Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Aitor Dionis Leandro

Gestión de inventarios de productos en el sector alimentario

Management of product inventories in the food sector

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2019

Dirigido por
Joaquín Sicilia Rodríguez

Joaquín Sicilia Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A los responsables y directivos de la empresa que nos brindaron su colaboración y ayuda.

A D. Joaquín Sicilia Rodríguez por el empeño y dedicación en este trabajo para que se realizara de forma adecuada y eficiente.

A mis amigos por hacer más llevadero el largo proceso del trabajo.

A mi familia, en especial a mi padre, que me enseñó los valores necesarios para conseguir alcanzar mis metas.

Aitor Dionis Leandro
La Laguna, 10 de septiembre de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se estudia la gestión del inventario de algunos productos que comercializa una empresa del sector alimentario ubicada en la isla de Tenerife.

Se describen las compras y ventas de tres productos realizadas por la empresa durante el año 2017. A partir de ahí se determinan los costes asociados con la gestión llevada a cabo por la empresa para esos productos. Luego se estudia y analiza la evolución que hubieran tenido los inventarios de esos productos si se hubieran aplicado las políticas óptimas asociadas a los sistemas de nivel de inventario.

Se concluye que utilizar esas políticas hubiera supuesto una mejora económica notable ya que se hubiese ahorrado una parte del gasto relacionado con la gestión del inventario de esos productos.

Palabras clave: *Inventario – Gestión – Producto – Empresa – Coste.*

Abstract

This paper studies the inventory management of some products marketed by a company in the food sector located on the island of Tenerife.

The company's purchases and sales of three products during 2017 are described. Thereafter, the costs associated with the management carried out by the company for these products are determined. It then examines and analyses the evolution of inventories of these products if the best policies associated with inventory level systems had been implemented.

It is concluded that the use of such policies would have been a significant economic improvement, since some of the expenditure related to inventory management of those products would have been saved.

Keywords: *Inventory – Management – Product – Company – Cost.*

Índice general

Introducción

Los sistemas de inventario permiten estudiar y analizar la administración y planificación efectiva del flujo de bienes desde la adquisición de materiales necesarios para la fabricación de los productos hasta el suministro de productos acabados a los consumidores finales. Ayudan en la toma de decisiones relacionados con el almacenamiento y la reposición del stock de productos. Las reglas de decisión en los sistemas de inventario deben determinar cuándo los items deben ser repuestos y qué cantidades se piden de cada uno para reponer el stock.

Un sistema de inventario y producción se caracteriza por un número amplio de elementos o componentes que tienen que ser planificados de forma eficiente, en orden a suministrar los productos requeridos en las cantidades apropiadas durante un tiempo aceptable, manteniendo la calidad de los productos y todo ello con un costo razonable.

Los objetivos fundamentales deben ser la determinación de los niveles de inventario, tanto de los materiales de entrada para la fabricación de los productos como para los bienes acabados.

En la asignatura Modelos de Investigación Operativa se describe un conjunto de modelos de gestión de stocks que permiten la aplicación de políticas eficientes a la realidad empresarial actual. Los conocimientos que he adquirido en esta asignatura han hecho que me motive a estudiar cómo la teoría puede ser llevada a la práctica en una empresa con datos reales. Por ello nos pusimos en contacto con una empresa en el sector alimentario para buscar su colaboración y poder analizar los datos relacionados con las compras y ventas de algunos productos, y así contrastar si su política de gestión de inventarios era adecuada o podía mejorarse.

1

Fundamentos teóricos

1.1. Introducción

En el funcionamiento de las empresas intervienen no solo recursos tecnológicos y humanos, los cuales son muy importantes, sino también unos recursos materiales que son los inventarios y que son necesarios tanto en la fabricación de los productos como en la comercialización de los mismos. Bajo el término inventario se define un conjunto de bienes, artículos o productos que están almacenados y que además poseen un cierto valor económico. El fin de estos bienes es cubrir la demanda solicitada por los clientes. Con la Teoría de Inventarios buscamos una gestión adecuada de los mismos. Para ello, utilizamos un modelo matemático que nos describa el sistema y así poder realizar una política óptima para reducir los costos relacionados con la gestión, mantenimiento y reposición de los inventarios, cumpliendo siempre con las demandas de los clientes. Tienen un papel muy importante en la economía de la empresa ya que tener los artículos necesarios en el inventario para cubrir las demandas de los clientes es de vital importancia.

El mantenimiento de stocks adecuados de productos para la buena gestión de la empresa es uno de los objetivos principales, ya que implican una inversión y costo elevado que hay que administrar de manera eficiente. Al mantenimiento además hay que sumarle el gasto que supone la reposición de estos artículos. Por ello existe la necesidad de gestionar los inventarios de manera adecuada para controlar los gastos de la empresa y que no se produzcan errores que puedan llevar a la pérdida de ganancias debido a una incorrecta gestión de los recursos.

Por ello vamos a realizar un estudio sobre los inventarios de algunos productos para, por ejemplo, saber las cantidades de artículos que tenemos que pedir, cuántas veces y cada cuánto tiempo reponer estos bienes y calcular el costo mínimo según varios datos de compras y ventas de productos incluidos en el almacén.

1.2. Necesidad e importancia del inventario

Los inventarios son importantes para cualquier empresa que se dedique a la venta o distribución de ciertos bienes o productos. Gracias a su buena utilización, una empresa puede organizarse en base a éstos para el control y disposición de la mercancía. Por ello son considerados una parte importante en la organización de las actividades de la empresa. Además nos ayudan a planificar la producción, permiten almacenar bienes para cubrir una demanda pronosticada, protegerse de la inflación y los cambios en los precios de los productos, obtener descuentos por cantidades solicitadas, etc.

Para estudiar la evolución de los inventarios y determinar cuándo se debe reponer y qué cantidad debemos solicitar nos apoyamos en un conjunto de modelos de gestión de inventarios que nos dicen la política de inventario más apropiada para el sistema real que estamos analizando.

1.3. Objetivos de los modelos de gestión de inventarios

Los objetivos de los modelos de inventario son proporcionar políticas eficientes que deben aplicarse en la gestión de los inventarios. Para ello se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Los posibles retrasos en la entrega de los productos. Existe predisposición a que se produzca retraso en los pedidos debido a diversos factores como pueden ser obras en la carretera, manifestaciones, averías, etc. Si no disponemos de inventario el producto iría directamente desde su producción a la venta del mismo.
- Reducción en los gastos de mantenimiento, rotura y reposición. Con una política óptima de inventario reducimos estos gastos, ya que conseguimos realizar los pedidos en una fecha adecuada y solicitando las cantidades óptimas.
- Controlar la cantidad en stock para satisfacer la demanda de los productos. Aunque las demandas varíen y no podemos conocerla con precisión, podemos estudiar la distribución de la demanda y así cubrir las ventas imprevistas de nuestros productos.

1.4. Elementos del inventario

Hay varias propiedades que configuran un sistema de inventario:

- **Demandas**: Son las cantidades de bienes y/o servicios que los compradores o consumidores están dispuestos a adquirir para satisfacer sus necesidades. Dichos clientes tienen la capacidad de pago para realizar la transacción a un precio determinado y en un lugar establecido. Podemos distinguir dos tipos de demanda:
  - Demanda determinista: Cuando se conoce la cantidad solicitada por el cliente. Puede ser constante o variable con el tiempo.
  - Demanda probabilística: Cuando la cantidad solicitada no se conoce con exactitud pero sigue una distribución de probabilidad.
- **Reposiciones**: Son las cantidades de producto que se añaden al inventario en determinados periodos para poder cubrir posibles demandas futuras.
- **Costos**: Son medidas económicas que se utilizan en la reposición y mantenimiento de artículos. Los tipos de costos son:
  - *Costo de mantenimiento (C_1)*: Este costo está involucrado tanto en la conservación como en la realización de inventarios. Como ejemplos tenemos el costo del almacén, de la limpieza, de agua, luz, etc.
  - *Costo de rotura (C_2)*: Este costo implica la no existencia de artículos en el inventario, y por lo tanto, no poder cubrir la demanda solicitada. El costo de ventas perdidas, horas extraordinarias y trabajo administrativo para cubrir roturas y la pérdida de clientes son algunos ejemplos.
  - *Costo de reposición (C_3)*: Este costo está directamente relacionado con la reposición de los inventarios. Por ejemplo el costo de hacer un pedido, incluyendo el coste de transporte, seguros, etc.
- **Restricciones**: Inconvenientes o restricciones relacionados con la administración, el lugar físico, la economía o de cualquier otro tipo, que puedan condicionar la gestión del inventario. Un ejemplo puede ser la caducidad de los productos o la capacidad que posee el almacén.
- **Tiempo de retardo** (L): Tiempo que transcurre desde que se solicita el pedido hasta que se añade al stock. Puede variar según el producto, y por lo tanto, tendremos un periodo de retardo para cada artículo. Si este periodo es bastante corto o insignificante se considera que es nulo.
- **Periodo de gestión o planificación** (t): Es el periodo que transcurre entre reposiciones consecutivas. En general, t puede ser siempre el mismo (t) o puede ir variando.

1.5. Políticas de inventario

Las políticas de inventario son estrategias que se siguen a la hora de enfrentarnos a un problema de gestión de inventarios para poder resolverlo. Estas estrategias buscan responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuándo reponer el inventario?
  1. Se repone cuando la cantidad en el inventario es inferior a una cantidad s.
  2. El inventario se repone cada cierto periodo de tiempo t.

  $$\begin{cases} s= \textit{punto de reposición (recorder point)} \\ t= \textit{periodo de gestión o planificación } (\textit{schedulingperiod}) \end{cases}$$
- ¿Qué cantidad debemos añadir al inventario en cada reposición?
  La cantidad a reponer será de q unidades (tamaño del lote) y esta cantidad debe elevar el nivel del inventario hasta un punto de S (nivel de inventario) unidades.

Por lo tanto para determinar una política de gestión de stock se debe fijar un par ordenado, que establezca cuándo y cuánto se pide. Hay cuatro políticas a considerar.

1. **Política (s,q)**: solicitar un pedido de tamaño fijo de q unidades cuando el stock sea inferior a s unidades.
2. **Política (s,S)**: solicitar un pedido cuando el stock esté por debajo de s con un tamaño adecuado de forma que al añadir al stock el nivel de inventario suba a S.
3. **Política (t,q)**: solicitar un pedido fijo de q unidades cada t unidades de tiempo.
4. **Política (t,S)**: se realiza un pedido cada t unidades de tiempo, y el tamaño de este pedido debe ser tal que suba el nivel de inventario hasta S.

