

Trabajo de Fin de Grado

MEDIDAS CUÁNTICAS EN SISTEMAS PRE Y POSELECCIONADOS: LA PARADOJA DE LAS TRES CAJAS.

Universidad de La Laguna

Autor: Jessica Przeor
Universidad de La Laguna

Tutor: Rafael Sala Mayato
Universidad de La Laguna

June 11, 2019



**Universidad
de La Laguna**

'If you think you understand quantum mechanics, you don't understand quantum mechanics'

Richard Feynman.

Agradecimientos

En primer lugar quería dar gracias a mi tutor Rafael Sala Mayato, por la ayuda incondicional, por la paciencia y por el apoyo que he recibido de su parte, no solamente en la época de escribir este trabajo sino también durante años anteriores .

A todos los profesores del grado de Física en la Universidad de La Laguna por los conocimientos adquiridos durante estos años de mi carrera y por la curiosidad e interés que me han despertado por el mundo que me rodea.

A todos mis compañeros y amigos, estén donde estén, y sin excepción, por el apoyo tanto en los días buenos como en los días más oscuros. A todos que he podido conocer en la carrera y que me han apoyado en algún momento de mi carrera universitaria. Por las conversaciones científicas, por el apoyo mutuo y por la amistad.

Obviamente no puedo olvidarme de dar gracias a una persona muy especial para mí, que me ha tenido que aguantar todos los días, en los buenos y malos momentos, por aguantarme y por escucharme.

Todo esto nunca hubiera sido posible sin el apoyo incondicional y el cariño que he recibido por parte de mi familia. Mis padres que a pesar de la distancia siempre han estado a mi lado y a mis hermanas Monika y Sandra por creer en mí en todo momento.

A todos ustedes, muchísimas gracias.

Abstract

The beauty of quantum mechanics is that it predicts effects that challenge our intuition (paradoxes). Niels Bohr, one of the fathers of the theory, said that:

“the one who is not surprised when they explain quantum mechanics, is that he has not understood anything”.

All these effects, all these paradoxes are exciting. They are a spiral in which one has to enter alone. They are a direct and intimate challenge.

When something needs our full attention and nobody can help us, it is almost certain that we are facing a vicious circle or a paradox. The most abundant source of strangeness, when dealing with “quantum paradoxes” or certain relativistic phenomena, is that these observations do not seem to respect the laws related with our common sense. All paradoxes are charming, especially when someone with a basic knowledge of quantum mechanics tries to analyze them.

In this text it will be analyzed a very interesting paradox, which has been described by Lev Vaidman in [1]. This author apparently described a situation in which one single quantum particle can be found in 2 different boxes at the same time. To deal with this paradox in detail it is necessary to understand many concepts of quantum mechanics such as the collapse of the system when measured and the idea of pre and post-selected states.

For this we will present the so-called ABL rule, which describes the probabilities made at intermediate times between two other measurements. We will study the paradox of the three boxes and generalize it for the case of N boxes. Afterwards we will see how this paradox can disappear if we simply understand it as a typical situation of quantum interference. For this we will also relate it to Young’s famous problem of double-slit interference. Subsequently, another paradox of similar characteristics to the original will be presented and analyzed. Finally, a classic analogy will be exposed for the paradox of the three boxes in which we will highlight the special nature of the measurement process in the quantum world.

Resumen

La belleza de la mecánica cuántica es que predice efectos que retan a nuestra intuición (paradojas). Uno de los padres de la teoría, Niels Bohr, dijo:

“El que no se sorprende cuando explica la mecánica cuántica es que no ha entendido nada”.

Todos estos efectos, todas las paradojas son muy excitantes y estimulantes. Son un torbellino en el que uno debe entrar solo. Son un reto directo e íntimo. Cuando algo exige toda nuestra consideración y nadie puede ayudarnos, es casi seguro que nos encontramos con un círculo vicioso o una paradoja. La fuente más amplia de extrañeza, cuando se trata de “paradojas cuánticas” o ciertos fenómenos relativistas, es que estas observaciones no parecen respetar las leyes asociadas a nuestro sentido común. Todas las paradojas son encantadoras, especialmente cuando alguien con un conocimiento básico de la mecánica cuántica intenta analizarlas.

En este texto se analizará una paradoja muy interesante, que ha sido descrita por Lev Vaidman en [1]. En este artículo, L. Vaidman describió una situación en la que una única partícula cuántica parece que se puede encontrar en 2 cajas diferentes al mismo tiempo. Para comprender en detalle esta paradoja es necesario entender los conceptos de función de onda en la mecánica cuántica, el colapso de la misma cuando se mide sobre el sistema, y los conceptos de estados pre y poseleccionados. Para ello presentaremos la llamada regla ABL, que describe las probabilidades de las medidas realizadas a tiempos intermedios entre otras dos medidas. Estudiaremos, pues, la paradoja de las tres cajas y la generalizaremos para el caso de N cajas. Veremos cómo dicha paradoja se puede disolver si simplemente la entendemos como una situación típica de interferencia cuántica. Para ello la relacionaremos también con el famoso problema de interferencia de Young de la doble rendija. Posteriormente, se presentará y analizará otra paradoja de características similares a la original. Por último, se expondrá una analogía clásica para la paradoja de las 3 cajas en las que pondremos de manifiesto el carácter especial del proceso de medida en el mundo cuántico.

Contents

1. Introducción	1
2. Sistemas <i>pre</i> y <i>poseleccionados</i>	4
2.1. Regla Aharonov-Bergmann-Lebowitz (ABL)	6
2.2. Paradoja de las 3 cajas	8
2.3. Análisis de la paradoja	11
2.4. Generalización de la paradoja para $N \geq 3$	13
2.5. Otra paradoja de N cajas	17
2.6. Experimento de Young con 3 rendijas como analogía del sistema de las 3 cajas	21
2.7. Una analogía clásica.	23
3. Conclusiones	27
Referencias	29

1. Introducción

Abstract

In the introduction we will explain some essential concepts to understand the following sections of the text. In particular, the collapse of the wave function in the process of measurement, and the difference between destructive and non-destructive measurements. We also provide some references associated with the current status of this problem.

Resumen

En la introducción vamos a explicar algunos conceptos cruciales para entender las partes posteriores del trabajo. En concreto, el colapso de la función de onda en el proceso de la medida, y la diferencia entre medidas destructivas y no destructivas. Proporcionamos también algunas referencias asociadas con el estatus actual de este problema.

Es difícil entender la dimensión en la cual algo puede parecer que se encuentra en dos sitios diferentes al mismo tiempo, o que algo pueda estar a tu derecha y a tu izquierda en el mismo momento. Es otro universo del que conocemos a nivel macroscópico, donde existen diferentes reglas de juego, un universo lleno de misterios y aparentes contradicciones. Este mundo, es el mundo de la física cuántica, donde nos encontramos con múltiples situaciones clásicamente inexplicables.

El comportamiento de la materia en escala atómica muestra aspectos que le son característicos. De acuerdo con ellos, los resultados de la mecánica cuántica no siempre son intuitivos, ni fáciles de entender. Sus conceptos se enfrentan con aquellos que nos resultan habituales y que proceden de las observaciones diarias de la naturaleza en la escala macroscópica. Sin embargo, no hay razones en virtud de las cuales el comportamiento del mundo atómico y subatómico deba seguir las mismas reglas que los objetos de nuestra experiencia diaria.

Los físicos a lo largo de los siglos han intentado comprender los procesos fundamentales que dirigen el mundo de átomos, moléculas y, en general, los sistemas microscópicos. Las normas que rigen este comportamiento, conocidas como la mecánica cuántica, han retado a todos quienes han intentado encontrar una explicación racional, y sus efectos son a menudo muy extraños. Uno de los ejemplos son las mediciones a nivel microscópico, las cuales parecen involucrar la existencia de una conexión instantánea entre las partículas, como si se dijeran las unas a las otras lo que tienen que hacer.

Una característica esencial de la mecánica cuántica, que la diferencia de la mecánica clásica, es que en general es imposible por razones de principio, efectuar una medición sobre un sistema sin perturbarlo.

La mecánica cuántica describe el estado de cualquier sistema mediante una función de onda a partir de la cual podemos obtener la distribución de probabilidad de todas las propiedades medibles, u observables de dicho sistema: energía, posición, momento, momento angular, etc. La mecánica cuántica no atribuye valores establecidos (definidos) a los observables, sino que hace predicciones sobre sus distribuciones de probabilidad, salvo en ciertos estados particulares. Las propiedades ondulatorias de la materia son explicadas por la interferencia de las funciones de onda. Estas funciones de onda pueden variar en el transcurso del tiempo obedeciendo la ecuación de Schrödinger.

La respuesta convencional al problema de la medición, está basada en la "hipótesis del colapso" formulada por W. Heisenberg en su artículo de 1927 [2]. De acuerdo con esta hipótesis, los sistemas cuánticos desarrollan dos tipos de evolución temporal: una evolución determinista cuando no son observados (la antes mencionada

ecuación de Schrödinger), y un proceso no determinista (el "colapso") al ser medidos. Dicho colapso es un cambio brusco o "salto cuántico" entre dos estados en el instante de la medida.

Muchas son las maneras en las que se pueden clasificar las medidas dentro del formalismo cuántico, pero en lo que se refiere a este nuestro trabajo existen dos tipos de medidas relacionadas con el colapso de la función de onda: las *medidas destructivas* y las *no destructivas*. Las medidas destructivas son procesos que destruyen completamente el sistema que estamos midiendo. En el momento de la medición se produce el colapso y el sistema deja de existir. Por ejemplo, para detectar la polarización de un fotón podemos pasarlo a través de un divisor de haz polarizador y colocar detectores en cualquiera de los puertos de salida. Así podríamos obtener la información completa de una medición proyectiva en el fotón, pero éste dejaría de existir. Al realizar las medidas no destructivas también se produce el colapso, pero el sistema no se destruye, por lo que, posteriormente, el sistema puede seguir evolucionando en el tiempo y, eventualmente, podemos realizar otra medida sobre el mismo.

En el sistema con el que vamos a tratar en este trabajo, se supone que las medidas que se realizan van a ser del tipo no destructivo. La llamada *paradoja de las tres cajas*, es el ejemplo paradigmático en el que se presenta una situación, cuando menos curiosa, en la que estudiamos un sistema que ha sido pre y poseleccionado con sendas medidas no destructivas. Eso implica hacer medidas a dos tiempos diferentes y, posteriormente, realizar inferencias acerca del estado del sistema a tiempos intermedios entre los dos anteriores. Es decir, tenemos que obtener información del sistema conociendo cuál ha sido tanto su estado inicial, como su estado final (explicaremos esto en detalle en la siguiente sección). Estas inferencias conducen a predicciones acerca de los resultados de aquellas medidas intermedias que, si bien han sido confirmadas experimentalmente [3], pueden parecernos paradójicas cuando se interpretan desde un punto de vista teórico *contrafactual*: veremos que, en general, no es lícito utilizar el formalismo de la teoría para calcular probabilidades asociadas a determinados resultados posibles, de cualquier observable, que no hayan sido realizadas *de facto* a tiempos intermedios.

En el caso que aquí se presenta vamos a lidiar con este tipo de problemas cuando nos preguntamos qué le ocurre a una partícula que puede encontrarse en tres cajas diferentes cuando realizamos una serie de medidas sobre dicho sistema. La aparente conclusión a la que se llega, cuando obligamos a que el estado inicial y final del sistema sean unos en concreto, es que la partícula se puede localizar con absoluta certeza en dos de las cajas si las "abrimos" en un instante intermedio. Esto parece indicar que dicha partícula se puede encontrar al mismo tiempo en dos lugares a la vez. Independientemente de la ya mencionada confirmación experimental de este fenómeno, se han vertido chorros de tinta acerca de hasta qué punto se pueden considerar paradójicos los resultados obtenidos o, simplemente interpretarlos como una consecuencia más de los ya de por sí contraintuitivos resultados que aparecen cuando tratamos con sistemas cuánticos.

