



**Sección de Matemáticas**  
Universidad de La Laguna

Ana Isabel Rodríguez Martín

# *Una Introducción Matemática a la Teoría del Sonido*

A Mathematical Introduction to Sound Theory

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Septiembre de 2019

DIRIGIDO POR  
*Ruymán Cruz Barroso*

*Ruymán Cruz Barroso*

*Departamento de Análisis*

*Matemático*

*Universidad de La Laguna*

*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## **Agradecimientos**

En primer lugar, agradecer a mi familia por el apoyo brindado a lo largo de estos años de carrera, sin ellos este trabajo no sería posible. En segundo lugar quiero agradecer al profesor José Carmelo González por la predisposición a colaborar en este trabajo y la facilitación de material, y en especial, al profesor José Claudio Sabina de Liz por la aportación de la información recogida en el anexo final, y su entera ayuda. Por último, no es de olvidar la gran labor que ha realizado mi tutor, Ruyman Cruz Barroso, en este trabajo. Siendo un completo reto desde el principio, su ayuda incondicional y atención han amenizado la realización del mismo, dando un enfoque claro, y sirviendo de aprendizaje. A todos ellos, muchísimas gracias.

Ana Isabel Rodríguez Martín  
La Laguna, 3 de septiembre de 2019



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*Una Introducción Matemática a la Teoría del Sonido es un trabajo que consta de dos partes y un anexo final. El eje central del trabajo es el estudio de la producción del sonido de las distintas familias organológicas, dejando a un margen (por limitaciones de espacio y tiempo) los instrumentos electrófonos que darían para todo un trabajo en sí. En el primer capítulo introducimos los aspectos básicos y necesarios para comprender los cálculos y resultados que llevan el análisis de las ecuaciones de ondas que se trabajarán en el Capítulo 2. En este capítulo introducimos brevemente la Teoría de Fourier, fundamental para el análisis de la ecuación de onda unidimensional que caracteriza a los instrumentos de cuerda y viento, y las funciones de Bessel, cruciales para las Secciones 2.3 y 2.4 que tratan las familias de membranófonos e idiófonos, respectivamente, centrandó nuestro estudio en el tambor, el xilófono y las campanas tubulares. Estas secciones (2.3 y 2.4) analizarán la ecuación de onda bidimensional de grado uno y cuatro, respectivamente. Bajo ciertas suposiciones, se obtienen una serie de condiciones que permiten realizar un análisis del movimiento y del desplazamiento de la onda, para terminar deduciendo los modos vibracionales que generarán el timbre de los correspondientes instrumentos. El anexo final recoge toda la información acerca de la deducción de la ecuación de onda en dimensiones uno, dos, y tres.*

**Palabras clave:** *Teoría del Sonido – Ecuación de onda – Series de Fourier – Funciones de Bessel – Autovalores – Autofunciones – Operador de Laplace.*

### ***Abstract***

---

*A Mathematical Introduction to Sound Theory is a work that contains two parts and a final annex. The central axis of the work is the study of the sound production of the different organological families, leaving to a margin (because of time and space reasons) the electrophones instruments that would give for a whole work in itself. In the first chapter, we introduce the basic and necessary aspects to understand the calculations and results that lead the analysis of the wave equations that will be considered in Chapter 2. In this chapter we introduce the Fourier Theory, that is fundamental for the analysis of the one-dimensional wave equation that characterizes string and wind instruments, and Bessel functions, that are crucial for the Sections 2.3 and 2.4 that treat the families of membranophones and idiophones, respectively, centering our study on the drum, the xylophone, and the tubular bells. These sections (2.3 and 2.4) will analyze the two-dimensional wave equation of degree one and four, respectively. Under different assumptions, a series of conditions that allow an analysis of the movement and the displacement of the wave are reached, to end deducing the vibrational modes that will generate the timbre of the corresponding instruments. The final annex gathers all the information about the deduction of the wave equation in dimensions one, two, and three.*

**Keywords:** *Sound Theory – Wave equation – Fourier series – Bessel functions – Eigenvalues – Eigenfunctions – Laplace operator.*

---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Preliminares</b> .....	1
1.1. Introducción .....	1
1.2. Ondas y armónicos .....	7
1.3. Algunas cuestiones básicas sobre series de Fourier .....	10
1.4. Algunas cuestiones básicas sobre funciones de Bessel .....	15
<b>2. Breve guía matemática para la orquesta</b> .....	19
2.1. Instrumentos de cuerdas .....	20
2.2. Instrumentos de viento .....	27
2.3. Instrumentos de percusión. Autovalores del operador Laplaciano .....	30
2.4. Xilófonos y campanas tubulares .....	35
<b>A. Apéndice: la ecuación de onda</b> .....	39
A.1. Ecuación de onda unidimensional .....	39
A.2. Ecuación de onda bidimensional .....	43
A.3. Ecuación de onda tridimensional .....	46
<b>Bibliografía</b> .....	49
<b>Poster</b> .....	51





---

## Introducción

Las matemáticas y la música son dos disciplinas que han estado íntimamente ligadas a lo largo de la historia. Si hacemos un pequeño repaso histórico podemos ver una evolución de esta relación en función a diversos factores y tendencias de la época. En la Antigua Grecia, los pocos testimonios y fuentes que nos han llegado hacen constar la existencia de patrones y símbolos que denotan estructuras rítmicas que dejan entrever un gusto por la simetría con patrones regulares que se van repitiendo y sucediendo. Con Pitágoras, y la importancia de la razón, surgen las primeras divisiones de la octava. La cuarta, la quinta y la octava son intervalos que se determinan mediante proporciones aritméticas (4:3, 3:2 y 2:1 respectivamente). Comienza a aparecer un concepto de consonancia y disonancia, es decir, qué se considera audible y qué no. Esto hace surgir las primeras escalas, o estructuras melódicas basadas en los sonidos e intervalos permitidos (consonantes). Este concepto continúa durante la Edad Media, sin grandes cambios, con mejoras de algunos instrumentos y aparición de otros nuevos. El Renacimiento es una etapa histórica bastante variada donde podemos apreciar dos tendencias. En la primera, la música ha de ser compuesta con una finalidad puramente afectiva, transmitir sensaciones y sentimientos, se rige por la emoción y no por la razón. En la segunda, con el desarrollo de la polifonía, predomina el gusto de racionalizar y geometrizar las cosas. Un claro ejemplo de esta segunda tendencia se ve en Italia, S.XV, con el movimiento *Ars Subtilior*.

Las composiciones se complican en el Barroco. La figura representativa por excelencia es Johann Sebastian Bach. Las nuevas composiciones (*fugas, invenciones, e incluso corales*) demuestran un alto grado de ingenio. Técnicas como el contrapunto imitativo invertible llevan la matemática a otro nivel. Pero sin duda, si hay que destacar una obra por el alto ingenio que conlleva es *la Ofrenda musical, BWV 1079*, una colección de cánones, fugas y otras piezas de música, a partir de un tema musical original del rey Federico II de Prusia (Federico el Grande) al que la obra fue dedicada. Algunos cánones de esta gran obra aparecían con una sola línea melódica

donde el intérprete debía buscar la solución para el canon. Destacamos la solución para el canon “cangrejo” en forma de banda de Moëbius (concepto definido por Möbius mucho después de que Bach compusiera la obra). La etapa clásica rompe con estos “rompecabezas” y busca naturalidad, simetría y sencillez en sus obras. Aunque abandona las formas rebuscadas como *la fuga*, sigue estando el detonante estrella de la simetría y la proporción que aportan equilibrio. A partir del Romanticismo nuevas formas se acontecen. El *Lied* cobra mayor importancia y la armonía se enriquece; destacamos a Béla Bartók por el desarrollo de la escala de los números primos. En el S. XX, con el auge de la investigación, de buscar la causa de las cosas y su origen, se comienzan a definir y esclarecer ciertos aspectos musicales como el sonido y sus cualidades surgiendo la *acústica* como rama encargada de su estudio. Es una etapa de vanguardias donde se busca la innovación del estilo compositivo mediante la ruptura de las formas y estructuras musicales vigentes, y la introducción de nuevos elementos (figuración, compases, ritmos, y efectos, entre otros) a las composiciones. Algunos compositores combinan elementos ya existentes de forma inusual, o incluso, hacen uso de complicadas teorías matemáticas y algoritmos en sus obras con el fin de marcar diferencias. Dos ejemplo claves son Ígor Stravinsky e Iannis Xenakis. El primero fue un compositor y director ruso que destacó por las diversas experimentaciones que realizó con las tonalidades, las métricas, las disonancias (realzamos el uso de la técnica del dodecafonismo de Arnold Schoenberg), y técnicas compositivas como el *ostinato*, entre otras. Entre sus obras, destacamos *La Consagración de la Primavera* pues, aunque en el estreno causó grandes disturbios en la audiencia y cierto rechazo, la textura con la que se construye la obra la convierte en punto de partida de la “*música contemporánea*” (S. XXI). El segundo, Iannis Xenakis, aplicó complicadas teorías sobre fractales y diversos algoritmos a sus composiciones. Quizás éste sea un lado más rebuscado de la relación de ambas disciplinas, menos natural y que tan solo es tangible y comprensible para algunos entendidos.

Podríamos continuar debatiendo, pero ahora cabría plantearnos: ¿podemos hablar de consonancia o disonancia sin sonido? ¿existirán escalas sin él?, ¿y la música? Varios estudios recientes (S.XX y XXI) han discutido acerca de estos temas. La *cimática* ha demostrado que es posible visualizar las ondas, y por tanto los sonidos. No obstante, el concepto de música tal cual lo entendemos, está vinculado no solo a una onda que se propaga por un medio elástico; va más allá de ello, considerándose el resultado de todo un proceso que lleva implícito una parte fisiológica, que será la que de la sensación sonora. Este es el planteamiento sobre el que gira el presente trabajo. Dejando de lado la parte fisiológica, nos adentramos en el análisis y estudio del elemento principal y fundamental de la música: *el sonido*, y más concretamente, en su agente productor, *las ondas*.

## Preliminares

### 1.1. Introducción

Tal y como se menciona en [1], la inmensa mayoría de los libros sobre *Ecuaciones en Derivadas Parciales* ponen de manifiesto que la *Ecuación de Onda en una dimensión espacial* describe las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda elástica. El desarrollo de esta ecuación en los textos suele invocar simplificaciones no rigurosamente justificadas, como la suposición de que el movimiento de cada partícula de la cuerda está confinado a un plano perpendicular a la línea que une los extremos de la cuerda. En [1] se prueba que las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una cuerda de cualquier material pueden ser obtenidas de manera simplificada a partir de principios fundamentales, mostrando que la formulación débil de tales ecuaciones puede obtenerse de manera rigurosa mediante un procedimiento más simple que evita tales suposiciones. Sin embargo, si algo queda verdaderamente claro en este artículo es que la deducción de la ecuación de onda no es en absoluto trivial, y requiere no solo de herramientas matemáticas sofisticadas sino también de un bagaje de conceptos y propiedades físicas cuyo desarrollo se sale, de manera obvia, de los objetivos de esta Memoria, dedicada a establecer una introducción matemática a la *Teoría del Sonido*. No obstante, creemos que la propia naturaleza de este trabajo justifica el incluir, al menos, algunas nociones básicas sobre la deducción de esta ecuación (en una, dos y tres dimensiones), que es considerada como uno de los tres ejemplos clásicos de las *Ecuaciones de la Física-Matemática*. Así, por ejemplo, en el caso bidimensional estaríamos considerando el obtener una ecuación que describa las vibraciones verticales de una membrana elástica sujeta a un bastidor  $\partial\Omega$  que es la frontera (regular, es decir, una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  con  $k \geq 1$ ) de un dominio  $\Omega$  del plano que inicialmente está en reposo bajo el efecto de una tensión constante  $T_0$ . De este modo, cada trozo de la membrana estará sometido a la acción de fuerzas exteriores al sistema (gravedad, fricción aerodinámica, ...) y a las fuerzas interiores debidas a la variación de la tensión por elasticidad del material.

Para facilitar la lectura de esta Memoria, dado que consideramos que la deducción de la ecuación de onda es de interés, pero no un objetivo principal de la misma, hemos optado por incluir estas breves ideas en el Apéndice, siguiendo fundamentalmente los apuntes redactados por el profesor J. Sabina de Lis (véase [17]). La literatura sobre la *ecuación de onda* es verdaderamente amplia; también se han consultado los textos [18, Capítulo 1] para el caso unidimensional y los apuntes [16, Capítulo 4].

Tal y como se ha indicado, el objetivo de este trabajo es el de presentar una introducción matemática a la *Teoría del Sonido*. El sonido es definido, según la Real Academia Española, como la sensación producida en el órgano del oído por el movimiento vibratorio de los cuerpos, transmitido por un medio elástico, como el aire. Desde un punto de vista físico, es el fenómeno vinculado a la difusión de una onda de características elásticas. Esta onda es ocasionada por la vibración de un cuerpo y puede ser o no audible. Ésto último hace referencia a que el oído humano generalmente responde a frecuencias que se encuentran entre los 20 y 20,000 Hz<sup>1</sup>, quedando fuera del rango audible el resto de frecuencias. Obviamente, la especie humana no es la única que tiene la capacidad de responder ante determinadas frecuencias. La Tabla 1.1 muestra, con carácter ilustrativo, el rango aproximado de frecuencias audibles para algunos seres vivos. Muchos de ellos captan y se guían por ondas sonoras que perciben y que no son audibles para el oído humano.

<b>Especie</b>	<b>Rango (medido en Hz)</b>
Tortuga	20 – 1,000
Rana	100 - 3,000
Conejo	300 - 45,000
Perro	50 - 46,000
Gato	30 - 50,000
Ratón	1,000 - 100,000
Murciélago	3,000 - 120,000
Delfín	1,000 - 130,000

**Tabla 1.1.** Rango de frecuencias audibles para algunas especies de animales.

Las ondas, que analizaremos con más detalle en la Subsección 1.2, son oscilaciones ondulatorias, que aparecen como oscilaciones temporales en un punto y que se propagan. Son alteraciones tensionales que se propagan a lo largo de un medio material, por lo que debemos tener en cuenta el medio de difusión de la misma, que para nosotros será un medio gaseoso (el aire), pero que también podría ser sólido

<sup>1</sup> Nombrado en honor al físico alemán *Heinrich Rudolf Hertz* (1857-1894), un *hercio* mide la cantidad de veces por segundo que se repite una onda (tanto sonora como electromagnética). La magnitud que mide el hercio es la *frecuencia* (inversa del *período*). Es por tanto la frecuencia de una oscilación que sufre una partícula en un período de un segundo.

o líquido. La medición de la longitud de onda se efectúa, generalmente, tomando dos puntos seguidos que presenten misma fase, entiéndase por esto dos máximos, dos mínimos, o bien dos puntos que crucen el cero, siempre que posean el mismo sentido.

Si una carga se mueve en un lugar, el campo eléctrico a una distancia  $x$  es proporcional a la aceleración y a un tiempo  $t$  anterior, es decir  $t - \frac{x}{c}$ , donde  $c \in \mathbb{R}$ . Dicho de otro modo, el campo eléctrico a un tiempo  $t$  posterior se desplazará la distancia  $ct$ . Matemáticamente, podemos decir que el campo eléctrico del que hablamos es función de  $x - ct$ . Este tipo de función representa la propagación de una onda y nos da una descripción de la misma, pudiendo resumir en  $f(x - ct) = f(x + \Delta x - c(t + \Delta t))$  donde  $\Delta x = c \cdot \Delta t$ . En este caso estamos considerando que la fuente está a la izquierda y se propaga a la derecha. Cabe la otra posibilidad: que la fuente esté a la derecha propagándose la onda hacia la izquierda, por lo que la onda quedaría descrita por una nueva función  $g(x + ct)$ . Así, si existiera más de una onda en el espacio al mismo tiempo, el campo eléctrico sería la suma de los dos campos anteriores, cada uno propagándose de manera independiente, dando lugar a la onda  $f(x - ct) + g(x + ct)$ . Este comportamiento de los campos eléctricos proviene del principio de superposición de D. Bernoulli, quién, en un principio no pudo justificarlo matemáticamente, provocándole por ello duras críticas por parte de L. Euler y D'Alembert. Ambos se dieron cuenta que si fuera cierto, daría la posibilidad de expresar cualquier función en términos de una serie infinita de senos y cosenos. La propagación del sonido, que se efectúa entre la fuente y el receptor, es una consecuencia de la mecánica, y por ello se comprende según las leyes de Newton.

El sentido del oído tiene la peculiaridad de poder diferenciar dos sonidos distintos e identificarlos en función a particularidades existentes entre ambos. Estas características particulares son denominadas **cualidades del sonido** y en toda sensación sonora existen cuatro (véase por ejemplo, [9]):

1. **Intensidad o amplitud:** mide el tamaño de la vibración y depende de la fuerza con que son producidas. Las variaciones en intensidad han dado lugar en la música a la aparición de matices, creando con ello una enorme riqueza emotiva. La intensidad, que se percibe como ruidosidad, se mide en *decibelios* (dB)<sup>2</sup>.
2. **Tono:** es la mayor o menor altura de los sonidos comparados entre sí. El tono de los sonidos depende del número de vibraciones o ciclos por segundo producidas

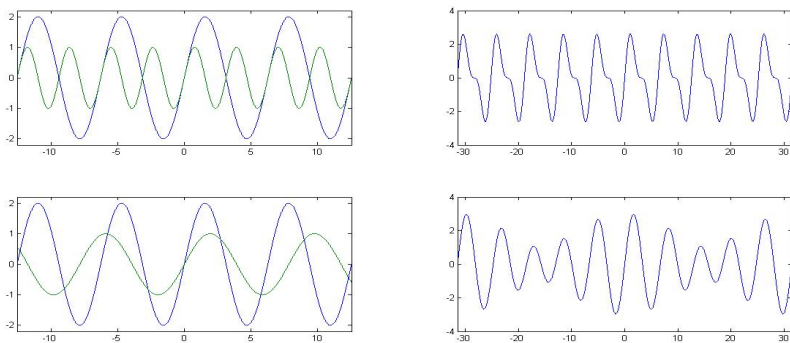
---

<sup>2</sup> Nombrado en honor al científico *Alexander Graham Bell* (1847-1922), es la unidad que se utiliza para expresar la relación entre dos valores de presión sonora (la unidad es realmente el *Belio*, pero dada la amplitud de los campos que se miden en la práctica, se utiliza un submúltiplo de éste). Se trata de una expresión logarítmica adimensional. El valor de la magnitud de referencia es cero belios, y así, un belio, que equivale a 10 decibelios, representa un aumento de potencia de 10 veces sobre esta magnitud de referencia. Así por ejemplo, un objeto que emita un ruido de *80db* será 10 veces más ruidoso que uno que emita uno de *70db* y 100 veces más que uno de *60db*.

