

Marcos Isidro Tejera

*Un estudio de la complejidad
topológica generalizada y dirigida*

A research on generalized and directed topological
complexity

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, junio de 2020

DIRIGIDO POR
José Manuel García Calcines

José Manuel García Calcines

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa*

*Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

Resumen · Abstract

Resumen

Una noción que ha suscitado gran interés dentro de las aplicaciones de la Topología Algebraica es la de complejidad topológica. Se trata de un invariante numérico de homotopía con motivación y aplicación directa en distintos problemas relativos a sistemas mecánicos y Robótica. En esta memoria profundizaremos en el estudio de dos versiones de la misma. Comenzaremos variando la definición original dando lugar a la complejidad topológica generalizada y analizando en qué casos ambas nociones son equivalentes. El segundo objetivo del trabajo se centra en la noción de espacio topológico dirigido. Dicha clase de espacios se concibe como un marco teórico para aquellos procesos físicos y computacionales donde el tiempo no es reversible. Para los mismos establecemos la complejidad topológica dirigida, basándonos en las ideas anteriores y encontrando substanciales conexiones con las versiones clásica y generalizada.

Palabras clave: *Complejidad topológica – Espacios ANR – Espacios de funciones – Espacios dirigidos – Complejidad topológica dirigida.*

Abstract

One notion that has aroused great interest within the applications of Algebraic Topology is that of topological complexity. It is a numerical homotopy invariant with motivation and direct application in different problems related to mechanical systems and Robotics. In this memory we will delve into the study of two versions of it. We will begin by varying from the original definition to the generalized topological complexity, and analysing in which cases both concepts are equivalent. The second objective of the paper lies in the concept of directed topological spaces. These spaces are conceived as a theoretical framework for those physical and computational processes where time is not reversible. For them we establish the directed topological complexity.

Keywords: *Topological complexity – ANR spaces – Function spaces – Directed spaces – Directed topological complexity.*

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Espacios ANR	1
1.1. Espacios ANR. Primeras propiedades	1
1.2. Espacios ANR y de funciones	9
2. Complejidad Topológica Generalizada	15
2.1. Complejidad topológica clásica	15
2.2. Complejidad topológica generalizada	26
3. Complejidad topológica dirigida	33
3.1. Espacios topológicos dirigidos	33
3.2. Complejidad topológica dirigida	35
3.3. Homotopía dirigida	43
3.4. Esferas dirigidas	48
Bibliografía	51
Poster	53

Introducción

A lo largo de las últimas décadas, las fronteras de la investigación en el campo de la Topología Algebraica han evolucionado desde cuestiones fundamentalmente teóricas hasta áreas de las ciencias aplicadas con las que no encontraríamos relación aparente. Entre estas líneas de investigación, una de las más llamativas es el conocido *problema del planificador de movimientos*, enmarcado en la teoría de los sistemas mecánicos, y más precisamente, dentro del campo de la Robótica. Para hacernos una breve idea de lo que se trata, consiste en encontrar un algoritmo que, dado un sistema mecánico robotizado, permita conectar dos posibles posiciones cualesquiera del sistema de manera eficiente a través de un movimiento continuo. Dicho algoritmo se conoce como planificador de movimientos. Una manera de plantear esta cuestión es interpretar matemáticamente el conjunto de todas las posibles posiciones del sistema, pudiendo establecer sobre el mismo una estructura de variedad diferenciable, o más generalmente, de espacio topológico, al cual se le conoce como *espacio de configuraciones*. A partir de determinar este contexto teórico, podemos emplear métodos de la Topología Algebraica con el fin de estudiar el problema del planificador de movimientos.

Dentro de estas herramientas se encuentra el objeto de referencia de este trabajo: la *complejidad topológica* del espacio de configuraciones. Este invariante homotópico fue concebido por el matemático ruso M. Farber en su artículo de 2003 [4] con la intención de medir la discontinuidad de un posible planificador de movimientos sobre el espacio de configuraciones asociado a un sistema mecánico. La complejidad topológica ha recibido interés desde el aspecto puramente matemático, convirtiéndose en uno de los temas candentes de estudio actual dentro de la investigación en Topología, estudiándose sus propiedades más relevantes y relacionándola con otros invariantes más antiguos.

En esta memoria tenemos un objetivo doble con respecto a este objeto. La primera de nuestras metas consiste en dar una versión más general de la complejidad topológica: para un espacio topológico X , su complejidad se define para ciertos recubrimientos abiertos del espacio producto $X \times X$. Nosotros pretendemos generalizar dichos recubrimientos para subconjuntos cualesquiera de $X \times X$, no necesariamente abiertos. Para exponer el segundo objetivo, debemos tratar una nueva motivación práctica. En ciertos campos de las ciencias computacionales y físicas priman los fenómenos en los que el tiempo no es reversible. Una formalización teórica rigurosa de esta idea es la noción de *espacio topológico dirigido*. A raíz de esta nueva construcción, los matemáticos E. Goubault, M. Farber y A. Sagnier se plantean cómo establecer para estos espacios una variante de la complejidad topológica. Este proyecto se lleva a cabo finalmente en el artículo [6], en el que se establece la complejidad topológica dirigida y sus propiedades principales.

Para el desarrollo de estos dos objetivos hemos estructurado la memoria en tres capítulos bien diferenciados:

- 1) Comenzamos tratando un tipo particular de espacios denominados *ANR*. Este concepto propio de la Teoría de Homotopía engloba una gran cantidad de espacios de renombre, entre ellos las variedades topológicas. Analizar sus propiedades más destacadas nos será de gran ayuda para establecer relaciones entre las versiones clásica y generalizada de la complejidad topológica, particularmente su interacción con los espacios de funciones.
- 2) El segundo capítulo empieza estableciendo la complejidad topológica, previamente a un breve análisis del problema del planificador de movimientos. Damos sus características más importantes, estableciendo puentes con otros invariantes homotópicos no tan recientes. A continuación construimos la citada generalización, y a través de los resultados trabajados en el primer capítulo comprobamos que para espacios *ANR* ambas definiciones son equivalentes, incluso encontrando una nueva reformulación de las mismas.
- 3) Finalizamos la memoria introduciendo los espacios y la complejidad topológica dirigidos. Veremos qué relación guarda con la versión original, además de sus características principales y algunos cálculos de espacios sencillos. Introduciremos también una versión dirigida de la homotopía clásica, que como veremos, es bastante más restrictiva. En último lugar dotamos a la n -esfera S^n de una estructura de espacio dirigido y calculamos su complejidad topológica dirigida.

Espacios ANR

En este primer capítulo debemos establecer unos preliminares teóricos para, sin olvidarnos de los objetivos de la memoria, dar un marco adecuado a los futuros conceptos y resultados que estudiaremos. Trataremos un tipo de espacios denominados *ANR* (del inglés Absolute Neighborhood Retract), los cuales, como se puede deducir, hacen uso del concepto de retracto visto en el Grado de Matemáticas, y que jugarán un papel muy importante en nuestro posterior estudio de la complejidad topológica y sus variantes.

Empezaremos dando las pertinentes definiciones básicas de estos objetos, destacando en esta parte el papel de los espacios métricos (o metrizable). Recordemos que el hecho de que un espacio sea metrizable no es una propiedad demasiado exigente, siendo los espacios no metrizable bastante patológicos y generalmente empleados para la búsqueda de contraejemplos. Seguidamente indagamos brevemente en los espacios de funciones. Estableceremos los casos conocidos para los cuales un espacio de funciones es un *ANR*, forzando ciertas restricciones sobre los espacios dominio y codominio. Es importante tener en cuenta que se supone en el lector unos mínimos conocimientos en Topología General y Teoría de Homotopía, como en el resto de la memoria. Sin embargo, si existiese la necesidad de revisar alguno de los conceptos dados por entendidos, pueden consultarse en nuestra referencia [10].

1.1. Espacios ANR. Primeras propiedades

Comenzamos la sección con un breve recordatorio antes de entrar en materia. Dados un espacio topológico X y un subespacio $A \subseteq X$, diremos que A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ de manera que $r \circ inc_A = 1_A$, donde $inc_A : A \rightarrow X$ es la inclusión de A . La meta de esta sección es introducir una clase de espacios topológicos, que aunque a primera vista podría parecer demasiado abstracta, contiene un gran número de ejemplos, incluyendo las variedades topológicas. Daremos sus características fundamentales y focalizaremos gran parte de nuestro interés en los espacios métricos y metrizable.

Observación 1.1. Tanto para este capítulo como para los que siguen, supondremos que el lector tiene conocimiento del *Lema de continuidad*, impartido en el Grado en Matemáticas: Sea un espacio topológico X con un recubrimiento finito de cerrados $\{C_i\}_{i=1}^n$. Dada una colección de aplicaciones continuas

$\{f_i : C_i \rightarrow Y\}_{i=1}^n$ tales que $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$, para todo $i \neq j$, la aplicación $f : X \rightarrow Y$ es continua, definida como $f(x) := f_i(x)$, si $x \in C_i$.

Notemos que el resultado es igualmente válido tomando un recubrimiento abierto (no necesariamente finito) del espacio topológico.

Definición 1.2. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es un retracto por entornos de X si existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de A en X de forma que A es un retracto de U .

Inmediatamente obtenemos que si A es un retracto de X , es también retracto por entornos. No obstante, podemos encontrar un contraejemplo para el recíproco considerando la $(n+1)$ -bola cerrada centrada en el origen D^{n+1} y su frontera la n -esfera S^n . Empleando técnicas de homología simplicial vistas en el Grado en Matemáticas se comprueba de manera sencilla que S^n no es un retracto de D^{n+1} . Sin embargo, tomando el abierto $U = D^{n+1} \setminus \{0\}$ de D^{n+1} , podremos construir la retracción $r : U \rightarrow S^n$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

El objeto protagonista de esta sección, los espacios ANR, hacen uso de forma notable de este concepto. Para introducirlos, aún nos hace falta un ingrediente más: los *embebimientos topológicos*. Un embebimiento topológico no es más que una aplicación continua entre espacios $f : X \rightarrow Y$ de manera que f es un homeomorfismo sobre su imagen $f(X)$. Ahora estamos en condiciones de darlos a conocer.

Definición 1.3. Sea Y un espacio métrico. Diremos que Y es un retracto absoluto, denotado por $Y \in AR$, si dados cualesquiera X espacio métrico y $f : Y \rightarrow X$ embebimiento cerrado, $f(Y)$ es un retracto de X .

Más generalmente, diremos que Y es un retracto absoluto por entornos, que denotamos por $Y \in ANR$, si para cualesquiera X espacio métrico y $f : Y \rightarrow X$ embebimiento cerrado, $f(Y)$ es un retracto por entornos de X .

Observación 1.4. Claramente si $Y \in AR$ se tendrá que $Y \in ANR$.

Un concepto estrechamente relacionado con los retractsos absolutos es el de extensor absoluto, que como veremos, es una formulación distinta de la misma idea. Nos serviremos de esta analogía para concluir algunos resultados enfocándolos con una definición u otra, teniendo dos puntos de vista distintos.

Definición 1.5. Un espacio topológico Y es un extensor absoluto si para todo espacio métrico X y toda aplicación continua $f : A \rightarrow Y$, donde $A \subseteq X$ es un cerrado, existe $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ una extensión continua de f , esto es $\tilde{f}|_A = f$. Emplearemos la notación $Y \in AE$.

Similarmente, Y es un extensor absoluto por entornos si para todo espacio métrico X y toda aplicación continua $\tilde{f} : A \rightarrow Y$, existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de A y una extensión continua $\tilde{f} : U \rightarrow Y$ de \tilde{f} .

De manera natural podemos comprobar una relación bastante intuitiva entre retractsos y extensores absolutos, sin forzar más condiciones.

Proposición 1.6. Sea Y un espacio métrico. Si $Y \in AE$, entonces $Y \in AR$. Del mismo modo, si $Y \in ANE$, entonces $Y \in ANR$.

Demostración. Vemos el caso para ANR, dado que el otro se prueba análogamente. Sea $f : Y \rightarrow X$ un embebimiento cerrado sobre un espacio métrico X . Si $Y_0 := f(Y)$, tendremos entonces que $f : Y \rightarrow Y_0$ es un homeomorfismo, así que sea $f^{-1} : Y_0 \rightarrow Y$ su inversa. Además Y_0 es un cerrado en X claramente. Dado que $Y \in AE$, tendremos entonces que existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de Y_0 y una extensión $\varphi : U \rightarrow Y$ de f^{-1} ($\varphi \circ \text{inc}_{Y_0} = f^{-1}$). Esto nos permite definir la retracción $r := f \circ \varphi : U \rightarrow Y_0$. Concluimos así que Y_0 es un retracto de U . Por arbitrariedad, $Y \in ANR$. \square

Si pretendemos conseguir la equivalencia en el resultado anterior, debemos trabajar con ciertos resultados sobre espacios normados. Comenzamos tratando un teorema que nos permitirá entender todo espacio métrico como un cerrado de un subconjunto en un espacio de Banach.

Teorema 1.7. (Kuratowski - Wojdyslawski) *Sea X un espacio métrico. Entonces existe un espacio de Banach real L y un embebimiento $h : X \rightarrow L$ tal que $h(X)$ es un cerrado de su envolvente convexa K .*

Demostración. Podemos asegurar sin perder generalidad que la distancia d sobre X está acotada por una constante $C > 0$, dado que no ser así, la distancia d' sobre X dada por $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ induce la misma topología que d y además está acotada por $C = 1$. Por otro lado, dada una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la norma de f como $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. De esta manera podemos considerar el conjunto

$$L := L^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua y } \|f\| < \infty\}$$

Es conocido que $(L, \|\cdot\|)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial normado, y que en efecto es de Banach. Para construir el embebimiento, dado $x \in X$, definimos $f_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_x(y) := d(x, y)$$

Ahora bien, si consideramos las inecuaciones siguientes heredadas de la desigualdad triangular:

$$d(x, y) - d(x, y') \leq d(y, y') \quad (1), \quad d(x, y') - d(x, y) \leq d(y, y') \quad (2)$$

que implican que $|f_x(y) - f_x(y')| = |d(x, y) - d(x, y')| \leq d(y, y')$ (3).

De esta última se puede deducir de forma inmediata la continuidad de f_x . Añadiendo que, como d es acotada, $\|f\| < \infty$, obtenemos que $f_x \in L$, para todo $x \in X$. Podemos construir así

$$h : X \rightarrow L, \quad h(x) := f_x$$

Veamos que efectivamente h es un embebimiento. Si tomamos supremos en (3) y aplicamos la desigualdad (2) tendremos que

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| = \sup_{x \in X} |f_{x_1}(x) - f_{x_2}(x)| = \sup_{x \in X} |d(x, x_1) - d(x, x_2)| \leq d(x_1, x_2)$$

Por otro lado, si $x = x_2$, entonces

$$d(x_1, x_2) = |d(x_1, x_2) - d(x_2, x_2)| \leq \sup_{x \in X} |d(x, x_1) - d(x, x_2)| = \|h(x_1) - h(x_2)\|$$

De esta manera concluimos la igualdad $d(x_1, x_2) = \|h(x_1) - h(x_2)\|$, o lo que es lo mismo, h es una isometría. Este hecho nos permite concluir de forma sencilla la continuidad de h y que además es inyectiva. Claramente será sobreyectiva sobre $h(X)$ y considerando su inversa $h^{-1} : h(X) \rightarrow X$, usando que h es una isometría es sencillo comprobar la continuidad de esta última. Luego h es embebimiento. Veamos ahora que $h(X)$ es un cerrado en su envolvente convexa K . Sea $f \in K$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}}$ tales que $f_{x_n} = h(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, o lo que es lo mismo, $f \in \overline{h(X)}$. Ahora bien, se tiene que como $f \in K$, es una combinación lineal convexa $f = \sum_{j=0}^k \lambda_j h(a_j)$ donde $\{\lambda_j\}_{j=0}^k \subseteq [0, \infty)$ y $\sum_{j=0}^k \lambda_j = 1$. Claramente se puede suponer sin perder generalidad que $a_i \neq a_j$ cuando $i \neq j$. Notemos además que existe $0 \leq i_0 \leq k$ de manera que $\lambda_{i_0} \geq \frac{1}{k+1}$ (de suponer lo contrario, es inmediato que la suma de los coeficientes es menor que 1). Se tendrá entonces:

$$\begin{aligned} \|f - f_{x_n}\| &= \sup_{x \in X} |f(x) - f_{x_n}(x)| \geq |f(x_{i_0}) - f_{x_n}(x_{i_0})| = |f(x_{i_0})| \geq \lambda_{i_0} f_{a_{i_0}}(x_{i_0}) \geq \\ &\geq \frac{f_{a_{i_0}}(x_{i_0})}{k+1} = \frac{d(a_{i_0}, x_{i_0})}{k+1} \end{aligned}$$

Tendremos, por lo tanto, que $d(a_{i_0}, x_n) \leq (k+1) \|f - f_{x_n}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, lo que implica que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_{i_0}$. Al ser h continua tendremos que $h(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(a_{i_0})$, y la unicidad del límite en espacios de Hausdorff implica que $f = h(a_{i_0}) \in h(X)$. Concluimos que $h(X) = \overline{h(X)}$, y en consecuencia, $h(X)$ es un cerrado en K . \square

Para continuar trabajando con espacios normados, precisamos introducir una serie de nociones técnicas de Topología Conjuntista, para las cuales fijamos un espacio topológico X .

En primer lugar, dado un recubrimiento \mathcal{U} de X , un refinamiento \mathcal{V} de \mathcal{U} es un recubrimiento de X que cumple que cada uno de sus elementos está contenido en otro elemento de \mathcal{U} .

Diremos que una familia de subconjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ de X es *localmente finita* si para todo punto de X posee un entorno que interseca un número finito de elementos de dicha colección. Recordamos ahora que dada una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, el *soporte* de f , que denotamos por $\text{sop}(f)$, es la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. A partir de estos dos objetos, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X podemos definir una *partición de la unidad subordinada a \mathcal{U}* . Se trata de una familia de aplicaciones continuas $\{f_i : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ verificando las siguientes propiedades:

- i) $0 \leq f_i(x) \leq 1$, para cualesquiera $x \in X$, $i \in I$.
- ii) $\text{sop}(f_i) \subseteq U_i$, para todo $i \in I$.
- iii) $\{\text{sop}(f_i)\}_{i \in I}$ es localmente finita.
- iv) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$, para todo $x \in X$.

Es conocido, como podemos encontrar en [10], que para los espacios *paracompactos* (aquellos espacios de Hausdorff para los que todo recubrimiento

abierto admite un refinamiento abierto localmente finito) se cumple que dado un recubrimiento abierto podremos encontrar siempre una partición de la unidad subordinada. Un caso particular de este tipo de espacios son los espacios métricos (véase [14]), de manera que podremos tener la citada propiedad en cuenta.

Lema 1.8. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$ un cerrado no vacío. Entonces existe un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ localmente finito de $X \setminus A$ tal que para todo $a \in A$ y todo entorno abierto $V \subseteq X$ de A , existe $W \subseteq X$ otro entorno abierto de A verificando la siguiente propiedad: si existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $U_\lambda \cap W \neq \emptyset$, entonces $U_\lambda \subseteq V$.

Demostración. Dado $x \in X \setminus A$, si definimos $d(x, A) := \inf\{d(x, y), y \in A\}$, notemos que de suponer que $d(x, A) = 0$, tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, existirá $a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Tendremos así una sucesión en A que converge a x , y como A es cerrado, obtenemos un absurdo $x \in \bar{A} = A$. Luego $d(x, A) > 0$. Así, si tomamos $\varepsilon_x = \frac{d(x, A)}{2} > 0$, sea $V_x := B(x, \varepsilon_x) \subseteq X \setminus A$, siendo este último contenido fácil de demostrar. Se obtiene así un recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in X \setminus A}$ de $X \setminus A$. Pero como $X \setminus A$ es un espacio métrico, existe un refinamiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de \mathcal{V} localmente finito. Veamos que \mathcal{U} es el refinamiento buscado:

Sean $a \in A$ y $V \subseteq X$ entorno abierto de a . Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ de modo que $B(a, \varepsilon) \subseteq V$. Consideramos entonces $W := B(a, \frac{\varepsilon}{3})$, y fijamos $\lambda \in \Lambda$ tal que $U_\lambda \cap W \neq \emptyset$. Sea entonces $z \in U_\lambda \cap W$. Dado que \mathcal{U} refina a \mathcal{V} , existe $x \in X \setminus A$ tal que $U_\lambda \subseteq V_x = B(x, \varepsilon_x)$. Veamos por último que $U_\lambda \subseteq B(a, \varepsilon)$ y habremos acabado.

En efecto, si $y \in U_\lambda$, tendremos las consideraciones:

- Si $z \in W \cap U_\lambda$, entonces $d(a, z) < \frac{\varepsilon}{3}$ y $d(z, x) < \varepsilon_x$
- Si $y \in U_\lambda$, entonces $d(x, y) < \varepsilon_x$
- $2\varepsilon_x = d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) \leq \varepsilon_x + \frac{\varepsilon}{3}$, y por tanto $\varepsilon_x \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Se sigue entonces que $d(y, a) \leq d(a, z) + d(z, x) + d(x, y) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\varepsilon_x < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Por arbitrariedad, $U_\lambda \subseteq V$. \square

Teorema 1.9. (Extensión de Dugundji) Todo subconjunto convexo K de un espacio vectorial normado L es un extensor absoluto.

