



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jonathan E. Chirinos Rodríguez

Series de Fourier

Fourier series

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2019

DIRIGIDO POR

Manuel T. Flores Mederos
Lourdes Rodríguez Mesa

Manuel T. Flores Mederos
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Lourdes Rodríguez Mesa
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo recogemos algunos resultados clásicos sobre series de Fourier. Comenzaremos introduciendo el sistema trigonométrico y estableciendo algunas de sus propiedades, como la desigualdad de Bessel. Ato seguido, estudiaremos la convergencia de la serie de Fourier. Esta vendrá recogida en resultados como el teorema de Bernstein o los teoremas de Fejér y Dirichlet-Jordan. Además, veremos que la serie de Fourier aparece a la hora de resolver la ecuación del calor o la ecuación de Laplace, y daremos una prueba de la desigualdad isoperimétrica para curvas planas. Para acabar, mostraremos algunos resultados sobre velocidad de convergencia, la fórmula de sumación de Poisson o el fenómeno de Gibbs.

Abstract

In this memoir we collect several classical results about Fourier series. In order to that, we start introducing the trigonometric system and some of its properties, such as the Bessel inequality. Right after, we study the convergence of the Fourier series. This will be collected in Bernstein's theorem or Fejer and Dirichlet-Jordan theorems. Besides, we will see that some equations, like the heat equation or the Laplace equation, can be solved with Fourier series. Also, we we give a proof of the isoperimetric inequality for plane curves. To finish this work, we will relate the decay of the Fourier coefficients to the speed of convergence of the Fourier series, the Poisson sumation formula or the Gibbs phenomenon.

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Series trigonométricas	1
1.1. El sistema trigonométrico	1
1.2. La desigualdad de Bessel	3
1.3. Teorema de Weierstrass	5
2. Convergencia de la serie de Fourier	9
2.1. Convergencia en L^2	10
2.2. Convergencia puntual	11
2.2.1. El núcleo de Dirichlet	11
2.3. Convergencia uniforme	14
2.4. Otros métodos de sumabilidad	17
3. Aplicaciones	23
3.1. La ecuación del calor	23
3.2. La ecuación de Laplace y el problema de Dirichlet	27
3.3. La desigualdad isoperimétrica	29
3.3.1. Wirtinger vs Rayleigh. Un problema de autovalores asociado a la desigualdad de Wirtinger.	31
A. Apéndice	35
A.1. El lema de Riemann-Lebesgue revisado.	35
A.1.1. El lema de Cantor-Lebesgue.	37
A.2. Decaimiento de los coeficientes de Fourier y regularidad.	38
A.2.1. Funciones suaves.	38
A.2.2. Funciones analíticas.	41
A.3. La fórmula de sumación de Poisson.	43

A.4. El fenómeno de Gibbs-Wilbraham.	45
A.5. Sobre divergencia de la serie de Fourier.	47
A.5.1. Una función continua con serie de Fourier divergente.	49
Bibliografía	51
Poster	53

Introducción

Representar una función como una suma infinita resulta ser una tarea que ha despertado el interés de grandes matemáticos a lo largo de la historia. Dedicaremos este trabajo a estudiar un caso particular de funciones, las periódicas, y un caso particular de desarrollos, en senos y cosenos. Este tipo de representación en series está englobado en lo que se conoce como análisis de Fourier, y resulta ser de gran utilidad en otras muchas ramas de la ciencia, como ingeniería o física.

Para comenzar, introduciremos en el capítulo uno el sistema trigonométrico: $\{e_n(x) = e^{2\pi i n x}, n \in \mathbb{Z}\}$, estableceremos algunas de sus propiedades, como la desigualdad de Bessel, y estudiaremos el concepto de *convolución*. En esta sección, destacará el teorema de Weierstrass, que establece que el conjunto de los polinomios trigonométricos, $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, es denso en el espacio de las funciones continuas y \mathbb{Z} -periódicas con la norma uniforme.

A continuación, estudiaremos la convergencia de la serie de Fourier, hecho que hace de este capítulo el más importante del trabajo. Para comenzar, probaremos el lema de Riemann-Lebesgue, que establece que los coeficientes de Fourier de cualquier función tienden a cero cuando $|n|$ tiende a infinito. Acto seguido, comenzaremos con el estudio la convergencia. Este análisis consistirá, esencialmente, en encontrar qué propiedades deberá tener una función f para que la serie de Fourier asociada converja a f . Entre ellas, veremos que para cualquier función de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, su serie de Fourier converge en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ a dicha función. También, que la suavidad de una función en un punto es condición suficiente para asegurar convergencia puntual de la serie de Fourier a ese punto y, cuando la función sea derivable en todo $[0, 1)$, convergencia uniforme. Por otro lado, el teorema de Bernstein asegura la convergencia absoluta de la serie de Fourier de una función f que cumple la condición de Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x \neq y,$$

para algún $C > 0$ y $1/2 < \alpha \leq 1$.

Otra estrategia interesante para analizar la convergencia es reinterpretar el concepto de sumabilidad. Para ello, introduciremos el concepto de sumabilidad Cesàro y veremos en el teorema de Fejér que la serie de Fourier de cualquier función continua y periódica f es uniformemente sumable Cesàro a f . Si combinamos este resultado con el teorema de Hardy-Littlewood, que establece condiciones sobre los coeficientes de una serie numérica sumable en sentido Cesàro para que esta sea convergente, obtendremos así que la serie de Fourier de una cierta f sumable en sentido Cesàro, y cuyos coeficientes se comporten como una $O(1/n)$, cuando $n \rightarrow \infty$, será convergente a f donde esta sea continua. Como consecuencia, obtenemos que, si la función es de variación acotada y presenta una discontinuidad de salto finito en un punto, la serie de Fourier converge al promedio de los límites laterales en dicho punto. Este resultado se recoge en el teorema de Dirichlet-Jordan.

En el capítulo tres, presentamos algunas aplicaciones de la teoría de las series de Fourier. Entre ellas, destacamos la resolución de la ecuación del calor, ya que las series de Fourier fueron introducidas por primera vez en un importante artículo publicado en 1807 por Fourier con el fin de resolverla. Otra de las ecuaciones que trataremos es la ecuación de Laplace, también conocida como la ecuación del calor estacionaria, y cuyas soluciones son funciones armónicas. Para acabar con esta sección, daremos una prueba de la desigualdad isoperimétrica, que muestra que de todas las curvas cerradas y simples con longitud dada, la que encierra mayor área es la circunferencia, es decir

$$A_{\hat{\gamma}} \leq \ell_{\gamma}^2 / 4\pi,$$

donde $\hat{\gamma}$ denota la región acotada por la curva γ , $A_{\hat{\gamma}}$ su área y ℓ_{γ} su longitud. Para ello, veremos que es equivalente, en cierto sentido, a la desigualdad de Wirtinger.

Por último, el apéndice pretende completar la memoria con algunos aspectos curiosos del análisis de Fourier. Entre ellos, veremos una generalización del lema de Riemann-Lebesgue, relacionaremos el decaimiento de los coeficientes de Fourier con la suavidad de la función, y la fórmula de sumación de Poisson, que aparece también en la resolución la ecuación del calor. Además, estudiaremos el fenómeno de Gibbs, que cuantifica el ruido que existe al aproximar una función mediante series de Fourier en un punto de discontinuidad de salto finito. Dicho ruido es constante y se conoce como la *constante de Gibbs*. Este supone, aproximadamente, un 9% de la longitud de salto. Para finalizar, presentaremos que, en general, la serie de Fourier no converge ni siquiera puntualmente para la mayoría de las funciones integrables. Así, analizaremos un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

Este trabajo abarca diversas materias estudiadas durante el Grado de Matemáticas, entre las que destacan Ecuaciones Diferenciales II o Análisis Matemático II, IV, V y VI, aunque emplearemos también otras ramas de las matemáticas, como Ecuaciones en Derivadas Parciales o Teoría de la Medida.

Series trigonométricas

La importancia de las series de Fourier, tanto en matemáticas como en otras ramas de la ciencia, es su capacidad para representar casi cualquier función periódica. En particular, trabajaremos a lo largo de esta memoria con funciones \mathbb{Z} -periódicas, es decir, funciones periódicas de periodo uno, de manera que nos bastará saber cómo están definidas en el intervalo $[0, 1)$ puesto que podremos extenderlas periódicamente a todo \mathbb{R} . Usaremos la notación \mathbb{R}/\mathbb{Z} para denotar el grupo cociente aditivo entre \mathbb{R} y \mathbb{Z} . Por otra parte, $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es el espacio de las funciones continuas y \mathbb{Z} -periódicas con valores en \mathbb{C} , y emplearemos la notación usual para el espacio de las funciones periódicas que son p -integrables, $1 \leq p < \infty$:

$$L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es } \mathbb{Z}\text{-periódica y } \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Nótese que este espacio tiene estructura de espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad f \in L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

entendiendo que si $\|f\|_p = 0$, entonces $f = 0$ en casi todo punto.

A lo largo de la memoria, trabajaremos más concretamente con L^1 y L^2 , siendo este último un espacio de Hilbert con el producto interior:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

1.1. El sistema trigonométrico

Llamamos sistema trigonométrico complejo a la familia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, con $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $x \in [0, 1)$. Es bastante sencillo probar que este sistema es ortonormal $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)x} dx = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Las combinaciones lineales finitas de los caracteres $e_n(x)$, esto es, $\sum_{-N}^N c_n e_n$, para algún entero $N \geq 0$ y complejos $(c_n)_{-N}^N$, se llaman polinomios trigonométricos. La clase de todos los polinomios trigonométricos la denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Además, se definen los coeficientes de Fourier complejos de $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ como

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx, \text{ con } n \in \mathbb{Z},$$

y la serie de Fourier compleja de $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$S[f](x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

que representará a f cuando esta cumpla determinadas condiciones. El próximo capítulo lo dedicaremos a estudiarlas más exhaustivamente.

Otro de los conceptos necesarios para el desarrollo de esta memoria es la convolución de dos funciones. Se define la *convolución* de f y g , $f * g$, como:

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y) g(x - y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Obsérvese que esta definición será consistente siempre que la integral tenga sentido. Veamos algunas propiedades:

Proposición 1.1. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (1) $f * g = g * f$.
- (2) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- (3) $f * (\alpha g) = (\alpha f) * g = \alpha(f * g)$.
- (4) $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Las tres primeras propiedades se obtienen de la linealidad de la integral. Nos ocuparemos de demostrar la última:

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \int_0^1 (f * g)(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(y) g(x - y) e^{-2\pi i n x} dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(x-y)e^{-2\pi in(x-y+y)} dydx \\
 &= \int_0^1 f(y)e^{-2\pi iny} \left(\int_0^1 g(x-y)e^{-2\pi in(x-y)} dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 f(y)e^{-2\pi iny} \left(\int_0^1 g(t)e^{-2\pi int} dt \right) dy \\
 &= \int_0^1 f(y)e^{-2\pi iny} \hat{g}(n) dy \\
 &= \hat{f}(n)\hat{g}(n), n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

□

Para acabar con los preliminares, veremos otra propiedad de la convolución. Para cada $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$f * e_n(x) = \hat{f}(n)e_n(x).$$

Como consecuencia, tenemos que la convolución de una función integrable con un polinomio trigonométrico vuelve a ser un polinomio trigonométrico.

Corolario 1.2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces

$$f * p = f * \sum_{-N}^N c_n e_n = \sum_{-N}^N c_n \hat{f}(n) e_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

1.2. La desigualdad de Bessel

Una de las propiedades que cumple el sistema trigonométrico es la desigualdad de Bessel, dada en [18]. Para probarla, veremos que se cumple trivialmente cuando la función es, en particular, un polinomio trigonométrico.

Proposición 1.3. Sea $f = \sum_{-N}^N c_n e_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Entonces, para cada $n \in (-N, N)$, $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \hat{f}(n).$$

Además, $\langle f, e_n \rangle = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin (-N, N)$ y se tiene la identidad

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2. \tag{1.1}$$

¹ Basta con aplicar el teorema de Fubini [5, capítulo 4].

² Por ser g \mathbb{Z} -periódica.

Demostración. Para ver que $\langle f, e_n \rangle = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$, $n \notin (-N, N)$, basta tener en cuenta que f es un polinomio trigonométrico y que el sistema $\{e_n\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal. Por otra parte, si $n \in \mathbb{Z}$, $n \in (-N, N)$, entonces

$$c_n = \int_0^1 \left(\sum_{-N}^N c_m e^{2\pi i m x} \right) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{-N}^N c_m \int_0^1 e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i n x} dx = \hat{f}(n)$$

Nos queda ver la última igualdad:

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{-N}^N c_n e_n, \sum_{-N}^N c_m e_m \right\rangle = \sum_{-N}^N c_n \overline{c_m} \langle e_n, e_m \rangle = \sum_{-N}^N c_n \overline{c_n} = \sum_{-N}^N |c_n|^2.$$

□

De la proposición 1.3 se deduce que, si f es un polinomio trigonométrico, entonces

$$f = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n.$$

Ahora, pretendemos probar una de las desigualdades en la identidad (1.1) cuando $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Proposición 1.4 (Desigualdad de Bessel). *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Entonces*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Demostración. Probar el resultado es equivalente a ver que

$$\sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2, \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ y consideramos la suma parcial de la serie de Fourier de f

$$S_N f := \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e_n.$$

Tenemos que ver que

$$\|S_N f\|_2^2 = \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Afirmamos que $f - S_N f$ es perpendicular a $S_N f$. En efecto,

$$\overline{f - S_N f}(n) = 0, \quad \text{siempre que } |n| \leq N.$$

Entonces, $f - S_N f \perp e_n$, $|n| \leq N$, y por tanto $f - S_N f \perp S_N f$. Luego, como $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$\|f\|_2^2 = \|(f - S_N f) + S_N f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f\|_2^2 \geq \|S_N f\|_2^2.$$

□

Cabe mencionar que este resultado se tiene para cualquier sistema ortogonal ([13, chapter 4]). Como el sistema trigonométrico es completo, se cumple además la igualdad. Esta se conoce como la igualdad de Plancherel y se establece más adelante, concretamente en el teorema 2.4.

1.3. Teorema de Weierstrass

En esta sección probaremos el teorema central del capítulo: el de aproximación de Weierstrass para polinomios trigonométricos. Para ello, será necesario introducir el siguiente lema, que nos da condiciones suficientes para que una familia de funciones se comporte como una aproximación a la identidad.

