EL PAPEL DE LA INTUICIÓN EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS. LA PROPUESTA DE CHARLES PARSONS[1]

María Ponte Azcárate
mponte@ull.es

RESUMEN

En este trabajo se analiza la posibilidad de explicar el conocimiento de las entidades abstractas y, concretamente, de las entidades matemáticas por medio de una facultad cognitiva denominada intuición matemática. Para ello se exponen los puntos principales y se adelantan algunos problemas de la propuesta del filósofo Charles Parsons.

PALABRAS CLAVE: objetos abstractos, intuir que, intuición de, platonismo, conocimiento matemático.

ABSTRACT

«The role of intuition in the philosophy of mathematics. Charles Parsons' proposal». In this paper we analyse the possibility of explaining our knowledge of abstract entities and, concretely, of mathematical entities, through a cognitive faculty called mathematical intuition. In order to do so, we shall expose some of the main points and some of the problems of Charles Parsons' proposal.

KEY WORDS: abstract objects, intuition that, intuition of, platonism, mathematical knowledge.

Las matemáticas representan el paradigma del conocimiento objetivo, la base sobre la que se fundamentan el resto de las ciencias. Sin embargo, no existe un consenso acerca de la naturaleza de los objetos que los matemáticos estudian. De hecho, no todos los matemáticos o los filósofos aceptan que las matemáticas versen acerca de objetos *reales.* En este trabajo, vamos a obviar estas diferencias, y asumiremos que los objetos de los que hablan las matemáticas efectivamente existen. En otras palabras, adoptaremos una postura realista o platonista, según la cual además de existir, los objetos matemáticos son abstractos, queriendo decir con esto que están situados fuera del espacio y del tiempo y que son incapaces de interactuar causalmente.

Es precisamente la combinación de estas ideas básicas lo que conduce al problema del conocimiento en matemáticas, recogido por Paul Benacerraf y reformulado posteriormente por Hartry Field, en lo que suele denominarse el «dilema de Benacerraf-Field»[2]. Muy brevemente, este dilema cuestiona nuestra capacidad para *acceder* a las entidades abstractas; esto es: ¿cómo podemos nosotros, seres inmersos en el mundo de lo concreto (un mundo regido por las leyes del espacio y del tiempo) acceder y conocer este tipo de entidades tan «alejadas» (por usar un término coloquial) de nosotros, entidades abstractas, que no obedecen las leyes del espacio y del tiempo?

En este artículo analizaré una posible respuesta, la que podríamos denominar «clásica», esgrimida por varios autores para resolver este problema epistémico sin tener que renunciar a ninguna de las tesis fundamentales del realismo tradicional, o platonismo, en matemáticas. Concluiré que dicha respuesta, que pasa por la defensa de un tipo de facultad de conocimiento específica del ámbito matemático, no es adecuada para explicar el conocimiento matemático.

1. LA INTUICIÓN MATEMÁTICA

La solución más *directa* al dilema de Benacerraf-Field supone el desarrollo y la defensa de la facultad de la intuición. Ésta es la postura adoptada, de una manera u otra, por lo que aquí denominaremos «platonismo tradicional» y, brevemente, acepta la imposibilidad de explicar y justificar el conocimiento matemático en términos causales o en clave naturalista. En vez de este tipo de explicación, los platonistas tradicionales defienden la posibilidad (y la necesidad) de desarrollar otro tipo de explicación no causal; defienden el acceso a los objetos matemáticos a través de un tipo de facultad cognitiva especial, generalmente denominada «intuición matemática».

Por intuición matemática se suele entender, a grandes rasgos, una facultad racional por medio de la cual tenemos acceso directo a las entidades abstractas y que generalmente se define como análoga a la percepción. La intuición es, de acuerdo con esto, una fuente de conocimiento no inferencial, directo, que además no se apoya en elementos adicionales tales como la memoria o el testimonio. Por medio de la intuición, supuestamente, podemos *ver* las entidades matemáticas, de ahí que también se suela denominar (especialmente por parte de sus detractores) «ojo de la mente» o «mind-eye».