Para ayudar a entender los elementos y la política de inventario que hemos presentado previamente, en la siguiente sección se recoge el sistema clásico de tamaño del lote, que representa uno de los primeros modelos de gestión de inventario expuestos en la literatura.

1.6. Sistema clásico de tamaño del lote (Modelo EOQ)

Este sistema se conoce como el modelo *Economic Ordering Quantity* (EOQ) y tiene las siguientes características:

1. Demanda determinista con razón de demanda de r unidades por unidad de tiempo.
2. Punto de reposición $s = 0$, ya que no se permiten roturas.

3. Se solicita un tamaño de reposición q que es constante.
4. Tenemos una reposición instantánea.
5. El tiempo de retardo es nulo.
6. Se conoce tanto el costo unitario de mantenimiento c_1 como el costo de reposición c_3 por pedido.
7. Patrón uniforme de demanda.

La evolución del nivel de inventario se representa en la Figura 1.1.

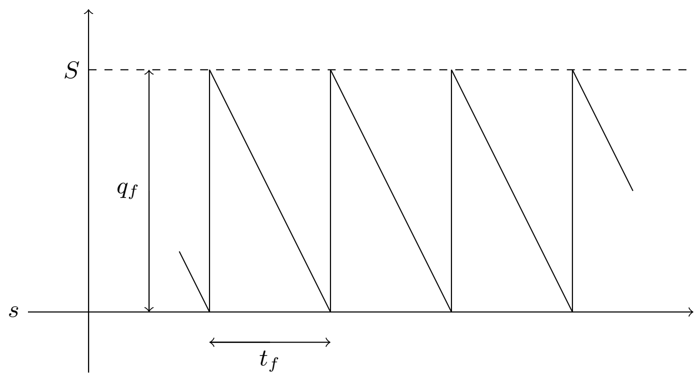

Figura 1.1. Gráfica del sistema clásico del tamaño del lote.

La cantidad pedida para reponer el inventario debe cubrir la demanda total durante el periodo de gestión. Por tanto, tenemos que:

$$q = rt \Rightarrow t = \frac{q}{r}$$

Procedemos ahora con el cálculo del coste de mantenimiento y el de reposición. El costo de mantenimiento viene dado por:

$$C_1 = c_1 I_1$$

donde I_1 = número medio de piezas en stock = $\frac{q}{2}$. Por tanto, se tiene

$$C_1 = C_1(q) = c_1 \frac{q}{2}$$

El costo de reposición viene dado por:

$$C_3 = c_3 I_3$$

donde I_3= número de reposiciones = $\frac{1}{t} = \frac{r}{q}$. Por tanto, se tiene

$$C_3 = C_3(q) = c_3 \frac{r}{q}$$

El coste C_2 asociado a las roturas no se tiene en cuenta ya que el modelo no permite roturas. Por lo tanto tenemos que minimizar la siguiente función de coste:

$$C = C_1(q) + C_3(q) \Rightarrow C(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_3 \frac{r}{q}$$

Para poder obtener la solución óptima debemos derivar e igualar a cero:

$$C'(q) = 0 \Leftrightarrow q_0 = \sqrt{\frac{2c_3 r}{c_1}}$$

El costo mínimo obtenido será:

$$C_0 = C(q_0) = c_1 \frac{q_0}{2} + c_3 \frac{r}{q_0} c_0 = \sqrt{2c_1 c_3 r} \tag{1.1}$$

Como la función $C(q)$ es convexa, se alcanza su mínimo en el punto $q = q_0$ con coste mínimo C_0. Nótese que si volvemos a derivar:

$$C''(q) = \frac{2c_3 r}{q^3} \geq 0$$

Como conclusión podemos decir que se trata de un "sistema de nivelación de costos", ya que la solución óptima q_0 se consigue cuando ambos costos (tanto costo de mantenimiento como de rotura) se igualan.

Caso de unidades discretas

Consideramos ahora que el tamaño del lote q viene dado por valores discretos, por ejemplo como múltiplos de u, es decir, $q = u, 2u, 3u, \cdots$. La función de coste es la misma:

$$C(q) = c_1 \frac{q}{2} + c_3 \frac{r}{q}$$

Ahora q_0 es el tamaño del lote óptimo, si verifica:

$$C(q_0) \leq C(q_0 + u) C(q_0) \leq C(q_0 - u)$$

lo cual equivale a

$$q(q - u) \leq \frac{2rc_3}{c_1} \leq q(q + u)$$

Así se obtiene una condición necesaria y suficiente para que q_0 sea óptima.

Observación 1.1. La condición anterior puede dar lugar a que obtengamos dos soluciones dependiendo de los parámetros del sistema.

Una vez presentado el modelo básico de tamaño del lote (EOQ) de gestión de inventarios, analizaremos en el siguiente capítulo los sistemas de nivel de inventario con demanda determinista y con demanda estocástica, en los cuales el periodo de gestión esta fijado previamente. Para cada módulo se desarrollará la política óptima de inventario y se determinará el costo mínimo correspondiente.

La razón de incluir esos modelos de gestión de inventarios en este trabajo es porque serán usados posteriormente como políticas alternativas a la política de inventario llevada a cabo por la empresa.

2

Sistemas de nivel de inventario

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos algunos modelos de gestión de inventarios, los cuales nos ayudarán posteriormente en el desarrollo de políticas de inventario alternativas a la utilizada por la empresa en la gestión y control del inventario de sus productos. Comenzaremos desarrollando el modelo clásico determinista de nivel de inventario, para luego utilizar el modelo con demanda aleatoria. En ambos modelos se analizarán también las soluciones cuando se trabaja con unidades discretas.

2.2. Sistema clásico de nivel de inventario

El sistema presenta las siguientes características:

1. Una demanda determinística (razón r unidades/unidad de tiempo).
2. Un periodo de gestión t_f constante y de valor fijo.
3. Se permiten roturas y las mismas se recuperan con la siguiente reposición (*backlogging*).
4. La razón de reposición es infinita
5. Un patrón de demanda uniforme.
6. El tiempo de retardo se considera nulo ($L = 0$).
7. Costos unitarios conocidos y constantes:
   c_1 = costo unitario de mantenimiento con dimensión $[c_1] = \frac{[\$]}{[\mathbb{Q}][T]}$
   c_2 = costo unitario de rotura con dimensión $[c_2] = \frac{[\$]}{[\mathbb{Q}][T]}$
   c_3 = costo de pedido, con dimensión $[c_3] = [\$]$

De lo anterior podemos concluir dos cosas:

La primera es que nuestro número de reposiciones es $I_3 = \frac{1}{t_f}$ lo que implica que nuestro costo de reposición sea conocido y constante:

$$C_3 = c_3 I_3 = c_3 \frac{1}{t_f} = K(cte)$$

Por ello, es un coste que no interviene en el cálculo del nivel de inventario óptimo S_0.
La segunda observación es que el tamaño del lote también es un valor constante. Como en general, la cantidad solicitada debe cubrir la cantidad demandada, se tiene que el tamaño del lote es $q_f = rt_f$.
Para poder determinar nuestra función de coste debemos tener en cuenta que los movimientos que se produzcan en el inventario dependerán del rango de variación de S.
Ahora pasamos a determinar nuestra función de coste:

$$C(S) = C_1(S) + C_2(S) + C_3 = c_1 I_1(S) + c_2 I_2(S) + K \tag{2.1}$$

donde:
$I_1(S)$ = número de piezas que hay en stock.
$I_2(S)$ = número medio de roturas.

Lógicamente minimizar la función de coste dada en la Figura 2.1 es equivalente a minimizar la función:

$$C(S) = c_1 I_1(S) + c_2 I_2(S)$$

A continuación vamos a determinar las cantidades I_1 e I_2.
Vamos a diferenciar tres casos según el nivel de inventario que tengamos:

1. Caso: S $\geq q_f$. De acuerdo con la Figura 2.1 se obtiene:

$$I_1(S) = \frac{Area}{t_f} = \frac{t_f q_f/2 + st_f}{t_f} = \frac{q_f}{2} + s = \frac{q_f}{2} + S - q_f = S - \frac{q_f}{2}$$

   Nótese que $s + q_f = S$.

$$I_2(S) = 0, \text{ ya que en el periodo } t_f \text{ no hay roturas para el caso estudiado.}$$

2. Caso: S ≤ 0. Seguimos la gráfica del nivel de inventario mostrada en la Figura 2.2.

   Así, la cantidad media mantenida en stock es

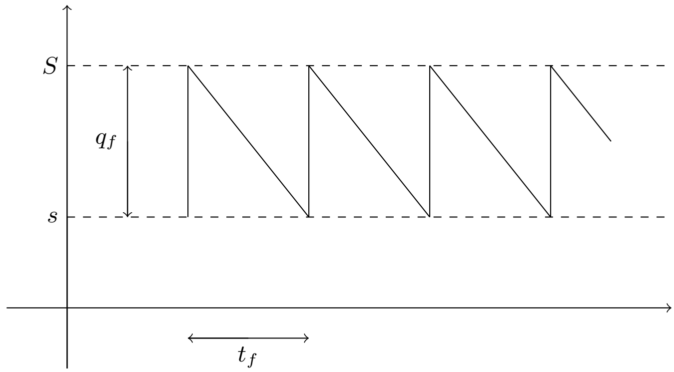

Figura 2.1. Gráfica de $S \geq q_f$.

$$I_1(S) = 0, \text{ ya que no habrían piezas en stock.}$$

La cantidad media de roturas es

$$I_2(S) = \frac{Area}{t_f} = \frac{-St_f + q_f t_f/2}{t_f} = \frac{q_f}{2} - S$$

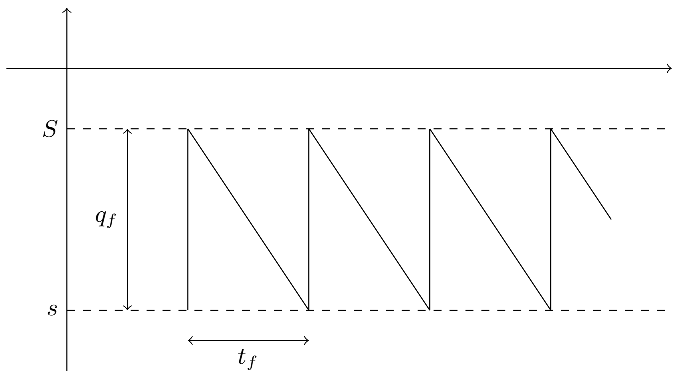

Figura 2.2. Gráfica de $S \leq 0$.