Lema 1.5. *Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que:*

- (i) $\varphi_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N};$
- (ii) $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 1, \quad n \in \mathbb{N};$
- (iii) *Para cada $\delta \in (0, 1/2)$*

$$\omega_n(\delta) = \max_{x \in [\delta, 1-\delta]} \varphi_n(x) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces, para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * \varphi_n\|_\infty = 0.$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $\varepsilon > 0$. Como f es continua en $[0, 1]$, se tiene que f es uniformemente continua en $[0, 1]$, es decir, para algún $\delta > 0$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ si } |x - y| < \delta. \tag{1.2}$$

Escribimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \varphi_n(x)| &= \left| f(x) - \int_0^1 f(y) \varphi_n(x-y) dy \right| \\ &=^{(ii)} \left| \int_0^1 (f(x) - f(y)) \varphi_n(x-y) dy \right| \\ &\leq^{(i)} \int_0^1 |f(x) - f(x-z)| \varphi_n(z) dz \\ &= \left(\int_\delta^{1-\delta} + \int_0^\delta + \int_{1-\delta}^1 \right) |f(x) - f(x-z)| \varphi_n(z) dz, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Veamos cada caso por separado: usando (1.2) y las propiedades del sistema $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) $\int_\delta^{1-\delta} |f(x) - f(x-z)| \varphi_n(z) dz \leq 2\omega_n(\delta) \|f\|_\infty (1 - 2\delta) \leq C_f \omega_n(\delta).$
- (b) $\int_0^\delta |f(x) - f(x-z)| \varphi_n(z) dz < \varepsilon \int_0^\delta \varphi_n(z) dz < \varepsilon.$

(c) Análogo a (b): $\int_{1-\delta}^1 |f(x) - f(x-z)|\varphi_n(z) dz < \varepsilon$.

Hemos llegado a que, para cierta $C > 0$,

$$|f(x) - f * \varphi_n(x)| \leq C(\omega_n(\delta) + \varepsilon), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1].$$

Luego

$$\|f - f * \varphi_n\|_\infty \leq C(\omega_n(\delta) + \varepsilon).$$

Y como $\omega_n(\delta) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f * \varphi_n\|_\infty \leq C\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

□

Observación 1.6. Cabe mencionar que este resultado también se cumple si tomamos $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (en particular, también si $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$) tal que f es continua en algún punto $x_0 \in [0, 1]$, usando que las funciones continuas son densas en L^1 . Esto último lo utilizaremos con bastante frecuencia a lo largo de la memoria, aunque omitiremos su prueba.

Ejemplo 1.7 (Núcleos de Féjer). Consideramos, para cada $N \in \mathbb{N}$, los polinomios trigonométricos

$$F_N(x) = \sum_{-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n(x).$$

Veamos que cumplen las condiciones del lema anterior. Para ello, observamos, en primer lugar, que

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \left(\sum_{-(N-1)}^{-1} + \sum_1^{N-1} \right) \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n(x) + 1 \\ &= \sum_1^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) [e_n(x) + e_{-n}(x)] + 1 \\ &= 2 \sum_1^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \cos(2\pi nx) + 1, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Así, observamos que $F_N(x)$ es un polinomio trigonométrico real. También

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi Nx)}{N \operatorname{sen}^2(\pi x)}, & x \notin \mathbb{Z}, \\ N, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Veamos esto último:

(i) Si $x \in \mathbb{Z}$, $e_n(x) = 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned} F_N(x) &= 1 + 2 \sum_1^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) = 1 + 2 \left(\sum_1^{N-1} 1 - \frac{1}{N} \sum_1^{N-1} n \right) \\ &= 1 + 2 \left(N-1 - \frac{1}{N} \frac{N(N-1)}{2} \right) = N. \end{aligned}$$

(ii) Si $x \notin \mathbb{Z}$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left| \sum_0^{N-1} e_n(x) \right|^2. \tag{1.3}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^{N-1} e_n(x) \right|^2 &= \sum_0^{N-1} e_n(x) \overline{\sum_0^{N-1} e_m(x)} = \left(\sum_0^{N-1} e_n(x) \right) \left(\sum_0^{N-1} e_{-m}(x) \right) \\ &= [e_0(x) + \dots + e_{N-1}(x)] [e_{-(N-1)}(x) + \dots + e_{-1}(x) + e_0(x)] \\ &= (e_{-(N-1)} + e_{N-1}) + 2(e_{-(N-2)} + e_{N-2}) + \dots + (N-1)(e_{-1} + e_1) + Ne_0 \\ &= \sum_1^{N-1} (N-n)(e_n + e_{-n}) + (N-0)e_0 = \sum_{-(N-1)}^{N-1} (N-|n|)e_n. \end{aligned}$$

Por último, como la suma que aparece en (1.3) es una suma geométrica de razón $e_1(x)$:

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left| \sum_0^{N-1} e_n(x) \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \frac{1 - e^{2\pi i N x}}{1 - e^{2\pi i x}} \right|^2 = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2(\pi N x)}{\text{sen}^2(\pi x)}.$$

Ya podemos probar que $\{F_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ cumple las condiciones del lema.

(1) $F_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

(2) $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2(\pi N x)}{\text{sen}^2(\pi x)} \geq 0$.

(3) $\int_0^1 F_N(x) dx = \sum_{-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \int_0^1 e_n(x) dx = 1$.

(4) Para cada $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$, $x \in [\delta, 1 - \delta]$,

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{N \text{sen}^2(\pi x)} \leq \frac{1}{N \text{sen}^2(\pi \delta)}.$$

Luego

$$\max_{x \in [\delta, 1-\delta]} |F_N(x)| \leq \max_{x \in [\delta, 1-\delta]} \frac{1}{N \text{sen}^2(\pi x)} \leq \frac{1}{N \text{sen}^2(\pi \delta)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□

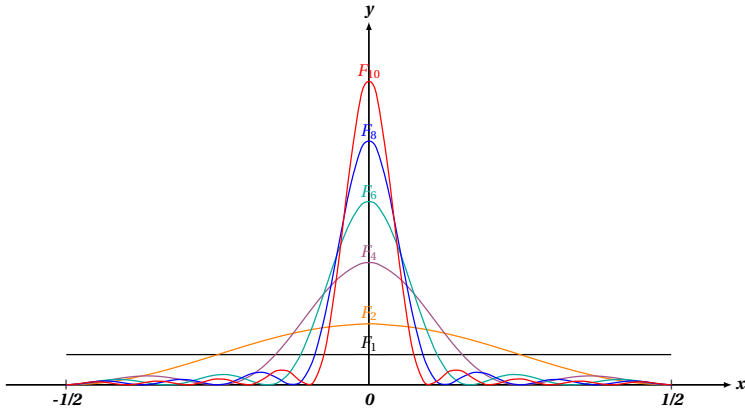


Figura 1.1. Núcleo de Fejér

Así pues, ya tenemos las herramientas necesarias para probar el resultado central del capítulo.

Teorema 1.8 (Weierstrass). $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es denso en $(\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$, esto es

$$\overline{\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Como ya hemos visto, el lema 1.5 nos dice que el núcleo de Fejér es una aproximación a la identidad y, por el corolario 1.2,

$$q_N := f * F_N$$

es un polinomio trigonométrico. Por tanto

$$\|f - q_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□

Convergencia de la serie de Fourier

En este capítulo pretendemos responder a la siguiente pregunta: sea f una función integrable y consideramos su serie de Fourier

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

¿Representa esta serie a la función? ¿De qué manera?

Estudiaremos condiciones suficientes para que la serie de Fourier de una función \mathbb{Z} -periódica converja en distintos sentidos, como en media cuadrática, puntual o incluso absolutamente, a la función. Entre estos resultados, destaca el teorema de Bernstein. También, estudiaremos otras maneras de entender la sumabilidad que nos ayudarán a cumplir nuestro cometido. Para comenzar, veamos un resultado relevante para el desarrollo de este apartado.

Lema 2.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Sea $f \in L^1$. Entonces*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Del teorema 1.8 y usando que las funciones continuas son densas en L^1 , se tiene que los polinomios trigonométricos son densos en L^1 . Luego, existe $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que

$$\|f - p\|_1 < \varepsilon.$$

Se tiene entonces que

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{p}(n)| + |\hat{p}(n)| \leq \|f - p\|_1 + |\hat{p}(n)| < \varepsilon + |\hat{p}(n)|.$$

Sea N el grado del polinomio p . Entonces, $|\hat{p}(n)| = 0$, $|n| > N$. Por tanto,

$$|\hat{f}(n)| < \varepsilon, \quad |n| > N.$$

□

Más adelante, en la sección A.2 del apéndice, haremos un análisis más profundo del decaimiento de los coeficientes de Fourier. Este fenómeno estará relacionado con la suavidad de la función. De hecho, si la función es analítica, dicho decaimiento será exponencial.

A continuación, estudiaremos la convergencia para funciones de cuadrado integrable.

2.1. Convergencia en L^2 .

En esta sección veremos que, si $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces su serie de Fourier converge en media cuadrática a f . Pero antes de presentar dicho resultado, será necesario introducir el concepto de completitud de un sistema ortogonal.

Definición 2.2. *Dado un sistema ortogonal $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, se dice que es completo (o maximal) cuando, para cualquier $\psi \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no nula, $\psi \neq \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\{\psi\} \cup \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es ortogonal.*

Proposición 2.3. *El sistema $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es maximal.*

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que $\hat{f}(n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que $f = 0$. Haciendo uso del corolario 1.2, para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$f * F_N = \sum_{-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \hat{f}(n) e_n = 0,$$

donde F_N es el núcleo de Féjer (ver ejemplo 1.7). Por tanto, usando la observación 1.6, concluimos que $f = 0$ en L^2 . \square

Pues bien, esta característica del sistema trigonométrico es la que nos permite enunciar el resultado central de la sección.

Teorema 2.4. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Entonces*

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n, \text{ en } L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Equivalentemente,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \quad (\text{Igualdad de Plancherel}) \quad (2.1)$$

Demostración. Sean $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $S_N f = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e_n$, $N \in \mathbb{N}$, la suma parcial de la serie de Fourier. Para ver que la convergencia de la serie de Fourier es equivalente a la igualdad de Plancherel, basta con tener en cuenta que $f - S_N f \perp S_N f$, como se vio en la proposición 1.4. Nos queda por ver que

$$\|f - S_N f\|_2^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Observamos que, si $N, M \in \mathbb{N}$, $N \geq M$,

$$\|S_N f - S_M f\|_2^2 = \sum_{M < |n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 \leq \sum_{-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Ya que, por la desigualdad de Bessel, la serie que aparece a la derecha es finita, la sucesión $\{S_N f\}_{N \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Y como $(L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach, dicha sucesión converge en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ a una cierta función $F \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. De esto se deduce

$$\widehat{F}(n) = \int_0^1 F(x) e_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) e_n(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{S_N f}(n),$$

Además, observamos que

$$\widehat{S_N f}(n) = \begin{cases} \hat{f}(n), & N \geq |n|, \\ 0, & N < |n|. \end{cases}$$

Luego, $\widehat{F - f}(n) = 0$ y $F - f \perp e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Como $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es maximal, obtenemos que $F = f$ y hemos probado lo que queríamos. \square

Observación 2.5. La igualdad de Plancherel conduce trivialmente al resultado obtenido en el lema 2.1 cuando $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

2.2. Convergencia puntual.

En esta sección estudiaremos condiciones para asegurar la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función integrable. Para ello, será necesario introducir el siguiente núcleo.

2.2.1. El núcleo de Dirichlet

Para cada $N \in \mathbb{N}$, el núcleo de Dirichlet se define como $D_N(x) := \sum_{-N}^N e^{2\pi i n x}$ ($0 \leq x \leq 1$). Observamos que,

$$S_N f(x) = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \int_0^1 f(y) \sum_{-N}^N e^{2\pi i n(x-y)} dy = (f * D_N)(x). \quad (2.2)$$

¹ Al ser el producto interior una función continua, podemos intercambiar el límite con la integral.

Este núcleo, al no ser positivo, $\{D_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ no se comporta como una aproximación a la identidad, pero posee propiedades muy interesantes. En primer lugar, observamos que la propia definición ya nos dice que es un polinomio trigonométrico. Además,

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_N(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{-N}^N e^{2\pi i n x} \right) dx = \sum_{-N}^N \langle e^{2\pi i n x}, 1 \rangle = 1.$$

Por otro lado, si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $e_n(x) = 1, n \in \mathbb{N}$, y por tanto $D_N(x) = 2N + 1$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, se tiene que

$$D_N(x) = \frac{e^{-2\pi i N x} - e^{-2\pi i (N+1)x}}{1 - e^{-2\pi i x}} = \frac{e^{2\pi i (N+\frac{1}{2})x} - e^{-2\pi i (N+\frac{1}{2})x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} = \frac{\text{sen}[(2N+1)\pi x]}{\text{sen}(\pi x)}. \quad (2.3)$$

También, se tiene la siguiente relación entre este y el núcleo de Fejér:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} D_n &= \frac{e_0 + (e_{-1} + e_0 + e_1) + \dots + (e_{-(N-1)} + \dots + e_{N-1})}{N} \\ &= \frac{N e_0 + \sum_1^{N-1} (N-n)(e_n + e_{-n})}{N} = \frac{1}{N} \sum_{-(N-1)}^{N-1} (N-|n|) e_n = F_N. \end{aligned}$$

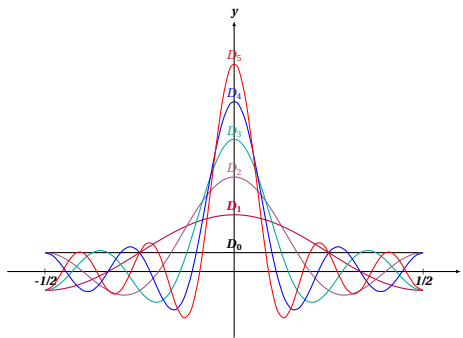


Figura 2.1. Núcleo de Dirichlet

Un resultado sobre convergencia puntual de la serie de Fourier es el que sigue.

Teorema 2.6. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y supongamos que f es derivable en $x_0 \in [0, 1]$. Entonces, la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x_0)$.*

Demostración. Consideramos, para cada $N \in \mathbb{N}$, la suma parcial de la serie de Fourier de f , $S_N f$, que, por (2.2), se puede expresar como $S_N f(x) = (f * D_N)(x)$. Definimos la función f_0 mediante

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{x}, & x \neq 0, \\ -f'(x_0), & x = 0, \end{cases}$$

que, por hipótesis, es continua en $x = 0$ y, en particular, está acotada cerca de 0. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - f(x_0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_0-x) D_N(x) dx - f(x_0) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x_0-x) - f(x_0)] D_N(x) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f(x_0-x) - f(x_0)}{x} \right) x D_N(x) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[f_0(x) \frac{x}{\text{sen}(\pi x)} \right] [\text{sen}(\pi x) D_N(x)] dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, definimos

$$F_0(x) := f_0(x) \frac{x}{\text{sen}(\pi x)}, \quad x \neq 0.$$

Nótese que $F_0(x) \in L^1$, pues $f_0(x) \in L^1$ y la función $f(x) = \frac{x}{\text{sen}(\pi x)}$ está acotada. Por tanto, del lema 2.1,

$$S_N f(x_0) - f(x_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_0(x) \text{sen}[(2N+1)\pi x] dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□

Observación 2.7. Hemos puesto por hipótesis que f sea derivable en $x_0 \in [0, 1]$, pero esta condición la podemos relajar a que f cumpla una condición de tipo Hölder α , $0 < \alpha \leq 1$, en x_0 , es decir, que exista $C = C(x_0) < \infty$ tal que

$$\sup_{x \neq x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq C.$$

En general, diremos que $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$, es decir, la clase de Hölder homogénea de orden α , $0 < \alpha < 1$, cuando existe $C > 0$ de manera que

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C.$$

Además, Λ_α denotará la clase de las funciones de tipo Hölder, dotado de estructura de espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha} = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$. Analizaremos este espacio con más detalle en el apartado A.2 del apéndice, aunque también aparece en el teorema 2.10.