En cualquier caso, se trata de una noción muy controvertida. Mientras gran parte de la comunidad filosófica, sobre todo a partir de Quine y de sus propuestas de naturalización, la rechaza rotundamente por considerarla «misteriosa» e incluso «mística», no deja de ser sorprendente que en la comunidad matemática se recurra a ella constantemente. La noción de intuición, o de una «idea intuitiva», no sólo es aceptada por la mayor parte de los matemáticos, sino que además es general-

---

[1] Este trabajo ha sido realizado con el apoyo de los Proyectos de Investigación BFF2002-01633 y HUM2005-03848/FISO, dentro de los Planes Nacionales del Ministerio de Educación y Ciencia de España.

[2] P. Benacerraf, « Mathematical Truth», en *The Journal of Philosophy* 70, 1973, pp. 661-80; H. Field *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford, Basil Blaxkwell, 1989.

mente considerada como obvia. En muy pocos casos se da algún tipo de justificación para su uso a la hora de introducir conceptos o justificar la verdad de ciertos enunciados. Pero ¿cómo es esto posible? ¿De verdad creen los matemáticos, y los filósofos que la defienden, que conocemos la verdad de las proposiciones matemáticas gracias a un «ojo de la mente», una suerte de «luz de la razón», que nos permite *ver* o captar directamente la realidad matemática?

En mi opinión, la gran mayoría de los matemáticos no cree en la existencia de un «ojo de la mente». De hecho, ni siquiera pienso que crean en una realidad matemática externa e independiente a la que accedemos por medio de alguna facultad puramente racional. Cuando los matemáticos están *haciendo* matemáticas, por lo general asumen que están trabajando sobre una realidad objetiva e independiente, cuyas propiedades están intentando determinar. Sin embargo, cuando la discusión filosófica aparece de alguna manera en su horizonte, la mayor parte de los matemáticos suele confesar que, en su trabajo, *hacen como si* la realidad matemática existiera, aunque *en realidad* no creen que lo haga. Por supuesto, el problema radica en que ese tipo de dualidad, que a los matemáticos por lo general no les causa ningún problema, es capaz de quitar el sueño a muchos filósofos.

Esta divergencia de intereses se traduce en una divergencia en los métodos y en los objetivos de ambas disciplinas, pero también en su utilización de ciertos términos. El término «intuición» es un claro ejemplo. El uso que los matemáticos generalmente le dan al término no es el que los platonistas andan buscando. En realidad, la intuición, tal y como es usada por los matemáticos, no tiene mucho «peso filosófico»; de la misma manera, la intuición, entendida como una facultad análoga a la percepción que asegura el acceso a los objetos abstractos, tampoco es de gran utilidad para la práctica diaria de los matemáticos.

En realidad, la noción de intuición aparenta ser a veces una suerte de comodín, un término al que podemos siempre recurrir, tanto en filosofía como en matemáticas, cuando no podemos explicar nuestro conocimiento de ciertos fenómenos u objetos. Y como suele ocurrir con este tipo de términos, tiene distintos significados, según el contexto o el autor.

En el ámbito de las matemáticas, la forma más común de entender la intuición es a través de su identificación con el «sentido común» (otro término comodín, por cierto). De esta manera, por ejemplo, se suele afirmar que ciertas proposiciones resultan más «intuitivas» que otras. Este significado resulta especialmente claro en el caso de la geometría, donde por ejemplo es normal afirmar que las tesis de la geometría Euclideana resultan más 'intuitivas' que las de la no-euclidiana. Así mismo, se suele afirmar que los axiomas básicos de la aritmética (como por ejemplo los axiomas de Peano) o ciertos principios de la teoría de conjuntos son intuitivos, queriendo decir con esto que son «obvios».

Este uso de la intuición dado por los matemáticos es el más interesante, en mi opinión, para la filosofía. La epistemología de lo obvio no es, o no debe ser, un tema marginal en la filosofía. Gran parte de nuestro conocimiento se basa en conocimiento no-inferencial, conocimiento obvio. Un ejemplo claro del uso de este tipo de intuición como captación de lo obvio en la filosofía es el dialogo del *Menón* de Platón. En él Sócrates, por medio de una serie de preguntas, consigue que un esclavo (Menón), sin formación matemática previa, llegue «por sí solo» a una ley básica de la geometría (concretamente, Sócrates le conduce a ver que si tenemos un cuadrado, a, y a partir de su diagonal dibujamos otro cuadrado, *b,* el área de *b* será en doble del área de *a*)[3].

