de F queda establecida.

Probamos ahora que F es diferenciable sobre I. Sea $y \in I$. Para cada $z \in I\!R$ siendo $0 < |z| < y$ se tiene

$$\frac{F(y+z) - F(y)}{z} - \Big\langle f(x)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y} S(x,y) \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle f(x)\ ,\ \frac{S(x,y+z) - S(x,y)}{z} - \frac{\partial}{\partial y} S(x,y) \Big\rangle.$$

Además, podemos escribir para cada $x \in I$ y $0 < |z| < y$

$$\frac{S(x,y+z) - S(x,y)}{z} - \frac{\partial}{\partial y} S(x,y) = \frac{1}{z} \int_y^{y+z} du \int_y^u \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(S(x,t)\right) dt\ .$$

Para cada $\ell \in I\!N$ y $x,\ z\ \in I$ tenemos

$$\xi(x)\left|Q^{\ell}\frac{1}{z}\int_{y}^{y+z}du\int_{y}^{u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(S(x,t)\right)dt\right| \leq$$

$$\leq \xi(x)\frac{1}{z}\int_{y}^{y+z}du\int_{y}^{u}\int_{0}^{\infty}\frac{|k(x\omega)h''(t\omega)|}{E(\omega)}\omega^{p\ell+2}d\omega dt$$

$$\leq C\frac{1}{z}\int_{y}^{y+z}du\int_{y}^{u}dt\ ,$$

para cierta $C > 0$. Puede procederse de forma similar cuando $z < 0$ y $|z| < y$. Por tanto se concluye

$$\gamma_{\ell}\left(\frac{S(x,y+z)-S(x,y)}{z}-\frac{\partial}{\partial y}S(x,y)\right) \longrightarrow\ 0\ ,\ \text{cuando } z \to 0\ ,$$

para cada $\ell \in I\!N$.

Queda así probado que $\dfrac{d}{dy}F(y) = \left\langle f(x)\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial y}S(x,y)\right\rangle$, $y \in I$.

Empleando un procedimiento análogo podemos establecer que

$$\frac{d^n}{dy^n}F(y) = \left\langle f(x)\ ,\ \frac{\partial^n}{\partial y^n}S(x,y)\right\rangle\ ,\ y \in I \text{ y } n \in I\!N.\ \blacksquare$$

A continuación probamos una versión distribucional del Teorema III.2.1.

Teorema III.3.1 *Sea $f \in \mathcal{A}'$. Si $F = W'(f)$ entonces*

$$\lim_{m\to\infty}\left\langle \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}Q^*\right)F\ ,\ \phi\right\rangle = \left\langle f\ ,\ \phi\right\rangle\ ,\ \text{para cada } \phi \in \mathcal{D}(I)\ .$$

Demostración.- Sea $m \in I\!N$. Tenemos que

$$\left\langle \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}Q^*\right)F\ ,\ \phi\right\rangle = \left\langle F\ ,\ \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}Q\right)\phi\right\rangle\ ,\ \phi \in \mathcal{D}(I)\ .$$

La Proposición III.3.4 implica que F define un elemento en $\mathcal{D}'(I)$ por

$$\left\langle F\ ,\ \phi\right\rangle = \int_{0}^{\infty}F(y)\phi(y)dy\ ,\ \phi \in \mathcal{D}(I)\ .$$

Luego se sigue

$$\Big\langle \prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}^*\Big)F\ ,\ \phi\Big\rangle = \int_0^\infty F(y)\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y)dy\ ,\ \phi\in\mathcal{D}(I).$$

Sea $\phi\in\mathcal{D}(I)$. Elegimos $0<a<b<\infty$ tales que (a,b) contiene el soporte de ϕ. Entonces

$$\Big\langle \prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}^*\Big)F\ ,\ \phi\Big\rangle = \int_a^b F(y)\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y)dy =$$

$$= \int_a^b \Big\langle f(x)\ ,\ S(x,y)\Big\rangle \prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y)dy =$$

$$= \Big\langle f(x)\ ,\ \int_a^b S(x,y)\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y)dy\Big\rangle\ .$$

Para justificar la última igualdad utilizaremos sumas de Riemann. Para cada $\ell\in I\!N$ consideramos la partición

$$a=y_0^\ell<y_1^\ell<\cdots<y_{\ell-1}^\ell<y_\ell^\ell=b$$

del intervalo (a,b) donde $y_{i+1}^\ell-y_i^\ell=\dfrac{b-a}{\ell}$, para cada $i=0,1,\ldots,\ell-1$. Tenemos

$$\int_a^b \Big\langle f(x)\ ,\ S(x,y)\Big\rangle \prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y)dy =$$

$$= \lim_{\ell\to\infty}\frac{b-a}{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\Big\langle f(x)\ ,\ S(x,y_j^\ell)\Big\rangle\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y_j^\ell) =$$

$$= \lim_{\ell\to\infty}\Big\langle f(x)\ ,\ \frac{b-a}{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}S(x,y_j^\ell)\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y_j^\ell)\Big\rangle\ .$$

Por consiguiente para probar la igualdad deseada es suficiente establecer que

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{b-a}{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}S(x,y_j^\ell)\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y_j^\ell) =$$

$$= \int_a^b S(x,y)\prod_{n=1}^{m}\Big(1+\frac{(-1)^p}{a_n^p}\mathrm{Q}\Big)\phi(y)dy \tag{III.6}$$

en la topología de $\mathcal{A}$.

Sea $\alpha \in I\!N$. Podemos escribir

$$Q^\alpha \left(\frac{b-a}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} S(x, y_j^\ell) \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y_j^\ell) - \right.$$

$$\left. - \int_a^b S(x,y) \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y) dy \right) =$$

$$= (-1)^p \left(\frac{b-a}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^\infty \frac{k(xu)h(y_j^\ell u)}{E(u)} u^{p\alpha} du \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y_j^\ell) - \right.$$

$$\left. - \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{k(xu)h(yu)}{E(u)} u^{p\alpha} du \right) \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y) dy \right) = I_\ell(x, \alpha) ,$$

para cada $\ell \in I\!N$ y $x \in I$.