Una consecuencia del teorema 2.6 es el siguiente resultado.

Teorema 2.8 (Principio de localización de Riemann). *Sea $x_0 \in [0, 1]$. Si dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ coinciden en un entorno de x_0 , entonces*

$$S_N f(x_0) - S_N g(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

esto es, que sus series de Fourier tienen el mismo carácter.

2.3. Convergencia uniforme

En esta sección pretendemos estudiar condiciones para que la serie de Fourier converja uniformemente. Denotaremos, para $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $A_f := \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$. Obsérvese que si A_f es finito, estaríamos diciendo que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente. Por ello, el interés recae en ver qué debe cumplir la función para que A_f sea finito. Veamos una de ellas.

Proposición 2.9. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces la serie de Fourier de f converge absolutamente a f .*

Demostración. Como f es derivable, podemos calcular los coeficientes de Fourier de la función derivada. Integrando por partes, obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}'(n) = \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} dx = e^{-2\pi i n x} f(x) \Big|_{x=0}^{x=1} + 2\pi i n \int_0^1 e^{-2\pi i n x} f(x) dx = 2\pi i n \hat{f}(n)$$

donde el término de frontera se anula por ser f una función \mathbb{Z} -periódica. Luego,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi i n} \hat{f}'(n), \quad n \neq 0$$

y por tanto

$$|\hat{f}(n)| = \frac{|\hat{f}'(n)|}{2\pi |n|}, \quad n \neq 0.$$

Queremos ver que A_f es finito. Aplicando la desigualdad de Hölder y la igualdad de Plancherel ((2.1))

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |n \hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} n^2 |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{1}{4\pi^2} \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} = C \|f'\|_2, \end{aligned}$$

para cierta $C < \infty$. Concluimos que $A_f \leq C \|f'\|_2 + |\hat{f}(0)| < \infty$. □

Un resultado más general es el teorema de Bernstein.

Teorema 2.10. Si $f \in \Lambda_\alpha$, $1/2 < \alpha \leq 1$, entonces la serie de Fourier de f converge absolutamente a f .

Demostración. Sea $f \in \Lambda_\alpha$, $\alpha > 1/2$. Queremos ver que $A_f < \infty$. Escribimos

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\hat{f}(n)|.$$

Si $j \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\hat{f}(n)| \leq \sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |e^{2\pi i n h} - 1| |\hat{f}(n)|,$$

siempre que $|e^{2\pi i n h} - 1| \geq 1$. Observamos que

$$|e^{i\theta} - 1| = |2 \operatorname{sen}(\theta/2)| \geq \frac{2}{\pi} |\theta|, \quad |\theta| \leq \pi.$$

Luego, tomando $n \in \mathbb{Z}$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $2|nh| \leq 1$, se tiene que $|e^{2\pi i n h} - 1| \geq 4|nh|$. Así, para cada $j \in \mathbb{N}$, escogiendo $h_j = \frac{1}{2^{j+2}}$, obtenemos

$$\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\hat{f}(n)| \leq \sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |e^{2\pi i n h_j} - 1| |\hat{f}(n)| = \sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\widehat{f_{h_j} - f}(n)|,$$

siendo $f_{h_j}(x) := f(x + h_j)$. Entonces, por la desigualdad de Hölder y la igualdad de Plancherel ((2.1)),

$$\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\widehat{f_{h_j} - f}(n)|^2 \right)^{1/2} \leq 2^{j/2} \|f_{h_j} - f\|_2.$$

Nótese que, como $f \in \Lambda_\alpha$, para algún $M > 0$ independiente de j ,

$$\|f_{h_j} - f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x + h_j) - f(x)|^2 dx \leq M |h_j|^{2\alpha}.$$

Por tanto,

$$\sum_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}} |\hat{f}(n)| \leq C 2^{j/2} |h_j|^\alpha = C 2^{j/2} \left(\frac{1}{2^{j+1}} \right)^\alpha = C 2^{-\alpha} \frac{1}{2^{j(\alpha-1/2)}}.$$

Ya que $\alpha > 1/2$, se concluye que $\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| < \infty$. □

Observación 2.11. El valor $\alpha = 1/2$ es óptimo en el teorema de Bernstein, pues existe $f \in \Lambda_{1/2}$ cuya serie de Fourier no converge absolutamente. Por ejemplo, la función definida por la serie de Hardy y Littlewood ([18, chapter V, §4, pág. 197]).

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{e^{in \ln n}}{n} e^{2\pi i n x}.$$

Ahora, veremos que la velocidad de convergencia tiene que ver con la suavidad de la función. El objetivo será, entonces, cuantificar este fenómeno.

Proposición 2.12. Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $k \geq 1$, entonces

$$\|S_N f - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{N^{k-1/2}}\right), \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $k \geq 1$. Ya hemos visto en la demostración de la proposición 2.9 que los coeficientes de Fourier de f y de su derivada vienen relacionados por

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Luego, se tiene que

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Escribimos, para $N \geq 1$

$$\begin{aligned} |S_N f(x) - f(x)| &= \left| \sum_{|n| > N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \right| \leq \sum_{|n| > N} \frac{1}{(2\pi)^k |n|^k} |\widehat{f^{(k)}}(n)| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^k} \left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{|n|^{2k}} \right)^{1/2} \left(\sum_{|n| > N} |\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^k} \left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{|n|^{2k}} \right)^{1/2} \|S_N(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_2. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\sum_{|n| > N} \frac{1}{|n|^{2k}} = 2 \sum_{n > N} \frac{1}{n^{2k}} \leq 2 \int_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2k}} dx = \frac{c_k}{(N+1)^{2k-1}},$$

y, por tanto,

$$(N+1)^{k-1/2} \|S_N f - f\|_\infty \leq \tilde{c}_k \|S_N(f^{(k)}) - f^{(k)}\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□

Corolario 2.13. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces $\|S_N f - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{N^k}\right)$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado se debe a D. Jackson (ver [7, pág. 22]).

Corolario 2.14. Si $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$\|f - S_N\|_\infty \lesssim \|f\|_{\Lambda_\alpha} \frac{\ln N}{N^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Observación 2.15. Nótese que, en virtud de este resultado y del teorema 2.10, la serie de Fourier de una función $f \in \Lambda_\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) converge uniformemente pero, en general, no absolutamente si $\alpha \leq 1/2$.

2.4. Otros métodos de sumabilidad

Otra estrategia para estudiar la convergencia puede ser reinterpretando el límite de las sumas parciales

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f = f$$

de otra forma. Por ello, trataremos la sumabilidad Cesàro y la sumabilidad Abel.

Definición 2.16. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numérica.

(a) Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es sumable Cesàro a σ cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma,$$

donde $\sigma_n := \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, es la media de Cesàro de orden n y $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ es la suma parcial enésima de la serie.

(b) Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es sumable Abel a $s \in \mathbb{R}$ si, para cada $0 < r < 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n =: A(r),$$

llamada media de Abel, converge y, además,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r) = s.$$

Se puede probar que

“Convergencia usual \Rightarrow Sumabilidad Cesàro \Rightarrow Sumabilidad Abel”

Para ello, basta con tener en cuenta que $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$ (entendemos $S_0 = 0$) y $S_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$, $n \geq 1$ (entendiendo que $\sigma_0 = 0$). En general, las implicaciones en el sentido contrario son falsas: es sencillo ver que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no es convergente (oscila), pero sí es sumable en sentido Cesàro, y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$ no es Cesàro sumable, pero sí es Abel sumable.

Ahora, dada $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, consideramos $S_N f(x) = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e_n$, $N \in \mathbb{N}$, y queremos calcular las medias de Cesàro asociadas a f . Vimos en la sección 2.2.1 que, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} D_n = F_N.$$

Entonces, usando (2.2), para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)}{N} = \frac{f * D_0(x) + \dots + f * D_{N-1}(x)}{N} = f * F_N(x). \quad (2.4)$$

En la animación [2.1](#) podemos observar cómo convergen las primeras medias de Cesàro $\sigma_N(x)$ a la función salto

$$\mathbf{s}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1/2 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2. \end{cases}$$

Estudiaremos esta función más profundamente en el apartado [A.4](#) del apéndice.



Animación 2.1. Sumas de Cesàro para la función salto (Click para animar)

El caso de las medias de Abel es análogo. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $r \in (0, 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_r(f)(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy \right) r^{|n|} e_n(x) \\ &= \int_0^1 f(y) \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n(x-y)} r^{|n|} dy, \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

pues la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n(x-y)} r^{|n|}$ converge absolutamente y, por tanto, podemos conmutar la integral con la serie. Así, si $r \in (0, 1)$ y $x \in [0, 1]$

$$A_r(f)(x) := \int_0^1 f(y) P_r(x-y) dy = (f * P_r)(x),$$

donde $P_r := \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$ se conoce como el núcleo de Poisson.

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = 1 + \frac{r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} + \frac{r e^{-i\theta}}{1 - r e^{-i\theta}} \\ &= \frac{(1 - r e^{i\theta})(1 - r e^{-i\theta}) + r e^{i\theta}(1 - r e^{-i\theta}) + r e^{-i\theta}(1 - r e^{i\theta})}{(1 - r e^{i\theta})(1 - r e^{-i\theta})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

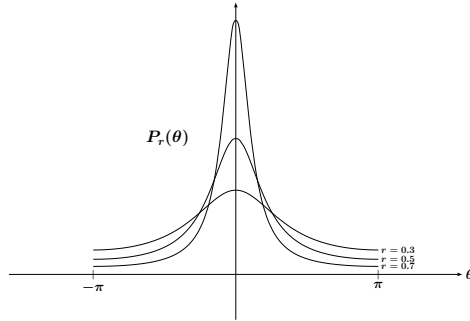


Figura 2.2. Núcleo de Poisson

Con todo esto, ya tenemos las herramientas necesarias para enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.17 (Teorema de Fejér). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Entonces

- (i) La serie de Fourier de f es sumable Cesàro en x_0 si f es continua en x_0 .
- (ii) Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces la serie de Fourier de f es uniformemente sumable Cesàro a f .

Demostración. Por (2.4), sabemos que $\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$. Así, la prueba de (i) se obtiene de la observación 1.6. Para la convergencia uniforme, basta con aplicar directamente el lema 1.5, pues sabemos que el núcleo de Fejér es una aproximación a la identidad. □

Corolario 2.18. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $x_0 \in [0, 1]$ tal que existen $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$. Entonces la serie de Fourier es sumable Cesàro al promedio de los límites laterales.

Demostración. Definimos

$$f_0(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0-x) + f(x_0+x)}{2}, & x \in (-1/2, 1/2) \setminus \{0\}, \\ \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Nótese que $f_0 \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y, además, es continua en $x = 0$. Del teorema anterior, se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f_0)(0) = f_0(0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Como f_0 y F_N son funciones pares,

$$\sigma_N(f_0)(0) = \int_{-1/2}^{1/2} f_0(y)F_N(-y)dy = \int_0^{1/2} (f(x_0 - y) + f(x_0 + y))F_N(y)dy,$$

y, por tanto,

$$\sigma_N(f_0)(0) = \int_0^{1/2} f(x_0 - y)F_N(y)dy + \int_{-1/2}^0 f(x_0 - y)F_N(y)dy = f * F_N(x_0) = \sigma_N(f)(x_0).$$

□

Hemos visto que la convergencia en sentido Cesàro no implica, en general, la convergencia usual. Es natural, entonces, preguntarse si existen condiciones para garantizar que una serie sumable Cesàro también sea convergente. En el año 1897, Alfred Tauber enunció y probó el siguiente teorema.

Teorema 2.19. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numérica convergente en sentido Abel y cuyo término general cumple que $a_n = o(1/n)$, $n \rightarrow \infty$. Entonces, la serie es convergente.*

Poco más de una década después, Hardy y Littlewood² probaron una versión más general.

Teorema 2.20 (Teorema de Hardy-Littlewood). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numérica convergente en sentido Cesàro y cuyo término general cumple que $a_n = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$. Entonces, la serie es convergente.*

Demostración. Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$ para cierta $s \in \mathbb{R}$, y que $\sup_{n \in \mathbb{N}} n|a_n| \leq M$, para algún $M < \infty$. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y elegimos $n_1 > 0$ tal que $|\sigma_n - s| < \varepsilon$ y $M/2n < \varepsilon$, para cada $n \geq n_1$. Ya que $S_n = n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$, $n \geq 1$ (entendiendo que $\sigma_0 = 0$), si $n, \ell \in \mathbb{N}$,

$$(n + \ell)\sigma_{n+\ell} - n\sigma_n = S_{n+\ell} + \dots + S_{n+1} = (S_{n+\ell} - S_n) + \dots + (S_{n+1} - S_n) + \ell(S_n \pm s).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \ell(S_n - s) &= (n + \ell)\sigma_{n+\ell} - n\sigma_n - \ell s - \sum_{j=1}^{\ell} (S_{n+j} - S_n) \\ &= (n + \ell)(\sigma_{n+\ell} - s) - n(\sigma_n - s) - \sum_{j=1}^{\ell} (S_{n+j} - S_n), \quad n, \ell \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

² De hecho, acuñaron con el término “teoremas tauberianos” a los resultados que imponen condiciones a la función para que un método de sumabilidad garantice también su convergencia.

Tomamos $n \geq n_1$ y nos queda que

$$|S_n - s| \leq \frac{n+\ell}{\ell} \varepsilon + \frac{n}{\ell} \varepsilon + \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} |S_{n+j} - S_n|, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, para cada $n, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{\ell} |S_{n+j} - S_n| = \sum_{j=1}^{\ell} |a_{n+1} + \dots + a_{n+j}| \leq \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{M}{n+1} + \dots + \frac{M}{n+j} \right) \leq \frac{M(1+\ell)\ell}{2(n+1)}.$$

Así, si $n \geq n_1$,

$$|S_n - s| \leq \frac{2n+\ell}{\ell} \varepsilon + \frac{M(1+\ell)}{2n} \leq \varepsilon + \frac{2n}{\ell} \varepsilon + \frac{M}{2n} + M \frac{\ell}{2n}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Nótese que podemos elegir $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $2n\sqrt{\varepsilon} < \ell < 2n\sqrt{\varepsilon} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. De esto último, obtenemos que $2n/\ell < 1/\sqrt{\varepsilon}$ y que $\ell/2n < \sqrt{\varepsilon} + 1/2n$. Por tanto, tomando $n \geq n_1$,

$$|S_n - s| \leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} + M\sqrt{\varepsilon} + \frac{M}{2n} \leq 3\varepsilon + (M+1)\sqrt{\varepsilon} \leq (M+4)\sqrt{\varepsilon}.$$

□

Combinando los teoremas 2.17 y 2.20, queda el siguiente teorema.

