



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Paula Rodríguez Sánchez

La transformación integral de Fourier

The Fourier integral transform

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, junio de 2020

DIRIGIDO POR
Lourdes Rodríguez Mesa

Lourdes Rodríguez Mesa
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria analizamos los principales aspectos relacionados con la transformación integral de Fourier de funciones definidas en la recta real. Estudiamos algunas propiedades básicas como el Lema de Riemann-Lebesgue, su comportamiento con respecto a algunas operaciones fundamentales como la derivación y la convolución y la existencia de un sistema ortonormal y completo de autofunciones para el operador integral de Fourier. Mostramos diferentes condiciones que dan validez a la fórmula de inversión, y que, entre otras cosas, permiten precisar el comportamiento de la transformación de Fourier sobre la clase de Schwartz. Hacemos un análisis de la relación entre la regularidad de una función y el decaimiento de su transformada de Fourier, incluyendo en este estudio a las funciones que admiten una extensión holomorfa a una banda o a todo el plano complejo y establecemos el Teorema de Paley-Wiener. Consideramos asimismo el Teorema de Plancherel para funciones de cuadrado integrable. Entre las aplicaciones que hemos abordado se encuentran el Principio de incertidumbre de Heisenberg y el Teorema central del límite. Asimismo, usamos la transformación integral de Fourier como herramienta para resolver la ecuación del calor unidimensional y el problema de Dirichlet en el semiplano. Recogemos también una prueba de la fórmula de sumación de Poisson y la aplicamos para establecer el Teorema de Shannon relativo a señales de banda limitada.

Palabras clave: Clase de Schwartz – Núcleo de Gauss – Teorema de inversión – Núcleo de Dirichlet – Teorema de convergencia de Dini – Teorema de Plancherel – Teorema de Paley-Wiener – Principio de incertidumbre de Heisenberg – Ecuación de difusión – Ecuación de Laplace – Teorema central del límite – Fórmula de sumación de Poisson – Teorema de Shannon – Funciones de Hermite.

Abstract

In this work we analyze the main aspects related to the Fourier integral transformation of functions defined on the real line. We study some basic properties such as the Riemann-Lebesgue Lemma, the behavior with respect to some fundamental operations as differentiation and convolution and the existence of a complete orthonormal system of eigenfunctions for the Fourier integral operator. We show different conditions that give validity to the inversion formula and which, amongst other things, allow us to specify the behavior of the Fourier transform on the Schwartz class. We make an analysis of the relationship between the regularity of a function and the decay of its Fourier transform, including in this study the functions which extend holomorphically to a horizontal strip or to the whole complex plane and establish the Paley-Wiener Theorem. We also consider Plancherel Theorem for square integrable functions. As applications we have dealt with Heisenberg Uncertainty Principle and the Central Limit Theorem. Likewise, we use the Fourier integral transform as a tool to solve the unidimensional heat equation and the Dirichlet problem in the half-plane. We also collect a proof of the Poisson summation formula and apply it to establish the Shannon Theorem for band limited signals.

Keywords: Schwartz class – Gauss kernel – Inversion theorem – Dirichlet kernel – Dini convergence Theorem – Plancherel Theorem – Paley-Wiener Theorem – Heisenberg Uncertainty Principle – Diffusion equation – Laplace equation – Central Limit Theorem – Poisson summation formula – Shannon Theorem – Hermite functions.

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Elementos de la teoría	1
1.1. La clase de Schwartz	2
1.2. Aproximaciones de la identidad	3
1.3. La convolución	4
2. La transformación integral de Fourier en \mathbb{R}	9
2.1. Definición y propiedades básicas	9
2.2. Transformación inversa de Fourier	14
2.2.1. Fórmula de inversión y núcleos de sumabilidad	14
2.2.2. Fórmula de inversión y núcleo de Dirichlet	16
2.3. Decaimiento de la transformada de Fourier y regularidad	19
2.4. Funciones holomorfas. Teorema de Paley-Wiener	22
2.5. El Teorema de Plancherel	26
3. Aplicaciones de la transformada de Fourier	29
3.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg	29
3.2. Ecuaciones en derivadas parciales	32
3.2.1. La ecuación del calor	33
3.2.2. La ecuación de Laplace. El problema de Dirichlet en el semiplano	38
3.3. Teorema central del límite	40
3.4. La fórmula de sumación de Poisson. El Teorema de Shannon	42
A. Apéndice	45
A.1. Funciones bump	45
A.2. Transformada de Fourier de la función gaussiana usando integración compleja	46
A.3. Autofunciones para la transformación de Fourier	47
A.4. Teorema de Fubini	48
A.5. Propiedad del valor medio	49
Bibliografía	51
Poster	53

Introducción

El análisis de Fourier o análisis armónico constituye un tema clásico dentro del análisis matemático. Su origen se remonta al siglo XVIII con el estudio de uno de los problemas del que se ocuparon matemáticos de la talla de D'Alembert, Euler y más tarde, Bernoulli: el análisis de las vibraciones de una cuerda. Algo más de 50 años después, las ideas de Bernoulli fueron consideradas por el matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier para el estudio de la propagación del calor en los cuerpos sólidos. Su trabajo fue presentado en 1807 a la Academia de Ciencias de París y aunque generó controversias y críticas por parte de sus contemporáneos, sus ideas, plasmadas finalmente en su libro "Théorie analytique de la Chaleur" publicado en 1822, contribuyeron a la evolución de diferentes teorías analíticas que continúan desarrollándose en la actualidad y que conectan con diferentes campos de las matemáticas y de la física: el análisis real y complejo, la teoría de integración, la teoría de números, las ecuaciones en derivadas parciales o el procesamiento de señales, entre otros.

En el origen de la teoría se sitúa la idea de que toda función periódica se puede descomponer como suma de funciones trigonométricas. La transformación integral de Fourier trata de generalizar este concepto para funciones que no son periódicas. Y ello supone pasar del contexto discreto de las series de Fourier a un contexto donde el espectro de frecuencias es continuo, lo que contribuye a que el análisis de Fourier se pueda extender a campos más amplios.

Nuestro objetivo en esta memoria es desarrollar los principales conceptos asociados a la transformación integral de Fourier de funciones definidas en la recta real. Para ello, hemos dividido el trabajo en tres capítulos, a los cuales hemos añadido un apéndice con la idea de completar algunas cuestiones que aparecen a lo largo de la memoria.

En el primer capítulo presentamos los elementos fundamentales que forman parte de la teoría que se desarrolla en los capítulos siguientes. En concreto, introducimos la clase de las funciones de rápido decaimiento, la conocida como clase de Schwartz, que juega un papel importante en el estudio de la transformación integral de Fourier, en especial por ser el espacio clave que permite la extensión de la teoría al espacio de las funciones de cuadrado integrable. Consideramos también en este primer capítulo algunos resultados relativos a los núcleos de sumabilidad o aproximaciones de la identidad y la convolución que resultan esenciales en el análisis de la fórmula de inversión y que permiten además dar una prueba del Teorema de aproximación de Weierstrass que se recoge al final de esta primera parte.

Es en el segundo capítulo donde se introduce la transformación integral de Fourier y se desarrollan los aspectos teóricos más relevantes sobre la misma. Primero, calculamos la transformada de Fourier de algunas funciones esenciales, analizamos el comportamiento del operador de Fourier frente a ciertas operaciones como la derivación y la convolución y mostramos algunas propiedades analíticas entre las que figura el Lema de Riemann-Lebesgue. Dedicamos una sección a estudiar la validez de la fórmula de inversión que permite recuperar una función a partir de su transformada, un hecho esencial para el uso del método de Fourier en la resolución, por ejemplo, de ecuaciones en derivadas parciales o en procesos de señales. Abordamos esta cuestión primero haciendo uso de las aproximaciones de la identidad, las cuales proporcionan los conceptos de convergencia en medias Gaussianas, de Cesàro o Abel y, en un apartado posterior, utilizando el núcleo de Dirichlet para establecer como resultado principal el Teorema de convergencia de Dini.

La relación entre la regularidad de una función y el decaimiento en infinito de su transformada de Fourier se presenta en otra de las secciones del segundo capítulo. Dicho, grosso modo, a mayor regularidad de la función, mayor decaimiento de su transformada. Constatamos este hecho de manera precisa.

Usando herramientas del análisis complejo examinamos la transformada de Fourier de aquellas funciones que se extienden de manera holomorfa a una banda horizontal del plano complejo. Establecemos en este marco, la relación entre la extensión holomorfa de una función y el decaimiento de tipo exponencial de su transformada de Fourier, y completamos estos resultados con el Teorema de Paley-Wiener que caracteriza a las funciones cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto.

Terminamos el capítulo extendiendo la definición de la transformación de Fourier a las funciones de cuadrado integrable, siendo el resultado central de este apartado el Teorema de Plancherel. Como comentamos, la clase de Schwartz ocupa un lugar destacado en esta sección, esencialmente por ser un espacio denso en L^2 y por el hecho de que la transformación de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es una isometría.

El capítulo 3 se dedica a mostrar algunas de las aplicaciones del análisis de Fourier. Específicamente, resolvemos la ecuación del calor en una dimensión y el problema de Dirichlet en el semiplano, mostrando algunos teoremas de unicidad, desarrollamos el Principio de incertidumbre de Heisenberg y el Teorema central del límite y demostramos la fórmula de sumación de Poisson. Además comprobamos la utilidad de esta fórmula en el cálculo de la suma de algunas series, así como en la prueba del Teorema de Shannon, que establece cómo se puede recuperar una señal a partir de los valores que toma en determinados puntos.

Finalmente en el Apéndice de la memoria recogemos algunos resultados que complementan el estudio realizado, bien porque amplían algunos aspectos sobre la transformación de Fourier, como es el caso de los apartados dedicados a las autofunciones para el operador de Fourier y al uso de la integración compleja para el cálculo de la transformada de Fourier de la función gaussiana, o bien, porque constituyen elementos importantes en el desarrollo de la teoría analizada. Es el caso del Teorema de Fubini, la propiedad del valor medio y la construcción explícita de una función “bump”.

Para desarrollar este trabajo nos hemos apoyado en las referencias indicadas en la bibliografía, considerando no solo las secciones del libro dedicadas a cada tema que estudiamos sino también examinando los ejercicios propuestos por los autores. Las referencias básicas en nuestro análisis fueron las obras de Folland [4] (capítulo 7), de Pinsky [8] (capítulo 2) y, especialmente, el libro de Stein y Shakarchi [10] (capítulo 5). El estudio del Teorema de Paley-Wiener y la transformada de Fourier de las funciones que se extienden de manera holomorfa al plano complejo se ha realizado, principalmente, a partir del capítulo 4 en [11], y para el Principio de incertidumbre y el Teorema central del límite hemos tenido en cuenta además los textos de Bruna [2] y Duoandikoetxea [3]. Por último, para la fórmula de sumación de Poisson y su aplicación en la prueba del Teorema de Shannon nos apoyamos en el desarrollo hecho en [8, §4.2].

Elementos de la teoría

En este capítulo abordamos aquellos componentes que necesitamos para el análisis de la transformación integral de Fourier que se presenta en esta memoria.

La teoría de la transformación de Fourier en \mathbb{R} que encontramos en una amplia bibliografía se desarrolla en la clase $L^1(\mathbb{R})$ de las funciones absolutamente integrables en sentido Lebesgue. En este trabajo, sin embargo, consideramos la integral sobre la recta real en sentido impropio de Riemann, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_{-n}^m f(x) dx. \quad (1.1)$$

Esta elección está motivada principalmente por el hecho de que el análisis en $L^1(\mathbb{R})$ necesita de conocimientos en teoría de la medida que, con el plan de estudios vigente hasta el curso actual, el alumnado en general no ha adquirido. Trabajando en espacios de funciones que poseen un “buen” comportamiento en el infinito y con el enfoque elegido podemos analizar los principales aspectos de la teoría usando herramientas conocidas.

Es claro que el límite en (1.1) puede no existir. Basta tomar cualquier función constante no nula, o incluso, la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, que converge a 0 en el infinito, pero no con el suficiente decaimiento para que el valor en (1.1) sea finito.

Podemos asegurar la convergencia de la integral, por ejemplo, para las funciones en el espacio que denotamos por $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (funciones de decrecimiento moderado), constituido por funciones continuas tales que para ciertas constantes $C, \varepsilon > 0$, se tiene que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la integral $I_n := \int_0^n f(x) dx$ está bien definida por ser f continua. Además, para ciertos $C, \varepsilon > 0$, podemos escribir

$$|I_m - I_n| \leq C \int_n^m \frac{dx}{1+x^{1+\varepsilon}} \leq C \int_n^m \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \frac{C}{\varepsilon} \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{m^\varepsilon} \right) \leq \frac{C}{\varepsilon n^\varepsilon} \quad n, m \in \mathbb{N}, n \leq m,$$

lo que nos asegura que $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y, por tanto, convergente. De la misma forma se procede con I_{-n} , $n \in \mathbb{N}$.

Claramente las funciones $f(x) = \frac{1}{1+|x|^a}$, $x \in \mathbb{R}$, con $a > 1$, pertenecen a la clase $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. También, para cada $\alpha > 0$, la función exponencial $g(x) = e^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, es una función de decrecimiento moderado. De hecho, para cualquier $r \in \mathbb{R}$, se tiene que $|x|^r e^{-\alpha|x|} \rightarrow 0$, cuando $|x| \rightarrow \infty$. Es obvio que en el espacio de las funciones absolutamente integrables en el sentido (1.1), la integración es un operador lineal. También es fácil comprobar que es invariante por traslaciones, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+h) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad h \in \mathbb{R},$$

y que su comportamiento frente a las dilataciones viene dado por

$$r \int_{-\infty}^{\infty} f(rx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad r > 0.$$

Por otro lado, en el caso de que f sea además continua podemos asegurar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)| dx = 0. \quad (1.2)$$

En efecto, sea f una función continua absolutamente integrable en \mathbb{R} . Fijamos $\varepsilon > 0$. Por ser f una función absolutamente integrable, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x| \geq n} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Además, cuando $|h| \leq 1$, se tiene que

$$\int_{|x| \geq n} |f(x+h)| dx = \int_{|u-h| \geq n} |f(u)| du \leq \int_{|u| \geq n-|h|} |f(u)| du \leq \int_{|u| \geq n-1} |f(u)| du < \frac{\varepsilon}{4}, \quad n \geq n_0 + 1.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 + 1$. Dado que f es continua en \mathbb{R} , es uniformemente continua en el intervalo $[-n-1, n+1]$ y, por tanto, existe $0 < \delta < 1$ de manera que

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4n}, \quad x, y \in [-n-1, n+1], |x-y| < \delta,$$

de lo que se obtiene, cuando $|h| < \delta$,

$$\sup_{|x| \leq n} |f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4n}.$$

Esta estimación junto con las anteriores permiten concluir que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)| dx \leq \int_{|x| \geq n} (|f(x+h)| + |f(x)|) dx + \int_{|x| \leq n} |f(x-h) - f(x)| dx < \varepsilon, \quad |h| < \delta,$$

lo que prueba la propiedad.

Analizamos a continuación una clase de funciones absolutamente integrables que, como veremos, tiene gran interés en el estudio de la transformación integral de Fourier.

1.1. La clase de Schwartz

Se define el espacio de Schwartz en \mathbb{R} , $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, como el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, tales que para todo $\ell, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\gamma_{\ell, k}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell \left| \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right| < \infty,$$

esto es, f y todas sus derivadas son funciones de decrecimiento rápido, y por tanto, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Es claro que la clase de Schwartz es un espacio vectorial complejo. Resulta relevante que sea además una clase cerrada bajo diferenciación (nótese que $\gamma_{\ell, k}(f') = \gamma_{\ell, k+1}(f)$, $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) y también respecto a la multiplicación por polinomios. Para ver esto, basta usar inducción para obtener que

$$\frac{d^k}{dx^k}(xf) = x \frac{d^k}{dx^k} f(x) + k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

de donde se sigue que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $\gamma_{\ell, k}(xf) \leq \gamma_{\ell+1, k}(f) + k\gamma_{\ell, k-1}(f) < \infty$, para cada $\ell, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aquí se entiende $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}} f = 0$ y $\gamma_{\ell, -1}(f) = 0$.

Por otro lado, teniendo en cuenta la regla de Leibniz,

$$\frac{d^k}{dx^k}(fg) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^j f}{dx^j} \frac{d^{k-j} g}{dx^{k-j}}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

se deduce que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cuando $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pues en ese caso,

$$\gamma_{\ell,k}(fg) \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \gamma_{\ell,j}(f) \gamma_{0,k-j}(g) < \infty, \quad \ell, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Un ejemplo de función en la clase de Schwartz que juega un papel relevante en la teoría de la transformación de Fourier es la función Gaussiana $h_a(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ($a > 0$). Observamos que para cada $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\ell h_a(x) = 0$, por lo que $\gamma_{\ell,0}(h_a) < \infty$. Además, dado $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{d^k}{dx^k} h_a(x) = p_k(x) h_a(x)$, donde $p_k(x)$ es un polinomio de grado k . Procedemos, para ver esto, por inducción. Claramente se cumple para $k = 1$ pues $\frac{d}{dx} h_a(x) = -2ax h_a(x)$. Suponemos que se tiene la propiedad para $k \in \mathbb{N}$ y, entonces,

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} h_a(x) = \frac{d}{dx} [p_k(x) h_a(x)] = [p'_k(x) - 2ax p_k(x)] h_a(x) = p_{k+1}(x) h_a(x),$$

siendo $p_{k+1}(x) := p'_k(x) - 2ax p_k(x)$ un polinomio de grado $k + 1$. Podemos concluir así que $h_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Por otro lado es claro que el conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R})$, constituido por las funciones regulares con soporte compacto, es un subespacio propio de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dentro de este espacio se encuentran las conocidas como *funciones bump* que resultan muy útiles en muchas aplicaciones en análisis. Son funciones $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en un intervalo $[a, b]$, que verifican que $0 \leq b(x) \leq 1$ y que $b(x) = 1$, $x \in [a + \delta, b - \delta]$, siendo $0 < \delta < (b - a)/2$. En la Sección A.1 del Apéndice puede verse el desarrollo para la construcción explícita de una función de este tipo.

Por último hacemos notar que la función $f(x) = e^{-|x|}$, aunque es de decrecimiento rápido en infinito, pues $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k e^{-|x|} = 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y satisface que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, x \neq 0} \left| x^\ell \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right| < \infty,$$

para todo $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puesto que no es diferenciable en el origen. Esta función muestra que la clase de Schwartz está contenida estrictamente en el espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

1.2. Aproximaciones de la identidad

De especial interés en el estudio de la transformación inversa de Fourier son los llamados núcleos de sumabilidad o aproximaciones de la identidad. Se dice que una familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de funciones en \mathbb{R} , con Λ conjunto discreto o continuo, es una *aproximación de la identidad cuando $\lambda \rightarrow 0$* , si se verifican las siguientes condiciones:

(A1) $\int_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda(x) dx = 1$, $\lambda \in \Lambda$;

(A2) $\sup_{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |k_\lambda(x)| dx < \infty$;

(A3) Para cada $\eta > 0$, se tiene que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} |k_\lambda(x)| dx = 0$.

Una manera habitual de encontrar una aproximación de la identidad es tomar una función K absolutamente integrable en \mathbb{R} tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1$, y definir, para cada $\lambda > 0$, $k_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} K(\frac{x}{\lambda})$. La familia $\{k_\lambda\}_{\lambda > 0}$ es una aproximación de la identidad cuando $\lambda \rightarrow 0$. En efecto, haciendo un cambio de variable y teniendo en cuenta que K es absolutamente integrable, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{dx}{\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1, \quad \lambda > 0,$$

$$\sup_{\lambda > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |k_\lambda(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |K(u)| du < \infty,$$

y, para cada $\eta > 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} |k_\lambda(x)| dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|u| > \eta/\lambda} |K(u)| du = 0.$$

Algunas aproximaciones de la identidad importantes que se obtienen con este método son:

$$\left\{ H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi x^2/t} \right\}_{t>0}, \text{ cuando } t \rightarrow 0, \quad (\text{núcleo de Gauss o del calor}) \quad (1.3)$$

$$\left\{ P_t(x) := \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)} \right\}_{t>0}, \text{ cuando } t \rightarrow 0, \quad (\text{núcleo de Poisson}) \quad (1.4)$$

$$\left\{ F_r(x) := \frac{\text{sen}^2(\pi r x)}{r(\pi x)^2}, x \neq 0, F_r(0) := r \right\}_{r>0}, \text{ cuando } r \rightarrow \infty, \quad (\text{núcleo de Féjer}) \quad (1.5)$$

Estos núcleos de sumabilidad se generan, respectivamente, a partir de las funciones $H(x) = e^{-\pi x^2}$, tomando $\lambda = \sqrt{t}$, $P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, con $\lambda = t$, y $F(x) = \frac{\text{sen}^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$, $x \neq 0$, y $F(0) = 1$, considerando $\lambda = r^{-1}$. Observamos que estas funciones son absolutamente integrables en \mathbb{R} con integral igual a 1¹, pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi a^2} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2 \arctan a}{\pi} = 1,$$

y, considerando la función integral senoidal $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } u}{u} du$, e integrando por partes podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1 - \cos(2x)}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^a + 2 \int_{\varepsilon}^a \frac{\text{sen}(2x)}{x} dx = \frac{2}{\pi} \text{Si}(+\infty) = 1.$$

Para la última igualdad puede verse (2.10). Señalamos, por último, que la importancia de estos núcleos de sumabilidad radica en el resultado del Teorema 1.3 que se recoge en la siguiente sección.

1.3. La convolución

Una de las operaciones de gran utilidad en el marco de la transformación integral de Fourier, como herramienta teórica y también en aplicaciones, es la convolución. Dadas dos funciones f y g se define su convolución $f * g$ como la función dada por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad (1.6)$$

para aquellos x para los que la integral existe. La convolución, al igual que la multiplicación ordinaria, verifica las siguientes propiedades algebraicas:

- $f * g = g * f$;
- $f * (g * h) = (f * g) * h$;
- $f * (g + h) = f * g + f * h$; $c(f * g) = (cf) * g = f * (cg)$,

donde $c \in \mathbb{C}$ y f, g, h satisfacen las condiciones apropiadas para que las integrales correspondientes sean absolutamente integrables.

Observamos que en el caso especial de que f y g se anulen en $(-\infty, 0)$, entonces $f(x-y) = 0$, cuando $y > x$, y entonces (1.6) se puede escribir como

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy.$$

También notamos que si las funciones f y g tienen soporte compacto, entonces $f * g$ también será de soporte compacto. Concretamente, se puede comprobar que si $\text{sop } f, \text{sop } g \subset [-r, r]$, para cierto $r > 0$, entonces $\text{sop}(f * g) \subset [-2r, 2r]$. Basta tener en cuenta que si $|x| \geq 2r$ e $|y| \leq r$, entonces $|x-y| \geq |x| - |y| \geq r$. En estos casos, si las funciones f y g son Riemann integrables en un intervalo $[a, b]$, la convolución estará bien definida para todos los puntos $x \in [a, b]$. No ocurre esto, en general, si las funciones son integrables

¹ Esta propiedad puede probarse usando el hecho de que, bajo ciertas condiciones, la integral de una función coincide con el valor de su transformada de Fourier en el origen (ver Observación 2.11).