3. Caso: $0 \leq S \leq q_f$. Consideremos ahora
   t_1 = periodo de tiempo en el que hay stock (nivel de inventario positivo).
   t_2 = periodo de tiempo en el que hay rotura (nivel de inventario negativo).
   $t_f = t_1 + t_2$ periodo de gestión.

Siguiendo la evolución del nivel de inventario reflejada en la figura 2.3 se tiene que la cantidad media en stock es

$$I_1(S) = \frac{Area}{t_f} = \frac{St_1/2}{t_f} = \frac{S}{2} \cdot \frac{t_1}{t_f} = \frac{S^2}{2q_f}$$

Ya que de la semejanza de triángulos se tiene:

$$\frac{S}{q_f} = \frac{t_1}{t_f} \text{ y } \frac{t_2}{t_f} = \frac{-s}{q_f} = \frac{q_f - S}{q_f}$$

Ahora la cantidad media de roturas es

$$I_2(S) = \frac{Area}{t_f} = \frac{-st_2/2}{t_f} = \frac{t_2(q_f - S)/2}{t_f} = \frac{(q_f - S)^2}{2q_f}$$

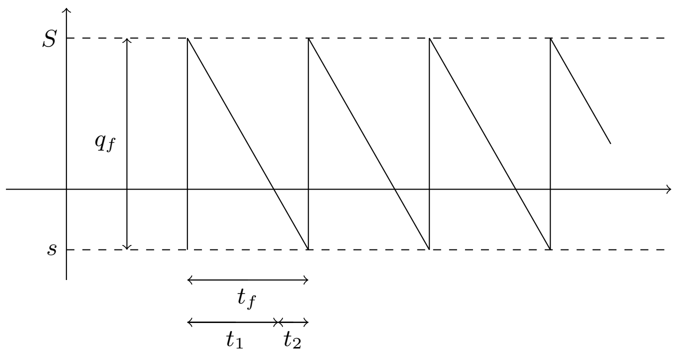

Figura 2.3. Gráfica de $0 \leq S \leq q_f$.

Por lo tanto, en resumen tenemos que:

$$I_1(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } S \leq 0 \\ \frac{S^2}{2q_f}, & \text{si } 0 \leq S \leq q_f \\ S - \frac{q_f}{2}, & \text{si } S \geq q_f \end{cases}$$

$$I_2(S) = \begin{cases} \frac{q_f}{2} - S, & \text{si } S \leq 0 \\ \frac{(q_f - S)^2}{2q_f}, & \text{si } 0 \leq S \leq q_f \\ 0, & \text{si } S \geq q_f \end{cases}$$

Entonces, nuestra función de coste será $C(S) = c_1 I_1(S) + c_2 I_2(S)$.

$$C(S) = \begin{cases} c_2\left(\frac{q_f}{2} - S\right), & \text{si } S \leq 0 \\ c_1\frac{S^2}{2q_f} + c_2\frac{(q_f-S)^2}{2q_f}, & \text{si } 0 \leq S \leq q_f \\ c_1 S - \frac{q_f}{2}, & \text{si } S \geq q_f \end{cases}$$

Debemos tener en cuenta que $C(S)$ es linealmente decreciente en $(-\infty, 0)$ y linealmente creciente en (q_f, ∞). Por lo tanto la solución que debemos buscar, a la que denominamos S^* debe estar en la región $0 \leq S \leq q_f$. Como consecuencia debemos minimizar:

$$C(S) = c_1\frac{S^2}{2q_f} + c_2\frac{(q_f - S)^2}{2q_f}$$
$$\text{Sujeto a} : 0 \leq S \leq q_f$$

En primer lugar derivamos e igualamos a cero, obteniendo

$$C'(S) = 0 \Rightarrow \frac{c_1 S}{q_f} - \frac{c_2(q_f - S)}{q_f} = 0 \Rightarrow \mathrm{S}^* = \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2}$$

El punto S^* verifica $0 \leq \mathrm{S}^* \leq q_f$ ya que $0 \leq \frac{c_2 q_f}{c_1+c_2} \leq q_f$
Si derivamos de nuevo obtenemos:

$$C''(S) = \frac{c_1}{q_f} + \frac{c_2}{q_f} = \frac{c_1 + c_2}{q_f} > 0$$

Por lo tanto S^* es un punto mínimo y C(S) es una función convexa en $0 \leq S \leq q_f$.
Además el costo mínimo será:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^* &= \mathrm{C}(\mathrm{S}^*) \\ &= \frac{2c_1\mathrm{S}^*}{2q_f} - \frac{2c_2(q_f - \mathrm{S}^*)}{2q_f} \\ &= \frac{c_1}{2q_f} \cdot \left[\frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2}\right]^2 + \frac{c_2}{2q_f} \cdot \left[q_f - \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2}\right]^2 \\ &= \frac{c_1 c_2 q_f}{2(c_1 + c_2)} \end{aligned}$$

En la siguiente subsección se analiza la política óptima en el caso en que se trabaje con unidades discretas.

2.2.1. Caso de unidades discretas

Ahora supongamos que trabajamos con unidades enteras múltiplos de un número u. En este caso $S = \ldots, -3u, -2u, -u, 0, u, 2u, 3u, \ldots$. Ahora S_0 será solución óptima para este caso discreto si cumple:

$$\begin{cases} C(S_0) \leq C(S_0 + u) \\ \\ C(S_0) \leq C(S_0 - u) \end{cases}$$

Considerando el intervalo $0 \leq S \leq q_f$, con la función de coste:

$$C(S) = \frac{2c_1 S^2}{2q_f} - \frac{2c_2(q_f - S)^2}{2q_f}$$

se debe verificar lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{2c_1 S^2}{2q_f} - \frac{2c_2(q_f - S)^2}{2q_f} \leq \frac{2c_1(S+u)^2}{2q_f} - \frac{2c_2(q_f - S+u)^2}{2q_f} \\ \\ \frac{2c_1 S^2}{2q_f} - \frac{2c_2(q_f - S)^2}{2q_f} \leq \frac{2c_1(S-u)^2}{2q_f} - \frac{2c_2(q_f - S+u)^2}{2q_f} \end{cases}$$

lo cual es equivalente a la condición

$$S - \frac{u}{2} \leq \frac{c_2 q_f}{c_1 + c_2} \leq S + \frac{u}{2}$$

Esta es una condición necesaria para que S sea un nivel de inventario óptimo, pero no es suficiente porque debemos comprobar también el coste cuando S sea el menor entero múltiplo de u que sea mayor que q_f. El nivel de inventario óptimo S* será aquel que tenga menor coste.

2.3. Sistema de nivel de inventario con demanda estocástica

Las fluctuaciones del inventario vienen descritas en la Figura 2.4. Como puede observarse cuando ocurre una demanda de x unidades el nivel de inventario disminuye de S a $S - x$ durante el periodo t_f.
Nótese que es un sistema tipo (1,2) en el cual el periodo de gestión t_f está fijado y donde debe determinarse el nivel de inventario óptimo S_0.

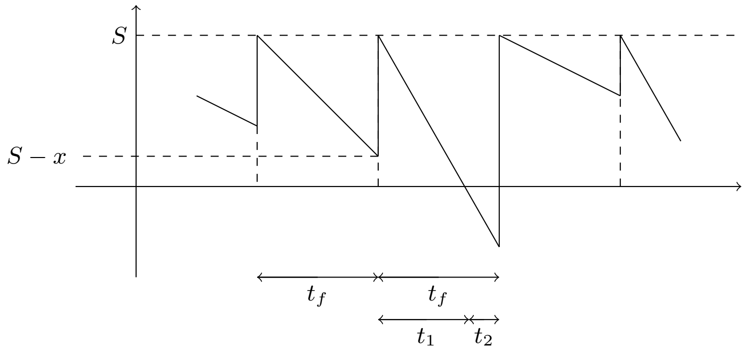

Figura 2.4. Gráfica de $0 \leq S \leq q_f$.

Sea f(x) la función de densidad de la demanda x durante el periodo t_f. Esta demanda se asume que ocurre con un patrón uniforme. Consideremos los costes unitarios:

$$c_1 = \text{costo unitario de mantenimiento, con dimensión } \frac{[\$]}{[Q][T]}$$

$$c_2 = \text{costo unitario de rotura con dimensión } \frac{[\$]}{[Q][T]}$$

Sea t_1 el periodo de tiempo en el que hay stock y t_2 el periodo de tiempo en el que hay roturas. Obviamente, $t_f = t_1 + t_2$.
Dos situaciones típicas surgen en este sistema, dependiendo de los valores relativos de S y x. Vienen descritos en la Figura 2.5.

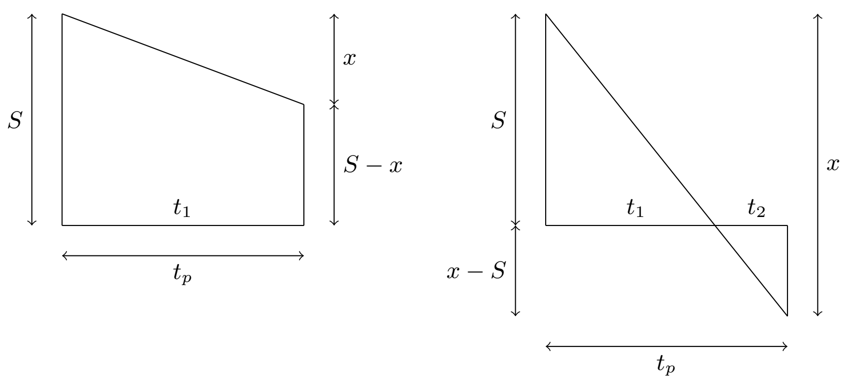

Figura 2.5. Gráfica si $x \leq S$ y Gráfica si $x \geq S$.

