

Rebeka Luis Hernández

*Modelos de localización de servicios
en redes*

Facility location models on networks

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2020

DIRIGIDO POR
Joaquín Sicilia Rodríguez

Joaquín Sicilia Rodríguez
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A Joaquín Sicilia Rodríguez, por profundizar y transmitirme los conocimientos de Investigación Operativa necesarios para llevar a cabo la realización de este proyecto. Agradecerle su total disposición para fijar las tutorías y resolver, a través de correo electrónico, las dudas que se me han presentado. Sin su implicación y paciencia esto no hubiera sido posible.

A mis compañeros del grado Anabel y Carlos por ayudarme a resolver los obstáculos que se han ido presentando en la elaboración de esta memoria.

A mi familia por haberme apoyado y ayudado en todo momento.

A mis amigos por estar presentes siempre que necesitaba un momento de desconexión.

A Nacho, por dedicar un rato de su tiempo libre a revisar este trabajo.

Muchas gracias a todos.

Rebeka Luis Hernández
La Laguna, 7 de julio de 2020

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria se estudian diferentes modelos de localización de servicios, tanto deseados como no deseados, en redes o grafos pesados. Se comienza exponiendo la notación y conceptos básicos, los cuales nos permiten formular los problemas de localización de centros y medianas en redes. En el primer capítulo, se proponen diferentes métodos para determinar la ubicación óptima de los puntos donde localizar los servicios (centros) bajo el criterio de minimizar la distancia máxima a recorrer desde el servicio a los vértices del grafo, y bajo el criterio de minimizar la suma de las distancias ponderadas desde el servicio (medianas) a todos los vértices del grafo. En el segundo capítulo, se plantean los problemas de localización de servicios no deseados (anti-centros y anti-medianas) en grafos y se presentan procedimientos para abordar la solución de estos problemas.

Palabras clave: *Problemas de localización en grafos – Centros y medianas – Anti-centros y anti-medianas – ...*

Abstract

In this report, different service location models (desirable and undesirable) are studied in networks or weighted graphs. It begins by exposing the notation and basic concepts, that allow us to formulate the problems of locating centers and medians in networks. In the first chapter, different methods are proposed to determine the optimal location of the points to locate the services (centers) under the criterion of minimizing the maximum distance to travel from the service to the vertices of the graph, and under the criterion of minimizing the sum of the weighted distances from the service (median) to all the vertices of the graph. In the second chapter, the problems of locating undesirable services (anti-centers and anti-medians) are formulated in graphs and procedures are presented to address the solution of these problems.

Keywords: *Location problems in graphs – Centers and medians – Anti-centers and anti-medians – . . .*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Problemas de localización de servicios deseados	1
1.1. Notación y conceptos básicos	1
1.2. La Localización de centros	2
1.2.1. Separaciones	2
1.2.2. Centro y radio	4
1.2.3. Centro absoluto	7
1.2.4. Múltiples centros (p-centros)	18
1.2.5. Los p-centros absolutos	22
1.3. La Localización de medianas	22
1.3.1. La mediana	22
1.3.2. La mediana absoluta	25
1.3.3. Múltiples medianas (p-medianas)	26
1.3.4. Las p-medianas absolutas	27
1.3.5. El problema de la p-mediana como problema de optimización entera	28
2. Problemas de localización de servicios no deseados	29
2.1. La localización de centro no deseado	30
2.2. La localización de la mediana no deseada	34
2.3. La mediana absoluta no deseada	35
Bibliografía	49
Poster	51

Introducción

A lo largo de los años, nos hemos planteado en innumerables ocasiones problemas de localización de instalaciones tanto en el sector público (al intentar localizar hospitales, estaciones de policía, bomberos, etc) como en el sector privado al ubicar comercios, nuevas oficinas, fábricas, empresas, etc. Lógicamente, se pretende situar las instalaciones en aquellos lugares que nos faciliten las actividades comerciales, logísticas o empresariales que se vayan a realizar. El objetivo de estos problemas consiste en optimizar uno o más criterios relacionados con la localización de los servicios y de los clientes, para así obtener la mejor ubicación. La mayor parte de las ocasiones, los criterios consisten en minimizar o maximizar la distancia entre las instalaciones y los clientes.

La disciplina matemática que se encarga de estudiar este tipo de problemas se denomina Teoría de la Localización. Ésta se dedica a desarrollar los modelos matemáticos apropiados para así encontrar la mejor ubicación donde establecer uno o más servicios optimizando alguna medida de efectividad. Estos problemas empiezan a ser estudiados en el siglo XVII por los matemáticos Fermat y Torriceli. Así, Fermat planteó el problema de "Dados tres puntos en el plano, encontrar el cuarto punto tal que su distancia al resto sea mínima". La solución puede encontrarse mediante una técnica geométrica sencilla y esa solución se conoce como punto de Torricelli o de Fermat.

La Teoría de la Localización no empieza a tomar una dimensión más amplia hasta que ciertos economistas tomán interés e incorporan factores de carácter socioeconómico. Por ejemplo, Alfred Weber [8] estudió el problema de encontrar el lugar óptimo donde localizar una industria que debía abastecer a un solo mercado y con dos fuentes diferentes que podían suministrar el material. De este modo, se le atribuye a Weber [7] el origen de la teoría de la localización moderna. Cabe destacar el trabajo realizado por Hakimi [4], quien introdujo los conceptos de centro y mediana para los problemas de localización sobre redes.

En general, los problemas de localización pueden agruparse en tres grupos: localización continua, localización discreta y localización en redes.

- Localización continua: las instalaciones se pueden ubicar en cualquier lugar de un espacio n dimensional considerado.
- Localización discreta: el conjunto de lugares donde puede ser ubicado uno o más servicios es finito y conocido.
- Localización en redes: los puntos de demanda están sobre los vértices de un grafo y los servicios deben situarse sobre los nodos o aristas del grafo.

Dentro de cada grupo, para localizar los nuevos servicios existe una amplia variedad de métodos y procedimientos que nos ayudan a determinar las mejores localizaciones para los servicios que se desean ubicar. En este trabajo nos centraremos principalmente en problemas de localización en redes. Podemos diferenciar dos tipos de problemas de localización en redes: ubicar servicios deseados o servicios no deseados.

- En los problemas de localización de servicios deseados, los objetivos suelen ser minimizar la máxima distancia al resto de vértices del grafo, o bien minimizar la suma de las distancias al resto de vértices.
- En los problemas de localización de servicios no deseados, los objetivos suelen ser maximizar la mínima distancia al resto de vértices del grafo, o bien maximizar la suma de las distancias al resto de vértices.

En este trabajo, describiremos algunos problemas de localización en redes atendiendo a la clasificación anterior. Para cada problema desarrollaremos un procedimiento que nos permita obtener la mejor ubicación o, en el caso de que sea dificultoso obtener una solución, daremos una formulación de programación matemática que nos ofrezca la mejor solución.

Problemas de localización de servicios deseados

El aumento de la población y el crecimiento de las demandas sociales tiene como consecuencia el incremento de los servicios públicos o privados con el fin de intentar satisfacer las necesidades de la población. El problema consiste en buscar la ubicación de dichos servicios para que pueda satisfacer a toda la población o en su defecto a la mayor cantidad de personas, pero teniendo en cuenta la eficiencia económica en la ubicación de los mismos, es decir, determinar la localización óptima de acuerdo con algún criterio. Los problemas más estudiados dentro de la localización de servicios deseados son el problema del centro y el problema de la mediana.

El problema del centro consiste en localizar un punto en el grafo que hace mínima la distancia hasta el usuario más lejano. El problema de la mediana trata de localizar el servicio haciendo mínima la distancia media a los usuarios.

En la siguiente sección presentamos la notación que usaremos a lo largo del trabajo y los conceptos básicos fundamentales de la Teoría de Grafos sobre los cuales nos apoyaremos para el estudio de la localización en redes.

1.1. Notación y conceptos básicos

Se define un grafo como un conjunto de vértices o nodos junto con un conjunto de aristas o arcos que unen los diferentes vértices. Así, se emplea la notación $G = (V, A)$ al grafo donde, $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ representa el conjunto de vértices y $[v_i, v_j] = e_{ij}$ el conjunto de aristas, con $n = |V|$ y $m = |A|$.

Esta estructura permite representar relaciones entre personas, máquinas, pueblos, organizaciones, empresas, etc. Si en un grafo queremos, por ejemplo, representar una red de carreteras con sus respectivas direcciones entonces, es necesario darle orientación a las aristas. En este caso, se trata de un grafo dirigido donde las aristas pasan a llamarse arcos y se representan como $A = \{a_{ij} = (v_i, v_j) / v_i, v_j \in V\}$. La rama de las Matemáticas que estudia las propiedades de los grafos y sus aplicaciones se denomina Teoría de Grafos.

Si cada arco o arista lleva un peso l_{ij} asociado, éste puede representar la longitud del arco, el tiempo que se tarda en atravesar dicho arco, o incluso un coste en el que se incurre al trasladarse por ese arco. A cada vértice v_i o v_i nodo le corresponde un peso w_i que representa la importancia o ponderación de dicho vértice respecto al resto de vértices de la red. Entonces, podemos hablar de grafo pesado o marcado cuando cada vértice tiene un peso w_i , o bien cuando cada arista o arco (v_i, v_j) lleva un peso l_{ij} asociado.

Una cadena es una sucesión de aristas de un grafo que une un vértice i con otro vértice j , es decir, dos vértices están conectados si existe una cadena entre ellos. Por otro lado, un camino es una sucesión de arcos que une un vértice con otro. Dado un grafo pesado, consideramos un camino μ_{ij} que va del vértice i al vértice j , entonces la longitud de ese camino $l(\mu_{ij})$ es la suma de los pesos de los arcos que pertenecen a ese camino. Como entre dos vértices cualesquiera puede haber varios caminos que unan dichos vértices, llamaremos camino mínimo a aquel camino que nos reporte la menor longitud. Entonces, para cada par de vértices v_i y v_j definimos la distancia $d(v_i, v_j)$ como la suma de las longitudes de los arcos que están en el camino mínimo que une v_i con v_j . De igual forma, la distancia $d(v_j, v_i)$ es la longitud total del camino mínimo que va de v_j a v_i . Si el grafo es no dirigido evidentemente $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$. Por otro parte, un ciclo es una cadena cuyos vértices iniciales y finales coinciden y un circuito es un camino donde los vértices inicial y final coinciden.

Éstos son los conceptos básicos sobre grafos que necesitamos. En la siguiente sección, estudiaremos la localización de centros y medianas en servicios deseados.

1.2. La Localización de centros

Consideramos un grafo ponderado $G = (V, A)$, con $n = |V|$ vértices y $m = |A|$ aristas o arcos. Se pretende determinar donde localizar uno o varios servicios de forma que se minimice la máxima de las distancias a recorrer desde esa localización al resto de vértices del grafo. Para ello, empezamos definiendo algunos conceptos previos.

1.2.1. Separaciones

Para cualquier vértice v_i de un grafo $G = (V, A)$, definimos los conjuntos:

$$R_\lambda^{ex}(v_i) = \{v_j/w_j d(v_i, v_j) \leq \lambda, v_j \in V\}$$

como el conjunto de todos los vértices v_j de G que son alcanzados desde el vértice v_i a través de un camino de longitud ponderada $w_j d(v_i, v_j)$ menor o igual que cierto parámetro λ . También se define:

$$R_\lambda^{in}(v_i) = \{v_j/w_j d(v_j, v_i) \leq \lambda, v_j \in V\}$$

como el conjunto de todos los vértices v_j de G desde los cuales el vértice v_i puede ser alcanzado a través de un camino de longitud ponderada $w_j d(v_i, v_j)$ menor o igual que cierto parámetro λ .

Definimos a continuación los valores:

$$s_{ex}(v_i) = \max_{v_j \in V} [w_j d(v_i, v_j)] \quad (1.2.1)$$

$$s_{in}(v_i) = \max_{v_j \in V} [w_j d(v_j, v_i)] \quad (1.2.2)$$

Éstos se denominan número de separación exterior y número de separación interior del vértice v_i respectivamente.

Si λ_{ex} es la longitud mínima λ de forma que para un vértice v_i

$$R_\lambda^{ex}(v_i) = X$$

entonces de las ecuaciones (1.2.1) y (1.2.2) se sigue que

$$s_{ex}(v_i) = \lambda_{ex} \quad (1.2.3)$$

Del mismo modo, sabemos que si λ_{in} es la longitud mínima λ tal que:

$$R_\lambda^{in}(v_i) = X$$

entonces $s_{in}(v_i) = \lambda_{in}$. Por tanto, para garantizar que existan números finitos de separación exterior e interior debemos admitir que el grafo sea fuertemente conexo, esto es, que entre dos vértices cualesquiera v_i y v_j halla un camino de v_i a v_j y otro de v_j a v_i .

Para aclarar los conceptos anteriores presentamos un ejemplo. Así, definimos un grafo $G = (V, A)$, donde el conjunto de vértices $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ y el conjunto de arcos $A = ((v_i, v_j) / v_i, v_j \in V)$ son los representados en la Figura 1.1. A cada arco (v_i, v_j) le corresponde una marca o peso $l_{ij} = 1$ la cual representa la longitud, tiempo o coste asociado a ese arco (v_i, v_j) .

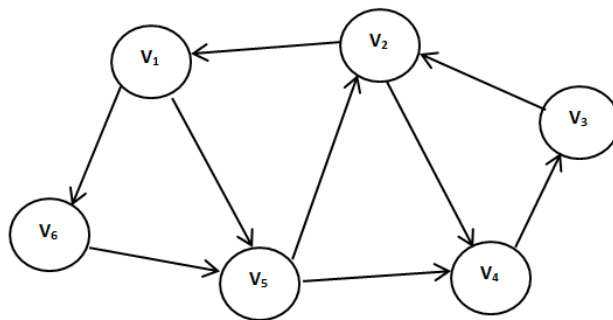


Figura 1.1. Grafo 1.1

La distancia $d(v_i, v_j)$ entre dos vértices v_i y v_j es la suma de las longitudes de los arcos que están en el camino mínimo que une v_i con v_j . De igual forma la distancia $d(v_j, v_i)$ será la longitud total del camino mínimo que va de v_j a v_i . Además, todos los vértices tienen igual importancia en este ejemplo. Por lo que, los pesos w_j son iguales a la unidad para todo $j = 1, 2, \dots, 6$. Así, dados dos vértices v_i, v_j para el grafo de la Figura 1.1 la matriz de distancia se muestra en la Tabla 1.1.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$s_{ex}(v_i)$
v_1	0	2	3	2	1	1	3
v_2	1	0	2	1	2	2	2*
v_3	2	1	0	2	3	3	3
v_4	3	2	1	0	4	4	4
v_5	2	1	2	1	0	3	3
v_6	3	2	3	2	1	0	3
$s_{in}(v_i)$	3	2*	3	2*	4	4	

Tabla 1.1. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

Una vez fijadas todas las distancias, introducimos en la tabla una nueva columna y una nueva fila en las que incorporamos el número de separación exterior e interior.