Entonces, ya que $\lim_{x \to 0^+} \xi(x) = \lim_{x \to \infty} \xi(x) = 0$ y que h y k son funciones acotadas sobre I, para cada $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in I$ tal que para cada $x \in \left(x_0^{-1} , x_0\right)$ y para cierta $C > 0$ se tiene

$$\xi(x) \left| I_\ell(x, \alpha) \right| \leq C \int_0^\infty \frac{u^{p\alpha}}{E(u)} du \, \xi(x) < \epsilon , \ \ell \in I\!N .$$

Además, $I_\ell(x, \alpha) \to 0$, cuando $\ell \to \infty$, uniformemente en $\left(x_0^{-1} , x_0\right)$. Luego (III.6) es establecido y obtenemos

$$\int_a^b F(y) \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y) dy =$$

$$= \left\langle f(x) , \int_a^b S(x,y) \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y) dy \right\rangle .$$

Por otra parte, integrando por partes sigue

$$\int_a^b S(x,y) \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q\right) \phi(y) dy =$$

$$= \int_a^b \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{(-1)^p}{a_n^p} Q^*\right) (S(x,y)) \, \phi(y) dy =$$

$$= \int_a^b \int_0^\infty \frac{k(xu)h(yu)}{E_m(u)} du \; \phi(y) \; dy$$

donde $E_m(u) = \prod_{n=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^p}{a_n^p}\right)$, $u \in I$.

Para terminar la prueba tenemos que mostrar que

$$\int_a^b \phi(y) \int_0^\infty \frac{k(xu)h(yu)}{E_m(u)} du \; dy \longrightarrow \phi(x) \text{ , cuando } m \to \infty \text{ ,} \tag{III.7}$$

en la topología de $\mathcal{A}$.

En virtud del Teorema III.2.1 e integrando por partes obtenemos

$$\mathrm{Q}^\ell \left(\int_a^b \phi(y) \int_0^\infty \frac{k(xu)h(yu)}{E_m(u)} du \; dy \; - \; \phi(x) \right) =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \phi(y) \int_0^\infty \frac{k(xu)h(yu)}{E_m(u)} du \; dy \; - \; \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \phi(y) \int_0^\infty k(xu)h(yu) du \; dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1 \right) k(xu) \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \; du \text{ , } x \in I \text{ y } \ell \in \mathbb{N} \text{ .}$$

También, para cierta $C > 0$

$$\left| u^p \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \right| = \left| \int_a^b \mathrm{Q}^{\ell+1} \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \right| \leq C \text{ , } u \in I \text{ y } \ell \in \mathbb{N}.$$

Por tanto $\int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \in L^1(c, \infty)$ para cada $c > 0$, y entonces $\int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \in L^1(I)$.

Sea $\epsilon > 0$. Existe $u_0 \in I$ para el cual

$$\left| \int_{u_0}^\infty \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1 \right) k(xu) \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \; du \right| < \epsilon \text{ , } x \in I \text{ y } m \in \mathbb{N} \text{ .}$$

Finalmente, para cierta $C > 0$ se tiene

$$\left| \int_0^{u_0} \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1 \right) k(xu) \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy du \right| \leq C \left(1 - \frac{1}{E_m(u_0)} \right),$$

con $x \in I$ y $m \in \mathbb{N}$. Concluimos que uniformemente en $x \in I$

$$\int_0^{u_0} \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1 \right) k(xu) \int_a^b \mathrm{Q}^\ell \left(\phi(y)\right) h(yu) dy \; du \; \to 0 \text{ , cuando } m \to \infty \text{ .}$$

De este modo probamos (III.7) y la demostración del teorema finaliza. ■

Nota.- El procedimiento empleado puede ser utilizado para definir otras transformaciones integrales de convolución en espacios de distribuciones ([9]).

SEGUNDA PARTE

III.4 La transformación de convolución de Hankel

La transformación de convolución de Hankel fue introducida por Ch. Fox [33]. Esta transformación se define por

$$C_\mu(\phi)(y) = \int_0^\infty L_\mu(x,y)\phi(x)dx \ , \quad y \in I \ ,$$

donde

$$L_\mu(x,y) = \int_0^\infty \frac{(xu)^{\frac{1}{2}} J_\mu(xu)\,(yu)^{\frac{1}{2}} J_\mu(yu)}{E(u)} du \ , \quad x,y \in I \ ,$$

y $E(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{a_n^2}\right)$, $u \in I$, siendo $(a_n)_{n=1}^\infty \subset I$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} < \infty$. Como es usual J_μ representa la función de Bessel de primera especie y orden μ. En esta segunda parte asumimos que μ es mayor o igual que $-\frac{1}{2}$. En [33] fue establecida la siguiente fórmula de inversión para la transformación C_μ.

Teorema B.- *Sea $f \in L^1(I)$. Si f es de variación acotada en un entorno de un cierto $x \in I$ entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C_\mu(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) \ ,$$

donde S_μ representa el operador de Bessel $x^{-\mu-\frac{1}{2}} D\, x^{2\mu+1} D\, x^{-\mu-\frac{1}{2}}$. ∎

J.N. Pandey [59] y J.J. Betancor [9] definieron la transformación de convolución de Hankel en ciertos espacios de funciones generalizadas siguiendo el método del núcleo, obteniendo versiones distribucionales para el Teorema B. En la Próxima Sección definiremos la transformación C_μ distribucional empleando el procedimiento del operador adjunto.

III.5 La transformación de convolución de Hankel sobre los espacios H_μ y H'_μ de Zemanian

A. H. Zemanian ([80], [81], [82] y [84]) investigó la transformación integral de Hankel en espacios de distribuciones. En esta Sección estudiaremos la transformación C_μ en algunos de los espacios introducidos por A.H. Zemanian.

En [81] fue definido el espacio H_μ. Una función $\phi = \phi(x)$, $x \in I$, compleja e infinitamente diferenciable está en H_μ si, y solo si, para cada $m, k \in I\!N$

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in I} \left| x^m \left(\frac{1}{x}D\right)^k \left(x^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(x)\right)\right| < \infty \ .$$

El espacio H_μ se dota con la topología que genera la familia $\left\{\gamma^{\mu}_{m,k}\right\}_{m,\, k\in I\!N}$ de seminormas. De este modo H_μ es un espacio de Fréchet. Como es usual el dual de H_μ será denotado por H'_μ. Recientemente J.J. Betancor e I. Marrero [18] han establecido interesantes propiedades topológicas de H_μ y H'_μ.