Así, la cantidad media en el inventario para una demanda dada x es:

$$I_1(x) = \begin{cases} S - \frac{x}{2}, & x \leq S \\ \\ \frac{S^2}{2x}, & x \geq S \end{cases}$$

teniendo en cuenta que, si $x \geq S$, se tiene

$$I_1(x) = \frac{S \cdot \frac{t_1}{2}}{t_f}, \text{ pero } t_1 = \frac{S}{x} \cdot t_f \text{ porque } \frac{t_1}{t_f} = \frac{S}{x}$$

Por tanto,

$$I_1(x) = \frac{S^2}{2x} \text{ cuando } x \geq S$$

Similarmente, la rotura media es:

$$I_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq S \\ \\ \frac{(x-S)^2}{2x}, & x \geq S \end{cases}$$

Nótese que

$$I_2(x) = \frac{t_2 \cdot (x - S)}{2 \cdot t_f}, \text{ pero como } \frac{t_2}{t_f} = \frac{(x - S)}{x} \Rightarrow t_2 = \frac{(x - S) \cdot t_f}{x}$$

Por tanto se obtiene

$$I_2(x) = \frac{(x - S)^2}{2x}$$

De lo anterior obtenemos que la cantidad media esperada en inventario es

$$I_1 = E[I_1(x)] = \int_0^S (S - \frac{x}{2}) \cdot f(x)dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x)dx$$

y la rotura media esperada

$$I_2 = E[I_2(x)] = \int_S^\infty \frac{(x - S)^2}{2x} \cdot f(x)dx$$

El costo total esperado del sistema es:

$$C(S) = c_1 \cdot \int_0^S (S - \frac{x}{2}) \cdot f(x)dx + c_1 \cdot \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x)dx + c_2 \cdot \int_S^\infty \frac{(x - S)^2}{2x} \cdot f(x)dx$$

Para encontrar el nivel optimo S_0 tenemos que derivar C(S) e igualar a cero, lo cual requiere derivar la integral.

Nótese que dada una función

$$F(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} G(t,x)dx$$

su derivada es

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial G}{\partial t}dx + G[t, B(t)] \cdot \frac{\partial B(t)}{\partial t} - G[t, A(t)] \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t}$$

Aplicando este resultado a nuestra ecuación del coste tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dS} =& c_1 \cdot \left[\int_0^S f(x)dx + \frac{S}{2}f(S)\right] + c_1 \cdot \left[\int_S^\infty \frac{S}{x}f(x)dx - \frac{S}{2}f(S)\right] + \\ &+ c_2 \cdot \int_S^\infty \frac{-(x-S)}{x}f(x)dx = (c_1+c_2) \cdot \left[\int_0^S f(x)dx + \int_S^\infty \frac{S}{x}f(x)dx\right] - c_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{dC}{dS} = 0 \Rightarrow \int_0^{S_0} f(x)dx + \int_{S_0}^\infty \frac{S_0}{x}f(x)dx = \frac{c_2}{c_1+c_2}$$

Para comprobar que el S_0 que verifica la ecuación anterior de un mínimo examinamos:

$$\frac{d^2C}{dS^2} = (c_1+c_2) \cdot \left[f(S) + \int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx - f(S)\right] = (c_1+c_2) \cdot \int_S^\infty \frac{f(x)}{x}dx$$

como f(x) es densidad de probabilidad $\Rightarrow \frac{d^2C}{dS^2} \geq 0$.

En consecuencia, el S_0 óptimo es el que verifique la ecuación anterior. Desafortunadamente, la ecuación del mínimo S_0 anterior no nos permite obtener S_0 de forma explícita ni tampoco el coste C_0. Solamente para funciones específicas de f(x) es posible obtener S_0 y C_0 en forma explícita (esto se ilustra en el siguiente ejemplo).

Ejemplo 2.1. Sea la densidad de la demanda $f(x) = \frac{1}{b^2} \cdot x \cdot e^{\frac{-x}{b}}, x \geq 0$ (es un caso especial de la distribución gamma cuando la media $2b$ y la varianza $2b^2$), podemos calcular S_0 y C_0.

$$\int_0^{S_0} \frac{1}{b^2} x \cdot e^{\frac{-x}{b}} dx + \int_{S_0}^{\infty} S_0 \frac{1}{b^2} x \cdot e^{\frac{-x}{b}} dx = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_0 = b \cdot ln\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1}\right)$$

Sustituyendo S_0 en la ecuación del costo C(S) dada anteriormente, se obtiene el coste mínimo

$$C_0 = b \cdot c_1 \cdot ln\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1}\right)$$

En el siguiente apartado se presenta la política óptima para el sistema de nivel de inventario con demanda aleatoria cuando se trabaja con unidades discretas.

2.3.1. Unidades Discretas

Supongamos que la demanda x y el nivel de inventario S se restringen a unidades discretas $0, u, 2u, 3u, \ldots$
Sea $p(x) \equiv$ distribución de probabilidad de la demanda x. El costo total en el tiempo t_f esperado del sistema para unidades discretas es:

$$C(S) = c_1 \cdot I_1 + c_2 \cdot I_2 \tag{2.2}$$

siendo la cantidad media en stock $I_1(x) = \begin{cases} S - \frac{x}{2}, & x \leq S \\ \frac{S^2}{2x}, & x \geq S \end{cases}$

y la cantidad media de rotura $I_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq S \\ \frac{(x-S)^2}{2x}, & x \geq S \end{cases}$

$$C(S) = c_1 \cdot \sum_{x=0}^{S} \left(S - \frac{x}{2}\right) p(x) + c_1 \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \left(\frac{S^2}{2x}\right) p(x) + c_2 \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \left(\frac{(x-S)^2}{2x}\right) p(x) \tag{2.3}$$

Las condiciones necesarias para que S_0 sea el valor óptimo serán:

$$C(S_0 \geq C(S_0 + u) \Leftrightarrow C(S_0 + u) - C(S_0) \geq 0$$

$$C(S_0 \geq C(S_0 - u) \Leftrightarrow C(S_0) - C(S_0 - u) \geq 0$$

Evaluamos la diferencia $C(S + u) - C(S)$ para obtener la primera condición:

$$\begin{aligned}
C(S+u)-C(S) &= c_1\cdot\sum_{x=0}^{S+u}\left[(S+u)-\frac{x}{2}\right]\cdot p(x)+c_1\cdot\sum_{x=S+2u}^{\infty}\left(\frac{(S+u)^2}{2x}\right)\cdot p(x)+\\
&+c_2\cdot\sum_{x=S+2u}^{\infty}\left(\frac{(x-S-u)^2}{2x}\right)\cdot p(x)-c_1\cdot\sum_{x=0}^{S}\left(S-\frac{x}{2}\right)\cdot p(x)-\\
&-c_1\cdot\sum_{x=S+u}^{\infty}\left(\frac{S^2}{2x}\right)\cdot p(x)-c_2\sum_{x=S+u}^{\infty}\left(\frac{(x-S)^2}{2x}\right)\cdot p(x)=\\
&=\cdots=u(c_1+c_2)\left[\sum_{x=0}^{S}p(x)+\left(S+\frac{u}{2}\right)\sum_{x=S+u}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\right]-u\cdot c_2=\\
&=u[(c_1+c_2)\cdot M(S)-c_2]
\end{aligned}$$

siendo

$$M(S)=\sum_{x=0}^{S}p(x)+(S+\frac{u}{2})\sum_{x=S+u}^{\infty}\frac{p(x)}{x} \tag{2.4}$$

Luego

$$C(S_0+u)-C(S_0)\geq 0\Leftrightarrow(c_1+c_2)\cdot M(S)-c_2\geq 0\Leftrightarrow\frac{c_2}{c_1+c_2}\leq M(S)$$

Por otra parte, también se tiene

$$C(S_0)-C(S_0-u)\leq 0\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow M(S_0-u)\geq\frac{c_2}{c_1+c_2}$$

Por tanto, las condición necesaria y suficiente para que S_0 sea nivel de inventario óptimo es

$$M(S_0-u)\leq\frac{c_2}{c_1+c_2}\leq M(S_0) \tag{2.5}$$

Además siempre: $0\leq M(S)\leq 1$ porque

$$\left(S+\frac{u}{2}\right)\sum_{x=S+u}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\leq\sum_{x=S+u}^{\infty}p(x)$$

ya que,

$$\frac{(S+\frac{u}{2})}{S+u}\cdot p(S+u)+\frac{(S+\frac{u}{2})}{S+2u}\cdot p(S+2u)+\cdots\leq p(S+u)+p(S+2u)+\cdots$$

debido a que

$$\frac{\left(S+\frac{u}{2}\right)}{S+u} \leq 1\ ,\ \frac{\left(S+\frac{u}{2}\right)}{S+2u} \leq 1, \ldots$$

Hasta aquí hemos descrito las políticas óptimas para el sistema de inventario con demanda determinista y con demanda estocástica, tanto considerando unidades continuas como unidades discretas. En el siguiente capítulo expondremos el problema de inventario de los artículos seleccionados que comercializa la empresa y calcularemos los costos de gestión de los inventarios de dichos artículos.

3

Planteamiento del problema de inventario de la empresa

3.1. Introducción

En la realización de este trabajo hemos utilizado datos de la gestión de inventarios de tres tipos de bebidas (cerveza, ron y ginebra). Estos datos han sido proporcionados por una empresa dedicada a la venta de productos del sector alimentario. Se ha decidido de mutuo acuerdo con la empresa que no se revelen datos específicos relacionados con ésta, así como tampoco detallar las marcas de los productos elegidos.

Se trata de una empresa fundada en 1995 de ámbito regional que ha ido creciendo a lo largo de estos años hasta poder ofrecer actualmente más de 100 productos diversos. Estos productos son distribuidos en toda la isla de Tenerife, pero más concretamente se distribuye por la zona de Santa Cruz de Tenerife, El Rosario, Candelaria, Güímar, Fasnia y Arico. Estos productos no son elaborados por la empresa ya que se dedica a la distribución comercial de los mismos. Ésta dispone de un almacén para poder acumular los stocks de productos que permitan cubrir los pedidos. Posee maquinaria pesada, además de vehículos para el traslado de la mercancía y cuenta con más de 40 empleados, entre mozos de almacén, conductores, comerciales, administrativos, etc.

3.2. Descripción del problema

La empresa nos ha proporcionado datos de compras y ventas de tres productos que, para evitar nombrar marcas, llamaremos Producto A (cerveza), Producto B (ron) y Producto C (ginebra) en referencia al año 2017. Realizando una observación y un estudio adecuado de los datos podemos describir la variación del stock de cada producto a lo largo del año. La filosofía que sigue esta empresa es no permitir roturas, por lo que deben disponer de un amplio stock para poder cubrir las demandas solicitadas por los clientes. Los datos están recogidos en el apéndice A de este documento.

A continuación vamos a centrarnos en el cálculo del coste de mantenimiento C_1, del coste de rotura C_2 y del coste de reposición C_3 de cada producto. Los tres productos se agrupan en un almacén, guardados en cajas que poseen las siguientes dimensiones:

- Producto A: $38 \times 26 \times 24$ cm (altura $\times$ anchura $\times$ profundidad)
- Producto B: $32'4 \times 25'4 \times 34'8$ cm
- Producto C: $18'1 \times 26'1 \times 32$ cm

El Producto A se envasa en cajas de 24 unidades, el Producto B en cajas de 12 unidades y el Producto C en cajas de 6 unidades.