Teorema 2.21. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que $\hat{f}(n) = O(1/n)$, $n \rightarrow \infty$. Entonces, la serie de Fourier converge en los puntos donde sea sumable Cesàro (al valor de dicha suma). De hecho*

- (i) *La serie de Fourier es convergente en los puntos de continuidad de f .*
- (ii) *Si existen $f(x_0^+), f(x_0^-)$, entonces:*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

- (iii) *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .*

No obstante, los límites laterales no siempre existen y, por ello, surge la siguiente definición.

Definición 2.22. *Sea f una función \mathbb{Z} -periódica. Se dice que f es de variación acotada si*

$$\mathcal{V}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}([0,1])} \sum_{j=1}^n |f(x_{j+1}) - f(x_j)| < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto de todas las particiones de $[0,1]$. La clase de las funciones \mathbb{Z} -periódicas de variación acotada se denota por $\mathcal{BV}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Además, una función de variable real será de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ cualquiera si, y solo si, se puede expresar como diferencia de funciones crecientes [1, Theorem 6.13]. Entonces, si f es de variación acotada, existen los límites laterales y, por tanto, obtenemos el resultado que sigue.

Teorema 2.23 (Dirichlet-Jordan). *Sea f una función \mathbb{Z} -periódica de variación acotada. Entonces,*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \quad x_0 \in [0, 1].$$

En particular, $S_N f(x) \rightarrow f(x)$, cuando $N \rightarrow \infty$, en cualquier punto de continuidad de f .

Demostración. Es claro que f está acotada pues

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq \mathcal{V}(f) + |f(0)|.$$

Por tanto, $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Veamos ahora que $|\hat{f}(n)| \leq C/|n|$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para ello, usaremos la integral de Riemann-Stieltjes. La integral de Riemann-Stieltjes de la función $g \in \mathcal{C}([0, 1])$, respecto de una f dada, se define como

$$\int_0^1 g \cdot df = \sup_{P \in \mathcal{P}([0,1])} \sum_{j=1}^n g(x_j) (f(x_{j+1}) - f(x_j)),$$

con $P = \{x_j : x_0 = 0 < \dots < x_n = 1\}_{j=1}^n$ una partición cualquiera del intervalo $[0, 1]$. Además, por definición (ver [1, Chapter 7])

$$\int_0^1 |df| = \sup_{P \in \mathcal{P}([0,1])} \sum_{i=1}^n |f(x_{j+1}) - f(x_j)| = \mathcal{V}(f).$$

Y usando la fórmula de integración por partes para esta integral,

$$\int_0^1 u \cdot df = - \int_0^1 f \cdot u',$$

donde $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y f es de variación acotada, tenemos que

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 e^{-2\pi i n x} df.$$

Concluimos que $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi|n|} \int_0^1 |df| = \frac{\mathcal{V}(f)}{2\pi|n|}$. □

Sin embargo, y aunque hayamos dedicado todo un capítulo a la convergencia de la serie de Fourier, la realidad es que esta no converge ni siquiera puntualmente para la mayoría de funciones. Esto lo veremos más profundamente en la sección A.5 del apéndice.

Aplicaciones

3.1. La ecuación del calor

La ecuación del calor en dimensión uno es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

donde $u = u(x, t)$ representa, para cada instante $t > 0$, la temperatura del punto x en un objeto unidimensional (podemos pensar en una barra aislada muy fina). La constante c se conoce como constante de difusión de calor y dependerá de las propiedades térmicas del material aunque, sin pérdida de generalidad, supondremos que es $c = 1$. Imponer condiciones de frontera $u(0, t) = u(1/2, t) = 0$ corresponde a mantener los extremos de dicha barra a temperatura cero, y la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1/2$) representa la distribución inicial de temperatura $f(x)$. Si reflejamos u sobre $x = 0$ como una función impar, $u(-x, t) = -u(x, t)$, y la extendemos \mathbb{Z} -periódica, podemos reemplazar la condición de frontera original por la condición de periodicidad $u(x + 1, t) = u(x, t) = 0$.

Para que el problema sea consistente, supondremos que $u = u(x, t)$ es \mathcal{C}^2 en $t > 0$ y continua en $t \geq 0$, siendo $u(x, 0) = f(x)$ -lo que implica que f es \mathbb{Z} -periódica-. Para $t > 0$ consideremos la serie de Fourier de la función continua $u(\cdot, t)$, con coeficientes de Fourier

$$u_n(t) = \int_{-1/2}^{1/2} u(x, t) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Derivando bajo el signo integral e integrando por partes, obtenemos, usando (3.1)

$$\begin{aligned} \dot{u}_n(t) &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= (-2\pi i n)^2 \int_{-1/2}^{1/2} u(x, t) e^{-2\pi i n x} dx = -4\pi^2 n^2 u_n(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

ya que los términos de frontera se anulan al ser las funciones periódicas. De este modo, hemos visto que los coeficientes $u_n = u_n(t)$ satisfacen la ecuación diferencial ordinaria $\dot{u}_n = -4\pi^2 n^2 u_n$, con condición inicial $u_n(0) = \hat{f}(n)$. Así, $u_n(t) = \hat{f}(n)e^{-4\pi^2 n^2 t}$, $t > 0$. Esto significa que si la ecuación del calor, con condiciones de frontera periódicas y condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, tiene solución, entonces

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}. \quad (3.2)$$

Ahora, se nos plantea preguntarnos si produce esta fórmula una solución de la ecuación (3.1). Para ello, veremos que la fórmula en sí resuelve el problema, esto es, dada una función continua f , consideramos sus coeficientes de Fourier y computamos la serie (3.2). Lo primero que observamos es que los coeficientes están acotados: $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{\infty}$, por lo que la serie (3.2) converge absolutamente en $t > 0$ y la función $u = u(x, t)$ está bien definida, es continua en $t > 0$ y claramente periódica en la primera variable. De esto se deduce que podemos derivar término a término (un número finito de veces) respecto de cualquiera de las dos variables y que, por tanto, u es \mathcal{C}^2 (de hecho es \mathcal{C}^{∞}) y que basta con sustituir para ver que satisface la ecuación del calor. Además, hemos escogido la extensión impar de u para que (3.2) cumpla las condiciones de frontera. Quedaría ver que $u(x, t) \rightarrow f(x)$ cuando $t \rightarrow 0^+$. Esto resulta más difícil de probar porque, en general, no sabemos que la serie de Fourier de f converge y, por tanto, (3.2) no necesariamente tiene sentido en $t = 0$. Sin embargo, si suponemos que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ entonces, por la proposición 2.9, su serie de Fourier converge uniformemente a f y, como, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$u(x, t) - f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1) = \left(\sum_{|n| \leq N} + \sum_{|n| > N} \right) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} (e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1),$$

se tiene que,

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)| |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1| + 2 \sum_{|n| > N} |\hat{f}(n)|.$$

Por tanto,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|u(x, t) - f(x)\|_{\infty} \leq 2 \sum_{|n| > N} |\hat{f}(n)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

y $u(\cdot, t) \rightarrow f(\cdot)$ uniformemente cuando $t \rightarrow 0^+$. Sin embargo, suponer que $f \in \mathcal{C}^1$ no es del todo natural. De hecho, la conclusión sigue siendo cierta sin ella. Si en (3.2) sustituimos la expresión de los coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ e intercambiamos la integral con la serie, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy \right) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} \\ &= \int_0^1 \sum_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n(x-y)} \right) f(y) dy, \end{aligned}$$

hecho que se puede justificar sin más que apelar a la convergencia uniforme en la variable x de la serie para $t > 0$. Así, hemos escrito u como un operador de convolución

$$u(x, t) = \int_0^1 f(y)H_t(x - y)dy,$$

donde el núcleo del calor H_t viene dado por

$$H_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}. \tag{3.3}$$

Y aunque H_t no se puede calcular explícitamente, resulta que se comporta como una aproximación a la identidad (en este caso, el parámetro es continuo $t \rightarrow 0^+$). Esto dará lugar a que $u(\cdot, t) \rightarrow f(\cdot)$ uniformemente cuando $t \rightarrow 0^+$, si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$.

En primer lugar, es fácil ver que

$$\int_{-1/2}^{1/2} H_t(x)dx = \hat{H}_t(0) = 1, \quad t > 0,$$

ya que, de (3.3), $\hat{H}_t(n) = e^{-4\pi^2 n^2 t}$. Además, $H_t(x)$ es real porque $\overline{H_t(x)} = H_t(x)$ y \mathbb{Z} -periódica en x , pues se puede escribir de la forma

$$H_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x + n), \tag{3.4}$$

que es la *periodización* del núcleo del calor en la recta real

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}. \tag{3.5}$$

Esto prueba que $H_t(x)$ es positiva. Por otra parte, observamos que (3.5) cumple, para cada $\delta \in (0, 1/2)$,

$$\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \leq e^{-x^2/8t} \frac{c_1}{\sqrt{t}} \left(\frac{4t}{x^2}\right)^{1/2} \lesssim e^{-x^2/8t} \frac{c_1}{|x|} \leq c_{1\delta} e^{-c_{2\delta}/t},$$

con $c_{1\delta}, c_{2\delta} \in \mathbb{R}$ y $\delta \leq x \leq 1/2$. Análogamente, se prueba que

$$\sum_{|n| \geq 1} \mathcal{H}_t(x + n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{|n| \geq 1} e^{-(x+n)^2/4t} \leq c_1 t^{-1/2} \sum_{n \geq 1} e^{-c_2 n^2/t} \leq c_1 e^{-c_2/t},$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 > 0$, $t \in (0, 1]$ y todo $x \in [-1/2, 1/2]$. Por tanto,

$$\omega_t(\delta) = \max_{\delta \leq |x| \leq 1/2} H_t(x) \leq \max_{\delta \leq |x| \leq 1/2} \mathcal{H}_t(x) + c_1 e^{-c_2/t} \leq c_{1\delta} e^{-c_{2\delta}/t} + c_1 e^{-c_2/t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

¹ Usando que $e^{-x} \leq C/x^\alpha$ con $\alpha = 1/2$.

Esto prueba que $\{H_t\}_{t>0}$ es una aproximación a la identidad.

Nos queda probar (3.4). Sea $h_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x+n)$ el lado derecho de (3.4). Nótese que $h_t(x)$ está bien definida para $t > 0$ (la serie converge uniformemente), es positiva, continua y periódica. Por ello, del teorema 2.17, bastará con ver que H_t y h_t tienen los mismos coeficientes de Fourier, es decir, que $\hat{h}_t(n) = e^{-4\pi^2 n^2 t}$, si $n \in \mathbb{Z}$. Para ver esto, obsérvese que

$$\begin{aligned} \hat{h}_t(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x+k) \right) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{H}_t(x+k) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-1/2+k}^{1/2+k} \mathcal{H}_t(y) e^{-2\pi i n y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4t} e^{-2\pi i n y} \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(\frac{y}{\sqrt{4\pi t}}\right)^2} e^{-2\pi i n \left(\frac{y}{\sqrt{4\pi t}}\right) \sqrt{4\pi t}} \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i n \sqrt{4\pi t} x} dx = e^{-4\pi^2 n^2 t}, \end{aligned}$$

ya que (tomando $\xi = n\sqrt{4\pi t}$ en la siguiente proposición)

Proposición 3.1. Para todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

Demostración. La función

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

es de clase \mathcal{C}^∞ por ser la integral absolutamente convergente. Así, derivando respecto a ξ e integrando por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} e^{-\pi x^2} \right) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= -2\pi \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi \xi g(\xi), \end{aligned}$$

y por tanto $g(\xi) = g(0) e^{-\pi \xi^2}$. Por último, como $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$, concluimos que $g(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$. □

Así pues, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.2. La única solución de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$, con condiciones de frontera $u(-1/2, t) = u(1/2, t) = 0$ y condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, es

$$u(x, t) = (f * H_t)(x),$$

siendo $H_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}$ el núcleo del calor.

3.2. La ecuación de Laplace y el problema de Dirichlet

Tras un largo periodo de tiempo, en los procesos térmicos descritos por la variante bidimensional de la ecuación (3.1), es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

el sistema alcanza el equilibrio térmico cuando no existe transferencia de calor y $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. En este caso, se tiene la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.6}$$

El operador Δ se llama Laplaciano y las soluciones de (3.6) funciones armónicas [5].

Consideramos ahora el disco unidad en el plano $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$, cuya frontera es la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$. En coordenadas polares $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, \mathbb{D} y \mathbb{T} se describen, respectivamente, como, $\{(r, \theta) : 0 \leq r < 1\}$ y $\{(r, \theta) : r = 1\}$.

El problema, conocido como el problema de Dirichlet, consiste en resolver la ecuación de Laplace en el disco unidad sujeta a la condición $u = f$ en \mathbb{T} . Físicamente, ésta corresponde a fijar una temperatura determinada en la frontera del disco, esperar un largo periodo de tiempo, y observar la distribución de temperatura en su interior [14, pág. 20]. En coordenadas polares, resulta ser $u(1, \theta) = f(\theta)$ (ver [14, pág. 21]). Por otra parte, el operador laplaciano Δu respecto de las variables (r, θ) se obtiene aplicando la regla de la cadena

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Ahora, multiplicamos a ambos lados en (3.6) por r^2 y la ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \tag{3.7}$$

Aplicando el método de separación de variables, suponemos que la solución es del tipo $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Entonces

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Como cada lado depende de una variable distinta, ambos serán constantes, pongamos, iguales a un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Así

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases}$$

Las soluciones 2π -periódicas para la primera de estas ecuaciones son de la forma $\Theta(\theta) = e^{\lambda\theta}$, con $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\Theta(\theta) = A e^{in\theta} + B_n e^{-in\theta}$. Para este valor de λ , las soluciones de la otra ecuación con $n = 0$ son $R(r) = 1$ y $R(r) = \log r$, aunque descartamos esta última por no ser una función regular cuando r tiende a 0. Si $n \neq 0$, es sencillo ver que las soluciones son $R(r) = r^{|n|}$ y $R(r) = r^{-|n|}$, mas deseamos la segunda porque, nuevamente, no es regular cerca del cero (no está acotada cuando $r \rightarrow 0^+$).

Luego, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $u_n(r, \theta) := r^{|n|} e^{in\theta}$, es solución de la ecuación de Laplace (3.7).

Ahora, observamos que (3.7) es una ecuación lineal, por lo que podemos escribir

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad 0 < r < 1, \theta \in [0, 2\pi], \tag{3.8}$$

como “solución general”. Nótese que los “ a_n ” deberán ser adecuados para que la serie sea convergente. Además, queremos que se cumpla la condición de frontera, esto es

$$u(1, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} =: f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Así pues, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, los coeficientes a_n deben coincidir con la versión 2π -periódica de los coeficientes de Fourier de f , para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Hemos probado así el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *La única solución de la ecuación de Laplace (3.6) es (en coordenadas polares)*

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \quad r \in (0, 1), \theta \in [0, 2\pi].$$

Observación 3.4. Dicha solución se puede expresar como una convolución

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-x)} dx = (P_r * f)(\theta),$$

donde P_r es el núcleo de Poisson (ver figura 2.2).