Demostración. Tenemos que ver que $K \in AE$. Sean entonces X un espacio métrico, $A \subseteq X$ un cerrado no vacío y $f : A \rightarrow K$ continua. Dado que estamos en las hipótesis del Lema 1.8, sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ el recubrimiento localmente finito de $X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es espacio métrico, podemos encontrar una partición de la unidad $\{\phi_\lambda : X \setminus A \rightarrow \mathbb{R}\}_{\lambda \in \Lambda}$ subordinada a \mathcal{U} .

Fijamos ahora, para cada $\lambda \in \Lambda$, $x_\lambda \in U_\lambda \subseteq X \setminus A$, y recordemos que como A es cerrado, $l := d(x_\lambda, A) > 0$. Dado que si $a \in A$, $d(x_\lambda, a) \geq l$, tendremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $d(x_\lambda, a_\varepsilon) - l < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = l$, podemos encontrar $a_l := a_\lambda$ cumpliendo que $d(x_\lambda, a_\lambda) < 2d(x_\lambda, A)$, cuando $\lambda \in \Lambda$.

Definimos de este modo $\tilde{f} : X \rightarrow K$ como sigue:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(x) f(a_\lambda), & x \in X \setminus A \end{cases}$$

Puesto que $X \setminus A$ es un abierto, por definición de \tilde{f} es clara su continuidad en $X \setminus A$, y es evidente que $\tilde{f}|_A = f$. Solo nos falta ver que \tilde{f} es continua en A , y lo vemos punto a punto:

Dado $a_0 \in A$, sea U un entorno abierto de $\tilde{f}(a_0) = f(a_0)$, y suponemos sin perder generalidad que es convexo (en caso contrario, tomamos una bola, que es un abierto básico). Por la continuidad de f , existe $\varepsilon > 0$ de manera que

$$f(B(a_0, 3\varepsilon) \cap A) \subseteq U \quad (1.1)$$

Sea $V = B(a_0, \varepsilon) \subseteq X$ un entorno abierto de a_0 en X . De nuevo, sea W el entorno abierto en X de V según el Lema 1.8. Veamos que $f(W \setminus A) \subseteq U$:

En efecto, partiendo de $x \in f(W \setminus A)$, si tomamos un $\lambda \in \Lambda$ tal que $\phi_\lambda(x) \neq 0$ (que siempre existe), se sigue que $x \in \text{sop}(\phi_\lambda) \subseteq U_\lambda$, y en consecuencia $U_\lambda \cap W \neq \emptyset$. Se tendrá por lema anterior que $U_\lambda \subseteq V$, lo que permite concluir que $x \in B(a_0, \varepsilon)$. Así,

$$d(a_0, a_\lambda) \leq d(a_0, x_\lambda) + d(x_\lambda, a_\lambda) < d(a_0, x_\lambda) + 2d(x_\lambda, A) \leq d(a_0, x_\lambda) + 2d(a_0, x_\lambda) < 3\varepsilon$$

Esto implica que $a_\lambda \in B(a_0, 3\varepsilon) \cap A$. Por (1.1), $f(a_\lambda) \in U$, siempre que $\phi_\lambda(x) \neq 0$. La convexidad de U supone que $\tilde{f}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(x) f(a_\lambda) \in U$, y por arbitrariedad, $f(W \setminus A) \subseteq U$.

Finalmente, sea el entorno abierto $\Omega := W \cap B(a_0, 3\varepsilon)$ de a_0 en X , que por (1.1) y el contenido anterior, se da que $\tilde{f}(\Omega) \subseteq U$. Como $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \cap A)$, concluimos:

$$\tilde{f}(\Omega) = \tilde{f}(\Omega \setminus A) \cup \tilde{f}(\Omega \cap A) = f(\Omega \setminus A) \cup \tilde{f}(\Omega \cap A) \subseteq (B(a_0, \varepsilon) \cap A) \cup \tilde{f}(\Omega \cap A) \subseteq U$$

Se obtiene así la continuidad de \tilde{f} en A . \square

A partir de la Extensión de Dugundji nos es indiferente hablar de espacios AE o de espacios AR , y respectivamente con espacios ANE y ANR . Resumimos esta idea en los dos siguientes resultados. A partir de sus pruebas, emplearemos una u otra definición según nos convenga en cada caso.

Teorema 1.10. *Todo AR es un AE , y de igual manera, todo ANR es un ANE .*

Demostración. De nuevo, solo vemos el caso para ANR . Sean $Y \in ANR$, X un espacio métrico, $A \subseteq X$ un cerrado no vacío y una aplicación continua $f : A \rightarrow Y$. Por ser Y espacio métrico, aplicando el Teorema 1.7, existe un espacio de Banach L y un embebimiento $h : Y \rightarrow L$ de forma que $h(Y)$ es un cerrado en su envolvente convexa K . Ahora bien, K es un espacio métrico y $h : Y \rightarrow K$ es un embebimiento cerrado. Añadiendo que $Y \in ANR$, tendremos que existe un entorno abierto $h(Y) \subseteq V$ en K y una retracción $r : V \rightarrow h(Y)$. Por el Teorema 1.9, existe una extensión $\phi : X \rightarrow K$ de la composición

$inc_{h(Y)} \circ h \circ f : A \longrightarrow K$, siendo $inc_{h(Y)}$ la inclusión de $h(Y)$ en K . De esta manera, si definimos $U := \phi^{-1}(V)$, claramente abierto en X , tendremos además que para todo $a \in A$:

$$\phi(a) = inc_{h(Y)}(h(f(a))) = h(f(a)) \in h(Y) \subseteq V$$

Se concluye que $a \in \phi^{-1}(V) = U$, por lo que U es un entorno abierto de A en X . Si además tomamos la composición $\tilde{f} := h^{-1} \circ r \circ \phi|_U : U \longrightarrow Y$ se obtiene de manera sencilla que es una extensión de f . \square

Corolario 1.11. *Sea Y un espacio métrico. Entonces $Y \in AR$ si y sólo si $Y \in AE$. Análogamente, $Y \in ANR$ si y sólo si $Y \in ANE$.*

A través de esta caracterización para espacios métricos, se pueden concluir interesantes propiedades acerca de los espacios ANR . Una de las que nos valdremos en el siguiente capítulo es la de que el producto finito de espacios ANR es de nuevo un ANR .

Proposición 1.12. *Sean X_1 e X_2 dos espacios ANR . Entonces $X_1 \times X_2$ es un ANR .*

Demostración. Sabemos que podemos dotar de una distancia al producto finito de espacios métricos. Dado que $X_1, X_2 \in ANR$, son espacios ANE . Fijemos un espacio métrico Z , un cerrado $A \subseteq Z$ y una aplicación continua $f : A \longrightarrow X_1 \times X_2$. Es claro que podemos escribir $f = (f_1, f_2)$, donde $f_j : A \longrightarrow X_j$ es una aplicación continua, con $j \in \{1, 2\}$ (tomando las proyecciones canónicas). Por lo tanto, existirán dos extensiones $f_j : U_j \longrightarrow X_j$, $j \in \{1, 2\}$, donde $A \subseteq U_j \subseteq Z$ es un abierto. Definimos el abierto $A \subseteq U := U_1 \cap U_2 \subseteq Z$ y la extensión continua de f

$$\tilde{f} : U \longrightarrow X \times Y, u \mapsto (\tilde{f}_1(u), \tilde{f}_2(u)) \quad \square$$

Otros resultados que nos serán de gran ayuda para trabajar en la siguiente sección son el hecho de que la propiedad de ser un espacio ANR es topológica y hereditaria para retracts. Ambas demostraciones son muy similares, así que nos centraremos en la primera.

Lema 1.13. *Todo retracto de un ANR es un ANR .*

Demostración. Partimos de X un espacio ANR y un retracto $Y \subseteq X$ a través de la retracción $r : X \longrightarrow Y$. Obviamente, Y es un espacio métrico con la distancia inducida por X . Consideramos ahora otro espacio métrico Z , un cerrado $A \subseteq Z$ y una aplicación continua $f : A \longrightarrow Y$. Tomando la composición $i \circ f : A \longrightarrow X$, donde i es la inclusión de Y en X , por ser X un ANR , encontraremos un abierto $A \subseteq U \subseteq Z$ y una extensión $F : U \longrightarrow X$ de $i \circ f$. Obtenemos así $\tilde{f} = r \circ F : U \longrightarrow Y$ una extensión de f en Y . \square

Lema 1.14. *Dados dos espacios homeomorfos X e Y , con X un ANR , entonces Y es un ANR .*

Demostración. Similar al resultado anterior, componiendo en cada caso con un homeomorfismo en lugar de una retracción. \square

Observación 1.15. De lo visto hasta ahora se deduce inmediatamente que \mathbb{R}^n y $[0, 1]^n$ son espacios ANR. Por la propia definición también es sencillo comprobar que todo abierto en un ANR es también un ANR. Por otro lado, O. Hanner prueba en [7] que si un espacio metrizable es unión de abiertos que son espacios ANR, entonces dicho espacio también es un ANR. En otras palabras, ser un ANR es una propiedad local entre los espacios metrizables. Se sigue que toda variedad topológica es un ANR.

Finalizamos esta sección estableciendo rigurosamente la noción de *proximidad* entre aplicaciones continuas a través de un recubrimiento del codominio, necesarias para trabajar con los espacios de funciones en la sección posterior. Recordemos que la notación clásica para el intervalo unidad cerrado $[0, 1]$ con la topología inducida por la usual de \mathbb{R} es $I = [0, 1]$.

Definición 1.16. Sean Y un espacio topológico y un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

- Diremos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son \mathcal{U} -próximas si para todo $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $f(x), g(x) \in U_\lambda$.
- Una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ es una \mathcal{U} -homotopía si para todo $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $H(\{x\} \times I) \subseteq U_\lambda$.

Teorema 1.17. Sean Y un ANR y un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Entonces existe otro recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in M}$ de Y tal que para todo par de aplicaciones \mathcal{V} -próximas $f, g : X \rightarrow Y$, se tiene que f y g son \mathcal{U} -homótopas.

Demostración. El Teorema 1.7 nos permite suponer que Y es un cerrado de un conjunto convexo K en un espacio de Banach L . Por ser Y un ANR, tenemos un entorno abierto $Y \subseteq N \subseteq K$ y una retracción $r : N \rightarrow Y$. Establecemos el recubrimiento abierto de N , $r^{-1}(\mathcal{U}) = \{r^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Notemos que si $x \in N$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in r^{-1}(U_\lambda)$, siendo este entorno un abierto en N , que a su vez es abierto en K . Así, encontraremos $\varepsilon(x) > 0$ tal que $B(x, \varepsilon(x)) \subseteq r^{-1}(U_\lambda)$. Este hecho supone que podemos encontrar un refinamiento $\mathcal{W} = \{W_\mu\}_{\mu \in M}$ de $r^{-1}(\mathcal{U})$ consistente en dichas bolas abiertas. Obtenemos así el recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in M}$ de Y dado por:

$$V_\mu = W_\mu \cap Y \quad (\mu \in M)$$

Ahora bien, dadas $f, g : X \rightarrow Y$ \mathcal{V} -próximas, establecemos la homotopía $G : X \times I \rightarrow K$ dada por $G(x, t) := (1 - t)f(x) + tg(x)$. G está bien definida por la convexidad de K . Ahora bien, si $x \in X$, por ser f y g \mathcal{V} -próximas existe $\mu \in M$ de manera que $f(x), g(x) \in V_\mu \subseteq W_\mu$, que es convexo. Luego para todo $t \in I$, $(1 - t)f(x) + tg(x) \in W_\mu \subseteq N$. Se concluye entonces que $G(X \times I) \subseteq N$, y que de hecho, G es una \mathcal{W} -homotopía. Definimos $H : X \times I \rightarrow Y$ como la composición:

$$X \times I \xrightarrow{G} N \xrightarrow{r} Y$$

Basta emplear que \mathcal{W} refina a $r^{-1}(\mathcal{U})$ y usando la definición de H , es sencillo probar que H es una \mathcal{U} -homotopía entre f y g . \square

Considerando la técnica empleada en este resultado obtenemos el siguiente corolario, con el que damos por finalizada la sección. Los detalles de su prueba están implícitos en la demostración anterior.

Corolario 1.18. *Sea Y un ANR. Entonces existe una función (no necesariamente continua) $\varepsilon : Y \rightarrow (0, +\infty)$ de modo que el recubrimiento de Y $\mathcal{V} = \{B(y, \varepsilon(y))\}_{y \in Y}$ verifica que cualquier par de aplicaciones \mathcal{V} -próximas son homótopas.*

1.2. Espacios ANR y de funciones

En esta segunda y última sección del capítulo se presentan los espacios de funciones, dotados inicialmente de una topología concreta, denominada compacto-abierta. Esta parte la describiremos de una forma muy escueta, obviando una serie de resultados de Topología General, cuyas demostraciones no son complicadas. Una vez fijadas estas ideas, se establecen resultados sobre espacios de funciones cuando los espacios que involucran son ANR, empleando las propiedades que hemos estudiado hasta este momento.

Partiendo de dos espacios topológicos X e Y , consideremos el conjunto de aplicaciones $Y^X = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}$. Nos interesa definir una topología adecuada para Y^X . Para ello, dados K un subespacio compacto de X y U un subespacio abierto de Y , y consideramos el siguiente subconjunto de Y^X

$$(K, U) = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq U\}$$

Definimos así la *topología compacto-abierta* sobre Y^X como aquella que tiene como subbase a los pares (K, U) , con K y U con las restricciones anteriores. Esto significa que todo abierto de esta topología es unión arbitraria de intersecciones finitas de dichos pares. Denominaremos a estas parejas *abiertos subbásicos*, y establecemos el *espacio de funciones* de X en Y como el conjunto Y^X junto con la topología compacto-abierta.

Observación 1.19. Dados X, Y, Z espacios topológicos y $f : Z \rightarrow Y^X$ una aplicación, es inmediato probar que f es continua en Z si y sólo si la antiimagen de cualquier abierto subbásico en Y^X es abierto en Z .

Una vez definido el espacio de funciones, obtenemos de manera natural la *aplicación evaluación*, dada por

$$ev : Y^X \times X \rightarrow Y, \quad ev(f, x) = f(x)$$

Obsérvese que, en general, la aplicación evaluación no tiene por qué ser continua. Sin embargo, la continuidad puede obtenerse exigiendo que el espacio X sea de Hausdorff y además *localmente compacto*. Esto último significa que cada punto de X posee una base de entornos compactos. Un ejemplo sencillo es el de \mathbb{R}^n con la topología usual, tomando en cada punto las bolas cerradas que lo contienen.

La prueba detallada de que estas dos condiciones nos aseguran la continuidad de la evaluación puede encontrarse en la referencia [10]. Una consecuencia

de ello es, empleando adecuadamente la continuidad de cierta aplicación evaluación, la existencia de una correspondencia biyectiva entre distintos espacios de funciones, que nos será de utilidad en un gran número de ocasiones, y cuya demostración también puede verse en [10].

Teorema 1.20. (*Ley Exponencial*) Sean X, Y y Z espacios topológicos, donde X es de Hausdorff y localmente compacto. Entonces, existe una biyección

$$Y^{Z \times X} \longrightarrow (Y^X)^Z, \quad f \mapsto \hat{f}$$

definida por $\hat{f}(z)(x) := f(z, x)$.

Recordamos que en esta sección pretendemos encontrar restricciones suficientes para que un espacio de funciones sea un ANR, para lo cual debemos establecer una distancia sobre Y^X compatible con la topología compacto-abierta.

Comenzamos partiendo de dos espacios topológicos X e Y . Diremos que una topología sobre el conjunto Y^X es *admisibile* si hace a $ev : Y^X \times X \longrightarrow Y$ continua. Un ejemplo claro de topología admisible es la compacto-abierta. Si Y es un espacio métrico con una distancia d , tenemos la aplicación

$$d^*(f, g) := \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}$$

Es sencillo comprobar que d^* es una métrica sobre Y^X , luego tiene sentido hablar de la topología que induce, la cual denominaremos d^* -topología, denotada por T_{d^*} . Una particularidad que agradecemos es que T_{d^*} siempre es admisible, lo que seguidamente demostramos.

Lema 1.21. La d^* -topología es admisible, para cualquier métrica acotada d en Y .

Demostración. Veremos la continuidad punto a punto, partiendo de un $(f_0, x_0) \in Y^X \times X$. Tomando $\varepsilon > 0$, la continuidad de f_0 en x_0 nos asegura que existe un entorno V de x_0 abierto en X de manera que $f_0(V) \subseteq B(f_0(x_0), \frac{\varepsilon}{2})$. Por otro lado, podemos considerar en (Y^X, T_{d^*}) el entorno abierto de f_0

$$U = B_*(f_0, \frac{\varepsilon}{2}) = \{f \in Y^X : d^*(f, f_0) < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

siendo entonces $U \times V$ un entorno abierto de (f_0, x_0) en $Y^X \times X$. Veamos ahora que $ev(U \times V) \subseteq B(f_0(x_0), \varepsilon)$ y habremos acabado. Tomamos $(f, x) \in U \times V$, de manera que su evaluación $f(x)$ verifica

$$d(f(x), f_0(x_0)) \leq d(f(x), f_0(x)) + d(f_0(x), f_0(x_0)) \leq d^*(f, f_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Requerimos en este momento un breve inciso para introducir los espacios topológicos normales. Diremos que un espacio X es *normal* si para cualquier par de cerrados $E, F \subseteq X$ disjuntos, existen dos entornos abiertos disjuntos A y B de E y F respectivamente. Probamos un lema sobre espacios normales.

Lema 1.22. Sea X un espacio normal y dos subespacios $K \subseteq U$ cerrado y abierto, respectivamente. Entonces existe otro abierto V verificando la cadena de inclusiones $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

Demostración. Tomando el cerrado $C = X \setminus U$ es claro que $K \cap C = \emptyset$, luego existen dos abiertos disjuntos V y W que contienen a K y a C respectivamente. Además, si consideramos el cerrado $X \setminus W$, es inmediato que $V \subseteq X \setminus W \subseteq U$, y por tanto $\overline{V} \subseteq \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subseteq U$. \square

Una propiedad conocida es que todo espacio de Hausdorff y compacto es normal. Más generalmente, se puede probar que todo espacio de Hausdorff y paracompacto es normal (véase [10]). Nos valdremos de esta propiedad para establecer casos en los que T_{d^*} coincida con la compacto-abierta, permitiéndonos trabajar en los espacios de funciones con una distancia.

Proposición 1.23. *Sean X un espacio compacto y de Hausdorff e Y un espacio metrizable. Entonces la topología compacto-abierta y la d^* -topología en Y^X coinciden, para cualquier distancia d en Y .*

Demostración. Veamos primero que todo abierto de la topología compacto-abierta es abierto en T_{d^*} . Nos referiremos a la topología compacto-abierta como T por simplicidad. Como la d^* -topología es admisible, por la Ley Exponencial $\hat{e}v : (Y^X, T_{d^*}) \rightarrow (Y^X, T)$ es continua, luego dado un abierto $A \in T$, $\hat{e}v^{-1}(A)$ es un abierto de T_{d^*} . Sin embargo, dado $f \in Y^X$, se tiene que para todo $x \in X$

$$(\hat{e}v(f))(x) = ev(f, x) = f(x)$$

Luego $\hat{e}v = 1_{Y^X}$, y por tanto $A = \hat{e}v^{-1}(A)$ es un abierto en T_{d^*} . Para ver la otra inclusión, fijamos un $\varepsilon > 0$ y $f \in (Y^X, T_{d^*})$. Basta encontrar un abierto $V \in T$ verificando que $f \in V \subseteq B_*(f, \varepsilon)$, dado que para cualquier abierto $U \in T_{d^*}$, siempre hay un $\delta > 0$ tal que $B_*(f, \delta) \subseteq U$ cuando $f \in U$.

Definimos así $W_x := B(f(x), \frac{\varepsilon}{3})$ para cada $x \in X$. Observemos que al ser X compacto y de Hausdorff es normal. Aplicando el Lema 1.22 y usando la continuidad de f , existe un entorno abierto $G_x \subseteq X$ de x cumpliendo que $f(\overline{G_x}) \subseteq W_x$. Si consideramos la igualdad $X = \bigcup_{x \in X} G_x$, por la compacidad de X , tendremos que existe un número finito de elementos de X de manera que $X = \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}$. Notemos que $K_x = \overline{G_x}$ es un cerrado en el compacto en X , para todo $x \in X$, luego es compacto. Obtenemos así el abierto en la topología compacto-abierta

$$V = \bigcap_{i=1}^n (K_{x_i}, W_{x_i})$$

Es inmediato que $f \in V$; veamos además que $V \subseteq B_*(f, \varepsilon)$. En efecto, sea $g \in V$. Si fijamos $x \in X$, por la igualdad obtenida anteriormente existirá un $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ de manera que $x \in K_{x_{i_0}}$. Se sigue entonces que $g \in (K_{x_{i_0}}, W_{x_{i_0}})$, y por tanto $g(x) \in W_{x_{i_0}}$. Por definición de este abierto, $d(g(x), f(x_{i_0})) < \frac{\varepsilon}{3}$, y usando que $f \in V$, se concluye análogamente que $d(f(x), f(x_{i_0})) < \frac{\varepsilon}{3}$ también. Así

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_{i_0})) + d(f(x_{i_0}), g(x)) < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon, \quad x \in X$$

Por definición de d^* , $g \in B_*(f, \varepsilon)$, para toda $g \in V$. \square

Una vez llegados a este punto, hemos logrado establecer todos los pasos indispensables para verificar los casos en que un espacio de funciones es un *ANR*, obteniendo de hecho algo más fuerte: una caracterización.