1.2.2. Centro y radio

En esta sección definimos los centros y radios existentes dentro de un grafo G . Así, llamamos centro exterior al vértice v_{ex}^* que cumple que:

$$s_{ex}(v_{ex}^*) = \min_{v_i \in V} [s_{ex}(v_i)]. \quad (1.2.4)$$

Por otro lado, llamamos centro interior al vértice v_{in}^* para el cual

$$s_{in}(v_{in}^*) = \min_{v_i \in V} [s_{in}(v_i)]. \quad (1.2.5)$$

Es común encontrarnos con grafos que presenten más de un centro interior o exterior formando así conjuntos de centros exteriores e interiores. El número de separación exterior del centro exterior se denomina radio exterior $r_{ex} = s_{ex}(v_0^*)$ y el número de separación interior del centro interior se denomina radio interior $r_{in} = s_{in}(v_t^*)$.

Aplicando estas nuevas definiciones al ejemplo anterior correspondiente al grafo de la Figura 1.1 podemos ver que hay un único centro exterior, el cual es el vértice v_2 dando un radio exterior de dos unidades. Del mismo modo, observamos que hay dos centros interiores formando así un conjunto $\{v_2, v_4\}$ dando un radio interior de dos unidades. Estudiemos ahora cual sería el centro y radio de la

Figura 1.1 si los pesos w_j tuvieran una cierta ponderación, la cual recogemos en la Tabla 1.2.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Tabla 1.2. Ponderaciones de los vértices

Partiendo de la Tabla 1.1 donde tenemos las distancias o longitudes entre los vértices v_i , ahora crearemos una nueva tabla teniendo en cuenta los pesos establecidos para así obtener los nuevos números de separación exterior e interior, los cuales, vienen establecidos por las fórmulas (1.2.1) y (1.2.2) descritas anteriormente. Para determinar los centros exteriores, multiplicamos cada columna v_i de la matriz de distancias por su peso w_i obteniendo la Tabla 1.3.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$s_{ex}(v_i)$
v_1	0	0,2	0,6	0,6	0,1	0,1	0,6
v_2	0,2	0	0,4	0,3	0,2	0,2	0,4*
v_3	0,4	0,1	0	0,6	0,3	0,3	0,6
v_4	0,6	0,2	0,2	0	0,4	0,4	0,6
v_5	0,4	0,1	0,4	0,3	0	0,3	0,4*
v_6	0,6	0,2	0,6	0,6	0,1	0	0,6

Tabla 1.3. Distancias o longitudes ponderadas entre los vértices v_i para determinar los centros exteriores

Podemos ver que en este caso hay dos centros exteriores formando así un conjunto de centros exteriores $\{v_2, v_5\}$ dando un radio exterior de 0,4 unidades. Ahora multiplicamos cada fila v_i de la matriz de distancias por su peso w_i , obteniendo la Tabla 1.4.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0,4	0,6	0,4	0,2	0,2
v_2	0,1	0	0,2	0,1	0,2	0,2
v_3	0,4	0,2	0	0,4	0,6	0,6
v_4	0,9	0,6	0,3	0	1,2	1,2
v_5	0,2	0,1	0,2	0,1	0	0,3
v_6	0,3	0,2	0,3	0,2	0,1	0
$s_{in}(v_i)$	0,9	0,6	0,6	0,4*	1,2	1,2

Tabla 1.4. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la tabla anterior se deduce que el centro interior es el vértice v_4 con un un radio interior de 0,4 unidades.

Suponemos que los vértices de un grafo representan las ciudades y los arcos una red de carreteras. Además, las longitudes l_{ij} de los arcos forman una matriz correspondiente a los tiempos de viaje entre las diferentes ciudades. Un grupo de problemas de localización puede ser determinar la ubicación óptima de servicios de emergencia. El criterio para tomar la decisión de donde situar una estación de policía, bomberos así como un hospital está relacionado con la distancia, por lo tanto, lo que debemos buscar es que el tiempo de respuesta de estos servicios sea el mínimo posible. Si nos centramos en localizar una estación de policía o bomberos y a cada vértice del grafo le asignamos un peso w_j ponderado, que nos indica el número de habitantes de cada ciudad, lo que nos interesa es minimizar el tiempo que se tarda en llegar a la ciudad más lejana. Si tenemos en cuenta que sólo es posible ubicar este servicio en un vértice y no en un arco, la solución óptima la encontraremos en el centro exterior del grafo.

Dejando atrás los servicios de emergencia vamos a plantear un nuevo problema de localización. Se quiere ubicar un taller mecánico que dispone de una grúa para recoger posibles vehículos averiados y llevarlos al taller. En este caso, puede interesar minimizar el tiempo que tarda la grúa en llegar a la ciudad más lejana y regresar al taller. Para encontrar la solución óptima debemos combinar el número de separación exterior con el interior. Así obtenemos un nuevo valor:

$$s_{ei}(v_i) = \max_{v_j \in V} \{w_j [d(v_i, v_j) + d(v_j, v_i)]\}$$

el cual denominamos número de separación combinado exterior-interior. Además, llamamos centro combinado exterior-interior al vértice v_{ei}^* que cumple:

$$s_{ei}(v_{ei}^*) = \min_{v_i \in V} [s_{ei}(v_i)].$$

Aplicamos estos conceptos para calcular el centro combinado exterior-interior para el ejemplo de la Figura 1.1. Partiendo de la Tabla 1.1 donde tenemos las distancias o longitudes entre los vértices v_i , ahora creamos una nueva tabla teniendo en cuenta los pesos establecidos en la Tabla 1.2 e incorporamos el número de separación combinado exterior-interior.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$s_{ei}(v_{ei})$
v_1	0	0,3	1	1,5	0,3	0,4	1,5
v_2	0,6	0	0,6	0,9	0,3	0,4	0,9*
v_3	1	0,3	0	0,9	0,5	0,6	1
v_4	1	0,3	0,6	0	0,5	0,6	1
v_5	0,6	0,3	1	1,5	0	0,4	1,5
v_6	0,8	0,4	1,2	1,8	0,4	0	1,8

Tabla 1.5. Distancias o longitudes ponderadas entre los vértices v_i para determinar los centros combinados

Por tanto, el centro combinado exterior-interior es el vértice v_2 y el número de separación combinado exterior-interior es $s_{ei}(v_{ei}^*) = 0,9$.

1.2.3. Centro absoluto

Hemos visto que el centro de un grafo G únicamente se podía situar en un vértice pero ahora ampliaremos esta definición para incluir como posibles puntos de localización cualquier punto de una arista o arco.

Sabemos que la ecuación (1.2.3) muestra el número de separación exterior de cualquier vértice $v_i \in V$. Sea x un punto situado en una arista $a = (v_i, v_j)$ de un grafo G cuyo peso es l_{ij} . Es posible definir ese punto x especificando la longitud $l(v_i, x)$ de la sección (v_i, x) y además se debe cumplir que

$$l(v_i, x) + l(x, v_j) = l_{ij} \quad (1.2.6)$$

Una vez fijado el punto x podemos definir las separaciones $s_{ex}(x)$ y $s_{in}(x)$ de forma similar a (1.2.1) y (1.2.2). Así, dichas separaciones vienen dadas por:

$$s_{ex}(x) = \max_{v_j \in V} [w_j d(x, v_j)] \quad (1.2.7)$$

$$s_{in}(x) = \max_{v_j \in V} [w_j d(v_j, x)] \quad (1.2.8)$$

Ambas son válidas tanto para un vértice de G como para un punto colocado artificialmente en una arista de G . Del mismo modo llamamos centro exterior absoluto al punto x_{ex}^* que cumple que

$$s_{ex}(x_{ex}^*) = \min_{x \in G} [s_{ex}(x)]. \quad (1.2.9)$$

Por otro lado, llamamos centro interior absoluto al vértice x_{in}^* para el cual

$$s_{in}(x_{in}^*) = \min_{x \in G} [s_{in}(x)]. \quad (1.2.10)$$

El número de separación exterior del centro exterior absoluto se denomina radio exterior absoluto $r_{ex} = s_{ex}(x_{ex}^*)$ y el número de separación interior del centro interior absoluto se denomina radio interior absoluto $r_{in} = s_{in}(x_{in}^*)$. Consideramos el grafo no dirigido de la Figura 1.2 formado por cinco vértices y siete aristas para aplicar estos nuevos conceptos. Asumimos que cada arista del grafo tiene una longitud l_{ij} de una única unidad salvo las aristas (1, 3) y (2, 4) que tienen las longitudes $l_{13} = 1,8$ y $l_{24} = 1,6$. También las ponderaciones w_i de los vértices son todas iguales a la unidad.

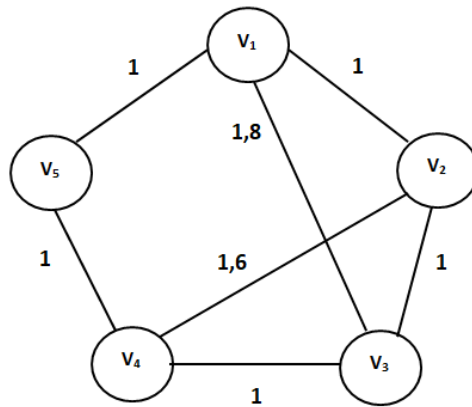


Figura 1.2. Grafo 1.2

La matriz de distancia del grafo es:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$s(v_i)$
v_1	0	1	1,8	2	1	2
v_2	1	0	1	1,6	2	2
v_3	1,8	1	0	1	2	2
v_4	2	1,6	1	0	1	2
v_5	1	2	2	1	0	2

Tabla 1.6. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

A partir de esta matriz podemos ver que cualquier vértice del grafo es un centro con un radio de dos unidades. Ahora analicemos los mejores puntos donde localizar el servicio dentro de cada arista. Así, si introducimos un nuevo vértice y_1 en el medio de la arista que une los vértices v_1 y v_3 , cuya distancia desde y_1 a los vértices v_1 y v_3 es de 0,9. Ahora, la separación máxima desde el punto y_1 es de 1,9 .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$s(y_1)$
y_1	0,9	1,9	0,9	1,9	1,9	1,9

Tabla 1.7. Distancia desde el punto y_1 a los vértices.

Consideramos a continuación la arista (v_2, v_3) y elegimos el punto y_2 en el medio de esa arista. Tendremos que la separación máxima es $s(y_2) = 2,5$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$s(y_2)$
y_2	1, 5	0, 5	0, 5	1, 5	2, 5	2, 5

Tabla 1.8. Distancia desde el punto y_2 a los vértices.

Ahora trabajamos de la misma manera con cada una de las aristas de la Figura 1.2, determinando en cada arista el mejor punto y_i que tiene menor número de separación.

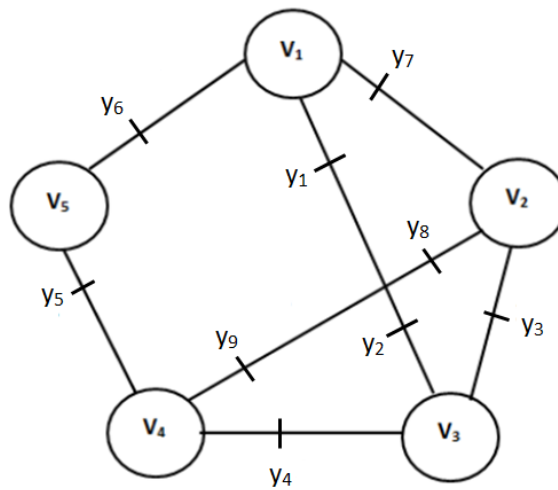


Figura 1.3. Grafo con los distintos puntos y

Y nos quedan finalmente los siguientes resultados:

Arista (1, 3)	y_1 situado a 0, 4 del vértice v_1 y_2 situado a 1, 4 del vértice v_1	$s(y_1) = s(y_2) = 2, 4$
Arista (2, 3)	y_3 situado en el medio de la arista	$s(y_3) = 2, 5$
Arista (3, 4)	y_4 situado a 0, 4 del vértice v_4	$s(y_4) = 2, 4$
Arista (4, 5)	y_5 situado a 0, 3 del vértice v_5	$s(y_5) = 2, 3$
Arista (1, 5)	y_6 situado a 0, 4 del vértice v_5	$s(y_6) = 2, 4$
Arista (1, 2)	y_7 situado a 0, 3 del vértice v_1	$s(y_7) = 2, 3$
Arista (2, 4)	y_8 situado a 0, 3 del vértice v_2 y_9 situado a 1, 3 del vértice v_2	$s(y_8) = s(y_9) = 2, 3$

Tabla 1.9. Distancia desde el punto y_2 a los vértices.

Por tanto, los puntos y_5, y_7, y_8 e y_9 son los centros absolutos debido a que están mucho más centrados que cualquiera de los vértices de G . El radio absoluto

es de 2, 3 unidades. En conclusión, el centro absoluto de un grafo no es necesario que sea único.

Método de Hakimi

El método de Hakimi es un algoritmo que encuentra el centro absoluto de un grafo. Vamos a comenzar a desarrollar el método pero antes cabe destacar que el algoritmo está definido para un grafo no dirigido. Aunque, si tuviéramos el caso de un grafo dirigido el método no cambiaría ya que únicamente tendríamos que sustituir cada concepto no dirigido por la parte dirigida. El algoritmo es el siguiente:

- I) Para cada arista a_k del grafo encontrar el punto (o puntos) y_k^* en a_k que tiene la separación mínima.
- II) Elegimos como centro absoluto de G al menor de todos los puntos y_k^* ($k = 1, 2, \dots, m$).

El primer paso en el método se realiza de la siguiente manera: Consideramos una arista $a_k = (v_\alpha, v_\beta)$ del grafo y un punto y_k de esta arista.