3.3. La desigualdad isoperimétrica

La versión clásica de la desigualdad isoperimétrica establece que, dada una curva cerrada simple y derivable $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces

$$A_{\hat{\gamma}} \leq \ell_{\gamma}^2 / 4\pi, \tag{3.9}$$

donde $\hat{\gamma}$ denota la región acotada por γ , $A_{\hat{\gamma}}$ su área y ℓ_{γ} su longitud. Además, habrá igualdad si, y solo si, dicha curva es una circunferencia (ó $\hat{\gamma}$ es un círculo). En otras palabras:

“De entre todas las curvas cerradas simples con longitud dada, la que encierra mayor área es la circunferencia”.

Para probar este resultado, usaremos el siguiente lema, atribuido a Wirtinger (ver [10]).

Lema 3.5 (Desigualdad de Wirtinger). *Sea $u = u(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Denotamos por $u_0 = \int_0^1 u(x) dx = \hat{u}(0)$. Entonces,*

$$\int_0^1 |u(x) - u_0|^2 dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx, \tag{3.10}$$

con igualdad si, y solo si, $u(x) = u_0 + a \cos(2\pi x) + b \sen(2\pi x)$, $a, b \in \mathbb{C}$. En particular, si u es una función real, a y b son también valores reales.

Demostración. Puesto que u es $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, sabemos que su serie de Fourier converge uniformemente y

$$u(x) - u_0 = \sum_{n \neq 0} \hat{u}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Además,

$$u'(x) = \sum_{n \neq 0} 2\pi i n \hat{u}(n) e^{2\pi i n x}$$

en $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ya que $u' \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. De la igualdad de Plancherel (2.1), obtenemos que

$$\frac{1}{4\pi^2} \|u'\|_2^2 = \sum_{n \neq 0} |n|^2 |\hat{u}(n)|^2 = \sum_{n \neq 0} |n|^2 |\hat{u}(n)|^2,$$

ya que el término en $n = 0$ se anula. Por tanto, aplicando de nuevo (2.1)

$$\|u - u_0\|_2^2 = \sum_{n \neq 0} |\hat{u}(n)|^2 \leq \sum_{n \neq 0} |n|^2 |\hat{u}(n)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \|u'\|_2^2.$$

Observamos que solo podría haber igualdad si $\hat{u}(n) = 0$, $n \geq 2$, y en tal caso

$$u(x) = u_0 + \hat{u}(1) e^{2\pi i x} + \hat{u}(-1) e^{-2\pi i x}.$$

El resultado se obtiene tomando $a = \hat{u}(1) + \hat{u}(-1)$ y $b = i(\hat{u}(1) - \hat{u}(-1))$. □

Sabemos, del teorema de Green, que el área de una curva se puede expresar como una integral de línea (ver [5, cap. 5])

$$A = \left| \int_{\gamma} x dy \right|. \quad (3.11)$$

Además, si γ es cerrada, podemos parametrizarla como $\gamma(t) = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1$, con $x(t), y(t)$ funciones \mathbb{Z} -periódicas. Luego,

$$A = \left| \int_0^1 x(t) \dot{y}(t) dt \right|. \quad (3.12)$$

Por otra parte, observamos que

$$\int_0^1 x(t) \dot{y}(t) dt = \int_0^1 (x(t) - x_0) \dot{y}(t) dt,$$

por ser $y(t)$ periódica. Así

$$A \leq \int_0^1 |x(t) - x_0| |\dot{y}(t)| dt.$$

Ahora bien, dados dos números reales cualesquiera a y b , se cumple que $2ab \leq a^2 + b^2$, con igualdad si, y solo si $b = a$. Esto es equivalente a que $2ab \leq \lambda a^2 + b^2 / \lambda$, $\lambda > 0$, teniendo igualdad si, y solo si, $b = \lambda a$. Si tomamos $\lambda = 2\pi$, $a = x(t) - x_0$ y $b = \dot{y}(t)$,

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(2\pi |x(t) - x_0|^2 + \frac{1}{2\pi} \dot{y}(t)^2 \right) dt \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{4\pi^2} \int_0^1 \dot{x}(t)^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \dot{y}(t)^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) dt = \ell^2 / 4\pi, \end{aligned}$$

con igualdad si, y solo si, se da la igualdad en la desigualdad de Wirtinger. Luego,

$$x(t) = x_0 + \rho \cos(2\pi t + \omega), \quad \rho > 0, \omega \in \mathbb{R},$$

y como hay igualdad, $\dot{y}(t) = \pm 2\pi(x(t) - x_0) = \pm 2\pi\rho \cos(2\pi t + \omega)$. Integrando, obtenemos que $y(t) = y_0 \pm \rho \sin(2\pi t + \omega)$, esto es, $(x(t), y(t))$ es la parametrización de una circunferencia.

Ahora veremos que, en cierto sentido, la desigualdad isoperimétrica es equivalente al lema de Wirtinger. Consideramos $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ una función no nula y tomamos $v(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Entonces, la curva $\gamma(x) = (u(x), v(x))$ es cerrada y suave. Su longitud, por la desigualdad de Hölder, cumple

$$\ell_{\gamma} = \int_0^1 (u'(x)^2 + v'(x)^2)^{1/2} dx \leq \left[\int_0^1 (u'(x)^2 + v'(x)^2) dx \right]^{1/2}.$$

Por otra parte, si definimos el área de la curva como en (3.12)², de (3.9)

$$A_{\hat{\gamma}} \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^1 (u'(x)^2 + v'(x)^2) dx, \quad u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Reemplazamos v por λv y se tiene que

$$|\lambda| \left| \int_0^1 u(x)v'(x) dx \right| \leq \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^1 u'(x)^2 dx + \lambda^2 \int_0^1 v'(x)^2 dx \right).$$

que es una inecuación de segundo grado. Esto implica que

$$\left| \int_0^1 u(x)v'(x) dx \right|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 u'(x)^2 dx \int_0^1 v'(x)^2 dx. \quad (3.13)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_0 = 0$ (o, lo que es lo mismo, que $u_0 \in \mathcal{C}_0^1 := \{u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) : u_0 = 0\}$) pues, si fuera $u_0 \neq 0$, tomamos v de manera que $v' = u - u_0$. Así, (3.10) queda probado.

3.3.1. Wirtinger vs Rayleigh. Un problema de autovalores asociado a la desigualdad de Wirtinger.

Para acabar con esta sección, veremos que el valor $\lambda = 4\pi^2$ está asociado a un problema de autovalores respecto del operador laplaciano. De hecho, el resultado es algo más general, dado en [17].

Teorema 3.6. *Si*

$$\inf_{u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \lambda,$$

entonces λ es el autovalor principal del problema de autovalores

$$v'' + \lambda v = 0, \quad (3.14)$$

con $v \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Demostración. Definimos el operador

$$\lambda[v] = \frac{\|v'\|_2^2}{\|v\|_2^2}, \quad (3.15)$$

con $v \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ no nula. Este se conoce como **cociente de Rayleigh**. Como es positivo, existe el ínfimo. Supongamos entonces que dicho ínfimo se alcanza en una cierta función $u \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, es decir, que existe $\lambda = \lambda[u]$ tal que $\inf_{v \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} \lambda[v] := \lambda$.

² Esta definición solo representará el área geométrica de la curva cuando esta sea simple.

En ese caso, tomamos $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $\tau \in \mathbb{R}$ y computamos el cociente de Rayleigh sobre la función $u + \tau\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Se tiene que

$$\lambda[u + \tau\phi] = \frac{\|(u + \tau\phi)'\|_2^2}{\|u + \tau\phi\|_2^2}. \quad (3.16)$$

Obsérvese que (3.16) es una función \mathcal{C}^1 (como función de τ), que alcanza su mínimo en $\tau = 0$, es decir, $\left. \frac{d(\lambda[u + \tau\phi])}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$. Si calculamos esta derivada, nos queda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\|(u + \tau\phi)'\|_2^2}{\|u + \tau\phi\|_2^2} \right) &= \frac{d}{d\tau} (\|(u + \tau\phi)'\|_2^2) \frac{1}{\|u + \tau\phi\|_2^2} - \frac{\|(u + \tau\phi)'\|_2^2}{\|u + \tau\phi\|_2^4} \frac{d}{d\tau} (\|u + \tau\phi\|_2^2) \\ &= \frac{2}{\|u + \tau\phi\|_2^2} \left(\int_0^1 \operatorname{Re}(u'\overline{\phi'}) dx + \tau \|\phi'\|_2^2 \right) - \frac{2\|(u + \tau\phi)'\|_2^2}{\|u + \tau\phi\|_2^4} \left(\int_0^1 \operatorname{Re}(u\overline{\phi}) dx + \tau \|\phi\|_2^2 \right) \end{aligned}$$

y, evaluando en $\tau = 0$, obtenemos

$$\left. \frac{d}{d\tau} (\lambda[u + \tau\phi]) \right|_{\tau=0} = \frac{2}{\|u\|_2^2} \int_0^1 \operatorname{Re}(u'(x)\overline{\phi'(x)}) dx - \frac{2\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^4} \int_0^1 \operatorname{Re}(u(x)\overline{\phi(x)}) dx$$

Como $\left. \frac{d}{d\tau} (\lambda[u + \tau\phi]) \right|_{\tau=0} = 0$, se sigue que

$$\int_0^1 \operatorname{Re}(u'(x)\overline{\phi'(x)}) dx = \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} \int_0^1 \operatorname{Re}(u(x)\overline{\phi(x)}) dx.$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{Im}(u'(x)\overline{\phi'(x)}) dx &= \int_0^1 \operatorname{Re}(-iu'(x)\overline{\phi'(x)}) dx = \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} \int_0^1 \operatorname{Re}(-iu(x)\overline{\phi(x)}) dx \\ &= \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} \int_0^1 \operatorname{Im}(u(x)\overline{\phi(x)}) dx. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^1 u'(x)\overline{\phi'(x)} dx = \lambda \int_0^1 u(x)\overline{\phi(x)} dx \quad (3.17)$$

Integrando por partes, obtenemos que

$$\int_0^1 u'(x)\overline{\phi'(x)} dx = - \int_0^1 u''(x)\overline{\phi(x)} dx$$

por ser ϕ una función \mathbb{Z} -periódica. Así,

$$\int_0^1 (u''(x) + \lambda u(x))\overline{\phi(x)} dx = 0.$$

Esto nos dice que $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ y λ es un autovalor asociado al operador laplaciano $L[v] = -v''$, con $u \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ autofunción asociada a λ o, lo que es lo mismo, que u es solución del problema de autovalores $Lv = \lambda v$, con $v \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Por último, veamos que si μ es otro autovalor del operador L , entonces $\mu \geq \lambda$. Sea μ otro autovalor y $v \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ una autofunción asociada. Tenemos que,

$$\int_0^1 |v'(x)|^2 dx = \int_0^1 v'(x) \overline{v'(x)} dx = \mu \int_0^1 |v(x)|^2 dx.$$

Entonces, $\mu = \|v'\|_2^2 / \|v\|_2^2 = \lambda[v] \geq \lambda$. Concluimos así que λ es el autovalor principal del operador laplaciano en el problema

$$\begin{cases} Lv = \lambda v, \\ v \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}). \end{cases} \tag{3.18}$$

□

Observación 3.7. La existencia y regularidad que se requiere de la función minimizante u es algo más difícil de demostrar y sólo diremos que se basa, como siempre, en un argumento de compacidad: aunque la bola unidad en L^2 no es compacta, cualquier sucesión minimizante del funcional λ tiene derivadas uniformemente acotadas en L^2 , es decir, pertenecen al espacio $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{C}_0^1 : \|u\|_2, \|u'\|_2 \lesssim 1\}$ ³. Esto, junto con la ecuación (3.18), implica que $u \in \mathcal{C}^2$ (esto se puede ver directamente de (3.17)); la prueba de lemma 1.3.4 (pág. 10) en [9] sigue siendo válida si $u' \in L^2$.

³ De lo que ya se desprende cierta regularidad puesto que $\mathcal{E} \subset \Lambda_{1/2}$.

A

Apéndice

A.1. El lema de Riemann-Lebesgue revisado.

Consecuencia del lema de Riemann-Lebesgue es el siguiente

Corolario A.1. Si $E \subset (0, 1)$ es un conjunto medible y (ω_n) cualquier sucesión de números reales, entonces

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(\pi n x + \omega_n) dx = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_E \sin^2(\pi n x + \omega_n) dx = |E|/2.$$

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned} \lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(\pi n x + \omega_n) dx &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_E \left(\frac{e^{i(\pi n x + \omega_n)} + e^{-i(\pi n x + \omega_n)}}{2} \right)^2 dx \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_E (e^{2\pi i n x + 2i\omega_n} + e^{-2\pi i n x - 2i\omega_n} + 2) dx \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} |E| + \frac{1}{4} \left(e^{2i\omega_n} \int_E e^{2\pi i n x} dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-2i\omega_n} \int_E e^{-2\pi i n x} dx \right) \right] = \frac{1}{2} |E|, \end{aligned}$$

ya que $|e^{2i\omega_n}| = |e^{-2i\omega_n}| = 1$ y que, por el lema de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_E e^{2\pi i n x} dx = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_0^1 \chi_E(x) e^{2\pi i n x} dx = 0,$$

donde χ_E denota la función característica de E .

Para finalizar, que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_E \sin^2(\pi n x + \omega_n) dx = |E|/2$ sigue de lo que hemos probado sin más que tener en cuenta que

$$|E| = \int_E \cos^2(\pi n x + \omega_n) dx + \int_E \sin^2(\pi n x + \omega_n) dx$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

□

El siguiente resultado generaliza el lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema A.2 (Lema de Fejér). Si $\alpha \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \alpha(x) \beta(nx) dx = \int_0^1 \alpha(x) dx \cdot \int_0^1 \beta(x) dx.$$

Demostración. Supongamos primero que $\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es un polinomio trigonométrico de grado $\leq N$. Entonces, si $\beta_n(x) = \beta(nx)$, por la igualdad de Parseval ([16, chapter 16]),

$$\int_0^1 \alpha(x) \beta(nx) dx = \sum_{-N}^N \hat{\alpha}(k) \widehat{\beta}_n(-k). \quad (\text{A.1})$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_n(-k) &= \int_0^1 e^{2\pi i k x} \beta(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^n e^{2\pi i (k/n)t} \beta(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} e^{2\pi i (k/n)t} \beta(t) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 e^{2\pi i (k/n)(\tau+j)} \beta(\tau) d\tau = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i n (k/n) j} \right) \int_0^1 e^{2\pi i (k/n)\tau} \beta(\tau) d\tau \end{aligned}$$

pero, si $\ell = k/n$

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i \ell j} = \begin{cases} \frac{1 - e^{2\pi i k}}{1 - e^{2\pi i \ell}} = 0, & \text{si } \ell \notin \mathbb{Z}, \\ n, & \text{si } \ell \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Así, (A.1) se puede escribir como

$$\int_0^1 \alpha(x) \beta(nx) dx = \sum_{|\ell| \leq N/n} \hat{\alpha}(\ell n) \hat{\beta}(-\ell n) = \hat{\alpha}(0) \hat{\beta}(0) = \int_0^1 \alpha(x) dx \cdot \int_0^1 \beta(x) dx \quad (\text{A.2})$$

si $n > N$.

