



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Erika Magdalena Herrera Machado

Topología y Neurociencia

Topology and Neuroscience

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2019

DIRIGIDO POR

Francisco Javier Díaz Díaz
Edith Padrón Fernández

Francisco Javier Díaz Díaz

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa.*

*Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

Edith Padrón Fernández

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa.*

*Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

Agradecimientos

Quisiera dar las gracias a mis tutores, Francisco Javier Díaz Díaz y Edith Padrón Fernández, por su tiempo, dedicación e inestimables consejos.

A mis padres, mi mayor apoyo.

A mis amigos, por estar siempre ahí.

Y gracias a las Matemáticas, por su inconmensurable aportación a mi vida.

Erika Magdalena Herrera Machado
La Laguna, 8 de julio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

La introducción de herramientas matemáticas en la neurociencia ha contribuido al rápido progreso y expansión experimental de esta disciplina. Este trabajo está organizado en dos capítulos con los que se pretende dar una visión de algunas aplicaciones de la topología en neurociencia. En el primer capítulo introduciremos los complejos simpliciales y haremos un breve repaso de las equivalencias homotópicas. Esto será clave para comprender las nociones introducidas en el segundo capítulo, al igual que para el desarrollo posterior. Estudiaremos en primer lugar la interpretación matemática de los fenómenos experimentales en neurociencia, seguiremos con los conceptos de código y nervio, así como la relación entre ambos, analizaremos el caso de los códigos convexos y finalizaremos con algunos resultados sobre obstrucciones locales a la convexidad de los códigos.

Palabras clave: *Complejo simplicial – Código neuronal – Códigos convexos – Células de posicionamiento – Lema del Nervio.*

Abstract

The introduction of mathematical tools in neuroscience has contributed to its rapid experimental progress and expansion. This work is organized in two chapters where we give a vision of some applications of topology in neuroscience. In the first chapter we introduce the simplicial complexes and make a brief review of homotopic equivalences. This will be key to understand the applications that we expose in the second chapter, as well as for subsequent development. We start studying the mathematical interpretation of the experimental phenomena in neuroscience, then we continue with the concepts of code and nerve, as well as the relationship between both, we analyze the case of convex codes and finish with some results on local obstructions to the convexity of codes.

Keywords: *Simplicial complex – Neural coding – Convex codes – Place cells – Nerve lemma.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Complejos simpliciales	1
1.1. Símplices	1
1.2. Complejos simpliciales	7
1.2.1. Complejos simpliciales en \mathbb{R}^N	8
1.2.2. Aplicaciones simpliciales	13
1.3. Complejos simpliciales abstractos	15
1.4. Equivalencias homotópicas	18
2. La Topología en la Neurociencia	21
2.1. Neuronas de posicionamiento	22
2.2. Código neuronal	24
2.3. El nervio de un recubrimiento abierto	28
2.4. Códigos neuronales convexos	38
2.5. Obstrucciones locales a la convexidad	41
2.5.1. Código vs Nervio	41
2.5.2. Obstrucciones locales a la convexidad	42
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

Sin haberse percatado, cuando el lector se ha movido por el ambiente en el que se encuentra leyendo esta memoria, su cerebro en un proceso natural ha formado una representación de tal experiencia, dotándolo de contexto espacial para los recuerdos y experiencias pasadas. Es más, si monitorizáramos algunas de sus neuronas podríamos incluso inferir su posición con más o menos exactitud dentro de dicho espacio. En este trabajo se pretende estudiar mediante técnicas matemáticas la manera en la que la actividad del cerebro representa la información espacial del entorno.

Lo que acabamos de comentar es sólo un ejemplo de las muchas aplicaciones de la neurociencia. Esta ciencia multidisciplinar estudia la estructura, desarrollo y funcionamiento del sistema nervioso, centrándose en el cerebro y su impacto en el comportamiento y funciones cognitivas del individuo.

Los primeros estudios se atribuyen a los egipcios, autores del texto médico más antiguo que conoce la historia, denominado Papiro Edwin Smith. Este data de 1700 a.C. y en él se analiza el cerebro, las meninges, la médula espinal y el líquido cefalorraquídeo, aunque tanto los egipcios como el griego Aristóteles adoptaron la creencia de que nuestra conciencia, imaginación y memoria estaban enraizadas en el corazón. Fue aproximadamente en el año 170 a.C. cuando el trabajo del médico griego Galeno cuestionó esta opinión.

Importantes descubrimientos en esta ciencia han acontecido hasta nuestros días, destacando nombres como Descartes, Galvani, Golgi, Ramón y Cajal o Rabi, entre otros, por sus aportaciones. Sin embargo, no es hasta el siglo XX que la neurociencia pasa a ser reconocida como una disciplina académica en sí misma, experimentando su más rápido progreso a mitad de siglo. A ello ha contribuido en gran medida la introducción de técnicas matemáticas y en particular topológicas. De hecho, la finalidad de esta memoria consiste en mostrar que las técnicas topológicas pueden pensarse como una herramienta natural para estudiar *códigos neuronales*.

Para poner al lector en contexto, imagínese explorando un entorno. A medida que avanza, una *neurona de posicionamiento* se activa cuando se sitúa en una zona del espacio bien delimitada, llamada *campo de posicionamiento*. De esta manera, el entorno completo puede quedar determinado por la actividad de un conjunto de estas neuronas. Considerando los campos de posicionamiento como una colección de abiertos en un espacio topológico, es posible definir un código neuronal a partir de dicha colección. Es más, ciertos estudios revelan que los campos de posicionamiento son esencialmente convexos, lo cual motiva que en este trabajo pongamos énfasis en examinar los llamados *códigos neuronales convexos*.

Para estudiar satisfactoriamente lo mencionado anteriormente, serán claves los complejos simpliciales, utilizados históricamente para triangularizar espacios topológicos. Veremos en el primer capítulo que estos pueden construirse a partir de estructuras geométricas elementales, los símlices, que no son otra cosa que segmentos lineales, triángulos, tetraedros y sus análogos en mayor dimensión. Durante este proceso nos ayudaremos de las coordenadas baricéntricas, y estudiaremos que los complejos simpliciales pueden relacionarse mediante aplicaciones simpliciales. Continuaremos introduciendo la versión puramente combinatoria del complejo simplicial, el complejo simplicial abstracto, y finalizaremos el capítulo con un breve repaso de equivalencias homotópicas. Estos últimos conceptos serán especialmente útiles para entender las aplicaciones en neurociencia del siguiente capítulo.

Comenzaremos la segunda mitad del trabajo analizando los conceptos de código neuronal, estructura matemática que refleja la manera en que se relaciona la actividad de las neuronas y el estímulo al que son sometidas, y nervio de un recubrimiento, complejo simplicial que revelará cierta información topológica del espacio que se recubre. Este hecho es consecuencia del Lema del Nervio, que establece la equivalencia homotópica entre el poliedro del nervio asociado a un *buen recubrimiento* de un espacio topológico y dicho espacio. Como comentábamos previamente, este recubrimiento puede interpretarse como un conjunto de campos de posicionamiento recubriendo un lugar físico. Finalizaremos la memoria estudiando los códigos neuronales convexos y algunos resultados acerca de obstrucciones locales a la convexidad de los códigos.

La conclusión de este trabajo es que la Topología puede desempeñar un papel relevante en el desarrollo de la neurociencia. Para reforzar esta idea, mostraremos brevemente un ejemplo que atañe a otro interesante tipo de neuronas: *las neuronas de red*, descubiertas por Edvard y May-Britt Moser, ambos Premio Nobel en 2014 [2]. Estas producen campos de posicionamiento periódicos organizados en una malla hexagonal, como muestra la Figura 0.1.

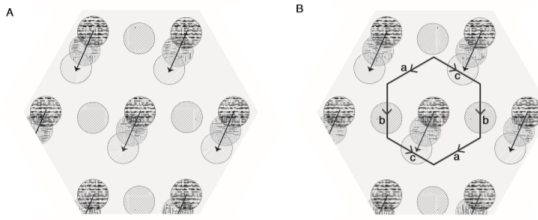


Figura 0.1.

Se puede observar que sus campos de posicionamiento tienen múltiples componentes disconexas. Interpretados como un recubrimiento abierto del entorno bidimensional completo, estos no cumplen la condición de formar un buen recubrimiento para poder aplicar el Lema del Nervio. Si en lugar de esto nos restringimos a un dominio fundamental para estos campos, como en la imagen derecha, entonces cada campo de red tiene una sólo componente convexa y podría aplicarse el Lema del Nervio. Nótese además que el dominio hexagonal con la identificación que se muestra coincide exactamente con un toro topológico, lo cual indica que el espacio representado por las neuronas de red no es el entorno completo, sino un toro.

Complejos simpliciales

La Topología Algebraica tiene entre sus principales objetivos buscar invariantes algebraicos para clasificar espacios topológicos. Poincaré introdujo el llamado *grupo fundamental* de un espacio topológico, que aporta información básica sobre la estructura topológica del espacio, aunque puede resultar difícil de trabajar dado que generalmente no es abeliano. Por su parte, Betti asoció a cada espacio topológico cierta sucesión de grupos abelianos, llamados *grupos de homología*, normalmente más fáciles de calcular que el grupo fundamental.

Los *complejos simpliciales* juegan un importante papel en la Topología Algebraica, dado que en un espacio topológico que admite una triangulación por un complejo simplicial, ó *poliedro*, podemos calcular grupos de homología usando la teoría de homología simplicial, en lugar de otras teorías menos manejables. También son útiles en el análisis de datos, porque permiten introducir modelos finitos o combinatorios de los experimentos realizados.

En este capítulo realizaremos una introducción a los complejos simpliciales finitos, espacios topológicos que son construidos utilizando estructuras más sencillas, los *símplices*. Presentaremos también los *complejos simpliciales abstractos*, descripción puramente combinatoria de la noción geométrica de complejo simplicial. Los complejos simpliciales abstractos junto con la noción de equivalencia homotópica, a la que dedicaremos la última parte de este primer capítulo, son las dos herramientas topológicas fundamentales para abordar las aplicaciones en Neurociencia que presentaremos en esta memoria.

1.1. Símplices

Comenzaremos esta sección introduciendo la noción de símplice, estructura geométrica elemental que posteriormente nos permitirá construir los complejos

simpliciales. Estos son simplemente segmentos lineales, triángulos, tetraedros y sus análogos en mayor dimensión.

Precisamos previamente definir la noción de conjunto de puntos geométricamente independiente.

Definición 1.1. Diremos que un conjunto de puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ de \mathbb{R}^N es **geométricamente independiente** cuando los vectores $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$ son linealmente independientes.

Observación 1.2. Al trabajar en el espacio afín \mathbb{R}^N , (cuyo espacio vectorial asociado es también \mathbb{R}^N), tanto puntos como vectores son en realidad N-uplas. En consecuencia, dados dos puntos $p = (p_1, \dots, p_N)$ y $q = (q_1, \dots, q_N)$ tiene sentido escribir

$$\overrightarrow{pq} = q - p = (q_1 - p_1, \dots, q_N - p_N).$$

△

Una caracterización de la independencia geométrica útil a la hora de definir los símlices es la siguiente.

Proposición 1.3. El conjunto de puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ en \mathbb{R}^N es geométricamente independiente si y sólo si

$$\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^n t_i = 0, \text{ con } t_i \in \mathbb{R}, \text{ implica } t_0 = \dots = t_n = 0.$$

Demostración. Suponemos en primer lugar que el conjunto de puntos dado es geométricamente independiente, es decir, que $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$ es linealmente independiente.

Consideremos $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ de forma que $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ y $\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$. Entonces,

$$\sum_{i=0}^n t_i \overrightarrow{a_0a_i} = \sum_{i=0}^n t_i (a_i - a_0) = \sum_{i=0}^n t_i a_i - \sum_{i=0}^n t_i a_0 = \sum_{i=0}^n t_i a_i - \left(\sum_{i=0}^n t_i \right) a_0 = 0.$$

Por la independencia lineal de los vectores se concluye que $t_1 = \dots = t_n = 0$, y como $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ se tiene también que $t_0 = 0$.

Recíprocamente, consideremos una combinación lineal $t_1 \overrightarrow{a_0a_1} + \dots + t_n \overrightarrow{a_0a_n} = \vec{0}$, con t_1, \dots, t_n escalares. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n t_i \overrightarrow{a_0a_i} = \sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^n t_i a_i - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) a_0 = 0.$$

Considerando $t_0 = -\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)$, podemos aplicar la hipótesis y concluir que $t_0 = \dots = t_n = 0$. En particular, $t_1 = \dots = t_n = 0$. \square

Fijado un conjunto de puntos geoméricamente independiente podemos definir un tipo especial de coordenadas de \mathbb{R}^N : las coordenadas baricéntricas. Estas, como veremos más adelante, nos permitirán parametrizar un n-símplice mediante n+1 números reales entre 0 y 1.

Definición 1.4. Una **referencia baricéntrica** en \mathbb{R}^N es un conjunto de $N + 1$ puntos geoméricamente independientes. Llamamos **coordenadas baricéntricas** de un punto x de \mathbb{R}^N respecto a una referencia baricéntrica $\mathfrak{R} = \{a_0, \dots, a_N\}$ a la $(N+1)$ -upla (t_0, \dots, t_N) verificando que, para un punto p ,

$$\vec{px} = t_0\vec{pa}_0 + \dots + t_N\vec{pa}_N \text{ con } \sum_{i=0}^N t_i = 1.$$

Proposición 1.5. Las coordenadas baricéntricas son únicas y no dependen del punto p elegido.

Demostración. Veamos en primer lugar que no dependen del punto p elegido. Tomamos x' y q en \mathbb{R}^N . Entonces, si $\vec{qx'} = t_0\vec{qa}_0 + \dots + t_N\vec{qa}_N$, con $\sum_{i=0}^N t_i = 1$, comprobemos que $x = x'$. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \vec{xx'} &= \vec{xp} + \vec{px'} = \vec{xp} + \vec{pq} + \vec{qx'} = \vec{pq} + \vec{qx'} - \vec{px} = \\ &= \vec{pq} + \sum_{i=0}^N t_i\vec{qa}_i - \sum_{i=0}^N t_i\vec{pa}_i = \vec{pq} + \sum_{i=0}^N t_i(\vec{qa}_i - \vec{pa}_i) = \\ &= \vec{pq} + \left(\sum_{i=0}^N t_i\right)\vec{qp} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Probemos ahora que las coordenadas son únicas. Consideremos $p = (0, \dots, 0)$ y supongamos que para un punto $x \in \mathbb{R}^N$ se tiene que $x = t_0a_0 + \dots + t_Na_N$ y $x = \lambda_0a_0 + \dots + \lambda_Na_N$, con $\sum_{i=0}^N t_i = 1$ y $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 1$. Observamos que

$$\sum_{i=0}^N (t_i - \lambda_i) a_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^N (t_i - \lambda_i) = 0,$$

y como el conjunto $\{a_0, \dots, a_N\}$ es geoméricamente independiente, por la Proposición 1.3 deducimos que $t_i = \lambda_i$ para $i = 0, \dots, N$. \square

En adelante, consideraremos por defecto $p = (0, \dots, 0)$, expresando un punto x con coordenadas (t_0, \dots, t_N) como $x = t_0 a_0 + \dots + t_N a_N$, con $\sum_{i=0}^N t_i = 1$. Por otro lado, es interesante destacar la siguiente relación entre coordenadas baricéntricas y cartesianas.