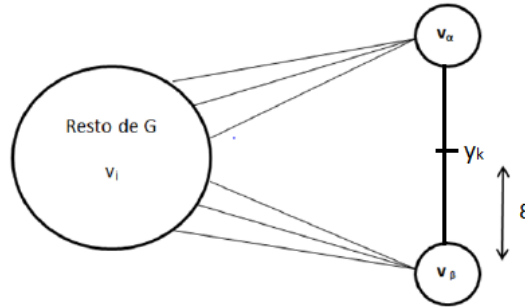


Figura 1.4. Representación del grafo, separando la arista $a_k = (v_\alpha, v_\beta)$

$$\begin{aligned} \text{Entonces tenemos } s(y_k) &= \max_{v_i \in V} [w_i d(y_k, v_i)] = \\ &= \max_{v_i \in V} [w_i \min \{l(y_k, v_\beta) + d(v_\beta, v_i), l(y_k, v_\alpha) + d(v_\alpha, v_i)\}] \end{aligned}$$

Las longitudes $l(y_k, v_\beta)$ y $l(y_k, v_\alpha)$ son las longitudes de las respectivas partes de la arista a_k ya que la distancia $d(y_k, v_i)$ puede ser la longitud de un camino a través de v_β o a través de v_α . Sea $l(y_k, v_\beta) = \epsilon$ y ya que $l(y_k, v_\alpha) = l_{\alpha\beta} - l(y_k, v_\beta) = l_{\alpha\beta} - \epsilon$. Entonces nos queda:

$$s(y_k) = \max_{v_i \in V} \min [w_i \{\epsilon + d(v_\beta, v_i), l_{\alpha\beta} + d(v_\alpha, v_i) - \epsilon\}].$$

Para un vértice v_i dado, podemos encontrar el menor valor entre los dos términos de la ecuación anterior mediante la gráfica de las dos funciones lineales de ϵ siguientes, esto es, tomando la envoltura inferior de las dos rectas resultantes:

$$T_i = w_i \{ \varepsilon + d(v_\beta, v_i) \} \quad (1.2.11)$$

$$T'_i = w_i \{ l_{\alpha\beta} + d(v_\alpha, v_i) - \varepsilon \} \quad (1.2.12)$$

Repetimos el proceso para todos los vértices v_i pertenecientes a V hasta conseguir todas las envolturas inferiores. Y una vez obtenidas éstas, escogemos la envoltura superior de los trozos de rectas obtenidas, es decir, la máxima. Lo que nos da la separación $s(y_k)$ para todos los valores de ε , esto es, para todos los puntos y_k sobre la arista a_k . La envoltura final, que es una función lineal a trozos, puede tener varios mínimos. La posición del punto y_k que produce el menor valor de separación es el centro absoluto y_k . Por tanto, el centro absoluto del grafo se determina como el mínimo de los y_k obtenidos en todas las aristas a_k .

Ejemplo de aplicación del método de Hakimi

A continuación, se ilustra el uso del algoritmo para encontrar el centro absoluto en un grafo con 5 nodos y 7 aristas. Aplicado a un ejemplo práctico podemos decir que el grafo es una región donde cada nodo es un pueblo y las aristas son las diferentes carreteras que conectan todos los pueblos. Se desea construir un único hospital que debe dar servicio a todos ellos. Por lo que, el problema consiste en buscar la localización óptima de dicho hospital de forma que se minimice la distancia entre el hospital y el pueblo más lejano. Además, la distancia $d(v_j, v_i)$ será la longitud total del camino mínimo que va de v_j a v_i y representa el tiempo en minutos. Todos los vértices tienen igual importancia en este ejemplo, esto es, $w_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, 5$.

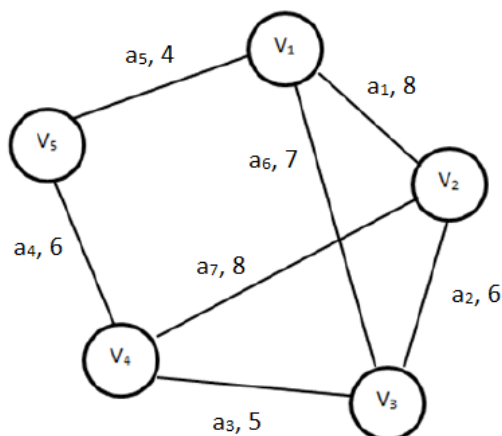


Figura 1.5. Grafo no dirigido con cinco vértices y siete aristas

La matriz de distancia del grafo se muestra en la Tabla 1.10.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$s(v_i)$
v_1	0	8	7	10	4	10*
v_2	8	0	6	8	12	12
v_3	7	6	0	5	11	11
v_4	10	8	5	0	6	10*
v_5	4	12	11	6	0	12

Tabla 1.10. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

En la última columna de la Tabla 1.10 se recoge el número de separación de cada vértice $s(v_i)$. Podemos observar que el centro del grafo es tanto el vértice v_1 como el vértice v_4 con un radio de 10 unidades. Ahora vamos a calcular el centro absoluto y el radio absoluto del grafo. Para ello, aplicamos el algoritmo de Hakimi comentado anteriormente.

Para comenzar a realizar el algoritmo primero elegimos la arista a_1 y medimos la distancia ε desde el vértice v_2 hasta un punto y situado en la arista (v_1, v_2) . Ahora pasamos a calcular las rectas T_i y T'_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_2, v_1) = \varepsilon + 8$	$T'_1 = l_{2,1} + d(v_1, v_1) - \varepsilon = 8 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_2, v_2) = \varepsilon$	$T'_2 = l_{2,1} + d(v_1, v_2) - \varepsilon = 16 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_2, v_3) = \varepsilon + 6$	$T'_3 = l_{2,1} + d(v_1, v_3) - \varepsilon = 15 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_2, v_4) = \varepsilon + 8$	$T'_4 = l_{2,1} + d(v_1, v_4) - \varepsilon = 18 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_2, v_5) = \varepsilon + 12$	$T'_5 = l_{2,1} + d(v_1, v_5) - \varepsilon = 12 - \varepsilon$

Tabla 1.11. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la Figura 1.6 se deduce que los puntos de la arista a_1 que tienen menor número de separación con respecto al resto de vértices del grafo son el punto y_1 situado a una distancia de dos unidades del vértice v_2 y el vértice v_1 . Ambos puntos llevan a una separación de $s(y_1) = s(v_1) = 10$ unidades.

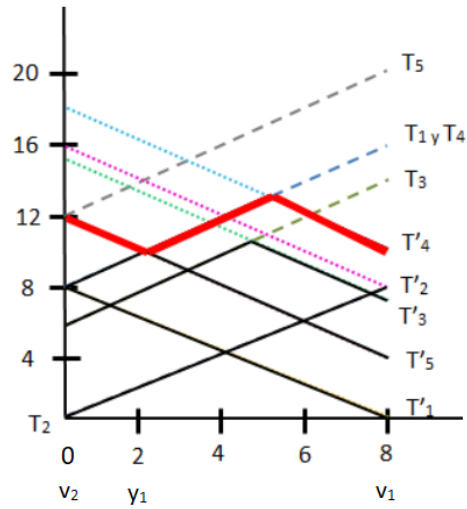


Figura 1.6. Arista $a_1 = (v_1, v_2)$ con longitud $l_{12} = 8$

Ahora elegimos la arista $a_2 = (v_2, v_3)$. Medimos la distancia ε desde v_3 a un punto y de la arista a_2 .

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_3, v_1) = \varepsilon + 7$	$T'_1 = l_{3,2} + d(v_2, v_1) - \varepsilon = 14 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_3, v_2) = \varepsilon + 6$	$T'_2 = l_{3,2} + d(v_2, v_2) - \varepsilon = 6 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_3, v_3) = \varepsilon$	$T'_3 = l_{3,2} + d(v_2, v_3) - \varepsilon = 12 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_3, v_4) = \varepsilon + 5$	$T'_4 = l_{3,2} + d(v_2, v_4) - \varepsilon = 14 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_3, v_5) = \varepsilon + 11$	$T'_5 = l_{3,2} + d(v_2, v_5) - \varepsilon = 18 - \varepsilon$

Tabla 1.12. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la Figura 1.7 puede observarse que el menor valor de separación es 11 y se obtiene para esta arista justo en el vértice v_3 .

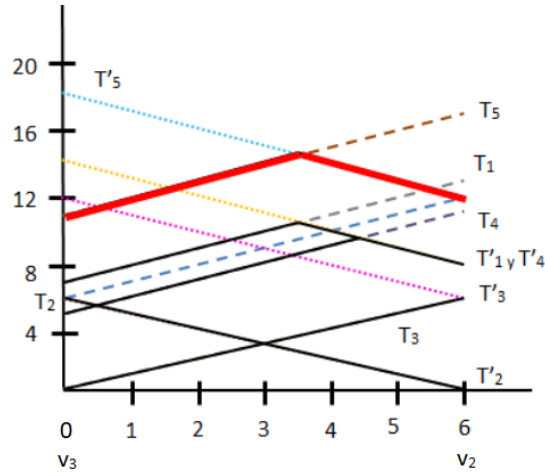


Figura 1.7. Arista $a_2 = (v_2, v_3)$ con longitud $l_{23} = 6$

Ahora elegimos la arista $a_3 = (v_3, v_4)$. Medimos la distancia ε desde v_4 a un punto y de la arista a_3 .

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_4, v_1) = \varepsilon + 10$	$T'_1 = l_{4,3} + d(v_3, v_1) - \varepsilon = 12 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_4, v_2) = \varepsilon + 8$	$T'_2 = l_{4,3} + d(v_3, v_2) - \varepsilon = 11 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_4, v_3) = \varepsilon + 5$	$T'_3 = l_{4,3} + d(v_3, v_3) - \varepsilon = 5 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_4, v_4) = \varepsilon$	$T'_4 = l_{4,3} + d(v_3, v_4) - \varepsilon = 10 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_4, v_5) = \varepsilon + 6$	$T'_5 = l_{4,3} + d(v_3, v_5) - \varepsilon = 16 - \varepsilon$

Tabla 1.13. Distancias o longitudes entre los v3rtices v_i

De la Figura 1.8, se tiene que el menor n3mero de separaci3n es 9 y se alcanza cuando $\varepsilon = 3$, esto es, en el punto y_3 sobre la arista a_3 que est3 a una distancia de 3 unidades del v3rtice 4.

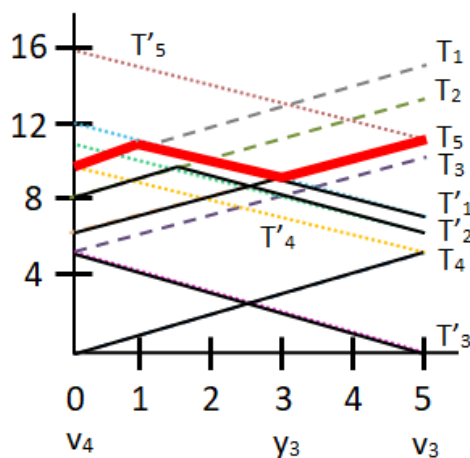


Figura 1.8. Arista $a_3 = (v_3, v_4)$ con longitud $l_{34} = 5$

Ahora elegimos la arista $a_4 = (v_4, v_5)$. Medimos la distancia ε desde v_5 a un punto y situado en la arista a_4 .

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_5, v_1) = \varepsilon + 4$	$T'_1 = l_{5,4} + d(v_4, v_1) - \varepsilon = 16 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_5, v_2) = \varepsilon + 12$	$T'_2 = l_{5,4} + d(v_4, v_2) - \varepsilon = 14 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_5, v_3) = \varepsilon + 11$	$T'_3 = l_{5,4} + d(v_4, v_3) - \varepsilon = 11 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_5, v_4) = \varepsilon + 6$	$T'_4 = l_{5,4} + d(v_4, v_4) - \varepsilon = 6 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_5, v_5) = \varepsilon$	$T'_5 = l_{5,4} + d(v_4, v_5) - \varepsilon = 12 - \varepsilon$

Tabla 1.14. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la Figura 1.9, se deduce fácilmente que el punto y_4 que está en la arista a_4 a una distancia de 5 unidades del vértice v_5 es el mejor punto candidato de la arista a_4 para ser centro absoluto, ya que su número de separación es el menor posible $s(y_4) = 9$.

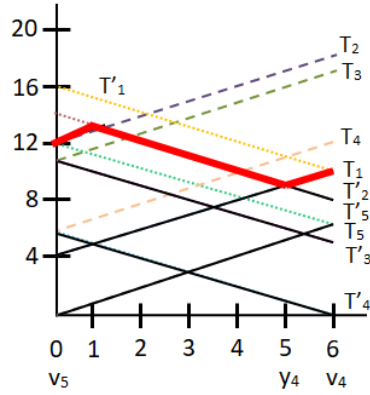


Figura 1.9. Arista $a_4 = (v_4, v_5)$ con longitud $l_{45} = 6$

Ahora elegimos la arista $a_5 = (v_1, v_5)$. Medimos la distancia ε desde v_5 a un punto y situado en la arista a_5 .

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_5, v_1) = \varepsilon + 4$	$T'_1 = l_{5,1} + d(v_1, v_1) - \varepsilon = 4 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_5, v_2) = \varepsilon + 12$	$T'_2 = l_{5,1} + d(v_1, v_2) - \varepsilon = 12 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_5, v_3) = \varepsilon + 11$	$T'_3 = l_{5,1} + d(v_1, v_3) - \varepsilon = 11 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_5, v_4) = \varepsilon + 6$	$T'_4 = l_{5,1} + d(v_1, v_4) - \varepsilon = 14 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_5, v_5) = \varepsilon$	$T'_5 = l_{5,1} + d(v_1, v_5) - \varepsilon = 8 - \varepsilon$

Tabla 1.15. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la Figura 1.10, se observa que el punto y_5 situado a una distancia de 3 unidades del vértice v_5 es el que tiene una menor separación $s(y_5) = 9$.

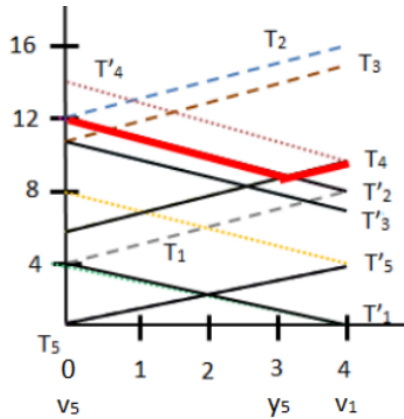


Figura 1.10. Arista $a_5 = (v_1, v_5)$ con longitud $l_{15} = 4$

Ahora elegimos la arista $a_6 = (v_1, v_3)$. Medimos la distancia ε desde v_3 a un punto y situado en la arista a_6 .