Si $\alpha \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico p tal que $\|\alpha - p\|_1 < \varepsilon$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \alpha(x) \beta(nx) dx - \hat{\alpha}(0) \hat{\beta}(0) \right| &\leq \left| \int_0^1 (\alpha(x) - p(x)) \beta(nx) dx - \widehat{(\alpha - p)}(0) \hat{\beta}(0) \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 p(x) \beta(nx) dx - \hat{p}(0) \hat{\beta}(0) \right| \leq 2 \|\beta\|_\infty \varepsilon \end{aligned}$$

ya que, por (A.2), el segundo sumando se anula tan pronto n sea mayor que el grado de p .

Alternativamente, como

$$\int_0^1 \alpha(x) \beta(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^n \alpha(t/n) \beta(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \alpha\left(\frac{\tau+j}{n}\right) \beta(\tau) d\tau$$

¹ β es \mathbb{Z} -periódica

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha \left(\frac{\tau + j}{n} \right) \right) \beta(\tau) d\tau,$$

por ser β una función \mathbb{Z} -periódica, si α es continua.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha \left(\frac{\tau + j}{n} \right) = \int_0^1 \alpha(x) dx$$

uniformemente en τ (el miembro de la izquierda representa la suma de Riemann). Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \alpha(x) \beta nx dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha \left(\frac{\tau + j}{n} \right) \right) \beta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha \left(\frac{\tau + j}{n} \right) \right) \beta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \alpha(x) dx \right) \beta(\tau) d\tau = \int_0^1 \alpha(x) dx \cdot \int_0^1 \beta(x) dx \end{aligned}$$

y el resultado sigue de la densidad de las funciones continuas en $L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. \square

Obsérvese que el lema de Riemann-Lebesgue (lema 2.1) corresponde al caso especial $\beta(x) = e_{\pm 1}(x) = e^{\pm 2\pi i x}$. Como ejemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \alpha(x) |\operatorname{sen}(2\pi nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \alpha(x) dx.$$

A.1.1. El lema de Cantor-Lebesgue.

Consideremos la serie trigonométrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi nx) + b_n \operatorname{sen}(\pi nx)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$$

y sea $B_n(x) := a_n \operatorname{sen}(\pi nx) - b_n \cos(\pi nx)$, $n = 1, 2, \dots$ La versión clásica del lema de Cantor-Lebesgue establece que

Lema A.3. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos(\pi nx) + b_n \operatorname{sen}(\pi nx)) = 0$$

para x en un conjunto $E \subset (0, 1)$ de medida positiva, entonces $a_n, b_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Sean $\varrho_n \geq 0$ y $\omega_n \in \mathbb{R}$ tales que $A_n = \varrho_n \cos(\pi n x + \omega_n)$ y $B_n = \varrho_n \sin(\pi n x + \omega_n)$. Entonces, si $\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ no tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $n_1 < n_2 < \dots < n_k \rightarrow \infty$ tal que $\varrho_{n_k} \geq \varepsilon$ para todo $k = 1, 2, \dots$. Puesto que por hipótesis $A_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ en E , $\cos(\pi n_k x + \omega_{n_k}) \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$ en E . Pero, por el corolario A.1 y el teorema de la convergencia dominada

$$|E|/2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(\pi n_k x + \omega_{n_k}) dx = 0.$$

Esta contradicción prueba el lema. □

A.2. Decaimiento de los coeficientes de Fourier y regularidad.

En esta sección investigaremos la relación que existe entre la regularidad de una función y el decaimiento de sus coeficientes de Fourier (ver [6]). Veremos que este decaimiento refleja de un modo cuantitativo su grado de regularidad.

A.2.1. Funciones suaves.

La regularidad de una función se puede medir estimando su tamaño de varias formas. Para ello volvemos a considerar algunos espacios de funciones relevantes para esto.

Definición A.4. Para $0 \leq \alpha \leq 1$ sea

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = \sup_{\substack{0 \leq x, y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

y

$$\dot{\Lambda}_\alpha = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es } \mathbb{Z}\text{-periódica y } \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} < \infty\},$$

el espacio de Hölder homogéneo de orden α . A sus elementos los llamaremos funciones de Hölder de orden α .

Aunque el funcional $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ es positivo ($\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \geq 0$ si $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$) y satisface la desigualdad triangular, no es una norma ya que $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = 0$ si f es constante. Así, $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ es una seminorma en $\dot{\Lambda}_\alpha$. Sin embargo, sí que resulta ser una norma en el espacio $\Lambda_\alpha := \dot{\Lambda}_\alpha / \{\text{constantes}\}$, donde identificamos funciones en $\dot{\Lambda}_\alpha$ si su diferencia es constante. $\dot{\Lambda}_0 = L^\infty$ y $\dot{\Lambda}_\alpha \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset L^\infty$ para $0 < \alpha \leq 1$ pero no existe ninguna constante $C > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ para toda $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$. A pesar de esto, si $0 \leq x_0 \leq 1$, la aplicación lineal $\dot{\Lambda}_\alpha \hookrightarrow L^\infty$ dada por $f \mapsto f - f(x_0)$ embebe $\dot{\Lambda}_\alpha$ en L^∞ . El núcleo de esta aplicación es el subespacio de todas las aplicaciones constantes y por tanto Λ_α se identifica con un subespacio de L^∞ (en sentido algebraico).

Esta discusión permite ver que el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha} = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ dota a Λ_α de una estructura de espacio de Banach.

El siguiente resultado muestra cómo la regularidad se refleja en el decaimiento de los coeficientes de Fourier.

Proposición A.5. Sean $s \in \mathbb{N}$ y f \mathbb{Z} -periódica.

(a) Si $f^{(k)}$ existe y es integrable para todo $0 \leq k \leq s$, entonces

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{|\widehat{f^{(s)}}(n)|}{(2\pi|n|)^s}, \quad n \neq 0. \tag{A.3}$$

(b) Si además suponemos que $f^{(s)} \in \Lambda_\alpha$, para algún $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{(2\pi)^s 2^{\alpha+1}} \frac{\|f^{(s)}\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}}{|n|^{s+\alpha}}, \quad n \neq 0. \tag{A.4}$$

Demostración. Hemos visto en la prueba de la proposición 2.12 que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{(2\pi i n)^s} \widehat{f^{(s)}}(n).$$

Así, (A.3) sigue tomando módulo.

Para probar (b), basta con tener en cuenta que

$$|\widehat{f^{(s)}}(n)| \leq 2 \frac{1}{2} \omega_{f^{(s)}}\left(\frac{1}{2|n|}\right) \leq \frac{1}{2^{\alpha+1}} \frac{\|f^{(s)}\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}}{|n|^\alpha},$$

y (A.4) es consecuencia inmediata de (A.3). □

Otra forma de reformular (A.3) y (A.4) en términos más generales es

$$|\hat{f}(n)| \leq c_s \frac{\max\{\|f\|_1, |\widehat{f^{(s)}}(n)|\}}{(1 + |n|)^s} \tag{A.2*}$$

y

$$|\hat{f}(n)| \leq c_{s,\alpha} \frac{\max\{\|f\|_1, \|f^{(s)}\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}\}}{(1 + |n|)^{s+\alpha}}, \tag{A.3*}$$

para ciertas constantes $c_s, c_{s,\alpha} > 0$, y todo $n \in \mathbb{Z}$.

La siguiente proposición nos da un recíproco parcial a la proposición A.5. Sea $\lfloor\lfloor s \rfloor\rfloor = \max\{k : k < s, k \in \mathbb{Z}\}$ el mayor entero estrictamente más pequeño que un número real dado s .

Proposición A.6. Sean $s > 0$ y f una función \mathbb{Z} -periódica integrable tal que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{(1 + |n|)^{1+s}}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, f tiene derivadas hasta orden $\lfloor\lfloor s \rfloor\rfloor$ y $f^{[\lfloor\lfloor s \rfloor\rfloor]} \in \Lambda_\alpha$ para todo $0 < \alpha < s - \lfloor\lfloor s \rfloor\rfloor$.

$$^2 \quad \|f^{(s)}\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_{f^{(s)}}(\delta)}{\delta^\alpha} \text{ y tomamos } \delta = 1/2|n|.$$

Demostración. En primer lugar, sabemos que

$$A_f = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{(1+|n|)^{1+s}} < \infty.$$

Luego, la serie de Fourier converge absolutamente y $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ para todo $x \in [0, 1)$. Esta serie se puede derivar hasta orden $\llbracket s \rrbracket$ ya que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \frac{d^k}{dx^k} e^{2\pi inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} (2\pi in)^k \hat{f}(n) e^{2\pi inx},$$

y esta última serie converge absolutamente para todo $0 \leq k \leq \llbracket s \rrbracket$ a la vista de la hipótesis de decaimiento de los coeficientes de Fourier de f . Además,

$$f^{(\llbracket s \rrbracket)}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (2\pi in)^{\llbracket s \rrbracket} \hat{f}(n) e^{2\pi inx}.$$

Ahora, si $0 < \alpha < s - \llbracket s \rrbracket$, entonces

$$\begin{aligned} |f^{(\llbracket s \rrbracket)}(x-h) - f^{(\llbracket s \rrbracket)}(x)| &= \left| \sum_{-\infty}^{\infty} (2\pi in)^{\llbracket s \rrbracket} \hat{f}(n) e^{2\pi inx} (e^{2\pi in h} - 1) \right| \\ &\leq 2(2\pi)^{\llbracket s \rrbracket} \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{\llbracket s \rrbracket} |\hat{f}(n)| |\operatorname{sen}(n\pi h)| \\ &\leq 2(2\pi)^{\llbracket s \rrbracket} \pi^\alpha \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{\llbracket s \rrbracket + \alpha} |\hat{f}(n)| \right) |h|^\alpha \\ &\leq 2^{1+\llbracket s \rrbracket} \pi^{\llbracket s \rrbracket + \alpha} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{1+s-\llbracket s \rrbracket - \alpha}} \right) |h|^\alpha \leq c_{s,\alpha} |h|^\alpha, \end{aligned}$$

ya que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|^\alpha$, para todo x , si $0 \leq \alpha \leq 1$ (figura A.1). □

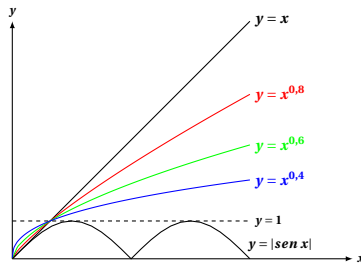


Figura A.1. $|\operatorname{sen} x| \leq x^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Corolario A.7. Si $k = 1, 2, \dots$ es entero y f una función \mathbb{Z} -periódica e integrable tal que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{(1+|n|)^{1+k}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces $f^{(k-1)} \in \Lambda_\alpha$ para todo $0 < \alpha < 1$. En particular, $f \in \mathcal{C}^{k-1}$.

Así, podemos caracterizar con este corolario las funciones de clase \mathcal{C}^∞ como aquellas cuyos coeficientes de Fourier decaen rápidamente.

Corolario A.8. *Sea f una función \mathbb{Z} -periódica e integrable. Entonces $f \in \mathcal{C}^\infty$ si, y solo si, para todo $k = 1, 2, \dots$, $\sup\{(1 + |n|)^k |\hat{f}(n)| / n \in \mathbb{Z}\} < +\infty$.*

A.2.2. Funciones analíticas.

Recordamos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica si su serie de Taylor alrededor de cualquier punto converge en algún entorno de dicho punto, es decir, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ converge en algún intervalo $|x - x_0| < \delta$ ($\delta = \delta(x_0) > 0$). Para funciones \mathbb{Z} -periódicas tenemos

Proposición A.9. *Una función \mathbb{Z} -periódica f es analítica si, y solo si, $f \in \mathcal{C}^\infty$ y existen constantes $M > 0$ y $\rho > 0$ tales que $\|f^{(k)}\|_\infty \leq Mk!/\rho^k$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$*

Demostración. Obviamente, $f \in \mathcal{C}^\infty$ si f es analítica. Para el crecimiento de las derivadas usaremos las estimaciones de Cauchy [13, theorem 10.26]. Si f es analítica, f será la restricción (para algún $\rho_0 > 0$) de alguna función \tilde{f} holomorfa en una banda $|\text{Im}z| < \rho_0$ (ρ_0 es el radio uniforme de convergencia para la serie de Taylor centrada en cualquier punto del intervalo $[0, 1]$, por ejemplo). Si $\rho < \rho_0$ y $x \in \mathbb{R}$, como \tilde{f} es holomorfa en el disco de centro x y radio ρ , por [13, theorem 10.26], $|f^{(k)}(x)| \leq Mk!/\rho^k$ ($M = \max\{|\tilde{f}(z)| / |\text{Im}z| \leq \rho\}$). Así, $\|f^{(k)}\|_\infty \leq Mk!/\rho^k$ si $k = 0, 1, 2, \dots$ Recíprocamente, es inmediato que la serie $\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ converge absolutamente en $|x - x_0| < \rho$ si $|f^{(k)}(x_0)| \leq Mk!/\rho^k$ para $k = 1, 2, \dots$ □

La caracterización de la analiticidad en términos de los coeficientes de Fourier viene dada en el siguiente teorema.

Teorema A.10. *Una función \mathbb{Z} -periódica integrable f es igual (en casi todo punto) a una función analítica si, y solo si, existen constantes $M > 0$ y $c > 0$ tales que*

$$|\hat{f}(n)| \leq Me^{-c|n|} \tag{A.5}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Si f es \mathbb{Z} -periódica y analítica, de las proposiciones A.5 y A.9 se tiene que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{(2\pi)^k} \frac{|\widehat{f^{(k)}}(n)|}{|n|^k} \leq \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{(2\pi|n|)^k} \leq \frac{Mk!}{(2\pi\rho|n|)^k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

cuando $n \neq 0$. Es claro que $\hat{f}(0)$ es finito. Si elegimos $k = \lfloor 2\pi\rho|n| \rfloor$ y tenemos en cuenta la fórmula de Stirling para el factorial concluimos que $|\hat{f}(n)| \leq Me^{-2\pi\lambda|n|}$ para $0 < \lambda < \rho$. Esto es (A.5) con $c = 2\pi\lambda$.

