Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Alberto Ruiz-Arteaga González

Las integrales de Riemann, Lebesgue y Riemann generalizada

The Riemann, Lebesgue and Generalized Riemann Integrals

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, septiembre de 2019

Dirigido por
Antonio Lorenzo Bonilla Ramírez

Antonio Lorenzo Bonilla Ramírez
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar las principales deficiencias y limitaciones de la integral de Riemann, para después mostrar cómo la integral de Lebesgue y la integral de Riemann generalizada son capaces de resolver algunas de estas carencias.

Palabras clave: *Integral de Riemann – Integral de Lebesgue – Integral de Riemann generalizada*

Abstract

The purpose of this paper is to show the main deficiencies and limitations of the Riemann integral in order to see how the Lebesgue and the generalized Riemann integrals are able to solve some of these deficiencies.

Keywords: *Riemann Integral – Lebesgue Integral – Generalized Riemann Integral*

Contenido

Resumen/Abstract iii

Introducción vii

1. La Integral de Riemann y sus deficiencias 1
- 1.1. Construcción de la Integral de Riemann 1
- 1.2. Construcción de la Integral de Darboux 2
- 1.3. El teorema de Vitali-Lebesgue 4
- 1.4. Propiedades de la integral de Riemann 6
- 1.5. El Teorema Fundamental del Cálculo 7
- 1.6. Limitaciones y Deficiencias de la Integral de Riemann 9

2. La integral de Lebesgue 15
- 2.1. La integral de Lebesgue de funciones acotadas 15
- 2.2. La integral de Lebesgue de funciones no acotadas 20

3. La integral de Riemann Generalizada 25
- 3.1. Construcción de la integral de Henstock-Kurzweil 26
  - 3.1.1. Propiedades básicas 33
  - 3.1.2. El Lema de Saks-Henstock 37
  - 3.1.3. Integrabilidad Absoluta 42
  - 3.1.4. Comparando Integrabilidad: Lebesgue y Henstock-Kurzweil 44

A. Medida Lebesgue y funciones medibles 47
- A.1. Definición y propiedades de la medida Lebesgue 47
  - A.1.1. Definición y propiedades de las funciones medibles 49

Bibliografía 51

Poster 53

Introducción

En este trabajo se pretende, en el primer capítulo, presentar la integral de Riemann, prestando especial atención a sus propiedades principales y, en mayor profundidad, a sus deficiencias y limitaciones. Así, se abordarán carencias como son:

1. Solo las funciones acotadas o definidas en un intervalo cerrado y acotado son susceptibles de ser integrables Riemann.

2. Pueden existir sucesiones de funciones integrables Riemann que convergen puntualmente a una función que no es integrable Riemann.

3. Se pueden encontrar funciones que sean casi-idénticas, esto es, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in [a, b]$, siendo una Riemann integrable mientras que la otra no tiene por qué serlo.

4. Pueden encontrarse funciones diferenciables $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ con f acotada y, sin embargo, que f no sea Riemann integrable.

En el segundo capítulo, presentaremos la integral de Lebesgue, que es una generalización de la integral de Riemann y resuelve algunas de sus deficiencias, como son los puntos 2, 3 y 4 mencionados anteriormente.
Finalmente, en el tercer capítulo introducimos la integral de Riemann generalizada o integral de Henstock-Kurzweil que generaliza a ambas y también a la integral impropia de Riemann y que resuelve las limitaciones de la integral de Riemann.

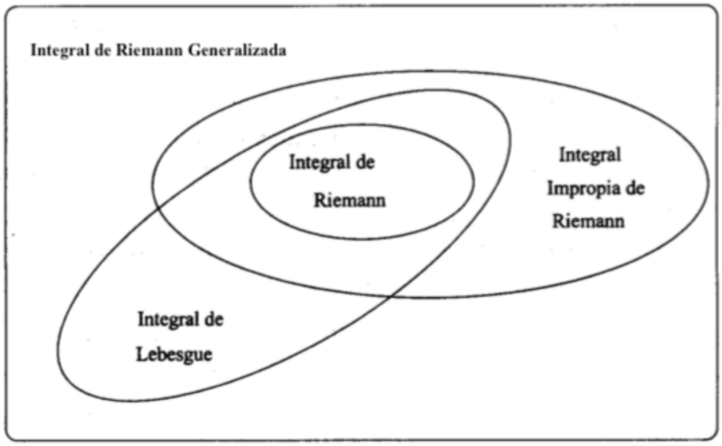


Figura 0.1. Relación entre las diferentes integrales.

1

La Integral de Riemann y sus deficiencias

1.1. Construcción de la Integral de Riemann

Recordamos, en primer lugar, el concepto de partición de un intervalo. Así, si $[a,b]$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, se dice que P es una partición de $[a,b]$ si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una colección finita de puntos de $[a,b]$ tales que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Definimos también el conjunto de etiquetas asociadas a P, que no es otra cosa que una colección finita de puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Así, denominamos partición etiquetada del intervalo $[a,b]$ al conjunto de pares ordenados

$$P_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])/i = 1, 2, ..., n\},$$

siendo $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ y $e = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ un conjunto de etiquetas asociadas a P. Si esta partición etiquetada P_e verifica que, para un cierto $\delta > 0$, se tiene que, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta, t_i + \delta),$$

entonces se dice que P_e es una partición δ-fina.
Recordamos también que denominamos norma de P, y lo denotamos por $||P||$, al número

$$||P|| = \max_{i \in \{1,2,...,n\}} |x_i - x_{i-1}|.$$

Definición 1.1. *Sea $P_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i])/i = 1, 2, ..., n)\}$ una partición etiquetada de un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada definida en $[a,b]$. Se denomina suma de Riemann de f asociada a P_e a*

$$S(f, P_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definición 1.2. *Sea $f \in \mathcal{B}([a,b])$, siendo $\mathcal{B}([a,b])$ el conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son acotadas en el intervalo $[a,b]$. Se dice que f es Riemann integrable sobre $[a,b]$ si existe un cierto $K \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe un cierto $\delta > 0$ de manera que*

$$|S(f, P_e) - K| < \epsilon$$

para toda partición etiquetada $P_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]/i = 1, 2, ..., n)\}$ subordinada a δ.
Dicho número K, si existe, es único y se le denomina integral de Riemann de f. En lo que sigue se denotará como

$$K = (\mathcal{R}) \int_a^b f dx.$$

Denotaremos por $\mathcal{R}([a,b])$ al conjunto de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Riemann integrables en $[a,b]$.

1.2. Construcción de la Integral de Darboux

En muchas ocasiones resulta más práctico ver si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable o no, haciendo uso de las conocidas como sumas de Darboux, que presentamos a continuación.
Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada definida en un intervalo $[a,b]$ y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Definimos, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$m_i = inf\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad y \quad M_i = sup\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Definición 1.3. *Sea $f \in \mathcal{B}([a,b])$ y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$. Se denomina suma superior de Darboux de f asociada a P al número*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

De forma análoga, la suma inferior de Darboux de f asociada a P se define como el número

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Recordamos que si $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$, se dice que la partición Q es más fina que la partición P si $P \subset Q$. Si se da este caso, se verifican las siguientes propiedades:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \quad y \quad S(f,P) \geq S(f,Q)$$

Además, si existen m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$, se tiene entonces que

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a),$$

para toda partición P de $[a,b]$. Por último, cabe recordar que, si P, Q son dos particiones cualesquiera del intervalo $[a,b]$, entonces se tiene que

$$s(f,P) \leq S(f,Q).$$

Definición 1.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se denomina integral superior de Darboux de f al número*

$$(\overline{D}) \int_a^b f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} S(f,P),$$

mientras que la integral inferior de Darboux de f es

$$(\underline{D}) \int_a^b f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f,P).$$

Diremos que la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Darboux integrable si se verifica que

$$(\overline{D}) \int_a^b f(x)dx = (\underline{D}) \int_a^b f(x)dx.$$

Si se da este caso, entonces dicho valor común se denomina la integral de Darboux de f sobre $[a,b]$ y se denota por

$$(D) \int_a^b f(x)dx.$$

Definimos por $\mathcal{D}([a,b])$ el conjunto de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Darboux integrables en $[a,b]$.

Como se dijo al principio de este apartado, en muchas ocasiones resulta más práctico estudiar la integrabilidad Riemann de una función atendiendo a la sumas de Darboux. Esto sugiere preguntarnos qué tipo de relación existe entre la integral de Darboux y la integral de Riemann de una función. El siguiente resultado nos muestra que son el mismo concepto.

Teorema 1.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- $f \in \mathcal{R}([a,b])$.
- $f \in \mathcal{D}([a,b])$

Como vimos en la definición 1.4, para que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sea Riemann integrable es necesario que sea acotada. No obstante, podemos encontrar ejemplos de funciones acotadas que no son Riemann integrable.

Ejemplo 1.6. La función de Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ es acotada pero no es Riemann integrable.

Demostración. La función de Dirichlet viene definida de la siguiente forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Luego, si tenemos una partición arbitraria $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, se observa fácilmente que

$$(\overline{D}) \int_a^b f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}([0,1])} S(f,P) = 1 \quad y \quad (\underline{D}) \int_a^b f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([0,1])} s(f,P) = 0$$

Así, como $(\overline{D}) \int_a^b f(x)dx \neq (\underline{D}) \int_a^b f(x)dx$, se tiene que f no es Darboux integrable sobre $[a,b]$ y, consecuentemente, no es Riemann integrable sobre $[0,1]$.

$\square$

1.3. El teorema de Vitali-Lebesgue

Hemos visto que el ser acotada es condición necesaria para que una función sea Riemann integrable, pero no suficiente. Cabría preguntarse entonces qué tipo de funciones habitan en $\mathcal{R}([a,b])$. A lo largo del siguiente apartado veremos que el conjunto

$$\mathcal{C}([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} / f \text{ es continua en } [a,b]\}$$

está contenido en $\mathcal{R}([a,b])$ pero que la propiedad "*ser Riemann integrable*" de una función no implica que esta sea continua en $[a,b]$. No obstante, hay cierto tipo de reciprocidad entre ambas propiedades.

Teorema 1.7. $\mathcal{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b])$.

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Observamos que, como f es una función continua definida en el compacto $[a,b]$ (por ser cerrado y acotado), entonces f es una función uniformemente continua en $[a,b]$ y, por ello, dado $\epsilon > 0$, existe un cierto $\delta > 0$ tal que, para cada $x, y \in [a,b]$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \text{ siempre que } |x - y| < \delta.$$

Ahora, si tomamos una partición arbitraria $P_0 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que $||P_0|| < \delta$ se tiene, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \text{ para cada } x, y \in [x_{i-1}, x_i].$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} S(f,P_0) - s(f,P_0) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)| \, (x_i - x_{i-1}) < \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon. \end{aligned}$$

Tenemos además que

$$s(f,P_0) \leq (\underline{D}) \int_a^b f(x)dx \leq (\overline{D}) \int_a^b f(x)dx \leq S(f,P_0)$$

de lo que se sigue que

$$(\overline{D}) \int_a^b f(x)dx - (\underline{D}) \int_a^b f(x)dx < \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Así,

$$(\overline{D}) \int_a^b f(x)dx = (\underline{D}) \int_a^b f(x)dx$$

y concluimos por tanto que $f \in \mathcal{D}([a,b])$ y, por consiguiente, $f \in \mathcal{R}([a,b])$. $\square$

No obstante, que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sea Riemann integrable en $[a,b]$ no implica que esta sea continua en todo el intervalo $[a,b]$. En efecto, podemos encontrar funciones que sean discontinuas en uno o en varios puntos de su dominio y, sin embargo, que siga siendo Riemann integrable. Entonces, ¿qué forma tiene una función Riemann integrable? A esta pregunta dieron respuesta los matemáticos Giuseppe Vitali y Henri Lebesgue en 1907 con el siguiente resultado.