Generalmente, cuando algo nos resulta obvio solemos decir que es de 'sentido común' aceptar su verdad. Las proposiciones intuitivas son proposiciones que respetan el sentido común. Conocer la verdad de estas proposiciones no requiere ningún tipo de conocimiento ni creencia previa. Se podría decir que para saber si una proposición intuitiva (u obvia) es verdadera basta con entenderla. ¿Es concebible dudar de la verdad de, por ejemplo, la proposición «1+1=2»?, ¿y de la proposición «todo triángulo tiene tres lados»?

El problema está en que, aun aceptando esto, es posible que este significado de la intuición no sea «suficiente» para los objetivos de los platonistas. El sentido común (como forma de intuición) resulta más informativo en el mundo empírico que en el matemático. Tal y como afirma Penelope Maddy[4], existe una divergencia clara en el alcance de la noción de «sentido común» en las ciencias empíricas y en las matemáticas. Si bien es cierto que tanto las ciencias empíricas como las matemáticas comienzan con el sentido común (en nuestras prácticas ordinarias de contar, medir, etc.), en el caso de la ciencia empírica, el sentido común ratifica una ontología de objetos físicos observables, nos dice algo acerca de estos objetos (nos dice, por ejemplo, que son estables, o que seguirán existiendo aun cuando no los observemos). Sin embargo, en el caso de las matemáticas el sentido común no parece ratificar ninguna ontología.

El sentido común nos dice muchas cosas acerca de las matemáticas, nos dice que 1+1=2, que un cuadrado tiene cuatro lados o que una persona que mida dos metros es más alta que otra que mida uno. Pero el sentido común no nos dice si *existe* el número dos. De la misma manera que resulta cuando menos extravagante dudar de la existencia de los objetos físicos observables, resulta sospechoso que alguien no confiese tener o haber tenido dudas acerca de la existencia de los objetos matemáticos. Estas dudas se agravan además cuando intentamos conocer algo más acerca de la naturaleza de esos objetos: ¿existen fuera o dentro del espacio?, ¿y del tiempo? ¿Son independientes de nosotros?

Los platonistas necesitarán algo más que la intuición como sentido común para defender sus tesis acerca de la existencia de los objetos abstractos. Necesitan una noción que les garantice un acceso a esos objetos, una vía de conocimiento. El hecho de que ciertos axiomas resulten obvios no garantiza la existencia de los obje-

---

[3] Véase M. Giaquinto, «Epistemology of the Obvious: a Geometrical Case», en *Philosophical Studies* 92, 1998, para una defensa de la consideración, en determinadas circunstancias, de lo obvio como un estado de creencia aceptable incluso cuando el sujeto es incapaz de justificar su creencia. Para ello, Giaquinto, por medio de la teoría de los conceptos de Peacocke, argumenta que ese estado de creencia puede resultar de la activación de disposiciones fiables para la formación de creencias (generadas por la posesión de determinados conceptos).

[4] P. Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Claredon Press, 1997, pp. 185-8.

tos o de las entidades acerca de los que habla[5], ni por lo tanto que nuestra creencia en esos axiomas sea generada por un proceso en el que directamente captamos o aprehendemos los objetos matemáticos. En pocas palabras, para los matemáticos, la intuición es una facultad para resolver problemas, desempeña un papel meramente heurístico; los platonistas sin embargo necesitan una noción de intuición como *acceso* a la realidad matemática, una noción que ratifique su ontología.

2. LA PROPUESTA DE CHARLES PARSONS

Esta distinción entre los dos tipos de intuición es expresada por Charles Parsons[6] como la distinción entre «intuition that» (intuir que) e «intuition of» (intuición de). Intuición proposicional e intuición de objetos. Una cosa es, afirma Parsons, intuir que cierta proposición es verdadera y otra muy distinta tener intuición de determinados objetos, intuir (la existencia de) los objetos matemáticos (por ejemplo). La intuición tal y como la entienden los matemáticos es equivalente a la «intuition that», una facultad de sentido común, que en algunas personas está más desarrollada que en otras y que por lo tanto les permite resolver los problemas matemáticos de una manera más rápida. Por supuesto, ambos tipos de intuición están íntimamente relacionados, la «intuition of» no sirve de nada si no está acompañada por la «intuition that», pero es posible tener «intuición that» sin «intuition of».