Recíprocamente, si los coeficientes de Fourier de f tienen este decaimiento exponencial, su serie de Fourier converge absolutamente (observación A.11) y para todo $k = 0, 1, \dots$

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq \sum_{-\infty}^{\infty} (2\pi|n|)^k e^{-2\pi\lambda|n|} \leq \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi|t|)^k e^{-2\pi\lambda|t|} dt = Ak!/\lambda^{k+1},$$

donde $A = 1/\pi$. De nuevo, la proposición A.9 implica que f es analítica. \square

Alternativamente, el decaimiento exponencial dictado en (A.5) también puede verse usando técnicas de variable compleja. Como en la demostración de la proposición A.9, toda función \mathbb{Z} -periódica admite una extensión holomorfa (que seguiremos denotando por f y que, por el principio de identidad, aún será \mathbb{Z} -periódica) a la banda $S : |\text{Im}z| < \varrho_0$. Si $0 < \varrho < \varrho_0$, $n > 0$ y $\gamma_n \subset S$ es el borde del rectángulo con vértices $0, -i\varrho, 1 - i\varrho$ y 1 , por el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x) dx = \int_0^1 e^{-2\pi in(x-i\varrho)} f(x-i\varrho) dx \\ &\quad - i \int_0^\varrho e^{-2\pi nx} f(-ix) dx + i \int_0^\varrho e^{-2\pi n(1-ix)} f(1-ix) dx \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi in(x-i\varrho)} f(x-i\varrho) dx = e^{-2\pi\varrho n} \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x-i\varrho) dx, \end{aligned}$$

ya que f es \mathbb{Z} -periódica y $e^{-2\pi in} = 1$. Así,

$$|\hat{f}(n)| \leq e^{-2\pi\varrho n} \int_0^1 |f(x-i\varrho)| dx \lesssim_f e^{-2\pi\varrho n}.$$

El resultado para los coeficientes de Fourier negativos sigue de la misma forma sin más que reflejar γ_n respecto al eje OX o tener en cuenta que $\hat{f}(-n) = \widehat{f_-}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ si $f_-(x) := f(-x)$ ($x \in \mathbb{R}$) y aplicar lo que acabamos de probar a f_- en lugar de a f .

Quizá, más elemental es la siguiente prueba debida a Bernstein ([12, Proposition 18E.3, pág. 463]): partiendo también de la demostración de la proposición A.9, f coincide en casi todo punto con una función analítica si, y solo si, la función $g(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$ (que viene caracterizada por la relación $g(e^{2\pi iw}) = \tilde{f}(w)$) es holomorfa en el anillo $A : e^{-2\pi\varrho_0} < |z| < e^{2\pi\varrho_0}$. La fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia implica que $\limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\hat{f}(n)|^{1/|n|} \leq e^{-2\pi\varrho}$ y de aquí el decaimiento exponencial en la proposición A.9.

Observación A.11. Como cabe esperar, la velocidad de convergencia de la serie de Fourier de funciones analíticas es mucho mayor que para funciones suaves (que por la proposición 2.12 sabemos que es de orden $o(1/N^{k-1/2})$ si la función es de clase \mathcal{C}^k). De hecho, si f es analítica, de (A.5) tenemos

$$\|f - S_N f\|_\infty \leq \sum_{n>N} |\hat{f}(n)| \leq \sum_{|n|>N} e^{-c|n|} \leq 2e^{-c(N+1)} \sum_{k \geq 0} e^{-ck} = \frac{2e^{-cN}}{e^c - 1}.$$

Es decir, $S_N f \rightarrow f$ exponencialmente cuando $N \rightarrow \infty$.

A.3. La fórmula de sumación de Poisson.

La demostración de la identidad (3.4) en la sección 3.1 nada tiene que ver con que se esté tratando del núcleo del calor. La fórmula de sumación de Poisson ([13, chapter 4] y [15, chapter 5]), que probaremos en este apartado, proporciona una relación entre el análisis de funciones periódicas y aquellas definidas en \mathbb{R} .

Dada una función adecuada f definida en \mathbb{R} , podemos considerar la función \mathbb{Z} -periódica

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

si la serie converge (formalmente $F(x+1) = F(x)$). Como en la sección 3.1 llamaremos a F la *periodización* de f .

Otra forma de llegar a la ‘versión periódica’ de f usando análisis de Fourier es

$$G(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

si esta serie resulta convergente. Aquí,

$$\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

denota la ‘versión continua’ de los coeficientes de Fourier de f . Además, G también es \mathbb{Z} -periódica ya que los caracteres $e_n(x) = e^{2\pi inx}$ lo son.

El hecho fundamental es que estos dos procedimientos para periodizar f conducen a la misma función, es decir, $F = G$.

Proposición A.12. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n)$ converge en $L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ a una función $F \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Además,*

$$\hat{F}(n) = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, tenemos

$$\int_0^1 \sum_{-\infty}^{\infty} |f(x+n)| dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+n)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Así, $\sum_{-\infty}^{\infty} |f(x+n)|$ converge para casi todo x y la serie que define F converge en $L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Para los coeficientes de Fourier de F tenemos

$$\begin{aligned} \hat{F}(n) &= \int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx} dx = \int_0^1 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+k) \right) e^{-2\pi inx} dx \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi inx} dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2\pi in(x-k)} dx \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2\pi inx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx} dx = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

Teorema A.13 (Fórmula de sumación de Poisson). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$, entonces

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} \tag{A.6}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, F coincide en casi todo punto con una función continua. Si escogemos f una función continua tal que $(1+|x|)^m |f(x)| \lesssim 1$, para algún $m > 1$, se tiene igualdad en (A.6) y tenemos (haciendo $x = 0$) la identidad de Poisson

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n). \tag{A.7}$$

Cabe mencionar que la forma distribucional de escribir (A.6) es

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx},$$

donde δ denota la ‘función’ de Dirac definida por $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ para $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo A.14. En la sección 3.1 ya hemos visto, en nuestro análisis del núcleo del calor, una aplicación de la fórmula de sumación de Poisson. En este ejemplo recogemos otra identidad, consecuencia de (A.7), que generaliza la conocida identidad de Euler. La identidad 2 corresponde esencialmente a (3.4).

- $\frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0.$

Para la función $f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}$ el lado izquierdo de (A.7) es una serie geométrica

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|n|} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-2\pi\alpha n} = 1 + \frac{2e^{-2\pi\alpha}}{1 - e^{-2\pi\alpha}} = \frac{1 + e^{-2\pi\alpha}}{1 - e^{-2\pi\alpha}} = \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}},$$

mientras que

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|x|} e^{-2\pi inx} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha x} \cos(2\pi nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha x} (\cos(2\pi nx))' dx = \frac{2\alpha}{n} \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha x} \operatorname{sen}(2\pi nx) dx \\ &= -\frac{\alpha}{\pi n^2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha x} (\cos(2\pi nx))' dx = \frac{\alpha}{\pi n^2} - \frac{2\alpha^2}{n^2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha x} \cos(2\pi nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}, \quad n \neq 0, \end{aligned}$$

y $\hat{f}(0) = 1/\pi\alpha$. Nótese que, en particular,

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi\alpha} \left(\frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} - \frac{1}{\pi\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})}{t^2(e^t - e^{-t})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(2 + t^2 + \dots) - (2t + t^3/3 + \dots)}{t^2(2t + t^3/3 + \dots)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3(2/3 + \dots)}{t^3(2 + t^2/3 + \dots)} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Así, este ejemplo generaliza el resultado de Euler $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

Esta identidad sigue de (3.3) y (3.5) haciendo $\alpha = 2\pi t$ y $x = 0$ en (3.4).

A.4. El fenómeno de Gibbs-Wilbraham.

Consideremos la función salto

$$\mathbf{s}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1/2 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2. \end{cases}$$

Los coeficientes de Fourier de \mathbf{s} son

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{s}(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^{1/2} (e^{-2\pi i n x} - e^{2\pi i n x}) dx \\
 &= -2i \int_0^{1/2} \sin(2\pi n x) dx = \frac{i}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \begin{cases} -\frac{2i}{\pi n}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

y, por tanto, la suma parcial de Fourier de \mathbf{s} de orden N es

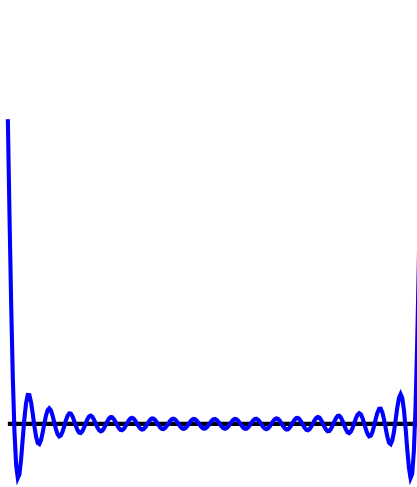
$$S_N \mathbf{s}(x) = -\frac{2i}{\pi} \sum_{\substack{N \\ n \text{ impar}}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{2k+1}.$$

En la animación A.1 se puede apreciar cómo las sumas parciales de la serie de Fourier $S_N \mathbf{s}(x)$ aproximan el valor $\mathbf{s}(x)$ cuando $x \neq 0$, mientras que en $x = 0$ convergen a la media de sus límites laterales (igual a 0 en este caso)³

Para analizar más detalladamente el comportamiento de las sumas parciales de \mathbf{s} , si $s_m(x) := s_{2m-1} \mathbf{s}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{2k+1}$, entonces

$$s'_m(x) = 8 \sum_{k=0}^{m-1} \cos(2\pi(2k+1)x) = 4 \frac{\sin(4\pi m x)}{\sin(2\pi x)}, \quad 0 < x < 1/2. \tag{A.8}$$

³ Comparar con la convergencia de las correspondientes sumas de Cesàro en la animación 2.1



Animación A.1. Sumas parciales de Fourier para la función salto (Click para animar)

Nota: La prueba de la identidad (A.8) sigue los mismos pasos que usamos para computar el núcleo de Dirichlet en la sección 2.2.1. Si $\theta \in \mathbb{R}$ y $m = 1, 2, \dots$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{i(2k-1)\theta} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{m-1} e^{2ki\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{2im\theta} - 1}{e^{2i\theta} - 1} = e^{im\theta} \frac{e^{im\theta} - e^{-im\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{m-1} \cos((2k+1)\theta) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(e^{i(2k+1)\theta} + e^{-i(2k+1)\theta} \right) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{i(2k+1)\theta} + \overline{\sum_{k=0}^{m-1} e^{i(2k+1)\theta}} \\ &= \left(e^{im\theta} + e^{-im\theta} \right) \frac{\text{sen}(m\theta)}{\text{sen}\theta} = 2 \cos(m\theta) \frac{\text{sen}(m\theta)}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{sen}(2m\theta)}{\text{sen}\theta}. \end{aligned}$$

Esto es (A.8) con $\theta = 2\pi x$.

Así,

$$s_m(x) = 4 \int_0^x \frac{\text{sen}(4\pi m t)}{2\pi t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi x} \frac{\text{sen}(2m t)}{\text{sen} t} dt,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} s_m(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi x} \frac{\text{sen}(2m t)}{t} dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi x} \text{sen}(2m t) \left(\frac{1}{\text{sen} t} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi x} \text{sen}(2m t) \frac{t}{\text{sen} t} \psi(t) dt, \end{aligned}$$

donde $\psi(x) = (x - \text{sen} x)/x^2$. Puesto que $|x - \text{sen} x| \sim x^3$, se tiene que $|\psi(x)| \lesssim x$. Luego

$$\left| s_m(x/4m) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi x} \frac{\text{sen} t}{t} dt \right| \lesssim \frac{x^2}{m^2},$$

y tomando límite cuando $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x/4m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi x} \frac{\sen t}{t} dt.$$

Por otro lado, de (A.8), los máximos relativos de s_m se encuentran en los puntos $x_\ell = \ell/4m$ para ℓ impar (si ℓ es par, los x_ℓ son mínimos), y consecuentemente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\ell/4m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi \ell} \frac{\sen t}{t} dt.$$

Además, como

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi \ell}{2m}}^{\frac{\pi(\ell+2)}{2m}} \frac{\sen(2mt)}{\sen t} dt &= \frac{1}{2m} \left(\int_{\pi \ell}^{\pi \ell + \pi} + \int_{\pi \ell + \pi}^{\pi \ell + 2\pi} \right) \frac{\sen t}{\sen(t/2m)} \\ &= \frac{1}{2m} \int_{\pi \ell}^{\pi \ell + \pi} \sen t \left(\frac{1}{\sen(t/2m)} - \frac{1}{\sen((t+\pi)/2m)} \right) dt \end{aligned}$$

es negativo si ℓ es impar, el máximo absoluto de s_m a la derecha de $x = 0$ se encuentra en el punto $x = 1/4m$ y ahí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(1/4m) = \frac{2}{\pi} \mathbf{Si}(\pi) \approx 1,179\dots$$

donde $\mathbf{Si} := \int_0^x \frac{\sen t}{t} dt$. Así, la aproximación de las sumas parciales de la serie de Fourier s_m a \mathbf{s} exceden su valor a la derecha, es decir, a $\mathbf{s}(0^+) = 1$, en 0,179..., lo que aproximadamente supone un 9% de la longitud del salto (que en este caso es igual a 2).

En general, se tiene el siguiente resultado debido a Bôcher (ver [4]).

Teorema A.15. *Sea f una función real y \mathbb{Z} -periódica tal que f y f' sean continuas salvo en un número finito de discontinuidades de salto. Entonces, en cualquier punto de discontinuidad x_0 , las gráficas de las sumas parciales de la serie de Fourier $S_N f$ convergen al segmento vertical de longitud $L = \frac{2}{\pi} \mathbf{Si}(\pi) |f(x_0^+) - f(x_0^-)|$ centrado en el punto medio de los puntos $(x_0, f(x_0^\pm))$.*

Para ver esto, basta observar que la función $g(x) = f(x) - (\lambda \pm \mathbf{s}(x - x_0)/2)$ (dependiendo de si $f(x_0^+) \geq f(x_0^-)$), donde $\lambda = (f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$ y $s = |f(x_0^+) - f(x_0^-)|$, es continua en x_0 .

A.5. Sobre divergencia de la serie de Fourier.

Hasta ahora, y principalmente en el capítulo 2, nos hemos centrado en la convergencia de la serie de Fourier. Pero no queremos terminar esta memoria sin al menos presentar la realidad sobre este tipo de cuestiones y es que, incluso para funciones continuas, *genéricamente la serie de Fourier ni siquiera converge puntualmente.*

³ La razón entre L y el salto s en la discontinuidad, cuyo valor es $L/s = \frac{2}{\pi} \mathbf{Si}(\pi) = 1,179\dots$, se denomina *constante de Gibbs*.

Por el teorema 2.4 sabemos que la serie de Fourier representa (en media cuadrática) cualquier función en L^2 y por tanto, alguna subsucesión de sus sumas parciales converge en casi todo punto (salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero). Resulta que esto mismo sigue siendo cierto para funciones p -integrables si $1 < p < \infty$ (la demostración original usa la teoría de funciones de variable compleja y más concretamente los espacios de Hardy) pero para $p = 1$ el resultado es falso. A. Kolmogorov en 1923 (con 19 años) construyó un ejemplo de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto⁴.

En general, aunque por el teorema 2.17 las medias de Cesàro de cualquier función continua f convergen uniformemente a f , su serie de Fourier no necesariamente converge. El argumento típico usa la no acotación de los núcleos de Dirichlet en L^1 , el principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus y el teorema de Baire: en [14, theorem 5.12] se prueba la existencia de una familia $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ que es residual (intersección numerable de abiertos densos en $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$) tal que para cada $f \in \mathcal{E}$, el conjunto $E_f = \{x \in \mathbb{R} : \sup_N |S_N f(x)| = +\infty\}$ es residual en \mathbb{R} . En este sentido, la convergencia puntual de la serie de Fourier es atípica y, para la mayoría de las funciones continuas, no converge en ningún punto dado.