Para poder hacer una estimación oportuna del costo de almacenamiento hemos solicitado algunos datos relacionados con el mantenimiento del almacén y el espacio que ocupa cada una de las cajas en dicho local. Así podremos calcular el costo de mantener cada caja en stock. Los datos que nos ha proporcionado la empresa son los siguientes:

- Alquiler del establecimiento: 625€/mes
- Agua: Aproximadamente una media de 40€/mes = 480€/año
- Luz: Alrededor de una media de 70€/mes = 840€/año
- Impuesto de bienes inmuebles (IBI): 23000€/año
- Tasa de residuos urbanos: 1080€/año
- Coste del seguro: 1000€/año
- Limpieza: 1200€/año
- Coste del operario del almacén: 12000€/año

La suma total de estos gastos es 47100€ al año, lo que supone 3925€ al mes, $905'76$€ por semana ó $129'041$€ al día para el mantenimiento del almacén. Como manejamos tres productos vamos a estimar el costo de cada uno de ellos en función del espacio que ocupen los productos en el almacén. El almacén tiene un tamaño de $250m^2$ y la altura máxima en la que podemos apilar cajas del Producto A es $3.8m$ que sería lo relativo a diez cajas apiladas, por lo que el espacio total de almacenamiento es de $3800m^3$.

En el caso de nuestro Producto A, cada caja tiene un volumen de $0.023712m^3$. Una caja del Producto B tiene un volumen de $0.028639m^3$ y una caja del Producto C ocupa $0.015117m^3$. Llamaremos c_{11}, c_{12}, c_{13} a los costos de mantenimiento de cada una de las cajas de los Productos A, B y C.
Estos costes los vamos a calcular por caja y semana. Teniendo en cuenta que los gastos totales del almacén son $905'76$€ por semana, se tiene que la parte proporcional de los costes correspondientes a los tres productos son:

$$c_{11} = \frac{905.76 \times 0.023712}{3800} = 0.005651€/\text{ caja y semana}$$

$$c_{12} = \frac{905.76 \times 0.028639}{3800} = 0.006826€/\text{ caja y semana}$$

$$c_{13} = \frac{905.76 \times 0.015117}{3800} = 0.003603€/\text{ caja y semana}$$

Tras haber calculado los costos de mantenimiento de nuestros productos, ahora pasamos a calcular el costo de rotura de cada artículo. Se considera que dicho coste coincide con el beneficio dejado de ganar por la venta perdida. Así, considerando los precios de compra y venta de los productos tenemos que los costes de rotura son los siguientes:

$$c_{21} = 0.048€,\ c_{22} = 0.042€ \text{ y } c_{23} = 0.0315€.$$

A continuación, calculamos los costes de reposición de cada uno de los productos.

En la reposición intervienen el empleado que realiza las labores de reposición y la carretilla elevadora, con su correspondiente gasto de gasolina y mantenimiento. Teniendo en cuenta que el empleado dedica solo una parte muy pequeña de su tiempo a esta labor (en torno al 2 % de su tiempo), se considera como gasto asociado a la reposición un porcentaje del sueldo (20€, 2 % del sueldo mensual de 1000€) del empleado. Además se cifra el gasto de gasolina y mantenimiento de la carretilla en unos 2€ por reposición. En conjunto, el coste de reposición de cada artículo se estima en:

$$c_{31} = c_{32} = c_{33} = 22€/\text{reposición}.$$

3.3. Costes de la gestión del inventario de la empresa

En primer lugar debemos calcular el costo de estos tres productos para la empresa según su política de ventas, para posteriormente poder realizar una comparación óptima con los resultados de nuestro estudio. Para ello hacemos uso del cálculo de las áreas que deja el nivel de inventario a lo largo de cada periodo de gestión. Ese planteamiento es similar al realizado en el desarrollo del Modelo EOQ citado en el primer capítulo.
En el apéndice podemos comprobar los datos relacionados mensualmente a cada uno de los tres productos, estos datos los hemos utilizado para calcular el costo de los productos anualmente.

Como vimos en el primer capítulo, para obtener el número medio de piezas en stock necesitamos calcular las áreas de las gráficas de cada uno de los productos (cerveza, ron y ginebra). En la figura 3.1 se recogen los movimientos en el inventario del Producto A (cerveza), para los otros dos productos también se utilizarán sus gráficas correspondientes particionadas por semanas.

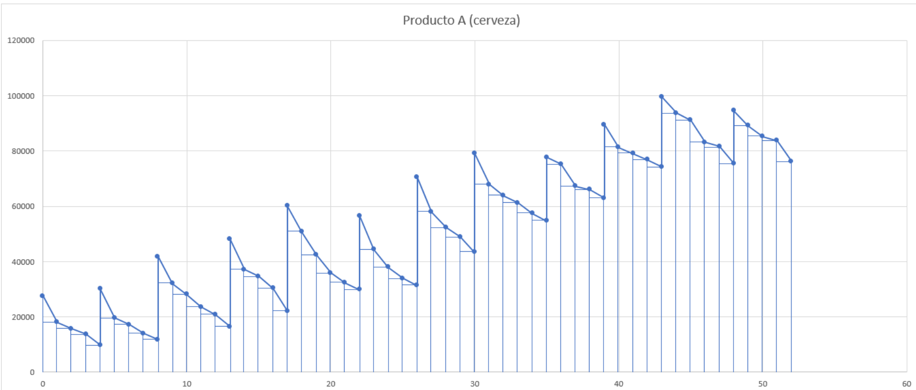

Figura 3.1. Áreas del nivel de inventario por semana

Comenzamos por el Producto A:

El sistema de ventas se refleja en la figura 3.2.
El costo anual de mantenimiento de una caja es $c_{11} \times 52$ semanas $= 0.293852$€.
Como hay 24 unidades en cada caja se tiene que:

- El número medio de piezas en stock es $I_1 = 4663$ cajas/año.
- El coste total de mantenimiento por caja y año es $C_1 = I_1 \cdot c_{11} = 1370'46$€/caja y año.
- Se realizan 12 reposiciones al año $I_3 = 12$.
- El coste de reposición es $c_3 = 22$€/pedido.
- El coste total de reposición es $C_3 = 12 \times 22 = 264$€.

Por lo tanto obtenemos que el costo anual del producto es:

$$C_0 = C_1 + C_3 = 1370'46€ + 264€ = 1634'46€/\text{año}$$

Para el Producto B:

El sistema de ventas se refleja en la figura 3.3.
El costo anual de mantenimiento de una caja es $c_{12} \times 52$ semanas $= 0.354969$€.
Como hay 12 unidades en cada caja se tiene que:

- El número medio de piezas en stock es $I_1 = 5443$ cajas/año.
- El coste total de mantenimiento por caja y año es $C_1 = I_1 \cdot c_{12} = 1932'097€/$ caja y año.
- Se realizan 12 reposiciones al año $I_3 = 12$.
- El coste de reposición es $c_3 = 22€/$pedido.
- El coste total de reposición es $C_3 = 12 \times 22 = 264€$.

Por lo tanto obtenemos que el costo anual del producto es:

$$C_0 = C_1 + C_3 = 1932'097€ + 264€ = 2196'097€/\text{año}$$

Para el Producto C:
El sistema de ventas se refleja en la figura 3.4.
El costo anual de mantenimiento de una caja es $c_{13} \times 52$ semanas $= 0.187369€$.
Como hay 6 unidades en cada caja se tiene que:

- El número medio de piezas en stock es $I_1 = 3106$ cajas/año.
- El coste total de mantenimiento por caja y año es $C_1 = I_1 \cdot c_{11} = 581'969€/$ caja y año.
- Se realizan 12 reposiciones al año $I_3 = 12$.
- El coste de reposición es $c_3 = 22€/$pedido.
- El coste total de reposición es $C_3 = 12 \times 22 = 264€$.

Por lo tanto obtenemos que el costo anual del producto es:

$$C_0 = C_1 + C_3 = 581'969€ + 264€ = 845'969€/\text{año}.$$

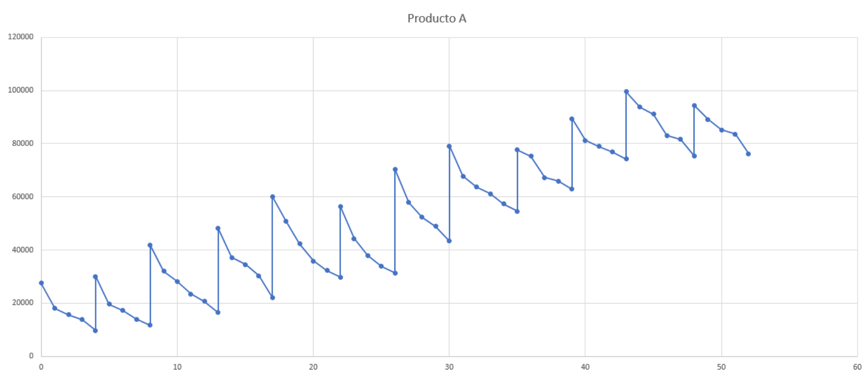

Figura 3.2. Evolución semanal del nivel de inventario del Producto A (cerveza) durante el año 2017.

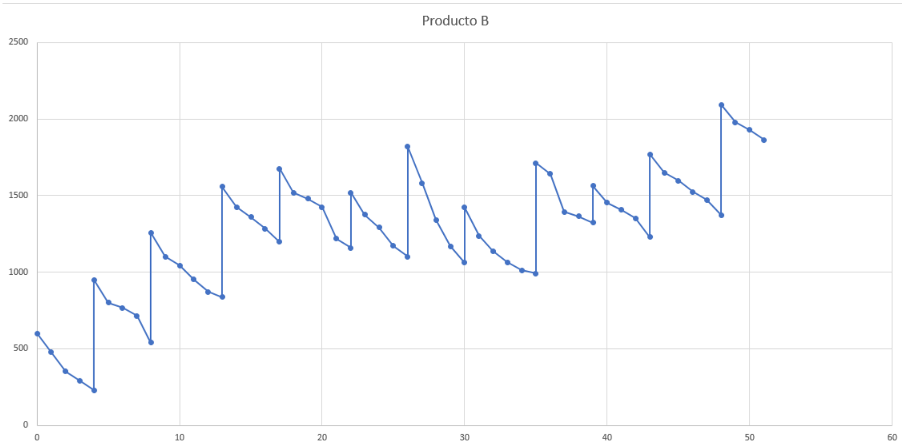

Figura 3.3. Evolución semanal del nivel de inventario del Producto B (ron) durante el año 2017.