Dada una referencia baricéntrica $\mathfrak{R} = \{a_0, \dots, a_N\}$ de \mathbb{R}^N se tiene la referencia cartesiana $\mathcal{R} = \{a_0; \overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_N}\}$, y considerando $p = a_0$ en la Definición 1.4 se obtiene lo siguiente:

Si (t_0, \dots, t_N) son las coordenadas baricéntricas de un punto x respecto de \mathfrak{R} , entonces las coordenadas cartesianas de x respecto de \mathcal{R} son (t_1, \dots, t_N) . Por otro lado, si (t_1, \dots, t_N) son las coordenadas cartesianas de x respecto de \mathcal{R} , entonces las coordenadas baricéntricas respecto de \mathfrak{R} son $\left(\left(1 - \sum_{i=1}^N t_i \right), t_1, \dots, t_N \right)$.

Es conocida la expresión paramétrica de un subespacio afín n -dimensional de \mathbb{R}^N en coordenadas cartesianas, para $0 \leq n \leq N$. En efecto, dada una familia de puntos geoméricamente independiente $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$, sabemos que el subespacio afín n -dimensional generado por esta familia de puntos tiene la siguiente ecuación paramétrica

$$\mathcal{F} \equiv a_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Además $\mathcal{R} = \{a_0; \overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}\}$ es una referencia cartesiana de \mathcal{F} , y usando la conocida relación entre coordenadas cartesianas y baricéntricas, obtenemos la siguiente caracterización de \mathcal{F} en coordenadas baricéntricas.

Proposición 1.6. *Dado $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos geoméricamente independiente en \mathbb{R}^N , el n -subespacio afín de \mathbb{R}^N generado por a_0, \dots, a_n consiste en todos los puntos x tal que*

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \text{ con } \sum_{i=0}^n t_i = 1,$$

donde los escalares t_i son las coordenadas baricéntricas de x respecto de la referencia $\mathfrak{R} = \{a_0, \dots, a_n\}$ en \mathbb{R}^N .

Demostración. Se tiene que todo punto x del subespacio afín \mathcal{F} generado por a_0, \dots, a_n es de la forma

$$x = a_0 + t_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + t_n \overrightarrow{a_0 a_n}, \text{ con } t_i \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Entonces x puede expresarse como

$$x = t_0 a_0 + \cdots + t_n a_n, \text{ donde } t_0 = 1 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right).$$

El recíproco se sigue fácilmente de la relación entre coordenadas baricéntricas y cartesianas, dado que si $x = t_0 a_0 + \cdots + t_n a_n$ con $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, entonces tomando (t_1, \dots, t_n) como coordenadas cartesianas de x podemos expresar el punto como en (1.1). \square

A continuación vamos a introducir la noción de n-símplice en \mathbb{R}^N . Para motivarla comenzaremos viendo un ejemplo en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.7 *El 2-símplice generado por un conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ de tres puntos geoméricamente independiente de \mathbb{R}^2 es el triángulo que los tiene por vértices. Utilizando la referencia cartesiana $\mathcal{R} = \{a_0; \overrightarrow{a_0 a_1}, \overrightarrow{a_0 a_2}\}$ de \mathbb{R}^2 , está claro que un punto x del triángulo viene dado por*

$$x = a_0 + t_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + t_2 \overrightarrow{a_0 a_2},$$

con coordenadas cartesianas (t_1, t_2) tales que $t_1, t_2 \geq 0$ y $t_1 + t_2 \leq 1$.

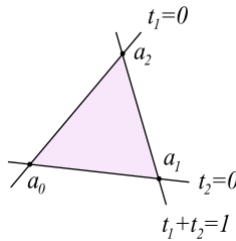


Figura 1.1. 2-símplice en \mathbb{R}^2 .

Si pasamos a coordenadas baricéntricas con respecto a la referencia $\mathfrak{R} = \{a_0, a_1, a_2\}$, tenemos que $x = (t_0, t_1, t_2)$, con $t_0 = 1 - t_1 - t_2$, $t_1, t_2 \geq 0$ y $t_1 + t_2 \leq 1$, y esto es equivalente a que $x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2$, con $\sum_{i=0}^2 t_i = 1$ y $t_i \geq 0$, para $i = 0, 1, 2$.

Este concepto se generaliza como sigue.

Definición 1.8. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos geoméricamente independiente de \mathbb{R}^N . Un **n -símplice** σ generado por a_0, \dots, a_n , que denotaremos por $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, consiste en el conjunto de todos los puntos x de \mathbb{R}^N tal que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \text{ donde } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Como podemos apreciar en la Figura 1.2, un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo y un 3-símplice es un tetraedro en \mathbb{R}^3 .

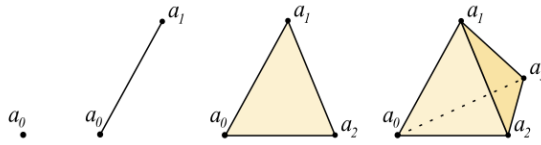


Figura 1.2. Símplexes hasta cuatro vértices.

Los $n+1$ puntos a_0, \dots, a_n que generan el símplex σ se denominan *vértices*, y n es la *dimensión* de σ . Cualquier símplex generado por un subconjunto de $\{a_0, \dots, a_n\}$ se denomina *cara* de σ . Se dice que una cara es *propia* cuando es distinta al símplex total, y la unión de caras propias forma la *frontera* del símplex σ , que denotamos por $Fr \sigma$. Se llama interior del símplex a $Int \sigma = \sigma - Fr \sigma$. Es importante destacar que $Fr(\langle v \rangle) = \emptyset$ e $Int(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$.

Observación 1.9. Usaremos la notación $\tau \leq \sigma$ para simbolizar que τ es una cara de σ , y $\tau < \sigma$ cuando se trate de una cara propia. △

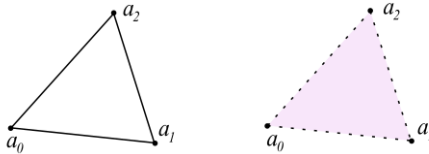


Figura 1.3. Frontera e interior del símplex $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$.

A continuación presentaremos algunas propiedades útiles de los símplexes.

Proposición 1.10. Un punto x de un n -símplice σ pertenece a la frontera de σ sí y sólo sí al menos una de sus coordenadas baricéntricas es cero. Por otro lado, x pertenece al interior de σ sí y sólo sí todas sus coordenadas baricéntricas son positivas.

Demostración. Sea $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ un n -símplice.

Supongamos en primer lugar que $x \in Fr \sigma$. Como $x \in \sigma$, tenemos que

$$x = t_0 a_0 + \dots + t_n a_n, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Al ser $x \in Fr \sigma$, existe una cara propia τ de σ tal que $x \in \tau$, donde τ es el símplice generado por $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\} \subsetneq \{a_0, \dots, a_n\}$. Así,

$$x = \lambda_{i_0} a_{i_0} + \dots + \lambda_{i_k} a_{i_k}, \quad \text{con } \sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} = 1, \text{ para } \lambda_{i_j} \geq 0, \text{ para todo } i_j.$$

De la unicidad de las coordenadas baricéntricas se sigue que $t_{i_j} = \lambda_{i_j}$, y el resto de las t_k son cero.

Recíprocamente, si se tiene que alguna coordenada baricéntrica t_i de x es nula para un i fijo, existe una cara propia z de σ generada por $\{a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ tal que $x \in z$, y por tanto, x está en la frontera de σ .

Para probar que un punto x del interior del símplice tiene todas sus coordenadas baricéntricas positivas, basta observar que $Int \sigma = \sigma - Fr \sigma$. \square

Como consecuencia de esta demostración se tiene que cada punto x de σ pertenece al interior de una única cara, que es la generada por todos los vértices para los que x tiene sus coordenadas baricéntricas positivas.

Terminamos esta sección del trabajo con dos interesantes observaciones.

Observación 1.11. a) Un símplice σ es compacto y convexo en \mathbb{R}^N y es igual a la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^N que contienen a a_0, \dots, a_n . En otras palabras, es el menor convexo que contiene a los puntos.

b) Dado un símplice σ , existe un único conjunto de puntos geoméricamente independiente $\{a_0, \dots, a_n\}$ que genera σ . \triangle

1.2. Complejos simpliciales

A lo largo de este trabajo nos referiremos a complejos simpliciales formados por un número finito de símplices, pues son los que tendrán aplicación en los ejemplos de Neurociencia que veremos más adelante. Los complejos simpliciales infinitos no serán objeto de estudio.

1.2.1. Complejos simpliciales en \mathbb{R}^N

Definición 1.12. Llamaremos **complejo simplicial** K en \mathbb{R}^N a una colección finita de *símplices* en \mathbb{R}^N tal que:

- 1) Cada cara de un *símplice* de K es también un *símplice* de K .
- 2) La intersección de cualquier par de *símplices* de K da como resultado una cara de ambos.

De esta definición se sigue inmediatamente que un *símplice* σ puede ser visto en sí mismo como un complejo simplicial, si consideramos el conjunto formado por él y todas sus caras.

Ejemplo 1.13 Obsérvese la Figura 1.4.

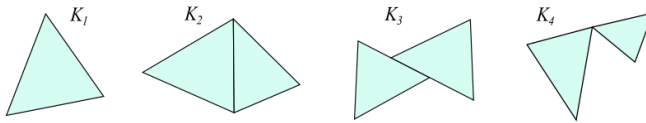


Figura 1.4. ¿Complejos simpliciales?

K_1 es un complejo simplicial al ser un 2-*símplice*. Por otro lado, es claro que K_2 y K_4 satisfacen la anterior definición y son, por tanto, complejos simpliciales. Sin embargo K_3 no lo es, pues la intersección de sus dos 2-*símplices* no es cara de ninguno de ellos.

El siguiente resultado es una caracterización de los complejos simpliciales.

Proposición 1.14. Una colección finita K de *símplices* es un complejo simplicial si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades

- 1) Cada cara de un *símplice* de K es también un *símplice* de K .
- 2') Cada par de *símplices* distintos de K tienen interiores disjuntos.

Demostración. Supongamos en primer lugar que tenemos un complejo simplicial K . Dados dos *símplices* σ y τ de K , veamos que de compartir un punto x de sus interiores, necesariamente son el mismo *símplice*.

Sea $s = \sigma \cap \tau$ y $x \in s$. Por hipótesis s es una cara de σ y τ , que puede ser propia o el total. Si es propia de alguno de ellos, se tiene que $x \in Fr \sigma$ ó $x \in Fr \tau$, lo cual no es posible al ser x un punto interior a ambos *símplices*. Así, necesariamente se tiene que $s = \sigma = \tau$.

Para el recíproco el objetivo es probar que si $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau = \sigma'$, donde σ' es un *símplice* generado por los vértices $\{v_0, \dots, v_m\}$ comunes de σ y τ . Veamos ambos contenidos.

“ \supset ” Como σ' es el menor convexo que contiene a los vértices $\{v_0, \dots, v_m\}$ y la intersección de σ y τ es convexa, se tiene $\sigma' \subset \sigma \cap \tau$.

“ \subset ” Ahora sea $x \in \sigma \cap \tau$. Por 2') se tiene que x debe pertenecer a una cara propia ω de σ y de τ . Esto implica que los vértices de ω son vértices tanto de σ como de τ , por lo que pertenecen al conjunto $\{v_0, \dots, v_m\}$. Esto nos lleva a que ω es una cara de σ' , y por tanto, $x \in \sigma'$. \square

Definición 1.15. Llamamos **subcomplejo** de un complejo simplicial K a una subcolección L de K que es en sí mismo un complejo simplicial.

Visualicemos el concepto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.16 El complejo simplicial K , como en la Figura 1.5, está formado por los símplexes $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, $\langle a_2, a_3 \rangle$ y $\langle a_3, a_4, a_5 \rangle$ y todas sus caras.

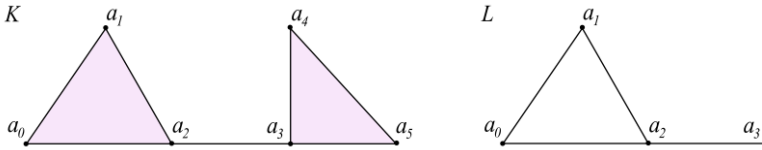


Figura 1.5. Complejo simplicial K .

Un ejemplo de subcomplejo L de K es el formado por los símplexes $\langle a_0, a_1 \rangle$, $\langle a_0, a_2 \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle$, $\langle a_2, a_3 \rangle$, y los vértices a_0, a_1, a_2 y a_3 .

Definición 1.17. Se llama **espacio subyacente** o **poliedro** de K , y se denota $|K|$, al conjunto de puntos de \mathbb{R}^N que coincide con la unión de todos los símplexes de K .

Dado que, como puntualizamos al comienzo, estamos considerando únicamente complejos simpliciales finitos en \mathbb{R}^N , definiremos la topología de un complejo simplicial K como la topología de su espacio subyacente $|K|$, que visto como subespacio de \mathbb{R}^N , es la topología inducida por la usual. En el caso infinito también podemos dotar al complejo simplicial de una topología propia, sin embargo, esta no coincide en general con la inducida por la usual en \mathbb{R}^N (ver [10] para el caso general).

Observación 1.18. Como consecuencia de la Proposición 1.14, todo poliedro $|K|$ es la unión disjunta de los interiores de todos los ímplexes de K . \triangle

Observación 1.19. Se tiene que el poliedro $|K|$ es Hausdorff y compacto. Esto último es consecuencia de que $|K|$ es cerrado y acotado. Nótese que todo símplice es cerrado en \mathbb{R}^N y $|K|$ es la unión finita de cerrados. En particular, σ es cerrado en $|K|$. \triangle

Proposición 1.20. *Un subconjunto A de un poliedro $|K|$ es abierto en $|K|$ si y sólo si $A \cap \sigma$ es abierto en σ , para todo símplice $\sigma \in K$.*

Demostración. Este resultado es equivalente a demostrar que un subconjunto C de $|K|$ es cerrado si y sólo si $C \cap \sigma$ es cerrado en σ , para todo $\sigma \in K$. Por la Observación 1.19, es inmediato ver que si A es cerrado en $|K|$, entonces $A \cap \sigma$ es cerrado en σ . Recíprocamente, si para todo símplice σ tenemos $A \cap \sigma$ cerrado en σ , como σ es cerrado en $|K|$, entonces $A \cap \sigma$ es cerrado en $|K|$. Además $A = \bigcup_{\sigma \in K} (A \cap \sigma)$ es cerrado en $|K|$ por ser unión finita de cerrados en $|K|$. \square

A continuación, vamos a presentar tres subespacios particulares del poliedro $|K|$ que nos serán de gran utilidad.