La transformación integral de Hankel definida por

$$h_\mu(\phi)(y) = \int_0^\infty (xy)^{\frac{1}{2}} J_\mu(xy)\phi(x)dx$$

es un automorfismo del espacio H_μ (Teorema 5.4-1 [84]).

A.H. Zemanian [81] introdujo el espacio $\mathcal{O}$ constituido por las funciones ϕ complejas infinitamente diferenciables sobre I que satisfacen la siguiente propiedad: para cada $k \in I\!N$ existe $n_k \in I\!N$ tal que la función $\left(1+x^2\right)^{-n_k}\left(\frac{1}{x}D\right)^k \phi(x)$ es acotada sobre I. En § 5.3 [84] se prueba que $\mathcal{O}$ es un espacio de multiplicadores para H_μ. J.J. Betancor e I. Marrero [19] caracterizan $\mathcal{O}$ como el espacio de multiplicadores de H_μ. El espacio $\mathcal{O}$ puede ser considerado un subespacio del espacio $\mathcal{L}\left(H_\mu\right)$ de transformaciones lineales acotadas de H_μ en si mismo. En la Proposición 1 [20] se prueba que la topología de convergencia puntual de $\mathcal{L}\left(H_\mu\right)$ induce sobre $\mathcal{O}$ la misma topología que la topología de $\mathcal{L}\left(H_\mu\right)$ de la convergencia uniforme sobre los acotados de H_μ. Esta topología es generada por la familia $\{\omega_{m,k;\phi}\}_{m,k\in I\!N\,;\,\phi\in H_\mu}$ de seminormas donde para cada $m,k\in I\!N$ y $\phi\in H_\mu$

$$\omega_{m,k;\phi}(v)=\gamma^{\mu}_{m,k}(\phi v)\ ,\quad v\in\mathcal{O}\ .$$

Nótese que la topología definida sobre $\mathcal{O}$ por $\{\omega_{m,k;\phi}\}_{m,\,k\,\in I\!N\,;\,\phi\in H_\mu}$ es independiente de μ. De este modo $\mathcal{O}$ es un espacio completo. Otras propiedades de $\mathcal{O}$ pueden ser encontradas en [19] y [20].

Probamos a continuación una propiedad que será útil en lo que sigue.

Lema III.5.1 *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales positivos tal que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}<\infty$. *Si* $E(u)=\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)$, $u\in I$, *y para cada* $m\in I\!N-\{0\}$ $E_m(u)=\displaystyle\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)$, $u\in I$, *entonces*

(a) $\dfrac{1}{E}\in\mathcal{O}$,

(b) $\dfrac{1}{E_m}\in\mathcal{O}$, *para cada* $m\in I\!N-\{0\}$, *y* $\dfrac{1}{E_m}\longrightarrow 1$, *cuando* $m\to\infty$, *en* $\mathcal{O}$.

Demostración.- (a) Es claro que $\dfrac{1}{E(u)}\leq 1$, $u\in I$.

Además

$$\left|\left(\frac{1}{u}D\right)\frac{1}{E(u)}\right|=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\ \frac{1}{E(u)}\ \frac{1}{1+\frac{u^2}{a_n^2}}\ \leq\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\ ,\quad u\in I.$$

Análogamente puede probarse que $\left(\dfrac{1}{u}D\right)^k\dfrac{1}{E(u)}$ es una función acotada en I para cada $k\in I\!N$. Por tanto $\dfrac{1}{E(u)}\in\mathcal{O}$.

(b) Procediendo como en **(a)** puede probarse que $\dfrac{1}{E_m(u)}\in\mathcal{O}$, para cada $m\in I\!N-\{0\}$.

Sean $m,\ n,\ k\ \in I\!N$ y $\phi\in H_\mu$. La regla de Leibniz conduce a

$$u^n\left(\frac{1}{u}D\right)^k\left(u^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(u)\left(\frac{1}{E_m(u)}-1\right)\right)=$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^n \left(\frac{1}{u}D\right)^{k-i} \left(u^{-\mu-\frac{1}{2}}\phi(u)\right) \left(\frac{1}{u}D\right)^{i} \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right) , \quad u \in I .$$

Luego para probar que

$$\gamma^{\mu}_{n,k}\left(\phi\left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right)\right) \longrightarrow 0 , \text{ cuando } m \to \infty ,$$

es suficiente ver que para cada $i \in I\!N$ existe $\ell = \ell(i) \in I\!N$ tal que

$$\sup_{u\in I}\left|\frac{1}{(1+u^2)^{\ell}}\left(\frac{1}{u}D\right)^{i}\left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right)\right| \longrightarrow 0 , \text{ cuando } m \to \infty .$$

Observamos inicialmente que

$$\frac{1}{1+u^2}\left|\frac{1}{E_m(u)} - 1\right| \leq \frac{2}{1+u^2} , \quad u \in I \text{ y } m \in I\!N .$$

Por tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe $u_0 \in I$ tal que

$$\frac{1}{1+u^2}\left|\frac{1}{E_m(u)} - 1\right| < \epsilon , \text{ para cada } u > u_0 \text{ y } m \in I\!N.$$

Además si $0 < u \leq u_0$ entonces

$$\frac{1}{1+u^2}\left|\frac{1}{E_m(u)} - 1\right| \leq 1 - \frac{1}{E_m(u_0)} , \quad m \in I\!N .$$

De aquí se infiere que existe $m_0 \in I\!N$ de manera que

$$\sup_{u\in I}\frac{1}{1+u^2}\left|\frac{1}{E_m(u)} - 1\right| < \epsilon , \quad \text{para cada } m \in I\!N \text{ siendo } m \geq m_0 .$$

Así probamos que $\sup_{u\in I}\frac{1}{1+u^2}\left|\frac{1}{E_m(u)} - 1\right| \to 0$, cuando $m \to \infty$.

Por otra parte, para cada $u \in I$ y $m \in I\!N$.

$$\left|\left(\frac{1}{u}D\right)\left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right)\right| = 2\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\,\frac{1}{E_m(u)}\,\frac{1}{1+\frac{u^2}{a_n^2}} \leq 2\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{a_n^2} .$$

Por consiguiente $\sup_{u\in I}\left|\left(\frac{1}{u}D\right)\left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right)\right| \longrightarrow 0$, cuando $m \to \infty$.