Riemann en sentido impropio. Así, si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{(0,1)}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{(0,1)}(x)$, tenemos que son funciones Riemann integrables en sentido impropio, pues las funciones presentan discontinuidades de tipo infinito en $x = 1$ y $x = 0$, respectivamente, y

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2,$$

pero, sin embargo, el valor de la integral en (1.6) para $x = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(1-y)g(y)dy = \int_0^1 \frac{dy}{y} = \infty$.

Como se muestra en el siguiente resultado, podemos añadir condiciones sobre las funciones f y g que aseguran la existencia de $(f * g)(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y le otorgan ciertas propiedades.²

Proposición 1.1. *Sean f y g dos funciones absolutamente integrables. Si alguna de las funciones f ó g es acotada en \mathbb{R} , entonces $f * g$ es una función acotada en \mathbb{R} . Si, además la función que es acotada es continua en \mathbb{R} , entonces se tiene que $f * g$ es una función continua.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|f(x)| \leq M$, para cierta $M > 0$. Se tiene entonces que

$$|(f * g)(x)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|dt = M \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

y, por tanto, $f * g$ es una función acotada. Si f es además continua en \mathbb{R} , teniendo en cuenta que f es acotada y g es absolutamente integrable, y procediendo de la misma forma que en la prueba de (1.2) se llega a que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |[f(x+h-y) - f(x-y)]g(y)|dy \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0,$$

esto es, $f * g$ también es una función continua en \mathbb{R} . □

Precisamos más, probando que la convolución es una operación cerrada en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposición 1.2. (a) Si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(b) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Demostración. (a) Sean f, g dos funciones de decrecimiento moderado. En virtud de la proposición anterior $f * g$ es una función continua en \mathbb{R} . Por otro lado, para ciertas constantes $C_0 > 0$ y $a > 1$, se tiene

$$\text{máx}\{|f(x)|, |g(x)|\} \leq \frac{C_0}{1 + |x|^a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observamos además que, si $|y| \leq \frac{|x|}{2}$, entonces $|x-y| \geq |x| - |y| \geq \frac{|x|}{2}$. Podemos escribir entonces,

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \left(\int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \right) |f(x-y)||g(y)|dy \leq C_0 \left(\int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{|g(y)|}{1 + |x-y|^a} dy + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{|f(x-y)|}{1 + |y|^a} dy \right) \\ &\leq \frac{C}{1 + |x|^a} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|dy \right) \leq \frac{C}{1 + |x|^a}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

y, por tanto, $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(b) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} (f * g)(x) = \left(f * \frac{d^\ell}{dx^\ell} g \right)(x) = \left(\frac{d^\ell}{dx^\ell} f * g \right)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Estas identidades se prueban para $\ell = 1$ derivando bajo el signo integral, lo cual queda justificado por ser f' y g' de rápido decrecimiento³. Y reiterando la propiedad se obtiene para cualquier $\ell \in \mathbb{N}$.

² Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g$ no tiene por qué tener sentido puntualmente, pero es válida como función de $L^1(\mathbb{R})$ y además se cumple que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ ([6, Theorem 6.10]).

³ Siempre que f sea una función diferenciable y f y g verifiquen las condiciones necesarias que permitan derivar bajo el signo integral, se tiene que $f * g$ es diferenciable y $(f * g)' = f' * g$. Luego, $f * g$ es tan regular como lo sea f o g , incluso aunque el otro factor no tenga propiedades de regularidad.

Luego, basta probar que dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |(f * g)(x)| < \infty$. Sea $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |(f * g)(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\ell |f(x-y)g(y)| dy \leq C_\ell \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} (|x-y|^\ell + |y|^\ell) |f(x-y)g(y)| dy \\ &\leq C_\ell \left(\gamma_{\ell,0}(f) \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy + \gamma_{\ell,0}(g) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy \right) < \infty. \end{aligned}$$

□

Un aspecto en el que la convolución no se asemeja a la multiplicación ordinaria es que, mientras $f \cdot 1 = f$, para cualquier f , no existe una función g tal que $f * g = f$, para toda función f ⁴. No obstante, podemos encontrar familias de funciones $\{k_\lambda\}_{\lambda>0}$ de manera que $f * k_\lambda$ converge a f , cuando $\lambda \rightarrow 0$. Estas familias son, precisamente, las aproximaciones de la identidad que vimos en la sección anterior.

Teorema 1.3. Sean $\{k_\lambda\}_{\lambda>0}$ una aproximación de la identidad cuando $\lambda \rightarrow 0$ y f una función absolutamente integrable acotada.

(a) Si f es continua en x , entonces $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (f * k_\lambda)(x) = f(x)$.

(b) Si f es uniformemente continua en \mathbb{R} , entonces $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (f * k_\lambda)(x) = f(x)$, uniformemente en \mathbb{R} .

Demostración. (a) Supongamos que f es continua en x y fijamos $\varepsilon > 0$. Elegimos $\eta_x > 0$ de manera que $|f(x-h) - f(x)| < \varepsilon$, cuando $|h| < \eta_x$. Teniendo en cuenta la propiedad (A1) para la aproximación de la identidad y la acotación de la función f , podemos escribir

$$\begin{aligned} |(f * k_\lambda)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x-y) - f(x)] k_\lambda(y) dy \right| \leq \left(\int_{|y| < \eta_x} + \int_{|y| \geq \eta_x} \right) |f(x-y) - f(x)| |k_\lambda(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} |k_\lambda(y)| dy + C \int_{|y| \geq \eta_x} |k_\lambda(y)| dy. \end{aligned}$$

Usando ahora las propiedades (A2) y (A3) para $\{k_\lambda\}_{\lambda>0}$, encontramos $\delta_x > 0$ tal que

$$|(f * k_\lambda)(x) - f(x)| \leq C\varepsilon, \quad 0 < \lambda < \delta_x,$$

y, por tanto, se concluye la propiedad.

(b) En el caso de que la función sea uniformemente continua en \mathbb{R} , entonces la elección de $\eta > 0$ en el argumento anterior puede hacerse independiente de $x \in \mathbb{R}$, por lo que se sigue fácilmente que la convergencia de $f * k_\lambda(x)$ a $f(x)$ es uniforme. □

Observación 1.4. Señalamos que si una función está en el espacio $C_0(\mathbb{R})$ de funciones continuas que se anulan en infinito, esto es, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, entonces es acotada y uniformemente continua en \mathbb{R} y estará en las condiciones del apartado (b) del teorema. Es el caso de las funciones en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ y, por tanto, de las funciones en la clase de Schwartz.

Cuando la aproximación de la identidad se genera a partir de una función K como en el caso de los núcleos de Gauss, Poisson y Féjer, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.5. Sea K una función absolutamente integrable en \mathbb{R} tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1$. Para cada $\lambda > 0$ consideramos la función $k_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} K(\frac{x}{\lambda})$, $x \in \mathbb{R}$. Si f es continua a trozos en \mathbb{R} y acotada en \mathbb{R} , entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (f * k_\lambda)(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde

$$\alpha = \int_{-\infty}^0 K(x) dx \quad y \quad \beta = \int_0^{+\infty} K(x) dx.$$

Nótese que cuando consideramos los núcleos de Gauss, Poisson y Féjer, se tiene que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, puesto que en esos casos la función K es par.

⁴ La conocida delta de Dirac cumple la propiedad, pero en ese caso la convolución ha de interpretarse en sentido distribucional.

Demostración. Sea f una función continua a trozos en \mathbb{R} y consideramos $x \in \mathbb{R}$. Ya que para todo $\lambda > 0$, $\alpha = \int_{-\infty}^0 k_\lambda(x) dx$ y $\beta = \int_0^{+\infty} k_\lambda(x) dx$, se tiene que

$$(f * k_\lambda)(x) - \alpha f(x^+) - \beta f(x^-) = \int_0^{+\infty} (f(x+y) - f(x^+)) k_\lambda(-y) dy + \int_0^{+\infty} (f(x-y) - f(x^-)) k_\lambda(y) dy.$$

A partir de aquí se puede proceder como en la prueba del Teorema 1.3 (a), para analizar cada una de las dos integrales y establecer el resultado. \square

Terminamos el capítulo dando una prueba del Teorema de aproximación de Weierstrass donde se explota el resultado recogido en el teorema anterior.

Teorema 1.6 (Teorema de aproximación de Weierstrass). *Sea f una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un polinomio P tal que*

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

En otras palabras, podemos aproximar f uniformemente por polinomios.

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Elegimos $R > 0$ de manera que $[a, b] \subset (-R, R)$ y consideramos una función g continua en \mathbb{R} tal que $g(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, y $g(x) = 0$, $x \notin (-R, R)$ (basta definir g en el intervalo $[-R, a]$ como el segmento lineal que une los puntos $(-R, 0)$ y $(a, f(a))$, esto es, $g(x) = f(a)(x + R)/(a + R)$, y de manera análoga, $g(x) = f(b)(x - R)/(b - R)$, $x \in [b, R]$).

Sea $M > 0$ una cota de la función g y $\{H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi x^2/t}\}_{t>0}$ el núcleo de Gauss introducido en la Sección 1.2. Ya que $\{H_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad y g es una función continua de soporte compacto, por el Teorema 1.3 (b), $g * H_t \rightarrow g$, cuando $t \rightarrow 0$, uniformemente en \mathbb{R} . Por tanto, podemos elegir $t_0 > 0$ de manera que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - (g * H_{t_0})(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Por otro lado, si tenemos en cuenta el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, que converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sup_{z \in [-2R, 2R]} |H_{t_0}(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{4RM}, \tag{1.9}$$

siendo Q el polinomio de grado $2n_0$ dado por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{t_0}} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-\pi x^2/t_0)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definimos el polinomio $P := g * Q$ ⁵. Observamos que si $x, y \in [-R, R]$, entonces $x - y \in [-2R, 2R]$. Luego, en virtud de (1.9) y de que el soporte de g está contenido en $[-R, R]$, se sigue que

$$|(g * H_{t_0})(x) - P(x)| \leq \int_{-R}^R |g(y)| |H_{t_0}(x-y) - Q(x-y)| dy \leq 2RM \sup_{z \in [-2R, 2R]} |H_{t_0}(z) - Q(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.10}$$

siempre que $x \in [-R, R]$.

Por último, de (1.8) y (1.10) se sigue que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - P(x)| \leq \sup_{x \in [-R, R]} (|g(x) - (g * H_{t_0})(x)| + |(g * H_{t_0})(x) - P(x)|) < \varepsilon,$$

con lo que se concluye la prueba. \square

⁵ Nótese que, siempre que exista, la convolución de f con $Q(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es un polinomio de grado menor o igual que n .

La transformación integral de Fourier en \mathbb{R}

Este capítulo constituye la parte fundamental de la memoria. En él abordamos el desarrollo teórico sobre la transformación integral de Fourier, y proporcionará el marco en el que se analizarán las cuestiones que se presentan en el siguiente capítulo.

2.1. Definición y propiedades básicas

Sea f una función absolutamente integrable en \mathbb{R} . Definimos su *transformada de Fourier* \widehat{f} mediante

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ya que $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, la integral converge absolutamente para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y de hecho define una función acotada, pues $|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. Señalamos también que si f es, además, una función par, entonces podemos escribir \widehat{f} en términos de la conocida como transformación Fourier-coseno, \mathcal{F}_c ,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)(e^{2\pi i \xi x} + e^{-2\pi i \xi x}) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi \xi x) dx =: 2\mathcal{F}_c(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Análogamente, cuando f es impar, se obtiene $\widehat{f} = -2i\mathcal{F}_s(f)$, donde $\mathcal{F}_s(f)$ representa la transformada de Fourier-seno

$$\mathcal{F}_s(f)(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(2\pi \xi x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Antes de seguir con el desarrollo teórico, vamos a calcular la transformada de Fourier de algunas funciones básicas. Consideramos primero las funciones pares de soporte compacto $d_r(x) = \chi_{[-r,r]}(x)$ y $f_r(x) = (r - |x|)\chi_{[-r,r]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Un cálculo directo y una integración por partes conducen a que, para $\xi \neq 0$,

$$\widehat{d}_r(\xi) = 2 \int_0^r \cos(2\pi \xi x) dx = \frac{\operatorname{sen}(2\pi r \xi)}{\pi \xi},$$

$$\widehat{f}_r(\xi) = 2 \int_0^r (r - x) \cos(2\pi \xi x) dx = \left((r - x) \frac{\operatorname{sen}(2\pi \xi x)}{\pi \xi} - \frac{\cos(2\pi \xi x)}{2(\pi \xi)^2} \right) \Big|_0^r = \frac{1 - \cos(2\pi r \xi)}{2(\pi \xi)^2} = \frac{\sin^2(\pi r \xi)}{(\pi \xi)^2},$$

y $\widehat{d}_r(0) = 2r$, $\widehat{f}_r(0) = r^2$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que, para $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la integral cíclica

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

se obtiene que para $p_t(x) = e^{-2\pi t|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, ($t > 0$),

$$\widehat{p}_t(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-2\pi t x} \cos(2\pi \xi x) dx = \frac{t}{\pi(t^2 + \xi^2)}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Otra de las funciones fundamentales en la teoría es la función gaussiana $h_t(x) = e^{-\pi t x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ($t > 0$). Una técnica que nos permite obtener su transformada de Fourier consiste en encontrar una ecuación diferencial que verifique \widehat{h}_t . Para ello haremos uso de algunas de las reglas operacionales que recogemos en la Proposición 2.2. Fijamos $t > 0$. Ya que $h'_t(x) = -2\pi t x h_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$, en virtud de (2.2) y (2.3) se tiene

$$\widehat{h}'_t(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{h}_t(\xi) \quad \text{y} \quad \widehat{h}'_t(\xi) = \widehat{(-2\pi t x h_t)}(\xi) = -it(\widehat{h}_t)'(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Además,

$$\widehat{h}_t(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

luego, \widehat{h}_t satisface la ecuación diferencial $tF'(\xi) + 2\pi\xi F(\xi) = 0$, con la condición inicial $F(0) = t^{-1/2}$. Por tanto, $\widehat{h}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi\xi^2/t}$, $\xi \in \mathbb{R}$. En la Sección A.2 del Apéndice presentamos otra forma de obtener este resultado usando otra de las técnicas habituales, la integración compleja.

Este último ejemplo nos permite observar que, cuando $t \rightarrow \infty$, la función h_t se va “concentrando” alrededor del origen, mientras que su transformada toma una forma “más plana”, esto es, la función y su transformada no están localizadas en el origen a la vez. Este es un fenómeno general conocido como *Principio de incertidumbre de Heisenberg* que se discutirá en la Sección 3.1. Por otro lado, queramos señalar que se obtiene una propiedad de interés cuando $t = 1$, a saber, la función $h(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, coincide con su transformada de Fourier. En otras palabras, la función h es una autofunción para la transformación integral de Fourier. En la Sección A.3 se muestra que existe un sistema ortonormal y completo de autofunciones para este operador, las funciones de Hermite.

Observación 2.1. La importancia de las funciones consideradas arriba reside en su relación con los núcleos de Gauss $\{H_t\}_{t>0}$, de Poisson $\{P_t\}_{t>0}$ y de Féjer $\{F_r\}_{r>0}$ introducidos en el capítulo anterior ((1.3), (1.4), (1.5)), y con el núcleo de Dirichlet $\{D_r\}_{r>0}$ que se define en la Sección 2.2.2. Nótese que $H_t = \widehat{h}_t$, $P_t = \widehat{p}_t$, $F_r = r^{-1}\widehat{f}_r$ y $D_r = \widehat{d}_r$, $r, t > 0$.

Podemos considerar la transformación de Fourier como el operador lineal \mathcal{F} que a cada función absolutamente integrable le hace corresponder su transformada de Fourier. Las propiedades que se recogen en la siguiente proposición muestran el comportamiento de este operador respecto a operaciones básicas.

Proposición 2.2. Sea f una función absolutamente integrable en \mathbb{R} . Se tiene:

- (i) (traslación) Para cada $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) = e^{2\pi i h \xi} \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.
- (ii) (factor de fase) Para cada $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}[e^{-2\pi i h \cdot} f](\xi) = \widehat{f}(\xi + h)$, $\xi \in \mathbb{R}$.
- (iii) (dilatación) Sea $f_r(x) = \frac{1}{r} f(\frac{x}{r})$, $r > 0$, entonces $\mathcal{F}[f_r](\xi) = \widehat{f}(r\xi)$ y $\mathcal{F}[f(r\cdot)](\xi) = \widehat{f}_r(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.
- (iv) (derivación) Si f' es absolutamente integrable en \mathbb{R} , entonces

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

- (v) (multiplicación por x) Si $x f$ es absolutamente integrable en \mathbb{R} , entonces,

$$\mathcal{F}(-2\pi i x f)(\xi) = (\widehat{f})'(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Observamos en estas propiedades ciertas simetrías entre una función y su transformada: salvo por ciertos factores, la traslación se corresponde con la multiplicación por un factor de fase, la dilatación por r en una función se corresponde con la dilatación por $1/r$ en su transformada y la diferenciación se corresponde con la multiplicación por x . Esta última relación entre f y \widehat{f} es la clave que hace de la transformación de Fourier una herramienta muy útil en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Demostración. Las propiedad (ii) se tiene por definición y las propiedades (i) y (iii) se obtienen fácilmente haciendo un cambio de variable en las integrales correspondientes.

Probamos ahora (iv). Supongamos que f' es absolutamente integrable en \mathbb{R} . Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, integrando por partes se tiene que

$$\int_{-n}^m f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \left[e^{-2\pi i \xi x} f(x) \right]_{-n}^m + 2\pi i \xi \int_{-n}^m f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Basta tomar límite cuando $n, m \rightarrow +\infty$ y tener en cuenta que $|f(x)| \rightarrow 0$, cuando $|x| \rightarrow \infty$, para obtener (iv). Veamos esto último. En virtud del Teorema Fundamental del Cálculo

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

y como f' es absolutamente integrable en \mathbb{R} , se tiene que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < \infty$. Pero el valor de este límite ha de ser 0, puesto que f es absolutamente integrable en \mathbb{R} . El mismo razonamiento se tiene cuando $x \rightarrow -\infty$.

Establecemos por último (v). Sea $g(x) = -2\pi i x f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Veamos que \hat{f} es diferenciable y que $(\hat{f})'(\xi) = \hat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Fijamos $\xi \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $h \in \mathbb{R}$ podemos escribir

$$\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} - \hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \left(\frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right) dx.$$

Como $x f$ es una función absolutamente integrable en \mathbb{R} , podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\int_{|x| > n_0} |x| |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Por otro lado, ya que $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / k!$, $z \in \mathbb{C}$, siendo la serie uniformemente convergente en cualquier compacto de \mathbb{C} , se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right) = 0, \quad \text{uniformemente en } x \in [-n_0, n_0],$$

y entonces existe $h_0 > 0$ de manera que

$$\sup_{|x| \leq n_0} \left| \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right| < \varepsilon, \quad \text{cuando } |h| < h_0.$$

Asimismo, ya que $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$, $\theta \in \mathbb{R}$, (nótese que $e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\theta/2} \sin(\theta/2)$, y $|\sin(\theta)/\theta| \leq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$), se tiene que

$$\left| \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} + 2\pi i x \right| \leq 4\pi |x|, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta todas las estimaciones anteriores y que f es absolutamente integrable concluimos que, cuando $|h| < h_0$,

$$\left| \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} - \hat{g}(\xi) \right| \leq \varepsilon \int_{|x| \leq n_0} |f(x)| dx + 4\pi \int_{|x| > n_0} |x| |f(x)| dx < C\varepsilon,$$

y terminamos así la prueba. □

El operador \mathcal{F} transforma la operación de convolución en el producto usual de funciones.

Proposición 2.3. Sean f, g funciones en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.¹

Demostración. El Teorema de Fubini (ver Sección A.4) y un sencillo cambio de variable conducen a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)e^{-2\pi i \xi x} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i \xi y} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-2\pi i \xi(x-y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i \xi y} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-2\pi i \xi u} du dy = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

¹ Este resultado y el de la Proposición 2.5 son ciertos en el caso de que $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pues también en este contexto se verifica el Teorema de Fubini ([12, §3, Chap. 2]).

Ejemplo 2.4. Como ilustración veamos cómo podemos utilizar este teorema (en su versión más general, ver la nota al pie anterior) para establecer la conocida relación entre las funciones Gamma y Beta:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \in (0, \infty).$$

Recordamos que $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$, y $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, $p, q \in (0, \infty)$.

Sean $p, q \in (0, \infty)$ y definimos $f_p(x) = e^{-x} x^{p-1} \chi_{(0, \infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Esta función es absolutamente integrable (nótese que es no negativa y que su integral en \mathbb{R} es precisamente $\Gamma(p)$). Además,

$$(f_p * f_q)(x) = \int_0^x f_p(y) f_q(x-y) dy = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x} \int_0^x y^{p-1} (x-y)^{q-1} dy, & x > 0. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $y = xu$ en la integral se sigue que $(f_p * f_q)(x) = B(p, q) e^{-x} x^{p+q-1} \chi_{(0, \infty)}(x)$. Luego, en virtud de la Proposición 2.3, se concluye que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \mathcal{F}(f_p)(0)\mathcal{F}(f_q)(0) = \mathcal{F}(f_p * f_q)(0) = B(p, q) \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1} dx = B(p, q)\Gamma(p+q).$$

Otra identidad útil es la conocida como fórmula de multiplicación que recogemos a continuación.

Proposición 2.5. Sean $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Fubini (Sección A.4) considerando la función $F(x, y) = f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. \square

Observación 2.6. La fórmula de multiplicación se aplica, en particular, al operador de convolución con respecto a un núcleo K que viene dado por la transformada de Fourier de cierta función \mathbb{k} absolutamente integrable. En concreto, si $K(x) = \widehat{\mathbb{k}}(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, entonces, si f es absolutamente integrable,

$$(f * K)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\widehat{\mathbb{k}}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\mathbb{k}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Dedicamos el resto de la sección a analizar ciertas propiedades analíticas que relacionan la regularidad de una función con el comportamiento de su transformada de Fourier. Comenzamos viendo que el operador \mathcal{F} lleva las funciones absolutamente integrables en el espacio $C_0(\mathbb{R})$.

Teorema 2.7. Sea f una función absolutamente integrable. Se verifica:

- (a) \hat{f} es uniformemente continua y acotada en \mathbb{R} .
- (b) (**Lema de Riemann-Lebesgue**) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Demostración. (a) Como ya mencionamos, se tiene claramente que \hat{f} es acotada. Por otro lado, si se tiene (b), basta probar la continuidad de f para obtener la continuidad uniforme (ver Observación 1.4). No obstante, podemos probar esta condición directamente. Para ello observamos que

$$\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-2\pi i \xi x} (e^{-2\pi i h x} - 1) dx, \quad \xi, h \in \mathbb{R}.$$

Fijamos $\varepsilon > 0$. Como f es absolutamente integrable en \mathbb{R} , podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\int_{|x| > n_0} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Por otro lado, ya que $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$, $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que $|e^{-2\pi i h x} - 1| \leq C|h x|$, $x, h \in \mathbb{R}$. Luego, considerando $|h| < \varepsilon$, podemos escribir

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leq \left(\int_{|x| > n_0} + \int_{|x| \leq n_0} \right) |f(x)| |e^{-2\pi i h x} - 1| dx \leq 2\varepsilon + C|h|n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \leq C\varepsilon.$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ prueba (a).