El efecto de la paradoja de las tres cajas se ha confirmado experimentalmente en varios contextos diferentes [3, 4], con algunas pruebas [5] que violan todos los efectos clásicos que uno podría esperar en una situación análoga. Sin embargo, a pesar de toda la discusión disponible en la literatura actual, no existe un consenso claro sobre qué podemos considerar realmente cuántico acerca de tales efectos, y qué propiedades clásicas específicas podrían ser descartadas por tales experimentos. Las preguntas planteadas con más frecuencia incluyen la validez del uso contrafactual

de la regla de Aharnov-Bergman-Lebovitz [6, 7, 8], las conexiones a las pruebas de contextualidad cuántica y la perturbación en el proceso de medida [9, 10] y, por último, si los sistemas clásicos pueden simular las propiedades esenciales de una paradoja en la que exista pre y poselección de los estados del sistema a tratar [11, 12, 13].

2. Sistemas *pre* y *poseleccionados*

Abstract

In this section the concepts of pre and post-selected states will be explained, both in the case of classical mechanics and in that of quantum mechanics. To understand in detail these two concepts, crucial for this work, we will propose 2 examples. In the case of classical mechanics we will use the example of Galton Board, and in the case of quantum mechanics, we will use the example of the double slit, extended to the multiple case. Then we will present the rule of probabilities formulated by Y. Aharonov, P. Bergman and J. Lebovitz (ABL). Applying the postulates of quantum mechanics and Bayes's theorem of conditioned probability we obtain the ABL rule. Subsequently we will present the situation described by Lev Vaidman in his article known as "Weak Measurement Element of Reality" [1], in which he describes a paradoxical situation related to pre and post-selected systems. This curious situation seems to lead us to the conclusion that, considering the pre and post-selected states, we can find a single quantum particle in two different places at the same time with absolute certainty. Afterwards we will analyze the paradox and then generalize it to $N \geq 3$ boxes. We will verify that the apparently paradoxical behavior of the particle is not such if the situation is conveniently interpreted using the standard formalism of quantum mechanics. Then we will present another paradox that involves N boxes, we will analyze it and we will verify that the described situation can be understood, like the case presented by Vaidman, as a typical interference effect in quantum mechanics. For this we will compare it with Young's experiment using three, instead of two, slits. And finally we will present the classic analogy for the paradox. We are going to present a set of two boxes in which we will observe that it is possible to reach the same behavior as in the quantum case, but now it will be necessary to "trick" our system to obtain the same results.

Resumen

*En esta sección se explicarán los conceptos de estados *pre* y *poseleccionados* tanto en el caso de la mecánica clásica como en el de la mecánica cuántica. Para entender en detalle estos dos conceptos, cruciales para este trabajo, propondremos 2 ejemplos. Para el caso de la mecánica clásica usaremos el ejemplo de la máquina de Galton, y para el caso de la mecánica cuántica, usaremos el ejemplo de la doble rendija, extendida al caso múltiple. Posteriormente presentaremos la regla de probabilidades formulada por Y. Aharonov, P. Bergman y J. Lebowitz (ABL). Aplicando los postulados de la mecánica cuántica y el teorema de Bayes de probabilidad condicionada, obtendremos la regla ABL. Después, presentaremos la situación descrita por Lev Vaidman en su artículo conocido como "Weak Measurement Elements of Reality" [1], en el que describe una situación paradójica relacionada con sistemas *pre* y *poseleccionados*. Esta curiosa situación parece llevarnos a la conclusión de que, teniendo en cuenta los estados *pre* y *poseleccionados*, podemos encontrar una única partícula cuántica en dos sitios diferentes al mismo tiempo con absoluta certeza. A posteriori, analizaremos la paradoja y la generalizaremos para $N \geq 3$ cajas. Comprobaremos que el aparentemente comportamiento paradójico de la partícula no es tal si se interpreta convenientemente la situación haciendo uso del formalismo estándar de la mecánica cuántica. A continuación presentaremos otra paradoja que involucra N cajas, la analizaremos y comprobaremos que la situación descrita puede ser entendida, al igual que el caso presentado por Vaidman, como un efecto de interferencia típico en mecánica cuántica. Para ello lo compararemos con el experimento de Young usando tres, en lugar de dos, rendijas. Finalmente presentaremos una analogía clásica para la paradoja. Vamos a presentar un juego de 2 cajas en el que observaremos que es posible llegar al mismo comportamiento que en el caso cuántico, solo que ahora será necesario "trucar" nuestro sistema para obtener los mismos resultados.*

Para entender los conceptos de *pre* y *poselección*, vamos a comenzar explicando el funcionamiento de un artilugio conocido como *caja o máquina de Galton*.

La máquina consta de una tabla vertical con múltiples filas de clavos, un compartimento con una salida encima, y varios compartimentos por debajo del tablón. En la sección superior se coloca una gran cantidad de pequeñas bolas que posteriormente bajarán por el orificio. Posteriormente éstas colisionarán con los clavos (lo que provocará diferentes caminos para cada una de las bolas), hasta llegar a la parte inferior dónde se introducirán verticalmente en alguna de las aberturas disponibles. Aunque la máquina original sólo posee un orificio en su parte superior, para explicar

el concepto de pre y poselección vamos a incluir en la caja de Galton una entrada más en dicha zona (figura 1).

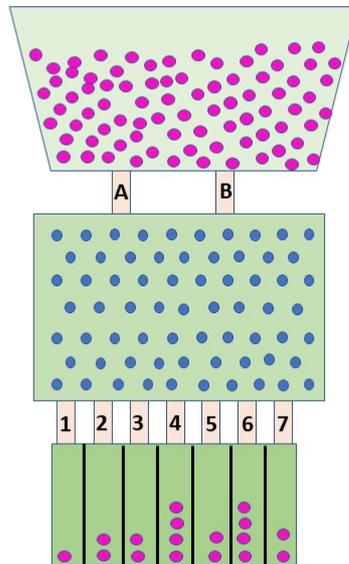


Figura 1: *Caja de Galton con más de una salida, donde los puntos rosa representan las bolas que van a estar cayendo por la caja, y los puntos azules representan clavos fijados a la tabla, que provocarán diferentes caminos de las bolas.*

De acuerdo con el formato de la máquina, uno podría hacerse numerosas preguntas acerca de las diferentes probabilidades que se asocian a los caminos que siguen las bolas desde que salen desde la parte superior, pasan a través de los orificios A y/o B, hasta que llegan al final de su camino y caen en alguno de los huecos numerados del 1 al 7.

Preseleccionar significa elegir una de las entradas superiores disponibles, por ejemplo, la entrada A. Poseleccionar consiste en escoger una de las salidas al final de la caja, por ejemplo, la número 4. Una vez hemos preseleccionado y poseleccionado los “estados” inicial y final, podemos preguntarnos por los diferentes caminos que ha recorrido cada una de las bolas que, por ejemplo, han entrado por el orificio A y han llegado a la abertura 4. No nos va a interesar lo que le ocurre a las demás bolas. Sólo vamos a hacer estadística con aquellas que sabemos que entraron por la rendija A y acabaron en la posición 4. Con este tipo de situaciones estamos acostumbrados a tratar utilizando el Teorema de Bayes, que nos proporciona las probabilidades intermedias de un determinado suceso cuando sabemos su situación inicial y su resultado final.

En mecánica cuántica no estamos acostumbrados a tratar con este tipo de escenario. La situación típica que se nos plantea consiste en obtener las distintas probabilidades asociadas a una posible medida de un determinado observable, cuando conocemos el estado en el que se encuentra nuestro sistema. Sin embargo, vamos a darle una vuelta de tuerca más al formalismo y planteémonos, en el caso cuántico, una situación parecida a la que presentamos con la caja de Galton, en el caso clásico.

Para entender lo que significa pre y poseleccionar en un problema cuántico recurriremos a uno de los ejemplos paradigmáticos de esta teoría, es decir, el experimento

de Young de la doble rendija. Sin embargo, en este caso vamos a usar como ejemplo la rendija múltiple, tal como muestra la figura 2.

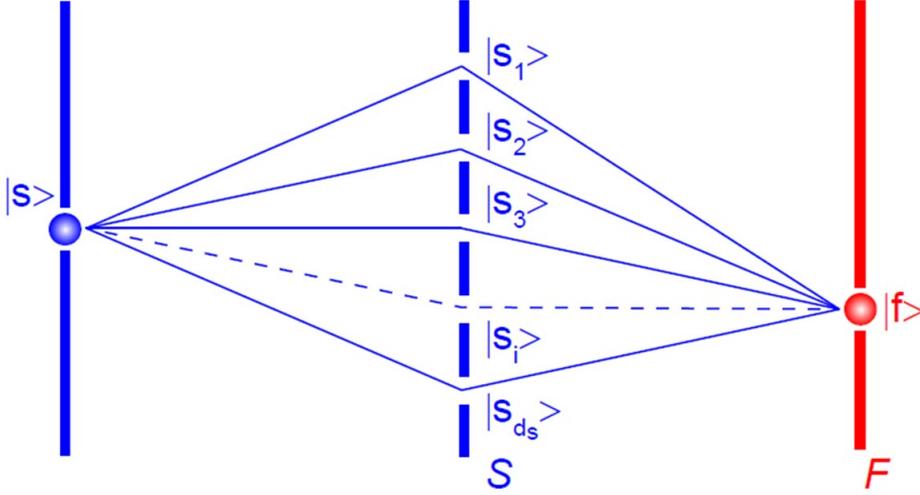


Figura 2: *Experimento de la rendija múltiple; Estados pre y poseleccionados.*

En primer lugar vamos a considerar que las medidas son no destructivas, es decir, que al realizar una medida la partícula no es destruida. Podemos suponer entonces [14] una situación en la que el sistema \mathcal{S} es preparado (preseleccionado) en un estado $|s\rangle$ que, por simplicidad, supondremos que es un estado puro, aunque todo lo que aquí se expone puede ser extendido a toda clase de estados. El sistema se somete entonces a una medida del observable S , cuyos posibles valores propios denotamos como s_i , con $i = 1, 2, \dots, d_s$ y, finalmente, se realiza una segunda medida, ahora, de otro observable F . De todos los posibles resultados de esta segunda medición, nos interesan solamente aquellos que dan lugar a un estado propio particular poseleccionado $|f\rangle$ de F . De la misma manera que en el caso de la caja de Galton, y considerando que las partículas no interactúan entre sí, nos podemos preguntar por las posibles rendijas que ha podido atravesar la partícula desde el estado inicial $|s\rangle$ hasta el estado final $|f\rangle$.

Analizando este ejemplo los científicos Y. Aharonov, P. Bergmann y J. Lebowitz [15] han podido establecer una fórmula que permite calcular la probabilidad asociada a medidas intermedias entre otras dos medidas sucesivas.

2.1. Regla Aharonov-Bergmann-Lebowitz (ABL)

La fórmula ABL proporciona la probabilidad asociada a las medidas intermedias entre dos medidas sucesivas, de modo que para un sistema cuántico que ha sido preseleccionado en un cierto estado $|s\rangle$ a un tiempo $t = t_i$, y posteriormente poseleccionado a tiempo $t = t_f$ en el estado $|f\rangle$, la probabilidad de obtener el valor s_i en la medida del observable S , cuando éste es medido a un tiempo intermedio t , viene dada por:

$$\mathcal{P}(s_i/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_{s_i}|s\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|\hat{P}_{s_j}|s\rangle|^2}. \quad (1)$$

Para explicar con detalle el origen de la regla ABL vamos a continuar con el estudio del sistema representado en la figura 2.

De acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica, la probabilidad de obtener el valor propio s_i , cuando el estado del sistema viene caracterizado por el vector propio $|s\rangle$ viene dado por:

$$\mathcal{P}(s_i/|s\rangle) = |\langle s_i|s\rangle|^2. \quad (2)$$

Si tal fuera el caso, es decir, si realizamos dicha medida y obtenemos el valor propio s_i , el vector de estado después de la medida del operador \hat{S} vendría dado por $|s_i\rangle$. Finalmente, si el sistema se somete a una segunda medición de otro observable F , la probabilidad de que la segunda medida proyecte el sistema en un estado propio particular $|f\rangle$, con valor propio f , del operador correspondiente \hat{F} , vendrá dada por:

$$\mathcal{P}(f/|s_i\rangle) = |\langle f|s_i\rangle|^2. \quad (3)$$

Si ahora nos preguntamos por la probabilidad conjunta de obtener $|s_i\rangle$ en la primera medida, y $|f\rangle$ en la segunda, dicha probabilidad vendría dada por el producto de las dos anteriores, esto es:

$$\mathcal{P}(s_i, f/|s\rangle) = \mathcal{P}(f/|s_i\rangle) \times \mathcal{P}(s_i/|s\rangle) = |\langle f|s_i\rangle|^2 |\langle s_i|s\rangle|^2. \quad (4)$$

Ahora nos fijamos que, en realidad, el sistema puede transitar una serie de estados intermedios $|s_i\rangle$, de manera que, haciendo uso de las leyes de la mecánica cuántica, podemos calcular la probabilidad total de obtener $|f\rangle$ partiendo del estado $|s\rangle$, independientemente del estado intermedio $|s_i\rangle$ que sea transitado. Dicha probabilidad viene dada por:

$$\mathcal{P}(f/|s\rangle) = \sum_i \mathcal{P}(s_i, f/|s\rangle) = \sum_i |\langle f|s_i\rangle|^2 |\langle s_i|s\rangle|^2. \quad (5)$$

Aharonov, Bergmann y Lebowitz [15] dieron vuelta a este argumento y se preguntaron por la probabilidad de encontrar un determinado valor propio intermedio s_i sabiendo que el estado inicial del sistema (preseleccionado) viene dado por $|s\rangle$, y que el estado final (poseleccionado) al que se llega, tras la medida de F , es $|f\rangle$.

De acuerdo con el teorema de Bayes podemos obtener estas probabilidades condicionales de que ocurran determinados eventos en situaciones intermedias entre otras bien definidas. En nuestro caso:

$$\mathcal{P}(s_i/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{\mathcal{P}(s_i, f/|s\rangle)}{\mathcal{P}(f/|s\rangle)} = \frac{|\langle f|s_i\rangle|^2 |\langle s_i|s\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|s_j\rangle|^2 |\langle s_j|s\rangle|^2}, \quad (6)$$

de donde

$$\mathcal{P}(s_i/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_{s_i}|s\rangle|^2}{\sum_j |\langle f|\hat{P}_{s_j}|s\rangle|^2}, \quad (7)$$

donde $\hat{P}_{s_i} = |s_i\rangle\langle s_i|$ es el proyector asociado al valor propio s_i del observable \hat{S} .

Hemos obtenido la ecuación (1), conocida como la regla ABL, que nos proporciona de forma general la probabilidad de obtener ciertos valores intermedios en la medida de un observable cualquiera, cuando el sistema ha sido pre y poseleccionado en dos estados concretos. Vamos a ver a continuación cómo la aplicación de esta sencilla regla puede llevarnos a situaciones que, a simple vista, nos haría pensar que una partícula puede encontrarse con absoluta certeza en dos puntos diferentes del espacio cuando se la observa.

2.2. Paradoja de las 3 cajas

En la referencia [1], L. Vaidman presenta una situación que ha generado, y sigue generando, cantidad de artículos de investigación acerca de la interpretación del formalismo cuántico y sus consecuencias. Se trata de una partícula cuántica que puede encontrarse en tres cajas diferentes, etiquetadas como 1, 2 y 3. Cada una de las cajas ocupa espacios disjuntos, es decir, su intersección es vacía. Podemos asociar con el hecho de encontrarse en cada una de las cajas, los estados cuánticos $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$, respectivamente. Vamos a intentar comprender lo que ocurre en este sistema en un caso muy concreto de pre y poselección de los estados inicial y final de dicho sistema. Las consecuencias que se derivan pueden parecer, en principio, realmente sorprendentes y absolutamente contraintuitivas. Más tarde, analizando detenidamente la situación, se verá cómo una sobreinterpretación del formalismo es la causante de la aparente paradoja que pasamos inmediatamente a plantear.

Supongamos que preseleccionamos el estado de nuestra partícula a tiempo t_i , como la combinación lineal:

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle), \quad (8)$$

que representa un estado en el que la partícula puede encontrarse en cada una de las cajas con una probabilidad determinada, en este caso $1/3$.

A continuación, en un instante $t > t_i$, realizamos una medida de cualquiera de los proyectores \hat{P}_i , $i = 1, 2, 3$. Dicho proyector, $\hat{P}_i = |i\rangle\langle i|$, se puede interpretar como la acción de "mirar" si la partícula se encuentra, efectivamente, en el interior de la caja correspondiente. Como todo proyector, éste puede tener dos valores propios, 0 y 1. El valor propio 1 corresponde al hecho de encontrar la partícula en el momento de "abrir la caja", y el valor 0 al hecho de no encontrarla, cuando realizamos tal medida de \hat{P}_i sobre el sistema. Por último, a un tiempo $t_f > t$, poseleccionamos el sistema en el estado:

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle), \quad (9)$$

tal y como aparece en la figura 3.

En primer lugar hay que señalar que la evolución temporal entre medidas podemos despreciarla sin pérdida de generalidad. Ya sabemos que en un experimento real esto no podría darse pero, también es cierto que esos mismos experimentalistas ya han sido capaces de recrear la paradoja en unas condiciones en las que esta suposición puede ser considerada como válida [3].

Hay que recordar que el hecho de pre y poseleccionar, es decir, de conocer los estados inicial y final del sistema en estudio, nos va a permitir hacer preguntas acerca de las posibles probabilidades de encontrar determinados resultados, cuando

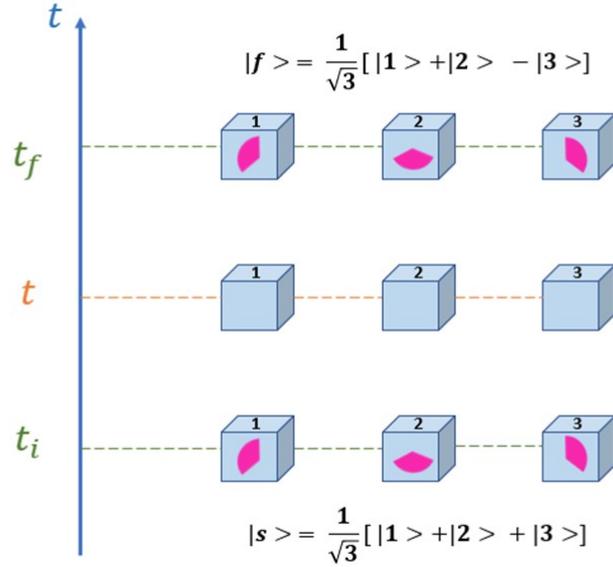


Figura 3: Representación del ejemplo de las tres cajas y una partícula.

se realiza una medida de un observable a tiempos intermedios entre dichos estados pre y poseleccionados. La regla ABL es la que nos proporciona dichas respuestas, y Y. Aharonov y L. Vaidman la usaron para calcular las probabilidades de encontrar la partícula en las cajas 1 y 2, cuando una medida de los correspondientes proyectores, $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$ y $\hat{P}_2 = |2\rangle\langle 2|$, era realizada en ese instante intermedio.

Considerando la fórmula (1) y los estados pre y poseleccionados dados en (8) y (9), la probabilidad de encontrar la partícula en la caja 1 en el tiempo intermedio t , cuando ésta es abierta, viene dado por:

$$\mathcal{P}(P_1 = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_1|s\rangle|^2}{|\langle f|\hat{P}_1|s\rangle|^2 + |\langle f|\hat{P}_2|s\rangle|^2 + |\langle f|\hat{P}_3|s\rangle|^2} = \quad (10)$$

$$= \frac{|\frac{1}{3}|^2}{|\frac{1}{3}|^2 + |\frac{1}{3} - \frac{1}{3}|^2} = \frac{|\frac{1}{3}|^2}{|\frac{1}{3}|^2 + |0|^2} = 1. \quad (11)$$

Lo que nos indica que, si uno abriera esa caja en ese instante intermedio, tendríamos absoluta certeza de encontrar allí a la partícula.

De la misma manera, si la medida que hiciéramos a tiempo intermedio es la de abrir la caja 2, esto es, medir el proyector $\hat{P}_2 = |2\rangle\langle 2|$, la regla ABL de nuevo nos dice que la probabilidad de encontrar la partícula en dicha caja 2 vendrá dada por:

$$\mathcal{P}(P_2 = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_2|s\rangle|^2}{|\langle f|\hat{P}_2|s\rangle|^2 + |\langle f|\hat{P}_1|s\rangle|^2 + |\langle f|\hat{P}_3|s\rangle|^2} = \quad (12)$$

$$= \frac{|\frac{1}{3}|^2}{|\frac{1}{3}|^2 + |\frac{1}{3} - \frac{1}{3}|^2} = \frac{|\frac{1}{3}|^2}{|\frac{1}{3}|^2 - |0|^2} = 1. \quad (13)$$

Es decir, que si uno abriera ahora la caja 2 en el instante intermedio t , también podríamos asegurar con certeza absoluta que la partícula va a ser encontrada en dicha caja.

¡He aquí la paradoja! A pesar del hecho de tener una sola partícula, podemos encontrarla, con probabilidad uno, en cada una de las 2 cajas cuando realizamos una medida intermedia de la localización de dicha partícula. ¡Este resultado parece indicar que tenemos certeza absoluta de encontrar la partícula en dos lugares diferentes en el mismo instante de tiempo! Pero el sentido común nos dice que si encontramos la partícula en una de las cajas, no deberíamos encontrarla en ninguna otra.

Por otro lado, estamos tan acostumbrados a que la mecánica cuántica nos revele aspectos de la naturaleza tan contrarios a nuestra intuición y tan, a veces, extraños, que no nos sorprenderían las propias palabras de Aharonov y Vaidman cuando aseguran que [16]

“Here we discuss another aspect of such preselected and post-selected particle which makes the claim that such a particle is simultaneously in several places even more rebust”

y que tenemos

“...one particle in several places simultaneously even in a stronger sense than it is in a double slit experiment...”

Teniendo en cuenta estos resultados, sería interesante preguntar qué pasaría si abrimos las cajas 1 y 2 al mismo tiempo. Esto se correspondería con medir a tiempo t el operador $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$. La pregunta clave sería ¿podríamos ver la partícula en las dos cajas a la vez? ¿O, de alguna manera, el sistema se las va a ingeniar para que la partícula aparezca en una sólo de ellas gracias a la acción de algún tipo de colapso? En realidad, la respuesta es aún más curiosa, pues la probabilidad de encontrar la partícula en las cajas 1 y 2 a la vez vendría dada por:

$$\mathcal{P}(P_1 = 1, P_2 = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f | (\hat{P}_1 + \hat{P}_2) | s \rangle|^2}{|\langle f | (\hat{P}_1 + \hat{P}_2) | s \rangle|^2 + |\langle f | \hat{P}_3 | s \rangle|^2} = \frac{4}{5}. \quad (14)$$

¡La probabilidad que obtenemos es menor que 1, por lo que si abrimos las cajas 1 y 2 al mismo tiempo, puede que incluso no veamos la partícula en ninguna de las dos cajas!