Análogamente puede verse que para cada $i \in I\!N - \{0\}$, existe $C = C(i) > 0$ tal que

$$\sup_{u \in I} \left| \left(\frac{1}{u}D\right)^i \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right) \right| \leq C \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \ , \quad m \in I\!N$$

de donde sigue

$$\sup_{u \in I} \left| \left(\frac{1}{u}D\right)^i \left(\frac{1}{E_m(u)} - 1\right) \right| \longrightarrow 0 \ , \text{ cuando } \ m \to \infty \ .$$

De este modo queda probado **(b)**. ■

Una consecuencia del Lema III.5.1 es la siguiente

Proposición III.5.1 *La transformación de convolución de Hankel es una aplicación lineal y continua de* H_μ *en si mismo*

Demostración.- Para cada $\phi \in H_\mu$ podemos escribir

$$C_\mu(\phi)(y) = h_\mu \left(\frac{1}{E(u)} h_\mu(\phi)(u) \right)(y) \ , \quad y \in I \ . \tag{III.8}$$

Entonces el resultado deseado se infiere del Lema III.5.1 y del Teorema 5.4-1 [84]. ■

Probamos ahora una igualdad de Parseval para la transformación C_μ y que esta transformación conmuta con el operador S_μ de Bessel.

Proposición III.5.2 *(a) Para cada* $\phi, \ \psi \ \in \mathrm{H}_\mu$ *se tiene*

$$\int_0^\infty C_\mu(\phi)(x)\psi(x)dx = \int_0^\infty \phi(x) C_\mu(\psi)(x)dx \ .$$

(b) Los operadores C_μ *y* S_μ *conmutan sobre* H_μ*, esto es,*

$$C_\mu S_\mu \phi = S_\mu C_\mu \phi \ , \ \text{ para cada } \ \phi \in \mathrm{H}_\mu \ .$$

Demostración.- Para probar (a) es suficiente recurrir al teorema de Fubini y tener en cuenta que $L_\mu(x,y) = L_\mu(y,x)$, $x, \ y \ \in I$.

La propiedad (b) se sigue del Lema 5.4-1 [84] haciendo uso de la representación (III.8). ■

A continuación se establece una fórmula de inversión sobre H_μ para la transformación de convolución de Hankel.

Proposición III.5.3 *Sea* $\phi \in \mathrm{H}_\mu$. *Entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C_\mu(\phi) = \phi \ , \ \text{ en } \mathrm{H}_\mu \ . \tag{III.9}$$

Demostración.- Sea $\phi \in H_\mu$. En virtud del Teorema 5.4-1 [84] (III.9) es equivalente a

$$\lim_{m\to\infty} h_\mu \left(\prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C_\mu(\phi) \right) = h_\mu(\phi) \ , \quad \text{en} \ \ H_\mu \ .$$

Por consiguiente, de acuerdo con el Lema 5.4-1 [84], (III.9) quedará establecido cuando se pruebe que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{E_{m+1}(u)} h_\mu(\phi)(u) = h_\mu(\phi)(u) \ , \quad \text{en} \ \ H_\mu \ , \tag{III.10}$$

donde $E_m(u)$, $m \in I\!N - \{0\}$, es definido como en el Lema III.5.1. Finalmente, el Lema III.5.1, (b), permite concluir (III.10). ■

Nuestro próximo objetivo es estudiar el recorrido de la transformación C_μ. Para ello es conveniente recordar las definiciones de los espacios $\mathcal{B}_\mu$ e $\mathcal{Y}_\mu$ introducidos por A.H. Zemanian [82].

Para cada $a \in I$ el espacio $\mathcal{B}_{\mu,a}$ consta de aquellas funciones ϕ en H_μ tales que $\phi(x) = 0$, para cada $x \geq a$. $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es dotado de la topología inducida sobre él por H_μ. Así, $\mathcal{B}_{\mu,a}$ es un espacio de Fréchet. Es claro que $\mathcal{B}_{\mu,a}$ está contenido en $\mathcal{B}_{\mu,b}$ algebraica y topológicamente, siempre que $0 < a \leq b$. Sobre el espacio $\mathcal{B}_\mu = \bigcup_{a\in I} \mathcal{B}_{\mu,a}$ se considera la topologia inductiva . $\mathcal{B}_\mu$ es un subespacio denso en H_μ.

Si $a \in I$, el espacio $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ está constituido por las funciones Φ complejas que verifican las dos propiedades que siguen

(i) $z^{-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(z)$ es una función entera y par, y

(ii) para cada $k \in I\!N$

$$\eta_k^{\mu,a}(\Phi) = \sup_{z\in \mathbb{C}} \left| e^{-a|Im\, z|} z^{2k-\mu-\frac{1}{2}}\Phi(z)\right| < \infty \, .$$

Se asigna a $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ la topología generada por la familia de normas $\{\eta_k^{\mu,a}\}_{k\in I\!N}$ y entonces $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ es un espacio de Fréchet. Si $0 < a \leq b$, $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ está contenido algebraica y topológicamente en $\mathcal{Y}_{\mu,b}$. El espacio $\mathcal{Y}_\mu = \bigcup_{a\in I} \mathcal{Y}_{\mu,a}$ es dotado de la topología inductiva. Para cada $a \in I$, $\mathcal{Y}_{\mu,a}$ es caracterizado como la transformada de Hankel de $\mathcal{B}_{\mu,a}$. También $h_\mu(\mathcal{Y}_\mu) = \mathcal{B}_\mu$, siendo $\mathcal{Y}_\mu$ un subespacio denso de H_μ ([82]).