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_3, v_1) = \varepsilon + 7$	$T'_1 = l_{3,1} + d(v_1, v_1) - \varepsilon = 7 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_3, v_2) = \varepsilon + 6$	$T'_2 = l_{3,1} + d(v_1, v_2) - \varepsilon = 15 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_3, v_3) = \varepsilon$	$T'_3 = l_{3,1} + d(v_1, v_3) - \varepsilon = 14 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_3, v_4) = \varepsilon + 5$	$T'_4 = l_{3,1} + d(v_1, v_4) - \varepsilon = 17 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_3, v_5) = \varepsilon + 11$	$T'_5 = l_{3,1} + d(v_1, v_5) - \varepsilon = 11 - \varepsilon$

Tabla 1.16. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la Figura 1.11 se deduce que el punto y_6 situado a una distancia de 2,5 unidades respecto del vértice v_3 es el mejor situado, ya que nos da una menor separación $s(y_6) = 8,5$.

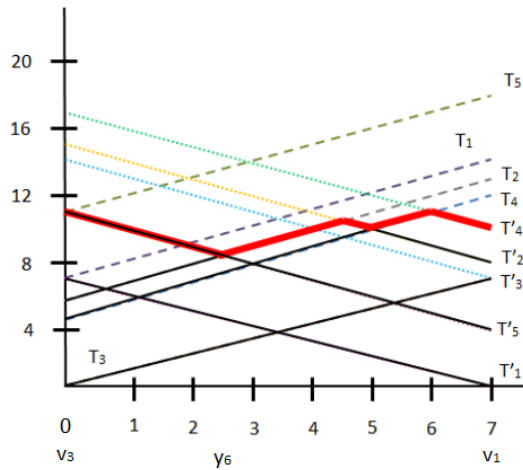


Figura 1.11. Arista $a_6 = (v_1, v_3)$ con longitud $l_{13} = 7$

Ahora elegimos la arista $a_7 = (v_2, v_4)$. Medimos la distancia ε desde v_4 a un punto y localizado en la arista a_7 .

T_i	T'_i
$T_1 = \varepsilon + d(v_4, v_1) = \varepsilon + 10$	$T'_1 = l_{4,2} + d(v_2, v_1) - \varepsilon = 16 - \varepsilon$
$T_2 = \varepsilon + d(v_4, v_2) = \varepsilon + 8$	$T'_2 = l_{4,2} + d(v_2, v_2) - \varepsilon = 8 - \varepsilon$
$T_3 = \varepsilon + d(v_4, v_3) = \varepsilon + 5$	$T'_3 = l_{4,2} + d(v_2, v_3) - \varepsilon = 14 - \varepsilon$
$T_4 = \varepsilon + d(v_4, v_4) = \varepsilon$	$T'_4 = l_{4,2} + d(v_2, v_4) - \varepsilon = 16 - \varepsilon$
$T_5 = \varepsilon + d(v_4, v_5) = \varepsilon + 6$	$T'_5 = l_{4,2} + d(v_2, v_5) - \varepsilon = 20 - \varepsilon$

Tabla 1.17. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la Figura 1.12 se tiene que el vértice v_4 es el mejor punto de esta arista, ya que tiene un número de separación de $s(v_4) = 10$.

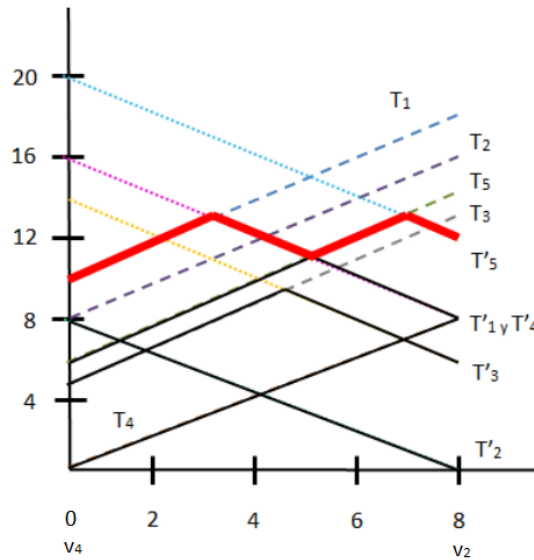


Figura 1.12. Arista $a_7 = (v_2, v_4)$ con longitud $l_{24} = 8$

Comparando los mejores puntos candidatos de cada arista se deduce que el centro absoluto es el punto y_6 de la arista (v_1, v_3) y el radio absoluto es $s(y_6) = 8,5$ unidades.

1.2.4. Múltiples centros (p-centros)

Sea $G = (V, A)$ un grafo donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto finito de vértices y $A = \{(v_i, v_j)/i, j \in V\}$ es un conjunto finito de aristas. Expuesto anteriormente el concepto de centro de un grafo, éste lo podemos generalizar de tal modo que ahora se desea localizar un conjunto de p puntos en los vértices del grafo, de forma que se minimice la máxima distancia desde el conjunto de p puntos a todos los vértices del grafo. Para ello, dado un subconjunto $V_p =$

$\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de vértices, se define la mínima distancia desde el subconjunto V_p al vértice v_i como la mínima de las distancias a cada uno de sus vértices, esto es:

$$d(V_p, v_i) = \min_{v_j \in V_p} [d(v_j, v_i)].$$

Del mismo modo, definimos la mínima distancia entre el vértice v_i al subconjunto V_p como:

$$d(v_i, V_p) = \min_{v_j \in V_p} [d(v_i, v_j)].$$

Ahora podemos desarrollar todos los conceptos vistos anteriormente pero en este caso para un multicentro. Así, si consideramos un peso w_j asociado a cada vértice v_j del grafo, el número de separación exterior y el número de separación interior para el subconjunto V_p vienen dados respectivamente por:

$$s_{ex}(V_p) = \max_{v_j \in V} [w_j d(V_p, v_j)]$$

$$s_{in}(V_p) = \max_{v_j \in V} [w_j d(v_j, V_p)]$$

Llamamos p-centro exterior al conjunto de vértices $V_{p,ex}^*$ que cumple:

$$s_{ex}(V_{p,ex}^*) = \min_{V_p \subset V} [s_{ex}(V_p)]. \quad (1.2.13)$$

Por otro lado, llamamos p-centro interior al conjunto de vértices $V_{p,in}^*$ para el cual

$$s_{in}(V_{p,in}^*) = \min_{V_p \subset V} [s_{in}(V_p)]. \quad (1.2.14)$$

Anteriormente habíamos visto el problema de buscar la ubicación óptima de un único servicio de emergencia (estación de policía, bomberos, hospital, etc). Sin embargo, en la vida real surge el problema de querer localizar varias de estas instalaciones debido a que una instalación no es capaz de cumplir todos los requisitos que permitan atender a toda la población. Entonces, el objetivo de estos problemas consiste en encontrar el número más pequeño posible de localizaciones por ejemplo, estaciones de policía, y la ubicación óptima de dichas estaciones para que todas las ciudades se encuentren dentro de una distancia preestablecida. O bien, fijado el número de localizaciones que se desean establecer, determinar donde deben ubicarse para que la distancia a la ciudad más alejada sea mínima.

Sea $G = (V, A)$ un grafo donde los vértices representan las ciudades y los arcos una red de carreteras. A cada arco le asignamos una marca o valor l_{ij} que nos indica la distancia entre las diferentes ciudades y a cada vértice le fijamos un peso w_i que nos muestra el número de habitantes de cada ciudad. Suponemos que queremos localizar centros de salud o estaciones de policía, las cuales únicamente pueden ser ubicadas en los vértices del grafo. Entonces, el problema consiste en encontrar los p-centros de G con $p = 1, 2, 3, \dots$ hasta que la separación del p-centro sea menor o igual que una distancia preestablecida. Así, obtenemos el

número mínimo de estaciones de policía o centros de salud necesarios y sus ubicaciones óptimas.

Ahora vamos a ver los dos tipos de formulaciones existentes para el problema del p-centro, ambos planteados como un problema de programación entera.

Formulación del problema del p-centro

Sea un grafo $G = (V, A)$ no dirigido con n vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Sea la matriz $[y_j]$ que representa una asignación de vértices de forma que:

$$y_{ij} = 1, \text{ si el vértice } v_j \text{ se asocia al vértice } v_i. \\ y_{ij} = 0, \text{ en otro caso.}$$

Sean las variables

$$x_j = 1, \text{ si se localiza un servicio o una instalación en el vértice } v_j. \\ x_j = 0, \text{ en otro caso.}$$

Consideramos la matriz de distancias ponderada

$$d_{ij} = w_j d(v_i, v_j), \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \\ d_{ii} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

El problema del p-centro se formula de la forma siguiente:

$$\text{Min} : \lambda$$

sujeto a:

$$\lambda \geq \sum_{j=1}^n d_{ij} y_{ij}, \forall i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = p \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$x_j, y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Nótese que en este caso

$$y_{ij} = 1, \text{ si la instalación } j \text{ cubre la demanda del vértice } v_i. \\ y_{ij} = 0, \text{ en otro caso.}$$

y λ representa la máxima distancia entre cualquier demanda y la asignación escogida.

En (1) se asegura que el valor objetivo no sea menor que la distancia máxima de un vértice al centro. La restricción (2) nos garantiza que ningún vértice se asocie a j a no ser que haya un centro en j . En (3) se restringe el número de centros a p . La ecuación (4) asigna exactamente un centro a cada uno de los vértices. Por último, la restricción (5) son las variables binarias.

Formulación del problema de localizar el menor número de instalaciones

Se quiere resolver el problema de localizar el menor número de instalaciones de forma que se cubra la demanda y que la distancia máxima a recorrer desde una de las instalaciones no supere cierta cantidad.

Sea λ la cantidad máxima que se permite para acceder a un vértice v_i desde algún punto de servicio o localización.

Definimos el conjunto de vértices que pueden ser alcanzados desde el vértice v_j a una distancia menor o igual que λ , esto es

$$N_j = \{v_i \in V / d_{ij} \leq \lambda\}, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

con $d_{ij} = w_j d(v_i, v_j), \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Sea

$$x_{ij} = 1, \text{ si el servicio se localiza en el vértice } v_i \\ x_{ij} = 0, \text{ en otro caso}$$

La formulación del problema es:

$$\text{Min} : z = \sum_{i=1}^n x_i$$

sujeto a

$$\sum_{i \in N_j} x_i \geq 1, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

La restricción (1) nos obliga a que en la vecindad de cada vértice v_j exista al menos un servidor instalado que atienda su demanda con una distancia a recorrer menor que la prefijada. La restricción (2) nos recoge la integralidad de las variables de decisión.

1.2.5. Los p-centros absolutos

El concepto de p-centro absoluto generaliza al centro absoluto que se presentó en la sección 1.2.3. Se considera un grafo no dirigido G formado por un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y un conjunto de aristas $A = \{(v_i, v_j)/i, j \in V\}$, las cuales tienen asociados unos pesos l_{ij} no negativos que representan la longitud, tiempo o coste asociado a ese arco. Por otro lado, el peso w_j asociado al vértice v_j representa la importancia de ese vértice en el grafo. Sea Y_p un conjunto de p puntos situados en cualquier lugar del grafo, no necesariamente en un vértice. Definimos la mínima distancia entre el conjunto Y_p y el vértice v_j como:

$$d(Y_p, v_j) = \min_{y_i \in Y_p} [d(y_i, v_j)].$$

Así, el número de separación $s(Y_p)$ del conjunto Y_p es:

$$s(Y_p) = \min_{v_j \in V} [w_j d(Y_p, v_j)]$$

Entonces, llamamos p-centro absoluto al conjunto de p puntos Y_p^* que cumple:

$$s(Y_p^*) = \min_{Y_p \in G} [s(Y_p)].$$

En resumen, el problema del p-centro absoluto consiste en encontrar la localización óptima sobre la red para un número dado de centros teniendo en cuenta que la distancia para alcanzar el vértice más lejano debe ser la mínima. Y dichos centros pueden ser ubicados en cualquier lugar del grafo. Un segundo problema se basa en, dada una distancia crítica, encontrar el menor número de centros que cumplan que todos los vértices del grafo se encuentren dentro de esta distancia crítica desde al menos uno de los centros.

Anteriormente, habíamos visto que para resolver un único centro absoluto utilizábamos el método de Hakimi, pero éste no puede ser generalizado para encontrar p-centros absolutos. Luego, para resolver el problema del p-centro absoluto se necesitaría utilizar otros procedimientos como, por ejemplo el método propuesto por Hatice Calik [5], el cual se fundamenta en el hecho de que el conjunto de posibles ubicaciones puede ser restringido a la unión del conjunto de vértices y el conjunto de puntos de intersección sobre las aristas de la red.

1.3. La Localización de medianas

1.3.1. La mediana

Para cualquier vértice v_i de un grafo $G = (V, A)$, consideramos los valores $\beta_{ex}(v_i)$ y $\beta_{in}(v_i)$ dados por:

$$\beta_{ex}(v_i) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(v_i, v_j)] \quad (1.3.1)$$

$$\beta_{in}(v_i) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(v_j, v_i)] \quad (1.3.2)$$

donde $d(v_i, v_j)$ es la distancia o menor longitud desde el vértice v_i hasta el vértice v_j y $d(v_j, v_i)$ es la distancia desde el vértice v_j al vértice v_i . Dichos valores se denominan número de transmisión exterior y número de transmisión interior del vértice v_i respectivamente. Si consideramos la matriz de distancias entre vértices $D = [d(v_i, v_j)]$ entonces el número $\beta_{ex}(v_i)$ es la suma de los valores de la fila asociada al vértice v_i de una matriz que se obtiene multiplicando cada columna j de la matriz de distancias $D(G) = [d(v_i, v_j)]$ por el peso o ponderación w_j . Del mismo modo, el número $\beta_{in}(v_i)$ es la suma de los valores de la columna asociada al vértice v_i de la matriz que se obtiene multiplicando cada fila j de la matriz de distancia $D(G)$ por w_j . Llamamos mediana exterior al vértice \bar{v}_{ex} de G que cumple:

$$\beta_{ex}(\bar{v}_{ex}) = \min_{v_i \in V} [\beta_{ex}(v_i)]. \quad (1.3.3)$$

Por otro lado, llamamos mediana interior al vértice \bar{v}_{in} de G que cumple que:

$$\beta_{in}(\bar{v}_{in}) = \min_{v_i \in V} [\beta_{in}(v_i)]. \quad (1.3.4)$$

Nótese que si trabajásemos con un grafo no dirigido los números de transmisión interior y exterior coincidirían y se llamaría únicamente número de transmisión del vértice v_i y se denota por $\beta(v_i)$. De la misma manera, tanto la mediana exterior como la interior serían iguales por lo que llamaríamos mediana al vértice \bar{v} de G que cumple que:

$$\beta(\bar{v}) = \min_{v_i \in V} [\beta(v_i)].$$

Consideramos de nuevo el grafo $G = (V, A)$ dado en la Figura 1.1 y teniendo en cuenta las mismas ponderaciones que en el caso de centros ($l_{ij} = 1$ y $w_i = 1$) podemos determinar las medianas exterior e interior del grafo.