Teorema 1.8 (Vitali-Lebesgue). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es Riemann integrable en $[a,b]$.*
2. *f es continua casi-siempre.*

1.4. Propiedades de la integral de Riemann

La importancia del Teorema de Vitali-Lebesgue reside en los resultados, entre muchos otros, que enunciaremos a continuación. Así, la demostración de muchas de las propiedades de la integral de Riemann se facilitan en gran medida recurriendo a este teorema.

Proposición 1.9. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ y $C \in \mathbb{R}$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $f+g, fg, Cf \in \mathcal{R}([a,b])$. *Además, en este caso se tiene que:*

$$\int_a^b (Af + Bg)dx = A\int_a^b f dx + B\int_a^b g dx, \forall A, B \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{R}([a,b]).$$

Demostración. Supongamos que $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Entonces $m(Disc(f)) = 0 = m(Disc(g))$ y como

$$PC(f) \cap PC(g) \subseteq PC(f+g)$$

se sigue que $Disc(f+g) \subseteq Disc(f) \cup Disc(g)$ y así, $m(Disc(f+g)) = 0$. Esto prueba que $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$. Similarmente se demuestra que $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$. Nótese que si g es una función constante, digamos $g(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $g \in \mathcal{R}([a,b])$ y, por lo anterior, se tiene que $c \cdot f \in \mathcal{R}([a,b])$. $\square$

2. $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. *Además, se verifica que*

$$\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f|\, dx, \forall f \in \mathcal{R}([a,b]).$$

Demostración. Se tiene que si f es continua en $x \in [a, b]$, entonces $|f|$ también es continua en x y, por lo tanto,

$$Disc(|f|) \subseteq Disc(f).$$

Pero como $0 \leq m(Disc(|f|)) \leq m(Disc(f)) = 0$, el Teorema de Vitali-Lebesgue nos dice que $|f|$ es Riemann integrable. □

3. *Si f es monótona acotada, entonces $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

   Demostración. Sea $f \in Mon([a, b])$. Se tiene que $Disc(f)$ es a lo más numerable y, por consiguiente, $\mu(Disc(f)) = 0$. El Teorema de Vitali-Lebesgue nos garantiza entonces que $f \in \mathcal{R}([a, b])$. □

4. *En general, cualquier función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es acotada y continua excepto sobre un subconjunto a lo más numerable de $[a, b]$, es Riemann integrable.*

5. *Si φ es una función escalonada, entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$.*

   Demostración. Puesto que el número de discontinuidades de cualquier función escalonada φ es finito, entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$ gracias al Teorema de Vitali-Lebesgue. Otra manera de ver esto es recordar que $Esc([a, b]) \subseteq \mathcal{D}([a, b])$ y como $\mathcal{D}([a, b]) = \mathcal{R}([a, b])$ el resultado sigue.

1.5. El Teorema Fundamental del Cálculo

Recordamos que si tenemos dos funciones $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de manera que F es diferenciable en $[a, b]$ y, para cada $x \in [a, b]$, se tiene que $F'(x) = f(x)$, entonces se dice que F es una función primitiva de f. Observamos que si $f \in Primi([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R}/f \text{ tiene una primitiva}\}$ y F es una primitiva de f, cualquier otra función de la forma $F_c = F + c$, con c una constante arbitraria, es también una primitiva de f. Así, toda función $f \in Primi([a, b])$ posee infinitas primitivas. No obstante, si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y es continua, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f dt, \forall x \in [a, b]$$

sería la única primitiva de f satisfaciendo $F(a) = 0$.
Llegados a este punto, podemos observar la primera complicación que presenta la integral de Riemann, y es que la teoría relativa a la integrabilidad Riemann de funciones no resuelve eficazmente el problema de la búsqueda de primitivas. Véanse los siguientes dos casos:
(1) Podemos encontrar funciones que posean primitiva pero que no sean integrable Riemann. Así, si consideramos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 0 & \text{si x=0}\end{cases}$$

tiene una primitiva $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$F(x)=\begin{cases}x^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

y, sin embargo, F no es de la forma $F(x)=\int_a^x f dt$ ya que $F'=f$ no es Riemann integrable, pues f no es acotada.
(2) En el sentido contrario, también podemos encontrar funciones que sean integrable Riemann y que no posean primitiva. Por ejemplo, cualquier función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que sea Riemann integrable sobre $[a,b]$ y que presente una discontinuidad de salto finito en algún punto $c\in(a,b)$. Esto sucede porque, si suponemos que f posee una primitiva F sobre $[a,b]$, entonces todas las discontinuidades de $F'=f$ serían de segunda especie, lo cual es falso porque sabemos, por hipótesis, que tiene una discontinuidad de primera especie.
De hecho, podemos construir funciones que sean Riemann integrables y que no posean discontinuidades de salto finito, pero que sigan sin tener primitiva. Por ejemplo, si consideramos las funciones $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\begin{cases}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}\quad \text{y}\quad g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Observamos que son dos funciones Riemann integrables, pues son continuas casisiempre. Ahora, si definimos la función $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$h(x)=\begin{cases}x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } 0<x\leq 1\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

observamos que h es derivable y $h'=\varphi+g$, donde

$$\varphi(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right),\forall x\in(0,1]\qquad y\qquad \varphi(0)=0.$$

Se tiene que φ es Riemann integrable en $[0,1]$. Luego,

$$\Phi(x)=\int_a^x\varphi(t)dt,\forall x\in[0,1]$$

es una primitiva de φ. Por tanto, $G=h-\Phi$ es una primitiva de g. Veamos ahora que f no tiene primitiva. En efecto, si suponemos que f tiene una función primitiva, llamémosla F, entonces resulta que $\gamma=f-g$ también tiene una primitiva de la forma $H=F-G$. Ahora, como H' toma los valores de 0 y 1, por el Teorema del Valor Intermedio para derivadas, H' debería tomar todos los valores entre 0 y 1, lo cual no sucede. Concluimos así que f no tiene primitiva. No obstante, a pesar de que la Integración Riemann de funciones no resuelve con total eficacia el problema de búsqueda de primitivas, cuando una función Riemann integrable posee una primitiva, el Teorema Fundamental del Cálculo nos permite evaluar dichas integrales de una forma realmente simple.

Teorema 1.10 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable con primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

1.6. Limitaciones y Deficiencias de la Integral de Riemann

En este apartado trataremos de presentar algunas de las limitaciones más importantes que presenta la Integral de Riemann. Haremos especial hincapié en este sentido con el objetivo de ver, en los siguientes capítulos, cómo otras integrales resuelven dichas deficiencias.

1. La primera limitación importante es que solo podrán ser contempladas como funciones Riemann integrables las funciones acotadas definidas sobre un intervalo cerrado y acotado. Así, todas las funciones que no son acotadas o no están definidas en intervalos acotados no son susceptibles de ser integradas.

2. La segunda gran deficiencia de la integral de Riemann está relacionada con la convergencia puntual de sucesiones de funciones Riemann integrables. Así, podemos encontrar una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de manera que $f_n \in \mathcal{R}([a,b]), \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$ y, sin embargo, que $f \notin \mathcal{R}([a,b])$ o, en caso de que $f \in \mathcal{R}([a,b])$, no necesariamente se da que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$$

Veamos un ejemplo de cada uno de estos casos. En primer lugar, sea $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números racionales en $[0,1]$ tales que $q_i \neq q_j, \forall i \neq j, i,j \in \mathbb{N}$. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, q_2, ..., q_n\} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{q_1, q_2, ..., q_n\} \end{cases}$$

Observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$. No obstante, para cada $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \notin \mathcal{R}([a,b]).$$

Para el segundo caso, podemos pensar en las funciones $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f = 0$ y

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus (0,1/n). \end{cases}$$

Observamos que $f, f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ y $f_n \to f$ puntualmente pero

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx \neq \int_a^b f dx = 0$$

3. Otra deficiencia de la integral de Riemann tiene que ver con la propiedad **casi-siempre**, esto es, si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas tales que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y $f = g$ casi-siempre, entonces no necesariamente se da que $g \in \mathcal{R}([a,b])$. Podemos pensar, por ejemplo, en la función característica de los racionales en $[0,1]$, $g = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, y la función nula $f = 0$. Así, se tiene que $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y f=g casi-siempre. Sin embargo, $g \notin \mathcal{R}([a,b])$.

4. La última deficiencia que abordaremos está relacionada con el Teorema Fundamental del Cálculo que vimos en el apartado anterior. En dicho teorema establecimos como condición que la función f fuera Riemann integrable, pues podemos encontrar funciones diferenciables $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in [a,b]$, con f acotada y, sin embargo, puede suceder que $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Teorema 1.11 (Volterra). *Existe una función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable en todo punto $x \in [0,1]$ con F' acotada sobre $[0,1]$, pero F' no es Riemann integrable sobre $[0,1]$.*

Demostración. Sea $\alpha \in (0,1)$. Consideramos el conjunto tipo Cantor Γ_α resultante de eliminar, en primer lugar, un intervalo abierto de longitud $\frac{\alpha}{2}$ del medio del intervalo $[0,1]$ y, posteriormente, eliminar sucesivamente del medio de los intervalos resultantes un intervalo abierto de longitud $(\frac{\alpha}{2})^n, n \in \mathbb{N}$. Consideramos también la lista disjunta $((a_n,b_n))_{n=1}^{\infty}$ de todos los intervalos abiertos eliminados en la construcción de dicho conjunto.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $G_n : [a_n,b_n] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G_n(x) = \begin{cases} (x-a_n)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-a_n}\right) & \text{si } a_n < x \leq b_n \\ 0 & \text{si } x = a_n. \end{cases}$$

Se tiene que

$$G_n'(x) = \begin{cases} 2(x-a_n)\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{x-a_n}) - \cos(\frac{1}{x-a_n}) & \text{si } a_n < x \le b_n \\ 0 & \text{si } x = a_n. \end{cases}$$

Observamos que, como G_n oscila indefinidamente cuando x se aproxima a a_n, existen infinitos extremos relativos. Sea

$$E = \{x \in (a_n, b_n)/x \text{ es un extremo relativo de } G_n\}.$$

Así, $G_n'(x) = 0, \forall x \in E$. Observamos también que entre dos extremos relativos consecutivos siempre existe un x_0 tal que $|G'(x_0) = 1|$. Esto nos permite concluir que G' no es continua en $x = a_n$. En efecto, la sucesión $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ definida por $t_j = a_n + 1/j\pi$ para $j \ge 1$ satisface

$$\lim_{j\to\infty} t_j = a_n \quad \text{pero} \quad \lim_{j\to\infty} |G_n'(t_j)| = 1 \ne 0 = |G_n'(a_n)|.$$

Sea c el mayor número en $(a_n, \frac{a_n+b_n}{2})$ para el cual $G_n'(c) = 0$ y escoja un d en $(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n)$ tal que $c - a_n = b_n - d$. En este caso $d = a_n + b_n - c$ y se verifica que

$$(c-a_n)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{c-a_n}\right) = -(b_n-d)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{d-b_n}\right).$$

Definimos ahora $F_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ por

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a_n, x = b_n \\ (x-a_n)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-a_n}\right) & \text{si } a_n < x \le c \\ (c-a_n)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{c-a_n}\right) & \text{si } c < x < d \\ -(x-b_n)^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x-b_n}\right) & \text{si } d \le x < b_n \end{cases}$$

Observamos que F_n tiene el mismo comportamiento oscilatorio que G_n, tanto en a_n, como en b_n. Además, F_n es constante en el intervalo (c, d), de modo que F_n' existe en cualquier punto de $[a_n, b_n]$. Además, F_n' es acotada sobre $[a_n, b_n]$, pero no es continua en a_n ni tampoco en b_n. De hecho,

$$|F_n(x)| \le |x-a_n|^2 \le |x-b_n|^2 \quad \text{si } a_n \le x \le c,$$

$$|F_n(x)| \le |c-a_n|^2 \le |x-a_n|^2 \quad \text{si } c < x < d,$$

$$|F_n(x)| \le |d-b_n|^2 \le |x-b_n|^2 \quad \text{si } c < x < d,$$

$$|F_n(x)| \le |x - b_n|^2 \le |x - a_n|^2 \quad \text{si } d \le x \le b_n.$$

De donde se sigue que $|F_n(x)|$ está acotada por ambas $|x-a_n|^2$ y $|x-b_n|^2$ para todo $x \in [a_n, b_n]$. Para completar la construcción de nuestra función, definimos $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \begin{cases} F_n(x) & \text{si } x \in (a_n, b_n) \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) = \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