Proposición III.5.4 *Sea $\phi \in \mathrm{H}_\mu$. Existe $\psi \in \mathrm{H}_\mu$ tal que $\phi = C_\mu(\psi)$ si, y sólo si, la sucesión $\left\{\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{S_\mu}{a_n^2}\right)\phi\right\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente en H_μ. Además $\mathcal{Y}_\mu$ está contenido en el recorrido de C_μ. Por tanto el recorrido de C_μ es denso en H_μ. Además el recorrido de C_μ es un subespacio propio de H_μ.*

Demostración.- Supongamos primero que $\phi = C_\mu(\psi)$ para cierta $\psi \in H_\mu$. Entonces de la Proposición III.5.3 se infiere que

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{S_\mu}{a_n^2}\right)(\phi) = \psi \ , \text{ en } H_\mu \, .$$

Por otra parte, si $\left\{\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{S_\mu}{a_n^2}\right)\phi\right\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente en H_μ definimos $\psi = \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{S_\mu}{a_n^2}\right)\phi$, donde el límite es entendido en H_μ. Ya que h_μ es una aplicación continua de H_μ en si mismo Teorema 5.4-1 [84], del Lema 5.4-1 [84] se deduce que

$$h_\mu(\psi) = \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)h_\mu(\phi) \ , \ \text{ en } H_\mu \, .$$

Aplicando el Lema III.5.1, (a), obtenemos

$$\frac{1}{E(u)} h_\mu(\psi)(u) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\displaystyle\prod_{n=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)} h_\mu(\phi)(u) \ , \quad \text{en } \ H_\mu \ ,$$

y el Lema III.5.1, (b), conduce a

$$\frac{1}{E(u)} h_\mu(\psi)(u) = h_\mu(\phi)(u) \ , \quad u \in I \ .$$

Por tanto $\phi = C_\mu(\psi)$.

Sea ahora $\phi \in \mathcal{Y}_\mu$. Entonces $\psi = h_\mu(\phi) \in \mathcal{B}_{\mu,a}$, para algún $a \in I$ Teorema 1 [82]). Sabemos que (Teorema 5.4-1 y Lema 5.4-1 [84]) la sucesión $\left\{\displaystyle\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{S_\mu}{a_n^2}\right)\phi\right\}_{m=1}^{\infty}$ es covergente en H_μ si, y sólo si, la sucesión $\left\{\displaystyle\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)\psi\right\}_{m=1}^{\infty}$ converge en H_μ.

Por tanto es suficiente probar que $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)\psi(u) = \psi(u)$, en H_μ, y esto se tiene siempre que para cada $k \in I\!N$

$$\left(\frac{1}{u}D\right)^k \left(\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right) - 1\right) \to 0 \ , \quad \text{cuando } \ m \to \infty \ ,$$

uniformemente en $u \in (0,a)$.

Es claro que

$$\left|\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right) - 1\right| \leq \prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{a^2}{a_n^2}\right) - 1 \ , \quad u \in (0,a) \ .$$

Entonces $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right) = 1$ uniformemente en $u \in (0,a)$. Además para cada $k \in I\!N - \{0\}$ empleando la regla de Leibniz concluimos que

$$\left|\left(\frac{1}{u}D\right)^k \left(\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)\right)\right| \leq C \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{a_n^2} \ , \quad u \in (0,a) \ ,$$

para cierta $C > 0$. Por consiguiente, ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2} < \infty$,

$$\sup_{u\in(0,a)}\left|\left(\frac{1}{u}D\right)^k \left(\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{a_n^2}\right)\right)\right| \longrightarrow 0 \ , \quad \text{cuando } \ m \to \infty \ ,$$

para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Luego el recorrido de C_μ contiene a $\mathcal{Y}_\mu$ y es denso en H_μ.

Para establecer la última afirmación del enunciado observemos que la función $v(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{a_n^2}\right)$, $u \in I$, no está en $\mathcal{O}$. En efecto, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$v(u) \geq \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{u^2}{a_n^2}\right) \geq \frac{u^{2m}}{\prod_{n=1}^{m} a_n^2} \ , \quad u \in I \ .$$

Por tanto $(1+u^2)^{-k} v(u)$ no es una función acotada sobre I para ningún $k \in \mathbb{N}$. Ya que $v \notin \mathcal{O}$ la sucesión $\left\{ \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{u^2}{a_n^2}\right) \phi(u) \right\}_{m=1}^{\infty}$ no converge en H_μ, para algún $\phi \in H_\mu$. Se concluye así que el recorrido de C_μ es un subespacio propio de H_μ. $\blacksquare$

Definimos la transformación generalizada C'_μ sobre H'_μ como la adjunta de la transformación C_μ. Asi, si $f \in H'_\mu$ la transformada $C'_\mu f$ de f viene dada por

$$\langle C'_\mu f \ , \ \phi \rangle = \langle f \ , \ C_\mu \phi \rangle \ , \quad \phi \in H_\mu \ .$$

Es una consecuencia inmediata de la Proposición III.5.1 que C'_μ es una aplicación lineal y continua de H'_μ en si mismo cuando sobre H'_μ se considera la topología débil $*$ o la topología fuerte.

Se sabe que H_μ puede ser visto como un subespacio de H'_μ en el siguiente sentido: si $\phi \in H_\mu$ entonces ϕ define un elemento de H'_μ mediante

$$\langle \phi \ , \ \psi \rangle = \int_0^\infty \phi(x)\psi(x)dx \ , \quad \psi \in H_\mu \ .$$

Por consiguiente C'_μ puede ser definida sobre H_μ. Además cuando C'_μ se restringe a H_μ coincide con C_μ. En efecto, para cada $\phi \in H_\mu$ en virtud de la Proposición III.5.2, (a), se tiene

$$\langle C'_\mu \phi \ , \ \psi \rangle = \langle \phi \ , \ C_\mu \psi \rangle = \int_0^\infty \phi(x) C_\mu(\psi)(x) dx =$$

$$= \int_0^\infty C_\mu(\phi)(x)\psi(x)dx = \langle C_\mu \phi \ , \ \psi \rangle \ , \quad \psi \in H_\mu \ .$$

Luego la transformación C_μ cabe considerarla un caso particular de la transformación C'_μ.