(b) Supongamos primero que f es una función continua. Aplicando un sencillo cambio de variable tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i \xi x} dx = -\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Luego, podemos escribir

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

De (1.2) se deduce entonces que $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$, cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Para el caso general, basta tener en cuenta que si f es absolutamente integrable, entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una función continua g de manera que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$.² \square

Hemos visto que \mathcal{F} transforma las funciones absolutamente integrables en elementos de $C_0(\mathbb{R})$, pero no es una aplicación sobreyectiva. El siguiente ejemplo tomado de [6, p. 172] lo demuestra.

Ejemplo 2.8. Consideramos la función $\phi(\xi) = \xi$, $|\xi| \leq 1$, $\phi(\xi) = \frac{\operatorname{sgn} \xi}{1 + \ln |\xi|}$, $|\xi| \geq 1$.

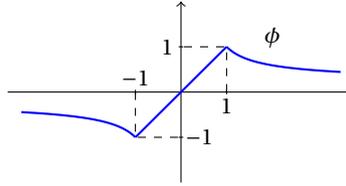


Figura 2.1: Función ϕ

Claramente es una función en $C_0(\mathbb{R})$. Supongamos que existe una función f absolutamente integrable tal que $\hat{f} = \phi$. Entonces podemos escribir

$$\int_{1 < |\xi| < a} \frac{\phi(\xi)}{\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{1 < |\xi| < a} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\xi} d\xi dx = -2i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_1^a \frac{\operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi dx, \quad a > 1.$$

Pero se tiene que,

$$\int_{1 < |\xi| < a} \frac{\phi(\xi)}{\xi} d\xi = 2 \int_1^a \frac{d\xi}{\xi(1 + \ln \xi)} = 2 \ln(1 + \ln a) \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } a \rightarrow +\infty,$$

mientras que,

$$\left| -2i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_1^a \frac{\operatorname{sen}(2\pi x \xi)}{\xi} d\xi \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |\operatorname{Si}(2\pi x a) - \operatorname{Si}(2\pi x)| dx \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad a > 1,$$

pues la función $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u} du$, $x \in \mathbb{R}$, es una función acotada.

Vimos en la Proposición 2.2 (iv) que si f y f' son funciones absolutamente integrables, entonces $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}$. Por inducción, se sigue que si f y todas sus derivadas hasta orden k son funciones absolutamente integrables, entonces

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, del Teorema 2.7 (a), podemos inferir que, para cada $k \in \mathbb{N}$, si f , y todas sus derivadas hasta orden k son funciones absolutamente integrables, entonces

² Si f es Riemann integrable esta afirmación se obtiene del hecho de que la integral de f es el límite de sumas de Riemann. Para el caso de funciones en $L^1(\mathbb{R})$ también es cierto, pero requiere de teoría de integración de Lebesgue (ver, por ejemplo, [4, Theorems 2.26 and 2.41]).

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C \frac{|\widehat{f^{(k)}}(\xi)|}{1+|\xi|^k} \leq \frac{C}{1+|\xi|^k}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

En el caso particular de que f sea una función de la clase de Schwartz, se tiene entonces que $(1+|\xi|^k)|\widehat{f}(\xi)| \leq C$, $\xi \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos asegurar algo más, a saber, que \widehat{f} es también una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposición 2.9. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Por ser f una función de la clase de Schwartz, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y se tiene que, para todo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, las funciones $x^n f$ y $\frac{d^m}{dx^m} f$ son absolutamente integrables en \mathbb{R} .

Sean $\ell, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Usando (2.2) y (2.3) de manera sucesiva, podemos escribir

$$\left| \xi^\ell \frac{d^k}{d\xi^k} \widehat{f}(\xi) \right| = (2\pi)^{k-\ell} \left| \mathcal{F} \left[\frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^k f(x)) \right] (\xi) \right|, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Del Teorema 2.7 (a) se deduce entonces que $\gamma_{\ell,k}(\widehat{f}) < \infty$, y, por tanto, $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. \square

Como veremos en el Ejemplo 2.20, el resultado anterior para $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ en lugar de la clase de Schwartz no es cierto. Por otro lado, haciendo uso del teorema de inversión estableceremos que la transformación de Fourier es realmente una aplicación biyectiva en el espacio de Schwartz (Teorema 2.12) y probaremos un resultado que puede interpretarse como el recíproco de (2.5) (Proposición 2.21).

2.2. Transformación inversa de Fourier

Los resultados relativos a las reglas operacionales que relacionan las funciones y sus transformadas de Fourier serán de utilidad siempre que sea posible encontrar un modo de volver del campo de las transformadas al de las funciones, esto es, si existe una fórmula de inversión para la transformación de Fourier, un procedimiento para recuperar f a partir de \widehat{f} . Algunos cálculos informales sugieren que esta fórmula de inversión venga dada por

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

pero es necesario analizar la validez de esta fórmula. Observamos, en primer lugar que aunque la función f sea absolutamente integrable, no podemos asegurar que \widehat{f} lo sea, por lo que la integral puede no tener sentido. Incluso aunque \widehat{f} fuera absolutamente integrable, no podemos, en general, manipular la integral sustituyendo $\widehat{f}(\xi)$ por la integral que la define e intercambiando el orden de integración, pues $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} dy$ es divergente.

Es nuestro objetivo en esta sección analizar cómo dar sentido a la fórmula de inversión, bien considerando ciertas condiciones sobre la función f o dando una interpretación adecuada a la convergencia de la integral. Hemos optado por dividir el estudio en dos apartados atendiendo a la raíz del método utilizado para obtener los resultados: el uso o no de aproximaciones de la identidad.

2.2.1. Fórmula de inversión y núcleos de sumabilidad.

Una forma de dar validez a la fórmula de inversión anterior es multiplicar \widehat{f} por funciones de “corte” adecuadas que hagan las integrales convergentes y que, después, en el paso al límite “desaparezcan”. Unas funciones de corte convenientes son las aproximaciones de la identidad. De las propiedades del Teorema 1.3 y la Observación 2.6 obtenemos un primer teorema de inversión.

Teorema 2.10. *Sea f una función absolutamente integrable, acotada y continua tal que \widehat{f} es absolutamente integrable. Entonces*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Demostración. Consideramos el núcleo de Gauss $\{H_t\}_{t>0}$ ((1.3)). Haciendo uso de (2.4) (con $K(x) = H_t(-x) = H_t(x)$) se tiene que, para todo $t > 0$,

$$(f * H_t)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) h_t(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Recordamos que $H_t = \widehat{h_t}$, donde $h_t(x) = e^{-\pi t x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (Observación 2.1). Se tiene además que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) h_t(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Para ello fijamos $\varepsilon > 0$. Ya que \widehat{f} es absolutamente integrable en \mathbb{R} , podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\int_{|\xi|>n_0} |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{z \rightarrow 0} (e^z - 1)/z = 1$, se sigue que para cualquier intervalo acotado I , existe $C > 0$ de manera que $|e^z - 1| \leq C|z|$, $z \in I$. Entonces, $|h_t(\xi) - 1| \leq C t \xi^2$, $|\xi| \leq n_0$, $t \in (0, 1)$. Luego,

$$\left| \int_{|\xi| \leq n_0} \widehat{f}(\xi) (h_t(\xi) - 1) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \leq C t \int_{|\xi| \leq n_0} |\widehat{f}(\xi)| \xi^2 d\xi \leq C n_0 t, \quad t \in (0, 1).$$

Tomando $0 < t < \min\{1, \varepsilon\}$ y uniendo las estimaciones anteriores se obtiene que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) (h_t(\xi) - 1) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \leq \left(\int_{|\xi| \leq n_0} + \int_{|\xi| > n_0} \right) |\widehat{f}(\xi)| |h_t(\xi) - 1| d\xi \leq C n_0 t + 2\varepsilon < C\varepsilon,$$

y así (2.8) queda establecido.

El Teorema 1.3 (a) junto con (2.7) y (2.8) permite concluir la prueba. □

Si la función f del teorema es continua a trozos, entonces se obtiene que el valor de la integral en (2.6) es $(f(x^+) + f(x^-))/2$, $x \in \mathbb{R}$. La prueba sigue los mismos argumentos anteriores, usando el Teorema 1.5 en lugar del Teorema 1.3.

Observación 2.11. Señalamos que las funciones $\{f_r\}_{r>0}$, $\{p_t\}_{t>0}$ y $\{h_t\}_{t>0}$ consideradas en la primera sección de este capítulo verifican las condiciones del Teorema 2.8. No así la función d_r , $r > 0$, dado que $\widehat{d_r}$ no es absolutamente integrable en \mathbb{R} . Esta es una circunstancia que marca una diferencia esencial entre estas familias. Por otro lado, este teorema nos permite establecer de manera sencilla que los núcleos de Gauss, de Poisson y de Féjer ((1.3), (1.4), (1.5)) tienen integral 1. Basta notar, por ejemplo, que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_t(\xi) d\xi = h_t(0) = 1$. Y de manera análoga con los otros dos núcleos.

Podemos establecer ahora que la transformación integral de Fourier es un operador biyectivo en la clase de Schwartz.

Teorema 2.12. *La transformación de Fourier es una aplicación biyectiva en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Ya hemos visto en la Proposición 2.9 que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ cuando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Por otro lado, la fórmula de inversión del Teorema 2.10 nos dice que, para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \mathcal{F}(\widehat{f})(-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

de donde se deduce fácilmente la biyectividad de la aplicación. □

Como consecuencia de la fórmula de inversión dada, obtenemos el resultado de unicidad siguiente para la transformación integral de Fourier.

Corolario 2.13. *Si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $f = g$.³ Y, por tanto, si $\widehat{f} = 0$, entonces $f = 0$.*

Otra forma útil de enunciar este resultado usando la convolución es la siguiente.

³ En el caso más general donde consideramos funciones en $L^1(\mathbb{R})$ esta igualdad se entiende en casi todo punto.

Corolario 2.14. Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Supongamos que $(f * g)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, para cierta $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, con $\widehat{g} \neq 0$. Entonces, $f = 0$. En particular, podemos tomar $g(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Basta observar que las hipótesis y la Proposición 2.3 conducen a que $\widehat{f} = 0$. □

A la vista del Teorema 2.12 y de la fórmula de inversión en el Teorema 2.10, la inversa de la transformación de Fourier \mathcal{F} en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ viene dada por $\mathcal{F}^*(g)(x) := \mathcal{F}(g)(-x) = \mathcal{F}(g(-\cdot))(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Es claro entonces que $\mathcal{F}^4 = I$, siendo I el operador identidad. Observamos de esta propiedad que, si f es una autofunción para \mathcal{F} con autovalor λ , esto es, $\widehat{f} = \lambda f$, entonces $f = \mathcal{F}^4(f) = \lambda^4 f$, por lo que los posibles autovalores deben ser las raíces cuartas de la unidad. En la Sección A.3 del Apéndice vemos que, efectivamente, los autovalores para las funciones de Hermite son las raíces cuartas de la unidad. También señalamos que la simetría observada en la Proposición 2.2 se extiende a la operación de convolución en el sentido que se tiene $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ (Proposición 2.3) y también que $\widehat{f g} = \widehat{f} * \widehat{g}$, $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, que se deduce fácilmente del teorema de inversión.

Volvamos de nuevo al resultado en el Teorema 2.10 para analizar su prueba. Esta se basa en tres aspectos: la igualdad en (2.7), el resultado de aproximación del Teorema 1.3 y la propiedad en (2.8). Es en esta última donde resulta esencial el hecho de que \widehat{f} sea absolutamente integrable. Con respecto a la igualdad (2.7), se observa que se verifica si f es una función absolutamente integrable. Luego, si tenemos en cuenta los Teoremas 1.3 y 1.5 y la igualdad (2.7) podemos inferir el siguiente resultado.

Teorema 2.15. Sea f una función absolutamente integrable, continua a trozos y acotada en \mathbb{R} . Se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi t \xi^2} e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si f es uniformemente continua en \mathbb{R} , entonces la integral converge a f , uniformemente en \mathbb{R} .

Podemos interpretar este resultado como un teorema de inversión donde la convergencia de la integral es entendida en medias gaussianas. Y ya que (2.7) también se satisface para los núcleos de Féjer y de Poisson, se obtienen resultados análogos donde la función $h_t(\xi) = e^{-\pi t \xi^2}$ se sustituye por $p_r(\xi) = e^{-2\pi r |\xi|}$, en el caso de Poisson, y por $f_r(\xi) = (r - |\xi|) \chi_{[-r, r]}(\xi)$ (y, en este caso, el límite cuando $r \rightarrow +\infty$), para el núcleo de Féjer. Se habla entonces de convergencia o sumabilidad en sentido Abel o Cesàro, respectivamente. Sin embargo, cuando consideramos el núcleo de Dirichlet ((2.9)) no podemos seguir los argumentos anteriores, pues D_r no es una función absolutamente integrable y, por tanto, $\{D_r\}_{r>0}$ no es una aproximación de la identidad. Este caso lo tratamos en el apartado que sigue.

2.2.2. Fórmula de inversión y núcleo de Dirichlet.

Para cada $r > 0$ definimos la función de Dirichlet de orden r , D_r , como

$$D_r(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2\pi r x)}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 2r, & x = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

(Figura 2.2). Nótese que para cada $r > 0$, $D_r(x) = r D_1(rx)$, $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que D_r , $r > 0$, es una función par de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, con infinitos ceros ($x_k = \frac{k}{2r}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), y con infinitos máximos y mínimos localizados en los puntos x que verifican $D_r(x) = 2r \cos(2\pi r x)$ (ver Figura 2.3).

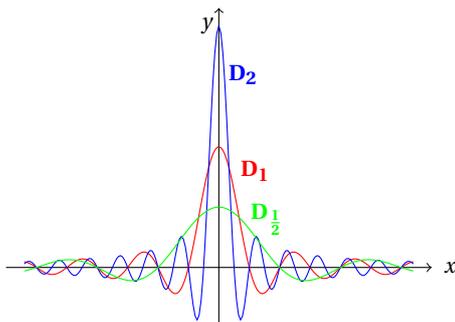


Figura 2.2: Núcleos de Dirichlet

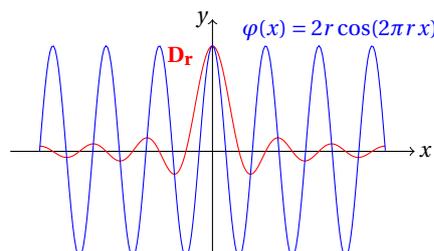


Figura 2.3: Máximos y mínimos de D_r

Pero sin duda una de las propiedades más características de esta función es el hecho de que es integrable en \mathbb{R} , pero no absolutamente. De hecho,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_r(x) dx = 1, \quad r > 0. \quad (2.10)$$

Analizamos estos hechos, para lo que basta estudiar el caso $r = 1$. Que la función D_1 no es absolutamente integrable se puede ver de la siguiente forma. Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicando el cambio de variables $t = 2\pi(x - n)$ podemos escribir

$$\int_n^{n+1} \frac{|\text{sen}(2\pi x)|}{x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{|\text{sen}(t + 2\pi n)|}{t + 2\pi n} dt = \int_0^{2\pi} \frac{|\text{sen } t|}{t + 2\pi n} dt \geq \frac{1}{2\pi(1+n)} \int_0^{2\pi} |\text{sen } t| dt = \frac{2}{\pi(1+n)}.$$

Teniendo en cuenta además que D_1 es continua se obtiene que

$$\int_0^{n+1} \frac{|\text{sen}(2\pi x)|}{x} dx \geq C \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

de lo que se deduce que $\int_0^{\infty} \frac{|\text{sen}(2\pi x)|}{x} dx = \infty$.

Veamos ahora que se tiene (2.10) para $r = 1$, o lo que es lo mismo, que $\text{Si}(+\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Para ello recordamos que $D_1 = \widehat{d}_1$, siendo $d_1 = \chi_{[-1,1]}$, (Observación 2.1), y usamos la igualdad en (2.4) con $f = d_1$ y $K = H_t$, $t > 0$, siendo H_t el núcleo de Gauss ((1.3)). En particular cuando $x = 0$, (2.4) nos queda

$$(d_1 * H_t)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(\xi) e^{-\pi t \xi^2} d\xi, \quad t > 0.$$

Aplicando ahora el Teorema 1.3 (a) se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(\xi) e^{-\pi t \xi^2} d\xi = d_1(0) = 1.$$

Haciendo los cambios de variable $r = \frac{1}{\sqrt{t}}$ y $z = \sqrt{t}\xi$ obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D_r(z) e^{-\pi z^2} dz = 1,$$

y, entonces, si denotamos por $g(z) = \frac{e^{-\pi z^2}}{\pi z} \chi_{\{|z| \geq 1\}}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, y tenemos en cuenta que $\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, $\theta \in \mathbb{R}$, el Lema de Riemann-Lebesgue (Teorema 2.7 (b)) conduce a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 D_r(z) e^{-\pi z^2} dz = 1 - \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \text{sen}(2\pi r z) dz = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\widehat{g}(-r) - \widehat{g}(r)}{2i} = 1.$$

Ahora escribimos

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi r} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \int_{-1}^1 D_r(z) dz = \int_{-1}^1 D_r(z) (1 - e^{-\pi z^2}) dz + \int_{-1}^1 D_r(z) e^{-\pi z^2} dz, \quad r > 0,$$

y observamos que, ya que la función $f(z) = \frac{1 - e^{-\pi z^2}}{z} \chi_{[-1,1]}(z)$, $z \in \mathbb{R}$, es continua y de soporte compacto, de nuevo por el Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 D_r(z) (1 - e^{-\pi z^2}) dz = 0,$$

y podemos inferir finalmente que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nuestro objetivo ahora es establecer un teorema de inversión que sea válido para un conjunto de funciones más amplio que el considerado en el Teorema 2.10 y donde la función de “corte” utilizada sea $\chi_{[-r,r]}$, es decir, queremos encontrar condiciones que permitan dar validez a la fórmula

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

La propiedad que le pedimos a las funciones para el resultado siguiente es la conocida como *condición de Dini*. Decimos que una función f satisface la condición de Dini en un punto x_0 cuando podemos encontrar $S \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$ de manera que

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S|}{t} dt < \infty. \quad (2.11)$$

Señalamos que de existir tal valor de S , éste debe ser único. En efecto, si S y S' son dos valores verificando (2.11), entonces

$$\int_0^\delta \frac{|S - S'|}{t} dt < \infty,$$

y esta integral es convergente si, y solo si, $S = S'$.

Teorema 2.16 (Teorema de convergencia de Dini). *Sea f una función absolutamente integrable verificando la condición de Dini (2.11) en un punto x_0 , para ciertos $S \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$. Entonces*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi = S.$$

Nótese que el resultado no afirma que $S = f(x_0)$.

Demostración. Ya que $D_r = \widehat{d_r}$, donde $d_r = \chi_{[-r,r]}$, y D_r es par, la igualdad (2.4) con $K = D_r$, $r > 0$, conduce a

$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = (f * D_r)(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, basta ver que $(f * D_r)(x_0) \rightarrow S$, cuando $r \rightarrow +\infty$. De manera análoga a la demostración del Teorema 1.5, teniendo en cuenta que D_r es una función par y que $\int_{-\infty}^{+\infty} D_r(z) dz = 1$, $r > 0$, escribimos

$$(f * D_r)(x) - S = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - S) D_r(y) dy = \int_0^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y) - 2S) D_r(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, r > 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Afirmamos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, podemos encontrar $R > 0$ de manera que

$$\left| \int_R^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y) - 2S) D_r(y) dy \right| < \varepsilon, \quad r \geq 1. \quad (2.12)$$

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$. Tomando $R \geq 1$, y teniendo en cuenta que $|D_r(y)| \leq 1$, $y \geq 1$, $r > 0$, se sigue que

$$\left| \int_R^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y) - 2S) D_r(y) dy \right| \leq \int_R^{+\infty} |f(x+y) + f(x-y)| dy + \frac{2|S|}{\pi} \left| \int_{2\pi r R}^{+\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt \right|.$$

Ya que f es absolutamente integrable en \mathbb{R} , $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt < \infty$ y $r \geq 1$, se obtiene que, para cierto $R_0 \geq 1$,

$$\int_{R_0}^{+\infty} |f(x+y) + f(x-y)| dy + \frac{2|S|}{\pi} \left| \int_{2\pi r R_0}^{+\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt \right| < \varepsilon, \quad r \geq 1,$$

y así se llega a (2.12).

Ahora escribimos

$$(f * D_r)(x_0) - S = \int_0^{R_0} g(y) \text{sen}(2\pi r y) dy + \int_{R_0}^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y) - 2S) D_r(y) dy,$$

donde g es la función

$$g(y) = \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2S}{\pi y} \chi_{(0, R_0)}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Esta función es absolutamente integrable porque f lo es, se satisface la condición de Dini ((2.11)) y su soporte es compacto. Atendiendo al Lema de Riemann-Lebesgue (Teorema 2.7 (b)) se sigue que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{R_0} g(y) \text{sen}(2\pi r y) dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\widehat{g}(-r) - \widehat{g}(r)}{2i} = 0.$$

Esto, junto con (2.12), nos dice que podemos encontrar $r_0 > 0$ de forma que $|(f * D_r)(x_0) - S| < \varepsilon$, $r \geq r_0$, y concluimos así la prueba. \square

Que la función f sea absolutamente integrable y continua o continua a trozos no asegura la convergencia de la integral en la fórmula de inversión. Sin embargo, si mejoramos un poco el comportamiento de la función obtenemos resultados positivos.

Teorema 2.17. *Sea f una función absolutamente integrable en \mathbb{R} y diferenciable a trozos. Entonces,*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si la función es continua en x , entonces el valor del límite es $f(x)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Consideramos la función

$$g(y) = \frac{f(x+y) - f(x^+) + f(x-y) - f(x^-)}{y} \chi_{(0,1)}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Por ser f una función diferenciable a trozos, se tiene que g también lo es. En el caso del origen, observamos que $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = f'(x^+) + f'(x^-)$. Así, g es una función acotada en \mathbb{R} , por lo que f cumple la condición de Dini (2.11) en x para $S = (f(x^+) + f(x^-))/2$ y $\delta > 0$. El Teorema 2.16 conduce al resultado. \square

Otra espacio de funciones importante es el conocido como *espacio de Hölder* Λ_α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Sea $0 \leq \alpha \leq 1$. Decimos que una función $f \in \Lambda_\alpha$ cuando

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Se tiene que $\Lambda_0 = L^\infty$ y que Λ_α , $0 < \alpha \leq 1$ está contenido en el espacio de las funciones uniformemente continuas. También se puede ver que si f es diferenciable y f, f' son funciones acotadas, entonces $f \in \Lambda_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Señalar que al espacio Λ_1 también se le llama *espacio de Lipschitz*. Nótese que si f cumple la condición de Hölder para $\alpha > 1$, entonces f es diferenciable y su derivada es nula, por lo que f es constante. Ello justifica que se considere solo $0 < \alpha \leq 1$ en el estudio de los espacios de Hölder. Observamos por último que $\Lambda_\beta \subset \Lambda_\alpha$, siempre que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

Para el siguiente resultado es suficiente exigir que f verifique una condición de Hölder de exponente α local, que claramente verifican las funciones en Λ_α , a saber: existe $C > 0$ y $\delta > 0$ de manera que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, cuando $|x - y| < \delta$.