Charles Parsons es quizás el filósofo contemporáneo que más tiempo y dedicación ha prestado al desarrollo de una facultad de la intuición que nos permita dar respuesta al dilema de Benacerraf-Field. Para ello, ha llevado a cabo un análisis minucioso de la misma. El resultado de este análisis inevitablemente, debido a la dificultad tanto del problema como de la noción de intuición en sí misma, tiene un alcance muy limitado; demasiado, en mi opinión, para explicar el conocimiento de las entidades abstractas. Por motivos de simplicidad, centraremos nuestra atención en la posible aplicación de la intuición al conocimiento de los números[7].

Aparte de esta distinción Parsons establece otra no menos importante entre lo que él denomina «objetos abstractos puros» y «objetos cuasi-concretos». Los objetos «cuasi-concretos» son objetos abstractos que dependen en gran medida de

---

[5] Esta afirmación puede resultar problemática. Alguien podría argumentar que si un axioma resulta obvio y por lo tanto es verdadero esto garantizaría la existencia de los objetos de los que habla. Si adoptamos, por ejemplo, una noción de verdad como correspondencia no sería posible afirmar que un enunciado o un axioma es verdadero si no se corresponde con una «realidad», si los objetos no existen. Mi respuesta a esto es que cuando decimos que un axioma o enunciado resulta obvio aceptamos la posibilidad de que su verdad no sea «literal» sino «ficcional». Por ejemplo, el enunciado «los unicornios tienen un cuerno» puede ser considerada verdadera, de hecho una vez conocemos el significado del término «unicornio» resulta obvia, aunque los unicornios no existan.

[6] C. PARSONS «Mathematical Intuition», en *Proceedings of the Aristotelian Society*, 80, 1980, pp. 145-68.

[7] Esta limitación no acarrea problemas porque nuestras críticas se centran en la noción misma, no en sus posibles aplicaciones.

determinado tipo de objetos concretos. Es decir, son objetos, como por ejemplo las expresiones lingüísticas, que aun siendo considerados como tipos o «types» (abstractos) fácilmente diferenciables de los «tokens» (concretos), dependen de alguna manera de la existencia y la ocurrencia de estos últimos. Por el contrario, los «objetos abstractos puros», como por ejemplo los conjuntos o los números, no dependen de sus ocurrencias en tanto que «tokens» (la naturaleza de los números por ejemplo, en tanto que «objetos abstractos puros» no depende de la existencia o de la naturaleza de los numerales —entendidos éstos como instanciaciones concretas, como «tokens»—.

Esta nueva concepción de la intuición matemática trae consigo la imposibilidad de intuir lo que hemos denominado «objetos abstractos puros», es decir, Parsons niega que podamos tener intuición de los números naturales o de los conjuntos en sí mismos. El campo de actuación de la intuición matemática queda reducido a los «objetos cuasi-concretos». De esta manera Parsons evita muchos de los problemas de la intuición matemática tal y como la desarrollaba Gödel, por medio de la analogía con la percepción. Pero su estrategia tiene un precio ciertamente alto: el alcance de la noción queda notablemente reducido, hasta el punto en que difícilmente puede explicar el conocimiento matemático.

Un motivo importante para adoptar esta restricción y una crítica por tanto a la noción de intuición matemática como captación de los objetos matemáticos es el problema de la incompletud de los objetos matemáticos. Este problema está estrictamente relacionado con otro importante artículo de Benacerraf titulado «What numbers could not be»[8], aunque en realidad se trata de un problema antiguo.

Brevemente, el problema radica en que las propiedades esenciales de los objetos matemáticos y de las relaciones entre ellos, aspectos ambos básicos para el conocimiento matemático, son establecidas por las relaciones básicas del sistema o la estructura en la que estos objetos están inmersos. Las propiedades básicas de, por ejemplo, el número 2 no pueden ser aprehendidas independientemente de la estructura general de los números naturales (concretamente, las propiedades básicas del número 2 vienen dadas por los axiomas de Peano, axiomas básicos de la estructura general de los números naturales y que los define atendiendo a las relaciones entre ellos). Pero entonces, ¿cómo podríamos captar los números a través de la intuición, si es imposible identificarlos individualmente?

Esta línea de pensamiento es la que, obviamente, impulsa las tesis estructuralistas. La motivación principal para la adopción de una postura de corte estructuralista es también la principal razón por la que Parsons restringe el uso de la intuición en matemáticas: el problema de la incompletud de los objetos matemáticos.