Definición 1.21. *Sea v un vértice de K . La **estrella** de v en K , denotada por $St v$, consiste en la unión de los interiores de aquellos símplices de K que tienen a v por vértice. Llamamos a su clausura **estrella cerrada** de v en K , denotada por $\bar{St} v$. Este espacio es la unión de todos los símplices de K que tienen en v por vértice y es el poliedro de un subcomplejo de K . Denominamos **link** de v en K , denotado por $Lk v$ al conjunto $\bar{St} v - St v$.*

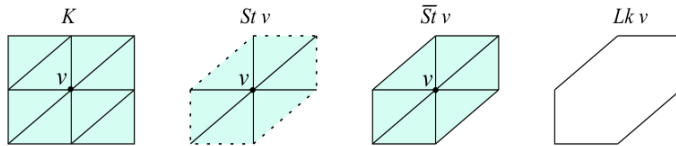


Figura 1.6. Subconjuntos de $|K|$.

Proposición 1.22. *Si K es un complejo simplicial y v es un vértice de K , entonces $St v$ es abierto en $|K|$.*

Demostración. Aplicando la Proposición 1.20, bastaría ver que $St v \cap \sigma$ es abierto en σ , para todo $\sigma \in K$. Por la Observación 1.18, tenemos que

$$St v \cap \sigma = \bigcup \{Int \tau / v \in \tau \leq \sigma\} = \sigma - \bigcup \{Int \tau / v \notin \tau, \tau \leq \sigma\}.$$

Veamos que

$$\bigcup \{Int \tau / v \notin \tau, \tau \leq \sigma\} = \bigcup \{\tau / v \notin \tau, \tau \leq \sigma\}.$$

El contenido hacia la derecha es claro. Para ver el otro contenido, tomamos $x \in \bigcup \{\tau / v \notin \tau, \tau \leq \sigma\}$. Tenemos, para algún $\tau \leq \sigma$ con $v \notin \tau$, dos posibilidades:

- a) $x \in Int \tau$.
- b) $x \in Fr \tau$. En cuyo caso, existe una cara propia τ_1 de τ tal que $x \in Int \tau_1$.

Se concluye entonces que

$$St v \cap \sigma = \sigma - \bigcup \{\tau / v \notin \tau, \tau \leq \sigma\},$$

que es abierto en σ , al ser las caras subconjuntos cerrados de un s3mplice. \square

Como mostraremos a continuaci3n, un complejo simplicial finito se puede “subdividir” en s3mplices tan peque1os como deseemos.

Definici3n 1.23. *Sea K un complejo simplicial. Un complejo simplicial K' se dice **subdivisi3n** de K si:*

- 1) $|K'| = |K|$
- 2) Cada s3mplice de K' est3 contenido en un s3mplice de K .

La condici3n 2) puede ser sustituida por la siguiente:

- 2') Cada s3mplice de K es uni3n de s3mplices de K' . En particular, los v3rtices de K son v3rtices de K' .

Es posible generar una subdivisi3n asociada al concepto de baricentro de un s3mplice.

Definici3n 1.24. *Dado un n -s3mplice $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, llamamos **baricentro** de σ al punto*

$$b(\sigma) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{n+1}.$$

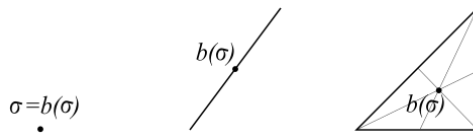


Figura 1.7. Baricentro de diferentes s3mplices.

Proposición 1.25. *Dado un complejo simplicial K , y los símlices $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n \in K$, los puntos $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)\}$ son geoméricamente independientes y determinan un símlice dentro de σ_n .*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la dimensión del símlice mayor de la sucesión $\sigma_0 < \dots < \sigma_n$. Sea k la dimensión de σ_n .

Si $k = 0$, entonces $\sigma_0 = \langle a \rangle$ y $b(\sigma_0) = a$.

Si $k = 1$, entonces $\sigma_1 = \langle a_0, a_1 \rangle$, y supongamos $\sigma_0 = \langle a_0 \rangle$. Veamos que $\{b(\sigma_0), b(\sigma_1)\}$ son geoméricamente independientes. Esto es, si se satisface $t_0 b(\sigma_0) + t_1 b(\sigma_1) = 0$ y $t_0 + t_1 = 0$, se tiene $t_0 = t_1 = 0$. En efecto,

$$t_0 b(\sigma_0) + t_1 b(\sigma_1) = t_0 a_0 + t_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{2} \right) = (t_0 + \frac{t_1}{2}) a_0 + \frac{t_1}{2} a_1 = 0. \quad (1.2)$$

Por otro lado, como $\{a_0, a_1\}$ son geoméricamente independientes, las condiciones (1.2) y $t_0 + \frac{t_1}{2} + \frac{t_1}{2} = t_0 + t_1 = 0$ implican que $t_0 + \frac{t_1}{2} = \frac{t_1}{2} = 0$, es decir, $t_1 = 0$ de lo que se deduce que $t_0 = 0$.

Supongamos ahora que $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_m)\}$ es un conjunto de puntos geoméricamente independientes para $\sigma_0 < \dots < \sigma_m$, con σ_m de dimensión menor que k . Veamos que si $\sigma_0 < \dots < \sigma_n$, con σ_n símlice de dimensión k , entonces $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)\}$ es un conjunto de puntos geoméricamente independientes.

Suponemos $\sum_{i=0}^n t_i b(\sigma_i) = 0$ y $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ con $t_i \in \mathbb{R}$, y queremos demostrar que $t_0 = \dots = t_n = 0$.

De la primera condición,

$$\sum_{i=0}^n t_i b(\sigma_i) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i b(\sigma_i) + t_n b(\sigma_n) = 0. \quad (1.3)$$

Si probamos que $t_n = 0$, entonces tendríamos $\sum_{i=0}^{n-1} t_i b(\sigma_i) = 0$ y $\sum_{i=0}^{n-1} t_i = 0$, y aplicando las hipótesis de inducción, (ya que la dimensión de σ_i con $i = 0, \dots, n-1$ es menor que k), deduciríamos que $t_0 = \dots = t_{n-1} = t_n = 0$.

Por tanto, veamos que $t_n = 0$. Supongamos $\sigma_n = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$, tal que $a_k \notin \sigma_{n-1}$. De (1.3), se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_i b(\sigma_i) + t_n \left(\frac{a_k}{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{k+1} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Desarrollando y ordenando esta expresión, se obtendrá una suma de términos donde el coeficiente que acompaña a a_k es $\frac{t_n}{k+1}$. Nótese que la suma de los coeficientes que acompañan a los vértices a_i con, $i = 0, \dots, k$, es exactamente $t_0 + \dots + t_n$, que por hipótesis es 0. Por tanto, de la independencia geométrica de los a_i se deduce que $\frac{t_n}{k+1} = 0$, luego $t_n = 0$. \square

Definición 1.26. La **subdivisión baricéntrica** de K , denotada por $Sd K$, es el complejo simplicial formado por los símplices de la forma

$$\langle b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n) \rangle,$$

donde $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ son símplices de K verificando que $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n$. Así, los vértices de $Sd K$ son los baricentros de los símplices de K .

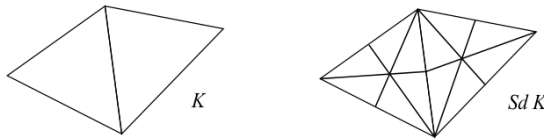


Figura 1.8. Subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial K .

Obsérvese que la subdivisión baricéntrica divide los símplices del complejo simplicial en símplices de la misma dimensión.

1.2.2. Aplicaciones simpliciales

Una vez definida la noción de complejo simplicial, es natural introducir aplicaciones entre ellos que preserven de alguna manera la estructura simplicial. Además, como veremos en la Sección 1.3, estas aplicaciones nos ayudarán a describir complejos simpliciales.

Definición 1.27. Sean K y L dos complejos simpliciales. Denotamos por $K^{(0)}$ (respectivamente $L^{(0)}$) el conjunto de vértices de K (respectivamente de L). Se dirá que $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una **aplicación simplicial** si para cualquier familia de vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$ que genera un símplice de K , su imagen $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ genera un símplice de L .

Toda aplicación simplicial genera una aplicación continua entre los poliedros asociados, como se prueba en el siguiente resultado.

Proposición 1.28. Si $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una aplicación simplicial, entonces se puede definir una aplicación continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ por

$$|f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i), \text{ para } x = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

donde $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, para $\{v_0, \dots, v_n\}$ generando un s3mplice de K .

Demostraci3n. Es claro que $|f|$ est3a bien definida, por la unicidad de las coordenadas baric3ntricas y porque $|f|(x)$ es un punto de $|L|$, al generar los v3rtices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ un s3mplice de L y cumplirse $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ y $t_i \geq 0$, para $i = 0, \dots, n$. Para estudiar el car3cter continuo de la aplicaci3n, vamos a tomar

un punto $x_0 = \sum_{i=0}^n b_i v_i$ de $|K|$, con $b_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^n b_i = 1$, entonces

$$x_0 = v_0 + \sum_{i=1}^n b_i \overrightarrow{v_0 v_i} \text{ y adem3s } |f|(x_0) = f(v_0) + \sum_{i=1}^n b_i \overrightarrow{f(v_0) f(v_i)},$$

de lo que se deriva que $|f|$ es continua. □

La equivalencia simplicial se define entonces de la siguiente manera.

Definici3n 1.29. Una aplicaci3n simplicial $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ biyectiva y con inversa f^{-1} tambi3n simplicial se denomina **isomorfismo simplicial**. En tal caso se dice que los complejos K y L son isomorfos.

Proposici3n 1.30. Si f es un isomorfismo simplicial entonces $|f|$ es un homeomorfismo.

Demostraci3n. Sabemos que $|f|$ es continua por la Proposici3n 1.28, y biyectiva al ser f un isomorfismo. Veamos ahora qu3 sucede con su inversa.

Consideramos la aplicaci3n simplicial $f^{-1} : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$. Aplicando de nuevo la Proposici3n 1.28, f^{-1} se puede extender a una aplicaci3n continua

$$|f^{-1}| : |L| \rightarrow |K|$$

definida por

$$|f^{-1}|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(v_i), \text{ para } x = \sum_{i=0}^n t_i v_i.$$

Es inmediato comprobar que $|f^{-1}| = |f|^{-1}$. □

1.3. Complejos simpliciales abstractos

El concepto de complejo simplicial abstracto que introduciremos a continuación será el principal nexo de unión entre las Matemáticas y los estudios en el campo de la Neurociencia que veremos en el próximo capítulo.

Definición 1.31. Llamamos **complejo simplicial abstracto** a una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos verificando que si A es un elemento de \mathcal{S} , entonces también lo es cada subconjunto no vacío de A .

Cada elemento A de \mathcal{S} se llamará *símplice* de \mathcal{S} , y su dimensión es su cardinal menos uno. Cada subconjunto no vacío de A se denominará *cara* de A . La dimensión de \mathcal{S} es la mayor de las dimensiones de sus símplices, y el conjunto de vértices V de \mathcal{S} es la unión de todos los 0-símplices de \mathcal{S} .

Definición 1.32. Dos complejos abstractos \mathcal{S} y \mathcal{T} se dicen *isomorfos* si existe una correspondencia biyectiva f entre sus conjuntos de vértices, de manera que $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$ si y sólo si $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$.

Un ejemplo particular de complejo simplicial abstracto es el esquema de vértices de un complejo simplicial.

Definición 1.33. Sea K un complejo simplicial, y $V = \{a_0, \dots, a_n\}$ su conjunto de vértices. Se llama **esquema de vértices** de K a la colección \mathcal{K} de todos los subconjuntos $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\}$ de V tal que los vértices a_{i_0}, \dots, a_{i_k} generan un símplice de K .

Ejemplo 1.34 Volviendo al ejemplo de la Figura 1.5, se tiene que $V = \{a_0, \dots, a_5\}$, y el esquema de vértices es el formado por $\mathcal{K} = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_4\}, \{a_3, a_5\}, \{a_4, a_5\}, \{a_0, a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}$.

El siguiente teorema deja patente la importancia del esquema de vértices.

Teorema 1.35. a) Cada complejo simplicial abstracto finito \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial finito K .

b) Dos complejos simpliciales son isomorfos si y sólo si sus esquemas de vértices son isomorfos, vistos como complejos simpliciales abstractos.

Demostración. a) En efecto, basta con tomar una aplicación f que envíe inyectivamente los vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$ de \mathcal{S} a puntos geoméricamente independientes de \mathbb{R}^n . Así, el complejo simplicial K , cuyo esquema de vértices es isomorfo a \mathcal{S} , es aquel que tiene $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ por conjunto de vértices, y $\{f(v_{0_1}), \dots, f(v_{n_i})\}$ genera un símplice en K cuando $\{v_{0_1}, \dots, v_{n_i}\}$ genera un símplice en \mathcal{S} . El isomorfismo construido envía todos los símplices de \mathcal{S} a símplices geométricos de la misma dimensión en \mathbb{R}^n .

- b) Las dos implicaciones de b) se obtienen directamente del hecho que el conjunto de vértices de un complejo simplicial coincide con el conjunto de vértices de su esquema de vértices, visto como complejo simplicial abstracto. \square

Generalizaremos, ahora para caras de complejos simpliciales abstractos, la idea de link introducida en la Definición 1.21 para vértices de un poliedro.

Definición 1.36. Sea K un complejo simplicial abstracto. Para una cara $\sigma \in K$, definimos el **link** de σ como

$$Lk_\sigma(K) = \{\omega \in K / \sigma \cap \omega = \emptyset, \sigma \cup \omega \in K\}.$$

Definición 1.37. Llamamos **realización geométrica** de un complejo simplicial abstracto \mathcal{S} a todo complejo simplicial K cuyo esquema de vértices es isomorfo a \mathcal{S} .

Como consecuencia de esta definición, la realización geométrica de un complejo simplicial abstracto está determinada de forma única salvo isomorfismos.

Para terminar esta sección, introduciremos una técnica muy útil que usará los complejos simpliciales abstractos para determinar complejos simpliciales asociados a ciertos espacios topológicos.

Dado un complejo simplicial finito L , llamamos *etiquetado de los vértices de L* a una aplicación sobreyectiva f llevando el conjunto de vértices de L en otro conjunto cuyos elementos los llamaremos “etiquetas”.

A este etiquetado le corresponde un complejo simplicial abstracto \mathcal{S} , cuyos símlices son los conjuntos $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$, donde los vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$ generan un símplex de L .

Consideremos ahora la aplicación simplicial $f : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$, donde K es la realización geométrica de \mathcal{S} . De acuerdo con la Proposición 1.28, f puede extenderse a una aplicación continua y sobreyectiva $|f| : |L| \rightarrow |K|$ que llamaremos *aplicación identificadora* asociada.