(frecuencia de la vibración, medida en Hz). Cuanto mayor (menor, resp.) sea el número de vibraciones por segundo, más agudo (grave, resp.) será el sonido.

3. **Timbre:** se corresponde con la forma del espectro de frecuencia del sonido, algo que analizaremos con detalle en el Capítulo 2. Es la forma vibratoria de la onda sonora y se manifiesta como la *calidad del sonido*. Gracias al timbre es posible distinguir un instrumento de otro, aún habiendo varios sonando a la vez en el mismo tono y altura.
4. **Duración:** hace referencia a la longitud del tiempo por el cual la nota suena.

Para poder comentar la estructura de esta Memoria nos vamos a centrar en dos grandes cuestiones relacionadas con la *Teoría del Sonido*. Para abordar la primera de ellas, planteamos las siguientes cuestiones: ¿Qué hace que un intervalo, como por ejemplo una octava o una quinta perfecta, sea más consonante que otro? ¿Se trata de una cuestión cultural, o es inherente en la naturaleza de las cosas? La respuesta a esta cuestión no es obvia, y la literatura al respecto está llena de conceptos erróneos. Una explicación atractiva y popular, pero incorrecta, se debe a Galileo Galilei, y tiene que ver con periodicidad. El argumento se basa en que si dibujamos dos ondas sinusoidales que difieren de un intervalo de una octava, una de ellas tendrá exactamente el doble de frecuencia que la otra, y por tanto, su suma seguirá teniendo un patrón regular. En cambio, un ratio de frecuencias ligeramente diferente producirá que la suma tenga un patrón más cambiante (véase por ejemplo la Figura 1.1).



**Figura 1.1.** La gráfica superior izquierda representa dos ondas sinusoidales, una de ellas con frecuencia el doble de la otra. A la derecha se representa la suma de ambas, puede apreciarse el patrón periódico resultante. En la figura inferior izquierda se representan dos ondas sinusoidales con un ratio de frecuencias igual a 0,8. A la derecha representamos la suma de ambas, pudiendo observar un patrón más irregular. Los gráficos se han realizado empleando software Matlab.

Desafortunadamente, esta explicación no es correcta. El oído no detecta realmente nada en especial ante un par de ondas sinusoidales que difieran de una octava. Dos ondas que no difieran de una octava no tienen por qué sonar “desagradables”, como sería el caso, por ejemplo, de un par de ondas cuyas frecuencias difieran mínimamente. Además, es posible sintetizar musicalmente dos tonos que difieran de una octava y suenen “desagradables” y otros dos tonos que no difieran de una octava y suenen “placenteros”.

El orgien de la consonancia de una octava resulta estar en el instrumento que tocamos. Los instrumentos de cuerda y viento producen sonidos que consisten exactamente en múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. Si nuestros instrumentos no tuvieran esta propiedad, nuestra escala musical no sería apropiada (como ocurre, por ejemplo, con la instrumentación indonesia). Los instrumentos de percusión de la orquesta tampoco producen sonidos que consisten exactamente en múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. Analizaremos detalladamente estas cuestiones en el Capítulo 2.

Para abordar la segunda de las cuestiones nos planteamos las siguientes preguntas: ¿Qué tienen de especial las ondas sinusoidales, que hacen que las consideremos como el “sonido puro” de una frecuencia dada? ¿podríamos considerar otro tipo de funciones periódicas y definir las como el “sonido puro” de una frecuencia dada?

La respuesta a esta cuestión radica realmente en cómo funciona el oído humano. Primero, decir que la propiedad matemática que hace que una onda pura sinusoidal sea relevante es que es la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden correspondiente al *movimiento armónico simple*. Cualquier objeto sujeto a una fuerza de retorno proporcional a su desplazamiento desde una ubicación determinada vibra como una onda sinusoidal cuya frecuencia queda determinada por la constante de proporcionalidad. La membrana basilar dentro de la cóclea (caracol) en el oído es elástica, por lo que cualquier punto dado puede describirse por esta ecuación diferencial de segundo orden, con una constante de proporcionalidad que depende de la localización a lo largo de la membrana. El resultado es que el oído actúa como un analizador armónico, y si un determinado sonido puede representarse como suma de ciertas ondas sinusoidales, entonces los correspondientes puntos de la membrana basilar vibrarán, y esto será trasladado a estímulos que se envían al cerebro.

Resulta por tanto vital plantearse hasta qué punto se puede descomponer un sonido en ondas sinusoidales. Dicho de otro modo, ¿cómo es posible que una cuerda pueda vibrar con diferentes frecuencias a la vez? La herramienta matemática que está detrás de todo esto es el *Análisis de Fourier*<sup>3</sup>, y la versión de esta Teoría en la

<sup>3</sup> Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor.

que sonidos periódicos pueden descomponerse como sumas de múltiplos enteros de una frecuencia dada es la *Teoría de las Series de Fourier* (véase por ejemplo, [15]).<sup>4</sup>

Esta segunda cuestión será abordada en la siguiente subsección de este capítulo, donde consideraremos *ondas y armónicos*, mientras que en la Subsección 1.3 desarrollaremos, sin entrar en mucha profundidad por limitaciones obvias de espacio, las propiedades esenciales sobre series de Fourier que nos serán de utilidad para poder desarrollar una parte del Capítulo 2. Como comentamos anteriormente, los instrumentos de percusión no producen sonidos que consisten exactamente en múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. Para poder analizarlos será necesario abordar algunos aspectos básicos sobre la *Teoría de Funciones de Bessel* en la Subsección 1.4. Esto se hará de nuevo de manera breve, comentando únicamente aquellas ideas que necesitemos saber para poder abordar los contenidos del Capítulo 2.

Debemos mencionar finalmente que, por razones de tiempo y limitaciones de espacio, no hemos podido abordar en esta Memoria algunos otros objetivos iniciales que relacionan las Matemáticas con la Teoría del Sonido. Así por ejemplo, cabría desarrollar una teoría matemática sobre aspectos tan básicos en música como son la *consonancia*, la *disonancia*, las *escalas* y los *temperamentos* (o *afinaciones*), de manera que se puedan abordar matemáticamente cuestiones tan fundamentales como: ¿por qué la escala moderna consiste en doce notas equiespaciadas en cada octava? ¿de dónde proviene el número 12? ¿ha sido siempre así? ¿qué otros tipos de escalas hay? Un estudio profundo de estas cuestiones requeriría el uso de técnicas matemáticas vinculadas con las *Fracciones Continuas*, un concepto matemático que mantiene relaciones con la *Teoría de Polinomios Ortogonales* y la *Teoría de Números*, dado que permite, entre otras cosas, obtener aproximaciones a números irracionales (véase [2, Capítulo 6] y [7]). Del mismo modo, podríamos haber establecido algunas pinceladas sobre *Música Digital*, sobre cómo sucesiones de ceros y unos permiten representar música, la relación con la *z-transformada*, el procesamiento de señales digitales y el uso de sintetizadores. Aquí, la mayoría de los sonidos interesantes no tienen un espectro de frecuencias estático, y se hace necesario entender la evolución del espectro con el tiempo.

---

<sup>4</sup> Una descomposición más general, posiblemente para sonidos no periódicos, daría lugar a un espectro de frecuencias continuo que nos obligaría a considerar la *Teoría de integrales de Fourier*. De este modo, para poder acomodar el espectro discreto dentro de la Teoría de integrales de Fourier necesitaríamos hablar de *distribuciones*, en vez de funciones, permitiendo que el espectro de frecuencias de un sonido pueda tener una cantidad positiva de energía concentrada en una frecuencia simple. Este estudio se sale, por limitaciones de espacio, de los objetivos de esta Memoria.



## 1.2. Ondas y armónicos

Para poder entender la música es necesario entender la naturaleza del sonido y cómo lo percibimos. El sonido consiste en vibraciones del aire, por lo que primero debemos tener una idea de cómo es el aire: un gas cuyos átomos y moléculas no están tan próximos entre sí (en comparación con los medios sólido y líquido) y que no caen al suelo por el efecto de la gravedad debido a que éstos viajan a una velocidad extremadamente rápida ( $\approx 500 \text{ m/s}$ ), recorriendo  $\approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  antes de colisionar con otros átomos o moléculas. Estas colisiones son perfectamente elásticas, lo que hace que estos átomos y moléculas no caigan prácticamente nada antes de que sean rebotados nuevamente. El aire está formado, por lo tanto, por una gran cantidad de moléculas que se encuentran cerca, rebotando continuamente entre sí para producir lo que se percibe como presión de aire. Cuando un objeto vibra, causa ondas de aumento y disminución de la presión en el aire, que son percibidas por el oído humano como sonido en la membrana basilar situada en la cóclea (tímpano), tal y como ya se comentó (para más detalles, véase [2, Sección 1.2] y [11, 14]). El sonido viaja a  $\approx 340 \text{ m/s}$ ; esto no significa que cualquier molécula del aire se mueva en dirección de la onda a esta velocidad, sino que la perturbación local a la presión se propaga a esta velocidad (pensemos por ejemplo en una partícula en la superficie del mar cuando una ola se mueve hacia ella; la partícula no se mueve a lo largo de la ola sino que la perturbación en la superficie se propaga).

En la subsección anterior hemos motivado cuál es la relevancia de las ondas sinusoidales en la discusión de la percepción de un tono. ¿Se podría realizar lo mismo usando alguna otra familia de ondas periódicas que crezcan y decrezcan de manera similar? La respuesta a esta cuestión está en la ecuación diferencial del *movimiento armónico simple*. Si consideramos una partícula de masa  $m$  sujeta a una fuerza  $F$  hacia la posición de equilibrio  $y = 0$ , y cuya magnitud sea proporcional a la distancia “ $y$ ” de la posición de equilibrio,  $F = -\kappa \cdot y$ , se sigue de la ley de Newton del movimiento  $F = ma$ , con  $a = \frac{d^2y}{dt^2}$  la aceleración, que  $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\kappa}{m}y = 0$ , cuyas soluciones vienen dadas por

$$y(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} t\right), \quad A, B \text{ constantes.} \quad (1.1)$$

Esto explica el por qué las ondas sinusoidales son las base del análisis armónico para ondas periódicas: son las soluciones de una aproximación de la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de cualquier punto particular en la membrana basilar en la cóclea, y por tanto gobierna la percepción humana del sonido. Hablamos de una “aproximación” de la ecuación diferencial por dos razones, fundamentalmente. La primera es porque deberíamos pensar realmente en un movimiento *oscilador armónico forzado amortiguado*, en el cual existe un término amortiguador proporcional a la velocidad, que proviene de la viscosidad del fluido y del hecho de que la membrana no es perfectamente elástica. Por tanto, la solución será de nuevo sinusoidal pero contendrá una componente transitoria de rápido decaimiento. En efecto,

la ecuación diferencial para este movimiento se obtiene cuando, además de la fuerza restauradora  $F$ , incluimos una fuerza de fricción proporcional a la velocidad, es decir,  $F = -\kappa y - \mu v$ , con  $v = \frac{dy}{dt}$  la velocidad. El resultado es pues  $m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + \kappa y = 0$ , cuyas soluciones vienen dadas, introduciendo el discriminante  $\Delta = \mu^2 - 4m\kappa$ , por ( $A$  y  $B$  constantes):

- Si  $\Delta > 0$ :  $y(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t}$  con  $\alpha_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$  (movimiento *sobreamortiguado*).
- Si  $\Delta < 0$ :  $y(t) = e^{-\frac{\mu}{2m} t} \left[ A \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m} t\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m} t\right) \right]$ . En este caso, el movimiento no está sobreamortiguado, y se trata del movimiento armónico con el factor de amortiguamiento  $e^{-\frac{\mu}{2m} t}$ .
- Si  $\Delta = 0$ :  $y(t) = (At + B)e^{-\frac{\mu}{2m} t}$ , se trata de un caso de *amortiguamiento crítico* que se asemeja al caso  $\Delta > 0$ .

Podría darse, además, un *movimiento armónico forzado*, donde el término forzado  $f$  (periódico) de como resultado una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes no homogénea,  $m \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} + \kappa y = f(t)$ , que representa un sistema amortiguado al que se le aplica el estímulo externo  $f$ . Este movimiento es el responsable de la producción del sonido en la mayoría de los instrumentos musicales, así como de la percepción del sonido en la cóclea, y es lo que da lugar al fenómeno de la *resonancia*. La segunda razón es porque, para sonidos suficientemente ruidosos, la fuerza restauradora podría no ser lineal, lo que podemos interpretar como el posible origen de algún fenómeno acústico.

La mayoría de las notas musicales no consisten en una simple onda sinusoidal. Por ejemplo, si se tira de una cuerda resultará una onda periódica que es suma de varias ondas sinusoidales con diferentes amplitudes, por lo que habrán diferentes picos de amplitud de vibración en la membrana basilar, y la señal que se envíe al cerebro será más compleja. La descomposición de una onda periódica como suma de ondas sinusoidales será estudiado precisamente en la Subsección 1.3.

A modo de motivación, supongamos que la cuerda se encuentra anclada en sus extremos, y que posee una masa justo a la mitad mucho mayor que la propia masa de la cuerda. La cuerda ejerce una fuerza  $F$  en la masa hacia la posición de equilibrio cuya magnitud, al menos para pequeños desplazamientos, es proporcional a la distancia “ $y$ ” de la posición de equilibrio. Las constantes  $A$  y  $B$  del movimiento resultante se obtienen de (1.1) imponiendo la posición y la velocidad inicial de la masa. Ahora bien, si la masa se distribuye uniformemente, entonces más “modos” vibratorios son posibles. Este es el caso, por ejemplo, si el punto medio de la cuerda permanece estacionario mientras que las otras dos mitades vibran en fases opuestas (como puede ser el caso, por ejemplo, cuando se puntea la cuerda de una guitarra en el punto medio y automáticamente se libera). El efecto que se produce es un sonido que está a exactamente una octava superior del tono natural de la cuerda, o lo que es lo mismo, un sonido con exactamente el doble de frecuencia. En este caso, si cada mitad vibra con una onda sinusoidal pura, entonces cual-

quier punto que no sea el punto medio tendrá un movimiento que viene descrito por  $y(t) = A \cos(2\sqrt{\kappa/m}t) + B \sin(2\sqrt{\kappa/m}t)$ . Por el mismo razonamiento, si la cuerda de la guitarra se puntea en dos puntos situados a  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3}$  de la longitud de la cuerda, entonces el sonido resultante se corresponderá exactamente con una octava mas una quinta perfecta sobre el tono natural de la cuerda, y si las tres partes de la cuerda vibran de nuevo con una onda sinusoidal pura, con la parte del medio en fase opuesta a las otras dos, entonces el movimiento de un punto no estacionario en la cuerda vendrá descrito por  $y(t) = A \cos(3\sqrt{\kappa/m}t) + B \sin(3\sqrt{\kappa/m}t)$ . Y así sucesivamente. Cuando una cuerda es punteada, o golpeada, vibrará según una mezcla de todos los “modos” descritos como múltiplos de la frecuencia natural, con varias amplitudes, que dependerán de la manera exacta en la que la cuerda es punteada o golpeada, dando por tanto a un movimiento descrito por

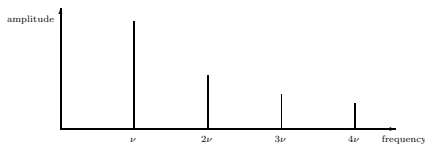
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(n\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B_n \sin\left(n\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) \right], \quad A_n, B_n \text{ constantes, } \forall n \geq 1. \tag{1.2}$$

Finalizamos esta subsección con algunas últimas definiciones básicas. En una onda sinusoidal de la forma  $\varphi(t) = c \sin(2\pi\nu t + \phi)$ , la *frecuencia* será  $\nu$  (medida en Hz), la *amplitud* (o *pico*) será  $c$ , el ángulo *fase*,  $\phi$  y la *velocidad angular*,  $2\pi\nu$ .

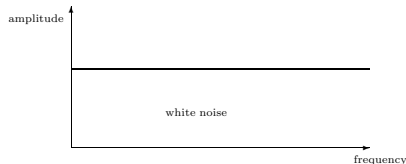
Así por ejemplo, cuando el primer violinista de una orquesta interpreta la nota *la*, justo debajo del *do* central, para que los músicos procedan a la correcta afinación de sus instrumentos antes de la interpretación de una obra, estará interpretando una onda sinusoidal de frecuencia 440 Hz que tendrá la forma  $\varphi(t) = c \sin(880\pi t + \phi)$ , siendo  $c$  y  $\phi$  dos ciertas constantes.



Una noción intuitiva del concepto de *espectro* de un sonido es un grafo que indica las amplitudes de las diferentes frecuencias en un sonido. El gráfico superior a la derecha muestra, a modo de ejemplo, el espectro de una cuerda vibrante con frecuencia fundamental  $\nu = \sqrt{\kappa/m}/2\pi$ . El gráfico muestra un sonido con un espectro discreto de frecuencias que son múltiplos naturales de una frecuencia fundamental y cuyas amplitudes tienden a cero a medida que las frecuencias aumentan.



Algunos sonidos, como por ejemplo el *ruido blanco*, tienen espectro de frecuencias continuo. El diagrama en este caso se correspondería con el gráfico inferior a la derecha. Para poder dar explicación a esta situación sería necesario considerar la *transformada integral de Fourier y distribuciones*, en vez de funciones.



Veamos intuitivamente la razón del por qué dos sonidos que se encuentran a un intervalo muy próximo entre sí pueden sonar “no placenteros”. Supongamos que tocamos en un piano una de las tres cuerdas correspondientes a la nota *la* anterior, y que al mismo instante tocamos otra de las dos cuerdas pero que se encuentra desafinada, digamos con una frecuencia de  $436 \text{ Hz}$ . La cuerda restante está amortiguada, por lo que no interfiere en ambos tonos. Si ignorásemos por el momento la intensidad  $c$  y la fase  $\phi$ , esas dos cuerdas juntas sonarían como  $\sin(880\pi t) + \sin(872\pi t) = 2\sin(876\pi t)\cos(4\pi t)$ . Esto significa que, como parece razonable pensar, el efecto combinado que percibimos es una onda sinusoidal con frecuencia  $438 \text{ Hz}$ , la media de las frecuencias de las dos cuerdas y con doble amplitud. Sin embargo, tal onda estará modulada por una onda coseno “lenta”, con frecuencia  $2 \text{ Hz}$ . Esta modulación la percibimos como un “golpeo”, que tiene dos “picos” por ciclo, es decir, cuatro por segundo. Así, el afinador de piano sintoniza la segunda cuerda con la primera sintonizando los tiempos, es decir, ajustando la cuerda para que los tiempos se desaceleren hasta detenerse. Si incluimos una amplitud  $c$  común (las dos cuerdas se pulsan con la misma fuerza) y dos fases  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  correspondientes a las cuerdas, entonces obtenemos

$$c \sin(880\pi t + \phi) + c \sin(872\pi t + \tilde{\phi}) = 2c \sin\left(876\pi t + \frac{\phi + \tilde{\phi}}{2}\right) \cos\left(4\pi t + \frac{\phi - \tilde{\phi}}{2}\right),$$

que nos sirve para poder relacionar la fase de los “golpeos” con las fases de las ondas sinusoidales iniciales. Finalmente, si las amplitudes son diferentes, entonces los “golpeos” no estarán tan pronunciados porque, en cierto modo, una parte de la nota que más suena es “sobrante” previniendo que la amplitud se vaya a cero cuando el coseno modular tome el valor cero.