Para poder entender correctamente lo que Parsons tiene en mente cuando habla de «intuition of» (que como vimos es el tipo de intuición necesaria para solu-

---

[8] P. Benacerraf, «What numbers could not be», en *Philosophical* Review 74, 1965, pp. 47-73. En este artículo Benacerraf parte de la posibilidad de reducir los números naturales a distintos conjuntos, dependiendo de si adoptamos la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel o la teoría de von Neumann y argumenta que es imposible decidir entre estas dos posibles reducciones (isomórficas entre sí).

cionar el problema epistemológico en matemáticas) vamos a seguir el ejemplo que Parsons utiliza, ya que sus tesis dependen en gran medida de la relevancia del mismo. Parsons propone que centremos nuestra atención únicamente en los aspectos sintácticos de un lenguaje imaginario formado por un único símbolo primitivo, 'l', y cuyas expresiones (bien formadas) son cadenas arbitrarias compuestas únicamente de estos símbolos: |, ||, |||,… De esta manera, si interpretamos 'l' como 0 y la operación de añadir nuevas barras a una cadena dada como la operación de sucesión, nos encontramos con que esta cadena de barras es isomórfica con el conjunto de los números naturales. Así, afirma Parsons, contamos con una interpretación «geométrica» de la aritmética, con la obvia ventaja de dejar el concepto de número (tanto cardinal como ordinal) a un lado. Dicho con otras palabras, el lenguaje básico propuesto por Parsons es un posible modelo para la aritmética.

Resulta evidente que la percepción ordinaria de una cadena de barras es una percepción de una sucesión de inscripciones concretas: de «tokens». Pero generalmente pensamos en dichos símbolos (las barras) como «types», no estamos pensando en una barra en concreto sino en las barras en general (en distintos contextos, posiciones, etc). Éste es un fenómeno absolutamente común, recogido por el lenguaje ordinario. Normalmente, por ejemplo, decimos que *oímos* o *vemos* palabras o frases y con esto queremos decir palabras o frases entendidas como «types» (no queremos, en estos casos, decir que oímos una ocurrencia de la palabra en particular, un «token», sino que oímos palabras como «types»).

Según esto, la intuición de un objeto es, para Parsons, lo que sucede cuando percibimos algo y, estando equipados con el concepto apropiado de un «type», lo *vemos* como un «type» determinado. Pero este proceso está presente no sólo en matemáticas o en lingüística, sino también en procesos de percepción ordinaria. De acuerdo con la descripción ofrecida, cuando percibimos un objeto cualquiera (concreto) y lo reconocemos como «este» o «aquel» objeto determinado, es decir, cuando podemos reconocerlo si lo volvemos a percibir en otra ocasión, aunque haya sufrido pequeñas modificaciones o esté situado en un contexto diferente, cuando podemos establecer relaciones de identidad entre los objetos (pertenecientes a un mismo «type»). Entonces, de acuerdo con esta interpretación, estamos intuyendo el objeto, estamos intuyendo el «type» (no sólo el objeto entendido como «token»).

Resulta obvio por lo tanto que, de acuerdo con Parsons, la intuición matemática no debe ser considerada como una facultad epistémica aislada, propiedad exclusiva de las matemáticas. Muy al contrario, la intuición matemática debe ser entendida como un modo de conocimiento general, estrechamente relacionada con los conceptos por medio de los cuales describimos la percepción y nuestro conocimiento del mundo físico. Según esto, es no sólo posible sino además normal ejercitar la 'facultad' de la intuición matemática aun cuando no estamos conscientemente trabajando en matemáticas.

Es importante no confundir la intuición con un mero proceso de «generalización» a partir de percepciones «actuales». No alcanzamos la intuición de un «type» simplemente abstrayendo de un «token» particular, de una ocurrencia actual (no solamente posible) del objeto. Entre otras cosas, entender la intuición de esta forma limitaría de tal manera la noción que apenas tendría valor explicativo. La intuición de un objeto no tiene ningún sentido si no está al servicio del conocimiento proposicional acerca de dichos objetos. El verdadero objetivo, recordemos, es explicar cómo podemos conocer los objetos matemáticos de manera que estemos justificados para determinar la verdad o la falsedad de las proposiciones acerca de ellos. El objetivo es explicar el acceso epistémico a los objetos matemáticos de manera que podamos mantener los principios básicos de la semántica clásica. La cuestión es entonces ver hasta qué punto la noción de intuición matemática desarrollada por Parsons es capaz de garantizar el conocimiento de verdades de carácter general acerca de los objetos de la intuición y si dentro de estos objetos podemos incluir de alguna manera los objetos de las matemáticas.