En [9] J.J. Betancor introdujo el espacio $\mathcal{T}_\mu$ constituido por las funciones $\phi = \phi(x)$, $x \in I$, complejas infinitamente diferenciables tales que

$$\alpha_k^\mu(\phi) = \sup_{x\in I}\left|\xi(x) S_\mu^k \phi(x)\right| < \infty\ , \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}\ .$$

Aquí ξ es una función positiva infinitamente diferenciable en I que tiende a 0 cuando $t \to 0^+$ o $t \to +\infty$. $\mathcal{T}_\mu$ es dotado de la topología generada por la familia $\{\alpha_k^\mu\}_{k\in\mathbb{N}}$. de seminormas. Para cada $y \in I$ la función $L(x,y)$ está en $\mathcal{T}_\mu$. Esto permite definir la transformación de convolución de Hankel C_μ^* sobre $\mathcal{T}'_\mu$ como sigue: si $f \in \mathcal{T}'_\mu$, $C_\mu^* f$ es la función definida por

$$\left(C_\mu^* f\right)(y) = \langle f(x)\ ,\ L(x,y)\rangle\ ,\quad y \in I\ .$$

El operador S_μ es continuo de H_μ en si mismo (Lemma 5.3-3, [84]). Por tanto el espacio H_μ está continuamente contenido en $\mathcal{T}_\mu$ y si $f \in \mathcal{T}'_\mu$ f es también un elemento de H'_μ. Entonces podemos definir sobre $\mathcal{T}'_\mu$ las transformaciones C'_μ y C_μ^*. Probaremos a continuación que ambas transformaciones coinciden sobre T'_μ.

Proposición III.5.5 *Sea $f \in \mathcal{T}'_\mu$. Si $F(y) = \langle f(x)\ ,\ L(x,y)\rangle$, $y \in I$, entonces*

$$\langle F(y)\ ,\ \phi(y)\rangle = \langle f(x)\ ,\ C_\mu(\phi)(x)\rangle\ ,\quad \phi \in \mathrm{H}_\mu\ .$$

Demostración.- De la Proposición 4 [9] se infiere que F define un elemento de H'_μ por

$$\langle F\ ,\ \phi\rangle = \int_0^\infty F(y)\phi(y)dy\ ,\quad \phi \in H_\mu\ .$$

Entonces, para cada $\phi \in H_\mu$

$$\langle F\ ,\ \phi\rangle = \int_0^\infty \langle f(x)\ ,\ L(x,y)\rangle \phi(y)dy = \left\langle f(x)\ ,\ \int_0^\infty L(x,y)\phi(y)dy\right\rangle\ .$$

Debemos justificar la última igualdad.

Recurriendo de nuevo a la Proposición 4 [9] se obtiene que

$$\int_Y^\infty \Big\langle f(x)\ ,\ L(x,y)\Big\rangle \phi(y)dy \longrightarrow 0\ , \quad \text{cuando } Y \to \infty\ , \text{ y} \tag{III.11}$$

$$\int_0^Y \Big\langle f(x)\ ,\ L(x,y)\Big\rangle \phi(y)dy \longrightarrow 0\ , \quad \text{cuando } Y \to 0\ . \tag{III.12}$$

Además, para cada $Y \in I$ y $k \in I\!N$ tenemos

$$\left|\xi(x)S_\mu^k \int_Y^\infty L(x,y)\phi(y)dy\right| \leq C\int_0^\infty \frac{u^{2k}}{E(u)}du \int_Y^\infty |\phi(y)|dy\ , \quad x \in I\ .$$

Aquí C representa una constante positiva que no depende de Y. Luego para cada $k \in I\!N$

$$\sup_{x\in I}\left|\xi(x)S_\mu^k \int_Y^\infty L(x,y)\phi(y)dy\right| \longrightarrow 0\ , \quad \text{cuando } Y \to \infty\ . \tag{III.13}$$

De forma similar se prueba que

$$\sup_{x\in I}\left|\xi(x)S_\mu^k \int_0^Y L(x,y)\phi(y)dy\right| \longrightarrow 0\ , \quad \text{cuando } Y \to 0\ . \tag{III.14}$$

Finalmente si $0 < a < b < \infty$ entonces

$$\int_a^b \Big\langle f(x)\ ,\ L(x,y)\Big\rangle \phi(y)dy = \left\langle f(x)\ ,\ \int_a^b L(x,y)\phi(y)dy\right\rangle\ . \tag{III.15}$$

Para probar (III.15) podemos proceder como en la prueba del Teorema 2 [9] usando una técnica basada en sumas de Riemann.

Combinando (III.11), (III.12), (III.13), (III.14) y (III.15) puede conseguirse la igualdad deseada, terminando así la demostración. ∎

Extendemos ahora la fórmula de inversión presentada en el Teorema B a la transformación C'_μ.

Proposición III.5.6 *Si* $f \in \mathrm{H}'_\mu$ *entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C'_\mu f = f$$

en la topología débil $*$ *(y por tanto en la topologia fuerte) de* H'_μ.

Demostración.- Sea $f \in \mathcal{H}'_\mu$. En virtud de la Proposición III.5.2, (b), podemos escribir

$$\left\langle \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C'_\mu f \ , \ \phi \right\rangle = \left\langle C'_\mu f \ , \ \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) \phi \right\rangle =$$

$$\left\langle f \ , \ C_\mu \left(\prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) \phi \right) \right\rangle = \left\langle f \ , \ \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C_\mu \phi \right\rangle \ , \ \phi \in H_\mu \ .$$

Basta ahora tener en cuenta la Proposición III.5.3 para obtener que

$$\lim_{m\to\infty} \left\langle \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{S_\mu}{a_n^2}\right) C'_\mu f \ , \ \phi \right\rangle = \langle f \ , \ \phi \rangle \ , \quad \phi \in H_\mu \ . \ \blacksquare$$

Bibliografia

[1] **R.P. Agarwal**, "Sur une generalization de la transformation de Hankel", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 64 (1950), 164–168.

[2] **N.E. Aguilera and E.O. Harboure**,"On the search for weighted norm inequalities for the Fourier transforms ", *Pacific J. Maths.*, 104(1) (1983), 1–14.

[3] **J.J. Benedetto and H.P. Heinig**,"Fourier transforms inequalities with measure weights", *Advances Maths.*, 96(2) (1992), 194-225.

[4] **J.J. Benedetto and H.P. Heinig**,"Fourier transforms inequalities with measure weights II", *Function spaces (Poznan, 1989), 140–151, Teubner–Texte Math., 120, Teubner, Stuttgart*, 1991.

[5] **J.J. Benedetto, H.P. Heinig and R. Johnson**,"Fourier inequalities with A_p weights", General inequalities 5 (W. Walter, Ed.) , *Internat. Ser. of Numerical Math., Birkhäuser, Basel , 1987.*

[6] **J.J. Betancor**, "On the boundedness and range of the Lommel-Maitland transformation", *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 58e (1989), 3-11.