Tenemos que $|f| : |L| \rightarrow |K|$ es identificación. Efectivamente, $|f|$ es una aplicación cerrada al ser $|L|$ compacto y $|K|$ es Hausdorff, también es continua y sobreyectiva, condiciones suficientes para serlo.

En consecuencia, $|K|$ es el espacio cociente de $|L|$ módulo la relación de equivalencia que identifica puntos con la misma imagen.

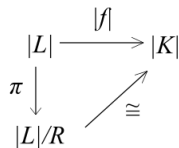


Figura 1.9.

Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que queremos construir un complejo simplicial cuyo espacio subyacente sea homeomorfo al toro.

Partimos del complejo simplicial L que triangula el cuadrado unidad como se muestra en la Figura 1.10.

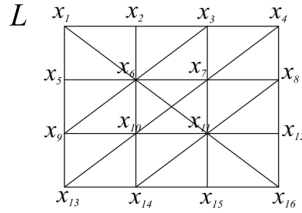


Figura 1.10.

Definimos $f : \{x_1, \dots, x_{16}\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, etiquetado de vértices, por

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= f(x_4) = f(x_{13}) = f(x_{16}) = a \\
 f(x_2) &= f(x_{14}) = b & f(x_6) &= f \\
 f(x_3) &= f(x_{15}) = c & f(x_7) &= g \\
 f(x_5) &= f(x_8) = d & f(x_{10}) &= i \\
 f(x_9) &= f(x_{12}) = e & f(x_{11}) &= j
 \end{aligned}$$

obteniendo un complejo simplicial abstracto \mathcal{S} que podemos representar bidimensionalmente de la siguiente manera.

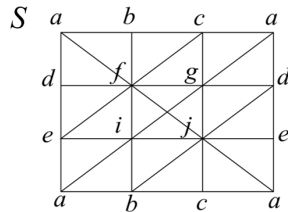


Figura 1.11.

La aplicación simplicial $f : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$, donde K es la realización geométrica de \mathcal{S} , se extiende a la aplicación identificadora $|f| : |L| \rightarrow |K|$, identificación que da lugar al toro.

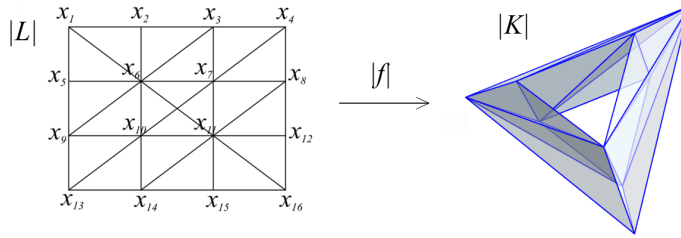


Figura 1.12.

1.4. Equivalencias homotópicas

En Topología, dos aplicaciones continuas con idéntico dominio y codominio se dicen *homótopas* si una se puede “deformar continuamente” en la otra. Tal deformación se llama *homotopía*. Este concepto nos permite introducir cuándo dos espacios se pueden deformar continuamente uno en el otro, en cuyo caso diremos que los espacios son *homotópicamente equivalentes*. En esta sección haremos un breve repaso de algunos resultados relacionados con equivalencias homotópicas, que tendrán una aplicación directa en el resultado principal del próximo capítulo, el Lema del Nervio (2.13).

Definición 1.38. *Dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ se dicen **homótopas** si existe una aplicación continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Se denota por $F : f \simeq g$ y la aplicación F se denomina **homotopía** entre f y g .*

Recordemos que \simeq es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y . Es claro que la aplicación $F(x, t) = f(x)$ para todo $t \in [0, 1]$, es una homotopía entre f y f , por lo que $f \simeq f$. Para ver que la relación es simétrica usamos que si $F : f \simeq g$, entonces $\bar{F} : g \simeq f$, donde $\bar{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$. Para probar la transitividad se usa la composición de homotopías, esto es, si $F : f \simeq g$ y $G : g \simeq h$ construimos

$$(F * G)(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que origina que f es homótopa a h .

Definición 1.39. *Se dice que dos espacios X e Y son **homotópicamente equivalentes** y lo denotaremos $X \simeq Y$, si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq id_X : X \rightarrow X$ y $f \circ g \simeq id_Y : Y \rightarrow Y$. Las aplicaciones f y g se denominan **equivalencias homotópicas**.*

Un resultado importante establece que una aplicación continua entre espacios topológicos es una equivalencia homotópica cuando lo es al restringirla a ciertos abiertos, como veremos a continuación.

Proposición 1.40. *Supongamos que $g : X \rightarrow Y$ es una aplicación entre espacios topológicos y que existe una base \mathcal{B} de Y satisfaciendo que la restricción $g : g^{-1}(B) \rightarrow B$ es una equivalencia homotópica, para todo $B \in \mathcal{B}$. Entonces g es también una equivalencia homotópica.*

De hecho, este resultado es cierto si sustituimos \mathcal{B} por un recubrimiento \mathcal{W} de Y que satisfice que las intersecciones de cualquier par de sus elementos es unión de elementos de \mathcal{W} .

La demostración de este resultado está recogida en [8].

Existe un tipo especial de equivalencia homotópica que pasamos a describir a continuación.

Definición 1.41. *Dado X un espacio topológico. Un subespacio $A \subset X$ se denomina **retracto** de X si existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ llamada retracción tal que $r \circ i = id_A$, donde $i : A \rightarrow X$ es la aplicación inclusión. Además, decimos que $A \subset X$ es un **retracto por deformación** si el retracto también cumple $i \circ r \simeq id_X$. En particular, si A es un punto de X , se dice entonces que X es **contráctil**.*

Observación 1.42. Diremos que un complejo simplicial es contráctil cuando lo sea su realización geométrica. \triangle

Una propiedad fundamental es la compatibilidad de la homotopía con la composición de aplicaciones.

Lema 1.43. *Si $f \simeq g : X \rightarrow Y$ y $h \simeq j : Y \rightarrow Z$, entonces*

$$(h \circ f) \simeq (j \circ g) : X \rightarrow Z.$$

Demostración. Sea $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ una homotopía entre f y g , y sea $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ una homotopía entre h y j . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} G : X \times [0, 1] &\rightarrow Z \\ (x, t) &\rightarrow G(x, t) = H(F(x, t), t) \end{aligned}$$

y vemos que

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= H(F(x, 0), 0) = H(f(x), 0) = h(f(x)) = (h \circ f)(x). \\ G(x, 1) &= H(F(x, 1), 1) = H(g(x), 1) = j(g(x)) = (j \circ g)(x). \end{aligned}$$

Además, G es continua al ser composición de aplicaciones continuas, por tanto, G es una homotopía entre $(h \circ f)$ y $(j \circ g)$. \square

Las aplicaciones que llegan a espacios contráctiles son siempre homótopas entre sí.

Proposición 1.44. *Si $f, g : X \rightarrow Y$ con Y un espacio contráctil, entonces f es homótopa a g .*

Demostración. Como Y es contráctil, $id_Y \simeq c_{y_0}$, donde c_{y_0} es la aplicación constante para $y_0 \in Y$. Podemos escribir, en virtud del Lema 1.43,

$$\begin{aligned} f &= id_Y \circ f \simeq c_{y_0} \circ f = c_{y_0}, \\ g &= id_Y \circ g \simeq c_{y_0} \circ g = c_{y_0}. \end{aligned}$$

Luego, $f \simeq g$, por ser la relación de homotopía simétrica y transitiva. \square

La Topología en la Neurociencia

Nuestro cerebro cuenta con más de 86 mil millones de neuronas, células eléctricamente activas conectadas entre sí mediante complejas redes. Para transmitir información, una neurona se comunica con su vecina mediante impulsos eléctricos, que se generan como respuesta a estímulos o de manera espontánea. La Neurociencia estudia el sistema nervioso, su estructura y funcionamiento, centrándose en el cerebro y su impacto en el comportamiento y las funciones cognitivas.

En la actualidad, la experimentalidad en Neurociencia está teniendo un periodo de rápido progreso y expansión, generando un gran volumen de nuevos datos que pueden comprenderse mejor con la introducción de técnicas y herramientas matemáticas. En particular, a lo largo de la última década se han estado implementando cada vez más los métodos topológicos.

En este capítulo se pretende dar una visión del uso de la Topología como herramienta para comprender cómo el cerebro codifica la información sobre la forma del espacio en donde nos encontramos. La pregunta a responder sería: ¿cómo la actividad conjunta de las neuronas representa la información del mundo exterior?

Los primeros descubrimientos relevantes en esta temática tuvieron lugar en la década de los 50, cuando Hodgkin y Huxley estudiaron la dinámica de los impulsos eléctricos para una neurona aislada [12]. En ese momento, incluso sin tener en cuenta la red neuronal que la rodeaba, ya parecía una quimera predecir cuándo una neurona iba a activarse. Sin embargo, Hubel y Wiesel, ambos premio Nobel en 1981 por sus aportaciones en el estudio del área visual de la corteza cerebral, realizaron en los años 60 un experimento consistente en mostrarle a un gato despierto patrones de barras negras sobre un fondo blanco. Estudiando algunas neuronas por separado, encontraron que cada una respondía a un ángulo diferente de dicha barra, como se muestra en la siguiente figura, donde la frecuencia de impulsos eléctricos de una neurona se dispara para un ángulo de 45° .

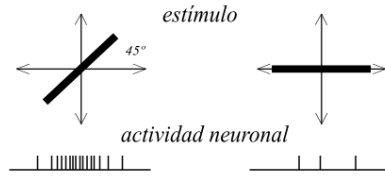


Figura 2.1.

Hubel y Wiesel habían descubierto las *neuronas de orientación* [7], cuya actividad, por tanto, se podría predecir mirando únicamente los estímulos de la pantalla. Se pensó entonces que cada neurona actuaba como un sensor para una característica particular de la escena visual.

Una década más tarde tiene lugar un descubrimiento similar, llevado a cabo por el neurocientífico John O'Keefe, premio Nobel de Medicina en 2014 por sus descubrimientos de células asociadas al posicionamiento espacial del individuo. Mediante experimentos consistentes en estudiar un roedor moviéndose por un entorno acotado, este se percató de que ciertas neuronas del *hipocampo* respondían de forma selectiva a diferentes localizaciones de su entorno físico [11]. Estas células, que sirven como sensores de posición en el espacio, se conocen como *neuronas de posicionamiento*. Profundizaremos sobre este tema en la siguiente sección.

2.1. Neuronas de posicionamiento

Como hemos mencionado previamente, existe un tipo de células cerebrales conocidas como neuronas de posicionamiento cuyo ratio de impulsos eléctricos aumenta cuando el individuo se sitúa en una zona de su entorno físico denominada *campo de posicionamiento* asociado a la neurona. En nuestro estudio consideraremos un sólo campo de posicionamiento asociado a cada neurona, aunque en entornos más grandes que los reproducidos en un laboratorio pueden llegar a tener varios. Los campos de posicionamiento describen circuitos con importantes implicaciones para la memoria, dado que proveen el contexto espacial para los recuerdos y experiencias pasadas.

El hipocampo es un pequeño órgano situado en lo que se conoce como el *sistema límbico* (conjunto de estructuras interconectadas cuya función se relaciona con los estados emocionales). Se le asocian procesos ligados a la memoria, las emociones y la navegación espacial.

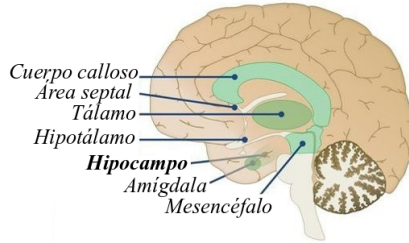


Figura 2.2. Sistema límbico.

Durante un largo tiempo sólo se podía monitorizar una neurona. Sin embargo, cuando la monitorización simultánea de varias células fue posible, se demostró mediante inferencia estadística que la posición del animal podía deducirse de la actividad colectiva de las células de posicionamiento.

La Figura 2.3 esquematiza el experimento que pasamos a detallar.

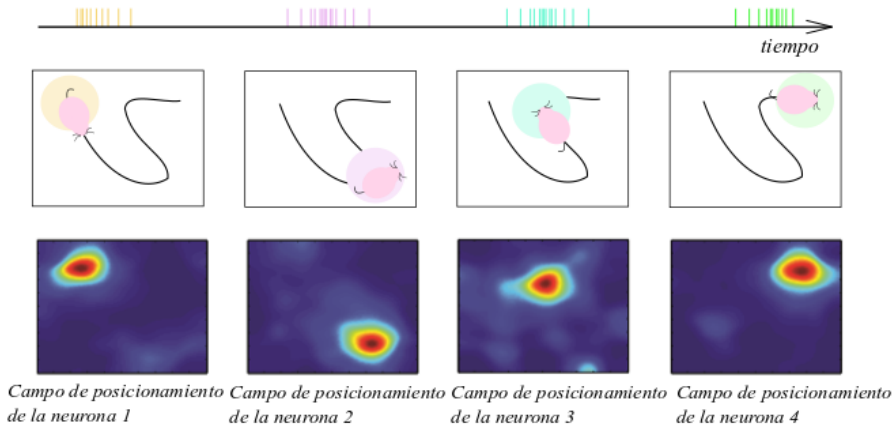


Figura 2.3.

Supongamos que un ratón comienza a explorar su entorno desde la esquina superior izquierda. En ese momento se activa la neurona de posicionamiento 1, cuya actividad se refleja como en la barra superior de la imagen. A medida que el animal avanza se activará el resto de neuronas monitorizadas. La parte inferior de la imagen representa un mapa de calor de la concentración de actividad neuronal en cada campo de posicionamiento. Las áreas rojas reflejan un alto ratio de impulsos eléctricos, mientras que las azules denotan actividad nula (ver [6]).

Los estudios sobre las neuronas de posicionamiento se abordan fundamentalmente desde dos perspectivas. Por un lado, la *Teoría de la Red Neuronal* se centra en entender cómo la actividad de las neuronas depende de las propiedades de la red. Sin embargo, en este trabajo nos centraremos en la *Teoría del Código Neuronal*, que presta atención a las relaciones entre la actividad neuronal y los estímulos externos.

Como nos muestra la Figura 2.3, una vez calculados los campos de posicionamiento de las neuronas de posicionamiento del animal, basta ver cuál de estas células se activa para conocer su posición en su entorno físico. Por consiguiente, la idea principal de la investigación que se aborda desde esta perspectiva es que las neuronas de posicionamiento disparan impulsos eléctricos en diferentes lugares del ambiente de tal forma que el entorno entero se representa por la actividad del conjunto de neuronas.

En la siguiente sección, desde el punto de vista matemático, veremos los campos de posicionamiento como un recubrimiento abierto del entorno físico considerado.

2.2. Código neuronal

Uno de los principales desafíos en Neurociencia consiste en encontrar las relaciones entre la actividad de las neuronas y el estímulo al que son sometidas. Estas relaciones se conocen como *código neuronal*, pero para descubrir sus principios no es suficiente describir las relaciones entre estímulos y respuestas. Se debe también entender la estructura intrínseca de los códigos neuronales, independientemente de lo que está siendo codificado.