Teorema 2.18. *Sea f una función absolutamente integrable en \mathbb{R} que satisface una condición Hölder local de exponente $\alpha \in (0, 1]$. Entonces*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que, para ciertos $C, \delta > 0$,

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq Ct^\alpha, \quad 0 < t < \delta.$$

Entonces,

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt \leq C \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt < \infty,$$

lo que nos sitúa en las condiciones del Teorema 2.16 con $S = f(x)$. \square

2.3. Decaimiento de la transformada de Fourier y regularidad

Como ya fue comentado, que existe una relación entre la regularidad de una función y el comportamiento en infinito de su transformada de Fourier puede percibirse en la propiedad (iv) de la Proposición 2.2. En virtud de (2.2), si f y f' son funciones absolutamente integrables en \mathbb{R} , entonces $\widehat{f}(\xi) = \frac{\mathcal{F}(f')(\xi)}{2\pi i \xi}$, $\xi \neq 0$, que nos dice que $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1+|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$, pues, como sabemos $\mathcal{F}(f')$ es una función acotada.

Nos planteamos en esta sección la cuestión inversa: ¿qué podemos decir de la regularidad de la función si conocemos el comportamiento de su transformada de Fourier?

No podemos esperar un resultado inverso al anterior, pues que el decaimiento de \widehat{f} en el infinito sea del orden de $|\xi|^{-1}$ no es suficiente para garantizar que la función sea derivable. Basta considerar, por ejemplo, el núcleo de Dirichlet, que tiene ese decaimiento y es la transformada de una función que ni siquiera es continua (ver Sección 2.1). Incluso con un decaimiento del orden de $|\xi|^{-2}$, como es el caso de los núcleos de Féjer o de Poisson, no se puede asegurar la diferenciabilidad de la función f , aunque para estos ejemplos sí se tiene que f es una función continua. Este último hecho no es casual. Como veremos, si f es continua y acotada y \widehat{f} tiene un decaimiento en el infinito de orden $|\xi|^{-k}$, siendo $k \geq 2$, entonces podemos concluir que f es de clase $C^{k-2}(\mathbb{R})$. Incluso se puede precisar algo más la regularidad de $f^{(k-2)}$ ya que, en ese caso, se tiene que es una función en la clase de Hölder Λ_α , para todo $0 < \alpha < 1$.

Concretamente, con un decaimiento para \widehat{f} del tipo $|\xi|^{1+\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$, podemos asegurar que $f \in \Lambda_\alpha$. Es el resultado que recogemos a continuación.

Proposición 2.19. *Sea f una función absolutamente integrable, continua y acotada en \mathbb{R} tal que, para cierto $0 < s < 1$,*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^{1+s}}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $f \in \Lambda_\alpha$, para todo $0 \leq \alpha \leq s$.

Demostración. Teniendo en cuenta el Teorema 2.10 y la acotación para \widehat{f} se tiene que, para cada $x, h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)(e^{2\pi i h \xi} - 1)e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{2\pi i h \xi} - 1|}{(1+|\xi|)^{1+s}} d\xi.$$

Supongamos primero que $|h| \geq 1$. En este caso, usamos que $|e^{i\theta} - 1| \leq 2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Ya que $s > 0$, se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\xi)^{1+s}} d\xi \leq C \leq C|h|^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad (2.13)$$

donde la última desigualdad se sigue puesto que $|h| \geq 1$.

Consideramos ahora $0 < |h| < 1$ (para $h = 0$ la desigualdad es trivial). En este caso aprovechamos, como en otras ocasiones, que $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$, $\theta \in \mathbb{R}$. Así, para todo $x \in \mathbb{R}$, escribimos

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \left(\int_{|\xi| \leq \frac{1}{|h|}} + \int_{|\xi| > \frac{1}{|h|}} \right) \frac{|e^{2\pi i h \xi} - 1|}{(1+|\xi|)^{1+s}} d\xi \leq C \left(\int_{|\xi| \leq \frac{1}{|h|}} \frac{|h\xi|}{(1+|\xi|)^{1+s}} d\xi + \int_{|\xi| > \frac{1}{|h|}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{1+s}} \right).$$

Estimamos cada una de estas integrales. En la primera, teniendo en cuenta que $s < 1$ y que $|h| \leq |h|^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, llegamos a que

$$\int_{|\xi| \leq \frac{1}{|h|}} \frac{|h\xi|}{(1+|\xi|)^{1+s}} d\xi \leq C|h| \int_0^{\frac{1}{|h|}} \frac{d\xi}{(1+\xi)^s} = C|h| \left(\left(1 + \frac{1}{|h|}\right)^{1-s} - 1 \right) \leq C(|h|^s + |h|) \leq C|h|^s.$$

Para la segunda integral procedemos como sigue.

$$\int_{|\xi| > \frac{1}{|h|}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{1+s}} \leq C \int_{\frac{1}{|h|}}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{1+s}} = C|h|^s.$$

Luego, cuando $|h| < 1$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^s \leq C|h|^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq s. \quad (2.14)$$

De (2.13) y (2.14) se concluye que $f \in \Lambda_\alpha$, para todo $0 \leq \alpha \leq s$. \square

Aprovechamos el resultado de esta proposición para establecer algo que ya habíamos anticipado: que, a diferencia de lo que ocurre con la clase de Schwartz, la transformación de Fourier no lleva el espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ en sí mismo.

Ejemplo 2.20. Sea φ una función continua que se anula para $|x| \geq 1$, y tal que, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) = -\ln^{-1}(|x|)$, $0 < |x| \leq \frac{1}{e}$. En la Figura 2.4 puede verse un ejemplo de una función con tales características.

Es claro, por ser una función continua de soporte compacto, que φ es una función de decrecimiento moderado.

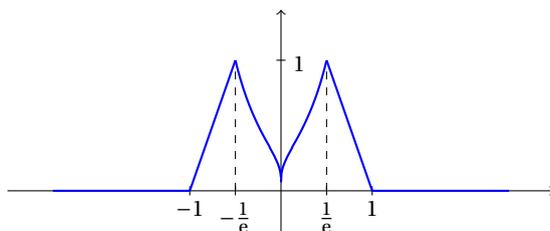


Figura 2.4: Función φ

El resultado de la proposición anterior nos permite ver que $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$ sin necesidad de encontrar la transformada de Fourier de la función. Supongamos que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Entonces existe $s \in (0, 1)$ tal que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^{1+s}}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Atendiendo a la Proposición 2.19, se tiene entonces que $\varphi \in \Lambda_\alpha$, cuando $\alpha \in (0, s]$. Pero veamos que esto no es cierto. De hecho $\varphi \notin \Lambda_\alpha$, para ningún $\alpha \in (0, 1]$. Supongamos, por el contrario, que existe $0 < \alpha \leq 1$ de manera que, para cierta $C > 0$,

$$|\varphi(x + h) - \varphi(x)| \leq C|h|^\alpha, \quad x, h \in \mathbb{R}.$$

Entonces, tomando $x = 0$, se tiene que $C^{-1} \leq h^\alpha |\ln h|$, para todo $h \in (0, 1/e)$. Y llegamos así a un absurdo pues $\lim_{h \rightarrow 0^+} h^\alpha \ln h = 0$, para todo $\alpha > 0$.

Generalizamos ahora el resultado anterior, a la vez que recogemos la relación entre la regularidad de una función y el decaimiento de su transformada de Fourier.

Proposición 2.21. *Sea f una función absolutamente integrable en \mathbb{R} .*

(a) *Sea $k \in \mathbb{N}$. Si para cada $r = 0, \dots, k$, existe $f^{(r)}$ y es absolutamente integrable, entonces,*

$$|\widehat{f}(\xi)| = \frac{|\widehat{f^{(k)}}(\xi)|}{(2\pi\xi)^k}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

y, por tanto, $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-k}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(b) *Sean $s > 0$ y k_s el entero no negativo tal que $s \in (k_s, k_s + 1]$. Supongamos que f es continua, acotada y*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^{1+s}}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Entonces f tiene derivadas hasta orden k_s y $f^{(k_s)} \in \Lambda_\alpha$, para todo $0 \leq \alpha < s - k_s$. Si $s \notin \mathbb{N}$ se verifica además que $f^{(k_s)} \in \Lambda_{s-k_s}$. Y, en particular, cuando $s = k_s + 1$ se tiene que f pertenece a la clase $C^{k_s}(\mathbb{R})$.

Demostración. (a) Esta propiedad se obtiene de la Proposición 2.2(iv), procediendo por inducción, y teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de una función absolutamente integrable es una función acotada.

(b) De (2.15) y el Teorema 2.10 se sigue que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observamos además que el comportamiento de \widehat{f} y el hecho de que $s - k_s > 0$ nos permite derivar k_s veces bajo el signo integral puesto que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(2\pi i \xi)^{k_s} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}| d\xi \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi|^{k_s}}{(1 + |\xi|)^{1+s}} d\xi < \infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

y se sigue que,

$$f^{(k_s)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i \xi)^{k_s} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tenemos así que $f^{(k_s)}$ es una función acotada en \mathbb{R} . Además, para cada $x, h \in \mathbb{R}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |f^{(k_s)}(x+h) - f^{(k_s)}(x)| &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{k_s} |\widehat{f}(\xi)| |e^{2\pi i h \xi} - 1| d\xi \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi|^{k_s} |e^{2\pi i h \xi} - 1|}{(1+|\xi|)^{1+s}} d\xi \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{2\pi i h \xi} - 1|}{(1+|\xi|)^{1+s-k_s}} d\xi. \end{aligned}$$

Si $s \notin \mathbb{N}$, entonces $0 < s - k_s < 1$, y siguiendo la prueba de la Proposición 2.19 para $s - k_s$ en lugar de s se obtiene que, para todo $0 \leq \alpha \leq s - k_s$,

$$|f^{(k_s)}(x+h) - f^{(k_s)}(x)| \leq C|h|^\alpha, \quad x, h \in \mathbb{R}.$$

Si $s \in \mathbb{N}$, entonces $s = k_s + 1$ y nuestro argumento se puede utilizar para $s_\sigma = s - \sigma$, con $\sigma \in (0, 1)$. Nótese que $k_{s_\sigma} = k_s$, por lo que podemos inferir que

$$|f^{(k_s)}(x+h) - f^{(k_s)}(x)| \leq C|h|^\alpha, \quad x, h \in \mathbb{R},$$

para todo $0 \leq \alpha \leq s_\sigma - k_s = 1 - \sigma$ y $0 < \sigma < 1$, esto es, $f^{(k_s)} \in \Lambda_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. \square

2.4. Funciones holomorfas. Teorema de Paley-Wiener

Las herramientas del análisis complejo resultan muy útiles para analizar diferentes aspectos relativos a la transformación integral de Fourier. En la Sección A.2 de hecho se utiliza la integración compleja para el cálculo de la transformada de Fourier de la función gaussiana. En este apartado usamos estas herramientas para dar precisión al siguiente hecho: la posibilidad de extender una función f , que está definida inicialmente en la recta real, a una función holomorfa está estrechamente relacionada con el rápido decrecimiento de su transformada de Fourier.

En este contexto, vamos a introducir una clase de funciones que ayudará a nuestro propósito. Para cada $a > 0$ sea \mathcal{A}_a el espacio constituido por las funciones f que verifican las siguientes condiciones:

- (A1) f es holomorfa en la banda horizontal $S_a = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a\}$;
- (A2) Para ciertas constantes $C, \alpha > 0$,

$$|f(x+iy)| \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}, |y| < a.$$

Esto es, \mathcal{A}_a es el espacio de funciones holomorfas en S_a que tienen decrecimiento moderado en cada línea horizontal $|\operatorname{Im} z| = y$, uniformemente en $|y| < a$. Denotamos por \mathcal{A} el espacio de las funciones que pertenecen a \mathcal{A}_a para algún $a > 0$.

La función $f(z) = e^{-z^2}$ pertenece a la clase \mathcal{A}_a , para todo $a > 0$, pues es entera y para cualquier $r > 0$

$$|f(x+iy)| = e^{-x^2+y^2} \leq \frac{e^{a^2}}{1+x^r}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Asimismo, la función $f(z) = \frac{1}{c^2+z^2}$, ($c \neq 0$), que tiene polos simples en $z = \pm ci$, es una función en \mathcal{A}_a siempre y cuando $0 < a < |c|$.

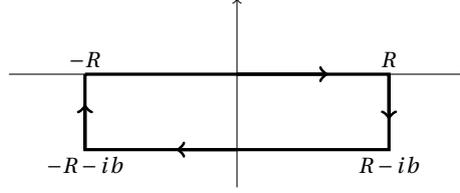
Veamos en primer lugar el comportamiento de la transformada de Fourier para una función de la clase \mathcal{A} . El hecho de que la función f sea holomorfa en una banda permite obtener un decaimiento exponencial en el infinito para \widehat{f} .

Proposición 2.22. *Sea f una función en \mathcal{A}_a para algún $a > 0$. Entonces, para todo $0 \leq b < a$,*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C e^{-2\pi b|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Demostración. El caso $b = 0$ se sigue pues como sabemos \widehat{f} es una función acotada. También para $\xi = 0$ la desigualdad es evidente. Asumimos entonces $0 < b < a$ y $\xi > 0$. Consideramos la función $g(z) = f(z)e^{-2\pi i \xi z}$, $z \in S_a$, y para cada $R > 0$, el camino γ_R^b de la Figura 2.5.

Puesto que g es holomorfa en S_a , el Teorema de Cauchy nos dice que $\int_{\gamma_R^b} g(z) dz = 0$.


 Figura 2.5: Camino γ_R^b

Afirmamos que las integrales sobre los segmentos verticales convergen a 0 cuando $R \rightarrow \infty$. En efecto, sea $\gamma_{R,1}^b$ el segmento vertical que une $-R - ib$ y $-R$. La estimación (A2) para f conduce a que para cierto $\alpha > 0$,

$$\left| \int_{\gamma_{R,1}^b} g(z) dz \right| \leq \int_0^b |f(-R - it) e^{-2\pi i \xi (-R - it)}| dt \leq \frac{C}{1 + R^{1+\alpha}} \int_0^b e^{-2\pi \xi t} dt \leq \frac{C}{1 + R^{1+\alpha}},$$

donde la constante C es independiente de ξ . Análogamente se tiene para el segmento vertical de $R - ib$ a R . Por tanto, tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$ se obtiene que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - ib) e^{-2\pi i \xi (x - ib)} dx, \quad (2.16)$$

y, así, de nuevo utilizando (A2), se deduce que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C e^{-2\pi b \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |x|^{1+\alpha}} dx \leq C e^{-2\pi b \xi}.$$

Cuando $\xi < 0$ procedemos de manera similar, pero considerando el camino simétrico a γ_R^b en el semiplano superior. \square

Este resultado pone de manifiesto que cuanto mayor es la banda donde f extiende de manera holomorfa, el decaimiento de su transformada de Fourier es mayor. Volveremos a abordar esta cuestión en el Teorema de Paley-Wiener, que describe a aquellas funciones f que presentan el decaimiento “extremo” para su transformada de Fourier, esto es, las que cumplen que \widehat{f} tiene soporte compacto.

Ahora veamos un resultado parcialmente inverso al presentado en la Proposición 2.22.

Proposición 2.23. *Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}(\xi) \leq C e^{-2\pi a |\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$, para ciertas constantes $C, a > 0$. Entonces, f es la restricción a \mathbb{R} de una función holomorfa en la banda S_b , para cualquier $0 < b < a$.*

Demostración. Del Teorema 2.10 se tiene que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fijamos $0 < b < a$. Podemos extender la definición de f a la banda S_b mediante

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad z \in S_b,$$

puesto que, teniendo en cuenta las hipótesis sobre \widehat{f} , que $|e^{2\pi i \xi z}| = e^{-2\pi |\xi| \text{Im } z} \leq e^{2\pi b |\xi|}$, $z \in S_b$, y que $b < a$, se sigue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z}| d\xi \leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi(a-b)|\xi|} d\xi < \infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función

$$F_n(z) = \int_{-n}^n \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad z \in S_b.$$

En virtud de [11, Theorem 5.4, Chap. 2], F_n , $n \in \mathbb{N}$, es una función entera. Además,

$$\sup_{z \in S_b} |F_n(z) - F(z)| \leq C \int_{|\xi| \geq n} e^{-2\pi(a-b)|\xi|} d\xi,$$

por lo que F_n converge a F , cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente en S_b . El [11, Theorem 5.2, Chap.2] asegura que F es holomorfa en S_b , lo que nos permite concluir la prueba del teorema. \square

Una consecuencia inmediata es la siguiente.

Corolario 2.24. *Supongamos que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $\widehat{f}(\xi) \leq Ce^{-2\pi a|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$, para ciertas constantes $C, a > 0$. Si f se anula en algún intervalo abierto no vacío, entonces $f = 0$.*

Demostración. De la Proposición 2.23 f extiende a una función F que es holomorfa en una banda que contiene a la recta real. Puesto que $f = 0$ en un intervalo, también $F = 0$ en dicho intervalo. Tenemos así una función holomorfa en un abierto y conexo Ω que se anula en un conjunto con puntos de acumulación en Ω . Entonces $F = 0$ y, por tanto, $f = 0$ (ver [11, Theorem 4.8, Chap. 2]). \square

Queremos indicar que la condición $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ se impone para asegurar la validez de la fórmula de inversión. Por tanto, los resultados anteriores son ciertos siempre que se verifique la fórmula de inversión y la estimación exponencial para la transformada de Fourier.

Terminamos la sección desarrollando el Teorema de Paley-Wiener, un teorema que completa los resultados precedentes, pues caracteriza a las funciones f cuya transformada de Fourier es de soporte compacto.

Teorema 2.25 (Teorema de Paley-Wiener). *Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Se tiene que la transformada de Fourier \widehat{f} tiene soporte en $[-M, M]$, para cierto $M > 0$, si, y solo si, f admite una extensión F al plano complejo que es entera y tal que $|F(z)| \leq Ce^{2\pi M|z|}$, $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que \widehat{f} tiene soporte en $[-M, M]$. Entonces $f, \widehat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y el Teorema 2.10 conduce a

$$f(x) = \int_{-M}^M \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como el rango de integración es finito, podemos extender esta definición a todo el plano complejo mediante

$$F(z) = \int_{-M}^M \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

De nuevo por [11, Theorem 5.4, Chap. 2] se sigue que F es una función holomorfa en todo el plano. Además se verifica que $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, y

$$|F(z)| \leq \int_{-M}^M |\widehat{f}(\xi)| e^{-2\pi \xi \operatorname{Im} z} d\xi \leq \int_{-M}^M |\widehat{f}(\xi)| e^{2\pi \xi |z|} d\xi \leq Ce^{2\pi M|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Veamos ahora el resultado inverso. Para ello, consideramos tres etapas. En la primera, suponemos que f admite una extensión F holomorfa en \mathbb{C} que verifica

$$|F(z)| \leq C \frac{e^{2\pi M|\operatorname{Im} z|}}{1 + |\operatorname{Re} z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Probamos que bajo esta condición, $\widehat{f}(\xi) = 0$, $|\xi| > M$. Consideramos $\xi > M$ y escribimos, para $b > 0$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - ib) e^{-2\pi i \xi(x - ib)} dx. \quad (2.17)$$

Esta igualdad se obtiene siguiendo la prueba de (2.16) que en este caso resulta válida para todo valor de $b > 0$ puesto que F es entera. Entonces, se infiere que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi M b - 2\pi \xi b}}{1 + x^2} dx \leq Ce^{-2\pi b(\xi - M)}, \quad b > 0.$$

Tomando límite cuando $b \rightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta que $\xi > M$ se concluye que $\widehat{f}(\xi) = 0$. De forma análoga, se deduce que $\widehat{f}(\xi) = 0$, $\xi < -M$. En este caso, se verifica la identidad (2.17) con $-b$ en lugar de b y se llega a que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq Ce^{2\pi b(\xi + M)}, \quad b > 0,$$

lo que permite obtener que $\widehat{f}(\xi) = 0$, $\xi < -M$.

En la segunda fase, consideramos para F la condición siguiente, más débil que la anterior,

$$|F(z)| \leq Ce^{2\pi M|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.18)$$

Supongamos primero $\xi > M$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos la función

$$F_\varepsilon(z) = \frac{F(z)}{(1 + i\varepsilon z)^2}, \quad z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{i}{\varepsilon}.$$

Se tiene que

$$|F_\varepsilon(z)| \leq C \frac{e^{2\pi M |\operatorname{Im} z|}}{|1 - \varepsilon \operatorname{Im} z + i\varepsilon \operatorname{Re} z|^2} \leq C \frac{e^{2\pi M |\operatorname{Im} z|}}{1 + (\operatorname{Re} z)^2}, \quad \operatorname{Im} z \leq 0.$$

Luego, si denotamos por f_ε la restricción de F_ε a \mathbb{R} , atendiendo a lo establecido en la etapa anterior se cumple que $\widehat{f}_\varepsilon(\xi) = 0$, $\varepsilon > 0$.

Por otro lado, podemos escribir

$$|\widehat{f}_\varepsilon(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \left(\frac{1}{(1 + i\varepsilon x)^2} - 1 \right) \right| dx.$$

Es claro que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1 + i\varepsilon x)^2} - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

y, además, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\left| f(x) \left(\frac{1}{(1 + i\varepsilon x)^2} - 1 \right) \right| \leq 2|f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que f es absolutamente integrable podemos inferir, usando el Teorema de la convergencia dominada ([12, Theorem 1.13, Chap. 2]), que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{f}_\varepsilon(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

y se obtiene así que $\widehat{f}(\xi) = 0$. Argumentando de la misma forma en el semiplano superior y considerando las funciones $G_\varepsilon = F(z)(1 - i\varepsilon z)^{-2}$ se deduce que $\widehat{f}(\xi) = 0$, cuando $\xi < -M$.

Finalmente consideramos la condición para F dada en el enunciado del teorema, esto es,

$$|F(z)| \leq C_0 e^{2\pi M |z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nuestro objetivo es ver que esta estimación junto con el hecho de que f es acotada conducen a una estimación para F del tipo (2.18). Esta es la idea que recoge el conocido como Teorema de Phragmén-Lindelöf y que enunciamos por comodidad al final de la sección (Teorema 2.26).

Sabemos por hipótesis que f es una función acotada, pongamos $|f(x)| \leq B$, para cierta B que podemos tomar por conveniencia mayor que C_0 . Sea G la función definida por

$$G(z) = \frac{1}{B} F(z) e^{2\pi i M z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esta función G satisface las condiciones del Teorema de Phragmén-Lindelöf en el primer cuadrante, Q_1 . Efectivamente, es una función entera, y satisface

$$|G(x)| = \frac{|f(x)|}{B} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |G(iy)| \leq \frac{C_0}{B} e^{2\pi M |y| - 2\pi M y} = \frac{C_0}{B} \leq 1, \quad y \geq 0,$$

y $|G(z)| \leq C_0 e^{c|z|}$, $z \in \mathbb{C}$. Entonces, el Teorema de Phragmén-Lindelöf nos dice que

$$|G(z)| \leq 1, \quad z \in Q_1,$$

o lo que es equivalente, $|F(z)| \leq C |e^{-2\pi i M z}| = C e^{2\pi M \operatorname{Im} z}$, $z \in Q_1$. Abordamos de la misma forma los otros tres cuadrantes y llegamos a que

$$|F(z)| \leq C e^{2\pi M |\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

que es la estimación (2.18) que consideramos en la segunda etapa de la prueba. Se concluye entonces que $\widehat{f}(\xi) = 0$, $|\xi| \geq M$. □

Teorema 2.26 (Teorema de Phragmén-Lindelöf). Sea F una función holomorfa en el sector

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4} \right\}$$

y continua en la clausura de S . Asumamos que $|F(z)| \leq 1$ en la frontera del sector, y que para ciertas constantes $C, c > 0$, $|F(z)| \leq Ce^{c|z|}$, $z \in S$. Entonces, $|F(z)| \leq 1$, $z \in S$.