Si partimos de la matriz de distancia ponderada del grafo e incorporamos una columna que recoja la suma de esas distancias por filas y una nueva fila que incorpore la suma de las distancias por columnas se tiene:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$\beta_{ex}(v_i)$
v_1	0	2	3	2	1	1	9
v_2	1	0	2	1	2	2	8*
v_3	2	1	0	2	3	3	11
v_4	3	2	1	0	4	4	14
v_5	2	1	2	1	0	3	9
v_6	3	2	3	2	1	0	11
$\beta_{in}(v_i)$	11	8*	11	8*	11	13	

Tabla 1.18. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

En la tabla anterior podemos observar los números de transmisión exterior y transmisión interior adjuntos a las columnas y filas de la matriz. Así, vemos que hay una única mediana exterior, la cual es el vértice v_2 con número de transmisión exterior $\beta_{ex}(v_2) = 8$ y dos medianas interiores v_2 y v_4 ambas con número de transmisión interior $\beta_{in}(v_2) = \beta_{in}(v_4) = 8$. Estudiemos ahora cual sería la mediana del grafo de la Figura 1.1 si los pesos w_j tuvieran una cierta ponderación mostrada en la Tabla 1.19.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1

Tabla 1.19. Ponderaciones de los vértices

Partiendo de la Tabla 1.1 donde tenemos las distancias o longitudes entre los vértices v_i , ahora multiplicamos las distancias por los correspondientes pesos w_j y nos queda:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$\beta_{ex}(v_i)$
v_1	0	0,2	0,6	0,6	0,1	0,1	1,6
v_2	0,2	0	0,4	0,3	0,2	0,2	1,3*
v_3	0,4	0,1	0	0,6	0,3	0,3	1,7
v_4	0,6	0,2	0,2	0	0,4	0,4	1,8
v_5	0,4	0,1	0,4	0,3	0	0,3	1,5
v_6	0,6	0,2	0,6	0,6	0,1	0	2,1

Tabla 1.20. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

Podemos ver que en este caso hay una única mediana exterior, la cual es el vértice v_2 con $\beta_{ex}(v_2) = 1,3$. Ahora multiplicamos cada fila v_i de la matriz de distancias por su peso w_i , obteniendo la siguiente tabla:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0,4	0,6	0,4	0,2	0,2
v_2	0,1	0	0,2	0,1	0,2	0,2
v_3	0,4	0,2	0	0,4	0,6	0,6
v_4	0,9	0,6	0,3	0	1,2	1,2
v_5	0,2	0,1	0,2	0,1	0	0,3
v_6	0,3	0,2	0,3	0,2	0,1	0
$\beta_{in}(v_i)$	1,9	1,5	1,6	1,2*	2,3	2,5

Tabla 1.21. Distancias o longitudes entre los vértices v_i

De la tabla se deduce que la mediana interior es el vértice v_4 con un número de transmisión interior de $\beta_{in}(v_4) = 1, 2$.

Por tanto, mediante unos sencillos cálculos, se determina de forma rápida y eficiente las medianas de un grafo.

1.3.2. La mediana absoluta

Se considera un grafo no dirigido G formado por un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y un conjunto de aristas $\{A = (v_i, v_j)/i, j \in V\}$, las cuales tienen asociados unos pesos l_{ij} no negativos que representan la longitud, tiempo o coste asociado a ese arco. Por otro lado, el peso w_j asociado al vértice v_j representa la importancia de ese vértice. Sea $x \in G$ un punto situado en algún lugar del grafo no necesariamente en un vértice. Su número de transmisión es $\beta(x) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(x, v_j)]$. Entonces, $y \in G$ será la mediana absoluta de G si su número de transmisión

$$\beta(y) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(y, v_j)]$$

cumple que $\beta(y) = \min_{x \in G} \beta(x)$. Por ello, debe ser menor que el de la mediana de G , esto es, $\beta(y) < \beta(\bar{v})$. Pero vamos a ver a través del siguiente teorema que, al contrario que en el caso del centro de un grafo, no existe ningún punto y en el interior de alguna arista de G que cumpla lo anterior.

Teorema 1.1 *Una mediana absoluta de un grafo está siempre en un vértice del grafo, o lo que es lo mismo, existe al menos un vértice v en G para el cual $\beta(v) \leq \beta(y)$ siendo y cualquier punto arbitrario de G .*

Demostración. Sea y un punto del arco (v_a, v_b) , el cual está a una distancia ε de v_a . Como l_{ab} es la longitud del arco (v_a, v_b) entonces se tiene que la distancia desde el punto y a cualquier vértice del grafo verifica:

$$d(y, v_j) = \min[\varepsilon + d(v_a, v_j), l_{ab} - \varepsilon + d(v_b, v_j)] \quad (1.3.5)$$

Sea V_a el conjunto de todos los vértices v_j que cumplen que el primer término de la ecuación (1.3.5) sea la menor posible y V_b el conjunto de todos los vértices que hacen que el segundo término sea el menor posible. Entonces:

$$\beta(y) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(y, v_j)] = \sum_{v_j \in V_a} w_j [\varepsilon + d(v_a, v_j)] + \sum_{v_j \in V_b} w_j [l_{ab} - \varepsilon + d(v_b, v_j)] \quad (1.3.6)$$

Como $d(v_a, v_j)$ representa la longitud del camino mínimo que une v_a con v_j se tiene que:

$$d(v_a, v_j) \leq l_{ab} + d(v_b, v_j)$$

Por lo que, si sustituimos en el segundo término $l_{ab} + d(v_b, v_j)$ por $d(v_a, v_j)$ nos queda que:

$$\beta(y) \geq \sum_{v_j \in V_a} w_j [\varepsilon + d(v_a, v_j)] + \sum_{v_j \in V_b} w_j [d(v_a, v_j) - \varepsilon] \quad (1.3.7)$$

Teniendo en cuenta que $V_a \cup V_b = V$ y reordenando (1.3.7) obtenemos:

$$\beta(y) \geq \sum_{v_j \in V} w_j d(v_a, v_j) + \varepsilon \left[\sum_{v_j \in V_a} w_j - \sum_{v_j \in V_b} w_j \right] \quad (1.3.8)$$

Además, por una elección adecuada de qué vértice del arco (v_a, v_b) denotamos por v_a y cual por v_b siempre vamos a tener:

$$\sum_{v_j \in V_a} w_j \geq \sum_{v_j \in V_b} w_j$$

y señalando que el primer término de la derecha de la desigualdad (1.3.8) es $\beta(v_a)$ entonces:

$$\beta(y) \geq \beta(v_a).$$

Así, hemos probado que un vértice de G tiene un número de transmisión menor por lo que el punto y situado en el interior de cualquier arista no puede ser la mediana absoluta del grafo.

1.3.3. Múltiples medianas (p-medianas)

Como vimos en la sección 1.2.4 sobre los p-centros, se puede plantear el mismo problema pero con la mediana. Por lo que, sea $G = (V, A)$ un grafo donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto finito de vértices y $A = \{(v_i, v_j)/i, j \in V\}$ es un conjunto finito de aristas. De nuevo definimos un subconjunto $V_p = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de p vértices y la mínima distancia entre el subconjunto V_p y el vértice v_i como:

$$d(V_p, v_i) = \min_{v_j \in V_p} [d(v_j, v_i)].$$

Del mismo modo, definimos la mínima distancia entre el vértice v_i y el subconjunto V_p como:

$$d(v_i, V_p) = \min_{v_j \in V_p} [d(v_i, v_j)].$$

Tenemos que el número de transmisión exterior y el número de transmisión interior vienen dados respectivamente por:

$$\beta_{ex}(V_p) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(V_p, v_j)]$$

$$\beta_{in}(V_p) = \sum_{v_j \in V} [w_j d(v_j, V_p)]$$

Llamamos p-mediana exterior al conjunto de vértices $\bar{V}_{p,ex}$ de G que cumple que:

$$\beta_{ex}(\bar{V}_{p,ex}) = \min_{V_p \subset V} [\beta_{ex}(V_p)].$$

Por otro lado, llamamos p-mediana interior al conjunto de vértices $\bar{V}_{p,in}$ de G que cumple que:

$$\beta_{in}(\bar{V}_{p,in}) = \min_{V_p \subset V} [\beta_{in}(V_p)].$$

1.3.4. Las p-medianas absolutas

Una vez visto el caso para una única instalación. A continuación, vamos a estudiar el caso de la mediana absoluta para p instalaciones, donde p es un entero mayor que uno. Hakimi en 1965 obtuvo el principal resultado de la p-mediana. Probó que el conjunto de lugares posibles para localizar las instalaciones puede restringirse al conjunto de vértices, es decir, la localización óptima de una instalación no se va a encontrar en un punto intermedio de un arco (v_i, v_j) . Por lo que, el Teorema 1 puede ser generalizado para el caso de la p-mediana absoluta y así se obtiene:

Teorema 1.2 *Existe al menos un subconjunto $V_p \subset V$ que contiene p vértices, tal que $\beta(V_p) \leq \beta(Y_p)$ siendo Y_p un conjunto arbitrario de p puntos situados en los arcos o vértices del grafo G .*

Demostración. La prueba se fundamenta en que dado cualquier punto y de Y_p que esté en el interior de una arista (v_i, v_j) , siempre se tiene que uno de los vértices de esa arista ofrece una menor transmisión que el punto y . En consecuencia, sustituyendo esos puntos por vértices en Y_p se obtiene una menor transmisión.

Un método general para determinar la p-mediana de un grafo consiste en calcular el número de transmisión para cada subconjunto de p vértices que se pueda formar y luego elegir como solución aquel subconjunto con menor transmisión. Lógicamente, este procedimiento requiere un tiempo computacional elevado ya que hay que trabajar con los diferentes subconjuntos de p vértices que se pueden obtener a partir de los n vértices del grafo.

1.3.5. El problema de la p-mediana como problema de optimización entera

Sea $[y_{ij}]_{n \times n}$ una matriz de asignación para n vértices v_1, v_2, \dots, v_n en la que:

$$y_{ij} = 1, \text{ si el vértice } v_j \text{ está asociado al vértice } v_i.$$

$$y_{ij} = 0, \text{ en otro caso.}$$

Además, la variable y_{ii} tomará el valor 1 si v_i pertenece a la p-mediana y 0 en otro caso. La matriz de distancia $[d_{ij}]$ en el grafo se define como:

$$d_{ij} = w_j d(v_i, v_j), \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j$$

$$d_{ii} = w_i d(v_i, v_i) = 0, i = j, \forall i = 1, \dots, n$$

Entonces, el problema de la p-mediana se define de la siguiente manera:

$$\text{Min} : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} y_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1 \text{ para } j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ii} = p \quad (2)$$

$$y_{ij} \leq y_{ii}, \forall i, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (4)$$

La ecuación (1) nos garantiza que cualquier vértice v_j esté asociado únicamente a un vértice v_i . En (2) se asegura que exactamente p vértices pertenezcan a la p-mediana y (3) garantiza que las asignaciones se hagan solo a los vértices que están en el conjunto de la mediana, esto es, que $y_{ij} = 1$ solo si $y_{ii} = 1$. Por último, en (4) se restringe a que cada variable y_{ij} sea una variable binaria. Entonces, si $[\bar{y}_{ij}]$ es la solución óptima para el problema definido, se tiene que la p-mediana es:

$$\bar{V}_p = \{v_i / \bar{y}_{ii} = 1\}.$$

Problemas de localización de servicios no deseados

La acumulación de basuras, la generación de residuos nucleares, la contaminación, la deforestación, etc. son algunos de los problemas generados por el aumento poblacional y el crecimiento económico. Muchos son los desafíos a los que nos enfrentamos en la actualidad para reducir las externalidades negativas que producen las actividades comerciales e industriales. De ahí, el papel tan importante que han tenido los modelos de localización de servicios no deseados a lo largo de estos años debido a la preocupación por la conservación del medioambiente. Los servicios no deseados (vertederos, plantas químicas, reactores nucleares, etc.) son necesarios para la sociedad, pero generan cierto rechazo en la población ya que pueden tener efectos negativos al vivir en los alrededores de sus instalaciones. Por ello, el principal objetivo de estos problemas de localización es ubicar estos servicios lo más lejos posible de los domicilios de los habitantes de una localidad o región.

En este caso, ya que los servicios a localizar producen efectos negativos sobre la población se pasan a denominar centro no deseado (o anti-centro) y mediana no deseada (o anti-mediana).

El anti-centro se utiliza principalmente para localizar servicios que son potencialmente peligrosos (centrales nucleares, depósitos de residuos industriales, etc.) para así evitar posibles catástrofes. Por ello, el objetivo de estos problemas es localizar un punto en el grafo que esté lo más alejado posible del cliente más cercano.

La anti-mediana se emplea para ubicar aquellos servicios que aún siendo servicios no deseados (industrias, almacenes de chatarrerías o desguaces, etc.) no representan un gran peligro a los usuarios. Por lo tanto, la finalidad de estos problemas consiste en localizar un servicio en el grafo haciendo máxima la distancia media a los usuarios.

2.1. La localización de centro no deseado

Sea un grafo $G = (V, A)$, donde $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ representa el conjunto de vértices y $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ el conjunto de arcos, con $n = |V|$ y $m = |A|$. A cada vértice $v_i \in V$ le corresponde un valor w_i que nos indica la importancia de cada nodo. Del mismo modo, a cada arco (v_i, v_j) le corresponde una marca o valor l_{ij} la cual representa la longitud, tiempo o coste asociado a ese arco (v_i, v_j) .