Volvamos al ejemplo ofrecido por Parsons. Según él, contamos con un sencillo lenguaje que resulta isomórfico con el conjunto de los números naturales. Si añadimos lo dicho acerca de la intuición obtenemos conocimiento de cadenas análogas a los axiomas elementales de Peano (PA), según los cuales:

(PA1) 0 es un número natural (N0)
(PA2) Todo número natural, a, tiene un sucesor (que también es un número natural), denotado por a' ($\forall x\,(Nx \rightarrow Nx')$)
(PA3) No hay ningún número natural cuyo sucesor sea 0 ($\sim\exists x\,(Nx \wedge Nx' = 0)$)
(PA4) Si dos números naturales son distintos, entonces sus sucesores también lo son ($\forall x\,\forall y\,(Nx \wedge Ny \wedge x \neq y \rightarrow x' \neq y')$)

De esta forma, podemos re-interpretar PA en el sencillo lenguaje propuesto por Parsons[9]:

(PA1') | es una cadena de barras
(PA2') Toda cadena de barras tiene un sucesor que también es una cadena de barras
(PA3') | no es el sucesor de ninguna otra cadena de barra
(PA4') Distintas cadenas de barras tienen distintos sucesores

El reto es ahora ver cómo, utilizando la noción de intuición defendida por Parsons, podemos obtener conocimiento de verdades de carácter general acerca de los objetos de la intuición, como (PA1'-PA4'). En matemáticas, y en el conocimiento científico en general, necesitamos poder formular verdades de carácter general, verdades que podamos aplicar de manera directa a un mismo «tipo» de proposiciones u objetos. El problema es que la noción de intuición de Parsons depende de alguna manera en los «tokens», en las instanciaciones concretas (no generales) de los objetos.

Basta analizar por ejemplo PA2', según la cual cada cadena de barras puede ser extendida siempre con una barra más y por lo tanto representa, en palabras de

[9] En este punto, extraigo esta re-interpretación de PA de HALE y C. WRIGHT «Benacerraf's Dilema revisited», en *European Journal of Philosophy* 10, 2002, pp. 101-29.

Parsons, «la expresión más débil de la idea según la cual nuestro lenguaje es potencialmente infinito»[10]. Está claro que no podemos explicar la intuición de PA2' basándonos únicamente en la percepción de «tokens» actuales (ya que necesitaríamos probar la existencia de infinitos «tokens» actuales, es decir, de infinitos objetos concretos). Parsons introduce por ello la noción de *imaginación*.

Si queremos que la intuición alcance los niveles de generalidad requeridos por el conocimiento matemático (entre otros) debemos introducir la noción de imaginación, teniendo además en cuenta que lo importante es imaginar una cadena de barras *arbitraria*. Imaginar una cadena de barras concreta no es suficiente para obtener generalidad, sería como basarnos en la percepción actual. Pero afirmar que debemos imaginar una cadena de barras arbitraria es ciertamente problemático; es necesario especificar un poco más lo que queremos decir por eso.

Tal y como Hale y Wright afirman[11], no está claro cómo imaginando *vagamente* que una cadena puede ser ampliada por una barra | más nos puede brindar el conocimiento de que *cualquier* cadena puede ser extendida en una barra | más. En vez de esto, imaginar vagamente nos conduce a ver que *alguna* cadena puede ser extendida. Pero esto no es suficiente, necesitamos que el conocimiento sea general, saber que *cualquier* cadena puede ser extendida en una | más.

En mi opinión, la interpretación más prometedora sería tomar una cadena como paradigma considerando irrelevante su estructura interna, pero tampoco está libre de problemas. ¿Cómo sabemos o decidimos que la estructura interna es irrelevante? De nuevo, nos encontramos con el problema de la incompletud de los objetos matemáticos.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que el hecho de que podamos imaginar que una cadena puede ser siempre aumentada con una barra más no implica que esto sea «físicamente posible». El tipo de posibilidad que necesitamos es el de «posibilidad matemática», queriendo decir con esto que no estamos haciendo referencia a las capacidades del organismo humano. Parsons, al hablar de infinito potencial, no se está refiriendo a una capacidad real, de nuestra mente, de 'construir' cadenas cada vez más largas. Pero, ¿a qué se refiere Parsons exactamente?, ¿qué tipo de modalidad está implícita en su noción de imaginación? Aquí, de nuevo nos encontramos con varias posibilidades. En última instancia, podemos reformular la cuestión y preguntar por las condiciones para la existencia de los «types». Partiendo de la definición de «types» a partir de «tokens», ¿qué necesitamos para establecer la existencia de los primeros? ¿Cuáles son las condiciones para que la imaginación nos conduzca a ellos, más allá de la mera percepción?