Teorema 1.24. *Sean X e Y dos espacio métricos, siendo además X compacto. Entonces Y^X es un *ANR* si y sólo si Y es un *ANR*.*

Demostración. Denotaremos por d_Y la distancia en Y y análogamente para X . Comenzamos suponiendo que Y^X es un *ANR*, y consideramos la aplicación

$$j : Y \longrightarrow Y^X, \quad j(y)(x) = y$$

Primero observamos que j es una isometría, puesto que conserva las distancias:

$$d_Y^*(j(y), j(y')) = \sup_{x \in X} \{d_Y(j(y)(x), j(y')(x))\} = \sup_{x \in X} \{d_Y(y, y')\} = d_Y(y, y')$$

Considerar este hecho y proceder como en el Teorema 1.7 nos lleva a que j es un embebimiento. Ahora bien, si fijamos $a \in X$ y consideramos la aplicación continua

$$p_a : Y^X \longrightarrow X, \quad p_a(f) := f(a)$$

se cumple que $p_a \circ j = 1_Y$, lo que implica que $j(Y)$ es un retracto de Y^X . Por el Lema 1.13, $j(Y)$ es un *ANR*, y como $Y \cong j(Y)$, Y es un *ANR* aplicando el Lema 1.14.

Recíprocamente, supongamos que Y es un *ANR* y sean Z un espacio métrico, $A \subseteq Z$ un cerrado y una aplicación continua $f : A \longrightarrow Y^X$. Consideramos la aplicación $g = f^b : X \times A \longrightarrow Y$, donde $g(x, a) = f(x)(a)$, que por la Ley Exponencial es continua. Como Y es un *ANR* y $X \times A$ es un cerrado en $X \times Z$, existe un abierto $X \times A \subseteq U \subseteq X \times Z$ y una extensión $G : U \longrightarrow Y$ de g . Notemos que al ser U un abierto en $X \times Z$ se tiene que es una unión de abiertos de la forma $X \times V = \bigcup_{i \in I} (W_i \times V_i)$. Tomando $(x, a) \in X \times A$, existe un $i \in I$ de manera que $(x, a) \in W_i \times V_i$. De aquí obtenemos que $X = \bigcup_{i \in I} W_i$, y por ser compacto, existen ciertos $\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^n W_{x_j}$. Establecemos $V := \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$ abierto en Z . Es inmediato probar que $X \times V \subseteq U$ y es claro que $A \subseteq V$. Obtenemos así una extensión de f desde V , continua por ser restricción de una aplicación continua y la Ley Exponencial, dada por

$$\tilde{f} : V \longrightarrow Y^X, \quad \tilde{f}(v)(x) := G(x, v) \quad \square$$

Finalizamos el capítulo construyendo los espacios de funciones relativos a cerrados, esto es, dados dos espacios topológicos X e Y y dos cerrados $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, se define el espacio topológico

$$(Y, B)^{(X, A)} := \{f : X \longrightarrow Y \text{ continua} : f(A) \subseteq B\} \subseteq Y^X$$

con la topología inducida por T_{d^*} . Veamos para estos objetos particulares una caracterización acerca de ser un *ANR*.

Teorema 1.25. *Sean X un espacio compacto y metrizable e Y un *ANR*. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ son dos cerrados, entonces $(Y, B)^{(X, A)}$ es un *ANR* si y sólo si B es un *ANR*.*

Demostración. Si $(Y, B)^{(X, A)}$ es un ANR, podemos definir $j : B \rightarrow (Y, B)^{(X, A)}$, donde $j(b)(x) := b$, para cada $x \in X$ y $b \in B$, que del mismo modo que en el Teorema 1.24, es un embebimiento. Fijado $a \in A$, tendremos también la aplicación continua $p_a : (Y, B)^{(X, A)} \rightarrow B$, siendo $p_a(f) := f(a)$, para cualquier función continua f . De nuevo se satisface que $p_a \circ j = 1_B$. Así, como B es homeomorfo a $j(B)$, que es un retracto de $(Y, B)^{(X, A)}$, si aplicamos de nuevo los Lemas 1.13 y 1.14 se concluye que B es un ANR.

Supongamos ahora que B es un ANR, y tomemos un espacio métrico Z , $F \subseteq Z$ cerrado y $f : F \rightarrow (Y, B)^{(X, A)}$ continua. De manera análoga al teorema anterior, podemos definir la aplicación continua

$$g : A \times F \rightarrow B, \quad g(a, s) := f(s)(a)$$

Por ser B un ANR y $A \times F$ cerrado en $A \times Z$, encontramos un abierto $A \times F \subseteq W \subseteq A \times Z$ y $\tilde{g} : W \rightarrow B$ una extensión de g . Es sencillo probar, como se hizo en el resultado anterior, que por la compacidad de A y la normalidad de Z existe un entorno N cerrado de F en Z tal que $A \times N \subseteq W$. Si consideramos el cerrado $H := (X \times F) \cup (A \times N)$ en $X \times Z$, sea $L : H \rightarrow Y$ definida por

$$L(x, z) := \begin{cases} f(z)(x), & (x, z) \in X \times F \\ \tilde{g}(x, z), & (x, z) \in A \times N \end{cases}$$

que es continua por la Ley Exponencial y el Lema de Continuidad. Ahora, por ser Y un ANR, existe un entorno abierto $U \subseteq X \times Z$ de H y una extensión $\tilde{L} : U \rightarrow Y$ continua de L . Razonando como en el resultado anterior, usando la compacidad de X existe un abierto $V \subseteq U$ con $X \times V \subseteq U$. Definimos similarmente a dicho apartado la extensión continua de f

$$\tilde{f} : V \rightarrow (Y, B)^{(X, A)}, \quad \tilde{f}(v)(x) := \tilde{L}(x, v) \quad \square$$

Complejidad Topológica Generalizada

En este segundo capítulo abordaremos el primer objetivo de este trabajo, es decir, introducir la complejidad topológica generalizada y ver que para espacios ANR coincide con la complejidad topológica clásica. Comenzamos con una introducción a la noción de complejidad topológica de Farber. Dado que un estudio de la misma en profundidad constituiría una memoria por sí misma, hemos decidido limitarnos a trabajar las definiciones principales que giran entorno a esta materia, así como las propiedades más relevantes, obviando algunas pruebas demasiado extensas que no proceden en nuestro análisis. Emplearemos para ello técnicas de la Teoría de Homotopía y Topología Algebraica, a partir de conceptos impartidos en el Grado en Matemáticas o más avanzados, como bien son las fibraciones o distintos tipos de espacios. Un aspecto interesante de esta breve introducción a la complejidad topológica es la relación que guarda con las categorías seccional y de Lusternik-Schnirelmann, dos invariantes clásicos en Topología Algebraica con las que se pueden establecer numerosos puentes. Citaremos además los cálculos para una serie de espacios topológicos sencillos, cuyas pruebas no aportamos puesto que necesitaría técnicas avanzadas, principalmente el *anillo de cohomología* de un espacio, cuya introducción requeriría una extensión innecesaria en esta memoria. Dichos cálculos nos serán de utilidad en el tercer y último capítulo.

La parte más innovadora del capítulo viene a continuación, en la que damos la versión generalizada de la complejidad topológica, siguiendo la línea de la sección a la hora de estudiar sus propiedades. Para este propósito nos valdremos de todos los resultados obtenidos sobre espacios ANR , incluso teniendo que aportar algunos nuevos sobre esta temática. Cabe destacar que, si bien la versión generalizada de la complejidad topológica fue introducida y estudiada en [5], es este Trabajo de Fin de Grado el único lugar donde se pueden encontrar con detalle todas las demostraciones importantes que han sido obviadas en dicho estudio.

2.1. Complejidad topológica clásica

Una buena forma de introducir el objeto inicial de estudio es hablando del espacio de configuraciones asociado a un sistema mecánico. Entendemos por *sistema mecánico* a un conjunto de dispositivos o elementos sólidos cuyo objetivo primordial es transmitir un determinado movimiento a través de las fuerzas que lo generan. Dichas fuerzas suelen ser generadas por elementos externos, en la

mayoría de casos motores de combustión interna, sistemas eléctricos o electrónicos. Estos sistemas son objeto de estudio primordial de la *mecánica clásica*, con aplicaciones directas en ingeniería, robótica y ramas afines, como veremos a continuación. De esta manera, el *espacio de configuraciones* asociado a un sistema mecánico será el conjunto de todas las posibles posiciones en las que puede variar el sistema, el cual normalmente puede determinarse a través de un número finito de parámetros reales (o complejos), denominados *grados de libertad*. En la mayoría de casos el espacio de configuraciones puede considerarse como una variedad diferenciable, o de forma más general, como un espacio topológico, que es el caso que aquí nos atañe. Ilustramos ahora esta noción de espacio de configuraciones mediante los dos siguientes ejemplos, que aunque pueden parecer muy complejos, veremos que interpretándose adecuadamente se pueden deducir de forma sencilla:

- *Ejemplo 2.1.* Consideramos un brazo robótico formado por n barras $\{B_j\}_{j=1}^n$ de manera que B_k está conectada con B_{k+1} por medio de un codo, pudiendo este último girar sobre sí mismo con un ángulo $\theta_k \in [0, 2\pi)$, esto es, cada una de las barras describe una circunferencia de radio $r_k > 0$, dependiendo este radio de la longitud de B_k . De esta manera, el espacio de configuraciones de cada una de las barras es S^1_k , esto es una circunferencia de radio k , claramente homeomorfa a S^1 . De esta forma, el espacio de configuraciones del brazo total vendrá dado por el producto de n circunferencias $\Gamma = S^1 \times \dots \times S^1$. Del mismo modo, si supusiésemos que en lugar de girar de forma plana, cada barra puede girar en tres dimensiones, bastaría sustituir en el espacio anterior cada circunferencia por la 2-esfera S^2 .

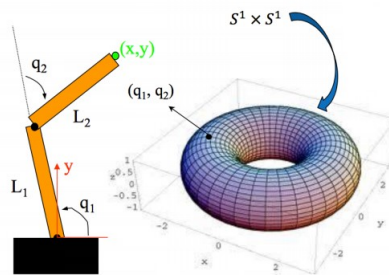
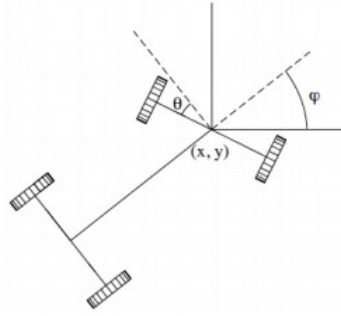


Figura 2.1. El caso para $n = 2$: el toro \mathbb{T}^2 .

- *Ejemplo 2.2.* Siendo ahora nuestro sistema un coche en movimiento, nos fijamos en los ejes delantero y trasero. Es claro que la posición del eje trasero siempre queda determinada por la del delantero, y dado que se desplaza en el plano, para la posición instantánea de los ejes basta considerar un par real (x, y) . Una vez fijado, consideramos:
 - el ángulo φ que mide el giro con respecto al eje OX del eje delantero.
 - el ángulo θ que mide el giro con respecto al eje OY del eje delantero.

De esta manera la posición queda totalmente determinada por la tupla real (x, y, φ, θ) , obteniéndose que $\Gamma = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ es el espacio de configuraciones de un automóvil en movimiento.



Una vez sentadas estas bases, nuestro objetivo consiste en estudiar un concepto fuertemente ligado al campo de la Robótica, lo que se conoce como el *problema del planificador de movimientos*. Fijado un sistema mecánico y siendo conocido su espacio de configuraciones X concebido como espacio topológico, el problema del planificador de movimientos consiste en diseñar un algoritmo que reciba como datos de entrada un par ordenado de posiciones del sistema (X_0, X_1) y devuelva un movimiento continuo, de forma que el estado origen sea X_0 y el estado final X_1 . Traduciendo este proceso al lenguaje del espacio de configuraciones, se trata de encontrar para cualquier par ordenado de puntos $(x, y) \in X \times X$ un camino $\alpha : I \rightarrow X$ cumpliendo que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Notemos que si el espacio X no es conexo por caminos, tendríamos problemas en el caso de que los estados inicial y final no se encuentren en la misma componente conexa por caminos, así que lo supondremos, lo cual no es demasiado restrictivo. Para definir un marco teórico adecuado, debemos considerar algunos formalismos.

Observación 2.3. Dados dos espacios topológicos X e Y y $a \in Y$, denotaremos a lo largo de toda la memoria por $\varepsilon_a : X \rightarrow Y$ a la aplicación constante en a .

Dado X un espacio topológico e $I = [0, 1]$ con la topología usual, definimos:

$$\pi : X^I \rightarrow X \times X, \quad \alpha \mapsto (\alpha(0), \alpha(1))$$

Por ser I de Hausdorff y localmente compacto, empleando adecuadamente ciertas aplicaciones evaluación se prueba la continuidad de π . Una interpretación directa y simple de esta aplicación nos permite afirmar que el problema del planificador de movimientos se puede interpretar como la búsqueda de una *sección* de π , esto es una aplicación $s : X \times X \rightarrow X^I$ tal que $\pi \circ s = 1_{X \times X}$.

Aunque a priori no tenemos la continuidad de esta aplicación, la motivación del problema nos indica que sería lo idóneo: si perturbásemos levemente los estados origen y final tomando un par (Y_0, Y_1) próximo a (X_0, X_1) , lo ideal sería que el movimiento que nos devuelve el algoritmo fuera también próximo del que conecta al par (X_0, X_1) . Esto se consigue exigiendo que s sea continua, es decir, la continuidad da estabilidad al algoritmo. Por desgracia, esto sólo ocurre para un caso bastante peculiar que ahora comprobaremos.

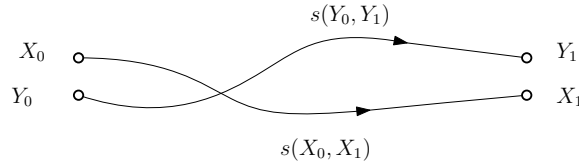


Figura 2.2. Ejemplo de un planificador de movimientos estable.

Proposición 2.4. *Existe una sección continua de π si y sólo si X es contráctil.*

Demostración. Suponemos que tenemos $s : X \times X \rightarrow X$ sección continua de π . Fijando $x_0 \in X$, definimos la aplicación continua $H : X \times I \rightarrow X$ dada por $H(x, t) := s(x, x_0)(t)$. La homotopía H está claramente bien definida y es continua. Asimismo es una sencilla comprobación el hecho de que $H : 1_X \simeq \varepsilon_{x_0}$, por lo que X es contráctil.

Por otra parte, si X es contráctil, existe $x_0 \in X$ y una nulhomotopía $H : 1_X \simeq \varepsilon_{x_0}$. De aquí se sigue que fijado $x \in X$, $H(x, -)$ es un camino en X . Esto nos permite contruir $s : X \times X \rightarrow X^I$ dada, para cada $(x, y) \in X \times X$ por:

$$s(x, y)(t) := \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H(y, 2 - 2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Continuidad y la Ley Exponencial se deduce la continuidad de s . Por propia definición de s obtenemos inmediatamente que es sección de π . □

Dado que la mayoría de espacios de configuraciones asociados a sistemas mecánicos que se tratan no son contráctiles, lo normal es que toda sección global de π sea discontinua. El matemático M. Farber define en su artículo [4] la complejidad topológica como una medida de la discontinuidad de cualquier planificador de movimientos, para un sistema dado. Esto se consigue considerando *secciones continuas locales*, esto es, secciones continuas de π definidas sobre un abierto de $X \times X$, y nos interesará cuál es el menor número de estas secciones locales de manera que se cubra el espacio producto. Establezcamos rigurosamente esta noción.

Definición 2.5. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos. La complejidad topológica de X , denotada por $TC(X)$, es el menor entero no negativo n tal que $X \times X$ puede ser recubierto por $n + 1$ abiertos $\{U_j\}_{j=0}^n$ verificando que para cada uno de ellos existe una sección local continua de π , esto es, para cada $j \in \{0, \dots, n\}$, existe $s_j : U_j \rightarrow X^I$ continua haciendo conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{\text{inc}_j} & X \times X \\ & \searrow s_j & \nearrow \pi \\ & & X^I \end{array}$$

donde inc_j denota la inclusión de U_j en $X \times X$. De no existir ningún n con estas características, definimos $TC(X) = \infty$.

Por la definición dada, no es difícil interpretar que $TC(X)$ será el menor número (menos uno) de partes abiertas en las que hay que dividir a $X \times X$ para establecer secciones continuas en cada trozo, esto es, una forma de ponderar la discontinuidad de un posible planificador de movimientos para el sistema mecánico en cuestión. A partir de aquí, abandonamos el trasfondo práctico y nos centramos en el desarrollo teórico de este (como veremos) invariante homotópico, desde sus propiedades fundamentales a relaciones con otros objetos topológicos.

Observación 2.6. Basta observar la Proposición 2.4 para concluir que un espacio X conexo por caminos es contráctil si y sólo si $TC(X) = 0$.

A partir de este momento, todos los espacios que consideremos en esta sección serán conexos por caminos por las razones ya mencionadas. Probamos ahora la invariancia homotópica de la complejidad topológica.

Teorema 2.7. *La complejidad topológica es un invariante de homotopía.*

Demostración. Sean X e Y dos espacios topológicos del mismo tipo de homotopía, esto es, existen $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ continuas cumpliendo que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Veamos que $TC(Y) \leq TC(X)$ y tendremos la otra desigualdad de forma análoga. Solo veremos el caso no trivial, esto es $TC(X) = n < \infty$. Fijamos de antemano una homotopía $H : f \circ g \simeq 1_Y$. Partimos de un recubrimiento abierto $X \times X = \bigcup_{j=0}^n U_j$, existiendo $n + 1$ secciones locales continuas $s_j : U_j \rightarrow X^I$ de $\pi : X^I \rightarrow X \times X$. Como la aplicación $g \times g : Y \times Y \rightarrow X \times X$ es continua tendremos para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ un abierto $V_j := (g \times g)^{-1}(U_j)$ en $Y \times Y$. Para cada uno de ellos podemos construir $\sigma_j : V_j \rightarrow Y^I$ dada por

$$\sigma_j(y_1, y_2)(t) := \begin{cases} H(y_1, 3t), & t \in [0, 1/3] \\ (f \circ s)(g(y_1), g(y_2))(3t - 1), & t \in [1/3, 2/3] \\ H(y_2, 3 - 3t), & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Cada una de estas aplicaciones es continua por la Ley Exponencial y el Lema de continuidad, y una sencilla comprobación nos indica que σ_j es sección local de $\pi : Y^I \rightarrow Y \times Y$ para $j \in \{0, \dots, n\}$. Como además es claro que la familia $\{V_j\}_{j=0}^n$ recubre a $Y \times Y$, se sigue que $TC(Y) \leq n$. \square

El hecho de que $TC(X)$ sea un invariante homotópico nos induce a pensar, en gran medida por su definición, si guarda relación con algunos de los invariantes clásicos estudiados en la Teoría de Homotopía. El siguiente elemento que presentamos es uno de estos invariantes, la categoría seccional o género de Schwarz de una aplicación continua. Un rápido vistazo a su definición hará que nos resulte bastante familiar.

Definición 2.8. *Sean X e Y espacios topológicos y $f \in Y^X$. Se define la categoría seccional de f , denotada por $\text{secat}(f)$, como el menor entero no negativo n tal que Y admite un recubrimiento por $n + 1$ abiertos $\{U_j\}_{j=0}^n$ verificando que para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ existe una aplicación continua $s_j : U_j \rightarrow Y$ haciendo homotópicamente conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 U_j & \xrightarrow{\text{inc}_j} & Y \\
 \searrow s_j & & \nearrow f \\
 & X &
 \end{array}$$

Esto es, $f \circ s_j \simeq \text{inc}_j$, donde inc_j denota la inclusión de U_j en Y . De no existir ningún n verificando estas condiciones, establecemos $\text{secat}(f) = \infty$.

Se deduce inmediatamente que si $f \simeq g$ son homótopas entonces $\text{secat}(f) = \text{secat}(g)$. Por otro lado, se observa un parentesco claro entre la categoría seccional y la complejidad topológica. Para analizarlo más en profundidad, emplearemos un tipo particular de aplicaciones continuas con buenas propiedades: las fib्रaciones. Diremos que una aplicación continua $p : E \rightarrow B$ es una *fibración* si para todo diagrama conmutativo de aplicaciones continuas de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & E \\
 \delta_0 \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

donde $\delta_0(x) = (x, 0)$, existe una aplicación continua $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ (que denominamos *elevación* del diagrama) verificando que $\tilde{H} \circ \delta_0 = h$ y $p \circ \tilde{H} = H$.