Para comprobar si esto es consistente, calculemos la probabilidad de encontrar la partícula en la caja 3 cuando ésta es abierta:

$$\mathcal{P}(P_3 = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f | \hat{P}_2 | s \rangle|^2}{|\langle f | \hat{P}_1 | s \rangle|^2 + |\langle f | \hat{P}_2 | s \rangle|^2 + |\langle f | \hat{P}_3 | s \rangle|^2} = \frac{1}{5}. \quad (15)$$

¿Qué está pasando? ¿Cómo se pueden interpretar estos resultados? Vamos a intentar explicarlo, en primer lugar, haciendo un estudio detallado de la situación, aplicando paso a paso los postulados de la mecánica cuántica, es decir, sin aplicar directamente la regla ABL.

2.3. Análisis de la paradoja

En la sección anterior, hemos llegado, al menos aparentemente, a la conclusión de que una partícula podría encontrarse *con certeza* y simultáneamente en dos regiones disjuntas del espacio. Esta situación resulta, obviamente, muy sorprendente y uno podría sospechar que tal conclusión se alcanza debido a que hemos hecho mal uso de la regla ABL o de que, simplemente, dicha regla no es correcta. Sin embargo, la manera en la que la hemos obtenido es a través de la aplicación rigurosa de los postulados de la mecánica cuántica. Vamos pues, en esta sección, a aplicar dichos postulados para ver cómo la paradoja no surge por una mala aplicación de los mismos, sino por una sobreinterpretación de los resultados.

Nuestro sistema, hemos dicho más arriba, se encuentra inicialmente en el estado (preseleccionado) dado por el vector (8):

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle). \quad (16)$$

A continuación, según plantea Aharonov y colaboradores, se realiza una medida sobre una cualquiera de las cajas, para “observar” si la partícula se encuentra en su interior. Esto se corresponde con medir alguno de los proyectores $\hat{P}_i = |i\rangle\langle i|$, $i = 1, 2, 3$, sobre nuestro estado inicial. Vamos a poner por caso que queremos estudiar qué ocurre con la caja número 1.

De acuerdo con nuestro estado inicial, las probabilidades asociadas a *si*-encontrar o *no*-encontrar a la partícula en la caja vendrán dadas por:

$$\mathcal{P}(si) = |\langle 1|s\rangle|^2 = 1/3 \quad ; \quad \mathcal{P}(no) = 1 - \mathcal{P}(si) = 2/3. \quad (17)$$

Si, efectivamente, realizamos la medida y encontramos a la partícula en su interior, el estado del sistema inmediatamente después de dicha medida vendrá dado por:

$$|\Psi_{si}\rangle = \frac{\hat{P}_1|s\rangle}{\sqrt{\langle s|\hat{P}_1|s\rangle}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = |1\rangle. \quad (18)$$

Si, por el contrario, no encontramos a la partícula, el estado inicial colapsará a:

$$|\Psi_{no}\rangle = \frac{(\hat{1} - \hat{P}_1)|s\rangle}{\sqrt{\langle s|(\hat{1} - \hat{P}_1)|s\rangle}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(|2\rangle + |3\rangle)}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle). \quad (19)$$

Siguiendo el hilo conductor de la paradoja, a continuación se procede a efectuar una última medida, que nos lleve a quedarnos con aquella que conduzca a un estado final (poseleccionado) dado por,

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle). \quad (20)$$

Para entender por qué se produce la paradoja, vamos a introducir una base de estados finales, que denotaremos $\{|f\rangle, |f'\rangle, |f''\rangle\}$, de la que nuestro vector poseleccionado, $|f\rangle$, forma parte. Para completarla introducimos, por ejemplo, los vectores ortogonales

$$|f'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle), \quad (21)$$

$$|f''\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1\rangle + |2\rangle + 2|3\rangle). \quad (22)$$

Si ahora uno escribe los posibles vectores resultantes de la medida del operador \hat{P}_1 , dados en (18) y (19), en función de los vectores de esta nueva base, lo que obtenemos es

$$|\Psi_{si}\rangle = |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|f\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|f'\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|f''\rangle, \quad (23)$$

y

$$|\Psi_{no}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle) = -\frac{1}{2}|f'\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|f''\rangle. \quad (24)$$

Como puede observarse, el estado $|\Psi_{no}\rangle$ no tiene componente en $|f\rangle$; si dicho vector $|\Psi_{no}\rangle$, hubiese sido el estado que hubiéramos obtenido al medir el proyector \hat{P}_1 , es decir, al abrir la caja número uno, hubiese sido imposible llegar en una siguiente medida al estado final $|f\rangle$, que es el poseleccionado. De manera que, si se ha llegado a dicho estado final, cuando en un instante intermedio se abrió la caja número uno, necesariamente se tuvo que haber encontrado allí la partícula, para que el estado inmediatamente después de esa medida viniese dado por $|\Psi_{si}\rangle$ y, por tanto, el solape con el estado final sea diferente de cero. Resumiendo: no es posible no encontrar a la partícula al abrir la caja uno y que, a continuación, una medida te lleve al estado final, $|f\rangle$, poseleccionado.

Si uno parte ahora de nuevo del estado inicial preseleccionado, $|s\rangle$, y en lugar de “mirar” en la caja 1, uno “mira” en la caja 2, realizando unos cálculos análogos a los realizados para el caso en el que la caja 1 era abierta, llegaremos exactamente a la misma conclusión. Es decir, si el estado obtenido después de realizar la medida de \hat{P}_2 , es el asociado a no haber encontrado allí la partícula, éste no tendrá solape con el estado final que hemos decidido poseleccionar y, por tanto, nunca podríamos llegar a él. ¿Cómo se disuelve, por tanto, la paradoja? En el análisis que hemos realizado, para alcanzar el estado final deseado, hemos considerado dos colectivos cada uno de los cuales posee una partícula preparada en el mismo estado inicial, $|s\rangle$, pero sobre los que se han realizado distintas medidas intermedias: en el primer colectivo sólo abrimos la caja 1 para chequear la presencia, o no, de la partícula. Como cada vez, una y sólo una de las cajas es abierta, podemos concluir con absoluta seguridad, que las probabilidades obtenidas sobre la presencia de la partícula en medidas intermedias, pueden ser entendidas sin la necesidad de interpretarlas en base a que “la partícula se encontraba, *en algún sentido*, en dos cajas simultáneamente”, más allá, eso sí, de la interpretación trivial de que su función de onda, posee soporte finito en cada una de las tres cajas. Son las condiciones de interferencia de la función de onda después de la medida intermedia, $|\Psi_{no}\rangle$, con el estado final poseleccionado, $|f\rangle$,

$$\langle f|\Psi_{no}\rangle = 0, \quad (25)$$

y una sobreinterpretación de la teoría cuántica, asignando a un solo sistema probabilidades asociadas a diferentes colectivos, las que conducen a calificar esta situación de paradójica.

2.4. Generalización de la paradoja para $N \geq 3$

Con la mente puesta en lo que hemos explicado en las secciones anteriores, podemos ahora generalizar esta situación para el caso en el que contamos con un número $N \geq 3$ de cajas. Comenzaremos definiendo nuestro estado inicial normalizado, $|s\rangle$, usando $N \geq 3$ componentes ortogonales distintas de cero. Construiremos entonces el estado poseleccionado correspondiente, $|f\rangle$, de tal manera que las predicciones estadísticas para cada una de las medidas intermedias consideradas en el problema sean exactamente las mismas, cuando la poselección ha sido exitosa, que aquellas obtenidas por Aharonov y Vaidman para la pareja de estados (8) y (9).

Cabe señalar, para ser rigurosos, que si denotamos como $|i\rangle \equiv |\psi_i\rangle$ el estado de la partícula cuando ésta se encuentra en la caja i , cuando los soportes espaciales de las funciones de onda, $\psi_i(x) \equiv \langle x|\psi_i\rangle$, son mutuamente disjuntas, encontrar la partícula en el estado $|j\rangle$ se puede identificar con encontrarla en algún lugar de la caja j definida por el soporte espacial $\psi_j(x)$. Así mismo, como en el caso de las tres cajas, vamos a suponer que la evolución temporal es despreciable para $[t_{in}, t - 0^+]$ y $[t + 0^+, t_f]$. Comprobaremos que, siempre que la poselección sea satisfactoria, vamos a encontrar a la partícula en la caja j -ésima con absoluta certeza, excepto para $j = N$, siempre que dicha caja sea observada.

Considérese el estado inicial normalizado a tiempo t_i , definido por:

$$|s\rangle = d_{in}^{-1} \sum_{i=1}^N c_i |i\rangle, \quad (26)$$

donde $d_{in} = [\sum_{i=1}^N |c_i|^2]^{1/2}$, es la constante de normalización.

Es importante destacar que estamos considerando N colectivos de los cuales cada uno posee una partícula preparada en el mismo estado inicial, $|s\rangle$, de manera que sobre cada colectivo se realizarán distintas medidas intermedias. Esto es crucial, como ya vimos en el caso de las tres cajas, para desmontar la pretendida situación paradójica.

El proyector \hat{P}_j tiene asociados 2 autovalores que son $P_j = 1$, que corresponde a encontrar la partícula tras abrir la caja j , y el autovalor $P_j = 0$, que equivale a no encontrar la partícula cuando la caja j es abierta. Dependiendo del resultado obtenido en la medida del operador, el estado del sistema inmediatamente después de realizada dicha medida vendrá dado por estados diferentes. Si medimos el proyector $\hat{P}_j = |j\rangle\langle j|$, la probabilidad de obtener el valor propio $P_j = 1$, vendrá dada por

$$\mathcal{P}(P_j = 1|s) = |\langle j|s\rangle|^2 = |\langle j|d_{in}^{-1} \sum_{i=1}^N c_i |i\rangle|^2 = d_{in}^{-2} |c_j|^2 \quad (27)$$

y si, efectivamente, ese es el resultado de la medida, el sistema colapsará al estado:

$$|s_j\rangle = |j\rangle. \quad (28)$$

De mismo modo, se puede calcular la probabilidad asociada al autovalor $P_j = 0$, que vendrá dada por

$$\mathcal{P}(P_j = 0|s) = |(\hat{1} - \hat{P}_j)|s\rangle|^2 = \left| \sum_{i=1, i \neq j}^N \langle i|d_{in}^{-1} \sum_{i=1}^N c_i |i\rangle \right|^2 = d_{in}^{-2} \sum_{i=1, i \neq j}^N |c_i|^2 = d_{in}^{-2} d_{no j}^2, \quad (29)$$

donde $d_{noj} = [\sum_{i=1; i \neq j}^N |c_i|^2]^{1/2}$. Por tanto, si al abrir la caja j -ésima no encontramos a la partícula en su interior, nuestro estado inicial colapsará a

$$|s_{noj}\rangle = d_{noj}^{-1} \sum_{i=1; i \neq j}^N c_i |i\rangle . \quad (30)$$

Como dijimos anteriormente, vamos ahora a intentar obtener el estado final imponiendo las condiciones necesarias para que sea imposible que se de la situación de que, tras haber abierto la caja j y no haber encontrado allí a la partícula, el sistema pueda alcanzar dicho estado final (véase la condición (25) y la discusión al respecto).

En el instante final, t_f , se realiza una medida del estado de cada miembro del colectivo j -ésimo en una determinada base ortonormal, que denotaremos como $\{|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, \dots, |\Phi_N\rangle\}$. Supongamos, además, que queremos que $|\Phi_1\rangle$ sea nuestro estado poseleccionado deseado, $|f\rangle$.