La respuesta más restrictiva sería decir que un «type» (de una cadena) existe si y sólo si hay *actualmente* un «token» de ese «type». De esta forma, para poder afirmar que existen infinitos «types» o que podemos imaginar una cadena que se puede extender indefinidamente, necesitaríamos probar que existen infinitos

---

[10] C. Parsons, 1980, *op. cit.*, p. 150.
[11] B. Hale y C. Wright 2002, *op. cit.*, p. 107.

«tokens», que existen infinitas barras en el universo (no que puedan existir, sino que existen de hecho). Obviamente, esta respuesta resulta demasiado restrictiva.

En el otro extremo, podríamos afirmar que la existencia de los «types» es completamente independiente de sus instanciaciones, ya sean estas actuales o posibles. Es decir, que podemos acceder a los «types» (abstractos) y probar su existencia con total independencia de los «tokens», o de los objetos abstractos. Ésta es la afirmación del platonismo tradicional, y ya hemos visto los problemas a los que se enfrenta. Es precisamente para evitar esta respuesta por lo que Parsons ha desarrollado todo su programa

Por último, la respuesta más moderada consiste en afirmar que un «type» existe si y sólo si *podría* haber un «token» de ese «type». Puede que existan «tokens», objetos concretos, que no se hayan instanciado pero que podrían hacerlo. Ésta es la respuesta que más se ajusta a las tesis de Parsons y a la adopción del concepto del «infinito potencial». La imaginación, de acuerdo con esta tercera respuesta, cumple precisamente el rol epistemológico de suplantar en cierta manera a la percepción cuando se trata de «tokens» no instanciados, y de este modo ofrecer la generalidad requerida en matemáticas.

A pesar de que esta tercera opción sea la más adecuada para los propósitos de Parsons, deja a su vez muchas cuestiones sin resolver. Wright y Hale, por ejemplo, señalan que aun aceptando que la imaginación pudiera servir de *puente* y que por medio de ella podamos por ejemplo concebir que cualquier cadena puede ser extendida siempre con una barra más, ¿qué determina lo que sería imaginable si nuestra capacidad de imaginación fuera extendida? La noción de imaginación es una noción demasiado vaga, o al menos así me lo parece, para llevar el peso del conocimiento matemático. Tal y como la concebimos es demasiado limitada, pero resulta difícil ver cómo podríamos liberalizarla sin presuponer para ello determinados «types».

Aparte de estos problemas acerca de la noción de imaginación, existen otras objeciones, más fundamentales, que hacen referencia a la analogía entre PA' y PA. Recordemos que la intuición de Parsons no es de utilidad para conocer los números (y por lo tanto PA), ya que se trata de objetos abstractos puros, que no dependen de ninguna manera de sus instanciaciones. Por eso, la intuición queda limitada a la explicación del conocimiento de objetos cuasi-concretos, como las barras del ejemplo. La pregunta obvia es hasta qué punto el conocimiento del sistema de cadenas de barras PA' puede brindarnos conocimiento de PA; hasta qué punto garantizar la verdad de los enunciados de PA' es prueba suficiente de la verdad de los enunciados de PA.

Incluso si aceptamos que PA' constituye un modelo de la aritmética, desde un punto de vista matemático, las cadenas de barras son unos objetos un tanto especiales. El modelo PA' está formado por objetos «cuasi-concretos», y por lo tanto dependen (aunque sea de una manera muy laxa) de sus instanciaciones concretas, que en este caso además son objetos concretos (|) de naturaleza espacial. Los objetos de los axiomas de Peano, por el contrario, constituyen una colección de objetos abstractos puros —los números naturales—, completamente independientes de los objetos concretos, por lo que es parte de su naturaleza el que los enunciados acerca de ellos puedan ser aplicados a cualquier cosa en la que podamos pensar, incluidos los objetos no espaciales. El problema consiste en explicar cómo, si los cuatro axiomas principales pueden ser derivados de sus análogos acerca de cadenas de barras, pueden seguir gozando de ese carácter universal y por lo tanto ser aplicables a cualquier cosa pensable.