Por otro lado, en 1966, L. Carleson probó que (el hasta entonces conocido como *problema de Luzin*) la serie de Fourier de cualquier función en L^2 converge en casi todo punto⁵ y, en particular, también la de cualquier función continua. En ese mismo año, J. P. Kahane y Y. Katznelson ([8, pág. 67]) probaron que para cualquier conjunto de medida cero existe una función continua \mathbb{Z} -periódica en el que su serie de Fourier diverge (posiblemente en un subconjunto aún mayor). Así, combinado con el teorema de Carleson, esto demuestra que existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en todos los puntos de un conjunto dado si, y solo si, el conjunto tiene medida cero (nótese que este resultado no caracteriza los conjuntos exactos de divergencia).

En cuanto a la velocidad de divergencia de la serie de Fourier, como consecuencia del teorema 1.3 en [2], existe un conjunto residual $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tal que para toda $f \in \mathcal{A}$ y $\beta < 1$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N f(x)}{\ln^\beta |n|} = \infty,$$

para todo x en algún conjunto E de dimensión de Hausdorff 1. La medida exterior d -dimensional de Hausdorff de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ se define como

$$\mathcal{H}_d(A) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf_{\Sigma \in \mathcal{U}_r} \sum_{B \in \Sigma} r^d,$$

⁴ Posteriormente fue mejorado para que esto sucediera en todo punto

⁵ Aunque la extensión para L^p ($1 < p < \infty$), fue calificada en el propio artículo de Carleson como ‘bastante obvia’, este resultado fue generalizado por R. Hunt en 1968 y actualmente se conoce como el teorema de Carleson-Hunt. De hecho, este teorema establece que el operador maximal $S^* f(x) = \sup_N |S_N f(x)|$ está acotado en L^p . La convergencia en casi todo punto sigue fácilmente (de hecho de estimaciones un poco más débiles).

donde \mathcal{U}_r denota el conjunto de todos los recubrimientos numerables de A por bolas B de radio $\leq r$ ⁶ y su dimensión de Hausdorff es

$$\dim_{\mathcal{H}} A = \sup \{d > 0 : \mathcal{H}_d(A) > 0\} = \inf \{d > 0 : \mathcal{H}_d(A) = 0\}.$$

Así, aunque los conjuntos de divergencia tienen medida cero, por lo general tienen dimensión (de Hausdorff) plena.

A.5.1. Una función continua con serie de Fourier divergente.

En este apartado, siguiendo [14], recogemos un ejemplo de una función \mathbb{Z} -periódica continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Para su construcción necesitaremos los ‘bloques básicos’

$$f_n = \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e_k}{k} \text{ y } f_n^- = \sum_{k=1}^n \frac{e_{-k}}{k} \tag{A.9}$$

De ellos necesitamos las siguientes propiedades

- (i) $\|f_n\|_{\infty} \lesssim 1$ uniformemente en n .
- (ii) $f_n^-(0) \geq \ln n$.

Esta última sigue de

$$f_n^-(0) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \sim \ln n.$$

Para ver (i), podemos observar que $f_n' = 2\pi i \sum_{1 \leq |k| \leq n} e_k = 2\pi i(D_n - 1)$ y, de la expresión (2.3) para el núcleo de Dirichlet

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\lesssim 1 + \left| \int_0^{\pi x} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{\text{sen } t} dt \right| \lesssim 1 + \left| \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{\text{sen } t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi x} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{\text{sen } t} dt \right|. \end{aligned}$$

Puesto que tanto el numerador como el denominador en el integrando de la primera integral no son negativos,

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{\text{sen } t} dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \mathbf{Si}(\pi)$$

mientras que, para la segunda integral tenemos

⁶ Normalizada convenientemente, $\mathcal{H}_m(A) = |A|$ coincide con la medida de Lebesgue m -dimensional en \mathbb{R}^m .

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi x} \frac{\text{sen}((2n+1)t)}{\text{sen } t} dt \right| = \frac{1}{2n+1} \left| \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi x} \frac{\frac{d}{dt}(\cos((2n+1)t))}{\text{sen } t} dt \right| = \frac{1}{2n+1}$$

$$\left| \frac{\cos((2n+1)t)}{\text{sen } t} \right|_{t=\frac{\pi}{2n+1}}^{t=\pi x} + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi x} \frac{\cos t \cos((2n+1)t)}{\text{sen}^2 t} dt \lesssim 1 + \frac{1}{2n+1} \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\pi x} \frac{dt}{t^2} \lesssim 1.$$

Consideremos los polinomios trasladados (en frecuencia) $p_n = e_{2n} f_n$ y $p_n^- = e_{2n} f_n^-$. Mientras que f_n tiene coeficientes de Fourier no nulos cuando $1 \leq |k| \leq n$, p_n los tendrá cuando $n \leq k \leq 3n$, $k \neq 2n$. Además, mientras $k = 0$ es el ‘centro de simetría’ de f_n , ahora $k = 2n$ es el de p_n (figura A.2). Consideramos ahora $\{n_k\}$ una sucesión creciente de enteros no negativos tal que $3n_j < n_{j+1}$ (para que los soportes en frecuencia de los p_{n_j} sean disjuntos) y $\{\alpha_j\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\sum_j \alpha_j < +\infty$.

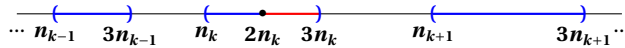


Figura A.2. Soportes de los polinomios p_{n_k} .

Puesto que por (i) los polinomios p_n están uniformemente acotados ($|p_n| = |f_n|$), si consideramos la función $f = \sum_j \alpha_j p_{n_j} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| S_{2n_\ell} f(0) \right| &= \left| \sum_{j \leq \ell} \alpha_j S_{2n_\ell} [p_{n_j}](0) \right| = \left| \sum_{j \leq \ell-1} \alpha_j S_{2n_\ell} [p_{n_j}](0) + \alpha_\ell S_{2n_\ell} [p_{n_\ell}](0) \right| \\ &= \alpha_\ell f_{n_\ell}^-(0) \geq \alpha_\ell \ln n_\ell \end{aligned}$$

por (ii) y la condición en los soportes de las frecuencias de los p_{n_j} . Así, si las sucesiones $\{\alpha_j\}$ y $\{n_j\}$ también cumplen que $\alpha_j \ln n_j \rightarrow +\infty$ cuando $j \rightarrow \infty$ ⁷, la sucesión de sumas parciales de Fourier de f no está acotada en $x = 0$, pues hemos encontrado una subsucesión que diverge.

⁷ Basta con tomar, por ejemplo, $\alpha_j = 1/j^2$ y $n_j = 3^{j^3}$.

Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis*. 2nd Edition. Addison-Wesley (1974).
- [2] BAYART F., HEURTEAUX Y. *Multifractal analysis of the divergence of Fourier series: the extreme cases*. J. Anal. Math. 124,387-408 (2014).
- [3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer Verlag (2011).
- [4] CARSLAW, H. S. *An Introduction to Fourier Series and Integrals*. Dover, New York (1952).
- [5] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral*. Servicio de publicaciones - Universidad de La Laguna (2013).
- [6] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 2nd Edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer Verlag (2008).
- [7] JACKSON D. *The theory of approximation*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, no. 11 (1930).
- [8] KATZNELSON, Y. *Introduction to Harmonic Analysis*. 3rd Edition Cambridge University Press (2004).
- [9] KIELHÖFER, H. *Calculus of Variations: An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises*. Text in Applied Mathematics, 67. Springer Verlag (2018).
- [10] OSSERMAN, R. *The isoperimetric inequality*. Bull. Amer. Math. Soc., 84 no. 6,1182-1138 (1978).
- [11] PINSKY, M. *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*. Graduate Studies in Mathematics, 102. Amer. Math. Soc. (2002).
- [12] PIVATO, M. *Linear Partial Differential Equations and Fourier Theory*. Cambridge Univ. Press (2010)
- [13] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3rd Edition. McGraw-Hill (1987).
- [14] STEIN, E. M., SHAKARCHI, R. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis I. Princeton Univ. Press (2003).
- [15] STRICHARTZ, R. S. *The Way of Analysis*. John and Bartlett Publishers Inc. (2000).
- [16] TAO, T. *Analysis*. II. Hindustan Book Agency (2006).
- [17] WEINBERGER H. F. *A first course in Partial Differential Equations*. Dover, New York (1965).
- [18] ZYGMUND, A. *Trigonometric Series*. 3rd Edition, Vol. I & II. Cambridge University Press (2002).

Series de Fourier

1. Abstract

In this memoir we collect several classical results about the convergence and summability for the Fourier series of periodic functions. As applications we present detailed studies for the one dimensional heat equation, the Dirichlet problem in unit disc and give a proof of the isoperimetric inequality for plane curves. Finally we study the relation between regularity and decay of Fourier coefficients, present a proof of Cantor-Lebesgue lemma, prove Poisson summation formula and analyze the way the Fourier series converges for functions with jump singularities (Gibbs-Wilbraham phenomenon). We finish with a short discussion on negative results for the convergence of Fourier series to close with a construction of a continuous function whose Fourier series diverges at a given point.

2. Introduction

In previous courses such as Análisis Matemático II & III we have seen how certain functions can be approximated by polynomials. In fact, in some occasions, the functions to be approximated can be written exactly as an 'infinite polynomial', or more precisely, as a power series.

These series are useful when referred to functions such as exponentials, holomorphic, harmonic and in general solutions to differential equations with analytic coefficients (Frobenius theorem for ordinary differential equations or the Cauchy-Kowalewski theorem for partial differential equations). However, under some circumstances such series turn out to be no so useful: the Taylor expansion for most C^∞ functions does not converge and in some examples, if so, it does not represent the function.

Fortunately there is another type of expansion in a function series known as Fourier series that, used for other purposes, furnish a powerful tool in Analysis. They can be used to analyze periodic (instead of smooth) functions, which can be decomposed into trigonometric polynomials rather than ordinary ones. Briefly, the theory of Fourier series states that any periodic function can be decompose as an infinite sum of sine and cosine functions.

3. Outline of the first chapter

BESIDE the introduction to the main objects and tools of study such as the trigonometric polynomials, the L^2 inner product and the convolution, the aim of this chapter is to prove the periodic version of Weierstrass' approximation theorem to the extend that any continuous periodic function can be uniformly approximated by trigonometric polynomials. Although there are many ways to do so, as in [16], we have chosen to use an approximation to the identity argument via Fejér's kernel.

4. Outline of the second chapter

THIS chapter is devoted to positive results on the convergence and summability of the Fourier series for some classes of periodic functions. After proving L^2 -convergence and Plancherel's formula we apply the Riemann-Lebesgue lemma to show pointwise convergence for differentiable functions and, as a consequence, we present the so called Riemann localization principle which states that the convergence of the Fourier series of an integrable function at a given point is a local property, i.e., unexpectedly, only depends on its behavior near the point and no on the whole interval of definition.

Then we turn to uniform convergence for sufficiently smooth functions. Here the starred result is Bernstein's theorem which states that the Fourier series of a Hölder continuous function f of order $\alpha > 1/2$ converges absolutely and uniformly to f .

To finish the chapter we study the summability of Fourier series and prove Fejér's theorem to the extend that Cesàro averages of Fourier's partial sums of continuous functions represents it uniformly (this was the way we proved Weierstrass's theorem in chapter 1). We also prove the corresponding result for its Abel means and introduce the so called Poisson kernel which we use in chapter 3 to solve the steady-state heat equation.

We finish with the Dirichlet-Jordan test on the convergence of the Fourier series for functions of bounded variation.

5. Outline of the third chapter

IN this chapter we collect some applications. The first is the boundary value problem for the Heat equation in one dimension for which we prove that it is well posed for continuous initial data: after introducing the corresponding heat kernel, this is (again) done by using an approximation to the identity argument. The second deals with the steady-state heat equation that reduces to the well known Dirichlet problem for the Laplace equation: we prove that its solution is giving by convolution with the Poisson kernel obtained in chapter 2 via Abel means. The third, and last application, is to the so called isoperimetric problem that asks for the optimal plane domain enclosing the largest area for given perimeter. As geometrically expected, it is shown that such domain is the corresponding disc.

6. Outline of the appendix

TO complete this work, we have chosen some extra topics. The appendix covers an interesting generalization of the Riemann-Lebesgue lemma (Fejér's lemma), the so called Cantor-Lebesgue lemma, a detailed study of the relation between smoothness (including real analyticity) of a function and decay of its Fourier coefficients and the Poisson summation formula (essentially used in chapter 3 when we dealt with the heat kernel). We also present the so called Gibbs-Wilbraham phenomenon that describes the peculiar way in which the Fourier series converges near jump discontinuities: the partial sums presents an approximately 9% over/under shoots both on the right/left of the discontinuity and this over/under shoots do not disappear for much close we get to the discontinuity or as many terms of the Fourier series we use.

We finish with a discussion on negative results for convergence of Fourier series: essentially, the Fourier series of most continuous functions have a large divergence set. To this respect, following [14], we close the appendix with a 'semexplicit' example of a continuous function whose Fourier series diverges unboundedly at a given point.

References

- [1] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis*. 2nd Edition. Addison-Wesley (1974).
- [2] BAYART F., HEURTEAUX Y. *Multifractal analysis of the divergence of Fourier series: the extreme cases*. J. Anal. Math. 124,387-408 (2014).
- [3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer Verlag (2011).
- [4] CARSLAW, H. S. *An Introduction to Fourier Series and Integrals*. Dover, New York (1952).
- [5] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral*. Servicio de publicaciones · Universidad de La Laguna (2013).
- [6] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 2nd Edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer Verlag (2008).
- [7] JACKSON D. *The theory of approximation*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, no. 11 (1930).
- [8] KATZNELSON, Y. *Introduction to Harmonic Analysis*. 3rd Edition Cambridge University Press (2004).
- [9] KIELHÖFER, H. *Calculus of Variations: An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises*. Text in Applied Mathematics, 67. Springer Verlag (2018).
- [10] OSSERMAN, R. *The isoperimetric inequality*. Bull. Amer. Math. Soc., 84 no. 6,1182-1138 (1978).
- [11] PINSKY, M. *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*. Graduate Studies in Mathematics, 102. Amer. Math. Soc. (2002).
- [12] PIVATO, M. *Linear Partial Differential Equations and Fourier Theory*. Cambridge Univ. Press (2010)
- [13] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3rd Edition. McGraw-Hill (1987).
- [14] STEIN, E. M., SHAKARCHI, R. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis I. Princeton Univ. Press (2003).
- [15] STRICHTART, R. S. *The Way of Analysis*. John and Bartlett Publishers Inc. (2000).
- [16] TAO, T. *Analysis*. II. Hindustan Book Agency (2006).
- [17] WEINBERGER H. F. *A first course in Partial Differential Equations*. Dover, New York (1965).
- [18] ZYGMUND, A. *Trigonometric Series*. 3rd Edition, Vol. I & II. Cambridge University Press (2002).