Nos interesa el caso en el que el estado final es tal que, cuando la poselección tuvo éxito, se sabe con certeza que el sistema se había encontrado en el estado $|j\rangle$ en el tiempo t intermedio, que equivale a encontrar la partícula en esa caja. Evidentemente, este será el caso, sí y sólo sí, la probabilidad de obtener un valor propio $P_f = 1$ cuando el estado viene caracterizado por el vector propio $|s_{noj}\rangle$, es igual a cero, es decir, cuando

$$\mathcal{P}(P_f = 1, f | s_{noj}) = |\langle f | s_{noj} \rangle|^2 = 0 , \quad (31)$$

donde $P_f = 1$ es uno de los dos autovalores asociados al proyector $\hat{P}_f = |f\rangle\langle f|$. Tal y como explicamos en el caso de las tres cajas, en este caso es imposible no encontrar la partícula al abrir la caja j y que, a continuación, una medida nos lleve al estado final $|f\rangle$, poseleccionado (véanse las ecuaciones (23) y (24)). Por tanto, como queremos que esta situación se cumpla para cada una de las cajas de los primeros $N - 1$ colectivos de los que disponemos, la condición necesaria para construir el estado final será que:

$$\langle f | s_{noj} \rangle = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (32)$$

No nos cansaremos de insistir en que esta condición, al igual que la (25), es imprescindible para asegurarnos de que no habrá confusión a la hora de interpretar los resultados obtenidos, asignando a un solo sistema, probabilidades asociadas a diferentes colectivos.

Teniendo en cuenta las condiciones destructivas, que a la postre constituyen la esencia de la paradoja de las N -cajas, podemos construir el estado final deseado para este problema. Para ello vamos a sustituir la expresión general del estado final,

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^N f_i |i\rangle , \quad (33)$$

en la condición (32). Como resultado obtenemos:

$$\langle s_{noj} | f \rangle = d_{noj}^{-1*} \sum_{i=1; i \neq j}^N c_i^* \langle i | \sum_{i=1}^N f_i |i\rangle = 0 , \quad (34)$$

Esto nos conduce a que,

$$\sum_{i=1; i \neq j}^N c_i^* f_i = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (35)$$

de donde eligiendo cualquier $j > 1$, y comparando con $j = 1$, obtenemos:

$$c_j^* f_j = c_1 f_1 \rightarrow f_j = \frac{c_1^* f_1}{c_j^*}. \quad (36)$$

A continuación tomamos todos los valores de la suma indicada en (35) y en ésta sustituimos (36). De este modo llegamos a,

$$\sum_{i=1; i \neq j}^N c_i^* f_i = c_1^* f_1 + c_2^* f_2 + \dots + c_N^* f_N = 0, \quad (37)$$

de donde

$$f_N = -(N-2) \frac{c_1^* f_1}{c_N^*}. \quad (38)$$

Para llegar a nuestro estado final deseado, vamos ahora a sustituir (35) y (38) en (33), de manera que:

$$|f\rangle = c_1^* f_1 \left(\frac{|1\rangle}{c_1^*} + \dots + \frac{|N-1\rangle}{c_{N-1}^*} - (N-2) \frac{|N\rangle}{c_N^*} \right). \quad (39)$$

Por último, si escribimos las constantes c_1 y f_1 como

$$c_1 = |c_1| e^{i\Theta_{c_1}} \quad \text{y} \quad f_1 = |f_1| e^{i\Theta_{f_1}}, \quad (40)$$

y despreciamos la fase global $e^{i(\Theta_{f_1} - \Theta_{c_1})}$ y normalizamos, obtenemos el estado final deseado,

$$|f\rangle = d_f^{-1} (c_1 |c_1|^{-2} |1\rangle + \dots + c_{N-1} |c_{N-1}|^{-2} |N-1\rangle - (N-2) c_N |c_N|^{-2} |N\rangle), \quad (41)$$

de tal manera que cumple todas las condiciones necesarias para que la poselección sea exitosa. En esta última expresión,

$$d_f = \left(\frac{1}{|c_1|^2} + \dots + \frac{N-1}{|c_{N-1}|^2} + \frac{(N-2)^2}{|c_N|^2} \right). \quad (42)$$

Se puede comprobar fácilmente que el estado obtenido satisface la condición (32). Por completar todo el catálogo de posibilidades, también es sencillo demostrar que:

$$\langle s_j | f \rangle = d_f^{-1} c_j |c_j|^{-2} \neq 0 \quad \text{para } (j = 1, \dots, N-1), \quad (43)$$

$$\langle s_N | f \rangle = -d_f^{-1} (N-2) c_N |c_N|^{-2} \neq 0, \quad (44)$$

$$\langle s_{no_N} | f \rangle = d_f^{-1} d_{no_N}^{-1} (N-1) \quad \text{donde} \quad d_{no_N}^{-1} = \sum_{i=1}^{N-1} c_i |c_i|^{-2} (N-1). \quad (45)$$

Nos encontramos ahora en condiciones de comprobar que para $j \neq N$ la probabilidad es efectivamente, la unidad, siempre que la medida intermedia del observable

asociado con el proyector $|j\rangle\langle j|$, dé como resultado el valor propio 1 cuando la selección sea la deseada, es decir, siempre que el estado final sea el $|f\rangle \equiv |\phi_1\rangle$. De acuerdo con la regla ABL, esta probabilidad vendrá dada por

$$\mathcal{P}(P_j = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_j|s\rangle|^2}{|\langle f|\hat{P}_j|s\rangle|^2 + |\langle f|(\hat{1} - \hat{P}_j)|s\rangle|^2}. \quad (46)$$

Ahora bien,

$$|\langle f|\hat{P}_j|s\rangle| = d_f^{-1}d_{in}^{-1}, \quad (47)$$

y

$$|\langle f|(\hat{1} - \hat{P}_j)|s\rangle| = d_{in}^{-1}d_f^{-1}(N - 2) - d_{in}^{-1}d_f^{-1}(N - 2) = 0 \quad (48)$$

para $j \neq N$.

Sustituyendo estos resultados en (46), y en la correspondiente regla para $P_j = 0$, obtenemos que las probabilidades correspondientes son:

$$\mathcal{P}(P_j = 1/|s\rangle, |f\rangle) = 1, \quad (49)$$

y

$$\mathcal{P}(P_j = 0/|s\rangle, |f\rangle) = 0, \quad (50)$$

ambos para $j = 1, \dots, N - 1$

Asimismo, se podría calcular la probabilidad de haber encontrado o no la partícula en la caja N , considerando los autovalores $P_N = 1$ y $P_N = 0$ asociados al proyector $\hat{P}_N = |N\rangle\langle N|$. En este caso, aplicando de nuevo la regla ABL:

$$\mathcal{P}(P_N = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_N|s\rangle|^2}{|\langle f|\hat{P}_N|s\rangle|^2 + |\langle f|(\hat{1} - \hat{P}_N)|s\rangle|^2}, \quad (51)$$

con

$$|\langle f|\hat{P}_N|s\rangle| = d_f^{-1}d_{in}^{-1}(N - 2), \quad (52)$$

y

$$|\langle f|(\hat{1} - \hat{P}_N)|s\rangle| = d_{in}^{-1}d_f^{-1}(N - 1). \quad (53)$$

Sustituyendo estos resultados en (50) y realizando el mismo procedimiento para $P_N = 0$ las probabilidades correspondientes se escriben como:

$$\mathcal{P}(P_N = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{(N - 2)^2}{(N - 2)^2 + (N - 1)^2}, \quad (54)$$

$$\mathcal{P}(P_N = 0/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{(N - 1)^2}{(N - 2)^2 + (N - 1)^2}. \quad (55)$$

Al igual que la discusión que escribimos en el caso de las tres cajas, ahora también hay que tener en cuenta que, al realizar el experimento de las N cajas hemos considerado N colectivos, de los cuales cada uno dispone de una sola partícula preparada en el mismo estado inicial, $|s\rangle$, pero sobre los que se han realizado distintas medidas intermedias. Como cada vez una, y sólo una caja es abierta para comprobar la presencia de la partícula, podemos deducir con certeza absoluta que las probabilidades obtenidas al realizar las medidas intermedias se pueden entender sin la necesidad de pretender que ninguna partícula se encuentre, “en algún sentido”, en dos o más cajas a la vez. Por tanto, con este simple análisis se pueden disipar los aspectos paradójicos que muchos autores atribuyen al problema de las tres cajas, y

que se han presentado como otro ejemplo más de la “extrañeza” que a veces aparece en el comportamiento de los sistemas cuánticos. En realidad, lo que aquí subyace son meras manifestaciones típicas provenientes de los efectos de interferencia.

2.5. Otra paradoja de N cajas

En esta sección consideraremos otro problema que involucra N cajas. Vamos a preguntarnos si la siguiente situación es posible para un determinado estado convenientemente poseleccionado: para $j = 1, 2, 3, \dots, N$ nos planteamos si es posible detectar con certeza la presencia de la partícula para j impar, y no encontrarla para j par, cuando las j primeras cajas son abiertas a la vez. Obviamente, en este caso N debe ser un número impar ya que, si todas las cajas son abiertas como un todo, la partícula tiene que ser, necesariamente, encontrada.

Consideremos, por tanto, nuestro estado inicial como el dado por (26) pero para el caso especial en el que N es impar. Para obtener el estado final vamos a considerar 2 casos diferentes, para $N = 3$ y luego para $N = 5$ y, a continuación, lo generalizaremos.

Para el caso de $N = 3$ buscamos un estado final que nos proporcione unos resultados como los de la figura 4.

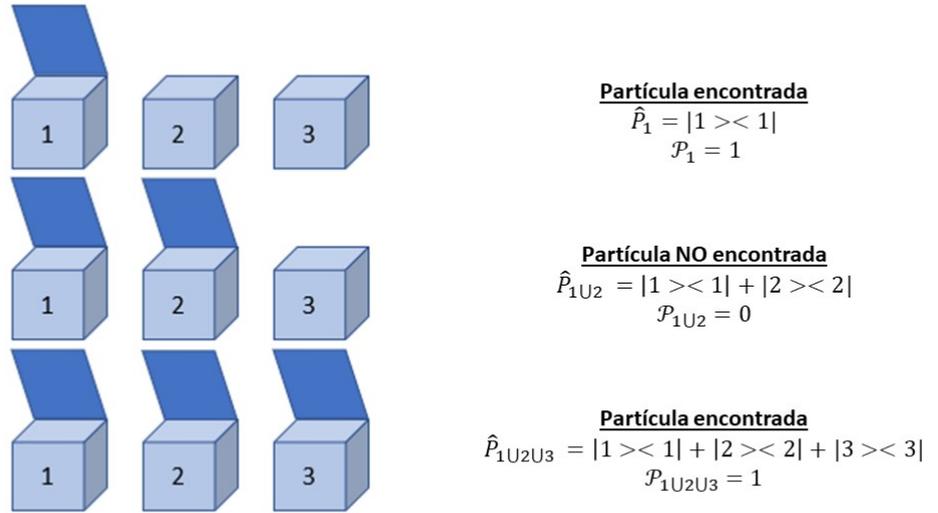


Figura 4: Otro problema de N cajas. Caso $N=3$, con sus proyectores y probabilidades de encontrar la partícula correspondientes.