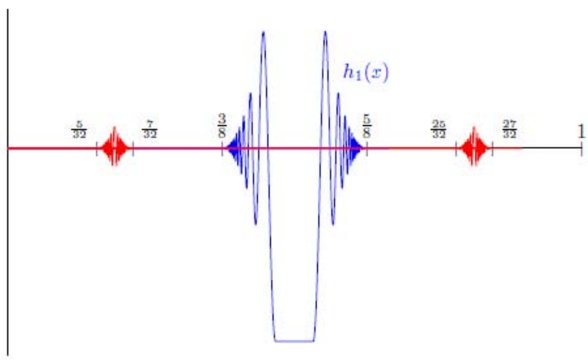


Figura 1.1. Función de Volterra para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Se tiene que:

- F es diferenciable en cada punto de $[0,1]$.
  Fijemos cualquier $c \in [0,1]$. Si $c \in \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, entonces por lo visto anteriormente tenemos que $F'(c)$ existe. Supongamos ahora que $c \in \Gamma_\alpha$ y probemos que

  $$F'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = 0.$$

  Sea $\epsilon > 0$ y sea $x \in (c, c+\epsilon)$. Si $x \in \Gamma_\alpha$, entonces $F(x) = F(c) = 0$ y, por lo tanto, $F'_+(c) = 0$. Supongamos entonces que $x \notin \Gamma_\alpha$. En este caso, $x \in \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ y, en consecuencia, existe un único $n \ge 1$ tal que $x \in (a_n, b_n)$. Por esto,

  $$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \right| \le \frac{|F_n(x)|}{|x - a_n|} \le \frac{|x - a_n|^2}{|x - a_n|} = |x - a_n| < \epsilon.$$

Esto muestra que $F'_{+}(c) = 0$. De forma análoga se demuestra que $F'_{-}(c) = 0$ y, por consiguiente, $F'(c)$ existe para todo $c \in [0,1]$.

- F' es acotada sobre $[0,1]$.
  Esto sigue de que $|F'(x)| = |F'_n(x)| \leq 3$ para todo $x \in [0,1]$.

- Disc(F')=Γ_α.
  Sea $c \in \Gamma_\alpha$. Sabemos que existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a c. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un entero $q_k > k$ tal que

$$|F'(x_k)| = |F'_{n_k}(x_k)| = 1 \quad \textit{donde} \quad x_k = a_{n_k} + \frac{1}{q_k \pi}.$$

La sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a c, pero la sucesión $(F'(x_k))_{k=1}^{\infty}$ no converge al punto $F'(c) = 0$. Esto prueba que F' no es continua en $c \in \Gamma_\alpha$ y como c era arbitrario, se obtiene que

$$Disc(F') = \Gamma_\alpha.$$

Puesto que $m(\Gamma_\alpha) > 0$, se sigue del Teorema de Vitali-Lebesgue que la función F' no es Riemann integrable.

$\square$

2

La integral de Lebesgue

2.1. La integral de Lebesgue de funciones acotadas

Definición 2.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función simple y sea $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ la representación canónica de f. Se define la integral de Lebesgue de f sobre $[a,b]$ como $\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k)$. Si $A \subset [a,b]$ es un subconjunto medible, entonces*

$$\int_A f = \int_a^b f\chi_A = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k \cap A).$$

Definición 2.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las integrales de Lebesgue superior e inferior, respectivamente, como*

$$(\overline{L}) \int_a^b f = \inf \left\{ \int_a^b s : s \geq f \text{ es una función simple} \right\}$$

y

$$(\underline{L}) \int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b r : r \leq f \text{ es una función simple} \right\}.$$

Si estas dos integrales son iguales, entonces f se dice que es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y dicho valor común se denota por $(\mathcal{L}) \int_a^b f$. La función f es integrable Lebesgue sobre un conjunto medible $A \subset [a,b]$ si la función $f\chi_A$ es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y $\int_A f = \int_a^b f\chi_A$.

Obsérvese que toda función escalonada es una función simple, por lo que resulta sencillo verificar lo siguiente.

Proposición 2.3. *Toda función Riemann integrable es integrable Lebesgue y ambas integrales son iguales.*

Teorema 2.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, f es integrable Lebesgue sobre $[a, b]$ si, y solo si, f es una función medible.*

Demostración. Supongamos que f es una función medible y sea M una cota para f. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n^k = \left\{ x \in [a, b] : \frac{M(k-1)}{n} < f(x) \leq \frac{Mk}{n} \right\}, -n \leq k \leq n.$$

Observamos que cada conjunto E_n^k es medible. Además, se tiene que $[a, b] = \cup_{k=-n}^{n} E_n^k$ y dichos conjuntos son disjuntos. Definimos las funciones simples:

$$r_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{M(k-1)}{n} \chi_{E_n^k} \text{ y } s_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{Mk}{n} \chi_{E_n^k}.$$

Luego, $r_n \leq f \leq s_n$ sobre $[a, b]$ para cada n y

$$\int_a^b (s_n - r_n) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{M}{n} m(E_n^k) = \frac{M}{n}(b-a).$$

Dado que esto es válido para cualquier n, se tiene que la función f es integrable Lebesgue sobre $[a, b]$.
Ahora, supongamos que f es integrable Lebesgue sobre $[a, b]$. Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen r_n y s_n funciones simples tales que $r_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x), \forall x \in [a, b]$ y $\int_a^b (s_n - r_n)dx < 1/n$.
Definimos ahora, para cada $x \in [a, b]$, las funciones:

$$r(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} r_n(x) \text{ y } s(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} s_n(x).$$

Observamos que dichas funciones son medibles sobre $[a, b]$. Definimos ahora el conjunto $D = \{x \in [a, b] / s(x) > r(x)\}$. Se tiene que $r \leq f \leq s$ sobre $[a, b]$ y, para cualquier $x \in D^c$, se tiene que r(x)=f(x)=s(x). Luego, si viéramos que $m(D) = 0$, significaría que r, f y s son iguales en casi todos los puntos sobre $[a, b]$.
Definimos entonces, para cada $k, n \in \mathbb{N}$,

$$D_n^k = \{x \in [a, b] / s_n(x) - r_n(x) > 1/k\}.$$

Nótese que $D = \cup_{k=1}^{\infty} \left(\cap_{n=1}^{\infty} D_n^k \right)$. Además, se tiene que:

$$\frac{1}{n} > \int_a^b (s_n - r_n)dx \geq \int_{D_n^k} (s_n - r_n)dx > \frac{1}{k} m(D_n^k),$$

luego, $m(\cap_{k=1}^{\infty} D_n^k) \leq m(D_n^k) < \frac{k}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como esto se cumple para cada k, se sigue que $m(D) = 0$. Por tanto, f, r y s son iguales en casi todo punto sobre $[a, b]$ y, por consiguiente, f es medible, por serlo r y s.

□

Nótese que, por el teorema de Vitali-Lebesgue, podemos concluir que toda función Riemann integrable sobre $[a, b]$ es integrable Lebesgue, ya que, al ser continua en casi todo punto de $[a, b]$, dicha función será medible y, como consecuencia del teorema anterior, será integrable Lebesgue.
No obstante, no toda función integrable Lebesgue es Riemann integrable. Como ejemplo podríamos pensar en la función de Dirichlet definida sobre $[a, b]$, esto es, $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$, que, por ser igual que la función medible $f = 0$ en casi todo punto, será también medible y, por tanto, integrable Lebesgue. Sin embargo, como ya habíamos visto en el capítulo anterior, esta función no es Riemann integrable.
Además, las funciones integrales Lebesgue conservan las siguientes propiedades.

Proposición 2.5. *Sean f y g funciones integrables Lebesgue sobre $[a, b]$ y sean A y B subconjuntos medibles de $[a, b]$. Entonces, se tiene que:*

- *kf es integrable Lebesgue sobre $[a, b]$ y $\int_a^b kf = k \int_a^b f$, para cada $k \in \mathbb{R}$;*
- *f+g es integrable Lebesgue sobre $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;*
- *si $f \leq g$ en casi todo punto sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;*
- $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$;
- *si A y B son disjuntos, entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$;*

Otro punto en el que la integral de Lebesgue aventaja a la de Riemann es que, a diferencia de esta última, si f y g son funciones que coinciden en casi todo punto, entonces sus integrales son iguales.

Proposición 2.6. *Si f=g en casi todo punto sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

De hecho, la integral de Lebesgue también mejora otros aspectos de la integral de Riemann, como pueden ser aquellos relacionados con la convergencia puntual de sucesiones de funciones Riemann integrables. Recordemos que si tenemos una sucesión uniformemente acotada de funciones Riemann integrables $\{f_n\}$ que convergen puntualmente a una función f, esta no tiene por qué ser Riemann integrable y, en caso de serlo, no tiene por qué verificarse que $\lim_{n\to\infty} (\mathcal{R}) \int_a^b f_n = (\mathcal{R}) \int_a^b f$, como vimos en el epígrafe 1.6 del capítulo anterior. Este problema lo solventa la integral de Lebesgue.

Teorema 2.7. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones uniformemente acotadas e integrables Lebesgue definidas sobre $[a, b]$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f en casi todo punto de $[a, b]$, entonces f es integrable Lebesgue y se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.*

Demostración. Definimos la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x), & \text{si } \exists \, \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) \\ 0, & \text{si } \nexists \, \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) \end{cases}$$

Observamos que f es una función medible y acotada definida sobre $[a,b]$, luego, por el teorema anterior, vemos que es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$. Ahora, elegimos $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$ (posible porque la sucesión es uniformemente acotada). Sea $\epsilon > 0$. Por el Teorema de Egoroff, sabemos que existe un subconjunto medible $H \subset [a,b]$ de manera que $m([a,b] \setminus H) < \frac{\epsilon}{4M}$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre H. Definimos el conjunto $K = [a,b] \setminus H$ y elegimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b].$$

Entonces, para cada $n \geq n_0$, se sigue que

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| = \int_H |f_n - f| + \int_K |f_n + f| < \frac{\epsilon m(H)}{2(b-a)} + 2Mm(K) < \epsilon.$$

□

Otra mejora de la integral de Lebesgue respecto a la integral de Riemann es que, al contrario que ocurría con esta última, sí se verifica que toda derivada acotada es integrable Lebesgue.

Teorema 2.8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en cada $x \in [a,b]$. Si f' es acotada sobre $[a,b]$, entonces f' es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$, para cada $x \in [a,b]$.*

Demostración. Observamos que la función f es continua sobre $[a,b]$, ya que es diferenciable en todo punto de $[a,b]$, y es integrable Lebesgue, ya que es acotada y medible sobre $[a,b]$. Sea M una cota para f' y extendemos la función f al intervalo $[a, b+1]$ mediante $f(x) = f'(b)(x-b) + f(b)$ para cada $x \in (b, b+1]$. Nótese que al extender f, sigue siendo continua y diferenciable sobre $[a, b+1]$. Ahora, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in [a,b]$, existe un $z_n \in \left(x, x + \frac{1}{n}\right)$ tal que

$$f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(z_n^x).$$

Se sigue que $|f_n(x)| \leq M$ para cada n y para cada $x \in [a,b]$.Dado que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f' sobre $[a,b]$, por el Teorema de Convergencia Acotada sabemos que

$$\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Además, puesto que f es continua sobre $[a, b+1]$, el Teorema Fundamental del Cálculo asegura que

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f = f(a) \text{ y } \lim_{n\to\infty} n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f = f(b).$$

Haciendo un cambio de variable, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n &= \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^b f(t+\frac{1}{n})dt - n \int_a^b f(t)dt \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f = f(b) - f(a). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Podemos realizar un cálculo similar para cada $x \in (a,b)$. Esto completa la prueba.