Puede parecer que las fib्रaciones son aplicaciones muy enrevesadas y que se usan en casos muy restringidos, pero podemos encontrar ejemplos de ellas en funciones tan típicas como son las constantes o las proyecciones canónicas. En particular, comprobamos ahora un caso que para nosotros es fundamental.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Entonces la aplicación $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ es una fib्रación.*

Demostración. Consideramos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & X^I \\
 \delta_0 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Y \times I & \xrightarrow{F} & X \times X
 \end{array}$$

con $F = (F_0, F_1)$. Para obtener una elevación del diagrama, construimos primero la aplicación $H : Y \times I \times I \rightarrow X$ definida por

$$H(y, t, s) := \begin{cases} F_0(y, t - 3s), & s \in [0, \frac{t}{3}] \\ f(y)(\frac{3s-t}{3-2t}), & s \in [\frac{t}{3}, 1 - \frac{t}{3}] \\ F_1(y, 3s + t - 3), & s \in [1 - \frac{t}{3}, 1] \end{cases}$$

Aplicando la conmutatividad del diagrama y el Lema de Continuidad se llega a que H está bien definida y es continua. Definimos $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow X^I$ dada por $\tilde{H}(y, t)(s) := H(y, t, s)$. Aplicando la Ley Exponencial a H obtenemos su continuidad. Por construcción se llega inmediatamente a que \tilde{H} es una elevación del diagrama del principio. \square

Si bien hemos dado paso importante para interconectar $TC(X)$ con la categoría seccional, aún debemos conocer algunas propiedades más sobre las fibraciones. Una de las más relevantes es la de que toda función continua puede escribirse como la composición de una equivalencia de homotopía seguida de una fibración. Citamos la misma y esbozamos su prueba.

Proposición 2.10. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces existe un triángulo conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \nearrow p \\ & & P_f \end{array}$$

siendo h una equivalencia de homotopía y p una fibración.

Demostración. Establecemos el espacio $P_f = \{(x, \gamma) \in X \times Y^I : f(x) = \gamma(0)\}$ con la topología inducida por $X \times Y^I$. Definimos $h(x) := (x, \varepsilon_f(x))$ y $p(x, \gamma) := \gamma(1)$. Notemos que la igualdad $f = p \circ h$ se obtiene automáticamente, luego basta probar las condiciones mencionadas sobre h y p .

- Para obtener la continuidad de h basta aplicar la Ley Exponencial a la aplicación $\varepsilon_f : X \rightarrow Y^I$ donde $\varepsilon_f(x) := \varepsilon_f(x)$. Ahora consideramos la proyección $\tilde{h} : P_f \rightarrow X$ sobre la primera componente $\tilde{h}(x, \gamma) = x$. Es inmediato que $\tilde{h} \circ h = 1_X$, luego para ver que son inversas homotópicas la una de la otra nos valemos de la aplicación

$$F : P_f \times I \rightarrow P_f, (x, \gamma, t) \mapsto (x, \gamma_t)$$

siendo $\gamma_t(s) := \gamma(st)$. Obtenemos la continuidad de F a partir de aplicar de nuevo la Ley Exponencial y verla como una adecuada composición de aplicaciones continuas. De nuevo es sencillo concluir que $F : h \circ \tilde{h} \simeq 1_{P_f}$. Esto nos asegura que h es equivalencia de homotopía, siendo \tilde{h} una inversa homotópica.

- Veamos ahora que p es fibración, partiendo del diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & P_f \\ \delta_0 \downarrow & & \downarrow p \\ W \times I & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

siendo $g = (g_1, g_2) \in P_f^W$. Consideramos la candidata a elevación $\tilde{G} : W \times I \rightarrow P_f$ que viene dada por $\tilde{G}(w, t) := (g_1(w), g_3(w, t))$. En particular la aplicación $g_3 : W \times I \rightarrow Y^I$ se define por:

$$g_3(w, t) := \begin{cases} g_2(w)(\frac{2s}{2-t}), & 0 \leq 2s \leq 2-t \leq 2 \\ G(w, 2s+t-2), & 0 \leq 2-t \leq 2s \leq 2 \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Continuidad y la Ley Exponencial, g_3 es continua. La propia definición de \tilde{G} , y particularmente la de g_3 , nos permiten concluir de manera sencilla que \tilde{G} es la elevación que buscábamos. \square

La utilidad de las fibraciones en nuestro contexto queda reflejada en el siguiente lema.

Lema 2.11. *Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración, $s \in E^X$, $u \in B^X$ tales que $p \circ s \simeq u$. Entonces existe $s' : X \rightarrow E$ continua verificando que $s \simeq s'$ y $p \circ s' = u$.*

Demostración. Sea $H : X \times I \rightarrow B$ una homotopía tal que $H : p \circ s \simeq u$. Por ser p una fibración, existe una aplicación continua $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ cumpliendo que $\tilde{H}(x, 0) = s(x)$ y $p(\tilde{H}(x, t)) = H(x, t)$. Tomamos $s' : X \rightarrow E$, donde $s'(x) := \tilde{H}(x, 1)$. Su continuidad es clara por tener la de \tilde{H} , y las dos igualdades anteriores suponen que $\tilde{H} : s \simeq s'$. Evaluando debidamente se concluye que $p \circ s' = u$. \square

Atendiendo a la definición de la categoría seccional, la existencia de este lema nos permite asegurar que para toda fibración $p : E \rightarrow B$, $secat(p)$ coincide con ∞ o el menor entero no negativo n tal que existe un recubrimiento por $n+1$ abiertos de B verificando que cada uno de ellos admite una sección local continua estricta de p .

Como habíamos prometido, el hecho de que para las fibraciones podamos sustituir en la definición de $secat(f)$ diagramas homotópicamente conmutativos por diagramas estrictamente conmutativos supone un primer puente entre complejidad topológica y categoría seccional, que mostramos en forma de corolario. Tengamos en cuenta que la aplicación $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ es fibración.

Corolario 2.12. *Dado X un espacio conexo por caminos, $TC(X) = secat(\pi)$.*

Se puede probar otra interpretación de $TC(X)$ a través de la categoría seccional. En relación a la misma demostramos el siguiente lema.

Lema 2.13. *Sea el cuadrado homotópicamente conmutativo de aplicaciones continuas*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array}$$

- i) Si $\beta = 1_Y$, entonces $secat(f') \leq secat(f)$.
- ii) Si α y β son equivalencias de homotopía, entonces $secat(f') = secat(f)$.

Demostración. Estudiemos ambos apartados:

- i) Suponemos que $secat(f) = n < \infty$ y tomamos el recubrimiento abierto $\{U_j\}_{j=0}^n$ de Y , teniendo para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ una sección homotópica continua $s_j : U_j \rightarrow X$ de f . Basta tomar para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ la sección homotópica continua $s'_j := \alpha \circ s_j : U_j \rightarrow X'$ de f' para llegar a lo que queríamos.
- ii) Comprobaremos primero la igualdad para dos casos particulares:
 - 1) Si $\beta = 1_Y$ ya tenemos que $secat(f') \leq secat(f)$. Si además empleamos el inverso homotópico de α y procedemos de igual manera llegamos del mismo modo a que $secat(f) \leq secat(f')$.

2) Si $\alpha = 1_X$, partamos de que $secat(f') = n < \infty$, teniéndose así un recubrimiento de Y' análogo al del caso i) y secciones homotópicas continuas $s_j : U_j \rightarrow X'$ de f' . Consideramos el recubrimiento de Y dado por los abiertos $V_j = \beta^{-1}(U_j)$, para $j \in \{0, \dots, n\}$. Obtendremos de manera natural las secciones homotópicas continuas de f dada por $s'_j := s_j \circ \beta_j|_{V_j} : V_j \rightarrow X$. De la misma forma que en el caso 1) llegamos a la igualdad mencionada.

Combinando 1) y 2) obtenemos para el caso de equivalencias de homotopía arbitrarias que $secat(f) = secat(\beta \circ f) = secat(f' \circ \alpha) = secat(f')$. \square

Como hemos introducido antes, podemos considerar otro enfoque de $TC(X)$ a través de la categoría seccional. Se recuerda al lector que para un espacio topológico X , su *aplicación diagonal* $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ viene dada por $\Delta_X(x) = (x, x)$, la cual es trivialmente continua, aunque no fibración.

Corolario 2.14. *Dado X un espacio conexo por caminos, $TC(X) = secat(\Delta_X)$.*

Demostración. Partiendo de la aplicación continua $C : X \rightarrow X^I$, $C(x) = \varepsilon_x$ y el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{C} & X^I \\ \Delta_X \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times X & \xrightarrow{1_{X \times X}} & X \times X \end{array}$$

Por el Lema 2.13, basta ver que C es equivalencia de homotopía. Consideramos $ev_0 : X^I \rightarrow X$, donde $ev_0(\gamma) = \gamma(0)$. Es claro que $ev_0 \circ C = 1_X$, y podemos establecer entre $C \circ ev_0$ y 1_{X^I} una homotopía $H : X^I \times I \rightarrow X^I$ definida como $H(\gamma, t)(s) := \gamma(ts)$. \square

Continuando en la línea de relacionar la complejidad topológica con otros objetos propios de la Teoría de Homotopía, damos ahora una definición alternativa de un invariante numérico con el que estará íntimamente relacionado: la *categoría de Lusternik-Schnirelmann*. Aunque normalmente se da una definición para espacios topológicos arbitrarios, en esta memoria nos valdremos de la categoría seccional para dar una versión exclusiva para espacios conexos por caminos, pudiendo probarse que coincide con la definición original. La misma, además de las principales propiedades, como la invariancia homotópica o interesantes cotas, pueden consultarse en la referencia [3].

Dado un espacio conexo por caminos X y punteado en $x_0 \in X$, tomamos la aplicación constante desde el espacio unipuntual $\varepsilon_{x_0} : * \rightarrow X$ y el subespacio de caminos $P(X, x_0) = \{\gamma \in X^I : \gamma(0) = x_0\}$. Recordemos que por continuidad, la Proposición 2.10 nos dice que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\varepsilon_{x_0}} & X \\ & \searrow \varepsilon_* & \nearrow p \\ & & P(X, x_0) \end{array}$$

donde $p(\gamma) = \gamma(1)$ es una fibración y ε_* es una equivalencia de homotopía. Aplicando el Lema 2.13 obtenemos que $\text{secat}(\varepsilon_{x_0}) = \text{secat}(p)$. A través de esta igualdad definimos la *categoría de Lusternik-Schnirelmann* de X como

$$\text{cat}(X) := \text{secat}(p)$$

Nos interesamos ahora en ciertas propiedades de la categoría LS que la relacionan con la categoría seccional, y como cabría esperar, con la complejidad topológica. Algunas de ellas son las siguientes:

Proposición 2.15. *Sea una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, donde Y es conexo por caminos. Entonces $\text{secat}(f) \leq \text{cat}(Y)$. En particular, si X es contráctil, tendremos la igualdad $\text{secat}(f) = \text{cat}(Y)$.*

Demostración. Tomamos $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, y dado que Y es conexo por caminos, podemos tomar $\gamma \in Y^I$, con origen en $f(x_0)$ y final en y_0 . Ahora, si tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\varepsilon_{x_0}} & X \\ & \searrow \varepsilon_{y_0} & \swarrow f \\ & & Y \end{array}$$

y tomamos la homotopía $H : * \times I \rightarrow Y$, con $H(*, t) = \gamma(t)$ obtenemos que $H : f \circ \varepsilon_{x_0} \simeq \varepsilon_{y_0}$. Tendremos entonces por el Lema 2.13 que $\text{secat}(f) \leq \text{secat}(\varepsilon_{y_0}) = \text{cat}(Y)$. Además, si X es contráctil, entonces ε_{x_0} es una equivalencia de homotopía. Usando su inversa homotópica y el citado lema, se obtiene la otra desigualdad. \square

Proposición 2.16. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Entonces*

$$\text{cat}(X) \leq TC(X) \leq \text{cat}(X \times X)$$

Demostración. Aplicando el Corolario 2.12 y la proposición anterior, se tendrá que $TC(X) = \text{secat}(\pi : X^I \rightarrow X \times X) \leq \text{cat}(X \times X)$. Para la otra desigualdad, consideramos el caso no trivial $TC(X) = n < \infty$, teniendo así un recubrimiento abierto $X \times X = \bigcup_{j=0}^n U_j$ y para cada j tenemos una sección homotópica local $s_j : U_j \rightarrow X^I$. Fijamos ahora $x_0 \in X$ y recordamos la fibración $p : P(X, x_0) \rightarrow X$ que evalúa en $t = 1$ los caminos con origen en x_0 . Definimos para cada $j \in \{0, \dots, n\}$:

$$V_j := \{x \in X : (x_0, x) \in U_j\}$$

Cada uno de estos subespacios puede verse como la antiimagen de U_j por la aplicación continua $\varphi_{x_0} : X \rightarrow X \times X$, dada por $\varphi_{x_0}(x) := (x_0, x)$, por lo que constituyen un recubrimiento abierto de X . Para cada uno de ellos podemos construir la aplicación $r_j : V_j \rightarrow P(X)$ definida como $r_j(x) := s_j(x_0, x)$, que además es una sección local continua de p . Tendremos así que $\text{cat}(X) = \text{secat}(p) \leq n$. \square

Una gran cantidad de acotaciones similares a las que hemos mostrado aquí están establecidas para las categorías seccional y de Lusternik-Schnirelmann, y la complejidad topológica. La búsqueda de cotas viene motivada por el hecho de

que no es sencillo calcular explícitamente estos valores para un espacio dado, y es la manera más usual de trabajar en estas temáticas. Una de las más relevantes atañe al producto finito de espacios, cuya prueba se encuentra en la monografía [3]. Lo que uno intuye a priori es que la categoría del producto es igual a la suma de ambas, es algo sensato. No obstante, teniendo X e Y espacios conexos por caminos y metrizable se prueba tan solo la desigualdad $cat(X \times Y) \leq cat(X) + cat(Y)$, pudiendo encontrar contraejemplos donde se da la desigualdad estricta. De la misma manera y haciéndose notar la relación con la complejidad topológica, en las mismas hipótesis se concluye la desigualdad análoga:

$$TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y)$$

cuya demostración se encuentra en [4]. Consecuencia de establecer estas cotas es el siguiente corolario.

Corolario 2.17. *Sea X un espacio conexo por caminos y metrizable. Entonces*

$$cat(X) \leq TC(X) \leq 2 cat(X)$$

Para completar esta breve introducción a la complejidad topológica daremos los cálculos explícitos de algunos ejemplos muy típicos. Hemos decidido obviar sus demostraciones puesto que requieren de técnicas avanzadas propias de la Topología Algebraica (en concreto, la nilpotencia del anillo de cohomología reducida de un espacio), cuya introducción en esta memoria necesitaría la extensión innecesaria de, al menos, un capítulo adicional.

Ejemplo 2.18. Para $n \geq 1$, la complejidad topológica de la n -esfera S^n viene dada por

$$TC(S^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ 2, & n \text{ par} \end{cases}$$

Ejemplo 2.19. El toro n -dimensional $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ verifica

$$TC(\mathbb{T}^n) = n$$

En último lugar trabajaremos los grafos finitos. Entenderemos por un grafo finito G como aquel que tiene un número finito de vértices y aristas, conexo y además como un subespacio de \mathbb{R}^3 con la topología inducida por la usual.

Observación 2.20. Las técnicas de homología simplicial, vistas en la optativa del grado *Topología Algebraica y Aplicaciones*, nos permiten aseverar que cualquier grafo finito con las propiedades mencionadas es triangulable, y por ende podemos considerar su primer número de Betti, que para el caso de los grafos se traduce en su número de agujeros.

Ejemplo 2.21. Sea G un grafo finito y consideremos $b_1(G)$ su 1-número de Betti en homología. Entonces

$$TC(G) = \min\{b_1(G), 2\}$$

2.2. Complejidad topológica generalizada

Después de la presentación y estudio de la complejidad topológica y categorías seccional y de Lusternik-Schnirelmann, nos planteamos relajar estas definiciones sustituyendo los recubrimientos abiertos por recubrimientos formados por subespacios arbitrarios. Podría parecer que el hecho de que los recubrimientos sean o no abiertos conlleva notorias diferencias entre las conclusiones que se obtienen, pero vamos a ver que, valiéndonos de las herramientas trabajadas en el capítulo 1, ambas formulaciones son equivalentes para los espacios ANR , los cuales, como hemos visto en el capítulo anterior, abarcan a una clase muy amplia de espacios, puesto que incluyen a la de las variedades topológicas.

Antes de comenzar a diseñar la manera de generalizar los aspectos ya trabajados, debemos remontarnos al capítulo primero a través de dos resultados acerca de los espacios ANR . Los mismos son una adaptación de dos propiedades menos específicas, originales de nuestras referencias [12] y [13].

Lema 2.22. *Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $\mathcal{V}' = \{V'_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de A por abiertos en A de manera que existe $\delta_i > 0$ tal que $\text{diam}(V'_i) < \delta_i$, para todo $i \in I$. Entonces, existe $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de A por abiertos en X verificando las siguientes propiedades:*

- i) $V_i \cap A = V'_i$, para todo $i \in I$.
- ii) $\text{diam}(V_i) < 2\delta_i$, para todo $i \in I$.
- iii) \mathcal{V}' y \mathcal{V} tienen el mismo nervio: es decir, para cualquier subconjunto finito de índices $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$, se tiene que $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \neq \emptyset$ si y sólo si $V'_{i_1} \cap \dots \cap V'_{i_k} \neq \emptyset$.

Demostración. Tenemos la distancia d en X . Para cada $i \in I$, tomamos el abierto en X

$$V_i = \bigcup_{a \in V'_i} B(a, r_{a,i}), \text{ siendo } r_{a,i} := \frac{1}{2} \min\left\{\frac{\delta_i}{2}, d(a, A \setminus V'_i)\right\}$$

Trivialmente $V'_i \subseteq V_i$, luego es inmediato que $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X . Comprobemos ahora las propiedades que restan.

- i) Claramente $V'_i \subseteq V_i \cap A$. Por otro lado, si $x \in V_i \cap A$, existirá $a \in V'_i$ de manera que $x \in B(a, r_{a,i})$. Por lo tanto $d(x, a) < r_{a,i} \leq d(a, A \setminus V'_i)$. Supongamos entonces que $x \notin V'_i$, esto es, $x \in A \setminus V'_i$. Entonces $d(a, x) \geq d(a, A \setminus V'_i) > d(a, x)$. Este absurdo nos indica que $x \in V'_i$. Por arbitrariedad, $V_i \cap A = V'_i$.
- ii) Sea $i \in I$. Tomando $x_1, x_2 \in V_i$, existen $a_1, a_2 \in V'_i$ verificando que $x_j \in B(a_j, r_{a_j,i})$, $j \in \{1, 2\}$. Esto nos lleva a

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, a_1) + d(a_1, a_2) + d(a_2, x_2) < r_{a_1,i} + d(a_1, a_2) + r_{a_2,i} \leq \\ &\leq \frac{\delta_i}{4} + \frac{\delta_i}{4} + d(a_1, a_2) < \frac{\delta_i}{2} + \delta_i = \frac{3\delta_i}{2} < 2\delta_i \end{aligned}$$

Tomando supremos en esta desigualdad llegamos a que $\text{diam}(V_i) < 2\delta_i$.

iii) Fijamos un conjunto de índices $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$. Como $V'_i \subseteq V_i$, la implicación a la derecha es evidente. Ahora suponemos que $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \neq \emptyset$, de modo que si tomamos $x \in V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k}$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe $a_j \in V'_{i_j}$ tal que $x \in B(a_j, r_{a_j, i_j})$. Se sigue que $x \in \bigcap_{j=1}^k B(a_j, r_{a_j, i_j})$. Por otra parte, podemos suponer que $r_{a_1, i_1} \leq \dots \leq r_{a_k, i_k}$, puesto que en caso contrario, los reordenamos adecuadamente. Si tomamos $s \in \{1, \dots, k\}$, observamos que

$$\begin{aligned} d(a_{i_s}, a_{i_1}) &\leq d(a_{i_s}, x) + d(x, a_{i_1}) < r_{a_{i_s}, i_s} + r_{a_{i_1}, i_1} \leq 2r_{a_{i_1}, i_1} = \\ &= \min\left\{\frac{\delta_{i_s}}{2}, d(a, A \setminus V'_{i_s})\right\} \leq d(a_{i_s}, A \setminus V'_{i_s}) \end{aligned}$$

Haciendo variar $s \in \{1, \dots, k\}$ llegamos a que $a_{i_1} \in V'_{i_s}$, y por tanto $V'_{i_1} \cap \dots \cap V'_{i_k} \neq \emptyset$. \square

El segundo resultado adicional importante sobre espacios *ANR* es el siguiente teorema. Este resultado, presentado sin demostración en [5], resulta ser una mejora crucial del ya analizado por T. Srinivasan en [13]. En esta memoria incluimos con detalle dicha demostración.