Por ello, tiene sentido introducir la siguiente noción matemática.

Definición 2.1. *Se conoce como **código neuronal**, o simplemente **código**, a toda colección de cadenas binarias $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$. Cada elemento de \mathcal{C} se denomina **palabra**.*

Una vez monitorizada la actividad de n neuronas, interpretaremos cada dígito binario de una palabra como el estado de activación (1) o silencio (0) de una neurona.

Para simplificar en ciertas ocasiones la notación, es interesante considerar una representación alternativa para las palabras. Así, definimos el *soporte* de una palabra $c = a_1 \dots a_n \in \mathcal{C}$ como

$$\text{supp}(c) = \{i \in \{1, \dots, n\} / a_i = 1\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Por tanto, para referirnos a una misma palabra podemos considerar indistintamente cadenas de ceros y unos con longitud n ó subconjuntos de

$\{1, \dots, n\}$. Por ejemplo, la palabra 10110 se puede representar también utilizando $\text{supp}(10110) = \{1, 3, 4\}$. Obsérvese que $\text{supp}(00\dots 0) = \emptyset$.

Es posible asociar un código a cualquier colección de abiertos de un espacio topológico, como veremos a continuación. Representaremos las palabras usando su soporte.

Definición 2.2. Sea X un espacio topológico y consideremos una colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de X . El **código de \mathcal{U}** se define por

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \left\{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} / U_\sigma - \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} - \sigma} U_j \right) \neq \emptyset \right\},$$

donde $U_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} U_i$.

Cada palabra $\sigma \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ corresponde a una intersección de abiertos no cubierta por el resto. Nótese que $U_\emptyset = \bigcap_{i \in \emptyset} U_i = X$, por lo que \emptyset estará en el código cuando la colección \mathcal{U} no recubra el espacio en su totalidad. Por otro lado, como el número de neuronas a estudiar es finito, las colecciones de abiertos que consideraremos también lo serán.

Veamos con algunos ejemplos cómo se calcula $\mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Ejemplo 2.3 La Figura 2.4 muestra ejemplos de la definición anterior.

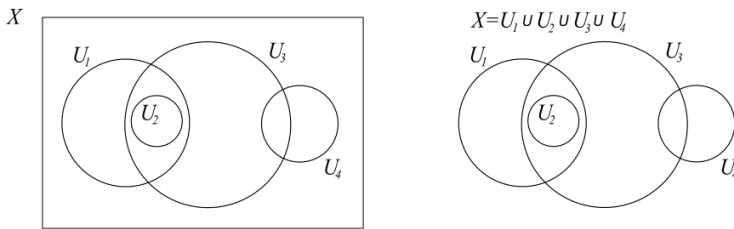


Figura 2.4.

La palabra con soporte vacío estará únicamente en el código del ejemplo de la izquierda, pues la colección de abiertos no recubre X . Por otro lado, el único abierto recubierto por el resto es U_2 , en ambos casos, luego los demás abiertos individuales generan palabras en $\mathcal{C}(\mathcal{U})$. En cuanto a las intersecciones de dos abiertos, no se deben considerar las regiones $U_{\{1,2\}} \subset U_3 \cup U_4$, $U_{\{2,3\}} \subset U_1 \cup U_4$, ni $U_{\{1,4\}} = U_{\{2,4\}} = \emptyset$. Sin embargo, $U_{\{1,3\}}$ y $U_{\{3,4\}}$ sí generan palabras del

código, al no estar recubiertas por el resto de abiertos. De las intersecciones de tres abiertos sólo $U_{\{1,2,3\}} = U_2$ genera palabras de $\mathcal{C}(\mathcal{U})$, pues el resto son vacío. Por último, la intersección de los cuatro abiertos es también vacía.

Así, en el primer caso $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$, mientras que en el segundo $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Interpretando los abiertos del recubrimiento como campos de posicionamiento asociados a neuronas, obsérvese que $U_{\{1,2\}} = U_{\{2,3\}} = U_{\{1,2,3\}} = U_2$. Sin embargo, el código sólo incluye la palabra $\{1, 2, 3\}$, pues si añadiéramos $\{1, 2\}$ no estaríamos reflejando que en esa porción del espacio también se activa la neurona 3 (equivalentemente para $\{2, 3\}$).

En definitiva, las intersecciones cubiertas por uniones de otros abiertos no reflejan toda la información sobre la relación de activación entre las neuronas.

Hemos visto que toda colección de abiertos de un espacio topológico define un código neuronal. Es natural plantearse si todo código neuronal puede ser asociado a una colección de abiertos en algún espacio real d -dimensional. El siguiente resultado da respuesta a esta pregunta.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$ un código neuronal. Para todo $d \geq 1$ existirá una colección \mathcal{U} de abiertos en \mathbb{R}^d tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$.*

Demostración. En primer lugar ordenamos los elementos de \mathcal{C} como $\{c_1, \dots, c_m\}$. Como \mathbb{R}^d es un espacio Hausdorff, para cada $c_k \in \mathcal{C}$ existe un punto distinto $x_k \in \mathbb{R}^d$ y un entorno abierto N_k de x_k , de forma que ningún par de conjuntos N_k se intersequen. Definimos para cada $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$U_j = \bigcup_{k \in A_j} N_k, \text{ donde } A_j = \{k \in \{1, \dots, m\} / j \in \text{supp}(c_k)\},$$

y tomamos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Por construcción, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. □

Visualicemos la anterior demostración con un ejemplo.

Ejemplo 2.5 *Tomamos el código $\mathcal{C} = \{000, 010, 110, 101\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, asociado a tres neuronas. En \mathbb{R} , elegimos el abierto $N_i = (i - 3/2, i - 1/2)$ para la palabra c_i , como en la Figura 2.5.*

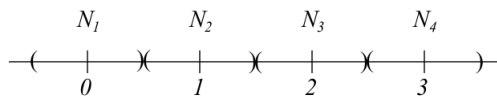


Figura 2.5.

Tenemos que $\text{supp}(c_1) = \emptyset$, $\text{supp}(c_2) = \{2\}$, $\text{supp}(c_3) = \{1, 2\}$ y $\text{supp}(c_4) = \{1, 3\}$, luego $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, con $U_1 = N_3 \cup N_4$, $U_2 = N_2 \cup N_3$ y $U_3 = N_4$, como se muestra en la Figura 2.6.

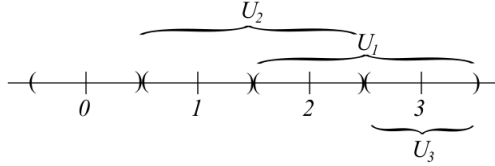


Figura 2.6.

Calculamos su código:

$$\begin{aligned}
 \sigma = \{1\} &\rightarrow U_1 - (U_2 \cup U_3) = \emptyset & \sigma = \{1, 3\} &\rightarrow U_{\{1,3\}} - U_2 \neq \emptyset \\
 \sigma = \{2\} &\rightarrow U_2 - (U_1 \cup U_3) \neq \emptyset & \sigma = \{2, 3\} &\rightarrow U_{\{2,3\}} - U_1 = \emptyset \\
 \sigma = \{3\} &\rightarrow U_3 - (U_1 \cup U_2) = \emptyset & \sigma = \{1, 2, 3\} &\rightarrow U_{\{1,2,3\}} = \emptyset \\
 \sigma = \{1, 2\} &\rightarrow U_{\{1,2\}} - U_3 \neq \emptyset & \sigma = \emptyset &\rightarrow U_\emptyset - U_{\{1,2,3\}} \neq \emptyset.
 \end{aligned}$$

Y obtenemos $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\} = \{000, 010, 110, 101\} = \mathcal{C}$.

Cabe puntualizar que hemos obtenido un recubrimiento en \mathbb{R} , pero es claro que puede ser generalizado para dimensiones superiores.

Para finalizar esta sección veremos una manera de asociar un complejo simplicial a cualquier código.

Definición 2.6. Sea $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$ un código neuronal. Se llama **complejo simplicial del código** \mathcal{C} , denotado por $\Delta(\mathcal{C})$, al complejo simplicial abstracto más pequeño con conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$ que contiene al soporte de todas las palabras de \mathcal{C} . Las palabras correspondiendo a las caras de $\Delta(\mathcal{C})$ de dimensión máxima se dirán **maximales**.

Por la definición de complejo simplicial abstracto, los subconjuntos de los soportes de todas las palabras de \mathcal{C} deben pertenecer a $\Delta(\mathcal{C})$. Por tanto,

$$\Delta(\mathcal{C}) = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} / \sigma \neq \emptyset, \sigma \subset \text{supp}(c), \text{ para algún } c \in \mathcal{C}\}.$$

Ejemplo 2.7 Consideramos los códigos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \\
 \mathcal{C}_2 &= \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{\emptyset, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$$\mathcal{C}_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

El complejo simplicial $\Delta(\mathcal{C}_i)$ de cada uno de los códigos es el complejo asociado al 2-símplice abstracto $\{1, 2, 3\}$, dado que la palabra $\{1, 2, 3\}$ pertenece a los cuatro códigos.

Para códigos tan diferentes obtenemos un mismo complejo simplicial. El ejemplo anterior refleja que $\Delta(\mathcal{C})$ pierde cierta información acerca del código. Profundizaremos en este aspecto en las secciones 2.4 y 2.5.

2.3. El nervio de un recubrimiento abierto

En esta sección introduciremos la noción de *nervio de un recubrimiento abierto*, otra herramienta para modelizar la información espacial que codifican las neuronas de posicionamiento. El resultado principal es el *Lema del Nervio*, que relaciona la estructura del nervio de un recubrimiento con la estructura topológica del espacio recubierto.

Definición 2.8. Llamamos *nervio de un recubrimiento de abiertos* $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de un espacio topológico X al conjunto

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} / \sigma \neq \emptyset \text{ y } U_\sigma \neq \emptyset\}.$$

Recordemos que $U_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} U_i$, notación que ya se usó en la Definición 2.2, por lo que es necesario puntualizar que los elementos del nervio son no vacíos.

Veremos a continuación que el nervio de un recubrimiento es un complejo simplicial abstracto.

Proposición 2.9. $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial abstracto, donde $\{1, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Esto es, $\sigma \neq \emptyset$ y $U_\sigma \neq \emptyset$. Claramente, tomando un subconjunto no vacío τ de σ , se cumple $U_\tau \neq \emptyset$, luego $\tau \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. \square

Ilustremos este nuevo concepto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10 Consideramos tres espacios con diferentes recubrimientos $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$.

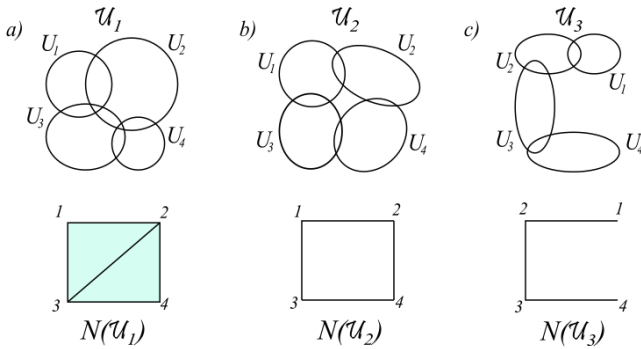


Figura 2.7.

Así:

$$\mathcal{N}(U_1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

$$\mathcal{N}(U_2) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

$$\mathcal{N}(U_3) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}.$$

La estructura del nervio de estos ejemplos nos sugiere que, de alguna manera, este hereda propiedades topológicas del espacio. Sin embargo, esto sólo se puede garantizar cuando trabajamos con cierto tipo de recubrimientos. El siguiente ejemplo pone de manifiesto este hecho.

Ejemplo 2.11 La Figura 2.8 representa dos recubrimientos diferentes de un anillo.

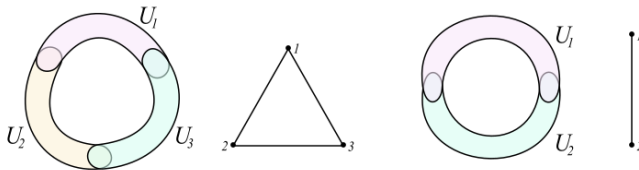


Figura 2.8. Buenos y malos recubrimientos.

A la izquierda tenemos un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, junto con una representación simplicial del complejo abstracto asociado a su nervio. A la derecha encontramos un recubrimiento con dos abiertos $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$, cuyo nervio no nos da información topológica del espacio subyacente. La diferencia entre ambos recubrimientos es que en el primero, cualquier intersección de los elementos del recubrimiento es contráctil, hecho que no ocurre en el segundo caso.

Esto motiva que introduzcamos la noción de *buen recubrimiento* de un espacio topológico.

Definición 2.12. *Para un espacio topológico X , decimos que un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ es un **buen recubrimiento** si toda intersección no vacía de abiertos de \mathcal{U} es contráctil.*

El siguiente resultado muestra lo que ya anunciábamos previamente: para buenos recubrimientos, el nervio da información de la topología del espacio.

Teorema 2.13 (Lema del Nervio). *Sea \mathcal{U} un buen recubrimiento de un espacio topológico X . Entonces, el poliedro $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ asociado al nervio de \mathcal{U} es homotópicamente equivalente a X .*

A continuación haremos un “sketch” de la demostración, sin detenernos en los detalles de la misma (para una completa demostración ver [9]). Comenzaremos estudiando un caso particular, para posteriormente plantear el caso general.

Sea X un espacio topológico y consideremos en principio $\bar{\mathcal{U}} = \{\bar{U}_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento abierto de X tal que los \bar{U}_i son contráctiles y la intersección de dos elementos cualesquiera de $\bar{\mathcal{U}}$ es un elemento del recubrimiento.

Nótese que $\bar{\mathcal{U}}$ define un buen recubrimiento, en el sentido de la Definición 2.12.

Sobre $\bar{\mathcal{U}}$ definimos una topología cuya base es

$$\mathcal{B} = \{[\bar{U}] / \bar{U} \in \bar{\mathcal{U}}\}, \text{ con } [\bar{U}] = \{\bar{V} \in \bar{\mathcal{U}} / \bar{V} \subset \bar{U}\}. \quad (2.1)$$

\mathcal{B} es una base de una cierta topología sobre $\bar{\mathcal{U}}$ ya que:

- Recubre X , pues $\bar{U} \in [\bar{U}]$, para todo $\bar{U} \in \bar{\mathcal{U}}$.
- La intersección de cualquier par de elementos de \mathcal{B} es un elemento de la base. En efecto, dados $[U], [V] \in \mathcal{B}$, se tiene que $W \in [U] \cap [V]$ si y sólo si $W \subset U$ y $W \subset V$, o equivalentemente, $W \subset U \cap V$. Lo que significa que $W \in [U \cap V]$, y por tanto, $[U] \cap [V] = [U \cap V]$.