La condición sobre el crecimiento de F es necesaria pues, por ejemplo, la función $F(z) = e^{z^2}$ está acotada en la frontera del sector; de hecho, si $z = re^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, con $r > 0$, $|F(z)| = |e^{\pm ir^2}| = 1$. Sin embargo, F no es acotada en el sector, pues $F(x) \rightarrow +\infty$, cuando x es real y $x \rightarrow +\infty$. También indicamos que el sector del teorema puede rotarse, por ejemplo, al primer cuadrante, que es el modo en que lo hemos utilizado en la demostración del Teorema de Paley-Wiener (basta notar que $z \in Q_1$ si, y solo si, $ze^{-i\frac{\pi}{4}} \in S$).

2.5. El Teorema de Plancherel

Hasta aquí hemos considerado la teoría en el contexto de las funciones absolutamente integrables. Como hemos visto, en este marco general, no existe una simetría entre el espacio de las funciones y el de sus transformadas. Sí que la hay cuando restringimos la transformación de Fourier a la clase de Schwartz. En esta sección queremos encontrar un contexto general donde la transformación de Fourier siga presentando esa simetría. Y es aquí donde el espacio de las funciones de cuadrado integrable juega un importante papel. Una primera dificultad que encontramos es que, a diferencia de lo que ocurre en el caso de las series de Fourier, el espacio de las funciones de cuadrado integrable no está contenido en el espacio de las funciones absolutamente integrables ($f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ es un ejemplo de este hecho), por lo que la integral que define la transformada de Fourier puede ser divergente para una función de cuadrado integrable. En esta sección analizamos cómo se puede resolver esta situación.

La clave para ello se encuentra en el hecho de que la transformación de Fourier es una isometría en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Consideramos en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ el producto interior dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Se verifican las siguientes propiedades para este producto interior:

- (\mathbb{C} -linealidad respecto a la primera variable): $\langle af + bg, h \rangle = a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle$, $a, b \in \mathbb{C}$.
- (\mathbb{C} -antilinealidad respecto a la segunda variable): $\langle h, af + bg \rangle = \overline{a}\langle h, f \rangle + \overline{b}\langle h, g \rangle$, $a, b \in \mathbb{C}$.
- (positividad): $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0$ si, y solo si, $f = 0$.
- (propiedad hermitica): $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.

Este producto interior tiene asociada la norma L^2 en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definida por

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

y cuyas principales propiedades se recogen a continuación:

- (no degenerada): $\|f\|_2 = 0$ si, y solo si, $f = 0$.
- (homogeneidad): $\|af\|_2 = |a|\|f\|_2$, $a \in \mathbb{C}$.
- (desigualdad triangular): $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.
- (desigualdad de Cauchy-Schwarz): $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

Veamos que la transformación de Fourier es una isometría (respecto a $\|\cdot\|_2$) en la clase de Schwartz.

Proposición 2.27. Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Consideramos la función $g(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Por la fórmula de inversión y la Proposición 2.3 se sigue que

$$(f * g)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi.$$

Se puede ver fácilmente que $\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Además, $(f * g)(0) = \|f\|_2^2$, por lo que se infiere que $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. □

La transformación \mathcal{F} también conserva el producto interior, esto es,

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.19)$$

Nótese que en el caso de tomar $f = g$ se obtiene que $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. Para establecer la igualdad (2.19) tenemos en cuenta el teorema de inversión (Teorema 2.10).

Ejemplo 2.28. Hacemos aquí un breve paréntesis para ilustrar la utilidad de la identidad (2.19) en la resolución de integrales. Sabemos que si $d_r = \chi_{(-r,r)}$, $r > 0$, entonces $\widehat{d_r}(\xi) = \frac{\text{sen}(2\pi r\xi)}{\pi\xi}$, $\xi \neq 0$, (ver Sección 2.1). Luego, si $a, b > 0$ y consideramos las funciones d_a y d_b , podemos obtener, atendiendo a (2.19) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(2\pi a\xi)\text{sen}(2\pi b\xi)}{\xi^2} d\xi = \pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(-a,a)}(x)\chi_{(-b,b)}(x) dx = \pi^2 \int_{-\min\{a,b\}}^{\min\{a,b\}} dx = 2\pi^2 \min\{a,b\}.$$

Análogamente, considerando las funciones $p_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$ y $p_b(x) = e^{-2\pi b|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, con $a, b > 0$, y usando (2.1) se infiere que

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + a^2)(\xi^2 + b^2)} = \frac{\pi^2}{2ab} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi(a+b)|x|} dx = \frac{\pi}{2ab(a+b)}.$$

De nuevo con nuestra cuestión principal, la idea para definir la transformación de Fourier de una función en $L^2(\mathbb{R})$ (funciones medibles tales que $\|f\|_2 < \infty$) se basa en tomar como punto partida la transformación \mathcal{F} sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y usar un procedimiento de paso al límite. Para ello ha de establecerse primero que las funciones en $L^2(\mathbb{R})$ pueden aproximarse por elementos de la clase de Schwartz. El sentido en el que entendemos esta aproximación es en la norma L^2 .

Proposición 2.29. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ continua y acotada. Existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Fijamos $0 < \varepsilon < 1$. Nuestro objetivo es encontrar una función $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de manera que $\|f - \phi\|_2 < c\varepsilon$, para cierta $c > 0$. Elegimos primero $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x| > n_0} |f(x)|^2 dx < \varepsilon^2,$$

y consideramos la función $g(x) = f(x)\chi_{[-n_0, n_0]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Es claro que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Observamos además que la función g es continua salvo quizás en $\pm n_0$. Pero podemos modificar la función g ligeramente para obtener una función h continua, de soporte compacto y tal que $h(x) = g(x)$, $x \in [-n_0, n_0]$, y $\|g - h\|_2 < C\varepsilon$ (podemos, por ejemplo, definir $h = g$, en $|x| \leq n_0$, $h = 0$, cuando $|x| \geq n_0 + \varepsilon$, y en $n_0 \leq |x| \leq n_0 + \varepsilon$ considerar los segmentos de las rectas que la hacen continua).

La idea en lo que sigue es encontrar una función ϕ en la clase de Schwartz de manera que $\|h - \phi\|_2 < \varepsilon$, y con ello se termina la prueba. Para ello haremos uso de las aproximaciones de la identidad. Partimos de una función $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $(-1, 1)$ y $\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) dx \neq 0$ (podemos pensar en una función "bump") y definimos la función $K = \frac{1}{\sigma} b$. Es claro entonces que K es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $(-1, 1)$ e integral 1. Podemos generar entonces una aproximación de la identidad $\{k_t\}_{t > 0}$, mediante

$$k_t(x) = \frac{1}{t} K\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nótese que, para cada $t > 0$, $k_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y su soporte está contenido en $(-t, t)$. Entonces, las funciones $h * k_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $t > 0$, y, en el caso de que $0 < t < 1$, $\text{sop}(h * k_t) \subset (-n_0 - 2, n_0 + 2)$.

Ya que h es una función continua, es uniformemente continua en $[-n_0 - 2, n_0 + 2]$. Y en virtud del Teorema 1.3 (b), se obtiene que $(h * k_t)(x) \rightarrow h(x)$, cuando $t \rightarrow 0^+$, uniformemente en $[-n_0 - 2, n_0 + 2]$. Luego, $\|h - h * k_t\|_2 \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow 0^+$, y, por tanto, podemos elegir t_0 suficientemente pequeño para que $\|h - h * k_{t_0}\|_2 < \varepsilon$. La función $\phi = h * k_{t_0}$ es la función de la clase de Schwartz que buscamos. \square

Observación 2.30. Hemos considerado en esta proposición las hipótesis de continuidad y acotación para las funciones, de nuevo, para poder realizar la prueba con herramientas conocidas. La densidad del espacio de Schwartz en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$ sigue el mismo esquema de la prueba anterior, pero para los argumentos de convergencia se utilizan los Teoremas de convergencia dominada y de convergencia acotada (ver [12, Lemma 1.2, Chap. 5]).

Ya se reúnen las condiciones para dar una buena definición de la transformada de Fourier de una función en $L^2(\mathbb{R})$. El procedimiento que se sigue es el siguiente. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Tomamos una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de manera que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$. Ya que $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar la sucesión de sus transformadas de Fourier $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Atendiendo a la Proposición 2.27 se sigue que $\|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}_m\|_2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$, $n, m \in \mathbb{N}$. Y entonces, $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$ y, por tanto, convergente (respecto a $\|\cdot\|_2$) por ser $L^2(\mathbb{R})$ un espacio completo ([12, Theorem 1.2, Chap. 4]). Se define entonces la transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}_2(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}_n,$$

donde el límite se entiende en la norma L^2 . Esta definición es independiente de la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ considerada. De hecho si $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión de funciones en la clase de Schwartz que converge en L^2 a la función f , entonces, de nuevo por la Proposición 2.27, dado $\varepsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se tiene que

$$\|\mathcal{F}_2(f) - \widehat{\psi}_n\|_2 \leq \|\mathcal{F}_2(f) - \widehat{\varphi}_n\|_2 + \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\psi}_n\|_2 \leq \|\mathcal{F}_2(f) - \widehat{\varphi}_n\|_2 + \|\varphi_n - f\|_2 + \|f - \psi_n\|_2 < \varepsilon.$$

Con esta definición se logra además que la transformación \mathcal{F}_2 conserve la norma y el producto interior. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que $\|f - \varphi_n\|_2 \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces, podemos escribir

$$\|\mathcal{F}_2(f)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\varphi}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_2 = \|f\|_2.$$

De manera análoga se obtiene (2.19) para la transformación integral \mathcal{F}_2 .

Por otro lado, sabemos que en el espacio de Schwartz, la transformación inversa \mathcal{F}^* viene dada por $\mathcal{F}^*(g)(x) = \mathcal{F}(g)(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Podemos definir el operador \mathcal{F}_2^* sobre $L^2(\mathbb{R})$ de la misma forma que definimos \mathcal{F}_2 . Entonces, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\|f - \varphi_n\|_2 \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\varphi_n = \mathcal{F}^* \mathcal{F}(\varphi_n) = \mathcal{F} \mathcal{F}^*(\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite (en sentido L^2) cuando $n \rightarrow \infty$, se llega a que

$$f = \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2(f) = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_2^*(f).$$

Una cuestión natural que cabe plantearse es la siguiente. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ¿se cumple que $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_2(f)$? La respuesta, como cabe esperar, es afirmativa, pero se debe aclarar cómo se entiende esta igualdad, porque $\mathcal{F}(f)$ se define puntualmente, mientras que $\mathcal{F}_2(f)$ se obtiene a partir de una convergencia en L^2 .

Para analizar este tema cabe recordar que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces podemos encontrar una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de forma que $\varphi_n \rightarrow f$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde la convergencia se entiende tanto en L^1 como en L^2 . (Si f es continua y acotada, basta seguir la prueba de la Proposición 2.29 para establecer que también se tiene la convergencia en L^1 . El caso general puede verse en [5, Proposition 8.17]).

Por otro lado, puesto que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}_n(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x) - f(x)| dx = \|\varphi_n - f\|_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

se tiene que $\widehat{\varphi}_n$ converge a \widehat{f} uniformemente en \mathbb{R} y, por tanto, puntualmente. Y de la definición de $\mathcal{F}_2(f)$ se tiene que $\widehat{\varphi}_n$ converge a $\mathcal{F}_2(f)$ en L^2 . Luego, existe una subsucesión de $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a \widehat{f} , en casi todo punto ([9, Theorem 3.12]). De esta forma $\mathcal{F}_2(f)(x) = \mathcal{F}(f)(x)$, en casi todo punto cuando $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

En virtud de todas las observaciones hechas, podemos enunciar el conocido como Teorema de Plancherel, que asegura en $L^2(\mathbb{R})$ la simetría que presenta la clase de Schwartz respecto a \mathcal{F} .

Teorema 2.31 (Teorema de Plancherel). *La transformación integral de Fourier originalmente definida en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se extiende de manera única a $L^2(\mathbb{R})$, como una aplicación \mathcal{F}_2 biyectiva de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo que verifica*

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}_2(f), \mathcal{F}_2(g) \rangle \quad \text{y} \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}_2(f)\|_2, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Aplicaciones de la transformada de Fourier

3.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg

La teoría de la transformación integral de Fourier en L^2 es de gran utilidad para abordar el conocido como Principio de incertidumbre, enunciado en 1927 por Heisenberg, uno de los padres de la física cuántica. Este principio afirma que cada partícula lleva asociada consigo una onda lo que impone restricciones en la capacidad para determinar al mismo tiempo su posición y su velocidad. Se trata de un fenómeno intrínseco, pues no se puede evitar aunque se mejore el instrumento de medida. A menudo este principio se cita como uno de los misterios de la mecánica cuántica, pero quizás no por el hecho de la relación “inversa” entre la localización de la variable espacial o temporal y la localización de su espectro de frecuencia, que es una circunstancia común a cualquier onda, sino por el hecho de que las partículas se comporten en ciertos aspectos como ondas. Esta relación “inversa” se puede enunciar diciendo que es imposible para una señal que esté limitada en tiempo y en frecuencia, y, esto, en términos de la transformada de Fourier se describe como la imposibilidad de que una función f no nula y su transformada \hat{f} tengan ambas soporte compacto.

Una forma de ver esto es la siguiente. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, con soporte contenido en el intervalo $(-a, a)$ y definimos la función

$$F(z) = \int_{-a}^a f(x) e^{-2\pi i z x} dx, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Observamos que F es una función bien definida en todo el plano complejo y, además, podemos derivar bajo el signo integral para ver que F es analítica (ver también [11, Theorem 5.4]). Luego, \hat{f} es la restricción al eje real de una función entera, por lo que sus ceros, a menos que $f = 0$, son puntos aislados. De la misma forma, usando la fórmula de inversión, si \hat{f} es no nula y tiene soporte en un intervalo, los ceros de f han de ser puntos aislados. Esta idea de que una función y su transformada no pueden estar a la vez “localizadas” también está presente en la propiedad de dilatación vista en la Proposición 2.2. Si se compone la función f con una contracción o una dilatación, se corresponde con una dilatación o una contracción, respectivamente, en \hat{f} . En las Figuras 3.1 y 3.2 se puede apreciar este hecho para la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

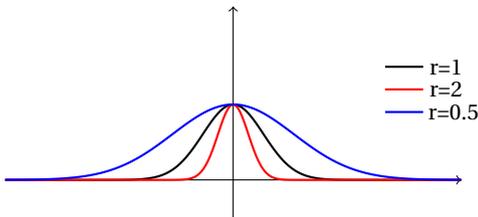


Figura 3.1: Función $f_r = f(r \cdot)$

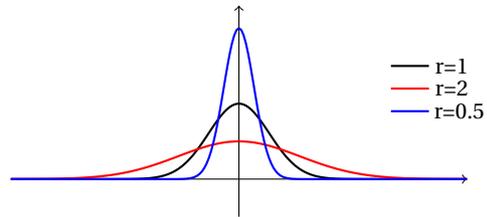


Figura 3.2: Función \hat{f}_r

Recogemos a continuación la formulación cuantitativa de este fenómeno sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1. *Sea f una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Se cumple*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

La igualdad se verifica si, y solo si, $f(x) = Ae^{-Bx^2}$, donde $B > 0$ y $A \in \mathbb{C}$.

Demostración. Para cada $-\infty < a < b < +\infty$, haciendo una integral por partes, se llega a que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = x|f(x)|^2 \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b x \frac{d}{dx} [f(x)\overline{f(x)}] dx = x|f(x)|^2 \Big|_{x=a}^{x=b} - 2\operatorname{Re} \left(\int_a^b x [f(x)\overline{f'(x)}] dx \right).$$

Tomando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$ y usando que f es una función de la clase de Schwartz, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = -2\operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \overline{f(x)} f'(x) dx \right) \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x| |f(x)| |f'(x)| dx.$$

Aplicamos ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Sección 2.5 para inferir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Y la prueba de la desigualdad se termina en virtud de la Proposición 2.27 y la identidad (2.2), puesto que

$$\|f'\|_2 = \|\mathcal{F}(f')\|_2 = 2\pi \|\xi \hat{f}\|_2.$$

Por otro lado, observamos que la igualdad se alcanza si y solo si, se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) la desigualdad de Cauchy-Schwarz que hemos utilizado es una igualdad;

(b) $\operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \overline{f(x)} f'(x) dx \right) = 0$.

Sabemos que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad si, y solo si, las funciones implicadas son proporcionales, por lo que para cierta constante $c \in \mathbb{C}$, $f'(x) = cx f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Y las funciones que satisfacen esta ecuación diferencial son de la forma

$$f(x) = Ae^{cx^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora que c es una constante real negativa. Puesto que f es una función en el espacio de Schwartz, es claro que $\operatorname{Re} c = -2B$, para algún $B < 0$. Por otro lado, de la condición (b) se sigue que

$$0 = \operatorname{Im} \left(c|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{(\operatorname{Re} c)x^2} dx \right) = |A|^2 (\operatorname{Im} c) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2Bx^2} dx,$$

de donde se concluye que $\operatorname{Im} c = 0$. □

Si tomamos la función f normalizada, esto es, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, el Principio de incertidumbre toma la forma

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \quad (3.1)$$

o, expresado solo en términos de la función f ,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4}, \quad (3.2)$$

y podemos decir que la igualdad se alcanza cuando $f(x) = Ae^{-Bx^2}$, con $B > 0$ y $A \in \mathbb{C}$ verificando $|A|^4 \pi = 2B$. Nótese que, en este caso, se tiene que

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 2|A|^2 \int_0^{+\infty} e^{-2Bx^2} dx = \frac{|A|^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2B}}.$$

Observación 3.2. Sean $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tal que $\|f\|_2 = 1$, y $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$. Consideramos la función $g(x) = e^{-2\pi i \xi_0 x} f(x + x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. Esta función pertenece claramente a la clase de Schwartz, $\|g\|_2 = \|f\|_2 = 1$, y por las propiedades (i) y (ii) de la Proposición 2.2

$$\hat{g}(\xi) = e^{2\pi i x_0 (\xi + \xi_0)} \hat{f}(\xi + \xi_0), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Entonces, aplicando (3.1) a la función g se obtiene una forma más general para el Principio de incertidumbre,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \quad (3.3)$$

y la igualdad se alcanza cuando $f(x) = Ae^{2\pi i \xi_0 x} e^{-B(x - x_0)^2}$, con $B > 0$ y $A \in \mathbb{C}$ tales que $|A|^4 \pi = 2B$.

El Principio de incertidumbre se puede formular en términos del operador de Hermite $L = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, que es el análogo al oscilador armónico en mecánica cuántica. Consideramos los operadores A y A^* definidos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por

$$A = \frac{d}{dx} + x \quad \text{y} \quad A^* = -\frac{d}{dx} + x.$$

Estos operadores A y A^* se conocen como operadores de aniquilación y creación, respectivamente. Es fácil comprobar que A^* es el operador adjunto de A , esto es, $\langle A^* f, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$, $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, y que $L - I = A^* A$, donde I denota el operador identidad.

El Principio de incertidumbre de Heisenberg conduce a que $L - I \geq 0$, es decir, que

$$\langle Lf, f \rangle \geq \langle f, f \rangle, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En efecto, sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$. Integrando por partes y teniendo en cuenta el comportamiento de f en el infinito, podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle Lf, f \rangle &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) \overline{f(x)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \\ &= (\|f'\|_2 - \|xf\|_2)^2 + 2\|f'\|_2 \|xf\|_2 \geq 2\|f'\|_2 \|xf\|_2 \geq 1 = \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle. \end{aligned}$$

En la última desigualdad de la cadena hemos utilizado (3.2).

Consideramos ahora para cada $t > 0$ los operadores

$$A_t = \frac{d}{dx} + tx \quad \text{y} \quad A_t^* = -\frac{d}{dx} + tx$$

Como antes, se tiene que A_t^* , $t > 0$, es el operador adjunto de A_t y, por tanto,

$$\langle A_t^* A_t f, f \rangle = \langle A_t f, A_t f \rangle = \|A_t f\|_2^2 \geq 0, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

esto es, $A_t^* A_t \geq 0$ (observamos que ésta es otra forma de establecer que $L - I = A^* A \geq 0$). El hecho de que $A_t^* A_t \geq 0$ nos permite dar otra demostración para el Teorema 3.1.

Demostración alternativa para el Teorema 3.1. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Para cada $t > 0$ se tiene que

$$A_t^* A_t f(x) = -f''(x) - tf(x) + t^2 x^2 f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

por lo que, integrando por partes como antes se sigue que

$$\langle A_t^* A_t f, f \rangle = \|f'\|_2^2 - t\|f\|_2^2 + t^2 \|xf\|_2^2, \quad t > 0.$$

Viendo $\langle A_t^* A_t f, f \rangle$ como un polinomio en t , y usando que $\langle A_t^* A_t f, f \rangle \geq 0$, para todo $t > 0$, se ha de cumplir que el discriminante de la ecuación de segundo grado correspondiente es no positivo, y, por tanto

$$\|f\|_2^2 \leq 2\|f'\|_2 \|xf\|_2,$$

que es la formulación del Principio de incertidumbre en términos de f del Teorema 3.1. \square

Terminamos la sección volviendo a los orígenes del Principio de incertidumbre de Heisenberg para dar una interpretación del mismo en el contexto de la mecánica cuántica. Asumimos que nuestra partícula, pongamos un electrón, viaja a lo largo de la recta real. Según las leyes de la mecánica cuántica este movimiento viene descrito por una función de onda f que podemos considerar en el espacio de Schwartz y que se normaliza en el sentido de que $\|f\|_2 = 1$. La función $p(x) = |f(x)|^2$ se interpreta como la función de densidad que da la probabilidad de que la partícula se localice en la posición x . Así, la probabilidad de que el electrón se encuentre en el intervalo (a, b) viene dada por

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Puede que la probabilidad de que el electrón esté en un intervalo dado sea pequeña, pero la condición $\|f\|_2 = 1$ garantiza que está en algún lugar de la recta.

Podemos considerar además la esperanza, definida por

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x |f(x)|^2 dx,$$

que constituye la mejor estimación para la posición de la partícula. Pensemos en el caso simple en que el electrón solo puede encontrarse en un número finito de posiciones en el eje real x_1, x_2, \dots, x_N , con una probabilidad p_i de que la partícula esté localizada en la posición x_i , $i = 1, \dots, N$. Naturalmente, $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$. Si no tenemos más información y debemos elegir una posición para la partícula, parece que la media ponderada $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i p_i$ sería la adecuada. La definición de esperanza que se ha dado representa, entonces, la versión continua de esta media discreta.

Lo que va a medir la incertidumbre relativa a la esperanza es precisamente la varianza, dada por

$$\Delta_{\bar{x}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx$$

Observamos que si f está muy concentrada alrededor de \bar{x} , significa que la probabilidad de que x esté cerca de \bar{x} , es alta y, entonces el valor de la varianza es pequeño, pues la mayor contribución a la integral tiene lugar para valores de x cerca de \bar{x} , y así la incertidumbre será pequeña. Por otro lado, si f es una función aplanada, con lo que la distribución de probabilidad p no está muy concentrada, entonces en la integral que define a la varianza entrarán en juego valores grandes de $(x - \bar{x})^2$, y como resultado, la incertidumbre puede ser considerable.