Teorema 2.23. (Lema modificado de Walsh) Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, K un *ANR* y una aplicación continua $f : A \rightarrow K$. Entonces, para toda función $\varepsilon : K \rightarrow (0, +\infty)$ (no necesariamente continua), existen un entorno abierto $A \subseteq U \subseteq X$ y una aplicación continua $g : U \rightarrow K$ verificando:

- i) Dado $u \in U$, existe $a_u \in A$ tal que $\min\{d(g(u), f(a_u)), d(u, a_u)\} < \varepsilon(f(a_u))$
- ii) $g|_A \simeq f$.

Demostración. Por el Teorema 1.7, podemos suponer que K es un subespacio cerrado de un convexo T en un espacio de Banach Y , y tomamos la distancia d en K . Como K es un *ANR*, existen un entorno $K \subseteq O \subseteq T$ abierto en T y una retracción $r : O \rightarrow K$. Si $y \in K$, establecemos la notación $B_T(y, \delta) = B_Y(y, \delta) \cap T$, para todo $\delta > 0$.

Al ser O abierto y r continua, dado $y \in K$ existe $\delta_y > 0$ tal que

$$B_T(y, 2\delta_y) \subseteq O \text{ y } r(B_T(y, 2\delta_y)) \subseteq B_K(y, \frac{\varepsilon(y)}{2}) \quad (2.1)$$

De la continuidad de f se sigue que para todo $a \in A$ existe un entorno abierto $a \in U_a \subseteq A$ en A cumpliendo que

$$\text{diam}(U_a) < \frac{\varepsilon(f(a))}{4} \text{ y } f(U_a) \subseteq B(f(a), \delta_{f(a)}) \quad (2.2)$$

Esto nos devuelve un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ de A , el cual es espacio métrico, y por ende paracompacto. Necesariamente existe así un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}' = \{V'_i\}_{i \in I}$ de \mathcal{U} . Luego para cada $i \in I$ fijado, podemos fijar cierto $a_i \in A$ de manera que $V'_i \subseteq U_{a_i}$, y aplicando (2.2) se sigue que $\text{diam}(V'_i) \leq \text{diam}(U_{a_i}) < \frac{\varepsilon(f(a_i))}{4}$. Si empleamos el Lema 2.22, existirá un recubrimiento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ de A por abiertos en X con:

- 1) $V_i \cap A = V'_i$, para todo $i \in I$.
- 2) \mathcal{V}' y \mathcal{V} tienen el mismo nervio.
- 3) $\text{diam}(V_i) < \frac{\varepsilon(f(a_i))}{2}$, para todo $i \in I$.

Definimos el abierto $U := \bigcup_{i \in I} V_i$ en X que contiene a A . Notemos que $V_i \subseteq U$ para todo $i \in I$, y todos son abiertos en X , luego también en U . \mathcal{V} constituye un recubrimiento por abiertos en U de U . Dado que U es espacio métrico, existe una partición de la unidad $\{\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ subordinada a \mathcal{V} .

A continuación definimos $h : U \rightarrow Y$ como $h(u) := \sum_{i \in I} \phi_i(u) f(a_i)$, cuya buena definición y continuidad son fáciles de verificar observando lo anterior.

Por otra parte, fijado un $u \in U$, al ser \mathcal{V}' localmente finito y tener mismo nervio que \mathcal{V} , sean V_{i_1}, \dots, V_{i_k} los únicos abiertos de \mathcal{V} que contienen a u . Tomamos $a_u \in \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ satisfaciendo que $\delta_{f(a_u)} = \max\{\delta_{f(a_i)}\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$. Comprobemos que $f(a_{i_s}) \in B(f(a_u), 2\delta_{f(a_u)})$, cuando $s \in \{1, \dots, k\}$: como \mathcal{V} y \mathcal{V}' tienen mismo nervio y $\bigcap_{j=1}^k V_{i_j} \neq \emptyset$, podemos tomar $\hat{a}_u \in \bigcap_{j=1}^k V'_{i_j}$. Tendremos así que por definición de \mathcal{V}' que $\hat{a}_u \in U_{a_{i_s}}$. Aplicando (2.2) obtenemos que $f(\hat{a}_u) \in B(f(a_{i_s}), \delta_{f(a_{i_s})})$ para todo $s \in \{1, \dots, k\}$. De esta manera se obtiene:

$$d(f(a_{i_s}), f(a_u)) \leq d(f(a_{i_s}), f(\hat{a}_u)) + d(f(\hat{a}_u), f(a_u)) \leq \delta_{f(a_{i_s})} + \delta_{f(a_u)} \leq 2\delta_{f(a_u)}$$

Aplicando (2.1) a esta desigualdad para cada $s \in \{1, \dots, k\}$ llegamos a que $f(a_{i_s}) \in B_T(f(a_u), 2\delta_{f(a_u)}) \subseteq O$. Ahora bien, dado que $\text{sop}(\phi_i) \subseteq V_i$ para todo $i \in I$ y por convexidad de las bolas tenemos el siguiente contenido:

$$h(u) = \sum_{s=1}^k \phi_{i_s}(u) f(a_{i_s}) \in B_T(f(a_u), \delta_{f(a_u)}) \subseteq O$$

y concluimos que $h(U) \subseteq O$. De esta forma podemos escribir $h : U \rightarrow O$ y definir nuestra función como $g := r \circ h : U \rightarrow K$, evidentemente continua. Veamos que cumple las condiciones *i*) y *ii*).

i) Fijado $u \in U$, aplicando (2.1) se sigue que $g(u) = r(h(u)) \in$

$$\in r(B_T(f(a_u), 2\delta_{f(a_u)})) \subseteq B_K(f(a_u), \frac{\varepsilon(f(a_u))}{2}) \subset B_K(f(a_u), \varepsilon(f(a_u)))$$

y por tanto $d(g(u), f(a_u)) < \varepsilon(f(a_u))$. Por otra parte, recordemos que como $\hat{a}_u \in \bigcap_{j=1}^k V'_{i_j} \subseteq V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$, aplicando 3) obtenemos que $\text{diam}(U, \hat{a}_u) < \frac{\varepsilon(f(a_u))}{2}$. Usando que $a_u \in U_{a_u}$ y $\hat{a}_u \in V'_{i_s} \subseteq U_{a_{i_s}}$ para cualquier $s \in \{1, \dots, k\}$, se sigue que $\hat{a}_u \in U_a$. De nuevo por 3), $d(a_u, \hat{a}_u) < \frac{\varepsilon(f(a_u))}{4}$, y así

$$d(u, a_u) \leq d(u, \hat{a}_u) + d(\hat{a}_u, a_u) < \frac{\varepsilon(f(a_u))}{2} + \frac{\varepsilon(f(a_u))}{4} < \varepsilon(f(a_u))$$

y se sigue que también $d(u, a_u) < \varepsilon(f(a_u))$.

ii) Para todo $a \in A$, usando resultados anteriores es sencillo probar que $f(a)$, $h(a) \in B_T(f(a_{i_s}), 2\delta_{a_{i_s}}) \subseteq O$, cuando $s \in \{1, \dots, k\}$. Por convexidad tiene sentido la definición de la siguiente homotopía

$$G : A \times I \rightarrow O, \quad G(a, t) := (1 - t)h(a) + tf(a)$$

De esta forma establecemos la homotopía $F := r \circ G : A \times I \longrightarrow K$, donde $r : O \longrightarrow K$ es la retracción que teníamos al inicio de la prueba. Se obtiene de forma clara que $F : g|_A \simeq f$.

□

Ahora sí, estamos en condiciones de establecer con rigor las interpretaciones generalizadas. Comenzamos con la categoría seccional, y a partir de ella se definen sencillamente los demás nuevos elementos.

Definición 2.24. *Sea una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$. Se define la categoría seccional generalizada de f , que denotamos por $secat_g(f)$, como el menor entero no negativo n de manera que Y admite un recubrimiento por $n+1$ subespacios arbitrarios $\{A_j\}_{j=0}^n$, tal que A_j admite una sección homotópica local de f , para todo $j \in \{0, \dots, n\}$. Se establece que $secat_g(f) = \infty$ para el caso de no existir dicho n .*

Una relación que se aprecia a simple vista es la desigualdad $secat_g(f) \leq secat(f)$, para cualquier aplicación continua.

Observación 2.25. Si tenemos una fibración $p : E \longrightarrow B$, de manera prácticamente igual a como vimos en la sección anterior, resulta que en esta definición se podrán sustituir secciones locales homotópicas por secciones locales estrictas, teniendo diagramas estrictamente conmutativos. El hecho de que el recubrimiento sea o no por abiertos no afectará al razonamiento dado.

Citamos a continuación una proposición que al igual que la observación anterior, se concluyen de nuevo empleando el camino trazado en el Lema 2.13.

Proposición 2.26. *Sea el cuadrado homotópicamente conmutativo de aplicaciones continuas $f' \circ \alpha = \beta \circ f$. Entonces:*

- i) Si $\beta = 1_Y$, entonces $secat_g(f') \leq secat_g(f)$.
- ii) Si α y β son equivalencias de homotopía, entonces $secat_g(f') = secat_g(f)$.

A partir de esta nueva categoría seccional, obtenemos consecuentemente las versiones generalizadas de la complejidad topológica y la categoría de Lusternik-Schnirelmann, tal cual cabría esperar después de ver como hemos definido $secat_g(f)$.

Definición 2.27. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos. La complejidad topológica generalizada de X se define como*

$$TC_g(X) := secat_g(\pi : X^I \longrightarrow X \times X) = secat_g(\Delta_X : X \longrightarrow X \times X)$$

Notemos que la segunda igualdad de la definición anterior se concluye siguiendo la línea de la prueba del Corolario 2.14. Un razonamiento elemental nos permite aseverar que esta noción coincide con la de complejidad topológica clásica sustituyendo recubrimientos abiertos por recubrimientos arbitrarios, que sería la que consideremos a partir de ahora.

Como no podría ser de otra manera, si X es un espacio conexo por caminos y punteado en $x_0 \in X$, se define la *categoría de Lusternik -Schnirelmann generalizada*, o simplemente categoría LS generalizada de X como

$$cat_g(X) := secat_g(p : P(X, x_0) \longrightarrow X)$$

donde p es la fibración dada por $p(\gamma) = \gamma(1)$.

Llegados aquí, podríamos continuar demostrando todas las propiedades vistas para las versiones clásicas variando mínimamente los razonamientos. De esta manera se podría probar la invariancia homotópica de $TC_g(X)$ y $cat_g(X)$ o las desigualdades en el caso generalizado de las proposiciones 2.15 y 2.16. Por el contrario, dado que supondría una innecesaria repetición de las mismas ideas, los damos por entendidos y procedemos a dar el teorema que nos permitirá determinar en qué casos podremos asegurar la deseada igualdad $TC(X) = TC_g(X)$.

Teorema 2.28. *Sea $p : E \longrightarrow B$ una fibración entre espacios ANR. Entonces*

$$secat(p) = secat_g(p)$$

Demostración. B es un ANR, así que por el Corolario 1.18 tenemos una función $\varepsilon : B \longrightarrow (0, +\infty)$ que cumple que el recubrimiento $\mathscr{W} = \{B(b, \varepsilon(b))\}_{b \in B}$ satisface que todo par de aplicaciones \mathscr{W} -próximas son homótopas.

Por ser $p : E \longrightarrow B$ continua, para cada $e \in E$ encontramos un $\delta(e) > 0$ tal que $p(B(e, \delta(e))) \subseteq B(p(e), \varepsilon(p(e)))$. Definimos

$$\tilde{\varepsilon} : E \longrightarrow (0, +\infty), \tilde{\varepsilon}(e) := \min\{\delta(e), \varepsilon(p(e))\}$$

Veamos que $secat(p) \leq secat_g(p)$, puesto que la otra desigualdad es cierta en cualquier caso. Como para $secat_g(p) = \infty$ es un caso claro, veremos unas consideraciones para el caso finito. Recordemos que por la Observación 2.25 buscamos secciones locales estrictas.

Supongamos un subconjunto $A \subseteq B$ y una sección local continua $s : A \longrightarrow E$ de p . Por el Teorema 2.23 y nuestras hipótesis, existe un entorno abierto $A \subseteq U \subseteq B$ y una aplicación continua $s' : U \longrightarrow E$ que verifica que:

- Dado $u \in U$, existe $a_u \in A$ tal que $\min\{d(s'(u), s(a_u)), d(u, a_u)\} < \tilde{\varepsilon}(s(a_u))$
- $s'_A \simeq s$.

Queremos ver que $p \circ s'$ es homótopa a la inclusión $inc_U : U \longrightarrow B$. Para ello, por la propiedad enunciada al inicio de la prueba basta ver que ambas son \mathscr{W} -próximas. Fijamos $u \in U$. Veamos que $inc_U(u) = u$ y $(p \circ s')(u) \in B(a_u, \varepsilon(a_u)) \in \mathscr{W}$ y lo tendríamos:

- Se tiene que $u \in B(a_u, \varepsilon(a_u))$, pues $d(u, a_u) < \tilde{\varepsilon}(s(a_u)) \leq \varepsilon(p(s(a_u))) = \varepsilon(a_u)$.
- $d(s'(u), s(a_u)) < \tilde{\varepsilon}(s(a_u)) \leq \delta(s(a_u))$, por lo que $s'(u) \in B(s(a_u), \delta(s(a_u)))$. Tendremos así que $p(s'(u)) \in p(B(s(a_u), \delta(s(a_u)))) \subseteq B(p(s(a_u)), \varepsilon(p(s(a_u)))) = B(a_u, \varepsilon(a_u))$. Finalmente $(p \circ s')(u) \in B(a_u, \varepsilon(a_u))$.

De esta manera se concluye que $p \circ s' \simeq inc_U$. Y por ser p una fibración, usando una técnica similar a la empleada en el Lema 2.11, encontraremos $s'' : U \longrightarrow E$ continua que verifica que $p \circ s'' = inc_U$.

Finalmente, si $secat_g(p) = n$, tenemos el recubrimiento $B = \bigcup_{j=0}^n A_j$ y una sección local continua $s_j : A_j \longrightarrow E$ de p , para cada $j \in \{0, \dots, n\}$.

Podremos entonces encontrar un entorno abierto $A_j \subseteq U_j \subseteq B$ y una sección local continua estricta $s'_j : U_j \rightarrow E$ de p , con $B = \bigcup_{j=0}^n U_j$. Obtenemos de esta manera que $secat(p) \leq n$. \square

A través de este teorema podemos llegar a la principal meta del capítulo, que damos a continuación en forma de corolario. Añadimos además una reformulación de la complejidad topológica clásica sustituyendo recubrimientos por *particiones*. Se destaca que el apartado ii) del siguiente corolario fue probado por T. Srinivasan [14] con técnicas ligeramente diferentes a las usadas aquí, más adaptadas al contexto de la categoría de Lusternik-Schinrelmann.

Corolario 2.29. *Sea X un espacio conexo por caminos del mismo tipo de homotopía de un ANR. Entonces:*

- i) $TC(X) = TC_g(X)$.
- ii) $cat(X) = cat_g(X)$.
- iii) $TC(X)$ es el menor n tal que $X \times X$ admite una partición $\{F_j\}_{j=0}^n$ cumpliendo que cada F_j admite una sección local continua de $\pi : X^I \rightarrow X \times X$.

Demostración. Existe Y un ANR del mismo tipo de homotopía de X . Para las propiedades i) y ii) partimos de las igualdades:

- i) $TC(X) = TC(Y)$ y $TC_g(X) = TC_g(Y)$. Por el Teorema 1.24 y la Proposición 1.12 llegamos a que $\pi : Y^I \rightarrow Y \times Y$ es una fibración entre espacios ANR, concluyendo así que $TC(Y) = secat(\pi) = secat_g(\pi) = TC_g(Y)$.
- ii) $cat(X) = cat(Y)$ y $cat_g(X) = cat_g(Y)$. Fijado $y_0 \in Y$ consideramos la fibración $p : P(Y, y_0) \rightarrow Y$ con $p(\gamma) = \gamma(1)$. Podemos identificar $P(Y, y_0)$ con el espacio de funciones $(Y, \{y_0\})^{(I, \{0\})}$, que por el Teorema 1.25 es un ANR. De esta forma $cat(Y) = secat(p) = secat_g(p) = cat_g(Y)$.

Respecto a la propiedad iii), suponemos el caso finito $TC(X) = n < \infty$. Como $TC(X) = TC_g(X)$, tendremos un recubrimiento arbitrario $X \times X = \bigcup_{j=0}^n A_j$ y secciones locales continuas $s_j : A_j \rightarrow X^I$ de π , $j \in \{0, \dots, n\}$. Definimos explícitamente la partición y las secciones buscadas como:

$$\begin{aligned} F_0 &:= A_0, & s'_0 &:= s_0 : F_0 \rightarrow X \times X \\ F_j &:= A_j \setminus \bigcup_{k=0}^{j-1} A_k, & s'_j &:= s_{j|_{F_j}} : F_j \rightarrow X \times X, \quad j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad \square$$

Complejidad topológica dirigida

Hasta el momento hemos establecido las nociones de complejidad topológica y su versión generalizada en el marco de espacios topológicos usuales. No obstante, en este tercer y último capítulo se persigue dar otra variante de la complejidad topológica, esta vez en el contexto de los espacios topológicos dirigidos. A estos objetos les dedicamos la primera sección del capítulo, donde presentamos su definición aludiendo a su motivación en ciencias computacionales, sus principales propiedades y ciertas construcciones necesarias para profundizar en el estudio de estos espacios. Seguidamente se presenta la mencionada *complejidad topológica dirigida*. Comprobaremos cómo el hecho de establecer el contexto dirigido provocará que las propiedades que eran bastante intuitivas en el capítulo anterior no se repetirán para este caso, poniendo de manifiesto diferencias notables entre esta versión y las dos anteriores. Aportaremos el cálculo de la complejidad de algunos espacios dirigidos fácilmente visualizables y un estudio de las propiedades que presentan. Un nuevo concepto que puede suscitar gran interés es el de *homotopía dirigida* o *dihomotopía*, siendo esta nueva noción más rica pero con mayores restricciones. Finalmente se dotará a la n -esfera S^n de una estructura dirigida adecuada y se calculará su complejidad, donde observaremos una cierta variación con respecto a la complejidad clásica.

Cabe destacar que en esta memoria trabajaremos con una definición ligeramente diferente a la dada en la literatura actual de la complejidad topológica dirigida, puesto que en la definición original establecida en el artículo [6], se especifica que ciertos recubrimientos deben estar constituidos por un tipo de espacios denominados *ENR*. No obstante, nosotros los hemos sustituido por recubrimientos arbitrarios, según el espíritu generalizado del capítulo anterior.

3.1. Espacios topológicos dirigidos

Damos la definición de espacio dirigido según aparece en la memoria *Directed Algebraic Topology*, original de M. Grandis. Este objeto no es más que un espacio topológico dotado de un conjunto distinguido de caminos sobre él, tratando de formalizar la idea “no reversibilidad” en el tiempo, muy presente en un amplio abanico de fenómenos físicos y computacionales. Para indagar en esta clase de espacios es necesario definir las versiones dirigidas de los objetos topológicos elementales para concluir interesantes propiedades.

Observación 3.1. Recordemos que para un espacio topológico X y dos caminos $\alpha, \beta \in X^I$ cumpliendo que $\alpha(1) = \beta(0)$ se define su *concatenación* $\alpha * \beta$ como el camino en X :

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esta operación en general no es asociativa, por lo que para el transcurso de este capítulo establecemos por defecto que para n caminos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X^I$ la concatenación, denotada por $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$, se construye inductivamente asociando los caminos de izquierda a derecha. Por ejemplo, $\alpha * \beta * \gamma$ será la notación empleada para el camino $(\alpha * \beta) * \gamma$.

Definición 3.2. Sean X un espacio topológico y un conjunto distinguido de caminos $D(X) \subseteq X^I$. Diremos que $D(X)$ es una d -estructura sobre X si satisface las siguientes propiedades:

- Para todo $x \in X$, $\varepsilon_x : I \rightarrow X \in D(X)$.
- Si $\alpha \in D(X)$ y $h : I \rightarrow I$ es continua y no decreciente, entonces $\alpha \circ h \in D(X)$.
- Si $\alpha, \beta \in D(X)$ con $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces su concatenación $\alpha * \beta \in D(X)$.

Llamaremos a los elementos de $D(X)$ d -caminos o caminos dirigidos en X , y diremos que el par $(X, D(X))$ es un *espacio topológico dirigido* o simplemente d -espacio. Por comodidad, al tener un d -espacio $(X, D(X))$ lo denotaremos simplemente por X , asumiendo que posee la citada d -estructura, a no ser que se indique lo contrario. Notemos que la segunda condición supone de que toda reparametrización continua y creciente de un d -camino es de nuevo un d -camino, provocando que en la d -estructura no haya caminos que a medida que transcurre el tiempo reviertan el recorrido realizado, formalizando así la no reversibilidad mencionada. Observemos también que $D(X)$ puede verse como un subespacio topológico de X^I con la topología inducida por la compacto-abierta. El ver este conjunto como un subespacio del espacio de funciones es indispensable para los pasos futuros en esta temática.