Sea $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ el nervio de $\bar{\mathcal{U}}$, y consideremos el subcomplejo $\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ definido como

$$\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}}) = \{\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\} / \bar{U}_{i_1} \subset \bar{U}_{i_2} \subset \dots \subset \bar{U}_{i_k}\}.$$

Es claro que $\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ es una subcolección de símlices de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$, pues si $\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ entonces $\bigcap_{j=1}^k \bar{U}_{i_j} = \bar{U}_{i_1}$. Por otro lado, $\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ es en sí mismo

un complejo simplicial, pues para cualquier símplex $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ se tiene que también cualquier cara de σ está en $\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$.

A medida que vayamos demostrando el Lema del Nervio iremos ilustrando la demostración con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14 La Figura 2.9 muestra un recubrimiento $\bar{U} = \{\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_7\}$ con las características mencionadas.

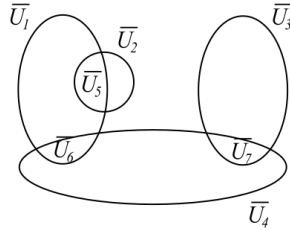


Figura 2.9. Recubrimiento \bar{U} de X .

Los abiertos de la base $\mathcal{B} = \{[\bar{U}_1], \dots, [\bar{U}_7]\}$ definida en (2.1), en este ejemplo particular son

$$\begin{aligned} [\bar{U}_1] &= \{\bar{U}_1, \bar{U}_5, \bar{U}_6\} & [\bar{U}_4] &= \{\bar{U}_4, \bar{U}_6, \bar{U}_7\} & [\bar{U}_6] &= \{\bar{U}_6\} \\ [\bar{U}_2] &= \{\bar{U}_2, \bar{U}_5\} & [\bar{U}_5] &= \{\bar{U}_5\} & [\bar{U}_7] &= \{\bar{U}_7\}. \\ [\bar{U}_3] &= \{\bar{U}_3, \bar{U}_7\} \end{aligned}$$

El nervio de \bar{U} es el complejo simplicial

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\bar{U}) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \\ &\quad \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}\}. \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\bar{U}) &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \\ &\quad \{5, 1\}, \{5, 2\}, \{6, 1\}, \{6, 4\}, \{7, 3\}, \{7, 4\}\}. \end{aligned}$$

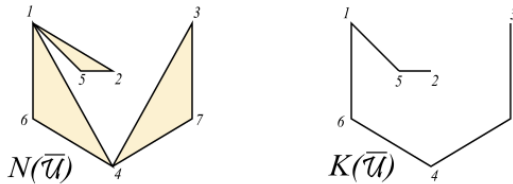


Figura 2.10.

Vamos a probar que el poliedro asociado a $\mathcal{K}(\bar{U})$ es homotópicamente equivalente al espacio X . Esto lo demostraremos en dos pasos:

- 1) Construimos una equivalencia homotópica $g : |\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})| \longrightarrow \bar{\mathcal{U}}$, entre el poliedro $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})|$ y el recubrimiento $\bar{\mathcal{U}}$ con la topología definida por la base \mathcal{B} .
- 2) Construimos una equivalencia homotópica $p : X \longrightarrow \bar{\mathcal{U}}$, entre el espacio X y el recubrimiento $\bar{\mathcal{U}}$.

Una vez probados estos dos resultados, y usando que ser homotópicamente equivalente es una relación de equivalencia, podemos concluir que $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})| \simeq X$.

Lema 2.15. *Los espacios $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})|$ y $\bar{\mathcal{U}}$ son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Para probar este resultado, construimos la aplicación continua g definida como sigue

$$g : |\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})| \longrightarrow \bar{\mathcal{U}} \\ x \mapsto \bar{U}_{i_1}$$

donde $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ es el único símplice de $\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$ tal que $x \in \text{Int } \sigma$.

Para comprobar que g es continua veremos que

$$g^{-1}([\bar{U}_i]) = \bigcup_{\bar{U}_j \subset \bar{U}_i} St j,$$

siendo $St j$ la estrella de vértice j .

En efecto, sea $x \in g^{-1}([\bar{U}_i])$, entonces existe $\bar{U}_j \in \bar{\mathcal{U}}$ tal que $g(x) = \bar{U}_j$, con $\bar{U}_j \subset \bar{U}_i$. Además, $x \in \text{Int } \{j, \dots\}$, luego $x \in St j$.

Ahora, tomamos $x \in St j$ con $\bar{U}_j \subset \bar{U}_i$. Entonces, $x \in \text{Int}\{i_1, \dots, j, \dots, i_k\}$, donde $\{i_1, \dots, j, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$, luego

$$\bar{U}_{i_1} \subset \dots \subset \bar{U}_j \subset \dots \subset \bar{U}_{i_k}.$$

Por tanto, $g(x) = \bar{U}_{i_1} \in [\bar{U}_i]$, pues $\bar{U}_{i_1} \subset \bar{U}_j \subset \bar{U}_i$.

Utilizando la Proposición 1.22, concluimos la continuidad de g .

Para demostrar que g es una equivalencia homotópica, usando la Proposición 1.40, es suficiente comprobar que

$$g : g^{-1}([\bar{U}_i]) = \bigcup_{\bar{U}_j \subset \bar{U}_i} St j \longrightarrow [\bar{U}_i]$$

es una equivalencia homotópica, para todo $[\bar{U}_i] \in \mathcal{B}$. Definimos

$$\bar{g} : [\bar{U}_i] \longrightarrow g^{-1}([\bar{U}_i]) = \bigcup_{\bar{U}_j \subset \bar{U}_i} St j \\ \bar{U}_k \mapsto k.$$

Esta aplicación está bien definida, pues si $\overline{U}_k \in [\overline{U}_i]$, entonces $\overline{U}_k \subset \overline{U}_i$ y por tanto, $k \in \bigcup_{\overline{U}_j \subset \overline{U}_i} St j$.

Es fácil comprobar que $g \circ \bar{g} = id_{[\overline{U}_i]}$.

Por otro lado, para ver $\bar{g} \circ g \simeq id_{g^{-1}([\overline{U}_i])}$, vamos a definir la homotopía

$$F: \bigcup_{\overline{U}_j \subset \overline{U}_i} St j \times [0, 1] \longrightarrow \bigcup_{\overline{U}_j \subset \overline{U}_i} St j$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)i_1 + t \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k i_k + \lambda j \right),$$

con $x \in Int\{i_1, \dots, j, \dots, i_m\}$. Nótese que entonces $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k i_k + \lambda j$, con $\lambda_i > 0$

para $i = 1, \dots, m$, $\lambda > 0$ y $\sum_{k=1}^m \lambda_k + \lambda = 1$, y tal que $\overline{U}_{i_1} \subset \dots \subset \overline{U}_j \subset \dots \subset \overline{U}_{i_m}$.

La homotopía F está bien definida ya que

- a) Si $t \neq 0$, entonces $(1 - t) + t\lambda_1 > 0$, $t\lambda_k > 0$, para $k = 2, \dots, m$ y $t\lambda > 0$. Además

$$(1 - t) + t \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k + \lambda \right) = 1.$$

Podemos concluir que $F(x, t) \in St j$.

- b) Si $t = 0$, entonces $F(x, 0) = i_1 \in St i_1$ y $\overline{U}_{i_1} \subset \overline{U}_j \subset \overline{U}_i$.

Por último, $F(x, 0) = i_1 = \bar{g}(g(x))$ y $F(x, 1) = \lambda_1 i_1 + \sum_{k=2}^m \lambda_k i_k + \lambda j = x$. □

Ejemplo 2.16 (Continuación del Ejemplo 2.14.) Para el poliedro de $\mathcal{K}(\overline{U})$, como vemos en la Figura 2.10, tenemos que

$$g: |\mathcal{K}(\overline{U})| \longrightarrow \overline{U}$$

$$v \mapsto g(v) = \overline{U}_v, v = 1, \dots, 7.$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \overline{U}_5 & \text{si } x \in Int\{5, 1\} \text{ o } x \in Int\{5, 2\} \\ \overline{U}_6 & \text{si } x \in Int\{6, 1\} \text{ o } x \in Int\{6, 4\} \\ \overline{U}_7 & \text{si } x \in Int\{7, 3\} \text{ o } x \in Int\{7, 4\}. \end{cases}$$

Lema 2.17. *Los espacios X y \bar{U} son homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Construimos la aplicación continua p como sigue

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow \bar{U} \\ x &\longmapsto \overline{U_{i_x}} \end{aligned}$$

donde $\overline{U_{i_x}}$ es el abierto más pequeño de \bar{U} que contiene al punto x . La aplicación p está bien definida ya que el abierto $\overline{U_{i_x}}$ es único, pues de existir dos que cumplieran la misma condición, tomaríamos el abierto intersección de los mismos como el más pequeño que contiene a x .

La continuidad de p se obtiene observando que, para cualquier $\bar{U} \in \bar{\mathcal{U}}$,

$$p^{-1}([\bar{U}]) = \bar{U}.$$

En efecto, sea $x \in p^{-1}([\bar{U}])$, entonces $p(x) \in [\bar{U}]$, es decir, $x \in \overline{U_{i_x}} \subset \bar{U}$. Por otro lado, si $x \in \bar{U}$, entonces $p(x) = \overline{U_{i_x}}$, con $x \in \overline{U_{i_x}}$. Como $\overline{U_{i_x}}$ es el más pequeño que lo contiene, se tiene que $\overline{U_{i_x}} \subset \bar{U}$, esto es $p(x) \in [\bar{U}]$.

Para probar que p es una equivalencia homotópica, es suficiente ver que la siguiente aplicación lo es, para cualquier $[\bar{U}]$ (ver Proposición 1.40),

$$\begin{aligned} p : p^{-1}([\bar{U}]) = \bar{U} &\longrightarrow [\bar{U}] \\ x &\longmapsto \overline{U_{i_x}}. \end{aligned}$$

Primeramente, notemos que $[\bar{U}]$ es contráctil. En efecto, construimos la homotopía

$$\begin{aligned} F : [\bar{U}] \times [0, 1] &\longrightarrow [\bar{U}] \\ (\bar{V}, t) &\longmapsto \bar{V}, \text{ si } t \in [0, 1) \\ (\bar{V}, t) &\longmapsto \bar{U}, \text{ si } t = 1. \end{aligned}$$

La aplicación F es continua dado que

$$\begin{aligned} F^{-1}([\bar{V}]) &= [\bar{V}] \times [0, 1) \text{ si } \bar{V} \subsetneq \bar{U}, \\ F^{-1}([\bar{U}]) &= [\bar{U}] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Se tiene además que $F(\bar{V}, 0) = \bar{V} = id_{[\bar{U}]}(\bar{V})$, y $F(\bar{V}, 1) = \bar{U}$. Por tanto, $[\bar{U}]$ es contráctil.

Por otro lado, como \bar{U} es contráctil, entonces, $id_{\bar{U}} \simeq c_{x_0}$, con c_{x_0} la aplicación constante y $x_0 \in \bar{U}$. Definimos

$$\begin{aligned} \bar{p} : [\bar{U}] &\longrightarrow \bar{U} \\ \bar{V} &\longmapsto x_0. \end{aligned}$$

Usando la Proposición 1.44, tenemos que

- a) Como $[\bar{U}]$ es contráctil, $p \circ \bar{p} \simeq id_{[\bar{U}]}$.
- b) Como \bar{U} también es contráctil, $\bar{p} \circ p \simeq id_{\bar{U}}$.

Por tanto, $p : p^{-1}([\bar{U}]) = \bar{U} \rightarrow [\bar{U}]$ es una equivalencia homotópica. □

Ejemplo 2.18 (Continuación del Ejemplo 2.16.) *Para el espacio X , recubierto como podemos apreciar en la Figura 2.9, tenemos que*

$$p : X \rightarrow \bar{U}$$

$$x \mapsto p(x) = \begin{cases} \bar{U}_1 & \text{si } x \in \bar{U}_1 - (\bar{U}_5 \cup \bar{U}_6) \\ \bar{U}_2 & \text{si } x \in \bar{U}_2 - \bar{U}_5 \\ \bar{U}_3 & \text{si } x \in \bar{U}_3 - \bar{U}_7 \\ \bar{U}_4 & \text{si } x \in \bar{U}_4 - (\bar{U}_6 \cup \bar{U}_7) \\ \bar{U}_i & \text{si } x \in \bar{U}_i, \text{ para } i = 5, 6, 7. \end{cases}$$

Así, usando los Lemas 2.15 y 2.17, deducimos que

$$|\mathcal{K}(\bar{U})| \simeq X.$$

A continuación, abordaremos la demostración general del Lema del Nervio. Para ello usaremos el caso particular que acabamos de analizar como una herramienta para facilitar la demostración.

Consideraremos, como en las hipótesis del Teorema 2.13, un buen recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^n$ de X . Veamos que $|\mathcal{N}(\mathcal{U})| \simeq X$.

Construimos un recubrimiento $\bar{\mathcal{U}}$ con las propiedades del caso particular analizado previamente. Elegimos $\bar{\mathcal{U}} = \{U_\sigma\}_{\sigma \subset \{1, \dots, n\}}$, con lo que $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$.

Primeramente, nótese que $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es un subcomplejo de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$, ya que $\bar{\mathcal{U}}$ es un refinamiento de \mathcal{U} formado a partir de intersecciones de elementos de \mathcal{U} . El nervio $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ por definición va a reflejar las intersecciones que ya existían entre elementos de \mathcal{U} , más las intersecciones añadidas. Esto es, cada vértice de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ se corresponde con un símplice de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, es decir, es de la forma $v = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$. Esto implica que construimos $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ aumentando la dimensión de los símplices de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Nuestro objetivo ahora es ver que $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ es un retracto de deformación de $|\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|$. Consideremos la aplicación simplicial entre los vértices de los complejos

$$r : \mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})^{(0)} \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)}$$

$$v = \{i_1, \dots, i_k\} \mapsto i_1$$

Por la Proposición 1.28, esta aplicación induce una aplicación continua entre los poliedros de los nervios $|r| : |\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})| \rightarrow |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$, que envía cada punto

de un símlice de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ a un símlice de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Esta será la retracción que buscamos. Por otro lado, la aplicación inclusión $i : \mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)} \rightarrow \mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})^{(0)}$ es también simplicial, por lo que induce la aplicación continua $|i| : |\mathcal{N}(\mathcal{U})| \rightarrow |\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|$.

a) $|i| \circ |r| \simeq id_{|\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|}$. Ambas aplicaciones son homótopas mediante

$$F : |\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})| \times [0, 1] \rightarrow |\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)|r|(x) + tx.$$

La homotopía F está bien definida dado que x y $|r|(x)$ están en un mismo símlice de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$.

b) $|r| \circ |i| = id_{|\mathcal{N}(\mathcal{U})|}$.

Ejemplo 2.19 (Continuación del Ejemplo 2.18.) Si consideramos el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ como en la Figura 2.11, el refinamiento $\bar{\mathcal{U}}$ es el descrito en el Ejemplo 2.14.