### 1.3. Algunas cuestiones básicas sobre series de Fourier

En esta subsección abordaremos muy brevemente algunas cuestiones básicas sobre el *Análisis Armónico de Fourier*, cuya importancia es vital dentro de la *Acústica*<sup>5</sup>. Pretendemos contribuir en la respuesta a la siguiente cuestión que ocupó las mentes de grandes músicos y matemáticos durante aproximadamente un siglo: ¿cómo puede una cuerda vibrar con varias frecuencias diferentes al mismo tiempo?

El Análisis Armónico es una de las ramas del Análisis Matemático de mayor tradición y con mayor impacto en otras disciplinas. Su origen histórico está bien determinado en la obra de J.B. Fourier sobre la transmisión del calor en cuerpos sólidos y que, para los matemáticos de su época, supuso una verdadera tesis ya que las

<sup>5</sup> Rama de la física encargada de estudiar la generación, la propagación, el almacenamiento y la recepción de un sonido, un ultrasonido o un infrasonido. Es por ello, que la Teoría de Fourier cobra especial importancia dentro de este campo pues aporta una descripción más detallada de las componentes de un sonido.

ideas que allí comparecían parecían en principio que respondían a las necesidades del problema, pero los argumentos matemáticos que utilizaba no estaban del todo pulidos. La gran aportación de Fourier no fue la prueba de tales resultados sino la gran intuición que tuvo en vislumbrar que la solución iba por ese camino, aunque no tuviese en su mano todos los argumentos que la apoyasen. El estudio de las *Series de Fourier* sirve para la resolución de *Ecuaciones en Derivadas Parciales clásicas de la Física-Matemática* pero, con el paso del tiempo, su impacto en campos como la óptica, la termodinámica y la electricidad, entre otros, la han configurado como un tema de entidad suficiente como para ser el tema central del estudio de numerosos libros y artículos especializados. Veamos brevemente la idea elemental de la obra de Fourier en relación a la aproximación de funciones integrables por medio de funciones trigonométricas, liberando así a las funciones aproximantes de las exigencias de derivabilidad que tiene la fórmula de Taylor.

Supongamos que la serie funcional  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  converge, y sea  $f$  la función suma (serie trigonométrica), que es, por definición,  $2\pi$ -periódica. Planteemos el problema inverso: dada  $f$  función  $2\pi$ -periódica, ¿en qué condiciones se puede hallar una serie trigonométrica que converja a ella? Comenzamos con la siguiente

**Definición 1.1.** Se llama serie de Fourier de una función  $f$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  a la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \tag{1.3}$$

A los coeficientes  $a_0, a_n, b_n, n \geq 1$ , se les llama coeficientes de Fourier de  $f$ .

Las siguientes relaciones pueden probarse fácilmente por integración directa, para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

De aquí se sigue por tanto que si multiplicamos en (1.3) por  $\{1\}$ ,  $\{\cos(nx)\}$  ó  $\{\sin(nx)\}$ , tomamos integral y admitimos por un momento que los símbolos de integral y de suma infinita pueden intercambiarse, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi & \Rightarrow & a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi \cdot a_n & \Rightarrow & a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \cdot b_n & \Rightarrow & b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Las propiedades (1.4) pueden resumirse en que el sistema

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots\}$$

es un *sistema ortogonal de funciones* con respecto al *producto escalar (real)*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2([-\pi, \pi]) = \left\{ f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

ya la serie de Fourier de  $f$  no es más que la expresión del vector  $f$  como combinación lineal de los elementos de esa base, que al ser ortogonal, proporciona unas expresiones elementales para el cálculo de los coeficientes de Fourier.

En la práctica no siempre encontramos un período de  $2\pi$  segundos. Realmente, el hecho de que trabajemos con una función  $2\pi$ -periódica no supone pérdida de generalidad alguna. En efecto, si la función  $f$  fuera  $2L$ -periódica (es decir, que su frecuencia, o ciclos por segundo, es de  $\nu = (2T)^{-1}$  Hz), tomando por ejemplo el intervalo  $[-L, L]$  se sigue mediante un simple cambio de variable que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Además, de las expresiones (1.5) para el cálculo de los coeficientes de Fourier, se sigue trivialmente que si  $f$ , definida en  $[-\pi, \pi]$ , es una función par entonces su desarrollo de Fourier será un desarrollo sólo en cosenos (es decir,  $b_n = 0$  para todo  $n$ , y  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ ) mientras que si es impar, su desarrollo de Fourier será un desarrollo sólo en senos (en este caso,  $a_n = 0$  para todo  $n$ , y  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ ).

Por otro lado, si la función  $f$  estuviera definida en  $[0, L]$ , si consideramos las extensiones par ( $F$ ) e impar ( $G$ ) de  $f$  en  $[-L, L]$ , según

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ f(-x), & -L \leq x < 0, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ -f(-x), & -L < x < 0, \\ 0, & x = 0, \pm L, \end{cases}$$

los desarrollos de Fourier de  $F$  y  $G$  nos permitirían obtener el *desarrollo de Fourier en senos y cosenos* de la función original  $f$ , definida en  $[0, L]$ :

- Serie de cosenos:  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  con  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ ;
- Serie de senos:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  con  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ .

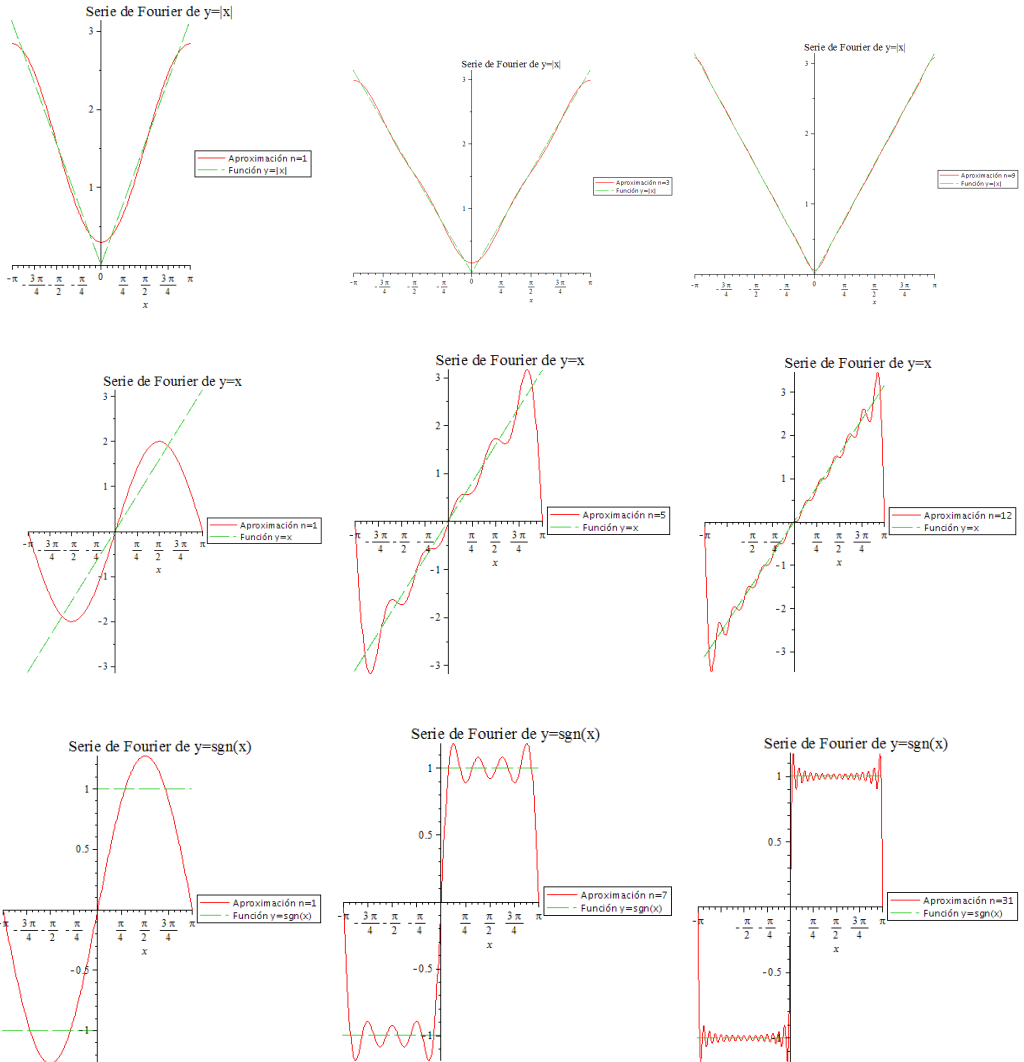
*Ejemplo 1.2.* Con carácter ilustrativo mostramos a continuación los desarrollos de Fourier de tres funciones particulares definidas en  $[-\pi, \pi]$ :

1.  $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$ .

2.  $x = 2 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$ .

3. Si  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$ , entonces  $f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$ .

En el siguiente gráfico se representan, empleando software Matlab, estas tres funciones junto con algunas truncaciones de los desarrollos de Fourier obtenidos:



Para poder llevar a cabo el análisis anterior fue necesario admitir por un momento que era posible permutar los signos integral y suma infinita para la obtención

de (1.5). Nos centramos a continuación en la cuestión vital del *Análisis Armónico* que consiste en conocer qué tipo de funciones admiten un desarrollo de Fourier. Más concretamente, nos planteamos las siguientes dos cuestiones:

- ¿Qué debe cumplir la función periódica  $f$  para que su serie de Fourier sea convergente?
- Si converge, ¿lo hace a la función  $f$ ?

Un ejemplo elemental es que  $f$  y  $\tilde{f}$  son dos funciones periódicas que difieren en un número finito de puntos, o en un conjunto de medida cero, entonces sus coeficientes de Fourier serán idénticos.

Una pregunta fundamental sobre series de Fourier, formulada a principios del siglo XIX por el propio Fourier, es si la serie de Fourier de una función continua periódica converge puntualmente a la propia función. Si se refuerza la hipótesis de continuidad se puede probar la convergencia de la serie de Fourier en casi todo punto. Así por ejemplo, si la función es de variación acotada, entonces su serie de Fourier converge en todo punto a la media local de la función. Si la función es continuamente diferenciable, Dirichlet probó que su serie de Fourier converge a la misma en todo punto.

**Teorema 1.3 (Convergencia puntual de series de Fourier).** *Si  $f$  y  $f'$  son continuas y acotadas a trozos en  $[-L, L]$ , entonces  $\forall x \in (-L, L)$  se verifica:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

Para  $x = \pm L$  la serie de Fourier converge a  $\frac{1}{2} [f(-L^+) + f(L^-)]$ .

**Teorema 1.4 (Convergencia uniforme de series de Fourier).** *Sea  $f$  continua en  $\mathbb{R}$  y periódica con periodo  $2L$ . Si  $f'$  es continua a trozos en  $[-L, L]$ , entonces la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$  en  $[-L, L]$ .*

Otra forma para obtener convergencia en todas partes es cambiar el método de la suma. Por ejemplo, el *Teorema de Fejèr* demuestra que si se reemplaza la suma ordinaria por la *sumación de Cesàro*, entonces la serie de Fourier de cualquier función continua converge uniformemente a la función. En este sentido, diremos que una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es sumable Cesàro, con suma  $\alpha$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} = \alpha$ , siendo  $s_k = \sum_{l=1}^k a_l$ . Se puede probar además que la serie de Fourier de cualquier función de  $L^2([-\pi, \pi])$  converge a ella misma en la norma  $L^2$ .

Tras la demostración de Dirichlet, numerosos matemáticos (el propio Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Dedekind, ...) intentaron probar la convergencia de la serie de Fourier para cualquier función periódica continua. El resultado fue refutado por el matemático Paul du Bois-Reymond, al construir en 1876 una función continua



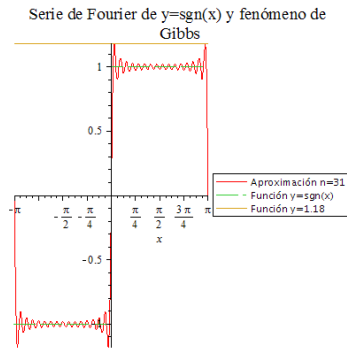
y periódica cuya serie de Fourier diverge en un punto.

El problema de la convergencia en casi todo punto de las series de Fourier para funciones en  $L^2([-\pi, \pi])$  era conocido como la *conjetura de Luzin* (hasta su demostración por Carleson en 1966). Kolmogorov probó en 1923 que el análogo en  $L^1([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty\}$  es falso, encontrando una función cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto, y mejorando el resultado tres años más tarde, probando la divergencia en todo punto. La convergencia de la serie de Fourier en casi todo punto para funciones en

$$L^p([-\pi, \pi]) = \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad \text{con } p > 1$$

fue probado por Carleson en 1966 en una demostración excepcionalmente difícil.

Para finalizar esta subsección comentamos un fenómeno interesante, que puede apreciarse en las gráficas mostradas en el Ejemplo 1.2, y es que en los puntos de discontinuidad de  $f$ , como la convergencia de la serie es al valor promedio del salto, la serie va a ver reflejada en algún sentido esta presencia de discontinuidad. En efecto, si  $x_0$  es un punto de discontinuidad, entonces las sumas parciales de Fourier de  $f$  alcanzarán, en puntos de continuidad próximos a  $x_0$ , el valor  $f(x_0) \pm 0.09|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$ . Es decir, las sumas parciales difieren de la función en las proximidades de  $x_0$  un 9% de la amplitud del salto de  $f$  en  $x_0$ . Este resultado se conoce como **fenómeno de Gibbs**, y para la tercera función considerada en el Ejemplo 1.2 puede apreciarse en el gráfico de la derecha.



Podemos resumir diciendo que toda función periódica de período  $T$  que cumpla ciertas condiciones puede construirse a partir de una suma de sinusoides cuyas frecuencias formen una serie armónica fundamental,  $\nu = 1/T$ . Cada senoide debe poseer la adecuada amplitud y fase, que se determina a partir de la función periódica a estudiar. La disposición de las amplitudes, frecuencias y fases de las sinusoides involucradas en la suma es lo que se conoce como *espectro de Fourier*.

### 1.4. Algunas cuestiones básicas sobre funciones de Bessel

Una de las ecuaciones de mayor interés en el campo de la ingeniería y de la matemática aplicada es la ecuación diferencial de Bessel. Su expresión general viene dada por

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0 \tag{1.6}$$

con  $p$  un número real no negativo. Esta ecuación es denominada *ecuación de Bessel de orden  $p$* .

Como sabemos, en una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables de la forma  $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ , escrita de la forma  $y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$ , se dice que  $x_0$  es un *punto ordinario* si  $P_1, P_2$  son analíticos en ese punto, y *singular* en caso contrario. Si  $x_0$  es un punto singular, pero las funciones

$$g_1(x) = (x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad \text{y} \quad g_2(x) = (x - x_0)^2 \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

son ambas analíticas en  $x_0$ , se dice que  $x_0$  es un punto *singular regular*. En este caso, la ecuación diferencial tiene al menos una solución expresable en la forma

$$y(x) = (x - x_0)^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

siendo  $r \in \mathbb{R}$  y  $a_0 \neq 0$  (método de Frobenius). De la ecuación (1.6) observamos que  $x = 0$  es un punto singular regular por lo que es posible aplicar este método.

Supongamos que una solución viene dada por la serie  $y(x) = x^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Derivando y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

por lo que igualando los coeficientes de las distintas potencias de  $x$  a cero, resulta:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } x^r &: a_0[r(r-1) + r - p^2] = 0 \Rightarrow a_0[r^2 - p^2] = 0 \\ \text{Coeficiente de } x^{r+1} &: a_1[(r+1)r + (r+1) - p^2] = 0 \Rightarrow a_1[(r+1)^2 - p^2] = 0 \\ &\vdots \\ \text{Coeficiente de } x^{r+n} &: a_n[(r+n)^2 - p^2] + a_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

De la primera relación, si suponemos que  $a_0 \neq 0$ , se obtiene la ecuación indicial  $r^2 - p^2 = 0$  con raíces  $r = \pm p$ . De la segunda, resulta que  $a_1 = 0$ , y del coeficiente de  $x^{r+n}$  la siguiente fórmula de recurrencia:

$$a_n = -\frac{1}{(r+n)^2 - p^2} a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

De aquí se deduce que todos los términos impares se anulan. En cuanto a los términos pares, veamos por separado cada raíz indicial.

- Si  $r = p$ , los coeficientes de subíndice par,  $a_{2n}$ , que verifican la ley de recurrencia son

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n!(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación será

$$y_1(x) = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}.$$

Dando a  $a_0$  el valor particular  $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ , donde  $\Gamma$  es la función gamma de Euler, resulta la solución particular

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n! \Gamma(n+p+1)}.$$

Esta solución se denota por  $J_p(x)$  y se llama *Función de Bessel de primera especie de orden  $p$* . Su expresión desarrollada es

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \left[ \frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{1}{1! \Gamma(p+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(p+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \right]. \quad (1.7)$$

- Si  $r = -p$ , análogamente, considerando el valor  $a_0 = \frac{1}{2^{-p} \Gamma(-p+1)}$ , resulta la solución general

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}{n! \Gamma(n-p+1)}.$$

Esta expresión es llamada *Función de Bessel de primera especie de orden  $-p$*  y se denota por  $J_{-p}(x)$ . Su expresión desarrollada es igual a (1.7) considerando  $p < 0$ .

La convergencia de las series puede comprobarse mediante el criterio del cociente. Además, para valores pequeños de  $x$  la convergencia resulta muy rápida, lo que hace muy sencilla su tabulación y las convierte en una herramienta muy eficaz en cálculo numérico. Las funciones de Bessel de primera especie son funciones continuas con oscilaciones amortiguadas. Esto produce un número infinito de ceros, recordando a las funciones seno y coseno.