□

En resumen, la integral de Lebesgue de funciones acotadas sobre intervalos compactos es una extensión de la integral de Riemann que tiene mejores propiedades, entre otras, respecto al intercambio de límites con la integral y el Teorema Fundamental del Cálculo.
Sin embargo, la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene por derivada

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

que es una función no acotada y por tanto no podemos aplicar el teorema 2.8.

2.2. La integral de Lebesgue de funciones no acotadas

Definición 2.9. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. La integral de Lebesgue de f sobre $[a,b]$ se define como*

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b u : \text{ es una función medible acotada}, 0 \leq u \leq f \right\}.$$

Nótese que el valor de la integral puede ser infinito. Esta definición extiende la definición de integral impropia de Riemann para $f \geq 0$. La integral de Lebesgue de f sobre un conjunto medible $E \subset [a,b]$ se define como $\int_E f = \int_a^b f\chi_E$.

Definición 2.10. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Se tiene que f es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ si $\int_a^b f < \infty$. Una función medible arbitraria $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ si $|f|$ es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$. En este caso, las funciones f^+ y f^- son integrables Lebesgue sobre $[a,b]$ y la integral de Lebesgue de f sobre $[a,b]$ está definida por:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-.$$

La función f es integrable Lebesgue sobre un conjunto medible $E \subset [a,b]$ si la función $f\chi_E$ es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y $\int_E f = \int_a^b f\chi_E$. Denotaremos al conjunto de funciones medibles Lebesgue en el intervalo $[a,b]$ como $\mathcal{L}^1([a,b])$.

Existen funciones como $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $(0,\infty)$ donde la integral impropia de Riemann existe pero que no es integrable Lebesgue.

Lema 2.11 (Lema de Fatou.). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles definidas sobre $[a,b]$ tales que $f_n(x) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \in [a,b]$. Entonces,*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n.$$

Demostración. La función $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ es medible y se tiene que es mayor o igual que cero en todo punto. Sea

$$0 \leq u \leq \lim_{n\to\infty} \inf f_n$$

una función acotada, medible y, para cada n, sea $u_n = \min\{u, f_n\}$. $\{u_n\}$ es una sucesión uniformemente acotada de funciones medibles definidas sobre $[a,b]$ y que converge puntualmente a u sobre $[a,b]$. Por el Teorema 2.7,

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n$$

ya que $u_n \leq f_n$, para cada n. Ahora, tomando el supremo sobre dichas funciones u se sigue que

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to n} \inf \int_a^b f_n.$$

Para ver que $\{u_n\}$ converge puntualmente a u sobre $[a,b]$, tomamos $x \in [a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Por la definición de $\liminf f_n(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(x) - \epsilon < f_n(x), \forall n \geq n_0$. Luego,

$$u(x) - \epsilon = \min\{u(x), u(x) - \epsilon\} \leq \min\{u(x), f_n(x)\} = u_n(x) \leq u(x),$$

de lo que se sigue que $|u_n(x) - u(x)| < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Esto completa la demostración.

□

Nótese que habrán ocasiones en las que se dé la desigualdad estricta en el lema de Fatou. Por ejemplo, si consideramos la sucesión $\{g_n\}$, donde

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $\{g_n\}$ converge puntualmente a $g = 0$ y $\int g = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int g_n$.

Teorema 2.12 (Teorema de convergencia monótona.). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones crecientes y medibles sobre $[a,b]$ tales que $f_n(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f sobre $[a,b]$, entonces $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.*

Demostración. La sucesión creciente $\{\int_a^b f_n\}$ tiene límite (el cual podría ser infinito). Dado que $\int_a^b f_n \leq \int_a^b f$, para cada $n \in \mathbb{N}$, el lema de Fatou nos asegura que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \leq \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Esto demuestra que $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

□

Obsérvese que el teorema sigue siendo válido si, en lugar de considerar funciones mayores o iguales que cero en cada punto, tomamos funciones $f_n \geq g$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y siendo g una función integrable Lebesgue definida sobre $[a,b]$. Para verlo, basta con considerar la sucesión $\{f_n - g\}$.

Corolario 2.13. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones monónotas integrables Lebesgue definidas sobre $[a,b]$ y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f sobre $[a,b]$. Si $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ es finito, entonces f es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ es decreciente. La sucesión $\{f_1 - f_n\}$ es creciente y mayor o igual que cero en todo punto y, además, converge puntualmente a $f_1 - f$. Se sigue que

$$\int_a^b (f_1 - f) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_1 - f_n). \tag{1}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_1 - f_n)$ es finito, la función $f_1 - f$ es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$, como también lo será la función $f = f_1 - (f_1 - f)$. Restando $\int_a^b f_1$ en ambos miembros de la igualdad (1) termina la prueba.

□

Corolario 2.14. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles definidas sobre $[a,b]$ tales que $f_n \geq 0$, entonces*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n.$$

Corolario 2.15. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y sea E un subconjunto medible de $[a,b]$. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tales que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f.$$

Teorema 2.16 (Teorema de convergencia dominada). *Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Lebesgue definidas sobre $[a,b]$, g una función integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto de $[a,b]$. Si $|f_n| \leq g$ sobre $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable Lebesgue sobre $[a,b]$ y $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.*

Demostración. Redefiniendo todas las funciones para que sean cero en el conjunto de puntos donde $f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, podemos asumir que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f sobre $[a,b]$ sin alterar las hipótesis o el valor de las integrales. Dado que $|f| \leq g$ sobre $[a,b]$, la función medible f es integrable Lebesgue sobre

$[a, b]$. Las sucesiones $\{f_n + g\}$ y $\{g - f_n\}$ son positivas sobre $[a, b]$. Por el lema de Fatou, se sigue que

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b (f_n + g) = \int_a^b g + \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n;$$

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b (g - f_n) = \int_a^b g - \limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Luego,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n \leq \int_a^b f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

y se demuestra así el teorema.

$\square$

3

La integral de Riemann Generalizada

Definición 3.1. *Sea $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Una partición etiquetada $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ de $[a,b]$ se dice que es δ-fina o subordinada a δ, si para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se verifica que*

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)).$$

A la función estrictamente positiva δ la llamaremos función gauge o calibrador.

Lema 3.2. *Si $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ es un calibrador, entonces existe una partición etiquetada en $[a,b]$ que es δ-fina.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo suponiendo que no existe ninguna partición etiquetada de $[a,b]$ que sea δ-fina. Tomamos $I_0 = [a,b]$ y sea $c_0 = \frac{a+b}{2}$ el punto medio del I_0. Afirmamos que al menos uno de los dos intervalos $[a, c_0], [c_0, b]$ no posee particiones etiquetadas δ-finas. En efecto, si ambos intervalos tuviesen una partición etiquetada δ-fina, entonces se seguiría que $[a,b]$ tendría una partición etiquetada, lo cual negaría nuestra suposición inicial. Denotamos por $I_1 = [a_1, b_1]$ al intervalo que no posee ninguna partición etiquetada δ-fina. Sea $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ el punto medio de $[a_1, b_1]$. Razonando como antes, al menos uno de los intervalos $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ no posee ninguna partición etiquetada δ-fina. Elegimos aquel que no posee particiones etiquetadas δ-fina y lo denotamos por $I_2 = [a_2, b_2]$. Sea ahora c_3 el punto medio de I_2. Iterando este proceso se obtiene una sucesión $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ de intervalos compactos tales que

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ... \qquad y \qquad l(I_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se sigue del Teorema de Encaje de Cantor que existe un único $x_0 \in I$ tal que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$. Por otro lado, como $\delta(x_0) > 0$, por el Principio de Arquímedes sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(I_n) = \frac{b-a}{2^n} < \delta(x_0).$$

Esta desigualdad nos dice que $I_n \subset (x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0))$ y, en consecuencia, el par (x_0, I_n) es una partición etiquetada δ-fina de I_n. Esto contradice la construcción de nuestro I_n, luego la suposición inicial es falsa.

$\square$

3.1. Construcción de la integral de Henstock-Kurzweil

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Recordemos que una partición de $[a, b]$ es una colección finita de puntos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ tal que:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Los intervalos asociados a la partición P serán denotados por $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], ..., I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Un conjunto de etiquetas asociadas a los intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ de la partición P es cualquier colección finita de puntos de $[a, b]$, digamos $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ tal que $t_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n$. Cualquier conjunto de pares ordenados

$$P_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, ..., n\},$$

donde $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y $e = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ es un conjunto de etiquetas asociadas a $I_1, ..., I_n$ de la partición P, lo llamaremos una partición etiquetada de $[a, b]$.
Recordemos también que si $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un calibrador sobre $[a, b]$, entonces existe una partición etiquetada en $[a, b]$, digamos $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$, que es δ-fina o subordinada a δ, es decir,

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)) = \gamma(t_i),$$

para cada índice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, donde γ es la función que controla a P_e.
Denotaremos por $\mathfrak{Be}([a, b], \delta)$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ que están subordinadas a δ. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria y $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a, b]$, entonces la suma de Riemann asociada a P_e la escribiremos como:

$$S(f, P_e) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definición 3.3. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a, b]$ si existe un número $A \in \mathbb{R}$ de manera que, para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ tal que, si $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ es cualquier partición δ-fina de $[a, b]$, entonces*

$$|S(f, P_e) - A| < \epsilon.$$

Este número A, si existe, es único y se llama la integral de Henstock-Kurzweil de f y será denotado como sigue:

$$A = (\mathcal{HK}) \int_a^b f(t)dt.$$

Denotaremos por $\mathcal{HK}([a,b])$ el conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Henstock-Kurzweil integrables sobre $[a,b]$. En general, si $E \subseteq [a,b]$ es un conjunto medible, diremos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre E si $f \cdot \chi_E$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a,b]$ y escribiremos

$$(\mathcal{HK}) \int_E f(t)dt = (\mathcal{HK}) \int_a^b f \cdot \chi_E(t)dt.$$

La integral de Henstock-Kurzweil también es conocida como integral Generalizada de Riemann.

Teorema 3.4. *Si $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, entonces $(\mathcal{HK}) \int_a^b f(t)dt$ es única.*

Demostración. Supongamos que A_1 y A_2 son números reales tales que $A_1 = (\mathcal{HK}) \int_a^b f(t)dt$ y $A_2 = (\mathcal{HK}) \int_a^b f(t)dt$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador $\delta_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $|S(f, P') - A_1| < \frac{\epsilon}{2}$ para cualquier partición etiquetada P' de $[a,b]$ subordinada a δ_1. Similarmente, existe un calibrador $\delta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $|S(f, P'') - A_2| < \frac{\epsilon}{2}$ para cualquier partición etiquetada P'' de $[a,b]$ subordinada a δ_2. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y sea P una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ. Entonces, P está subordinada tanto a δ_1, como a δ_2 y, en consecuencia,

$$|A_1 - A_2| \leq |S(f, P) - A_1| + |S(f, P) - A_2| < \epsilon.$$

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $A_1 = A_2$.

$\square$

Teorema 3.5 (Criterio de Cauchy). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f \in \mathcal{HK}([a,b])$.*
2. *Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$P, Q \in \mathfrak{Be}([a,b], \delta) \Rightarrow |S(f, P) - S(f, Q)| < \epsilon. \qquad (a)$$

Demostración. Que (1) implica (2) resulta trivial. Ahora, supongamos que (2) se verifica. Por cada $n \geq 1$, seleccionamos (tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$) un calibrador $\delta_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que (a). Reemplazando δ_n por $\min\{\delta_1, ...\delta_n\}$ si fuese necesario, asumiremos que $\delta_1 \geq \delta_2 \geq ... \geq \delta_n$. Usando ahora el lema de Cousin, se obtiene que, para cada $n \geq 1$, existe una partición etiquetada D_n de $[a,b]$ subordinada a δ_n. Observamos que, para cada $m > n$, puesto que $\delta_n > \delta_m$, se tiene que D_m es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ_n. De esto se sigue que

$$|S(f, D_m) - S(f, D_n)| < \frac{1}{m},$$

lo cual implica que $(S(f, D_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, converge a algún $A \in \mathbb{R}$. Se sigue de la desigualdad anterior que

$$|S(f, D_m) - A| < \frac{1}{m}.$$

Fijando $\epsilon > 0$ y tomando $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m > 2/\epsilon$, si D es cualquier partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a $\delta = \delta_m$, entonces

$$|S(f, D) - A| \leq |S(f, D) - S(f, D_m)| + |S(f, D_m) - A| < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \epsilon.$$

Esto indica que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y termina la demostración.