De acuerdo con la regla ABL, la probabilidad de encontrar la partícula en la primera caja cuando sólo abrimos esta, viene dada por,

$$\mathcal{P}(P_1 = 1|s, |f\rangle) = \frac{|\langle f|\hat{P}_1|s\rangle|^2}{|\langle f|\hat{P}_1|s\rangle|^2 + |\langle f|\hat{1} - \hat{P}_1|s\rangle|^2}, \quad (56)$$

y queremos que esta probabilidad sea igual a 1. Para que esto sea así, debe cumplirse que $\langle f|\hat{1} - \hat{P}_1|s\rangle = 0$. Teniendo en cuenta que $\hat{1} - \hat{P}_1 = |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|$, y que el estado

final deseado se escribe igual que en la expresión (33), se observa que ha de verificarse que

$$\langle f | \hat{1} - \hat{P}_1 | s \rangle = d_{in}^{-1} (f_2^* c_2 + f_3^* c_3) = 0, \quad (57)$$

y esto sucede sí y sólo sí,

$$f_2^* c_2 + f_3^* c_3 = 0 \rightarrow -f_2^* c_2 = f_3^* c_3. \quad (58)$$

Ahora queremos que cuando abramos las cajas 2 y 3 simultáneamente, la probabilidad de encontrar la partícula sea cero. Esta probabilidad, de acuerdo de nuevo con la regla ABL, se escribe como,

$$\mathcal{P}(P_{1\cup 2} = 0 | s, |f\rangle) = \frac{|\langle f | \hat{P}_{1\cup 2} | s \rangle|^2}{|\langle f | \hat{P}_{1\cup 2} | s \rangle|^2 + |\langle f | \hat{1} - \hat{P}_{1\cup 2} | s \rangle|^2} = 0. \quad (59)$$

En este caso, la condición necesaria para que se dé este resultado es que $\langle f | \hat{P}_{1\cup 2} | s \rangle = 0$, con lo que ha de cumplirse que

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{P}_{1\cup 2} | s \rangle &= d_{in}^{-1} (f_1^* c_1 + f_2^* c_2) = 0 \Leftrightarrow \\ f_1^* c_1 + f_2^* c_2 &= 0 \rightarrow -f_2^* c_2 = f_1^* c_1 \Leftrightarrow \\ f_1^* c_1 &= -f_2^* c_2 = f_3^* c_3. \end{aligned} \quad (60)$$

Una manera de que se cumpla lo anterior es que

$$f_i^* c_i = 1 \rightarrow f_i^* = \frac{c_i^*}{|c_i|^2} \rightarrow f_i = \frac{c_i}{|c_i|^2}, \quad (61)$$

por lo que nuestro estado final, para que en el caso de $N=3$ se verifique lo planteado en la figura 4, debe tomar la siguiente forma

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^3 f_i |i\rangle = f_1 |1\rangle + f_2 |2\rangle + f_3 |3\rangle. \quad (62)$$

Normalizando este estado, es decir, imponiendo que $f_1^* f_1 + f_2^* f_2 + f_3^* f_3 = 1$ y sustituyendo los valores de la ecuación (61), se obtiene como factor de normalización, $d_f = (|c_1|^{-2} + |c_2|^{-2} + |c_3|^{-2})^{1/2}$, por lo que el estado final ya normalizado para el caso de $N = 3$ quedará,

$$|f\rangle = d_f^{-1} (c_1 |c_1|^{-2} |1\rangle - c_2 |c_2|^{-2} |2\rangle + c_3 |c_3|^{-2} |3\rangle). \quad (63)$$

Por ejemplo si el estado inicial viene dado por (8), entonces, según los cálculos realizados, el estado final en este caso tendría la forma

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle]. \quad (64)$$

Para confirmar que efectivamente el estado final que hemos encontrado cumple con los objetivos del caso, vamos a comprobar las probabilidades de encontrar la partícula tras abrir, en primer lugar una sola caja (la número 1), luego al abrir las dos primeras cajas, y finalmente la probabilidad de encontrar la partícula cuando las 3 cajas están abiertas.

La probabilidad de encontrar la partícula cuando la caja 1 es abierta:

$$\mathcal{P}(P_1 = 1) = \frac{|\langle f | \hat{P}_1 | s \rangle|^2}{|\langle f | \hat{P}_1 | s \rangle|^2 + |\langle f | (\hat{1} - \hat{P}_1) | s \rangle|^2} = \frac{|\frac{1}{3}|^2}{|\frac{1}{3}|^2 + |0|^2} = 1. \quad (65)$$

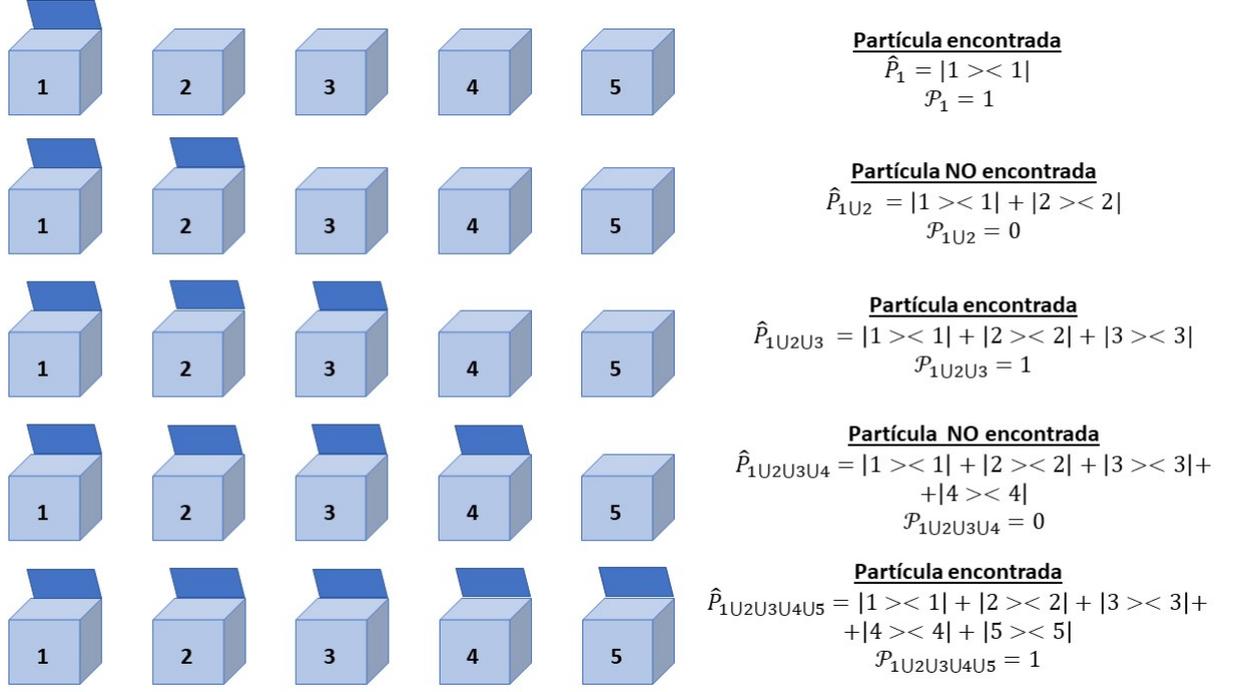


Figura 5: Otro problema de N cajas. Caso $N=5$, con sus proyectores y probabilidades de encontrar la partícula correspondientes.

La probabilidad de que podamos encontrar la partícula cuando las dos primeras cajas están abiertas

$$\mathcal{P}(P_{1U2} = 1) = \frac{|\langle f | \hat{P}_{1U2} | s \rangle|^2}{|\langle f | \hat{P}_{1U2} | s \rangle|^2 + |\langle f | (\hat{1} - \hat{P}_{1U2}) | s \rangle|^2} = \frac{|0|^2}{|0|^2 + |\frac{1}{3}|^2} = 0. \quad (66)$$

Y finalmente, la probabilidad de encontrar la partícula cuando abrimos todas las cajas es

$$\mathcal{P}(P_{1U2U3} = 1) = \frac{|\langle f | \hat{P}_{1U2U3} | s \rangle|^2}{|\langle f | \hat{P}_{1U2U3} | s \rangle|^2 + |\langle f | (\hat{1} - \hat{P}_{1U2U3}) | s \rangle|^2} = \frac{|\frac{1}{3}|^2}{|\frac{1}{3}|^2 + |0|^2} = 1. \quad (67)$$

De esta manera hemos comprobado que el estado final cumple con los objetivos del caso.

Un razonamiento análogo, pero ahora para $N = 5$ (ver figura 5), nos lleva a la conclusión de que el estado final ha de elegirse como

$$|f\rangle = d_f^{-1} (c_1 |c_1|^{-2} |1\rangle - c_2 |c_2|^{-2} |2\rangle + c_3 |c_3|^{-2} |3\rangle - c_4 |c_4|^{-2} |4\rangle + c_5 |c_5|^{-2} |5\rangle), \quad (68)$$

con el factor de normalización $d_f = (|c_1|^{-2} + |c_2|^{-2} + |c_3|^{-2} + |c_4|^{-2} + |c_5|^{-2})^{1/2}$, y verificando que,

$$f_1^* c_1 = -f_2^* c_2 = f_3^* c_3 = -f_4^* c_4 = f_5^* c_5. \quad (69)$$

Es decir, cuando los estados pre y poseleccionados son:

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}[|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle + |5\rangle], \quad (70)$$

y

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}[|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle - |4\rangle + |5\rangle], \quad (71)$$

las probabilidades de encontrar la partícula tras abrir un número impar de cajas es 1, y la probabilidad de encontrarla cuando el número de cajas abiertas es par, es 0:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(P_1 = 1) &= \mathcal{P}(P_{1\cup 2\cup 3} = 1) = \mathcal{P}(P_{1\cup 2\cup 3\cup 4\cup 5} = 1) = 1; \\ \mathcal{P}(P_{1\cup 2} = 1) &= \mathcal{P}(P_{1\cup 2\cup 3\cup 4} = 1) = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Con estos ejemplos, resulta sencillo adivinar que la expresión del estado final poseleccionado, de manera que se cumplan las predicciones que aparecen en la figura (4), en el caso de tener N cajas, viene dado por:

$$|f\rangle = d_f^{-1} \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} c_i |c_i|^{-2} |i\rangle, \quad (73)$$

con el factor de normalización, $d_f = (|c_1|^{-2} + |c_2|^{-2} + \dots + |c_N|^{-2})^{1/2}$.

En el problema planteado por Aharonov y Vaidman, nos encontrábamos con la aparente paradoja de que una partícula podía encontrarse, “en algún sentido”, en $N - 1$ lugares al mismo tiempo. Ellos se referían, obviamente, a algo más que el trivial e indiscutible hecho de que la función de onda que describía el estado inicial preseleccionado del sistema poseía soporte distinto de cero en cada una de las N cajas. Si adaptamos ese esquema de razonamiento al caso que hemos estudiado ahora, podríamos llegar a la extraña conclusión de que nuestra partícula se encuentra, “en algún sentido”, simultáneamente en la caja 1, y no en las cajas 1 y 2, y sí en las cajas 1, 2 y 3, etc [17]. En este caso ni siquiera tiene sentido hablar del significado trivial que posee el estado inicial, ya que decir que la función de onda de dicho estado tiene soporte distinto de cero en la caja 1 y, simultáneamente, soporte cero en las cajas 1 y 2 (consideradas como una sóla), no tiene ningún sentido matemático. Sin embargo, no existe nada paradójico en que

$$\mathcal{P}(P_{1\cup\dots\cup j} = 1 | s, |f\rangle) = 1 \quad \text{para } j \text{ impar} \quad (74)$$

y

$$\mathcal{P}(P_{1\cup\dots\cup j} = 0 | s, |f\rangle) = 0 \quad \text{para } j \text{ par}. \quad (75)$$

Estas probabilidades fueron obtenidas, simplemente, eligiendo los coeficientes en (73) para que se den las condiciones absolutamente destructivas caracterizadas por

$$\langle f | (\hat{1} - \hat{P}_{1\cup\dots\cup j}) | s \rangle = 0 \quad \text{para } j \text{ impar} \quad (76)$$

y

$$\langle f | \hat{P}_{1\cup\dots\cup j} | s \rangle = 0 \quad \text{para } j \text{ par} \quad (77)$$

que producen, obviamente, el resultado deseado.

Para completar el estudio, y por comparar con el caso planteado por Aharonov y Vaidman, vamos a calcular la probabilidad de encontrar la partícula en la caja j ,

cuando solamente ésta fue abierta para comprobar la presencia, o no, de la partícula. Aplicando la regla ABL,

$$\mathcal{P}(P_j = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{|\langle s|\hat{P}_j|f\rangle|^2}{|\langle s|\hat{P}_j|f\rangle|^2 + |\langle s|\hat{1} - \hat{P}_j|f\rangle|^2}, \quad (78)$$

donde $\hat{P}_j = |j\rangle\langle j|$ es el operador asociado al abrir la caja j y $(\hat{1} - \hat{P}_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^N |i\rangle\langle i|$. Realizando los cálculos necesarios se llega a que esta probabilidad viene dada por,

$$\mathcal{P}(P_j = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{1}{1 + |\sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+1}|^2}. \quad (79)$$

En esta ecuación podemos observar que el sumatorio, $|\sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+1}|^2$, que aparece en el denominador, es 0 para los j impares y es 4 para los j pares. Por tanto, podemos reescribirlo como $\sum_{i=1, i \neq j}^N (-1)^{i+1} = 1 - (-1)^{j+1}$, con lo que la probabilidad, finalmente, queda

$$\mathcal{P}(P_j = 1/|s\rangle, |f\rangle) = \frac{1}{1 + [1 - (-1)^{j+1}]^2}. \quad (80)$$

Concluimos que la partícula es encontrada con absoluta certeza cuando una caja con etiqueta impar es abierta, y con una probabilidad de $1/5$ cuando la que abrimos está numerada como par.