Volviendo a la resolución de la ecuación de Bessel de orden  $p$  (1.6), las dos soluciones obtenidas no siempre van a ser independientes. Puede suceder que:

1. Si  $p$  **no es un número entero**, como no se anula ningún denominador y las series comienzan por potencias de  $x$  diferentes,  $J_p(x)$  y  $J_{-p}(x)$  resultan ser linealmente independientes, y la solución general para la ecuación de Bessel es  $y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$  con  $C_1, C_2$  constantes.
2. Si  $p$  **es un número entero**, puede probarse la siguiente relación de dependencia comparando sus expresiones desarrolladas:  $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$ . Por tanto, para determinar la solución general de la ecuación de Bessel para este caso, necesitaremos encontrar otra solución que sea independiente. La forma más habitual es hacerlo utilizando la llamada *Función de Newman* definida por

$$N_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)}.$$

Como se puede ver, la función es solución de la ecuación puesto que para  $p$  no entero, ésta es una combinación lineal de soluciones de la ecuación de Bessel, y para el caso que nos ocupa,  $p$  entero,  $N_p(x)$  no tiene sentido dado que  $\sin(p\pi) = 0$ . Sin embargo, para cada  $x$  existe el límite

$$Y_p(x) = \lim_{q \rightarrow p} N_q(x)$$

con  $q$  no entero. La función  $Y_p(x)$  así definida es solución de la ecuación linealmente independiente de la solución  $J_p(x)$ , por tanto, la solución general vendrá dada por

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x). \quad (1.8)$$

Las funciones  $Y_p(x) = N_p(x)$ , para  $p$  no entero, e  $Y_p(x) = \lim_{q \rightarrow p; q \notin \mathbb{Z}} N_q(x)$ , para  $p$  entero, se conocen por *Funciones de Bessel de segunda especie*. Como consecuencia, para cualquier  $p$  (entero o no), la solución general para la ecuación (1.6) será de la forma (1.8).

En la práctica, las ecuaciones de Bessel suelen tener la forma

$$x^2 y'' + x y' + (k^2 x^2 - p^2) y = 0,$$

que se reduce a la forma estudiada realizando el cambio  $kx = t$ , por lo que la solución general viene dada por

$$y(x) = C_1 J_p(kx) + C_2 Y_p(kx).$$

## Breve guía matemática para la orquesta

La organología es una disciplina dentro del campo de la musicología que surge a principios del siglo XX encargándose del estudio profundizado de los instrumentos musicales. Desde principios de los tiempos el ser humano ha buscado la manera de organizar los elementos que le rodean atendiendo a peculiaridades o características presentes en los objetos. En el panorama musical, esta labor de clasificación es una tarea fundamental que desempeñan los musicólogos especialistas en organología. A lo largo de la historia han surgido diversos sistemas de clasificación. El más antiguo data del año 4000 a.C, es chino, y se basa en el material del que está hecho el instrumento (existían ocho grupos de instrumentos, materiales productores de sonido). Sin embargo, no será hasta 1914, a mano de Hornbostel y Sachs, cuando encontremos un sistema de clasificación más o menos universal que permita incluir todos los instrumentos que se tienen a excepción de aquellos nuevos instrumentos electrónicos como el *Theremin* o *las Ondas Martenon* que serán incorporados a esta clasificación en un nuevo grupo denominado *Electrófonos* en 1961 por Anthony Baines y Klaus P. Wachsmann.

El sistema de clasificación de Hornbostel-Sachs está formado por cuatro grandes grupos de los que luego, atendiendo a otras peculiaridades presentes en los instrumentos, van surgiendo sucesivas subdivisiones. Los cuatro grupos principales se rigen según el *elemento que entra en vibración*, como es el caso del viento o la cuerda, o por la *manera en que el ejecutante hace que el elemento entre en vibración*, en el caso de instrumentos de percusión. Estos grupos son:

1. *Idiófonos*: son aquellos instrumentos que usan su cuerpo como materia resonadora, es decir, tienen sonido propio pues produce el sonido primeramente por la vibración del propio cuerpo, sin uso de cuerdas, membranas o columnas de aire.
2. *Membranófonos*: está formado por los instrumentos donde el sonido es producido por la vibración de una membrana estirada.

3. *Cordófonos*: influye a todos los instrumentos cuyo sonido es producido por una o más cuerdas vibrantes.
4. *Aerófonos*: es la categoría en la que se encuentran todos los instrumentos cuyo sonido es producido por una columna de aire.

Hay dos componentes principales que determinan la naturaleza del sonido proveniente de un instrumento musical: la parte transitoria inicial del sonido y el conjunto de frecuencias resonantes que conforman el espectro del resto del sonido. En este capítulo, siguiendo el sistema de clasificación de Hornbostel-Sachs, nos centraremos en la descripción de las frecuencias resonantes pues es un aspecto fundamental en el estudio de las escalas musicales. Comenzaremos con el grupo de los cordófonos analizando las soluciones de la ecuación de onda unidimensional, y luego seguiremos con los aerófonos dada la similitud matemática con el grupo anterior. A continuación de éstos presentamos los membranófonos, que requieren resolver la ecuación de onda bidimensional, usando las funciones de Bessel presentadas en la Subsección 1.4; y finalizaremos el capítulo con breves nociones sobre los idiófonos que implican la resolución de una ecuación de grado cuatro, y por tanto, mucho más compleja.

## 2.1. Instrumentos de cuerdas

En esta sección buscamos e interpretamos las soluciones de la ecuación de onda unidimensional que describen el movimiento de la cuerda, es decir, consideraremos la ecuación (A.5) deducida en el Apéndice. La situación que se nos presenta es una cuerda tensada, supongamos que de longitud  $l$ , sujeta a dos extremos fijos; el problema consiste en encontrar la función  $u(x, t)$  que describe el desplazamiento de la cuerda en el tiempo  $t$  y posición  $x$  a lo largo de la cuerda. La ecuación de onda unidimensional que aquí se plantea supone que el desplazamiento de la cuerda es tal que su pendiente, en cualquier punto y momento, a lo largo de su longitud es pequeña. Este hecho hace que en nuestra ecuación (A.5) consideremos que  $F(x, t) \equiv 0$  y la ecuación de onda a resolver sea  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  donde  $c = \sqrt{T/\rho}$  con  $T$  la tensión de la cuerda y  $\rho$  la densidad lineal de la misma. En este caso estaremos trabajando con *ondas transversales*, cuyos desplazamientos son perpendiculares a la posición de la cuerda.

Busquemos entonces las soluciones de la ecuación de onda<sup>1</sup>

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Nótese que aquí  $y(x, t)$  es la función desplazamiento de la cuerda, que hemos denotado por  $u(x, t)$  en (A.5).

Para ello emplearemos el método de D'Alembert<sup>2</sup>. Comenzamos factorizando (en sentido operacional) el operador  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  como  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)$ . Haciendo el cambio de variable  $u = x + ct$  y  $v = x - ct$ , y aplicando la regla de la cadena sobre  $y$  se sigue que

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial u} - c \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Derivando nuevamente respecto de  $t$  llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = c \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) - c \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} - c \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) \\ &= c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

Si repetimos de manera análoga, derivando ahora con respecto a  $x$ , obtenemos

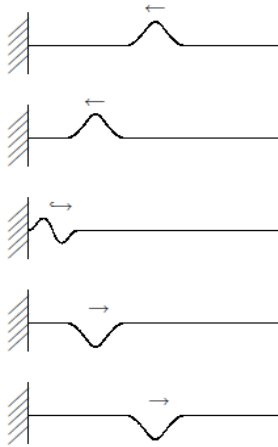
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right).$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de onda (2.1) resulta

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) = c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right),$$

y de aquí se sigue que  $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$ . Si integramos directamente esta ecuación podemos ver que su solución general viene dada por  $y = f(u) + g(v)$  donde  $f$  y  $g$  son, en principio, dos funciones arbitrarias. Deshaciendo el cambio de variable nos queda finalmente que  $y = f(x + ct) + g(x - ct)$ . Esto representa la superposición de dos ondas que viajan a velocidad  $c$ , una hacia la izquierda y otra hacia la derecha. De la condición inicial  $y(0) = y(l) = 0$  resulta que  $f(ct) + g(-ct) = 0$  y  $f(l + ct) + g(l - ct) = 0$  para todo  $t$ . De la primera relación obtenemos que  $g(\lambda) = -f(-\lambda)$ ,  $\forall \lambda$ , es decir, que  $y = f(x + ct) - f(ct - x)$ . Esta solución nos indica que el movimiento de la onda sigue el *principio de reflexión*, es decir, que la onda viaja hacia la izquierda y una vez que llega al final, choca con el extremo fijo de la cuerda y regresa con una onda invertida hacia la derecha tal y como se muestra en la Figura 2.1. Una importante característica de las soluciones del método de D'Alembert para la ecuación de onda es que aunque la ecuación de onda solo tiene sentido para funciones con derivadas parciales de segundo orden, las soluciones que ofrece son válidas para cualquier función periódica continua  $f$ .

<sup>2</sup> Jean-le-Rond D'Alembert nació en París el 16 de noviembre de 1717 y murió allí el 29 de octubre de 1783. Era hijo ilegítimo de Destouches, y fue abandonado por su madre en los escalones de la iglesia St. Jean-le-Rond, de ahí su primer nombre. Creció en la familia de un vidriero y su esposa, y vivió con su madre adoptiva hasta que ella murió en 1757. Su padre pagó su educación, lo que le permitió formarse y potenciar sus habilidades matemáticas. Dos ensayos escritos en 1738 y 1740 llamaron la atención de la Academia Francesa en 1740, quienes le seleccionaron como miembro de la misma. La mayoría de sus trabajos



**Figura 2.1.** Principio de reflexión

Del mismo modo, de la condición inicial en  $x = l$  se sigue que,  $f(l + ct) = f(ct - l), \forall t$ , por lo que, si  $f$  verifica las condiciones descritas en la Subsección 1.3, ésta admitirá un desarrollo de Fourier. Así, por ejemplo, si tan solo está presente la frecuencia fundamental,  $f$  será de la forma  $f(x) = C \cos((\pi x/l) + \phi)$ , mientras que si solo está presente el  $n$ -ésimo armónico,  $f$  será de la forma  $f(x) = C \cos((n\pi x/l) + \phi)$  y

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= C \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{l} + \phi\right) - C \cos\left(\frac{n\pi(-x+ct)}{l} + \phi\right) \\
 &= 2C \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi\right),
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

siendo esta última, la expresión de Bernoulli. La frecuencia  $\nu$  del  $n$ -ésimo armónico viene dada por  $2\pi\nu = n\pi c/l$  donde de la velocidad de propagación  $c = \sqrt{T/\rho}$  se obtiene  $\nu = (n/2l)\sqrt{T/\rho}$ . Ésto fue descubierto por Marin Mersenne, quien lo consideró como base fundamental para elaborar las “leyes de cuerdas estiradas” que sostienen que la frecuencia de una cuerda estirada es inversamente proporcional a su longitud, directamente proporcional a la raíz cuadrada de su tensión e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal.

Extendamos el análisis, especificando ahora la posición y la velocidad inicial en cada punto de la cuerda. Sea  $s_0(x)$  y  $\nu_0(x)$  el desplazamiento vertical inicial y la velocidad inicial de la cuerda para el punto horizontal  $x$  de la cuerda respectivamente,  $0 \leq x \leq l$ . Por las condiciones iniciales se sabe que  $s_0(0) = s_0(l) = 0$  y  $\nu_0(0) = \nu_0(l) = 0$  ya que la cuerda tiene los extremos fijos. Usando ahora el principio de reflexión saca-

---

matemáticos se escribieron allí en los años 1743 – 1754, y su resolución a la ecuación de onda fue publicada en el documento: *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration.*



mos que  $s_0(-x) = -s_0(x)$  y  $v_0(-x) = -v_0(x)$ , lo que significa que  $s_0$  y  $v_0$  son funciones impares en  $x$ , y el dominio se ve extendido a  $-l \leq x \leq l$ . Dado que los valores coinciden en los extremos  $x = \pm l$ , también podemos extender los valores de  $x$  teniendo en cuenta que la función es periódica con período  $2l$ . De este modo  $s_0(x + 2l) = s_0(x)$  y  $v_0(x + 2l) = v_0(x)$ . Como la velocidad viene dada por  $\frac{\partial y}{\partial t}$ , partiendo de la solución de D'Alembert para las condiciones iniciales  $y = f(x + ct) - f(ct - x)$ , la velocidad será

$$\frac{\partial y}{\partial t} = cf'(x + ct) - cf'(ct - x).$$

Haciendo  $t = 0$ , tenemos que  $f(x) - f(-x) = s_0(x)$  y  $cf'(x) - cf'(-x) = v_0(x)$ . Integrando esta última expresión, y dado que  $v(0) = 0$ , obtenemos  $f(x) + f(-x) = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(u) du$ . Operando y sustituyendo la expresión anterior quedaría que

$$f(x) - f(-x) = \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u) du + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u) du = \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u) du + \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)).$$

Despejando y teniendo en cuenta que  $f(x) - f(-x) = s_0(x)$ , obtenemos  $f(x) = \frac{1}{2} s_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(u) du$ . Aplicando ahora este resultado a la solución de D'Alembert  $y = f(x + ct) - f(ct - x)$  nos queda

$$y(x) = \frac{1}{2} (s_0(x + ct) - s_0(-x + ct)) + \frac{1}{2c} (\int_0^{x+ct} v_0(u) du - \int_0^{-x+ct} v_0(u) du).$$

Teniendo en cuenta que  $v_0$  es función impar,  $\int_{x-ct}^{-x+ct} v_0(u) du = 0$ , podemos reescribir la solución general a la ecuación de onda como se sigue, siendo ésta la única solución que verifica las condiciones iniciales y de frontera:

$$y(x) = \frac{1}{2} (s_0(x + ct) + s_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(u) du.$$

Consideremos, a continuación, las dos situaciones más comunes en función al estado de la cuerda.

1. Cuando la velocidad inicial es nula (como el caso de una cuerda que es punteada), la solución vendría dada por  $y(x) = \frac{1}{2} (s_0(x + ct) + s_0(x - ct))$ . Esto quiere decir que el desplazamiento inicial sucede hacia ambos sentidos a lo largo de la cuerda con velocidad  $c$ , y además el desplazamiento en función del tiempo  $t$  es el promedio de las dos ondas viajeras.
2. Caso más usual en la práctica, supongamos que para  $0 < a < l$ ,

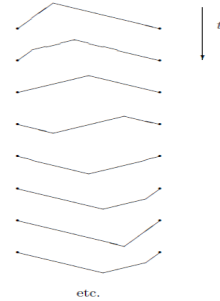
$$s_0(x) = \begin{cases} x/a & 0 \leq x \leq a, \\ (l-x)/(l-a) & a \leq x \leq l. \end{cases}$$



Usando el principio de reflexión podemos extender esta función a una función periódica de período  $2l$ . Es decir, gráficamente se tendría:

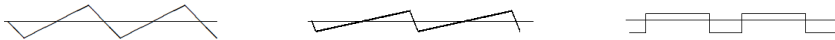


Esta onda se desplaza hacia la izquierda y hacia la derecha tomando el valor promedio de las dos funciones resultantes. El movimiento resultante de la cuerda pulsada será el que se muestre en la Figura de la derecha.



Hasta este punto tan solo hemos tratado la cuerda pulsada, ¿qué pasaría si la cuerda está inclinada? ¿cambiaría mucho la solución? ¿y las condiciones iniciales? Estas fueron preguntas que se hicieron algunos estudiosos, entre ellos Helmholtz, quien realizó varios experimentos con violines inclinados, observando que las cuerdas de estos violines vibran con un patrón triangular y las pendientes dependen del punto de observación (véase [12]).

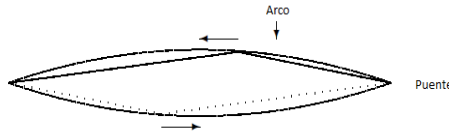
A continuación se muestran el desplazamiento cerca del arco, el desplazamiento más cerca del puente<sup>3</sup> y la velocidad respecto del tiempo, respectivamente:



Nos fijamos ahora en el gráfico de la velocidad, el cual verifica que las áreas inferior y superior al eje son iguales, y el ancho del canal disminuye hacia el puente. Por tanto, es importante distinguir dos fases de movimiento que se observan dentro de la técnica del violín, ambas dependientes de la acción del arco. En una, el arco se adhiere a la cuerda tirando de ella y en la otra el arco se desliza contra la cuerda. Esta forma de movimiento produce que los coeficientes de fricción estáticos sean mayores que los coeficientes de fricción dinámicos, dando como resultado del movimiento entero de la cuerda una envolvente descrita por dos parábolas, una inversa de la otra. Estos resultados son fruto del análisis de la ecuación (2.1) más allá de la

<sup>3</sup> El puente en los instrumentos de cuerda frotada es la pieza que se sitúa entre las cuerdas y de manera perpendicular a la tabla de armonía del instrumento. Es la pieza que determina la inclinación de la cuerda, su papel es transmitir las vibraciones de las cuerdas a la tabla.

condición inicial  $y(0) = y(l) = 0, \forall t$ . Surgen de imponer también que el valor de  $y$ , como función de  $t$ , esté fijado de antemano en algún valor particular  $x_0$  de  $x$  para cualquier valor que tome  $t$ . Por supuesto, el movimiento prescrito en  $x = x_0$  debe tener la periodicidad correcta, ya que todas las soluciones de la ecuación de onda satisfacen  $y(x_0, t + 2l/c) = y(x_0, t)$ .



**Figura 2.2.** Envolvente del movimiento de una cuerda inclinada.

Es tentador intentar resolver este problema usando la solución de D’Alembert para esta ecuación de onda. Supongamos de entrada que  $x_0 = l/2$ , por lo que  $f(l/2 + ct) - f(-l/2 + ct) = y(l/2, t)$ . Reemplazando  $t$  por  $t + 2l/c$  en esta ecuación obtenemos que  $f(3l/2 + ct) - f(l/2 + ct) = y(l/2, t + 2l/c)$ . Luego, la suma será

$$y(l/2, t) + y(l/2, t + 2l/c) = f(3l/2 + ct) - f(-l/2 + ct).$$

Teniendo en cuenta que  $f$  es función periódica de período  $2l$ , es decir que satisface  $f(3l/2 + ct) = f(-l/2 + ct)$ , llegamos a la conclusión de que  $y(l/2, t + l/c) = -y(l/2, t)$ . De aquí podemos deducir que no todas las funciones periódicas con el período  $2l/c$  funcionarán como la función  $y(l/2, t)$ . La función se ve obligada a ser antisimétrica de medio período, de modo que solo están presentes los armónicos impares (véase la Subsección 1.3). Esto es de esperar puesto que los armónicos pares se anulan en  $x = l/2$  y no pueden ser involucrados al valor de  $y(x, t)$  en  $x = l/2$ .