[7] **J.J. Betancor**, "A mixed Parseval's equation and a generalized Hankel transformation of distributions", *Canad. J. Math.*, 41 (1989), 274–284.

[8] **J.J. Betancor**,"Two complex variants of a Hankel type transformation of generalized functions", *Port. Mathematica*, 46(3) (1989), 229-243.

[9] **J.J. Betancor**, " A Fox integral transformation of generalized functions", *Bull. Soc. Roy. Sci. Liége*, 60(6) (1991), 391–400.

[10] **J.J. Betancor**, "Characterization of Hankel transformable generalized functions", *Internat. J.Math. & Math. Sci.*, 14(2) (1991), 269–274.

[11] **J.J. Betancor and J.A. Barrios**,"On K_μ transformation of distributions", *Applicable Analysis*, 42 (1991), 175-197.

[12] **J.J. Betancor and J.A. Barrios**,"The Krätzel integral transformation of distributions", *Math. Nachr.*, 154 (1991), 11-26.

[13] **J.J. Betancor and C. Jerez**,"Boundedness and range of $\mathbb{H}$–transformation on certain weighted L_p spaces", *SERDICA Bulgaricae Mathematicae Publicationes*, 20 (1993), 269–297.

[14] **J.J. Betancor and C. Jerez**, "Watson integral transforms on new spaces of functions and distributions", *Publ. Math. Debrecen*, 47/1–2 (1995), 107–125.

[15] **J.J. Betancor and C. Jerez**,"Weighted norm inequalities for the $\mathbb{H}$–transformation". *Aparecerá en Internat. J. Math. & Math. Sci.* .

[16] **J.J. Betancor and C. Jerez**,"Convolution Watson integral transformations of generalized functions". *Aparecerá en Math. Japonica.*

[17] **J.J. Betancor and C. Jerez**,"New inversion formulas for the Hankel transformations". *Aparecerá en Rend. Circ. Mat. Palermo.*

[18] **J.J. Betancor and I. Marrero**, "Some linear topological properties of the Zemanian space H_μ", *Bul. Soc. Roy. Sci. Liége*, 61 (1992), 299–314.

[19] **J.J. Betancor and I. Marrero**, "Multipliers of Hankel transformable generalized functions", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 33(3) (1992), 389–401.

[20] **J.J. Betancor and I. Marrero**, "On the topology of Hankel multipliers and of Hankel convolution operators". *Aparecerá en Rend. Circ. Mat. Palermo.*

[21] **B.L.J. Braaksma and A. Schuitman**,"Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalized functions", *SIAM J. Math. Anal.*, 7 (1976), 771-798.

[22] **R.P. Boas Jr.**,"Asymptotic relations for derivatives" *Duke Math. J.*, 3 (1937), 637–646.

[23] **S. Bochner**, "Vorlesungen über Fouriersche integrale", *Chelsea Publishing Co.*, New York, 1948.

[24] **R.D. Charmichael and R.S. Pathak**,"Asymptotic behaviour of the $\mathbb{H}$–transform in the complex domain", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 102 (1987), 533-552.

[25] **R.D. Charmichael and R.S. Pathak**,"Asymptotic analysis of the $\mathfrak{H}$–function transform ", *Glasnik Matematicki*, 25(45) (1990), 103-127

[26] **R.G. Cooke**,"The inversion formula of Hardy and Titchmarsh", *Proc. London Math. Soc.*, 24(2) (1925), 381-420.

[27] **L.S. Dube and J.N. Pandey**, "On the Hankel transform of distributions", *Tôhoku Math. J.*, 27 (1975), 337-354.

[28] **S.A.Emara and H.P. Heinig**, "Weighted norm inequalities for the Hankel and K–transformations", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 103(A) (1986), 325-333.

[29] **A. Erdelyi**, "On some functional transformations", *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 10 (1950/51), 217-234.

[30] **A. Erdelyi et al.**, "Higher trascendental functions I", *Mc Graw Hill*, New York, 1953.

[31] **A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi**,"Tables of integral transforms, I", *Mc Graw Hill Book Company*, New York, Toronto, London, 1954.

[32] **A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi**, "Tables of integral transforms, II", *Mc Graw Hill Book Company*, New York, Toronto, London, 1954.

[33] **Ch. Fox**, "The inversion of convolution transforms by differential operators", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 880–887.

[34] **C. Fox**, "The G and H funtions as symmetrical Fourier kernels", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 (1961), 395–429.

[35] **G.H. Hardy and E.C. Titchmarsh**, "A class of Fourier kernels", *Proc. London Math. Soc., Ser.2*, 35 (1933), 116–155.

[36] **N. Hayek**, "Estudio de la ecuación diferencial $x\,y'' + (\nu + 1)\,y' + y = 0$ y de sus aplicaciones", *Collectanea Mathematica*, 18 (1966/67), 55-174.

[37] **H.P. Heinig**,"The Fourier transform in weighted spaces", *Approximation and Function Spaces, Banach Center Publications, 22, PWN–Polish Scientific Publishers*, (1989), 173-182.

[38] **P. Heywood and P.G. Rooney**, "A weighted norm inequality for the Hankel transformation", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 99A (1984), 45–50.

[39] **P. Heywood and P.G. Rooney**, "On the Hankel and some related transformations", *Canad. J. Math.*, XL(4) (1988), 989–1009.

[40] **W.B. Jurgat and G. Sampson**,"On rearrangement and weight inequalities for the Fourier transform", *Indiana Univ. Math. J.*, 33(2) (1984), 257–270.

[41] **S.L. Kalla and V.S. Kiryakova**,"An $\mathfrak{H}$–function generalized fractional calculus based upon compositions of Erdelyi–Kober operators in L_p", *Math. Japonica*, 35(6) (1990), 1151–1171.

[42] **A.A. Kilbas, M. Saigo and S.A. Shlapakov**,"Integral transforms with Fox´s H–function in spaces of summable functions", *Integral Transforms and Special Functions*, 1(2) (1993), 87–103.

[43] **A.A. Kilbas, M. Saigo and S.A. Shlapakov**,"Integral transforms with Fox´s H–function in $\mathcal{L}_{\nu,r}$– spaces", *Fukuoka University Sience Reports*, 23(1) (1993), 9–31.