2.6. Experimento de Young con 3 rendijas como analogía del sistema de las 3 cajas

A cualquiera que lea lo que hasta aquí hemos expuesto, referido a la posibilidad de encontrar una partícula dentro de una caja u otra, podría parecerle algo oscuro y difícil de entender. Los estados pre y poseleccionados que hemos elegido para plantear la paradoja, así como la propia situación planteada, se pueden comprender mejor si los explicamos en términos de un experimento de difracción atómica en el que un chorro de átomos se hace pasar a través de un sistema de tres rendijas [11]. Expresado en estos términos, el comportamiento de las partículas en el problema de las tres cajas resulta tan ordinario como el experimento de Young de la doble rendija, si es que podemos considerar como “ordinario” los resultados de dicho experimento.

Consideremos pues un sistema, tal y como se muestra en la figura 6, en el que disponemos de tres rendijas separadas entre sí por una distancia a .

Las rendijas superior e inferior las etiquetamos como rendijas 1 y 2, y la del medio como la rendija número 3. Un detector D es colocado a una distancia L justo enfrente de la rendija número 3, de manera que $\sqrt{L^2 + a^2} - L = \lambda/2$, siendo λ la longitud de onda asociada a cada partícula que será enviada a través de este sistema. Colocamos ahora otro detector d en las inmediaciones de la rendija 1 o 2. Los estados inicial y final del sistema que queremos describir, son exactamente aquellos que consideramos como pre y poseleccionados en el caso del problema de las tres cajas, esto es, los estados (8) y (9), es decir,

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle), \quad (81)$$

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle). \quad (82)$$

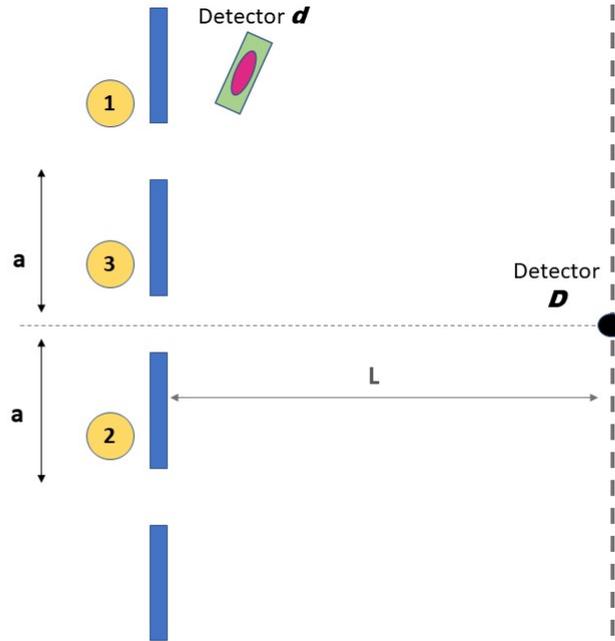


Figura 6: *El experimento de Young de las 3 rendijas.*

El estado inicial, (81), se puede entender como una combinación lineal de la posibilidad que tiene la partícula de pasar por cada una de las tres rendijas, pesada con la misma probabilidad. En el estado final poseleccionado, (82), $|1\rangle$ y $|2\rangle$ llevan el mismo signo porque el camino desde las rendijas 1 o 2 al detector D , es el mismo. El estado $|3\rangle$ lleva signo negativo para distinguir un camino diferente que puede interferir destructivamente con los asociados a 1 y 2.

Este sistema se comporta exactamente igual al descrito en secciones anteriores. Si colocamos el detector d en un entorno de la rendija número 1, cualquier detección que tenga lugar en D lo hará en coincidencia con una detección previa en d , implicando que la partícula ha pasado por la rendija 1; análogamente, si d es situado en un entorno de la rendija 2, una detección en D lo hará en coincidencia con una detección previa en d , implicando que la partícula ha pasado por la rendija 2. Este comportamiento se puede explicar de forma sencilla: colocar el detector d cerca de la rendija 1 crea la siguiente disyuntiva: *o la partícula ha pasado a través de la rendija número 1, o ha pasado a través de “la doble rendija” 2 y 3*; pero claro, si la partícula pasa a través de la doble rendija 2 y 3, como su función de onda interfiere destructivamente en el punto donde hemos colocado el detector D , la segunda opción de nuestra disyuntiva debe ser falsa y, por consiguiente, la primera debe ser verdadera, esto es, la partícula tiene que haber pasado por la rendija 1. Dicho de otra manera, al detector D no puede llegar nada que haya “pasado” por el aparato de doble rendija 2 y 3, de manera que un clic en dicho detector tiene que venir precedido, con toda certeza, por otro en el detector d (figura 7).

Como el aparato está construido simétricamente para las rendijas 1 y 2 nos encontramos nuevamente con la “paradoja” planteada por Aharonov y Vaidman usando su modelo de cajas. Las tres rendijas se corresponden con las tres cajas; el detector d situado en la rendija 1 o 2, se asocia con la apertura de la caja 1 o 2 de forma individual. Pero visto de esta manera, la pretendida “paradoja” se reduce a un típico fenómeno de interferencia destructiva característico de un experimento de

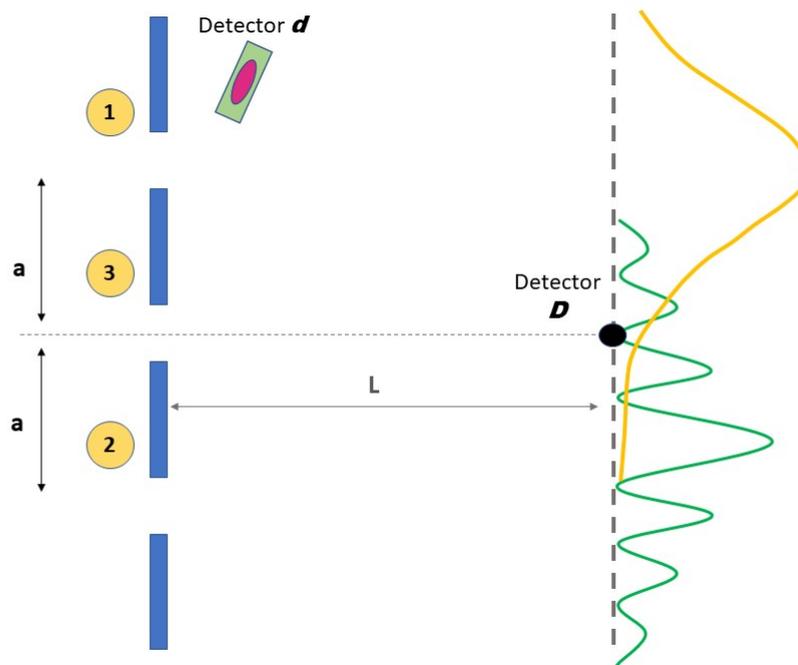


Figura 7: El experimento de Young de las 3 rendijas, con posibles patrones de interferencia (verde) en el caso de la doble rendija (el conjunto de las rendijas 2 y 3), y no interferencia (amarillo) para el caso de la rendija 1.

Young de la doble rendija. Al final, como bien decía Richard Feynman “*double slit experiment captures the essence of all quantum interference phenomena*” [18].

2.7. Una analogía clásica.

Ya que hemos reducido nuestro original problema de las tres cajas a otro, más comprensible, de tres rendijas, uno podría plantearse ir un poco más lejos e intentar comprobar si, clásicamente, existe algún tipo de sistema o mecanismo que me lleve a las mismas conclusiones que el caso cuántico. Son varios los autores que se han planteado esta posible analogía [11, 12, 17, 19], y nosotros haremos lo propio [20].

Para no complicar mucho la cosa, vamos a imaginar una situación en la que, en lugar de tener tres cajas, vamos a contar con sólo dos de ellas. Esto no supone pérdida de información puesto que en el caso cuántico, en primer lugar, después de la medida intermedia, sólo tenemos dos posibilidades, a saber, encontrar o no la partícula en la caja que se ha decidido abrir. Y en segundo lugar, como al final sólo se abre una caja, podemos jugar con un montaje como el representado en la figura 8.

Consideremos que, inicialmente, tenemos una bola en la caja i . Dicha bola puede rodar por cualquiera de los dos tubos hasta una de las dos cajas, etiquetadas como 1 y 2, con la misma probabilidad $P^{1\leftarrow i} = P^{2\leftarrow i} = 1/2$. Una vez llegada la bola a una de estas dos cajas, ésta es aleatoriamente reenviada a cualquiera de las dos posiciones finales, cajas f y g , con una cierta probabilidad que denotaremos por $P^{m\leftarrow n}$, $m = f, g$, $n = 1, 2$ y que podemos elegir a nuestro antojo.

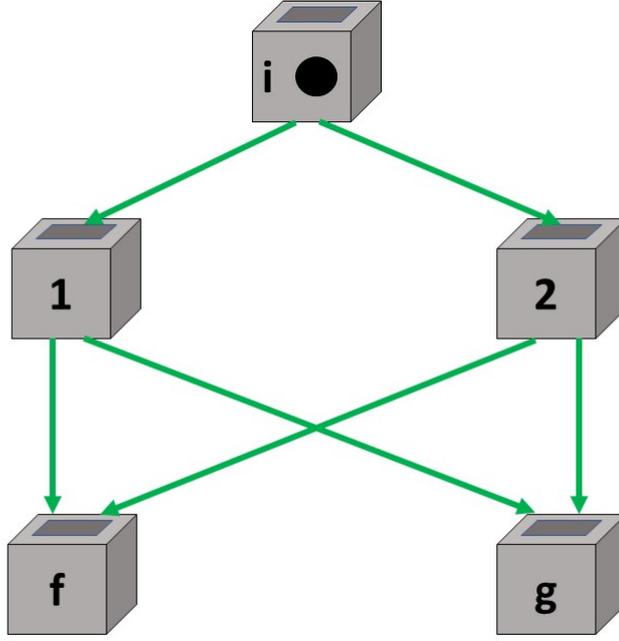


Figura 8: Representación gráfica de un montaje que representa una analogía clásica del problema de las cajas de Aharonov. Las flechas verdes representan los tubos por los cuales una bola se puede desplazar, de una caja a otra.

De esta manera, por ejemplo, los estados i y f estarán conectados por dos rutas diferentes con probabilidades $P_{[1]}^{f \leftarrow i} = P^{f \leftarrow 1} P^{1 \leftarrow i}$ y $P_{[2]}^{f \leftarrow i} = P^{f \leftarrow 2} P^{2 \leftarrow i}$. Análogamente se pueden asociar probabilidades con las dos rutas que puede atravesar la bola para ir desde la casilla i hasta la g .

Ahora, imaginémonos que hay 2 personas, Monika y Sandra, que van a jugar al siguiente juego: cada vez que se suelta la bola de la casilla i , Monika puede comprobar si la pelota se encuentra en alguna de las cajas 1 o 2, y gana si en la caja que abrió no aparece la bola. Luego se sueltan las válvulas de las cajas 1 y 2 y se deja caer la bola a las cajas f o g . En este último instante de la partida, Sandra puede abrir la caja f y, en caso de no encontrar la pelota dentro, entonces se declara nula la partida. En el caso cuántico Sandra ganaba siempre porque, siempre que se llegaba al estado final poseleccionado, f , eso implicaba que al abrir cualquiera de las cajas 1 y 2 teníamos que encontrar en ellas la partícula con absoluta certeza (en otras palabras, era imposible abrir la caja 1 o 2 y no encontrar la partícula, y que luego el sistema alcanzara el estado final f). En palabras de Aharonov diríamos que “la partícula se encontraba en 2 cajas a la vez”.