Teorema 3.6. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(t)dt = (\mathcal{HK}) \int_a^b f(t)dt. \qquad (1)$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $f \in \mathcal{R}([a,b])$, existe un $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$\left| S(f, P) - (\mathcal{R}) \int_a^b f(t)dt \right| < \epsilon$$

para cualquier partición etiquetada P de $[a,b]$ satisfaciendo $||P|| < \delta_\epsilon$. Definimos $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(t) = \frac{1}{4}\delta_\epsilon$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces δ es un calibrador sobre $[a,b]$. Si $P_e = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, ..., n\}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ, entonces, puesto que

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)) = \left(t_i - \frac{1}{4}\delta_\epsilon, t_i + \frac{1}{4}\delta_\epsilon\right)$$

resulta que $0 < x_i - x_{i-1} < \frac{1}{2}\delta_\epsilon < \delta_\epsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por consiguiente, la partición P_e también satisface $||P_e|| < \delta_\epsilon$ y, por lo tanto,

$$\left| S(f, P_e) - (\mathcal{R}) \int_a^b f(t)dt \right| < \epsilon. \qquad (2)$$

Hemos demostrado que cualquier partición etiquetada P_e de $[a, b]$ que esté subordinada a δ cumple con la desigualdad (2). Esto nos indica que $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y, por la unicidad de la integral, se cumple (1).

□

El resultado anterior combinado con el conocimiento de que toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable, permite concluir que:

$$\mathcal{C}([a, b]) \subseteq \mathcal{R}([a, b]) \subseteq \mathcal{HK}([a, b]).$$

En particular, toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea monótona o escalonada es Henstock-Kurzweil integrable. No obstante, el interés de construir funciones Henstock-Kurzweil integrables reside en que

$$\mathcal{R}([a, b]) \subsetneq \mathcal{HK}([a, b]).$$

Ejemplo 3.7. La función de Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ es acotada, pertenece a $\mathcal{HK}([0, 1])$ pero no a $\mathcal{R}([0, 1])$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que la sucesión $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ es una enumeración de los racionales en $[0, 1]$. Definamos $\delta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} & \text{si } x = r_k, k = 1, 2, ... \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Claramente, δ es un calibrador. Fijemos una partición etiquetada de $[0, 1]$ subordinada a δ, digamos $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^{n}$. En este caso, $x_i - x_{i-1} < 2\delta(t_i)$ para cada $i = 1, ..., n$. Observe que si la etiqueta t_i es irracional, entonces $f(t_i) = 0$, de modo que en la suma de Riemann $S(f, P_e) = f(t_i)(x_1 - x_0) + ... + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$ solo interesan las etiquetas que son racionales. En este caso, si $t_i = r_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 < f(r_k)(x_k - x_{k-1}) = 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq 2\frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{2^k}$$

y, por lo tanto,

$$|S(f, P_e)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Puesto que $\epsilon > 0$ fue elegido de modo arbitrario, se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y $\int_0^1 f dt = 0$.

Ejemplo 3.8. La función de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = 1/k, k = 1,2,... \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \backslash \{1/k : k = 1,2,...\} \end{cases}$$

es claramente no acotada sobre $[0,1]$ y, por consiguiente, no pertenece a $\mathcal{R}([0,1])$, pero sí a $\mathcal{HK}([0,1])$.

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$ y definimos $\delta : [0,1] \to (0,+\infty)$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{k2^{k+1}} & \text{si } x = 1/k, k = 1,2,... \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{1/k : k = 1,2,...\}. \end{cases}$$

Si $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[0,1]$ subordinada a δ, entonces debemos tener que $x_i - x_{i-1} < 2\delta(t_i)$ para $i = 1,2,...,n$. Similar al ejemplo anterior, las únicas etiquetas que realmente importan son aquellas que tienen la forma $t_i = 1/k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente,

$$0 < f(1/k)(x_k - x_{k-1}) = k \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq 2k \frac{\epsilon}{k2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{2^k}.$$

De esto se sigue que

$$|S(f, P_e)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $(\mathcal{HK}) \int_0^1 f dt = 0$.

Teorema 3.9. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si $f = 0$ casi-siempre, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f dt = 0.$$

Demostración. Sea $E = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$. Por hipótesis, $m(E) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considérese el conjunto

$$E_n = \{x \in E : n - 1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Por supuesto, cada uno de los conjuntos E_n tiene medida cero, son disjuntos dos a dos y $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Fijemos un $\epsilon > 0$ y, por cada $n \in \mathbb{N}$, seleccione un conjunto abierto O_n tal que

$$E_n \subseteq O_n \qquad \text{y} \qquad m(O_n) < \frac{\epsilon}{n2^n}.$$

Esta información es suficiente para obtener un calibrador apropiado sobre $[a,b]$. En efecto, basta con definir la función $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} dist(x, O_n^C) & \text{si } x \in E_n, \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$$

Supongamos ahora que $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n el subconjunto de P_e cuyas etiquetas están en E_n. Nótese que si J es un intervalo de P_n, entonces $J \subseteq O_n$ y, por lo tanto,

$$|S(f,P_n)| = \left| \sum_{(t_i,J_i)\in P_n} f(t_i) l(J_i) \right| < n \sum_{t_i,J_i \in P_n} \nu(O_n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

De esta última desigualdad se tiene entonces que

$$|S(f,P_e)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |S(f,P_n)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Esto nos revela que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $(\mathcal{HK}) \int_0^1 f dt = 0$.

□

A continuación, veremos que si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ posee una primitiva, la integrabilidad de f según Henstock-Kurzweil se convierte en una conclusión en lugar de una hipótesis como ocurre con las integrales de Riemann y Lebesgue. La demostración del Teorema Fundamental de Henstock-Kurzweil se obtendrá casi inmediatamente si se establece el siguiente resultado, el cual es un modo alternativo de expresar la derivada de una función en un punto.

Lema 3.10 (Definición alternativa de Derivada). *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $t \in [a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un $\delta(t) > 0$ tal que cualesquiera sean $u, v \in [a,b]$ satisfaciendo*

$$t - \delta(t) < u \leq t \leq v < t + \delta(t),$$

se cumple que

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v-u)| \leq \epsilon(v-u).$$

Demostración. Puesto que, por definición,

$$F'(t) = \lim_{x \to t} \frac{F(x) - F(t)}{x - t}$$

entonces, para el $\epsilon > 0$, existe un $\delta(t) > 0$ tal que, para cada $x \in [a,b]$,

$$0 < |x - t| < \delta(t) \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(t)}{x - t} - F'(t) \right| < \epsilon,$$

o de forma equivalente,

$$|x - t| < \delta(t) \Rightarrow |F(x) - F(t) - F'(t)(x - t)| \leq \epsilon\, |x - t| \tag{3.1}$$

Sean ahora u, v tales que

$$t - \delta(t) < u \leq t \leq v < t + \delta(t).$$

Entonces, $|u - t| = t - u, |v - t| = v - t$ y, por esto último,

$$\begin{aligned} |F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| &= |F(v) - F(t) + F(t) - F(u) - F'(t)(v - t + t - u)| \\ &\leq |F(v) - F(t) - F'(t)(v - t)| + |F(u) - F(t) - F'(t)(u - t)| \\ &\leq \epsilon|v - t| + \epsilon|u - t| = \epsilon(v - t) + \epsilon(t - u) = \epsilon(v - u) \end{aligned}$$

y termina la prueba.

□

Teorema 3.11 (Fundamental del Cálculo ($\mathcal{HK}$)). *Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a, b]$. Entonces $F' \in \mathcal{HK}([a, b])$ y vale la igualdad*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b F' dt = F(b) - F(a).$$

Demostración. Fijemos un $\epsilon > 0$ arbitrario y pongamos $\epsilon' = \epsilon/(b - a)$. El lema anterior aplicado a F y a ϵ' nos dice que para cada $t \in [a, b]$, existe un $\delta(t) > 0$ con la siguiente propiedad: cualesquiera sean $u, v \in [a, b]$ tal que $t - \delta(t) < u \leq t \leq v < t + \delta(t)$ se tiene que

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| < \epsilon'(v - u).$$

Por supuesto, la función $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un calibrador. Considérese ahora cualquier partición etiquetada $P_e = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ de $[a, b]$ subordinada a δ. Entonces, para cada $i = 1, 2, ..., n$,

$$t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i).$$

Aplicando la desigualdad anterior con $u = x_{i-1}, v = x_i$ y $t = t_i$ se obtiene

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon'(x_i - x_{i-1})$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$. Por otro lado, puesto que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1})$ resulta entonces que

$$
\begin{aligned}
|F(b)-F(a)-S(F',P_e)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]-\sum_{i=1}^{n}F'(t_i)(x_i-x_{i-1})\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})-F'(t_i)(x_i-x_{i-1})]\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})-F'(t_i)(x_i-x_{i-1})| \\
&< \sum_{i=1}^{n}\epsilon'(x_i-x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon.
\end{aligned}
$$

Esto nos revela que F' es Henstock-Kurzweil integrable y se cumple que $(\mathcal{HK})\int_a^b F'dt = F(b)-F(a)$.

□

Ejemplo 3.12. La función

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } 0<x\leq 1\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

posee, como ya hemos visto anteriormente, una derivada no acotada

$$F'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)+\frac{2\pi}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

la cual, por el Teorema Fundamental del Cálculo, es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[0,1]$ y

$$(\mathcal{HK})\int_0^1 F'(t)dt = F(1)-F(0)=-1.$$

Sin embargo, como ya hemos visto, F' no es ni Riemann integrable, ni Lebesgue integrable sobre $[0,1]$.

3.1.1. Propiedades básicas

Veremos que el conjunto $\mathcal{HK}([a,b])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y que la integral de Henstock-Kurzweil es un funcional lineal sobre $\mathcal{HK}([a,b])$. Además, muchas de las operaciones algebraicas que vimos que se cumplían para las integrales anteriores, también se cumplen para esta.

Teorema 3.13. *Sean $f,g\in\mathcal{HK}([a,b])$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Entonces:*

- $f+g \in \mathcal{HK}([a,b])$ *y* $(\mathcal{HK})\int_a^b (f+g)dt = (\mathcal{HK})\int_a^b f dt + (\mathcal{HK})\int_a^b g dt.$
- $\lambda f \in \mathcal{HK}([a,b])$ *y* $(\mathcal{HK})\int_a^b \lambda f dt = \lambda \cdot (\mathcal{HK})\int_a^b f dt.$

Demostración.
- Sean $f, g \in \mathcal{HK}([a,b])$ y fijemos $\epsilon > 0$ tomado arbitrariamente. Por definición, existen funciones calibradoras $\delta_1, \delta_2 : [a,b] \to (0,+\infty)$ con las siguientes propiedades: si Q_e y R_e son particiones etiquetadas de $[a,b]$ subordinadas a δ_1 y δ_2 respctivamente, entonces

$$\left| S(f,Q_e) - (\mathcal{HK})\int_a^b f dt \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \left| S(f,R_e) - (\mathcal{HK})\int_a^b g dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

  Definimos $\delta(t) = \text{mín}\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ para todo $t \in [a,b]$. Resulta entonces que δ es un calibrador. Si P_e es una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ, entonces ella también está subordinada tanto a δ_1 como a δ_2 y, por tanto,

$$\begin{aligned} &\left| S(f+g,P_e) - (\mathcal{HK})\int_a^b (f+g) dt \right| = \\ &= \left| S(f,P_e) + S(g,P_e) - (\mathcal{HK})\int_a^b f dt - (\mathcal{HK})\int_a^b g dt \right| \\ &\leq \left| S(f,P_e) - (\mathcal{HK})\int_a^b f dt \right| + \left| S(g,P_e) - (\mathcal{HK})\int_a^b g dt \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

  □
- La demostración de la segunda propiedad se deduce de forma análoga.