A continuación, vamos a introducir el centro no deseado. Para ello, dado cualquier punto $x \in G$ definimos $f(x) = \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i)$. Así, llamamos centro no deseado al punto $\bar{x} \in G$ que cumple que:

$$f(\bar{x}) = \max_{x \in G} f(x) = \max_{x \in G} \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i)$$

Podemos observar, que el problema de centro no deseado es el contrario que el problema de localizar un centro deseado. Así, podemos definir como anti-centro al centro no deseado \bar{x} óptimo.

Tal como se hizo en el capítulo anterior, si distinguimos entre que el punto x esté en los vértices del grafo (anti-centro) o que pueda estar en cualquier punto de la red (anti-centro absoluto), se tiene que la función $f(x) = \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i)$ es siempre cero cuando x es igual a cualquier vértice v_j . Por ello, en este caso, el problema es trivial ya que todos los vértices del grafo serían centros no deseados. En consecuencia, nos centraremos en el problema de determinar el centro absoluto no deseado en el grafo. Nótese que dado un vértice x en el interior de cualquier arista (v_α, v_β) se tiene que $f(x) = \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i) = \min \{w_\alpha d(x, v_\alpha), w_\beta d(x, v_\beta)\}$. Por tanto, la distancia mínima ponderada se obtiene de la longitud ponderada asociada a los vértices extremos de la arista (v_α, v_β) . Luego, el punto y de la arista (x_α, x_β) que cumple $w_\alpha d(y, v_\alpha) = w_\beta d(y, v_\beta)$ será un punto candidato para ser el centro absoluto no deseado. En consecuencia, si los pesos de los vértices son iguales, el $\max_{x \in (x_\alpha, x_\beta)} f(x)$ se alcanza en el punto medio de la arista (x_α, x_β) . Teniendo en cuenta lo anterior, si los pesos son iguales, para obtener el centro absoluto no deseado solo debemos analizar los puntos medios de las aristas. Y de ellos el anti-centro absoluto es el punto medio de la arista de mayor longitud.

Veamos un ejemplo. Consideramos un grafo $G = (V, A)$ no dirigido, donde el conjunto de vértices $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ y el conjunto de arcos $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ son los representados en la Figura 2.1. Además, todos los pesos w_i tienen el mismo valor, por lo que todos los vértices tienen igual importancia en este ejemplo. Supongamos que las aristas son una red de carreteras y los vértices diferentes pueblos. El objetivo del problema consiste en localizar una planta de residuos teniendo en cuenta que es un servicio no deseado, por lo que se debe situar lo más lejos posible del pueblo más cercano.

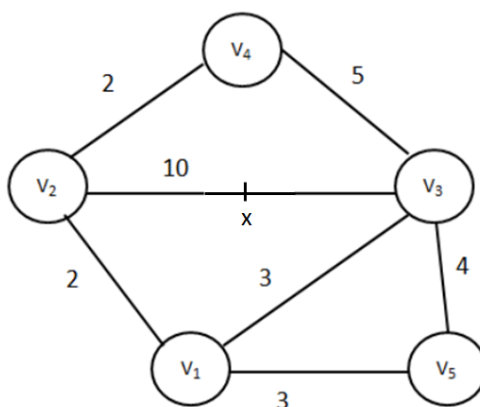


Figura 2.1. Grafo no dirigido con cinco vértices y siete aristas , considerando pesos en las aristas e incorporando el punto x situado en medio de la arista (v_2, v_3)

La matriz de distancia del grafo se muestra en la Tabla 2.1 siguiente:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	2	3	4	3
v_2	2	0	5	2	5
v_3	3	5	0	5	4
v_4	4	2	5	0	7
v_5	3	5	4	7	0

Tabla 2.1. Distancias o longitudes entre los vértices v_i del grafos de la Figura 2.1

En este caso, como todos los pesos w_i son iguales entonces, el centro absoluto no deseado se encuentra en el punto central de una arista. Dicho punto se colocará en la arista cuyo valor l_{ij} asociado sea el más grande, es decir, aquella arista con mayor longitud. Por tanto, introducimos un nuevo punto en la arista (v_2, v_3) cuya distancia entre ambos es de 5 (ver Figura 2.1) y calculamos la distancia al resto de los vértices $d(x, v_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, lo cual se recoge en la Tabla 2.2.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x	7	5	5	7	9

Tabla 2.2. Distancias o longitudes entre x y los vértices v_i del grafo de la Figura ??

Por tanto, el punto x es un centro absoluto no deseado debido a que es el máximo de las $f(x)$, es decir, es el punto más alejado del pueblo más cercano.

Por otro lado, cuando los pesos w_i de todos los vértices v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) no son iguales entonces el problema se puede reformular para cada arista $e = (v_i, v_j) \in A$ de la siguiente manera: llamamos centro absoluto no deseado al punto $x^* \in G$ que cumple que

$$f(x^*) = \max_{e \in A} f(x_e) = \max_{e \in A} \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i).$$

Este problema, se lleva a cabo a través del siguiente algoritmo:

Paso 1- Para cada arista (v_i, v_j) determinar el punto x_{ij} en el interior de la arista tal que:

$$w_i d(x_{ij}, v_i) = w_j d(x_{ij}, v_j)$$

Calcular $f(x_{ij}) = w_i d(x_{ij}, v_i)$.

Paso 2- Elegir como centro absoluto no deseado x del grafo, al punto o puntos x_{ij} con mayor $f(x_{ij})$.

A partir de ahora cada vez que se hable de centro no deseado nos referimos al centro absoluto no deseado, ya que la situación de que el centro esté en los vértices es trivial.

A continuación, veamos el problema del centro no deseado en un grafo dirigido. Sea un grafo $G = (V, A)$, donde $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ representa el conjunto de vértices y $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ el conjunto de arcos, con $n = |V|$ y $m = |A|$ y $x \in G$ un punto cualquiera del grafo. Definimos:

$$f(x)_{ex} = \min_{v_i \in V} w_i d(x, v_i)$$

$$f(x)_{in} = \min_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)$$

Así, llamamos centro exterior no deseado al punto x_{ex}^* que cumple que:

$$f(x_{ex}^*) = \max_{x \in G} f(x_{ex})$$

De la misma forma, llamamos centro interior no deseado al punto x_{in}^* que cumple que :

$$f(x_{in}^*) = \max_{x \in G} f(x_{in}).$$

Vamos aplicar estos nuevos conceptos al siguiente ejemplo. Definimos un grafo $G = (V, A)$ dirigido, donde el conjunto de vértices $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ y el conjunto de aristas $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ son los representados en la siguiente figura. Además, todos los pesos w_i tienen el mismo valor, por lo que todos los vértices tienen igual importancia en este ejemplo. Supongamos que las aristas son una red de carreteras y los vértices diferentes pueblos. El objetivo del problema consiste en localizar una planta de residuos teniendo en cuenta que es

un servicio no deseado, por lo que se debe situar lo más lejos posible del pueblo más cercano.

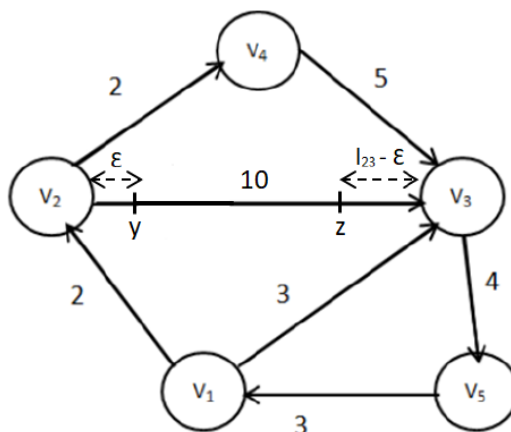


Figura 2.2. Grafo dirigido obtenido a partir del grafo de la Figura 2.1 e incorporando los puntos y, z en la arista (v_2, v_3)

La matriz de distancias entre vértices se muestra en la siguiente Tabla 2.3:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	2	3	4	7
v_2	14	0	7	2	11
v_3	7	9	0	11	4
v_4	12	14	5	0	9
v_5	3	5	6	7	0

Tabla 2.3. Distancias o longitudes entre los vértices v_i del grafo de la Figura 2.2

En este caso, dada una arista (v_i, v_j) el centro exterior no deseado se va a encontrar lo más próximo posible al vértice inicial de la arista, es decir, a una distancia ε del vértice v_i . La arista seleccionada será aquella de mayor longitud, es decir, aquella que tenga el valor l_{ij} más grande. Por tanto, introducimos un nuevo punto y que está a una distancia ε del vértice inicial de la arista (v_2, v_3) . El valor de $f(y) = \min_{v_i \in V} w_i d(y, v_i) = d(y, v_3)$. Tomando una distancia de $\varepsilon = 0,00001$, podemos calcular las distancias del punto y al resto de vértices:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
y	16,99999	18,99999	9,99999	20,99999	13,99999

Tabla 2.4. Distancias o longitudes entre el punto y y los vértices v_i del grafo de la Figura 2.2

Como se puede observar, el punto y sobre el arco (v_2, v_3) que esté lo más próximo al vértice v_2 (sin ser dicho vértice) debería ser el centro exterior no deseado del grafo. Obviamente, al ser el arco (v_2, v_3) un conjunto continuo y conexo de puntos, no habrá formalmente un centro exterior no deseado. Por ello, nos quedaríamos con una buena aproximación (determinada por el umbral ε fijado).

De igual forma tampoco habrá un centro interior no deseado. Puede comprobarse fácilmente que una aproximación al centro interior no deseado se encuentra en el punto z situado en la arista (v_2, v_3) a una distancia de $l_{23} - \varepsilon = 9,99999$ desde el vértice v_2 .

2.2. La localización de la mediana no deseada

Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, donde $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ representa el conjunto de vértices y $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ el conjunto de arcos, con $n = |V|$ y $m = |A|$. A cada nodo $v_i \in V$ le corresponde un valor positivo w_i que nos indica la importancia de dicho vértice.

Para cualquier vértice $v_i \in V$ definimos

$$f(v_i) = \sum_{v_j \in V} w_j d(v_i, v_j)$$

como la suma de las distancias ponderadas obtenidas desde el vértice v_i , donde $d(v_i, v_j)$ es la menor longitud desde el vértice v_i hasta el vértice v_j . Llamamos anti-mediana al vértice \bar{v}_0 de G que cumple que:

$$f(\bar{v}_0) = \max_{v_i \in V} f(v_i)$$

Ahora vamos a aplicar este nuevo concepto en un ejemplo. Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, donde el conjunto de vértices $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ y el conjunto de arcos $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ son los representados en la Figura 2.3. Las longitudes de los arcos son todas unitarias, esto es, $l_{ij} = 1$ para cualquier arista (v_i, v_j) . Además, todos los pesos w_i tienen el mismo valor, por lo que todos los vértices tienen igual importancia en este ejemplo. Supongamos que las aristas son una red de carreteras y los vértices o nodos los diferentes pueblos. Queremos localizar un vertedero de residuos de la construcción, que como habíamos visto anteriormente se trata de un servicio no deseado, pero no representa ningún peligro para los usuarios. Por lo que, lo más adecuado para resolver este problema es calcular la anti-mediana, es decir, hacer máxima la distancia media a los usuarios.

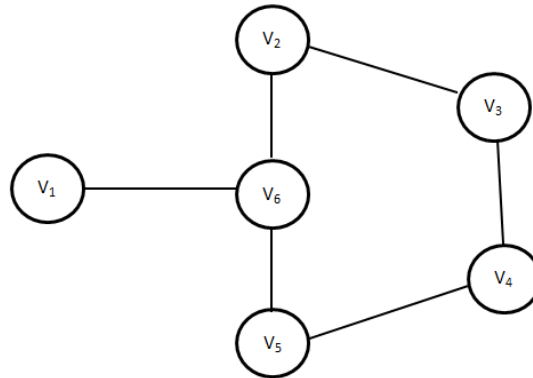


Figura 2.3. Grafo no dirigido con seis vértices y seis aristas

La matriz de distancia entre vértices del grafo está recogida en la Tabla 2.5:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$f(v_i)$
v_1	0	2	3	3	2	1	11*
v_2	2	0	1	2	2	1	8
v_3	3	1	0	1	2	2	9
v_4	3	2	1	0	1	2	9
v_5	2	2	2	1	0	1	8
v_6	1	1	2	2	1	0	7

Tabla 2.5. Distancias o longitudes entre los vértices v_i del grafo de la Figura 2.3

Al contrario que en la mediana, en este ejemplo lo que buscamos es que la suma de las distancias sea máxima. De este modo, la anti-mediana se encuentra en el vértice v_1 , el cual es el lugar donde se localizaría el vertedero de residuos de la construcción.

2.3. La mediana absoluta no deseada

Ahora vamos a definir el concepto de mediana absoluta no deseada en un grafo no dirigido. En el capítulo anterior habíamos visto que no existía ningún punto $y \in G$ que cumpliera que el número de transmisión

$$\beta(y) = \sum_{v_j \in V} w_j d(y, v_j)$$

fuera menor que la transmisión del vértice mediana, esto es, $\beta(y) < \beta(\bar{v})$. Es decir, la mediana absoluta estaba siempre en un vértice del grafo. Pero, al contrario que esto, ahora la mediana no deseada sí es posible localizarla en algún punto del grafo que no sea un vértice.

Para cualquier punto $x \in G$ definimos

$$f(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(x, v_i).$$

Llamamos mediana absoluta no deseada al punto $x^* \in G$ que cumple:

$$f(x^*) = \max_{x \in G} f(x) = \max_{x \in G} \sum_{v_i \in V} w_i d(x, v_i).$$

Basándonos en el Teorema 1.1 de la sección 1.3.2, podemos observar que dado un vértice v_a del grafo, podemos encontrar un punto y en el interior de alguna de las aristas incidentes con v_a tal que el número de transmisión $\beta(y)$ es mayor o igual que el número de transmisión del vértice $\beta(v_a)$. Un procedimiento para determinar la mediana absoluta no deseada consiste en determinar para cada arista (v_a, v_b) las distancias $d(y, v_i)$, con $y \in (v_a, v_b)$ para cada vértice v_i (los cuales son funciones lineales a trozos) y luego calcular la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. A

continuación, se determina el máximo de la función $\beta(y)$, con $y \in (v_a, v_b)$. La mediana absoluta no deseada será el punto y^* que nos de una mayor transmisión de entre todos los puntos máximos de las aristas, esto es, el punto y^* tal que $\beta(y^*) = \max_{y \in G} \beta(y)$.