Ejemplo 3.3. Un primer ejemplo bastante natural involucra al espacio euclídeo n -dimensional. Sobre \mathbb{R}^n se puede definir una relación de orden parcial “ \leq ” de la siguiente manera: dadas dos tuplas reales $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, establecemos que $x \leq y$ si y sólo si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $x_i \leq y_i$. Diremos entonces que un camino $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *no decreciente* si para cada par $t \leq t'$ se verifica que $\alpha(t) \leq \alpha(t')$. Obtenemos de forma natural una d -estructura $D(\mathbb{R}^n)$ sobre \mathbb{R}^n constituida por estos caminos, que denotamos por $\overrightarrow{\mathbb{R}^n} = (\mathbb{R}^n, D(\mathbb{R}^n))$.

Este caso nos induce a pensar que en vez de irnos directamente al caso de dimensión arbitraria, si partimos del espacio 1-dimensional podemos construir $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ a través de un cierto producto finito $\overrightarrow{\mathbb{R}} \times \dots \times \overrightarrow{\mathbb{R}}$ definido adecuadamente. En efecto, de tener dos d -espacios X e Y , efectivamente podemos dotar a su producto de una d -estructura $D(X \times Y)$ de manera natural construida como sigue: un camino $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D(X \times Y)$ si, y sólo si, $\alpha_1 \in D(X)$ y $\alpha_2 \in D(Y)$ (nótese que $(X \times Y)^I = X^I \times Y^I$).

Siguiendo esta tónica de versionar los conceptos topológicos elementales en el sentido dirigido no podemos pasar por alto cómo se determina una estructura dirigida adecuada para subconjuntos de un espacio dirigido dado. Considerando un d -espacio X y un subespacio $A \subseteq X$, se intuye fácilmente que la mejor elección como estructura dirigida sobre A vendrá dada por los d -caminos en $D(X)$ tales

que la imagen de I queda contenida en A . Como no podría ser de otra forma, quedará denotada por $D(A)$, y siguiendo coherentemente la notación empleada identificaremos por A al d -espacio $(A, D(A))$.

Después de establecer cómo se construyen estructuras dirigidas inducidas y para el producto, una buena manera de concluir esta presentación de los espacios dirigidos es estableciendo el concepto análogo para funciones continuas que además preserven la estructura dirigida de los espacios de llegada y salida. Estas aplicaciones con buenas propiedades serán las denominadas d -aplicaciones.

Definición 3.4. Diremos que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre d -espacios es una aplicación continua dirigida, o simplemente d -aplicación, si $f \circ \alpha \in D(Y)$, para todo $\alpha \in D(X)$.

Asimismo, para una d -aplicación como la anterior obtenemos de forma natural una aplicación continua $D(f) : D(X) \rightarrow D(Y)$ entre las d -estructuras definida como $D(f)(\alpha) := f \circ \alpha$. Su continuidad se obtiene de comprobar que $f_* : X^I \rightarrow Y^I$, con $f_*(\alpha) = f \circ \alpha$, es continua teniendo en cuenta la igualdad $f_*^{-1}((K, U)) = (K, f^{-1}(U))$ para cualquier abierto subbásico de Y^I . Claramente $f_{*|D(X)} = D(f)$.

La noción de espacios homeomorfos se puede extender igualmente para los espacios dirigidos cuando los homeomorfismos respetan las distintas d -estructuras. Formalmente, dos d -espacios X e Y se dicen *isomorfos* si existen d -aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$, con $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$. A la d -aplicación f con esta propiedad se le conoce como *isomorfismo dirigido* con inversa g (y viceversa).

Observación 3.5. Dado un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ entre d -espacios con la propiedad de que para cada $\alpha \in X^I$, $\alpha \in D(X)$ si y sólo si $f \circ \alpha \in D(Y)$, entonces se comprueba inmediatamente que f es un isomorfismo dirigido. Por otro lado, si tenemos un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$, siendo X un d -espacio e Y un espacio topológico, podemos considerar en Y la d -estructura $D(Y)$ dada por los caminos $\beta \in Y^I$ tales que $\beta \circ f \in D(X)$, convirtiendo automáticamente a f en un isomorfismo dirigido.

Con esta última propiedad se concluye esta sección introductoria. Damos paso con ella al corazón de este capítulo, estableciendo con detalle la versión dirigida de complejidad topológica para estos espacios.

3.2. Complejidad topológica dirigida

Llegamos al culmen del capítulo, definiendo la versión dirigida (y generalizada) de la complejidad topológica. Estudiamos sus principales propiedades, la forma de adaptarla para particiones en vez de recubrimientos, su relación con $TC(X)$ y $TC_g(X)$ o cómo, forzando determinadas restricciones, se da la desigualdad del producto de espacios análoga a la vista en el capítulo 2. Damos algunos ejemplos de d -espacios sencillos sobre la circunferencia y los intervalos y calculamos sus respectivas complejidades, para posteriormente llevar la técnica al lazo y los grafos finitos.

Un buen comienzo para establecer similitudes con la complejidad topológica original es construir una aplicación análoga a $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ a través de las

d -estructuras. Dado un d -espacio X definimos

$$P_X : D(X) \longrightarrow X \times X, \quad \alpha \mapsto (\alpha(0), \alpha(1))$$

Denotaremos a la imagen de esta aplicación como $\Gamma(X) = P_X(D(X))$. Se observa con claridad que $P_X = \pi|_{D(X)}$, y por tanto es continua. Sin embargo, una diferencia significativa entre π y P_X es que ésta última no es, en general, una fibración. Para comprobar este hecho usaremos el siguiente lema:

Lema 3.6. *Sea una fibración $p : E \longrightarrow B$, donde B es conexo por caminos. Entonces p es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $b \in B$. Fijado $e_0 \in E$, tomamos $b_0 = p(e_0) \in B$. Tendremos que existe un camino $\alpha \in B^I$ con origen en b_0 y final en b . Además existe un diagrama conmutativo de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{\varepsilon_{e_0}} & E \\ \delta_0 \downarrow & \nearrow \beta & \downarrow p \\ \{0\} \times I & \xrightarrow{\alpha'} & B \end{array}$$

con $\alpha'(0, t) := \alpha(t)$. Tomando $e = \beta(0, 1) \in E$, por conmutatividad se tiene que $p(e) = b$. \square

Siguiendo este resultado, sobre un espacio X conexo por caminos de cardinal mayor que 1 tomamos la d -estructura $D(X)$ formada, por ejemplo, únicamente por las aplicaciones constantes. En consecuencia, P_X no es una fibración, pues $\Gamma(X) = \Delta_X \neq X \times X$.

A partir de esta aplicación P_X se construye de manera totalmente análoga a como se hizo con $TC(X)$ la complejidad topológica dirigida, que ahora presentamos:

Definición 3.7. *Sea X un d -espacio. Se define la complejidad topológica dirigida de X , denotada por $\overrightarrow{TC}(X)$ como el menor entero no negativo n tal que $\Gamma(X)$ admite un recubrimiento por $n+1$ subespacios arbitrarios $\{A_j\}_{j=0}^n$ tal que para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ existe una sección local continua $s_j : A_j \longrightarrow D(X)$ de P_X . Establecemos $\overrightarrow{TC}(X) = \infty$ en el caso de no existir tal n .*

Como ya habíamos mencionado, en la definición original dada en el artículo [6], se exige sobre el recubrimiento pedido que cada subespacio fuera un *ENR*, del inglés Euclidean Neighborhood Retract. No obstante, nosotros comprobamos que este requerimiento no es necesario para los resultados que aquí se desarrollan, razón por la cual hemos empleado recubrimientos arbitrarios, fomentado además por la generalización construida en el capítulo 2 de esta memoria.

Basándonos en la prueba del Corolario 2.29, una primera propiedad que podemos extraer de este objeto es que coincide con el menor entero no negativo n tal que existe una *partición* $\Gamma(X) = \bigcup_{j=0}^n F_j$ donde cada F_j admite una

sección local continua de P_X . Por el hecho de tener una partición obtenemos que $\overrightarrow{TC}(X)$ es el menor n tal que existe una sección global $s : \Gamma(X) \rightarrow D(X)$ no necesariamente continua de P_X y una partición $\Gamma(X) = \bigcup_{j=0}^n F_j$ con $s|_{F_j}$ continua, para todo $j \in \{0, \dots, n\}$.

Para interiorizar esta definición, calcularemos la complejidad de dos espacios dirigidos fáciles de visualizar:

- *Ejemplo 3.8.* Consideramos el intervalo $I = [0, 1]$ con la topología usual y la d -estructura $D(I)$ inducida por la de \mathbb{R} , esto es, los caminos no decrecientes. Denotamos $\overrightarrow{I} = (I, D(I))$.

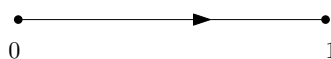
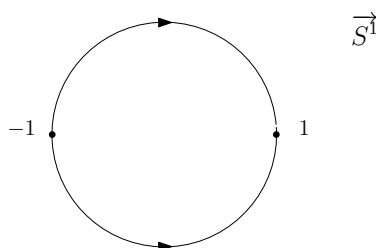


Figura 3.1. Representación gráfica del intervalo dirigido.

Observemos que de tener $t, t' \in I$ con $t \leq t'$, podemos tomar el camino a velocidad constante $\sigma(t, t')$ con origen en t y final en t' , dado por $\sigma(t, t')(s) := (1 - s)t + st'$. Usando además la definición de la d -estructura llegamos a que $\Gamma(\overrightarrow{I}) = \{(t, t') \in I \times I : t \leq t'\}$. Obtenemos así la sección global $\sigma : \Gamma(\overrightarrow{I}) \rightarrow D(I)$ de $P_{\overrightarrow{I}}$, cuya continuidad se obtiene de usar la Ley Exponencial y restringir a $\Gamma(\overrightarrow{I})$. Por ende tenemos que $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{I}) = 0$. \square

- *Ejemplo 3.9.* Sea S^1 el conjunto de los números complejos de módulo 1. Podemos establecer la descomposición $S^1 = S^1_+ \cup S^1_-$ en los elementos de la circunferencia con parte imaginaria mayor o igual que cero y menor o igual que cero, respectivamente. Ambos subconjuntos son homeomorfos a I , de modo que considerando el ejemplo anterior podemos construir dos d -espacios $(S^1_+, D(S^1_+))$ y $(S^1_-, D(S^1_-))$ ambos isomorfos a \overrightarrow{I} . Obtenemos así sobre el total de la circunferencia una d -estructura dada por $D(S^1) = D(S^1_+) \cup D(S^1_-)$. Intuitivamente se trata de los caminos cuyas trazas se encuentran contenidas en la semicircunferencia superior junto con los que su traza está contenida en la inferior, en el sentido que se muestra en la figura. Establecemos el espacio dirigido $\overrightarrow{S^1} = (S^1, D(S^1))$.



Notemos que $D(S^1_+) \cap D(S^1_-)$ coincide exactamente con las constantes ε_{-1} y ε_1 . Por definición tendremos las igualdades $\Gamma(\overrightarrow{S^1}) = \Gamma(S^1_+) \cup \Gamma(S^1_-)$ y

$\Gamma(S_+^1) \cap \Gamma(S_-^1) = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, 1)\}$. Veamos a partir de estas consideraciones que $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S^1}) = 1$. En efecto, supongamos que existe una sección global continua $\sigma : \Gamma(\overrightarrow{S^1}) \rightarrow D(S^1)$ de $P_{\overrightarrow{S^1}}$. Es sencillo comprobar la existencia de sucesiones $(x_n^+)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n^+)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_+^1$ y $(x_n^-)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n^-)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_-^1$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n^+, y_n^+) \in \Gamma(S_+^1)$ y $(x_n^-, y_n^-) \in \Gamma(S_-^1)$, y además

$$(x_n^+, y_n^+) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (-1, 1), \quad (x_n^-, y_n^-) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (-1, 1)$$

Por continuidad sus imágenes por σ convergen a $\sigma(-1, 1)$. Teniendo en cuenta que S^1 es una 1-variedad, y por tanto un ANR (véase la Observación 1.15), esta convergencia se da en la d^* -topología inducida por la distancia euclídea. Tendremos en consecuencia que

$$d^*(\sigma(x_n^+, y_n^+), \sigma(-1, 1)) = \max_{t \in I} \|\sigma(x_n^+, y_n^+)(t) - \sigma(-1, 1)(t)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

y análogamente ocurrirá con las sucesiones negativas. Necesariamente $\sigma(-1, 1) \in D(S_+^1) \cap D(S_-^1)$, lo que es absurdo. Así, $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S^1}) \geq 1$.

Para ver la desigualdad $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S^1}) \leq 1$, tomamos la partición de $\Gamma(\overrightarrow{S^1})$ dada por $F_0 := \Gamma(S_+^1)$ y $F_1 := \Gamma(S_-^1) \setminus \{(-1, -1), (-1, 1), (1, 1)\}$ junto con las secciones continuas de $P_{\overrightarrow{S^1}}$

$$s_0 : F_0 \rightarrow D(S_+^1), \quad s_1 : F_1 \rightarrow D(S_-^1)$$

donde $s_i(x, y)$ es el camino a velocidad constante desde x a y . \square

Una característica que marca la diferencia entre la complejidad clásica y la dirigida es que propiedades como cotas o igualdades que se cumplen en el caso original no se dan en el contexto dirigido sin añadir alguna particularidad extra sobre los espacios. Una de estas restricciones adicionales es la *regularidad*: un d -espacio X se dirá *regular* si existe una partición $\{F_j\}_{j=0}^n$ de $\Gamma(X)$, donde $n = \overrightarrow{TC}(X) < \infty$ y P_X admite una sección local continua sobre cada F_j , siendo $\bigcup_{j=0}^r F_j$ un cerrado en $\Gamma(X)$, para cada $r \in \{0, \dots, n\}$. El razonamiento que acabamos de desarrollar nos devuelve a $\overrightarrow{S^1}$ como ejemplo claro de d -espacio regular. Se obtiene de forma elemental una consecuencia de que dichas uniones sean cerrados: dados $i < j$, $F_j \cap \overline{F_i} = \emptyset$. Denominamos a esta propiedad *condición de regularidad*. La misma es la clave para establecer una cota superior de la complejidad dirigida del producto finito de espacios, que seguidamente mostramos.

Proposición 3.10. *Sean dos d -espacios regulares X e Y . Entonces*

$$\overrightarrow{TC}(X \times Y) \leq \overrightarrow{TC}(X) + \overrightarrow{TC}(Y)$$

Demostración. Procedemos con el caso no trivial, esto es $\overrightarrow{TC}(X) = n < \infty$, $\overrightarrow{TC}(Y) = m < \infty$. Tendremos dos particiones $\Gamma(X) = \bigcup_{j=0}^n F_j$, $\Gamma(Y) = \bigcup_{k=0}^m G_k$ y secciones locales continuas $\{\sigma_j^X : F_j \rightarrow D(X)\}_{j=0}^n$ de P_X y $\{\sigma_k^Y : G_k \rightarrow D(Y)\}_{k=0}^m$ de P_Y . Identificamos $\Gamma(X \times Y)$ con $\Gamma(X) \times \Gamma(Y)$ por

ser homeomorfos. Consideramos la partición $\{F_j \times G_k\}_{0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq m}$ de $\Gamma(X \times Y)$ y las aplicaciones continuas

$$\sigma_{jk} = \sigma_j^X \times \sigma_k^Y : F_j \times G_k \longrightarrow D(X \times Y) = D(X) \times D(Y)$$

Por otro lado definimos $H_i := \bigcup_{j+k=i} F_j \times G_k$ para $i \in \{0, \dots, m+n\}$. La condición de regularidad implica que cada $F_j \times G_k$ es un abierto de H_i cuando $i = j+k$, y por tanto H_i es una unión disjunta de abiertos. Empleando el Lema de Continuidad obtenemos una sección local continua de $P_{X \times Y}$ dada por

$$\sigma_i : H_i \longrightarrow D(X \times Y), \sigma_i|_{F_j \times G_k} = \sigma_{jk}, i = j+k$$

para $i \in \{0, \dots, m+n\}$. Tendremos así que $\overrightarrow{TC}(X \times Y) \leq m+n$. \square

Corolario 3.11. *Sea $\overrightarrow{\mathbb{T}}^n := \overrightarrow{S^1} \times \dots \times \overrightarrow{S^1}$ el n -toro dirigido. Entonces $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{\mathbb{T}}^n) \leq n$.*

Un aspecto que aún no hemos tenido en cuenta es que, puesto que la peculiaridad de los d -espacios radica en destacar un conjunto distinguido de caminos, la conexidad por caminos se sale de este ámbito. No obstante, no es difícil imaginar que para los d -espacios esta noción puede variarse adecuadamente de la siguiente manera: un d -espacio X se dirá *conexo por d -caminos* si para todo par de elementos $(x, y) \in X \times X$ existe un d -camino α en X tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Esta nueva propiedad nos permitirá dar una desigualdad entre las complejidades topológicas clásica y generalizada con nuestra versión generalizada dirigida, de la manera siguiente.

Proposición 3.12. *Si un d -espacio X es conexo por d -caminos, entonces*

$$TC_g(X) \leq \overrightarrow{TC}(X)$$

Si además X es del mismo tipo de homotopía de un ANR, $TC(X) \leq \overrightarrow{TC}(X)$.

Demostración. Partiendo del caso $\overrightarrow{TC}(X) = n < \infty$, se tiene una partición $\{F_j\}_{j=0}^n$ de $\Gamma(X) = X \times X$ y secciones locales continuas $\{s_j : F_j \longrightarrow D(X)\}_{j=0}^n$ de P_X . Si consideramos $inc_{D(X)}$ la inclusión de la d -estructura en X^I , observemos que fijado $j \in \{0, \dots, n\}$, $\pi \circ inc_{D(X)} \circ s_j = P_X \circ s_j = inc_{F_j}$. Tendremos así $s_j' := inc_{D(X)} \circ s_j : F_j \longrightarrow X^I$ una sección local continua de π . Por tanto $TC_g(X) \leq n$. Para la segunda desigualdad basta emplear el Corolario 2.29. \square

Si volvemos sobre nuestros pasos y nos fijamos en los ejemplos que hemos estudiado nos daremos cuenta que ninguno de ellos es conexo por d -caminos. Para ejemplificar este tipo de espacios nos valdremos a continuación de la circunferencia unidad para establecer una d -estructura distinta a la de $\overrightarrow{S^1}$ que cumplirá esta propiedad. Además nos resultará de gran utilidad para trabajar posteriormente con los grafos dirigidos.

Dado un camino $\gamma : I \longrightarrow S^1$, existirá una función continua $\phi \in \mathbb{R}^I$ tal que $\gamma(t) = e^{i\phi(t)}$. Diremos que γ es *positivo* si ϕ es no decreciente en I .

Observación 3.13. Esta definición podría parecer conflictiva en el caso de existir otra aplicación $\phi' \in \mathbb{R}^I$ cumpliendo que $\gamma(t) = e^{i\phi'(t)}$. Sin embargo, por propiedades básicas de la exponencial compleja, afirmamos que para cada $t \in I$ existe una constante $k_t \in \mathbb{Z}$ tal que $k_t = \frac{\phi(t) - \phi'(t)}{2\pi}$. Obtenemos así una función continua $k : I \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $k(t) = k_t$. Por la conexidad de I se deduce que $k(I)$ es un conexo en \mathbb{Z} , y por tanto constante. Tendremos así que ϕ y ϕ' difieren en una constante, concluyendo así que ϕ es no decreciente si, y sólo, si ϕ' es no decreciente.

La observación anterior nos permite establecer en S^1 la d -estructura $D(S^1)$ formada por los caminos positivos sobre la circunferencia unidad. Denominamos como el *lazo dirigido* al d -espacio $\mathbb{O}^1 = (S^1, D(S^1))$.

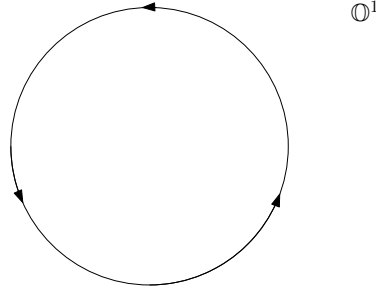


Figura 3.2. Representación gráfica del lazo dirigido.

Se observa fácilmente a través de la representación gráfica que \mathbb{O}^1 es conexo por d -caminos, así que $\Gamma(\mathbb{O}^1) = S^1 \times S^1$. Aplicando la Proposición 3.12 obtenemos que $1 = TC(S^1) \leq \overrightarrow{TC}(\mathbb{O}^1)$. Por otro lado, podemos recubrir $S^1 \times S^1$ por los subconjuntos $F_0 = \Delta_{S^1} = \{(z, z) : z \in S^1\}$ y $F_1 = (S^1 \times S^1) \setminus \Delta_{S^1}$. Sobre cada uno de ellos construimos las secciones continuas de $P_{\mathbb{O}^1}$ siguientes:

$$s_k : F_k \rightarrow D(S^1), \quad k \in \{0, 1\}$$

con $s_0(z, z) = \varepsilon_z$ y $s_1(z, w)$ el d -camino a velocidad constante desde z hasta w según la orientación dada en la figura. Deducimos entonces que $\overrightarrow{TC}(\mathbb{O}^1) \leq 1$, y así $\overrightarrow{TC}(\mathbb{O}^1) = 1$.