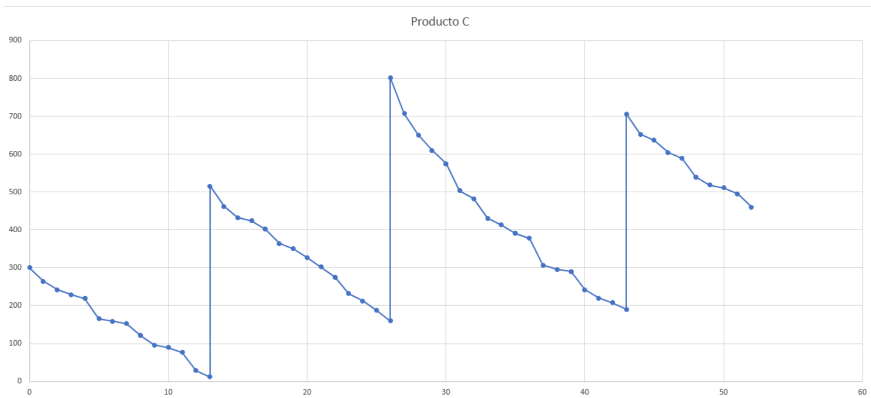

Figura 3.4. Evolución semanal del nivel de inventario del Producto A (ginebra) durante el año 2017.

A continuación realizaremos una propuesta de solución relacionada con la gestión de los tres productos citados anteriormente, para así poder comparar estas soluciones con los resultados obtenidos por la empresa. Tras hacer este estudio podremos contrastar si con la nueva política se ha podido ejecutar una mejor gestión de los productos y así reducir el coste para la empresa.

4

Propuesta de solución

4.1. Introducción

El objetivo que vamos a abordar en este trabajo es la gestión óptima del inventario de los productos (cerveza, ron y ginebra) que vende la empresa para poder solventar de manera adecuada las demandas de los clientes con el menor gasto posible. Para ello haremos uso de alguno de los modelos de gestión de stock que nos permita desarrollar una política de inventario que se ajuste a las necesidades de la empresa. Por último compararemos nuestros resultados con los de la empresa para poder sacar las oportunas conclusiones.

4.2. Política de inventario propuesta

Los responsables de la empresa nos dicen que como máximo hacen un pedido a la semana por artículo y que al menos deben realizar un pedido al mes. En consecuencia debemos analizar cuándo es más conveniente realizar el pedido, si se debería solicitar un pedido cada semana, cada dos semanas o cada mes.
Teniendo en cuenta las ventas semanales (recogidas en el apéndice) de cada producto construimos tablas de frecuencias y a partir de ahí se determinan las distribuciones de probabilidad de las ventas de cada artículo cuando los periodos de gestión se fijan en una, dos y cuatro semanas. Comenzaremos fijando el periodo de gestión en $t_f = 1$ semana y trabajaremos con el modelo de nivel de inventario con demanda estocástica del capítulo 2. Posteriormente realizaremos los mismos cálculos para los periodos de gestión de dos semanas y cuatro semanas.

4.2.1. Producto A

Periodo de gestión $t_f = 1$ semana

Lo primero que debemos realizar es la tabla de frecuencias del producto A para cuando el ciclo de inventario es $t_f = 1$ semana. Así, podemos determinar la distribución de probabilidad de las ventas del producto A, la cual se recoge en el cuadro 4.1.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
0-100	50	9	0.173
100-200	150	22	0.423
200-300	250	7	0.135
300-400	350	8	0.154
400-500	450	4	0.077
500-600	550	2	0.036

Cuadro 4.1. Tabla de frecuencias correspondientes al Producto A (cerveza)

Siguiendo la política óptima para el sistema de nivel de inventario con demanda estocástica para unidades discretas mostrada en el capítulo 2, en primer lugar debemos determinar la función M(S) dada en la fórmula (2.4) para diferentes valores de S y luego teniendo en cuenta la condición de optimalidad (2.5) determinar el nivel de inventario óptimo S_0 que corresponde a cada producto.

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
50	0.173	0.00346	0.00404	0.404	0.577	3.2483
150	0.423	0.00282	0.00122	0.244	0.84	1.5513
250	0.135	0.00054	0.00068	0.204	0.935	1.2642
350	0.154	0.00044	0.00024	0.096	0.981	1.4849
450	0.077	0.000171	0.000069	0.0345	0.9965	1.9497
550	0.036	0.000069	———	———	1	2.4966

Cuadro 4.2. Datos necesarios para la determinación del nivel de inventario óptimo cuando $t_f = 1$ semana.

Recordemos que la fórmula de M(S) viene dada por:

$$M(S) = \sum_{x=0}^{S} p(x) + \left(S + \frac{u}{2}\right) \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$$

Y la función del costo es:

$$C(S) = c_1 \cdot \sum_{x=0}^{S} \left(S - \frac{x}{2}\right) p(x) + c_1 \cdot \sum_{x=S+u}^{\infty} \left(\frac{S^2}{2x}\right) p(x) + c_2 \sum_{x=S+u}^{\infty} \left(\frac{(x-S)^2}{2x}\right) p(x)$$

A continuación vamos a hallar el nivel de inventario óptimo determinado por la condición:

$$M(S_0 - u) \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2} \leq M(S_0).$$

Considerando que

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.048}{0.005651 + 0.048} = 0.8946$$

se tiene que el nivel de inventario $S_0 = 250$ cajas de cerveza verifica la condición:

$$0.84 = M(150) \leq 0.8946 \leq 0.935 = M(250)$$

Por tanto $S_0 = 250$ cajas es el nivel de inventario óptimo. Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna de la tabla 4.2) y, como se espera, el costo mínimo ocurre en $S_0 = 250$. Dicho coste es:

$$\begin{aligned} C_0 = C(250) =& 0.005651 \cdot \sum_{x=0}^{250} \left(250 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.005651 \cdot \sum_{x=350}^{\infty} \frac{250^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.048 \sum_{x=350}^{\infty} \frac{(x-250)^2}{2x} \cdot p(x) = 1.2642€/\text{semana} \end{aligned}$$

Periodo de gestión $t_f = 2$ semanas

La tabla de frecuencias que nos permite estimar la distribución de probabilidad de las ventas cuando consideramos $t_f = 2$ semanas se recoge en el cuadro 4.3.

Al igual que para el periodo de gestión anterior hallamos el nivel de inventario óptimo y el costo mínimo correspondiente. Ahora se tiene

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.048}{0.005651 + 0.048} = 0.8946$$

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
100-300	200	8	0.308
300-500	400	10	0.385
500-700	600	5	0.192
700-900	800	3	0.115

Cuadro 4.3. Tabla de frecuencias Producto A

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
200	0.308	0.00154	0.001426	0.42787	0.7358	3.73
400	0.385	0.000962	0.000463	0.23188	0.9228	2.026
600	0.192	0.00032	0.000144	0.10063	0.9836	2.3502
800	0.115	0.000143	——	——	1	3.3262

Cuadro 4.4. $t_f = 2$ semanas

La solución para este producto es $S_0 = 400$ cajas ya que se cumple la condición:

$$0.7358 = M(200) \leq 0.8946 \leq 0.9228 = M(400)$$

Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna del cuadro 4.4) y el costo mínimo ocurre en $S_0 = 400$. Por tanto, dicho coste es:

$$\begin{aligned} C_0 = C(400) =& 0.005651 \cdot \sum_{x=0}^{400} \left(400 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.005651 \cdot \sum_{x=600}^{\infty} \frac{400^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.048 \sum_{x=600}^{\infty} \frac{(x-400)^2}{2x} \cdot p(x) = 2.026\text{€/semana} \end{aligned}$$

Periodo de gestión $t_f = 4$ semanas

Por último, se muestra en el cuadro 4.5 la tabla de frecuencias y su distribución de probabilidad de las ventas del producto A cuando $t_f = 4$ semanas.
Procedemos con los cálculos como en los casos anteriores.

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.048}{0.005651 + 0.048} = 0.8946.$$

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
500-700	600	2	0.16
700-900	800	3	0.25
900-1100	1000	4	0.33
1100-1300	1200	3	0.25

Cuadro 4.5. Tabla de frecuencias Producto A

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
600	0.16	0.00026	0.0008508	0.59906	0.75906	4.5038
800	0.25	0.0003125	0.0005383	0.48447	0.89447	3.4173
1000	0.33	0.00033	0.0002083	0.22913	0.96913	3.2015
1200	0.25	0.0002083	———	———	1	4.0977

Cuadro 4.6. $t_f = 4$ semanas

La solución es $S_0 = 1000$ cajas de cerveza puesto que

$$0.89447 = M(800) \leq 0.8946 \leq 0.96913 = M(1000).$$

Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna del cuadro 4.6) y como se espera el costo mínimo ocurre en $S_0 = 1000$.

$$\begin{aligned} C_0 = C(1000) =& 0.005651 \cdot \sum_{x=0}^{1000} \left(1000 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.005651 \cdot \sum_{x=1200}^{\infty} \frac{1000^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.048 \sum_{x=1200}^{\infty} \frac{(x-1000)^2}{2x} \cdot p(x) = 3.2015€/\text{semana} \end{aligned}$$

Sintetizando hemos obtenido las siguientes soluciones óptimas para el Producto A (cerveza):

t_f	Una Semana	Dos Semanas	Cuatro Semanas
S_0	250	400	1000
C_0	1'2642	2'026	3'2015

Cuadro 4.7. Tabla de soluciones Producto A

De la tabla anterior se deduce que la mejor política de inventario para el producto A (cerveza) será reponer cada semana (t* = 1 semana) con una cantidad tal que suba el inventario al nivel S_0=250 unidades.