Veamos un ejemplo donde encontraremos la mediana absoluta no deseada en el centro de un arco. Sea $G = (V, A)$, donde el conjunto de vértices $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ y el conjunto de arcos $A = ((v_i, v_j)/v_i, v_j \in V)$ son los representados en la siguiente Figura 2.4. Las longitudes de todas las aristas son unitarias ($l_{ij} = 1$). Además, todos los pesos w_i tienen el mismo valor, por lo que todos los vértices tienen igual importancia en este ejemplo.

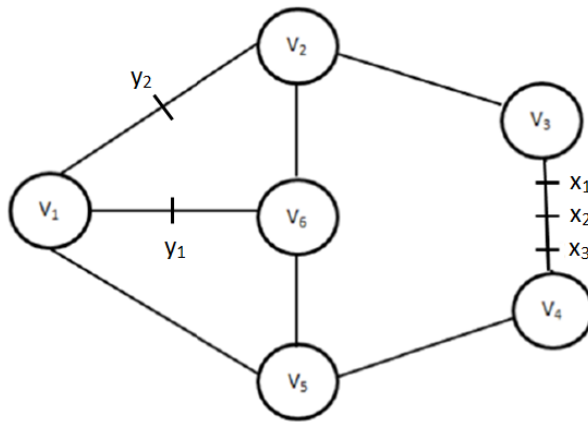


Figura 2.4. Grafo no dirigido con seis vértices y ocho aristas, incorporando los puntos x_1, x_2, x_3 en la arista (v_3, v_4) y los puntos y_1 e y_2 en las aristas (v_1, v_6) y (v_1, v_2) respectivamente.

La matriz de distancia de grafo es:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$f(v_i)$
v_1	0	1	2	2	1	1	7
v_2	1	0	1	2	2	1	7
v_3	2	1	0	1	2	2	8
v_4	2	2	1	0	1	2	8
v_5	1	2	2	1	0	1	7
v_6	1	1	2	2	1	0	7

Tabla 2.6. Distancias o longitudes entre los vértices v_i del grafo mostrado en la Figura 2.4

Ahora si incluimos un nuevo punto x en cualquiera de los arcos del grafo podemos ver que la suma de las distancias $d(x, v_i)$ es mayor que la suma de las distancias $d(v_i, v_j)$. Sean $x_1, x_2, x_3 \in G$ puntos situados en el arco (v_3, v_4) a distancias 0,25, 0,5 y 0,75 del vértice v_3 (ver Figura 2.4). En la Tabla 2.7 se recogen las distancias desde esos puntos a los vértices del grafo.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$f(x_i)$
x_1	2,25	1,25	0,25	0,75	1,75	2,25	8,5
x_2	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5	9
x_3	2,25	1,75	0,75	0,25	1,25	2,25	8,5

Tabla 2.7. Distancias o longitudes entre los puntos x_1, x_2, x_3 y los vértices v_i del grafo de la Figura 2.4

Nótese que si elegimos el punto medio de cualquiera de las aristas del grafo de la Figura 2.4 se deduce que ese punto es un candidato para ser una mediana absoluta no deseada.

Ahora consideramos el punto medio y_1 de la arista (v_1, v_6) y el punto medio y_2 de la arista (v_1, v_2) . Las distancias desde los puntos y_1 e y_2 a los vértices del grafo se muestran en la Tabla 2.8.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$f(y_i)$
y_1	0,5	1,5	2,5	2,5	1,5	0,5	9
y_2	0,5	0,5	1,5	2,5	1,5	1,5	8

Tabla 2.8. Distancias o longitudes entre los puntos y_1 e y_2 y los vértices v_i del grafo de la Figura 2.4

El punto medio y_2 de la arista (v_1, v_2) lo desechamos ya que $f(y_2) = 8 < f(y_1) = 9$. De igual forma también se descartan los puntos medios de las aristas (v_1, v_5) , (v_5, v_6) , (v_2, v_3) y (v_4, v_5) porque su transmisión es de 8 unidades.

Por tanto, en este caso, solo los puntos medios de las aristas (v_1, v_6) y (v_3, v_4) serán medianas absolutas no deseadas. Como hemos podido observar la mediana absoluta no deseada puede estar sobre un arco y no en un vértice. En este caso, son el punto x_2 de la arista (v_3, v_4) y el punto y_1 de la arista (v_1, v_6) los que consiguen que la suma de las distancias sea máxima.

Nótese que no siempre los puntos medios de los arcos son los puntos candidatos para ser mediana absoluta no deseada.

Consideramos el mismo grafo de la Figura 1.5 del capítulo anterior y describamos el procedimiento para determinar los mejores puntos candidatos de cada arista. Cada arista (v_i, v_j) del grafo tiene una longitud asociada l_{ij} y cada vértice v_i tiene un peso $w_i = 1$. Dado un punto $y \in G$ llamamos $d_i(y) = w_i d(y, v_i)$ a la distancia ponderada desde el punto y al vértice v_i . El procedimiento consiste en determinar para cada arista $(v_a, v_b) = a_k$ las funciones $d_i(y)$, con $y \in (v_a, v_b)$, para todos los vértices del grafo. A continuación, se calcula la función que representa el número de transmisión $\beta(y_k) = \max_{y \in (v_a, v_b)} \beta(y)$. Finalmente, la mediana absoluta no deseada y^* será aquel punto de las y_k previamente determinados tal que tenga un mayor número de transmisión $\beta(y_k)$, esto es, $\beta(y^*) = \max_{y_k} \beta(y_k)$. Comenzaremos con la arista $a_1 = (v_1, v_2)$. Consideremos un punto y en dicha arista que está a una distancia ε desde el vértice v_2 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_2, v_i)$ y $T'_i = l_{12} + d(v_1, v_i) - \varepsilon$. Nótese que $d_i(y) = \min(T_i, T'_i)w_i$. Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

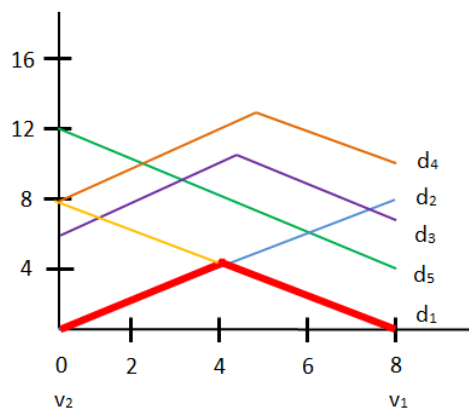


Figura 2.5. Arista $a_1 = (v_1, v_2)$ con longitud $l_{12} = 8$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_1, v_2)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} 8 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 6 + \varepsilon + 8 + 12 - \varepsilon = 34 + \varepsilon, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq 4,5, \\ 8 - \varepsilon + \varepsilon + 15 - \varepsilon + \varepsilon + 8 + 12 - \varepsilon = 43 - \varepsilon, & \text{si } 4,5 \leq \varepsilon \leq 5, \\ 8 - \varepsilon + \varepsilon + 15 - \varepsilon + 18 - \varepsilon + 12 - \varepsilon = 53 - 3\varepsilon, & \text{si } 5 \leq \varepsilon \leq 8, \end{cases}$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

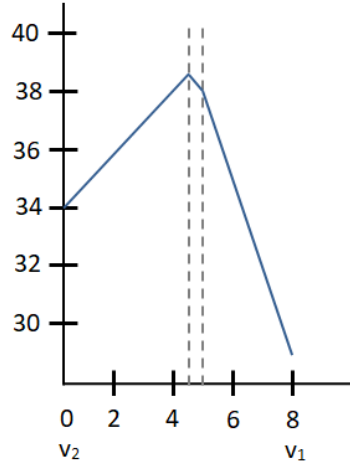


Figura 2.6. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_1, v_2)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_1, v_2) se obtiene en el punto y_1 situado a una distancia de 4,5 unidades desde el vértice v_2 . El número de transmisión asociado al punto y_1 es $\beta(y_1) = 38,5$.

Ahora elegimos la arista $a_2 = (v_2, v_3)$. El punto y se sitúa a una distancia de ε unidades del vértice v_3 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_3, v_i)$ y $T'_i = l_{23} + d(v_2, v_i) - \varepsilon$. A continuación, de la Tabla 1.10 calculamos las funciones $d_i(y) = w_i \min(T_i, T'_i)$, para cada vértice v_i . Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

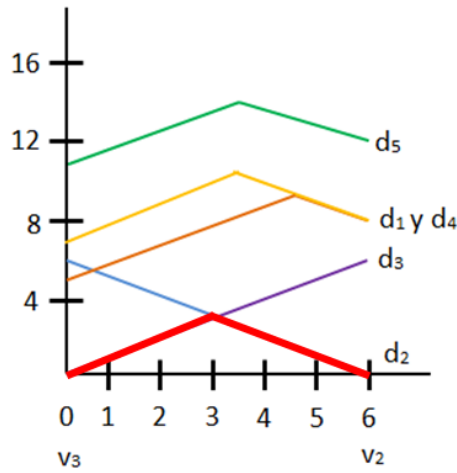


Figura 2.7. Arista $a_2 = (v_2, v_3)$ con longitud $l_{23} = 6$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_2, v_3)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} \varepsilon + 7 + 6 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 5 + \varepsilon + 11 = 29 + 3\varepsilon, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq 3,5 \\ 14 - \varepsilon + 6 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 5 + 18 - \varepsilon = 43 - \varepsilon, & \text{si } 3,5 \leq \varepsilon \leq 4,5 \\ 14 - \varepsilon + 6 - \varepsilon + \varepsilon + 14 - \varepsilon + 18 - \varepsilon = 52 - 3\varepsilon, & \text{si } 4,5 \leq \varepsilon \leq 6 \end{cases}$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

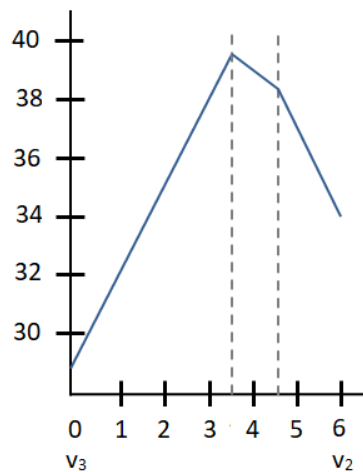


Figura 2.8. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_2, v_3)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_2, v_3) se obtiene en el punto y_2 situado a una distancia de 3,5 unidades desde el vértice v_2 . El número

de transmisión asociado al punto y_2 es $\beta(y_2) = 39,5$.

Ahora elegimos la arista $a_3 = (v_3, v_4)$. El punto y se sitúa a una distancia de ε unidades del vértice v_4 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_4, v_i)$ y $T'_i = l_{34} + d(v_3, v_i) - \varepsilon$. A continuación, de la Tabla 1.10 calculamos las funciones $d_i(y) = w_i \min(T_i, T'_i)$, para cada vértice v_i . Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

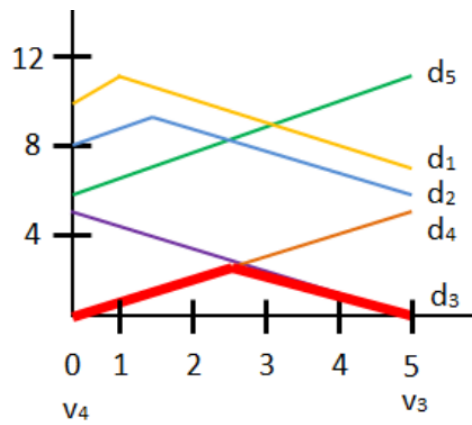


Figura 2.9. Arista $a_3 = (v_3, v_4)$ con longitud $l_{34} = 5$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_3, v_4)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} \varepsilon + 10 + \varepsilon + 8 + 5 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 6 = 29 + 3\varepsilon, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq 1 \\ 12 - \varepsilon + \varepsilon + 8 + 5 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 6 = 31 + \varepsilon, & \text{si } 1 \leq \varepsilon \leq 1,5 \\ 12 - \varepsilon + 11 - \varepsilon + 5 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 6 = 34 - \varepsilon, & \text{si } 1,5 \leq \varepsilon \leq 5 \end{cases}$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

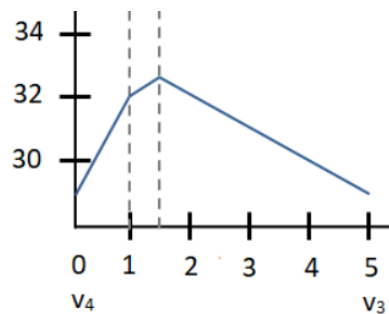


Figura 2.10. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_3, v_4)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_3, v_4) se obtiene en el punto y_3 situado a una distancia de 1,5 unidades desde el vértice v_4 . El número de transmisión asociado al punto y_3 es $\beta(y_3) = 32,5$.

Ahora elegimos la arista $a_4 = (v_4, v_5)$. El punto y se sitúa a una distancia de ε unidades del vértice v_5 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_5, v_i)$ y $T'_i = l_{45} + d(v_4, v_i) - \varepsilon$. A continuación, de la Tabla 1.10 calculamos las funciones $d_i(y) = w_i \min(T_i, T'_i)$, para cada vértice v_i . Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

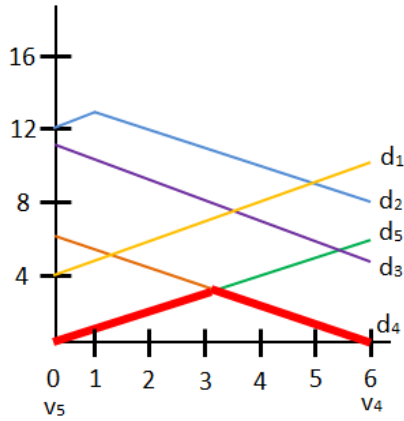


Figura 2.11. Arista $a_4 = (v_4, v_5)$ con longitud $l_{45} = 6$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_4, v_5)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} \varepsilon + 4 + \varepsilon + 12 + 11 - \varepsilon + 6 - \varepsilon + \varepsilon = 33 + \varepsilon, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq 1 \\ \varepsilon + 4 + 14 - \varepsilon + 11 - \varepsilon + 6 - \varepsilon + \varepsilon = 35 - \varepsilon, & \text{si } 1 \leq \varepsilon \leq 6 \end{cases}$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

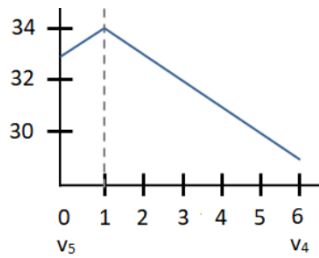


Figura 2.12. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_4, v_5)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_4, v_5) se obtiene en el punto y_4 situado a una distancia de 1 unidad desde el vértice v_5 . El número de transmisión asociado al punto y_4 es $\beta(y_4) = 34$.