En suma, la dificultad está en que, incluso aceptando que pudiéramos explicar la verdad de PA' a través del conocimiento de las cadenas de barras entendidas como «types», no queda claro en qué podría ayudarnos esto a la hora de conocer la verdad de PA y el conocimiento de los objetos matemáticos, como los números. La propuesta de Parsons, asumiendo que fuera válida, explicaría el conocimiento de los objetos «cuasi-concretos», pero no la de los objetos «abstractos puros».

El propio Parsons acepta y reconoce estos problemas. De hecho, tras reconocer el carácter «especial» de los objetos de la intuición tal y como él los presenta, él mismo establece límites a su propuesta, aceptando que a lo más que podemos aspirar (si todo lo dicho fuera correcto) es a una «posición moderada»:

Lo cierto, en todo caso, es que intentar explicar el conocimiento matemático por medio de la intuición, en cualquiera de sus formas, no es en mi opinión una línea muy prometedora. En principio, la noción misma, aun tras los esfuerzos de Parsons, requeriría una definición mucho más sistemática para poder ser de utilidad explicativa. Al menos en lo que se refiere a la intuición construida sobre la base de la analogía con la percepción que es, como hemos dicho, la única que podría resolver el problema epistemológico para los platonistas. Bien es cierto que Parsons no pretende en ningún momento fundamentar el conocimiento de la aritmética, y mucho menos del resto de las matemáticas, sobre la base únicamente de la intuición. Incluso si lo dicho aquí fuera cierto y la intuición resultara una facultad útil a la hora de explicar el acceso a los objetos abstractos, aún tendríamos que explicar muchas cosas, sobre todo cómo derivar el resto de los axiomas matemáticos a partir de los más básicos (justificar la inducción matemática, por ejemplo). Parsons plantea un sistema en clave estructuralista para dar explicación a algunos de estos problemas. No vamos a entrar en ellos aquí, nuestro interés se centra únicamente en ese *primer* momento, en el acceso a los objetos matemáticos, a partir del cual, en teoría, se derivaría el resto.

3. A MODO DE CONCLUSIÓN

En cualquier caso, me gustaría hacer algunos comentarios finales breves pero importantes. En primer lugar, alguien podría opinar que la falta de concreción en la definición de la intuición no tiene por qué ser un problema, al fin y al cabo en el ámbito empírico funcionamos relativamente bien con una noción de percepción igualmente imprecisa. Sin embargo, a pesar de ser cierto que no tenemos una explicación convincente de cómo funciona la percepción, sí que tenemos muchos más elementos que nos permiten, por un lado, garantizar que efectivamente existe algún tipo de contacto entre nosotros y los objetos y, por otro, que los objetos físicos existen. Y tenemos la certeza (bueno, al menos, un grado alto de certeza) de que esos objetos existen *precisamente* porque somos capaces de percibirlos; porque nos afectan de alguna manera (los vemos, los olemos, etc). Este argumento no es concluyente contra los escépticos, pero es al menos indudable que tiene mucha fuerza.

En el caso de la intuición no ocurre nada similar. Ya dijimos que el sentido común no ratifica una ontología en matemáticas, pero sí en el mundo de los objetos físicos observables. Yo ahora mismo soy plenamente conciente de que estoy viendo un ordenador delante de mí, pocos filósofos (si estuvieran en mi habitación) dudarían de esto y aquellos con inclinaciones escépticas difícilmente dudarán de que estoy teniendo una experiencia sensorial de un ordenador delante de mí. De nuevo, no ocurre lo mismo con la intuición, donde ni siquiera somos capaces de decir *cuándo* estamos intuyendo algo o *qué* es lo que estamos intuyendo. Por supuesto, nada de esto demuestra que no exista la intuición, pero sí indica, al menos, que la analogía con la percepción es problemática desde sus fundamentos mismos.

En segundo lugar, el problema del platonismo tradicional no está en la noción de intuición en sí misma, el problema está en sus suposiciones acerca de los objetos matemáticos. En sus suposiciones acerca de su naturaleza abstracta y lo que a partir de ahí podemos (y debemos) derivar y en sus suposiciones acerca de los compromisos ontológicos que tenemos que adoptar para justificar la verdad de los enunciados y las teorías matemáticas. Pero, obviamente, para defender esta idea necesitaríamos mucho más espacio del que aquí disponemos.