Una cuestión a señalar aquí es que tomar \bar{x} en la definición de la varianza es la mejor opción, pues es la que da el valor mínimo para la incertidumbre. En efecto, si derivamos la función

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - z)^2 |f(x)|^2 dx, \quad z \in \mathbb{R},$$

(nótese que podemos derivar bajo el signo integral pues $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) e igualamos la derivada a cero nos queda $z = \bar{x}$ como punto crítico. Y puesto que $F'' = 2 > 0$, se trata de un mínimo.

La transformada de Fourier de la onda f nos da esencialmente la función de densidad de probabilidad del momento de la partícula. De manera más precisa, se considera la función

$$f^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h}} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

donde h es la constante de Planck¹, y consideramos la función de densidad de probabilidad $q(\xi) = |f^*(\xi)|^2$, $\xi \in \mathbb{R}$. Observamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2 = 1$.

El análisis que se hizo antes para la posición de la partícula se tiene de la misma forma para su momento, de manera que

$$\Delta_{\bar{\xi}}(f^*) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 \left| \widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right) \right|^2 d\xi,$$

mide la incertidumbre del momento del electrón respecto al momento medio

$$\bar{\xi} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \left| \widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right) \right|^2 d\xi.$$

La desigualdad (3.3) con $x_0 = \bar{x}$ y $\xi_0 = \frac{\bar{\xi}}{h}$ nos conduce a la conclusión física

$$\Delta_{\bar{x}}(f) \Delta_{\bar{\xi}}(f^*) \geq \frac{h^2}{16\pi^2} = \frac{h^2}{4},$$

esto es, no podemos precisar, a la vez, la posición y el momento del electrón.

3.2. Ecuaciones en derivadas parciales

En esta sección utilizaremos la transformación de Fourier y sus propiedades para resolver dos problemas clásicos de ecuaciones en derivadas parciales: el problema de difusión del calor (en una varilla infinita) y el problema de Dirichlet en el semiplano. Como ya mencionamos, una de las propiedades cruciales de la transformación integral de Fourier es el “intercambio” entre la derivación y el producto por polinomios visto en la Proposición 2.2. Esta propiedad, junto con la fórmula de inversión, va a ser la clave para resolver estas ecuaciones en derivadas parciales.

¹ Esta constante relaciona la energía de un fotón E con la frecuencia ν de la onda lumínica según la fórmula $E = h\nu$ y su valor puede tomarse como $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·s. Cuando la frecuencia se mide en radianes por segundo, es útil incluir el factor $\frac{1}{2\pi}$ en la constante h , obteniéndose la conocida como constante de Planck reducida $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

3.2.1. La ecuación del calor

Se calienta una varilla infinita, que suponemos es la recta real, hasta obtener una distribución inicial de temperatura dada por la función $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, y, entonces, dejamos de suministrar calor. La pregunta natural que se plantea consiste en determinar la distribución de temperatura en cualquier instante. Denotamos por $u(x, t)$, la temperatura en el punto x de la varilla y en el instante $t > 0$. En ausencia de fuentes de calor, la función u satisface la conocida como *ecuación de difusión* dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.4)$$

donde c es una constante que depende de las propiedades térmicas de la varilla. Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue suponemos que $c = 1$. En nuestro problema, la función u ha de cumplir además la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, siendo f la distribución de temperaturas a lo largo de la varilla en el momento inicial.

Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ es solución de la ecuación de difusión con la condición $u(x, 0) = f(x)$. Procediendo de manera formal, vamos a trasladar el problema a la transformada de Fourier $\hat{u}(\xi, t)$ en la variable espacial

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Tomando la transformada de Fourier en la ecuación (3.4) llegamos a que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Observamos que, fijando ξ , esta es una ecuación diferencial ordinaria en la variable t y cuya solución viene dada por

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}, \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0,$$

para cierta $A(\xi)$. También podemos aplicar la transformada de Fourier a la condición inicial y obtener $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, por lo que $A(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Hemos llegado así a que

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}, \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0,$$

y teniendo en cuenta la Proposición 2.3 y que $\mathcal{F}\left((4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(\xi) = e^{-4\pi^2 t \xi^2}$, la solución del problema se puede expresar en términos de la convolución mediante

$$u(x, t) = (f * \mathcal{H}_t)(x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

donde la función \mathcal{H}_t es el *núcleo del calor* definido por

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

(Nótese que $\mathcal{H}_t = H_{4\pi t}$, siendo H_t el núcleo en (1.3)).

Este procedimiento, aunque carece de rigor matemático, nos muestra una posible solución al problema. Con las condiciones adecuadas para la función f , podemos establecer que efectivamente lo es.

Teorema 3.3. Sean f una función absolutamente integrable, continua y acotada, y

$$u(x, t) = (f * \mathcal{H}_t)(x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Entonces,

- (i) La función $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ es acotada y satisface la ecuación del calor.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por ser f acotada se tiene que u también lo es. De hecho, si $|f(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$|u(x, t)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_t(y) dy = M, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Por otro lado, ya que $\mathcal{H}_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $t > 0$, se tiene que, en la región $t > 0$, u es una función de clase C^∞ y, además, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = f * \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathcal{H}_t.$$

La fórmula de inversión de Fourier (Teorema 2.10) nos dice que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi, t) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Puesto que \widehat{f} es una función acotada y $\widehat{\mathcal{H}}_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ podemos derivar bajo el signo integral y concluir que u satisface la ecuación de difusión y (i) queda así establecido.

Finalmente, como f es continua y acotada, y $\{\mathcal{H}_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad, el Teorema 1.3 (a) asegura que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. \square

Observación 3.4. Si la función f del teorema pertenece a la clase de Schwartz podemos precisar algo más sobre la solución u . En virtud del Teorema 1.3 (b), se concluye que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$, uniformemente en \mathbb{R} . También se tiene convergencia en norma L^2 , esto es, $\|u(\cdot, t) - f\|_2 \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow 0^+$. En efecto, para cada $t > 0$ la función $u(\cdot, t)$ es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y, haciendo uso de la Proposición 2.27 obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(\xi, t) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 d\xi.$$

Fijamos $\varepsilon > 0$. Podemos elegir N suficientemente grande para que $\int_{|\xi|>N} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon$, y entonces, tomar t_0 suficientemente pequeño de manera que

$$\sup_{|\xi| \leq N} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 \xi^2 t} - 1|^2 < \frac{\varepsilon}{N}, \quad 0 < t \leq t_0.$$

Entonces se sigue que, para todo $0 < t \leq t_0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx \leq C \left(\frac{\varepsilon}{N} \int_{|\xi| \leq N} d\xi + \int_{|\xi|>N} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \leq C\varepsilon,$$

probando la convergencia en norma L^2 .

De la convergencia uniforme se sigue además que si definimos $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, entonces u es continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. En efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Por ser f continua, existe $\delta > 0$ de manera que $|u(x, 0) - u(x_0, 0)| < \varepsilon$, cuando $|x - x_0| < \delta$. Por otro lado, como $u(x, t) \rightarrow u(x, 0)$, cuando $t \rightarrow 0^+$, uniformemente en \mathbb{R} , podemos elegir $t_0 > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u(x, 0)| < \varepsilon, \quad 0 < t < t_0.$$

Tomando entonces $|x - x_0| < \delta$ y $0 < t < t_0$ se sigue que $|u(x, t) - u(x_0, 0)| < 2\varepsilon$.

También podemos ver que u se anula en el infinito, esto es, $|u(x, t)| \rightarrow 0$, cuando $|x| + t \rightarrow \infty$. Para probar esto, observamos por un lado que, ya que f es absolutamente integrable,

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (3.5)$$

y, por otro, puesto que la función f está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $|x - y| \sim |x|$, cuando $2|y| \leq |x|$, se tiene que

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq C \left(\int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \right) |f(y)| \mathcal{H}_t(x - y) dy \leq C \left(\frac{e^{-cx^2/t}}{\sqrt{t}} + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{\mathcal{H}_t(x - y)}{1 + y^2} dy \right) \\ &\leq C \left(\frac{e^{-cx^2/t}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{1 + x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_t(y) dy \right) \leq C \left(\frac{e^{-cx^2/t}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{1 + x^2} \right), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por tanto, cuando $|x| \leq t$, la estimación (3.5) conduce a que $|u(x, t)| \rightarrow 0$, cuando $|x| + t \rightarrow \infty$, y en el caso de que $|x| \geq t$, podemos usar (3.6) para inferir la propiedad.

Nótese que los mismos argumentos anteriores conducen a que también cuando $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, se tiene que $u = f * \mathcal{H}_t$ converge uniformemente a f , cuando $t \rightarrow 0^+$, y que se anula en el infinito.

El Teorema 3.3 garantiza la existencia de solución para la ecuación del calor con dato inicial f . Pero esta solución no es, en general, única. Como ilustración de ello consideramos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.5. La función $u(x, t) = \frac{x}{t} \mathcal{H}_t(x)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, satisface la ecuación de difusión y $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. En efecto, sencillos cálculos conducen a que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{x}{t^2} \mathcal{H}_t(x) + \frac{x}{t} \frac{\partial \mathcal{H}_t}{\partial t}(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{x}{t^2} \mathcal{H}_t(x) + \frac{x}{t} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_t}{\partial x^2}(x),$$

y el resultado se sigue del hecho de que $\mathcal{H}_t(x)$ verifica la ecuación del calor.

Observamos que esta función u no es continua en el origen. Basta con ver que si nos aproximamos al $(0, 0)$ por la parábola $x^2 = 4at$, con $a > 0$, se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (0,0) \\ x^2=4at}} u(x, t) = \frac{e^{-a}}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (0,0) \\ x^2=4at}} \frac{x}{t\sqrt{t}} = \infty.$$

Como podemos comprobar con el siguiente ejemplo, que la función u sea continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ sigue siendo insuficiente para garantizar la unicidad de la solución.

Ejemplo 3.6. Sea u la función dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

donde φ es la función definida por $\varphi(t) = e^{-1/t^2}$, $t \neq 0$, y $\varphi(0) = 0$. Se tiene que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $\varphi^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ (esto se puede ver siguiendo la prueba del Lema A.1). Luego, $u(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, se tiene que,² para todo $r > 0$, existe $M > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq \frac{M(2n)!}{r^n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, dado $a > 0$, tomando $r > a^2$, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi^{(n+1)}(t)| \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{a^{2n}}{r^{n+1}} = \frac{2M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) \left(\frac{a}{\sqrt{r}}\right)^{2n} < \infty, \quad |x| \leq a.$$

Luego por el criterio M de Weierstrass, la serie a la izquierda de la desigualdad converge uniformemente para $|x| \leq a$, $a > 0$, y $t \geq 0$. De la misma forma se llega a que la serie que define a u también converge uniformemente en $[-a, a] \times [0, \infty)$. Podemos entonces derivar la serie que define a u término a término, respecto a x y a t , para comprobar que u satisface la ecuación del calor,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(t) 2n(2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n+1)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Es claro que u es una solución no nula. De hecho $u(0, t) = \varphi(t) > 0$, $t \neq 0$.

Para poder asegurar la unicidad de la solución del Teorema 3.3 es necesario que la función $u = f * \mathcal{H}_t$ verifique ciertas condiciones, como las que se indican en el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 3.7. *Sea u una función en $C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, que satisface la ecuación del calor con la condición de frontera $u(x, 0) = 0$. Si $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformemente en $[0, T]$, $T > 0$, esto es, para cada $T > 0$,*

$$s_{T,\ell,k}(u) := \sup_{0 < t < T} \gamma_{\ell,k}(u(\cdot, t)) < \infty, \quad \ell, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (3.7)$$

entonces $u = 0$.

² Ver, por ejemplo, [13, Theorem 11.2, p. 48].

Demostración. Sea E la función "energía" definida mediante

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)|^2 dx, \quad t \geq 0.$$

Veamos que $E(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Es claro que $E(t) \geq 0$ y que $E(0) = 0$, por lo que es suficiente comprobar que E es una función decreciente. Ya que u es solución de la ecuación del calor y verifica (3.7) podemos escribir

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \overline{u(x, t)} + u(x, t) \overline{\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)} \right] dx = 2\operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \overline{u(x, t)} dx \right), \quad t > 0.$$

Nótese que hemos podido derivar bajo el signo integral puesto que, para todo $T > 0$,

$$\sup_{0 < t < T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \overline{u(x, t)} \right| dx \leq C[s_{T,0,2}(u) + s_{T,2,2}(u)]s_{T,0,0}(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

De nuevo en virtud de (3.7) se tiene que para cada $t > 0$, $u(\cdot, t)$ se anula en infinito, por lo que si integramos por partes nos queda

$$\frac{dE}{dt} = -2\operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \overline{\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)} dx \right) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx \leq 0.$$

Hemos establecido así que $E(t)$ es una función decreciente y, entonces $E = 0$, lo que nos permite concluir, ya que u es una función continua, que $u(x, t) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. \square

Observación 3.8. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces la función u dada por $u(x, t) = (f * \mathcal{H}_t)(x)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ y $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, verifica las condiciones del teorema, por lo que u es la única solución de nuestro problema de difusión. En efecto, de acuerdo con el Teorema 3.3 y la Observación 3.4 sabemos que u es continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ y satisface la ecuación del calor. Veamos que satisface la propiedad (3.7). Observamos que es suficiente establecer (3.7) para $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k = 0$, puesto que la clase de Schwartz, como vimos, es cerrada respecto a la derivación y además se cumple (1.7).

Sea $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $T > 0$. Señalamos primero que, puesto que f es una función acotada, pongamos $|f| \leq M$, con $M > 0$, y $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_t(x) dx = 1$, se tiene que

$$s_{T,0,0}(u) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}, t > 0} |u(x, t)| \leq M.$$

Consideramos ahora $\ell \in \mathbb{N}$. En este caso, procediendo como en (3.6), podemos escribir

$$s_{T,\ell,0}(u) = \sup_{0 < t < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |u(x, t)| \leq C \sup_{0 < t < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{|x|^\ell e^{-c \frac{x^2}{t}}}{\sqrt{t}} + \frac{|x|^\ell}{(1+|x|)^\ell} \right) \leq C \sup_{0 < t < T} \left(t^{\frac{\ell-1}{2}} + 1 \right) \leq C_T,$$

para cierta constante $C_T > 0$. En la penúltima desigualdad hemos usado que $z^r e^{-z} \leq C$, $z \geq 0$, para cualquier $r \geq 0$ (en particular para $r = \frac{\ell}{2}$).

Terminamos esta sección enunciando un teorema de unicidad debido a Tychonoff, que sustituye la propiedad (3.7) por una condición de crecimiento exponencial para u . Su demostración puede encontrarse en [13, Theorem 6.1, p.28]. De este teorema se infiere que si f es una función absolutamente integrable, acotada y uniformemente continua (como es el caso de las funciones de decrecimiento moderado), entonces $u(x, t) = (f * \mathcal{H}_t)(x)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ y $u(x, 0) = f(x)$, es la única solución del problema de difusión planteado.

Teorema 3.9. *Sea u una función en $C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ y que satisface la ecuación del calor con la condición de frontera $u(x, 0) = 0$. Supongamos además que para ciertas $M, a > 0$,*

$$|u(x, t)| \leq M e^{ax^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.8)$$

Entonces $u = 0$.

La condición (3.8) es óptima para la unicidad en el siguiente sentido: si en (3.8) sustituimos x^2 por $x^{2+\alpha}$, con $\alpha > 0$, entonces es posible encontrar soluciones de la ecuación del calor continuas hasta la frontera que son no nulas. En efecto, definimos la función u de forma análoga a la del Ejemplo 3.6,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

donde $\phi(t) = e^{-1/t^a} \chi_{(0, \infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, siendo $a > 1$. Procediendo como en el Lema A.1 se puede ver que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que $\phi^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego $u(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Además,³ existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$|\phi^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-\frac{1}{2t^a}}, \quad t > 0.$$

Entonces, puesto que $(n!)^2 \leq (2n)!$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi^{(n)}(t)| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq e^{-\frac{1}{2t^a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2t^a} + \frac{x^2}{\theta t}\right) =: F_a(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.9)$$

Veamos que $F_a(x, t) \leq e^{c|x|^{2+\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, para cierta constante $c > 0$ y $\alpha = 2(a-1)^{-1}$. Para ello, puesto que la función exponencial es creciente basta establecer que, existe $c > 0$ tal que

$$-\frac{1}{2t^a} + \frac{x^2}{\theta t} \leq c|x|^{2+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Es claro que para $x = 0$ esta desigualdad se cumple cualquiera que sea el valor de $c > 0$ y para todo $t > 0$. Fijamos $x \neq 0$ y consideramos la función g_x dada por

$$g_x(t) = -\frac{1}{2t^a} + \frac{x^2}{\theta t}, \quad t > 0.$$

Esta función es de clase $C^\infty(0, \infty)$ y cálculos directos conducen a que

$$g'_x(t) = \frac{1}{t^2} \left(\frac{a}{2t^{a-1}} - \frac{|x|^2}{\theta} \right) \quad \text{y} \quad g''_x(t) = \frac{1}{t^3} \left(-\frac{a(a+1)}{2t^{a-1}} + \frac{2|x|^2}{\theta} \right), \quad t > 0.$$

Ya que $a > 1$ se sigue que g_x presenta un máximo absoluto en $t_0 > 0$, tal que $2x^2 t_0^{a-1} = a\theta$. Luego,

$$g_x(t) \leq g_x(t_0) = -\frac{1}{2t_0^a} + \frac{x^2}{\theta t_0} = cx^{2+\frac{2}{a-1}},$$

para $c = 2^{\frac{1}{a-1}} (a-1)(a\theta)^{-\frac{a}{a-1}} > 0$.

Hemos establecido así que la función $F_a(x, t)$ está acotada en $[-R, R] \times (0, \infty)$, para cualquier $R > 0$. Además, de nuevo por ser $a > 1$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0^+} F_a(x, t) = 0$, uniformemente en $|x| \leq R$, con $R > 0$. Se deduce entonces, atendiendo a (3.9), que la serie que define a u converge absoluta y uniformemente en $|x| \leq R$ y $t > 0$, y que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$, uniformemente en $|x| \leq R$. Por tanto, $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Por otro lado,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi^{(n+1)}(t)| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2t^a}}}{\theta t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^n = F_a(x, t) \left(\left(\frac{x}{\theta t}\right)^2 + \frac{1}{\theta t} \right) =: G_a(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Y, al igual que antes, se tiene que para todo $R > 0$, G_a está uniformemente acotada en $[-R, R] \times (0, \infty)$. Por tanto, podemos derivar la serie que define a u término a término y, de la misma forma que en el Ejemplo 3.6 se concluye que u es una función no nula que satisface la ecuación del calor.

De (3.9) se sigue que $|u(x, t)| \leq F_a(x, t) \leq e^{c|x|^{2+\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, siendo $\alpha = 2(a-1)^{-1}$. La arbitrariedad de $a > 1$ permite concluir que para cualquier $\alpha > 0$, podemos encontrar una función u solución de la ecuación del calor con la condición $u(x, 0) = 0$, continua hasta la frontera, tal que

$$|u(x, t)| \leq C e^{c|x|^{2+\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

y que es no nula. Es por ello que decimos que, bajo las condiciones dadas, la estimación (3.8) es óptima para garantizar la unicidad de la solución.

³ Ver [7, (3.29b), p. 73] y [13, Theorem 11.1, p. 46]

3.2.2. La ecuación de Laplace. El problema de Dirichlet en el semiplano

Analizamos en esta sección otra de las ecuaciones en derivadas parciales clásicas, la *ecuación de Laplace*. Específicamente, dada cierta función f queremos encontrar una función $u(x, y)$ de clase C^2 en el semiplano superior $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, verificando la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (3.10)$$

y tal que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Al operador Δ se le denomina *Laplaciano* y a las soluciones de la ecuación (3.10) *funciones armónicas*. Esta ecuación de Laplace también puede verse como un problema de difusión del calor: dada una placa bidimensional, representada por el semiplano superior, la difusión del calor viene dada por la ecuación bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad t > 0,$$

donde $u(x, y, t)$ representa la temperatura en el punto (x, y) y en el instante t . Cuando el sistema se encuentra en equilibrio (esto es, cuando $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$), se obtiene la ecuación de Laplace. Podemos pensar además que en la frontera (cuando $y = 0$) la temperatura u se mantiene constante con respecto al tiempo, siendo su valor $u(x, 0, t) = f(x)$.

Al igual que hicimos en la sección anterior con la ecuación del calor, vamos a proceder primero formalmente para encontrar una solución a la ecuación (3.10) con la condición $u(x, 0) = f(x)$. Consideramos la transformada de Fourier de la función $u(x, y)$ respecto a la variable x ,

$$\hat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

y usamos la transformación de Fourier para escribir el problema en términos de \hat{u} . Derivando dos veces respecto a y bajo el signo integral y usando la propiedad (2.2) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - 4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, y) = 0,$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden en la variable y , y cuya solución viene dada por:

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{2\pi |\xi| y} + B(\xi) e^{-2\pi |\xi| y}.$$

Ponemos $A(\xi) = 0$ porque buscamos funciones acotadas. Por otro lado, la condición de frontera se transforma en $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$. Y por tanto,

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| y}.$$

Usando el Teorema de inversión 2.10 y (2.1) se sigue que, para cada $y > 0$, $p_y(\xi) = e^{-2\pi |\xi| y}$, $\xi \in \mathbb{R}$, es la transformada de Fourier del núcleo de Poisson P_y definido en (1.4). Luego, hemos llegado a que

$$u(x, y) = (f * P_y)(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,$$

es una solución formal de nuestro problema.

Recogemos ahora condiciones que aseguran que efectivamente es solución al problema de Dirichlet planteado. Su prueba sigue los mismos argumentos que la del Teorema 3.3, teniendo en cuenta, en este caso, que $\{P_y\}_{y>0}$ es una aproximación de la identidad y que P_y y \widehat{P}_y , $y > 0$, son funciones en la clase $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.10. Sean f una función absolutamente integrable, continua y acotada, y

$$u(x, y) = (f * P_y)(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Entonces,

(i) La función $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ es acotada y satisface la ecuación de Laplace.

(ii) $\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Hacemos también en esta ocasión algunas puntualizaciones sobre este teorema.

- Cuando la función f es uniformemente continua entonces, en virtud del Teorema 1.3 (b) la convergencia en (ii) es uniforme, y entonces, si definimos $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, se tiene que u es continua hasta la frontera.
- Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces u se anula en el infinito, esto es, $u(x, y) \rightarrow 0$, cuando $|x| + y \rightarrow \infty$. En efecto, por ser f una función absolutamente integrable se sigue que

$$|(f * P_y)(x)| \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} dt \leq \frac{C}{y}, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0. \quad (3.11)$$

Además, puesto que $|x-t| \sim |x|$, cuando $0 \leq 2t \leq |x|$ y $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ podemos escribir, para cierto $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |(f * P_y)(x)| &\leq C \left(\int_{|t| \leq \frac{|x|}{2}} + \int_{|t| > \frac{|x|}{2}} \right) |f(t)| \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} dt \\ &\leq C \left(\frac{1}{y+|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt + \frac{1}{1+|x|^{1+\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(t) dt \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{y+|x|} + \frac{1}{1+|x|^{1+\varepsilon}} \right), \quad x \in \mathbb{R}, y > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando la estimación (3.11) cuando $|x| \leq y$, y (3.12) cuando $y \leq |x|$ se sigue que $u(x, y) \rightarrow 0$, cuando $|x| + y \rightarrow \infty$.