Resulta muy instructivo ver qué debe hacer uno en el caso clásico para amañar el juego en favor de Sandra. Para engañar a Monika, Sandra necesita que cuando ésta abra alguna de las cajas, la configuración de las probabilidades en las posiciones de las cajas 1 y 2 cambie. Por ejemplo, uno puede imaginar que cada caja se encuentra equipada con un sensor cuya señal establece los valores de las probabilidades $P^{m \leftarrow n}$. Entonces, si ninguna de las cajas intermedias es abierta, es decir, no hay ninguna señal del sensor, entonces si la bola cae en la caja 1 es directamente enviada a la f , y si cae en la caja 2, será redirigida a la caja g , con lo que las probabilidades en este caso quedan

$$P^{f \leftarrow i} = P^{g \leftarrow i} = 1/2, \quad (83)$$

con lo que Monika, si quiere, puede comprobar que el hecho de encontrar la bola en la caja f es, en realidad, un evento aleatorio.

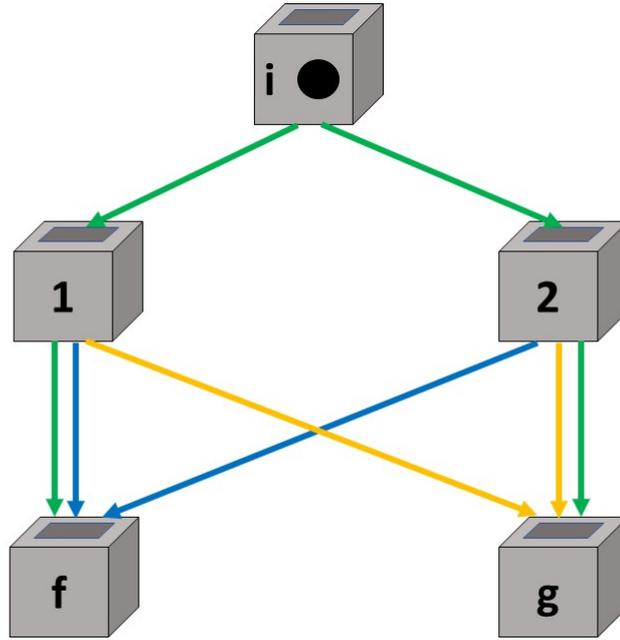


Figura 9: Caso clásico y sus 3 diferentes configuraciones:

- i) No se abre ninguna caja, la pelota cae directamente desde la caja 1 hasta la caja f y desde la 2 hasta la g (flechas verdes)
- ii) Se abre una de las cajas (1 o 2) y no se encuentra la pelota, entonces la bola se dirige desde la caja 1 hasta la g y desde la 2 hasta la g (flechas amarillas)
- iii) Se abre una de las cajas (1 o 2) y la pelota se encuentra en la caja abierta, entonces la pelota cae directamente desde la caja 1 hasta la f y desde la 2 hasta la f (flechas azules).

Sin embargo, si Monika abre una de las dos cajas (1 o 2) y no encuentre la bola en la caja abierta, entonces el sensor cambia las probabilidades y hace que la bola caiga con certeza en la caja g , esto es

$$P^{f \leftarrow i} = 0, \quad P^{g \leftarrow i} = P^{1 \leftarrow i} + P^{2 \leftarrow i} = 1. \quad (84)$$

Al no encontrar la bola en la caja f , Sandra decide declarar nula esa partida. La última opción que queda es cuando Monika abre alguna de las dos cajas (1 o 2) y si encuentra la bola dentro, en cuyo caso la bola es dirigida con certeza a la caja f ,

$$P^{f \leftarrow i} = P^{1 \leftarrow i} + P^{2 \leftarrow i} = 1, \quad P^{g \leftarrow i} = 0, \quad (85)$$

y en este caso, como Sandra encuentra la bola en la caja f , gana la partida.

Está claro, por el estudio que aquí hemos realizado, que Monika cambia la configuración del modelo de la figura 9 en su beneficio. Esto es exactamente lo que ocurre en el caso cuántico, donde, el propio acto de medida crea diferentes configuraciones del sistema. Sin embargo, la única diferencia es que en el caso cuántico eso ocurre por la propia naturaleza del proceso de medida, mientras que en el caso clásico se necesita un equipamiento adicional que nos permita trucar el sistema. Dicho de otra manera, en el caso clásico Monika puede inspeccionar las cajas, descubrir los

mecanismos existentes en su interior y echar en cara a Sandra que la ha estado engañando. En el caso cuántico, lo único que puede hacer es reprocharse a sí misma el no haber asistido a un curso básico de mecánica cuántica.

3. Conclusiones

Abstract

In this last section we will resume the results obtained through the text. We will justify that the conclusions about the paradoxical or curious behaviors presented in this text, are not such if the theory is properly interpreted.

Resumen

En esta última sección vamos a resumir los resultados obtenidos en todo el trabajo. Justificaremos que las conclusiones acerca de los comportamientos paradójicos o curiosos que se presentan, no son tales, si se interpreta convenientemente la teoría.

La llamada “Paradoja de las tres cajas” se refiere a sistemas en los que hay, no sólo preselección del estado en el que se encuentra dicho sistema, sino que también existe poselección. Se trata de hacer predicciones de diferentes propiedades del sistema mediante medidas que se realizan sobre el mismo a tiempo t , intermedio entre el instante inicial t_i , en el que se preselecciona el sistema, y el instante t_f , en el que se realiza la poselección. El objetivo de este trabajo ha sido comprender y analizar el problema, y demostrar que las situaciones “curiosas” o “paradójicas” que presenta, según Aharonov y Vaidman, no son tales si se interpreta convenientemente la teoría. Para ello hemos usado el formalismo estándar de la mecánica cuántica, pues pone de relieve de una manera clara que las paradojas desaparecen si uno se abstiene de hacer predicciones acerca del estado que podría tener un sistema *si se hubiera hecho* una medida sobre el mismo (*contrafactualmente* o *contrafácticamente*), que es la manera en la que Aharonov y Vaidman utilizan la *regla ABL* en sus discusiones. La forma más simple de ilustrar el peligro que se corre cuando se utiliza un razonamiento de tipo contrafactual consiste en aplicarlo al problema de la doble rendija. En este experimento uno puede observar la probabilidad con la que un electrón, caracterizado por un cierto estado inicial (fuente), puede alcanzar una variedad de estados finales (puntos sobre una pantalla), mediante un único “camino” que condensa o aglutina a ambas rendijas, 1 y 2, de manera que se observa finalmente un patrón de interferencia. Observar por qué rendija ha pasado el electrón produce un sistema en el cual cada estado final puede ser alcanzado a través de dos caminos reales (uno a través de cada rendija) con probabilidades asociadas P_1 y P_2 . Esto constituye un sistema diferente al anterior: el patrón de interferencia es destruido, y las probabilidades para llegar al estado final no coinciden con aquellas obtenidas cuando no se observa la rendija elegida por el electrón en su viaje. Responder a la pregunta “¿qué camino?”, asociando las probabilidades P_1 y P_2 al sistema sin observar, constituiría una conclusión contrafactual que, obviamente, sería incorrecta.

También hemos extendido el problema original con 3 cajas al caso de que contemos con N -cajas, partiendo de un estado arbitrario inicial, y derivando el estado final asociado (y único) de manera que reproduzca exactamente las situaciones “curiosas” o “paradójicas” que se plantean en el caso original. En el proceso queda claro que la esencia del problema de las N -cajas es el hecho de satisfacer simultáneamente $N - 1$ condiciones de interferencia destructiva. Una vez más, y desde esta perspectiva, no hay nada paradójico acerca de los “curiosos” resultados obtenidos por Aharonov y Vaidman.

Además, presentamos una variante del problema de las N -cajas con, quizá resultados aún más curiosos que el original: en este caso, la partícula parece aparecer y desaparecer con absoluta certeza según que abramos un número par o impar de cajas en la medida intermedia. De nuevo, las siempre presentes interferencias nos permiten explicar de una manera sencilla y coherente el resultado de esta situación.

Siguiendo esta línea de razonamiento, basada en que todo lo que observamos no es más que un fenómeno de interferencias, planteamos un modelo de experimento de Young con tres rendijas que imita a la perfección el comportamiento y los resultados de la paradoja original de las tres cajas. Con esta analogía parece mucho más simple entender la situación, debido a la familiaridad que tenemos todos con dicho experimento, paradigma de los problemas de la física cuántica en cuanto a su interpretación se refiere.

Finalmente hemos visto cómo es muy fácil trucar un dispositivo clásico para reproducir los resultados del caso cuántico. Sin embargo, en este último, el truco lo proporciona la propia naturaleza del mundo cuántico, mientras que en el primero necesitamos de una cierta maquinaria para reproducir los mismos resultados finales.

En virtud de la observación que hace Finkelstein [21] de que *“la noción de paradoja es, en gran medida, una cuestión de psicología personal”* dejamos al lector que decida por sí mismo si, a todo lo que aquí se ha expuesto en torno a este problema, se le puede asignar la etiqueta de paradójico.

Referencias

- [1] L. Vaidman, *Found. Phys.* **26**, 895-906 (1996).
- [2] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172-198 (1927).
- [3] K. J. Resch, J. S. Lundeen, A. M. Steinberg, *Phys. Lett. A.* **324** 125-131 (2004).
- [4] P. Kolenderski, U. Sinha, L. Youning, T. Zhao, M. Volpini, A. Cabello et al. *arXiv: 1107.5828* (2011).
- [5] R. E. George, L. Robeldo, O. J. E. Maroney, M. S. Blok, H. Bernien, M. L. Merkham et al. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**, 3777 *arXiv:1205.2594* (2013).
- [6] O. Cohen, *Phys. Rev. A*, **51**, 4373 (1995).
- [7] R. E. Kastner, *Philosophy of Science* **70**, 145 (2003).
- [8] W. D. Sharp, N. Shanks, *Phylosophy of Science* **60**, 488 (1993).
- [9] M. S. Leifer, R. W. Spekkens, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 200405 (2005).
- [10] M. S. Leifer, R. W. Spekkens, *International Journal of Theoretical Physics*, **44**, 1977 (2005).
- [11] K. A. Kirkpatrick, *J.Phys. A* **36**, 4891 (2003).
- [12] K. A. Kirkpatrick, *J.Phys. A* **40**, 2883 (2007).
- [13] T. Ravon, L. Vaidman, *J.Phys. A*, **40**, 2873 (2007).
- [14] Bengt E. Y. Svensson, '*Pedagogical Review of Quantum Measurement Theory with an Emphasis on Weak Measurements*' DOI: 10.12743/quanta.v2i1.12
- [15] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, J. Lebovitz, *Phys. Rev.* **134**, B1410 (1964).
- [16] Y. Aharonov, L. Vaidman, in: J. G. Muga, R. Sala Mayato, I. L. Egusquiza (Eds), '*Time in Quantum Mechanics*', Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [17] C. R. Leavens, I. Puerto Gimenez, D. Alonso and R. Sala Mayato, *Phys. Lett. A* **359**, 416 (2006).
- [18] R. P. Feynman, '*The Character of Physical Law*', Modern Library (1994)
- [19] K. A. Kirkpatrick, *Found. Phys. Lett.* **16**, 199 (2003).
- [20] D. Sokolovski, I. Puerto Giménez, R. Sala Mayato, *Phys. Lett. A* **372**, 6578-6583 (2008).
- [21] J. Finkelstein, *quant-ph/0606621v1* (2006).