Una última propiedad acerca de este espacio es que al ser S^1 de Hausdorff, $F_0 = \Delta_{S^1}$ es un cerrado en $S^1 \times S^1$, y $F_0 \cup F_1$ es el total, luego cerrado de nuevo. Así tendremos que \mathbb{O}^1 es regular.

Corolario 3.14. Sea $(\mathbb{O}^1)^n := \mathbb{O}^1 \times \dots \times \mathbb{O}^1$ el n -lazo dirigido. Entonces $\overrightarrow{TC}((\mathbb{O}^1)^n) = n$.

Demostración. Por regularidad y la Proposición 3.10, $\overrightarrow{TC}((\mathbb{O}^1)^n) \leq n$. Asimismo, es sencillo probar que el producto finito de conexos por d -caminos es de nuevo conexo por d -caminos, y por ende lo es $(\mathbb{O}^1)^n$. Dado que el espacio topológico subyacente, \mathbb{T}^n , es un ANR, empleando la Proposición 3.12 y el Ejemplo 2.19 se llega a que

$$n = TC(\mathbb{T}^n) \leq \overrightarrow{TC}((\mathbb{O}^1)^n) \leq n \quad \square$$

Damos paso ahora a la última parte de esta sección, en la que construiremos los grafos dirigidos como espacios dirigidos, induciendo una d -estructura a través de las de \vec{I} y \mathbb{O}^1 . El objetivo final es calcular su complejidad topológica dirigida de manera explícita para un gran número de casos. Consideraremos como *grafos dirigidos* aquellos grafos compuestos por un número finito de vértices y aristas, conexos y en cuyas aristas se ha determinado una orientación. Interpretamos un grafo dirigido como subespacio $G \subseteq \mathbb{R}^3$ con la topología inducida por la usual. Para cada arista e de extremos x e y en G , definimos su interior como $Int(e) := e \setminus \{x, y\}$.

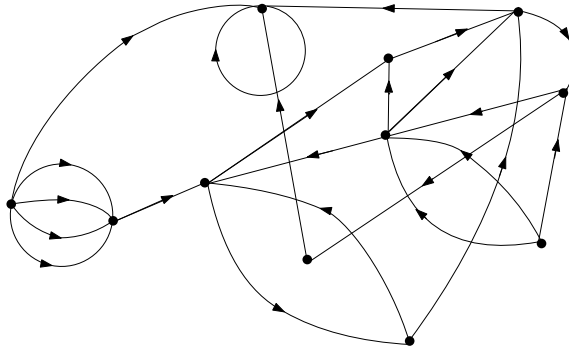


Figura 3.3. Ejemplo de grafo dirigido en \mathbb{R}^3 .

Observación 3.15. Para todo grafo (finito o no) es conocida la propiedad de que un subconjunto A de G es abierto (respectivamente cerrado) en G si y sólo si $A \cap e$ es abierto (respectivamente cerrado) en e , para toda arista e de G . Para el caso que tratamos, en el que G tiene un número finito de vértices y aristas, esta topología coincide con la inducida por la usual en \mathbb{R}^3 . Además, otro resultado interesante es que todo grafo finito tiene el mismo tipo de homotopía que un ANR , esto último por tratarse de un CW -complejo (de dimensión 1). Ambas propiedades y la definición de esta última noción pueden consultarse en [8].

Algunos ejemplos de grafos dirigidos que hemos visto son \vec{I} , \vec{S}^1 y \mathbb{O}^1 . De hecho, es claro que cada arista de un grafo dirigido puede identificarse bien con \vec{I} o bien con \mathbb{O}^1 . De esta manera en cada arista e podremos definir una d -estructura a partir de la que hemos definido para dichos d -espacios, dado que la arista será homeomorfa al espacio subyacente de alguno de ellos. La Observación 3.5 nos permite establecer de esta forma una estructura dirigida sobre G dada por las concatenaciones de todos los posibles d -camino de todas sus aristas, lo que permite ver a G como un d -espacio con la estructura $D(G)$ que induce de forma natural la orientación de sus aristas.

Una propiedad útil que todo grafo dirigido G cumple es que si $(x, y) \in \Gamma(G)$ y x es un punto interior a una arista e con $y \notin e$, entonces $(x', y) \in \Gamma(G)$, para todo $x' \in Int(e)$. Su prueba se basa fundamentalmente en un análisis visual de los grafos dirigidos, con lo cual no es complicada y no merece la pena incluirla. Sin embargo la tendremos en mente para el siguiente resultado, en el que acotamos superiormente la complejidad de cualquier grafo dirigido. Para proceder

a su prueba, consideraremos primeramente un grafo dirigido G y esbozamos la siguiente partición de $\Gamma(G)$:

- i) F_0 son de los pares de vértices $(\alpha_i, \alpha_j) \in \Gamma(G)$.
- ii) F_1 son los pares $(x, y) \in \Gamma(G)$, donde x o y son un vértice y el otro punto está en el interior de una arista.
- iii) F_2 son los pares $(x, y) \in \Gamma(G)$, donde x e y está en el interior de alguna arista.

Proposición 3.16. *Si G es un grafo dirigido entonces $\overrightarrow{TC}(G) \leq 2$.*

Demostración. Para cada par de vértices $(\alpha_i, \alpha_j) \in \Gamma(G)$, fijamos un camino dirigido γ_{ij} con origen en α_i y final en α_j , de tal modo que si $i = j$, elegimos el camino constante $\gamma_{ii} = \varepsilon_{\alpha_i}$. Encontramos una sección local continua de P_G sobre F_0 , F_1 y F_2 :

- i) Tomamos $s_0 : F_0 \rightarrow D(G)$ tal que $s_0(\alpha_i, \alpha_j) := \gamma_{ij}$. Por ser F_0 un subespacio discreto, la continuidad de s_0 es inmediata.
- ii) Consideramos ahora una arista orientada e , un punto $x \in \text{Int}(e)$ y un vértice α_j tales que $(x, \alpha_j) \in \Gamma(G)$. Si α_i es el extremo final de e , es claro que $(\alpha_i, \alpha_j) \in \Gamma(G)$. Denotamos por γ_{x, α_i} el d -camino a velocidad constante desde x hasta α_i , con lo que podemos definir la sección local continua de P_G :

$$(\text{Int}(e) \times \{\alpha_j\}) \cap \Gamma(G) \rightarrow D(G), \quad (x, \alpha_j) \mapsto \gamma_{x, \alpha_i} * \gamma_{ij}$$

De forma análoga se obtiene para los subespacios de F_1 de la forma $\{\alpha_j\} \times \text{Int}(e)$ una sección local continua de P_G . Haciendo variar j en todos los vértices y e en todas las aristas de G , obtenemos una partición de F_1 , que además está constituida por abiertos en F_1 . Por el Lema de Continuidad (para abiertos) obtenemos una sección local continua $s_1 : F_1 \rightarrow D(G)$ de P_G a partir de cada una de estas secciones.

- iii) Sean dos aristas orientadas e y e' . Si $x \in \text{Int}(e)$, $y \in \text{Int}(e')$ y $(x, y) \in \Gamma(G)$, tenemos dos casos posibles

- 1) Si $e \neq e'$, sea α el vértice final de e y β el vértice inicial de e' . Dado que $y \notin e$, existe un d -camino $\gamma_{\alpha, \beta}$ desde α hasta β que pasa por y . Tomando:
 - o $\gamma_{x, \alpha}$ el camino a velocidad constante entre x y α .
 - o $\gamma_{\beta, y}$ el camino a velocidad constante entre β e y .
De esta manera, tendremos una aplicación continua

$$(\text{Int}(e) \times \text{Int}(e')) \cap \Gamma(G) \rightarrow D(G), \quad (x, y) \mapsto \gamma_{x, \alpha} * \gamma_{\alpha, \beta} * \gamma_{\beta, y}$$

- 2) Si $e = e'$, tomamos $\gamma_{x, y}$ el d -camino a velocidad constante entre x e y y la aplicación continua

$$(\text{Int}(e) \times \text{Int}(e)) \cap \Gamma(G) \rightarrow D(G), \quad (x, y) \mapsto \gamma_{x, y}$$

Similarmente al caso ii), tenemos una sección continua $s_2 : F_2 \rightarrow D(G)$. \square

Finalizamos la sección con el cálculo explícito de $\overrightarrow{TC}(G)$, para el caso en el que G sea conexo por d -caminos, es decir, *fuertemente conexo*, en el lenguaje de los grafos dirigidos. Igualmente al caso clásico, basta conocer su número de agujeros.

Teorema 3.17. *Sea G un grafo dirigido fuertemente conexo y consideremos $b_1(G)$ su 1-número de Betti en homología. Entonces*

$$\overrightarrow{TC}(G) = \min\{b_1(G), 2\}$$

Demostración. Recordemos que para el caso de los grafos, $b_1(G)$ se traduce en el número de agujeros que tiene G . Además, por ser conexo por d -camino, aplicando la Observación 3.15 y la Proposición 3.12, $TC(G) \leq \overrightarrow{TC}(G)$. Los casos a valorar son:

- Si $b_1(G) = 0$ se sigue que G es contráctil y conexo por d -camino. Una simple comprobación nos indica que la única opción es que G es un único vértice. Así, $\overrightarrow{TC}(G) = TC(G) = 0$.
- Si $b_1(G) = 1$, de forma similar al caso anterior, G sólo puede ser un ciclo: G está compuesto por n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y n aristas $\{e_1, \dots, e_n\}$ tales que e_i tiene origen en v_i y final en v_{i+1} , para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, mientras que e_n conecta v_n con v_1 .

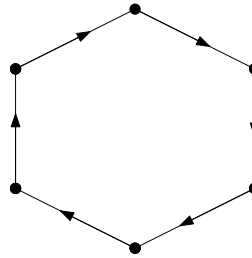


Figura 3.4. La única posible estructura de G salvo isomorfismo, cuando $b_1(G) = 1$.

De esta manera, necesariamente G es isomorfo como d -espacio al lazo dirigido, y análogamente a como lo hicimos con \mathbb{O}^1 , $\overrightarrow{TC}(G) = 1$.

- Si $b_1(G) \geq 2$, por el Ejemplo 2.21 se sigue que $TC(G) = 2 \geq \overrightarrow{TC}(G) \geq TC(G) = 2$.

□

3.3. Homotopía dirigida

Introducimos el concepto de *dihomotopía*, una noción que generaliza la homotopía clásica de espacios topológicos arbitrarios para el caso de los espacios dirigidos. Un elemento clave para ello son las aplicaciones q -graduadas, donde q es una d -aplicación dada, y el objeto fundamental, las equivalencias de dihomotopía, que son considerablemente más restrictivas que las equivalencias homotópicas originales, fruto de la necesidad de adaptarlas al ámbito dirigido. Como cabría esperar, la complejidad topológica dirigida es un invariante de dihomotopía, y para el caso de ser dihomotópicamente equivalente a un punto, se hablará de d -espacios dicontráctiles. Para comenzar a trabajar debemos presentar algunos preliminares teóricos. Un primer objeto que introducimos es, para un d -espacio X y dos elementos $x, y \in X$, el conjunto de d -camino con origen

en x y final en y $D(X)(x, y) := \{\gamma \in D(X) : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$. Recordando otra noción dirigida básica, si tenemos una d -aplicación $f : X \rightarrow Y$, obtenemos a partir de ella:

$$\Gamma(f) : \Gamma(X) \rightarrow \Gamma(Y), \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$$

El hecho de que f es d -aplicación da lugar a la buena definición de $\Gamma(f)$, y dado que $\Gamma(f) = (f \times f)|_{\Gamma(X)}$ obtenemos su continuidad. Por definición tenemos además la igualdad $\Gamma(f) \circ P_X = P_Y \circ D(f)$.

Dada una familia $\{X_j\}_{j \in J}$ de espacios topológicos, se define su *unión disjunta* o *coproducto* como $\sqcup_{j \in J} X_j = \cup_{j \in J} (X_j \times \{j\})$. Se idea este concepto para tener varias copias del mismo espacio topológico X , dado que la unión estándar de X un número arbitrario de veces nos devuelve el mismo espacio. Podemos dotar a la unión disjunta de una topología como sigue: considerando primero la inclusión $inc_j : X_j \rightarrow \sqcup_{j \in J} X_j$, de tener $A \subseteq \sqcup_{i \in I} X_i$, establecemos que A es abierto si y sólo si $A \cap X_j = inc_j^{-1}(A)$ es un abierto en X_j , para todo $j \in J$. De esta manera tendremos la continuidad de todas las inclusiones, y una función $f : \sqcup_{j \in J} X_j \rightarrow Y$ será continua si y sólo si $f|_{X_j} = f \circ inc_j$ es continua en X_j , para todo j .

La principal disyuntiva entre equivalencia de homotopía clásica y dirigida tiene, como veremos, su raíz en el empleo de las aplicaciones q -graduadas. Dada una d -aplicación $q : X \rightarrow Y$, tendremos que una aplicación q -graduada es una aplicación continua

$$Q : D(Y)^q \rightarrow D(X)$$

donde $D(Y)^q := \sqcup_{(x, x') \in \Gamma(X)} D(Y)(q(x), q(x'))$, verifica los siguientes contenidos:

$$Q(D(Y)(q(x), q(x'))) \subseteq D(X)(x, x'), \quad (x, x') \in \Gamma(X)$$

Observación 3.18. En la definición original establecida en [6], se exige además que Q deba variar con continuidad respecto de $(x, x') \in \Gamma(X)$. Nosotros suprimimos esta condición por no ser necesaria para los objetivos planteados para esta memoria.

Antes de desarrollar estas nuevas equivalencias establecemos la siguiente notación para una aplicación q -graduada como la anterior. Dado $(x, x') \in \Gamma(X)$, denotaremos como sigue a la aplicación:

$$Q_{x, x'} := Q|_{D(Y)(q(x), q(x'))} : D(Y)(q(x), q(x')) \rightarrow D(X)(x, x')$$

Definición 3.19. Sean X e Y dos d -espacios. Una equivalencia de dihomotopía entre X e Y es una cuaterna (f, g, F, G) donde

- i) $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ son d -aplicaciones e inversas homotópicas la una de la otra.
- ii) $F : D(Y)^f \rightarrow D(X)$ es f -graduada tal que para todo $(x, x') \in \Gamma(X)$, $F_{x, x'} : D(Y)(f(x), f(x')) \rightarrow D(X)(x, x')$ es una equivalencia de homotopía con inverso homotópico

$$D(f) : D(X)(x, x') \rightarrow D(Y)(f(x), f(x')), \quad \alpha \mapsto f \circ \alpha$$

iii) $G : D(X)^g \longrightarrow D(Y)$ es g -graduada tal que para todo $(y, y') \in \Gamma(Y)$, $G_{y, y'} : D(X)(g(y), g(y')) \longrightarrow D(Y)(y, y')$ es una equivalencia de homotopía con inversa homotópica

$$D(g) : D(Y)(y, y') \longrightarrow D(X)(g(y), g(y')), \quad \beta \mapsto g \circ \beta$$

Diremos entonces que X e Y son dihomotópicamente equivalentes.

Las restricciones ii) y iii) pueden parecer demasiado abstractas para una definición que en su versión clásica es tan simple. No obstante, las mismas responden a la necesidad de que además de generalizar la homotopía clásica, los correspondientes espacios de d -camino sean también del mismo tipo de homotopía. En relación a esta idea, a continuación presentamos una analogía dirigida al hecho de que dos espacios homeomorfos tienen mismo tipo homotópico.

Proposición 3.20. Sean X e Y dos d -espacios isomorfos. Entonces X e Y son dihomotópicamente equivalentes.

Demostración. Tenemos dos d -aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ con $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$, así que en particular son inversos homotópicos el uno del otro. Veamos que se verifica la condición ii), y iii) se concluirá de forma análoga. Consideramos para cada $(x, x') \in \Gamma(X)$ la aplicación continua (por serlo f^{-1})

$$F_{x, x'} = D(f^{-1}) : D(Y)(f(x), f(x')) \longrightarrow D(X)(x, x'), \quad \alpha \mapsto f^{-1} \circ \alpha$$

de manera que, por la topología definida en la unión disjunta de espacios, obtenemos de forma natural la aplicación continua

$$F : D(Y)^f \longrightarrow D(X), \quad F|_{D(Y)(x, x')} = F_{x, x'}$$

Por construcción, F es f -graduada. Asimismo por definición tendremos que $F_{x, x'} \circ D(f) = 1_{D(X)(x, x')}$ y $D(f) \circ F_{x, x'} = 1_{D(Y)(f(x), f(x'))}$, esto es que ambos son homeomorfismos, en particular equivalencias homotópicas, siendo una la inversa de la otra. De esta manera se obtiene la cuaterna (f, g, F, G) . \square

El recíproco de este resultado no es cierto en general. Encontramos un contraejemplo tomando el espacio topológico unipuntual $*$ con la d -estructura obvia y el intervalo dirigido \vec{I} , los cuales obviamente no son homeomorfos, y por ende tampoco isomorfos. De forma inmediata podemos tomar las dos equivalencias de homotopía $f : \vec{I} \longrightarrow *$ y $g : * \longrightarrow \vec{I}$, con $g(*) = 0$, siendo una inversa homotópica de la otra. Definimos así $F : D(*)^f \longrightarrow D(I)$ de manera que si $t \leq t'$

$$F_{t, t'} : D(*)(*, *) \longrightarrow D(I)(t, t'), \quad \varepsilon_* \mapsto u_{t, t'}$$

siendo $u_{t, t'}(s) = (1 - s)t + st'$, por lo que se tiene su continuidad por la Ley Exponencial, obteniendo así que F es continua. Por otro lado tenemos

$$D(f) : D(I)(t, t') \longrightarrow D(*)(*, *), \quad \alpha \mapsto \varepsilon_*$$

Es inmediato que $D(f) \circ F_{t, t'} = 1_{D(*)(*, *)}$, mientras que $(F_{t, t'} \circ D(f))(\alpha) = u_{t, t'}$. Ahora bien, podemos construir una homotopía

$$H : D(I)(t, t') \times I \longrightarrow D(I)(t, t'), \quad (\alpha, s) \mapsto (1 - s)u_{t, t'} + s\alpha$$

Tenemos claramente que $H : u_{t, t'} \simeq 1_{D(I)(t, t')}$.

Finalmente, como $D(I)(0, 0) = \{\varepsilon_0\}$, sea $G : D(I)^g \longrightarrow D(*)$, que dado que ambos son espacios unipuntuales, solo se puede definir de la siguiente manera:

$$G_{*,*} : \{\varepsilon_0\} \longrightarrow D(*)(*, *), \quad \varepsilon_0 \mapsto \varepsilon_*$$

Necesariamente la aplicación $D(g) : \{\varepsilon_*\} \longrightarrow \{\varepsilon_0\}$ es su aplicación inversa, y tendremos que una es la inversa homotópica de la otra.

Hemos construido así la cuaterna (f, g, F, G) que nos asegura que $\overrightarrow{T\check{C}}$ y $*$ son dihomotópicamente equivalentes, sin ser isomorfos. \square

Es sencillo comprobar que $\overrightarrow{T\check{C}}(X)$ no es un invariante homotópico clásico: tomando sobre la circunferencia unidad la d -estructura formada únicamente por las aplicaciones constantes se concluye sencillamente que su complejidad topológica dirigida es 0, teniéndose por otro lado que $\overrightarrow{T\check{C}}(S^1) = 1$. Sin embargo, veamos que efectivamente para dos d -espacios dihomotópicamente equivalentes sus complejidades topológicas dirigidas coinciden:

Teorema 3.21. *Sean X e Y dos d -espacios dihomotópicamente equivalentes. Entonces $\overrightarrow{T\check{C}}(X) = \overrightarrow{T\check{C}}(Y)$.*

Demostración. Consideremos una equivalencia de dihomotopía (f, g, F, G) entre X e Y . Veremos que $\overrightarrow{T\check{C}}(X) \leq \overrightarrow{T\check{C}}(Y)$ y tendremos la otra desigualdad análogamente por simetría. Suponemos el caso no trivial $\overrightarrow{T\check{C}}(Y) = n < \infty$. Sea entonces una partición $\Gamma(Y) = \cup_{j=0}^n F_j$ teniéndose para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ una sección local continua $\sigma_j : F_j \longrightarrow D(Y)$ de P_Y . Sea

$$F'_j := \{(x, x') \in \Gamma(X) : \Gamma(f)(x, x') \in F_j\} = (\Gamma(f))^{-1}(F_j)$$

Claramente $\{F'_j\}_{j=0}^n$ constituye una partición de $\Gamma(X)$. Definimos

$$\sigma'_j := F \circ \sigma_j \circ \Gamma(f)|_{F'_j} : F'_j \longrightarrow D(X)$$

La buena definición de estas aplicaciones radica en la definición de $\sigma_j \circ \Gamma(f)|_{F'_j} : F'_j \longrightarrow D(Y)$, de forma que para cada $(x, x') \in \Gamma(X)$, $(\sigma_j \circ \Gamma(f)|_{F'_j})(x, x') = \sigma_j(f(x), f(x')) \in D(Y)(f(x), f(x')) \subseteq D(Y)^f$, usando que F es f -graduada. La continuidad es inmediata por ser composición de continuas. Así observamos que, de nuevo por ser F f -graduada

$$\begin{aligned} (P_X \circ \sigma'_j)(x, x') &= P_X(F(\sigma_j(f(x), f(x')))) = P_X(F_{x, x'}(\sigma_j(f(x), f(x')))) = \\ &= (F_{x, x'}(\sigma_j(f(x), f(x'))))(0), F_{x, x'}(\sigma_j(f(x), f(x')))(1) = (x, x'), (x, x') \in F'_j \end{aligned}$$

con lo cual $P_X \circ \sigma'_j = inc_j$, para todo $j \in \{0, \dots, n\}$. Se sigue que $\overrightarrow{T\check{C}}(X) \leq n$.