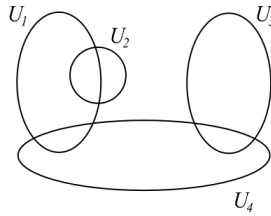


Figura 2.11. Recubrimiento \mathcal{U} de X .

Así, el nervio de \mathcal{U} es

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

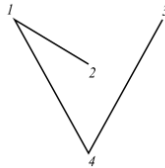


Figura 2.12. $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Nótese que los vértices de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ son

$$\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})^{(0)} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\} = \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

Por tanto, el complejo $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ es exactamente el descrito en la Figura 2.10.

Respecto a la aplicación simplicial r , en este caso tendríamos

$$r : \mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})^{(0)} \longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)}$$

$$v \mapsto r(v) = \begin{cases} v & \text{si } v = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \\ \{1\} & \text{si } v = \{1, 2\}, \{1, 4\} \\ \{3\} & \text{si } v = \{3, 4\}. \end{cases}$$

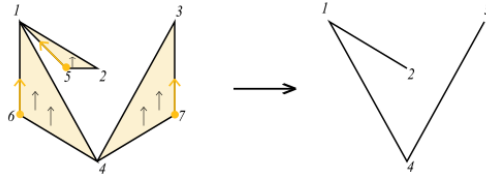


Figura 2.13. Retracción de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ en $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

El símplice $\{1, 2, 5\}$ lo llevamos sobre $\{1, 2\}$, el símplice $\{1, 4, 6\}$ sobre $\{1, 4\}$, y el símplice $\{3, 4, 7\}$ sobre $\{3, 4\}$.

Lema 2.20. Sea $\bar{\mathcal{U}}$ un recubrimiento abierto tal que sus elementos son contráctiles y la intersección de dos cualesquiera es un elemento de $\bar{\mathcal{U}}$. Entonces, $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})|$ es un retracto de deformación de $|\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|$.

Demostración. Consideramos en primer lugar la subdivisión baricéntrica $Sd \mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$, que denotaremos simplemente por $Sd \mathcal{N}$. Dado que los vértices de $Sd \mathcal{N}$ son los baricentros $b(\sigma)$ de los símlices σ de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$, definimos la siguiente retracción

$$r : Sd \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$$

$$b(\sigma) \mapsto s$$

donde $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\}$, con $\bar{U}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{U}_{i_k} = \bar{U}_s$.

Cualquier símplice de $Sd \mathcal{N}$ está generado por vértices $b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k)$, con $\sigma_0 < \dots < \sigma_k$. Entonces, $s_0 > \dots > s_k$, de manera que estos vértices generan un símplice de $\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})$.

Para probar que $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})|$ es retracto de deformación de $|\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})| = |Sd \mathcal{N}|$, es suficiente ver que, para cada símplice $\tau \in Sd \mathcal{N}$, tanto τ como $r(\tau)$ son subconjuntos de algún símplice σ de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$. Sean $b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k)$ los vértices de τ , con $\sigma_0 < \dots < \sigma_k$, y sean u_0, \dots, u_m los vértices de σ_k . Podemos elegir σ como el símplice de $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})$ generado por los vértices $\{u_0, \dots, u_m, s_0, \dots, s_k\}$. \square

Usando este resultado, llegamos a que $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})|$ es un retracto de deformación de $|\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|$. Como además $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ es retracto de deformación de $|\mathcal{N}(\bar{\mathcal{U}})|$ y $|\mathcal{K}(\bar{\mathcal{U}})| \simeq X$, se tiene finalmente que

$$|\mathcal{N}(\mathcal{U})| \simeq X.$$

Cabe destacar que el Lema del Nervio no se satisface si el recubrimiento no cumple la condición de ser un buen recubrimiento, (ver Ejemplo 2.11).

¿Por qué nos resulta realmente práctico el Lema del Nervio? Supongamos que hemos monitorizado las neuronas de un roedor que se mueve por un espacio X cuya forma no conocemos. El Lema del Nervio nos dice que no necesitamos mirar directamente al espacio X para saber su forma (por ejemplo, para ver si tiene agujeros), pues el poliedro del nervio del recubrimiento que definen las neuronas con sus campos de posicionamiento (siempre y cuando, sea un buen recubrimiento), ya proporciona esa información.

2.4. Códigos neuronales convexos

En esta sección centraremos nuestra atención en los *códigos convexos*, especialmente relevantes para la Neurociencia pues los campos de posicionamiento que representan patrones de actividad neuronal son esencialmente convexos.

Definición 2.21. Diremos que un código binario de n neuronas \mathcal{C} es **convexo** si existe una colección de subconjuntos abiertos y convexos $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de \mathbb{R}^d tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. El menor número d para el cual esto es posible se denomina **dimensión mínima de incrustación** del código \mathcal{C} , y se denota por $d(\mathcal{C})$.

Ejemplo 2.22 Los códigos asociados a las siguientes familias de abiertos

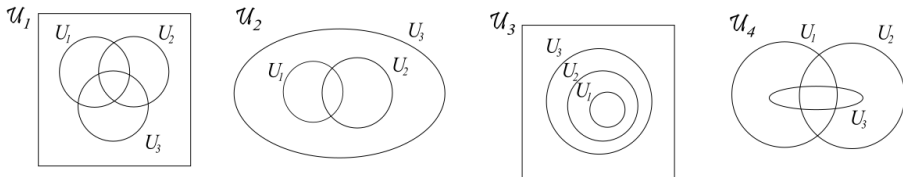


Figura 2.14.

coinciden con los introducidos en el Ejemplo 2.7, es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\mathcal{U}_1) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \\ \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\mathcal{U}_2) &= \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}(\mathcal{U}_3) &= \{\emptyset, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \\ \mathcal{C}_4 = \mathcal{C}(\mathcal{U}_4) &= \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Se puede observar que $d(\mathcal{C}_2) = d(\mathcal{C}_3) = 1$, ya que podemos encontrar abiertos convexos de \mathbb{R} (intervalos) con las mismas relaciones de contenido que las de los U_i . Por otro lado, $d(\mathcal{C}_1) = d(\mathcal{C}_4) = 2$, dado que en \mathbb{R} no es posible encontrar tres intervalos que generen este código.

Obsérvese que la dimensión mínima de incrustación no coincide en los cuatros casos, a pesar de que el complejo simplicial asociado a los códigos sí es el mismo, tal como vimos en el Ejemplo 2.7, por lo que el complejo simplicial no contiene esta información.

A primera vista podría parecer que todos los códigos debieran ser convexos, ya que podemos elegir la familia de abiertos en dimensiones tan altas como queramos. Sin embargo esto no es cierto, ya que con tan solo 3 neuronas aparecen códigos no convexos.

Ejemplo 2.23 El código neuronal $\mathcal{C} = \{0, 1\}^3 - \{111, 001\}$ asociado a tres neuronas no es convexo.

Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que sí lo es. Consideramos $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ formado por conjuntos convexos y abiertos en \mathbb{R}^d y $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Se tiene que $U_{\{1,2\}} - U_3 \neq \emptyset$ ya que $110 \in \mathcal{C}$, $U_{\{1,3\}} - U_2 \neq \emptyset$ ya que $101 \in \mathcal{C}$, y $U_{\{2,3\}} - U_1 \neq \emptyset$ ya que $011 \in \mathcal{C}$. Tomamos $p_1 \in U_{\{1,3\}} - U_2$ y $p_2 \in U_{\{2,3\}} - U_1$. Dado que $p_1, p_2 \in U_3$ y U_3 es convexo, el segmento lineal que une p_1 con p_2 , al que denotamos por L , debe estar contenido en U_3 . Existen dos posibilidades.

- a) Si L intersecara $U_{\{1,2\}}$, implicaría que $U_{\{1,2,3\}} \neq \emptyset$ y tendríamos que $111 \in \mathcal{C}$, lo cual es falso.
- b) Si $L \subset U_3 - (U_1 \cup U_2)$, entonces $U_{\{1,2\}}$ sería vacío. Se concluiría que $001 \in \mathcal{C}$, que tampoco es cierto.

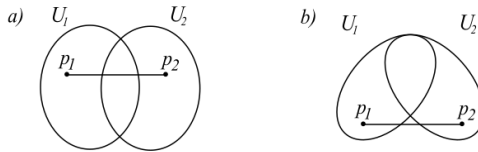


Figura 2.15.

Hemos llegado a un absurdo procedente de suponer que el código es convexo en un cierto \mathbb{R}^d .

Definición 2.24. Llamamos *realización convexa* de un código a una colección $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ de conjuntos convexos abiertos tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$.

Ejemplo 2.25 Consideremos el código $\mathcal{C} = \{0000, 0010, 0001, 1100, 0011, 1101, 1011, 1111\}$, con 1111 como única palabra maximal (para la noción de palabra maximal ver Definición 2.6). La Figura 2.16 muestra la construcción de una realización convexa en \mathbb{R}^2 .

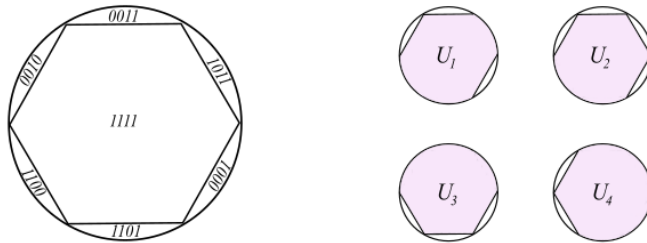


Figura 2.16.

Todas las regiones correspondiendo a palabras son subconjuntos de un disco en \mathbb{R}^2 . Para cada $i = 1, \dots, 4$, el conjunto convexo U_i es la unión de todas las regiones cuyas palabras correspondientes tienen un 1 en la i -ésima posición. Por ejemplo, U_1 es la unión de las cuatro regiones correspondiendo a las palabras 1100, 1101, 1011 y 1111.

La construcción anterior puede ser generalizada a cualquier código con una única palabra maximal.

Lema 2.26. Sea \mathcal{C} un código con una única palabra maximal. Entonces \mathcal{C} es convexo, y $d(\mathcal{C}) \leq 2$.

Demostración. Sea $p \in \mathcal{C}$ la única palabra maximal y m el número de palabras no maximales excluyendo la nula, que definimos como el cardinal de \mathcal{C} menos dos. Inscribimos un polígono regular abierto de m lados P en un disco abierto, obteniendo m sectores rodeando P , como en la Figura 2.16. Asignamos cada palabra no maximal (excluyendo la nula) a un sector distinto dentro del disco y por fuera de P , y la palabra maximal p a P . Seguidamente, para cada $i \in p$, sea U_i la unión de P y todos los sectores cuyas palabras tengan un 1 en la posición i -ésima, junto con sus fronteras en común con P . Para $j \in \{1, \dots, n\} - \text{supp}(p)$, definimos $U_j = \emptyset$. Nótese que cada U_i es abierto y convexo, y $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\{U_i\})$. \square

2.5. Obstrucciones locales a la convexidad

Abordaremos en esta sección final del trabajo, una pequeña comparación de las herramientas presentadas para modelizar la información espacial que recoge el cerebro, e introduciremos las llamadas obstrucciones a la convexidad, aquello que impide que un código sea convexo.

2.5.1. Código vs Nervio

Tanto el código $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ como el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ aportan información sobre cómo trata el cerebro la información espacial captada por las neuronas de posicionamiento. Por un lado, el código refleja más fielmente las interacciones entre neuronas, dado que detalla más la relación entre sus campos de posicionamiento. El nervio por su parte, si hemos tomado un buen recubrimiento del espacio, nos ayuda a comprender cómo reconoce el cerebro la forma del espacio.

Matemáticamente, mientras que el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ de un recubrimiento abierto indica qué familias de abiertos tienen intersecciones no vacías, el código $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ refleja, además, la información acerca de las relaciones de contenido entre los abiertos y sus intersecciones.

Es fácil comprobar que el nervio de un recubrimiento es exactamente el complejo simplicial del código, es decir,

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})).$$

Efectivamente, por definición es claro que toda palabra del código pertenece al nervio, por lo que $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Entonces, $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$, ya que vimos que el nervio es un complejo simplicial abstracto y $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ se define como el complejo simplicial abstracto más pequeño que contiene al código.

Por otro lado, toda palabra $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ tiene una palabra maximal $\omega \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ tal que $\sigma \subset \omega$. Entonces, $U_\omega \neq \emptyset$, y para todo $\tau \not\subset \omega$, $U_\tau \cap U_\omega = \emptyset$, (en otro caso, ω no sería maximal). Por tanto, $U_\omega - \bigcup_{j \notin \omega} U_j = U_\omega \neq \emptyset$, es decir, $\omega \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Así, concluimos $\sigma \in \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$.

Ejemplo 2.27 La Figura 2.17 a) muestra una colección $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ de conjuntos convexos abiertos.

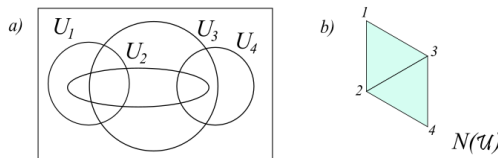


Figura 2.17.

Se tiene

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Por construcción, \mathcal{C} es un código convexo, donde $d(\mathcal{C}) = 2$.

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

$\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 3, 4\}$ corresponden a las palabras maximales. El nervio, como comentábamos, pierde información acerca de las relaciones de contenidos de los U_i de \mathcal{U} , pero esta información sí la recoge el código. Por ejemplo, el hecho de que $U_2 \subset U_1 \cup U_3$ se refleja en \mathcal{C} dado que cualquier palabra que contenga un 2, contiene también un 1 o un 3.

Pero el nervio no sólo pierde las relaciones de contenidos de los abiertos del recubrimiento, o la dimensión mínima de incrustación de un código convexo, como mencionábamos en el Ejemplo 2.22. Tampoco es suficiente conocer $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ para determinar si $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ es convexo o no (ver artículos [4] y [13]). Trataremos este tema en la siguiente sección.

2.5.2. Obstrucciones locales a la convexidad

En el Ejemplo 2.23 comprobamos que no todos los códigos son convexos. Las condiciones suficientes para que un código no sea convexo es lo que conocemos como obstrucciones locales a la convexidad. Por supuesto, la ausencia de obstrucciones no garantiza la convexidad del mismo.

La siguiente definición nos servirá de herramienta para caracterizar estas obstrucciones.

Definición 2.28. Sea $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$ un código neuronal y $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ una colección de campos de posicionamiento en un espacio X , tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. La **estructura de campos de posicionamiento** de \mathcal{C} es el conjunto de pares (σ, τ) con $\sigma, \tau \subset \{1, \dots, n\}$, tal que

$$U_\sigma \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j,$$

donde $\sigma \neq \emptyset$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ y $U_\sigma \cap U_j \neq \emptyset$, para todo $j \in \tau$. A los pares (σ, τ) de la estructura de campos de posicionamiento de \mathcal{C} se les llama relaciones.