□

Corolario 3.14. *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es cualquier función tal que $f = g$ casi-siempre, entonces $g \in \mathcal{HK}([a,b])$.*

Demostración. Como $g - f = 0$ casi-siempre, el Teorema 3.9 nos muestra que $g - f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y entonces, por ser $\mathcal{HK}([a,b])$ un espacio vectorial, se tiene que $g = f + (g - f) \in \mathcal{HK}([a,b])$. □

Teorema 3.15. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $c \in (a,b)$.*

- *Si $f \in \mathcal{HK}([a,c]) \cap \mathcal{HK}([c,b])$, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y*

$$(\mathcal{HK})\int_a^b f dt = (HK)\int_a^c f dt + (\mathcal{HK})\int_c^b f dt.$$

- *Si* $f \in \mathcal{HK}([a,b])$*, entonces* $f \in \mathcal{HK}([c,d])$*, para cualquier subintervalo* $[c,d] \subseteq [a,b]$*.*

Demostración. ▪ Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $f \in \mathcal{HK}([a,c])$, existe un calibrador $\delta_1 : [a,c] \to (0,+\infty)$ tal que

$$\left| S(f,P_1) - (\mathcal{HK}) \int_a^c f dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para cualquier partición etiquetada P_1 de $[a,c]$ subordinada a δ_1. Similarmente, como $f \in \mathcal{HK}([c,b])$, existe un calibrador $\delta_2 : [c,b] \to (0,+\infty)$ tal que

$$\left| S(f,P_2) - (\mathcal{HK}) \int_c^b f dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para cualquier partición etiquetada P_2 de $[c,b]$ subordinada a δ_2. Definimos $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{mín}\,\{\delta_1(x), c-x\} & \text{si } x \in [a,c) \\ \text{mín}\,\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} & \text{si } x = c \\ \text{mín}\,\{\delta_1(x), x-c\} & \text{si } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Sea $P = (t_i, [x_{i-1}, x_i])_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ. Podemos asumir que c es una etiqueta de al menos un subintervalo de P y, por consiguiente, P debe ser de la forma $P_a \cup (c,[u,v]) \cup P_b$, donde las etiquetas de P_a son menores que c y las etiquetas de P_b son mayores que c. Sean

$$P_1 = P_a \cup (c,[u,c]) \qquad \text{y} \qquad P_2 = P_b \cup (c,[c,v]).$$

Entonces, P_1 es una partición etiquetada de $[a,c]$ subordinada a δ_1 y P_2 es una partición etiquetada de $[c,b]$ subordinada a δ_2. Puesto que $S(f,P) = S(f,P_1) + S(f,P_2)$, resulta que

$$\begin{aligned} \left| S(f,P) - (\mathcal{HK}) \int_a^c f dt - (\mathcal{HK}) \int_c^b f dt \right| &\leq \left| S(f,P_1) - (\mathcal{HK}) \int_a^c f dt \right| \\ &+ \left| S(f,P_2) - (\mathcal{HK}) \int_c^b f dt \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto nos confirma que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y se cumple que $(\mathcal{HK}) \int_a^b f dt = (\mathcal{HK}) \int_a^c f dt + (\mathcal{HK}) \int_c^b f dt$.

- Supongamos que $[c,d]$ es un subintervalo propio de $[a,b]$ y sea $\epsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, existe, por el criterio de Cauchy, un calibrador $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ tal que
$$|S(f,P) - S(f,Q)| < \epsilon$$
para cualquier par de particiones etiquetadas P, Q de $[a,b]$ subordinadas a δ. Siendo $[c,d]$ un subintervalo propio de $[a,b]$, existe una colección finita $\{[u_1,v_1],...,[u_n,v_n]\}$ de subintervalos no-superpuestos de $[a,b]$ tal que
$$[c,d] \notin \{[u_1,v_1],...,[u_n,v_n]\} \qquad \text{y} \qquad [a,b] = [c,d] \cup \bigcup_{k=1}^{n} [u_k,v_k].$$
Usemos el Lema de Cousin para seleccionar, por cada $k \in \{1,...,n\}$, una partición etiquetada P_k de $[u_k,v_k]$ subordinada a δ. Si P_c y P_d son particiones etiquetadas de $[c,d]$ subordinadas a δ, entonces $P_c \cup \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ y $P_d \cup \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ son particiones etiquetadas de $[a,b]$ subordinadas a δ y, por lo tanto,
$$\begin{aligned} |S(f,P_c) - S(f,P_d)| &= \left| S(f,P_c) + \sum_{k=1}^{n} S(f,P_k) - S(f,P_d) - \sum_{k=1}^{n} S(f,P_k) \right| \\ &= \left| S\left(f, P_c \cup \bigcup_{k=1}^{n} P_k\right) - S\left(f, P_d \cup \bigcup_{k=1}^{n} P_k\right) \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Ahora el Criterio de Cauchy nos revela que $f \in \mathcal{HK}([c,d])$. □

Teorema 3.16. *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Si $f \geq 0$ sobre $[a,b]$, entonces*
$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f dt \geq 0.$$
En particular, si $f, g \in \mathcal{HK}([a,b])$ y $f \leq g$ sobre $[a,b]$, entonces
$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f dt \leq (\mathcal{HK}) \int_a^b g dt.$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ es no-negativa y sea $\epsilon > 0$. Por definición, existe un calibrador $\delta : [a,b] \to (0,+\infty)$ tal que
$$\left| S(f,P_e) - (\mathcal{HK}) \int_a^b f dt \right| < \epsilon,$$
para cualquier partición etiquetada P_e de $[a,b]$ subordinada a δ. Puesto que $f \geq 0$, entonces

$$0 \leq S(f, P_e) < (\mathcal{HK}) \int_a^b f dt + \epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $(\mathcal{HK}) \int_a^b f dt \geq 0$. □

Note 3.17. Podemos usar el resultado anterior para mostrar una función que no es Henstock-Kurzweil integrable. En efecto, la función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es Henstock-Kurzweil integrable. Supongamos, para generar una contradicción, que u es Henstock-Kurzweil integrable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \chi_{(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}(x).$$

Puesto que $u_n \leq u$ y $u_n \in \mathcal{R}([0,1]) \subseteq \mathcal{HK}([0,1])$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = (\mathcal{R}) \int_0^1 u_n dt = (\mathcal{HK}) \int_0^1 u_n dt \leq (\mathcal{HK}) \int_0^1 u dt$$

de donde se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ converge, lo cual es absurdo.

3.1.2. El Lema de Saks-Henstock

Definición 3.18. *Una subpartición etiquetada de $[a,b]$ consiste en una colección finita de la forma $\mathcal{S}_e = \{(s_1, J_1), ..., (s_k, J_k)\}$ donde cada etiqueta $s_i \in J_i \subseteq [a,b]$ para $i \in \{1, ..., k\}$ y los intervalos $J_1, ..., J_k$ son cerrados, no-degenerados y no-superpuestos.*

Lema 3.19 (Saks-Henstock). *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y sea $\epsilon > 0$. Si δ es un calibrador sobre $[a,b]$ tal que*

$$\left| S(f, P) - (\mathcal{HK}) \int_a^b f dt \right| < \epsilon$$

para cualquier partición etiquetada P de $[a,b]$ subordinada a δ, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{k} (f(s_i) l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt) \right| = \left| S(f, \mathcal{S}) - (\mathcal{HK}) \int_{\bigcup_{i=1}^{k} J_i} f dt \right| \leq \epsilon$$

Demostración. Sea $\mathcal{S} = (s_i, [u_i, v_i])_{i=1}^k$ una subpartición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ cuyos interiores son disjuntos. Si $\bigcup_{i=1}^k [u_i, v_i] = [a, b]$, entonces el resultado sigue del Teorema 3.15. Supongamos entonces que $\bigcup_{i=1}^k [u_i, v_i] \subsetneq [a, b]$. En este caso, existen intervalos no superpuestos $[c_1, d_1], ..., [c_m, d_m]$ incluidos en $[a, b]$ tales que

$$[a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (u_i, v_i) = \bigcup_{j=1}^{m} [c_j, d_j].$$

Una nueva aplicación del Teorema 3.15 nos garantiza que $f \in \mathcal{HK}([c_j, d_j])$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Fijemos un $\tau > 0$ y por cada $j \in \{1, ..., m\}$ escojamos, usando el Lema de Cousin, un calibrador δ_j sobre $[c_j, d_j]$ de modo que

$$\left| S(f, P_j) - (\mathcal{HK}) \int_{c_j}^{d_j} f \right| < \frac{\tau}{m}$$

para cada partición etiquetada P_j de $[c_j, d_j]$ subordinada a δ_j. Puesto que δ y δ_j son calibradores sobre $[c_j, d_j]$, podemos aplicar el Lema de Cousin al calibrador $\text{mín}\{\delta, \delta_j\}$ para hallar una partición etiquetada Q_j de $[c_j, d_j]$ subordinada a $\text{mín}\{\delta, \delta_j\}$. Claramente $Q = \mathcal{S} \cup \bigcup_{j=1}^m Q_j$ es partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ tal que

$$S(f, Q) = S(f, \mathcal{S}) + \sum_{j=1}^{m} S(f, Q_j)$$

y

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f dt = \sum_{i=1}^{k} (\mathcal{HK}) \int_{u_i}^{v_i} f dt + \sum_{j=1}^{m} (\mathcal{HK}) \int_{c_j}^{d_j} f dt.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i=1}^{k} \left(f(s_i)(v_i - u_i) - (\mathcal{HK}) \int_{u_i}^{v_i} f dt \right) \right| \\
&= \left| \left(S(f, Q) - \sum_{j=1}^{m} S(f, Q_j) \right) - \left((\mathcal{HK}) \int_a^b f dt - \sum_{j=1}^{m} (\mathcal{HK}) \int_{c_j}^{d_j} f dt \right) \right| \\
&\leq \left| S(f, Q) - (\mathcal{HK}) \int_a^b f dt \right| + \sum_{j=1}^{m} \left| S(f, Q_j) - (\mathcal{HK}) \int_{c_j}^{d_j} f dt \right| \\
&< \epsilon + \tau.
\end{aligned}$$

Puesto que $\tau > 0$ es arbitrario, la desigualdad se cumple.

□

Corolario 3.20 (Saks-Henstock). *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre $[a,b]$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{k} \left| f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt \right| \leq 2\epsilon$$

para cualquier subpartición etiquetada $\mathcal{S} = (s_i, J_i)_{i=1}^{k}$ de $[a,b]$ subordinada a δ.