Si consideráramos que  $x_0 = l/3$  y tratásemos de resolver el mismo problema, observaríamos un comportamiento similar. Los armónicos divisibles por tres no pueden darse para  $y(l/3, t)$  puesto que se anulan en  $x = l/3$ . Esto es un problema para cada proporción racional de la longitud de la cuerda, lo que nos deja entrever que la forma de Bernoulli (2.2) para la solución de la ecuación de onda es más sencilla de usar para este problema que la de D’Alembert.

Ya que estamos interesados en las funciones  $y(x_0, t)$  de la forma mostrada en los gráficos anteriores, podemos elegir medir el tiempo de tal manera que  $y(x_0, t)$  sea una función impar de  $t$  para que solo las ondas sinusoidales, y no las ondas coseno, tengan presencia en su desarrollo de Fourier. Con este objetivo, llegamos a que

$$y(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right).$$

Al ser la ecuación de onda lineal podemos trabajar con una componente de frecuencia a la vez. Es decir, considerando  $y(x_0, t) = b_n \sin(n\pi ct/l)$ , buscamos soluciones de

la forma  $f(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \phi_n\right)$ , con  $c_n$  y  $\phi_n$  en términos de  $b_n$ . Aplicando esto a la solución de D'Alembert  $y(x_0, t) = f(x_0 + ct) - f(-x_0 + ct)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) &= c_n \cos\left(\frac{n\pi(x_0+ct)}{l} + \phi_n\right) + c_n \cos\left(\frac{n\pi(-x_0+ct)}{l} + \phi_n\right) \\ &= 2c_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi_n\right). \end{aligned}$$

Como tenemos una identidad entre funciones de  $t$  obtenemos que  $\phi_n = 0$ , y por tanto  $b_n = 2c_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)$ . Este problema es muy similar al que tratamos de resolver anteriormente usando la solución de D'Alembert. Si  $\sin(n\pi x_0/l) = 0$  y  $b_n = 0$ , entonces nuestro problema no tiene solución, mientras que si consideramos  $x_0 \in \mathbb{Z}$  múltiplo de  $l$  observamos que algunos componentes frecuenciales de  $y(x_0, t)$  se pierden. El valor de  $c_n$  resulta ser  $c_n = \frac{b_n}{2\sin(n\pi x_0/l)}$ , por lo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(n\pi x/l)}{2\sin(n\pi x_0/l)}, \tag{2.3}$$

y así,

$$y = f(x + ct) - f(-x + ct) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin(n\pi x/l) \cos(n\pi ct/l)}{\sin(n\pi x_0/l)}.$$

En cuanto a la convergencia de (2.3) podemos observar (siguiendo [12]) que en el caso de la cuerda inclinada, para cualquier elección del valor  $x_0$  tenemos una onda con forma triangular:

$$y(x_0, t) = \begin{cases} A \frac{t}{\alpha} & -\alpha \leq t \leq \alpha, \\ A \frac{l-ct}{l-c\alpha} & \alpha \leq t \leq \frac{2l}{c} - \alpha, \end{cases}$$

donde tanto  $\alpha$  como  $A$  dependen de  $x_0$ .  $A$  representa la amplitud máxima en  $x_0$  y  $\alpha$  determina cuánto tiempo dura el borde anterior de la forma de onda triangular en la posición  $x_0$  a lo largo de la cuerda. Teniendo en cuenta las relaciones de los coeficientes de Fourier (1.5),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{c}{l} \int_{-\alpha}^{\alpha} A \frac{t}{\alpha} \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) dt + \frac{c}{l} \int_{\alpha}^{\frac{2l}{c}-\alpha} A \frac{l-ct}{l-c\alpha} \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) dt \\ &= \frac{2Al^2}{n^2\pi^2 c\alpha(l-c\alpha)} \sin\left(\frac{n\pi c\alpha}{l}\right), \end{aligned}$$

por lo que  $c_n = \frac{Al^2}{n^2\pi^2 c\alpha(l-c\alpha)} \frac{\sin(n\pi c\alpha/l)}{\sin(n\pi c x_0/l)}$ .

Como los radios de las cantidades  $c_n$  no dependen de  $x_0$ , esto solo puede ocurrir cuando los dos términos en senos de esta ecuación coinciden, es decir,  $\frac{\pi c\alpha}{l} = \frac{\pi x_0}{l}$ , lo que implica  $\alpha = x_0/c$ . Así, si medimos la vibración en  $x_0$ , tenemos que la proporción  $\alpha/(l/c)$  del ciclo anterior en el final de la onda triangular es  $x_0/l$ . En particular,

si medimos en el punto de inclinación, obtenemos el siguiente principio: *La proporción del ciclo por el cual el arco se desliza en la cuerda es la misma que la proporción de la cuerda entre el arco y el puente.* Ahora  $A$  es solo una constante dependiendo de  $x_0$ . Como  $c_n$  no depende de  $x_0$ , la constante  $A/c\alpha(l - c\alpha) = A/x_0(l - x_0)$  debe ser independiente de  $x_0$ . Si consideramos  $K$ , la cantidad de la misma, obtenemos la siguiente fórmula para la amplitud en términos de la posición a lo largo de la cuerda que explica la envolvente de amplitud parabólica para la vibración de la cuerda inclinada:  $A = Kx_0(l - x_0)$ .

## 2.2. Instrumentos de viento

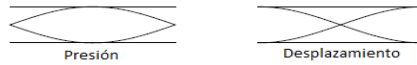
Para entender la vibración de los tubos sonoros es necesario introducir las variables *desplazamiento* y *presión acústica*, que denotaremos por  $\xi(x, t)$  y  $p(x, t)$  respectivamente, donde  $x$  indica la posición a lo largo del tubo y  $t$  el tiempo. Otro parámetro importante a tener en cuenta es la presión del aire ambiente, que denotaremos por  $\rho$  (ésta hace alusión a la situación del tubo sonoro en reposo). En función a estos parámetros podemos medir la presión acústica considerando la diferencia entre la presión en reposo y la absoluta que denotaremos por  $P(x, t)$ , de manera que  $p(x, t) = P(x, t) - \rho$ .

De las leyes de Hooke tenemos que  $p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$  donde  $B$  es el módulo del volumen de aire. La segunda ley de Newton para el movimiento nos indica que  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Haciendo una combinación de estas ecuaciones obtenemos las siguientes ecuaciones que describen (2.4) el desplazamiento y (2.5) la presión acústica:

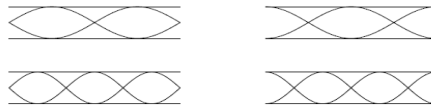
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

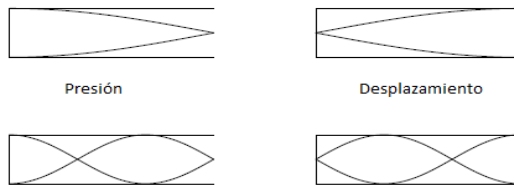
donde  $c = \sqrt{B/\rho}$ . Las condiciones iniciales en este caso dependen de si tenemos un tubo abierto o cerrado, ya que los tubos cónicos siguen el mismo comportamiento que un tubo abierto en el que un extremo ha sido aplastado. Para un extremo cerrado de un tubo, el desplazamiento debe anularse para todos los valores de  $t$ , mientras que para un extremo abierto de un tubo, la presión acústica  $p$  es cero para todos los valores de  $t$ , por lo que para un tubo abierto en ambos extremos, como la flauta, el comportamiento de la presión acústica  $p$  se determina exactamente por las mismas condiciones de contorno que en el caso de una cuerda vibrante. Por tanto, la solución de D'Alembert dada en la sección anterior sirve para este caso obteniendo, nuevamente, múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. El modo básico de vibración es una onda sinusoidal tal y como se representa en el siguiente diagrama. El desplazamiento también es una onda sinusoidal pero con una fase diferente.



Dada la naturaleza longitudinal de las ondas de aire, y a diferencia de los instrumentos de cuerda, el desplazamiento en los tubos es horizontal (el eje vertical del diagrama anterior lo representa). Además, las dos partes de los gráficos señalan los dos extremos del movimiento; los nodos del diagrama de presión corresponden a los antinodos del diagrama de desplazamiento y viceversa. El segundo y el tercer modo de vibración estarán representados por los siguientes diagramas:



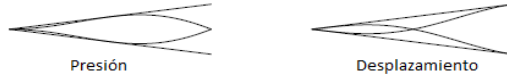
Para el caso de los tubos cerrados en un extremo, el comportamiento es diferente puesto que el desplazamiento debe anularse en el extremo cerrado. Por ello los dos primeros modos vibracionales se representan como se muestra en la Figura 2.3. Una diferencia característica entre los tubos abiertos y cerrados es que para tubos cerrados dominan los múltiplos impares de la frecuencia fundamental mientras que para un tubo abierto, como es la flauta, están presentes todos los múltiplos del fundamental. Es decir, en el gráfico siguiente los dos gráficos superiores representan la frecuencia fundamental; y los dos gráficos inferiores el tercer armónico.



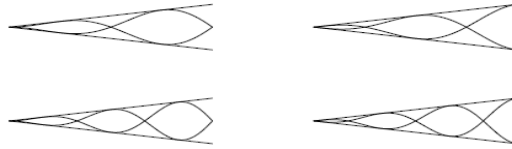
**Figura 2.3.** En estos diagramas, el extremo izquierdo del tubo está cerrado. Los dos diagramas izquierdos representan la presión frente a los dos de la derecha que representan el desplazamiento.

Un ejemplo de instrumento con tubo cerrado es el clarinete. Cabe destacar que aunque los múltiplos impares de la frecuencia fundamental dominan para este instrumento, en la práctica también existen pequeñas amplitudes presentes para los pares situados, de manera ascendente (más agudo), a una frecuencia de cuatro veces el fundamental.

En cuanto a los tubos cónicos, tal y como comentamos anteriormente, tienen un comportamiento análogo a los tubos abiertos de la misma longitud, es decir, presentan todas las frecuencias múltiplos de la fundamental (véase Figuras 2.4 y 2.5). El oboe es un claro ejemplo de ello, y esto explica por qué la flauta y el oboe se encuentran a una octava de diferencia mientras que el clarinete se sitúa a una octava más una quinta perfecta, lo que representa triplicar la frecuencia.

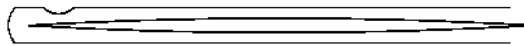


**Figura 2.4.** Estos diagramas se obtienen de los del tubo abierto, aplastando un extremo.



**Figura 2.5.** Segundo y tercer armónico respectivamente de un instrumento con tubo cónico.

Llegados a este punto ha de mencionarse que, para un extremo abierto, considerar  $p = 0$  es realmente solo una aproximación puesto que el volumen de aire que se encuentra fuera del tubo no es infinito. Una buena manera de ajustar, para hacer una representación más precisa de un tubo real, es trabajar en términos de una longitud efectiva y considerar que el tubo termine un poco más allá de donde realmente lo hace. El siguiente diagrama muestra la longitud efectiva para el modo de vibración fundamental de una flauta con todos los orificios cerrados.



**Figura 2.6.** Tubo de una flauta sin orificios.

La corrección final es la cantidad en la cual la longitud efectiva excede la longitud real y, en condiciones normales, por lo general se encuentra alrededor de las tres quintas partes del ancho del tubo. El efecto de un agujero abierto es disminuir la longitud efectiva del tubo. A continuación se muestra un diagrama del primer modo de vibración con un agujero abierto (Figura 2.7). La longitud efectiva del tubo está representada por líneas de puntos en el diagrama, ésto se puede ver al continuar la

parte izquierda de la onda como si el agujero no existiera y al ver dónde termina ésta. Cuanto más grande es el agujero, mayor es el efecto sobre la longitud efectiva. Entonces, pueden surgirnos preguntas como ¿qué sucede cuando el flautista sopla en la boquilla de la flauta? ¿Cómo hace que una nota suene? Respuestas a estas preguntas pueden encontrarse en [6].

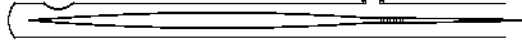


Figura 2.7. Tubo de una flauta con un orificio.

### 2.3. Instrumentos de percusión. Autovalores del operador Laplaciano

La familia de instrumentos de percusión es bastante amplia. En esta sección nos centraremos en el estudio de instrumentos membranófonos como son el tambor o los timbales. La ecuación que describe el movimiento de la onda de vibración viene dada por

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (2.6)$$

donde  $c = \sqrt{T/\rho}$  siendo  $T$  la tensión en los bordes de la membrana, y  $\rho$  la densidad de área de la piel. Esta ecuación surge de una parametrización de la superficie de la membrana mediante dos variables  $x$  e  $y$ , y una tercera para denotar el desplazamiento que consideramos  $z$  (para más detalles véase A.3). Aquí, la variable  $z(x, y, t)$  es la que denota el desplazamiento.

La naturaleza de la ecuación (2.6) sugiere realizar un cambio a coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Si  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , obtenemos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.7)$$

Busquemos soluciones en variables separadas,  $z(r, \theta, t) = f(r)g(\theta)h(t)$ . Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a que

$$f(r)g(\theta)h''(t) = c^2 \left( f''(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r} f'(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r^2} f(r)g''(\theta)h(t) \right). \quad (2.8)$$

Dividiendo ahora por  $f(r)g(\theta)h(t)$  obtenemos que

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2 \left( \frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r} \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} \right).$$



Dado que  $t$ ,  $r$  y  $\theta$  son variables independientes el valor común de los dos lados es independiente a estas variables, por lo que su valor ha de ser una constante negativa que denotaremos por  $-\omega^2$ . Esto quiere decir que

$$h''(t) = -\omega^2 h(t), \tag{2.9}$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r} \frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{2.10}$$

De aquí podemos deducir, resolviendo (2.9), que la solución general de nuestro problema inicial será múltiplo de  $h(t) = \sin(\omega t + \phi)$ , donde  $\phi$  es una constante determinada por la fase temporal inicial. Multiplicando la ecuación (2.10) por  $r^2$  y reorganizando, obtenemos

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + r^2 \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}.$$

Como podemos observar la parte izquierda de nuestra ecuación solo depende de  $r$ , y la parte derecha de  $\theta$  por lo que su valor es constante. Esto significa que, teniendo en cuenta que  $g(\theta)$  es la función del ángulo, y por tanto, función periódica de periodo  $2\pi$ , el valor común de la constante será el cuadrado de un entero  $n$  resultando las siguientes ecuaciones:

$$g''(\theta) = -n^2 g(\theta) \quad \text{y} \quad r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} + r^2 \frac{\omega^2}{c^2} = n^2.$$

Multiplicando ahora ambos miembros de la segunda ecuación por  $f(r)/r^2$ , y reordenando obtenemos la ecuación

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) = 0,$$

cuya solución viene dada por una combinación lineal de  $J_n(\omega r/c)$  y  $Y_n(\omega r/c)$  (véase la Subsección 1.4). Como  $\lim_{r \rightarrow 0} Y_n(\omega r/c) = -\infty$ , se introduce una singularidad en el centro de la membrana que demuestra que las únicas soluciones físicamente relevantes a la ecuación anterior son múltiplos de  $J_n(\omega r/c)$  (en caso contrario, se produciría una “explosión” al golpear el tambor en el centro). Luego, la solución a la ecuación de onda vendrá dada por

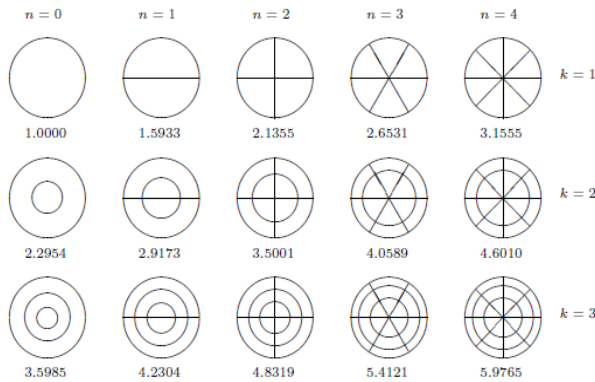
$$z(r, \theta, t) = A \cdot J_n(\omega r/c) \sin(\omega t + \phi) \sin(n\theta + \psi), \quad A \neq 0.$$

Supongamos ahora que la membrana de nuestro tambor circular posee radio  $a > 0$ . Entonces, la ecuación (2.7) debe satisfacer la condición de contorno que verifica que  $z = 0$  cuando  $r = a$  para todos los valores de  $t$  y  $\theta$ . De este modo,  $J_n(\omega a/c) = 0$ . Esta función toma el valor cero para un conjunto infinito discreto de valores de su argumento. Por lo tanto,  $\omega$  también está restringido a un infinito conjunto discreto de valores.

Algo a tener en cuenta es que combinaciones lineales de funciones de la forma anterior aproximan uniformemente la solución general (de clase 2) de (2.7) tan cerca como se desee, formando el equivalente en el tambor de las funciones seno y coseno de la serie de Fourier. A continuación se muestra, con carácter ilustrativo, una tabla de los primeros ceros de las primeras funciones de Bessel.

$k$	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520	14.37254

Denotemos ahora el  $k$ -ésimo cero de  $J_n$  por  $j_{n,k}$ . Teniendo en cuenta que para obtener los distintos modos de vibración debemos elegir un entero no negativo  $n$  y un cero de  $J_n(z)$ , el modo de vibración asociado a éste tendrá frecuencia  $c j_{n,k} / 2\pi a$ , que viene siendo  $j_{n,k} / j_{0,1}$  veces la frecuencia fundamental. La imagen que se visualiza a continuación, muestra los puntos estacionarios. Debajo de cada imagen se encuentra el valor de  $j_{n,k} / j_{0,1}$  para la frecuencia relativa.



A finales del siglo XVIII Chladni, motivado por su interés en la vibración de placas, llevó a cabo una serie de experimentos que consistieron en colocar arena sobre una placa y hacerla vibrar en uno de sus modos normales usando un arco de violín. En este estado observó que la arena se acumulaba en las líneas estacionarias y daban una imagen similar a las descritas anteriormente para el tambor. Véase los detalles en [5].