4.2.2. Producto B

Periodo de gestión $t_f = 1$ semana

Realizamos la tabla de frecuencias del producto B para cuando $t_f = 1$ semana. Así, podemos determinar la distribución de probabilidad de las ventas del producto B, la cual se recoge en el cuadro 4.8.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
0-50	25	8	0.1538
50-100	75	25	0.4807
100-150	125	12	0.2308
150-200	175	5	0.0962
200-250	225	2	0.0385

Cuadro 4.8. Tabla de frecuencias correspondientes al Producto B (ron)

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
25	0.1538	0.00615	0.00897	0.3075	0.4613	1.1592
75	0.4807	0.00641	0.00256	0.256	0.8906	0.5311
125	0.2308	0.00184	0.00072	0.108	0.9733	0.6069
175	0.0962	0.00055	0.00017	0.034	0.9955	0.8832
225	0.0385	0.00017	——	——	1	1.2142

Cuadro 4.9. $t_f = 1$ semana

Consideramos ahora el cociente entre costes unitarios para el Producto B:

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.042}{0.006826 + 0.042} = 0.8601.$$

La solución es $S_0 = 75$ puesto que $0.4613 = M(25) \leq 0.8601 \leq 0.8906 = M(75)$. Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna del cuadro 4.9) y como se espera el costo mínimo ocurre en $S_0 = 75$. Dicho coste es:

$$C_0 = C(75) = 0.006826 \cdot \sum_{x=0}^{75}\left(75 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) + 0.006826 \cdot \sum_{x=125}^{\infty} \frac{75^2}{2x} \cdot p(x) + 0.042 \sum_{x=125}^{\infty} \frac{(x-75)^2}{2x} \cdot p(x) = 0.5311€/\text{semana}$$

Periodo de gestión $t_f = 2$ semanas

La tabla de frecuencias que nos permite estimar la distribución de probabilidad de las ventas cuando consideramos $t_f = 2$ semanas se recoge en el cuadro 4.10.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
0-100	50	2	0.076
100-200	150	17	0.6538
200-300	250	6	0.23
300-400	350	1	0.038

Cuadro 4.10. Tabla de frecuencias Producto B

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
50	0.076	0.00152	0.00533	0.533	0.609	1.9523
150	0.6538	0.0043	0.00103	0.206	0.9358	0.7628
250	0.23	0.00092	0.00011	0.033	0.9928	1.1399
350	0.038	0.00011	———	———	1	1.7945

Cuadro 4.11. $t_f = 2$ semanas

Al igual que para el periodo de gestión anterior hallamos el nivel de inventario óptimo y el costo mínimo correspondiente. Ahora se tiene

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.042}{0.006826 + 0.042} = 0.8601$$

La solución es $S_0 = 150$ ya que se cumple la condición:

$$0.609 = M(50) \leq 0.8946 \leq 0.9358 = M(150)$$

Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna del cuadro 4.11) y el costo mínimo ocurre en $S_0 = 150$. Dicho coste es:

$$\begin{aligned} C_0 = C(150) =& 0.006826 \cdot \sum_{x=0}^{150} \left(150 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.006826 \cdot \sum_{x=250}^{\infty} \frac{150^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.042 \sum_{x=250}^{\infty} \frac{(x-150)^2}{2x} \cdot p(x) = 0.7628€/\text{semana} \end{aligned}$$

Periodo de gestión $t_f = 4$ semanas

Por último, se muestra en el cuadro 4.12 la tabla de frecuencias y su distribución de probabilidad de las ventas del producto B (ron) cuando $t_f = 4$ semanas.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
200-300	250	4	0.307
300-400	350	5	0.385
400-500	450	3	0.230
500-600	550	1	0.077

Cuadro 4.12. Tabla de frecuencias Producto B

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S + \frac{u}{2}) \sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
250	0.307	0.001228	0.00175	0.525	0.832	1.5603
350	0.385	0.0011	0.00065	0.26	0.952	1.4285
450	0.23	0.00051	0.00014	0.07	0.992	1.8832
550	0.077	0.00014	——	——	1	2.5309

Cuadro 4.13. $t_f = 4$ semanas

Procedemos con los cálculos como en los casos anteriores.

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.042}{0.006826 + 0.042} = 0.8601.$$

La solución es $S_0 = 350$ puesto que

$$0.832 = M(250) \leq 0.8946 \leq 0.952 = M(350).$$

Se continuará calculando el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna del cuadro 4.13) y como se espera el costo mínimo ocurre en $S_0 = 350$ cajas de ron. Dicho coste es:

$$\begin{aligned} C_0 = C(350) =& 0.006826 \cdot \sum_{x=0}^{350} \left(350 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.006826 \cdot \sum_{x=450}^{\infty} \frac{350^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.042 \sum_{x=450}^{\infty} \frac{(x-350)^2}{2x} \cdot p(x) = 1.4285€/\text{semana} \end{aligned}$$

Sintetizando hemos obtenido las siguientes soluciones óptimas:

t_f	Una Semana	Dos Semanas	Cuatro Semanas
S_0	75	150	350
C_0	0.5311	0.7628	1.4285

Cuadro 4.14. Tabla de soluciones Producto B

De la tabla anterior se deduce que la mejor política de inventario para el Producto B (ron) será reponer cada semana (t* = 1 semana) con una cantidad tal que suba el inventario al nivel S_0=75 unidades.

4.2.3. Producto C

Periodo de gestión $t_f = 1$ semana

Realizamos la tabla de frecuencias del producto C cuando se considera un ciclo de inventario de $t_f = 1$ semana. Así, podemos determinar la distribución de probabilidad de las ventas del producto C, la cual se recoge en el cuadro 4.15.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
0-30	15	32	0.615
30-60	45	17	0.327
60-90	75	2	0.038
90-120	105	1	0.019

Cuadro 4.15. Tabla de frecuencias Producto C

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
15	0.615	0.041	0.00795	0.2385	0.8535	0.1548
45	0.327	0.00726	0.00069	0.0414	0.9834	0.1294
75	0.038	0.00051	0.00018	0.0162	0.9962	0.2208
105	0.019	0.00018	—	—	1	0.3258

Cuadro 4.16. $t_f = 1$ semana

Ahora se obtiene:

$$\frac{c_2}{c_1+c_2} = \frac{0.0315}{0.0036002+0.0315} = 0.8974.$$

La solución es $S_0 = 45$ puesto que $0.8535 = M(15) \leq 0.8974 \leq 0.9834 = M(45)$. Procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna del cuadro 4.16) y como se espera el costo mínimo ocurre en $S_0 = 45$ cajas de ginebra. Dicho coste es

$$\begin{aligned} C_0 = C(45) =& 0.0036002 \cdot \sum_{x=0}^{45} \left(45 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.0036002 \cdot \sum_{x=75}^{\infty} \frac{45^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.0315 \sum_{x=75}^{\infty} \frac{(x-45)^2}{2x} \cdot p(x) = 0.1294€/\text{semana} \end{aligned}$$

Periodo de gestión $t_f = 2$ semanas

La tabla de frecuencias que nos permite estimar la distribución de probabilidad de las ventas cuando consideramos $t_f = 2$ semanas se recoge en el cuadro 4.17.

Al igual que para el periodo de gestión anterior hallamos el nivel de inventario óptimo y el costo mínimo correspondiente.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
15-45	30	9	0.346
45-75	60	13	0.5
75-105	90	3	0.115
105-135	120	1	0.038

Cuadro 4.17. Tabla de frecuencias Producto C

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
30	0.346	0.0115	0.0099	0.4455	0.7915	0.2657
60	0.5	0.0083	0.0016	0.12	0.966	0.1563
90	0.115	0.0013	0.0003	0.027	0.988	0.2292
120	0.038	0.0003	——	——	1	0.3321

Cuadro 4.18. $t_f = 2$ semanas

Ahora se tiene

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{0.0315}{0.0036002 + 0.0315} = 0.8974$$

La solución es $S_0 = 60$ cajas de ginebra, ya que se cumple la condición:

$$0.7915 = M(200) \leq 0.8974 \leq 0.966 = M(60)$$

Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna 4.18) y el costo mínimo ocurre en $S_0 = 60$ cajas. Dicho coste es:

$$\begin{aligned} C_0 = C(60) =& 0.0036002 \cdot \sum_{x=0}^{60} \left(60 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.0036002 \cdot \sum_{x=90}^{\infty} \frac{60^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.0315 \sum_{x=90}^{\infty} \frac{(x-60)^2}{2x} \cdot p(x) = 0.1563€/\text{semana} \end{aligned}$$

Periodo de gestión $t_f = 4$ semanas

Por último, se muestra en el cuadro 4.19 la tabla de frecuencias y su distribución de probabilidad de las ventas del producto C cuando $t_f = 4$ semanas.

Demanda (x)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Distribución de probabilidad
30-90	60	2	0.154
90-150	120	9	0.692
150-210	180	2	0.154

Cuadro 4.19. Tabla de frecuencias Producto C

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum \frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum \frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
60	0.154	0.00256	0.00661	0.5949	0.7489	0.5314
120	0.692	0.00576	0.00085	0.102	0.948	0.27001
180	0.154	0.00085	———	———	1	0.4320

Cuadro 4.20. $t_f = 4$ semanas

Procedemos con los cálculos como en los casos anteriores.

$$\frac{c_2}{c_1+c_2} = \frac{0.0315}{0.0036002+0.0315} = 0.8974.$$

La solución es $S_0 = 120$ puesto que

$$0.7489 = M(60) \leq 0.8974 \leq 0.948 = M(120).$$

Ahora procedemos a calcular el costo C(S) para todos los valores posibles de S (se recoge en la última columna 4.20) y como se espera el costo mínimo ocurre en $S_0 = 120$ cajas. Dicho coste es:

$$\begin{aligned} C_0 = C(120) =& 0.0036002 \cdot \sum_{x=0}^{120} \left(120 - \frac{x}{2}\right) \cdot p(x) \\ &+ 0.0036002 \cdot \sum_{x=180}^{\infty} \frac{120^2}{2x} \cdot p(x) \\ &+ 0.0315 \sum_{x=180}^{\infty} \frac{(x-120)^2}{2x} \cdot p(x) = 0.27001€/\text{semana} \end{aligned}$$

Sintetizando hemos obtenido las siguientes soluciones óptimas:
De la tabla anterior se deduce que la mejor política de inventario será reponer cada semana (t* = 1 semana) el Producto C (ginebra) con una cantidad tal que suba el inventario al nivel S_0= 45 unidades.

t_f	Una Semana	Dos Semanas	Cuatro Semanas
S_0	45	60	120
C_0	0.1294	0.1563	0.27001

Cuadro 4.21. Tabla de soluciones Producto C

4.2.4. Conclusiones

La gestión de los tres productos (cerveza, ron y ginebra) que vende la empresa requería un coste total de $4974'163$€/año.

Sin embargo, si seguimos el modelo de nivel de inventario con demanda estocástica para unidades discretas, considerando las distribuciones de probabilidades asociadas a los datos de ventas de esos productos, obtenemos que la mejor política es reponer cada semana las cantidades correspondientes de los productos, de manera que subamos los niveles de inventario a las cantidades 250 cajas de cerveza, 75 cajas de ron y en el caso de la ginebra subir el nivel de inventario hasta 45 cajas. Esa política lleva un coste total de gestión de inventario de $100'0844$€/año.