- Cuando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ podemos asegurar además la convergencia de $u(\cdot, y)$ a f , cuando $y \rightarrow 0^+$, en norma L^2 . La Proposición 2.27 nos dice que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, y) - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi, y) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 |e^{-2\pi y|\xi|} - 1|^2 d\xi,$$

y el resultado se concluye usando el procedimiento visto en la Observación 3.4.

Presentamos también un teorema de unicidad para la solución de la ecuación de Laplace.

Teorema 3.11. *Sea u una función en $C^2(\mathbb{R}_+^2)$, continua en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ tal que satisface la ecuación de Laplace en \mathbb{R}_+^2 y la condición de frontera $u(x, 0) = 0$. Suponemos además que u se anula en el infinito. Entonces, $u = 0$.*

Así, en el caso de que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, se tiene que $u = (f * P_y)(x)$ es la única función armónica tal que $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ya que podemos considerar por separado las partes real e imaginaria de u , sin pérdida de generalidad suponemos que u es real. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $u(x_0, y_0) > 0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 > 0$.

Ya que u se anula en el infinito, existe $R > 0$ de manera que

$$u(x, y) \leq |u(x, y)| \leq \frac{u(x_0, y_0)}{2}, \quad (x, y) \in (\mathbb{R} \times [0, \infty)) \setminus D_R^+,$$

donde $D_R^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R, y \geq 0\}$. Nótese que $(x_0, y_0) \in D_R^+$. Por otro lado, como u es continua y D_R^+ es compacto, existe $(x_1, y_1) \in D_R^+$ donde u alcanza el máximo, pongamos $u(x_1, y_1) = M > 0$. Observamos que y_1 ha de ser positivo, pues $u(x_1, y_1) \geq u(x_0, y_0) > 0 = u(x_1, 0)$.

Es claro que $u(x, y) \leq M$, $(x, y) \in D_R^+$. Si $(x, y) \in (\mathbb{R} \times [0, \infty)) \setminus D_R^+$, entonces, $u(x, y) \leq \frac{u(x_0, y_0)}{2} \leq \frac{M}{2}$. Luego, $u(x, y) \leq M$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$.

La propiedad del valor medio para funciones armónicas (ver Proposición A.3) nos dice que

$$u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) d\theta, \quad 0 < r < y_1.$$

Ya que $u(x_1, y_1) = M$ y $u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) \leq M$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 < r < y_1$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) d\theta = M, \quad 0 < r < y_1,$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) - M) d\theta = 0, \quad 0 < r < y_1.$$

La continuidad de u implica entonces que $u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) = M$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 < r < y_1$. Tomando límite cuando $r \rightarrow y_1$ y, teniendo en cuenta que u también es continua en el eje real, se concluye que $u(x_1, y) = M$, para todo punto en la frontera del disco de centro (x_1, y_1) y radio y_1 , y en particular, $u(x_1, 0) = M$. Esto contradice el hecho de que $u(x_1, 0) = 0$. \square

Señalamos por último que la condición relativa al decaimiento de u en el infinito no se puede eludir. Si consideramos la función $u(x, y) = y$, claramente es una función no nula de clase C^∞ en todo el plano, satisface la ecuación de Laplace y se anula en el eje real.

3.3. Teorema central del límite

Uno de los teoremas más importantes en la teoría de probabilidad es el Teorema central del límite. En esta sección usaremos las propiedades de la transformación de Fourier para dar una prueba de este resultado en el contexto de las variables aleatorias absolutamente continuas. Recordamos primero algunos conceptos básicos.

Una *densidad de probabilidad* en \mathbb{R} es una función f no negativa tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Asociada a una densidad existe una medida de probabilidad que asigna a cada conjunto medible E de \mathbb{R} la probabilidad $P(E) = \int_E f(x) dx$. Por otro lado, una *variable aleatoria* X es una función medible con valores reales definida en un espacio de probabilidad. Se dice absolutamente continua cuando está determinada por una densidad de probabilidad f en el sentido de que, la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo (a, b) viene dada por

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

La *esperanza* y la *varianza* de X se calculan mediante las fórmulas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx,$$

y la denominada *función característica*⁴ de la variable X se define como

$$E(e^{i\xi X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx = \widehat{f}\left(-\frac{\xi}{2\pi}\right).$$

Decimos que dos variables aleatorias X e Y con densidades f y g son *independientes* si

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

El producto $f(x)g(y)$ determina una densidad de probabilidad en \mathbb{R}^2 y permite definir combinaciones de dos variables aleatorias independientes. Así, si X, Y son variables independientes,

$$P(a < X + Y < b) = \iint_{\{(x,y): a < x+y < b\}} f(x)g(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{a-x}^{b-x} g(y) dy dx = \int_a^b (f * g)(t) dt,$$

esto es, la variable aleatoria $X + Y$ tiene como densidad de probabilidad $f * g$. Y esto es lo que necesitamos en la prueba del teorema.

Teorema 3.12 (Teorema central del límite). *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con densidad de probabilidad f . Supongamos que X tiene esperanza μ y varianza σ^2 finitas. Consideramos una muestra de tamaño n de X , es decir, X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con la misma densidad f . Entonces, la variable*

⁴ Para evitar confusión con la función característica χ_A de un conjunto A , que vale 1 en los puntos de A y 0 fuera, los probabilistas llaman a esta última *función indicatriz*.

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

que se obtiene centrando la media muestral $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, se aproxima a una variable normal estándar, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a < Z_n < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Demostración. Ya que podemos sustituir X_k por $\frac{X_k - \mu}{\sigma}$, $k = 1, \dots, n$, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Tenemos entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 1. \quad (3.13)$$

La densidad de $X_1 + \dots + X_n$ es $f_n = f * \dots * f$. Entonces,

$$P(a < Z_n < b) = P(a\sqrt{n} < X_1 + \dots + X_n < b\sqrt{n}) = \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} f_n(x) dx = \sqrt{n} \int_a^b f_n(\sqrt{n}x) dx.$$

Nuestro objetivo es establecer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_a^b f_n(\sqrt{n}x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (3.14)$$

Consideramos una función φ absolutamente integrable. Atendiendo a las Proposiciones 2.3 y 2.5 y a la propiedad de dilatación (Proposición 2.2 (iii)) podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} (f * \dots * f)(\sqrt{n}x) \hat{\varphi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \varphi(\xi) d\xi.$$

Las hipótesis (3.13) sobre f y la propiedad (v) en la Proposición 2.2 conducen a que

- $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$,
- $(\hat{f})'(0) = -2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0$,
- $(\hat{f})''(0) = (-2\pi i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = -4\pi^2$.

Y usando el desarrollo de Taylor

$$\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{2\pi^2 \xi^2}{n} + r(\xi, n),$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} nr(\xi, n) = 0$. Luego, para cada $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = (1^\infty) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right) \right) = \exp\left(-2\pi^2 \xi^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} nr(\xi, n) \right) = e^{-2\pi^2 \xi^2}.$$

Además, puesto que $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left| \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^n \varphi(\xi) \right| \leq |\varphi(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Entonces podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada ([12, Theorem 1.13]) para inferir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2 \xi^2} \varphi(\xi) d\xi.$$

Como vimos en la Sección 2.1, $e^{-2\pi^2 \xi^2} = \hat{h}(\xi)$, donde $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Luego, de nuevo usando la Proposición 2.5, llegamos a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} (f * \dots * f)^{(n)}(\sqrt{n}x) \hat{\varphi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \hat{\varphi}(x) dx.$$

Para establecer (3.14) a partir de este resultado, debemos elegir φ adecuadamente. Si $\hat{\varphi} = \chi_{(a,b)}$ obtendríamos directamente lo que queremos, pero señalamos que esta elección no es correcta pues entonces φ no sería absolutamente integrable. Procedemos entonces con un argumento de aproximación. Sea $\varepsilon > 0$ y consideramos $\hat{\varphi} = b_\varepsilon$ una función “bump”, que valga 1 en (a, b) y con soporte en $(a - \delta, b + \delta)$, siendo $4\delta < \sqrt{2\pi}\varepsilon$. Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) b_\varepsilon(x) dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} b_\varepsilon(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_0. \quad (3.15)$$

Entonces, para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) b_\varepsilon(x) dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} b_\varepsilon(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{a-\delta}^a + \int_b^{b+\delta} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} b_\varepsilon(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos $\hat{\varphi} = a_\varepsilon$, una función “bump” con valor 1 en el intervalo $(a + \delta, b - \delta)$ y soporte en (a, b) , y $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que se verifique (3.15) para a_ε , entonces, si $n \geq n_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) dx &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} f_n(\sqrt{n}x) a_\varepsilon(x) dx \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} a_\varepsilon(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} a_\varepsilon(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^{a+\delta} + \int_{b-\delta}^b \right) a_\varepsilon(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \varepsilon. \end{aligned}$$

Las estimaciones anteriores permiten concluir la demostración del teorema. \square

3.4. La fórmula de sumación de Poisson. El Teorema de Shannon

La definición de la transformación integral de Fourier surgió del interés por obtener una versión continua de las series de Fourier, aplicable a funciones definidas en toda la recta real. Existe una conexión importante entre el análisis de funciones periódicas y el de las funciones definidas sobre \mathbb{R} . Este vínculo se manifiesta en la fórmula de sumación de Poisson a la que dedicamos esta sección.

Para comenzar es necesario introducir lo que se conoce como *periodización* de una función. Sea f una función definida en \mathbb{R} . Podemos construir una función periódica “sumando” el valor en las traslaciones de enteros,

$$\mathbb{F}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k), \quad x \in \mathbb{R},$$

siempre que la serie sea convergente. Aquí se entiende la convergencia en el sentido de las sumas parciales simétricas.

Es claro que F es una función periódica de periodo 1. Y si la función f es de decrecimiento moderado entonces la serie converge absolutamente, y también uniformemente en cualquier compacto de \mathbb{R} , por lo que, en ese caso, \mathbb{F} es una función periódica continua. Observamos asimismo que si f es una función que se anula fuera de un intervalo abierto de longitud 1, entonces \mathbb{F} es simplemente la extensión periódica de f a toda la recta real.

Otra manera de obtener una “versión periódica” de f es considerar la fórmula de inversión de manera discreta, esto es,

$$\bar{F}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

cuando la serie converge. Puesto que cada una de las exponenciales $e^{2\pi i k x}$ es periódica de periodo 1, así también es \bar{F} . Y la serie que define a \bar{F} converge absoluta y uniformemente en todo \mathbb{R} siempre que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$, y en ese caso \bar{F} es una función continua.

La fórmula de sumación de Poisson nos dice que estas dos formas de periodizar una función coinciden, esto es, $\mathbb{F} = \bar{F}$, o en otras palabras, los coeficientes de Fourier de \mathbb{F} vienen dados por los valores de la transformada de Fourier de f en los enteros.

Proposición 3.13 (Fórmula de sumación de Poisson). *Sea f una función continua e integrable. Supongamos que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$ converge uniformemente en el intervalo $[0, 1]$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$ converge absolutamente. Entonces,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

y, en particular, tomando $x = 0$, se obtiene la identidad de Poisson,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k). \tag{3.17}$$

Demostración. De las hipótesis se sigue que \mathbb{F} y \bar{F} son funciones continuas. Además, la convergencia uniforme de la serie que define a \mathbb{F} permite escribir, para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^1 \mathbb{F}(x) e^{-2\pi i m x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i m x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(t) e^{-2\pi i m t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i m t} dt = \hat{f}(m).$$

Luego, los coeficientes de Fourier de \mathbb{F} vienen dados por $\{\hat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, puesto que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$, la serie de Fourier de \mathbb{F} converge uniformemente a \mathbb{F} ([10, Corollary 2.3, Chap.2]), de donde se concluye (3.16). \square

Es claro que las hipótesis de esta proposición se verifican en el caso de que f y $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y, atendiendo a la Proposición 2.22, también las satisfacen las funciones f que admiten una extensión holomorfa en la clase \mathcal{A} (ver Sección 2.4). Queremos apuntar que otra demostración interesante de la fórmula de sumación de Poisson para funciones $f \in \mathcal{A}$ que utiliza la integración compleja puede encontrarse en [11, Theorem 2.4, Chap. 4].

La condición de continuidad para la función f que se pide en el teorema es necesaria para obtener la fórmula de sumación de Poisson. Si consideramos la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, y $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{Z}$, el lado izquierdo en (3.17) es 0, mientras que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2}$. En [1, Theorem 11.24] se establece una variante de la identidad de Poisson que no exige continuidad para f y en el que se incluye la función ϕ . Lo enunciamos a continuación.

Proposición 3.14. *Sea f una función no negativa, integrable, creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0, \infty)$. Entonces,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f(k^+) + f(k^-)}{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k),$$

siendo las series absolutamente convergentes.

En el resto de la sección abordamos algunas aplicaciones de la identidad de Poisson. Una primera utilidad de esta igualdad es el cálculo de la suma de algunas series numéricas. Como ejemplo, consideramos la función $f(x) = \frac{\text{sen}^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 1$, (ver (1.5)). La transformada de Fourier de esta función viene dada por $\hat{f}(\xi) = (1 - |\xi|) \chi_{(-1,1)}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, por lo que, claramente, f y \hat{f} son funciones de decrecimiento moderado. Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La identidad (3.16) conduce entonces a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen}^2(\pi(k+\alpha))}{(k+\alpha)^2} = \pi^2, \text{ esto es, } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi\alpha)}.$$

En particular, si $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, de donde se puede obtener la identidad de Euler $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Se puede usar también (3.17) para dar una demostración de la identidad de Jacobi para la función theta ⁵ definida mediante $\vartheta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 x}$, $x > 0$. Basta tener en cuenta que, para cada $s > 0$, la

⁵ La función theta está íntimamente relacionada con la conocida función zeta de Riemann, una función relevante en la teoría de números, (ver [10, Chap. 8]) y [11, §2, Chap. 6].

transformada de Fourier de $f(x) = \sqrt{s}e^{-\pi s x^2}$ viene dada por $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2/s}$, y aplicar la identidad de Poisson para inferir que

$$\sqrt{s}\vartheta(s) = \vartheta\left(\frac{1}{s}\right), \quad s > 0. \quad (\text{Identidad de Jacobi})$$

Por último, aplicamos la fórmula de sumación de Poisson para analizar la reconstrucción de una función de banda limitada a partir de los valores que toma en los enteros. Se dice que una función es *de banda limitada* cuando su transformada de Fourier se anula fuera de un intervalo. Estas funciones son importantes en teoría de señales porque si $f(t)$ representa a una señal respecto al tiempo, su transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ nos da la información de la misma en término de las frecuencias. Y las frecuencias para una señal se mueven dentro de una banda de valores concreto, marcada por *el ancho de banda*. La fórmula de inversión nos permite recuperar la señal conocidas sus frecuencias; así, para funciones f adecuadas, si el ancho de banda es λ , es decir, \hat{f} tiene su soporte en $(-\lambda, \lambda)$, entonces

$$f(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi.$$

El teorema de Shannon nos dice que bajo ciertas condiciones podemos recuperar totalmente una señal conocidos los valores que toma ésta en determinados puntos.

Teorema 3.15 (Teorema de Shannon). *Sea f una función absolutamente integrable, continua y acotada en \mathbb{R} . Supongamos que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)$ es absolutamente convergente y que el soporte de la transformada de Fourier está contenido en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$, con $0 < \lambda \leq 1/2$. Entonces se verifica la fórmula de muestreo de Shannon*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen}(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Aquí, la serie se define como el límite de las sumas parciales simétricas, y el cociente $\text{sen } z/z$ se entiende igual a 1 cuando $z = 0$.

Demostración. Sea $\mathbb{F} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + k)$ la periodización de \hat{f} . Ya que \hat{f} tiene su soporte en $(-1/2, 1/2)$, \mathbb{F} es la extensión periódica de $(\hat{f})_{|(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + k)$ converge uniformemente en cualquier intervalo acotado. Por otro lado, la fórmula de inversión (Teorema 2.10) y la hipótesis sobre $\sum f(k)$ llevan a que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(-k)| < \infty$. Luego, en virtud de la Proposición 3.13 aplicada a la función \hat{f} se tiene

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k) e^{2\pi i k \xi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i k \xi}, \quad \xi \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

De nuevo, la fórmula de inversión y el hecho de que la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)$ converge absolutamente nos lleva a que

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \xi(t-k)} d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen}(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Uno no puede esperar que la fórmula (3.18) se verifique para una señal que tenga un ancho de banda λ cualquiera. Consideramos de nuevo la función $f(t) = \frac{\text{sen}^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}$, $t \neq 0$, $f(0) = 1$, cuya transformada de Fourier tiene soporte en $[-1, 1]$. Claramente, f se anula para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por lo que no se puede reconstruir f a partir de los valores de f en los enteros.

No obstante, podemos generalizar la fórmula de Shannon para una señal f con un ancho de banda cualquiera, y entonces, la función podrá recuperarse a partir de los valores en otros puntos de muestreo, como se indica a continuación.

Teorema 3.16. *Sea f una función absolutamente integrable, continua y acotada en \mathbb{R} . Supongamos que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)$ es absolutamente convergente y que el soporte de la transformada de Fourier está contenido en el intervalo $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$, con $A > 0$. Entonces,*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{A}\right) \frac{\text{sen}(\pi(A t - k))}{\pi(A t - k)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.15 a la función $g(t) = f\left(\frac{t}{A}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. □

Apuntamos finalmente que la distancia $\frac{1}{A}$ a la que hay que tomar dos muestras consecutivas de f se llama *intervalo de Nyquist* y su inverso es *la razón de Nyquist*.

A

Apéndice

A.1. Funciones bump

Construimos en esta sección, de manera explícita, una función $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en un intervalo $[a, b]$ tal que $0 \leq b \leq 1$, y $b(x) = 1$, $x \in [a + \delta, b - \delta]$, con $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$.

Sean $[a, b]$ un intervalo acotado en \mathbb{R} y $\delta > 0$ tal que $2\delta < b - a$. Lo primero que hacemos es trasladar el problema al intervalo $[-1, 1]$. Para ello consideramos la función $t(x) = \frac{1}{b-a}(2x - a - b)$, $x \in \mathbb{R}$. Denotamos por $t_0 := t(b - \delta) = -t(a + \delta)$. Nótese que la elección de δ conduce a que $0 < t_0 < 1$.

Nuestro objetivo es encontrar una función $a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que, $0 \leq a \leq 1$, $a(t) = 0$, cuando $|t| \geq 1$ y $a(t) = 1$, $|t| \leq t_0$. De esta forma, definiendo $b(x) := a(t(x))$, $x \in \mathbb{R}$, obtenemos la función bump que buscamos y cuyas derivadas vienen dadas por

$$\frac{d^k}{dx^k} b(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^k \frac{d^k}{dx^k} a(t(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

La construcción de la función a se basa en el resultado del siguiente lema.

Lema A.1. La función $\phi(t) = e^{-1/t^2} \chi_{(0, \infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, pertenece a la clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y verifica que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dt^k} \phi(t) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{t}\right)\phi(t), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

donde P_k es un polinomio de grado $3k$.

Demostración. Veamos en primer lugar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un polinomio P_k de grado $3k$ de manera que $\frac{d^k}{dt^k} \phi(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)\phi(t)$, cuando $t \neq 0$. Procedemos por inducción. Ya que $\phi'(t) = \frac{2}{t^3}\phi(t)$, $t \neq 0$, es claro que la propiedad se cumple para $k = 1$. Suponemos que se verifica para $k \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \phi(t) = \frac{d}{dt} \left(P_k\left(\frac{1}{t}\right)\phi(t) \right) = -\frac{1}{t^2} P_k'\left(\frac{1}{t}\right)\phi(t) + P_k\left(\frac{1}{t}\right) \frac{2}{t^3} \phi(t) = P_{k+1}\left(\frac{1}{t}\right)\phi(t), \quad t \neq 0,$$

donde $P_{k+1}(z) := -z^2 P_k'(z) + 2z^3 P_k(z)$, $z \in \mathbb{R}$, es un polinomio de grado $3(k+1)$.

Establecemos ahora, también por inducción, que $\frac{d^k}{dt^k} \phi(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Para ello observamos en primer lugar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} \phi(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n e^{-z^2} = 0, \quad \text{y, por tanto,} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^n} \phi(t) = 0.$$

Se sigue de aquí que ϕ es diferenciable en 0 y

$$\phi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \phi(h) = 0.$$

Suponemos que $\frac{d^k}{dt^k} \phi(0) = 0$ y, entonces se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d^k}{dt^k} \phi(h) - \frac{d^k}{dt^k} \phi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P_k\left(\frac{1}{h}\right) \phi(h) = 0,$$

esto es, $\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \phi(0)$ existe y vale 0. \square

A partir de la función ϕ dada en el Lema A.1, generamos la función ψ mediante

$$\psi(t) = \frac{\phi(1-t)}{\phi(1-t) + \phi(t-t_0)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se observa que el denominador es positivo para todo $t \in \mathbb{R}$, pues $\phi(1-t) + \phi(t-t_0) = 0$ si, y solo si, $t \geq 1$ y $t \leq t_0$, y dado que $t_0 \in (0, 1)$, esto no es posible. Por tanto, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además, como $\phi \geq 0$, es claro que $0 \leq \psi \leq 1$. Se cumple también que $\psi(t) = 0$, $t \geq 1$ y $\psi(t) = 1$, cuando $t \leq t_0$.

La función que buscamos se define entonces en términos de ψ como $\alpha(t) = \psi(|t|)$, $t \in \mathbb{R}$. Se concluye así que $0 \leq \alpha \leq 1$ y que $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Nótese que además, $\alpha(t) = 1$, $|t| \leq t_0$, y $\alpha(t) = 0$, $|t| \geq 1$.

A.2. Transformada de Fourier de la función gaussiana usando integración compleja

Como ilustración del uso de la integración compleja en el cálculo de la transformada de Fourier de una función consideramos el caso de la función gaussiana $h(x) = e^{-\pi x^2}$. Damos así otra prueba de que $\hat{h} = h$.

Ya vimos que $\hat{h}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$. Fijamos ahora $\xi > 0$. Consideramos la función $f(z) = e^{-\pi z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, que es entera y, por tanto, holomorfa en el interior del camino γ_R , el rectángulo de vértices $(R, 0)$, $(R, R + i\xi)$, $(-R, -R + i\xi)$ y $(-R, 0)$, orientado en sentido contrario a las agujas del reloj (Figura A.1).

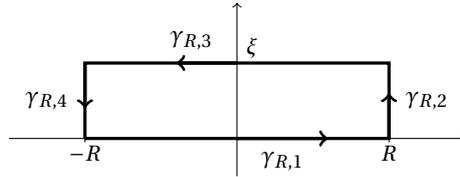


Figura A.1: Camino γ_R

El teorema de Cauchy asegura entonces que

$$\int_{\gamma_R} h(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_{R,j}} e^{-\pi z^2} dz = 0, \quad R > 0,$$

donde $\gamma_{R,j}$, $j = 1, \dots, 4$, son los segmentos correspondientes a los lados del rectángulo. La integral sobre el camino horizontal real $\gamma_{R,1}$ nos da $\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx$, que converge a 1 cuando $R \rightarrow \infty$, mientras que sobre el camino horizontal $\gamma_{R,3}$ nos queda

$$\int_{\gamma_{R,3}} e^{-\pi z^2} dz = - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i\xi x} dx \rightarrow -e^{\pi\xi^2} \hat{h}(\xi), \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

Por otra parte, para los segmentos verticales se tiene que

$$\left| \left(\int_{\gamma_{R,2}} + \int_{\gamma_{R,4}} \right) e^{-\pi z^2} dz \right| = \left| \int_0^\xi \left(e^{-\pi(R+iy)^2} - e^{-\pi(-R+iy)^2} \right) i dy \right| \leq 2e^{-\pi R^2} \int_0^\xi e^{\pi y^2} dy \leq C_\xi e^{-\pi R^2},$$

y, por tanto, las integrales sobre estos caminos convergen a 0 cuando $R \rightarrow \infty$. Se obtiene entonces que

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 1 - e^{\pi\xi^2} \hat{h}(\xi),$$

esto es, $\hat{h}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. En el caso de que $\xi < 0$, se procede análogamente, considerando el rectángulo simétrico en el semiplano inferior.