En la realidad, los instrumentos membranófonos como es el caso de un timbal tienen aire confinado. Esto hace que el modo fundamental del tambor esté muy amortiguado dada la compresión y expansión del aire encerrado en él. Entonces, lo

que se escucha como fundamental es realmente el modo con  $n = 1$ ,  $k = 1$  que viene siendo la segunda entrada en la fila superior del diagrama anterior. Los modos superiores implican principalmente mover el aire de lado a lado. La inercia del aire produce un aumento de la frecuencia de los modos con  $n = 0$ , especialmente el fundamental, mientras que los modos con  $n > 0$  se reducen en frecuencia de tal manera que se amplían las brechas de frecuencias. Por otro lado, en un tambor abierto todas las frecuencias vibratorias se reducen por la inercia del aire. Dentro de la orquesta se emplea la inercia del aire para obtener una relación de frecuencia aproximada de  $3 : 2$ . Para ello se hace uso de los modos con  $n = 1$ ,  $k = 1$  y  $n = 2$ ,  $k = 1$  con el fin de percibir el fundamental que falta a mitad de la frecuencia fundamental real. Además, los modos con  $n = 3$ ,  $4$  y  $5$  (aún con  $k = 1$ ) están dispuestos para aproximarse a relaciones de frecuencia de  $4 : 2$ ,  $5 : 2$  y  $6 : 2$  con el modo  $n = 1$ ,  $k = 1$ , que acentúa la percepción del fundamental que falta. A la frecuencia del modo  $n = 1$ ,  $k = 1$  se denomina *frecuencia nominal del tambor*.

A modo conclusivo, cabe señalar que un timbal puede ajustarse entorno a una cuarta perfecta siempre que el aire no actúe como agente resonador. Si se diera el caso contrario, solo podría hacerlo en una pequeña parte del rango de frecuencias ya que las resonancias del cuerpo de aire suelen ser mucho más altas en el tono y no tienen mucho efecto en el sonido general. Un efecto importante es que esto evita que la parte inferior de la cubierta del tambor irradie sonido haciendo que la radiación del sonido sea más eficiente desde el lado superior.

El análisis realizado anteriormente para la discusión de los modos vibratorios del tambor se puede llevar a cabo en un contexto más general, explicando la relación entre la forma del tambor y su espectro de frecuencias en términos de los autovalores del operador Laplaciano  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Haciendo uso de esta notación, la ecuación de onda (2.6) quedaría  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 z$ , y por tanto, al buscar soluciones en variables separadas  $z = f(x, y)h(t)$  las ecuaciones (2.9) y (2.10) serán equivalentes a  $f(x, y)h''(t) = c^2 \nabla^2 f(x, y)h(t)$  es decir,  $\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2 \frac{\nabla^2 f(x, y)}{f(x, y)}$ . Como el lado de la izquierda es independiente de  $x$  e  $y$ , y el de la derecha independiente de  $t$ , se sigue que

$$h''(t) = -\omega^2 h(t), \quad \nabla^2 f(x, y) = -\frac{\omega^2}{c^2} f(x, y).$$

La primera ecuación describe un movimiento armónico simple con frecuencia angular  $\omega$  (estudiado ya en el Capítulo 1), por lo que la solución asociada a ésta será  $h(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ . Por otro lado, toda función  $f(x, y)$  no nula y doblemente diferenciable que satisfaga la segunda ecuación, es conocida como *función propia* (autofunción) del operador de Laplace  $-\nabla^2$ , con autovalor  $\lambda = \omega^2 / c^2$ .

Hay dos tipos importantes de autofunciones y autovalores. Por un lado está el *espectro de Dirichlet* que está formado por el conjunto de autovalores cuyas autofunciones desaparecen en el límite de la región, y por otro, el *espectro de Neumann*

formado por los autovalores con autofunciones que poseen un derivado de desvanecimiento normal (es decir, perpendicular) al límite (importantes cuando se estudia la ecuación de onda de un sonido, donde la variable dependiente es la presión acústica). La resolución de esta ecuación de ondas y la justificación del método de separación de variables puede encontrarse en numerosos textos sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales y se sale de los objetivos de este trabajo. Véase, por ejemplo, [2, Apéndice W]. En particular, se puede probar que los autovalores de  $-\nabla^2$  son reales positivos, y el siguiente resultado para el problema de Dirichlet:

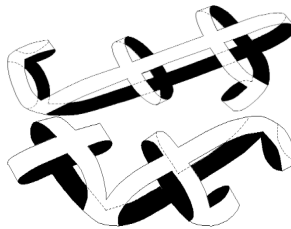
**Proposición 2.1.** Sean  $f_1, f_2, \dots$  las autofunciones de Dirichlet de  $-\nabla^2$  en un dominio  $\Omega$ , con autovalores  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ . Entonces,

1. Toda autofunción es una combinación lineal finita de autofunciones  $f_i$  para las cuales  $\lambda_i$  son iguales.
2. Cada valor propio se repite solo un número finito de veces.
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .
4. Cada función continua puede escribirse como la suma de una serie absoluta y uniformemente convergente de la forma  $f(x, y) = \sum_i a_i f_i(x, y)$ .

El autovalor  $\lambda_i$  determinará la frecuencia a través de  $\omega_i = c\sqrt{\lambda_i}$  y  $v_i = c\sqrt{\lambda_i}/2\pi$ . Las condiciones iniciales de nuestra ecuación en  $\Omega$  son especificadas estipulando los valores de  $z$  y  $\frac{\delta z}{\delta t}$  en  $\Omega$  para la posición inicial. Escribiendo  $z = \sum_i a_i f_i(x, y)$  y  $\frac{\delta z}{\delta t} = \sum_i b_i f_i(x, y)$  en  $t = 0$ , la única solución para el problema vendrá dada finalmente por

$$z = \sum_{\lambda} f_i(x, y) \left( a_i \cos(c\sqrt{\lambda}t) + \frac{b_i}{c\sqrt{\lambda}} \sin(c\sqrt{\lambda}t) \right).$$

Llegados a este punto podríamos plantearnos ¿existe alguna relación entre la forma del tambor y su espectro de frecuencia? ¿escuchando el sonido podríamos deducir la forma del tambor? Un interesante resultado para estas preguntas, planteadas por Mark Kac en [13], fue dado por Gordon, Webb y Wolpert en 1991 a partir de dos superficies isoespectrales no planas construidas y recogidas por Buser en [3].



**Figura 2.8.** Superficies isoespectrales no planas de Buser.

Dividiendo desde el centro las formas mostradas en la Figura 2.8 a la mitad y “aplastándolas” surge la primera versión de tambores diferentes e isoespectrales

(Figura 2.9). Para más detalles véase [10] donde se recogen también otros ejemplos encontrados por Gordon, Webb y Wolpert de pares de regiones con distinta forma y mismo espectro de Dirichlet utilizando una extensión del teorema de Sunada.

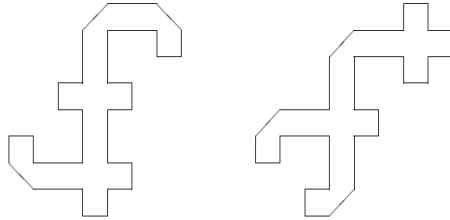


Figura 2.9. Membrana de los primeros tambores isoespectrales.

Hasta la fecha no se han encontrado ejemplos convexos. No obstante, si que se han generado ejemplos de formas convexas que pueden determinarse a partir de su espectro de Dirichlet. Son varias las teorías que relacionan los autovalores con la forma del tambor, no obstante, la que mejor recoge la idea es la enunciada por Osserman en el siguiente teorema pues supone una mejora del *Teorema de Hayman*.

**Teorema 2.2 (Hayman, Osserman).** *Sea  $\Omega$  una región acotada, cerrada y simplemente conexa del plano; y  $\lambda$  el autovalor de Dirichlet más pequeño del operador de Laplace para la región  $\Omega$ . Entonces  $\Omega$  contiene una región circular con radio, al menos,  $\frac{1}{2\lambda}$ .*

## 2.4. Xilófonos y campanas tubulares

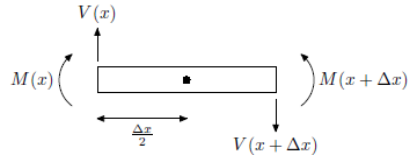
El xilófono y las campanas tubulares son instrumentos que, al igual que en el caso del tambor, los modos de vibración no consisten en múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. Para verlo, en esta sección, examinaremos la teoría de las ondas transversales sobre una varilla/lámina rígida y delgada. Nuestro objetivo será abordar brevemente la ecuación diferencial que modeliza esta situación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (2.11)$$

donde  $I = \int \eta^2 dA$  es el momento seccional de la sección transversal de la lámina, con área transversal  $A$ ,  $\eta$  la distancia desde la superficie neutra hasta el filamento (véase la Figura 2.10),  $E$  la elasticidad longitudinal, y  $\rho$  la densidad lineal de la lámina. Esta ecuación, que será la que describa el movimiento transversal de las ondas en la varilla, surge de realizar varias suposiciones. Por un lado estamos considerando las suposiciones hechas en la Sección 2.1 sobre ángulos pequeños, unida a una segunda suposición de que los términos provenientes de la resistencia del movimiento

causado por la inercia rotacional de un segmento de la barra son muy pequeños en comparación con los términos que provienen de la inercia lineal (vertical). Es importante hacer constar que esto es solamente válido para láminas delgadas. El resultado de esta suposición es que la fuerza de torsión total  $Fs$  (fruto de torcer un objeto alrededor de un eje aplicando una fuerza  $F$  a una distancia  $s$  del eje) en un segmento de varilla puede considerarse nula, lo que nos permite simplificar cálculos.

Consideremos un segmento de varilla de longitud  $x$ , y supongamos que  $V(x)$  es la fuerza vertical (o fuerza de corte) aplicada por el extremo izquierdo del segmento en el extremo derecho del segmento adyacente. Fijemos como dirección positiva para la torsión el sentido antihorario.

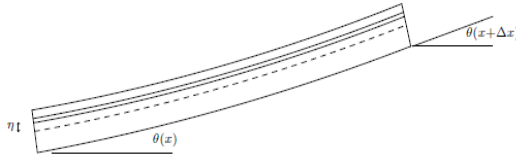


La fuerza de torsión en el segmento, debido a dicha fuerza de corte, será  $-V(x)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - V(x + \Delta x)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \approx -V(x)\Delta x$ . Como consideramos que la inercia rotacional es insignificante, es decir, la torsión (o *momento flector*)  $M(x)$  aplicado por el segmento en el segmento adyacente satisface que  $M(x + \Delta x) - M(x) - V(x)\Delta x \approx 0$ , obtenemos que  $V(x) \approx \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x}$ . Luego, tomando el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  llegamos a que  $V(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x}$ . Ahora, la fuerza vertical en el segmento se puede calcular como  $V(x) - V(x + \Delta x) \approx -\Delta x \frac{\partial V(x)}{\partial x} \approx -\Delta x \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}$ . Como las funciones  $V$  y  $M$  dependen de  $x$  y  $t$ , debemos escribir la fuerza vertical total del segmento como  $-\Delta x \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}$ . Teniendo en cuenta la densidad lineal de la barra  $\rho$ , la masa del segmento será  $\rho\Delta x$ . Tomemos  $y$  para el desplazamiento vertical, entonces, por la segunda ley de movimiento de Newton obtenemos que  $-\Delta x \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , es decir,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0. \tag{2.12}$$

Ahora, el momento de flexión  $M$  hace que la barra se doble haciendo entrever una estrecha relación entre  $M$  y  $\partial^2 y / \partial x^2$ . Para comprender esta relación, debemos tener en cuenta los parámetros de tensión, extensión, y *módulo de Young*. Si una fuerza  $F = F_2 - F_1$  estira o comprime una barra delgada rígida de longitud  $L$  y área de sección transversal  $A$ , la longitud aumentará  $\Delta L$ . Teniendo en cuenta esto, la tensión se define por  $f = F/A$ , y la extensión viene dada por el aumento proporcional en longitud, es decir,  $\epsilon = \Delta L/L$ . La ley de Hooke para una barra rígida establece que la extensión es proporcional a la tensión, esto es,  $f = E\epsilon$ . A la constante de proporcionalidad  $E$  se le conoce como *módulo de Young* (o longitud elástica) y dependerá del material de la lámina (por ejemplo, partiendo de la temperatura ambiente  $18^\circ \text{C}$ , si ésta es de aluminio  $E = 7.05 \times 10^{10}$ , si es de plata  $E = 8.27 \times 10^{10}$ ). Supongamos la situación que describe la Figura 2.10.

Considerando  $R$  el radio de curvatura de la superficie neutral, la longitud del segmento en la superficie neutral será  $R\Delta\theta$ . La longitud del filamento será  $(R - \eta)\Delta\theta$ ,



**Figura 2.10.** Lámina con superficie neutra central (línea de puntos sobre el diagrama), en esta zona no está comprimida ni estirada. En un lado de esta superficie los filamentos horizontales de la barra se comprimen y en el otro se estiran.

por lo que la extensión vendrá dada por  $-(\eta\Delta\theta)/(R\Delta\theta) = -\eta/R$ . Entonces, según la ley de Hooke, la tensión en el filamento es  $-E\eta\Delta A/R$ , donde  $\Delta A$  es el área de la sección transversal del filamento. Como se supone que la fuerza horizontal total es nula, tenemos que  $-\frac{E}{R} \int \eta dA = 0$ , esto es,  $\int \eta dA = 0$ , lo que nos indica que la superficie neutra pasa a través del *centroide* de la sección transversal del área. Multiplicando por  $-\eta$  e integrando obtenemos el momento de flexión total  $M = \frac{E}{R} \int \eta^2 dA$ . A la cantidad  $I = \int \eta^2 dA$  se le denomina *momento de sección* de la sección transversal de la lámina. Teniendo en cuenta esto,  $M = -EI/R$  y  $R = (1 + (\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}} / \frac{d^2y}{dx^2}$ . Asumiendo que  $\frac{dy}{dx}$  es pequeño, la fórmula para el radio de curvatura nos queda determinada por  $1/R = \frac{d^2y}{dx^2}$  de modo que  $M(x, t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ . Combinando estos resultados con la ecuación (2.12), obtenemos la ecuación (2.11) conocida como ecuación de emisión de Euler-Bernoulli. La resolución de la misma, aplicando el método de separación de variables, nos deja la siguiente solución general descompuesta en suma de modos normales:

$$y(x, t) = (A \sin \kappa x + B \cos \kappa x + C \sinh \kappa x + D \cosh \kappa x) \sin(\omega t + \phi) \tag{2.13}$$

con  $\kappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{EI}}$  y  $A, B, C, D$  constantes a determinar según las condiciones de contorno. Estas condiciones son las que restringirán  $\omega$  a un conjunto discreto de valores y dependerán de lo que suceda al final de la lámina. Así por ejemplo, si un extremo de ésta está libre se tiene que la velocidad y el momento de flexión total se anulan, es decir que  $\partial^2 y / \partial x^2 = 0$  y  $\partial^3 y / \partial x^3 = 0$ , respectivamente. Si éste se encuentra sujeto a un extremo de la varilla, el desplazamiento y la pendiente desaparecen por lo que  $y = 0$  y  $\partial y / \partial x = 0$  para cualquier instante de tiempo  $t$  en el valor de  $x$  correspondiente al final de la varilla.

En el caso del xilófono y las campanas tubulares los extremos se encuentran libres, es decir,  $\partial^2 y / \partial x^2 = 0$  y  $\partial^3 y / \partial x^3 = 0$  por lo que considerando los extremos de la varilla en  $x = 0$  y  $x = l$ , y aplicando estas condiciones sobre la solución (2.13) para la ecuación de onda obtenemos, con  $x = 0$ , que  $B = D$  y  $A = C$ , y con  $x = l$ :

$$\begin{aligned} A(\sinh \kappa l - \sin \kappa l) + B(\cosh \kappa l - \cos \kappa l) &= 0, \\ A(\cosh \kappa l - \cos \kappa l) + B(\sinh \kappa l + \sin \kappa l) &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones admiten una solución distinta de cero en  $A$  y  $B$  cuando el determinante verifica que  $(\sinh \kappa l - \sin \kappa l)(\sinh \kappa l + \sin \kappa l) \neq (\cosh \kappa l - \cos \kappa l)^2$ . Teniendo en cuenta las relaciones  $\cosh^2 \kappa l - \sinh^2 \kappa l = 1$  y  $\sin^2 \kappa l + \cos^2 \kappa l = 1$ , nos queda que  $\cosh \kappa l \cos \kappa l = 1$ . Luego, los valores de  $\kappa l$  para los que se cumple esta ecuación determinarán las frecuencias permitidas mediante la fórmula  $\kappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{EI}}$ .

Realicemos un cambio de variable considerando  $\lambda = \kappa l$  de modo que  $\lambda$  sea solución de la ecuación  $\cosh \lambda \cos \lambda = 1$ . De la expresión  $\kappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{EI}}$  llegamos a que la frecuencia angular y la frecuencia vienen dadas por

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \frac{\lambda^2}{l^2}; \quad v = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \frac{\lambda^2}{2\pi l^2}. \quad (2.14)$$

Las soluciones positivas de  $\cosh \lambda \cos \lambda = 1$  son, aproximando por redondeo a cuatro cifras significativas:  $\lambda_1 = 4.7300$ ,  $\lambda_2 = 7.8532$ ,  $\lambda_3 = 10.9956$ ,  $\lambda_4 = 14.1372$ ,  $\lambda_5 = 17.2788$  y  $\lambda_6 = 20.4204$ . Como vemos, a medida que  $n$  aumenta,  $\cosh n$  aumenta exponencialmente, por lo que  $\cos \lambda_n$  debe ser muy pequeño y positivo de manera que  $\lambda_n$  esté próximo a  $(n + 1/2)\pi$ , el  $n$ -ésimo cero de la función coseno. Una aproximación para  $\lambda_n$  es

$$\lambda_n \approx (n + \frac{1}{2})\pi - (-1)^n 2e^{-(n + \frac{1}{2})\pi} - 4e^{-2(n + \frac{1}{2})\pi}. \quad (2.15)$$

Usando la ecuación (2.14) encontramos que las relaciones de frecuencia como múltiplos de la fundamental están dadas por las cantidades  $\lambda_n^2/\lambda_1^2$  (cuyos valores para  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ , con cuatro cifras significativas y por redondeo, son: 1.0000, 2.7565, 5.4039, 8.9329, 13.3443 y 18.6379, respectivamente). Como vemos el conjunto resultante es inarmónico al igual que en el caso del tambor. Sin embargo, a medida que aumentamos  $n$  la ecuación (2.15) muestra cómo los parciales más altos tienen relaciones que se aproximan a la de los cuadrados de enteros impares.

Para concluir, simplemente notar que este análisis se ha realizado bajo ciertas suposiciones que describen una situación ideal. En la realidad, la serie de derivadas parciales es algo diferente. Las campanas tubulares son las más cercanas a la situación idealizada descrita anteriormente con parciales segundo y tercero en relaciones de frecuencia de 2.76 : 1 y 5.40 : 1 a la fundamental, pero las barras o láminas de un xilófono orquestal están hechas de palisandro o, a veces, de materiales más modernos que son más duraderos y mantienen su tono en condiciones extremas. Además, cuentan con un arco superficial realizado en la parte inferior de la lámina con la intención de producir relaciones de frecuencia de 3 : 1 y 6 : 1 que se corresponden con el tono de una octava y una quinta perfecta, respectivamente dos octavas y una quinta perfecta por encima de la fundamental.