Demostración. Puesto que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, el Lema 3.19 nos garantiza la existencia de un calibrador δ sobre $[a,b]$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \left(f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt \right) \right| = \left| S(f, \mathcal{S}) - (\mathcal{HK}) \int_{\bigcup_{i=1}^{m} J_i f dt} \right| \leq \epsilon$$

para cada subpartición etiquetada $\mathcal{S} = (s_i, J_i)_{i=1}^{m}$ de $[a,b]$ subordinada δ. Fijemos una subpartición etiquetada $\mathcal{S} = (s_i, J_i)_{i=1}^{m}$ de $[a,b]$ subordinada a δ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ (s_i, J_i) \in \mathcal{S} : f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt \geq 0 \right\}.$$

Tomando $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$, resulta que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \left| f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt \right| \\ &= \sum_{(s_i,J_i)\in\mathcal{S}_1} \left(f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt \right) - \sum_{(s_i,J_i)\in\mathcal{S}_2} \left(f(s_i)l(J_i) - (\mathcal{HK}) \int_{J_i} f dt \right) \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

La prueba está completa. □

Teorema 3.21. *Sea $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la integral definida de f, es decir,*

$$F(x) = (\mathcal{HK}) \int_{a}^{x} f dt \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Entonces, F es continua sobre $[a,b]$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para demostrar que F es continua sobre $[a,b]$, tomemos un número arbitrario $x \in [a,b]$. Puesto que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ existe, por definición, un calibrador δ sobre $[a,b]$ tal que

$$\left| S(f,P) - (\mathcal{HK}) \int_a^x f dt \right| < \epsilon$$

para cada partición etiquetada P de $[a,b]$ subordinada a δ. Fijemos una partición etiquetada $P = (t_i, I_i)_{i=1}^n$ de $[a,b]$ subordinada a δ y sea I_{i_0} un intervalo de la partición conteniendo a x. Puesto que $x \in I_{i_0} \subseteq (t_{i_0} - \delta(t_{i_0}), t_{i_0} + \delta(t_{i_0}))$, podemos considerar el número φ definido por

$$\varphi = \text{mín}\left\{x - t_{i_0} - \delta(t_{i_0}), t_{i_0} + \delta(t_{i_0}) - x, \epsilon/(1 + |f(x)|)\right\}.$$

Tomemos ahora cualquier $y \in [a,b]$ que satisfaga $|y - x| < \varphi$. Entonces, aplicando el Lema de Saks-Henstock a la subpartición etiquetada $\{x, [y,x]$ o $\{(x, [x,y])\}$, se tiene que

$$\left| f(x)(y-x) - (HK) \int_x^y f dt \right| \leq \epsilon \qquad o \qquad \left| f(x)(x-y) - (HK) \int_y^x f dt \right| \leq \epsilon.$$

En cualquier caso

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\leq |f(x)(y-x) - (F(y) - F(x))| + |f(x)|\,|(y-x)| \\ &\leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Esto nos indica que F es continua en x y termina la prueba. □

Hemos visto que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que f es Riemann integrable sobre cada subintervalo $[a,c] \subseteq [a,b]$ donde $c \in (a,b)$, entonces puede ocurrir que la función $f \notin \mathcal{R}([a,b])$. Esto sucede, por ejemplo, si f posee una singularidad en algún punto $x_0 \in [a,b]$, lo cual significa que $\text{lím}_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$. Por ejemplo, $x_0 = 0$ es un punto singular de la función $f(x) = 1/\sqrt{(x)}$ si $x \in (0,1]$ y $f(0) = 0$. Supongamos ahora que $x_0 = b$ es una singularidad de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y que f es Riemann integrable sobre cada subintervalo $[a,c] \subseteq [a,b]$ donde $c \in (a,b)$. Se define la integral impropia de Riemann como

$$(\mathcal{IR}) \int_a^b f dt = \lim_{c \to b^-} (\mathcal{R}) \int_a^c f dt$$

siempre que dicho límite exista. Consideraciones similares se aplican en los otros casos. Observe que $(\mathcal{IR}) \int_a^b f dt$ no es la integral de Riemann. En este sentido, la integral impropia de Riemann generaliza la integral de Riemann. Más aún, también puede ocurrir que f sea Lebesgue integrable sobre cada subintervalo

$[a,c] \subseteq [a,b]$ donde $c \in (a,b), (\mathcal{IR})\int_a^b f dt$ exista y tampoco f sea Lebesgue integrable. En el siguiente resultado veremos que para la integral de Henstock-Kurzweil no existen integrales impropias.

Teorema 3.22 (Hake). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $f \in \mathcal{HK}([a,b])$.

2. $f \in \mathcal{HK}([a,c])$ *para cada* $c \in (a,b)$ *y* $\lim_{c\to b^-} (\mathcal{HK})\int_a^c f dt$ *existe.*

En este caso se tiene que:

$$(\mathcal{HK})\int_a^b f dt = \lim_{c\to b^-} (\mathcal{HK})\int_a^c f dt.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Por el Teorema 3.15 sabemos que $f \in \mathcal{HK}([a,c])$ para cada $c \in (a,b)$. Además, por el Teorema 3.21, la integral definida F de f es continua sobre $[a,b]$. En particular, continua en $x = b$ y, por lo tanto, se verifica la igualdad:

$$(\mathcal{HK})\int_a^b f dt = F(b) = \lim_{c\to b^-} F(c) = \lim_{c\to b^-} (\mathcal{HK})\int_a^c f dt.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Fijemos $\epsilon > 0$ y seleccionemos una sucesión $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ en $[a,b]$ que sea estrictamente creciente tal que $c_0 = a$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = b$. Nuestra hipótesis nos garantiza la existencia de $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \lim_{c\to b^-} (\mathcal{HK})\int_a^c f dt.$$

Ahora bien, como $\lim_{n\to\infty} c_n = b$ y $\lim_{c_n\to b}(\mathcal{HK})\int_a^{c_n} f dt = A$, podemos elegir un $N \in \mathbb{N}$ de modo tal que $b - c_N \leq \epsilon/4(1 + |f(b)|)$ y también que

$$\left|(\mathcal{HK})\int_a^x f dt - A\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

para cualquier $x \in [c_N, b)$.
Por otro lado, puesto que $\bigcup_{n=1}^{\infty}[c_{n-1}, c_n] = [a,b)$, una aplicación del Corolario 3.20 nos conduce a obtener, por cada $n \in \mathbb{N}$, un calibrador δ_n sobre $J_n = [c_{n-1}, c_n]$ tal que la desigualdad

$$\sum_{(s,[u,v])\in P_n} \left|f(s)(v-u) - (\mathcal{HK})\int_u^v f dt\right| < \frac{\epsilon}{4(2^n)}$$

se cumpla para cada subpartición etiquetada P_n de $[c_{n-1}, c_n]$ subordinada a δ_n.
Definamos un calibrador δ sobre $[a,b]$ del modo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(c_1 - c_0) & \text{si } t = c_0 \\ \text{mín}\left\{\delta_n(c_n), \delta_{n+1}(c_n), \frac{1}{2}(c_n - c_{n-1}), \frac{1}{2}(c_{n+1} - c_n)\right\} & \text{si } t = c_n \text{ para algún } n \geq 1 \\ \text{mín}\left\{\delta_n(t), \frac{1}{2}(t - c_{n-1}), \frac{1}{2}(c_n - t)\right\} & \text{si } t \in (c_{n-1}, c_n), \text{ para algún } n \geq 1 \\ b - c_N & \text{si } t = b \end{cases}$$

y sea $P = ((t_i, [x_{i-1}, x_i]))_{i=1}^p$ una partición etiquetada de $[a, b]$ subordinada a δ. Puesto que $b \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}[c_{n-1}, c_n] = [a, b)$, nuestra elección de δ implica que $t_p = b$ y $x_{p-1} \in (c_m, c_{m+1}]$ para algún único entero $m \geq 1$. También, observemos que si $k \in \{1, ..., m\}$, nuestra elección de δ implica que

$$\{(t, [x, y]) \in P : [x, y] \subseteq [c_{k-1}, c_k]\}$$

es una partición etiquetada de $[c_{k-1}, c_k]$ subordinada a δ_k. Por esto,

$$\begin{aligned} &|S(f, P) - A| \\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{(t,[x,y])\in P;[x,y]\subseteq[c_{k-1},c_k]} f(t)(y-x) - (\mathcal{HK})\int_{c_{k-1}}^{c_k} f dt\right)\right| \\ &+ \left|\sum_{(t,[x,y])\in P;[x,y]\subseteq[c_m,x_{p-1}]} f(t)(y-x) - (HK)\int_{c_m}^{x_{p-1}} f dt\right| + |f(b)|\,(b - x_{p-1}) \\ &+ \left|(\mathcal{HK})\int_a^{x_{p-1}} f dt - A\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba. □

Recordemos que si f y g son funciones Riemann integrables, entonces $f \cdot g$ es integrable del mismo tipo; sin embargo, esto no ocurre con la integral de Henstock-Kurzweil. En efecto, la función $\nu : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es Henstock-Kurzweil integrable, pero $\nu \cdot \nu = u \notin \mathcal{HK}([0, 1])$.

3.1.3. Integrabilidad Absoluta

Hay que advertir que, a diferencia de lo que ocurre con las integrales de Riemann y de Lebesgue, la siguiente desigualdad no es válida, en general, para la integral de Henstock-Kurzweil:

$$\left|(\mathcal{HK})\int_a^b f\,dt\right| \leq (\mathcal{HK})\int_a^b |f|\,dt.$$

La razón de por qué ello es así se encuentra en el hecho de que la integral de Henstock-Kurzweil no es una integral absoluta, es decir $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ no implica que $|f| \in \mathcal{HK}([a,b])$. He aquí un ejemplo.

Ejemplo 3.23. La función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi/x) + (\pi/x)\sin(\pi/x) & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

satisface $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, pero $|f| \notin \mathcal{HK}([a,b])$.

Demostración. La función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x\cos(\pi/x) & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es una primitiva de f en $[0,1)$. Se sigue del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil que

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = F(b_k) - F(a_k) = \frac{(-1)^k}{k}$$

donde $a_k = 2/(2k+1)$ y $b_k = 1/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que $|f| \in \mathcal{HK}([0,1])$. Entonces, de la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{HK})\int_{a_k}^{b_k} |f|\,dt \leq (\mathcal{HK})\int_0^1 |f|\,dt,$$

la cual es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se deduce que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ converge. Esta contradicción establece que $|f| \notin \mathcal{HK}([a,b])$.

□

Por supuesto, si $f, |f| \in \mathcal{HK}([a,b])$, entonces de las desigualdades $-|f| \leq f \leq |f|$ y el Teorema 3.16, se sigue que $-\int_a^b |f|\,dt \leq \int_a^b f\,dt \leq \int_a^b |f|\,dt$ y, en consecuencia:

Corolario 3.24. *Si* $f, |f| \in \mathcal{HK}([a,b])$, *entonces*

$$\left|(\mathcal{HK})\int_a^b f\,dt\right| \leq (\mathcal{HK})\int_a^b |f|\,dt.$$

3.1.4. Comparando Integrabilidad: Lebesgue y Henstock-Kurzweil

En esta sección veremos que toda función $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ es Henstock-Kurzweil integrable y, además, su integral de Lebesgue y de Henstock-Kurzweil coinciden.

Teorema 3.25. *Si $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y se cumple que*

$$(\mathcal{L})\int_a^b f d\mu = (\mathcal{HK})\int_a^b f dt.$$

En particular,

$$\mathcal{L}_1([a,b]) = \{f : f \;\; y \;\; |f| \in \mathcal{HK}([a,b])\}.$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y fijemos un $\epsilon > 0$. El Teorema de Vitali-Carathéodory permite obtener una función inferiormente semicontinua $u > f$ y una función superiormente semicontinua $v < f$ tal que $u, v \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y

$$(\mathcal{L})\int_a^b (u - v) d\mu < \epsilon.$$

Para cada $x \in [a,b]$, encontramos un $\delta(x) > 0$ de modo que $v(t) < f(x) < u(t)$ para todo $t \in (x - \delta(x), x + \delta(x)) \cap [a,b]$. Claramente δ es un calibrador sobre $[a,b]$. Sea ahora $P = ((t_i, [x_{i-1}, x_i]))_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $[a,b]$ subordinada a δ y observemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

$$(\mathcal{L})\int_{x_{i-1}}^{x_i} v d\mu \leq f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq (\mathcal{L})\int_{x_{i-1}}^{x_i} u d\mu.$$

Sumando se tiene que

$$(\mathcal{L})\int_a^b v d\mu \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq (\mathcal{L})\int_a^b u d\mu.$$

Por otro lado, como $v < f < u$, *entonces*

$$(\mathcal{L})\int_a^b v d\mu \leq (\mathcal{L})\int_a^b f d\mu \leq (\mathcal{L})\int_a^b u d\mu$$

y, en consecuencia,

$$\left| S(f, P) - (\mathcal{L})\int_a^b f d\mu \right| < \epsilon.$$

Esto nos dice que $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y

$$(\mathcal{L})\int_a^b f d\mu = (\mathcal{HK})\int_a^b f dt.$$

Finalmente, observemos que si $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$, entonces $|f| \in \mathcal{L}_1([a,b])$ y se sigue de la primera parte que $|f| \in \mathcal{HK}([a,b])$. Por esto,

$$\mathcal{L}_1([a,b]) \subseteq \{f : f \text{ y } |f| \in \mathcal{HK}([a,b])\}.$$

□

Con el resultado que acabamos de demostrar se constata la importancia de la clase $\mathcal{HK}([a,b])$: la integral de Henstock-Kurzweil es, realmente, una extensión propia de la integral de Lebesgue.