[44] **A.A. Kilbas, M. Saigo and S.A. Shlapakov**,"Integral transforms with Fox´s H–function in $\mathcal{L}_{\nu,r}$– spaces, II ", *Fukuoka University Sience Reports*, 24(1) (1994), 13–38.

[45] **E. Kratzel**,"Eine verallgemeinerung der Laplace–und Meijer–transformation", *Wiss. Z. Univ. Jena Math. Natur–Reiche*, 5 (1965), 369–381.

[46] **E.L. Koh and A.H. Zemanian**,"The complex Hankel and **I**-transformations of generalized functions", *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 945-957.

[47] **W.Y. Lee**, "On Schwartz's Hankel transformation of certain spaces of distributions", *SIAM J. Math. Anal.*, 6(2) (1975), 427-432.

[48] **S.P. Malgonde and R.K. Saxena**,"An inversion formula for distributional **IH**–transform", *Math. Ann.*, 258 (1982), 409–417.

[49] **V.G.Maz´ja**, "Sobolev spaces", *Springer - Verlag, Berlin Heidelberg,* 1985.

[50] **A. C. McBride and W.J. Spratt**, "On the range and invertibility of a class of Mellin multipliers transforms, I", *J. Math. Anal. Appl.*, 156 (1991), 568–587.

[51] **A. C. McBride and W.J. Spratt**, "On the range and invertibility of a class of Mellin multipliers transforms, II", Preprint (1995).

[52] **A. C. McBride and W.J. Spratt**, "On the range and invertibility of a class of Mellin multipliers transforms, III", *Can. J. Math.,* 43(6) (1991), 1323–1338.

[53] **C.S. Meijer**, "Ueber eine erweiterung der Laplace–transformation, I", *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 43 (1940), 599–608.

[54] **C.S. Meijer**, "Ueber eine erweiterung der Laplace–transformation, II", *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 43 (1940), 702–711.

[55] **J. M. Méndez**,"A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(3) (1988), 619-624.

[56] **J.M.R. Méndez and M.M. Socas**, "A pair of generalized Hankel-Clifford transformations and their applications", *J. Math. Anal. Appl.*, 154(2) (1991), 543-557.

[57] **B. Muckenhoupt**, "Weighted norm inequalities for the Fourier transform", *Trans. Amer. Math. Soc.* , 276(2) (1983), 729–742.

[58] **B. Muñagorri de Oteiza et al.**, "Un estudio sobre la función de Lommel–Maitland", *Rev. Tecn. Fac. Ingr. Univ. Zulia*, 9, No.2 (1986), 33–40.

[59] **J.N. Pandey**, "An extension of Haimo's form of Hankel convolution", *Pacific J. Math.*, 28(3) (1969), 641–651.

[60] **R.S. Pathak**,"A theorem of Hardy and Titchmarsh for generalized functions", *Applicable Analysis*, 18 (1984), 245-255.

[61] **P.G. Rooney**, "On the representation of functions as Fourier transforms", *Canad. J. Math.*, 11 (1959), 168-174.

[62] **P.G. Rooney**, "On an inversion operator for the Fourier transformation", *Canad. Math. Bull.*, 3(2) (1960), 157-165.

[63] **P.G. Rooney**, "On the range of certain fraccional integrals", *Canad. J. Math.*, 24 (1972), 1198–1216.

[64] **P.G. Rooney**, "A technique for studying the boundedness and the extendability of certain types of operators", *Canad. J. Math.*, 25 (1973), 1090–1102.

[65] **P.G. Rooney**, "On the $\mathbb{Y}_\nu$ and $\mathbb{H}_\nu$ transformations", *Canad. J. Math.*, 32 (1980), 1021–1044.

[66] **P.G. Rooney**, "On integral transformations with G–function kernels", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 93A (1983), 265–297.

[67] **P.G. Rooney**, "On the representation of functions by the Hankel and some related transformations", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 125A (1995), 449–463.

[68] **A. Schuitman**, "On a certain test function space for Schwartz's Hankel transform", *Delft Progr. Rep.*, 2(1977), 193-206.

[69] **A. Schuitman**, "A class of integral transforms and associated function spaces", Ph. D. Thesis, *Technische Hogeschool Delft*, 1985.

[70] **L. Schwartz**, "Théorie des distributiones", *Hermann, Paris*, 1966.

[71] **A.L.Schwartz**, "An inversion theorem for Hankel transforms", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22(3) (1969), 713-717.

[72] **L.J. Slater**, "Confluent hypergeometric functions", *Cambridge University Press*, Cambridge, 1939.

[73] **I.N. Sneddon**, "The use of integral transforms" , *Tata McGraw Hill, New Delhi*, 1974.

[74] **E.C. Titchmarsh**,"Introduction to the theory of Fourier integrals ", *Oxford University Press, London*, 1948.

[75] **F. Treves**, "Topological vector spaces, distributions and kernels", *Academic Press*, New York, 1967.

[76] **G.N. Watson**, "A treatise on the theory of Bessel functions", *Cambridge University Press*, London, 1958.

[77] **D.V. Widder**, "The Laplace transform", *Princeton University Press*, Princeton, 1946.

[78] **E.M. Wright**, "The asymptotic expansion of generalized Bessel functions", *Proc. London Math. Soc.*, 38(2) (1934), 257–270.

[79] **A. Zayed**,"Asymptotic expansions of some integral transforms by using generalized functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 272(2) (1982), 785-802.

[80] **A.H. Zemanian**, "Inversion formulas for the distributional Laplace transformation", *SIAM J. Appl. Math.*, 14 (1966), 159-166.

[81] **A.H. Zemanian**, "A distributional Hankel transformation", *SIAM J. Appl. Math.*, 14(3) (1966), 561-576.

[82] **A.H. Zemanian**, "The Hankel transformation of certain distributions of rapid growth", *SIAM J. Appl. Math.*, 14 (1966), 678-690.

[83] **A.H. Zemanian**, "A distributional **K**-transformation", *SIAM J. Appl. Math.*, 14 (1966), 1350-1365.

[84] **A.H. Zemanian**,"Generalized integral transformations", *Interscience, New York*, 1968. (Reprinted by Dover, N.Y., 1987).