# A

---

## Apéndice: la ecuación de onda

Para poder analizar las cualidades del sonido es necesario encontrar la ecuación de onda que lo caracteriza. El objetivo de este Apéndice es el de incluir algunas nociones breves sobre la deducción de esta ecuación. Comenzaremos con la deducción de la ecuación de onda en una dimensión, para luego extenderlo a dimensión dos y concluir con algunos resultados relevantes de la ecuación de onda en dimensión tres.

### A.1. Ecuación de onda unidimensional

La ecuación de onda en  $\mathbb{R}$  se define a través del desplazamiento del aire  $X(s, t)$  que dependerá del tiempo  $t$  y la presión del aire  $s$ . El aire tiene una velocidad y una aceleración de las partículas que lo forman, pero estos parámetros son conocidos una vez averigüemos cómo varía a lo largo del tiempo el desplazamiento del mismo.

Consideramos una cuerda elástica que se halla en estado de reposo -en ausencia de fuerzas exteriores- por el efecto de una fuerza de tensión  $T_0$  a lo largo de la misma, al estar anclada entre los puntos  $O$  y  $P$  del eje  $OX$ . Supondremos que tiene longitud  $l$  (véase la Figura A.1).

La situación física a describir consiste en separar la cuerda de su posición de equilibrio, creando la deformación una fuerza recuperadora que genera el movimiento de la misma. El estado futuro de la cuerda -en términos del tiempo  $t$ - se representará por las ecuaciones  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$ , con  $0 \leq s \leq l$  y  $t \geq 0$ . Aquí,  $s$  es un parámetro que se define mediante el convenio de que  $X(s, t) = (x, y)$  represente el punto de la cuerda que inicialmente ( $t = 0$ ) se hallaba en la posición  $(x, y) = (s, 0)$ . Admitiremos que en cada instante, la masa de un tramo  $s_1 \leq s \leq s_2$  viene expresada por  $\int_{s_1}^{s_2} \rho(s) ds$ , donde  $\rho(s)$  es una función continua que designa la densidad lineal de masa,  $\rho(s) > 0$  en  $0 \leq s \leq l$ .

En todo momento suponemos que el movimiento tiene lugar en el plano  $OXY$ . Las condiciones iniciales son:

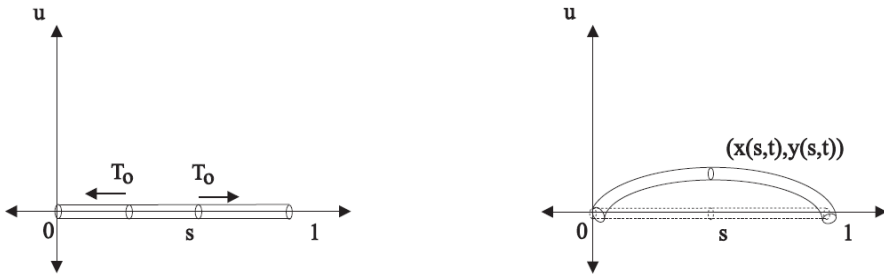


Figura A.1. Cuerda elástica.

$$\begin{cases} x(s, 0) = s, & y(s, 0) = f(s), \\ x_t(s, 0) = 0, & y_t(s, 0) = g(s), \end{cases} \quad (\text{CI})$$

en donde  $0 \leq s \leq l$ . Por otra parte, el proceso impone las *condiciones de contorno*:

$$x(0, t) = 0, \quad x(l, t) = l, \quad y(0, t) = y(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{CC})$$

Suponemos que sobre cada porción  $s_1 \leq s \leq s_2$  de la cuerda actúa una fuerza vertical neta (dirigida hacia abajo) de módulo  $F = F(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \rho(s) F(x(s, t), t) ds$ . En otros términos,  $F = F(x, t)$  es una densidad de fuerzas verticales por unidad de masa en el punto  $x$  y en el instante  $t$ . Por ejemplo, en el caso del peso,  $F = g$  y  $F(s_1, s_2) = g \int_{s_1}^{s_2} \rho(s) ds$ , donde la integral representa la masa del trozo de cuerda.

Para determinar las ecuaciones del movimiento analizaremos las fuerzas sobre un trozo de cuerda  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$ ,  $0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = l$ . Su momento lineal viene dado por  $\bar{p}_i = \left( \int_{s_{i-1}}^{s_i} \rho(s) x_t ds, \int_{s_{i-1}}^{s_i} \rho(s) y_t ds \right)$ . Las ecuaciones del movimiento se obtendrán escribiendo la segunda ley de Newton (para la variación del momento lineal):  $\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}_i^E + \bar{F}_i^I$ , con  $\bar{F}_i^E$  (respectivamente  $\bar{F}_i^I$ ) la fuerza exterior (respectivamente interior) neta actuando sobre el trozo  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$ . Por hipótesis,  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  está sometido a la fuerza exterior

$$\bar{F}_i^E = (0, -F(s_{i-1}, s_i)) = \left( 0, - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \rho(s) F(x(s, t), t) ds \right).$$

Falta por precisar quiénes son las fuerzas internas (de corto alcance) que actúan sobre la porción  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  de la cuerda. Para ello es necesario dar una ley que describa cómo es la naturaleza de las fuerzas de tensión en los extremos. Esto equivale a describir las propiedades elásticas de la cuerda.

En primer lugar medimos el alargamiento neto sufrido por  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  en el instante  $t$ :  $\int_{s_{i-1}}^{s_i} \sqrt{x_s^2 + y_s^2} ds - \Delta s$  donde  $\Delta s = s_i - s_{i-1}$ ,  $x_s = x_s(s, t)$ ,  $y_s = y_s(s, t)$ . El alargamiento medio por unidad de longitud es  $\frac{1}{\Delta s} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sqrt{x_s^2 + y_s^2} ds - 1$ . Así, el alargamiento puntual por unidad de longitud o densidad de alargamiento es finalmente  $e = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} - 1$ .

Una primera hipótesis de elasticidad es que en cada punto  $s$  la fuerza de tensión  $\bar{T}(s, t)$  vaya dirigida en la dirección de la tangente, es decir, si  $T(s, t)$  designa el módulo, entonces  $\bar{T}(s, t) = T(s, t)\bar{t}(s, t)$ , con  $\bar{t}(s, t) = (x_s^2 + y_s^2)^{-1/2} \cdot (x_s, y_s)$  el vector unitario tangente en  $s$ . Esto significa que el material que constituye la cuerda es tal que su “*reacción a la deformación*”, cuando uno quiere “*separar*” una sección transversal imaginaria de su contigua, es puramente normal a dicha sección. En otras palabras, no hay fricciones tangenciales (fatigas), o si se quiere, no hay “*oposición*” a la flexión.

La segunda hipótesis de elasticidad es que el módulo de la tensión sea una función exclusiva de  $e$  y de  $s$ ,  $T(s, t) = \mathcal{T}(e, s)$ , con  $\mathcal{T}(0, t) = T_0$ , donde  $T_0$  es la tensión de la cuerda en reposo. Desarrollando  $\mathcal{T}$  se obtiene  $\mathcal{T} = T_0 + \mathcal{T}'_e(0, s)e + O(e^2)$ . Por ejemplo, el caso particular  $\mathcal{T} = T_0 + ke$  ( $k$  constante, el módulo de elasticidad) da lugar a la conocida *ley de Hooke*. De aquí se deduce que la resultante de las fuerzas internas sobre  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  resulta ser

$$\bar{F}_i^J = T(s_i, t)\bar{t}(s_i, t) - T(s_{i-1}, t)\bar{t}(s_{i-1}, t) = T(s, t)\bar{t}(s, t)\Big|_{s_{i-1}}^{s_i}.$$

Como,  $T(s, t)\bar{t}(s, t)\Big|_{s_{i-1}}^{s_i} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\partial}{\partial s} (T(s, t)\bar{t}(s, t)) ds$ , la identidad para la derivada del momento lineal da lugar a las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\mathcal{T} x_s}{e+1} \right) = \rho x_{tt} \\ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\mathcal{T} y_s}{e+1} \right) = \rho y_{tt} + \rho F. \end{cases} \tag{A.1}$$

El problema consiste entonces en determinar las funciones  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$  a partir de las condiciones (CI) y (CC), donde  $f$ ,  $g$  y  $\mathcal{T}$  son datos del problema. El carácter fuertemente no lineal de las ecuaciones (A.1) sugiere, en primera aproximación, su linealización, para llegar a un modelo más sencillo. Para ello, vamos a imaginarnos que el tiempo  $t$  y las funciones  $f$  y  $g$  junto con sus derivadas de hasta orden dos son pequeñas. Más precisamente, consideramos el vector  $\Phi = (t, f, g, f', g', f'', g'')$  con módulo  $|\Phi| = (|t|, |f|_\infty, \dots, |g''|_\infty)$ , siendo, por ejemplo  $|f|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq l} |f(x)|$ . A continuación, separaremos en (A.1) los términos *lineales*, es decir,  $O(|\Phi|)$ , de los de orden superior  $o(|\Phi|)$ , despreciando estos últimos frente a los primeros<sup>1</sup>. La ecuación resultante (A.4) (véase más adelante) será la aproximación lineal a (A.1). En primer lugar, obsérvese que  $x_s = 1 + O(t^2)$  y  $x_{ss} = O(t^2)$ , o equivalentemente,  $x_s = 1 + O(|\Phi|^2)$  y  $x_{ss} = O(|\Phi|^2)$ . Por tanto, para  $t \sim 0$  la ecuación  $x = x(s, t)$  define  $s = s(x, t)$ . Podemos considerar entonces  $v(x, t) = y(s(x, t), t)$ , reultando

$$y_s = v_x x_s, \quad y_t = v_x x_t + v_t \quad \text{y} \quad y_{tt} = v_{tt} + v_{xx} x_t^2 + 2v_{xt} x_t + v_x x_{tt},$$

que llevado a (A.1), y teniendo en cuenta que

<sup>1</sup> Conviene recordar la notación  $u(x) = o(v(x))$  (respectivamente  $u(x) = O(v(x))$ ) si cuando  $x \rightarrow 0$ , entonces  $u(x)/v(x) \rightarrow 0$  (respectivamente  $|u(x)| \leq M|v(x)|$ ,  $M > 0$ ).

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\mathcal{F} y_s}{e+1} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\mathcal{F} x_s}{e+1} v_x \right) = \rho x_{tt} v_x + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\mathcal{F} y_s}{e+1} x_s^2 \right) v_{xx},$$

da lugar a  $\rho v_{tt} = \left( \frac{\mathcal{F}}{e+1} x_s^2 - \rho x_t^2 \right) - 2\rho v_{xt} x_t - \rho F$ , que se puede escribir como

$$v_{tt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\mathcal{F}}{e+1} x_s^2 - T_0 - \rho x_t^2 \right) v_{xx} - 2v_{xt} x_t - F + \frac{T_0}{\rho} v_{xx},$$

es decir,

$$v_{tt} = -F + \frac{T_0}{\rho(x)} v_{xx} - \frac{T_0}{\rho(s)} \frac{\rho(s) - \rho(x)}{\rho(x)} v_{xx} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\mathcal{F}}{e+1} x_s^2 - T_0 - \rho x_t^2 \right) v_{xx} - 2v_{xt} x_t. \quad (\text{A.2})$$

En el segundo miembro de dicha ecuación,  $-F = O(1)$ . Enseguida se ve que  $\frac{T_0}{\rho(x)} v_{xx} = O(|\Phi|)$ , mientras que

$$\left( \frac{\mathcal{F}}{e+1} x_s^2 - T_0 - \rho x_t^2 \right) v_{xx} - 2\rho v_{xt} x_t = o(|\Phi|), \quad (\text{A.3})$$

ya que, de hecho, tal cantidad es del orden de  $|\Phi|^2$ , mientras que  $\frac{T_0}{\rho(s)} \frac{\rho(s) - \rho(x)}{\rho(x)} v_{xx} = O(|\Phi|^3)$  cuando  $t$ ,  $f$  y  $g$  son pequeñas. En conclusión,

$$v_{tt} = \frac{T_0}{\rho(x)} v_{xx} - F, \quad (\text{A.4})$$

es la aproximación lineal de (A.1).

Comencemos estudiando los órdenes de magnitud de  $v_{xx}$  y  $v_{xt}$ . Tenemos que  $v(x, t) = y(s(x, t), t)$ ,  $v_x = y_s s_x$ ,  $v_{xx} = y_{ss} s_x^2 + y_s s_{xx}$  y  $v_{xt} = y_{ss} s_t s_x + y_{st} s_x + y_s s_{xt}$ . De  $x = x(s(x, t), t)$  se tiene que  $1 = x_s s_x$  y  $0 = x_{ss} s_x^2 + x_s s_{xx}$ , de donde  $s_x = O(1)$ , mientras que  $s_{xx} = O(t^2)$ . Por tanto,  $v_{xx}$  es del orden de  $\phi$ , es decir  $v_{xx} = O(|\Phi|)$ . Sin embargo,  $s_t = O(t)$  y  $s_{xt} = O(t)$ , pues derivando con respecto a  $t$  la identidad  $1 = x_s s_x$  se llega a  $0 = x_{ss} s_t s_x + x_{st} x_s + x_s s_{xt}$ , y basta tener en cuenta que  $x_{st} = O(t)$ . Así,  $v_{xt} = O(t)(y_{ss} + y_s) + O(|y_{st}|)$ . Como  $y_{ss} + y_s = f'' + f' + (g'' + g')t + O(t^2) = O(|\Phi|)$ ,  $y_{st} = g' + O(t) = O(|\Phi|)$ , entonces  $v_{xt} = O(|\Phi|)$ . Así, el término  $x_t v_{xt}$  en la ecuación (A.2) es despreciable frente a  $v_{xx}$ . En cuanto al coeficiente de  $v_{xx}$  en (A.3) (véase (A.2)), sabemos que  $y_s = O(|\Phi|)$ . Luego,

$$e = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} - 1 = \sqrt{1 + O(t^2 + |\Phi|^2)} - 1 = \sqrt{1 + O(|\Phi|^2)} - 1 = O(|\Phi|^2),$$

pues  $\sqrt{1+u} = 1 + O(u)$  y  $x_s = 1 + O(t^2)$ . Por otro lado,

$$\frac{\mathcal{F}}{1+e} = (T_0 + O(e))(1 + O(e)) = T_0 + O(e) = T_0 + O(|\Phi|^2),$$

mientras que  $\rho x_t^2 = O(t^2)$ , por ello dicho coeficiente es de orden 2 en  $\Phi$ , luego de orden 3 en  $\Phi$  al multiplicar por  $v_{xx}$ , y será entonces despreciable frente a  $v_{xx}$ . En

cuanto a  $\rho(s(x, t)) - \rho(x)$ , nótese que  $\rho(s(x, t)) - \rho(x) = \rho'(x + \theta(s(x, t) - x))(s(x, t) - x)$ , con  $0 < \theta < 1$ . Como  $s(x, t) = x + O(t^2)$  se tiene que  $\rho(s(x, t)) - \rho(x) = O(t^2)$ . Al ser  $\rho > 0$  en  $0 \leq s \leq l$ , se deduce que (A.4) es la linealización de (A.2).

Si volvemos a las condiciones iniciales, como  $s(x, 0) = x$ , mientras  $s_t(x, 0) = 0$  resulta que  $v = v(x, t)$  satisface el *problema de contorno y valor inicial*

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - F(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Hemos puesto  $c^2 = T_0/\rho(x)$ , donde  $c$  se define como la velocidad de propagación de las perturbaciones. Las condiciones de contorno en (A.5) se llaman *de tipo Dirichlet homogéneas*. Otras posibles condiciones de contorno pueden ser:

- *De tipo Neumann:*  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ ;
- *De tipo Robin:*  $-u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = 0$ .

Por otra parte, pueden considerarse problemas mixtos de contorno donde se alternan condiciones de diferente tipo en los extremos. También pueden considerarse condiciones de contorno no homogéneas, por ejemplo  $u(0, t) = \alpha(t)$  y  $u(l, t) = \beta(t)$ , que en este caso ( $\alpha$  y  $\beta$  datos) se llamarían *de tipo Dirichlet no homogéneo*. La ecuación (A.4) (*ecuación de ondas forzada o perturbada por F*) puede contener más términos, por ejemplo,  $v_{tt} = \frac{T_0}{\rho} v_{xx} - bv_t - F$ , que es conocida como la *ecuación de ondas amortiguada*, y en la que el término  $bv_t$  representa una fricción aerodinámica.

## A.2. Ecuación de onda bidimensional

En la subsección anterior debe haber quedado de manifiesto que la deducción de la ecuación de onda en el caso unidimensional no es, en absoluto, trivial. Una generalización al caso bidimensional puede llevarse a cabo suponiendo una membrana elástica sujeta a un bastidor  $\partial\Omega$  que es la frontera (regular, es decir una curva de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ) de un dominio  $\Omega$  del plano, y considerando ahora movimientos en la forma

$$x = x(s_1, s_2, t), \quad y = y(s_1, s_2, t), \quad z = z(s_1, s_2, t), \quad (s_1, s_2) \in \Omega,$$

o de manera simplificada, que el movimiento es puramente vertical y que inicialmente, la membrana  $\mathcal{M}$  está en reposo bajo el efecto de una tensión constante  $T_0$ , es decir,  $x \equiv s_1$ ,  $y \equiv s_2$  y  $z \equiv 0$ . Consideramos que  $x \equiv s_1$  e  $y \equiv s_2$  en los movimientos futuros, con lo que perfil de la membrana se puede escribir como  $u = u(x, y, t)$  con  $(x, y) \in \Omega$ . Cada trozo  $\mathcal{D}$  de la membrana,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t) = \{z = u(x, y, t) / ((x, y) \in \mathcal{D})\}$ , está

sometido a la acción de fuerzas exteriores al sistema (gravedad, fricción aerodinámica) y a fuerzas interiores debidas a la variación de la tensión por elasticidad del material.