Si $\tau = \emptyset$, entonces la relación (σ, \emptyset) simplemente implica $U_\sigma = \emptyset$. Nótese que las relaciones de la forma (σ, \emptyset) reproducen información de $\Delta(\mathcal{C})$, mientras que aquellas de la forma (σ, τ) con $\tau \neq \emptyset$ reflejan información adicional sobre la estructura en \mathcal{C} , que va más allá que la que proporciona el complejo simplicial.

Ejemplo 2.29 Para el Ejemplo 2.27 visto anteriormente, observamos que las relaciones de la estructura de campos de posicionamiento son $\{(\{1, 4\}, \emptyset), (\{1, 2, 4\}, \emptyset), (\{1, 3, 4\}, \emptyset), (\{1, 2, 3, 4\}, \emptyset), (\{2\}, \{1, 3\}), (\{2\}, \{1, 3, 4\}), (\{2, 4\}, \{3\})\}$.

El siguiente resultado muestra un caso simple donde las relaciones de la estructura de los campos de posicionamiento pueden usarse para probar que un código no tiene realización convexa. Es un caso particular de la Proposición 2.34 que veremos más adelante.

Proposición 2.30. Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto y $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ un código. Si \mathcal{C} tiene relaciones de la estructura de los campos de posicionamiento $U_\sigma \subset U_i \cup U_j$ y $U_\sigma \cap U_i \cap U_j = \emptyset$, para algún $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ y $i, j \notin \sigma$ distintos, entonces \mathcal{C} no es un código convexo.

Demostración. Por hipótesis, $(\sigma, \{i, j\})$ y $(\sigma \cup \{i, j\}, \emptyset)$ son relaciones de \mathcal{C} . Se sigue que los conjuntos $V_i = U_\sigma \cap U_i \neq \emptyset$ y $V_j = U_\sigma \cap U_j \neq \emptyset$ son conjuntos abiertos disjuntos que intersectan a U_σ , y $U_\sigma \subset V_i \cup V_j$. Así, podemos concluir que U_σ es disconexo en cada recubrimiento abierto \mathcal{U} tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Esto implica que \mathcal{C} no puede tener una realización convexa, ya que los U_i serían convexos y, por tanto, U_σ sería convexo, contradiciendo el hecho de que es disconexo. \square

Ejemplo 2.31 La siguiente figura ilustra la anterior situación, donde $\sigma = \{1, 2\}$, se cumplen todas las hipótesis y U_σ debe ser disconexo.

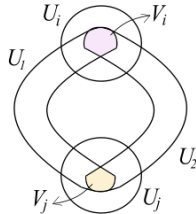


Figura 2.18. Ejemplo del Lema 2.30.

De una forma más general, las obstrucciones locales a la convexidad surgen cuando un código contiene una relación (σ, τ) tal que $U_\sigma \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j$, pero el nervio del recubrimiento de U_σ , formado por $\{U_{\sigma \cup j}\}_{j \in \tau}$, no es contráctil.

Por el Lema del Nervio, si los U_j son convexos, entonces $\mathcal{N}(\{U_{\sigma \cup j}\}_{j \in \tau})$ debe tener el mismo tipo de homotopía que U_σ , que es contráctil. Así, si $\mathcal{N}(\{U_{\sigma \cup j}\}_{j \in \tau})$ resulta no serlo, concluimos que algunos U_j no son convexos.

Obsérvese que el nervio $\mathcal{N}(\{U_{\sigma \cup j}\}_{j \in \tau})$ está relacionado con el nervio del recubrimiento original $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, como sigue

$$\mathcal{N}(\{U_{\sigma \cup j}\}_{j \in \tau}) = \{\omega \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) / \sigma \cap \omega = \emptyset, \sigma \cup \omega \in \mathcal{N}(\mathcal{U}), \text{ y } \omega \subset \tau\}. \quad (2.2)$$

De hecho, considerando $\Delta = \mathcal{N}(\mathcal{U})$ y el complejo simplicial restringido $\Delta|_{\sigma \cup \tau}$, podemos reconocer que la parte derecha de la igualdad (2.2) es precisamente el link $Lk_{\sigma}(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$ (recordar Definición 1.36).

Observación 2.32. La restricción de un complejo simplicial Δ a $\sigma \in \Delta$ es el complejo simplicial

$$\Delta|_{\sigma} = \{\omega \in \Delta / \omega \subset \sigma\}. \quad \Delta$$

Definición 2.33. Sea (σ, τ) una relación de \mathcal{C} y $\Delta = \Delta(\mathcal{C})$. Decimos que (σ, τ) es una obstrucción local de \mathcal{C} si $\tau \neq \emptyset$ y $Lk_{\sigma}(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$ no es contráctil.

Las obstrucciones locales están, por tanto, detectadas por los links no contráctiles de la forma $Lk_{\sigma}(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$. La Figura 2.19 muestra que todos los complejos simpliciales de hasta cuatro vértices, salvo permutación, pueden ponerse como $Lk_{\sigma}(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$. Se señalan en rojo aquellos que no son contráctiles.

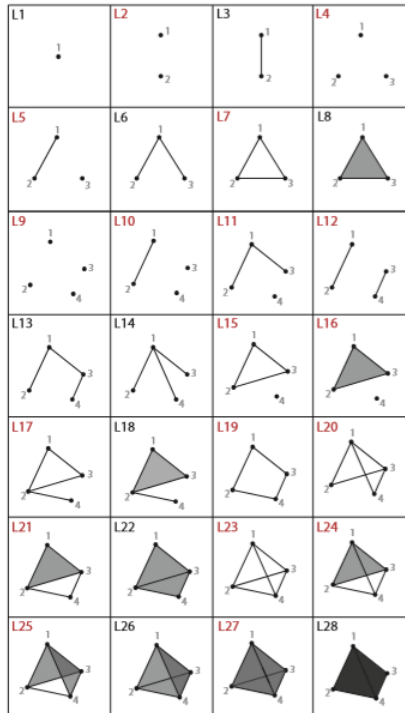


Figura 2.19. Todos los complejos simpliciales de hasta cuatro vértices, salvo permutación, pueden ponerse como links de la forma $Lk_{\sigma}(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$.

Nótese que $\tau \neq \emptyset$ implica que $\sigma \notin \mathcal{C}$ y $U_\sigma \neq \emptyset$, dado que la definición de estructura de campo de posicionamiento requiere que $U_{\sigma \cup j} \neq \emptyset$, para todo $j \in \tau$. Cualquier obstrucción local (σ, τ) debe entonces tener $\sigma \in (\Delta(\mathcal{C}) - \mathcal{C})$ y $Lk_\sigma(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$ no vacío.

Los argumentos que condujeron a la definición de obstrucción local implican las siguientes consecuencias del Lema del Nervio.

Proposición 2.34. *Si \mathcal{C} tiene obstrucciones locales, entonces \mathcal{C} no es un código convexo.*

En general, la cuestión de si un complejo simplicial dado es o no contráctil es indecidible. Sin embargo, en algunos casos es fácil ver que todos los links relevantes serán contráctiles. Esto produce una condición simple en las relaciones de un código que garantiza que no tiene obstrucciones locales.

Proposición 2.35. *Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ el código neuronal asociado a un recubrimiento de abiertos. Si para cada relación (σ, τ) se tiene que $U_{\sigma \cup \tau} \neq \emptyset$, entonces \mathcal{C} no tiene obstrucciones locales.*

Demostración. Si $\Delta = \Delta(\mathcal{C})$, la condición $U_{\sigma \cup \tau} \neq \emptyset$ implica que $Lk_\sigma(\Delta|_{\sigma \cup \tau})$ es el símplex “macizo” con conjunto de vértices τ , que es contráctil. Si esto se cumple para toda relación de la estructura de campos de posicionamiento, entonces ninguna puede dar lugar a una obstrucción local. \square

Por ejemplo, si la palabra con soporte $\{1, \dots, n\}$ está en \mathcal{C} , entonces $U_{\sigma \cup \tau} \neq \emptyset$ para cualquier par (σ, τ) con $\sigma, \tau \in \{1, \dots, n\}$, por lo que \mathcal{C} no tiene obstrucciones locales.

Bibliografia

- [1] E. N. BROWN, L.M. FRANK, D. TANG, M.C. QUIRK, AND M.A. WILSON. *A statistical paradigm for neural spike train decoding applied to position prediction from ensemble firing patterns of rat hippocampal place cells*. J Neurosci, 18(18):7411-25, 1998.
- [2] N. BURGESS. *The 2014 Nobel Prize in Physiology or Medicine: A spatial model for cognitive neuroscience*. Neuron, 31120-1125, 2014.
- [3] C. CURTO. *What can topology tell us about the neural code?* 2016. Disponible on-line en <https://arxiv.org/abs/1605.01905v1>.
- [4] C. CURTO, E. GROSS, J. JEFFRIES, K. MORRISON, M. OMAR, Z. ROSEN, A. SHIU AND N. YOUNGS. *What makes a neural code convex?* 2016. Disponible on-line en <http://arxiv.org/abs/1508.00150>.
- [5] C. CURTO, V. ITSKOV, A. VELIZ-CUBA AND N. YOUNGS. *The neural ring: an algebraic tool for analyzing the intrinsic structure of neural codes*. Bull. Math. Biol., 75(9):1571-1611, 2013. Disponible on-line en <https://arxiv.org/abs/1212.4201>.
- [6] C. GIUSTI, E. PASTALKOVA, C. CURTO, AND V. ITSKOV. *Clique topology reveals intrinsic geometric structure in neural correlations*. Proc. Natl. Acad. Sci., 112(44):13455-13460, 2015. Disponible on-line en <https://arxiv.org/abs/1502.06172>.
- [7] D. H. HUBEL AND T. N. WIESEL. *Receptive fields of single neurons in the cat's striate cortex*. J. Physiol., 148(3):574-591, 1959.
- [8] M. C. MCCORD. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Math, 465-474, 1966.
- [9] M. C. MCCORD. *Homotopy Type Comparison of a Space with Complexes Associated with its Open Covers*. 705-708, 1967. Disponible on-line en https://www.jstor.org/stable/2035443?seq=1#page_scan_tab_contents.
- [10] J. R. MUNKRES. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, 1984.

- [11] J. O'KEEFE AND J. DOSTROVSKY. *The hippocampus as a spatial map. Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat.* Brain Res., 34(1):171-175, 1971.
- [12] J. RINZEL. *Discussion: Electrical excitability of cells, theory and experiment: Review of the hodgkin-huxley foundation and update.* Bull. Math. Biol., 5-23, 1990.
- [13] M. TANCER. *Intersection patterns of convex sets via simplicial complexes: a survey.* En Thirty essays on geometric graph theory, 521-540, 2013.

Topología y Neurociencia

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

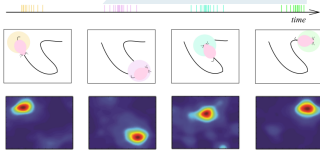
Erika Magdalena Herrera Machado
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
Alu0100964257@ull.edu.es

Abstract

THE introduction of mathematical tools in neuroscience has contributed to its rapid experimental progress and expansion. In particular, the last decade has seen an increase in the use of topological ideas and methods. This work gives a vision of some applications of topology in neuroscience. Firstly, we introduce simplicial complexes and make a brief review of homotopic equivalences. This will be key to understand the applications that we will expose later, as well as for subsequent development.

1. Introduction

NEUROSCIENCE studies the structure, development and functioning of the nervous system, focusing on the brain and its impact on behavior and cognitive functions. When the reader has moved through his environment, his brain has formed a representation of the place. We owe this to *place cells*, neurons that fire when we are in a concrete location of the environment, known as *place fields*.



2. Simplicial complexes

SIMPLICIAL complexes are a fundamental tool for applications in neuroscience. We distinguish simplicial geometric complexes, which are built by gluing segments, triangles, tetrahedrons and their analogues in greater dimension, and abstract simplicial complexes, purely combinatorial description of the geometric version.

In order to establish local obstructions to convexity, we define the *link* of a facet σ of an abstract simplicial complex K as

$$Lk_{\sigma}(K) = \{\omega \in K \mid \sigma \cap \omega = \emptyset, \sigma \cup \omega \in K\}.$$

3. Neural code

NEURAL codes allow the brain to represent, process, and store information about the world. Combinatorial codes, comprised of binary patterns of neural activity, encode information via the collective behavior of populations of neurons. We define a *neural code* from a collection $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ of open sets as

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \left\{ \sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid U_{\sigma} - \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\} - \sigma} U_j \right) \neq \emptyset \right\},$$

where $U_{\sigma} = \bigcap_{i \in \sigma} U_i$. In other words, each codeword σ in $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ corresponds to the portion of U_{σ} that is not covered by other sets.

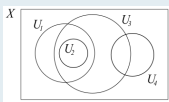


Figure 2: $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.

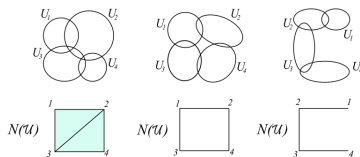
Furthermore, to any code \mathcal{C} , by simply including all subsets of codewords, we obtain the smallest abstract simplicial complex that contains all elements of \mathcal{C} :

$$\Delta(\mathcal{C}) = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \sigma \neq \emptyset, \sigma \subset c, \text{ for some } c \in \mathcal{C}\}.$$

4. Nerve and The Nerve lemma

THE *nerve* of a cover \mathcal{U} of a topological space X is a special simplicial complex defined as

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \{\sigma \subset \{1, \dots, n\} \mid \sigma \neq \emptyset \text{ and } U_{\sigma} \neq \emptyset\}.$$



We see that $\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$ gives information about a space covered by a family of open subsets whose non-empty intersections are contractible, i.e. a good cover of X .

The Nerve lemma. Let \mathcal{U} be a good cover of a topological space X . Then,

$$|\mathcal{N}(\mathcal{U})| \simeq X,$$

and $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ denoting the polytope of $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.

The following figure shows why good covers are needed.



5. Convex codes and local obstructions to convexity

PLACE fields are essentially convex, which motivates us to put emphasis on studying *convex codes*, whose codewords correspond to regions defined by an arrangement of convex open sets in Euclidean space. We will study some results about local obstructions to the convexity of the codes.

The place field structure of $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ is the set of all pairs (σ, τ) with $\sigma, \tau \subset \{1, \dots, n\}$, such that $U_{\sigma} \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j$, where $\sigma \neq \emptyset$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ and $U_{\sigma} \cap U_j \neq \emptyset$, for all $j \in \tau$. These pairs will be called relationships.

A relationship (σ, τ) is a local obstruction to convexity of $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ if $\tau \neq \emptyset$ and $Lk_{\sigma}(\Delta_{\sigma \cup \tau})$ is not contractible.

If $U_{\sigma \cup \tau} \neq \emptyset$, for every relationship (σ, τ) , then \mathcal{C} has no local obstructions.

References

- [1] C. CURTO, E. GROSS, J. JEFFRIES, K. MORRISON, M. OMAR, Z. ROSEN, A. SHIU AND N. YOUNGS. *What makes a neural code convex?* 2016. Available online at <http://arxiv.org/abs/1508.00150>.
- [2] J. R. MUNKRES. *Elements of Algebraic Topology*. 2-15, 1984.