A.3. Autofunciones para la transformación de Fourier

Como ya se ha comentado, la función gaussiana $h(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, verifica $\widehat{h} = h$. De (2.3), se sigue además que $\widehat{xh} = -i(\xi h)$, y, por tanto, las funciones h y xh son autofunciones para el operador \mathcal{F} (con autovalores 1 y $-i$, respectivamente). El objetivo en esta sección es encontrar un sistema ortonormal y completo, en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, de autofunciones para \mathcal{F} .

Para ello, consideramos la familia de las funciones de Hermite \mathfrak{h}_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que pueden definirse a partir de la función generatriz $G(x, t) = e^{x^2/2} e^{-(x-t)^2}$, $x, t \in \mathbb{R}$, mediante la identidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{h}_k(x) \frac{t^k}{k!} = G(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Esta serie de potencias converge para todo $t \in \mathbb{R}$ (nótese que también para $t \in \mathbb{C}$) y podemos calcular sus coeficientes derivando sucesivamente. Se llega entonces a que, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\mathfrak{h}_k(x) = \frac{\partial^k G}{\partial t^k}(x, 0) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aquí se sigue que $\mathfrak{h}_k(x) = e^{-x^2/2} P_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, donde P_k es un polinomio de grado k . En efecto, $\mathfrak{h}_0(x) = e^{-x^2/2}$ y $\mathfrak{h}_1(x) = 2xe^{-x^2/2}$. Supongamos que es cierto para $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\mathfrak{h}_{k+1}(x) = (-1)^{2k+1} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \mathfrak{h}_k(x) \right) = -e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} P_k(x) \right) = e^{-x^2/2} P_{k+1}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

siendo $P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P'_k(x)$, un polinomio de grado $k+1$. Observamos que, entonces, las funciones de Hermite pertenecen a la clase de Schwartz.

Por otro lado, $\{\mathfrak{h}_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, es una familia de autofunciones para el conocido como operador de Hermite u oscilador armónico $L = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$. De hecho, se verifica

$$L\mathfrak{h}_k = (2k+1)\mathfrak{h}_k. \quad (\text{A.2})$$

Podemos establecer este resultado derivando en (A.1) respecto a x y respecto a t para obtener las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\mathfrak{h}'_k = 2k\mathfrak{h}_{k-1} - x\mathfrak{h}_k, \quad (\text{A.3})$$

y

$$\mathfrak{h}_{k+1} = 2x\mathfrak{h}_k - 2k\mathfrak{h}_{k-1},$$

donde entendemos $\mathfrak{h}_{-1} = 0$. Eliminando \mathfrak{h}_{k-1} en estas ecuaciones se obtiene una nueva fórmula de recurrencia

$$\mathfrak{h}_{k+1} = x\mathfrak{h}_k - \mathfrak{h}'_k. \quad (\text{A.4})$$

Derivando ahora en (A.4) y considerando (A.3) para $k+1$ en lugar de k y de nuevo (A.4) se deduce que $L\mathfrak{h}_k = (2k+1)\mathfrak{h}_k$.

Usando la relación (A.2) se puede ver que $\{\mathfrak{h}_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es una familia ortogonal en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, respecto al producto escalar usual dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Sean $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \neq m$. Teniendo en cuenta (A.2) podemos ver que $\mathfrak{h}_m \mathfrak{h}''_n - \mathfrak{h}_n \mathfrak{h}''_m = 2(m-n)\mathfrak{h}_n \mathfrak{h}_m$. Luego, teniendo en cuenta el comportamiento de \mathfrak{h}_k en el infinito,

$$2(m-n)\langle \mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} [\mathfrak{h}_n(x) \mathfrak{h}'_m(x) - \mathfrak{h}_m(x) \mathfrak{h}'_n(x)] dx = 0.$$

Por otro lado, $\langle \mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_k \rangle = \sqrt{\pi} 2^k k!$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, procediendo por inducción, vemos primero que $\langle \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Suponemos que se cumple para $k \in \mathbb{N}$ y escribimos

$$\langle \mathfrak{h}_{k+1}, \mathfrak{h}_{k+1} \rangle = (-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}_{k+1}(x) e^{x^2/2} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(e^{-x^2}) dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} [\mathfrak{h}_{k+1}(x) e^{x^2/2}] \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}) dx$$

$$= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{h}'_{k+1}(x) + x\mathfrak{h}_{k+1}(x)) e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) dx = 2(k+1) \langle \mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_k \rangle = \sqrt{\pi} 2^{k+1} (k+1)!,$$

lo que establece el resultado. En la penúltima igualdad se ha hecho uso de (A.3) para $k+1$.

Por último, probamos que $\{\mathfrak{h}_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es un sistema completo, en el sentido de que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\langle f, \mathfrak{h}_k \rangle = 0$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces $f = 0$. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ verificando $\langle f, \mathfrak{h}_k \rangle = 0$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De la identidad (A.1) se obtiene entonces que

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) G(x, t) dx = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-(x-t)^2} dx, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

La completitud se sigue del Corolario 2.14.

Definimos ahora la familia de autofunciones para \mathcal{F} que buscábamos. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $h_k(x) = (2^{k-1/2} k!)^{-1/2} \mathfrak{h}_k(\sqrt{2\pi}x)$, $x \in \mathbb{R}$. Es claro, en virtud de las propiedades vistas para \mathfrak{h}_k , que $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es un sistema ortonormal y completo en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Veamos que, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\widehat{h}_k(\xi) = (-i)^k h_k(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Basta ver que se cumple para la función $h_k^*(x) = \mathfrak{h}_k(\sqrt{2\pi}x)$, $x \in \mathbb{R}$. De la identidad (A.1) y aplicando la transformación \mathcal{F} se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{h}_k^*(\xi) \frac{t^k}{k!} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 + 2\sqrt{2\pi}tx - t^2} e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, |t| < \frac{1}{4}. \quad (\text{A.5})$$

Para justificar el intercambio de la serie con la integral hemos tenido en cuenta que $|\widehat{h}_k^*(\xi)| \leq 3 \cdot 2^{2k} k!$, $\xi \in \mathbb{R}$, (ver [8, Lemma 2.4.15]), lo que conduce a que la serie converge uniformemente en \mathbb{R} cuando $4|t| < 1$, pues

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{h}_k^*(\xi) \frac{t^k}{k!} \right| \leq 3 \sum_{k=0}^{\infty} (4|t|)^k < \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}, |t| < \frac{1}{4}.$$

La integral en (A.5) se puede resolver completando cuadrados en el exponente y haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{\pi}x - \sqrt{2}t$ para llegar a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 + 2\sqrt{2\pi}tx - t^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{t^2 - 2\sqrt{2\pi}it\xi} \mathcal{F}\{e^{-x^2}\}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{t^2 - 2\sqrt{2\pi}it\xi - \pi\xi^2}, \quad \xi, t \in \mathbb{R}.$$

Haciendo uso de (A.1) con $x = \sqrt{2\pi}\xi$ y $-it$ en lugar de t obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 + 2\sqrt{2\pi}tx - t^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k h_k^*(\xi) \frac{t^k}{k!}.$$

Comparando los coeficientes de esta serie y la que aparece en la igualdad (A.5) concluimos, como queríamos ver, que $\widehat{h}_k^*(\xi) = (-i)^k h_k^*(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, esto es, h_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es una autofunción para \mathcal{F} , con autovalor $(-i)^k$.

A.4. Teorema de Fubini

En las pruebas de las Proposiciones 2.3 y 2.5 fue necesario hacer un intercambio en el orden de integración para obtener las propiedades correspondientes. Como se comentó, los resultados en estas proposiciones son ciertos cuando las funciones consideradas están en el espacio $L^1(\mathbb{R})$, pues se tiene el Teorema de Fubini para la integral de Lebesgue. Ya que el enfoque en el trabajo es el de la integral de Riemann, queremos en esta sección justificar el Teorema de Fubini utilizado.

Proposición A.2. Sea f una función continua en \mathbb{R}^2 tal que, para ciertas constantes $C, \alpha > 0$,

$$|f(x, y)| \leq \frac{C}{1 + (|x| + |y|)^{2+\alpha}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.6})$$

Entonces, la función F dada por

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

es de decrecimiento moderado en \mathbb{R} , y se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx. \quad (\text{A.7})$$

Demostración. Veamos que $F \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Atendiendo a (A.6) escribimos

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq C \left(\int_{|y| \leq |x|} + \int_{|y| \geq |x|} \right) \frac{dy}{1 + (|x| + |y|)^{2+\alpha}} \leq C \left(\int_{|y| \leq |x|} \frac{dy}{1 + |x|^{2+\alpha}} + \int_{|y| \geq |x|} \frac{dy}{1 + |y|^{2+\alpha}} \right) \\ &\leq C \left(\frac{|x|}{1 + |x|^{2+\alpha}} + \frac{1}{1 + |x|^{1+\alpha}} \right) \leq \frac{C}{1 + |x|^{1+\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Además, se tiene que

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x, y) dy =: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \text{uniformemente en } \mathbb{R}.$$

En efecto, procediendo como antes se sigue que $|F(x) - f_n(x)| \leq \int_{|y| \geq n} |f(x, y)| dy \leq \frac{C}{1 + n^{1+\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}$, de donde se deduce la convergencia uniforme. Por otro lado, observamos que las funciones f_n , $n \in \mathbb{N}$, son continuas ya que f es continua y entonces, uniformemente continua en cualquier rectángulo $[-m, m] \times [-n, n]$. Se tiene entonces que F es límite uniforme de funciones continuas, y, por tanto, continua. Luego se concluye que $F \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Establecemos ahora (A.7). Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(z) dz - \int_{I_n \times I_n} f(z) dz \right| < \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

donde $I_n = [-n, n]$.

Por otro lado, escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \left(\int_{|x| \geq n} \int_{\mathbb{R}} + \int_{I_n} \int_{|y| \geq n} + \int_{I_n} \int_{I_n} \right) f(x, y) dy dx.$$

y observamos, teniendo en cuenta (A.8), que

$$\left| \left(\int_{|x| \geq n} \int_{\mathbb{R}} + \int_{I_n} \int_{|y| \geq n} \right) f(x, y) dy dx \right| \leq C \left(\int_{|x| \geq n} \frac{dx}{1 + |x|^{1+\alpha}} + \int_{|x| \leq n} \frac{dx}{1 + n^{1+\alpha}} \right) \leq \frac{C}{1 + n^\alpha}.$$

Ya que $\int_{I_n \times I_n} f(z) dz = \int_{I_n} \int_{I_n} f(x, y) dy dx$, se sigue que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(z) dz - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx \right| \leq \frac{C}{1 + n^\alpha} + \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

de donde se obtiene (A.7). □

A.5. Propiedad del valor medio

La prueba del Teorema 3.11 recae sobre una propiedad importante para las funciones armónicas, la propiedad del valor medio, que nos dice que, bajo ciertas condiciones, el valor de una función armónica en un punto es igual al valor promedio de la función sobre cualquier circunferencia centrada en ese punto. Concretamos los detalles en este apartado y damos una prueba de la propiedad.

Recordamos que una función $u = u(x, y)$ es *armónica* cuando $\Delta u = 0$, donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Para nuestro objetivo es conveniente expresar el operador Laplaciano Δ en coordenadas polares. En lo que sigue simplificamos la notación y dada una función $f = f(t, s)$ escribimos f_t para referirnos a $\frac{\partial f}{\partial t}$ y f_{ts} para $(f_t)_s$.

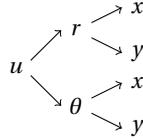
Partimos de la relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las cartesianas (x, y) ,

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x \operatorname{sen} \theta = y \operatorname{cos} \theta,$$

de donde se obtienen, mediante cálculos directos, las siguientes identidades que necesitamos,

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r} = \operatorname{cos} \theta, & r_y &= \frac{y}{r} = \operatorname{sen} \theta, & \theta_x &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r}, & \theta_y &= \frac{x}{r^2} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{r}, \\ r_{xx} &= -(\operatorname{sen} \theta) \theta_x = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r}, & r_{yy} &= (\operatorname{cos} \theta) \theta_y = \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{r}, \\ \theta_{xx} &= \frac{2y}{r^3} r_x = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{r^2}, & \theta_{yy} &= -\frac{2x}{r^3} r_y = -\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Ahora consideramos para u el diagrama de árbol usual para aplicar la regla de la cadena.



Se obtiene $u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$, y derivando de nuevo respecto a x , y aplicando la regla de la cadena a u_r y u_θ llegamos a

$$u_{xx} = (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + u_\theta \theta_{xx} = u_{rr} r_x^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_{\theta\theta} \theta_x^2 + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx}.$$

Cálculos totalmente análogos con y en lugar de x conducen a que $u_{yy} = u_{rr} r_y^2 + 2u_{r\theta} r_y \theta_y + u_{\theta\theta} \theta_y^2 + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}$. Luego,

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr}(r_x^2 + r_y^2) + 2u_{r\theta}(r_x \theta_x + r_y \theta_y) + u_{\theta\theta}(\theta_x^2 + \theta_y^2) + u_r(r_{xx} + r_{yy}) + u_\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}).$$

Sustituyendo en esta expresión las identidades dadas en (A.9), se concluye que $u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$, esto es,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (\text{A.10})$$

Proposición A.3 (Propiedad del valor medio). Sean Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 y u una función de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ con $\Delta u = 0$ en Ω . Supongamos que $(x_0, y_0) \in \Omega$ y que $R > 0$ es el radio de un disco centrado en (x_0, y_0) cuya clausura está contenida en Ω . Entonces,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \operatorname{cos} \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta) d\theta, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (\text{A.11})$$

Demostración. Sea $U(r, \theta) = u(x_0 + r \operatorname{cos} \theta, y_0 + r \operatorname{sen} \theta)$, $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Teniendo en cuenta (A.10), la ecuación $\Delta u = 0$ conduce a

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

Definiendo $F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \theta) d\theta$, $r \in [0, R]$, se sigue que

$$r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(r, \theta) d\theta, \quad r \in [0, R].$$

La integral se anula puesto que $\frac{\partial U}{\partial \theta}(r, \cdot)$ es una función periódica de periodo 2π . Por tanto,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0,$$

y, en consecuencia, $r \frac{\partial F}{\partial r}$ es constante. Ya que para $r = 0$ esta función vale 0, se tiene que $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$. Así, F es constante, y ya que $F(0) = u(x_0, y_0)$, concluimos que $F(r) = u(x_0, y_0)$, para todo $0 \leq r \leq R$, esto es, se verifica (A.11). \square

Bibliografia

- [1] APOSTOL, T.M., *Mathematical Analysis*. 2nd Edition. Addison-Wesley, Reading, 1974.
- [2] BRUNA, J., *Anàlisi Real*. Colecció Materials, V. 26. Departament de Matemàtiques, Servei de Publicacions, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1996.
- [3] DUOANDIKOETXEA, J., *Lecciones sobre series y transformadas de Fourier*. UNAM-Managua, 2003. Disponible en <https://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/analisisdefourier/Duoandikoetxeafourier.pdf>.
- [4] FOLLAND, G.B., *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth Inc., Belmont, 1992.
- [5] FOLLAND, G.B., *Real analysis*. John Wiley, New York, 1984.
- [6] IGARI, S., *Real analysis - with an introduction to wavelet theory*. Amer. Math. Soc., Providence, 1996.
- [7] JOHN, F., *Partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences 1. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [8] PINSKY, M.A., *Introduction to Fourier analysis and wavelets*. Graduate Studies in Mathematics, 102, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.
- [9] RUDIN, W., *Real and complex analysis*. 3rd Edition. McGraw-Hill, Singapoure, 1987.
- [10] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Fourier analysis: an introduction*. Princeton Lectures in Analysis I. Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.
- [11] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis II. Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.
- [12] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Real analysis: measure theory, integration and Hilbert spaces*. Princeton Lectures in Analysis III. Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.
- [13] WIDDER, D.V., *The heat equation*. Academic Press, New York, 1975.

The Fourier integral transform



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Paula Rodríguez Sánchez

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

alu0100963861@ull.edu.es

Abstract

In this work we analyze the main aspects related to the Fourier integral transformation of functions defined on the real line. We show different conditions that give validity to the inversion formula which, amongst other things, allow us to specify the behaviour of the Fourier transform on the Schwartz class. We investigate the relationship between the regularity of a function and the decay of its Fourier transform including in this study the functions which extend holomorphically to a horizontal strip. As applications we consider Heisenberg Uncertainty Principle and the Central Limit Theorem, collect a proof of the Poisson summation formula and apply it to establish the Shannon Theorem for band limited signals. Likewise, we discuss the existence and unicity of solution for the unidimensional heat equation and the Dirichlet problem in the half-plane.

1. Introduction

FOURIER analysis is one of the classic topics in mathematical analysis whose origin dates back to the 18th century with the study of the vibrating string problem. However, the foundation of this area is actually attributed to the research on the heat transfer in solid bodies developed by the French mathematician and physicist Jean-Baptiste Joseph Fourier at the beginning of the 19th century. Its work, collected in the book "Théorie analytique de la Chaleur" published in 1822, is the origin of analytic theories which continue developing at present in different fields of mathematics and physics. Briefly, the theory of Fourier series says that any periodic function can be decomposed as an infinite sum of trigonometric functions. The Fourier integral transformation tries to generalize this concept for functions that are not periodic. This involves moving from the discrete context of the Fourier series to a setting where the frequency spectrum is continuous.

2. Outline of the first chapter

THIS chapter is devoted to introduce the main objects and tools we need in our study. We consider first the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, a class of functions which plays a key role in the extension of the Fourier transform to the L^2 space. We also deal with the convolution operation and the approximations to the identity which we use, mainly, in the study of the inversion formula for the Fourier transform. The central result in this part is the following.

Theorem Let $\{k_\lambda\}_{\lambda>0}$ be an approximation to the identity and f a bounded absolutely integrable function.

- If f is continuous in x , then $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (f * k_\lambda)(x) = f(x)$.
- If f is uniformly continuous in \mathbb{R} , then $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f * k_\lambda = f$, uniformly in \mathbb{R} .

In addition, we take advantage of this theorem and the approximations to the identity via Gauss kernel to give a proof of the Weierstrass approximation theorem which asserts that any continuous function defined in a closed interval can be uniformly approximated by a polynomial.

3. Outline of the second chapter

IN this chapter we develop the principal theoretical aspects of the Fourier integral transformation. Basic algebraic and analytic properties are given, such as its behavior with respect to translation, convolution and differentiation or the Riemann-Lebesgue Lemma, amongst others. Then, we deal with the inverse Fourier transform: we show conditions that assure we can recover the function f from its Fourier transforms \hat{f} . First, we make use of the approximations to the identity to establish an inversion theorem which allows us to prove that the Fourier transform is a bijective mapping on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, and, in addition, to consider convergence in Gaussian, Cesàro and Abel means. On the other hand, we study inversion theorems which involve the Dirichlet kernel. In this setting, our central result is the Dini convergence theorem.

A function f satisfies the *Dini condition* in x_0 when there exist $S \in \mathbb{C}$ and $\delta > 0$:

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S|}{t} dt < \infty.$$

Dini convergence theorem Let f be a function absolutely integrable that satisfies the Dini condition in x_0 , for certain $S \in \mathbb{C}$ and $\delta > 0$. Then

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi = S.$$

Other subject we explain in detail is the relation between the smoothness of a function and the decay at infinity of its Fourier transform. In broad terms, the more regularity for f the greater decay of \hat{f} . We include in this study functions which can be extended holomorphically to a horizontal strip in the plane; in

this case, the width of the band is closely related with the exponential decay of its Fourier transform. We complete this section with the Paley-Wiener theorem which characterizes the functions whose Fourier transform has compact support.

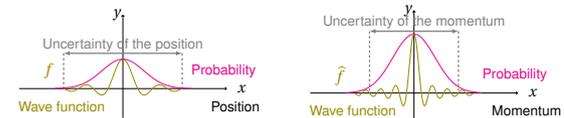
Paley-Wiener theorem Let f be a function of moderate decrease. Then, its Fourier transform has support in $[-M, M]$, for some $M > 0$, if and only if, f admits an extension F holomorphic in \mathbb{C} such that $|F(z)| \leq C e^{2\pi M|z|}$, $z \in \mathbb{C}$.

We finish the chapter with a discussion on the Fourier transform of square integrable functions. The definition is based on two facts: the Schwartz class is a dense subspace of $L^2(\mathbb{R})$ and the Fourier transform is an isometry on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. We establish then the Plancherel theorem.

Plancherel theorem The Fourier transform, defined originally on $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, extends uniquely to a bijective map \mathcal{F}_2 from $L^2(\mathbb{R})$ into itself which satisfies $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}_2(f)\|_2$, $f \in L^2(\mathbb{R})$.

4. Outline of the third chapter

WE collect some applications in this chapter. We start establishing the Heisenberg Uncertainty Principle: each particle has a wave associated with it which imposes restrictions on the ability to determine its position and momentum at the same time.



We also use the Fourier transform and its properties to find solutions to the unidimensional heat equation and to the Dirichlet problem in the half plane for the Laplace equation. Moreover, we show uniqueness theorems for both problems. A proof of the Central Limit Theorem involving Fourier transform is given and we finish the chapter with the Poisson summation formula which provides a connection between Fourier transforms and Fourier series. We verify the usefulness of this formula in the calculus of the sum of some numerical series and in the proof of the Shannon theorem concerning band limited signals.

Shannon theorem Let f a bounded continuous and absolutely integrable function. Assume that $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)$ is absolutely convergent and that $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-A/2, A/2]$, for certain $A > 0$. Then

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{A}\right) \frac{\text{sen}(\pi(At-k))}{\pi(At-k)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Outline of the appendix

WE add some supplementary results to complete some aspects commented in the previous chapters. First we give an explicit construction of the so-called bump functions. These functions are elements in the Schwartz class with the advantage of having compact support, which makes them a very useful tool in many applications. Likewise, we illustrate with an example the utility of the complex integration in the calculus of the Fourier transform of a function and make an spectral analysis of the Fourier transform showing that it has a complete orthonormal system of eigenfunctions, the Hermite functions. Finally, we present proofs for the Fubini theorem and the mean-value Property we used in the proof of some of the results in the work.

References

- [1] BRUNA, J., *Anàlisi Real*. Colecció Materials, V. 26. Departament de Matemàtiques, Servei de Publicacions, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1996.
- [2] DUOANDIKOETXEA, J., *Lecciones sobre series y transformadas de Fourier*. UNAM-Managua, 2003.
- [3] FOLLAND, G.B., *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth Inc., Belmont, 1992.
- [4] PINSKY, M.A., *Introduction to Fourier analysis and wavelets*. Graduate Studies in Mathematics, 102, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.
- [5] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Fourier analysis: an introduction*. Princeton Lectures in Analysis I. Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.
- [6] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis II. Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de junio, 2020