La segunda ley de Newton establece las ecuaciones del movimiento en la forma  $\bar{p}' = F_i^I + F_i^E$ , donde  $\bar{p}$  es el momento lineal de  $\mathcal{D}$  que vale

$$\bar{p} = \left( \int_{\mathcal{D}} \rho(x, y) x_t dx dy, \int_{\mathcal{D}} \rho(x, y) y_t dx dy, \int_{\mathcal{D}} \rho(x, y) u_t dx dy \right),$$

y donde admitiremos que las dos primeras componenetes son cero. Contabilizamos la fuerza extrema neta sobre  $\mathcal{D}$  en la forma  $\bar{F}_i^E = (0, 0, -\int \rho(x, y) F(x, y, t) dx dy)$ ; aquí de nuevo  $\rho > 0$  en  $\bar{\Omega}$  representa la densidad de  $\mathcal{M}$ . Para las fuerzas interiores introducimos la tasa (densidad) de deformación puntual  $e = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1$ , a la que se llega por el mismo razonamiento que en el caso de la cuerda. Ahora, las fuerzas de tensión sobre  $\mathcal{D}$  en un punto  $P$  actúan siguiendo la dirección de la normal unitaria exterior  $\bar{v}$  a  $\mathcal{D}$  que es además tangente a  $\mathcal{M}$  en dicho punto. Para calcular  $\bar{v}$  en  $P = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$  suponemos que  $f$  y  $g$  son regulares en  $\partial\mathcal{D} = \{x = f(s), y = g(s)\}^2$ . Tomamos el vector unitario tangente  $\bar{t} = (f'^2 + g'^2)^{-1/2} \cdot (f', g')$  y la normal unitaria exterior a  $\partial\mathcal{D}$  en el plano,  $\bar{n} = (f'^2 + g'^2)^{-1/2} \cdot (g', -f')$ . Entonces,

$$v(P) = \frac{(n_1 + u_t u_y, n_2 - u_t u_x, u_n)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \sqrt{1 + u_t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \sqrt{1 + u_t^2}} (\bar{n} + u_t (u_y, -u_x), u_n),$$

donde  $u_t = \nabla u \cdot \bar{t}$  y  $u_n = \nabla u \cdot \bar{n}$ .

Una vez establecida la dirección de la fuerza de tensión  $\bar{T}(P, t)$  en el punto  $P$  e instante  $t$ , es necesario observar que en elasticidad, el módulo  $T(P, t)$  de  $\bar{T}$  va a medir la magnitud de la tensión por unidad de longitud de arco  $dl$  en  $\partial\mathcal{D}$ . En otras palabras, para conocer la magnitud de la fuerza neta sobre un arco  $\Gamma$  de  $\partial\mathcal{D}$ , basta con efectuar la integral de línea

$$\int_{\Gamma} T(P, t) dl = \int_a^b T(P) \sqrt{f'^2 + g'^2 + |\nabla u \cdot (f', g')|^2} ds,$$

en donde hemos parametrizado  $\Gamma$  en la forma  $\{(f(s), g(s), u(f(s), g(s))) \mid a < s < b\}$ . De ahí, la resultante de las fuerzas internas sobre  $\mathcal{D}$  será

$$F_i^I = \int_{\partial\mathcal{D}} \bar{T}(P) dl = \left( \int_{\partial\mathcal{D}} T(P) \frac{\bar{n} + u_t (u_y, -u_x)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \sqrt{1 + u_t^2}} dl, \int_{\partial\mathcal{D}} T(P) \frac{u_n}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \sqrt{1 + u_t^2}} dl \right),$$

en donde, si  $\mathcal{M}$  no sufre desplazamientos horizontales, deberá cumplirse

$$\int_{\partial\mathcal{D}} T(P) \frac{\bar{n} + u_t (u_y, -u_x)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \sqrt{1 + u_t^2}} dl = 0.$$

<sup>2</sup> Se supone que  $f$  y  $g$  recorren  $\partial D$  siguiendo las agujas del reloj.

Falta pues definir la relación que liga la tensión  $T(P)$  con la deformación  $e$ . Como antes (*Ley de Hooke*), admitiremos que  $T(P) = \mathcal{T}(e, P) = T_0 + O(e)$ . Podemos ya escribir las ecuaciones del movimiento que establecen  $\bar{p}' = F_i^E + F_i^I$ , es decir,

$$\left(\int_{\Omega} \rho x_{tt} dx dy, \int_{\Omega} \rho y_{tt} dx dy, \int_{\Omega} \rho z_{tt} dx dy\right) = (0, 0, -\int_{\Omega} F(x, y, t) dx dy) + \left(\int_{\partial\Omega} T(P) \frac{\bar{n} + u_{\tau}(u_y, -u_x)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2} \sqrt{1+u_{\tau}^2}} dl, \int_{\partial\Omega} T(P) \frac{u_n}{\sqrt{1+|\nabla u|^2} \sqrt{1+u_{\tau}^2}} dl\right). \tag{A.6}$$

Procedamos a continuación a linealizar el problema. Vamos a suponer que a lo largo del movimiento los desplazamientos son lo suficientemente pequeños como para que lo sean  $u$  y  $\nabla u$  (en estado de reposo  $u \equiv 0$ ). En este caso se tienen las relaciones  $e = O(|\nabla u|^2)$ ,  $T(P) = \mathcal{T}(e, P) = O(|\nabla u|^2)$ ,

$$\sqrt{f'^2 + g'^2 + |\nabla u \cdot (f', g')|^2} = \sqrt{f'^2 + g'^2} + O(|\nabla u|^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2} \sqrt{1+u_{\tau}^2}} = 1 + O(|\nabla u|^2) \quad \text{y} \quad \frac{u_n}{\sqrt{1+|\nabla u|^2} \sqrt{1+u_{\tau}^2}} = u_n + O(|\nabla u|^3),$$

mientras que  $u_{\tau}(u_y, -u_x) = O(|\nabla u|^2)$ . Despreciando en (A.6) los términos de orden superior a  $u$  y  $|\nabla u|$  llegamos a las identidad  $\int_{\partial\Omega} T_0 \bar{n} dl = 0$ , que es compatible con el hecho de que  $x_{tt} = y_{tt} = 0$  en  $\Omega$ , y

$$\int_{\Omega} \rho u_{tt} dx dy = -\int_{\Omega} \rho F(x, y, t) dx dy + \int_{\partial\Omega} T_0 u_n dl.$$

Por el teorema de la divergencia,

$$\int_{\partial\Omega} T_0 u_n dl = \int_{\partial\Omega} T_0 \operatorname{div}(\nabla u) dx dy.$$

Llegamos así a la relación

$$\int_{\Omega} \rho u_{tt} - T_0 \Delta u + \rho F dx dy = 0,$$

que es la versión integral de la ecuación que deseamos obtener.

El mismo argumento nos conduce a la ecuación  $\int_{\mathcal{D}} \rho u_{tt} - T_0 \Delta u + \rho F dx dy = 0$ , siendo  $\mathcal{D}$  cualquier subdominio regular pequeño (por ejemplo un rectángulo) contenido en  $\Omega$ . Por tanto, la función  $u(x, y, t)$  es la solución del problema de contorno y valor inicial:

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{T_0}{\rho} \Delta u - F & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) & (x, y) \in \Omega, \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.7}$$

A(A.7) se le conoce como un *problema de contorno de tipo Dirichlet homogéneo*. Como en el caso unidimensional, pueden considerarse otro tipo de condiciones de contorno:

- De tipo Neumann:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x, y, t) = 0$  para todo  $(x, y) \in \partial\Omega$ ;
- De tipo Robin:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x, y, t) + \beta u(x, y, t) = 0$  para todo  $(x, y) \in \partial\Omega$ ,

en donde  $\bar{n}$  es la normal unitaria exterior a  $\partial\Omega$  y  $\beta$  es una función continua y positiva. Todas las condiciones pueden considerarse en su *versión no homogénea*. Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x, y, t) + \beta u(x, y, t) = \alpha(x, y, t), \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial\Omega,$$

en la que  $\alpha$  es un dato. La ecuación de las ondas puede contener otros términos en el segundo miembro, por ejemplo

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho} \Delta u - bu_t - F,$$

que se llama *ecuación de ondas amortiguada*. De nuevo el término  $\frac{T_0}{\rho}$  se designa por  $c^2$ , siendo  $c$  la *velocidad de propagación*.

### A.3. Ecuación de onda tridimensional

Las magnitudes que describen el estado de un fluido son el campo de velocidades  $\mathbf{u}(x, t)$ , la presión  $p(x, t)$  y la densidad  $\rho(x, t)$ . La conservación de la masa se describe mediante la ecuación de continuidad:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Las fuerzas sobre un elemento  $B$  del fluido se descomponen en fuerzas de corto alcance (de cohesión) y fuerzas exteriores. Si las fuerzas del primer grupo derivan únicamente de la presión se dice que el fluido es ideal. Más precisamente, las fuerzas sobre  $B$  ejercidas por el fluido circundante se ejecutan sobre su frontera  $\partial B$ , dirigidas normalmente hacia el interior y con una intensidad descrita por una densidad de fuerzas  $p(x, t)$  por unidad de superficie (presión). La conservación del momento lineal conduce a la ecuación del balance de fuerzas

$$\rho(\mathbf{u}_t + D\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho F_e, \quad (\text{A.9})$$

en donde  $\mathbf{u}_t + D\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_t + (\nabla u_i \cdot \mathbf{u})_{1 \leq i \leq 3}$  es la aceleración advectiva y  $F_e$  la densidad de fuerzas exteriores por unidad de masa.

Conjuntamente, (A.8) y (A.9) son las ecuaciones de Euler, que forman un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas. Para cerrarlo se introduce una ecuación de tipo termodinámico relacionando presión y densidad en condiciones adecuadas:

$$\frac{p}{\rho_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \gamma > 0, \quad (\text{A.10})$$



donde  $p$  y  $\rho_0$  son valores constantes de referencia. Asimismo, la tasa de variación de  $\rho$  (condensación) se define como  $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ , luego, de (A.10) se tiene que  $p = p_0(1 + s)^\gamma$ . Supondremos que  $F_e = 0$  mientras que, para llegar a ecuaciones lineales admitimos que el fluido sufre pequeñas variaciones ( $\mathbf{u}$  y  $s$  son pequeños). Esto permite asumir que

$$p = p_0(1 + \gamma s). \tag{A.11}$$

Por otro lado, (A.9) se sustituye por  $\mathbf{u}_t = -\nabla p$ , de modo que, despreciando términos de orden superior, obtenemos  $\text{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho_0 \text{div} \mathbf{u}$ . La ecuación de continuidad (A.8) se simplifica a  $s_t + \text{div} \mathbf{u} = 0$ . De ahí,

$$\mathbf{u}_t = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -c^2 \nabla s, \tag{A.12}$$

donde  $c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ . Por tanto,  $s_{tt} = c^2 \Delta s$ . Asimismo, de (A.11) resulta  $p_{tt} = c^2 \Delta p$ . Ambas son la ecuación de ondas correspondiente a la velocidad  $c$ . Como vemos, dicho número que describe la velocidad de propagación de las perturbaciones (*velocidad del sonido*) es de naturaleza esencialmente termodinámica.

En cuanto a la velocidad inicial, supondremos  $\mathbf{u}_0 = -\nabla U_0(x)$ , es decir, que deriva de un potencial  $U_0$ . Integrando la ecuación (A.12) en tiempo resulta

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - c^2 \int_0^t \nabla s ds,$$

de donde

$$\mathbf{u} = -\nabla \left( \mathbf{u}_0 - c^2 \int_0^t s ds \right) =: -\nabla U(x, t),$$

luego  $\mathbf{u}$  deriva de un potencial en cada instante  $t$ . De ahí,

$$U_{tt} = c^2 s_t = c^2 \text{div}(-\mathbf{u}) = c^2 \Delta U.$$

En conclusión, las magnitudes  $\mathbf{u}$ ,  $s$  ( $\rho$ ) y  $p$  cumplen la ecuación de ondas, la que describe la propagación del sonido.



---

## Bibliografía

- [1] S. S. ANTMAN, *The Equations for Large Vibrations of Strings*, Ammer. Math. Soc. 87(5) (1980), 359–370.
- [2] D. J. BENSON, *Music: a mathematical offering*, Cambridge University Press, 2006.
- [3] P. BUSER, J. H. CONWAY, P. DOYLE, K.-D. SEMMLER, *Some planar isospectral domains*, International Mathematics Research Notices (1994), 391–400.
- [4] A. CHAIGNE, V. DOUTAUT, *Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars*, J. Acoust. Soc. Amer. 101(1) (1997), 539–557.
- [5] E. F. F. CHLADNI, *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, Weidmanns Erben und Reich, Leipzig, 1787.
- [6] J. W. COLTMAN, *Acoustics of the flute*, Physics Today 21(11) (1968), 25–32.
- [7] A. CUYT, V. PETERSEN, B. VERDONK, H. WAADELAND AND W. B. JONES, *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*, Berlin Springer (431 p.) 2008.
- [8] W. C. ELMORE, M. A. HEALD, *Physics of waves*, Dover Publications, 2012.
- [9] H. FLETCHER, *Loudness, pitch and the timbre of musical tones and their relation to the intensity, the frequency and the overtone structure*, J. Acoust. Soc. Amer. 6 (2) (1934), 59–69.
- [10] C. GORDON, D. L. WEBB, S. WOLPERT, *One cannot hear the shape of a drum*, Bulletin of the Amer. Math. Soc. 27 (1992), 134–138.
- [11] A. W. GUMMER, W. HEMMERT AND H. P. ZENNER, *Resonant tectorial membrane motion in the inner ear: Its crucial role in frequency tuning*, Proc. Natl. Acad. Sci (US) 93(16) (1996), 8727–8732.
- [12] H. HELMHOLTZ, *Die Lehre von den Tonempfindungen als Physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Verlag F. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1863.
- [13] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1–23.
- [14] J. KEENER AND J. SNEYD, *Mathematical physiology*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1998.

- [15] T. W. KÓRNER, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1989.
- [16] I. PERAL ALONSO, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad Autónoma de Madrid, 2004.
- [17] J. SABINA DE LIS, *Notas sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de La Laguna.
- [18] H. F. WEINBERGER, *A First Course in Partial Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1995.

# A Mathematical Introduction to Sound Theory

## Abstract

**A** *Mathematical Introduction to Sound Theory* is a work that contains two parts and a final annex. The central axis of this work is the study of the sound production of the different organological families, leaving to a margin the electrophones instruments that would give for a whole work in itself. In the first chapter, we introduce the basic and necessary aspects to understand the calculations and results that lead the analysis of the wave equations that are considered in Chapter 2. We introduce briefly the Fourier Theory, that is fundamental for the analysis of the one-dimensional wave equation that characterizes string and wind instruments, and Bessel functions, that are crucial for the families of membranophones and idiophones (centering our study on the drum, the xylophone, and the tubular bells, we analyze a two-dimensional wave equation of degree four). The final annex gathers all the information about the deduction of the wave equation in dimensions one, two, and three.

## 1. Introduction

The mathematics, throughout history, has influenced several musical aspects. The scales and the proportions that govern the intervals, sounds, shapes and musical structures are some of them. But can we talk about them without sound? Would there be scales and music without them? Several recent studies (S.XX and XXI) have discussed these issues. The concept of music, as we understand it, is linked to a sound sensation that occurs when a wave, propagated by the elastic medium, reaches the ear and, after an internal process, is analyzed in the brain. Leaving aside the physiological part, in this work we go into the analysis and the study of the main and fundamental element of music: *the sound*, and more specifically, its producer agent, *the waves*.

## 2. Preliminaries

This first chapter has two main aims.

1. Introduce and contextualize, briefly, the conditions that accompanies the propagation of a wave through the air. We can deduce that the nature of the solutions of the wave equation is established as the sum of two electric fields,  $f(x - ct) + g(x + ct)$ , that come from the principle of superposition of D. Bernoulli, and the periodicity of them as sinusoidal waves given to the perception of a tone.
2. Address some basic questions about Fourier series and Bessel functions that are used in Chapter 2.
  - **Fourier series:** We introduce the Fourier series of a periodic function and we explain how to compute the corresponding coefficients of the trigonometric series. Some comments about convergence are briefly mentioned and the *Gibbs phenomena* is also showed.
  - **Bessel functions:** We introduce the Bessel differential equation of order  $p$ :  $x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - p^2)y = 0$  with  $p > 0$ . By using the *Frobenius method* we find the general solution as a linear combination of the Bessel functions of the first and second kind. These functions are expressed as a power series centered at the *regular singular point*  $x = 0$ .

## 3. Brief mathematical guide for the orchestra

In this chapter, we look for the solutions of the wave equation that characterizes each organological family.

1. **Cordophones:** The movement of a string is described by the one-dimensional wave equation  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ . By using the D'Alembert method we found the solution of this equation, in particular in the following two particular cases: the *plucked string* (zero initial velocity), and the string that starts from an initial position  $s_0$ . In addition, we also mention the case of the inclined strings.
2. **Aerophones:** The vibration of the sound tubes follows the same equation as the cordophones but with the difference that

here, we have to introduce the variables *displacement* and *acoustic pressure* for its analysis. We see the difference between an open and closed tube depending on the harmonics that are presented, and the differences with a conical tube.

3. **Membranophones, the drum:** We analyze the solutions of the two-dimensional equation  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$  where  $c = \sqrt{T/\rho}$  with  $T$  the tension at the edges of the membrane, and  $\rho$  the density of skin area of the drum. Using polar coordinates and Bessel functions we analyze the solution of this equation. Here, we can see that only Bessel functions of the first kind take part in the general solution, otherwise, an "explosion" will occur when beating the drum just in the center. In addition, we discuss briefly the vibrational modes of the drum based on the Laplace operator and we present a nice known result in Sound Theory that answers the following question: Can one hear the shape of a drum?

4. **Idiophones, xylophone and tubular bells:** We comment the wave equation of degree four  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E I}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$  that characterizes these instruments.

## 4. Appendix: The wave equation

In order to analyze the qualities of sound it is necessary to find the wave equation that characterizes it. The Appendix includes some brief notions about the deduction of the wave equation, beginning with the equation in one-dimension, then extending it to two-dimension and concluding with some intuitive ideas for the tridimensional case.

## References

- [1] S. S. ANTMORE, *The Equations for Large Vibrations of Strings*, *Ammer. Math. Soc.* 87(5) (1980), 359–370.
- [2] D. J. BENSON, *Music: a mathematical offering*, Cambridge University Press, 2006.
- [3] A. CHAIGNE, V. DOUTAUT, *Numerical simulations of xylophones. I. Times-domain modeling of the vibrating bars*, *J. Acoust. Soc. Amer.* 101(1) (1997), 539–557.
- [4] J. W. COLTMAN, *Acoustics of the flute*, *Physics Today* 21(11) (1968), 25–32.
- [5] W. C. ELMORE, M. A. HEALD, *Physics of waves*, Dover Publications, 2012.
- [6] H. FLETCHER, *Loudness, pitch and the timbre of musical tones and their relation to the intensity, the frequency and the overtone structure*, *J. Acoust. Soc. Amer.* 6 (2) (1934), 59–69.
- [7] T. W. KÖRNER, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1989.
- [8] I. PERAL ALONSO, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad Autónoma de Madrid, 2004.
- [9] J. SABINA DE LIS, *Notas sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de La Laguna.