Ahora elegimos la arista $a_5 = (v_1, v_5)$. El punto y se sitúa a una distancia de ε unidades del vértice v_5 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_5, v_i)$ y $T'_i = l_{15} + d(v_1, v_i) - \varepsilon$. A continuación, de la Tabla 1.10 calculamos las funciones $d_i(y) = w_i \min(T_i, T'_i)$, para cada vértice v_i . Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

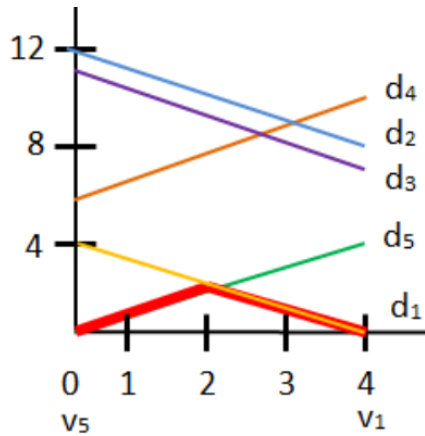


Figura 2.13. Arista $a_5 = (v_1, v_5)$ con longitud $l_{15} = 4$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_1, v_5)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \{ 4 - \varepsilon + 12 - \varepsilon + 11 - \varepsilon + \varepsilon + 6 + \varepsilon = 33 - \varepsilon, \text{ si } 0 \leq \varepsilon \leq 4$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

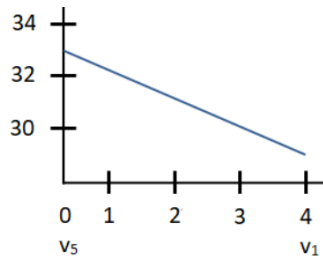


Figura 2.14. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_1, v_5)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_1, v_5) se obtiene en el punto y_5 situado justo en el vértice v_5 . El número de transmisión asociado al punto y_5 es $\beta(y_5) = 33$.

Ahora elegimos la arista $a_6 = (v_1, v_3)$. El punto y se sitúa a una distancia de ε unidades del vértice v_3 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_3, v_i)$ y $T'_i = l_{13} + d(v_1, v_i) - \varepsilon$. A continuación, de la Tabla 1.10 calculamos las funciones $d_i(y) = w_i \min(T_i, T'_i)$, para cada vértice v_i . Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

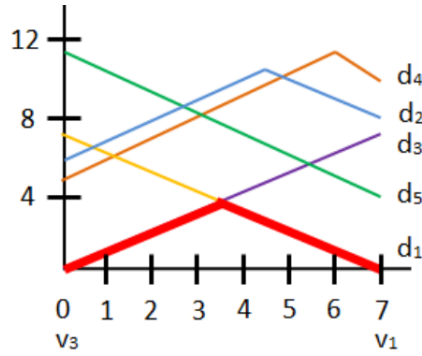


Figura 2.15. Arista $a_6 = (v_1, v_3)$ con longitud $l_{13} = 7$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_1, v_3)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} 7 - \varepsilon + \varepsilon + 6 + \varepsilon + \varepsilon + 5 + 11 - \varepsilon = 29 + \varepsilon, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq 4,5 \\ 7 - \varepsilon + 15 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 5 + 11 - \varepsilon = 38 - \varepsilon, & \text{si } 4,5 \leq \varepsilon \leq 6 \\ 7 - \varepsilon + 15 - \varepsilon + \varepsilon + 17 - \varepsilon + 11 - \varepsilon = 50 - 3\varepsilon, & \text{si } 6 \leq \varepsilon \leq 7 \end{cases}$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

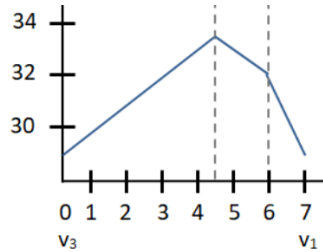


Figura 2.16. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_1, v_3)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_1, v_3) se obtiene en el punto y_6 situado a una distancia de 4,5 unidades desde el vértice v_3 . El número de transmisión asociado al punto y_6 es $\beta(y_6) = 33,5$.

Ahora elegimos la arista $a_7 = (v_2, v_4)$. El punto y se sitúa a una distancia de ε unidades del vértice v_4 . La figura siguiente muestra las funciones distancias ponderadas $d_i = w_i d(y, v_i)$ y la función $\beta(y) = \sum_{v_i \in V} w_i d(y, v_i)$. Consideremos para cada vértice v_i , las rectas $T_i = \varepsilon + d(v_4, v_i)$ y $T'_i = l_{24} + d(v_2, v_i) - \varepsilon$. A continuación, de la Tabla 1.10 calculamos las funciones $d_i(y) = w_i \min(T_i, T'_i)$, para cada vértice v_i . Esas funciones $d_i(y)$ se representan en la figura siguiente:

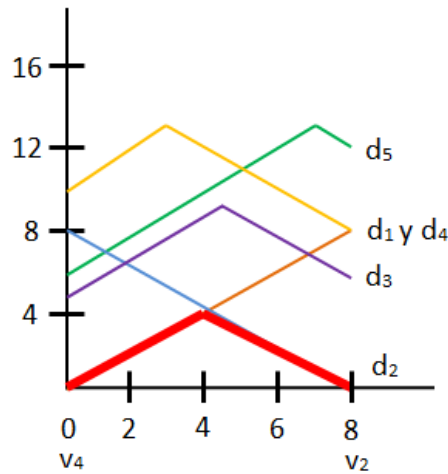


Figura 2.17. Arista $a_7 = (v_2, v_4)$ con longitud $l_{24} = 8$

La función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_2, v_4)$, viene dada por:

$$\beta(y) = \begin{cases} \varepsilon + 10 + 8 - \varepsilon + \varepsilon + 5 + \varepsilon + \varepsilon + 6 = 29 + 3\varepsilon, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq 3 \\ 16 - \varepsilon + 8 - \varepsilon + \varepsilon + 5 + \varepsilon + \varepsilon + 6 = 35 + \varepsilon, & \text{si } 3 \leq \varepsilon \leq 4,5 \\ 16 - \varepsilon + 8 - \varepsilon + 14 - \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 6 = 44 - \varepsilon, & \text{si } 4,5 \leq \varepsilon \leq 7 \\ 16 - \varepsilon + 8 - \varepsilon + 14 - \varepsilon + \varepsilon + 20 - \varepsilon = 58 - 3\varepsilon, & \text{si } 7 \leq \varepsilon \leq 8 \end{cases}$$

La función $\beta(y)$ se representa en la siguiente figura:

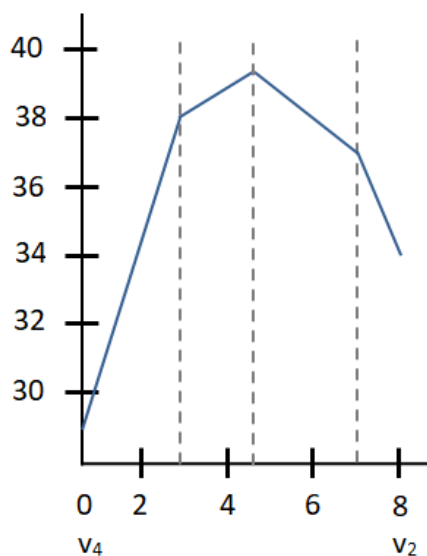


Figura 2.18. Función $\beta(y)$, cuando $y \in (v_2, v_4)$

El punto máximo de la función $\beta(y)$ en la arista (v_2, v_4) se obtiene en el punto y_7 situado a una distancia de 4,5 unidades desde el vértice v_4 . El número de transmisión asociado al punto y_7 es $\beta(y_7) = 39,5$.

Al final la mediana absoluta no deseada se encuentra en los puntos y_2 e y_7 con mayor número de transmisión $\beta(y_2) = \beta(y_7) = 39,5$.

Conclusiones

En este trabajo de fin de grado se estudian y analizan diferentes problemas de localización de servicios en redes. Más concretamente se describen los problemas de centro y mediana en un grafo, los cuales buscan la mejor localización posible de forma que se minimice la distancia más lejana y la distancia media al resto de los vértices del grafo respectivamente. Para cada uno de estos problemas se presentan métodos o procedimientos que permiten obtener las mejores localizaciones de acuerdo con los criterios considerados. También se plantean los problemas p-centro y p-mediana y se presentan las formulaciones matemáticas que permiten abordar sus soluciones.

Posteriormente, se discuten algunos problemas de localización de servicios no deseados en redes, los así llamados problemas del anti-centro y la anti-mediana, ya que en este caso se busca aquellas localizaciones que maximicen la mínima distancia al resto de vértices del grafo o la distancia media considerada.

Como posibles trabajos futuros, sería interesante estudiar los centros y medianas en localización continua, esto es, cuando se debe ubicar un servicio en un plano o en un espacio n-dimensional, extendiendo también el análisis a los centros y medianas no deseados.

Bibliografía

- [1] CHRISTOFIDES, N. (1975). *Graph Theory. An Algorithmic Approach* (Illustrated ed.) San Diego, Estados Unidos: Academic Press Inc.
- [2] COLEBROOK, M., Y SICILIA, J. (2013). Hazardous Facility Location Models on Networks. En R. Batta y C. Kwon (Eds.), *Handbook of OR/MS Models in Hazardous Materials Transportation* (Vol. 193, pp. 155-186). Nueva York, Estados Unidos: Springer.
- [3] DREZNER, Z. (1995) *Facility Location: A Survey of Applications and Methods* (1995.a ed.) Nueva York, Estados Unidos: Springer-Verlag.
- [4] HAKIMI, S.L. (1964) Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12(3), 450-459.
- [5] HATICE, C. (2013). *Exact Solution Methodologies for the p-center problem under single and multiple allocation strategies*. Dissertation thesis. Bilkent University, Turquía.
- [6] NICKEL, S., Y PUERTO, J. (2005) *Location Theory: A Unified Approach*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- [7] WEBER, A. (1909) *Über den Standort der Industrien*. Tübingen, Alemania: Verlag J.C.B. Mohr.
- [8] WESOLOWSKY, G.O. (1993) The Weber problem: History and perspectives. *Location Science*, 1, 5-23.

Facility location models on networks

Abstract

In this report, different service location models (desirable and undesirable) are studied in networks or weighted graphs. It begins by exposing the notation and basic concepts, that allow us to formulate the problems of locating centers and medians in networks. In the first chapter, different methods are proposed to determine the optimal location of the points to locate the services (centers) under the criterion of minimizing the maximum distance to travel from the service to the vertices of the graph, and under the criterion of minimizing the sum of the weighted distances from the service (medians) to all the vertices of the graph. In the second chapter, the problems of locating undesirable services (anti-centers and anti-medians) are formulated in graphs and procedures are presented to address the solution of these problems.

1. Introduction

Location problems consist of finding the best places where certain services should be located to attend demand of users. The mathematical formulation of these problems is to maximize or minimize the weighted distance between the location of the facilities to be located and the customers. These problems can be divided into three groups: continuous location, discrete location, and network location. In each group, we can find different methods and procedures that allow us to find the best location for the services that we want to locate. In this work we will focus on network location problems, that is, the demand points are on a graph and the services must be located on the nodes or edges of the graph. We can differentiate two types of network location problems: desirable services (hospitals, fire stations, police stations, etc.) or undesirable services (landfills, chemical plants, nuclear reactors, etc.).

The objective of the desirable service location problems is to satisfy as many people as possible by looking for the best location for those services. However, the main objective of locating undesirable services is to locate these services as far as possible from the homes of the inhabitants of a locality or region.

2. First chapter. Location problems of desired services

In this first chapter, two of the most studied problems within the location of desired services are exposed: the center and the median. The problem of the center is to locate a vertex in the graph that minimizes the distance to the farthest user. Expanding this definition we find the absolute center of a graph, this allows us to include as possible location points any point on an edge or arc. To find the best point of the graph that can be located on a vertex or an edge we use the Hakimi method. This method is an algorithm that finds the absolute center of a graph. There is also the problem of locating a set of p points at the vertices of the graph, so that the maximum distance from the set of p points to all the vertices

of the graph is minimized. This new concept is called p -center. On the other hand, the median problem tries to locate the service by minimizing the average distance to users. Although the center can be located at any point of the graph, on the contrary it is proved that the absolute median of a graph is always going to be in a vertex of G . In addition, the problem of the p -median is presented with its corresponding mathematical formulation that allows addressing their solutions.

3. Second chapter. Location problems of undesired services

In the second chapter, since the services to be located produce negative effects on the population, the problems are called undesirable center (or anti-center) and undesirable median (or anti-median). The anti-center is used to locate services that are potentially dangerous in order to avoid possible catastrophes. Therefore, the objective of these problems is to locate a point on the graph that is as far away from the closest client as possible. In this case, the situation of locating an anti-center in the vertices of the graph is a trivial problem because all the vertices of the graph would be undesirable centers. So, every time we talk about an anti-center, we refer to an undesirable absolute center.

The anti-median is used to locate those services that, although being unwanted services, do not represent a great danger to users. Therefore, the purpose of these problems is to locate a service in the graph, maximizing the average distance to users. In the previous chapter, we had seen that the absolute median is always at a vertex of the graph. But now, on the contrary, the undesirable absolute median can be located at some point in the graph that is not a vertex. Finally, a procedure is proposed to determine the best candidate points of each edge to find the undesirable absolute median.

References

- [1] CHRISTOFIDES, N. (1975). *Graph Theory. An Algorithmic Approach* (Illustrated ed.) San Diego, Estados Unidos: Academic Press Inc.
- [2] COLEBROOK, M., Y SICILIA, J. (2013). Hazardous Facility Location Models on Networks. En R. Batta y C. Kwon (Eds.), *Handbook of OR/MS Models in Hazardous Materials Transportation* (Vol. 193, pp. 155-186). Nueva York, Estados Unidos: Springer.
- [3] DREZNER, Z. (1995) *Facility Location: A Survey of Applications and Methods* (1995.a ed.) Nueva York, Estados Unidos: Springer-Verlag.
- [4] HAKIMI, S.L. (1964) Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12(3), 450-459.
- [5] NICKEL, S., Y PUERTO, J. (2005) *Location Theory: A Unified Approach*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.