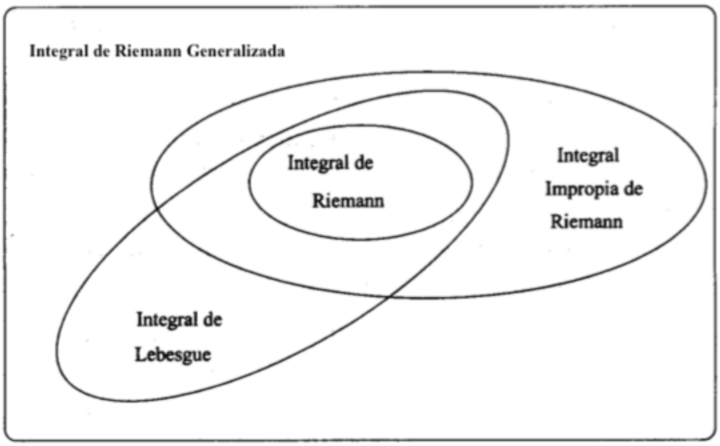


Figura 3.1. Relación entre las diferentes integrales.

A

Medida Lebesgue y funciones medibles

En este apéndice se hace una mención a los conceptos utilizados en el capítulo dos de este trabajo y que podrían ser desconocidos para el lector, tales como *medida de un conjunto, medida Lebesgue, función medible*, etc., así como sus propiedades principales.

A.1. Definición y propiedades de la medida Lebesgue

Definición A.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se define la medida exterior de Lebesgue de A, y se denota por $m^*(A)$, como*

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) / \{I_k\} \text{ sucesión de intervalos abiertos tal que } A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Obsérvese que $0 \leq m^*(A) \leq \infty$.

Teorema A.2. *La medida exterior de Lebesgue verifica las siguientes propiedades:*

- Si $A_1 \subset A_2$, entonces $m^*(A_1) \subset m^*(A_2)$, para cualesquiera $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$.
- *Si A es numerable ó $A = \emptyset$, entonces $m^*(A) = 0$.*
- *$m^*(A)$ es invariante por traslación, esto es, $m^*(A + x_0) = m^*(A)$, para cualesquiera $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.*
- *Dada una familia de conjuntos $\{A_i\}$, se verifica que $m^* \left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$.*

- *Si consideramos un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*, entonces* $m^*(I) = l(I)$*.*

Todo conjunto posee una medida exterior de Lebesgue. No obstante, la definición de esta medida presenta una limitación, y es que podemos encontrar ejemplos de conjuntos disjuntos A y B de manera que $m^*(A \cup B) \neq m^*(A) + m^*(B)$, lo cual es inaceptable para una buena definición de medida. Para solventar este problema, nos centraremos en aquellos conjuntos que cortan bien a cualquier conjunto.

Definición A.3. *Un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *es medible Lebesgue si para cada* $B \subset \mathbb{R}$*, se verifica la igualdad* $m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$*. Si* A *es medible Lebesgue, entonces la medida de Lebesgue de* A *es igual a la medida exterior de Lebesgue del conjunto y se denotará por* $m(A)$*.*

De aquí en adelante la medida de Lebesgue de un conjunto se llamará únicamente *"medida del conjunto"* y simplemente diremos que dicho conjunto es *"medible"*.

Teorema A.4. *Los conjuntos medibles verifican las siguientes propiedades:*

- $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$ *son conjuntos medibles.*
- *Si un conjunto* A *es medible, entonces* A^c *es medible.*
- *Si* $m^*(A) = 0$*, entonces* A *es medible.*
- *Sea* $\{A_i\}$ *una familia de conjuntos medibles, entonces* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ *y* $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ *son conjuntos medibles.*
- *Si* A *es un conjunto medible y* $x_0 \in \mathbb{R}$*, entonces* $A + x_0$*, es medible.*
- *Todo intervalo es medible.*

Teorema A.5. *Sea* $\{A_i\}$ *una familia arbitraria de conjuntos medibles disjuntos. Entonces,* $m\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$*.*

Teorema A.6. *Los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados son medibles.*

En resumen, los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$ son una σ-álgebra que contiene a la σ-álgebra de Borel (es decir, contiene a los abiertos y cerrados) y es completa, esto es, contiene a todo conjunto A con $m^*(A) = 0$. Además, para todo subconjunto A medible Lebesgue, se tiene que $m(A) = m^*(A)$ es una medida.

A.1.1. Definición y propiedades de las funciones medibles

Definición A.7. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es una función medible si A es un conjunto medible y, para cada $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in A / f(x) > r\}$ es medible.*

Teorema A.8. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible y sea $g : A \to \mathbb{R}$ otra función tal que $g = f$ en casi todo punto sobre A. Entonces, g es medible.*

Teorema A.9. *Sean $g, f : A \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces, las funciones $kf, f + g, |f|$ y fg son medibles. Además, la función $\frac{f}{g}$ es medible si $g \neq 0$.*

Teorema A.10. *Sea A un conjunto medible. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en casi todo punto sobre A, entonces f es medible.*

Teorema A.11. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$. Entonces, las funciones*

$$g_1(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} f_n(x), \quad g_2(x) = \inf_{n\in\mathbb{Z}^+} f_n(x),$$

$$g_3(x) = \lim_{n\to\infty} \sup\{f_n(x)\}, \quad g_4(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

son medibles.

Corolario A.12. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ otra función de manera que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto sobre A. Entonces, f es una función medible.*

Teorema A.13. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en casi todo punto sobre $[a, b]$, entonces f' es medible.*

Teorema A.14 (Teorema de Egoroff). *Sea A un conjunto medible con medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre A. Si dicha sucesión converge puntualmente en casi todo punto sobre A a una función f, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto medible $H \subset A$ tal que $m(A - H) < \epsilon$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre H.*

Definición A.15. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible. Se dice que f es una función simple si tiene un rango finito. Dicha función se puede reescribir como $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$, donde $c_i \neq c_j, \forall i \neq j, i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ y $E_i, i = 1, 2, ..., n$ son conjuntos disjuntos dos a dos de manera que $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$.*

Una función simple se puede escribir de muchas formas. Así, la representación presentada en la definición es la forma canónica de una función simple. Si no se especifica lo contrario, asumiremos que las funciones simples estarán escritas de esta forma. Obsérvese que, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, las funciones f^+ y f^- definidas por

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$$

son medibles cuando f es medible y $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$.

Teorema A.16. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible.*

- *Si f no es negativa en ninguno de sus puntos, entonces existe una sucesión creciente $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f sobre A.*

- *Existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f sobre A.*

- *Si f es una función acotada, entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen uniformemente a f sobre A.*

Bibliografía

[1] CARLOS BOSH y IAN KUCERA *De una integral a otra , ¿Cuál escoger?* Miscelánea Matemática, **28** (1999), 1-10.

[2] WILMAN BRITO. *Las Integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil.* http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf

[3] ROBERT G. BARTLE. *Return to the Riemann integral, Amer.* Math. Montly, **103**, No. 8(1996), 625-632.

[4] RUSSELL A. GORDON. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, American Math. Soci.* Graduate Studies in Mathematics, Vol.4, 1994.

El capítulo I y III han sido desarrollados esencialmente en base a la referencia [2] y el capítulo II en base a la referencia [4].

The Riemann, Lebesgue and Generalized Riemann Integrals

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Alberto Ruiz-Arteaga González
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100917277@ull.edu.es

Abstract

THE purpose of this paper is to show the main deficiencies and limitations of the Riemann integral in order to see how the Lebesgue and the Generalized Riemann integrals are able to solve some of these deficiencies.

1. The Riemann integral and its deficiencies

A Function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bounded in the interval $[a,b]$ is said that is Riemann integrable in $[a,b]$ if there exists $K\in\mathbb{R}$ such that, for each $\epsilon>0$, there is a certain $\delta>0$ so that

$$\left|S(f,P_e)-K\right|<\epsilon$$

for any labeled partition $P_e=\{(t_i,[x_{i-1},x_i\setminus i=1,2,...,n])\}$ subordinated to δ. That K number, if it exists, is unique and is called the Riemann integral of f. It will be denoted as

$$K=(\mathcal{R})\int_a^b f\,dx.$$

The set of Riemann integrable functions in the interval $[a,b]$ is denoted as $\mathcal{R}([a,b])$.
This kind of integral presents a considerable quantity of limitations and deficiencies. For example:

1. Only the bounded functions considered in a bounded, closed interval are susceptible to be Riemann integrable.
2. There can exist sequences of Riemann integrable functions which pointwise converge to a function that is not Riemann integrable.
3. We can find functions $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ so that $f(x)=g(x)$ for almost each $x\in[a,b]$ and where f is Riemann integrable while g could not be Riemann integrable.
4. One of the most important deficiencies has to be with the Fundamental Theorem of Calculus, as we can find differentiable functions $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ such that $F'(x)=f(x)$, for each $x\in[a,b]$, being f a bounded function in $[a,b]$ and, however, it is possible that $f\notin\mathcal{R}([a,b])$.

2. The Lebesgue integral

LET $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a bounded function. We define the upper and lower Lebesgue integrals, respectively, as it follows:

$$(\overline{L})\int_a^b f=\inf\left\{\int_a^b s: s\geq f \text{is a simple function}\right\}$$

and

$$(\underline{L})\int_a^b f=\sup\left\{\int_a^b r: r\leq f \text{is a simple function}\right\}.$$

If these two integrals are equal, then we say that f is Lebesgue integrable in $[a,b]$ and that common value is it known as the Lebesgue integral. It is denoted as:

$$(\mathcal{L})\int_a^b f.$$

We will see how the Lebesgue integral solves some of the deficiencies presented in the Riemann integral: the limitation related to interchange of limits or the "almost-equal" property and it shows a better behavior respect the Fundamental Theorem of Calculus.

3. The Henstock-Kurzweil integral

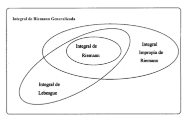
It is said that a function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is Henstock-Kurzweil integrable in $[a,b]$ if there exists a certain number $A\in\mathbb{R}$ so that, for each $\epsilon>0$, there is a gauge function $\delta:[a,b]\to(0,+\infty)$ such that for any labeled partition $P_e=(t_i,[x_{i-1},x_i])_{i=1}^n$ subordinated to δ in $[a,b]$:

$$\left|S(f,P_e)-A\right|<\epsilon.$$

If this number A exists, it is unique and is known as the Henstock-Kurzweil integral of the function f. It will be denoted as it follows:

$$A=(\mathcal{HK})\int_a^b f(t)\,dt.$$

The Henstock-Kurzweil integral is also known as the Generalized Riemann integral.
This kind of integral not only solve the three first big deficiencies presented by the Riemann integral (and which fixed the Lebesgue integral too) but it also sorts out the common limitation between the Riemann and Lebesgue integrals: we can study the property of being Henstock-Kurzweil integrable in non-bounded functions.



References

[1] WILMAN BRITO. *Las Integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil.* http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf

[2] RUSSELL A. GORDON. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, American Math. Soci.* Graduate Studies in Mathematics, Vol.4, 1994.