Por tanto, se comprueba fácilmente que la nueva política propuesta mejora notablemente los gastos ocasionados con la gestión de los productos que hemos considerado, ya que disminuye el coste total del gasto de inventario de estos productos en un 97'9879 %.

De cara al futuro, ¿la política seguida es la adecuada o no? Para confirmar si debemos mantener dicha política o cambiar a una nueva debemos estimar la distribución de probabilidad de las ventas de cada producto. Para ello se necesitaría disponer de datos de varios años que nos permitan estimar con mayor precisión esas distribuciones. Así, por nuestra parte estamos abiertos a estudiar esos futuras políticas pero necesitamos la colaboración de la empresa para que nos suministre más datos sobre los productos.

A

Datos proporcionados por la empresa

En este apéndice se recogen los datos de compras y ventas referidos a los productos sobre los que hemos realizado el estudio. La empresa habitualmente trabaja con un periodo de gestión de t_f=1 mes para los productos A (cerveza) y B (ron), mientras que el periodo de gestión es de t_f= 3 meses para el producto C (ginebra). Por ello, en primer lugar se muestran los datos mensuales tanto de ventas como de compras de los tres productos A, B y C. Las cantidades se miden en cajas, cada caja del Producto A contiene 24 unidades del tipo de cerveza considerado, la caja del producto B contiene 12 unidades de ron, y, por último, la caja del producto C contiene 6 unidades de ginebra, respectivamente.

A.1. Datos de compras y ventas mensuales

A.1.1. Producto A

Fecha	Compras	Ventas
Enero	1069	808
Febrero	847	719
Marzo	1254	1037
Abril	1320	1081
Mayo	1582	1212
Junio	1111	1096
Julio	1628	1197
Agosto	1491	917
Septiembre	962	648
Octubre	1106	770
Noviembre	1057	868
Diciembre	795	766

A.1.2. Producto B

Fecha	Compras	Ventas
Enero	35	35
Febrero	60	31
Marzo	60	34
Abril	40	30
Mayo	30	33
Junio	60	37
Julio	30	52
Agosto	60	32
Septiembre	60	32
Octubre	20	30
Noviembre	45	26
Diciembre	60	27

A.1.3. Producto C

Fecha	Compras	Ventas
Enero	50	17
Febrero	– – –	13
Marzo	– – –	18
Abril	84	19
Mayo	– – –	20
Junio	– – –	21
Julio	107	40
Agosto	– – –	25
Septiembre	– – –	20
Octubre	– – – –	23
Noviembre	86	21
Diciembre	– – –	13

Como se dispone de las ventas semanales de los tres productos, hemos recogido dichas ventas en las tablas mostradas a continuación. Estas ventas semanales nos permiten abordar el estudio de cuándo es más conveniente realizar la reposición de los productos con el objetivo de minimizar el coste total de la gestión de los inventarios.

A.2. Ventas semanales

A.2.1. Producto A

Fecha	Nº de cajas
Semana 1	397
Semana 2	95
Semana 3	81
Semana 4	166
Semana 5	438
Semana 6	99
Semana 7	135
Semana 8	94
Semana 9	409
Semana 10	160
Semana 11	194
Semana 12	116
Semana 13	180
Semana 14	456
Semana 15	106
Semana 16	180
Semana 17	339
Semana 18	391
Semana 19	349
Semana 20	269
Semana 21	152
Semana 22	101
Semana 23	507
Semana 24	265
Semana 25	170
Semana 26	104

Fecha	Nº de cajas
Semana 27	521
Semana 28	233
Semana 29	141
Semana 30	231
Semana 31	474
Semana 32	170
Semana 33	105
Semana 34	161
Semana 35	113
Semana 36	103
Semana 37	332
Semana 38	56
Semana 39	126
Semana 40	341
Semana 41	93
Semana 42	92
Semana 43	110
Semana 44	243
Semana 45	109
Semana 46	335
Semana 47	59
Semana 48	260
Semana 49	224
Semana 50	163
Semana 51	65
Semana 52	310

A.2.2. Producto B

Fecha	Nº de cajas	Fecha	Nº de cajas
Semana 1	122	Semana 27	239
Semana 2	127	Semana 28	159
Semana 3	59	Semana 29	105
Semana 4	63	Semana 30	65
Semana 5	148	Semana 31	186
Semana 6	34	Semana 32	99
Semana 7	53	Semana 33	73
Semana 8	175	Semana 34	52
Semana 9	159	Semana 35	21
Semana 10	55	Semana 36	69
Semana 11	92	Semana 37	249
Semana 12	82	Semana 38	29
Semana 13	34	Semana 39	42
Semana 14	132	Semana 40	108
Semana 15	64	Semana 41	47
Semana 16	76	Semana 42	56
Semana 17	88	Semana 43	66
Semana 18	158	Semana 44	120
Semana 19	38	Semana 45	52
Semana 20	55	Semana 46	74
Semana 21	104	Semana 47	51
Semana 22	60	Semana 48	100
Semana 23	143	Semana 49	115
Semana 24	83	Semana 50	49
Semana 25	121	Semana 51	66
Semana 26	71	Semana 52	83

A.2.3. Producto C

Fecha	Nº de cajas
Semana 1	36
Semana 2	22
Semana 3	13
Semana 4	10
Semana 5	54
Semana 6	6
Semana 7	7
Semana 8	31
Semana 9	25
Semana 10	7
Semana 11	13
Semana 12	48
Semana 13	16
Semana 14	54
Semana 15	30
Semana 16	8
Semana 17	22
Semana 18	38
Semana 19	14
Semana 20	23
Semana 21	25
Semana 22	27
Semana 23	43
Semana 24	20
Semana 25	25
Semana 26	27

Fecha	Nº de cajas
Semana 27	95
Semana 28	32
Semana 29	41
Semana 30	35
Semana 31	71
Semana 32	22
Semana 33	51
Semana 34	18
Semana 35	22
Semana 36	13
Semana 37	71
Semana 38	11
Semana 39	6
Semana 40	48
Semana 41	22
Semana 42	12
Semana 43	18
Semana 44	53
Semana 45	16
Semana 46	33
Semana 47	15
Semana 48	49
Semana 49	22
Semana 50	7
Semana 51	16
Semana 52	35

Bibliografía

[1] AXSÄTER, SVEN *Inventory Control.* Kluwer's International Series, 2000.
[2] WILD, TONY *Best Practice in Inventory Management.* BH, 1997.
[3] C.HAX, ARNOLDO Y CANDEA, DAN *Production and inventory management.* Prentice-Hall, 1984.
[4] HADLEY, G. Y WHITIN, T.H. *Analysis of inventory sistems.* Prentice-Hall, 1963.
[5] A.SILVER, EDWARD; F.PYKE, DAVID Y PETERSON, REIN *Inventory management and production planning and scheduling.* Third Edition, 1998.

Management of product inventories in the food sector

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Aitor Dionis Leandro
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100893557@ull.edu.es

Abstract

This work studies the inventory management of some products of a company in the food sector which is located on the island of Tenerife. The company's purchases and sales of three products during 2017 are described. Thereafter, the costs associated with the management carried out by the company for these products are determined. The evolution of inventories of these products are examined and analysed in order to know if the best policies associated with inventory level systems had been implemented. It is concluded that the use of such policies would have been a significant economic improvement, since some of the expenditure related to inventory management of those products would have been saved.

1. Introduction

Inventory systems allow for the study and analysis of the effective management and planning of the flow of goods from the acquisition of materials necessary for the manufacture of products to the supply of finished products to final consumers. They assist in making decisions related to the storage and replenishment of the product stock. The decision rules in inventory systems should determine when items should be replaced and what amounts are requested from each to replenish the stock. An inventory and production system is characterized by a large number of elements or components that need to be planned efficiently, in order to supply the required products in the appropriate quantities for an acceptable time, maintaining the quality of the products and all at a reasonable cost. The key objectives should be the determination of inventory levels, both of input materials for the manufacture of products and of finished goods.

2. Company's inventory analysis

We are going to show only the study of one of the three products. Figure 1 shows both sales and product replenishments throughout 2017. Subsequently, an appropriate management model is applied to minimize the cost of the product.

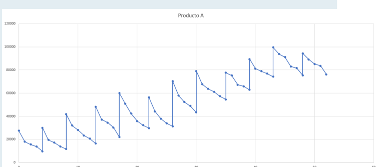

Figure 1: *Sales system*

As we can see from the Figure 1 there is an increase in the level of inventory as the months pass go by which implies an unnecessary cost by the company resulting in loss of capital, which could be used in other aspects of the company.

3. Policy of Inventory Management

After choosing an appropriate management model, we can make the corresponding calculations that will apply to the management periods of one, two or four weeks. First, we have to calculate the probability distribution of the product, as we can see in the Table 1.

Demand (x)	x_i	F_i	p(x)
0-100	50	9	0.173
100-200	150	22	0.423
200-300	250	7	0.135
300-400	350	8	0.154
400-500	450	4	0.077
500-600	550	2	0.036

Table 1: *Probability distribution of Product A*

Then we obtain the table of solutions, shown in Table 2. Using that, we can determine the minimum cost of the product in the fixed management period.

x,S	p(x)	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum\frac{p(x)}{x}$	$(S+\frac{u}{2})\sum\frac{p(x)}{x}$	M(S)	C(S)
50	0.173	0.00346	0.00404	0.404	0.577	3.2483
150	0.423	0.00282	0.00122	0.244	0.84	1.5513
250	0.135	0.00054	0.00068	0.204	0.935	1.2642
350	0.154	0.00044	0.00024	0.096	0.981	1.4849
450	0.077	0.000171	0.000069	0.0345	0.9965	1.9497
550	0.036	0.000069	——	——	1	2.4966

Table 2: *Period of management t_f = 1 week.*

Finally we can observe that the lower cost implies that the inventory level of product A should rise to 250 boxes with a cost of 1.2642 euros per week.

References

[1] Axsäter, Sven *Inventory Control.* Kluwer's International Series, 2000.

[2] Wild, Tony *Best Practice in Inventory Management.* BH, 1997.

[3] C.Hax, Arnoldo y Candea, Dan *Production and inventory management.* Prentice-Hall, 1984.

[4] Hadley, G. y Whitin, T.H. *Analysis of inventory sistems.* Prentice-Hall, 1963.

[5] A.Silver, Edward; F.Pyke, David y Peterson, Rein *Inventory management and production planning and scheduling.* Third Edition, 1998.