\square

Seguidamente nos centramos en aquellos d -espacios dihomotópicamente equivalentes al espacio unipuntual, que denominamos *dicontráctiles*. Por el resultado anterior, si X es *dicontráctil*, entonces $\overrightarrow{TC}(X) = 0$. Sin embargo, el recíproco es falso en general: como mencionamos anteriormente, si sobre la circunferencia unidad tomamos la d -estructura formada únicamente por las constantes, su complejidad topológica dirigida es 0. Sin embargo, S^1 no es *contráctil*, luego el citado d -espacio no puede ser *dicontráctil*. Para comprobar en qué situaciones sí se trata de una equivalencia debemos hablar de espacios dirigidos libres de lazos. Un d -espacio X se dice que es *libre de lazos* si para todo $x \in X$, $D(X)(x, x) = \{\varepsilon_x\}$. Entre los ejemplos de d -espacios libres de lazos se encuentran \overrightarrow{I} y $\overrightarrow{S^1}$.

Proposición 3.22. *Sea X un d -espacio libre de lazos y *contráctil*. Entonces X es *dicontráctil* si y sólo si $\overrightarrow{TC}(X) = 0$.*

Demostración. La implicación a la derecha es siempre cierta. Partiendo de que $\overrightarrow{TC}(X) = 0$, existe $\sigma : \Gamma(X) \rightarrow D(x)$ continua con $P_X \circ \sigma = 1_{\Gamma(X)}$. Por otra parte, al ser X *contráctil* existe $x_0 \in X$ y dos equivalencias de homotopía $f : X \rightarrow \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \rightarrow X$ (siendo g la inclusión necesariamente) una inversa homotópica de la otra. Observemos primero que

$$D(\{x_0\})^f = \sqcup_{(x,x') \in \Gamma(X)} D(\{x_0\})(x_0, x_0) = \sqcup_{(x,x') \in \Gamma(X)} \{\varepsilon_{x_0}\}$$

donde $\varepsilon_{x_0} : I \rightarrow X$ es el camino constante en x_0 . Procedamos ahora a dar F y G para obtener una equivalencia de dihomotopía. Fijado $(x, x') \in \Gamma(X)$, consideramos $F_{x,x'} : D(\{x_0\})(x_0, x_0) \rightarrow D(X)(x, x')$, donde $F_{x,x'}(x_0, x_0) = \sigma(x, x')$ es constante, luego continua. En este caso tenemos que

$$D(f) : D(X)(x, x') \rightarrow D(\{x_0\})(x_0, x_0), \quad \alpha \mapsto \varepsilon_{x_0}$$

resultando de manera directa que $D(f) \circ F_{x,x'} = 1_{D(\{x_0\})(x_0, x_0)}$. Para concluir que son inversas homotópicas, tomamos $H : D(X)(x, x') \times I \rightarrow D(X)(x, x')$ dada por

$$H(\gamma, t)(s) := \begin{cases} \gamma(s), & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \sigma(\gamma(\frac{t}{2}), \gamma(1 - \frac{t}{2}))(\frac{s - \frac{t}{2}}{1 - t}), & \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ \gamma(s), & 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

El único punto donde podría ser conflictiva la buena definición y continuidad de H es en $t = 1$. Pero dado que X es libre de lazos, se comprueba de manera sencilla que, efectivamente, H es una homotopía bien definida entre $F_{x,x'} \circ D(f)$ y $1_{D(X)(x,x')}$.

Para terminar, dado que $D(X)^g = \sqcup_{(x_0, x_0) \in \Gamma(\{x_0\})} D(X)(x_0, x_0) = \{\varepsilon_{x_0}\}$, solo podremos definir la constante

$$G = G_{x_0, x_0} : \{\varepsilon_{x_0}\} \rightarrow D(\{x_0\})(x_0, x_0)$$

y claramente es inversa homotópica de $D(g) : D(\{x_0\})(x_0, x_0) \rightarrow \{\varepsilon_{x_0}\}$. \square

Observación 3.23. Siguiendo el razonamiento de esta prueba se concluye igualmente que para un d -espacio libre de lazos X que cumple $\overrightarrow{TC}(X) = 0$ tendremos que para todo $x, y \in \Gamma(X)$ el espacio $D(X)(x, y)$ es contráctil. Los detalles de la prueba están implícitos en la demostración del resultado anterior y se dejan al lector.

Observación 3.24. En la proposición anterior se puede sustituir la hipótesis de contractibilidad por la existencia de $x_0 \in X$ tal que para cada $x \in X$, $D(x, x_0) \neq \emptyset$. En efecto, si tenemos una sección global $\sigma : \Gamma(X) \rightarrow D(X)$ de P_X , podemos definir $\sigma' : X \times X \rightarrow D(X)$, donde $\sigma'(x, y) := \overline{\sigma(x_0, x)} * \sigma(x_0, y)$, la cual es una sección global continua de π . Esto significa que $TC(X) = 0$, o equivalentemente, que X es contráctil.

Ejemplo 3.25. Teniendo en cuenta resultados anteriores, dos implicaciones directas de la Proposición 3.22 son:

- $(\mathbb{O}^1)^n$ y $(\mathbb{O}^1)^m$ no son dihomotópicamente equivalentes, cuando $n \neq m$.
- Para $n \geq 3$, $(\mathbb{O}^1)^n$ no es dihomotópicamente equivalente a ningún grafo dirigido.

3.4. Esferas dirigidas

En esta última sección dotaremos a la n -esfera S^n de una estructura dirigida heredada del d -espacio $\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$ que trabajamos inicialmente, para lo cual deberemos calcular previamente la complejidad del mismo. Finalmente se demuestra que la complejidad topológica dirigida de las esferas es 1, para cualquier $n \geq 1$.

Lema 3.26. Si $n \geq 0$ entonces $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) = 0$.

Demostración. Daremos explícitamente una sección global continua de $P_{\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}}$. Considerando la relación de orden parcial “ \leq ” que teníamos sobre \mathbb{R}^n , observamos que $\Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2(n+1)} : x \leq y\}$. El contenido a la derecha es inmediato por definición de la d -estructura. Y para dos tuplas x e y tales que $x \leq y$, podemos tomar como d -camino que los conecta el segmento con origen en x y final en y . Así, dado $(x, y) = ((x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n)) \in \Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}})$, definimos

$$\sigma^1 : \Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) \rightarrow D(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}), \sigma^1(x, y)(t) = (\sigma^1(x, y)_0 * \dots * \sigma^1(x, y)_n)(t), \text{ siendo}$$

$$\sigma^1(x, y)_k(t) = (y_0, \dots, y_{k-1}, (1-t)x_k + ty_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Como σ^1 es una concatenación de segmentos, se obtiene la continuidad de forma inmediata. Finalmente, por definición $(\sigma^1(x, y)(0), \sigma^1(x, y)(1)) = (x, y)$. Luego es sección global continua de $P_{\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}}$. \square

Observación 3.27. Aportamos una versión “opuesta” de σ^1 como sigue:

$$\sigma^2 : \Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) \rightarrow D(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}), \sigma^2(x, y)(t) = (\sigma^2(x, y)_0 * \dots * \sigma^2(x, y)_n)(t), \text{ siendo}$$

$$\sigma^2(x, y)_k(t) = (x_0, \dots, x_{n-k-1}, (1-t)x_{n-k} + ty_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_n)$$

que también requeriremos a continuación.

Definición 3.28. Dado un natural $n \geq 1$, la n -esfera dirigida es el d -espacio $\overrightarrow{S}^n = (\partial I^{n+1}, D(\overrightarrow{S}^n))$, siendo ∂I^{n+1} la frontera del $(n + 1)$ -cubo unidad $I^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $D(\overrightarrow{S}^n)$ la d -estructura inducida por $\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Notemos que S^n y ∂I^{n+1} son espacios homeomorfos, luego a efectos topológicos la definición establecida tiene perfecto sentido. Ahora fijaremos una notación previa a obtener el valor de la complejidad de las d -esferas. Una tupla $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ será denotada por $x_0 \cdots x_n$ por brevedad. Indicaremos con $-$ a cualquier valor arbitrario del intervalo abierto $(0, 1)$. De esta manera, un elemento del borde ∂I^{n+1} , $x_0 \cdots x_n$, verificará que $x_i \in \{0, -, 1\}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ y además existe j tal que $x_j \in \{0, 1\}$. Finalmente, para un natural $n \geq 0$, establecemos $[n] = \{0, \dots, n\}$.

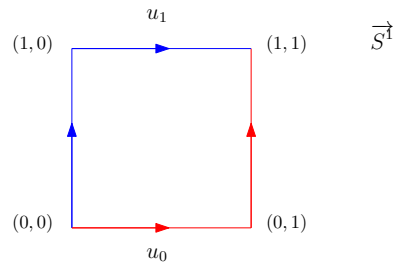
Procedemos a dar la complejidad topológica de las esferas dirigidas, con lo que damos por concluidos el capítulo y la memoria. Un aspecto bastante llamativo es que a diferencia de la complejidad topológica clásica, en el ámbito dirigido la paridad de la dimensión de la esfera es irrelevante. Veámoslo:

Teorema 3.29. $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S}^n) = 1$, para todo $n \geq 1$.

Demostración. Comenzamos viendo que $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S}^n) \geq 1$. Una simple comprobación nos indica que \overrightarrow{S}^n es libre de lazos. Asimismo, si fijamos $n - 1$ puntos $x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$, podremos construir el siguiente homeomorfismo:

$$\phi : D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11) \longrightarrow D(\overrightarrow{S}^n)(00x_2 \cdots x_n, 11x_2 \cdots x_n)$$

definido como $\phi(\alpha)(t) := \alpha_0(t)\alpha_1(t)x_2 \cdots x_n$. Si consideramos la Observación 3.23, nos basta probar que $D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11)$ no es contráctil. Observemos que este espacio está dividido entre los caminos de la zona azul y los de la zona roja tal y como se muestra en la figura.



De suponer que es contráctil, existirá $u_0 \in D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11)$ tal que $1_{D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11)} \simeq \varepsilon_{u_0}$. Sea $H : D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11) \times I \longrightarrow D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11)$ una homotopía tal que $H(u, 0) = u_0$ y $H(u, 1) = u$. Ahora bien, fijamos $u_1 \in D(\overrightarrow{S}^1)(00, 11)$. Suponemos sin pérdida de generalidad que u_0 es un camino de la zona roja y u_1 de la azul. Podremos construir así una homotopía sobre el borde del cuadrado dada por

$$H' : I \times I \longrightarrow \partial I^2, \quad H'(t, s) = H(u_1, t)(s)$$

Unos simples cálculos nos indican, por definición, que $H' : u_0 \simeq u_1 \text{ rel. } \{0, 1\}$. Esto es una contradicción, sencilla de concluir empleando la función grado y

el *grupo fundamental* de S^1 , ambos conceptos impartidos en el Grado en Matemáticas. De esta manera $D(\overrightarrow{S^1})(00, 11)$ no puede ser contráctil, con lo que $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S^1}) \geq 1$.

Veamos ahora que $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S^n}) \leq 1$. Definimos

$$B_i := \{(x, y) \in \Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) : \sigma^i(x, y)(I) \subseteq \partial I^{n+1}\} \subseteq \Gamma(\overrightarrow{S^n}), \quad i \in \{1, 2\}$$

donde $\sigma^i : \Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) \rightarrow D(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}})$, $i \in \{1, 2\}$ son las dos secciones globales continuas de $P_{\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}}$ dadas en el Lema 3.26 y la Observación 3.27. Es inmediato que $\sigma^i|_{B_i} : B_i \rightarrow D(\overrightarrow{S^n})$ es sección local continua de $P_{\overrightarrow{S^n}}$ sobre B_i cuando $i \in \{1, 2\}$. Basta ver que $\Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) = B_1 \cup B_2$. Equivalentemente, si $U_i = \Gamma(\overrightarrow{\mathbb{R}^{n+1}}) \setminus B_i$ para $i \in \{1, 2\}$, veamos que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Para empezar, cabe destacar que por convexidad del $(n+1)$ -cubo y definición de σ^1 , U_1 son los pares $(x, y) \in \Gamma(\overrightarrow{S^n})$ tales que $\sigma^1(x, y)((0, 1))$ está contenido en el interior de I^{n+1} . Añadiendo el hecho de ser d -camino, todo elemento $(x_0 \cdots x_n, y_0 \cdots y_n) \in U_1$ satisface que existe un $j \in [n]$ tal que:

- $x_j < y_j$.
- $y_i = -$, para todo $i \in [n]$ con $i < j$.
- $x_i = -$, para todo $i \in [n]$ con $i > j$.

Análogamente, para todo $(x_0 \cdots x_n, y_0 \cdots y_n) \in U_2$ existe un $k \in [n]$ cumpliendo:

- $x_k < y_k$.
- $x_i = -$, para todo $i \in [n]$ con $i < k$.
- $y_i = -$, para todo $i \in [n]$ con $i > k$.

Supongamos que existe $(x, y) = (x_0 \cdots x_n, y_0 \cdots y_n) \in U_1 \cap U_2$. Tendremos $j, k \in [n]$ cumpliendo:

$$(x, y) = (x_0 \cdots x_j - \cdots -, - \cdots - y_j \cdots y_n) = (- \cdots - x_k \cdots x_n, y_0 \cdots y_k - \cdots -)$$

De suponer que $j < k$, se tiene que $x = - \cdots -$, y si $j > k$ $y = - \cdots -$. En ambos casos x o y estarían en el interior del cubo, lo cual es un absurdo. Por tanto $j = k$, lo que implica que $(x, y) = (- \cdots - x_j - \cdots -, - \cdots - y_j - \cdots -)$. Por ser elementos del borde y $x_j < y_j$, necesariamente $(x, y) = (- \cdots - 0 - \cdots -, - \cdots - 1 - \cdots -)$. Pero un par con estas características no puede estar en $\Gamma(\overrightarrow{S^n})$. Basta observar el caso $n = 1$, de manera que no existe ningún d -camino entre dos puntos interiores a caras opuestas del cuadrado. Concluimos que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, luego $B_1 \cup B_2 = \Gamma(\overrightarrow{S^n})$. Tendremos así que $\overrightarrow{TC}(\overrightarrow{S^n}) \leq 1$. \square

Bibliografía

- [1] A. Borat, M. Grant. Directed topological complexity of spheres. *J. Appl. Comput. Topol.* 4, 3-9, 2020.
- [2] K. Borsuk. *Theory of Retracts*. PWN, 1967.
- [3] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann Category*. American Mathematical Society, 103^o edición, 2003.
- [4] M. Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.* 29 (2), 211-221, 2003.
- [5] J.M. García Calcines. A note on covers defining relative and sectional categories. *Topol. Appl.* 265, 14 p., 2019.
- [6] E. Goubault, M. Farber and A. Sagnier. Directed topological complexity. *J. Appl. Comput. Topol.* 4, 11-27, 2020.
- [7] O. Hanner. Some theorems on absolute neighborhood retracts. *Ark. Mat.*, 389-408, 1951.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 83-84, 2002.
- [9] S.T. Hu. *Theory of Retracts*. Wayne State University Press, 1965.
- [10] J. Munkres. *Topología*. Prentice Hall, 2^a edición, 2000.
- [11] E. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Co, 1966.
- [12] T. Srinivasan. On the Lusternik-Schnirelmann category of Peano continua. *Topol. Appl.* 160, 1742-1749, 2013.
- [13] T. Srinivasan. The Lusternik-Schnirelmann category of metric spaces. *Topol. Appl.* 167, 87-95, 2014.
- [14] H. Stone. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 977-982, 1948.

A research on generalized and directed



topological complexity

Marcos Isidro Tejera

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0100968446@ull.edu.es

Abstract

One notion that has aroused great interest within the applications of Algebraic Topology is that of topological complexity, a numerical homotopy invariant with motivation in different problems related to mechanical systems and Robotics. In this memory we will delve into the study of two versions of it. We will begin by varying from the original definition to the generalized topological complexity. The second objective of the paper lies in the concept of directed topological spaces, conceived as a theoretical framework for those physical and computational processes where time is not reversible. For them we establish the directed topological complexity.

Classical Topological Complexity

Given a mechanical system, we can consider the set of all its possible positions as a topological space, called the *configuration space associated with the system*.

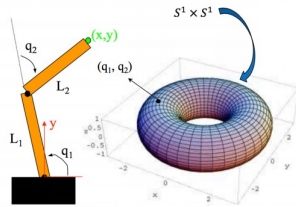


Figure 1: The configuration space of a robotic arm: the torus T^2 .

A question related to this kind of spaces is the so called *motion planning problem*: to build an algorithm capable of returning a continuous movement between any two possible positions of the system. To establish a mathematical context of this question, we must consider, for a path-connected configuration space X , the continuous map

$$\pi: X^I \rightarrow X \times X, \alpha \mapsto (\alpha(0), \alpha(1))$$

We define the *topological complexity* of X as the minimal non-negative integer $TC(X) = n$ such that there exists an open covering $\{U_j\}_{j=0}^n$ of $X \times X$ such that for any $j \in \{0, \dots, n\}$, there exists a continuous section $s_j: U_j \rightarrow X^I$ of π , or equivalently, verifying the commutativity of the diagram:

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{inc_j} & X \times X \\ & \searrow s_j & \downarrow \pi \\ & & X^I \end{array}$$

If no such n exists we will set $TC(X) = \infty$. Finding the topological complexity of a given configuration space means knowing the discontinuity of a possible motion planning over it.

ANR Spaces and Generalized Topological Complexity

Replacing in the definition above open coverings by arbitrary coverings we obtain the *generalized topological complexity* of X , denoted by $TC_g(X)$.

Definition. Let Y be a metric space. We say that Y is an ANR space, denoted by $Y \in ANR$, if for every metric space X and closed embedding $f: Y \rightarrow X$, there exists an open neighborhood $f(Y) \subseteq U \subseteq X$ which is a retract of X . This condition is known as *f(Y) is a neighborhood retract of X*.

Theorem. Let X be a path-connected space having the homotopy type of an ANR space. Then

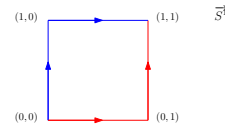
$$TC(X) = TC_g(X)$$

Directed Topological Complexity

In a wide range of physical and computational processes its essential to keep in mind that "time is not reversible". To give and adequate theoretical framework to this idea, the concept of directed space is constructed. A *directed topological space* $(X, D(X))$ is a topological space X equipped with a set $D(X) \subseteq X^I$ of continuous paths, called *directed paths* or *d-paths*, satisfying the following conditions:

- Every constant map $\varepsilon: I \rightarrow X$ is directed.
- $D(X)$ is closed under composition with continuous non-decreasing maps from $I \rightarrow I$
- $D(X)$ is closed under concatenation.

We can build a good first example over the n -dimensional sphere S^n , defining a suitable *d-structure*, obtaining as result the *directed n-sphere* S^n .



Given a *d-space* X we establish the next continuous map:

$$P_X: D(X) \rightarrow X \times X, \alpha \mapsto (\alpha(0), \alpha(1))$$

Analogously to the classical case, we define the *directed topological complexity* of X as the minimal non-negative integer $\overline{TC}(X) = n$ such that there exist an arbitrary covering $\{A_j\}_{j=0}^n$ of $\Gamma(X) = P_X(D(X))$ and continuous sections $s_j: A_j \rightarrow D(X)$ of P_X , for any $j \in \{0, \dots, n\}$.

Theorem. Let G be a strongly connected directed graph and $b_1(G)$ its 1st Betti number. Then $\overline{TC}(G) = \min\{b_1(G), 2\}$.

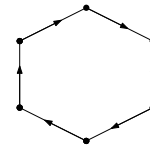


Figure 2: The only possible structure of G in the case $b_1(G) = 1$, up to isomorphism.

Theorem. Let $n \geq 1$ be a natural number. Then $\overline{TC}(S^n) = 1$.

References

- [1] A. Borat, M. Grant. Directed topological complexity of spheres. *J. Appl. Comput. Topol.* 4, 3-9, 2020.
- [2] K. Borsuk. *Theory of Retracts*. PWN, 1967.
- [3] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann Category*. American Mathematical Society. 103 edition, 2003.